IMFUFA tekst

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Opgavesamling til *Elektrodynamik og Relativitetsteori*

Eksamensopgaver stillet i perioden
juni 1976 til februar 2017

Redigeret af Bo Jakobsen
marts 2017

nr. 495b - 2017 (2. udgave)

Roskilde University
Department of Science and Environment, IMFUFA
P.O. Box 260, DK - 4000 Roskilde
Tel: 4674 2263

Opgavesamling til Elektrodynamik og Relativitetsteori

1. udgave, august 2013, Redigeret af Lyt Baden & Bo Jakobsen
2. udgave, marts 2017, Redigeret af Bo Jakobsen

IMFUFA tekst nr. 495b/ 2017 (2. udgave) – 130 sider – ISSN: 0106-6242

Denne tekst indeholder eksamensopgaver i elektrodynamik og relativitetsteori stillet i perioden juni 1976 til februar 2017.

Tekst nr. 495 består af tre dele:

Nr. 495a: Opgavesamling til Termodynamik og Statistisk mekanik

Nr. 495b: Opgavesamling til Elektrodynamik og Relativitetsteori

Nr. 495c: Opgavesamling til Kvantemekanik

Tilsammen indeholder de opgaverne fra tekst nr. 429/2004, 406/2001 og 25/1980 og erstatter dermed disse.

I en længere periode bestod eksamenssættene til de såkaldte *dybdekurser* af opgaver i flere teoribygninger. I denne tekstserie (495 a–c) er disse opgaver fordelt i de relevante tekster. Ønsker man at studere de originale, samlede eksamenssæt, henvises til tekst nr. 429/2004.

En del af eksamenssættene findes på engelsk, dels fra eksamener, som blev givet på engelsk, og dels fra senere oversættelser.

Indhold

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul den 28. juni 1976.

Hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1

I et kildefrit område af et homogent tabsfrit medium med permitivitet ε og permeabilitet μ udbreder en plan bølge sig i x-aksens retning.

Det er givet, at

$$E_x = 0 \qquad H_x = 0$$

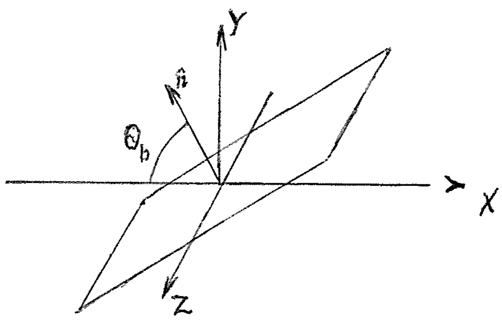
$$E_y = -i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, H_y \qquad H_y = H_0\, e^{i(kx-\omega t)}$$

H_0 er en reel konstant og $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

1. Find E_z og H_z

2. Find bølgens polarisationstilstand.

Den plane bølge rammer nu et andet tabsfrit homogent medium med permitivitet ε_1 og permeabilitet μ. Grænsefladen mellem de to medier er plan, og normalen til grænsefladen danner Brewstervinklen Θ_b med x-aksens negative retning (se fig.)



3. Find det reflekterede felt (d.v.s. E- og H-feltets komposanter og bølgevektoren $\underline{k}''$)

4. Hvad er det reflekterede felts polarisationstilstand ?

OPGAVE 2

En partikel med hvilemassen M bevæger sig frit med hastigheden V i laboratoriesystemets x-akses positive regning. Den kinetiske energi er T.

1. Find hastigheden $V = c\beta$ relativistisk.

Partiklen henfalder nu, d.v.s. den splittes i to dele med hvilemasser m_1 og m_2. De to dele bevæger sig fra hinanden med hastighederne v'_1 og v'_2 i tyngdepunktsystemet. (Den kinetiske energi hertil stammer fra massedefekten, altså fra at $M>m_1+m_2$).

2. Find hastighederne $v'_1 = c\beta'_1$ og
$v'_2 = c\beta'_2$

3. Vis, at m_1's og m_2's hastigheder v_1 og v_2 i laboratoriesystemet kan skrives

$$v_1 = \frac{c}{1+\beta\beta'_1 \cos\phi_1}\sqrt{\beta'^2_1 + \beta^2 + 2\beta\beta'_1\cos\phi_1 - \beta^2\beta'^2_1\sin^2\phi_1}$$

$$v_2 = \frac{c}{1+\beta\beta'_2 \cos\phi_2}\sqrt{\beta'^2_2 + \beta^2 + 2\beta\beta'_2\cos\phi_2 - \beta^2\beta'^2_2\sin^2\phi_2}$$

hvor ϕ_1 og ϕ_2 er vinklerne mellem M's bevægelsesretning og henholdsvis m_1's og m_2's bevægelsesretninger i tyngdepunktsystemet (se fig. 1)

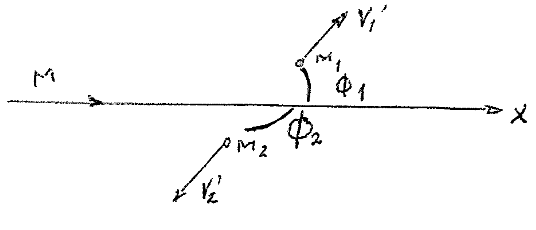


Fig. 1 Tyngdepunktsystem.

Vinklen mellem M's bevægelsesretning og m_1's og m_2's bevægelsesretninger i laboratoriesystemet kaldes henholdsvis Θ_1 og Θ_2 (se fig. 2)

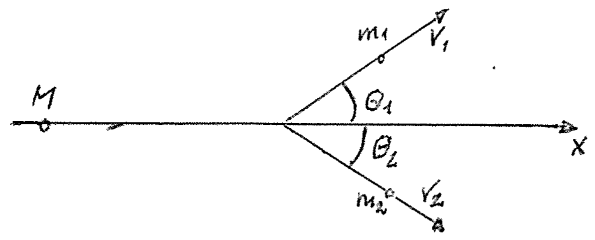


Fig 2. Laboratoriesystem

Find Θ_1 og Θ_2 udtrykt ved ϕ_1 og ϕ_2, β'_1 β'_2 og β.

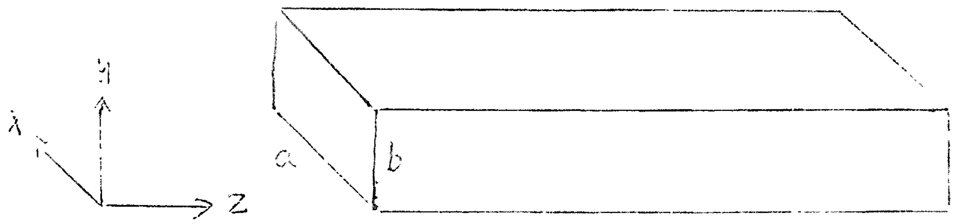
21. december 1976/jh

Side 1 af 2 sider.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul,
fredag, den 7. januar 1977

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.



En rektangulær bølgeleder har transversale dimensioner a og b og er orienteret således, at bølger kan udbredes i z-aksens retning. Felterne svarende til det laveste TE mode kan da skrives som (realdelen af):

$$E_x = 0$$

$$E_y = E_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i(\omega t - k_g z)}$$

$$E_z = 0$$

$$B_x = -\frac{k_g}{\omega} E_y$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = -i E_o \frac{\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i(\omega t - k_g z)}$$

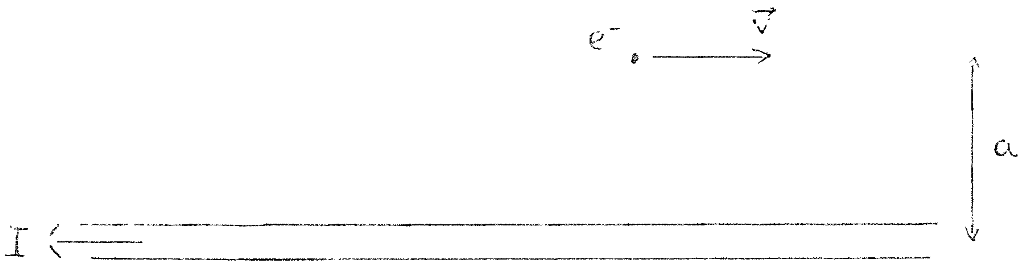
1) Vis, at denne løsning opfylder de nødvendige grænsebetingelser for en bølgeleder med ideelt ledende vægge.

2) Find Poyntings vektor $\vec{N}$.

3) Beregn middelværdien af energistrømmen gennem en plan vinkelret på z-aksen.

4) Find energitætheden U.

Opgave 2.



En meget lang retlinet leder, der her betragtes som uendelig lang, fører en elektrisk strøm I.

1) Find magnetfeltet, $\vec{B}$, i afstanden a fra lederen.

En elektron med ladning (-e) bevæger sig med hastighed v parallelt med lederen i afstanden a, men i modsat retning som strømmen.

2) Hvad er kraften på elektronen?

3) Find de af strømmen inducerede $\vec{E}$ og $\vec{B}$ felter i afstand a fra lederen i elektronens hvilesystem.

4) Brug 3) til at finde kraften på elektronen i dens hvilesystem og sammenlign med den direkte transformerede kraft.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens modul 2, dybdemodul, torsdag, den 4.06.81.

HJÆLPEMIDLER TILLADT

Opgave 1.

En tynd kugleskål med radius R er jævnt belagt med den elektriske (flade-)ladningstæthed σ. Kuglen befinder sig i vacuum.

1. Find det elektriske potential $\varphi = \varphi(r)$ for $o \leq r < \infty$, idet o-punktet for potentialet vælges i det uendeligt fjerne.

2. Find et udtryk for feltets energitæthed $u = u(r)$ indenfor og udenfor kugleskallen. Vis, at udtrykket giver den korrekte enhed (dimensionskontrol).

Nu sættes kugleskallen i rotation om en diameter med den konstante vinkelhastighed ω.

3. Find den elektriske strømstyrke, I, der herved ialt produceres.

4. Find størrelsen af det magnetiske felt (B) i kuglens centrum, B_o.

5. Vis, at der mellem B_o fra spm. 4 og φ_o fra spm. 1 (φ_o er potentialet i centrum) gælder følgende sammenhæng:

$$B_o = \frac{2}{3}\frac{\omega\varphi_o}{c^2}$$

hvor c er lyshastigheden i vacuum.

Skriftlig eksamen i fysikstudiets dybdemodul
Mandag 7. juni 1982
Hjælpemidler er tilladt
8888888888888888888888888888888888888888888888888

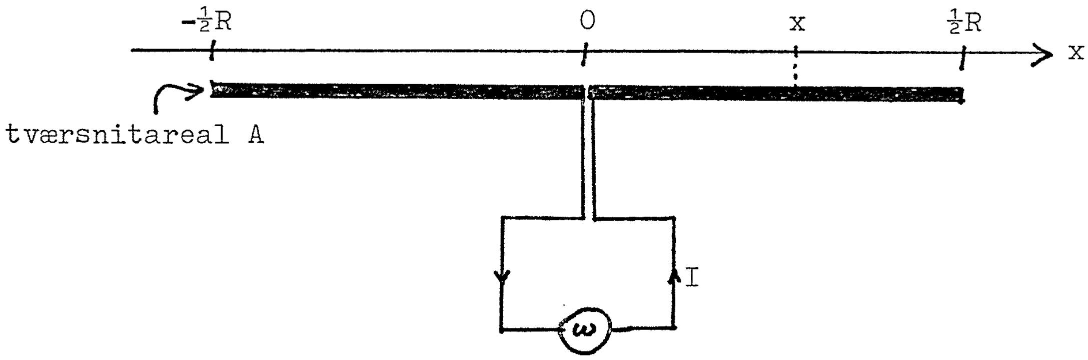


Fig. 1

Opgaven betragter en antenne bestående af to metalstænger med tværsnitareal A og længde $\frac{1}{2}R$, hvorigennem der sendes en vekselstrøm $I = I_o \cos\omega t$. Den samlede ohmske modstand i antennen er R_o.

Spørgsmål 1 : Find den effekt $P_{Ohm,\ av.}$ som i middel tabes p.g.af Ohmsk modstand i antennen.

Strømmen kan beskrives ved bevægelsen af fri elektroner i antennen. Antag at elektronernes hastighed v kun afhænger af x-koordinaten og tiden t (der ses altså bort fra "skin-effect", at elektronerne fortrinsvist vil bevæge sig på overfladen).

Spørgsmål 2 : Idet elektronens ladning betegnes -e og der antages at være n fri elektroner pr. volumenenhed i antennen, skal det vises at strømmen I(x,t) et givent sted i antennen er proportional med elektronernes hastighed v(x,t), $I(x,t) = k\, v(x,t)$, og k skal bestemmes.

Spørgsmål 3 : Find den tidslige variation af stedkoordinaten af en elektron med middelpositionen x_m og angiv amplituden i elektronens svingninger.

Forholdene i antennen kan fortolkes som en svingende ophobning af ladninger Q og -Q i de to antennehalvdele, og til en given tid kan antennen betragtes som en elektrisk dipol med ladningerne $Q(t) = Q_0 \sin\omega t$ og $-Q(t)$ i afstanden R.

Elektronernes accelererede bevægelse giver anledning til udsendelse af elektromagnetisk stråling, som kan karakteriseres ved angivelse af de elektriske og magnetiske feltstyrker i rummet omkring antennen, der antages at have egenskaber som vacuum.

Feltstyrken $\vec{E}$ er for en statisk dipol beregnet fx i Lorrain og Corson, Electromagnetism, exempel 2.5.1. I det tidsafhængige tilfælde tilkommer imidlertid nye led, som viser sig at dominere feltet langt fra dipolen. Her kan den elektriske feltstyrke med tilnærmelse skrives

$$E(\vec{r},t) = \frac{R\,\omega\, I_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right), \qquad (1)$$

2

hvor c er udbredelseshastigheden af elektromagnetiske bølger ($= (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$) og θ polarvinklen (se Fig. 2). $\vec{E}$ er rettet vinkelret på $\vec{r}$ og ligger i den af $\vec{r}$ og antennen udspændte plan.

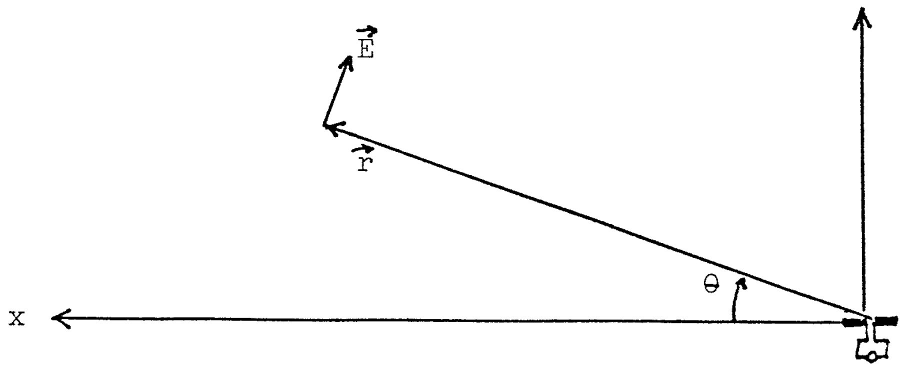


Fig. 2

Spørgsmål 4 : Angiv hvilken faktor i E som beskriver bølgebevægelsen og udtryk bølgelængden λ ved de opgivne størrelser.

Spørgsmål 5 : Giv en kort, kvalitativ forklaring på, at feltstyrken til tiden t afhænger af en funktion taget til en anden tid.

Spørgsmål 6 : Forklar kort, hvorfor det må antages at $R \ll \lambda$ for at komme til den simple tidsafhængighed af $(t - r/c)$ i (1).

Den magnetiske feltstyrke står med de gjorte antagelser vinkelret på både $\vec{r}$ og $\vec{E}$ og har størrelsen

$$H = \frac{R\omega I_0}{4\pi c r} \sin\theta \sin\omega(t - \frac{r}{c}).$$

Spørgsmål 7 :Opskriv Poyntings vektor i punktet $\vec{r}$.

Spørgsmål 8 : Find den effekt, integreret over alle retninger, som antennen udstråler.

Spørgsmål 9 : Find den effekt som i middel passerer ud gennem en kugleskal omkring antennen, og vis at den kan skrives på formen $P_{\text{stråling,av.}} = \frac{1}{2} R_s I_0^2$. Angiv strålingsmodstanden R_s.

Spørgsmål 10 : Udregn forholdet R_s/R_o mellem strålings- og Ohmsk modstand numerisk, idet det antages at $R = 25$m, $A = 2.5 \times 10^{-3}\,m^2$, $I_0 = 50$ A, $\omega = 3.7 \times 10^6\ s^{-1}$, og at den Ohmske modstand i antennen er givet ved metallets ledningsevne 6×10^7 A/V/m.

$c = 3 \times 10^8$ m/s
$\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$ F/m

Opgave 2.

Man kan fremstille antiprotoner (en antiproton er protonens antipartikel) ved følgende reaktion, som er den energetisk set "billigste" reaktion til fremstilling af antiprotoner:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Her og i det følgende er p symbol for en proton og $\bar{p}$ symbol for en antiproton.
Hvilemassen for en proton såvel som for en antiproton er m_p, hvor $m_p \times c^2 = 940$ MeV. Elementarladningen er $1{,}6 \times 10^{-19}$ C.
Lysets hastighed er $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Spm. 1. Find ovennævnte reaktions tærskelværdi, målt i MeV, idet den ene proton (kaldet targetprotonen) er i hvile i laboratoriesystemet før processen.

Spm. 2. Find γ ($\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$) og impulsen (i enheder af MeV/c), målt i laboratoriesystemet, dels for den indkommende proton før reaktionen og dels for de protoner og antiprotoner, som produceres ved ovennævnte reaktion ved den i spm. 1. fundne tærskelværdi.

Spm. 3. Vi tænker os nu, at ovennævnte reaktion til fremstilling af antiprotoner finder sted i et område med et homogent magnetfelt med feltstyrken 1,8 Tesla.
De indkommende protoners energi svarer til tærskelværdien for antiprotonproduktion, og deres bevægelsesretning er vinkelret på magnetfeltets retning.

Gør rede for udseendet og beliggenheden af banekurverne for de indkommende protoner og for de ved ovennævnte reaktion frembragte protoner og antiprotoner, så længe de bevæger sig i området med det homogene magnetfelt. Beregn herunder krumningsradierne for de nævnte partiklers banekurver. Hvorledes kan man skelne antiprotonerne fra protonerne udfra udseendet af banekurverne?
Det forudsættes ved besvarelsen af de stillede spørgsmål, at der kan ses bort fra opbremsning i stof i target mv.

(opgaven fortsættes)

Spm. 4. Den i spm. 1. fundne tærskelværdi er den tærskelværdi man vil observere, hvis man skyder en stråle af protoner ind i et target af flydende brint, således som det f.eks. sker ved anvendelse af brintboblekamre til undersøgelse af elementarpartikelprocesser ved p-p-stød.
Man kunne imidlertid også vælge at benytte et target af atomkerner med et noget større massetal. I sådanne atomkerner bevæger nukleonerne (protoner og neutroner) sig (i alle retninger) med kinetiske energier på op til af størrelsesordenen 20 MeV.

Beregn approksimativt den ændring af tærskelværdien for processen:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

som kan forventes i forhold til den i spm. 1. fundne tærskelværdi, såfremt der anvendes et target af tungere atomkerner.

Beregningerne udføres ved at erstatte den i spm. 1. anvendte hvilende targetproton med en proton, som bevæger sig med en kinetisk energi på 20 MeV i modsat retning af den indkommende protonstråle.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul, den 14.6.1983.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

En rektangulær pladekondensator med siderne a = 100 cm, b = 20 cm og pladeafstand d = 1 cm er anbragt i atmosfærisk luft, hvor man antager, at dielektricitetskonstanten er ε_0. Den oplades, så at spændingsforskellen mellem pladerne er 1000 volt.

1) Find D og E samt ladningen Q på en af pladerne.

Imellem pladerne indskydes nu yderligere den ene gren af et U-rør. Grenen står lodret, parallelt med siden a, og den opfylder netop plademellemrummet. I U-røret er der en væske med dielektricitetskonstanten $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ og vægtfylde $\rho = 1.05$ g/cm^3. Før U-røret føres ind, står væsken 50 cm under overkanten.

2) Idet Q holdes konstant, spørges der efter udtryk for D og E i væsken og i luften ovenover, samt for systemets elektrostatiske energi.

3) Find højdeforskellen mellem væskeoverfladerne i U-rørets grene.

$g = 9.81$ m/s^2

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m

Opgave 2

En elementarpartikel med hvilemasse M er ustabil og henfalder til tre partikler med hvilemasserne m_1, m_2 og m_3.

1) Opskriv et udtryk for den maksimale energi, som kan føres bort af en af henfaldspartiklerne, hvis partiklen med masse M er i hvile før henfaldet.

Opgavesættet fortsættes

Lad den henfaldende elementarpartikel være en eta-meson (η^0), som (bl.a.) kan henfalde efter følgende proces:

$$\eta^0 \longrightarrow \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$$

Partiklernes hvilemasser er: $M_{\eta^0} = 550\ \mathrm{MeV}/c^2$

$M_{\pi^0} = 135$ -

$M_{\pi^\pm} = 140$ -

2) Hvis vi gør den antagelse, at η^0-mesonen er i hvile (i laboratoriesystemet), når den henfalder efter ovenstående proces, hvor stor er da den maksimale energi, hvormed en af de ladede π-mesoner vil kunne observeres?

Eta-mesonen (η^0) kan f.eks. produceres ved følgende reaktion:

$$\pi^- + p \longrightarrow n + \eta^0 \qquad (n = \text{neutron},\ p = \text{proton})$$

Processen kommer i stand ved at sende en stråle af højenergetiske π^--mesoner mod et target af flydende brint.

3) Hvor stor er tærskelværdien for denne reaktion? Det oplyses yderligere, at $M_p \simeq M_n \simeq 940\ \mathrm{MeV}/c^2$.

4) Hvor stor er η^0-mesonens kinetiske energi, målt i laboratoriesystemet, lige ved reaktionens tærskelværdi?

Vi antager nu, at en η^0-meson med den i 4) beregnede kinetiske energi slet ikke bremses (mister energi), inden henfald efter processen $\eta^0 \longrightarrow \pi^0 + \pi^+ + \pi^-$ finder sted.

5) Hvor stor er den maksimale energi, målt i laboratoriesystemet, hvormed en af de ladede π-mesoner kan udsendes?

Opgavesæt slut.

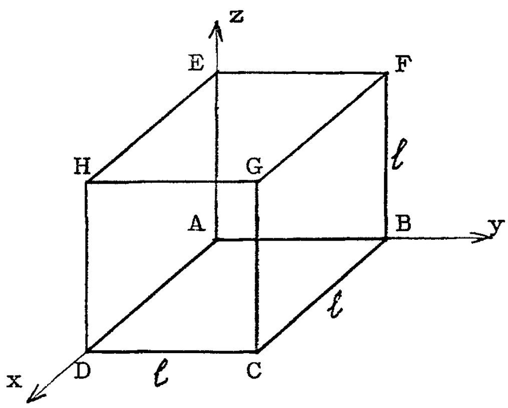
2

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul, 19.1.1984.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Tolv ens ledningsstykker med længden ℓ og modstanden R sammenloddes, så at de er anbragt som kanterne på en terning. Mellem to hjørner placeret diametralt modsat på en sideflade, påtrykkes potentialforskellen V. Lad os med nedenstående figurs betegnelser tænke os, at punktet H har potentialet +V i forhold til punktet A.



1) Beregn strømmene i de tolv ledninger. Gør først rede for systemets symmetriegenskaber og udnyt disse i beregningerne.

2) Beregn den samlede modstand mellem punkterne A og H.

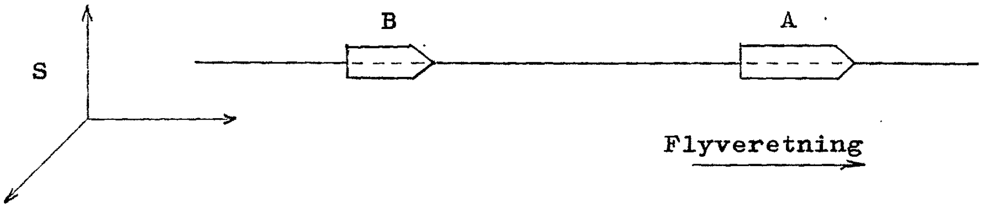
3) Idet der refereres til figurens betegnelser og anvendes det her viste koordinatsystem med begyndelsespunkt i A og akserne langs terningens kanter, ønskes beregnet komponenterne af den magnetiske feltstyrke, som strømmen i ledningsstykket AE giver anledning til i skæringspunktet mellem terningens diagonaler, dvs. i punktet $(x,y,z) = (\ell/2, \ell/2, \ell/2)$.

4) Vis, at det samlede magnetfelt hidrørende fra strømmene i de tolv ledningsstykker er nul i punktet $(\ell/2, \ell/2, \ell/2)$. Det er her underforstået, at der bortses fra magnetfelter fra strømme i tilledningerne til A og H.

Opgavesættet fortsættes næste sid

Opgave 2.

To rumskibe, A og B, bevæger sig i rummet langs samme rette linie og i samme retning, men med hver sin konstante hastighed, v_A og v_B, i forhold til et inertialsystem S. Lad os antage, at B følger efter A. Rumskibene antages at kunne bevæge sig med meget store hastigheder.



På A råder man over et radaranlæg, som kan udsende radarsignaler, nemlig dels enkelte signaler og dels serier af signaler, hvor der er et veldefineret, konstant tidsinterval mellem to på hinanden følgende signaler i serien. Radarsignalerne er glimt af umådelig kort varighed. Endvidere har man på A en modtager, som kan opfange reflekterede signaler, samt et apparat som kan måle tidsintervaller, dels mellem udsendelsen af et enkeltsignal og modtagelsen af dets reflekterede signal, og dels mellem signalerne i serie reflekterede signaler.

1) Der afsendes fra A et enkelt radarsignal mod B, som reflekteres fra B's forende og atter modtages i A. Bestem afstanden fra A til B, målt i A's hvilesystem, når det opgives, at der målt på apparatet i A er forløbet t sekunder fra afsendelsen af radarsignalet til modtagelsen af det reflekterede signal. Da måleprocessen altså varer t sekunder, ønskes det præciseret, til hvilket tidspunkt indenfor de t sekunder afstanden har den fundne værdi.

2) Der afsendes nu en serie radarsignaler med tidsintervallet Δt sekunder mellem to på hinanden følgende signaler, fra A mod B. Lidt senere opfanges en serie fra B's forende reflekterede signaler, hvor tidsintervallet mellem to på hinanden følgende signaler har en ændret værdi, $\Delta' t$. Udregn hastigheden af B i forhold til A, målt i det inertialsystem, hvori A er i hvile.

Opgavesættet fortsættes næste side

3) Det er så heldigt, at man ved anvendelse af et særligt kraftigt radarsignal er i stand til at opfange et reflekteret signal fra såvel B's forende som fra et udspring på B's bagende. Man kan bestemme tidsforskellen δt sekunder mellem modtagelsestidspunkterne for disse to ekkosignaler.
Vis, at man herved kan bestemme hvilelængden af B, når man i forvejen kender B's hastighed i forhold til A.

4) På A bliver man overbevist om, at B er et fjendtligt rumskib og beslutter at affyre en kraftig laserkanon mod B. Man sender en strålingsmængde med den samlede energi E bagud mod B. Hvor stor bliver hastigheden af A efter affyringen, målt i forhold til det inertialsystem, hvori A var i hvile før affyringen?

(Opgavesættet slut)

SOMMEREKSAMEN 1984.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul 19.6.84.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

K^+-mesoner kan frembringes ved reaktionen

$$\gamma + p \rightarrow K^+ + \Lambda$$

d.v.s. ved at en foton rammer en proton.

Det antages nu, at protonen er i hvile i laboratoriesystemet før processen. Antag endvidere, at den producerede K^+-meson er i hvile i laboratoriesystemet efter processen.

1) Find energien af fotonen, målt i laboratoriesystemet.

K^+-mesonen(som også i det følgende antages at være i hvile) henfalder oftest til en myon og en neutrino:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

2) Find myonens (μ^+) totalenergi.

3) Find myonens impuls.

Antag nu, at henfaldsprocessen af K^+-mesonen finder sted i et område af rummet med et homogent magnetfelt med feltstyrken 1T. Vi iagttager en myon (μ^+), som ved henfaldet udsendes med en hastighed, som danner vinklen 89° med magnetfeltets retning.

4) Beregn størrelsen af radius i projektionen af banekurven på en plan vinkelret på magnetfeltet.

5) Beregn, hvor stor afstand i feltets retning myonen (μ^+) vil tilbagelægge, hvis den i sit hvilesystem lever $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ sekunder (middellevetiden).

(opgavesættet fortsættes næste side)

(opgave 1 fortsat)

Partiklernes hvilemasser er:

M_p = 938 MeV/c^2

M_{K^+} = 494 MeV/c^2

M_Λ = 1115 MeV/c^2

M_{μ^+} = 106 MeV/c^2

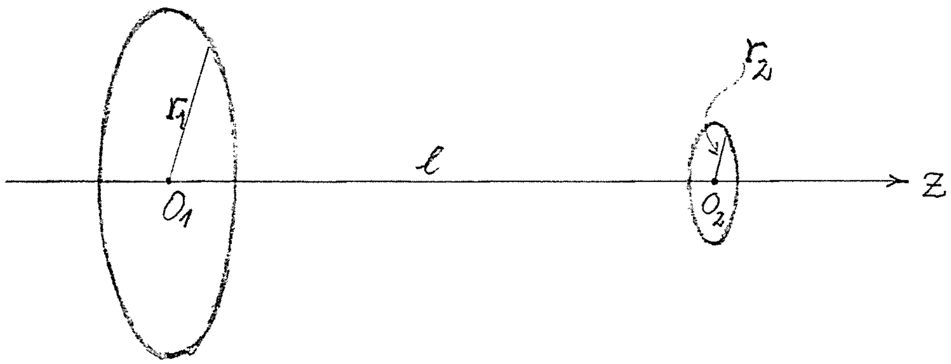
M_ν anses her for negligibel.

c = 3×10^8 m/s

(opgavesættet fortsættes næste side)

Opgave 2.

To cirkulære kredse, lavet af tynde ledninger, med radier r_1 og r_2, hvor $r_1 >> r_2$, er anbragt koaksialt og med indbyrdes afstand ℓ, hvor $\ell >> r_1$ (se figuren). I den store kreds (radius r_1) opretholdes en konstant strøm I_1.



1. Find approksimativt $\vec{B}$ hidrørende fra strømmen i den store kreds i det punkt O_2 (beliggende på den fælles akse) som er centrum for den lille kreds.

   Vi antager nu, at der løber en strøm I_2 i den lille kreds, med samme omløbsretning omkring den fælles akse som I_1.

2. Vis, at den lille kreds må påvirkes af magnetfeltet fra den store kreds med en resulterende kraft og bestem dens retning.

3. Vis, at kraften på den lille kreds approksimativt kan bestemmes ved $F = m_2 \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$, hvor m_2 er den lille kreds' magnetiske dipolmoment, og B er den i spm. 1 beregnede feltstyrke.
   Beregn derefter F.

(opgavesættet fortsættes næste side)

(opgave 2 fortsat)

I stedet for den lille kreds anbringes nu en anden kreds med samme radius r_2 og ohmsk modstand nul. Den har selvinduktionskoefficienten L. Fra meget stor afstand føres den med jævn fart V hen mod den store kreds, idet de to kredses akser hele tiden falder sammen.

4. Beregn strømmen $I_2(z)$ i den lille kreds som funktion af afstanden z til den store kreds, idet vi antager, at strømmen i begyndelsespositionen $z = z_o$ er $I_2(z_o) = o$, og idet vi stedse regner med at $z >> r_1$.

(opgavesættet slut)

Opgave 2.

Udgangspunktet for denne opgave er følgende "paradoks". Et rumskib med hvilelængden L_o accelereres fra hvile i forhold til inertialsystemet S, således at dets forende (F) i tidsrummet t_F tilbagelægger strækningen x_F og opnår en sådan hastighed, at rumskibets længde målt i S er kontraheret til $\frac{1}{2}L_o$. Rumskibets bagende (B) vil da i tidsrummet t_F have tilbagelagt strækningen $x_F + \frac{1}{2}L_o$, d.v.s. at bagendens middelhastighed i tidsrummet t_F har været $\bar{v}_B = (x_F + \frac{1}{2}L_o)/t_F$. Hvis L_o er tilstrækkelig stor, vil $\bar{v}_B$ kunne blive større end lyshastigheden c. Men ifølge den specielle relativitetsteori kan materielle genstande kun bevæge sig med hastigheder mindre end c!

——— 0 ———

START PÅ OPGAVEN:

Lad os antage, at rumskibet bringes i bevægelse ved at give forenden (F) og bagenden (B) en række parvise puf, som giver de to ender en hastighedsforøgelse $d\beta$, hvor $\beta = \frac{v}{c}$, idet v er rumskibets hastighed langs x-aksen i S. Hvis rumskibets hvilelængde skal være bevaret (d.v.s. at rumskibet ikke deformeres), må puffene i et par være samtidige såvel som lige store målt i rumskibets øjeblikkelige hvilesystem S', d.v.s. det inertialsystem, som i forhold til S bevæger sig med en hastighed v lig med rumskibets hastighed i forhold til S på det pågældende tidspunkt.

1) Hvor stor er tidsforskellen Δt, målt i S, mellem to puf i henholdsvis F og B, som er samtidige i forhold til S', hvor S' er ovennævnte øjeblikkelige hvilesystem svarende til hastigheden β. I hvilken ende af rumskibet kommer puffet først, set fra S?

2) Vis, at udtrykket for den såkaldte Lorenz-forkortning kan udledes ved hjælp af resultatet fra 1).

(opgaven fortsættes næste side)

Efterhånden som rumskibets hastighed øges, vil puffene i den ene ende indtræffe stadigt tidligere, målt i S, end de parvis tilsvarende puf i den anden ende. Udled et udtryk for denne vækst i forspring som funktion af β.

Som et grænsetilfælde af det i 4) beskrevne tidsforløb af puf, hvor puffene i den ene ende følges stadigt hurtigere efter hinanden, tænker vi os nu, at alle puffene i denne ende indtræffer samtidigt, målt i S, svarende til at denne endes acceleration går mod uendelig.
Vis, at der i denne grænse gælder følgende relation:
$(L_0/c^2)\gamma^3 \cdot a = 1$

hvor L_0 = rumskibets hvilelængde

a = accelerationen af den anden ende (d.v.s. den ende som ikke i grænsen får en uendelig stor acceleration) målt i S

$\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

Vis dernæst, at der må gælde følgende ulighed for sammenhængen mellem L_0 (rumskibets hvilelængde) og a', hvor a' er accelerationen målt i forhold til det øjeblikkelige hvilesystem S':

$$L_0 \cdot a' \leqslant c^2$$

Transformationsligningen for acceleration i x-aksens retning mellem to inertialsystemer S og S' (betegnet a_x og a'_x) er ved den specielle beliggenhed:

$$a_x = (a'_x/\gamma^3) \cdot (1 + v \cdot u'_x/c^2)^3$$

hvor v er hastigheden af S' i forhold til S
u'_x er genstandens ~~hastighed~~ i forhold til S'

Diskutér det i indledningen omtalte paradoks på grundlag af disse resultater.

(opgaven fortsættes næste side)

Illustrer ved et par taleksempler, at den i 4) udledte relation ikke vil have nogen praktisk betydning i den makroskopiske verden.

Betragt dernæst et mikroskopisk system, bestående af to elektroner, hver med ladning e, masse m_e og radius r_e, som anbringes i kontakt med hinanden (afstanden mellem deres centre er altså $2r_e$) og derefter slippes fri, hvorefter de begynder at accelerere på grund af den gensidige Coulomb-frastødning. Vis, at man ved indsættelse af begyndelsesaccelerationen for a' i grænserelationen i 4) får en L_0-værdi, som svarer til den såkaldte "klassiske elektron radius",

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad .$$

Afbild i et rumtidsdiagram svarende til inertialsystemet S verdenslinierne for henholdsvis forende, bagende og et mellemliggende punkt på et rumskib med hvilelængde L_0, idet rumskibet accelereres maksimalt svarende til den i 4) udledte grænse. (Det er bekvemt at benytte hvilelængden L_0 som enhed på x-aksen og L_0/c som enhed på tidsaksen).

Afbild i et rumtidsdiagram svarende til inertialsystemet S verdenslinierne for forende, bagende og et mellemliggende punkt på et rumskib med hvilelængde $L_1 < L_0$, hvis forende accelereres med <u>samme</u> acceleration som rumskibets forende i 6).

Skitsér hvorledes beliggenheden af det øjeblikkelige hvilesystem ændres under bevægelsesforløbet. Vis, hvorledes verdenslinierne for rumskibets forende og bagende forløber, hvis accelerationen på et vist tidspunkt ophører.

$c = 3 \times 10^8$ m/s

(opgavesættet slut)

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (elektrodynamik og kvantemekanik), fysik modul 2.
fredag, den 7. juni 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Brug af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

En solenoide med vandret akse har 1500 vindinger og er 80 cm lang. Strømstyrken gennem solenoidens vindinger betegnes I_1.
Midt inde i solenoiden er anbragt en enkelt, plan, cirkulær vinding med arealet $10 cm^2$, som kan dreje sig frit omkring en lodret akse gennem en diameter i vindingen. Strømstyrken i denne vinding betegnes med I_2.
Det antages, at solenoidens diameter kan regnes for forsvindende lille i forhold til dens længde, og at der kan ses bort fra jordens magnetfelt.

1) Solenoiden og vindingen forbindes begge til konstante spændingskilder, således at der løber strømmene $I_1 = 6.0A$ og $I_2 = 1.2A$.
Beregn det arbejde, man skal udføre, når man langsomt drejer vindingen 180° udfra en begyndelsesstilling, hvor vindingens plan er vinkelret på solenoideaksen. Gør rede for det udførte arbejdes fortegn.

2) Solenoidens forbindelse til spændingskilden afbrydes. I stedet forbindes den gennem en modstand til et galvanometer. Den samlede modstand i dette kredsløb er 1200 ohm. Den cirkulære vinding i solenoidens midte er atter anbragt vinkelret på solenoideaksen og er stadig forbundet til sin spændingskilde, så at $I_2 = 1.2A$.
Beregn den ladning, som passerer gennem galvanometret, når strømmen I_2 afbrydes.

(opgaven fortsætter)

(opgave 1 fortsat)

En lille kompasnål anbringes midt for solenoidens ene endeflade. Nålen er frit drejelig om en lodret akse gennem tyngdepunktet, og dens magnetiske moment er $0.010\,A\cdot m^2$.
Idet strømmen i solenoiden er afbrudt ($I_1 = 0$) og strømmen i den cirkulære vinding, som er anbragt som i 2), er $I_2 = 1.2A$, skal man beregne den kraft, hvormed kompasnålen i sin ligevægtsstilling påvirker vindingen.

For $I_1 = 6.0\cdot 10^{-3}$ A og $I_2 = 0$ findes kompasnålens svingningstid til 0.80 s. Beregn svingningstiden for $I_1 = 0$ og $I_2 = 1.2A$.
Udtrykket for svingstiden ved små harmoniske svingninger er $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\tau}}$, hvor J er kompasnålens inertimoment og τ det drejningsmoment, hvormed nålen påvirkes, når den er anbragt vinkelret på magnetfeltet fra solenoide/vinding.

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (relativitetsteori og kvantemekanik), fysik modul 2.
fredag, den 7. juni 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Brug af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

En raket med hvilemassen m bevæger sig i en retlinet bevægelse i forhold til et inertialsystem S under påvirkning af en konstant kraft F i fremadgående retning. I forhold til S påbegyndtes bevægelsen fra hvile ($v_{raket} = 0$) til tiden $t = o$. Det antages i det følgende, at raketten i sin bevægelse efterhånden opnår relativistiske hastigheder.

1) Hvor lang tid forløber, målt i S, før raketten har opnået hastigheden $v_{raket} = \frac{1}{2}c$, hvor c er lyshastigheden ?

2) Hvor stor er rakettens øjeblikkelige acceleration, målt i S, på det i spørgsmål 1 beregnede tidspunkt ?

3) Et arbejde kan i relativitetsteorien på samme måde som i den newtonske mekanik udtrykkes ved produktet af kraft og vej. Udregn på denne måde, hvor stort arbejde der skal udføres for at give raketten hastigheden $\frac{1}{2}c$. Kontrollér, om resultatet stemmer overens med værdien af rakettens kinetiske energi.

4) En iagttager i S ønsker at kontrollere rakettens hastighed til det tidspunkt, hvor dens hastighed ifølge beregningerne skulle være $\frac{1}{2}c$. Iagttageren er anbragt således i S, at raketten bevæger sig direkte bort fra iagttageren.

Der afsendes derfor en serie radarsignaler med tidsintervallet Δt sekunder mellem to på hinanden følgende signaler. Radarsignalerne reflekteres fra rakettens bagende, og ekkosignalerne fra raketten registreres lidt senere hos iagttageren, som nu måler et ændret tidsinterval $\Delta' t$

./..

sekunder mellem to på hinanden følgende ekkosignaler.
Hvor stor skal intervalændringen $(\Delta't - \Delta t)$ være,
såfremt rakettens hastighed er $\frac{1}{2}c$?

) Efter at raketten har opnået hastigheden $v_{raket} = \frac{1}{2}c$ i forhold til S, ophører kraftpåvirkningen, og raketten fortsætter i en jævn retlinet bevægelse med hastigheden $v_{raket} = \frac{1}{2}c$.

På raketten er anbragt en kanon. Med denne afskydes en masse af størrelsen $\alpha \cdot m$ $(0 < \alpha < 1)$, hvor m er rakettens samlede masse. Massedelen $\alpha \cdot m$ slynges bagud med hastigheden w i forhold til det inertialsystem S', hvori raketten var i hvile før kanonens affyring.
Find rakettens hastighed i forhold til S' efter affyringen af kanonen, udtrykt ved α, w og c, hvor c er lyshastigheden

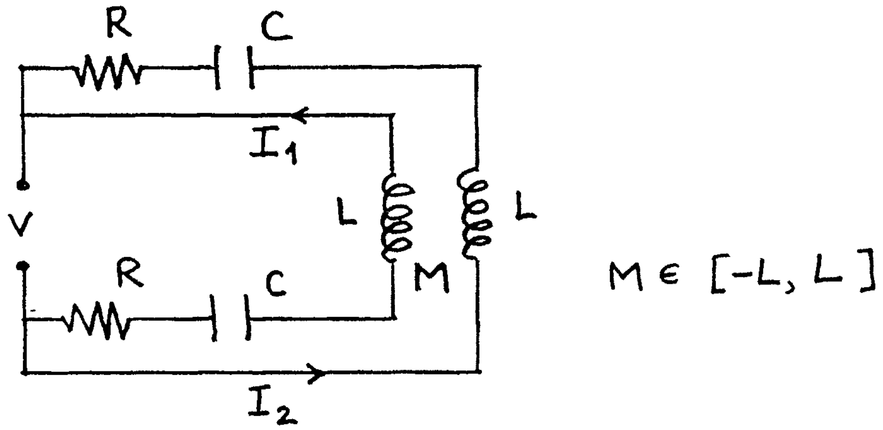
Vis, at der for en given værdi af α er en øvre grænse for w, som betegnes $w_{max}(\alpha)$.
Beregn rakettens hastighed efter kanonaffyringen i forhold til henholdsvis S' og S, hvis $w = \frac{1}{2}w_{max}(\alpha)$.

(opgavesættet fortsætter)

Skriftlig eksamen i dybdemodul (elektrodynamik og kvantemekanik), 13. januar 1986.

Hjælpemidler tilladt. Rigtig besvarelse af 80% af de stillede spørgsmål giver karakteren 11.

Opgave 1
(spørgsmål 7 kan besvares uafhængigt af de foregående).



1.1. Find impedanserne Z_1 og Z_2 af de to viste kredse der indeholder den harmoniske spændingskilde $V=V_0\cos\omega t$, og tillige den samlede impedans Z set fra spændingskilden.

1.2. Bestem fasen af strømmen I_1 i kreds 1, relativt til fasen af V.

1.3. Find ladningen på kondensatoren i kreds 1 som funktion af tiden, samt ladningens fase relativt til V.

1.4. Bestem resonansfrekvensen ω_0 for M=0 og den tilsvarende ω_M for $M\neq 0$.

1.5. Antag nu at $\omega=\omega_M$. Hvad er Z i dette tilfælde, og hvad er den maksimale ladning Q_0 på kondensatoren i kreds 1.

1.6. Find for $CL/R^2 = 100$ farad^2 forholdet Q_0/V_0 (der er et mål for resonansens styrke), som funktion af M, og skitser forløbet.

1.7. Nu fjernes spændingskilden V, så der bliver én fælles kreds tilbage. Angiv en betingelse for, at en periodisk strøm gennem længere tid kan svinge i kredsen (f.eks. ved at begynde med ladning på en eller begge kondensatorer).

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (relativitetsteori og kvantemekanik)

mandag, den 13. januar 1986 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1. I den specielle relativitetsteori vises, hvorledes relativitetsprincippet og et krav om opretholdelse af energibevarelsessætningen fører til følgende udtryk for et systems energi og impuls:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{og} \quad \bar{p} = \frac{m\bar{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

hvor m er systemets masse (hvilemasse), $\bar{u}$ er systemets hastighed i forhold til det pågældende inertialsystem, $u = |\bar{u}|$ og c er lysets hastighed.

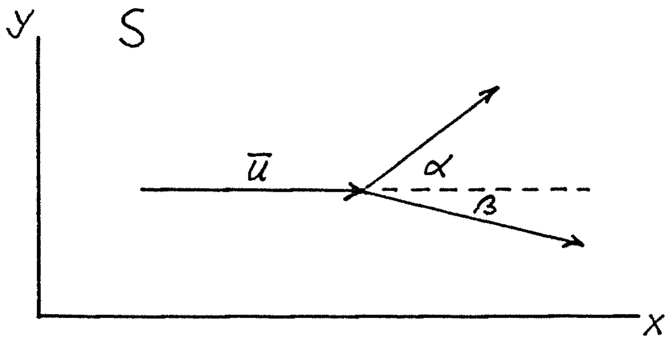
En eksperimentel verifikation af gyldigheden af bevarelsessætningerne for energi og impuls ved elastiske stød mellem partikler ved store hastigheder blev udført af F.C.Champion i 1932 ved tågekammerundersøgelse af stødprocesser, hvor en elektron med stor hastighed kolliderer med en hvilende elektron.

(opgavesættet fortsætter)

<u>Spm. 1.</u> Betragt en elastisk stødproces mellem to partikler med lige store masser, hvor den ene partikel før stødet bevæger sig med hastigheden $\bar{u}$, og den anden partikel er i hvile i forhold til inertialsystemet S. Vis, at de to partiklers bevægelsesretninger efter stødet danner en vinkel på 90^{o} med hinanden, hvis u er så lille, at den Newtonske mekanik er gyldig.

<u>Spm. 2.</u> Betragt den samme type stødproces som i spm.1., men det antages nu, at hastigheden $\bar{u}$ er så stor, at Newton's mekanik ikke længere er gyldig.

Vinklerne mellem den indkommende partikels bevægelsesretning før stødet og de to partiklers bevægelsesretninger efter stødet, målt i S, betegnes med henholdsvis α og β (se figuren)



Vis, at der gælder følgende relation:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \text{hvor} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Vis, at denne relation i den ikke-relativistiske grænse stemmer overens med resultatet i spm.1.

(opgavesættet fortsætter)

Spm. 3. Betragt en elastisk stødproces, hvor en elektron med en kinetisk energi på 1,0 MeV støder mod en hvilende elektron. Hvor stor bliver afvigelsen af $\alpha + \beta$, d.v.s. vinklen mellem de to partiklers bevægelsesretninger målt i S, fra 90°, hvis de to elektroner efter stødet har samme kinetiske energi ?

Spm. 4. Beregn krumningsradius af banen for en elektron med den kinetiske energi 1,0 MeV, som bevæger sig en plan vinkelret på kraftlinierne i et homogent magnetfelt med feltstyrken 0.05T. Hvilken værdi af krumningsradius ville man få ved en urelativistisk beregning ?

Lysets hastighed $c = 3 \times 10^{8}$ m/s

Elektronens hvilemasse $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg ~ 511keV

Elektronens ladning $e = 1.60 \times 10^{-19}$C

$1\text{eV} = 1.60 \times 10^{-19}$J

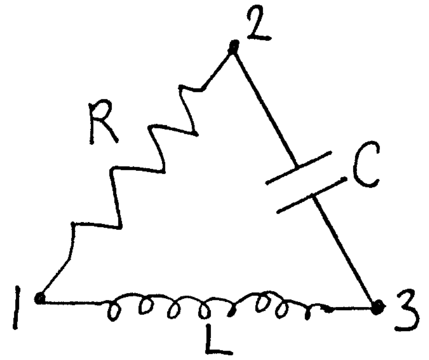
Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul, den 4.6.1986

Hjælpemidler er tilladt.

(Ved bedømmelsen vil opgave 1,2 og 3 blive vægtet med 50%
og opgave 4 med 50%)

Opgave 1

En modstand R, en kondensator med kapacitet C og en spole med induktans L er anbragt i en trekant som vist på figuren.



1) Beregn impedansen Z_{12} mellem hjørne 1 og hjørne 2 som funktion af vinkelfrekvensen ω .
2) Find den vinkelfrekvens ved hvilken $Z_{12}=0$ idet det oplyses at $R = 1\ k\Omega$, $C = 1$ nF og $L = 1$ mH.
3) Findes der også en vinkelfrekvens ved hvilken impedansen mellem hjørne 2 og 3 er lig med nul?

Opgave 2

En sfærisk symmetrisk ladningsfordeling har ladningstætheden $\rho(r)$
hvor

$$\rho(r) = \begin{cases} Q\left(\frac{r}{R}\right)^2 , & r < R \\ 0 , & r > R \end{cases}$$

1) Rummet bestemt ved r>R er tomt. Beregn det elektrostatiske potential $\varphi(r)$ for alle r .

2) Vi tænker os nu i stedet rummet bestemt ved r > R opfyldt af et dielektrikum med dielektricitetskonstanten ε . Find overflade polarisationsladningstætheden σ_p i grænselaget bestemt ved r = R .

Opgave 3

I et sædvanligt xyz koordinatsystem er halvplanen bestemt ved x < 0 tom, mens halvplanen bestemt ved x > 0 er opfyldt af et umagnetisk stof med dielektricitetskonstanten $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$.
En planpolariseret elektromagnetisk bølge falder fra vacuum ind mod grænseplanen bestemt ved x=0 . Den indkommende del af bølgen har et $\bar{E}$-felt givet ved

$$\bar{E}(x,y,z) = (E_0, 0, E_0)\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)} \qquad (x<0).$$

Det oplyses at y-komponenten af $\bar{k}$ er lig med nul. Hvor mange procent af den indkommende bølges energi reflekteres og hvor mange procent transmiteres?

Opgave 1

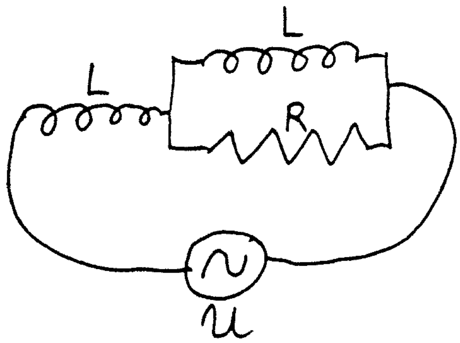


fig. 1

Et elektrisk kredsløb består af to spoler med induktans L og en modstand R forbundet med en vekselstrømsspændingskilde som vist på fig. 1. Det antages at $L = 20$ H , $R = 1$ kΩ og at spændingen er net, dvs $U = 220$ V med frekvens 50 Hz.

1) Hvor stor er faseforskydningen mellem spænding og strøm?

2) Hvor megen energi omsættes til varme per tidsenhed?

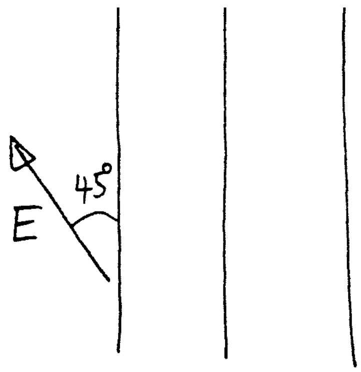


fig. 2

Et uendeligt udstrakt materiale er sammensat af fire forskellige stoffer med dielektricitetskonstanterne ε , 2ε , 3ε og 4ε henholdsvis. Stofferne er adskildt af parallelle planer som skitseret på fig. 2. I venstre halvplan er der et homogent elektrisk felt E rettet 45° på grænseplanen til 2ε-laget.

1) Beregn størrelse og retning af det elektriske felt i højre halvplan.

2) Beregn den inducerede ladningstæthed i grænselaget mellem 2ε og 3ε lagene.

3) Bestem Brewster vinklen for refleksion ved $\varepsilon - 2\varepsilon$ laget. Hvorfor kan det ikke forventes at lys, der falder ind fra venstre med retning bestemt ved Brewster vinklen, reflekteres som rent polariseret?

Opgave II.

1) Et metallisk lederstykke af form som en cylinder med radius a og længden ℓ har modstanden R og bærer jævnstrømmen I i længdeaksens retning. Angiv størrelse og retning for den elektriske feltstyrke $\vec{E}$, den magnetiske feltstyrke $\vec{H}$ og Poynting's vektor $\vec{S}$ som funktioner af afstanden fra cylinderaksen. Bestem divergensen af Poynting's vektor og diskutér betydningen af dette resultat.

2) I dette og de følgende spørgsmål betragtes en solenoide-spole med længden $\ell = 50$ cm og diameteren $d = 5$ cm. Spolen er jævnt beviklet med $N = 2000$ vindinger af kobbertråd med en samlet modstand på $R = 10$ ohm.
Idet der ses bort fra randeffekter, skal man beregne den maximalt opnåelige statiske værdi af den magnetiske induktion B inde i spolen, når der ikke må afsættes mere end 100 watt til varme. Bestem også spolens selvinduktionskoefficient L.
Hvor stor er den kapacitet C, som spolen skal parallelforbindes med, hvis den skal benyttes som den induktive komponent i en svingningskreds, der er afstemt til kammertonen (frekvens $440 s^{-1}$)?
Angiv Q-værdien for svingningskredsen og den relative usikkerhed (halvværdibredde) for resonansfrekvensen.

3) Spolen stilles lodret på bordet, og en supraledende stang med massefylden $\rho = 5 g/cm^3$, samme længde som spolen og et halvt så stort tværsnitsareal, føres et stykke x ned i spolen. Beregn selvinduktionen som funktion af x. Hvor stor skulle strømmen i spolen være, hvis supralederen skulle svæve ?

4) Vi antager nu, at spolen har været forbundet til en spændingskilde på 20 volt indtil tidspunktet $t = 0$. Nu forsøger man så at "afbryde" strømmen ved at indsætte en ekstra modstand $K \cdot R$ $(K >> 1)$ i kredsen. Denne modstand kan højst tåle 1000 volt. Hvor stor må K være ? Diskutêr strømmen som funktion af tiden efter "afbrydelsen".

Opgave 2. Elektrodynamik.

Et coaxialkabel er lavet af en umagnetisk, cylindrisk metalkerne med radius R_1 og en ydre cylindrisk kappe med samme akse og indvendig radius R_2 $(R_2 > R_1)$. Metalkernen har den specifikke ledningsevne σ, og området mellem kernen og kappen er vacuum. Den indre cylinder bærer en jævnstrøm I i aksens retning, og kappen bærer samme strøm i modsat retning.

1). Angiv modstanden pr. længdeenhed, R', samt størrelse og retning af strømtætheden $\vec{i}$, den elektriske feltstyrke $\vec{E}$ og den magnetiske induktion $\vec{B}$ som funktion af afstanden r fra aksen $(r < R_2)$.

2). Vis, at det magnetiske vektorpotential $\vec{A}$ kan vælges på formen $A(r)\vec{e}_z$, hvor $\vec{e}_z$ er en enhedsvektor i aksens retning, og hvor $A(R_2) = 0$.

3). Begrund, at selvinduktionskoefficienten pr. længdeenhed, L', kan defineres ved ligningen

$$A(0) = L' \cdot I$$

Bestem L' i den grænse, hvor tykkelsen af vacuumlaget er forsvindende lille.

Vi tænker os nu, at den ydre kappe består af et supraledende materiale. På et givet tidspunkt, $t = 0$, vil vi lade vacuumlaget forsvinde $(R_2 = R_1)$, således at kablet kortsluttes. Herefter er situationen ikke stationa men vi vil regne med, at den er quasistationær, således at vi kan se bort fra forskydningsstrømme. Desuden antages, at felt- og strømvektorer bevarer retningen.

4). Vis, at den elektriske feltstyrke efter kortslutningen går kontinuert mod 0 for $r \rightarrow R_1$.

(opgave 2 fortsættes på side 4)

5). Vi skriver feltstyrken på formen $E(r,t) = E_o(r)\cdot e^{-t/\tau}$. Vis så, at $E_o(r)$ må tilfredsstille differentialligningen

$$\frac{d^2E_o}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_o}{dr} + \frac{\mu_o\sigma}{\tau}E_o = 0$$

6). Find en tilnærmet løsning til ovenstående ligning ved at skrive $E_o(r)$ som et andengradspolynomium i r og bestem herved relaxationstiden τ. Sammenlign med den simple model, hvor hver længdeenhed af kablet betragtes som en lukket kreds med selvinduktion L' og modstand R'. Udregn τ for $R_1 = 1$ cm, $\sigma = 5\cdot10^6\ (\text{ohm}\cdot\text{cm})^{-1}$.

(opgave 2 slut).

Opgave 3. Relativitetsteori.

En raket er forsynet med en avanceret motor, som fuldstændigt kan omdanne masse til energi. Energien udsendes som elektromagnetisk stråling fra rakettens bagende.

1). Set fra rakettens hvilesystem omdannes i det lille tidsrum $d\tau$ massen dM til energi. Bestem hastighedsændringen dv', når den øjeblikkelige hvilemasse er M.

2). Bestem den tilsvarende ændring af hastigheden v i forhold til raketbasens inertialsystem. Vis, for bevægelse i én retning, at størrelsen $\ln M$ er en entydig funktion af $\beta = v/c$, når $M = M_0$ for $\beta = 0$. Bestem så β som funktion af M.

3). I det følgende tænker vi os, at brændstofforbruget styres, således at accelerationen i forhold til rakettens hvilesystem har en konstant værdi, a. Bestem M og β som funktion af egentiden τ, når raketten starter fra basen til tiden $t = \tau = 0$.

4). Hvor stor er den maximale hastighed, som raketten kan opnå, hvis brøkdelen r af den oprindelige hvilemasse skal bevares? Hvor lang tid er der gået på rakettens ur (τ) og på basens ur (t), når raketten har opnået sin maximale hastighed?

5). Der skal lægges et program for en rejse ud og hjem langs en ret linje i rummet, således at accelerationen i hvilesystemet har konstant numerisk værdi, a (bortset fra korte perioder, medens raketten vendes), og således at brøkdelen r af den oprindelige hvilemasse er tilbage ved hjemkomsten. Lav en kort beskrivelse af

(opgavesættet nr. 3 fortsat)

af rejsens forløb og angiv et udtryk for den maximale hastighed.

6). Udregn for $r = 0.01$ og $a = 10\ m/s^2$ værdierne af t og τ ved hjemkomsten. Hvor langt borte har raketten været?

(opgavesættene slut).

Opgave i relativitetsteori.

Et inertialsystem K har x-aksen på en vandret jordoverflade og y-aksen lodret opad. Til tidspunktet $t = o$ (set fra K) befinder der sig en vandret stang med hvilelængden L i højden h over jorden. Stangen bevæger sig lodret nedad med konstant hastighed u, indtil den rammer jorden, hvor den bliver liggende. Under hele bevægelsen er stangen parallel med x-aksen (set fra K) og dens venstre endepunkt har $x = o$.

På stangen er med delestreger angivet en længdeskala ξ, gående fra $\xi = o$ i venstre endepunkt til $\xi = L$ i højre endepunkt, og i ethvert markeret delepunkt på ξ-skalaen er anbragt et standardur, som viser tiden $\tau(\xi)$ i stangens hvilesystem. For $t = o$ viser alle urene på stangen $\tau(\xi) = o$. Når et punkt på stangen rammer jorden, går uret i det pågældende punkt i stå.

1) Angiv τ som funktion af ξ og t under bevægelsen fra $y = h$ til $y = o$. Hvor på x-aksen rammer stang-uret i punktet ξ, og hvad viser det, når det er gået i stå?

Det samme begivenhedsforløb skal nu betragtes fra et andet inertialsystem K' med x'-aksen ud ad x-aksen og bevægende sig med hastigheden v i forhold til K i den positive x-retning. For $t = o$ falder y'-aksen sammen med y-aksen, og urene på y'-aksen viser tiden $t' = o$.

2) Bestem K'-koordinaterne x' og y' for stangpunktet ξ til tidspunktet t' i K'.

3) Vis, at stangen, set fra K', ikke er vandret, men danner en vinkel α med x'-aksen. Angiv et udtryk for α og tegn et øjebliksbillede af stangen for $t' = o$.

4) Bestem L således, at endepunktet $\xi = L$ netop rører jorden for $t' = o$ (set fra K'). Lav en tegneserie af forløbet, set fra K', indtil stangen hviler på jorden.

(opgavesættet SLUT)

Opgave i elektrodynamik.

En kondensator består af $2N$ tynde, cirkulære metalplader, anbragt parallelt med centrerne på en fælles akse vinkelret på pladerne. Halvdelen af pladerne er i ledende forbindelse med hinanden og rummer en samlet positiv ladning Q, medens den anden halvdel af pladerne, som også er ledende forbundet, er forsynet med en lige så stor negativ ladning $-Q$. De positive plader er isoleret fra de negative, og pladerne er anbragt således, at nærmeste nabo til hver enkelt plade er en plade med modsat ladningsfortegn. Mellem pladerne er der vacuum, og afstanden fra en plade til nærmeste nabo(er) er d, som antages at være meget mindre end pladernes radius R. Antallet af plader er imidlertid så stort, at afstanden L mellem de to plader for enderne af kondensatoren er meget større end R. ($L \approx 2N \cdot d \gg R$).

1) Gør rede for ladningsfordelingen i det indre af metallet, på de to plane overflader og den cylindriske udadvendte overflade for en plade. Der må skelnes mellem to tilfælde, idet pladen kan have to nærmeste naboer, hvis den sidder i det indre af stablen, eller kun én, hvis den sidder for enden.

2) Angiv et udtryk for kondensatorens kapacitet C. Udregn C for $N = 2000$, $R = 1$ m, $d = 1$ mm. Hvor stor er spændingsforskellen mellem de to pladesæt, når $Q = 0.1$ coulomb?

Vi antager nu, at de positive plader er indbyrdes forbundne (mekanisk), således at de kan dreje om aksen med en fælles vinkelhastighed, og at det samme gælder for de negative plader. Med en motor sættes de positive plader i rotation med vinkelhastigheden ω, og de negative drejes den modsatte vej med vinkelhastigheden $-\omega$. Vi antager, at ladningerne forbliver stationære i forhold til pladerne.

3) Vis, at der opstår et magnetfelt, som er parallelt med aksen (der ses bort fra endeeffekter), og angiv den magnetiske feltstyrke $H(r)$ som funktion af r, afstanden fra aksen.

4) Vis, at en positiv ladning q, som deltager i rotationen af en af de positive plader i afstanden r fra aksen, vil blive påvirket af en Lorentz-kraft $\vec{F}_L(r)$. Angiv størrelse og retning af denne kraft. I hvilken afstand fra aksen er kraften maksimal?

Opgave i elektrodynamik

To concentriske tyndvæggede metalcylindre har højden h og radier r_1 og r_2 ($r_1 < r_2 << h$). På den inderste cylinder sidder ladningen $+Q$ og på den yderste sidder ladningen $-Q$. Cylindrene befinder sig i vacuum.

1. Angiv størrelse og retning af den elektriske feltstyrke $\vec{E}$ i afstanden r fra cylindrenes fælles akse.

2. Angiv systemets kapacitet C og den samlede elektrostatiske energi U_e.

Cylindrene sættes nu i rotation samme vej om den fælles akse med samme omløbstid T.

3. Angiv størrelse og retning af den magnetiske feltstyrke $\vec{H}(r)$. (Det kan antages, at der ikke er noget magnetfelt for $r > r_2$).

4. Vis, at der er en strøm af elektromagnetisk energi, $W = 2 \cdot U_e/T$ i mellemrummet mellem cylindrene.

5. Udregn magnetfeltets energi U_m.

6. Antag $r_2 - r_1 << r_1$ og vis så, at forholdet mellem den magnetiske og den elektriske energi er lig med kvadratet på forholdet mellem cylindrenes omdrejningshastighed og lyshastigheden.

Opgavesættet SLUT

Opgave i relativitetsteori.

En myon accelereres fra hvile til en hastighed på 95% af lysets ved hjælp af et homogent elektrisk felt.

1) Hvor stor er den fornødne spændingsforskel?

2) Hvor lang tid tager accelerationen, målt i laboratoriesystemet, hvis den forløbne vejlængde er 10 m?

Efter accelerationen bevæger myonen sig ind i et område uden elektrisk felt, men med et homogent magnetfelt $B = 10$ tesla. Hastigheden står vinkelret på magnetfeltet.

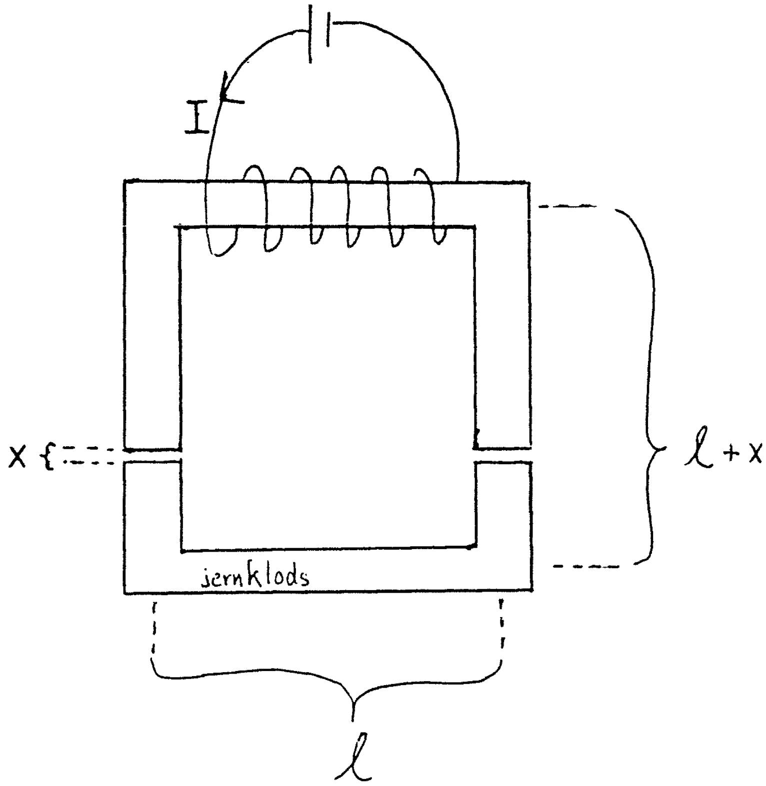
3) Beregn radius i den fremkomne cirkelbane.

4) Myonens middellevetid i hvile er $2 \cdot 10^{-6}$ s.
Hvor mange komplette cirkelbaner kan den forventes at udføre, inden den henfalder?

(Myonens hvilemasse er 106 MeV/c^2 og dens ladning er en elektronladning, $1.6 \cdot 10^{-19}$ coulomb).

Januar 91
ELEKTRODYNAMIK.

Elektrodynamik (1)



Opgave 1. En elektromagnet, som vist på ovenstående figur, består af en hesteskoformet jernkerne adskilt fra en jernklods af et lille luftgab. Omkring jernkernen er der viklet N vindinger af en kobbertråd, gennem hvilken der løber strømmen I.
Tværsnitsarealet af jernkernen og jernklodsen er ens og betegnes A.
Idet x er luftgabets størrelse, kan det antages, at $x^2 << A << \ell^2$, hvor ℓ angiver (middel)-dimensionen af magneten (jvf. figuren).
I opgaven betragtes jern som et lineært magnetisk medium med $\mu = 3000\,\mu_0$.

a) Opstil de relevante Maxwell-ligninger og bestem $\bar{B}$ og $\bar{H}$ overalt i jernkernen, jernklodsen og luftgabet.

b) Beregn den magnetiske energi.

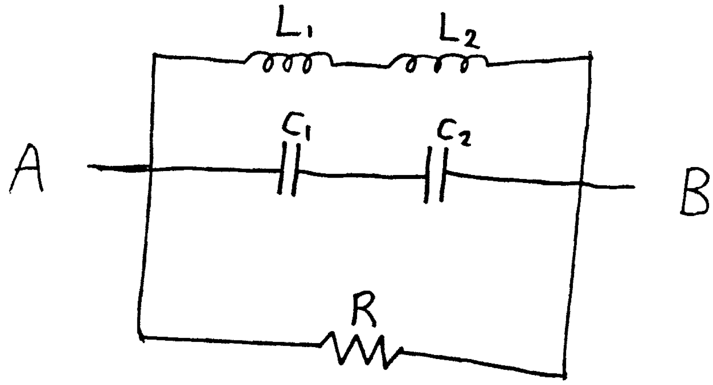
c) Find kraften, hvormed endeklodsen skal påvirkes for at løsrive den fra elektromagneten, når $x = o$, idet det antages, at jernklodsen slipper begge magnetpoler samtidigt.

Vink: Kraften kan beregnes ud fra svaret på b).

(opgaven slut)

Januar 91 Elektrodynamik (2)

ELEKTRODYNAMIK.



Opgave 2. a) Beregn den komplekse frekvensafhængige impedans af ovenstående kredsløb mellem A og B bestående af 2 spoler med induktans L_1 og L_2 , 2 kondensatorer med kapacitet C_1 og C_2 samt modstanden R.

b) Idet det fra nu af antages, at $L_1 = 1$ H, $L_2 = 5$ H, $C_1 = 2 \cdot 10^{-12}$F, $C_2 = 2 \cdot 10^{-12}$F, $R = 9 \cdot 10^6 \Omega$, og $\omega = 2 \cdot 10^6$ Hz , skal man beregne fasedrejningen mellem strøm og spænding, når en ydre spændingskilde tilkobles mellem A og B.

c) Hvad er den afsatte effekt, når spændingsamplituden er 13 V ?
Hvor bliver energien af ?

(opgavesættet slut)

Opgave i relativitetsteori.

En partikel med hvilemassen m bevæger sig på linjen $y = b$ med hastigheden v. Til tidspunktet $t = o$ rammer den en hvilende antipartikel (samme hvilemasse) i punktet (o,b). Begge partikler annihileres, og der udsendes to fotoner fra punktet (o,b) til tidspunktet $t=o$.

1) Angiv den samlede energi og den samlede impuls (størrelse og retning) for de to fotoner.

2) Den ene foton (foton 1) registreres i punktet (a,o). Angiv tidspunktet t_1 for registreringen.

Vi indfører nu et inertialsystem K' med hastigheden u i forhold til laboratoriesystemet K. K og K' har sammenfaldende x-akser, og y-akserne er sammenfaldende for $t = t' = o$.

3) Bestem hastigheden u, således at K' er tyngdepunktssystem for de to partikler.

4) Angiv i tyngdepunktssystemet koordinaterne x_1' og y_1' samt tidspunktet t_1' for registreringen af foton 1.

Vi antager nu, at der "i ethvert punkt" på linjen $y = 2b$ er opsat detektorer til registrering af foton 2.

5) Angiv koordinater (x_2' og x_2) og tidspunkter (t_2' og t_2) for registreringen af foton 2 i K' og K.

6) Vi antager nu, at $a = b$ $(> o)$, og at begge fotonerne i K' systemet udsendes vinkelret på x' aksen.
Beregn hastigheden v.

Juni 91 Elektrodynamik

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (elektrodynamik)
(NY ORDNING) (50% af et sæt) (alle hjælpemidler tilladt)
fredag den 7. juni 1991 kl. 9.00 - 15.00.

Opgave 1.

En uendelig stor kondensator er rotationssymmetrisk omkring z-aksen og har følgende form. Den øvre kondensatorplade er hyperboloiden givet ved ligningen

$$z = \sqrt{\frac{r^2+a^2}{2}}$$

hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Den nedre kondensatorplade er keglefladen givet ved

$$z = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

1) Tegn kondensatoren og opstil ligningen for potentialet $\varphi(x,y,z)$ mellem kondensatorpladerne.

2) Vis, at hvis V er spændingsforskellen mellem pladerne, er løsningen

$$\varphi(x,y,z) = \frac{V}{a^2}(2z^2-r^2) + \text{Const.}$$

3) Beregn det elektriske felt overalt mellem kondensatorpladerne.

4) Vis, at kondensatorens kapacitet er uendelig stor.

(opgave 1 slut)

Juni 91 Elektrodynamik

Opgave 2.

Følgende simpel model af en asynkronmotor betragtes. En vinding af en kobbertråd har form som et kvadrat med siden L . Kobbertråden er mekanisk forbundet med en plastikakse i z-aksens retning således, at aksen halverer to modstående sider. Aksen kan rotere og tænkes forbundet til en meget tung skive.

Skiven og tråden roterer nu med vinkelfrekvensen ω . Tråden befinder sig i et rumligt homogent magnetfelt givet ved

$$\bar{B} = B_o \ (\cos(\omega_o t), \sin(\omega_o t), o) .$$

Det antages først, at $o < \omega < \omega_o$.

1) Idet kobbertrådens modstand betegnes R , skal man beregne den i tråden inducerede strøm som funktion af tiden, $I(t)$. Det antages, at tråden ligger i x-z-planen til $t = o$.

2) Beregn den effekt der i middel afsættes som Joulevarme i tråden, $< P_{Joule} >$ og den effekt, der i middel tilføres skiven som rotationsenergi, $< P_{nyttig} >$.

3) For hvilken vinkelfrekvens ω er $< P_{nyttig} >$ størst ?

4) Vis, at $\frac{<P_{nyttig}>}{<P_{Joule}>} \rightarrow \infty$ for $\omega \rightarrow \omega_o$.

5) Hvad sker der, hvis $\omega > \omega_o$?

(opgavesættet slut)

Januar 93 Elektrodynamik

ELEKTRODYNAMIKEKSAMEN

RUC, 12/1 1993, kl 10-13.

Sættet består af to opgaver der ved bedømmelsen vægtes med hver 50%.

OPGAVE 1

Man betragter en statisk ladningsfordeling i rummet hvis ladningstæthed i sædvanlige retvinklede koordinater er givet ved

$$\rho(x,y,z) = \frac{\rho_0}{a^2}(a^2-x^2-y^2) \quad , \quad x^2+y^2<a^2$$
$$\rho(x,y,z) = 0 \quad , \quad x^2+y^2>a^2$$

Ladningsfordelingen befinder sig i et stof med dielektricitets-konstanten $\epsilon=\epsilon_0$ og den magnetiske permeabilitet μ .

1) Hvilken type koordinatsystem er det naturligt at benytte når man skal regne på en ladningsfordeling som ovenstående?

2) Find det elektriske felt overalt i rummet.

Nu tænkes ladningsfordelingen at rotere langsomt omkring z-aksen med vinkelhastigheden ω .

3) Vis at der herved opstår et magnetisk felt i z-aksens retning der for $x^2+y^2<a^2$ er givet ved

$$B_z(x,y,z) = \frac{1}{4}\frac{\mu\rho_0\omega}{a^2}[(x^2+y^2)(x^2+y^2-2a^2) + a^4]$$

Januar 93 Elektrodynamik

OPGAVE 2

Opgaven vedrører et hypotetisk stof, i det følgende betegnet et "S-medium". S-mediet er umagnetisk, så i S-mediet gælder altså $\mu=\mu_0$. S-mediet er karakteriseret ved proportionalitet mellem strømtæthedsvektoren, $\overline{\boldsymbol{J}}$, og vektorpotentialet i et passende gaugevalg, $\overline{\boldsymbol{A}}$:

$$\overline{\boldsymbol{J}} = -K\,\overline{\boldsymbol{A}} \quad , \quad K>0 \quad . \tag{1}$$

I det følgende antages det at vektorpotentialet er valgt så ligning (1) er opfyldt. Det antages endvidere at det elektriske skalarpotential ϕ overalt i S-mediet er lig med nul. Endelig antages det at den totale ladningstæthed i S-mediet overalt er nul.

1) Vis at vektorpotentialet opfylder Coulomb gaugebetingelsen, $\overline{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{A}} = 0$.

2) Vis at der i S-mediet gælder følgende sammenhæng mellem strømtæthedsvektoren, $\overline{\boldsymbol{J}}$, og det elektriske felt, $\overline{\boldsymbol{E}}$:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{K}\frac{\partial \overline{\boldsymbol{J}}}{\partial t} \quad . \tag{2}$$

3) S-mediet har tætheden n af mobile ladningsbærere, der hver har ladningen q og massen m . Vis at proportionaliteten i ligning (2) følger hvis det antages at de mobile ladningsbærere bevæger sig uafhængigt af hinanden og af S-mediets statiske ladninger. Vis endvidere at der i denne situation gælder $K = nq^2/m$.

Januar 93 Elektrodynamik

I opgavens anden halvdel betragtes opførslen af et magnetisk felt i S-mediet. Alle størrelser i det følgende er tidsuafhængige.

4) Vis at magnetfeltet $\overline{B}$ overalt i S-mediet opfylder ligningen

$$\nabla^2 \overline{B} = \mu_0 K \overline{B} \quad . \qquad (3)$$

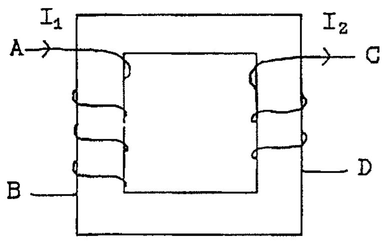
5) Vis at størrelsen $\lambda = (\mu_0 K)^{-\frac{1}{2}}$ er en længde. Vis endvidere at λ giver et mål for hvor langt et ydre magnetisk felt trænger ind i S-mediet. [Vink: Betragt for eksempel en situation hvor halvrummet $x>0$ er opfyldt af S-mediet og løs ligning (3) under antagelsen at magnetfeltet kun afhænger af x .]

6) Vurder groft størrelsen af λ idet S-mediets ladningsbærere antages at være elektroner med tæthed som i et metal.

Opgave i elektrodynamik

10. januar 1995

En induktiv transformator består af en primær og en sekundær spole viklet om en lukket kerne af blødt jern med tværsnitsareal a og middelomkreds s.



Figur 1

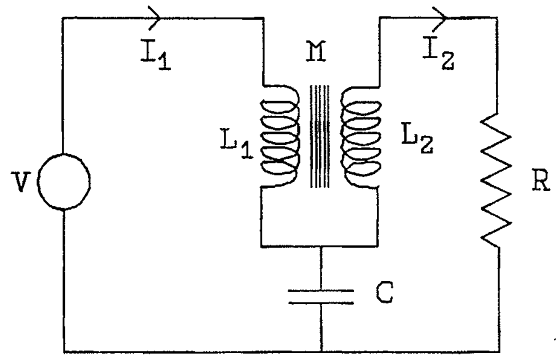
Jernet kan betragtes som et lineært magnetiserbart materiale med permeabiliteten μ ($\mu >> \mu_0$). De to spoler har vindingstallene N_1 og N_2. Transformatorens omsætningsforhold, T, defineres som forholdet mellem sekundær- og primær-vindingstallet.

1) Angiv de to spolers selvinduktionskoefficienter. Hvis sekundærspolens selvinduktion udtrykkes som $L_2 = TL$, hvad er så primærspolens selvinduktion L_1 og spolernes gensidige induktans M, udtrykt ved L og T. (Fortegnet af M bestemmes ud fra de på figur 1 viste viklingsretninger for de to spoler, samt de viste orienteringer for primærstrømmen I_1 og sekundærstrømmen I_2.)

2) Angiv, hvorledes spændingsforskellene $V_A - V_B$ og $V_C - V_D$ afhænger af de tidsafhængige strømme $I_1(t)$ og $I_2(t)$.

I det følgende betragter vi et netværk, hvori den beskrevne transformator indgår sammen med en modstand R, en kondensator med kapaciteten C og en spændingskilde V cos(ωt), som vist på figur 2. Vi lader nu I_1 og I_2 betegne de komplekse strømamplituder, således at den tidsafhængige primærstrøm er $|I_1|\ \cos(\omega t + \theta_1)$.

(opgaven fortsætter)



Figur 2

3) Opstil et sæt ligninger til bestemmelse af I_1 og I_2 ved parametrene V, R, C, L, T og ω.

4) Bestem den komplekse impedans $Z(\omega) = V/I_1$.

5) Vis, at realdelen af Z er nul for en bestemt frekvens ω_m. Bestem fasedrejningen θ_1 som funktion af T ved frekvensen ω_m. (Vi antager i dette spørgsmål, at $T \neq 1$). Hvordan forholder det sig med realdelen af den komplekse admittans $Y = 1/Z$ ved samme frekvens? Hvor stor effekt skal spændingskilden levere? Hvad bliver der af denne energi?

6) Tegn et simpelt netværk, bestående af en selvinduktion L, modstanden R og kapaciteten C, der har samme frekvensafhængige impedans som netværket på figur 2 for T = 1. Hvordan vil det gå, hvis dette system pumpes af en spændingskilde med frekvensen ω_m?

(opgaven slut)

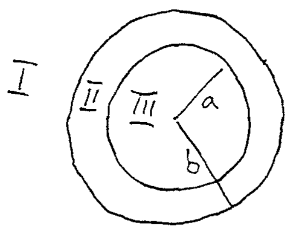
4 timers eksamen i Dybdekurset 6. januar 97 . Elektrodynamik

Prøven består af to opgaver.

Opgave 1 vægtes med 2/3 og opgave 2 med 1/3.

Opgave 1

Opgaven omhandler magnetisk afskærmning. Betragt en uendelig lang hul cylinder af et materiale (mumetal) med meget høj relativ magnetisk permeabilitet, $K_m = \mu/\mu_0$. Stoffet anses magnetisk isotropt, lineært og homogent. Cylinderens akse vælges som z-akse. Indre og ydre radius betegnes med a og b. En vilkårlig afstand fra aksen betegnes r. Cylinderen er placeret i et oprindeligt homogent magnetfelt i x-aksens retning, altså vinkelret på cylinderaksen. Dette fjernfelt har størrelsen B_∞ . Med område I betegnes vacuum udenfor cylinderen, med II selve cylinderen og med III vacuum inde i cylinderen.



1) Gør rede for, at det magnetiske skalar potential ϕ^* opfylder Laplace´s ligning i de tre områder og angiv samtlige randbetingelser.

2) Idet cylinderkoordinater indføres, skal man vise, at ϕ^* givet ved

$\phi_I = (A\ r + B/r\ ) \cos(\theta)$, $r > b$

$\phi_{II} = (C\ r + D/r\ ) \cos(\theta)$, $a < r < b$

$\phi_{III} = E\ r \cos(\theta)$, $r < a$

kan opfylde de i 1) fundne betingelser ved passende valg af konstanterne A,B,C,D,E.

3) Gør rede for, at feltet B_0 i område III er homogent, og at B_∞/B_0 bliver

$B_\infty/B_0 \doteq 1 + (1 - (a/b)^2)\ (K_m - 1)^2/(4\ K_m)$

(opgave 1 fortsat)

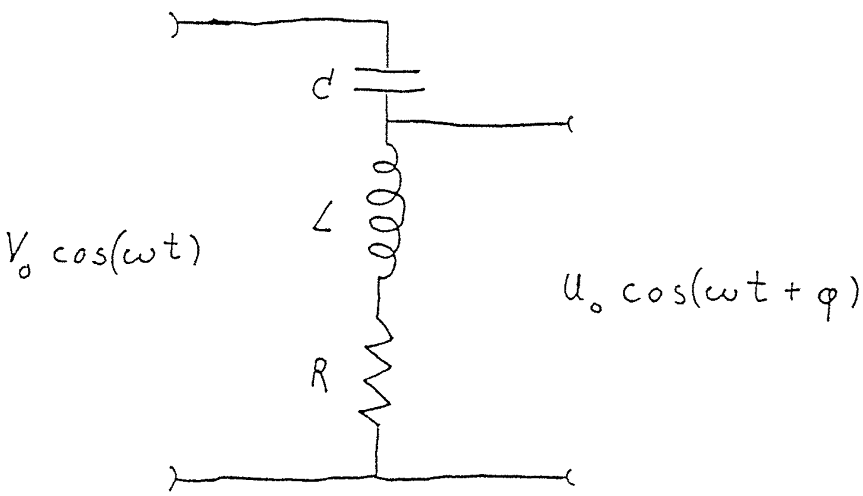
4) Foretag en rækkeudvikling af sidstnævnte udtryk i grænsen $1/K_m \ll (b - a)/a \ll 1$. Bestem, hvor tykvægget en cylinder af mumetal med $K_m = 10^5$ og med radius $a = 0{,}1$m skal være for at reducere B-feltet med en faktor 10^3.

Opgave 2

Betragt det tegnede elektriske diagram. Venstresiden tilkobles en spændingsgenerator, der leverer en vekselspænding $V_0 \cos(\omega t)$, hvor ω er den cykliske frekvens. Spændingen $U_0 \cos(\omega t + \phi)$ på højresiden måles med et voltmeter med meget høj indgangsimpedans.

1) Bestem frekvensen ω_0 ved hvilken U_0 bliver lig V_0

2) Antag $R = (L/C)^{1/2}$. Hvad bliver fasedrejningen ϕ da for $\omega = \omega_0$?

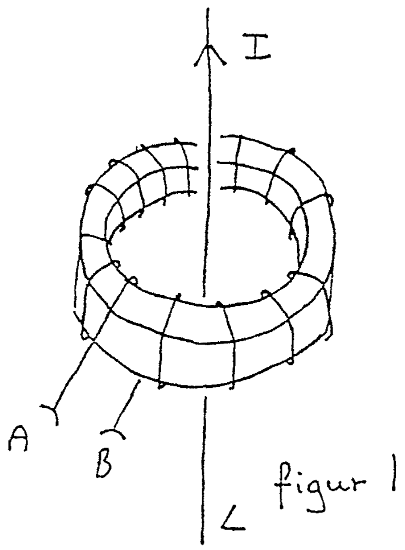


4-timers skriftlig eksamen i Fysik,mandag 9.juni 1997
Dybdekurset i Elektrodynamik side 1

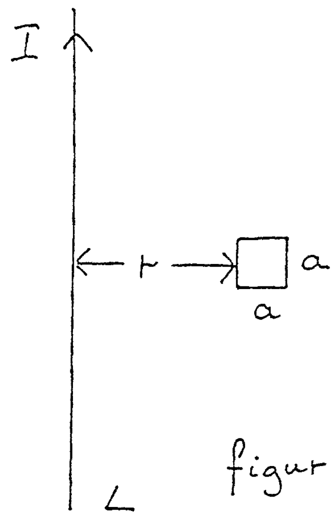
Opgave 1

På figur 1 ses en cirkulær jernring. På figur 2 er den vist i et snit indeholdende symmetriaksen. Jernet antages at have lineære magnetiske egenskaber og den relative permeabilitet er 3000. Jernringens indre radius r er 2,5 cm og dens tværsnit er kvadratisk med en sidelængde a på 0,5 cm. På jernringen er en lak-isoleret kobbertråd viklet op til en spole, hvis ender er ført ud til terminalerne A og B. Kobberbeviklingen består af 500 vindinger af en 0,3 mm diameter tråd. Kobbers specifikke modstand er $17 \cdot 10^{-9}$ Ohm·m. En anden elektrisk leder, L er ført igennem jernringen og ligger på symmetriaksen. Igennem denne løber en vekselstrøm med amplituden I = 1 A og frekvensen 50 Hz.

1) Beregn spændingen mellem de to terminaler A og B, når de ikke er forbundne.
2) Hvor stor er selvinduktionen af spolen?
3) Hvor stor er modstanden af spolen?
4) Beregn strømstyrken J i spolen når terminalerne A og B er forbundne.
5) Hvor stort er energitabet pr. periode i denne situation?
6) Hvad betyder det for svarene i 1) og 4), hvis ledningen L ikke går igennem centrum eller ikke er parallel med symmetriaksen?



figur 1



figur 2

Eksamen ,Dybdekurset i Elektrodynamik side 2

Opgave 2

1) Beregn E-feltets amplitude i vacuum for en stråle af monokromatisk planpolariseret lys med intensiteten 1 W/m^2.

Denne stråle rammer nu et ikke-ledende dielektrikum med et relativt brydningsindex på 2. Indfaldsvinklen er 60° og E-vektoren danner 45° med indfaldsplanen.

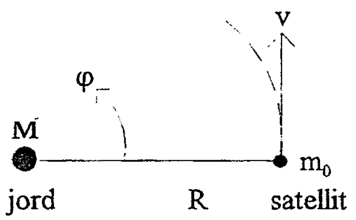
2) Hvilken vinkel danner den reflekterede bølges E-felt med indfaldsplanen.

3) Hvad bliver intensiteten af den reflekterede stråle.

------------------------- slut ---------------------------------

27. januar 1998. *Skriftlig fysik eksamen, dybdemodul relativitetsteori.* *RUC 02*
kl. 10:00 til 14:00 **(hjælpemidler tilladt)** **Lokale II**

En satellit med hvilemasse m_0 bevæger sig i en stationær, cirkulær bane med radius R omkring jorden, hvis hvilemasse M antages stor i forhold til m_0. Diskuter beskrivelsen af denne bevægelse i den generelle relativitetsteori, og vis at der ikke er grund til at forvente observerbare afvigelser fra den klassiske beskrivelse af bevægelsen. Ville det gøre nogen forskel, hvis banen ikke var cirkelformet?



Besvarelsen udformes så den omfatter svar på følgende delspørgsmål:

1) Vis at den stationære cirkelbane i Newton'sk beskrivelse, givet ved at tyngdekraft og centrifugalkraft skal balancere, kan karakteriseres ved

$$R^3 = MG\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^{-2}$$

hvor vinkelhastigheden $d\varphi/dt$ er konstant (notationen følger ovenstående figur).

2) For det sfærisk symmetriske, statiske tilfælde kan Schwarzschild løsningen til Einstein's feltligninger for den generelle relativitetsteori benyttes. For satellittens cirkelbevægelse i tyngdefeltet, der antages at foregå i planet $\theta = \pi/2$, opskrives nu de geodætiske ligninger

$$\frac{d\beta^\lambda}{d\tau_0} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\beta^\mu\beta^\nu \qquad (\lambda,\ \mu \text{ og } \nu \text{ kan alle være 1, 2, 3 eller 4; sumkonvention!})$$

(R. Mould: *Basic Relativity*, udg. 1996, angiver alle fra nul forskellige Christoffel symboler i Eq. (12.36) plus i løsning til opgave 12.6 givet på side 441; τ_0 er egentiden og hastighederne $\beta^\lambda = dx^\lambda/d\tau_0$ er i det valgte koordinatsystem givet ved Mould's Eqs. (12.38) og (12.31)).

Vis, idet $x^1 = r$ ikke endnu antages konstant lig R, at løsningerne til ligningerne for λ=2,3,4 er

$$\beta^2 = \frac{d\theta}{d\tau_0} = 0 \quad \text{(direkte antaget)}$$

$$\beta^3 = \frac{d\varphi}{d\tau_0} = \frac{L_z}{m_0 c r^2}$$

$$\beta^4 = \frac{d\tau}{d\tau_0} = \gamma^* = \frac{E}{\sigma E_0}$$

Her er $E_0 = m_0c^2$, c lyshastigheden i den speciel relativitetsteori, σ er $-g_{44}$ (Mould Eq. (12.28)), og L_z og E er integrationskonstanter givet i Mould, Eq. (12.43).

3) Find udfra den geodætiske ligning for β^1 (ved på højre side at indsætte ovenstående løsninger og benytte antagelsen om konstant radius, $\beta^1 = 0$) at vinkelhastigheden skal opfylde

$$(*) \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \sqrt{\frac{GM}{r^3c^2}} \qquad \left(\text{benyt } \frac{d\varphi}{d\tau_0} = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{d\tau_0}\right)$$

4) Udtrykket (*) er identisk med den Newton'ske grænse fundet i 1) ovenfor. Vis at L_z og E i denne grænse er lig satellittens impulsmoment langs z-aksen, $m_0R^2\, d\varphi/dt$, og dens energi

$$m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - m_0\frac{GM}{R}$$

5) Diskuter løsningen i det relativistiske tilfælde og sammenlign med diskussionen af periheldrejning, cf. Mould p. 343 nederst og opgaveteksterne 12.11 og 12.12 (disse opgaver skal ikke løses her).

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER FYSIKUDDANNELSEN

Dybdeeksamen i elektrodynamik 25.januar 1999 kl. 9.00-13.00

Alle sædvanlige hjælpemidler tilladt, herunder lommeregnere uden forbindelse med omverdenen.
Opgavesættet består af 2 opgaver på 2 sider.
Opgave 1 vægtes med 1/3 og opgave 2 med 2/3.

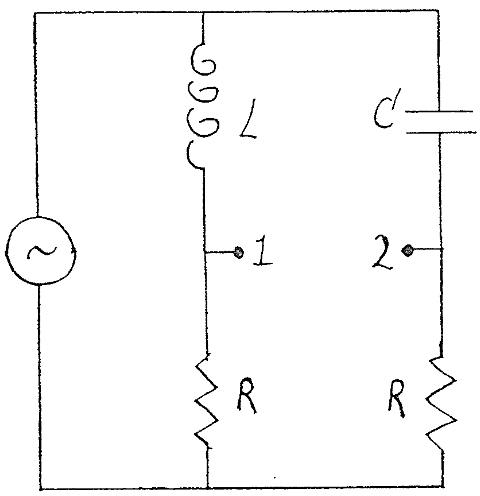
Opgave 1.

Betragt nedenstående elektriske diagram. Heri er L = 10mH , C = 2μF og R = 50Ω. Potentialet i bunden af diagrammet er 0. Spændingskilden leverer en vekselspænding med amplituden 10 V og den cykliske frekvens ω.

1) Ved hvilken frekvens er spændingsamplituderne i punkterne 1 og 2 lige store?

2) Hvad er amplituden af spændingsforskellen mellem 1 og 2 ved denne frekvens?

3) Hvad bliver fasedrejningen af spændingerne i punkterne 1 hhv 2 set i forhold til spændingen fra spændingskilden ved denne frekvens?



Dybdeeksamen i Elektrodynamik 25.januar 1999 (fortsat) side 2

Opgave 2.

Et aksial-symmetrisk **B**-felt er i et område *V* af rummet i cylinderkoordinater givet ved $\mathbf{B}(r,\theta,z) = k\cdot(-r/2\ \mathbf{e}_r + z\ \mathbf{e}_z)$, hvor k er en konstant. $\mathbf{e}_r$ og $\mathbf{e}_z$ er enhedsvektorer i hhv radiel og axial retning.

1) Ifølge een af Maxwell-ligningerne findes der ingen magnetiske monopoler. Vis, at ovenstående udtryk for **B**-feltet opfylder denne ligning.

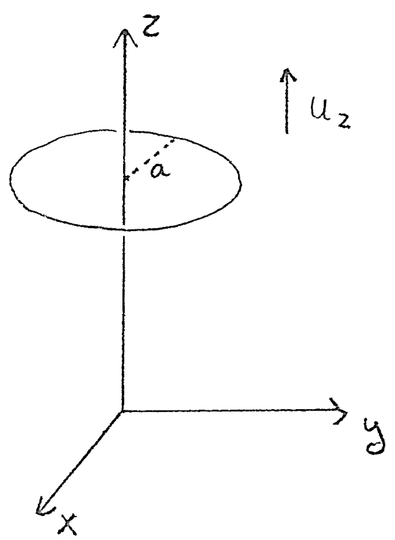
2) **B**-feltet tænkes skabt ved hjælp af nogle stationære strømme. Findes disse kilder inden i området *V* eller må de være placeret uden for *V* (evt. på randen af *V*)?

3) Vi tænker os nu en cirkulær leder med radius a placeret i ovennævnte magnetfelt. Lederen ligger i en plan vinkelret på z-aksen (se tegningen). Lederen bevæges med konstant hastighed u_z translatorisk i z-aksens retning. Beregn strømmen i lederen, når dens modstand er R, og der iøvrigt kan ses bort fra dens selvinduktion. Angiv strømmens retning.

4) Beregn den Joule'ske varme, der produceres pr.tidsenhed.

5) Find den kraft, hvormed man skal trække i lederen for at opretholde hastigheden u_z samt det arbejde, man udfører pr. tidsenhed.

6) Hvad bliver der af den ved arbejdet tilførte energi?



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER FYSIKUDDANNELSEN

Dybdeeksamen i elektrodynamik 22.januar 2001 kl. 10.00-14.00

Alle sædvanlige hjælpemidler samt lommeregnere uden forbindelse med omverdenen på niveau med eller under TI89 er tilladt.Der er een opgave med 10 spørgsmål.

Vi betragter en cylinderformet Ohm'sk leder med radius A og længde L. Symmetriaksen er z-aksen. Inde i lederen er der et lille kugleformet hulrum med radius R og centrum i (x,y,z)=(0,0,0) (se fig.1). Der gælder R << A og R << L. I såvel hulrummet (område I) som i lederen (område II) er den dielektriske permitivitet og den magnetiske permeabilitet givet ved deres vacuumværdier,hhv ϵ_0 og μ_0. Herudover er den Ohm'ske leder karakteriseret ved proportionalitet mellem det elektriske felt $\boldsymbol{E}$ og strømtætheden $\boldsymbol{J}$: $\boldsymbol{J} = g\boldsymbol{E}$, hvor g er den specifikke ledningsevne. Der løber en stationær strøm i lederen og fjernt fra hulrummet kan E-feltet antages for homogent og rettet i z-aksens retning, $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$. Alt efter hensigtsmæssighed vil vi benytte sfæriske koordinater (r,θ,ϕ) eller cylinderkoordinater (s,ϕ,z) . Azimuthalvinklen ϕ er identisk for de to systemer, mens r betegner afstanden fra origo og s afstanden fra z-aksen. Polarvinklen θ gives af $z=r\cos(\theta)$.(se fig.2).

1) Gør rede for, at $div(\boldsymbol{J})=0$ i område II.

2) Gør rede for, at potentialerne V^I og V^{II} i det indre af begge områderne I og II opfylder Laplacelignigen.

3) Opstil randbetingelserne for potentialet ved hulrummets overflade K, samt for $r\to 0$ og $r\to\infty$ (dog inden for lederen).

side 2/3

4) Vis, at

$$V^{I}(r,\theta) = -\frac{3}{2}E_0 r\cos(\theta)$$

$$V^{II}(r,\theta) = -E_0 r\cos(\theta) - \frac{1}{2}E_0\frac{R^3}{r^2}\cos(\theta)$$

tilfredsstiller 2) og 3).

5) Beregn E-feltet i område I og II. Giv udtrykkene i både sfæriske og cylinderkoordinater.

6) Beregn overfladeladningstætheden σ på hulrummets overflade.

7) Udtryk strømtætheden i lederen i cylinderkoordinater.

8) Betragt nu en cirkelflade C vinkelret på z-aksen.Den har centrum i koordinaten z på z-aksen og radius s, (s<A). C kan ligge helt indenfor K (fig.3), skære K (fig.4) eller ligge udenfor K (fig.5). Sæt

$$s_0(z) = \left\{ \begin{array}{cl} (R^2-z^2)^{1/2} & ,|z|<R \\ 0 & ,|z|>R \end{array} \right\}$$

$s_0(z)$ er radius i den cirkel, der fremkommer, hvis C skærer K. Vis, at den samlede strøm igennem C er

$$I(z,s) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & ,s<s_0(z) \\ gE_0\pi s^2\{1-(\frac{R^2}{z^2+s^2})^{3/2}\} & ,s>s_0(z) \end{array} \right\}$$

9) Bestem B-feltets komposant B_ϕ i område I og II.

10) Vis, at B_z og B_s begge er 0 i område I og II. (Vink: Vis enten, at Maxwellligningerne for $\boldsymbol{B}$ derved opfyldes eller brug symmetriargumenter på vektorpotentialet $\boldsymbol{A}$)

side 3/3

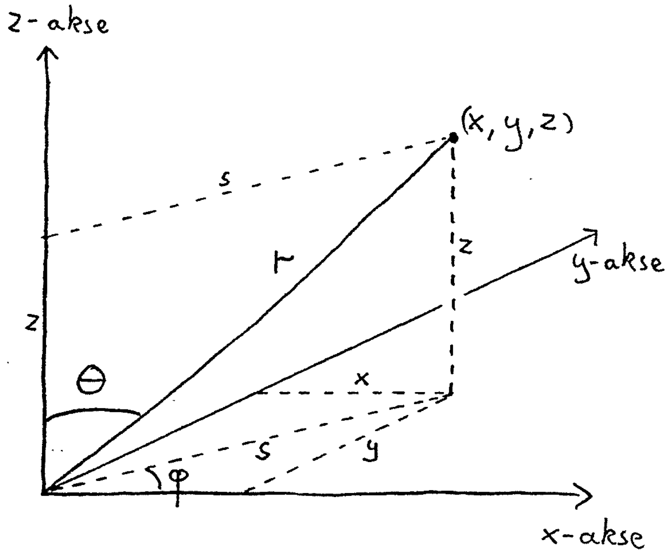


fig. 2
Sammenhænge mellem Cartesiske (x,y,z), sfæriske (r, θ, φ) og cylindriske (s, φ, z) koordinater

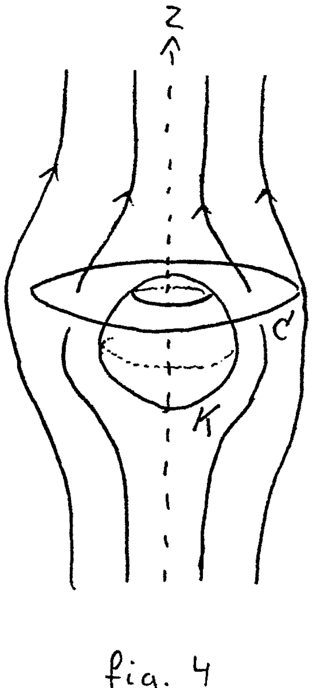


fig. 4
C' skærer K

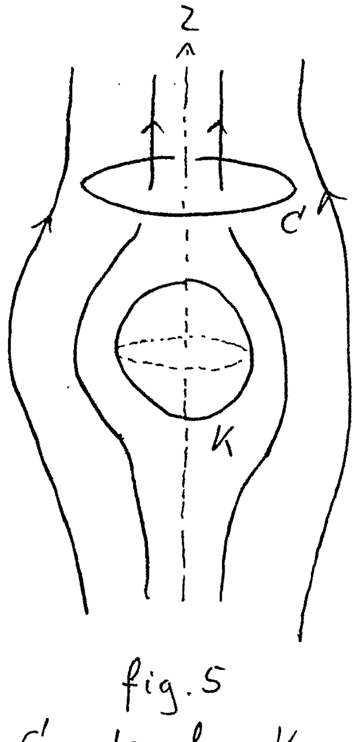


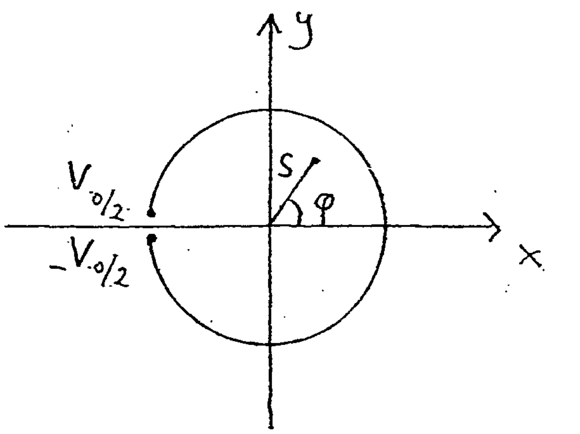
fig. 5
C' uden for K

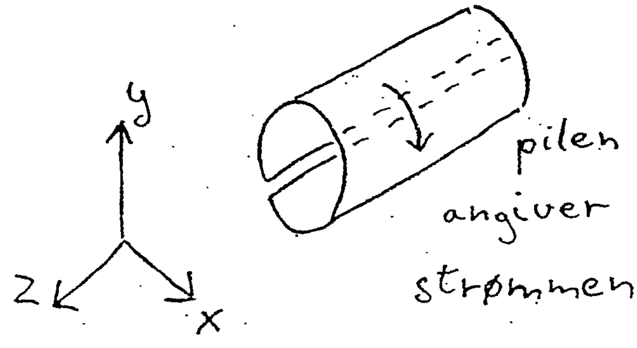
ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER FYSIKUDDANNELSEN

Dybdeeksamen i elektrodynamik 24.januar 2003 kl. 10.00-14.00

Alle sædvanlige hjælpemidler samt lommeregnere uden forbindelse med omverdenen på niveau med eller under TI89 er tilladt. Mobiltelefoner må ikke medbringes. Der er een opgave med 12 spørgsmål.

I denne opgave benyttes alt efter hensigtsmæssighed rektangulære koordinater, (x, y, z) eller cylinder-koordinater, (s, ϕ, z), hvor $x = s\cos(\phi), y = s\sin(\phi)$. Vi betragter en uendelig lang opslidset cylinderflade givet ved radius a og azimuthalvinkel $-\pi < \phi < \pi$. På linien givet ved $s = a$ og $\phi = \pi$ sidder et batteri således at potentialet lige over x-aksen er $V_0/2$ og lige under er $-V_0/2$. Cylinderfladen er Ohmsk ledende med ledningsevnen γ pr. længdeenhed i z-aksens retning.
Geometrien er således som i opgave 7.41 i lærebogen af D. J. Griffiths, men der spørges her til andre fysiske aspekter af denne model for et elektrisk kredsløb. Et evt. kendskab til løsning af opgave 7.41 er derfor ikke af betydning for denne eksamensopgave.





z-akse ud af papirets plan

1) Beregn strømmen, K og den afsatte effekt, begge pr. længdeenhed i z-aksens retning.

2) Den Ohmske leder er ikke en ækvipotentialflade; men potentialet på den er givet ved $V(s=a,\phi) = V_0 \frac{\phi}{2\pi}$ som funktion af vinklen ϕ. Begrund dette.

3) Gør rede for, at potentialet i rummet (vacuum) for såvel $s<a$ som $s>a$ i den stationære situation må opfylde Laplaces ligning.

Vi interesserer os i det følgende kun for området $s<a$.

4) Vis, ved indsættelse, at

$$V(x,y,z) = k\, Arctan\left(\frac{y}{a+x}\right)$$

løser Laplaces ligning. Her er k en konstant.

5) Vis, at $k=\frac{V_0}{\pi}$. (hjælp: $\tan\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\sin(u)}{1+\cos(u)}$)

6) Karakteriser ækvipotentialfladerne og skitser udseendet af ækvipotentialflader og E-feltlinier.

7) Beregn E-feltkomposanterne E_s og E_ϕ

8) Beregn B-feltet.

9) Skitser feltlinier for Poyntingvektoren.

10) Vis, at den radielle komposant af Poyntingvektoren S_s er

$$\gamma \frac{V_0^2}{\pi} \frac{a\cos(\phi)+s}{a^2+s^2+2as\cos(\phi)}.$$

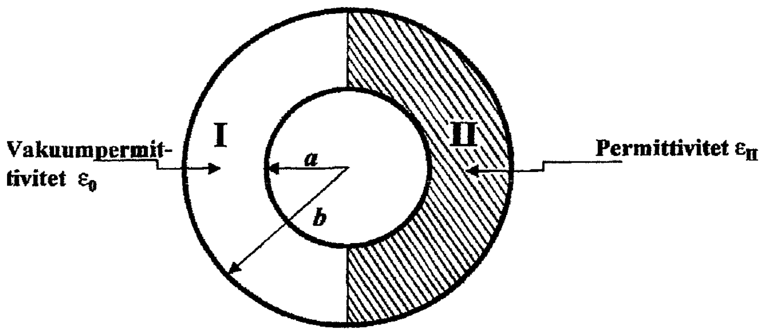
11) Beregn ved brug af resultatet i 10) den samlede energimængde, der strømmer ind i den Ohmske leder via det elektromagnetiske felt pr. tidsenhed og pr. længdeenhed i z-aksens retning.

12) Beregn normal- og tangentialkomposanten af det mekaniske stress (kraft pr. areal) det elektromagnetiske felt fra den indre side påvirker den Ohmske leder med.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Elektrodynamik
Tirsdag 25. januar 2005 kl. 10.00 - 14.00

Sædvanlige hjælpemidler tilladt, herunder en simpel lommeregner uden symbolsk formel manipulation og uden forbindelse med omverdenen.
Opgavesættet består af TO opgaver på TRE sider med hver 5 delspørgsmål.
Alle 10 delspørgsmål vægtes ligeligt i vurderingen.

Opgave 1. To tynde, koncentriske kugleskaller af metal har radius hhv. a og b ($a < b$). På den inderste kugleskal befinder sig ladningen $+Q$, på den yderste kugleskal ladningen $-Q$. Kugleskallerne befinder sig i vakuum. Halvdelen af rummet mellem kugleskallerne er dog fyldt med en skal af et dielektrikum med permittivitet ε_{II} (dielektricitetskonstant $\varepsilon_{r,II} = \varepsilon_{II}/\varepsilon_0$, hvor ε_0 er vakuumpermittiviteten). Se iøvrigt figur.



1.1) Angiv et udtryk for det elektriske felts størrelse og retning overalt i rummet.

1.2) Beregn ladningsfordelingen på den indre metalkugleoverflade.

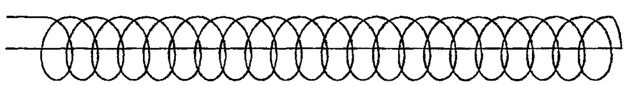
1.3) Systemet kan betragtes som en kuglekapacitor. Angiv den totale kapacitet, C, samt kapaciteten af de to halvdele I og II af systemet, svarende til halvdelen af kuglekapacitoren uden dielektrika (I) henholdsvis med dielektrika (II) (se figur).

1.4) Beregn den bundne ladningstæthed (polarisationsladning) overalt på overfladen af dielektrikummet.

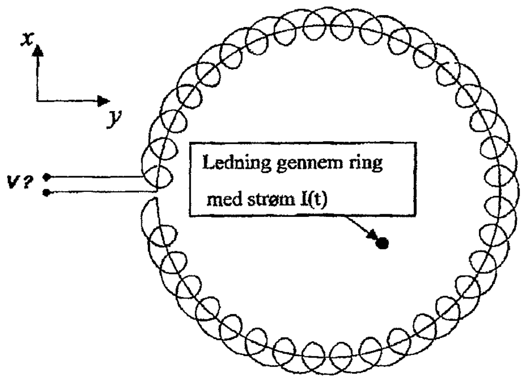
1.5) Beregn den bundne ladningstæthed (polarisationsladning) i det indre af dielektrikummet.

OPGAVESÆTTET FORTSÆTTES NÆSTE SIDE

<u>**Opgave 2.**</u> En solenoide med længde l er tæt viklet med N vindinger, hver med areal A. Solenoiden er konstrueret som vist nedenfor, hvor enden af metaltråden, der viklet op til solenoide, føres tilbage gennem solenoiden som afslutning på viklingen. Metaltråden kan betragtes som uendelig tynd.



Et måleredskab til måling af vekselstrøm konstrueres ved at bukke solenoiden i en ring, som vist på figuren nedenfor. Den strømførende ledning, der skal måles på, passerer gennem ringen, der er dannet af solenoiden. Ringen er placeret i xy planen. På figuren ses tværsnittet af ledningen, der kan betragtes som en uendelig lang lige leder med strøm I(t). Det kan antages, at vindingerne i solenoiden står vinkelret på xy planen.



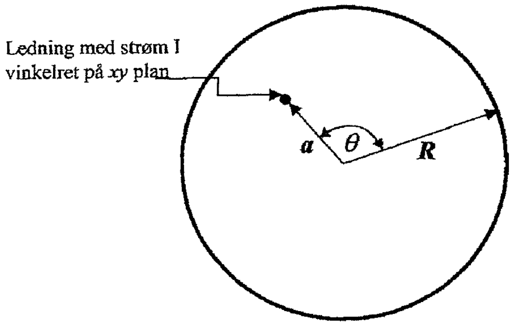
2.1) Den magnetiske flux, Φ, gennem solenoiden, er givet ved $\Phi = \mu_0(NA/l)I$, hvor I er strømmen, der ønskes målt. Hvis der går strømmen $I(t) = I_o \cos(\omega t)$ gennem den ledning, der måles på, hvad er så spændingen V mellem solenoidens terminaler, angivet på figuren?

2.2) Vis at den magnetiske flux, Φ, gennem solenoiden, som ovenfor angivet, er givet ved $\Phi = \mu_0(NA/l)I$, hvor I er strømmen, der ønskes målt. *(Vink: Det er i dette spørgsmål ikke nødvendigt at antage noget om den strømførende lednings placering).*

2.3) Hvorfor er solenoidetråden ført tilbage gennem solenoiden?

OPGAVESÆTTET FORTSÆTTES NÆSTE SIDE

2.4) En strømførende ledning med strøm I, passerer vinkelret gennem solenoide-ringens plan (*xy* planen) i en afstand *a* fra ringens centrum (se figur nedenfor – vindingerne er ikke tegnet på denne figur). Ringens radius er *R*. Vis ved eksplicit beregning, at den magnetiske flux, Φ, gennem solenoiden fra den strømførende ledning gennem ringen, er uafhængig af *a*, såfremt $a < R$ (i overenstemmelse med resultatet i 2.1), mens fluxen gennem solenoiden er 0 for $a > R$. Arealet af solenoide vindingerne er relativt lille, så magnetfeltets variation hen over en enkelt vinding kan negligeres.



Nyttigt at vide:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,d\theta = \frac{2\pi}{1 - x^2} \qquad x^2 < 1$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,d\theta = \frac{2\pi x}{1 - x^2} \qquad x^2 < 1$$

2.5) Solenoidens terminaler forbindes via en modstand, så den samlede modstand i solenoidekredsløbet, R_Ω, er 500 Ω.
Det ønskes eftervist, at den inducerede 'back emf' i solenoidekredsløbet er negligibel sammenlignet med den spænding, der blev regnet ud i 2.1). Som eksempel anvendes følgende størrelser: Antallet af vindinger i solenoiden er 1000, radius i de cirkulære solenoide vindinger er 0.5 cm, radius af solenoide ringen, *R*, er 10 cm. Vekselstrømmen i den lange lige leder har amplituden 1A og frekvensen 50 Hz. Vakuumpermeabiliteten μ_0 er $4\pi\ 10^{-7}$ N/A^2.
Magnetfeltets variation hen over en enkelt solenoide vinding kan negligeres.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Elektrodynamik
Torsdag 25. januar 2007 kl. 10.00 - 14.00
Sædvanlige hjælpemidler tilladt, herunder en simpel lommeregner uden symbolsk formelmanipulation og uden forbindelse med omverdenen.
Opgavesættet består af **2** opgaver på **2** ark papir.
Opgavesættet består af 10 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen.

Eksamensopgave 1

Ved lave temperaturer bliver mange metaller superledende. Modstanden forsvinder i superlederne, fordi deres ladningsbærere (som har ladning q, masse m, og tæthed n) ikke vekselvirker med hinanden.

(1) Vis, at strømtætheden $\vec{J}$ for en ideal leder uden modstand, dvs. en superleder, er givet ved

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{E}, \tag{1.1}$$

hvor $\vec{E}$ er den elektriske feltstyrke, μ_0 vakuum permeabiliteten og λ er en konstant. Udtryk sammenhængen mellem λ og ladningsbærerkonstanterne n, q, og m.

(2) Antag, at strømtætheden er givet ved

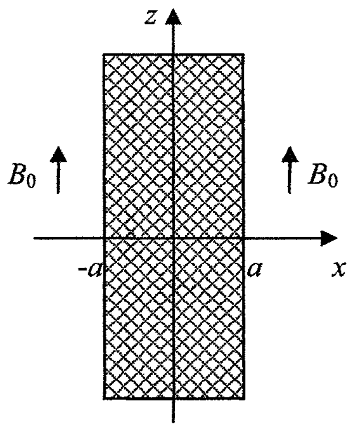
$$\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{A}, \tag{1.2}$$

hvor $\vec{A}$ er vektorpotentialet. Vis at $\vec{J}$ i (1.2) opfylder ligning (1.1) for konstant λ.

(3) Udled på basis af ligning (1.2) sammenhængen mellem strømtætheden $\vec{J}$ og den magnetiske flukstæthed $\vec{B}$ og vis, at sidstnævnte under stationære betingelser opfylder

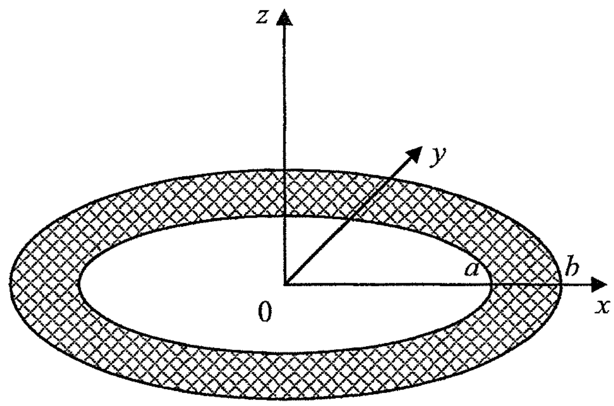
$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}. \tag{1.3}$$

En superledende plade med tykkelsen $2a$ langs x-aksen, strækker sig uendeligt i xy-planen. I rummet uden for pladen er der et homogent magnetfelt, som peger i z-retningen med flukstætheden $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ (se figuren).



(4) Find den stedafhængige magnetiske flukstæthed inde i pladen.
(5) Beregn den stedafhængige strømtæthed.

Eksamensopgave 2
En helt flad ring med indre radius a og ydre radius b placeres i xy-planen. Den bærer en konstant fladeladningstæthed σ, og dens tykkelse i z-aksens retning kan negligeres. Figuren viser geometrien i kartesiske koordinater, men andre koordinat systemer må gerne benyttes efter behov.



(1) Vis, at det elektrostatiske potentiale V på z-aksen kan skrives

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right), \tag{2.1}$$

hvis nulpunktet for potentialet er i det uendeligt fjerne.

(2) Angiv ved brug af symmetri-argumenter det elektriske felt $\vec{E}$ i origo og en tilnærmelse for $\vec{E}$ på z-aksen langt fra ladningsfordelingen ($z \gg b$). Find alle komposanter af det elektriske felt i alle punkter langs z-aksen.

(3) Ud fra potentialet $V(z)$ langs z-aksen givet ved ligning (2.1), kan potentialet i hele rummet (uden for den flade ring) direkte findes fra Laplace ligningen. Potentialet beskrives bedst i sfæriske koordinater, og det kan med fordel rækkeudvikles i en potensrække i afstanden r fra origo. Angiv de førende to led af en sådan potens række af potentialet i området $r < a$.

Ringen sættes til at rotere om z-aksen med konstant vinkelhastighed ω (og mod uret på tegningen).

(4) Beregn ringens magnetiske dipolmoment og angiv den resulterende fluksstæthed langt fra ringen.

(5) Bestem alle komposanter af den magnetiske fluksstæthed langs rotationsaksen og sammenlign med fjernfeltet fra (4).

Opgavesættet slut

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Elektrodynamik
Fredag 15. juni 2007 kl. 10.00 - 14.00
Sædvanlige hjælpemidler tilladt, herunder en simpel lommeregner uden symbolsk formelmanipulation og uden forbindelse med omverdenen.
Opgavesættet består af **2** opgaver på **3** ark papir.
Opgavesættet består af 9 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen.

Eksamensopgave 1

I en uendelig lang cylindrisk metalstang med radius a løber den konstante strøm I, som kan antages jævnt fordelt over tværsnittet. Stangen er umagnetisk og dens permeabilitet er derfor lig med vakuumpermeabiliteten μ_0.

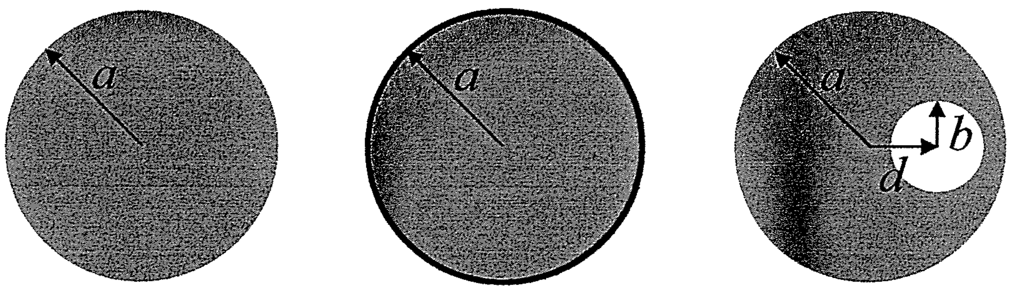
1.1) Angiv for hvert område, inde i stangen og udenfor, størrelse og retning af den magnetiske flukstæthed $\vec{B}$ og vektorpotential $\vec{A}$. Man kan med fordel benytte cylinderkoordinatsystemet (s,θ,z) med z -aksen langs stangens akse.

Stangen antages herefter omgivet af en ledende cylinderskal med forsvindende tykkelse. Skallen, som er elektrisk isoleret fra stangen med en ligeledes uendelig tynd isolator, kan antages at have samme radius a som stangen. I skallen løber en konstant strøm af samme størrelse I, som i stangen men i modsat retning.

1.2) Angiv energien af det elektromagnetiske felt pr. længde i stangens længderetning z, og bestem selvinduktionskoefficienten L (induktansen) pr. længde.

Endelig betragtes metalstangen atter uden cylinderskal, men nu i stedet med et akse-parallelt cylindrisk hul med radius b. Hullet er umagnetisk og dets akse er forskudt med afstanden d fra stangens akse, som vist i figur 1.3. Strømmen antages jævnt fordelt i lederens tværsnit.

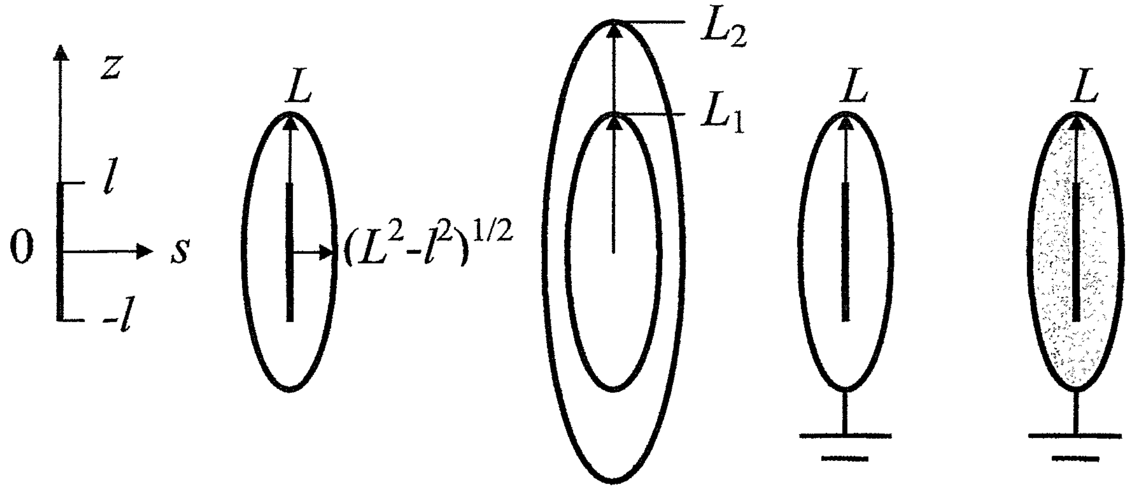
1.3) Vis at den magnetiske flukstæthed er konstant i hulrummet (udnyt superpositionsprincippet). I hvilken retning peger $\vec{B}$?



Delopgave 1.1 Delopgave 1.2 Delopgave 1.3
Tværsnit i xy-planen af stangen for hver af de tre delopgaver: (1.1) Metalstang, (1.2) Metalstang med tynd ledende skal isoleret fra metalstang (1.3) Metalstang med forskudt cylinderhul.

Eksamensopgave 2

En stav med længden $2l$ og en forsvindende lille tykkelse, er placeret fra $z=-l$ til $z=l$ langs z-aksen (se figur).



Delopgave 2 2.2 2.3 2.4 2.5

Staven bærer en ladning pr. længde λ, som er konstant i både rum og tid.

2.1) Bestem det elektriske potential $V(s,\varphi,z)$ fra den ladede stang i cylinderkoordinater i hele rummet, idet vi lægger nulpunktet for potentialet i det uendeligt fjerne. Beregn det elektriske felt $\vec{E}$ langs z-aksen og langs den radiale retning s ved $z=0$.

Følgende integral kan benyttes: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

2.2) Vis, at alle punkter på en rotationsellipsoide givet ved $\frac{s^2}{L^2-l^2}+\frac{z^2}{L^2}=1$ har same potential $V(\text{rotationsellipsoide}) = cQ\ln\left(\frac{L+l}{L-l}\right)$, hvor L beskriver størrelsen af rotationsellipsoiden, Q er den totale ladning på staven. Bestem konstanten c.

Det kan benyttes, at rotationsellipsoiden kan beskrives i parameterfremstilling med parameteren t (se figuren)

$$s=\sqrt{L^2-l^2}\sin t \quad \text{og} \quad z=L\cos t$$

2.3) Udnyt den særlige egenskab af potentialet, at dets ækvipotentialflader er rotationsellipsoider, til at beregne kapacitansen C af en kondensator dannet af to metalflader formet som koncentriske rotationsellipsoider med størrelsesparametrene L_1 og L_2. Permittiviteten i rummet mellem kondensatorfladerne er vakuumpermittiviteten ε_0.

2.4) Staven tænkes omgivet af en leder forbundet med jord og formet som en rotationsellipsoide med midtpunkt i origo og størrelsesparameter L (som vises i figuren). Rummet imellem har vakuumpermittiviteten ε_0. Beregn overfladeladningstætheden σ på toppen $(s=0, z=L)$ og i skæringen med xy-planen $\left(s=\sqrt{L^2-l^2}, z=0\right)$.

2.5) Rummet mellem staven og den jordforbundne leder fra delopgave 2.4 bliver nu fyldt med et lineært materiale (se figuren), som har en relativ permittivitet ε_r og en resistivitet ρ. Staven bliver afladet med tiden. Find tidsafhængigheden af stavens ladning, idet staven bærer en total ladning Q_0 til tiden $t=0$.

2.6) Stavens ladningstæthed er fortsat tidsuafhængig, men afhænger nu af z som følger:

$$\lambda = \begin{cases} k & \text{for} \quad |z| \geq \frac{l}{2} \\ -k & \text{for} \quad |z| < \frac{l}{2} \end{cases}$$

Angiv det første ikke-forsvindende led i multipoludviklingen af det elektriske potential for denne ladningsfordeling.

Opgavesættet slut

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Elektrodynamik
Fredag 18. januar 2008 kl. 10.00 - 14.00

Sædvanlige hjælpemidler tilladt, herunder en simpel lommeregner uden symbolsk formelmanipulation og uden forbindelse med omverdenen.
Opgavesættet består af 2 opgaver på 2 ark papir.
Opgavesættet består af 9 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen.

Eksamensopgave 1

To lange, koncentriske, tyndvæggede cylindre har begge længden L og radier henholdsvis R_1 og R_2 $(R_1 < R_2 \ll L)$. På den inderste cylinder er der fikseret en positiv ladning $+Q$ og på den yderste cylinder en negativ ladning $-Q$. Cylindrene befinder sig i vakuum. Der ses bort fra randeffekter.

1) Angiv størrelse og retning af den elektriske feltstyrke $\vec{E}$ i afstanden r fra cylindrenes fælles akse. Angiv systemets kapacitans C og den samlede elektrostatiske energi U_{el}.

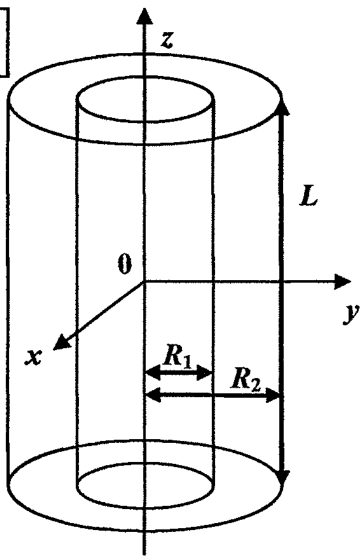
Cylindrene drejer nu om deres fælles z -akse i samme positive retning med samme konstante vinkelhastighed ω.

2) Angiv størrelse og retning af den magnetiske flukstæthed $\vec{B}$ i afstanden r under antagelsen at der ikke er noget magnetfelt langt væk fra cylinderen. Udregn den samlede energi i magnetfeltet U_m.

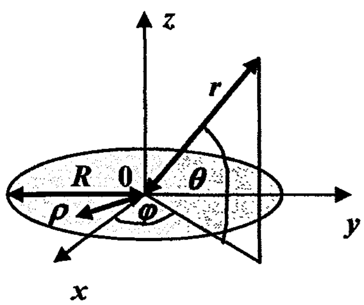
3) Vis, at der er en strøm af elektromagnetisk energi af størrelsen $U_{el}\omega/\pi$ i mellemrummet mellem cylinderne. I hvilken retning løber denne energistrøm?

4) De to cylindre er begge påvirket af elektromagnetiske kræfter. I hvilken retning peger disse? Beregn trykket både på den ydre og på den indre cylinder indre cylinder.

Opgave 1



Opgave 2



Eksamensopgave 2

En tynd, flad, ledende cirkulær skive med radius R ligger i xy-planen med centrum i origo omgivet af vakuum. Skiven holdes på et konstant potential V_0 og nulpunktet for potentialet er i det uendeligt fjerne. Det fører til en ladningstæthedsfordeling

$$\sigma = \frac{k}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \tag{2.1}$$

som er afhængig af afstanden ρ til centrummet, og hvor k er en konstant.

1) Find det elektriske potentiale langs hele z-aksen og skitsér det elektriske felt i xy-planen.

2) Der indføres sædvanlige sfæriske koordinater med afstanden r fra origo, azimutvinklen φ og polarvinklen θ. Vis, at de to første led i multipoludviklingen af det elektriske potential for et punkt med $r \gg R$ er givet ved

$$V = \frac{2V_0}{\pi}\left(\left(\frac{R}{r}\right)P_0(\cos\theta) - \frac{1}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^3 P_2(\cos\theta)\right) \tag{2.2}$$

3) Find de to første led for et punkt med $r \ll R$.

4) Bestem skivens kapacitans C.

5) Diskuter (kun kvalitativ) ændringerne i det elektriske felt, i ladningen og i kapacitansen hvis halvrummet med $x < 0$ bliver fyldt med et lineært dielektrisk materiale med susceptibiliteten χ.

Matematisk nødhjælpskasse

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{b^2 + x^2}}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$$

$$\arcsin\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + O\left(x^7\right)$$

OPGAVESÆTTET SLUT

Roskilde Universitet

Dybedemoduleksamen i elektrodynamik

Friday 30. January, 2009. 10.00-14.00

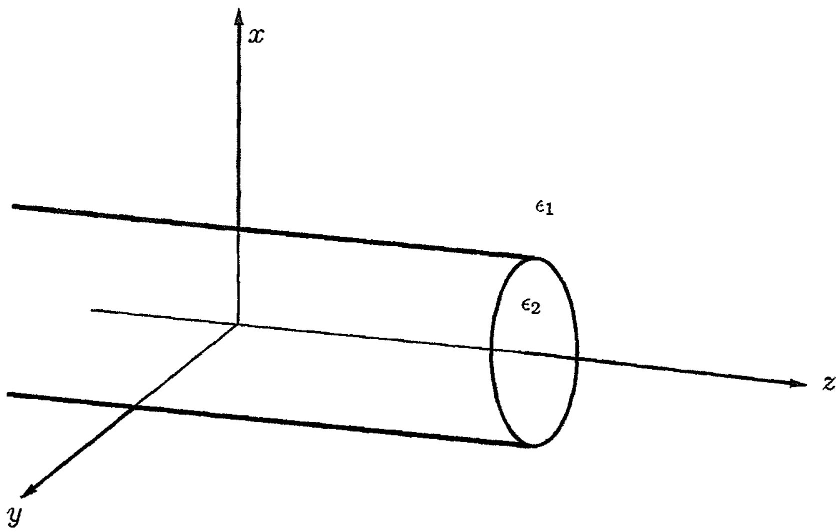
ONLY PERSONAL HELP-MATERIALS ALLOWED: NO COMMUNICATION WITHIN OR OUT FROM THE EXAM ROOM

Question 1 and Question 2 are independent. Each subquestion is weighted equally.

This exam has three pages.

Question 1

A homogeneous displacement field, $\mathbf{D_0} = \mathbf{D_0}\hat{\mathbf{x}}$, is applied along the x-axis in a linear dielectric material with dielectric constant ϵ_1. (Imagine that the dielectric material extends to infinity in all directions). An infinitely long dielectric cylindrical rod of radius R and the dielectric constant ϵ_2 is then placed with its axis along the z-axis perpendicular to the D-field.



Use cylindrical coordinates (s, ϕ, z) in the following.

1 The electrostatic potential, V, is given by Laplace's equation both outside and inside the cylindrical rod. Explain why.

2 Determine the boundary conditions for the electrostatic potential.

3 Show that the electrostatic potential is given by:

$$
\begin{aligned}
V(s,\phi) &= V_1(s,\phi) = -E_0 s\cos(\phi) + \frac{R^2 E_0}{s}\left(\frac{-2}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}+1}+1\right)\cos\phi \quad \text{for} \quad s > R \\
V(s,\phi) &= V_2(s,\phi) = \frac{-2E_0}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}+1} s\cos(\phi) \quad \text{for} \quad s < R
\end{aligned}
$$

where $E_0 = \frac{D_0}{\epsilon_1}$

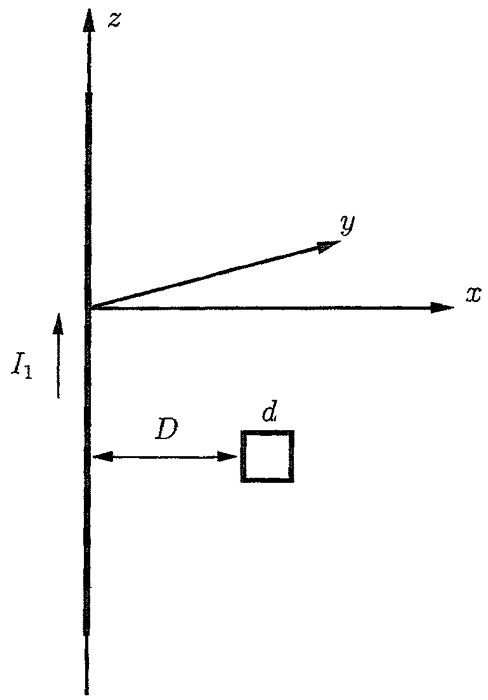
4 Find the bound surface charge (polarization charge) density at the surface of the cylinder.

5 Find the electric field inside the cylinder.

6 Answer questions 4 and 5 in the special case where $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Is the result you have obtained physically consistent?

7 Which physical system corresponds electrtostatically to the limit $\epsilon_2 \to \infty$?
Discuss it briefly.

Question 2



A long straight wire runs along the z-axis. A small square loop of wire is place in the z-x-plane a distance D away from the wire as shown in the figure above. The sides of the loop have length d and $d \ll D$.

For time $t < 0$ the electrical current in the straight wire is zero. At time $t = 0$ a current $I_1(t)$ with a constant growth rate k starts flowing in the wire, such that for $t > 0$ we have $I_1(t) = kt$.

1 Determine the magnetic field, $\mathbf{B}_1(x, y, z, t)$, generated by the current in the straight wire.

2 Determine the electromotive force generated in the small loop by the magnetic field from question 1.

3 The small loop has an ohmic resistance R and a self inductance L. Find the current $I_2(t)$ generated in the small loop, and show that it grows towards a limiting value. Make a sketch to show the direction of this current.

In the following three sub-questions we study the system at infinite time, $t \to \infty$, where the current $I_2(t)$ has reached its limiting value.

4 Determine the magnetic dipole moment of the loop.

5 Determine the torque on the loop and comment on the stability. orientation.

6 Determine the force on the loop.

Roskilde Universitet

Dybedemoduleksamen i elektrodynamik

Tuesday 24. February, 2009. 10.00-14.00

ONLY PERSONAL HELP-MATERIALS ALLOWED: NO COMMUNICATION WITHIN OR OUT FROM THE EXAM ROOM

Question 1 and Question 2 are independent. Each subquestion is weighted equally.

This exam has 2 pages.

Question 1

An electromagnetic wave is described by (in spherical coordinates).

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(r,\theta,\phi,t) &= E_0\frac{\sin\theta}{r}\left[\cos(kr-\omega t)-\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}\\
\mathbf{B}(r,\theta,\phi,t) &= \frac{2E_0\cos\theta}{\omega r^2}\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{1}{kr}\cos(kr-\omega t)\right]\hat{\mathbf{r}}\\
&\quad+\frac{E_0\sin\theta}{\omega r}\left[\left(\frac{1}{kr^2}-k\right)\cos(kr-\omega t)+\frac{1}{r}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}$$

1 Draw a sketch that illustrates the propagation of the wavefronts. Indicate the direction of the electrical field on the sketch.

For notational convenience, let $(kr-\omega t)\equiv u$ and note that the chain rule gives $\frac{\partial}{\partial r}\cos u=-k\sin u$, $\frac{\partial}{\partial r}\sin u=k\cos u$, $\frac{\partial}{\partial t}\cos u=\omega\sin u$, and $\frac{\partial}{\partial t}\sin u=-\omega\cos u$.

2 Show that Gauss's law is obeyed.

3 Show that Faraday's law is obeyed.

4 Which other Maxwell equations must be obeyed?

5 Find the Poynting vector $\mathbf{S}$.

6 By averaging, $\mathbf{S}$, over a full cycle one can find the intensity which is time independent and is given by : $I=\langle\mathbf{S}\rangle=\frac{E_0^2k\sin^2\theta}{2\mu_0\omega r^2}\hat{\mathbf{r}}$. Comment on the r-dependence and the direction seen in this expression.

Question 2

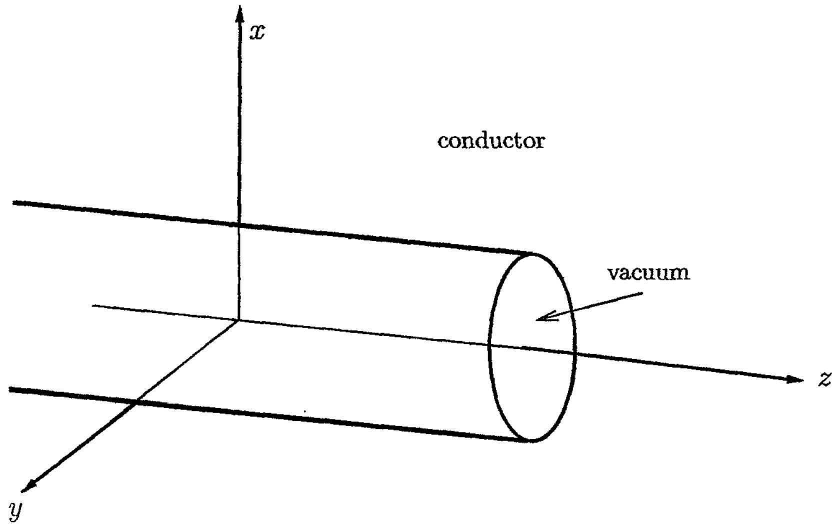
There is an infinitely long cylindrical hole of radius R in the conductor with its axis along the z-axis perpendicular to the E-field. (Imagine that the conductor extends to infinity in all directions).

There is an electric field, which is given by $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{x}}$ far away from the cylinder.

A stationary current is flowing in the conductor. Because the conductor is ohmic there is proportionality between the electric field and the current density: $\mathbf{j} = g\mathbf{E}$.

The permittivity and permeability both inside the conductor and in the cylindrical hole have the vacuum values, ϵ_0 and μ_0.

It is in most cases easiest to use cylindrical coordinates (s, ϕ, z) in the following.



1 Show that $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ in the conductor.

2 The electrostatic potential, V, is given by Laplace's equation both outside and inside the cylindrical hole. Explain why.

3 Determine the boundary conditions for the electrostatic potential.

4 Show that the electrostatic potential is given by:

$$
\begin{aligned}
V(s,\phi) &= V_1(s,\phi) = -E_0 s\cos(\phi) - E_0\frac{R^2}{s}\cos(\phi) \quad s > R \\
V(s,\phi) &= V_2(s,\phi) = -2E_0 s\cos(\phi) \quad \text{for} \quad s < R
\end{aligned}
$$

5 Find the electric field inside the cylinder and in the conductor.

6 Find the surface charge density at the surface of the cylinder.

7 Make a sketch of the charge and the electrical field in the x-y plane.

Roskilde Universitet

Dybdemoduleksamen i elektrodynamik

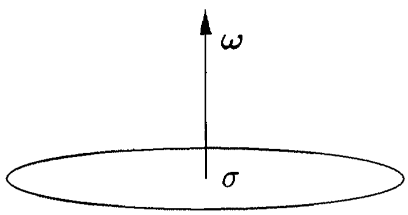
Fredag d. 21. Januar, 2011. 10.00-14.00

Alle almindelige hjælpemidler, samt lommeregner med symbolsk manipulation er tilladt. Kommunikation med andre i eller uden for lokalet er ikke tilladt.

Sættet består af to uafhængige opgaver. Hvert underspørgsmål har den samme vægt i bedømmelsen.

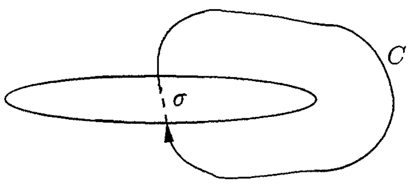
Spørgsmål 1

En cirkulær skive med radius R har en homogen ladningsfordelingen σ og roterer med en jævn vinkelhastighed ω. Rotationsaksen går gennem skivens centrum og er vinkelret på skiven, som illustreret i figuren nedenfor.



1 Hvad er overflade strømtætheden $\mathbf{k}$?

En lukket integrationsvej, C, lægges så den starter i skivens centrum og går rundt om skiven som illustreret nedenfor.

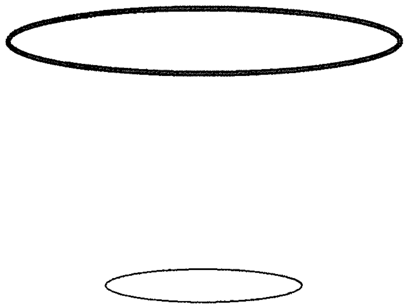


2 Bestem integralet $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ langs denne integrationsvej.

3 Hvad er skivens magnetiske dipolmoment?

4 Angiv et approximativt udtryk for skivens B-felt i et fjerntliggende punkt, som har afstanden d fra skivens centrum, hvor $d >> R$.

En cirkulær lukket ledning med radius R_2 placeres i afstanden d over skiven på samme akse som skiven, og i et plan der er parrallet med skiven, som vist i figuren nedenfor. Som før antages $d >> R$.

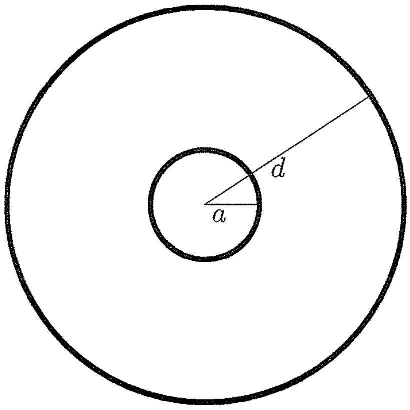


5 Brug B-feltet fra spørgsmål 4 og bestem B-felts-fluxen gennem den cirkel ledningen danner. Vink: overvej dit valg af integrationsoverflade.

6 Induceres der strøm i ledningen? Begrund dit svar.

Spørgsmål 2

En kuglekapacitor består af to koncentriske sfæriske elektroder med hhv. radius a og radius d som illustreret nedenfor.

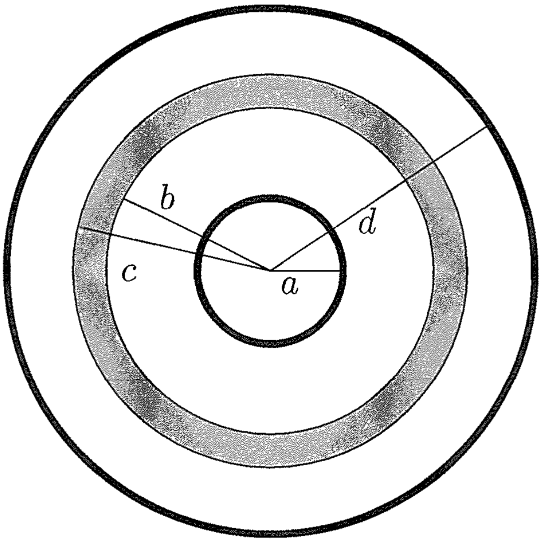


1 Hvad er kuglekapacitor kapacitans?

2 Hvor meget arbejde kræver det at oplade kapacitor med en ladning Q ($+Q$ på den inderste elektrode og $-Q$ på den yderste).

3 Antag at kapacitoren er opladet med en ladning Q og beregn den elektrostatiske energi udfra energitætheden i E-feltet. Kommenter på relationen til spørgsmål 2.

Et sfærisk lag af dielektrikum placeres nu mellem elektroderne. Dielektrikaet har indre radius b og ydre radius c som illustreret i figuren nedenfor. Dielektrikaet er lineært og har den relative dielektricitetskonstant ϵ_r.



Antag igen at kapacitoren er opladet med en ladning $+Q$ på den indre elektrode og $-Q$ på den ydre elektrode.

4 Angiv et udtryk for D-feltet og et udtryk for E-feltet overalt i rummet.

5 Hvad er nu kuglekapacitorens kapacitans?

6 Bestem densiteten af den bundne overfladeladning på indersiden af dielektrikaet (dvs. i afstanden b fra kuglens centrum).

7 Hvilke randbetingelser skal E-feltet opfylde? Godtgør at disse randbetingelser er opfyldt i hhv. afstanden a og afstanden b fra kuglens centrum.

Dielektrikaet erstattes nu af en ideel leder.

8 Hvad er kuglekapacitorens kapacitans i denne situation?

9 I den sidste situation kan kapacitoren også betragtes som to kapacitorer i serie. Hvordan det? Hvad er hver af disses kapacitorers kapacitans? Og hvad er den samlede kapacitans af serieforbindelsen?

Opgavesættet er SLUT.

Roskilde Universitet

Dybdemoduleksamen i elektrodynamik

Mandag d. 16. januar, 2012. 10.00-14.00

Alle almindelige hjælpemidler, samt lommeregner med symbolsk manipulation er tilladt. Kommunikation med andre i eller uden for lokalet er ikke tilladt.

Sættet består af tre uafhængige opgaver.
Hvert underspørgsmål har den samme vægt i bedømmelsen.

Spørgsmål 1

En uendelig lang cylinder har en ladningsfordeling der i cylinderkoordinater, (s, ϕ, z), er givet ved

$$\begin{aligned} \rho(s, \phi, z) &= \frac{\rho_0}{R^2}(R^2 - s^2) \text{ for } s \leq R \\ \rho(s, \phi, z) &= 0 \text{ for } s > R \end{aligned} \tag{1}$$

1 Bestem det elektrostatiske felt.

2 Find det elektrostatiske potential.

3 Vis at potentialet opfylder Poisson og/eller Laplace-ligningen i de områder hvor det er relevant.

Cylinderen roterer nu langsomt omkring z-aksen med vinkelhastigheden ω.

4 Bestem strømtætheden $\boldsymbol{J}$.

5 Vis at det magnetiske felt som genereres når cylinderen roterer er givet ved

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(s, \phi, z) &= \frac{1}{4}\frac{\mu_0 \rho_0 \boldsymbol{\omega}}{R^2}(s^4 - 2R^2 s^2 + R^4) \text{ for } s \leq R \\ \boldsymbol{B}(s, \phi, z) &= \boldsymbol{0} \text{ for } s > R \end{aligned}$$

6 Find $\boldsymbol{A}$-feltet inden i cylinderen (dvs. for $s < R$).

Spørgsmål 2

Et elektrostatisk felt, $\boldsymbol{E}$, driver en stationær strøm i en homogen ohmsk leder.

1 Vis at $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$.

2 Vis at $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$, hvor $\boldsymbol{J}$ er strømtætheden.

Spørgsmål 3

En elektromagnetisk bølge med en given amplitude bevæger sig igennem et homogent lineært dielektrisk materiale. Der indlægges et koordinatsystem så bølgen udbreder sig i x-retningen og er polariseret i y-retningen.

1 Opskriv et udtryk for E- og B-felt. Definer betydningen af de bogstaver der anvendes i udtrykket.

Antag nu at bølgens bølgevektor har størrelsen $k = 1,0 \times 10^7$ m^{-1} og bølgens frekvens er $\nu = 300$ THz. Materialets permeabilitet har samme værdi som i vacuum, dvs. $\mu = \mu_0$. Amplituden på bølgens E-felt er $E_0 = 145$ V/m.

2 Bestem materialets relative dielektricitetskonstant ϵ_r.

Bølgen rammer vinkelret ind på en grænseflade mellem det dielektriske material og vacuum. En del af bølgen transmitteres ud i vacuum, en del reflekteres tilbage i materialet.

3 Hvilke randbetingelser gælder på grænsefladen? Forklar hvorfor.

4 Bestem intensiteten af den transmitterede bølge.

Opgavesættet er SLUT.

Roskilde Universitet

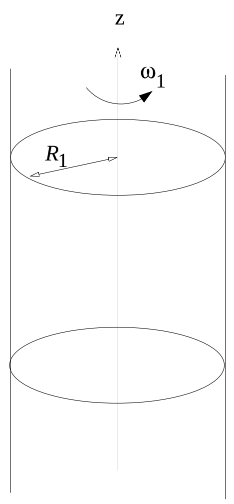
Electrodynamics

Friday 18 January 2013. 10.00-14.00

PERSONAL HELP MATERIALS ALLOWED, INCLUDING SYMBOLIC CALCULATORS. NO COMMUNICATION WITH OTHERS.

The exam set consists of 2 pages. Questions 1 and 2 are independent of each other and can be answered in any order. All sub-questions have equal weight.

Question 1



An infinitely long cylindrical shell with a negligible wall thickness has radius R_1 and a fixed homogeneous surface charge density σ_1. It is rotating with constant angular velocity $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{z}$ about the z-axis as shown (counterclockwise when looking from above).

1. Find the electric field inside and outside the shell.

2. Find the magnetic field inside and outside the shell.

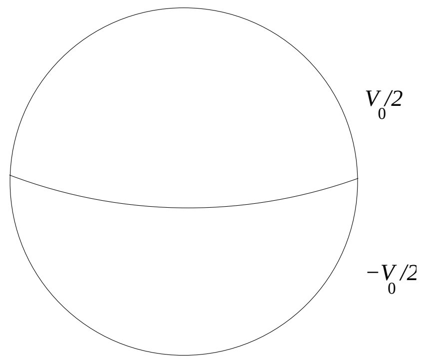
A second thin-walled cylindrical shell is now added concentric with the first. It has a larger radius $R_2 > R_1$, a fixed homogeneous surface charge density σ_2, and rotates with the constant angular velocity $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \hat{z}$.

3. Determine the values of σ_2 and ω_2 such that both the electric and the magnetic fields are non-zero in the space $R_1 < s < R_2$ between the cylinder shells and zero everywhere else (here s is the radial cylindrical coordinate). (Hint: think carefully about the sign of each)

4. Find the electromagnetic energy density in the resulting configuration of two spinning shells in terms of σ_1, R_1 and ω_1, and calculate the total field energy per unit length.

5. Find the Poynting vector and the total field angular momentum per unit length $L_{\text{em},z}$ about the z-axis, (also in terms of σ_1, R_1 and ω_1). Comment on how its sign depends on the signs of σ_1 and ω_1; how does the direction of $L_{\text{em},z}$ compare with that of the mechanical angular momentum of the charges?

Question 2



A capacitor consists of two conducting hemispherical shells with a negligible wall-thickness glued together to make a spherical shell. The glue is an insulating material and there is therefore no electrical contact between the two halves; for this problem ignore the thickness of the glue (treat it as infinitely thin). The radius of the resulting sphere is R and the glue layer lies in the xy plane. Let the capacitor be connected to a battery such that the upper hemisphere ($z > 0$) is at potential $V_0/2$ and the lower one ($z < 0$) is at potential $-V_0/2$.

1. What equation does the potential satisfy inside and outside the spherical shell and what boundary conditions apply?

The potential inside the capacitor is a sum involving odd (i.e. $l = 2m + 1$ where $m = 0, 1, \ldots$) Legendre polynomials:

$$V_{\text{inside}}(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(4m+3)V_0 I_{2m+1}}{2R^{2m+1}} r^{2m+1} P_{2m+1}(\cos\theta) \tag{1}$$

where $I_l \equiv \int_0^1 P_l(x)dx = \int_0^{\pi/2} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ is the integral of the lth Legendre polynomial over half of its range. Some values are $I_1 = 1/2$, $I_3 = -1/8$, $I_5 = 1/16$, $\ldots$.

2. Find the potential outside the capacitor as an infinite sum.

3. Find the charge density, $\sigma(\theta)$, as an infinite sum.

4. Find the electric field at large distances from the capacitor by identifying the appropriate term in the result for Question 2.2.

5. Use the charge density found in Question 2.3 to calculate the electric dipole moment (hint: Use $z = R\cos\theta = RP_1(\cos\theta)$). Check that the result is consistent with what you found in Question 2.4.

Roskilde Universitet

Electrodynamics

Thursday 28 February 2013. 10.00-14.00

PERSONAL HELP MATERIALS ALLOWED, INCLUDING SYMBOLIC CALCULATORS. NO COMMUNICATION WITH OTHERS.

The exam set consists of 2 pages. Questions 1, 2 and 3 are independent of each other and can be answered in any order. All sub-questions have equal weight.

Question 1

A surface charge density $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos^2\theta$, where θ is the usual spherical polar angle, is glued onto the surface of a non-conducting spherical shell with radius R_1 and negligible thickness.

1. Show that $\sigma(\theta)$ can be expressed as a linear combination of the Legendre polynomials $P_0(\cos\theta)$ and $P_2(\cos\theta)$. What is the total charge on the sphere?
2. What boundary conditions must be applied to ensure a unique solution to Laplace's equation for the electrostatic potential $V(\vec{r})$ both inside and outside the shell?
3. Assuming that only terms involving the Legendre polynomials P_0 and P_2 appear in the solution, determine $V(\vec{r})$ for points outside the sphere $r > R_1$.

A conducting spherical shell with inner radius R_2 and outer radius R_3 (where $R_1 < R_2 < R_3$) is placed concentric with the original sphere.

4. What surface charge density $\sigma_3(\theta)$ is induced on the outer surface of the conductor, at $r = R_3$? What is the potential at points outside the conducting shell $r > R_3$?

Question 2

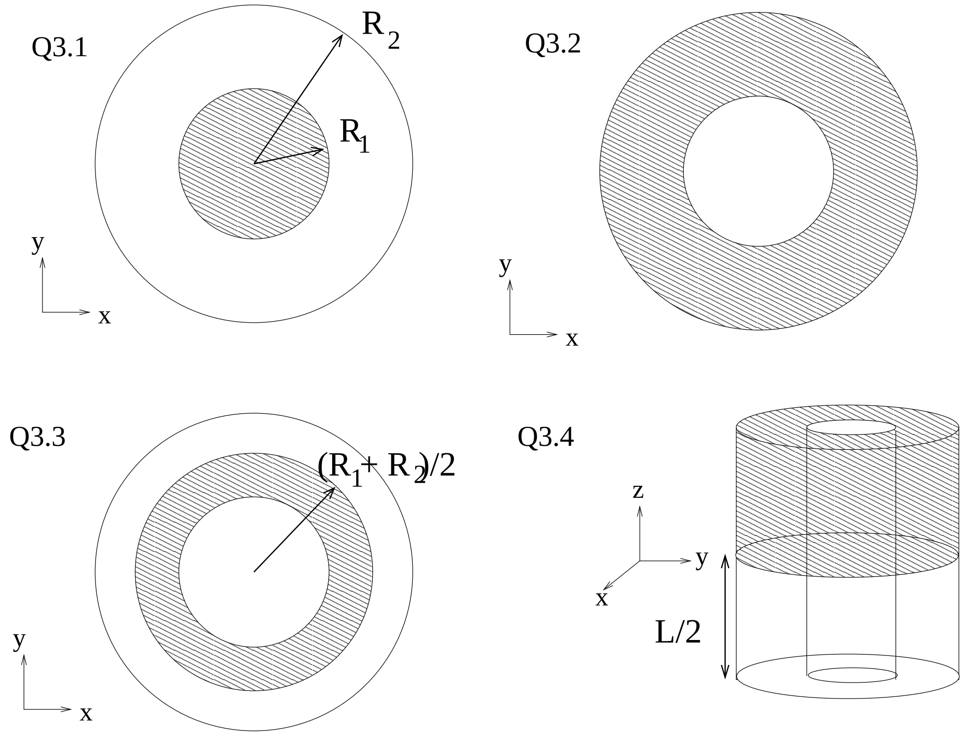
A uniform, time-dependent magnetic field exists in a region of space, given by

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\hat{z} \tag{1}$$

You have a fixed length L of wire, which is to be coiled in the way that maximizes the induced emf, using circular loops/turns. You may assume the region of uniform field is large enough to enclose the whole coil no matter what the details of the coiling are.

1. Should there be one large loop or many small loops? Which way should they be oriented? Justify your answers.
2. For the optimal configuration, calculate the induced current (specify the direction) as a function of time, assuming the wire has resistance R and that self-inductance may be neglected. You may also assume that multiple loops can be coiled tightly enough that a negligible amount of wire is needed to close the coil (i.e., to connect the last turn back to the first).

Question 3



A capacitor consists of concentric cylindrical conducting sheets of inner and outer radii R_1 and R_2 respectively with common length L; the common axis of the cylinders lies along the z-axis, between $z = 0$ and $z = L$. Assume L is much greater than R_2, and that therefore you can ignore end-effects (i.e. for symmetry considerations you can pretend it's infinitely long). Dielectric material of permittivity ϵ is used to partly fill the capacitor in four different ways, as shown in the figure (top view for parts 1-3, side view for part 4; shading indicates dielectric material).

1. The material occupies the inside of the inner conductor (ie points $s < R_1$). Calculate the capacitance and indicate on a sketch the location of all free and bound charge.

2. The material occupies the space between the inner and outer conductors ($R_1 < s < R_2$). Calculate the capacitance and indicate on a sketch the location of all free and bound charge.

3. The material occupies the part of the space between the inner and outer conductors, going from the inner conductor to a radius half-way between them ($R_1 < s < (R_1+R_2)/2$). Calculate the capacitance and indicate on a sketch the location of all free and bound charge.

4. The material occupies the space between the inner and outer conductors ($R_1 < s < R_2$) but in the bottom half only ($0 < z < L/2$). Calculate the capacitance and indicate on a sketch the location of all free and bound charge.

Roskilde Universitet

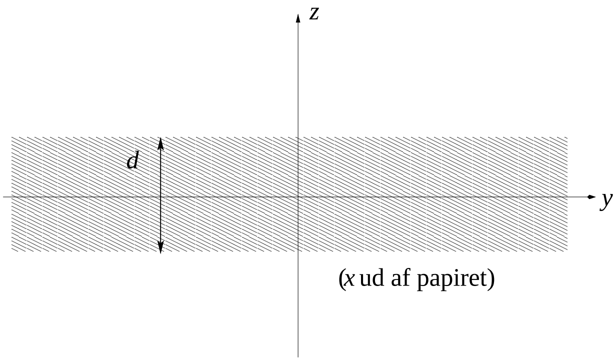
Elektrodynamik

Fredag d. 17. januar 2014. 10.00-14.00

Alle almindelige hjælpemidler, samt lommeregner med symbolsk manipulation, er tilladt.
Kommunikation med andre i eller uden for lokalet er ikke tilladt.

Opgavesættet består af to sider og to uafhængige opgaver. Hvert underspørgsmål har den samme vægt i bedømmelsen.

Spørgsmål 1



En plade med uendelig udstrækning i xy-planen og uniform tykkelse d samt rumladning ρ ligger i området mellem $z = -d/2$ og $z = d/2$.

1.1. Bestem det elektriske felt og skitsér det som funktion af z. Hvordan er resultatet relateret til feltet fra en uendelig plan med en overfladsladningstæthed σ?

1.2. Bestem det elektriske potentiale og skitsér det som funktion af z. Angiv hvor potentialets nulpunkt ligger.

Antag nu at hele pladen har en konstant og uniform hastighed v i den positive x-retning (ud fra papiret i figuren ovenfor). Udover det elektriske felt er der nu et magnetfelt.

1.3. Bestem strømtætheden $\vec{J}$ alle steder og beregn $\nabla \cdot \vec{J}$.

1.4. Bestem magnetfeltet og skitsér det som funktion af z. Hvordan er resultatet relateret til feltet fra en uendelig plan med en overfladsstrømtæthed $\vec{K}$?

1.5. Find den elektromagnetiske energitæthed. Ved hvilken værdi af v bliver den magnetiske energitæthed lige med den elektriske energitæthed?

Spørgsmål 2

En spole med radius R og n viklinger per længdeenhed ligger parallelt med z-aksen. Den er så lang at randeffekter kan negligeres. Den tidsafhængig strøm $I(t)$ gennem spolen er nul for $t < 0$, den vokser lineært som $I(t) = kt$ for $0 < t < T$, og endelig antager den konstante værdi $I(t) = kT$ for $t > T$. Her er k en rate med enheder A/s. Vi antager at k er lille nok at den kvasistatiske approximation gælder og vi kan bruge de sædvænlige metoder fra magnetostatik, så fx er magnetfeltet givet ved $\vec{B}(t) = \mu_0 nkt\hat{z}$ (for $0 < t < T$) indenfor spolen og nul udenfor.

2.1. Vi betragter en del af spolen med længde L. Bestem den totale elektromagnetiske energi i denne del for tidspunkter $t > T$.

2.2. Bestem det inducerede elektriske felt indenfor spolen for tidspunkter t med $0 < t < T$.

2.3. Bestem Poynting-vektoren $\vec{S}$ for steder indenfor spolen for $0 < t < T$.

2.4. Bestem raten ved hvilken elektromagnetisk energi strømmer gennem overfladen af den cylindriske volumen med længde L som blev nævnt i 2.1. for $0 < t < T$.

2.5. Vis, at resultatet fra 2.1 er konsistent med resultatet fra 2.4.

Roskilde Universitet

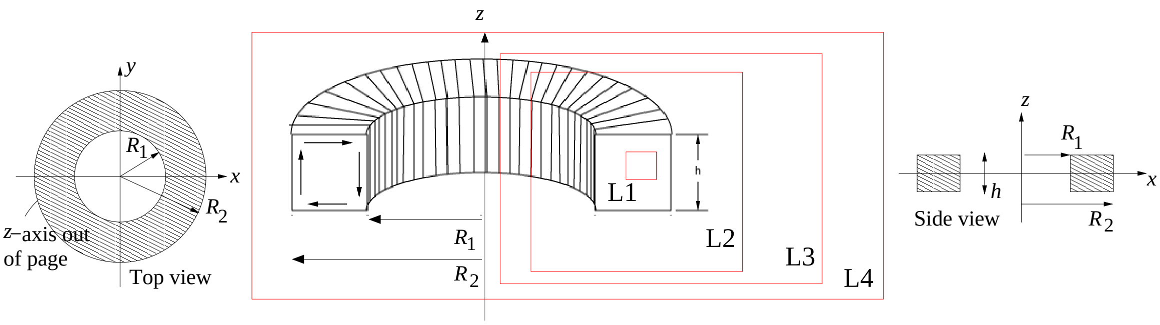
Electrodynamics

Friday 23 January 2015. 10.00-14.00

All the usual help materials (textbook plus own notes), including calculators with computer algebra capability, are permitted. No communication within or in/out of the room permitted. Answers may be written in Danish or English.

The exam consists of three pages with three independent problems. All ten sub-questions have equal weight in evaluation.

Question 1: Toroidal coil



A toroidal coil (or "toroidal solenoid") is made by winding N turns of wire around a torus with rectangular cross section, as shown in the figure (note that the main figure shows one half of the torus). The inner and outer radii are R_1 and R_2, respectively, while the height is h.

1. Determine the magnetic field $\mathbf{B}$ at all points in space when a current I flows through the wire in the direction indicated by the four arrows. Use cylindrical coordinates such that the torus is parallel to and bisected by the xy-plane, so that the z-axis is at the center of the torus and the top and bottom of the torus are at $z = \pm h/2$ respectively.

2. Consider the four closed loops of wire marked L1, L2, L3 and L4 in the figure, which all lie in the same plane which bisects the torus vertically. Suppose the current in the toroidal coil is switched off. In which loops will a current flow (for a brief moment) and in which direction? Assuming all loops have the same total resistance (even though they have different lengths), and negligible self-inductance, in which one will the largest current flow?

3. What happens in the limit as $R_1, R_2 \to \infty$, keeping the difference $R_2 - R_1$, and h, constant, while letting the number of turns N grow such that the ratio N/R_1 is constant? Your answer should describe physically what this limit represents, show what happens to the result of part (1), and explain that it is consistent with your physical interpretation.

4. Keeping the size of the torus fixed again, suppose the torus is made out of thin sheets of conductor and imagine replacing the current I through the N turns of wire with a surface current $\mathbf{K}$ flowing along the parts of the torus (inner/outer vertical walls and upper/lower horizontal ring-faces), such that the magnetic field is the same as when using wires. Give expressions for $\mathbf{K}$ (a vector!) on each section.

Question 2: Thunderstorm dipole

A (very) crude model of a thunderstorm consists of a physical dipole above an infinite grounded conducting plane, with a negative charge $-Q$ at height z_0 and positive charge Q at height $z_0 + d$ (the plane represents Earth, neglecting its curvature). A typical size of Q might be 50 C, while we could suppose z_o is of order 6 km and d is of order 3 km.

1. Sketch the system, including appropriate image charge(s), and calculate the force on the whole thunderstorm from the Earth. Is it attractive or repulsive?

2. Calculate the electrostatic energy of this configuration and the total charge induced on the plane by the presence of the thunderstorm.

3. Still neglecting the earth's curvature, for very large distances above the ground (i.e. $z > 0$), the potential is well approximated by the lowest non-vanishing multipole moment (of the image system). Which multipole is that, and how does the potential depend on r and θ in this approximation? (you do not need to calculate the prefactor/coefficient). What does "very large distances" mean here?

4. We have seen that the problem of a point charge q outside a grounded conducting sphere, say at distance a from the center of the sphere, may be solved using an image charge $-qR/a$ just *inside* the radius of the sphere, at distance R^2/a. Here R is the sphere's radius. If we wanted to take into account the earth's curvature for our model thunderstorm, what system of image charges could be used? Sketch the image problem. What is the net charge on the conducting surface in this case? (The radius of the earth is 6400 km).

GO TO PAGE 3 FOR NEXT QUESTION

Question 3: Electromagnetic waves

1. Which, if any, of these two sets of formulas, (a) and (b), for the electric and magnetic field represent valid solutions to Maxwell's equations in free space? Justify your answer in each case (this doesn't necessarily need to be a detailed calculation).

   (a):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(y-ct)\right)\hat{\mathbf{y}} \tag{1}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(y-ct)\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{2}$$

   (b):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c}(x-ct)\right)(\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2} \tag{3}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(x-ct)\right)(\hat{\mathbf{z}}-\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2} \tag{4}$$

2. Consider the following solution of Maxwell's equations for the electric field, consisting of the sum of two plane waves, one with frequency ω and the other with frequency 2ω, with different directions of propagation and different polarizations:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}(y-ct)\right)\hat{\mathbf{x}} + E_2 \sin\left(\frac{2\omega}{c}(x+ct)\right)\hat{\mathbf{y}} \tag{5}$$

   What is the corresponding magnetic field associated with this wave solution? Calculate the Poynting vector $\mathbf{S}$ and the intensity. Are they equal to the sums of the corresponding quantities for the individual plane waves? The identity $\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B)+\sin(A-B))$ may be useful.

Roskilde Universitet

Masters module in Physics. Repeat examination in Electrodynamics.

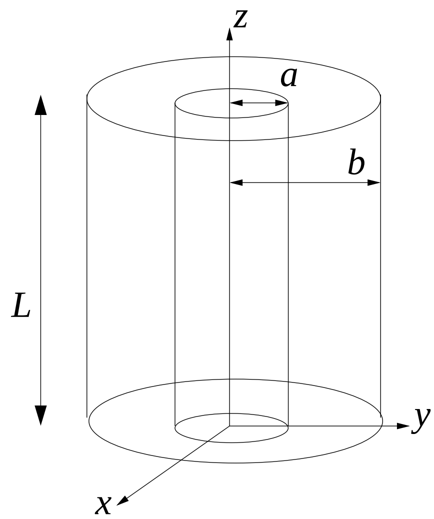
26 June 2015. 10.00-14.00

All the usual help materials (textbook plus own notes), including calculators with computer algebra capability, are permitted. No communication within or in/out of the room permitted. Answers may be written in Danish or English.

The exam consists of two pages with two independent problems. All ten sub-questions have equal weight in evaluation.

Question 1: Cylindrical capacitor

A capacitor is made of two electrodes consisting of concentric cylindrical metallic sheets with inner and outer radii a and b respectively (see figure to the right). The length of the capacitor is L, assumed large enough compared to its radius that end-effects may be neglected, and we use cylindrical coordinates s, ϕ, z where the capacitor's central axis coincides with the z-axis. We will consider the empty capacitor and the capacitor with the space between the metallic sheets (i.e. $a < s < b$) partly or completely filled with dielectric material of dielectric constant $\epsilon_r > 1$.



1. Assuming a free charge Q on the inner electrode (and thus $-Q$ on the outer one), calculate the potential difference V and then the capacitance C of the empty capacitor.

2. In a certain limit the cylindrical capacitor should be equivalent to a parallel-plate capacitor. Explain what the limit is and check that the result for part (1) is consistent with this limit (the approximation $\ln(1 + x) \simeq x$ for small x may be useful).

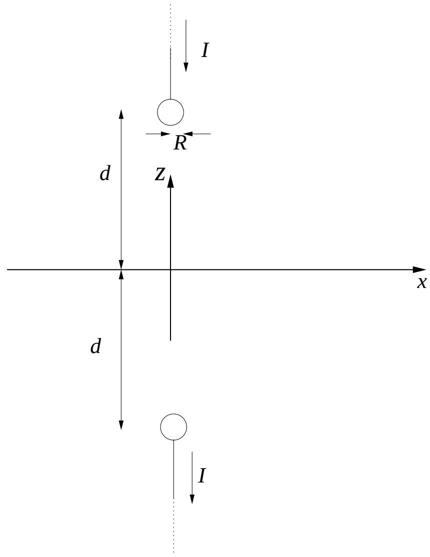
3. Assume now that the dielectric fills all the space between the electrodes, $a < s < b$. Compared to the empty case with the same free charge Q on the inner electrode, state whether each of the following is unchanged, increased or decreased (in magnitude): (i) displacement $\mathbf{D}$, (ii) electric field $\mathbf{E}$, (iii) polarization $\mathbf{P}$, (iv) potential difference V, (v) capacitance C. Finally, (vi) give an expression for C.

4. Suppose the dielectric fills the inner part of the space between the electrodes, out to a radius r_m, i.e. $a < s < r_m$, while the space outside r_m, i.e. $r_m < s < b$, is vacuum. Calculate the capacitance and check that the limits $r_m \to a$ and $r_m \to b$ make sense.

5. Now suppose dielectric fills the lower half, i.e. $a < s < b$ and $0 < z < L/2$, while the upper half is vacuum. This situation can be solved quickly by considering it as a combination of two simpler capacitors. Explain why this is, including what the two simpler capacitors are and how they are connected. Calculate the capacitance of the whole capacitor.

Question 2: Displacement current

Two conducting spheres of radius R are located at $z = \pm d$ where $d \gg R$. Long straight wires, with thickness much smaller than R, extend away from the spheres upwards and downwards respectively along the z-axis and at some large distance eventually are connected to a source of current located well away from the spheres (see figure). Starting at time $t = 0$ a constant current I flows in the wires, such that the charge on the upper sphere grows as It while the lower sphere gains a negative charge $-It$. Assume the charge changes slowly enough for the quasi-static approximation to be valid.



1. Make a sketch of the system including the electric field lines in the space between the spheres and magnetic field lines around the straight wires, at some time $t > 0$.

2. What is the magnetic field around the straight wires? (Consider locations close to the wires and far from the spheres.)

3. Calculate the approximate electric field in the xy-plane at time t(remember that the spheres are small compared to the distance between them). Write it in terms of the distance $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ from the z-axis.

4. Discuss whether the Ampère-Maxwell law can be used to determine the magnetic field in the system, mentioning the role of symmetry and the freedom to choose the relevant bounding surface.

5. Calculate the magnetic field in the xy plane and sketch it as a function of distance from the z-axis. Compare to the result of part (2). The relation $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{-x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ may be useful.

Roskilde Universitet

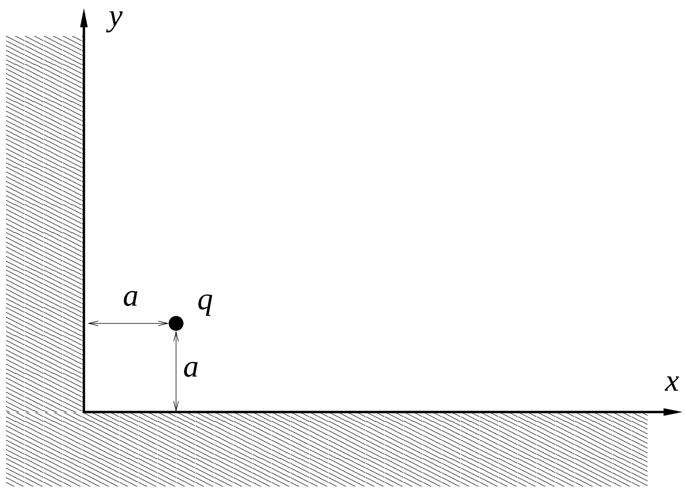
Electrodynamics

Tuesday 5 January 2016. 10.00-14.00

All the usual help materials (textbook plus own notes), including calculators with computer algebra capability, are permitted. No communication within or in/out of the room permitted. Answers may be written in Danish or English.

The exam consists of 2 pages with 3 independent problems. All 9 sub-questions have equal weight in evaluation.

Question 1: Intersecting conducting planes



A point charge q is placed near the intersection of two perpendicular grounded conducting half-planes as shown in the Figure. The perpendicular distance to each plane is a. We use Cartesian coordinates where the intersection of the two half-planes is the z-axis (out of the page) and the x and y axes are as shown. Assume that the charge lies in the xy plane.

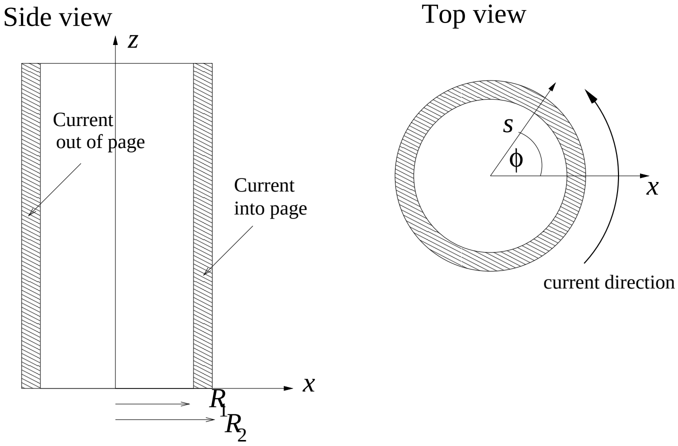
1.1. What is the force on the charge?

1.2. What is the electrostatic energy of the system (the work required to bring the point charge in from infinitely far away)?

1.3. Write an expression for the induced surface charge density on the xz half-plane (i.e. the lower half-plane in the figure). You do not need to simplify the expression.

1.4. What is the total induced charge, on the xz half-plane? (Note: this can be answered without integration. Use symmetry.)

Question 2: Solenoid with bulk current distribution



We consider an infinite solenoid geometry, but instead of a thin wire with many turns the current exists in a cylindrical shell of finite thickness $R_2 - R_1$, where R_1 and R_2 are the inner and outer radii of the shell, respectively, and has a uniform bulk current density $\mathbf{J} = J_0\hat{\phi}$ (see figure: the shaded area is where there is non-zero current density).

2.1. What is the total current, per unit length in the z-direction, going around the solenoid? (That is, the effective surface current density if you imagine the shell is relatively thin).

2.2. What is the magnetic field fully inside the solenoid (for $s < R_1$) and fully outside the solenoid ($s > R_2$) ?

2.3. What is the magnetic field in the shell region $R_1 < s < R_2$? Sketch the magnetic field as a function of s (including all regions).

Question 3: A conducting sphere in electric field with a finite boundary

Consider a neutral conducting sphere of radius R_s centered on the origin. There is a uniform electric field $E_0\hat{z}$ far away from the sphere, but (unlike the textbook example) we impose it at a finite distance $R_b > R_s$. In fact, more precisely we specify the component of $\mathbf{E}$ normal to the boundary surface to be that of a uniform field $E_0\hat{z}$ (this is what the uniqueness theorems allow). We want to know the electrostatic potential $V(\mathbf{r})$ in the region $r < R_b$.

3.1. Specify the boundary conditions for this problem on both the inner and outer boundaries, mentioning any choices you are allowed to make. What can you say about the potential for $r < R_s$?

3.2. Assuming that solution has the form

$$V(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta \qquad (1)$$

find the $V(\mathbf{r})$ in the region $R_s < r < R_b$. What does it become in the limit $R_b \to \infty$?

Roskilde Universitet

Electrodynamics re-exam

February 24, 2016. 10.00-14.00

All the usual help materials (textbook plus own notes), including calculators with computer algebra capability, are permitted. No communication within or in/out of the room permitted. Answers may be written in Danish or English.

The exam consists of 2 pages with 2 independent problems. All 9 sub-questions have equal weight in evaluation.

Question 1: Charge in a cavity

We consider a spherical cavity of radius R inside a perfect conductor, into which different charges may be placed. These charges will induce a charge density at the boundary σ_{ind}. The total potential inside the cavity is therefore the sum of $V_1(\mathbf{r})$ due to the original charge(s) placed inside the cavity and a contribution $V_{\text{ind}}(\mathbf{r})$ due to σ_{ind}.The size and shape of the surrounding conductor are not relevant. We use spherical polar coordinates with the origin at the center of the cavity.

1.1. What differential equation is satisfied in the cavity by $V_{\text{ind}}(\mathbf{r})$? What boundary condition must the total potential satisfy at the boundary of the cavity?

1.2. A point charge q is placed at the center of the cavity. What is the induced surface charge density at the boundary? What is the force on the point charge?

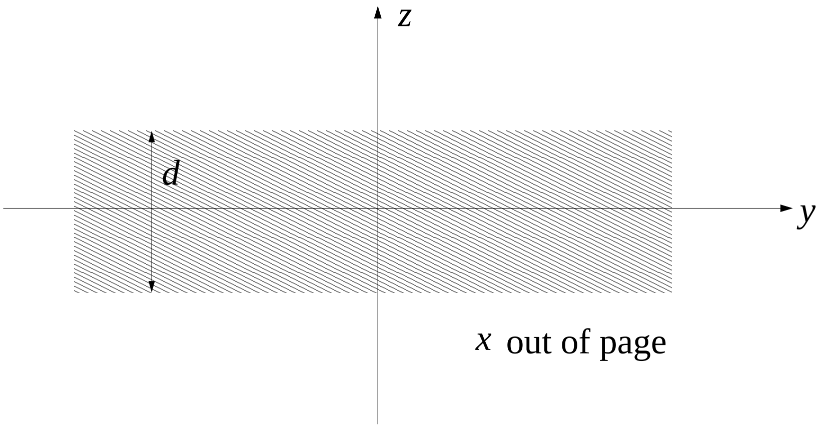
1.3. A pure dipole with dipole moment p is placed at the center of the cavity, pointing in the positive z-direction. Determine the potential at the boundary due to the dipole. In this case the induced charge must be such as to satisfy the boundary condition for the total potential. Determine the potential inside the cavity due to the induced charge. What is the electric field at the origin due to the induced charge?

1.4. Consider again a point charge but now displaced from the center by an amount $h \ll R$ in the direction of the positive z-axis. Write down the exact potential due to the point charge in terms of r and θ, then show that it can be approximately written as the sum of the potential from a point charge located at the origin and a dipole located at the origin. Hint: use the binomial expansion $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$.

1.5. Find the force on the displaced point charge in the last part. Does it act to increase or decrease the displacement?

1.6. If the point charge is placed very close to the boundary (so that the boundary surface is effectively flat), what is the force on the charge?

Question 2: Bulk current slab and vector potential



Consider a "slab" region of width d in the z-direction, and infinite in the x- and y-directions (shaded region in the figure). In this region there is a uniform current density of magnitude J pointing in the x-direction.

2.1. Calculate the magnetic field $\mathbf{B}$ both inside and outside the slab region.

2.2. What differential equation is satisfied by the vector potential $\mathbf{A}$, given that you know the magnetic field? Write also the integral form of this equation, and comment on the uniqueness of $\mathbf{A}$.

2.3. Calculate $\mathbf{A}$ in all space, assuming it points in the x-direction everywhere and is zero in the xy-plane.

END OF EXAM

Roskilde Universitet

Advanced physics / Electrodynamics (5 ECTS)

Wednesday 18 January 2017. 10.00-13.00

All the usual help materials (textbook plus own notes), including calculators with computer algebra capability, are permitted. No communication within or in/out of the room permitted. Answers may be written in Danish or English.

The exam consists of 2 pages with 2 independent problems. All 6 sub-questions have equal weight in evaluation.

Question 1: Spherical capacitor / resistor

Fig. 1

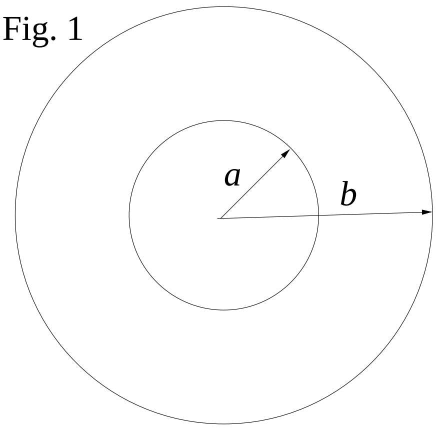
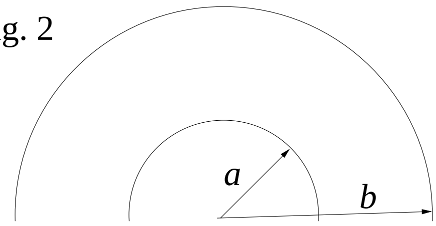


Fig. 2



We start by considering a "spherical capacitor" geometry consisting of two concentric thin spherical metallic shells (electrodes) of radius a and b, as shown in figure 1. In the beginning we assume there is vacuum in the space between the shells. In all situations described below there are equal and opposite charges on the two electrodes, Q on the inner one and $-Q$ on the outer one.

1.1. Assuming a charge Q on the inner electrode, and $-Q$ on the outer one, find the electric field as a function of distance from the center and sketch it.

1.2. What differential equation does the electric potential V satisfy inside the capacitor, that is in the region between the shells $a < r < b$? Find the potential as a function of distance, sketch it, and show that it satisfies the differential equation.

Now let the space between the shells be filled with an Ohmic conducting material of uniform conductivity σ. The charges on the inner and outer electrodes are now functions of time, $\pm Q(t)$, respectively, as the capacitor slowly discharges. Assume they change slowly enough (i.e. the conductivity σ is small enough) that the current distribution can be treated as approximately steady-state (quasi-static) at any given time, even though it is slowly changing.

1.3. Find the current I flowing from the inner to the outer electrode for a given value of $Q(t)$ (the charge on the inner electrode). What is the resistance R of the system? Determine the charge as a function of time, given an initial charge Q_0 and sketch it.

Finally we replace the spherical shells with hemispherical shells, with conducting material filling the hemispherical volume between them (as if we sliced the original capacitor in two through the equator, see figure 2).

1.4. For a given potential difference ΔV between the electrodes, show that the electric field in the hemispherical region is the same as in in the completely spherical resistor. Hint: consider the differential equation satisfied by the electrostatic potential V, and the relevant boundary conditions. What is the resistance of the system in this case?

Question 2: Solutions to Maxwells' equations

At a given instant in time, denoted $t = 0$, the electric field in a region of space is given by either one of following two expressions:

$$\mathbf{E_1}(x, y, z) = E_0 \cos(kx)\hat{z} \tag{1}$$

and

$$\mathbf{E_2}(x, y, z) = E_0 \cos(kx)\hat{x} \tag{2}$$

2.1. Consider both of the two electric fields $\mathbf{E_1}$ and $\mathbf{E_2}$. For each one, say whether it could be an electrostatic field (i.e., associated with a static charge distribution but no currents). If yes, what charge distribution could give rise to the field? If not an electrostatic field, could it still be a time-independent electric field? If so, what charge and/or current distribution and/or magnetic field must be associated with it?

2.2. Could either of the two electric fields $\mathbf{E_1}$ and $\mathbf{E_2}$ be part of a solution to Maxwells' equations in a region of space with no charges or currents present? If so write out the full solution including both electric and magnetic fields and their time dependences (there may be more than one way to do this).

Roskilde Universitet

Advanced physics / Electrodynamics (5 ECTS) Re-exam

Friday 24 February 2017. 10.00-13.00

All the usual help materials (textbook plus own notes), including calculators with computer algebra capability, are permitted. No communication within or in/out of the room permitted. Answers may be written in Danish or English.

The exam consists of 2 pages with 2 independent problems. All 6 sub-questions have equal weight in evaluation.

Question 1: Line charges

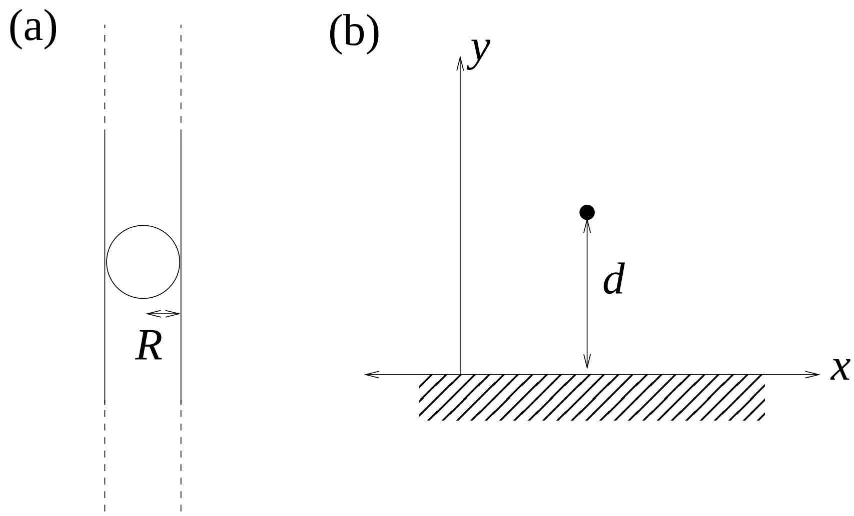


Figure 1: (a) Fat wire geometry (b) thin wire above a plane

1.1. Calculate the electric field within and outside an infinitely long charged "fat wire" with radius R and uniform charge density ρ (Fig. 1(a)). Sketch the field as a function of the relevant coordinate. Far away from the wire the field is indistinguishable from that of a thin wire with a certain linear charge density λ. What is the appropriate value of λ?

1.2. For the same fat wire as above, calculate the electrostatic potential V everywhere, commenting on your choice of zero for the potential. Check that the potential satisfies the appropriate partial differential equation in all space.

1.3. Calculate the force per unit length on a thin line charge with linear charge density λ held parallel to, and a distance d from, an infinite grounded conducting plane (Fig. 1(b), where the grounded plane is the xz-plane and the wire is parallel to the z-axis (out of the page)).

1.4. In the situation with the thin line charge above a grounded conducting plane, How does the electric field depend on distance at large distances from the wire (large positive y)?

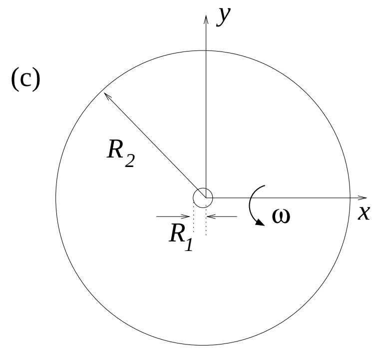


Figure 2: Concentric wire loops. R_1 is smaller than R_2, although it is not obvious in the figure. The curved arrow labelled ω indicates the direction of rotation.

Question 2: Inductance

2.1. Consider two concentric circular wires lying in the xy-plane, with radii R_1 and R_2, with R_1 much smaller than R_2 (Fig. 2). The center of both loops is the origin. If a current I flows in the larger loop (counterclockwise as seen from above), what magnetic flux is there through the small loop?

2.2. The smaller loop is now made to rotate about the x-axis with angular velocity ω, where at time $t = 0$ it is lying flat. The direction of rotation is counterclockwise as seen looking towards the origin from the positive direction along the x-axis. Current I still flows in the large loop. What is the emf induced in the small loop? In which direction would a current flow there during the first quarter period after $t = 0$?