

IMFUFA **tekst**

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Potentielle vindinger ved inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen

Pernille Hviid Petersen
april 2011

nr. 483 - 2011



Formålet med dette speciale er at undersøge, hvilke potentielle vindinger der kan være ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen i det danske gymnasium. I undersøgelsen har der mere specifikt været fokus på, om matematikhistorie kan bruges til (1) at understøtte elevers begrebsforståelse, (2) at udvikle elevers matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik, og (3) at bringe metadiskursive regler frem i lyset, således at eleverne kommer til at reflektere over dem.

Kernen i undersøgelsen har været design og gennemførelse af et matematikhistorisk undervisningsforløb i en 2.g-klasse på et alment dansk gymnasium samt analyse af det datamateriale, som blev indsamlet under gennemførelsen af undervisningsforløbet. Både designet af undervisningsforløbet og analysen af datamaterialet er funderet i generelle matematikdidaktiske teorier såvel som teorier, der særligt er rettet mod brugen af matematikhistorie i matematikundervisningen.

Konklusionen på undersøgelsen er, at matematikhistorie i hvert fald kan bruges til at afsløre problemer i elevers forståelse vedrørende funktioner. I forbindelse med elevernes begrebsforståelse, matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik viser undersøgelsen, at matematikhistorie kan bruges til at udfordre disse aspekter af elevernes matematikforståelse. I forbindelse med de metadiskursive regler kan matematikhistorie både bruges til at få eleverne til eksplicit at reflektere over sådanne regler og til at få et indblik i nogle af elevernes egne metadiskursive regler.

Potentielle vindinger ved inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen

Pernille Hviid Petersen

Vejleder:
Tinne Hoff Kjeldsen

Roskilde Universitet
Matematikspeciale
April 2011

Forord

I forbindelse med arbejdet med mit speciale har jeg modtaget hjælp fra forskellige personer, som jeg gerne vil takke. Først og fremmest vil jeg gerne takke min vejleder Tinne Hoff Kjeldsen for mange lange og konstruktive vejledermøder og for altid at virke interesseret og positiv overfor mit arbejde. Dernæst vil jeg gerne takke den lærer på Avedøre Gymnasium, som lod mig bruge tre uger af hans undervisningstid på mit undervisningsforløb. Hans hjælp både før, under og efter gennemførelsen af mit undervisningsforløb har været langt over, hvad jeg havde forventet, og jeg er ham meget taknemmelig for dette. Jeg vil også gerne takke klassen på Avedøre Gymnasium, som indvilgede i at deltage aktivt i mit undervisningsforløb på trods af interne gnidninger blandt eleverne.

En sidste tak skal gå til Tine Nyegaard Pedersen for altid kvalificeret og positiv hjælp med alt det administrative - både i forbindelse med mit speciale og i resten af min tid på IMFUFA.

Indhold

1	Indledning	1
1.1	Problemformulering	2
1.2	Historiesynet i projektet	3
1.3	Metode	4
1.4	Præsentation af det indsamlede datamateriale	4
1.5	Strukturen i rapporten	5
2	To teorier vedrørende matematisk begrebsdannelse og begrebsforståelse	7
2.1	Begrebsbilleder og begrebsdefinitioner	7
2.2	Operationel og strukturel forståelse af matematiske begreber	9
3	Et kompetencebaseret syn på matematikundervisning	13
3.1	Matematiske kompetencer	13
3.2	Overblik og dømmekraft	16
3.3	Det kompetencebaserede matematiksyn brugt i forbindelse med inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen	17
4	En diskursiv forståelse af matematik	21
4.1	Tænkning som kommunikation	21
4.2	Matematik som diskurs	23
4.3	Kommognitive konflikter	25
4.4	Metadiskursive regler og matematikhistorie	25
5	Design af undervisningsforløbet	27
5.1	Emnet for forløbet	27
5.2	Forhold for gennemførelsen af undervisningsforløbet	28
5.3	Undervisningsmål	29
5.4	Strukturen i undervisningsforløbet	31
5.5	Materiale til brug i undervisningen	33
5.6	Realisering af undervisningsmål gennem undervisningsforløbet	34
5.7	Dataopsamling og lærerrollen	36
6	Analyse af det indsamlede datamateriale	39
6.1	Overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling	39
6.2	Begrebsforståelse og matematiske kompetencer	45
6.3	Metadiskursive regler	63
6.4	Undervisningsmål	72
6.5	Resultaternes gyldighed og relevans	74

7	Diskussion	77
7.1	Hvad bidrog matematikhistorien med?	77
7.2	Til næste gang	79
8	Konklusion	83
A	Plan over undervisningsforløbet	85
B	Kompendiet til undervisningsforløbet	87
C	Elevernes besvarelser af basisgruppernes opgaver	105
D	Formuleringen af artikelopgaven	123
E	Elevernes besvarelser af artikelopgaven	127
F	Evalueringsspørgeskemaet	141
G	Elevernes besvarelser af evalueringsspørgeskemaet	145
	Referencer	175

1 Indledning

Ifølge den danske lovgivning er matematikhistorie en obligatorisk del af matematikundervisningen i det danske gymnasium¹. Formålet med mit speciale er at undersøge, på hvilken måde dette obligatoriske element i matematikundervisningen kan understøtte elevernes læring af matematik. Min plan har gennem hele projektet været at forsøge at bruge matematikhistorie til noget andet end ren motivation, for motivation kan opnås på mange forskellige måder, og for mange elever vil matematikhistorie sandsynligvis ikke være det, der motiverer dem allermost.

Min oprindelige inspiration til projektet har været Tinne Hoff Kjeldsens og Morten Blomhøjs teoretiske argument for, at matematikhistorie kan have en essentiel rolle at spille i forbindelse med elevers indlæring af metadiskursive regler indenfor matematik [Kjeldsen og Blomhøj]. Metadiskursive regler inden for matematik er et sæt normer, som man følger ubevidst, og som styrer, hvordan man agerer i matematikholdige situationer, hvordan man forstår matematikholdige situationer, og hvad man finder passende i matematikholdige situationer. Konceptet omkring metadiskursive regler vil blive beskrevet grundigere i kapitel 4. I forhold til inspirationen for dette projekt er det vigtige, at metadiskursive regler er centrale for ens forståelse af matematikken. Derfor er det vigtigt, at matematikundervisningen hjælper til at modificere elevernes metadiskursive regler, således at de kommer til at stemme overens med de metadiskursive regler, som generelt gælder i det matematiske samfund. Fordi metadiskursive regler følges ubevidst, kan det dog være meget svært at påvirke dem direkte. Metadiskursive regler er ikke logisk nødvendige, men derimod historisk givne. Dette faktum bruger Kjeldsen og Blomhøj til at argumentere for, at matematikhistorie kan bruges som et redskab til at sætte fokus på metadiskursive regler, idet man kan antage en historisk synsvinkel og kigge på den historiske udvikling af disse regler.

De metadiskursive regler er altså vigtige for elevernes samlede matematikforståelse, men det er de ikke ene om at være. Udover de metadiskursive regler har jeg i mit projekt valgt også at have fokus på begrebsforståelse og matematiske kompetencer. Medtagelsen af disse to ekstra komponenter har givet mig et bredere billede af elevernes matematikforståelse, end de metadiskursive regler alene ville have gjort. Matematiske kompetencer er kompetencer, der sætter besidderen af dem i stand til at håndtere forskellige konkrete matematiske udfordringer. Konceptet omkring matematiske kompetencer vil blive beskrevet grundigere i kapitel 3.

Min idé med projektet har fra begyndelsen været, at jeg selv ville indsamle et datamateriale, som kunne bruges til at få indblik i de potentielle vindinger, der er ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen. Kernen i min undersøgelse har derfor været at designe og gennemføre et matematikhistorisk undervisningsforløb i en dansk gymnasieklasse for derved at producere et sådan datamateriale. Dermed følger jeg Tinne Hoff Kjeldsens og Uffe Thomas Jankvists anbefaling om, at forskningen i brugen af matematikhistorie i matematikundervisningen har brug for mere empiri [Jankvist og Kjeldsen, 2010]. En central del af mit undervisningsforløb gik ud på, at eleverne skulle arbejde med originale matematikhistoriske

¹ Dette fremgår af bilag 35 stykke 2.3, bilag 36 stykke 2.3 og bilag 37 stykke 2.3 af bekendtgørelse nr. 692 af 23. juni 2010 om uddannelsen til studentereksamen (stx-bekendtgørelsen).

kilder. Pointen med dette var, at kilderne skulle fungere som en form for samtalepartnere, der tænkte på matematik på en lidt anden måde end både moderne matematikere og eleverne selv, og som derfor lagde op til, at eleverne reflekterede over deres egen matematikforståelse.

I forhold til den allerede udførte forskning omkring brugen af matematikhistorie i matematikundervisningen knytter mit arbejde an til en diskussion om et dilemma, som er blevet præsenteret af Michael N. Fried. Frieds dilemma går ud på, at hvis man vil inddrage matematikhistorie i matematikundervisning, så er der to mulige scenarier, som kan forekomme. Enten tager man hensyn til det matematiske stof, som eleverne skal lære, og så bliver behandlingen af matematikhistorien anakronistisk, overfladisk og trivielt, eller også tager man hensyn til matematikhistorien, og så risikerer man at komme til at bruge en masse tid på noget, som egentligt ikke er relevant for det obligatoriske matematiske stof [Fried, 2001, s. 397-398]. I min undersøgelse taler jeg lidt indirekte imod Frieds dilemma, idet jeg i forbindelse med mit undervisningsforløb har haft som mål, at eleverne både skulle opnå nogle ikke-trivielle matematikhistoriske indsigter, og at de skulle lære noget mere reelt matematisk stof.

Som det er fremgået indtil nu, er min undersøgelse knyttet til og forankret i forskellig aktuel forskning omkring anvendelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen. Derudover er mit projekt også forankret i en personlig interesse for matematikundervisning og formidling af matematik. Jeg finder problemstillingen omkring, hvorfor matematik er så svært for så mange, meget interessant, og denne interesse er for mig mundet ud i en interesse i at forsøge at finde metoder og midler, der kan lette læringen af matematik. Derfor er en undersøgelse af potentielle vendinger ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen af stor personlig interesse for mig.

Selvom matematikhistorie er et omdrejningspunkt for projektet, så er formålet ikke at formidle matematikhistorie i sig selv. Derfor vil jeg ikke komme til at gennemgå mere reelt matematikhistorie end det, der er absolut nødvendigt for at forstå mit arbejde. Denne smule reel matematikhistorie vil mest samlet blive gennemgået i afsnit 5.1.

1.1 Problemformulering

Mit arbejde med dette projekt har været styret af følgende problemformulering:

På hvilken måde kan matematikhistoriske aktiviteter understøtte elevers læring af matematik?

1. Kan matematikhistoriske aktiviteter bruges til understøttelse af elevers begrebsforståelse?
2. Kan matematikhistoriske aktiviteter bruges til udvikling af elevers matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik?
3. Kan matematikhistoriske aktiviteter bruges til at bringe metadiskursive regler frem i lyset, således at eleverne kommer til at reflektere over dem?

I mit arbejde med hver af problemformuleringens tre delspørgsmål har jeg benyttet mig af nogle udvalgte teorier indenfor generel matematikdidaktik. I forbindelse med det første delspørgsmål har jeg trukket jeg på David Talls og Shlomo Vinnars begrebsapparat vedrørende begrebsbilleder og begrebsdefinitioner samt Anna Sfards teori om operationel og strukturel forståelse af matematiske begreber. I arbejdet problemformuleringens andet delspørgsmål har jeg benyttet mig af de tanker om undervisningsbeskrivelse og -planlægning, som fremlægges i rapporten *Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i*

Danmark [Niss og Jensen, 2002]. I forbindelse med problemformuleringens tredje delspørgsmål har jeg anvendt Anna Sfards teori om metadiskursive regler og objektniveauregler. Alle disse forskellige generelle matematikdidaktiske teorier vil blive gennemgået i kapitel 2 - 4.

Udover generelle didaktiske teorier har jeg især i forbindelse med problemformuleringens andet og tredje spørgsmål også benyttet mig af matematikdidaktik, der er særligt rettet mod inddragelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen. Mere konkret har jeg benyttet mig af forskellige dele af Tinne Hoff Kjeldsens arbejde, der bl.a. involverer samarbejde med Morten Blomhøj og Uffe Thomas Jankvist. Dette arbejde diskuterer bl.a. fordelene ved at benytte matematikhistorie til at træne elevers matematiske kompetencer og til at bringe metadiskursive regler frem til eksplicit refleksion.

Udover de forskellige didaktiske teorier og arbejder har jeg i mit arbejde med projektet også benyttet mig af lidt matematikhistorisk forskning. I denne forbindelse har jeg især brugt Jesper Lützens forskning omkring funktionsbegrebets udvikling samt rapporten *Fourier og funktionsbegrebet - Overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb* [Godiksen m.fl., 2003], der er skrevet af en gruppe matematikstuderende ved Roskilde Universitet.

1.2 Historiesynet i projektet

I et projekt der som dette handler om aspekter af det at bruge historie, er det nødvendigt at præcisere, hvad der forstås ved historie. Jeg har i mit arbejde valgt at benytte mig af Bernard Eric Jensens historiesyn. I Jensens historiesyn indtager mennesket og dets handlinger en meget central placering, hvilket kommer til udtryk i følgende citat:

vi har at gøre med historie, så snart en person eller gruppe personer interesserer sig for noget fortidigt og gør brug af deres viden herom til et eller andet formål. [Jensen, 2010, s. 8]

Af dette citat fremgår det, at historie er noget mennesker bruger. Jensen giver da også en definition af historie, der siger, at »[h]istorie er, hvad historie bruges til« [Jensen, 2010, s. 8]. Ifølge Jensen er vi mennesker fortidsbrugere, og uden fortidsbrugere kan man ikke tale om historie [Jensen, 2010, s. 58].

Jensens syn på forholdet mellem mennesket og historien kommer tydeligt til udtryk i hans tanker om, at socialt fungerende mennesker er historiefrembragte såvel som historiefrembringede [Jensen, 2003, s. 11]. Ifølge Jensen skal denne idé forstås således, at et nyfødt spædbarn ikke anses for at være historiefrembringende, men at mennesket bliver historiefrembringende ved at tilegne sig og bearbejde den kultur, som det lever og virker i. Det historiefrembragte ved et menneske består i dets socialisation og identitetsdannelse, så man kan sige, at mennesket bliver historiefrembringende ved at blive historiefrembragt. Mennesket kan selv være aktiv deltager og beslutningstager i såvel dets socialisation og identitetsdannelse som i dets historiefrembringende virksomhed [Jensen, 2003, s. 11]. Alt i alt er det altså menneskets handlinger, der frembringer det fortidige, som historie omhandler, men det er ifølge Jensens definition af historie også mennesket, der ved aktiv handlen gør dette fortidige til historie.

Ifølge Jensen er historie altså, hvad historie bruges til. Dette historiesyn medfører, at historie kan være utroligt mange forskellige ting. Jensen understreger da også, at hans forståelse af historie bevidst er meget bred og inklusiv [Jensen, 2010, s. 8]. Jensens meget brede forståelse af historie medfører, at man ikke kan anse historie for udelukkende at være det, som professionelle historikere arbejder med. Videnskabsfaget historie er kun en ud af mange forskellige, mulige

tilgange til historien, og i modsætning til den gængse opfattelse siger Jensen, at denne tilgang kun har en delvis forrangsstilling i forhold til andre tilgange [Jensen, 2010, s. 141-142]. Ifølge Jensen skal man i det hele taget ikke forsøge at udpege en enkelt tilgang til historieforståelse og historiebrug, som skal være det eneste, der forstås ved historie.

Jensen foreslår, at man i sit arbejde med historien benytter sig af en flerperspektivisk tilgang til denne [Jensen, 2003, s. 16-17]. Dette betyder, at man i sin analyse og bearbejdning af et historisk sagsforhold inddrager flere forskellige menneskers, gruppers og institutioners tanker om og holdninger til dette sagsforhold. Man medtænker med andre ord aktørernes perspektiv. Ifølge Jensen er evnen til på denne måde at kunne skifte mellem forskellige synsvinkler og perspektiver en nødvendighed for at kunne opnå en reel historisk indsigt og forståelse. Dette fremgår af følgende citat:

muligheden for at tilegne sig nye iagttagelsespunktet og synsvinkler udgør en af forudsætningerne for at kunne tale om historisk-social forståelse i kvalificeret forstand - altså det at opnå indsigt i, hvordan mennesker har tænkt og handlet i forskellige kulturer og til forskellige tider. [Jensen, 2003, s. 17]

1.3 Metode

Kernen i min undersøgelse består som nævnt af design og gennemførelse af et matematikhistorisk undervisningsforløb i en gymnasieklasse samt analyse af det datamateriale, som blev produceret under gennemførelsen af forløbet. Under designfasen har min fremgangsmåde været at foretage litteraturstudier vedrørende de didaktiske teorier, som min problemformulering knytter an til. Målet med disse litteraturstudier har været at få inspiration til, hvordan undervisningsforløbet skulle designes, så gennemførelsen af det iscenesatte en mulighed for, at jeg fik indblik i de spørgsmål, som min problemformulering stiller. Litteraturstudier vedrørende den matematikhistoriske udvikling, som undervisningsforløbet omhandlede, var også nødvendig.

Under gennemførelsen af undervisningsforløbet opsamlede jeg data på flere forskellige måder. For det første observerede jeg dele af elevernes arbejde. Disse observationer understøttede jeg ved at filme dette arbejde. Derudover afleverede eleverne i grupper to skriftlige afleveringer til mig. Som en sidste ting besvarede eleverne ved forløbets afslutning et spørgeskema om forløbet. Det på denne måde at inddrage flere forskellige former for data til at belyse et fænomen kaldes for triangulering [Kruuse, 2003, s. 47]. En stor fordel ved triangulering er, at inddragelsen af forskellige metoder og former for data kan højne troværdigheden af de resultater, som kommer ud af analysen af datamaterialet [Halkien, 2008, s. 15]. Min dataopsamling vil blive beskrevet nærmere i afsnit 5.7.

I min arbejde med det indsamlede datamateriale har min strategi været at benytte mine forskellige teorier til at blive i stand til at analysere datamaterialet og uddrage konklusioner af det.

1.4 Præsentation af det indsamlede datamateriale

I denne rapport har jeg valgt at præsentere en stor del af mit datamateriale, således at læseren kan få en mulighed for at kigge mig lidt over skulderen. Alle afleveringer og evalueringsspørgeskemaer som jeg under gennemførelsen af undervisningsforløbet modtog fra eleverne, er vedlagt rapporten i bilag C, E og G. I forbindelse med elevernes afleveringer har jeg slettet deres navne

og klasse for at sikre elevernes anonymitet, men derudover er afleveringerne præsenteret, som jeg fik dem af eleverne. I forbindelse med elevernes evalueringer har jeg valgt at præsentere den i en computerskrevet version i stedet for i de oprindelige håndskrevne versioner. Grunden til dette er, at jeg af hensyn til elevernes anonymitet ikke vil præsentere deres håndskrift. Jeg har i min indskrivning af evalueringerne bestræbt mig på at holde mig så tæt til elevernes stavemåde og tegnsætning som muligt.

I forbindelse med præsentationen af mit datamateriale har jeg valgt ikke at vedlægge en transskribering af de optagede film, da dette ville være alt for omfattende til denne rapport. I stedet præsenterer jeg flere gange igennem rapporten transskriberede stykker af elevernes dialoger med hinanden, læreren og mig. I disse dialoger er alle andre navne end mit eget ændret. Jeg har valgt at lade hver elev blive betegnet med samme navn igennem hele rapporten. Eksempelvis betegner navnet Jesper, der forekommer mange steder i rapporten, alle steder den samme elev. I min navngivning af eleverne har jeg valgt ikke at lade klassens etniske sammensætning komme til udtryk i de nye navne. Alle eleverne har således i mine dialoger fået danske navne, selvom klassen ikke udelukkende bestod af etnisk danske elever. Klassens kønsmæssige sammensætning har jeg til gengæld taget højde for. Klassens piger har således fået pigenavne i mine dialoger, mens drengene har fået drengenavne. I mine dialoger indikerer forskellige tegn og skrivemåder forskellige ting:

1. *Kursiveret tekst* indikerer, at jeg har en idé om, hvad der bliver sagt, men ikke er helt sikker på det.
2. [*Kursiveret tekst i firkantede parenteser*] indikerer, at lyden på mine film er så utydelig, at jeg ikke ved, hvad der bliver sagt. Den ringe lyd kvalitet skyldes, at eleverne ofte mumler eller taler i munden på hinanden.
3. [*Almindelig tekst i firkantede parenteser*] beskriver oftest noget, som eleverne gør. Enkelte steder er denne layout også brugt til at forklare, hvem eller hvad eleverne refererer til. Det vil fremgå af konteksten, hvilken brug der er tale om i det enkelte tilfælde.

1.5 Strukturen i rapporten

Rapporten er mere eller mindre delt i tre dele. I den første del, der omfatter kapitel 2-4 gennemgås de forskellige teorier, som jeg har benyttet mig af i mit arbejde. I den anden del, der omfatter kapitel 5-6 præsenteres mit undervisningsforløb og analysen af det indsamlede datamateriale. I denne del af rapporten, som man kunne kalde den empiriske del, vil jeg trække på de forskellige teoretiske elementer, som blev præsenteret i rapportens første del. I rapportens tredje og sidste del, som omfatter kapitel 7-8, vil trådene blive samlet, og jeg vil præsentere min konklusion på min problemformulering.

2 To teorier vedrørende matematisk begrebsdannelse og begrebsforståelse

Formålet med dette kapitel er at introducere to teorier om matematisk begrebsdannelse og begrebsforståelse, som jeg vil benytte til at blive i stand til at tale om og analysere mine indsamlede data i kapitel 6. Den ene af disse teorier er hentet fra artiklen *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*, som David Tall og Shlomo Vinner skrev i 1981 [Tall og Vinner, 1981]. I denne artikel opstiller Tall og Vinner et begrebsapparat, som kan bruges til at beskrive, hvilke meninger et individ tillægger et givent matematisk begreb, samt hvordan de forskellige dele af en sådan personlig begrebsforståelse stemmer overens med hinanden og med en mere formel teori om begrebet. Tall og Vinders begrebsapparat vil blive gennemgået i afsnit 2.1. Den anden teori er hentet fra artiklen *On the Dual Nature of Mathematical Conception: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*, som er skrevet af Anna Sfard i 1991 [Sfard, 1991]. I denne artikel præsenterer Sfard en model for, hvordan matematisk begrebsdannelse foregår såvel historisk set som i læringssituationer. Ud fra sin model giver Sfard et forsigtigt bud på, hvorfor det er så svært for så mange at lære matematik. Sfards teori vil blive gennemgået i afsnit 2.2.

2.1 Begrebsbilleder og begrebsdefinitioner

I deres artikel fra 1981 introducerer Tall and Vinner en række begreber, som kan bruges til at beskrive et individs personlige opfattelse af et matematisk begreb. Et af hovedbegreberne for Tall og Vinner er begrebet begrebsbillede. **Begrebsbilledet** er en samlet betegnelse for alle de ting, som et individ associerer med et givet begreb. Et begrebsbillede er mere præcist defineret som den totale kognitive struktur, som individet associerer med et begreb [Tall og Vinner, 1981, s. 152]. Et begrebsbillede kan f.eks. indeholde mentale billeder og egenskaber og processer, der er knyttet til begrebet. Begrebsbilledet indeholder individets egne forestillinger om et begreb og er derfor meget subjektivt. Det formes, ændrer sig og udbygges, når individet møder nye udfordringer og eksempler. Et individs begrebsbillede af et givet matematisk begreb kan være en ganske omfattende struktur. Ifølge Tall og Vinner er det da også kun en del af begrebsbilledet, der bringes i spil, når et individ stilles i en situation, hvor det skal aktivere sin forståelse af et matematisk begreb. Den del af begrebsbilledet, der bringes i spil i en given situation, kaldes **det fremmanede begrebsbillede** [Tall og Vinner, 1981, s. 152].

Udover begrebsbilleder er et andet centralt begreb for Tall og Vinner begrebet begrebsdefinition. En **begrebsdefinition** er en sproglig forklaring og præcisering af et matematisk begreb [Tall og Vinner, 1981, s. 152]. Tall og Vinner skelner mellem formelle og personlige begrebsdefinitioner. **En formel begrebsdefinition** er den definition af et begreb, der er generelt accepteret i det matematiske samfund. **En personlig begrebsdefinition** derimod er et individs egen, personlige definition af et matematisk begreb. En personlig begrebsdefinition kan være en begrebsdefiniti-

on, som individet bare har lært udenad uden rigtigt at have forstået indholdet af den. I en sådan situation vil begrebsdefinitionen ikke have ret meget med individets begrebsbillede at gøre, da en definition som slet ikke er forstået, ikke rigtigt vil give anledning til nogen associationer. Det er også muligt, at individet har fået sin personlige begrebsdefinition fra et sted udenfor sig selv, men har indlært den på en meningsfuld måde, således at indholdet af definitionen er nogenlunde forstået. I denne situation vil begrebsdefinitionen have en del mere med begrebsbilledet at gøre, end den ville i den første situation. En tredje mulighed er, at individets personlige begrebsdefinition kan bestå i dets egen forklaring eller beskrivelse af dets begrebsbillede [Tall og Vinner, 1981, s. 152]. En personlig begrebsdefinition er ikke en statisk størrelse, men kan derimod ændres over tid, hvilket medfører, at et individs personlige begrebsdefinition ikke nødvendigvis altid vil stemme overens med den formelle definition af et givet matematisk begreb.

Som det fremgår af det ovenstående, kan et individs begrebsdefinition have mere eller mindre med dets begrebsbillede at gøre. Begrebsdefinitionen vil selv fremkalde et begrebsbillede, der udgør en del af individets samlede begrebsbillede. Denne del af det samlede begrebsbillede kaldes for **begrebsdefinitionsbilledet** [Tall og Vinner, 1981, s. 153]. Hvis et individ ikke har forstået en begrebsdefinition, men bare har lært sig den udenad, vil dets begrebsdefinitionsbillede være stort set ikke-eksisterende. Den del af begrebsdefinitionsbilledet som er alment anerkendt i det matematiske samfund, er det, som Tall og Vinner kalder for **formel teori** [Tall og Vinner, 1981, s. 153].

Det er en vigtig pointe hos Tall og Vinner, at et individs begrebsbillede og personlige begrebsdefinition for et givet begreb ikke behøver at udgøre en sammenhængende og konsistent struktur. Tværtimod kan begrebsbilledet eller begrebsdefinitionen sagtens indeholde elementer, der er i direkte modstrid med andre elementer i begrebsbilledet eller begrebsdefinitionen. Sådanne elementer i enten begrebsbilledet eller begrebsdefinitionen kaldes for **potentielle konfliktfaktorer**. Individet behøver aldrig selv at opdage, at dets begrebsbillede eller begrebsdefinition indeholder potentielle konfliktfaktorer. Det er nemlig ikke sikkert, at det nogensinde kommer i en situation, hvor det kommer til at bringe to modstridende konfliktfaktorer i spil samtidigt, og hvis dette ikke sker, vil to modstridende potentielle konfliktfaktorer aldrig komme til at skabe en reel konflikt. Hvis to modstridende konfliktfaktorer derimod bliver aktiveret samtidigt, kaldes de aktuelle konfliktfaktorer for **kognitive konfliktfaktorer** [Tall og Vinner, 1981, s. 153-154]. Tall og Vinner gør opmærksom på, at det er muligt, at kognitive konfliktfaktorer kun bliver bragt i spil på et underbevidst plan, således at konflikten også kun er underbevidst. I denne situation vil konflikten kun blive opfattet som en følelse af, at der er noget galt, men at man ikke kan sætte fingeren på, hvad det er [Tall og Vinner, 1981, s. 154].

2.1.1 Undervisningens rolle i elevers dannelse af begrebsbilleder

Gennem en mængde empiriske data sandsynliggør Tall og Vinner, at mange elever i arbejdet med forskellige matematiske udfordringer trækker på deres egne begrebsbilleder i stedet for på de formelle begrebsdefinitioner [Tall og Vinner, 1981, s. 164]. Dette kan være problematisk, da et subjektivt begrebsbillede kan være utilstrækkeligt eller direkte forkert. Tall og Vinner understreger da også hvilke konsekvenser, det kan have at besidde et forkert eller utilstrækkeligt begrebsbillede. De siger nemlig, at vanskeligheder ved at danne et ordentligt begrebsbillede af et matematisk begreb samt det at have et utilstrækkeligt eller forkert begrebsbillede kan forhindre eller i hvert fald vanskeliggøre en elevs muligheder for at tilegne sig den formelle teori [Tall og Vinner, 1981, s. 169]. I den forbindelse siger de også, at det er muligt, at matematiklæreren

ved aktivt at sætte fokus på de problematiske elementer i elevernes begrebsbilleder og diskutere problemerne med eleverne kan komme problemerne til livs [Tall og Vinner, 1981, s. 168]. Dette kræver dog, at læreren på forhånd er bekendt med de forskellige problematiske elementer, som elevernes begrebsbillede kan indeholde.

Hvor matematikundervisningen altså i nogle situationer kan bidrage til at løse problemer i elevens begrebsbillede, kan den i andre tilfælde bidrage til, at disse problemer opstår i første omgang. Tall og Vinner præsenterer i deres artikel et fiktivt eksempel, hvor en lærer skal undervise en klasse i funktionsbegrebet. Han starter med at præsentere dem for den formelle definition af en funktion¹ og arbejder lidt med denne definition. Efter et kort stykke tid går han så over til at bruge lang tid på at præsentere eleverne for en række eksempler på funktioner, der alle er givet ved regneforskrifter. Ifølge Tall og Vinner vil en sådan undervisning sandsynligvis føre til, at eleverne udvikler deres begrebsbillede vedrørende funktioner til at indeholde en forestilling om, at en funktion altid er givet ved en regneforskrift. Derudover vil den føre til, at den formelle begrebsdefinition ikke rigtigt kommer til at påvirke elevernes begrebsbillede. Det kan godt være, at de lærer den formelle begrebsdefinition udenad, således at de kan give et korrekt svar, når de bliver bedt om at definere en funktion, men i deres arbejde med funktioner bruger de ikke denne definition til noget [Tall og Vinner, 1981, s. 153]. Dette eksempel viser bl.a., at forskellige måder at gribe matematikundervisningen an på kan have nogle konsekvenser for elevernes begrebsbilleder, som er ganske utilsigtede fra lærerens side.

2.2 Operationel og strukturel forståelse af matematiske begreber

I sin artikel fra 1991 tager Sfard udgangspunkt i, hvorfor så mange har så svært ved at lære matematik [Sfard, 1991]. Dette spørgsmål danner derefter en rød tråd gennem hele artiklen, i hvilken det er et hovedformål for Sfard at blive i stand til at give et forsigtigt bud på et svar på det. Undervejs i sin stræben efter at nå dette mål opstiller hun en teori og model for, hvordan matematisk begrebsdannelse foregår, og hvordan vi mennesker forstår og arbejder med matematiske begreber.

Når Sfard taler om forståelse af matematiske begreber, skelner hun grundlæggende mellem en officiel forståelse af og teori om et givet begreb og individets egen subjektive forståelse af dette begreb [Sfard, 1991, s. 3]. Individets subjektive forståelse omfatter alle de repræsentationer og andet, som individet associerer med begrebet. Denne skelnen hos Sfard svarer derfor til Tall og Vinner's skelnen mellem formel teori og personlige begrebsbilleder.

2.2.1 Dual forståelse af matematiske begreber

Sfard tager i sin artikel udgangspunkt i en antagelse om, at et matematisk begreb kan forstås på to måder. Disse to former for forståelse kaldes hhv. strukturel og operationel forståelse. **Strukturel forståelse** af et matematisk begreb består i, at man opfatter begrebet som et abstrakt objekt [Sfard, 1991, s. 4]. Med denne form for forståelse er matematiske begreber statiske strukturer, der i sig selv eksisterer, og som man kan tale om, som om de var fysiske størrelser. Strukturel forståelse af et matematisk begreb medfører, at man er i stand til at tænke på og arbejde med begrebet som et samlet hele uden at gå ned i detaljerne omkring en konkret udgave af begrebet. En strukturel forståelse af funktionsbegrebet medfører f.eks., at man kan arbejde

¹ Her tænker jeg på en definition, der siger, at en funktion er en relation mellem to mængder A og B , således at hvert element i A svarer til et og kun et element i B .

med funktioner på et abstrakt plan uden hele tiden at knytte sit arbejde til en konkret funktion. Ved **operationel forståelse** af et matematisk begreb forstår man ikke begrebet som et abstrakt objekt, men derimod som en proces eller et produkt af en proces. Det er altså her de matematiske processer, som er knyttet til et matematisk begreb, der er i fokus. Ved en operationel forståelse af funktionsbegrebet vil en funktion f.eks. forstås som en handling, der fører fra et element til et andet. En operationel forståelse medfører, at matematiske begreber ikke opfattes som statiske begreber, der eksisterer i sig selv, men derimod som noget, der kun eksisterer, hver gang de relevante processer udføres [Sfard, 1991, s. 4]. Derudover medfører operationel forståelse en mere detaljeorienteret tilgang til de matematiske begreber, end strukturel forståelse gør. Da det er processerne bag de matematiske begreber, som er i fokus ved en operationel forståelse, vil den naturlige tilgang til et matematisk begreb ved denne forståelse nemlig være at dykke ned i detaljerne i disse processer i stedet for at starte med at betragte begrebet som et samlet hele.

Sfard gør meget ud af at pointere, at selvom strukturel og operationel forståelse af matematiske begreber kan lade til at være to inkompatible måder at forstå matematiske begreber på, så udelukker de to typer af forståelse ikke hinanden. Derimod skal de opfattes som komplementerende hinanden. Et matematisk begreb er for Sfard nemlig både et proces og et abstrakt objekt, hvilket betyder, at ens forståelse af et begreb ikke er fuldstændig, før man er i stand til både at forstå det operationelt og strukturelt [Sfard, 1991, s. 23]. Sagt med andre ord er det strukturelle og det operationelle aspekt af et matematisk begreb to sider af samme sag.

Ifølge Sfard er der blandt matematikere en tendens til at anse strukturel forståelse for den højeste eller bedste af de to typer af forståelse. Selvom alle er enige om, at operationel forståelse er vigtig, indtager denne type forståelse altså en form for andenrangsposition for mange [Sfard, 1991, s. 9]. Sfard pointerer, at ifølge hendes opfattelse af de to typer forståelse giver en sådan hierarkisk ordening af dem ikke mening, da de er uadskillelige og ikke kan opnås fuldt ud isoleret fra hinanden.

2.2.2 Sfards model for matematisk begrebsdannelse

På baggrund af en analyse af den historiske udvikling af forskellige matematiske begreber opstiller Sfard en model for, hvordan et matematisk begreb historisk set opstår [Sfard, 1991, s. 13-14]. En af hovedantagelserne i hendes artikel er derefter, at man relativt direkte kan overføre denne model fra matematiske begrebers historiske udvikling til et individs personlige tilegnelse af matematiske begreber [Sfard, 1991, s. 16]. Det er med andre ord ifølge Sfard overordnet set de samme processer, der er på spil, når et matematisk begreb i første omgang bliver til, og når et individ skal tilegne sig en forståelse af dette begreb.

I sin model for individers personlige begrebsdannelse deler Sfard begrebsdannelsen op i tre faser. Disse tre faser kaldes internalisering, kondensering og reificering. **Internaliseringsfasen** er den fase, hvor individet lærer at udføre de processer, som senere hen i dets bevidsthed vil blive omdannet til et selvstændigt, abstrakt objekt [Sfard, 1991, s. 18]. Disse processer udføres på objekter, som individet allerede har tilegnet sig. I internaliseringsfasen er individets forståelse af det nye begreb rent operationelt. Ifølge Sfard siges et individ at have afsluttet internaliseringsfasen i dannelsen af et nyt matematisk begreb, når det kan udføre processerne bag begrebet på det rent mentale plan og ikke behøver at udføre disse processer for at vurdere eller analysere dem [Sfard, 1991, s. 18]. Ifølge Sfard er internaliseringsfasen af et individs personlige dannelse af funktionsbegrebet den fase, hvor individet lærer at udføre algebraiske manipulationer, lærer, hvad en variabel er, og lærer, hvordan man finder den afhængige variabel vha. en funktionsforskrift. I

kondenseringsfasen bliver individet i stand til at tale om processerne bag det begreb, som det er ved at tilegne sig, som et samlet hele, således at det ikke hele tiden behøver aktivt at udføre disse processer [Sfard, 1991, s. 19]. I tilfældet med et individs personlige dannelse af funktionsbegrebet består dette aspekt ved kondenseringsfasen i, at individet bliver i stand til at manipulere med funktioner uden rent faktisk at beregne konkrete funktionsværdier. Udover denne udvikling i individets evne til at tale om processerne bag begrebet viser en voksende kondensering sig også i individets voksende evne til at skifte mellem forskellige former for repræsentation af begrebet. På et tidspunkt under kondenseringsfasen vil processerne bag det begreb, som individet er ved at tilegne sig, blive tildelt et samlet navn, som individet kan bruge til at tale om dem. På dette tidspunkt er det nye begreb sådan set blevet til i individets bevidsthed [Sfard, 1991, s. 19]. Kondenseringsfasen slutter dog ikke på dette tidspunkt, men varer derimod så længe, at det nye begreb i individets forståelse af det er tæt forbundet med en eller flere konkrete processer. **Reificeringsfasen** er den sidste af de tre faser og indtræder, når individet har opnået en forståelse af det nye begreb som et fuldstændigt selvstændigt, abstrakt objekt, som man godt kan tale om uden overhovedet at knytte det til nogle processer [Sfard, 1991, s. 19]. Individet har derfor først opnået en fuldstændig strukturel forståelse af det nye begreb, når det når til reificeringsfasen.

I forhold til et individs tilegnelse af et matematisk begreb er der ifølge Sfards model en generel tendens, der siger, at individet vil opnå en operationel forståelse af begrebet, før det opnår en strukturel forståelse. Sfard giver følgende argument for, at denne slutning bør være korrekt:

If the structural approach is more abstract than the operational, if from the philosophical point of view numbers and functions are basically nothing but processes, if doing things is the only way to somehow »get in touch« with abstract constructs - if all this is true, then to expect that a person would arrive at a structural conception without previous operational understanding seems as unreasonable, as hoping that he or she would comprehend the two-dimensional scheme of a cube without being acquainted with its »real-life« three-dimensional model. [Sfard, 1991, s. 17-18]

Ifølge dette citat lader det altså til, at idéen om at operationel forståelse af matematiske begreber udvikles før strukturel, er fuldstændig i overensstemmelse med almindelig sund fornuft.

Sfard understreger, at de tre faser i hendes model skal forstås som udgørende et hierarki, i hvilket en fase ikke kan nås, før de tidligere faser er afsluttet [Sfard, 1991, s. 21]. Hun gør dog opmærksom på, at et individs tilegnelse af et matematisk begreb godt kan tage forskellige omveje, som ikke er beskrevet af modellen. F.eks. er det muligt, at et individ i tilegnelsen af et matematisk begreb begynder at identificere begrebet med en af dets repræsentationer. Et eksempel på dette kunne være, at en elev i sin tilegnelse af funktionsbegrebet begynder at identificere funktioner med funktionsforskrifter. Sfard siger derudover, at hun med opstillingen af sin model ikke påstår, at alle tilfælde af personlig begrebsdannelse altid vil foregå i overensstemmelse med denne model. Det er derimod muligt, at f.eks. en given undervisningsstrategi har den indflydelse, at nogle elever i tilegnelsen af nogle begreber vil opnå en strukturel forståelse før en operationel. Ifølge Sfard gengiver hendes model dog en fremherskende tendens, når det kommer til personlig begrebsdannelse [Sfard, 1991, s. 22-23].

Som nævnt starter et individs tilegnelse af et nyt begreb med, at det lærer at foretage nogle processer på nogle allerede tilegnede objektet. Når det nye begreb så er blevet fuldstændigt tilegnet, og individet begynder at forstå det som et abstrakt objekt, kan der foretages processer på det. Med tiden kan disse processer så også begynde at blive opfattet som abstrakte, matematiske objekter. Sagt med andre ord vil reificeringen af et begreb føre til internaliseringen

af andre. Tilegnelsen af matematiske begreber kan derfor ses som en spiralerende udvikling, under hvilken man gennemgår de samme faser igen og igen. Dette princip medfører derudover, at man kan se matematikkens begreber som udgørende en hierarkisk struktur, hvori et begreb som udelukkende opfattes som processer på et niveau, på et højere niveau vil blive opfattet som et selvstændigt, abstrakt objekt.

2.2.3 Vanskeligheder ved at opnå strukturel forståelse

En af Sfards hovedpointer er, at det er meget svært at opnå en strukturel forståelse af et matematisk begreb. Dette er et problem, da mangel på strukturel forståelse ifølge Sfard på et eller andet tidspunkt vil forhindre individet i at tilegne sig mere matematisk viden [Sfard, 1991, s. 29].

En del af forklaringen på, hvorfor strukturel forståelse er så svært at opnå, er ifølge Sfard, at man for at opnå en strukturel forståelse fra en operationel forståelse af et matematisk begreb skal foretage et ontologisk spring i forhold til, hvordan man opfatter begrebet [Sfard, 1991, s. 30]. I forhold til Sfards model for personlig begrebsdannelse opnås strukturel forståelse som nævnt i begrebsdannelsens reificeringsfase, og ifølge Sfard sker der mellem kondenseringsfasen og reificeringsfasen et ontologisk skift. I internaliserings- og kondenseringsfasen hvor ens forståelse af begrebet endnu hovedsageligt er operationel, opfattes det matematiske begreb som en proces eller et produkt af en proces, og de ændringer der sker i forståelsen af begrebet i disse to faser, sker gradvist. På overgangen til reificeringsfasen forekommer der en pludselig kvalitativ ændring i forståelsen af begrebet, idet det nu går fra kun at blive forstået som en proces til også at blive forstået som et abstrakt objekt [Sfard, 1991, s. 20]. Dette betyder, at begrebet pludseligt bliver set i et helt nyt lys. Denne drastiske ændring i ens forståelse af begrebet vil meget ofte medføre, at den mening og det indhold man tillægger begrebet, vil gennemgå en forandring. Som et eksempel på dette nævner Sfard, at når man går fra at opfatte en funktion som en måde at komme fra en værdi til en anden og til at opfatte den som en relation mellem mængder, så vil mængden af ting, som man opfatter som funktioner, forøges voldsomt [Sfard, 1991, s. 30]. Ifølge Sfard vil en så gennemgribende ændring af ens opfattelse af et matematisk begrebs natur, som skal til for at opnå en strukturel forståelse af begrebet, aldrig være let at opnå.

En anden mulig delvis forklaring på, hvorfor strukturel forståelse af et matematisk begreb er så svær at opnå, er det fænomen, som Sfard kalder reificeringens onde cirkel. Som nævnt i afsnit 2.2.2 vil reificeringen af et matematisk begreb føre til, at andre begreber bliver internaliseret ved, at man begynder at foretage nye processer på det første begreb. Ifølge Sfard foregår denne reificering og internalisering faktisk samtidigt [Sfard, 1991, s. 30-31]. Det vil nemlig ikke være sandsynligt, at et matematisk begreb bliver reificeret, før man begynder at foretage nye processer på det, og så er internaliseringen af det næste begreb allerede igang. Før man begynder at foretage processer på et begreb, vil der nemlig ikke være nogen grund til at betragte begrebet som et selvstændigt objekt. På den anden side vil det ikke give så meget mening at begynde at foretage nye processer og dermed starte internaliseringen af et nyt begreb, før man har nogle objekter at foretage processerne på. En forklaring på, hvorfor reificering af et matematisk begreb og dermed en strukturel forståelse af dette begreb er så svær at opnå, kan ifølge Sfard derfor være, at denne reificering og internaliseringen af »det næste« begreb er forudsætninger for hinanden. Det er dette fænomen, som Sfard kalder reificeringens onde cirkel [Sfard, 1991, s. 31].

3 Et kompetencebaseret syn på matematikundervisning

Teorien der gennemgås i dette kapitel, knytter sig til det andet delspørgsmål i min problemformulering, der spørger ind til, hvorvidt matematikhistorie kan bruges til at udvikle elevers matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik. Dette spørgsmål refererer til det kompetencebaserede syn på matematiklæring og -undervisning, som præsenteres i rapporten *Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (KOM-rapporten) som en alternativ måde at tænke undervisningsbeskrivelse og undervisningsplanlægning på i forhold til traditionelle læseplaner [Niss og Jensen, 2002, s. 41].

I dette kapitel vil jeg i afsnit 3.1 starte med at introducere selve kompetencebegrebet og KOM-rapportens otte konkrete matematiske kompetencer. Efter dette vil KOM-rapportens tanker om overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde blive præsenteret i afsnit 3.2. Til sidst vil der i afsnit 3.3 blive gennemgået et eksempel på, hvordan KOM-rapportens tanker om matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik tidligere er blevet brugt i forbindelse med brug af matematikhistorie i matematikundervisningen, og jeg vil forklare, hvordan min brug af det kompetencebaserede syn relaterer sig til denne tidligere brug af det.

3.1 Matematiske kompetencer

Matematiske kompetencer er et nøglebegreb i KOM-rapportens idéer om, hvordan man bør beskrive matematikundervisning. I KOM-rapporten skelnes der mellem matematisk kompetence og *en* matematisk kompetence. Matematisk kompetence er det mest overordnede af de to begreber og er defineret således:

matematisk kompetence består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. [Niss og Jensen, 2002, s. 43, kursiv i originalen]

Matematisk kompetence kan altså lidt forsimplet beskrives som evnen til at begå sig i matematikholdige sammenhænge af forskellig slags. *En* matematisk kompetence er en hovedkomponent i det overordnede begreb matematisk kompetence. Mere præcist er en matematisk kompetence defineret således:

en matematisk kompetence er indsigtfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematisk udfordringer. [Niss og Jensen, 2002, s. 43]

Det at besidde en matematisk kompetence betyder altså, at man er i stand til at agere hensigtsmæssig i en bestemt type matematisk situation. Ifølge KOM-rapporten udspændes matematisk kompetence af otte konkrete matematiske kompetencer og tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde. De tre former for overblik og dømmekraft vil blive behandlet i afsnit 3.2. De otte kompetencer kan hver især beskrives som følger:

1. **Tankegangskompetence:** Tankegangskompetencen består for det første i at være klar over hvilken type spørgsmål, der er karakteristiske for matematikken, og hvilke svar man kan forvente at få på disse spørgsmål. Derudover omfatter den også evnen til selv at formulere matematiske spørgsmål. Den omfatter også det at kende, forstå og kunne håndtere forskellig begrebers rækkevidde. Derudover består kompetencen i at være i stand til at forstå og gennemføre abstraktion og generalisering af hhv. matematiske begreber og matematiske resultater. Som en sidste ting omfatter den det at kunne skelne både aktivt og passivt mellem forskellige slags matematiske udsagn og påstande som f.eks. definitioner, sætninger, formodninger og betingede udsagn. Kernen i tankegangskompetencen er arten af de spørgsmål og svar, som er karakteristiske for matematikken. Det som spørgsmålene konkret handler om, metoderne til at besvare spørgsmålene og svarenes rigtighed hører derimod ikke ind under denne kompetences område [Niss og Jensen, 2002, s. 47].
2. **Problembehandlingskompetence:** Problembehandlingskompetencen består i at være i stand til at opstille og løse forskellige slags matematiske problemer. I KOM-rapporten defineres et matematisk problem som et matematisk spørgsmål, hvis besvarelse kræver en matematisk undersøgelse, der ikke er en ren rutinesag for problemløseren. Matematiske spørgsmål der kan besvares alene vha. nogle få rutineoperationer, regnes ikke som matematiske problemer. Denne definition af matematiske problemer medfører, at dette begreb bliver relativt til den person, som skal besvare det matematiske spørgsmål. Et spørgsmål som for en person blot kræver aktivering af nogle rutineoperationer for at blive besvaret, kan være et matematisk problem for en anden [Niss og Jensen, 2002, s. 49-50].
3. **Modelleringskompetence:** Modelleringskompetencen består i at kunne analysere og vurdere foreliggende matematiske modeller samt i selv at kunne udføre aktiv modelbygning. I princippet kan man tale om matematisk modelbygning, hver gang man bruger matematik til at løse et problem udenfor matematikken selv. KOM-rapporten bruger dog kun begrebet matematisk modelbygning om situationer, hvor der optræder en ikke-selvfølgelig tilskæring af det modellerede sagsforhold, der nødvendiggør, at der træffes beslutninger, gøre antagelser, opsamles informationer osv. [Niss og Jensen, 2002, s. 52].
4. **Ræsonnementskompetence:** Ræsonnementskompetencen består for det første i at kunne følge og forstå et foreliggende matematisk ræsonnement fremført af andre samt i at være i stand til selv at udtænke og gennemføre informelle og formelle matematiske ræsonnementer. Derudover består den i at vide, hvad et bevis er, hvordan et bevis afskille sig fra andre typer af matematiske ræsonnementer, og hvornår et matematisk ræsonnement er et bevis. Kompetencen består også i at kunne afdække de bærende idéer i et bevis. Som en sidste ting består den i selv at kunne omforme et heuristisk ræsonnement til et gyldigt bevis. KOM-rapporten pointerer, at ræsonnementskompetencen er i spil, hver gang holdbarheden af et matematisk udsagn skal vurderes. Dette betyder, at både matematisk bevisførelse i forbindelse med matematiske sætninger og argumenter for rigtigheden af løsningen på en matematikopgave falder ind under ræsonnementskompetencens område [Niss og Jensen, 2002, s. 54].

5. **Repræsentationskompetence:** Repræsentationskompetencen består for det første i at forstå og kunne betjene sig af forskellige former for repræsentationer af matematiske objekter og situationer. Derudover omfatter kompetencen også det at forstå de indbyrdes forbindelser mellem forskellige repræsentationer af det samme matematiske sagsforhold. Man skal f.eks. kende til svagheder og styrker ved de forskellige repræsentationsformer. Som en sidste ting omfatter kompetencen det at kunne vælge og oversætte mellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold [Niss og Jensen, 2002, s. 56-57].
6. **Symbol- og formalismekompetence:** Symbol- og formalismekompetencen består for det første i at være i stand til at afkode, behandle og betjene sig af symbol- og formelsprog. Derudover består den i at kunne oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og almindeligt sprog. Som en sidste ting består kompetencen i at have indsigt i karakteren af og kende spillereglerne for forskellige formelle matematiske systemer. Disse systemer vil typisk være aksiomatiske systemer [Niss og Jensen, 2002, s. 58].
7. **Kommunikationskompetence:** Kommunikationskompetencen består for det første i at være i stand til at sætte sig ind i og fortolke andres matematiske udsagn og tekster, hvad enten disse er skriftlige, mundtligt eller visuelle. Derudover består kompetencen i selv at kunne udtrykke sig om matematikholdige emner på forskellige måder (f.eks. skriftligt, mundligt og visuelt), med forskellige grader af teoretisk og teknisk præcision og til forskellige modtagere [Niss og Jensen, 2002, s. 60].
8. **Hjælpekompetence:** Hjælpekompetencen består for det første i at kende til eksistensen af og styrker og svagheder ved forskellige former for redskaber og hjælpemidler til brug i forbindelse med matematiske aktiviteter. Derudover består den i at være i stand til at benytte disse redskaber og hjælpemidler på en reflekteret og fornuftig måde [Niss og Jensen, 2002, s. 62].

De otte matematiske kompetencer har, som det fremgår ovenfor, hver sin identitet, men er alligevel nært forbundne eller beslægtede. Denne forbundethed betyder bl.a., at en enkelt kompetence ikke kan erhverves eller besiddes isoleret fra de andre [Niss og Jensen, 2002, s. 43]. Det der gør to kompetencer forskellige, er, at de betoner hver sin side af den matematiske kunnen.

Ifølge KOM-rapporten kan hver af de otte matematiske kompetencer siges at bestå af en produktiv og en undersøgende side [Niss og Jensen, 2002, s. 63]. Den produktive side af en kompetence har fokus på, at besidderen af kompetencen er i stand til selv at gennemføre de processer og handlinger, som hører ind under kompetencens område, mens den undersøgende side derimod fokuserer på, at besidderen kan forstå, analysere og vurdere allerede gennemførte processer og resultaterne af disse [Niss og Jensen, 2002, s. 63-64]. Hvis man eksempelvis ser på kommunikationskompetencen, består den produktive side af denne kompetence i at være i stand til selv at udtrykke sig om matematikholdige emner, mens den undersøgende består i at være i stand til at sætte sig ind i og fortolke andres matematiske udsagn. Ifølge KOM-rapporten har indholdet af både den produktive og den undersøgende side af en matematisk kompetence karakter af handling. Dette er temmeligt nemt at indse i forbindelse med den produktive side af en kompetence, da denne side netop har fokus på, at besidderen af kompetencen kan gennemføre processer, som på en eller anden måde fører til et konkret produkt. KOM-rapporten understreger dog, at også den undersøgende side af en matematisk kompetence har handlingskarakter, selvom der her kan være tale om en handling, som udelukkende foregår på det mentale plan [Niss og Jensen, 2002, s. 64].

I KOM-rapporten understreges det, at det ikke er muligt at besidde en matematisk kompetence fuldt ud. Dette skyldes, at man altid vil kunne finde et endnu mere kompliceret sagsforhold, end dem man tidligere har formået at aktivere kompetencen overfor [Niss og Jensen, 2002, s. 71].

3.2 Overblik og dømmekraft

Som nævnt i afsnit 3.1 udspændes overordnet matematisk kompetence ikke blot af de otte konkrete kompetencer, men også af tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde. I KOM-rapporten karakteriseres disse tre former for overblik og dømmekraft som tre former for aktiv indsigt, der i modsætning til de matematiske kompetencer ikke har karakter af handling [Niss og Jensen, 2002, s. 66]. Dette hænger sammen med, at genstanden for hver af de tre former for overblik og dømmekraft er matematikken som helhed, mens genstanden for hver af de otte kompetencer er specifikke matematiske objekter, situationer og udfordringer. KOM-rapportens tre former for overblik og dømmekraft kan beskrives som følger:

1. **Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder:** Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er anvendelsen af matematik indenfor områder og til formål, der ligger udenfor matematikken selv. Disse områder og formål kan f.eks. være af dagligdags, samfundsmæssig og videnskabelig art. Anvendelsen af matematik indenfor disse områder består ifølge KOM-rapporten af opstilling og udnyttelse af matematiske modeller [Niss og Jensen, 2002, s. 67]. Dette betyder, at denne form for overblik og dømmekraft er nært knyttet til den ovenfor omtalte modelleringskompetence. Forskellen på dem er, at mens modelleringskompetencen består i at være i stand til at agere hensigtsmæssigt i konkrete situationer, hvor matematisk modelbygning optræder, så har overblikket og dømmekraften af en mere bred og sammenfattende karakter. En veludviklet modelleringskompetence er dog med til at give denne form for overblik og dømmekraft substans.
2. **Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning:** Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er det faktum, at matematik har udviklet sig over tid og i forskellige kulturelle og samfundsmæssige sammenhænge. KOM-rapporten pointerer, at denne form for overblik og dømmekraft ikke må forveksles med det at have kendskab til forskellige episoder i matematikkens historie. Genstanden for overblikket og dømmekraften er nemlig ikke de konkrete matematikhistoriske episoder, men derimod selve det faktum, at matematikken har udviklet sig, samt hvilke drivkræfter der har stået bag denne udvikling. Det understreges dog, at hvis denne form for overblik og dømmekraft skal have nogen form for substans, så må den forankres i viden om udvalgte matematikhistoriske udviklinger og episoder. Som den eneste af de tre former for overblik og dømmekraft har denne form ikke noget modstykke i de otte matematiske kompetencer [Niss og Jensen, 2002, s. 68].
3. **Matematikkens karakter som fagområde:** Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er matematikkens karakteristika som fagområde. Ifølge KOM-rapporten er denne form for overblik og dømmekraft den, der ligger mest direkte i forlængelse af de otte matematiske kompetencer, da man kan sige, at alle kompetencerne kan bidrage til at give den substans. KOM-rapporten understreger dog, at overblikket og dømmekraften på trods af dette ikke automatisk vil følge af en veludviklet kompetencebesiddelse. Derimod er

man nødt til eksplicit at sætte fokus på matematikkens særlige karakteristika for at opnå bevidst overblik og dømmekraft om disse [Niss og Jensen, 2002, s. 69].

I forlængelse af beskrivelsen af den tredje form for overblik og dømmekraft ovenfor skal det siges, at KOM-rapporten pointerer, at ingen af de tre former for overblik og dømmekraft er en automatisk konsekvens af at besidde de otte matematiske kompetencer på et tilpas højt niveau [Niss og Jensen, 2002, s. 70]. Man er derimod nødt til aktivt at arbejde med genstandsområderne for de tre former for overblik og dømmekraft for bevidst at opnå disse. KOM-rapporten understreger dog også, at hvis man skal opnå de tre former for overblik og dømmekraft på en måde, som der er nogen substans i, så er de nødt til at være forankrede i de otte kompetencer. Man kan altså sige, at besiddelse af de otte kompetencer på et vist niveau er en nødvendig, men ikke tilstrækkelig forudsætning for at kunne opnå en ordentligt forankret udgave af hver af de tre former for overblik og dømmekraft.

I forbindelse med besiddelsen af de otte matematiske kompetencer siger KOM-rapporten som nævnt, at det ikke er muligt at besidde en kompetence fuldt ud, da man altid vil kunne finde mere komplicerede sagforhold end dem, som man tidligere med held har aktiveret kompetencen overfor. På samme måde og med samme begrundelse gælder det, at man ikke kan komme til at besidde de tre former for overblik og dømmekraft fuldt ud [Niss og Jensen, 2002, s. 71].

3.3 Det kompetencebaserede matematiksyn brugt i forbindelse med inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen

I dette projekt bruges KOM-rapportens kompetencebaserede syn på matematikundervisningen som et ud af flere teoretiske grundlag, hvorpå matematikhistoriens potentielle bidrag til matematikundervisningen kan diskuteres. Denne brug af KOM-rapportens idéer går igen i artiklen *New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring*, der er skrevet af Uffe Thomas Jankvist og Tinne Hoff Kjeldsen i 2010 [Jankvist og Kjeldsen, 2010]. Jankvist og Kjeldsens udgangspunkt er, at inddragelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen ikke fylder nok i den generelle forskning indenfor matematikundervisning. I artiklen giver de deres bud på, hvordan dette problem kan løses ved at præsentere to veje, som forskningen i brugen af matematikhistorie i matematikundervisning kan følge.

Jankvist og Kjeldsen skelner i deres artikel mellem to mulige scenarier for inddragelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen [Jankvist og Kjeldsen, 2010]. I **det første scenarie** er matematikhistorie og matematikhistoriske emner ikke en del af det fastlagte pensum for undervisningen. Derfor er man i dette scenarie tvunget til at benytte matematikhistorie som et redskab til at undervise i pensumbestemte emner, hvis man vil inddrage matematikhistorien i sin undervisning. I **det andet scenarie** indgår matematikhistoriske emner i det fastlagte pensum, og hensigten med dette er, at tilegnelsen af reelle matematikhistoriske indsigter skal udgøre en del af det at lære matematik. I dette scenarie er der lagt op til, at matematikhistorisk indsigt skal indgå som et selvstændigt mål for dele af undervisningen. Jankvist og Kjeldsen bruger størstedelen af deres artikel på at vise, hvordan man ved at benytte forskellige teoretiske konstruktioner kan komme til at arbejde med de to forskellige scenarier på en sådan måde, at både matematikhistorien og matematikken tilgodeses. Derved får de udstukket to veje, som det ifølge dem vil være gavnligt for forskningen i brugen af matematikhistorie i matematikundervisningen at følge.

En af de helt centrale teorikonstruktioner i Jankvists og Kjeldsens arbejde er KOM-rapportens kompetencebaserede syn på matematikundervisning. I arbejdet med det første scenarie er det de otte konkrete matematiske kompetencer, der er i fokus. Jankvists og Kjeldsens hovedpointe er i denne sammenhæng, at hvis man baserer sit syn på matematikundervisningen på de matematiske kompetencer i stedet for på en traditionel pensumbeskrivelse af undervisningen, så vil mulighederne ved at anvende matematikhistorie som et redskab i matematikundervisningen blive meget tydeligere. Denne pointe kommer til udtryk i følgende citat:

a change in perspective towards mathematical competencies could make the educational benefits of using history as a tool stand out clearer. When addressing the teaching and learning of mathematics through a competence-based view of mathematics education, rather than only a concept development view, it becomes more evident, what the straightforward gains of using history as a tool are. Namely, that students will develop their mathematical competencies when they come into contact with historical texts and sources, when they have to grasp these, relate them to modern presentations of the same material, communicate the findings ect. [Jankvist og Kjeldsen, 2010]

Af dette citat fremgår det, at arbejdet med matematikhistorie og især med matematikhistoriske kilder ifølge Jankvist og Kjeldsen kan styrke elevers matematiske kompetencer.

I deres arbejde med det andet scenarie trækker Jankvist og Kjeldsen på KOM-rapportens tanker om den type overblik og dømmekraft, hvis genstand er matematikkens historiske udvikling. Jankvist og Kjeldsen argumenterer for, at deres egne tanker omkring matematikhistorisk indsigt som mål i undervisningen minder meget om KOM-rapportens tanker om denne form for overblik og dømmekraft. De bruger derfor disse af KOM-rapportens tanker som en slags retningslinjer i forbindelse med arbejdet med det andet scenarie [Jankvist og Kjeldsen, 2010]. Ifølge Jankvist og Kjeldsen medfører KOM-rapportens tanker bl.a., at når man vil have matematikhistorisk indsigt som mål i en undervisningssituation, så skal man sørge for, at de konkrete historiske eksempler man benytter, i en eller anden forstand er repræsentative for flere episoder og udviklinger i matematikkens historie, og at elevernes historiske indsigter bliver forankret i viden om reelt matematisk stof, der er relevant for eksemplerne. Udover at bruge KOM-rapportens tanker som retningslinjer i deres arbejde med det andet scenarie, anvender Jankvist og Kjeldsen også KOM-rapportens beskrivelser og eksempler omkring den relevante form for overblik og dømmekraft til at evaluere de matematikhistoriske indsigter, som en gruppe gymnasieelever har opnået ved at deltage i et matematikhistorisk forløb [Jankvist og Kjeldsen, 2010].

Samlet set kan man sige, at Jankvist og Kjeldsen på den ene side bruger KOM-rapportens tanker og idéer som en form for retningslinjer i deres arbejde med at integrere matematikhistorie i matematikundervisningen og på den anden side bruger disse tanker og idéer som et analyseredskab, der hjælper dem til at få indsigt i elevers matematiske formåen. Min brug af KOM-rapportens tanker i dette projekt ligger meget tæt op ad Jankvist og Kjeldsens brug af dem. I designet af det undervisningsforløb, som udgør den empiriske kerne i min undersøgelse, fungerede KOM-rapportens forskellige tanker, idéer og anbefalinger som en ud af flere rettesnore. Da en del af mit mål med forløbet var, at nogle af elevernes matematiske kompetencer skulle udvikles eller i hvert fald udfordres, er det ganske naturligt, at disse kompetencer kom til at guide mit design. Derudover kom KOM-rapportens tanker om, hvad overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling egentligt er, til at fungere som en rettesnor i forhold til, hvordan jeg designede den del af forløbet, hvor formålet var, at eleverne skulle opnå nogle indsigter omkring matematikkens historie. Designet af undervisningsforløbet vil blive gen-

nemgøet grundigere i kapitel 5. I analysen af det datamateriale som kom ud af gennemførelsen af mit undervisningsforløb, har KOM-rapportens kompetencebaserede undervisningssyn fungeret som et analyseredskab, der har sat mig i stand til dels at få indsigt i elevernes matematiske formåen og dels at formulere mig om de ting, som jeg ser i datamaterialet. Analysen af mit datamateriale vil blive præsenteret i kapitel 6.

Ifølge Jankvist og Kjeldsen er deres artikel at opfatte som en påpegning af, hvilke retninger forskningen indenfor brugen af matematikhistorie i matematikundervisningen med fordel kan tage. Der er stadig meget forskning at foretage indenfor feltet. Især påpeger de, at der er behov for mere empirisk forskning [Jankvist og Kjeldsen, 2010]. Med min undersøgelse bidrager jeg med en smule af den forskning, som Jankvist og Kjeldsen efterlyser. Min indsamlede empiri kan bruges til at få et første indblik i, hvilke muligheder der er ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen i det danske gymnasium. Dermed inskriver jeg mig med min undersøgelse i den forskning i brug af matematikhistorie i matematikundervisning, som Jankvist og Kjeldsen gør sig til fortalere for.

4 En diskursiv forståelse af matematik

Det tredje af problemformuleringens delspørgsmål går på, om matematikhistorie kan bruges til at bringe metadiskursive regler frem i lyset, således at eleverne kommer til at reflektere over dem. Begrebet metadiskursive regler er hentet i Anna Sfards teori om tænkning som en form for kommunikation, ifølge hvilken matematik kan betragtes som en diskurs. I dette kapitel vil jeg i afsnit 4.1 starte med at præsentere de grundlæggende linjer i Sfards generelle teori om tænkning, hvorefter konsekvenserne af denne teori for synet på matematik og matematiklæring i afsnit 4.2 vil blive forklaret. Derefter vil begrebet kommognitiv konflikt blive introduceret i afsnit 4.3. Til sidst vil der i afsnit 4.4 blive præsenteret et teoretisk argument for, at matematikhistorie har en vigtig rolle at spille i indlæringen af metadiskursive regler.

4.1 Tænkning som kommunikation

I bogen *Thinking as Communicating - Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing* [Sfard, 2008] fremlægger Sfard sit syn på matematisk tænkning og menneskelig tænkning generelt set. I sin teori om menneskelig tænkning bygger Sfard på det, hun kalder et deltagersyn (engelsk: *participationist vision*) på menneskelig tænkning og læring [Sfard, 2008, s. 78]. Ifølge dette syn kan en læringsproces beskrives som en proces, der gør den lærende til deltager i og kompetent selvstændig udøver af en bestemt form for opførelse og handling. Deltagersynets grundsætning er en påstand, som er fremført af psykologen Lev Vygotsky, og som siger, at »historically established, collectively implemented activities are developmentally prior to all our uniquely human skills« [Sfard, 2008, s. xvi-xvii]. Ifølge Vygotsky vil enhver særlig menneskelig evne altså have en kollektivt implementeret aktivitet som forgænger. Ifølge Sfard er evnen til at tænke en særlig menneskelig evne, hvorfor den ifølge Vygotsky og deltagersynet må have en kollektivt implementeret aktivitet som forgænger. En af de helt centrale påstande i Sfards teori er, at denne kollektivt implementerede aktivitet er interpersonel kommunikation. Ifølge Sfard kan tænkning altså defineres på følgende måde:

Thinking is an individualized version of (interpersonal) communicating. [Sfard, 2008, s. 81, kursiv i originalen]

I Sfards teori er tænkning og kommunikation altså aspekter af det samme fænomen. For at holde fast i denne idé introducerer Sfard adjektivet kommognitiv (engelsk: *commognitive*), der er en sammentrækning af ordene kommunikativ og kognitiv (engelsk: *communicational* og *cognitive*) [Sfard, 2008, s. 83]. **Kommognitiv** betyder, at det sagte både omhandler det, der traditionelt set kan betegnes som kognitive processer, og det der kan kaldes interpersonel kommunikation.

Sfard definerer altså tænkning som en form for kommunikation. For at betydningen af denne definition bliver helt klar, er det nødvendigt at vide, hvad der forstås ved kommunikation. Sfard giver følgende definition på kommunikation:

Communication is a collectively performed patterned activity in which action A of an individual is followed by action B of another individual so that

1. A belongs to a certain well-defined repertoire of actions known as communicational
2. Action B belongs to a repertoire of re-actions that fit A, that is, actions recurrently observed in conjunction with A. This latter repertoire is not exclusively a function of A, and it depends, among others, on factors such as the history of A (what happened prior to A), the situation in which A and B are performed, and the identities of the actor and re-actor. [Sfard, 2008, s. 86-87, kursiv i originalen]

At kommunikation er en *patterned* aktivitet, betyder ifølge Sfard, at en kommunikativ handling og reaktionen på denne passer sammen på en ikke tilfældig måde. For hver kommunikativ handling vil det altså kun være en bestemt type reaktioner, som anses for passende. Derudover refererer *patterned* også til, at et sæt bestående af en kommunikativ handling og en reaktion på denne kan ses optræde sammen gentagne gange på mange forskellige steder og tidspunkter. Sagt med andre ord er kommunikation fyldt med mønstre, der gentages igen og igen. Ifølge Sfard er disse kommunikative mønstre ikke nødvendige eller naturlige, men derimod historisk givne [Sfard, 2008, s. 87-88].

Ifølge Sfard findes der mindre, delvist lukkede delsystemer inden for det overordnede system, som al kommunikation udgør. Hver af disse systemer udgør en bestemt type kommunikation. En person vil være i stand til at deltage i nogle af disse forskellige kommunikationstyper, mens andre vil være lukket land for vedkommende. I Sfards termonologi kaldes en sådan type kommunikation for en diskurs:

The different types of communications, and thus of commognition, that draw some individuals together while excluding some others will be called *discourses*. [Sfard, 2008, s. 91, kursiv i originalen]

Et andet sted beskriver Sfard begrebet diskurs ved at sige, at en diskurs er totaliteten af kommunikative aktiviteter, som praktiseres i et bestemt samfund [Sfard, 2000, s. 160]. Her skal ordet samfund forstås bredt, således at det bl.a. omfatter samfundene bestående af alle teologer og af alle kvinder. Sfard understreger, at grænserne mellem forskellige diskurser ikke er så klare, som den ovenstående definition og beskrivelse kan give udtryk for. Derudover er diskurser noget, der ændrer sig hele tiden, hvilket er en naturlig følge af, at en given diskurs bliver implemeteret af mange forskellige mennesker, på mange forskellige steder og til mange forskellige tider [Sfard, 2008, s. 131].

Hvis man sammenholder Sfards tanker om diskurser med deltagersynets idé om, at en læringsproces er en proces, der gør den lærende til selvstændig deltager i en bestemt form for opførelse og handling, bliver det at lære det samme som at blive deltager i en bestemt diskurs [Sfard, 2000, s. 160]. Indenfor Sfards opstillede teori betyder læring af matematik altså, at man bliver en deltager i den matematiske diskurs.

Ud fra det faktum at al menneskelig kommunikation udviser en række mønstre, slutter Sfard, at al kommunikation kan ses som styret af en række regler [Sfard, 2008, s. 200-201]. De regler som styrer kommunikationen indenfor en bestemt diskurs, opdeler Sfard i to typer, som hun kalder objektive regler og metadiskursive regler. **Objektive regler** er de regler, der beskriver egenskaber ved, opførelsen af og forholdet imellem diskursens objekter, mens **metadiskursive regler** er regler, som beskriver selve diskursen og diskursdeltagernes opførelse. Skellet mellem objektive regler og metadiskursive regler hænger sammen med, at man også kan opdele hele

diskursen i et objektniveau og et metadiskursivt niveau. Objektniveauet indbefatter alt det, der omhandler objekterne for diskursen, mens det metadiskursive niveau indbefatter alt det, der omhandler selve udfomningen og udførelsen af de diskursive handlinger¹. I næste afsnit præsenteres idéen om metadiskursive regler og objektniveauregler grundigt i forbindelse med matematik.

4.2 Matematik som diskurs

Et særkende ved matematik som diskurs er ifølge Sfard, at det kan beskrives som en diskurs om diskurs. Med dette menes, at objekterne for den matematiske diskurs ikke er fysiske objekter, der eksisterer uafhængigt af diskursen, men derimod er diskursive objekter [Sfard, 2008, s. 129]. Dette træk adskiller matematik fra mange andre diskurser. Hvor man i forbindelse med f.eks. den zoologiske diskurs kan udpege objekter for diskursen, som er adskilt fra og uafhængige af diskursen selv, så kan dette ifølge Sfard ikke lade sig gøre for den matematiske diskurs. Her er objekterne for diskursen derimod integrerede dele af diskursen selv. Ifølge Sfard kan dette træk ved matematisk diskurs beskrives ved at sige, at matematik er et autopoietisk system [Sfard, 2008, s. 129]. Ved et autopoietisk system forstås et system, som består af en diskurs og objekterne for denne diskurs, og som genererer sig selv og vokser indefra².

Ligesom alle andre diskurser styres matematisk diskurs af et sæt af objektniveauregler og metadiskursive regler. Sfard udtrykker forskellen mellem objektniveauregler og metadiskursive regler meget fint ved at sige, at mens objektniveauregler udtaler sig om diskursens objekters opførelse, så udtaler metadiskursive regler sig om diskursens deltagers handlinger [Sfard, 2008, s. 201]. Et eksempel på en matematisk objektniveauregel fra geometriens verden er den sætning, der siger, at vinkelsummen for en polygon med n sider er $(n - 2) \times 180^\circ$ [Sfard, 2008, s. 201]. Et eksempel på metadiskursive regler indenfor matematikken er de regler, der styrer, hvad vi accepterer som et bevis, og hvordan vi udfører et sådan [Sfard, 2008, s. 201].

Sfard understreger, at skellet mellem objektniveauregler og metadiskursive regler er relativt [Sfard, 2008, s. 201]. Dette fremgår bl.a. af det faktum, at hvad der fungerer som en objektniveauregel for en af matematikkens discipliner, sagtens kan være en metadiskursiv regel for en af de andre discipliner. Som et eksempel på dette nævner Sfard den regel, der siger, at hvis man skal gange summen af to tal a og b med et tredje tal c , så kan man gøre dette ved først at gange c med a og b og så lægge disse to produkter sammen. Ifølge Sfard er denne regel en metadiskursiv regel, når man bevæger sig indenfor aritmetikken, mens den er en objektniveauregel indenfor algebraen [Sfard, 2008, s. 202].

Et af målene med al matematikundervisning er gradvist at modificere elevernes personlige metadiskursive regler og objektniveauregler, så de stemmer overens med de metadiskursive regler og objektniveauregler, der er alment accepterede i det matematiske samfund [Sfard, 2008, s. 202].

¹ Opdelingen i et objektniveau og et metadiskursivt niveau er lidt en simplificering af Sfards teori på dette punkt. Det som jeg kalder det metadiskursive niveau, opdeler Sfard i uendeligt mange niveauer. Dette skyldes, at hun ser menneskelig kommunikation som en struktur med uendeligt mange lag, hvor det altid er muligt at gå et lag højere op og kigge på en netop udført kommunikativ handling fra dette højere synspunkt [Sfard, 2008, s. 105]. Det nederste af kommunikationens lag kalder hun objektniveauet, mens alle de andre lag er metadiskursive niveauer. I min brug af Sfards teori har jeg vurderet, at jeg godt kan tillade mig at tænke på Sfards mange metadiskursive niveauer som et samlet niveau.

² I Sfards idéer om matematik som diskurs om diskurs ligger der et implicit, men alligevel tydeligt matematiksyn. Da denne del af hendes teori ikke er det mest essentielle for min undersøgelse, vil jeg ikke bruge tid på at diskutere dette matematiksyn.

At dette mål er nødvendigt at opnå, skyldes, at de to typer regler har en afgørende indflydelse på, hvordan en deltager i den matematiske diskurs forstår diskursens indhold og som en følge af denne forståelse handler i diskursen. Hvor objektniveauereglerne kan introduceres meget direkte vha. bl.a. sætninger, er man nødt til at tænke sig lidt mere om, når det gælder de metadiskursive regler. Dette skyldes, at metadiskursive regler er noget, som følges og indlæres ubevidst [Sfard, 2008, s. 203], [Sfard, 2000, s. 168]. Metadiskursive regler er derfor ikke noget, som man kan lære ved direkte at få dem præsenteret og forklaret. I artiklen *On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse* fra 2000 [Sfard, 2000] advarer Sfard faktisk mod at sætte eksplicit fokus på metadiskursive regler i matematikundervisningen. Hendes begrundelse for dette er, at hvis man får et sæt metadiskursive regler forklaret på en eksplicit måde, så er det meget muligt, at disse regler strider imod dem, som man på forhånd ubevidst har fulgt i ens handlinger. I de fleste tilfælde vil resultatet af en sådan konflikt blive, at det vedbliver at være de ubevidst tilegnede regler, som styrer ens handlinger, også selvom disse regler måske er mangelfulde eller direkte forkerte. I visse tilfælde vil en konflikt mellem to uforenelige sæt af metadiskursive regler dog kunne vanskeliggøre al læring indenfor det aktuelle felt [Sfard, 2000, s. 169]. Dette betyder, at Sfard her faktisk siger, at en direkte præsentation af metadiskursive regler kan skade elevens mulighed for videre læring. I sin bog fra 2008 [Sfard, 2008] modificerer Sfard dog denne noget pessimistiske holdning til direkte præsentation af metadiskursive regler temmeligt meget. Her siger hun faktisk, at det at gøre ens metadiskursive regler eksplicite er en grundlæggende aktivitet indenfor matematik, og at det at definere kan ses som et eksempel på en sådan eksplicitgørelse [Sfard, 2008, s. 204]. Også i bogen fra 2008 er Sfard dog opmærksom på, at der er vanskeligheder forbundet med at påvirke elevens metadiskursive regler på en kontrolleret måde. Dette hænger sammen med, at elever ifølge hende kan have to sæt af metadiskursive regler - et de tilslutter sig, og et de bruger [Sfard, 2008, s. 204]. Det sæt af metadiskursive regler som en elev tilslutter sig, består af de regler, som eleven vil sige, at han følger og anser for rigtige, hvis han bliver direkte spurgt. Det sæt af metadiskursive regler, som en elev bruger, består derimod af de regler, som eleven faktisk følger i sin omgang med matematik. De to sæt af metadiskursive regler kan sagtens være temmeligt forskellige. Problemet i forhold til undervisning er, at hvis man forsøger at sætte direkte fokus på metadiskursive regler, så vil det højst sandsynligt være de metadiskursive regler, som eleverne tilslutter sig, som man rører ved, mens hvis man virkelig skal ændre på elevernes adfærd indenfor den matematiske diskurs, så skal man have fat i de metadiskursive regler, som de bruger.

Ifølge Sfard har metadiskursive regler en begrænsende effekt på antallet af mulige diskursive handlinger, som en diskursdeltager på fornuftig vis kan foretage i en given diskursiv situation [Sfard, 2008, s. 206]. Denne begrænsende effekt er med til at muliggøre diskursive handlinger i det hele taget, da man uden den i enhver diskursiv situation ville have så mange handlemuligheder at vælge imellem, at man ikke ville være i stand til overhovedet at foretage et valg. Den begrænsende effekt kan dog også have en hæmmende effekt, da den kan forhindre, at folk »tænker ud af boksen«. Da de metadiskursive regler i princippet hjælper en til at handle i overensstemmelse med normen indenfor en given diskurs, kan de nemlig ses som en forhindring i forhold til at finde på nye metoder og i forhold til at se på en given problemstilling på en helt ny måde [Sfard, 2000, s. 172].

Metadiskursive regler er noget, der udvikler sig over tid. Dette udsagn gælder både, når man ser på et individs læring af matematik, og når man ser på matematikkens historiske udvikling. I forbindelse med individets læring er det lige netop det forhold, at metadiskursive regler er noget, der kan ændres, der gør det meningsfuldt at tale om at modificere elevernes personlige

metadiskursive regler. I forbindelse med matematikkens historiske udvikling, har de metadiskursive regler, som forskellige matematikere har fulgt til forskellige tider, ændret sig utroligt meget. Ifølge Sfard er de metadiskursive regler et resultat af de fremherskende vaner indenfor det matematiske samfund [Sfard, 2008, s. 206]. Metadiskursive regler er altså ikke logisk nødvendige regler, men derimod historisk bestemte, foranderlige regler.

Sfard pointerer, at hun ikke opfatter objektive regler og metadiskursive regler som virkelige, »fysiske« regler, som deltagere i den matematiske diskurs kan følge på en bevidst måde. I stedet forstår hun reglerne som noget, der er konstrueret af en observatør, der forsøger at udtale sig om den diskurs, han observerer [Sfard, 2008, s. 203]. Hvis man vælger begreberne metadiskursive regler og objektive regler til at forklare, hvad man ser, så må disse to typer af regler dog siges at være det, der styrer, hvordan en deltager i den matematiske diskurs forstår indholdet af og agerer i diskursen.

4.3 Kommognitive konflikter

Ifølge Sfards diskursive tilgang til læring er læring altså ensbetydende med at blive en mere og mere kvalificeret deltager i en diskurs. Da den matematiske diskurs som alle andre diskurser er styret af objektive regler og metadiskursive regler, betyder det, at matematiklæring består i en ændring i eller udvidelse af ens matematiske objektive regler og metadiskursive regler. Læring, der omhandler en ændring i ens metadiskursive regler kalder Sfard for **metaniveaulæring** [Sfard, 2008, s. 256]. Som det fremgik af forrige afsnit er både metaniveaulæring og læring, der omhandler objektive regler, vigtige for ens forståelse af og omgang med matematikken. Sammenlignet med læringen af objektive regler er der en del usikkerhed om, hvordan man får en kontrolleret metaniveaulæring i stand. Derfor er det særligt interessant at undersøge omstændigheder og muligheder for metaniveaulæring.

Ifølge Sfard er det meget usandsynligt, at en elev uden videre af sig selv ændrer sine metadiskursive regler. Dette skyldes, at metadiskursive regler er et resultat af vaner. Derfor er der i elevens læring af matematik brug for noget, der kan sætte en metaniveaulæring igang. Ifølge Sfard kan dette »noget« med fordel være det, hun kalder en kommognitiv konflikt. En **kommognitiv konflikt** er en situation, hvor to diskursdeltagere handler i overensstemmelse med to forskellige sæt af metadiskursive regler, hvilket kommer mest tydeligt til udtryk ved, at de verificerer udsagn, der strider imod hinanden [Sfard, 2008, s. 256]. Når en elev oplever en kommognitiv konflikt, vil han blive sat i en situation, hvor han kan blive opmærksom på de metadiskursive regler, som han selv følger. Derved opstår en mulighed for, at disse regler kan ændres. Sfard understreger kraftigt den betydning, som kommognitive konflikter har for elevens metaniveaulæring. Faktisk siger hun, at kommognitive konflikter er så godt som uundværlige for denne form for læring [Sfard, 2008, s. 258]. Det er ikke afklaret endnu, hvordan man kan sikre, at elever oplever kommognitive konflikter. Denne problemstilling kompliceres yderligere af, at det ifølge Sfard kan være svært at afgøre, som det man observerer, er en kommognitiv konflikt eller ej [Sfard, 2008, s. 256].

4.4 Metadiskursive regler og matematikhistorie

I artiklen *Beyond Motivation - History as a method for the learning of meta-discursive rules in mathematics* præsenterer Tinne Hoff Kjeldsen og Morten Blomhøj et teoretisk argument

for, at matematikhistorie kan være et afgørende værktøj i forbindelse med metaniveaulæring i matematik [Kjeldsen og Blomhøj]. Kjeldsens og Blomhøjs argument slår ned på de metadiskursive reglers karakter som historisk bestemte regler. Netop fordi de er historisk bestemte, kan de behandles på objektniveauet af den historiske diskurs. Man kan f.eks. bruge historikerens værktøj og synsvinkler til at undersøge forskellige matematiske metadiskursive reglers historiske udvikling. Ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen er det derfor muligt at gøre de metadiskursive regler for den matematiske diskurs til objekter for eksplicit refleksion. Ifølge Kjeldsen og Blomhøj er en sådan refleksion ikke umulig at opnå indenfor selve den matematiske diskurs, men den iscenesættes og fremprovokeres ikke af den form for undervisning, som er dominerende i uddannelsessystemet [Kjeldsen og Blomhøj]. Derfor foreslår Kjeldsen og Blomhøj, at matematikhistorie er et meget vigtigt og måske ligefrem uundværligt værktøj, når man vil sætte scenen for metaniveaulæring i matematik.

I forbindelse med Sfards udtalelser om at kognitivt konflikter er nødvendige for metaniveaulæring, siger Kjeldsen og Blomhøj, at originale, historiske kilder kan fungere som den samtalepartner, hvis metadiskursive regler bringer eleverne ud i en kognitiv konflikt [Kjeldsen og Blomhøj]. Matematikhistoriske kilder vil ofte være styret af et andet sæt af metadiskursive regler, end det eleverne selv følger idag. Derfor vil arbejdet med at forstå sådanne kilder føre til, at eleverne får en mulighed for at opleve kognitive konflikter. Derfor er Sfards tale om nødvendigheden af kognitive konflikter helt forenelig med Kjeldsens og Blomhøjs tale om det væsentlige ved inddragelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen.

Der er en mulighed for en tredje genvej ved at bruge matematikhistorie som et værktøj til metaniveaulæring. Hvis en direkte behandling af metadiskursive regler bliver iscenesat som en matematikhistorisk undersøgelse, vil fokuset i behandlingen være de metadiskursive reglers historiske udvikling og ikke elevernes egne metadiskursive regler. Derfor er der en god mulighed for, at eleverne med denne tilgang til arbejdet med de metadiskursive regler ikke vil føle, at de metadiskursive regler bliver trukket ned over hovedet på dem på samme måde, som de ville, hvis man brugte en traditionel form for tavleundervisning til at sætte direkte fokus på metadiskursive regler. Ved en matematikhistorisk undersøgelse etableres der en dialog mellem eleverne, læreren og de historiske kilder, hvor i hvert fald to af disse parter (læreren og kilderne) agerer efter forskellige metadiskursive regler. Denne forskel i metadiskursive regler kan så initiere en direkte refleksion over sådanne regler, uden at eleverne føler, at deres egen ageren er under beskyldning. Derfor er det meget muligt, at man ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen kan undgå de problemer, som Sfard som nævnt i afsnit 4.2 forudsiger ved en direkte behandling af metadiskursive regler, samtidig med at man får mulighed for at tage de metadiskursive regler op til direkte refleksion.

5 Design af undervisningsforløbet

Efter at det teoretiske grundlag for mit projekt er blevet præsenteret i kapitel 2-4, er det nu tid til at vende blikket mod gennemførelsen af det undervisningsforløb, som udgør projektets empiriske del. I dette kapitel er det designet af undervisningsforløbet, der er i fokus, mens det datamateriale som er kommet ud af gennemførelsen af det, vil blive analyseret i næste kapitel.

Som det første i dette kapitel vil jeg i afsnit 5.1 kort forklare, hvad undervisningsforløbet omhandlede. Derefter gennemgås i afsnit 5.2 nogle generelle forhold omkring gennemførelsen af undervisningsforløbet. Dernæst præsenteres i afsnit 5.3 de opstillede undervisningsmål, og det gennemgås, hvordan disse undervisningsmål kan bidrage til at besvare projektets problemformulering. Dernæst præsenteres selve strukturen i undervisningsforløbet i afsnit 5.4. Derefter gennemgås i afsnit 5.5 det materiale, som er blevet brugt i undervisningsforløbet. Efter dette forklares det i afsnit 5.6, hvordan forløbet er tænkt at kunne bruges til at opfylde undervisningsmålene. Til sidst i kapitlet forklares i afsnit 5.7, hvordan jeg har foretaget min dataopsamling.

5.1 Emnet for forløbet

Kort fortalt handler mit undervisningsforløb, der har titlen *Funktionsbegrebet set med historiske og nutidige briller*, om, hvordan funktionsbegrebet er blevet forstået før i tiden, og hvordan det forstås idag. I resten af denne rapport vil mit undervisningsforløb blive betegnet som **undervisningsforløbet** eller bare **forløbet**. Undervisningsforløbet kunne naturligvis ikke komme til at dække hele funktionsbegrebets udvikling op til idag. Fokus i det var dels på Eulers udvikling af sit udvidede funktionsbegreb ud fra sit første funktionsbegreb og den rolle, debatten om den svingende streng spillede i denne forbindelse, og dels på Dirichlets funktionsbegreb. Eulers første funktionsdefinition siger, at en funktion er et analytiske udtryk sammensat af variable og konstanter [Euler, 1988, § 4]. Debatten om den svingende streng gik ud på at finde ud af, hvordan man matematisk kunne beskrive en streng, der svingede mellem to fastgjorte endepunkter. Da Euler med sit oprindelige funktionsbegreb ikke kunne beskrive alle de mulige begyndelsespositioner for en sådan streng, valgte han at udvide sit funktionsbegreb med det, han kaldte diskontinuerte funktioner. Diskontinuerte funktioner er for Euler funktioner, der beskrives af forskellige analytiske udtryk i forskellige dele af deres definitionsområder [Lützen, 1978, s. 15]. Forskellige matematikere som f.eks. D'Alembert var imod Eulers udvidelse af hans oprindelige funktionsbegreb [Kjeldsen, 1988]. Dette kom til at betyde, at Eulers udvidede funktionsbegreb ikke kom til at blive særligt udbredt.

I forbindelse med Dirichlets funktionsbegreb omhandlede forløbet kun selve funktionsbegrebet, der i bund og grund er det samme som det nutidige, og altså ikke den matematiske udvikling, der førte fra Eulers funktionsbegreb til dette. Grunden til dette var, at denne udvikling bevægede sig på et matematisk niveau, som lå langt over elevernes, idet den bl.a. i stor udstrækning omhandlede rækkeudviklinger. I forbindelse med udviklingen fra Euler til Dirichlet

havde forløbet istedet inkorporeret en del om den franske revolution, som fandt sted imellem de to matematikeres levetid. Den franske revolution kom på en indirekte måde til at påvirke funktionsbegrebets udvikling, da den ændrede på strukturen i det matematiske samfund på en sådan måde, at det nu blev de samme folk, der både skulle undervise og forske i matematik. Dette kom til at betyde, at der kom mere fokus på stringens i matematikernes arbejde. Dette krav om stringens kunne Eulers funktionsbegreb med tiden ikke leve op til.

Undervisningsforløbet passer fint til de lovmæssige krav til elevernes matematikundervisning. Disse siger nemlig, at eleverne både skal undervises i funktionsbegrebet¹ og gennemgå forløb om matematikhistoriske emner [Undervisningsministeriet, 2008, bilag 36].

5.2 Forhold for gennemførelsen af undervisningsforløbet

Undervisningsforløbet blev gennemført i november måned i en 2. g klasse på et alment dansk gymnasium, hvilket betyder, at eleverne ved forløbets start havde gået i gymnasiet i ca. $1\frac{1}{4}$ år. Der var sytten elever i klassen. I klassens studieretning indgår matematik på B-niveau, og de resterende studieretningsfag er engelsk på A-niveau, samfundsfag på B-niveau og psykologi på C-niveau. Ved en rundspørge i klassen under evalueringen af forløbet svarede otte af de femten tilstedeværende elever, at de skulle have eller overvejede at tage matematik på A-niveau i 3. g². Klassens elever havde i det hele taget hverken fagligt eller interessemæssigt nogen særlige forudsætninger for at deltage i forløbet. De var, hvad man kan kalde helt almindelige gymnasieelever. Derudover var det lærerens vurdering, at der højst var et par elever i klassen, som kom fra hjem, hvor forældrene var akademikere. Størstedelen af eleverne kom fra det, som han kaldte gymnasiefremmede miljøer. Denne vurdering byggede han på sit indtryk af klassens elever og på viden om hvilken type elever, der generelt gik på gymnasiet.

Den matematiklærer som havde klassen under gennemførelsen af undervisningsforløbet, havde ved forløbets start kun været lærer for klassen i 6 uger, hvoraf en var en ferieuge, og en var afsat til et AT-forløb³. Den lærer, som havde haft klassen i hele 1. g og starten af 2. g, var på barselsorlov. Den nye lærer havde været med i nogle matematiktimer, før han selv overtog klassen, og ifølge ham selv havde klassen vænnet sig til, at han var deres lærer, allerede før han formelt overtog klassen. Under planlægningen og gennemførelsen af undervisningsforløbet gav han dog flere gange udtryk for, at han ikke følte, han kendte eleverne så godt, fordi han jo ikke havde været deres egentlige lærer ret længe.

Med hensyn til klassens faglige forudsætninger for at deltage i undervisningsforløbet om funktionsbegrebet, så var eleverne ved forløbets start ikke helt uden erfaringer indefor dette emne. Dette fremgår af følgende uddrag af en mail, som klassens oprindelige matematiklærer sendte til mig i forbindelse med planlægningen af undervisningsforløbet:

De kender $f(x)$ begrebet, og har godt styr på uafhængige og afhængige variable, men de er ikke eksplicit blevet præsenteret for en funktionsdefinition og ej heller

¹ I teksten i bekendtgørelsen om uddannelsen til studentereksamen står der, at eleverne i matematik på B-niveau skal lære om begrebet $f(x)$ [Undervisningsministeriet, 2008, bilag 36]. Ud fra konteksten forstår jeg dette som ensbetydende med, at de skal lære om funktionsbegrebet.

² Dette kan desværre ikke bruges til at sige noget om forløbets indvirken på elevernes holdning til matematik, da der ikke blev foretaget en tilsvarende rundspørge før forløbets start.

³ Forkortelsen AT står for Almen sTudieforberedelse, der er et fag i det danske gymnasium. Undervisningen i AT er organiseret i koncentrerede forløb, hvor to eller flere fag arbejder sammen om et fælles emne [Undervisningsministeriet, 2010, bilag 9].

værdimængde og definitionsmængde explicit. Men de ved fx hvilke begrænsninger der ligger på den uafhængige variabel i en potensfunktion.

Af ovenstående slutter jeg, at klassen havde erfaring med at arbejde med konkrete funktioner, men at de ikke var blevet introduceret til en formel definition af funktioner og andre begreber relateret til funktioner. Undervisningsforløbet om funktionsbegrebet byggede derfor videre på noget, som klassen kendte fra tidligere, men indeholdt samtidig også på nye elementer.

5.3 Undervisningsmål

Da jeg mange gange i dette afsnit forholder mig meget direkte til projektets problemformulering, har jeg for læsevenlighedens skyld valgt at starte med at præsentere den endnu engang. Problemformuleringen lyder som nævnt:

På hvilken måde kan matematikhistoriske aktiviteter understøtte elevers læring af matematik?

1. Kan matematikhistoriske aktiviteter bruges til understøttelse af elevers begrebsforståelse?
2. Kan matematikhistoriske aktiviteter bruges til udvikling af elevers matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik?
3. Kan matematikhistoriske aktiviteter bruges til at bringe metadiskursive regler frem i lyset, således at eleverne kommer til at reflektere over dem?

I arbejdet med det andet af problemformuleringens tre delspørgsmål, der knytter sig til KOM-rapportens kompetencebaserede matematiksyn, har jeg valgt ikke at fokusere på alle KOM-rapportens otte kompetencer og tre former for overblik og dømmekraft. I stedet har fokus været på kommunikationskompetencen, symbol- og formalismekompetencen og den form for overblik og dømmekraft, der som genstand har matematikkens historiske udvikling. Fokuset på kommunikationskompetencen skyldes meget, at det er min personlige holdning, at det i arbejdet med matematik er vigtigt at være i stand til rent faktisk at tale om det, som man arbejder med. Derfor har jeg været interesseret i at undersøge, hvad matematikhistoriske aktiviteter kan bidrage med, når man taler om elevers kommunikationskompetencer. Fokuset på symbol- og formalismekompetencen skyldes, at jeg under gennemførelsen af undervisningsforløbet indså, at noget af det som mit datamateriale virkeligt kunne sige noget interessant om, netop var denne kompetence hos eleverne. Mere præcist var det den del af denne kompetence, der omhandler brugen af symbolsprog, som datamaterialet afslører noget interessant om, hvorfor det også er denne del, der er i fokus i mit arbejde. Udover disse konkrete kompetencer og overblik og dømmekraft har elevernes besiddelse af overordnet matematisk kompetence også været i fokus.

I arbejdet med problemformuleringens tredje delspørgsmål, der knytter sig til Anna Sfards teori om metadiskursive regler, har jeg valgt at fokusere på nogle konkrete metadiskursive regler. De udvalgte metadiskursive regler er to matematikhistoriske metadiskursive regler, der idag kaldes for hhv. analysens generelle gyldighed og den variables generalitet. Analysens generelle gyldighed var en norm, der sagde, at analysens udsagn, resultater og teknikker var generelt gyldige, hvilke betød, at når noget gjaldt eller kunne bruges i et tilfælde, så måtte dette resultat kunne overføres på alle andre tilfælde [Godiksen m.fl., 2003, s. 9]. For en matematiker der agerede i overensstemmelse med denne norm, behøvede matematiske beviser derfor ikke at bestå i andet end undersøgelser af specialtilfælde, for hvis noget gjaldt der, så gjaldt det generelt. Den variables generalitet var et princip, der gik ud på, at en variabel i en funktion altid kunne antage alle

værdier [Lützen, 1978, s. 9]. Analysens generelle gyldighed og den variables generalitet var begge alment accepterede normer i det matematiske samfund på Eulers tid og derfor også en del af Eulers grundlæggende matematikforståelse, mens Dirichlet mere eller mindre bevidst gik bort fra disse to regler. Tanken med at sætte fokus på disse to regler har været, at eleverne skulle komme til at reflektere over den rolle, som definitions­mængder og beviser spiller idag.

For at blive i stand til at svare på min problemformulering har jeg designet målene for undervisningsforløbet således, at arbejdet med dem vil kunne give indsigt i problemformuleringens tre delspørgsmål. Der er i alt opstillet otte undervisningsmål, der lyder som følger:

1. Eleverne skal opnå en forståelse af, hvad den moderne funktionsdefinition indeholder.
2. Eleverne skal reflektere over, hvad en funktion er for noget.
3. Eleverne skal få udvidet deres opfattelse af, hvad en funktion er.
4. Eleverne skal opnå en forståelse af, at vores moderne funktionsbegreb er et resultat af en udviklingsproces.
5. Eleverne skal opnå indsigt i de menneskelige aktørers rolle i udviklingen af det moderne funktionsbegreb.
6. Eleverne skal træne deres evne til at samarbejde og diskutere indbyrdes om matematikholdige emner.
7. Eleverne skal træne deres evne til at formulere sig på skrift om matematikholdige emner.
8. Eleverne skal træne deres evne til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner.

I forbindelse med især det første, tredje, fjerde og femte undervisningsmål er det underforstået, at der er noget matematisk og matematikhistorisk viden, som eleverne ikke besad ved forløbets start. I princippet kunne jeg selvfølgelig ikke vide, om det var rigtigt at antage, at de ikke besad denne viden, da jeg ikke havde stiftet bekendtskab med dem før forløbets start. Af mine samtaler med deres lærer fik jeg dog det klare indtryk, at antagelsen om elevernes viden ikke var helt forkert.

I opstillingen af undervisningsmålene har jeg været meget opmærksom på, hvilke undervisningsmål der skulle bidrage med indsigt i hvert enkelt af problemformuleringens delspørgsmål. Med hensyn til problemformuleringens første delspørgsmål skulle resultaterne fra arbejdet med især det tredje, men også det første og det andet undervisningsmål kunne give indsigt i dette spørgsmål. Dette skyldes, at den del af arbejdet, der knytter sig til disse tre undervisningsmål, netop omhandler elevernes egen forståelse af funktionsbegrebet.

Med hensyn til det andet delspørgsmål knytter det aspekt af dette spørgsmål, der handler om overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling, sig specifikt til det fjerde og det femte undervisningsmål. Det aspekt af delspørgsmålet, der omhandler elevernes kommunikationskompetencer, knytter sig til det sjette og det syvende undervisningsmål, da det arbejde, der knytter sig til disse to undervisningsmål, iscenesætter situationer, hvor eleverne i hvert fald til en vis grad er tvunget til at formulere sig både skriftligt og mundtligt om matematiske emner. Det aspekt af delspørgsmålet, der omhandler elevernes symbol- og formalismekompetence, er ikke tænkt ligeså direkte ind i undervisningsmålene som de andre aspekter, da fokuset på denne kompetence som nævnt var noget, der opstod under gennemførelsen af undervisningsforløbet og ikke under designet af det. Hvis dette aspekt skal relateres til nogle bestemte undervisningsmål, må det dog blive de tre første. Dette skyldes, at symbol- og formalismekompetencen er meget knyttet til elevernes tekniske matematiske kunnen, som igen hænger

mest sammen med de første tre undervisningsmål. Det sidste aspekt af dette delspørgsmål, der omhandler elevernes besiddelse af overordnet matematisk kompetence, er knyttet til det ottende og sidste undervisningsmål. Dette skyldes, at besiddelse af matematisk kompetence som nævnt i afsnit 3.1 går ud på, at man er i stand til at handle hensigtsmæssigt i forskellige matematikholdige situationer. I denne karakterisering ligger det implicit, at man skal være i stand til at omgås matematikholdige emner og situationer på en selvstændig måde.

Problemformuleringens tredje delspørgsmål knytter sig hovedsageligt til det andet undervisningsmål, da dette undervisningsmål direkte går på, at eleverne skal komme ud i nogle refleksioner omkring funktionsbegrebet. Da en sådan refleksion muligvis kan føre til en diskussion imellem eleverne, er dette delspørgsmål også til dels knyttet til det sjette undervisningsmål.

5.4 Strukturen i undervisningsforløbet

Undervisningen strakte sig over 13 timer af 50 minutter, hvoraf en time var afsat til indledende introduktion til forløbet, to timer var afsat til samlede klassediskussioner undervejs i forløbet, og en time var afsat til evaluering til sidst i forløbet. De resterende 9 timer var afsat til selvstændigt gruppearbejde. En mere præcis plan over forløbet findes i bilag A. Undervisningsforløbet er struktureret ud fra den idé, at eleverne selv skulle sætte sig ind i og opnå viden om forløbets emne gennem selvstændigt gruppearbejde, og at læreren under forløbets gennemførelse skulle fungere som konsulent snarere end underviser. Dette valg var begrundet i et ønske om at tvinge eleverne til selv at komme på banen og være aktive i arbejdet med forløbet, således at der kunne opstå situationer, hvor de afslørede deres egne matematiske forestillinger og formåen. Man kan altså sige, at arbejdsformen i forløbet for mig fungerede som et redskab til at få indblik i elevernes matematiske forståelse. En konsekvens af dette valg af arbejdsform har været, at der på intet tidspunkt under forløbets gennemførelse blev afholdt nogen former for traditionel tavleundervisning, hvor en lærer docerer for en klasse. Den indledende introduktion til forløbet var en indledning til alle formalierne omkring gennemførelsen af forløbet (plan for forløbet, opdeling i grupper, evalueringsform o.l.) og ikke en introduktion til forløbets faglige indhold.

Med inspiration fra artiklen *Does History have a Significant Role to Play for the Learning of Mathematics? - Multiple perspective approach to history, and the learning of meta level rules of mathematical discourse* af Tinne Hoff Kjeldsen [Kjeldsen, 2011] har jeg valgt at designe undervisningsforløbets gruppearbejde ud fra en todelt matrixstruktur. Undervisningsforløbet var altså opdelt i to faser. I den første fase arbejdede eleverne i fire såkaldte **basisgrupper** [Kjeldsen, 2011]. Hver basisgruppes opgave var at sætte sig ind i et aspekt af det overordnede emne om funktionsbegrebet før og nu. De fire basisgrupper arbejdede mere præcist med følgende fire emner:

- **Basisgruppe 1: Historiske funktionsdefinitioner.** Målet med denne gruppes arbejde var at forstå og finde forskelle og ligheder mellem Eulers funktionsdefinitioner og Dirichlets funktionsdefinition, sådan som disse blev beskrevet i kompendiets tre tekster om dem (se afsnit 5.5).
- **Basisgruppe 2: Debatten om den svingende streng.** Målet med denne gruppes arbejde var at finde ud af, hvad debatten om den svingende streng gik ud på, og hvordan denne debat påvirkede funktionsbegrebets udvikling.
- **Basisgruppe 3: Euler, Dirichlet og det samfund de levede i.** Målet med denne gruppes arbejde var at finde ud af, hvem Euler og Dirichlet var, og hvordan det samfund de arbejdede

i, så ud. Denne gruppe havde især fokus på, hvordan forskellige forhold i det matematiske samfund ændrede sig som følge af den franske revolution.

- **Basisgruppe 4: Det moderne funktionsbegreb.** Målet med denne gruppes arbejde var at forstå indholdet af det moderne funktionsbegreb ud fra kompendiets fem tekster om dette begreb (se afsnit 5.5).

Hver basisgruppes arbejde skulle munde ud i en skriftlig aflevering, der præsenterede den viden, som gruppen havde opnået. Disse afleveringer kaldes fra nu af **basisgruppeafleveringer**. Gruppernes arbejde blev guidet af fire opgavebeskrivelser - en til hver gruppe - der indeholdt et overordnet spørgsmål til gruppen, en række underspørgsmål, der skulle lede gruppen i dens arbejde med at besvare det overordnede spørgsmål, og en præcisering af kravene til gruppens skriftlige aflevering. Under forløbets første fase sørgede jeg for gentagne gange at understrege, at eleverne var nødt til at tage sig sammen og engagere sig i basisgruppearbejdet, da dette arbejde skulle danne grundlag for arbejdet i forløbets anden fase.

I undervisningsforløbets anden fase skulle eleverne arbejde i fire nye grupper, nemlig de såkaldte **ekspertgrupper** [Kjeldsen, 2011]. Hver ekspertgruppe bestod af minimum et medlem fra hver af de gamle basisgrupper, således at al den viden der var indsamlet gennem basisgruppernes arbejde på papiret var repræsenteret i hver ekspertgruppe. Alle ekspertgrupperne skulle skrive en artikel, i hvilken gruppen ud fra den viden, som var opnået under basisgruppernes arbejde, skulle diskutere spørgsmål om, hvorvidt matematiske begreber er opdagede eller opfundne, og om mennesker kan påvirke matematikkens udvikling. Ekspertgrupperne skulle i deres artikler præsentere deres egne holdninger til disse spørgsmål og argumentere for disse holdninger. Ekspertgruppernes skriftlige afleveringer kaldes fra nu af **artikelopgaver**. Ekspertgruppernes arbejde blev guidet af en opgaveformulering, i hvilken scenen for deres artikelskrivning blev sat gennem en fiktiv historie om, at tidsskriftet *NORMAT* havde udtrykt ønske om, at eleverne gennem en artikel i tidsskriftet gav deres bidrag til en igangværende debat indenfor det matematiske samfund. Opgaveformuleringen indeholdt også en specificering af de formelle krav til ekspertgruppernes artikel samt en præsentation af nogle problemstillinger vedrørende funktionsbegrebets udvikling, som de i deres artikel skulle forholde sig til. Opgaveformuleringen til ekspertgruppernes artikelopgave findes i bilag D.

Både basisgrupperne og ekspertgrupperne var dannet af klassens lærer og mig i fællesskab. I denne gruppedannelse havde vi tænkt meget over, at ingen af grupperne skulle bestå udelukkende af det, som kan betegnes som svage elever, da en sådan gruppe sandsynligvis ville få det meget svært med den meget selvstændige arbejdsform, som forløbet var lagt an på. Derudover var læreren meget opmærksom på, at den basisgruppe og den ekspertgruppe som skulle filmes (se afsnit 5.7), ikke kom til at indeholde elever, som han vidste, ville gå i baglås over at blive sat foran et kamera. Den oprindelige gruppedannelse kom pga. sociale gnidninger i klassen ikke til at holde helt, men vores oprindelige idéer med gruppedannelsen formåede vi alligevel at få nogenlunde gennemført.

Som tidligere nævnt var to timer i forløbet afsat til klassesamtaler. Den første af disse timer lå på overgangen mellem arbejdet i basisgrupperne og arbejdet i ekspertgrupperne. Formålet med denne klassesamtale var at indlede arbejdet i ekspertgrupperne og sikre, at alle eleverne havde en idé om, hvordan de kunne bidrage til løsningen af ekspertgruppernes opgave med den viden, som de havde opnået i deres basisgrupper. Samtalen indledtes med, at jeg ridsede indholdet af opgaveformuleringen til artikelopgaven op for eleverne. Denne opgaveformulering fik de først udleveret på dette tidspunkt og altså efter, at arbejdet i basisgrupperne var

overstået. Grunden til det var, at jeg ønskede, at eleverne i basisgrupperne skulle koncentrere sig om basisgruppernes opgaver og ikke allerede der begynde at arbejde målrettet hen imod løsningen på artikelopgaven. Efter at opgaveformuleringen var blevet præsenteret for eleverne, fik eleverne mulighed for at byde ind med idéer til, hvordan deres basisgruppe kunne være med til at løse artikelopgaven. På denne måde sikrede jeg mig, at alle havde en chance for at blive klar over, hvad de personligt skulle bidrage med til løsningen af artikelopgaven.

Den anden klassesdiskussion lå umiddelbart før den sidste time, som ekspertgrupperne havde til deres gruppearbejde. Formålet med denne diskussion var, at eleverne skulle bruge hinanden og mig i deres arbejde med artikelopgaven. Ekspertgrupperne havde til denne diskussion fået besked på, at de skulle forberede at sige noget om deres opgave eller om deres arbejde, som de godt ville have klassen til at diskutere. De skulle altså forberede et uformelt diskussionsoplæg. De havde frie tøjler til at bestemme, hvad diskussionsoplægget skulle handle om (det skulle selvfølgelig være noget, der var relevant for arbejdet med artikelopgaven), men jeg havde sagt til dem, at hvis de havde problemer med at forstå noget af det, de sad og arbejdede med, hvis de undrede sig over noget om emnet, eller hvis de ikke kunne blive enige om et eller andet indbyrdes i gruppen, så kunne diskussionen være en god mulighed for måske at få løst disse problemer. Diskussionen forløb således, at ekspertgrupperne efter tur præsenterede det, de gerne ville diskutere, og så tog klassen en diskussion om emnet. Da alle grupperne havde fået diskuteret det, de ville, stillede jeg dem et par ekstra spørgsmål, som jeg godt ville have dem til at reflektere over.

Grundlaget for evalueringen af elevernes arbejde var hovedsageligt deres to skriftlige afleveringer. Hver basisgruppe og hver ekspertgruppe fik en samlet karakter efter 7-trinsskalaen for deres afleveringer. Derudover fik de deres opgave tilbage med mine kommentarer og rettelser tilføjet. Samlet fik klassen også en mundtlig tilbagemelding om, hvordan det generelt var gået med hver af de to skriftlige opgaver.

Evalueringen af forløbet foregik halvanden uge efter, at undervisningsforløbet var afsluttet og efter, at eleverne havde fået deres artikelopgave tilbage. Evalueringen bestod i, at eleverne hver især svarede på et spørgeskema om forløbet. Dette spørgeskema kan ses i bilag F og kaldes fra nu af **evalueringsspørgeskemaet**. Efter dette fik eleverne mulighed for mundtligt at stille spørgsmål til mig og komme med yderligere kommentarer til forløbet. I den time, hvor evalueringen blev afholdt, var femten af klassens sytten elever i skole, hvorfor det også kun er femten elever, der har givet en besvarelse af evalueringsspørgeskemaet.

5.5 Materiale til brug i undervisningen

I forbindelse med undervisningsforløbet udarbejdede jeg et kompendium, som eleverne fik udleveret elektronisk før forløbets start. Dette kompendium findes i bilag B og vil fra nu af blive betegnet **kompendiet**. Kompendiet indeholdt en gennemgang af planen for forløbet, af undervisningsmålene for forløbet og af evalueringsformen for forløbet. Derudover indeholdt kompendiet også en materialeliste over bøger, artikler og hjemmesider, som eleverne kunne bruge i deres arbejde med forløbet. Kompendiet indeholdt også de opgaver, som eleverne skulle arbejde med i basisgrupperne. Som en sidste ting indeholdt kompendiet en mængde tekster om hhv. Eulers funktionsbegreber, Dirichlets funktionsbegreb og det moderne funktionsbegreb, som eleverne skulle bruge i deres arbejde. Teksterne om Eulers funktionsbegreber og Dirichlets funktionsbegreb udgjordes bl.a. af et uddrag af Eulers værk *Introductio in Analysin Infinitorum* fra 1748 [Euler, 1988] og et uddrag af artiklen *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen*, som Dirichlet udgav i 1837 [Dirichlet, 1837]. Disse to historiske kilder

blev præsenteret for eleverne i min egen danske oversættelse. Udover de to kilder indbefattede teksterne om de historiske funktionsbegreber også et kort uddrag af en artikel af Jesper Lützen [Lützen, 1978], der sammen med en kort tekst forfattet af mig forklarede, hvordan Euler udvidede sit oprindelige funktionsbegreb med sine diskontinuerte funktioner. Teksterne om det moderne funktionsbegreb udgjordes af fem nutidige definitioner eller beskrivelser af dette funktionsbegreb, som var taget fra fem forskellige lærebøger i matematik på hhv. gymnasialt niveau og universitetsniveau. Blandt disse lærebøger var den lærebog, som klassen selv var blevet undervist efter året før [Jensen og Nielsen, 2005], og den som de skulle i gang med at bruge efter undervisningsforløbets afslutning [Clausen m.fl., 2005]. Derudover var der også en ældre lærebog, der er beregnet til gymnasiet, men som ikke bruges længere [Kristensen og Rindung, 1975]. De sidste lærebøger er bøger, der er blevet brugt i undervisningen på forskellige matematikkurser på Roskilde Universitet [Adams, 2003], [Wade, 2004]. Uddragene fra disse to sidste bøger blev præsenteret for eleverne i min egen danske oversættelse.

Pga. tidsrammen for undervisningsforløbet blev det vurderet, at det var u hensigtsmæssigt, at eleverne selv skulle bruge tid på at finde de bøger og artikler, som stod på kompendiets materialeliste. Derfor sørgede jeg for, at disse materialer var til stede i klasselokalet under hele forløbet, så eleverne havde let adgang til dem. Disse materialer var en artikel af Tinne Hoff Kjeldsen, som er skrevet til en matematikbog til brug i gymnasiet [Kjeldsen, 1988], en artikel af Jesper Lützen [Lützen, 1978], en projektrapport af en gruppe studerende ved Roskilde Universitet [Godiksen m.fl., 2003] og en bog om analysens historie af Umberto Bottazzini [Bottazzini, 1986]. Artiklen af Tinne Hoff Kjeldsen blev vurderet til at være på et matematisk niveau, der passede meget godt til elevernes eget niveau, og derfor blev de opfordret til at læse hele artiklen igennem. De tre andre materialer er skrevet på et væsentligt sværere niveau og indeholder meget matematik, som eleverne ikke havde nogen forudsætninger for at forstå. Derfor blev elevernes arbejde med disse materialer guidet af bogmærker, som markerede de passager, som eleverne efter min vurdering ville kunne få noget ud af at læse. Udover materialerne fra kompendiets liste sørgede læreren for, at eleverne også havde adgang til nogle matematikhistoriske oversigtsværker, som skolen havde rådighed over. Disse oversigtsværker var bøger skrevet af hhv. Morris Kline [Kline, 1990], Dirk J. Struik [Struik, 1966], David E. Smith [Smith, 1958] og Victor J. Katz [Katz, 1998].

5.6 Realisering af undervisningsmål gemmen undervisningsforløbet

Det der ledte designet af undervisningsforløbet var selvfølgelig, at gennemførelsen af det skulle kunne føre til, at de otte opstillede undervisningsmål blev opfyldt. I dette afsnit vil det blive gennemgået, hvordan undervisningsmålene mere præcist har været tænkt opnået gennem undervisningsforløbet.

I forhold til det første undervisningsmål (eleverne skal opnå en forståelse af, hvad den moderne funktionsdefinition indeholder) var idéen den, at dette mål skulle realiseres gennem basisgruppe 4's arbejde med kompendiets tekster om det moderne funktionsbegreb og gennem distribueringen af denne gruppes indsamlede viden til alle klassekammeraterne.

Idéen med det andet undervisningsmål (eleverne skal reflektere over, hvad en funktion er for noget) var, at dette mål skulle realiseres dels gennem basisgruppe 1's arbejde med de historiske funktionsdefinitioner, basisgruppe 4's arbejde med det moderne funktionsbegreb og distribueringen af disse gruppers viden til resten af klassen og dels gennem ekspertgruppernes arbejde med artikelopgaven. Min tanke var, at ved at blive præsenteret for forskellige, delvist modstridende definitioner af, hvad en funktion er, ville eleverne blive tilskyndet til at overveje og reflektere

over, hvad en funktion egentligt er for noget. Dette kunne oplagt ske dels i basisgruppe 1's arbejde med at sammenligne de tre forskellige historiske funktionsdefinitioner og dels i ekspertgruppernes arbejde med at sammenligne disse historiske funktionsdefinitioner med de moderne formuleringer af funktionsbegrebet. Det kunne dog også ske i basisgruppe 4's arbejde med det moderne funktionsbegreb, da det var meget muligt, at kompendiets beskrivelser af dette begreb ikke stemte overens med elevernes egne forestillinger om, hvad en funktion er. Indenfor Sfards teori om tænkning som kommunikation kan man sige, at eleverne skulle komme i situationer, hvor der var flere funktionsbegreber (enten de historiske, kompendiets moderne eller deres egen), der stemte overens med forskellige sæt af metadiskursive regler, og dette skulle få eleverne til at reflektere over, hvad en funktion er.

Med hensyn til det tredje undervisningsmål (eleverne skal få udvidet deres opfattelse af, hvad en funktion er) var det min tanke, at dette mål skulle realiseres gennem basisgruppe 1's, basisgruppe 4's og ekspertgruppernes arbejde med de forskellige funktionsbegreber. Grunden til at basisgruppe 4's arbejde med de forskellige definitioner af det moderne funktionsbegreb var tiltænkt at skulle bidrage til realiseringen af dette undervisningsmål, var, at klassen som nævnt i afsnit 5.2 ikke før var blevet præsenteret for en formel funktionsdefinition. Derfor var det sandsynligt, at arbejdet med sådanne definitioner kunne være med til at udvide deres idé om, hvad en funktion er. Grunden til at basisgruppe 1's og ekspertgruppernes arbejde med de historiske funktionsdefinitioner kunne komme til at bidrage til undervisningsmålets realisering, var, at ved at blive stillet overfor og selv skulle undersøge nogle funktionsdefinitioner, der er forskellige fra den formelle moderne definition og fra elevernes egne forestillinger om funktioner, kunne eleverne blive tilskyndet til at reflektere over deres egne forestillinger om funktioner og derved opnå en mere nuanceret forståelse af, hvad en funktion er. Ud fra den ovenstående beskrivelse er realiseringen af det andet undervisningsmål altså en forudsætning for, at dette tredje undervisningsmål kan realiseres på den tiltænkte måde.

Med hensyn til det fjerde undervisningsmål (eleverne skal opnå en forståelse af, at vores moderne funktionsbegreb er et resultat af en udviklingsproces) var det tanken, at dette mål dels skulle realiseres i ekspertgruppernes arbejde. Dette skulle ske ved, at basisgruppe 1's og basisgruppe 4's arbejde blev holdt op mod hinanden, således at forskellene i de funktionsbegreber, som de to grupper havde arbejdet med, blev tydelige. Basisgruppe 1 havde udover funktionsbegreberne også arbejdet med principperne om den variables generalitet og analysens generelle gyldighed, og basisgruppe 4 havde tilsvarende arbejdet med begreberne definitionsområde, værdiområde og bevis. Ved at disse principper og begreber blev holdt op mod hinanden var det tanken, at eleverne skulle få indsigt i, at vores måde at arbejde med og tænke på funktioner har ændret sig i løbet af historien. Udover ekspertgruppernes arbejde var basisgruppe 2's arbejde med debatten om den svingende streng også tiltænkt at kunne bidrage til realiseringen af dette undervisningsmål. Det var det, fordi dette arbejde satte fokus på en konkret episode og udvikling i funktionsbegrebets lange historie og derfor gav eleverne en mere håndgribelig fornemmelse af, hvordan matematik kan ændre sig.

Idéen med det femte undervisningsmål (eleverne skal opnå indsigt i de menneskelige aktørers rolle i udviklingen af det moderne funktionsbegreb) var, at dette undervisningsmål skulle realiseres gennem basisgruppe 2's og basisgruppe 3's arbejde samt distribueringen af disse arbejder rundt i klassen. Basisgruppe 2 arbejdede som nævnt med debatten om den svingende streng og behandlede både spørgsmål om, hvordan Eulers indsigt om den svingende strengs mulige begyndelsespositioner fik ham til at udvide sit oprindelige funktionsbegreb, og om hvordan Eulers samtidige kollegers holdninger til denne udvidelse påvirkede dens udbredelse. Det var altså

tanken, at denne gruppes arbejde skulle belyse, hvordan personer som hørte hjemme i den matematiske verden, havde påvirket udviklingen af funktionsbegrebet. Basisgruppe 3's arbejde havde især fokus på, hvordan den franske revolution ændrede vilkårene for at arbejde med matematik i Frankrig og resten af Europa. Dette arbejde skulle altså belyse et eksempel på, hvordan personer og bevægelser udenfor det matematiske samfund kan have endda stor indflydelse på udviklingen af matematikken og dens begreber.

Det sjette, syvende og ottende undervisningsmål var alle tænkt realiseret gennem elevernes arbejde i grupperne. Det sjette undervisningsmål (eleverne skal træne deres evne til at samarbejde og diskutere indbyrdes om matematikholdige emner) var tænkt realiseret meget direkte gennem gruppearbejdet. I forbindelse med det syvende undervisningsmål (eleverne skal træne deres evne til at formulere sig på skrift om matematikholdige emner) var det meningen, at dette mål skulle realiseres gennem arbejdet med de to skriftlige afleveringer. Idéen med det ottende undervisningsmål (eleverne skal træne deres evne til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner) var, at realiseringen af dette mål skulle fremmes af, at der under hele forløbet ikke blev afholdt nogen form for traditionel tavleundervisning, hvor en lærer docerede foran klassen. Eleverne var derfor tvunget til at finde de nødvendige oplysninger på egen hånd, men dog guidet af de forskellige opgavebeskrivelser og af lærerens virke som konsulent for arbejdet. Det var også op til eleverne selv at strukturere deres arbejde, da de ikke fik lektier for fra gang til gang.

5.7 Dataopsamling og lærerrollen

Under undervisningsforløbets gennemførelse foregik min dataopsamling på flere forskellige måder. For det første bestod en del af mine data af elevernes to skriftlige afleveringer og af deres besvarelser af evalueringsspørgeskemaet. Derudover bestod mine data af en række film, som blev optaget under arbejdet med forløbet. Hver gang klassen var samlet til enten introduktion af forløbet, klassesdiskussioner, evaluering eller mindre beskeder undervejs i forløbet, blev disse situationer filmet. Derudover var det oprindeligt planen, at alt det selvstændige arbejde i basisgruppe 1 og en af ekspertgrupperne (ekspertgruppe 1) skulle filmes. Ved gennemførelsen af forløbet var planen dog nødt til at blive modificeret lidt i de to sidste timer af basisgruppernes arbejde (se bilag A), da basisgruppe 1 i disse timer pga. stort fravær i klassen generelt denne dag kun var repræsenteret af en elev. Derfor blev det i stedet basisgruppe 4, der blev filmet i disse timer, hvorfor det endte med at være sådan, at basisgruppe 1 blev filmet i tre lektioner, basisgruppe 4 i to og ekspertgruppe 1 i fire.

Udover de skriftlige afleveringer og filmene bestod min dataopsamling også af observationer, jeg gjorde, mens eleverne var igang med deres gruppearbejde. Under det selvstændige arbejde sad jeg og observerede den basis- eller ekspergruppe, som blev filmet denne dag. Denne gruppe blev sat i et lokale for sig selv af hensyn til kameraets mulighed for at opfange, hvad eleverne sagde, mens de andre grupper havde forskellige steder på skolen, hvor de måtte sidde og arbejde. Lige fra starten af forløbet blev det gjort klart for eleverne, at under gruppearbejdet kunne de af hensyn til mine observationer ikke spørge mig om hjælp til deres arbejde. Hvis de havde brug for hjælp, måtte de bruge deres almindelige lærer, der gik rundt mellem alle grupperne netop for at hjælpe dem. Under gruppearbejdet var det altså klassens almindelige lærer, der varetog lærerrollen. Når klassen var samlet til introduktion, klassesdiskussion og andet, var det derimod mig, der varetog denne rolle og styrede dialogen, mens læreren lyttede med og bidrog til diskussionen i klassen. Nogle vil måske indvende, at det at disse situationer ikke blev styret af klassens almindelige lærer, men af en for klassen ny lærer, kan have påvirket klassen opførsel

i disse situationer og derfor også mine data. I forhold til denne indvending kan man sige, at da klassens lærer som nævnt i afsnit 5.2 ved forløbets start kun havde haft klassen i ganske kort tid, ville den lærer, der styrede de nævnte situationer, under alle omstændigheder ikke være en, som det var sikkert, at klassen helt havde nået at vænne sig til. Derudover vurderede jeg, at risikoen for at min påtagelse af lærerrollen påvirkede mine data, blev opvejet af, at selvom læreren havde gjort meget ud af at sætte sig ind i min plan og mit materiale før forløbets start, så kunne han ikke vide præcis, hvad jeg havde forestillet mig med de forskellige aktiviteter. Derfor var der en risiko for, at hvis han styrede introduktionen og diskussionerne, så ville han komme til at give forløbet en drejning, som jeg ikke havde tiltænkt.

I forbindelse med fordelingen af rollerne mellem læreren og mig skal det siges, at under den sidste klassesdiskussion og den sidste time med arbejde i ekspertgrupperne (se bilag A) var denne fordeling ikke helt som beskrevet ovenfor. I disse to lektioner var læreren nemlig ikke til stede, hvorfor jeg stod for al undervisningen selv. Dette betød, at læreren ikke var med som diskussionsdeltager under klassesdiskussionen, og at jeg måtte varetage lærerens konsulentrolle under gruppearbejdet og gå rundt og hjælpe i de forskellige grupper. Derfor er der ikke foretaget den samme koncentrerede form for observationer under denne lektions gruppearbejde, som der blev under alt det andet gruppearbejde. Den udvalgte ekspertgruppe blev dog stadig filmet, men under det meste af arbejdet var de alene med kameraet.

En central del af min dataopsamling bestod altså af videooptagelser af undervisningen. Disse film har været en stor hjælp i min efterfølgende analyse af de opsamlede data, men selve optagelsen af dem har nok påvirket opførslen blandt de elever, som blev filmet. Da eleverne i første omgang blev introduceret for kameraet, var de ikke særligt begejstrede for idéen om at skulle filmes, men de fleste af eleverne lod til at have vænnet sig til kameraet efter et stykke tid. At nogle af eleverne alligevel ikke helt formåede at abstrahere fra kameraet, fremgår af en af elevernes besvarelse af evalueringsspørgeskemaet. Til spørgsmål 14 hvor eleverne skal nævne tre ting ved forløbet, som har været dårlige (se bilag F), svarer hun nemlig bl.a.

Citat 5.1

Stresset af kameraet

og til spørgsmål 15 hvor eleven bliver bedt om at nævne tre ting, som hun ville ændre, hvis forløbet skulle afvikles en gang til (se bilag F), svarer hun bl.a.

Citat 5.2

Kan godt forstå idéen med et kamera men det stressede en.

Af disse to citater fremgår det, at eleven selv mener, at hvis kameraet ikke havde været der, ville hendes arbejdsindsats eller i hvert fald opførsel nok have været anderledes, end den rent faktisk kom til at være.

Kameraet har højst sandsynligt ikke været det eneste, der påvirkede opførslen og arbejdsindsatsen hos den basis- og ekspertgruppe, som blev filmet. Dette gjorde min tilstedeværelse i gruppe-lokalet nok også. Hvis man sammenligner filmene fra de timer, hvor ekspertgruppe 1 blev observeret med den fra de timer, hvor gruppen ikke blev observeret, er der i hvert fald en meget markant forskel i gruppens arbejdsindsats og engagement i disse to situationer. Det fremgår tydeligt af filmene, at eleverne tager sig væsentligt mere sammen, når de bliver observeret, end når de er overladt til sig selv med kameraet.

6 Analyse af det indsamlede datamateriale

I dette afsnit vil det datamateriale, som blev indsamlet under gennemførelsen af undervisningsforløbet, blive analyseret. Præsentationen af analysen er styret af min problemformulerings tre delspørgsmål. Som det første vil jeg i afsnit 6.1 kigge på, hvad man ud fra datamaterialet kan sige om elevernes overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling, hvilket knytter sig til problemformulerings andet delspørgsmål. Derefter vil jeg i afsnit 6.2 gå ind i, hvad materialet afslører om elevernes matematiske begrebsforståelse, samt hvad det siger om deres matematiske kompetencer. Dette afsnit knytter sig til det første og andet af problemformulerings delspørgsmål. Derefter vil jeg i afsnit 6.3 analysere materialet for episoder og tegn, der indikerer, at eleverne kom til at reflektere over metadiskursive regler, hvilket knytter sig til problemformulerings tredje delspørgsmål. Efter dette vil jeg i afsnit 6.4 vurdere, hvad man på baggrund af analysen af datamaterialet kan sige om opfyldelsen af de opstillede undervisningsmål. Til sidst vil jeg i afsnit 6.5 diskutere, hvad mine resultater helt reelt kan bruges til at sige noget om.

6.1 Overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling

Problemformulerings andet delspørgsmål spørger bl.a. ind til, hvorvidt matematikhistorie kan bruges til at udvikle elevers overblik og dømmekraft vedrørende matematik. I dette første afsnit af analysen vil jeg se på, hvad mit datamateriale afslører om elevernes overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling. Ifølge KOM-rapporten er genstanden for denne form for overblik og dømmekraft som nævnt i afsnit 3.2 det faktum, at matematik har udviklet sig over tid og i forskellige kulturelle og samfundsmæssige sammenhænge. I forbindelse med denne form for overblik og dømmekraft opstiller KOM-rapporten følgende fem generelle spørgsmål, som er af interesse, når man arbejder med den [Niss og Jensen, 2002, s. 69]:

1. Hvordan har matematikken udviklet sig gennem tiden?
2. Hvad har været de indre og ydre drivkræfter i udviklingen?
3. Hvilke slags aktører har været indblandet i udviklingen?
4. I hvilke samfundsinstitutioner har den fundet sted?
5. Hvordan har samspillet med andre felter været?

Som nævnt i afsnit 3.3 benytter Uffe Thomas Jankvist og Tinne Hoff Kjeldsen sig af KOM-rapportens tanker og idéer i deres arbejde med at integrere matematikhistorie i matematikundervisningen. I forbindelse med overblikket og dømmekraften vedrørende matematikkens historiske udvikling benytter de de ovenstående fem spørgsmål til at vurdere, om en gruppe gymnasieelever gennem et matematikhistorisk undervisningsforløb designet af Jankvist og Kjeldsen har opnået

denne form for overblik og dømmekraft [Jankvist og Kjeldsen, 2010]. Denne strategi til at vurdere elevernes opnåede overblik og dømmekraft finder jeg ganske brugbar, hvorfor jeg har valgt at kopiere den i mit arbejde. Med hensyn til det første spørgsmål viste mange af eleverne under mit forløb, at de forstod, at funktionsbegrebet har gennemgået en historisk udvikling fra Euler og til idag. Dette kommer f.eks. til udtryk i følgende citat, som er de indledende linjer fra ekspertgruppe 1's artikelopgave.

Citat 6.1

Siden funktionsbegrebets begyndelse har der været en overhængende debat, hvorvidt det var brugbart eller ej. Dette har ført til flere ændringer og nyfortolkninger af hvordan man beskriver en sammenhæng, som funktionsbegrebet gjorde.

Selvom eleverne i dette citat nok overdriver intensiteten af debatten om funktionsbegrebets anvendelighed, så er det klart, at de har forstået, at funktionsbegrebet har undergået forskellige former for ændringer gennem historien. Datamaterialet viser også, at mange af eleverne ikke bare forstod, at funktionsbegrebet har udviklet sig, men også havde indsigt i, hvordan en del af udviklingen havde set ud. Dette kommer bl.a. til udtryk af følgende uddrag af basisgruppe 2's basisgruppeaflevering:

Citat 6.2

Euler udviklede i 1748 sit første funktionsbegreb. En af hans påstande omkring funktionsbegrebet gik på, at en funktion for en variabel er et udregningsudtryk sammensat på en hvilken som helst måde. Dog skal udtrykket indeholde en variabel samt et til flere tal eller en til flere konstanter. Dette betød at funktionerne ville være kontinuerte (Bemærk! Forståelsen for kontinuerte funktioner dengang, er anderledes i forhold til nu!).

Senere samme år udvider Euler sit begreb. Han tilføjer muligheden for at en funktion kan være diskontinueret (Bemærk! Forståelsen for diskontinuerede funktioner dengang, er anderledes i forhold til nu!).

Af dette citat fremgår det, at eleverne i basisgruppe 2 har forstået nogle af de vigtige elementer i Eulers første funktionsbegreb, samt hvordan han udviklede det. Derudover har de også forstået, at kontinuitetsbegrebet også engang har været forstået anderledes, end det bliver idag.

Med hensyn til det andet af KOM-rapportens spørgsmål havde nogle af eleverne indsigt i nogle af de ydre såvel som indre drivkræfter, som påvirkede den del af funktionsbegrebets udvikling, som forløbet omhandlede. I forbindelse med de indre drivkræfter havde forløbet især fokus på debatten om den svingende streng, som fik Euler til at udvide sit oprindelige funktionsbegreb. At nogle af eleverne faktisk forstod, at dette var en drivkraft bag udviklingen, fremgår af følgende uddrag af basisgruppe 2's basisgruppeaflevering:

Citat 6.3

Grunden til at Euler begyndte at arbejde med de diskontinuerede funktioner, var fordi der var en stor debat imellem datidens matematikere. Debatten gik på at de funktioner som man arbejdede med ikke kunne beskrive en svingende streng [...]

Som citatet afslører havde gruppen lidt misforstået, hvad debatten om den svingende streng gik ud på, men eleverne havde forstået, at det var en debat internt i det matematiske samfund, som fik Euler til at udvide sit funktionsbegreb. I forbindelse med ydre drivkræfter behandlede forløbet den franske revolution, der ganske vist må siges at være en indirekte drivkraft, men

dog stadig en drivkraft. At en af ekspertgrupperne havde forstået, at den franske revolution påvirkede funktionsbegrebets udvikling, fremgår af følgende dialog, der fandt sted under den anden klassesdiskussion. I denne diskussion skulle hver ekspertgruppe præsentere et spørgsmål eller et diskussionsoplæg, som den gerne ville have, at klassen skulle diskutere (se afsnit 5.4). Ekspertgruppe 3 havde valgt at præsentere det spørgsmål, som fremgår af nedenstående dialog.

Dialog 6.1

-

1. **Lærer:** Hvem er den sidste gruppe? Der sidder sådan en som Christoffer.
2. **Christoffer:** Ja. Altså vi har sådan mere et - det er ikke så meget et spørgsmål, det er sådan mere en, øh, en rent fak - eller en diskussion. Øhm, med at - Altså med den franske revolution så ændrede forskningen i matematik sig jo, men vi tænker lidt, at hvis den franske revolution ikke var sket, hvordan ville udviklingen af de

her begreber så have været? Fordi, at, at, øh, hvad hedder det nu, at det er jo netop på grund af, at der kom mere stringens, at, at blandt andet Dirichlet, han har gjort det, som han har gjort det, modsat, modsætning til Euler. Så hvordan tror I, tror I det ville have udviklet sig på samme måde, øh, hvis den, øh, eller på en anden måde, hvis den franske revolution ikke havde været der?

Af Christoffers overvejelser ud i den kontrafaktiske historieskrivning fremgår det, at han rent faktisk har forstået, at den franske revolution ændrede på den matematiske verden og derved påvirkede funktionsbegrebets udvikling. Af hans tale om stringens fremgår det, at han ikke blot ved, at den franske revolution påvirkede det matematiske samfund, men også har forstået i hvert fald nogle af konsekvenserne af denne påvirkning.

Med hensyn til KOM-rapportens tredje spørgsmål viser mit datamateriale, at flere af eleverne havde forståelse for, hvilke forskellige grupper af menneskelige aktører, som påvirkede den del af funktionsbegrebets udvikling, som forløbet omhandlede. For det første udviste stort set alle eleverne en forståelse af, hvilken rolle Euler og Dirichlet havde spillet i funktionsbegrebets udvikling. Dette kommer til udtryk mange steder i datamaterialet. Et af disse steder er citat 6.2 på side 40. Dette citat viser, at basisgruppe 2 tydeligvis har forstået, hvilken rolle Euler spillede i funktionsbegrebets udvikling. Udover Eulers og Dirichlets roller i den behandlede udvikling indeholder datamaterialet også indikationer på, at eleverne havde indsigt i den rolle, som Eulers matematikkolleger spillede i forbindelse med Eulers udvidelse af sit oprindelige funktionsbegreb. Nogle af disse matematikkolleger var meget modvillige mod det udvidede funktionsbegreb, og denne modvilje fik som konsekvens, at begrebet ikke blev så udbredt. At nogle af eleverne havde forstået dette, fremgår af følgende uddrag fra ekspertgruppe 1's artikelopgave:

Citat 6.4

Derfor må udviklingen i funktionsbegreberne blandt andre ting skyldes menneskets holdninger og fortolkninger som vigtige faktorer. Eksempelvis mente nogle af Eulers samtidige matematikere at hans udvidede funktions begreb ikke burde benyttes, fordi det var snyd for matematikkens grundprincipper. Dette betød at Eulers udvidede funktionsbegreb aldrig kom til at blive benyttet efter hensigten, og et nyt funktionsbegreb blev lavet af Dirichlet.

En tredje gruppe af menneskelige aktører, hvis rolle nogle af eleverne fik indblik i, bestod af den diffuse gruppe, som stod bag den franske revolution. I de forskellige opgaveformuleringer

som iscenesatte elevernes arbejde under forløbet, var den franske revolution kun nævnt som en samfundsmæssig faktor i udviklingen og ikke som en menneskelig. Alligevel gjorde jeg under den første klassesdiskussion eleverne opmærksomme på, at der også var mennesker bag den franske revolution. At en af ekspertgrupperne fangede denne pointe ses af følgende uddrag af ekspertgruppe 4's artikelopgave:

Citat 6.5

Det var muligt for mennesker at ændre den retning matematik tog, via deres indsigter, handlinger og holdninger, dette skete bl.a. under den franske revolution, da der blev lavet om på forskningsmetoderne, for at gøre det mere effektivt. For at få klogere undervisere, så samfundet kunne få klogere elever.

Citatet afslører, at eleverne ikke har opnået en fuldstændig forståelse af den historiske episode, som de taler om. F.eks. er det meget usikkert, hvad »det« i vendingen »for at gøre det mere effektivt« konkret refererer til. Alligevel viser citatet også, at eleverne har en begyndende indsigt i, at den franske revolution påvirkede funktionsbegrebets udvikling, og at der var mennesker bag revolutionen.

Med hensyn til KOM-rapportens fjerde spørgsmål indeholder datamaterialet indikationer på, at eleverne havde en indsigt i, hvilke samfundsinstitutioner den behandlede udvikling af funktionsbegrebet fandt sted i. Dette fremgår af følgende uddrag fra basisgruppe 3's basisgruppeaflevering:

Citat 6.6

I det attende århundrede var undervisning og forskning i matematik stærkt opdelt. Universiteterne var meget lagt op om filosofien og de klassiske traditioner og der var ikke plads til udvikling af ny videnskab. Derfor blev der undervist og ikke forsket i ny matematik.

Forskningen i matematik blev derimod lavet på akademier rundt omkring i Europa. Akademierne blev finansieret af landenes monarker, da det var meget prestigefuldt at have kendte og respekterede videnskabsmænd tilknyttet éns akademi.

[...]

Det var især i Frankrig at undervisningen og forskningen i matematik foregik, men dette ændrede sig drastisk efter revolutionen. I 1793 reformerede de nye magthavere hele systemet. De mente at undervisningen skulle komme folket til gode og man lukkede derfor de fleste akademier og universiteter. I stedet blev der især undervist i praktisk matematik, lagt op på at Frankrig skulle have et effektivt militær. Det var nu ikke forskning der blev lagt vægt på, men undervisningen.

Underviserne skulle nu fremlægge og diskutere ny matematik med de studerende.

Dette citat viser, at eleverne i basisgruppen havde en indsigt i, hvilke samfundsinstitutioner der var indblandet i arbejdet med matematik omkring den franske revolution.

Ud fra den ovenstående analyse fremgår det samlet set, at eleverne gennem deres deltagelse i mit undervisningsforløb udviste indsigt i spørgsmål i stil med de fire første af KOM-rapportens fem generelle spørgsmål. Derfor vil jeg mene, at der er belæg for at sige, at eleverne under afviklingen af undervisningsforløbet udviste et vist niveau af overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling.

6.1.1 Elevernes matematikhistoriske læringsudbytte

I evalueringsskemaet blev eleverne bl.a. bedt om at reflektere over, hvad de rent matematikhistorisk havde fået ud af at deltage i forløbet. F.eks. lød det sjette spørgsmål således: »Hvordan

har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?«. Af de femten afgivne besvarelser indeholder otte et svar på dette spørgsmål, der giver udtryk for, at eleven gennem arbejdet med forløbet er blevet opmærksom på matematiske begrebers historiske udvikling. Nogle eksempler på sådanne svar er følgende:

Citat 6.7

Man havde lidt før en tanke om at matematiske teorier blev udviklet af en lille gruppe kloge hoveder. At finde ud af at matematisk forskning igennem længere tid har været et diskuterbart emne for alle med en smule forståelse herom, ændrede min opfattelse radikalt.

Citat 6.8

[...] Jeg ved ikke hvad min opfattelse var før, men det har da klart ændret det, idet at vi nu ser at en matematiker siger noget hvor så hans lærling (Hvis man kan sige det) ser noget helt 3. der udvikler begreget sig jo.

Af svar som de to ovenstående fremgår det, at evalueringsspørgeskemaet faktisk fik eleverne til at reflektere over deres egen læring. Derudover giver de mig indsigt i, hvordan eleverne før forløbet tænkte om matematik. F.eks. fremgår det af citat 6.7, at eleven her før forløbet ikke opfattede matematik som noget, der kunne diskuteres.

I forbindelse med de menneskelige aktører lød evalueringsspørgeskemaets femte spørgsmål således: »Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret din opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? Begrund dit svar.« Af de femten besvarelser af spørgeskemaet indeholder hele elleve et svar på dette spørgsmål, der siger, at eleverne selv mener, at forløbet enten ændrede deres opfattelse eller simpelthen tvang dem til at få en. Nogle eksempler på denne type af svar er følgende:

Citat 6.9

Ja. Vidste ikke at man kunne have så stor en rolle.

Citat 6.10

Har ikke rigtigt haft en holdning til det, men synes nu at mennesker spiller en stor rolle når man snakker matematikkens udvikling.

Citat 6.11

Det har ikke ændret det på den måde at jeg aldrig havde tænkt over det før, men det har tvunget mig til at tage stilling til det.

Af svar som de tre ovenstående fremgår det, at forløbet ifølge eleverne selv ændrede deres grundlæggende forestillinger om matematik. Før havde de ikke rigtigt nogen opfattelse af, at mennesker var med til at udvikle matematikken, men det fik de gennem forløbet. Igen er det tydeligt, at elevernes besvarelse af evalueringsspørgeskemaet giver mig en indsigt i, hvordan de tænkte (eller ikke tænkte) omkring matematik før forløbet.

I forbindelse med elevernes besvarelser af evalueringsspørgeskemaet er det værd at bemærke, at det femte og sjette spørgsmål om elevernes historiske indsigt ikke taler om funktionsbegrebet, men derimod mere generelt om et matematisk begreb. Det er derfor muligt, at elevernes overvejende positive tilkendegivelser omkring disse to spørgsmål kan ses som en svag indikation på, at eleverne opfatter udviklingen af funktionsbegrebet som repræsentativ for andre matematiske begrebers udvikling. Man skal dog være meget forsigtig med sine slutninger omkring dette, da

det også er muligt, at eleverne simpelthen ikke har tænkt over, at spørgsmålene taler om et matematisk begreb i stedet for funktionsbegrebet. Hvis eleverne virkelig opfatter den behandlede udvikling som repræsentativ, passer dette dog rigtigt godt til KOM-rapportens tanker om overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling, da dette overblik og dømmekraft jo netop har fokus på det generelle faktum, at matematik har udviklet sig, og ikke på konkrete matematikhistoriske episoder.

6.1.2 Indsigt i elevernes forestillinger om matematikkens historie

Ud fra mit datamateriale ser det altså ud til, at mit undervisningsforløb bidrog til at udvikle elevernes overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling. Dette er dog ikke det eneste der er at sige om forløbets rolle i forhold til elevernes matematikhistoriske indsigter og forståelse. Datamaterialet giver nemlig også indblik i i hvert fald nogle af elevernes grundlæggende forestillinger om matematikkens udvikling. Dette kommer frem i følgende dialog, som fandt sted under den anden klassesdiskussion. Det spørgsmål, som eleverne her diskuterer, er det, som Christoffer præsenterede i dialog 6.1 på side 41, og som handlede om, hvordan funktionsbegrebets udvikling ville have set ud uden den franske revolution.

Dialog 6.2

-

1. **Jesper:** Øhm. Det ville nok ikke have udviklet sig på samme måde. Måske havde det fået samme resultat. Men udviklingen ville nok ikke have det samme, eftersom man må nok må indse, at størstedelen af matematikken d fra den gang, øh, kom fra lande så som, øh, Frankrig, øh, og Tyskland tror jeg [*taler utydeligt*]. Men jeg, specielt Frankrig i hvert fald. Æhm. Hvordan det så havde været, det havde måske været mere gammeldags fæcon. Æhm. Men jeg tror helt sikkert, at man var nået måske frem til det samme resultat. På hvilket tidspunkt man var gjort det, er så en anden side af sagen. Men det samme resultat ville nok være endt op i. Eller noget *herop*, der ligner det meget nært.
2. **Lærer:** Ja, altså det her det er jo bestemt noget, ingen har et svar på, fordi der er jo ingen, der ved, hvad der var sket, hvis...
3. **Jesper:** [*taler utydeligt*]
4. **Lærer:** ... den franske revolution ikke havde været der. Er der andre, der har bud til det her? Rikke?
5. **Rikke:** Øhm, ja. Øhm, jeg tror også, at, øhm - Det kan godt være, at, øh, de ville få det samme resultat, men man ville gøre det på forskellige måder. Man ville finde andre funktioner, man kunne skabe på andre måder end dem, som vi har *bruger* idag. Eller vi har idag.
6. **Lærer:** Det er også...
7. **Rikke:** Og måske, måske kunne man godt få andre resultater. Det ved man aldrig, jo.
8. **Lærer:** Nej. Markerer Christoffer?
9. **Christoffer:** Ja. Tror I også, at man kunne f, altså hvis de nu havde fortsat med, at det ligesom var nogle få mennesker, der sad på nogen akademier rundt omkring i Europa og diskuterede måske med en eller to f, øh, andre matematiske forskere, der var ligeså meget inde i stoffet som en selv rundt omkring i Europa, at, tror I så, at man ville, at det ville blive lige så godt og præcist, som, øhm, det ville være, som hvis man nu havde diskuteret det med mange flere mennesker, som nødvendigvis ikke var enige.
10. **Pige:** [*taler utydeligt*]

11. **Jesper:** Øhm...

12. **Lærer:** Jesper.

13. **Jesper:** Æh, muligvis ikke, men, æh, bestemt tror jeg, at, øh, udviklingen vil be - Altså, øh, tiden vil vise sig, at, øh, at ændre på de her ting, så de kommer til at tilpasse sig. Fordi, øh, på et eller andet tidspunkt på der jo komme en ny matematiker ind på banen, der måske ser »hov, der er *mig* nogle proces, problemer her med, hvad Euler har lavet. Øhm. Lad, lad os prøve at lave det om«. Øhm. Og det har man - Altså som sagt det vil nok ikke komme til at ligne det samme, som

vi har *idag*, det samme funktionsbegreb, men udgangspunktet vil måske være det samme. Altså det vil, rent grafisk lignende vil det ikke se ud på samme måde. Det vil nok lyde anderledes, men kunne give det samme. Øh, så jeg tror, at, at vi ville kunne opnå det samme. Spørgsmålet er bare, hvor langt tid det ville have taget. Æhm, og hvem der så havde gjort det og på hvilken måde det havde været gjort. Men helt klart, det ville da give et dårligere udbytte jo færre du er til at diskutere det. Men udbyttet skal nok komme med tiden, vil jeg tro.

Af replik 1 og 13 i ovenstående dialog fremgår det, at Jesper har en opfattelse af, at matematikens historiske udvikling har noget deterministisk over sig. Dette kommer til udtryk i vendinger som »Men jeg tror helt sikkert, at man var nået måske frem til det samme resultat« og »Men udbyttet skal nok komme med tiden, vil jeg tro«. Det kunne også lyde til, at han mener, at vi idag arbejder med det »rigtige« funktionsbegreb, mens de tidligere har været lidt forkerte. Dette baserer jeg på hans tale om, at tingene tilpasser sig i replik 13. Det kan også være en sådan rigtig-forkert-tankegang, der ligger bag både Jespers og Rikkens tale om resultatet af funktionsbegrebets udvikling. På et senere tidspunkt i klassediskussionen siger Jesper direkte, at han mener, at man ikke kan sige, at det nutidige funktionsbegreb er rigtigt, mens de historiske er forkerte. Alligevel vil jeg mene, at det lidt er netop denne måske underbeviste holdning, der skinner igennem i den ovenstående dialog. En sidste ting man kan bemærke, er, at det i dialogen skinner lidt igennem, at Jesper nok ikke rigtigt ved, hvad et funktionsbegreb er. Dette kommer til udtryk ved, at han flere gange siger, at funktionsbegrebet i Christoffers kontrafaktiske scenarie ikke ville ligne vores faktiske nutidige funktionsbegreb, men alligevel ville være ens med det. Som en sidste ting kan man bemærke, at den ovenstående dialog er et godt eksempel på, at forløbet fik eleverne til at diskutere matematik på et temmeligt strukturelt plan, hvilket gav mulighed for at få indblik i nogle af elevernes grundlæggende og måske også ubevidste forestillinger om matematik.

6.2 Begrebsforståelse og matematiske kompetencer

Denne del af analysen knytter sig til problemformuleringens første og andet delspørgsmål, idet den fokuserer på, hvad datamaterialet afslører om elevernes begrebsforståelse og besiddelse af de udvalgte matematiske kompetencer. Grunden til at jeg har valgt at slå analysen i forhold til disse to dele af problemformuleringen sammen, er, at elevernes begrebsforståelse og matematiske kompetencer for mig at se hænger nært sammen, da begrebsforståelsen er med til at afgøre, hvordan eleverne agerer i matematiske situationer, og dermed hvordan deres matematiske kompetencer kommer til udtryk.

6.2.1 Elevernes kommunikationskompetence

Under forløbet blev elevernes kommunikationskompetence gang på gang udfordret, da eleverne blev sat i situationer, hvor de skulle formulere sig både skriftligt og mundtligt om matematik. I disse situationer viste elevernes formuleringer på flere måder, at deres kommunikationskompetence ikke var særligt veludviklet, og at deres forståelse for det matematiske stof heller ikke var særlig dyb. Et første eksempel på dette er, at eleverne til tider formulerede sig på en yderst underforstået måde. Dette kom bl.a. til udtryk i nogle af deres afleveringer. Et godt eksempel på dette er følgende uddrag fra ekspertgruppe 2's artikelopgave. Før dette stykke har eleverne præsenteret en indledning, som i bund og grund bare er en omskrivning af indledningen til artikelopgavens opgaveformulering (se bilag D), samt nogle biografiske data om Dirichlet (se anden aflevering i bilag E):

Citat 6.12

Dirichlet mente at man kunne nøjes med en bestemt mængde på x -aksen, fx mellem 7 og 10, mens Euler ikke mente at man kunne nøjes med en bestemt mængde. Han skabte definitionsmængden og sagde at x -variablen skulle være alle tal - enten det hele eller ingenting. Også kaldet variabelens generalitet.

Selvom jeg ud fra elevernes arbejde under forløbet godt forstår, hvad ekspertgruppen mener med dens udtalelser i dette stykke, så fremgår det ikke på nogen måde af artikelopgavens kontekst, i hvilken sammenhæng det er, at man »kunne nøjes med en bestemt mængde på x -aksen«. Derudover er ovenstående stykke også første sted, Euler omtales i opgaven. Umiddelbart efter dette stykke præsenterer gruppen en række biografiske fakta om Euler, men af ovenstående citat er det på ingen måde klart, hvem Euler er. En sidste ting der er at sige om ovenstående citat, er, at hvor eleverne lader til at have fanget, at den variables generalitet går ud på, at den variable kan antage alle værdier, så har de ikke forstået forholdet mellem Euler og definitionsmængden.

Den underforståethed som præger citat 6.12, er et karakteristisk træk ved elevernes måde at formulere sig på, og den indikerer for mig at se, at eleverne ikke forstår det matematiske stof godt nok til at formulere sig på en mere klar måde. Et andet karakteristisk træk er, at de til tider formulerer sig meget overfladisk og skøjter hen over alle detaljer. Et eksempel på dette er følgende uddrag fra ekspertgruppe 1's artikelopgave:

Citat 6.13

Eulers første funktionsbegreb havde ifølge mange matematikere op til flere problemer. Derfor bestemmer Dirichlet et nyt funktionsbegreb, der bygger på nogle noget anderledes regler. Siden hen er dette begreb blevet modificeret til hvad vi har i dag. Når man så ser på den sammenhæng der er imellem de 4 funktionsbegreber. Helt grundlæggende så var Dirichlet og Euler meget uenige i deres definition af funktionsbegrebet. Kort sagt så byggede deres begreber på vidt forskellige regler, hvilket gør dem uforenelige. Det moderne funktionsbegreb har noget mere til fælles med Dirichlet en hvad Euler havde. De grundlæggende regler bygger nemlig på de samme idéer, og hvis man vælger at benytte Dirichlets regler frem for Det Moderne Begrebs regler, så er det ikke ilde set. Forholdet imellem de to definitioner er derfor meget nært. Dette må betyde at Dirichlet og Euler ville løse de samme problemstillinger, men på hver deres uforenelige måde. Det kunne de også, eller det kunne næsten. For det var hele idéen med kritikken af Eulers funktionsbegreb. Han kunne beskrive og forklare en hel del funktioner og deres sammenhæng, bare ikke alle.

Udover at eleverne hverken her eller andre steder i deres artikelopgave beskriver indholdet af de forskellige funktionsbegreber, som de taler om, skøjter de i dette uddrag generelt hen over

alle detaljer. Allerede i første sætning bliver der f.eks. omtalt nogle problemer med Eulers første funktionsbegreb, som ikke bliver forklaret dybere. Derudover forklarer de heller ikke på nogen måde, hvad de forstår ved de regler, som de flere gange siger, at de forskellige funktionsbegreber bygger på. De problemstillinger, som eleverne øjensynligt mener, at både Dirichlet og Euler ville løse, bliver heller ikke beskrevet. Ovenstående stykker er i det hele taget så overfladisk og underforstået, at selvom jeg fik et indblik i gruppens tankegang ved at observere den under dens selvstændige arbejde, så er jeg ikke alle steder sikker på, hvad det er, der refereres til. En sidste ting, der er at sige om det ovenstående citat, er, at det viser, at ekspertgruppens elever ikke har forstået forholdet mellem Dirichlets funktionsbegreb og det moderne funktionsbegreb. Hvor de to funktionsbegreber faktisk i bund og grund er ens, giver gruppen udtryk for, at den mener, at de er meget lig hinanden, men ikke helt ens.

Det er ikke kun i deres afleveringer, at eleverne formulerer sig meget overfladisk. Tværtimod indeholder deres besvarelser af evalueringsspørgeskemaet også mange overfladiske formuleringer. Et eksempel på dette er følgende citat, hvor en af eleverne besvarer spørgeskemaets sjette spørgsmål om, hvordan forløbet har påvirket hendes opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til (se bilag F):

Citat 6.14

Det har givet mig en lidt større indsigt i det. bla. omkring hvordan efter den franske revolution bevægede sig bredere ud til befolkningen og flere lærte og skulle tage stilling til det.

Selvom det selvfølgelig ikke er rimeligt at forvente, at et svar på et spørgsmål i evalueringsspørgeskemaet skal være særligt uddybende, så er svaret i dette citat lige vel overfladisk. Det er i hvert fald ikke særligt tydeligt, hvad det sidste »det« refererer til. I forbindelse med formuleringer som i det ovenstående citat er der nok grund til at overveje, om eleverne selv er helt bevidste om, hvad det er, de taler om. Det er meget muligt, at elevernes overfladiske sprogbrug i virkeligheden afslører, at deres forståelse for det matematiske stof ikke er særlig dyb.

Et tredje eksempel på at elevernes udøvelse af deres kommunikationskompetence indikerede, at de manglede noget erkendelse omkring det matematiske stof i forløbet, var, at de under det selvstændige arbejde i basis- og ekspertgrupperne flere gange gav udtryk for, at de ikke vidste, hvordan de skulle formulere sig. Et eksempel på dette er nedenstående dialog, som fandt sted under basisgruppe 4's selvstændige arbejde. Af konteksten lader det ikke til, at det »det« som Camilla taler om i første sætning, refererer til noget særligt konkret, men derimod til hele den foreliggende opgave eller måske endda matematik generelt.

Dialog 6.3

-

- | | |
|--|--|
| <p>1. Camilla: Jeg kan ikke formulere det. Jeg synes det - altså.... Jeg forstår det godt, men jeg kan ikke finde ud af at forklare det. Sådan er jeg, jeg kan heller ikke få</p> | <p><i>det ned på</i> papir. Jeg har det bare inde i hovedet. Det, det er her bare. Men det kan ikke bruges til noget, for jeg [<i>taler utydeligt</i>] forklare det.</p> |
|--|--|

At formuleringsproblemerne blev opfattet som dybt frustrerende af nogle elever, fremgår af den nedenstående dialog, som fandt sted under det selvstændige arbejde i ekspertgruppe 1.

Dialog 6.4

-

1. **Jesper:** *Hvordan fanden skal jeg formulere mig? Jeg hader, når jeg kan svaret, men ikke kan formulere mig.*
2. **Marie:** Men, altså, det vigtigste nu er jo ikke, at du skal formulere dig korrekt. Det er jo bare [*taler utydeligt*]
3. **Jesper:** Men [*taler utydeligt*] jeg ved slet ikke, hvad jeg skal sige. Jeg ved, jeg har det inde i hovedet, men jeg kan ikke sige det.

Formuleringsproblemer som dem, der fremgår af de to ovenstående dialoger, er tegn på, at eleverne ikke har opnået den fulde erkendelse af det matematiske stof, som de sidder med.

I forbindelse med elevernes kommunikationskompetencer udfordrede undervisningsforløbet sansynligvis eleverne på en anden måde end traditionelle matematikafleveringer. Dette bygger jeg på min egen erfaring med matematikafleveringer på de forskellige trin i det danske undervisningssystem. Hvor eleverne i mange traditionelle matematikopgaver kan slippe for at skrive ret meget egentlig tekst, så krævede forløbets to afleveringer, at eleverne formulerede en vis mængde sammenhængende tekst. Af elevernes besvarelser af evalueringsspørgeskemaet fremgår det, at flere af dem fandt denne anderledes opgavestil meget udfordrende. F.eks. skriver en af eleverne følgende til spørgeskemaets syvende spørgsmål om, hvorvidt det at skrive forløbets to afleveringer havde været sværere end at skrive almindelige afleveringer (se bilag F):

Citat 6.15

Ja det har været sværere, fordi der skulle meget mere tekst på end vi er vant til, men på den anden side har det hjulpet på forståelsen.

Af dette svar fremgår det, at eleven har fundet forløbets opgavestil svær, men også udbytterig.

6.2.2 Symbol- og formalismekompetencen

I forbindelse med elevernes symbol- og formalismekompetence fremgår det af mit datamateriale, at eleverne i deres omgang med symbolsprog havde en utrolig låst tilgang til de forskellige tegn og meningen med dem. Dette fremgik især af deres arbejde med kompendiets uddrag af Dirichlets artikel *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (se bilag B). Dette uddrag starter med følgende sætning: »Man tænker sig, at a og b er to konstante værdier, og at x er en foranderlig størrelse, som lidt efter lidt skal antage alle værdier, der ligger mellem a og b .« Denne brug af betegnelserne a og b skabte uforudset store problemer for eleverne, hvilket den følgende dialog er et eksempel på. Denne dialog viser en episode i ekspertgruppe 1's selvstændige arbejde, hvor Jesper forsøger at forstå det, basisgruppe 1 har skrevet om netop uddraget af Dirichlet.

Dialog 6.5

-

1. **Jesper:** [læser højt af basisgruppe 1's aflevering] »... og a og b var to tal på x -aksen« [tænker i tavshed i fire sekunder]
2. **Sandra:** Der skulle have stået y -aksen.
3. **Marie:** [griner] Vil du have en kuglepen til at rette?
4. **Sandra:** Gal, en basal fejl alligevel, fordi det er jo x -aksen, der menes.

5. **Jesper:** Ja, der står x -aksen i hvert fald.
6. **Sandra:** Og det er jo y -aksen, der menes. Er det ikke? x er den vej, og y den vej [tegner et koordinatsystem i luften]
7. **Jesper:** Mmmm
8. **Marie:** Jo.
9. **Sandra:** Jo. Så er det også y -aksen. Går lige ind og siger det til de andre [rejser sig fra bordet og forlader lokalet]
10. **Jesper:** [sidder tavs i 13 sekunder og se undrende ud, mens han tegner for sig selv i luften]
11. **Marie:** Ja, okay.
12. **Jesper:** [nærmest til sig selv] Ikke i vores funktionsbegreb.
13. **Marie:** *Hvem* er ikke ifølge hvad?
14. **Jesper:** [tænker først videre i 9 sekunder] Det er rigtigt, at... hvad hedder det, b er et tal på y -aksen. Men det vil jeg da ikke mene, a er.
15. **Marie:** Jo a - eller a det er den der der går ud og så op, ik? [tegner med fingeren i luften]
16. **Jesper:** Det kommer da an på, hvilken det er. Hvilken form for funktion det er.
17. **Marie:** [taler utydeligt og tager fat i en basisaflevering]
18. **Jesper:** Har *jeg* skrevet noget om det?
19. **Marie:** [sidder og kigger i en aflevering] Vi har om det der med... den.... [taler utydeligt]
- 16 SEKUNDERS PAUSE, HVOR MARIE SIDDER BLADRER I AFLEVERINGEN
20. **Sandra:** [kommer ind i lokalet igen] Øh, venner, det er x -aksen, men det er fordi, det er formuleret lidt forkert, ik? Men det er fordi - har vi, øh, kridt, så jeg kan tegne det for jer?
21. **Jesper:** Øh
22. **Sandra:** Bare sådan for og...
23. **Jesper:** Pas!
24. **Sandra:** Hvad der menes med det.
25. **Jesper:** hm hm hm
26. **Marie eller Line:** Er der ikke ind, inde ved tavlen?
27. **Sandra:** [taler utydeligt og forlader lokalet igen]
28. **Jesper:** Ej, nu skal vi nok finde ud af, hvad det er.
- 21 SEKUNDERS PAUSE
29. **Line:** Jaja
30. **Jesper:** Hva?
31. **Marie:** *Vi skal* lave samfundsfag her i spisepausen.
32. **Sandra:** [kommer tilbage til lokalet og går hen til tavlen]
33. **Jesper:** *Samfundsfag?*
34. **Marie:** Super gruppe
35. **Sandra:** [tegner et koordinatsystem på tavlen] Er I med, hvad det her er?
36. **Jesper:** Ja
37. **Marie:** Ja
38. **Sandra:** Godt. Han [Dirichlet] mener, at der er et punkt her, ik? [tegner et punkt på koordinatsystemet førsteakse]
39. **Jesper:** Ja
40. **Sandra:** Det er a . Og så er der et punkt her [tegner endnu et punkt på koordinatsystemets førsteakse]. Det er b .
41. **Jesper:** Okay
42. **Sandra:** Og så mener han bare, at den i princippet kan gå sådan her [tegner en graf, der går fra a til b] fra a til b på x -aksen.
43. **Jesper:** Ja okay
44. **Sandra:** Forstår I?
45. **Jesper:** Men det er jo ikke sådan vi ser a og b idag.
46. **Sandra:** Nej, men det er det han mente.

Af denne dialog fremgår det, at Dirichlets brug af betegnelserne a og b var svær at håndtere og forstå for alle gruppens elever inklusiv Sandra, som ellers havde arbejdet med bl.a. uddraget af Dirichlets tekst i sin basisgruppe. Af replik 12-16 fremgår det, hvad problemet består i. Dirichlet bruger i sin tekst a og b til at betegne endepunkterne i et interval, men i elevernes begrebsverden er a og b altid konstanter i en funktionsforskrift - for nogle af eleverne er dette endda snævret ind til forskrifter for lineære funktioner, men dette gælder dog ikke dem alle, hvilket fremgår af replik 16. At Dirichlets brug af a og b strider imod elevernes idéer om, hvad man kan bruge disse betegnelser til, fremgår klart af replik 45-46. Af dette eksempel fremgår det, at eleverne i ekspertgruppe 1 har en tendens til at oversætte meget mekanisk fra tegn til mening uden at tage hensyn til konteksten. Dette er nok et tegn på, at de ikke rigtigt forstår indholdet af de begreber, som tegnene dækker over, men derimod bare har lært sig at manipulere rundt med tegnene i en afgrænset mængde af situationer.

Enkelte gange under afviklingen af undervisningsforløbet observerede jeg tegn på, at nogle af eleverne trods alt havde en lidt mere forstående tilgang til formelsproget og dermed en lidt mere veludviklet symbol- og formalismekompetence end den, som kommer til udtryk i dialog 6.5. Disse gange var forståelsen dog ikke større, end at den smuldrede, hvis man pillede lidt ved den. Et godt eksempel på dette er nedenstående dialog, som fandt sted under gruppearbejdet i basisgruppe 4. Vi kommer her ind midt i en diskussion af, hvad en funktion er for noget idag:

Dialog 6.6

-

- | | |
|---|--|
| <p>1. Elisabeth: [begynder at læse op fra sin computerskærm] »I dag forstår man ved en funktion som en sammenhæng«</p> <p>2. Camilla: Mellem x og y</p> <p>3. Martin: Hvaffornoget?</p> <p>4. Camilla: [griner] Hvaffornoget</p> <p>5. Martin: Nej, jeg er i min egen verden lige nu.</p> <p>6. Elisabeth: [<i>taler utydeligt samtidig med, at Camilla starter på næste replik</i>]</p> <p>7. Camilla: Er det ikke en sammenhæng mellem x og y?</p> <p>8. Elisabeth: Det er det da ikke altid. Er det det?</p> <p>9. Camilla: Oftest.</p> <p>10. Martin: En funktion?</p> <p>11. Elisabeth: Ja</p> <p>12. Martin: Jo</p> <p>13. Marie: <i>Så er de jo bare omvendt</i></p> <p>14. Elisabeth: Der kan jo, der kan jo også være z</p> | <p>15. Camilla: Ja, men altså x og y...</p> <p>16. Elisabeth: <i>Og du kan jo også sige a og b</i></p> <p>17. Camilla: Shhh. Lad være med at være så påståelig. Bare i det hele taget så x og y er sådan to...</p> <p>18. Elisabeth, Camilla og Marie : [<i>taler utydeligt i tre sekunder</i>]</p> <p>19. Marie: Der er altid en x-værdi og der... x-værdi, og der er altid en y-værdi.</p> <p>20. Camilla: Ja, i et koordinatsystem. Altid.</p> <p>21. Marie: Det kan godt være - Det er ligesom, hvis du laver en tre...</p> <p>22. Elisabeth : Jaja, i et koordinatsystem er der...</p> <p>23. Marie: Nej, foreksempel, okay, hvis vi nu laver en trekant heroppe, ik? [peger på tavlen i grupperummet] Så er <i>der</i> jo ikke nødvendigvis.. er det ikke nødvendigvis for mig at skrive a, b, c. Jeg kunne også skrive d, e, f eller et eller andet.</p> <p>24. Elisabeth: Jamen, hvis jeg nu foreksempel skulle lave...</p> |
|---|--|

- 25. Marie:** Men det er jo stadig det samme. Det er bare nogle andre
- 26. Elisabeth eller Camilla:** *Det er sammenhængen mellem dem*
- 27. Elisabeth:** Det kan godt være, at man godt må sige...
- 28. Camilla:** Fordi at...
- 29. Elisabeth:** Fordi x skal selvfølgelig altid være x her [danner en vandret linje med sine hænder]
- 30. Camilla:** Ja
- 31. Elisabeth:** [danner en lodret linje med sine underarme] Og y vil altid være y her
- 32. Camilla:** [i kor med Elisabeth] Og y vil altid være y her [holder en blyant op som en lodret linje]
- 33. Marie:** Ja
- 34. Camilla:** Og så [*taler utydeligt. Ordet »sammenhæng« indgår. Mens hun taler, tegner hun en skrå linje i luften med sin blyant*] mellem x eller y . På en eller anden måde.
- 35. Camilla eller Elisabeth:** [*taler utydeligt*] rigtigt.
- 36. Marie:** y er jo også det samme som $f(x)$.
- 37. Elisabeth:** Jamen jeg tænker bare, hvad hedder det, om... foreksempel hvis du skal lave et sildeben.
- 38. Marie eller Camilla:** Mmmm
- 39. Elisabeth:** Om du så ikke må skrive andre tal end x og y , om du ikke må skrive a og b , og så ved du bare, at $a...$
- 40. Marie:** Jamen, det må du ikke.
- 41. Camilla:** Hvorfor skulle du gøre det?
- 42. Elisabeth:** Men det ved jeg ikke...
- 43. Camilla:** [griner]
- 44. Elisabeth:** ... [*taler utydeligt*] det kan, det kan godt være, at man gør det indenfor matematik, jo.
- 45. Martin:** Mmm
- 46. Marie:** Nej, det tror jeg ikke.

I denne dialog er den interessante person i den aktuelle sammenhæng Marie. I replik 23 får hun delvist lukket pigernes på dette tidspunkt meget ivrige diskussion om, hvad man kan kalde variablene i en funktion, ved med et eksempel omkring en trekant at sige, at man sagtens kan bruge forskellige betegnelser for matematiske størrelser, uden at det rigtigt gør nogen forskel. Opfattelsen af, at hun har forstået forholdet mellem matematiske størrelser og betegnelserne for dem og altså har en pænt udviklet symbol- og formalismekompetence, styrkes af replik 36, hvor hun minder sine gruppemedlemmer om, at de jo allerede kender flere forskellige betegnelser for funktionsværdien. Da Elisabeth bliver ved med at spørge ind til emnet, ender det dog i replik 40 med, at Marie vender på en tallerken og siger, at i et sildeben må man ikke skrive a og b istedet for x og y . Denne tilsyneladende holdningsændring hos Marie har muligvis noget at gøre med den meget låste tilgang til tegnene a og b , som nogle af eleverne som før nævnt besad. Under alle omstændigheder viser dialogen for mig at se, at Maries forståelse af brugen af symbolsprog bestemt ikke er særlig sikker, men derimod let kan rykkes.

6.2.3 Overordnet matematisk kompetence

Som nævnt i afsnit 3.1 består overordnet matematisk kompetence i at »have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå« [Niss og Jensen, 2002, s. 43]. Som nævnt i afsnit 5.3 har jeg i designet af undervisningsforløbet især tænkt udviklingen af overordnet matematisk kompetence sammen med det ottende undervisningsmål om selvstændigt arbejde, da evnen til at kunne arbejde selvstændigt med matematiske emner

for mig at se må være en forudsætning for og en delkomponent af at kunne agere i den matematiske verden på den måde, som overordnet matematisk kompetence beskriver. Ved selvstændigt arbejde forstår jeg, at eleverne selv tager ansvar for og strukturerer arbejdet, og at de er nødt til at gøre en indsats, der ligger ud over at læse de lektier, som læreren har givet dem for, for at få fat i de informationer, som er nødvendige for at løse den foreliggende opgave. Ved selvstændigt arbejde er det i høj grad eleverne selv, der bestemmer, hvordan den foreliggende opgave skal løses, og hvordan resultatet skal være. Selvstændigt arbejde kræver for mig at se ikke, at den undervisningssituation, som det foregår i, er fuldstændig uden lærerstyring. Det selvstændige arbejde kan sagtens dreje sig om at løse en opgave, som læreren har stillet. Denne opgave skal bare være så åben, at eleverne selv har mulighed for i et vist omfang at bestemme over deres egen arbejdsproces og styre, hvordan produktet af den skal falde ud. Faktisk vil jeg mene, at det i nogle situationer kan være svært at få et godt selvstændigt arbejde op at stå, hvis der slet ikke er nogen lærerstyring. I denne situation har eleverne nemlig så mange muligheder for, hvordan de kan gribe opgaven an, at det at vælge mellem disse muligheder for nogle kan være en uoverstigelig forhindring. Jeg opfatter ikke selvstændigt arbejde og gruppearbejde som arbejdsformer, der indbyrdes udelukker hinanden. For mig at se kan gruppearbejde sagtens foregå mere eller mindre selvstændigt, da eleverne ved gruppearbejde i større eller mindre grad selv kan tage ansvar for deres arbejde eller lægge dette ansvar fra sig.

I forbindelse med selvstændigheden i elevernes arbejde læner jeg mig op ad Carl Winsløw, der i bogen *Didaktiske elementer - en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik* opstiller fire dimensioner, som han bruger til at karakterisere forskellige former for det, han kalder avanceret elevarbejde [Winsløw, 2006, s. 223]. Den ene dimension kalder han »autonomi«. Denne dimension dækker det samme, som jeg betegner selvstændighed. Ifølge Winsløw kan autonomi-dimensionen ved et konkret elevarbejde beskrives ved hjælp af en skala, hvis yderpunkter han beskriver således:

fra løsning af simple, lukkede opgaver med brug af bestemte og let identificerbare teknikker, hvor løsningerne umiddelbart evalueres af underviseren, til selvstændig formulering og udforskning af åbne problemstillinger [...] og selvstændig vurdering af de opnåede resultater. [Winsløw, 2006, s. 223]

I undervisningsforløbet formulerede eleverne ikke selv deres problemstillinger. I stedet blev deres arbejde iscenesat af opgaveformuleringer, som jeg havde udarbejdet. Ifølge Winsløw betyder dette, at designet af undervisningsforløbet ikke lægger op til den højeste grad af autonomi/selvstændighed. På den anden side vil det være forkert at kalde undervisningsforløbets opgaver for simple og lukkede, da eleverne på egen hånd måtte finde ud af, hvordan opgaverne kunne løses, og da der til artikelopgaven ikke var noget endegyldigt svar. Derfor er det min vurdering, at selve designet af undervisningsforløbet lagde op til, at eleverne skulle blive kastet ud i en rimelig høj grad af selvstændigt arbejde.

I forbindelse med elevernes evne til at arbejde selvstændigt under forløbet er det første, man kan bemærke, at det flere gange fremgik, at eleverne var gode til selv at strukturere deres arbejde. Et eksempel på dette er følgende dialog, som foregik i den indledende fase af gruppearbejdet hos basisgruppe 1:

Dialog 6.7

-
1. **Mathilde:** Måske skulle vi dele det ud imellem os, *så kunne der være to om hvem.*
- 5 SEKUNDERS STILHED**
2. **Sandra:** Ja.
3. **Mathilde:** Fordi vi skal jo både finde ud af noget omkring, æh [bliver afbrudt af Sandra]
4. **Sandra:** [forsøger at henvende sig til mig] Pernille, har I lavet flere af dem her [holder artiklen af Jesper Lützen (se afsnit 5.5) op], altså til hver gruppe, så der er en - nå [indser, at hun ikke vil få noget svar af mig]
5. **Mathilde:** Så er der nogen, der har om Euler og nogen, der har om ham der Dirichlet [Dirichlet]. Altså hvad deres, øh, hvad de mener, der er definitionen på funktion [taler utydeligt]. Hvordan de defineres, og så kan vi jo *se* snakke sammen bagefter. Det er mere, så kan vi jo udfra...
6. **Sandra:** Man kan sige, vi er jo kun fire nu, så vi kunne jo godt dele det op to og to.
7. **Mathilde:** Mmmm
8. **Sandra:** Sådan så at to lavede om Euler, og to lavede om ham der Dirch Passer [Dirichlet], og så...
9. **Mathilde:** Ja.
10. **Sandra:** Og så, æhm...
11. **Mie:** Jeg ved da ikke, om man behøver at være to om hver. Så svært kan det ikke være.
- 6 SEKUNDERS STILHED**
12. **Sandra eller Mathilde:** Mmmm
13. **Mathilde:** Det kunne bare være smart, tænker jeg eller [taler utydeligt]
- 7 SEKUNDERS STILHED**
14. **Mie:** Ja, *men så* lad os gøre det.
15. **Sandra:** [griner]
16. **Mathilde eller Sandra:** Super.
17. **Sandra:** Skal vi gøre det sådan? Det er jo ikke fordi, man behøver at sidde sammen to og to og læse om det, vel. Men bare at vi forek - Lad os sige, at os to, vi to [peger på Mie] havde om Euler. Så fandt vi det om Euler, vi nu kunne, og så fandt de det om ham der Dirch Passer [Dirichlet], de kunne, og så kunne vi snakke sammen. [henvendt til Christian] Han hedder ikke Dirch Passer [taler utydeligt]. [Igen henvendt til Mie] Og så øhm... Og så kunne man s - Altså sådan at det bliver varieret, det vi to har. Så det ikke kun er det, du har. Men at man sådan har to vinkler på det. [Henvendt til hele gruppen] Skal vi gøre det sådan? Eller...
18. **Mathilde:** Ja.

Af denne dialog fremgår det, at gruppen faktisk har en rigtig god idé om, hvordan den skal organisere sit arbejde, således at det bliver mest effektivt. Selvom pigerne taler om at splitte arbejdet op imellem sig, så fremgår det også, at de ikke har tænkt sig fuldstændigt at omdanne gruppearbejdet til enkeltmandsopgaver. Dette er f.eks. klart af replik 5, hvor Mathilde taler om, at gruppen efter at have lavet noget i mindre grupper skal samle sammen på det, som de har fundet frem til. Derudover viser pigernes diskussion også, at gruppen formår at samarbejde og i fællesskab finde ud af, hvordan de skal gribe opgaven an. Alt i alt er den ovenstående dialog et eksempel på, at eleverne i basisgruppe 1 formåede at arbejde selvstændigt og sammen på en rigtig fornuftig og effektiv måde.

I forbindelse med selvstændigheden i elevernes arbejde er deres ageren i forhold til læreren interessant. Hvis eleverne ikke havde formået at arbejde selvstændigt, så ville dette sandsynligvis

bl.a. have givet sig udslag i, at de forsøgte at lægge ansvaret for og styringen af deres arbejde over på læreren. Observationerne fra afviklingen af forløbet tyder på, at eleverne bestemt ikke gjorde dette. I stedet brugte de stort set altid læreren på en meget selvstændig og konstruktiv måde. De henvendte sig ofte selv til ham, når de stødte på problemer, og ved disse henvendelser havde de så godt som altid nogle meget konkrete og konstruktive spørgsmål til ham.

Selvom der er flere træk i mit datamateriale, der viser, at eleverne formåede at arbejde selvstændigt, så er der også nogle træk, der viser, at de trods alt kunne blive bedre til dette. Det mest slående eksempel på dette var, at elevernes evne til at koncentrere sig om opgaven og arbejde på en måde, der viste, at de tog ansvar for deres opgave, i høj grad afhang af, om de blev observeret af læreren og/eller mig, eller om de var alene. Dette blev især tydeligt for mig den sidste dag, jeg var hos klassen, hvor jeg ikke havde mulighed for at observere én gruppe hele tiden, men var nødt til at gå rundt mellem grupperne (se afsnit 5.7). Ud fra mine film fra denne dag fremgår det tydeligt, at eleverne i ekspertgruppe 1 var væsentligt mere aktive og koncentrerede, når jeg var hos dem, end når de var alene med kameraet. Alene med kameraet drejede samtalen hurtigt hen på emner, der ikke havde ret meget med matematik og matematikhistorie at gøre. Ligeledes oplevede jeg hos de tre andre ekspertgrupper, at disse flere gange med svingende succes skyndte sig at se ud som om, de arbejdede, når jeg kom ind til dem. Dette betyder, at eleverne i hvert fald ikke viste, at de formåede fuldstændig at tage ansvar for deres eget arbejde.

I forbindelse med at tage ansvar for sin opgave indeholder mit datamateriale indikationer på, at nogle af eleverne ikke var så gode til rigtigt at tage ansvar for en opgave, som de skulle udarbejde sammen med andre og dermed delte ansvaret for med andre. Den episode der mest slående viser dette, fandt sted under gruppearbejdet i basisgruppe 1. I to af de sammenhængende matematiktimer som gruppen havde til dens arbejde, var eleven Mie til at begynde med frygteligt ukoncentreret. Hun lavede stort set ikke noget med relevans for opgaven, pjattede en del og fik også flere gange de to andre tilstedeværende gruppemedlemmer med ud på et sidespor. Til tider virkede hun ligefrem obstruerende for gruppens arbejde, og de to andre virkede ret irriterede over hendes opførsel. Hen mod timernes afslutning blev gruppens medlemmer i fællesskab enige om at dele gruppens spørgsmål op imellem sig, sådan at hvert gruppemedlem fik ansvaret for minimum et spørgsmål. Indtil da havde gruppen forsøgt at besvare spørgsmålene et efter et i fællesskab. Effekten af denne opdeling på Mies arbejdsindsats var meget markant. Umiddelbart efter opdelingen gik Mie i gang med at arbejde med sit spørgsmål. Hun fandt de tekster, som hun skulle bruge og hentede læreren, da hun fandt ud af, at spørgsmålet var for svært til, at hun kunne løse det uden at spørge om hjælp. Denne episode viser, at Mie ikke rigtigt formåede at tage ansvar for en opgave, som hun skulle løse i fællesskab med andre. Dette betyder, at hendes evne til at indgå i et selvstændigt gruppearbejde bestemt godt kunne være bedre, end de egentligt var.

Af elevernes besvarelser af evalueringsspørgeskemaet fremgår en ting omkring det selvstændige arbejde, som er værd at bemærke. Spørgeskemaets tolvte spørgsmål handlede om, hvorvidt eleverne selv følte, at de gennem arbejdet med forløbet var blevet bedre til at arbejde selvstændigt (se bilag F). Elevernes besvarelser af dette spørgsmål var ret delte, da fem elever svarede, at de var blevet bedre til at arbejde selvstændigt, seks elever svarede, at de ikke var blevet bedre til dette, og fire elever hverken svarede det ene eller det andet. Af de seks elever, som svarede, at de ikke var blevet bedre til at arbejde selvstændigt, begrundede tre dette med et argument i stil med det følgende: ”

Citat 6.16

nej, fordi vi i forløbet arbejdede i grupper og ikke rigtig selvstændigt.

Disse elever mener altså, at selvstændigt arbejde ikke kan foregå i grupper. Denne holdning kommer også til udtryk hos en af de elever, der ikke rigtigt svarede på spørgsmålet, da vedkommende begrundede sit manglende svar med, at hun ikke syntes, at forløbet havde indeholdt så meget selvstændigt arbejde. Derudover begrundede en af de elever, der mente at være blevet bedre til at arbejde selvstændigt, sit svar med, at hun havde tænkt og skrevet meget alene. De fem omtalte besvarelser viser, at nogle af eleverne ikke mente, at et gruppearbejde kan foregå mere eller mindre selvstændigt. Dette indikerer, at eleverne har en anden forståelse af selvstændighed end jeg, da jeg som sagt ikke ser selvstændighed og gruppearbejde som udelukkende hinanden.

I forbindelse med elevernes overordnede matematiske kompetence er det nu blevet klart, at mit datamateriale viser, at den del af overordnet matematisk kompetence, der har med selvstændighed at gøre, i hvert fald blev udfordret under forløbet. Af elevernes besvarelser af evalueringsspørgeskemaet fremgår det, at i hvert fald to elever gennem arbejdet med undervisningsforløbet muligvis også har fået styrket andre aspekter af deres overordnede matematiske kompetence, som jeg ikke umiddelbart havde tænkt over i designet af forløbet. Den ene af disse elever har i sin besvarelse bl.a. skrevet følgende:

Citat 6.17

Det gode ved Forløbet er også at jeg nu ved at uanset hvor svær den er så kan jeg godt.

Af dette citat fremgår det, at eleven føler, at hun er blevet mere selvsikker i sin omgang med matematik. Af den ovenstående beskrivelse af overordnet matematisk kompetence vil jeg mene, at en sådan selvsikkerhed må høre ind denne kompetence. Den anden elev skrev følgende i sin besvarelse af spørgeskemaet:

Citat 6.18

Jeg har lært [...] at jeg ikke nødvendigvis behøver forstå alting ved alting.

[...]

Har lært (som sagt) at jeg ikke behøver forstå alle talene og grundene til placeringerne. Men derimod at forstå hvad man kan bruge funktionen til.

Af dette citat lyder det som om, eleven selv mener, at hun gennem arbejdet med undervisningsforløbet delvist har ændret sin tilgang til matematiske udfordringer og opgaver. Det lyder til, at eleven har lært, at det i nogle situationer hverken er nødvendigt eller hensigtsmæssig at ville forstå alle de tekniske detaljer i en matematisk situation, men at det derimod nogle gange er mere givtigt at forsøge at opnå et lidt større overblik. Denne indsigt falder for mig at se ind under overordnet matematisk kompetence.

6.2.4 Elevernes begrebsforståelse

Efter primært at have fokuseret på elevernes matematiske kompetencer vil jeg nu gå over til at fokusere på deres begrebsforståelse. Det første man i den forbindelse kan slå ned på, er, at det under gennemførelsen af undervisningsforløbet flere gange kom til udtryk, at eleverne ikke havde en bedre forståelse af funktionsbegrebet, end at de rodede rundt i, hvad en variabel er, og hvad en konstant er. Et godt eksempel på dette er følgende dialog, som stammer fra gruppearbejdet i basigruppe 4. Dialogen fandt sted umiddelbart efter dialog 6.6 på side 50:

Dialog 6.8

-
1. **Elisabeth:** [fokuserer på den tekst, som hun er ved at skrive på sin computer og taler til Marie eller Camilla] Så du siger, idag forstår man ved en funktion en sammenhæng [begynder at skrive på sin computer] mellem x og y .
 2. **Marie:** Ja. Fordi at...
 3. **Elisabeth:** Fordi at de... [begynder at knipse]
 4. **Marie:** Er det ikke x - og y -værdier?
 5. **Elisabeth:** Nej, æh, nej.
 6. **Camilla:** De siger jo ikke værdierne... Vel? Nej. *Bare ignorer...* [Vender sig mod Elisabeth] Hvad vil du sige?
 7. **Elisabeth:** Øhm... [begynder igen at knipse]
 8. **Camilla:** Lad være med at sidde og knipse.
 9. **Elisabeth:** [Fortsætter lidt med at knipse og går så over til at tromme på bodet]
 10. **Camilla:** Stop med det der.
 11. **Marie:** Vil du godt stoppe med at knipse.
 12. **Elisabeth:** [taler langtsomt samtidig med, at hun skriver på sin computer] Det vil sige, de... Det vil sige, at de...
 13. **Camilla:** De... de... [griner]
 14. **Elisabeth:** De afhængige variable... Nej... Hvad er det nu, nu skal jeg tænke mig om...
 15. **Marie:** Det er jo det der med, at [*taler utydeligt*]...
 16. **Elisabeth:** Er det ikke afhængige, fordi de afhænger da af a og b . Hvad de er. Hvad x er, og hvad y er. Nu skal jeg selvfølgelig passe på.
 17. **Camilla:** Nej, er det ikke uafhængige så, fordi de, altså x og y , de vil... næh hvad... nu bliver jeg selvfølgelig i tvivl.
 18. **Elisabeth:** Men det kan egentligt også godt være, fordi at a og b ...
 19. **Camilla:** Er de overho...
 20. **Elisabeth:** ... de varierer jo i forhold til, hvilke punkter du tager.
 21. **Camilla:** Ja
 22. **Elisabeth:** Men de er jo afhæng... altså...
 23. **Marie:** De er stadig afhængige af x og y .
 24. **Camilla:** a og b er afhængige af x og y , er de ikke det?... Jeg er helt i tvivl nu... Ej.
 25. **Marie:** Det er de...
 26. **Elisabeth:** x og b afhænger sq da af a og y .
 27. **Camilla:** x og b [griner sammen med Elisabeth og Marie]
 28. **Elisabeth:** x og y afhænger sq da af a og b .
 29. **Marie:** Hvad?
 30. **Elisabeth:** Det gør de da!... Altså...
 31. **Camilla:** [*taler utydeligt*]
 32. **Elisabeth:** Men, se engang, at a og b vil jo al... vil a og b ikke altid være de samme? Vil, vil, æhh..
 33. **Camilla:** Nej, x og y er altid det samme [mener det vist alvorligt, men begynder at grine, da hun ser Elisabeths reaktion]
 34. **Elisabeth:** Ikke x !
 35. **Camilla og/eller Marie:** Jeg ved det ikke. Vi får Leif herind. Jeg vil melde tvivl. Lad være med at sidde og sige sådan.
 36. **Elisabeth:** Ej, det ved vi godt, det har vi lært.

Af pigernes diskussion i denne dialog er det helt tydeligt, at de ikke har forstået, hvad afhængige variable, uafhængige variable og konstanter er. Af Elisabeths tale i replik 16 om, at x og y afhænger af a og b , kunne det godt lyde som om, Elisabeths begrebsbillede omkring funktioner indeholder en forestilling om, at en funktion altid er givet ved en funktionsforskrift. Dette bygger

jeg på elevernes meget fastlåste brug af tegnene a og b som betegnelser for konstanter i en funktionsforskrift, som blev gennemgået ovenfor i afsnit 6.2.2. At en sådan forestilling er en del af nogle af elevernes begrebsbillede vedrørende funktioner, vil jeg vende tilbage til om et øjeblik. Af replik 17-20 i den ovenstående dialog får man lidt den idé, at eleverne mener, at arbejdet med funktioner altid handler om at finde en forskrift. I replik 20 lyder det som om, Elisabeth ikke har forstået, hvad en forskrift egentligt er, for her siger hun, at dens konstanter afhænger af, hvilke punkter man har brugt til at finde dem. Dialogen viser i det hele taget, at de tre piger ikke har nogen særlig dyb forståelse af de begreber, som de arbejder med, men derimod kun er i stand til at manipulere rundt med nogle tegn på en relativt mekanisk måde.

Som nævnt ovenfor indeholder datamaterialet tegn på, at nogle af eleverne besad begrebsbilleder vedrørende funktioner, som indeholdt den forkerte opfattelse, at en funktion altid er givet ved en forskrift. Et første eksempel på dette er følgende uddrag fra ekspertgruppe 3's artikelopgave:

Citat 6.19

Endvidere mente Dirichlet, at funktioner ikke nødvendigvis behøvede, at være givet ved formler eller regneudtryk.

Hvilket bestemt ikke stemmer overens med nutidens syn på funktioner, da vi i dag netop ser en funktion som værende en form for regneudtryk.

Af dette uddrag fremgår det, at holdningen til forholdet mellem funktion og forskrift faktisk er med til at få ekspertgruppen til at mene, at Dirichlets funktionsbegreb og det moderne funktionsbegreb ikke er helt ens. Et andet og meget tydeligt eksempel på, at nogle af eleverne mente, at funktioner altid er givet ved forskrifter, er følgende dialog, som fandt sted under ekspertgruppe 1's arbejde med artikelopgaven. Vi kommer ind et sted i gruppens arbejde, hvor gruppens medlemmer i fællesskab er ved at formulere en tekst om, hvordan Dirichlets funktionsbegreb adskiller sig fra Eulers. Jesper har kort inden dialogens start i en bemærkning til sig selv givet udtryk for, at der er noget ved det, de sidder og arbejder med, som han ikke helt kan få til at passe, men han har endnu ikke indviet sine gruppemedlemmer i, hvad hans problem består i.

Dialog 6.9

-

- | | |
|---|---|
| <p>1. Jesper: [taler langtsomt, for at Sandra kan skrive det, han siger, ned] Dirichlet, æh, sagde, eller mente ikke, at... øh... at... øh... en funktion skulle kunne beskrives ved et matematisk udtryk... hvilket Euler mente... han gjorde som et krav. Men det skal det jo idag. [tænker lidt for sig selv]. To sekunder [rejser sig]. I'll be back.</p> <p>2. Line: [taler utydeligt]</p> <p>3. Lærer: [åbner døren ind til grupperummet samtidig med Jesper]</p> <p>4. Jesper: Som sendt fra himlen</p> <p>5. Lærer: Årh.</p> | <p>6. Marie: Lige knapt.</p> <p>7. Lærer: Skal vi ikke holde det udenfor?</p> <p>8. Jesper: Øh [griner]. Hvad hedder det, at... Vi er enige om, Euler han sagde, at hans funktioner de skulle beskrives ud fra et matematisk begreb, det skulle de kunne, ik?</p> <p>9. Lærer: Ja, en formel nærmest?</p> <p>10. Jesper: Ja.</p> <p>11. Lærer: Ja.</p> <p>12. Jesper: Eller et regneudtryk, ik?</p> <p>13. Lærer: Ja, et regneudtryk.</p> |
|---|---|

14. **Jesper:** Og det sagde Dirichlet, ikke var nødvendigt?
15. **Lærer:** Ja
16. **Jesper:** Men nu om dage så skal vi jo... kunne beskrive en funktion ved et matematisk udtryk.
17. **Lærer:** [ryster på hovedet]
18. **Jesper:** Skal vi ikke?
19. **Lærer:** Ikke nødvendigvis, nej.
20. **Jesper:** Nå det troede jeg bare vi skulle, fordi at... nå... nå...
21. **Line:** Det gjorde vi med Britt¹, gjorde vi ikke? Eller hva?
22. **Jesper:** Nåmen det er bare fordi, at...
23. **Lærer:** Jo, men dem, I har haft...
24. **Jesper:** [taler mumlende] Det har vi altid...
25. **Lærer:** ...det har været nogen, der kan beskrives med et regneudtryk.
26. **Line:** Ja ja
27. **Lærer:** I har haft lineære funktioner, og I har haft...
28. **Jesper:** Eksponentielle
29. **Lærer:** ...eksponentielle...
30. **Line:** Men...
31. **Lærer:** ...og potensfunktioner, og så har vi også lige set lidt på andengradspolynomier, og det er altså nogle, der kan beskrives med regneforskrift. Men det er ikke nødvendigt i den moderne begreb.
32. **Line:** Og det synes Dirichlet heller ikke
33. **Lærer:** Nej
34. **Line:** Okay, men det synes Euler
35. **Jesper:** Ja
36. **Lærer:** Ja
37. **Line:** Fuldkommen
38. **Lærer:** Fuldkommen [*taler utydeligt*]
39. **Jesper:** At der skal kunne skrives med et regneudtryk.
40. **Line:** For ellers var det ikke en funktion.
41. **Jesper:** Et... Hvad er det, han kalder det, analytisk udtryk?
42. **Lærer:** Ja. Lige præcis.
43. **Line:** Okay
44. **Jesper:** Mange tak

I den ovenstående dialog får arbejdet med at sammenligne de historiske og det moderne funktionsbegreb, som artikelopgaven iscenesætter, Jesper til at reflektere over, hvad han selv forstår ved en funktion. Både Jesper og mange af de andre elever har på dette tidspunkt i forløbet fundet ud af, at det moderne funktionsbegreb og Dirichlets funktionsbegreb faktisk er ens. Derfor undrer det Jesper, at Dirichlet ikke kræver, at en funktion skal være givet ved en funktionsforskrift, da en funktion skal dette ifølge Jespers egen forståelse. Denne forståelse hos Jesper fremgår klart af replik 16-20. Jespers begrebsbillede vedrørende funktionsbegrebet indeholder altså den forkerte opfattelse, at alle funktioner er givet ved en funktionsforskrift. Af Lines henvisning til klassens tidligere arbejde med funktioner i replik 21 får man det indtryk, at Jesper ikke er den eneste elev i ekspertgruppen, hvis begrebsbillede indeholder denne opfattelse. Startende fra replik 23 giver læreren en forklaring på, hvorfor Jesper og nogle af de andre elever har denne opfattelse. Her siger han nemlig, at klassen aldrig er blevet præsenteret for funktioner, som ikke er givet ved en forskrift. Ifølge Tall og Vinner betyder dette faktum omkring de funktioner, som klassen tidligere har mødt, at elevernes misforståede opfattelse af forholdet mellem funktion og forskrift kan ses som en direkte konsekvens af den undervisning, som de har modtaget.

Indtil nu har jeg kun talt om Jespers forståelse af forholdet mellem funktion og forskrift i termer af begrebsbilleder. Faktisk kan denne forståelse også være interessant i forbindelse med

¹ Britt er den matematiklærer, som havde klassen i hele 1. g og starten af 2. g.

metadiskursive regler. Dette vil jeg vende tilbage til i afsnit 6.3.3.

I forbindelse med elevernes begrebsforståelse fremgår det af mit datamateriale, at flere af eleverne havde problemer med rigtigt at få styr på, hvad et funktionsbegreb egentligt er. Dette kommer bl.a. til udtryk i følgende citat fra en af elevernes besvarelse af evalueringsspørgeskemaet. Her giver eleven sit svar på spørgeskemaets andet spørgsmål, der spørger ind til, om eleven føler, at forløbet har lært hende noget om det moderne funktionsbegreb (se bilag F):

Citat 6.20

Jeg syntes ikke rigtigt at jeg har lært sådan fuldt ud om hvordan et funktions begreb ser ud, men det med Historien bag det var meget spændende.

Talen om hvordan et funktionsbegreb ser ud, tyder for mig at se på, at eleven ikke rigtigt har forstået, hvad et funktionsbegreb egentligt er. Det er meget muligt, at dette skyldes, at hun ikke er i stand til at tænke på funktioner på et i Anna Sfards terminologi så strukturelt niveau, som dette overordnede begreb tilhører (se afsnit 2.2). I mit datamateriale er der i det hele taget mange større og mindre tegn på, at et af de grundlæggende problemer hos eleverne var, at de havde meget svært ved at tænke på funktioner på en strukturel måde. Dette kom bl.a. til udtryk ved, at de havde meget svært ved at forstå Dirichlets meget abstrakte funktionsdefinition og ved at forstå begreberne definitions­mængde og værdimængde i en generel sammenhæng. De kunne til nød forstå, hvad definitions­mængden for en konkret funktion var, men de var ikke i stand til at løfte deres forståelse af dette begreb op på et mere generelt niveau.

Elevernes problemer med at tænke på funktioner på en strukturel måde tyder på, at deres forståelse af funktionsbegrebet endnu ikke er fuldt udviklet. Ifølge Sfards model over et individs dannelse af matematiske begreber er et begreb som tidligere nævnt først fuldt ud forstået, når individet først har opnået en operationel og derefter en strukturel forståelse af det. Af datamaterialet fremgår det flere steder ret tydeligt, at eleverne ikke havde opnået en strukturel forståelse af funktionsbegrebet, men udelukkende besad en operationel forståelse af det. Et eksempel på dette er følgende uddrag af basisgruppe 4's basisgruppeaflevering:

Citat 6.21

En funktion går ud på at finde ud af hvilke sammenhørende værdier der tilfredsstiller x og y - dvs. det handler altså ikke bare at finde x som i almindelige ligninger.

Talen om at en funktion går ud på noget, er for mig at se et tegn på, at eleverne opfatter funktioner som processer og ikke som objekter. Dette betyder, at eleverne har en operationel forståelse af funktioner. Elevernes operationelle forståelse af funktioner fremgår også af deres besvarelser af evalueringsspørgeskemaet. Et eksempel på dette er følgende citat, hvor en af eleverne giver sit svar på spørgeskemaets tredje spørgsmål om, hvad en funktion er idag (se bilag F):

Citat 6.22

En funktion er en regnemåde, der er variable og konstante. y afhænger af a , b og x . (a og b er konstante og x og y er variable.)

Ordet »regnemåde« afslører for mig at se sandsynligvis en procesorienteret forståelse af funktioner, hvilket i Sfards terminologi er ensbetydende med en operationel forståelse. I forhold til de tre faser i Sfards model for et individs begrebsdannelse vil jeg mene, at det ud fra mit datamateriale

ser ud til, at eleverne er i kondenseringsfasen, da de er begyndt at bruge betegnelsen »funktion«, men stadig ikke forstår denne betegnelse som dækkende over et fuldstændigt selvstændigt objekt.

Selvom det af analysen indtil videre har fremgået, at der var en masse forståelse omkring det behandlede matematiske stof, som eleverne ikke besad, så indeholder datamaterialet også indikationer på, at eleverne trods alt besad en begyndende forståelse af det moderne funktionsbegreb. Dette fremgår eksempelvis af følgende to citater, som kommer fra hhv. basisgruppe 1's basisgruppeaflevering (citater 6.23) og basisgruppe 4's basisgruppeaflevering (citater 6.24):

Citat 6.23

Til at starte med vil vi dog prøve at definere hvad gruppen selv mener en funktion er. [...] En funktion er en sammenhæng mellem variable, hvor af y og x som regel defineres som de variable.

Citat 6.24

Forholdet mellem en funktion og en graf er, at en graf er et visuelt billede af en funktion. En funktion er sammenhængen mellem x og y , som bla. kan blive vist gennem en graf, ligesom den kan vises i form af en tabel og en forskrift.

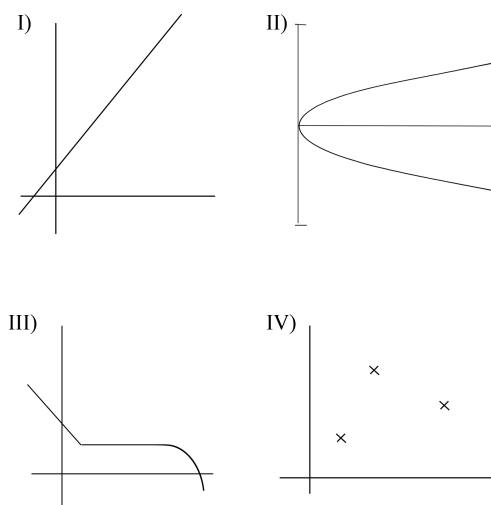
If disse to citater udviser eleverne i de to basisgrupper en forståelse af, at en funktion er en sammenhæng mellem variable. Som det fremgår af nedenstående dialog havde eleven Martin faktisk en forståelse af det moderne funktionsbegreb, som i nogle situationer satte ham i stand til at benytte dette begreb til at afgøre, om en given matematisk struktur er en funktion eller ej. Dialogen foregik under gruppearbejdet i basisgruppe 4. Vi kommer ind i dette arbejde på et sted, hvor Martin spørger læreren om hjælp i forbindelse med besvarelsen af gruppens tredje underspørgsmål, der handler om, hvilke af fire præsenterede billeder, der idag anses for at være grafen for en funktion (se bilag B). Disse fire billeder kan ses på figur 6.1.

Dialog 6.10

-

- | | |
|--|--|
| <p>1. Martin: Fordi i opgave tre, ik? Så står der »På side 10 er der fire billeder. Hvilke af disse billeder er grafer på funktioner? Begrund jeres svar.« Og det er så denne her, ik? [slår op på side 10 i kompendiet]. Jeg ser kun denne her som en funktion [peger på et af de fire billeder - hvilket ved jeg ikke].</p> | <p>3. Martin: Og så, måske også [peger på et af de andre billeder], nej... Ik - Denne her ser jeg i hvert fald ikke som en [peger på billede II]...</p> |
| <p>2. Lærer: Okay...</p> | <p>4. Lærer: Nej, hvorfor er den ikke?</p> |
| | <p>5. Martin: Fordi, at der, æhm, der kan ikke være to y'er på, øh, på, på en x.</p> |
| | <p>6. Lærer: Det er rigtigt. Så den der duer ikke.</p> |

I denne dialog bruger Martin altså den moderne funktionsdefinition til at afvise, at et bestemt billede er grafen for en funktion. I den samtale mellem læreren og Martin, som foregik umiddelbart efter dialogen, formåede Martin dog ikke af sig selv at bruge definitionen til at overbevise sig om, at de tre resterende billeder er grafer for funktioner. Det måtte læreren derimod hjælpe ham med at indse. Alligevel ser jeg ovenstående dialog sammen med citater 6.23 og 6.24 som tegn på, at eleverne besad en begyndende forståelse af det moderne funktionsbegreb. Det skal dog slås helt fast, at elevernes forståelse af funktionsbegrebet på trods af disse lyspunkter i datamaterialet var meget, meget usikker. At i hvert fald en af eleverne var opmærksom på dette,



Figur 6.1 Denne figur viser de figurer, som Martin taler om i dialog 6.10.

fremgår af besvarelsene af evalueringsspørgeskemaet. I forbindelse med spørgeskemaets fjerde spørgsmål, der lyder »Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktioner har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?«, gav denne elev det nedenstående svar. Jeg er ikke sikker på, hvad hun helt præcis refererer til med vendingen »de to ting« i starten af citatet, men jeg er forholdsvis sikker på, at det drejer sig om nogle af de behandlede funktionsbegreber.:

Citat 6.25

De to ting sammen har været forvirrende, det handlede for mig, meget om at holde tungen lige i munden. Jeg tror personligt det havde været federe hvis vi havde vidst det allerede inden - altså hvad en funktion er. (på en ordentlig måde)

Eleven giver altså her udtryk for, at hun ikke mener, at klassen før forløbets start havde en egentlig forestilling om, hvad en funktion er.

Da min analyse indtil nu altså har vist, at eleverne bestemt ikke besad en fuldstændig forståelse af funktionsbegrebet, er det interessant at spørge om, hvorvidt undervisningsforløbet hjalp til at få rettet op på elevernes forståelsesproblemer. I evalueringsspørgeskemaet var formålet med det tredje spørgsmål netop at få indblik i, om eleverne efter deltagelsen i forløbet var i stand til at give en korrekt beskrivelse af, hvad en funktion er idag. Ordlyden af dette spørgsmål var »Forklar kort, hvad vi idag forstår ved en funktion«. Af de femten elever var der kun tre, der gav et svar på dette spørgsmål, som med rimelighed kan karakteriseres som korrekt. Af de resterende tolv var der en enkelt, der simpelthen havde misforstået spørgsmålet. Tre andre gav et svar på spørgsmålet, som var for vagt til kunne tælle som et korrekt svar. Et af disse svar er:

Citat 6.26

en funktion har noget med de variable at gøre.

Fire andre af de ikke-korrekte besvarelser på spørgsmålet gav en beskrivelse af funktionsbegrebet, der mere eller mindre tydeligt lænede sig op ad Eulers funktionsbegreb. Disse fire besvarelser overraskede mig lidt, da flere af klassens elever under gennemførelsen af forløbet gav udtryk for, at de havde forstået, at Eulers og Dirichlets funktionsbegreber ikke var ens, og at det er Dirichlets begreb, som vi bruger idag. Faktisk observerede jeg ikke en eneste gang under gennemførelsen af forløbet, at en elev enten mundtligt eller i de skriftlige afleveringer gav udtryk for, at vedkommende mente, at det er Eulers funktionsbegreb, som vi bruger idag. Alligevel er der altså fire elever, der giver udtryk for dette i deres besvarelse af evalueringsspørgeskemaet. Et eksempel på denne type besvarelser er følgende:

Citat 6.27

Vi forstår at en funktion idag kan bruges til grafer, tabeller osv.:. og at vi idag bruger Eulers funktionsbegreb

I de sidste fire ikke-korrekte besvarelser af det tredje spørgsmål havde eleverne valgt slet ikke at give noget svar på spørgsmålet. Af de tre korrekte besvarelser beskriver de to en funktion på en lidt utraditionel eller i hvert fald upræcis måde, som vidner om, at de formelle definitioner ikke sidder helt fast hos eleverne - eller i hvert fald er det ikke disse definitioner, som falder eleverne ind at præsentere, når de bliver spurgt om, hvad vi forstår ved en funktion idag. Disse to svar lyder som følger:

Citat 6.28

At man definerer en funktion som et problem som har et svar (y) der kan påvirkes af forskellige variable (f.eks a , b). Ofte taler man om den afhængige variabel (y) og den uafhængige (x).²

Citat 6.29

Der kan for hvert x kun være et y . men der må gerne være flere x 'er pr. y . Desuden må funktioner gerne være diskontinuerte (jvf. vores fortolkning af begrebet) x er en uafhængig variabel y er en afhængig. A og B er konstanter

Ud fra elevernes låste sprogbrug, som er beskrevet i afsnit 6.2.2, kan man slutte, at talen om a og b/A og B i disse to besvarelser refererer til konstanter i forskriften for en funktion. Selvom det de to besvarelser siger om funktioner, sådan set er korrekt, er de altså meget knyttet til konkrete repræsentationer af funktioner, hvorfor de ikke er så abstrakte og generelle, som de kunne være. Den eneste af de tre korrekte besvarelser, der ikke er knyttet til funktionsforskrifter, men derimod er løftet op på et mere generelt og strukturelt plan, lyder som følger:

Citat 6.30

En funktion kan være i form af f.eks. grafer og ligninger. En funktion er en sammenhæng mellem variable, hvor y er afhængig af x , altså er y afhængig, mens x er uafhængig.

Denne besvarelse er den eneste af de femten afgivne, som nævner noget om sammenhænge mellem variable.

Alt i alt giver besvarelserne af evalueringsspørgeskemaet - og for den sags skyld også resten af mit datamateriale - det indtryk, at mit undervisningsforløb ikke formåede at rette op på problemerne med elevernes begrebsforståelse omkring funktionsbegrebet. Derimod fremgår det

² I sin besvarelse af evalueringsspørgeskemaet gav eleven egentligt dette svar til de andet spørgsmål og ikke det tredje (se bilag F). Svaret til det tredje spørgsmål lød dog »Se ovenfor (det var kort :P).«.

af min analyse, at det formåede at få disse problemer frem i lyset. Et tydeligt eksempel på dette er dialog 6.9 på side 57, hvor arbejdet med de forskellige funktionsbegreber fik Jesper til at undre sig over forholdet mellem funktion og forskrift. Af denne dialog fremgår det også, at nogle af de problemer, som mit forløb afslørede, nok er blevet skjult eller måske ligefrem forårsaget af den undervisning, som eleverne før har modtaget. I denne dialog er det i hvert fald tydeligt, at Jespers idé om, at en funktion altid er givet ved en forskrift, sandsynligvis skyldes, at de funktioner som han kender til, netop er givet ved forskrifter. Dette betyder, at min analyse indikerer, at matematikhistorie i hvert fald kan bruges til at diagnosticere problemer med elevernes matematikforståelse, som den almindelige undervisning ikke nødvendigvis fanger.

6.3 Metadiskursive regler

Hvor analysen i det forrige afsnit vedrørte elevernes evner til at håndtere konkrete matematiske udfordringer, så er fokus i dette afsnit på elevernes mere generelle forestillinger om matematik. I Sfards terminologi kan man sige, at mens der i forrige afsnit var fokus på elevernes formåen på objektniveauet af matematikken, så er fokus i dette afsnit på elevernes metadiskursive regler. Som nævnt i afsnit 5.3 har jeg i designet af undervisningsforløbet fokuseret på at sætte scenen for, at eleverne skulle komme til at arbejde med og tænke over de to matematikhistoriske metadiskursive regler, som idag kaldes den variables generalitet og analysens generelle gyldighed, og som var alment accepterede normer i det matematiske samfund på Eulers tid. Den variables generalitet var som nævnt et princip om, at en variabel altid kan antage alle tænkelige værdier. Idéen med at fokusere på denne metadiskursive regel var, at eleverne skulle indse, at den strider mod det faktum, at det idag er helt acceptabelt at indskrænke en funktions definitionsområde til en begrænset mængde, hvis dette er meningsfuldt i den konkrete situation. Normen om analysens generelle gyldighed gik som nævnt ud på, at analysens resultater var generelt gyldige, hvorfor noget der gjaldt i et specialtilfælde, nødvendigvis måtte gælde generelt. Tanken med at inddrage denne matematikhistoriske metadiskursive regel i undervisningsforløbet var, at eleverne skulle indse, at vi idag ikke længere følger den, og at de som en konsekvens af denne indsigt skulle opnå en begyndende forståelse af, at beviser ikke er ligegyldige besværligheder, men derimod nødvendige foranstaltninger, hvis vi skal kunne være sikre på, at det vi gør, er »lovligt« i en matematisk sammenhæng.

6.3.1 Den variables generalitet

Af mine observationer fra gennemførelsen af undervisningsforløbet fremgår det, at arbejdet med forløbet fik mindst en af eleverne til at reflektere over den variables generalitet. Under ekspertgruppearbejdet kom det flere gange til udtryk, at Jesper ikke kunne forstå, hvordan Euler håndterede denne regel i arbejdet med sine diskontinuerte funktioner. Jespers problem bestod i, at Eulers idé om at en diskontinueret funktion kunne beskrives af forskellige analytiske udtryk i forskellige intervaller, tilsyneladende stred imod den variables generalitets krav om, at et analytisk udtryk altid var defineret for alle værdier. Nedenstående dialog er et eksempel på en situation, hvor Jespers undren over dette kommer klart til udtryk. Den stammer fra en samtale mellem læreren og Jesper om, hvad Euler forstod ved en funktion:

Dialog 6.11

-

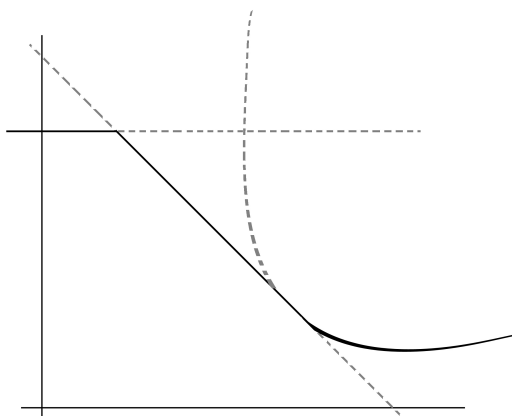
- 1. Jesper:** Men jeg tænker - Hvordan ville han kunne lave en knipset streng? Hvis hans - hvis han lavede no - *hvis han udregnede en et begreb* - hvis han udregnede først for den ene streg her og så for den anden streg bagefter [peger på et billede af en graf med form som en knipset streng i en af basisafleveringerne]
- 2. Lærer:** Mmm
- 3. Jesper:** Ville de så ikke krydse over hinanden og så bare fortsætte videre lige ud?
- 4. Lærer:** Jo, det er jo det der er... Det er et af problemerne formodenligt, ik? Ja. At det, det der, at få lavet det der knæk.
- 5. Jesper:** Mmmm
- 6. Lærer:** Ja.
- 7. Jesper:** Men, men det var det han, han udregnede en formel for den ene streg og så bagefter den anden streg.
- 8. Lærer:** Ja
- 9. Jesper:** Og så ville de jo ramme hinanden.
- 10. Lærer:** Ja
- 11. Jesper:** Men ville de fortsætte stregerne, så de faktisk bare lavede et kryds i stedet?
- 12. Lærer:** Jo det s - det er jo rigtigt, det har du jo på en måde s, æh, ret i, men det, det, det...
- 13. Jesper:** Det ser han bort fra
- 14. Lærer:** Det ser han på en eller anden måde bort fra. Ja, det gør han faktisk.
- 15. Line:** Fordi det ikke passer med [*taler utydeligt*]

Selvom Jesper i den ovenstående dialog kommer frem til, at Euler må se lidt bort fra den variables generalitet i forbindelse med sine diskontinuerte funktioner, så fremgik det af den anden klassediskussion, der fandt sted to dage efter den ovenstående dialog, at denne forklaring alligevel ikke helt var nok til at få Jesper til at stoppe med at undre sig. Dette ses tydeligt af følgende dialog fra klassediskussionen, hvor Jesper på sin ekspertgruppes vegne præsenterer deres diskussionsoplæg:

Dialog 6.12

-

- 1. Jesper:** Nå, okay. Æhm, vores, æh, diskussionsemne det skulle være Eulers opfattelse af de diskontinuerte funktioner. Øhm, og bare lige hurtigt, hvis [tegner koordinatsystemet på figur 6.2 på tavlen] vi havde det her, æhm, så - En, øh, Eulers diskontinuert funktion kunne eksempelvis se sådan her ud [tegner den solide graf på figur 6.2 på tavlen], øhm. Og sådan mente han, at diskontinuerte funktioner var. Men på den måde, han regnede dem ud, så i princippet vil de egentligt fortsætte sådan her [tegner de stiplede linjer på figur 6.2 på tavlen]. Fordi han regnede dem ud på den måde, som han regnede dem ud. Æhm, hvilket egentligt ser ret, æhm, rodet ud og egentligt et eller andet sted ikke giver mening. Så vores spørgsmål, æhm, ud som der sku, gerne skulle skaj, skabe diskussion, æh, er, hvorvidt er *det* her noget, som man kunne bruge, og hvorfor tror I, at, æh, Euler godkendte det her og antog at der ikke var nogen problemer med det?
- 2. Mie:** Hvad var spørgsmålet?
- 3. Jesper:** Wøh, hvorfor tror I, at Euler ikke syntes, der var nogen problemer med det?



Figur 6.2 Denne figur viser en rekonstruktion af den tegning, som Jesper tegnede for at forklare klassen, hvad hans undren omkring Eulers diskontinuerte funktioner gik ud på.

Altså vi har jo ikke noget svar på det, men... Hvorfor tror I, at Euler han syntes, at det der det var noget, man kunne bruge, æh, på trods af det så sådan ud?

Og det egentlig et eller andet sted ikke hang sammen som en fuldt ud funktion....

Som det fremgår af de to ovenstående dialoger fik Eulers brug af den variables generalitet altså Jesper til at undre sig. I mit datamateriale er der dog ikke noget, der tyder på, at denne undren resulterede i, at Jesper opnåede den erkendelse omkring definitionsmængdens moderne rolle, som var min oprindelige hensigt. Tværtimod indeholder datamateriale tegn på, at Jespers selv fulgte en version af princippet om den variables generalitet. Et godt eksempel på dette er følgende dialog, der fandt sted under gruppearbejdet i ekspertgruppe 1 på et tidspunkt, hvor gruppen lige var gået i gang med at snakke om artikelopgavens første problemstilling (se bilag D). Umiddelbart før dialogens start havde Jesper læst formuleringen af denne problemstilling højt.

Dialog 6.13

-

1. **Jesper:** Altså det jeg er nået videre til, ud til, indtil videre, ik?
2. **Marie:** Mmm
3. **Jesper:** Det var, idag snakker vi jo om, at en f - at y er en uafhængig - eller er en afhængig ve , øh, variabel. Dvs. den afhænger af nogen andre. Hvor x er den uafhængige variabel, a og b er konstante.
4. **Marie, Line eller Sandra:** Mmm
5. **Jesper:** ... og derfor urokkelige i en funktion, ik? [læser op fra basisgruppe 1's aflevering, som han har siddet og læst i, før de begyndte at tale sammen] »Og Euler definerede i sin tid en konstant størrelse som værende en størrelse der havde det samme værdi uanset hvad«. Dvs. hans

konstanter, altså a og b , må have været ligesom vores nu om dage. Ifølge det her i hvert fald. Øh [læser igen op fra afleveringen] »og denne konstante størrelse blev som regel symboliseret ved nogle af de første bogstaver i alfabetet, f.eks. a , b , c osv. Hvorimod han definerede en variable som værende en størrelse som kunne have en hvilken som helst værdi. En værdi hvor altså mængden var ligegyldig«. Og det er

jo så lidt hvordan... altså... Som jeg ser det, så er det delvist ligesom idag.

6. Sandra: *Det er det også*

7. Jesper: Fordi at, øhm, y afhænger jo af noget.

8. Marie, Line elle Sandra: Mmm

9. Jesper: Så den kan jo ikke være lige meget. Men den kan jo godt ændres. x kan i princippet være lige meget. Hvad den er.

Af denne dialog fremgår det, at Jesper mener, at princippet om den variables generalitet går igen i det moderne funktionsbegreb i forbindelse med den uafhængige variabel. Han er altså ikke opmærksom på, at det moderne funktionsbegreb tillader, at man indskrænker definitionsmængden for en funktion. Dette tyder på, at Jespers egne metadiskursive regler vedrørende de mulige værdier for den variable i en funktion nok mere ligner Eulers end de alment accepterede i det nutidige matematiske samfund. Det bør i den forbindelse nævnes, at dialog 6.13 fandt sted på et tidligere tidspunkt i ekspertgruppernes arbejde end både dialog 6.11 og dialog 6.12. Datamaterialet indeholder dog ingen tegn på, at Jespers undren over Eulers ageren i forhold til den variables generalitet fik ham til at modificere sine egne metadiskursive regler omkring variables mulige værdier. I forbindelse med Jespers undren skal det også siges, at Eulers ageren i forhold til den variables generalitet og de diskontinuerte funktioner faktisk ikke rigtigt er konsistent. Dette betyder, at selvom Jespers undren afslører, at dele af hans metadiskursive regler ikke stemmer overens med de alment accepterede idag, så afslører den også, at han har et stort nok matematisk overblik til at få øje på en indre selvmodsigelse i Eulers håndtering af sit funktionsbegreb. I forbindelse med Jespers undren over Euler og den variables generalitet skal det som en sidste ting siges, at Jesper aldrig lærte, at det princip som han talte om, var den variables generalitet. I stedet talte han om det ved at sige, at en funktion var kontinuerlig. Dette sproglige problem ændrer dog ikke ved, at Jesper kom ud i nogle gode overvejelser vedrørende den variables generalitet i løbet af arbejdet med forløbet.

Selvom Jesper nok var den eneste af eleverne, der så eksplicit som det skete i dialog 6.13, gav udtryk for, at hans begrepsbillede vedrørende funktioner indeholder en version af den variables generalitet, så er der træk i datamaterialet, der kan opfattes som indikationer på, at nogle af de andre elever også fulgte en sådan regel. Det tydeligste tegn på dette var, at eleverne havde meget svært ved at forstå, hvorfor definitionsmængden og værdimængden ikke er ligegyldige begreber. Dette kom især til udtryk under basisgruppe 4's gruppearbejde. Eleverne i denne gruppe kunne med lærerens hjælp godt forstå, at definitionsmængden for funktionen $y = \sqrt{x}$ ikke kunne være alle tal, da kvadratroden af negative tal ikke giver mening indenfor deres matematiske verden, eftersom de ikke kender til komplekse tal. De havde dog væsentligt større besvær med at forstå, at man godt kan arbejde med en definitionsmængde, der er begrænset uden så at sige at være tvunget til dette af matematiske årsager. Læreren forsøgte ellers at få gruppen til at forstå dette. Dette fremgår af nedenstående dialog, som fandt sted under det selvstændige gruppearbejde i basisgruppen. Læreren er her på eget initiativ kommet ind til gruppen. Camillas spørgsmål i replik 1 er ikke henvendt til læreren, men derimod til resten af gruppen. Faktisk er først ved Elisabeths udtalelse i replik 9, at eleverne direkte henvender sig til læreren:

Dialog 6.14

-

1. **Camilla:** Jeg vil gerne spørge... hvorfor det er nyttigt at kende definitions­mængde og værdimængden for en funktion. Jeg vil gerne lige starte en diskussion [fniser]
2. **Elisabeth:** Men hva, hvad står der? [kigger i kompendiet]
3. **Camilla:** Men... at man skal jo, man kan jo sådan at man bruger *eller laver en graf*
4. **Elisabeth:** [læser op fra kompendiet] »Hvorfor er [*taler utydeligt*] når man snakker om funktioner«
5. **Marie:** [i munden på Elisabeth] Men det er vigtigt for...
6. **Camilla:** [henvendt til Elisabeth] Det er ikke den, det er den der [peger ned i kompendiet]
7. **Elisabeth:** [læser op fra kompendiet] »Kan I komme på eksempler, hvor det er nyttigt at kende definitions­mængden og værdimængden?«
8. **Marie:** Jamen hvis du ikke har definitions­mængden, og du ikke har værdimængden, så er det jo svært [*taler utydeligt*]
9. **Elisabeth:** Men det er jo det samme som x 'erne og y 'erne. Og dem skal du jo...
10. **Lærer:** Ja
11. **Elisabeth:** ... foreksempel bruge til at finde a og b ... Eller hva'. Er det [*taler utydeligt*]
12. **Lærer:** Det kunne jo foreksempel være det, ja. Ik?
13. **Camilla eller Marie:** Okay [*taler utydeligt*]
14. **Lærer:** Ja
15. **Camilla:** Så vi er afhængige af...
16. **Lærer:** Altså hvi - Det er jo klart, at I, I har haft nogen modeller.
17. **Marie, Camilla eller Elisabeth:** Mmmm
18. **Lærer:** Og, og der kunne man jo sige, at de der definitions­mængde og værdimængde, det har jo noget at gøre med gyldigheds­området for modellerne, ik? Altså hvis man foreksempel har, at antallet af indbyggere i en eller anden by afhænger, øh, eksponentielt, vokser eksponentielt. Det kunne være, øh hvad hedder det, Mexico City, de vokser eksponentielt. Så kunne definitions­mængden, den kunne jo sige noget om, jamen i hvad periode. Det er jo de x 'er, de årstal om man så må sige...
19. **Marie, Camilla eller Elisabeth:** Mmm
20. **Lærer:** ... vi kan sætte ind, ik? Det har formentligt ikke altid gjaldt. Ja for - ja - Mexico City har ikke været der altid, så det, der er i hvert fald en eller anden startværdi i definitions­mængden, ik? Så det handler om, at, og ku beskrive hvad h, hvad snakker vi egentligt om i det område, hvor det gælder. Det kunne man sige, det var i hvert fald et meget godt argument.

I denne dialog forsøger læreren helt klart med udgangspunkt i konkrete eksempler og stof, som eleverne kender, at få dem til at forstå, hvorfor det i nogle sammenhænge er meningsfuldt at inskrænke definitions­mængden. At eleverne på trods af hans anstrengelser ikke forstod dette, fremgår af deres basisgruppeaflevering. Her skriver de nemlig følgende:

Citat 6.31

Begreberne definitions­mængde og værdimængde er ikke ligegyldige begreber når man snakker om funktioner, fordi det er grundlæggende at man skal kende x -værdierne (definitions­mængden), for at finde y -værdierne (værdimængden), som udgør en funktion. Dette er bare begreber man bruger så det bliver nemmere at adskille de forskellige værdier.

Det kunne f.eks. være nyttigt at bruge disse begreber hvis man skulle lave en graf over hvordan befolkningstallet er steget gennem tiden i Danmark, så er det vigtigt at kende x (definitionsområdet), ellers kan man ikke finde ud af hvad y (værdimængden) er.

Af dette citat fremgår det, at eleverne ikke har forstået det vigtige ved definitionsområdet og værdimængden. Da de har valgt at præsentere et eksempel, der helt klart er meget inspireret af lærerens konkrete eksempel i dialog 6.14, viser de også, at de ikke har fanget lærerens pointe med dette eksempel.

I forbindelse med den aktuelle analyse vedrørende den variables generalitet har jeg brugt elevernes problemer med definitionsområdet og værdimængden som indikationer på, at Jesper ikke er den eneste elev, der agerer i overensstemmelse med en version af denne metadiskursive regel. Denne foreslåede kopling mellem forståelsesproblemer og metadiskursive regler kan selvfølgelig ikke tælle som andet end en spekulation, da jeg ikke på nogen måde har et datamateriale, der kan bevise den. Jeg mener dog, at denne spekulation i hvert fald er en fornuftig mulig forklaring på elevernes problemer med at forstå definitionsområdet og værdimængden.

6.3.2 Analysens generelle gyldighed

Under gennemførelsen af undervisningsforløbet kom det flere gange til udtryk, at eleverne havde meget svært ved at få styr på, hvad analysens generelle gyldighed gik ud på. Især i de sidste lektioner, hvor jeg varetog lærerens konsulentrolle under elevernes gruppearbejde (se afsnit 5.7), oplevede jeg mange gange, at eleverne fandt denne metadiskursive regel meget svær at forstå og ikke rigtigt kunne gøre rede for dens indhold. Alligevel fremgår det af elevernes afleveringer, at i hvert fald nogle af basisgrupperne og ekspertgrupperne opnåede en forståelse af denne metadiskursive regel. Et eksempel på dette er følgende uddrag af basisgruppe 1's basisgruppeaflevering:

Citat 6.32

Eulers beregninger og konklusion illustrerer hvor meget fortidens matematikere stolede på symboler og på selve analysen.

Dette kaldtes analysens generelle gyldighed, da alle analysens udsagn blev set som værende generelt korrekte og troværdige.

Dette resulterede i, at matematikerne troede, at når de havde vist noget gjaldt i én sammenhæng, så måtte det jo gælde generelt. Derfor er mange af beviserne fra denne tid, blot et resultat af én undersøgelse der så generaliseredes.

[...]

Ordene generelt og generalitet viser, hvordan matematikerne uden tøven troede på deres principper og på at de ud fra ganske få undersøgelser kendte resultaterne for adskillige tal, altså de troede at de vha. disse principper kunne generalisere resultaterne for alle talværdier på baggrund af enkelte undersøgelser.

I forbindelse med det ovenstående citat skal det siges, at jeg ikke er sikker på, at eleverne helt forstår alt, hvad de skriver i dette stykke. Denne usikkerhed skyldes, at nogle af gruppens elever under det selvstændige gruppearbejde gav udtryk for, at de ikke forstod, hvad analysen er for noget. Alligevel tror jeg, at eleverne i hvert fald i det sidste afsnit, hvor de går over til at tale om tal, præsenterer noget, som de rent faktisk forstår. Hvis denne opfattelse er rigtig, så viser eleverne i dette stykke, at de faktisk er i stand til at diskutere matematik på et temmeligt generelt niveau, som det ikke er alle traditionelle matematikopgaver, der tvinger dem op på.

Eleverne i basisgruppe 1 var ikke de eneste, der i deres aflevering gav udtryk for, at de havde forstået, hvad analysens generelle gyldighed gik ud på. Et andet eksempel på, at en gruppe nok havde opnået en sådan forståelse, er følgende uddrag fra ekspertgruppe 4's artikelopgave:

Citat 6.33

Analysens generelle gyldighed går ud på at hvis man har bevist noget får en funktion gælder det samme for alle. Dette er vi heller ikke enige med i dag fordi vi kommer frem til underlige ting. Vores holdning til dette har derfor udviklet sig.

Af dette citat fremgår det, at ekspertgruppen ikke blot har en indsigt i, hvad analysens generelle gyldighed går ud på, men også har forstået, at denne norm ikke længere er fremherskende i det matematiske samfund. Det er derudover værd at bemærke, at elevernes brug af vendingen »underlige ting« er et eksempel på deres til tider meget overfladiske sprogbrug, som nok dækker over, at de ikke rigtigt har forstået det, som de forsøger at tale om.

Som det fremgår af citat 6.32 og 6.33, resulterede arbejdet med analysens generelle gyldighed i, at i hvert fald nogle af eleverne kom til at forstå indholdet af denne metadiskursive regel, og at de derudover kom til at diskutere matematik på et ret generelt niveau. Hvis man sammenligner med mine data omkring til den variables generalitet indeholder mit datamateriale dog ikke rigtigt nogle indikationer på, at arbejdet med analysens generelle gyldighed fik eleverne til at undre sig. De kæmpede med at forstå indholdet af denne norm, men de der forstod den, stoppede ikke op for at reflektere over den. Faktisk er der ikke rigtigt noget i mit datamateriale, der tyder på, at elevernes egne metadiskursive regler omkring bevisers rolle i matematisk arbejde kom frem i lyset i deres arbejde med forløbet. For mig at se er en nærliggende forklaring dette, at eleverne ikke rigtigt besad nogle metadiskursive regler omkring bevisførelsens rolle før forløbets start. Af elevernes samtaler med læreren under forløbet fremgår det, at deres erfaring med bevisførelse var meget begrænset. Dette leder mig til at formode, at den manglende reflektion omkring analysens generelle gyldighed skyldes, at eleverne ikke selv besad nogle metadiskursive regler, som de kunne holde denne historiske regel op imod.

Hvor eleverne tidligere nok ikke havde tænkt så meget over bevisers rolle i matematikken, fik arbejdet med undervisningsforløbet faktisk tvunget dem til at gøre dette. Dette kommer til udtryk i følgende uddrag fra basisgruppe 4's basisgruppeaflevering:

Citat 6.34

Et bevis er en argumentation, der så at sige får en til at acceptere og forstå påstanden. Et bevis er et bevis for at f.eks. Pythagoras sætning er gældende inden for matematikken. Man har altså en påstand som man så versificerer, det kan altså også ske at påstanden bliver falsificeret og bliver hermed ikke noget bevis.

Matematiske beviser er en udledning af en formel, sætning eller et udtryk. Det kan bestå i at vise at et udsagn/udtryk er korrekte ved hjælp af logik og matematik.

[...]

det er dem der sikrer at reglerne og formlerne er rigtige. Dvs. For enhver lineær funktion så skal man kende noget bestemt. I dette tilfælde er det y_1 , x_1 , y_2 og x_2 for at regne beviset. Det er vigtigt at vide hvorfor alle de formler, f.eks. ligningen for eksponentialfunktioner $y = b + a^x$ kan bruges, og kende baggrunden for det så man lettere forstår hvorfor den ser ud som den gør. Det kan være svært at forstå matematikken, hvis man bare får smidt en masse ligninger og påstande i hovedet, uden at forstå hvor de kommer fra og hvordan de virker - altså sammenhængen.

Der er meget i det ovenstående citat, der tyder på, at eleverne i basisgruppe 4 ikke på nogen måde havde en særligt veludviklet forståelse af, hvad et bevis er. F.eks. tyder vendingen »at regne beviset« kraftigt på, at eleverne i forhold til Sfards model for begrebsdannelse har en meget operationel forståelse af, hvad et bevis er. Derudover har jeg en kraftig mistanke om, at det andet afsnit i citatet, der nok er det afsnit, der giver udtryk for den klareste forståelse af matematiske beviser, ikke siger ret meget om elevernes forståelse af beviser, men derimod blot er noget, som eleverne mere eller mindre direkte har kopieret fra Internettet. Denne mistanke bygger jeg på nogle spredte kommentarer, der faldt under gruppens selvstændige arbejde og på, at Wikipedias opslag om matematiske beviser starter med følgende to sætninger:

Et matematisk bevis er en udledning af en formel, sætning eller et udtryk. Men et bevis kan også bestå i at vise, at et udsagn/udtryk er korrekt, ved hjælp af logik og matematik. [Wikipedia, 2011]

Jeg kan selvfølgelig ikke bevise, at basisgruppen har kopieret det ovenstående stykke, men jeg finder i hvert fald sammenfaldet i ordlyd meget slående. På trods af alle forbeholdene omkring citat 6.34 vil jeg mene, at dette citat viser, at eleverne gennem deres deltagelse i forløbet blev tvunget til at tænke over bevisførelse på et strukturelt plan. Derfor er det muligt, at arbejdet med forløbet har initeret, at eleverne begynder at danne sig de metadiskursive regler omkring bevisførelse, som arbejdet med analysens generelle gyldighed tydede på, at de ikke besad. I forbindelse med analysens generelle gyldighed skal det siges, at basisgruppe 4's overvejelser omkring bevisers rolle nok ikke på nogen måde er knyttet til dette princip, da denne gruppe slet ikke arbejdede med dette princip.

6.3.3 Andre metadiskursive regler

I designet af undervisningsforløbet havde jeg som nævnt bevidst forsøgt at iscenesætte, at arbejdet med forløbet ville få eleverne til at diskutere metadiskursive regler omkring de variables mulige værdier og bevisførelsens rolle i arbejdet med funktioner. Gennemførelsen af forløbet bragte dog også nogle andre af elevernes metadiskursive regler frem i lyset. En af disse regler gik ud på, at når man har med en funktion at gøre, så er opgaven at finde funktionsforskriften. At eleven Elisabeth nok fulgte denne regel i sin matematiske ageren, fremgår af replik 9-11 i dialog 6.14 på side 66, hvor hun lader til at opfatte det som en selvfølge, at når man arbejder med funktioner, så skal man finde a og b . Et andet eksempel på at denne regressionsfokuserede funktionsforståelse var fremherskende blandt eleverne, er følgende dialog, der fandt sted under gruppearbejdet i basisgruppe 4. Før dialogen er Elisabeth i forlængelse af dialog 6.8 på side 56 gået for at hente læreren, så han kan hjælpe gruppen med at få styr på, hvad afhængige og uafhængige variable er:

Dialog 6.15

-

- | | |
|--|--|
| <p>1. Elisabeth: [kommer ind i lokalet sammen med læreren] ... hvordan du vil definere en, øh, funktion på nutidig vis ud fra det vi har...</p> <p>2. Lærer: Ja.</p> <p>3. Elisabeth: Ud fra det, der står i dem der, ik?</p> | <p>Og så kom vi op og diskutere om...</p> <p>4. Marie og Camilla: [begynder at grine]</p> <p>5. Camilla: <i>Du må bare</i> undskyldte.</p> <p>6. Elisabeth: ... hvad den afhængige variabel er, og hvad den uafhængige variable er.</p> |
|--|--|

7. **Camilla:** Vi er meget i tvivl, vi kan ikke huske det.
8. **Elisabeth:** Fordi, at hvad hedder det, at x og y ... eller - nej, jeg, nej jeg tør ikke sige noget.
9. **Camilla:** Nej, der er ikke nogen af os, der kan huske, hvad det er, der er hvad. [*taler utydeligt*]
10. **Lærer:** Hvad afhænger af hvad? Hvad har man først, og hvad regner man ud?
11. **Marie:** [i munden på Elisabeth] Vi har først x og y
12. **Elisabeth:** [i munden på Marie] Man regner a og b ud.
13. **Marie:** Ja. For vi - Først har vi x og y , ik?
14. **Elisabeth:** Ja
15. **Marie:** Så - Ud fra de... Ud fra det, så kan vi finde ud af a og b .
16. **Elisabeth eller Camilla:** Ja.
17. **Marie:** Så...
18. **Lærer:** Det er, hvis det er en lineær funktion. Men altså, hvis...
19. **Camilla:** Det kommer vel an på, hvad det er, vel. Eller - Er det ikke det?
20. **Lærer:** Når nu I tænker på - ja, det kommer lidt an på [*taler utydeligt*]...
21. **Camilla:** [griner]
22. **Lærer:** Men hvis I nu tænker på, at hvis vi har en forskrift allerede.
23. **Elisabeth eller Camilla:** Så kender vi a og b . Gør vi ikke?
24. **Lærer:** Så kender I a og b , ja.
25. **Elisabeth, Marie eller Camilla:** Ja
26. **Lærer:** Men... øh hver gang man har et x , så kan man beregne et y .
27. **Camilla eller Marie:** Ja.
28. **Elisabeth:** Og omvendt, ik?
29. **Camilla eller Marie:** Nej fordi...
30. **Lærer:** Det er ikke altid omvendt, det kommer an på funktionen. Der er jo kun - I har jo lige præcis fundet ud af, at til hvert x er der et y , men det omvendte gælder ikke nødvendigvis, at der til hvert y kun er et x , der kan godt være flere.
31. **Martin:** [*taler utydeligt*]
32. **Lærer:** Så det... det vil sige, at det er y 'et, der afhænger af, hvad for et x vi har valgt, ik. Vi vælger et x , og så kan vi regne et y ud. Så det er x , der er den uafhængige og y , der er den afhængige variabel, fordi den afhænger af x .

Af replik 10-16 i denne dialog fremgår det meget tydeligt, at Elisabeth og Marie har en forestilling om, at arbejde med funktioner altid går ud på at finde funktionsforskrifter ud fra nogle kendte punkter. Af lærerens kommentar til denne forestilling i replik 18 kunne det lyde som om, at grunden til at pigerne tænker sådan, er, at de i undervisningen er vant til, at opgaver om funktioner handler om at finde funktionsforskrifter. Hvis dette er tilfældet, er det meget muligt, at pigernes forkerte metadiskursive regel er en direkte konsekvens af den matematikundervisning, som de har modtaget.

Da hele mit projekt handler om potentielle vindinger ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen, er det meget relevant at nævne, at selvom basisgruppe 4's arbejde med sin opgave klart afslørede en af elevernes metadiskursive regler, så arbejdede denne gruppe ikke med matematikhistorie, men derimod med det moderne funktionsbegreb. Dette betyder, at det altså ikke var matematikhistorien, der sørgede for, at jeg i dette tilfælde fik indsigt i elevernes metadiskursive regler. Derimod medvirkede arbejdet med de historiske kilder i høj grad til, at jeg fik indblik i en anden af elevernes metadiskursive regler, der ikke stemte overens med det nutidige matematiske samfunds metadiskurs. Denne regel vedrører elevernes meget lidt veludviklede symbol- og formalismekompetence og deres deraf følgende meget låste tilgang til

brug af symboler og tegn, som blev gennemgået i afsnit 6.2.2. Af dialog 6.5 på side 48 fremgår det, at arbejdet med de historiske kilder afslørede, at flere af eleverne agerede i forhold til en metadiskursiv regel, der siger, at især symbolerne a og b , men også andre symboler, er låst til en bestemt betydning. Symbolerne og den mening som de bruges til at symbolisere, er uløseligt knyttet til hinanden. Denne metadiskursive regel kommer i mit datamateriale oftest til udtryk ved, at elever giver udtryk for, at a og b altid er konstanter i en funktionsforskrift. I forbindelse med denne metadiskursive regel er det min opfattelse, at arbejdet med de historiske tekster nok havde væsentligt nemmere ved at afsløre den, end elevernes normale matematikundervisning ville have det. Dette skyldes, at både læreren og elevernes lærebøger brugte det samme låste symbolsprog, som eleverne selv gjorde. Dette medfører, at det ikke er sikkert, at den normale matematikundervisning ville kaste eleverne ud i en situation, hvor de skulle forholde sig til en brug af symboler, der var anderledes end deres egen - og hvis de ikke blev sat i en sådan situation, er det for mig at se ikke sikkert, at den nu afslørede metadiskursive regel ville komme frem i lyset.

Elevernes metadiskursive regel om forholdet mellem symbol og mening er ikke den eneste, som arbejdet med de matematikhistoriske kilder kastede lys over. I forbindelse med dialog 6.9 på side 57 nævnte jeg, at elevernes forståelse af forholdet mellem funktion og forskrift er af interesse i forhold til metadiskursive regler. Faktisk vil jeg mene, at denne forståelse, som går ud på, at en funktion altid er givet ved en forskrift, kan opfattes som en metadiskursiv regel, som størstedelen af klassens elever agerede i overensstemmelse med. Som det fremgår af dialog 6.9 var arbejdet med de matematikhistoriske kilder en meget direkte årsag til, at denne regel kom frem i lyset, da det var arbejdet med at sammenligne Eulers og Dirichlets opfattelse af funktionsbegrebet, der fik eleverne til at reflektere over deres egen opfattelse. Faktisk er det muligt, at dialog 6.9 viser en kognitiv konflikt hos eleven Jesper, da han her står i en situation, hvor Dirichlets metadiskursive regler ikke stemmer overens med hans egne. Det er for mig at se muligt, at det matematikhistoriske arbejde havde nemmere ved at bringe denne metadiskursive regel frem i lyset end elevernes normale undervisning. Dette skyldes, at denne undervisning som nævnt i forbindelse med dialog 6.9 indtil videre kun havde omfattet funktioner, der rent faktisk er givet ved forskrifter. Derfor havde den ikke bidraget til at sætte eleverne i situationer, hvor de kunne få øjnene op for, at deres metadiskursive regel omkring forholdet mellem funktioner og forskrifter ikke rigtigt holdt.

6.4 Undervisningsmål

Som nævnt i afsnit 5.3 opstillede jeg i forbindelse med designet af undervisningsforløbet otte undervisningsmål, som skulle hjælpe mig til at få indsigt i min problemformulerings tre delspørgsmål, og som ledede designet af strukturen og aktiviteterne i forløbet. I dette afsnit vil jeg se på, i hvilken grad disse otte mål blev indfriet under gennemførelsen af undervisningsforløbet.

Det første undervisningsmål var, at eleverne skulle opnå en forståelse af, hvad den moderne funktionsdefinition indeholder. Af den ovenstående analyse fremgår det, at dette undervisningsmål ikke kan siges at være blevet opfyldt under forløbet. Dette fremgår bl.a. af, at størstedelen af eleverne som nævnt i afsnit 6.2.4 ved forløbets afslutning ikke var i stand til at give en bare tilnærmelsesvis korrekt beskrivelse, hvad en funktion er. I samme afsnit fremgik det også, at mit datamateriale indeholder tegn på, at i hvert fald nogle af eleverne besad en begyndende forståelse af det moderne funktionsbegreb, men der er ikke rigtigt noget, der viser, at nogle af dem besad en egentlig forståelse af det.

Det andet undervisningsmål var, at eleverne skulle komme til at reflektere over, hvad en funktion er for noget. I modsætning til det første undervisningsmål indeholder mit datamateriale klare tegn på, at dette undervisningsmål faktisk blev opfyldt for i hvert fald nogle af eleverne. Et eksempel på dette er eleven Jespers undren over forholdet mellem funktion og forskrift, som blev gennemgået i forbindelse med dialog 6.9 på side 57. I dette eksempel fik arbejdet med de matematikhistoriske tekster Jesper til at reflektere over, hvad en funktion egentligt er. Ud fra mit datamateriale kan man ikke udtale sig om, hvorvidt forløbet fik alle eleverne ud i refleksioner omkring funktionsbegrebet, men det er tydeligt, at det i hvert fald fik nogle af eleverne ud i sådanne refleksioner.

Det tredje undervisningsmål var, at eleverne skulle få udvidet deres opfattelse af, hvad en funktion er. Min oprindelige idé med dette undervisningsmål var, at eleverne skulle begynde at indse, at der er mange flere strukturer, som kan kaldes funktioner, end de eksempler på funktioner, som de tidligere var blevet præsenteret for. Generelt set er det min klare opfattelse, at størstedelen af eleverne ikke fik udvidet deres opfattelse af funktionsbegrebet i nogen væsentlig grad. Dette skyldes især de store forståelsesproblemer, som min analyse har afsløret.

Det fjerde undervisningsmål var, at eleverne skulle opnå en forståelse af, at vores moderne funktionsbegreb er et resultat af en udviklingsproces. Af min analyse vedrørende elevernes overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling i afsnit 6.1 fremgår det, at dette undervisningsmål blev opfyldt under gennemførelsen af forløbet. Ligeledes viser analysen i dette afsnit, at også det femte undervisningsmål om, at eleverne skulle opnå indsigt i de menneskelige aktørers rolle i udviklingen af det moderne funktionsbegreb, blev opfyldt under afviklingen af undervisningsforløbet.

Det sjette undervisningsmål var, at eleverne skulle træne deres evne til at samarbejde og diskutere indbyrdes om matematikholdige emner. Af mit datamateriale fremgår det, at eleverne under forløbet kom til at indgå i temmeligt fornuftige samarbejdssituationer, hvilket for mig at se betyder, at eleverne fik trænet deres evne til at samarbejde. Nogle af disse samarbejdssituationer er i analysen præsenteret som dialog 6.6 på side 50, dialog 6.7 på side 53, dialog 6.8 på side 56 og dialog 6.14 på side 66. Med hensyn til diskussionselementet fremgår det af flere af de præsenterede dialoger, at eleverne kom til at diskutere det matematiske indhold i forløbet under deres gruppearbejde. Nogle eksempler på dette er dialog 6.5 på side 48 og dialog 6.6 på side 50. Dette viser, at forløbet også førte til, at eleverne fik trænet deres evne til at diskutere indbyrdes om matematikholdige emner.

Det syvende undervisningsmål var, at eleverne skulle træne deres evner til at formulere sig på skrift om matematikholdige emner. Af analysen i afsnit 6.2.1 fremgår det, at eleverne bestemt godt kunne blive bedre til at formulere sig, end de viste at være i forløbets to afleveringer. Alligevel må man sige, at det at eleverne i basis- og ekspertgrupperne fik udarbejdet sammenhængende tekster omkring deres forskellige emner, viser, at forløbet fik eleverne til at træne deres evner til at formulere sig på skrift om matematik.

Det ottende og sidste undervisningsmål var, at eleverne skulle træne deres evne til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner. Analysen i afsnit 6.2.3 viser, at eleverne gennem deres deltagelse i forløbet kom til at indgå i selvstændigt arbejde, hvorfor de også fik trænet deres evner indenfor denne form for arbejde.

6.5 Resultaternes gyldighed og relevans

I dette afsluttende afsnit af min analyse vil jeg præsentere nogle refleksioner omkring gyldigheden af resultaterne af analysen samt deres relevans i forhold til min problemformulering. Det første der er at sige om resultaternes gyldighed, er en indvending om, at da datamaterialet stammer fra et forløb, der er gennemført med sytten konkrete elever, så kan man i realiteten ikke på baggrund af dette materiale konkludere noget om andet end netop disse sytten elever. Da store dele af datamaterialet består af videooptagelser af delgrupper af eleverne, kan man faktisk argumentere for, at materialet ikke engang kan bruges til at konkludere noget om alle klassens sytten elever. Hvis man skal kunne bruge mit materiale til at sige noget om andet end de konkrete elever, som jeg arbejdede med, er man altså nødt til at antage, at elevernes opførsel på en eller anden måde kan ses som repræsentativ for elevernes opførsel mere generelt.

Noget der taler for, at eleverne i min undersøgelse muligvis i en eller anden grad kan ses som repræsentative for en større gruppe gymnasieelever, er, at de som nævnt i afsnit 5.2 hverken rent fagligt, i forbindelse med motivation eller i kraft af deres sociale baggrund havde nogen forudsætninger for at deltage i et matematikhistorisk forløb, som lå ud over det sædvanlige. De udgjorde derimod en helt almindelig klasse med matematik på B-niveau, som man ville kunne finde på de fleste gymnasier rundt omkring i landet.

I forbindelse med gyldigheden af mine resultater bør det overvejes, om andre rent faktisk ville komme frem til de samme resultater, hvis de sad med mine data og mine teorier. En ting, der taler for dette, er trianguleringen i mit datamateriale. Mit datamateriale består som nævnt af flere forskellige former for data, og det at flere af tendenserne i mit materiale går igen i mere end en form for data, støtter mine forskellige konklusioner. F.eks. er mine betragtninger omkring elevernes overfladiske og underforståede sprogbrug og deres dertil knyttede mindre udviklede kommunikationskompetence i afsnit 6.2.1 både understøttet af de forskellige afleveringer, af elevernes besvarelser af evalueringsspørgeskemaet og af mine film. Derudover er mine betragtninger omkring elevernes symbol- og formalismekompetence i afsnit 6.2.2 ligeledes understøttet af alle tre former for data. Derudover går elevernes besvær med at tænke strukturelt og med rigtigt at forstå det moderne funktionsbegreb og de begreber, der er knyttet til dette begreb, også igen i alle tre former for data. Det at de forskellige former for data støtter hinanden, er for mig at se et tegn på, at mine konklusioner i hvert fald i en eller anden udstrækning holder.

Selvom der altså er nogle træk ved mit datamateriale, som for mig at se taler for mine konklusioners holdbarhed, så er der også nogle, der lidt sår tvivl omkring denne holdbarhed. Et af disse omhandler elevernes skriftlige afleveringer. Som nævnt i forbindelse med citat 6.32 på side 68 og citat 6.34 på side 69 er der flere forskellige træk i elevernes skriftlige afleveringer, der får mig til at tvivle på, om de altid selv forstår, hvad det er, de skriver. Dette er et problem for mine konklusioner. De steder i mine analyser, hvor jeg har brugt dele af elevernes afleveringer, som jeg har en idé om, at der er forståelsesmæssige problemer med, har jeg håndteret min mistro ved eksplicit at gøre opmærksom på den i analysen. Jeg kan dog ikke afvise, at der er andre dele af afleveringerne, som i virkeligheden ikke afspejler elevernes forståelse, men som jeg bare ikke har fået øje på.

I forbindelse med elevernes afleveringer er det værd at bemærke, at syv ud af de otte afleveringer, som jeg modtog fra eleverne under forløbet, var formuleret som sammenhængende og mere eller mindre flydende tekster. Man kan vælge at se dette som et tegn på, at eleverne formåede at samarbejde om udformningen af afleveringerne. Hvis man et øjeblik skal tage de mere pessimistiske briller på, så er der dog også en mulighed for, at den sammenhængende og flydende

udformning skyldes, at hver aflevering ikke var skrevet af hele den gruppe, som afleverede den, men derimod af en mindre del af gruppen. Hvis dette er rigtigt, betyder det, at den enkelte gruppes aflevering ikke kan bruges til at sige noget om alle gruppemedlemmernes forståelse af stoffet. Ud fra mine data har jeg ikke mulighed for at kontrollere, om afleveringernes sammenhængende form skyldes, at de er skrevet af delgrupper af de større grupper, eller at eleverne har formået at samarbejde om udarbejdelsen af dem.

I afsnit 6.2.3 nævnte jeg, at nogle af eleverne i deres besvarelser af evalueringsspørgeskemaet viste, at de ikke havde den samme forståelse som mig af, hvad selvstændigt arbejde indbefatter. I forbindelse med evalueringsspørgeskemaet kan jeg i det hele taget ikke være sikker på, at eleverne helt har forstået spørgsmålene, sådan som jeg havde tænkt dem. Dette betyder, at der er en lille risiko for, at eleverne reelt har svaret på noget andet, end det jeg spurgte om. For mig at se er der dog ikke noget i elevernes besvarelser af spørgeskemaet, der tyder på, at dette skulle være tilfældet.

Indtil nu har mine refleksioner i dette afsnit kun drejet sig om mine resultaters gyldighed. Selvom jeg kan udpege flere træk i mit datamateriale, der måske kan være med til at så tvivl omkring denne gyldighed, så vil jeg mene, at det at materialet indeholder flere forskellige former for data, der understøtter de samme konklusioner, taler meget for, at mine resultater ikke er helt ugyldige. Dette er set ud fra min undersøgelses synspunkt et meget positivt træk. Jeg mangler dog stadig at overveje, hvor relevante min resultater egentligt er i forbindelse med besvarelsen af min problemformulering. Problemformuleringens tre delspørgsmål spørger ind til elevernes begrebsforståelse, matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik og muligheden for at få dem til at reflektere eksplicit over metadiskursive regler. Som det er fremgået af min analyse, giver mit datamateriale og resultaterne af analysen af dem indsigt i disse forskellige aspekter af elevernes samlede matematikforståelse. Dette tyder på, at mine resultater er relevante for min problemformulering. Problemformuleringens andet og til dels også første delspørgsmål spørger efter en form for progression i elevernes matematikforståelse, da disse spørger efter en udvikling af elevernes matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik og en understøttelse af elevers begrebsdannelse. Under mit arbejde med datamaterialet er jeg nået til den konklusion, at jeg ikke rigtigt kan sige noget om en eventuel progression i elevernes matematikforståelse. Dette skyldes først og fremmest, at undervisningsforløbet var alt for kort til, at sådan en progression kunne stå tydeligt frem. Det jeg har fået ud af at gennemføre undervisningsforløbet, er et øjebliksbillede af elevernes matematiske evner og et indblik i, hvordan de reagerede på den matematikhistoriske udfordring, som jeg stillede dem overfor.

Mit datamateriale kan altså ikke rigtigt bruges til at sige noget om den form for progression, som problemformuleringen spørger ind efter. Til gengæld kan det muligvis bruges til at sige noget om en anden form for progression. Som det fremgår af min analyse af datamaterialet, fik arbejdet med forløbet eleverne til at tænke over matematik på et væsentligt mere strukturelt plan, end de nok var vant til. Dette kan muligvis tages som en indikation på, at elevernes evne til at reflektere over matematik gennemgik en progression under forløbet.

Det er efterhånden slået fast, at omdrejningspunktet for dette projekt har været potentielle vindinger ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen. I problemformuleringen knyttes de nævnte dele af elevernes matematikforståelse da også til brugen af matematikhistorie i undervisningen. I min diskussion i næste kapitel vil jeg diskutere, hvad matematikhistorien egentligt bidrog med i mit undervisningsforløb. I den nærværende refleksion omkring mine resultaters relevans for besvarelsen af min problemformulering finder jeg det dog relevant

at nævne, at nogle af de præsenterede data stammer fra en del af undervisningsforløbet, hvor eleverne slet ikke arbejdede med matematikhistorie. Under den første fase af forløbet arbejdede basisgruppe 4 nemlig udelukkende med det moderne funktionsbegreb, mens det matematikhistoriske arbejde var lagt ud til de andre basisgrupper. Dette betyder, at de data som kommer fra basisgruppe 4's arbejde, ikke rigtigt kan sige så meget om matematikhistoriens bidrag til elevernes læring af matematik. Grunden til at jeg har taget dem med alligevel, er, at de giver et godt indblik i elevernes tanker og formåen indenfor matematik.

7 Diskussion

Diskussionen i dette kapitel er delt i to dele. Den første del handler om, hvad matematikhistorien egentligt bidrog med i mit undervisningsforløb. Da brugen af matematikhistorie i matematikundervisningen er omdrejningspunktet for hele mit speciale, er det yderst relevant at stoppe op og reflektere over, hvad det egentligt var, at dette element i undervisningsforløbet bidrog med. Denne del af diskussionen vil blive præsenteret i afsnit 7.1. Den anden del af diskussionen handler om, hvad jeg ville have gjort anderledes i undervisningsforløbet, hvis jeg havde haft mulighed for at gennemføre det en gang til. Denne del af diskussionen vil blive præsenteret i afsnit 7.2.

7.1 Hvad bidrog matematikhistorien med?

I forbindelse med inddragelsen af matematikhistorie i matematikundervisningen er den holdning udbredt, at matematikhistorie i hvert fald kan fungere som en motivationsfaktor i elevernes arbejde med matematik. Denne opfattelse taler mit datamateriale lidt imod. I hvert fald viser det, at matematikhistorien i mit forløb bestemt ikke fungerede som en motiverende faktor for alle eleverne. Dette kommer bl.a. til udtryk i følgende to korte dialoger, som fandt sted under elevernes selvstændige arbejde i basisgrupperne:

Dialog 7.1

-

1. **Mie:** Helt ærligt, jeg me, jeg mener det helt seriøst, ik? Aldrig oplevet noget værre end historie i matematik. Det har fået mig til at hade matematik [*taler utydeligt*]

Dialog 7.2

-

1. **Martin:** Det er det mest kedeligste matematik, jeg nogensinde har lavet. 4. **Marie:** Lidt tørt.
2. **Marie og Camilla:** [griner] 5. **Martin:** Næh, det er fordi man laver ikke noget.
3. **Camilla:** Det er bare svært, det er nok derfor, det bliver sådan [*taler utydeligt*] 6. **Marie og Camilla:** [*protesterer utydeligt*]

Af disse to dialoger fremgår det, at matematikhistorien ikke umiddelbart virkede motiverende på Mie og Martin. Faktisk lader den til at have den modsatte effekt på Mie, da hun siger, at den har fået hende til at hade matematik. Det er lidt overraskende, at Martin lader til at mene, at han ikke lavede noget i forløbet, for hans basisgruppe var en af dem, der arbejdede hårdest. Denne

holdning kan skyldes, at forløbet ikke indeholdt noget traditionelt matematisk opgaveløsning, hvilket elevernes almindelige matematikundervisning gjorde. Det er nemlig muligt, at Martins opfattelse af at »lave noget« i matematik er knyttet meget tæt sammen med denne type aktiviteter. Denne mulige forklaring er dog en ren spekulation fra min side.

Hvor matematikhistorien i hvert fald ikke for alle eleverne fungerede som en motiverende faktor i deres arbejde med forløbet, så kom den til gengæld til at fungere som et stærkt redskab til at få et indblik i problemerne med elevernes meget snævre symbol- og formalismekompetence. Som nævnt i afsnit 5.3 var det ikke en del af min oprindelige plan at fokusere på denne kompetence. Under gennemførelsen af forløbet viste det sig dog, at arbejdet med de historiske kilder fik elevernes problemer med at omgås symbolsprog meget tydeligt frem i lyset. Kildernes brug af forskellige bogstaver var anderledes end den, eleverne var vant til, hvilket førte til, at eleverne havde meget svært ved at forstå kilderne. Disse forståelsesproblemer afslørede, at eleverne ikke besad en særlig dyb forståelse af de matematiske begreber og objekter, som de forskellige bogstaver repræsenterede, men at de derimod bare havde lært at manipulere rundt med tegnene. Det er mit klare indtryk, at i forhold til at afsløre de nævnte problemer med elevernes symbol- og formalismekompetence opfyldte arbejdet med de matematikhistoriske kilder en funktion, som ikke sådan lige kunne overtages af elevernes almindelige undervisning. Dette skyldes, at både læreren og elevernes lærebøger anvendte præcist de samme symboler til præcist de samme ting, som eleverne selv gjorde. Dette betyder, at der i den almindelige undervisning nok ikke ville opstå situationer, hvor eleverne ville blive tilskyndet til at stoppe op og tænke over deres brug af bogstaver og symboler i matematikken. Dette tvang de matematikhistoriske kilder dem til at gøre. Jeg er ikke sikker på, at matematikhistorie som sådan er et uundværligt redskab, hvis man vil have eleverne til at tænke over den matematiske symbolbrug. En nutidig tekst, der bruger symboler på en anden måde end eleverne selv, ville sansynligvis have kunnet bidrage med det samme omkring elevernes symbol- og formalismekompetence, som de matematikhistoriske kilder bidrog med i mit forløb. Mit datamateriale viser dog, at matematikhistorie er et muligt redskab at bruge, hvis man vil have indblik i elevernes evner indenfor brug af symbolsprog.

Udover at give et indblik i elevernes noget mangelfulde symbol- og formalismekompetence bidrog det matematikhistoriske element i undervisningsforløbet også til, at eleverne kom til at reflektere eksplicit over metadiskursive regler. Et godt eksempel på dette er Jespers undren omkring Eulers ageren i forhold til den variables generalitet, som blev gennemgået i analysen i afsnit 6.3.1. Stillet overfor forskellige matematikhistoriske og nutidige kilder, som fulgte forskellige sæt af metadiskursive regler, kom eleverne i deres forsøg på at få hold på de forskellige kilder til at diskutere og reflektere over matematik på et meget strukturelt og generelt niveau. Dette førte til, at nogle af elevernes egne metadiskursive regler kom frem i lyset, hvilket igen betyder, at matematikhistorien i mit forløb også bidrog til at give indblik i de metadiskursive regler, som styrede elevernes matematiske forståelse og ageren. I forbindelse med elevernes egne metadiskursive regler må det bemærkes, at det selvstændige gruppearbejde hos basisgruppe 4 som nævnt i afsnit 6.3.3 også gav indblik i nogle af elevernes metadiskursive regler, selvom denne gruppe slet ikke arbejdede med matematikhistorie. Dette viser for mig at se, at matematikhistorie ikke er et uundværligt værktøj i forsøget på at få indblik i elevens metadiskursive regler, selvom det bestemt godt kan bruges til dette formål. I forbindelse med de metadiskursive regler skal det derudover siges, at selvom basisgruppe 4's arbejde gav indblik i nogle af elevernes metadiskursive regler, så fik det ikke eleverne til eksplicit at reflektere over metadiskursive regler på samme måde, som det matematikhistoriske arbejde gjorde i andre dele af forløbet. Matematikhistoriske kilder tilbyder en mulighed for at stille eleverne i en situation, hvor de er

nødt til at forholde sig til flere forskellige sæt af metadiskursive regler, hvilket for mig at se kan være svært at opnå uden matematikhistorie, da det matematiske samfund idag mere eller mindre agerer i overensstemmelse med ét sæt metadiskursive regler. Min undersøgelse indikerer derfor, at matematikhistorie er et meget stærkt værktøj, hvis man vil have eleverne til eksplicit at reflektere over metadiskursive regler.

Samlet set kan man sige, at matematikhistorien i mit undervisningsforløb bidrog til at diagnosticere en lang række problemer i elevernes matematikforståelse. Jeg har allerede argumenteret for, at matematikhistorien bidrog til at afsløre problemer i elevernes matematiske kompetencer og i deres metadiskursive regler. I forbindelse med deres begrebsforståelse vedrørende funktionsbegrebet afslørede elevernes arbejde med at sammenligne de forskellige historiske funktionsbegreber forskellige misforståelser i deres eget begrebsbillede vedrørende funktioner. Et godt eksempel er eleven Jespers misforståelse af forholdet mellem funktion og forskrift, som blev gennemgået i forbindelse med dialog 6.9 på side 57. De forståelsesmæssige problemer, som det matematikhistoriske arbejde afslørede, er for en stor dels vedkommende problemer, som er blevet sløret eller måske ligefrem forårsaget af den traditionelle matematikundervisning, som eleverne tidligere har modtaget. Derfor virker matematikhistorien i hvert fald i forhold til den konkrete klasse i min undersøgelse som et stærkt redskab til at få afsløret problemer i elevernes matematikforståelse.

I forbindelse med afsløringen af de forskellige problemer i elevernes matematikforståelse er det nødvendigt at nævne, at nogle af de problemer som jeg fik indsigt i, kom frem under gruppearbejdet i basisgruppe 4 og altså ikke under det matematikhistoriske arbejde. Dette leder mig til at tro, at en del af problemafsløringen ikke kun skyldtes matematikhistorien, men også havde noget med selve designet af undervisningsforløbet at gøre. Udover at eleverne blev kastet ud i en væsentligt mere selvstændig arbejdsform, end de nok var vant til fra deres normale matematikundervisning, befandt det matematiske indhold i forløbet sig nok også på et væsentligt mere strukturelt niveau, end eleverne var vant til. I stedet for at involvere matematisk problemløsning, konkret bevisførelse og konkrete matematiske sætninger tvang forløbet eleverne til at forsøge at agere på et lidt højere strukturelt niveau, hvor det handlede om at få styr på, hvad der grundlæggende forstås ved en funktion. Denne nye indgangsvinkel kan meget vel have været en medvirkende årsag til, at gennemførelsen af undervisningsforløbet gav de indsigter i elevernes matematikforståelse, som den gjorde. Dette betyder dog bestemt ikke, at matematikhistorien ikke også var en vigtig faktor i forhold til at opnå mange af disse indsigter.

I denne del af diskussionen er det efterhånden slået fast, at matematikhistorien nok ikke var et uundværligt redskab i forbindelse med opnåelsen af flere af min indsigter. Dette har heller ikke på noget tidspunkt været en del af min målsætning. Mit projekt har ikke været at finde nogle funktioner i forbindelse med elevers læring af matematik, som kun kunne varetages af matematikhistorie, men derimod nogle funktioner som fornuftigt kunne varetages af matematikhistorie. Jeg har villet undersøge de potentielle vindinger, der kan være ved at inddrage matematikhistorie i matematikundervisningen, men jeg har ikke haft det som et mål, at disse vindinger ikke måtte kunne opnås ved hjælp af andre redskaber end matematikhistorie.

7.2 Til næste gang

På grund af projektets tidsmæssige rammer har jeg kun haft mulighed for at gennemføre forløbet én gang med én klasse. Det betyder, at jeg ikke har haft mulighed for at finpudse forløbet for de svagheder, som gennemførelsen af det afslørede. Dette betyder dog ikke, at jeg ikke har nogle idéer til, hvordan forløbet kunne ændres, således at både eleverne og jeg fik mere ud af det, end

vi gjorde i denne omgang. I denne del af diskussionen vil jeg præsentere disse idéer.

En første ting som kunne have forbedret forløbet både ud fra mit synspunkt og ud fra elevernes, var, at jeg havde haft et bedre forhåndskendskab til eleverne og deres evner indenfor matematik. Det eneste jeg vidste om eleverne før forløbets start, var den smule, som deres lærer havde fortalt mig, og som nævnt i afsnit 5.2 kendte han heller ikke eleverne så godt, da han ikke havde haft dem så længe. I forhold til elevernes udbytte af forløbet ville et forhåndskendskab til deres evner kunne have hjulpet mig til at ramme deres niveau bedre, end jeg egentligt gjorde. Som det bl.a. fremgår af analysen i afsnit 6.2.4 havde eleverne meget svært ved at nå op på det strukturelle niveau, som forløbet lagde op til, at de skulle være på. I det hele taget viser alle mine data, at forløbet var meget svært for eleverne - nok i virkeligheden for svært. Et bedre forhåndskendskab til elevernes matematiske niveau kunne have hjulpet til, at forløbet kunne være tilpasset dette niveau bedre, hvilket nok i sidste ende havde medført, at eleverne havde fået et større udbytte af det, end de faktisk gjorde. I forhold til min undersøgelse ville et større forhåndskendskab til elevernes evner have medført, at jeg havde en form for »før-stadie« at holde mine observationer op imod. Jeg forestiller mig, at forhåndskendskabet til elevernes evner mest realistisk ville kunne opnås ved at få dem til at besvare et spørgeskema eller ved at interviewe nogle af dem. Dette betyder, at billedet af elevernes matematiske før-stadie ikke ville være specielt dybdegående. Jeg forestiller mig ikke, at dette billede ville kunne bidrage væsentligt til at detektere progression hos eleverne, da det ikke ville ændre på, at forløbet nu engang ikke var længere, end det var. Det jeg forestiller mig, at det ville kunne hjælpe mig med, er at opdage, hvis det matematikhistoriske forløb fik nogle af eleverne til at vise nogle helt andre sider af deres matematikforståelse, end de hidtil havde afsløret.

I mit design af undervisningsforløbet havde jeg bevidst valgt ikke at inddrage traditionel tavleundervisning, hvor en lærer docerer foran en klasse. Hvis jeg skulle gennemføre forløbet en gang til, ville jeg ikke holde fast ved dette valg. I stedet ville jeg starte forløbet med noget traditionel tavleundervisning omkring det moderne funktionsbegreb og først derefter sætte gruppearbejdet omkring de forskellige historiske og nutidige funktionsbegreber igang. Formålet med denne indledning på forløbet skulle være, at klassen opnåede et nogenlunde fælles og stabilt udgangspunkt for arbejdet med de forskellige funktionsbegreber. I mit faktiske design af forløbet, hvor indføringen i det moderne funktionsbegreb var lagt ud som en af de fire basisgruppeopgaver, var alle områder af det behandlede emne temmeligt gyngende og usikre for eleverne. Dette påvirkede ikke elevernes udbytte af forløbet i positiv retning. Derfor tror jeg, at det at sørge for at eleverne havde noget sikker viden, som de kunne holde fast i, ville være med til at forbedre forløbet for dem.

I undervisningsforløbet var der ikke inddraget nogen af Eulers eller Dirichlets anvendelser af deres funktionsbegreber. Set i bagklogskabens klare lys var dette nok en fejl. Mine observationer fra forløbet viser, at en stor del af eleverne havde meget svært ved at håndtere de meget abstrakte funktionsdefinitioner, og at de havde det væsentligt nemmere med de konkrete eksempler, som læreren præsenterede dem for i sine forsøg på at hjælpe de forskellige grupper. Hvis forløbet havde inddraget eksempler på anvendelser i forbindelse med Eulers og Dirichlets funktionsbegreber, ville noget af det meget abstrakte ved forløbet være fjernet, da eleverne så havde haft noget mere konkret at hænge deres forståelse op på end selve funktionsdefinitionerne. Dette ville sandsynligvis have bidraget til, at forløbet ville have passet bedre til elevernes matematiske niveau. Derudover ville eksempler på anvendelser af de historiske funktionsbegreber muligvis have muliggjort, at eleverne opnåede en dybere forståelse af de forskellige begreber, end de faktisk gjorde, da sådanne eksempler ofte siger mere end selve definitionerne om, hvordan

funktionsbegrebet egentligt bliver forstået.

I designet af forløbet havde jeg med vilje sørget for, at en af de fire basisgrupperes opgave ikke var ligeså matematisk orienteret som de tre andres. Denne gruppe var basisgruppe 3, der arbejdede med det matematiske samfund omkring den franske revolution (se bilag B). Grunden til, at jeg havde valgt at have en mindre matematisk gruppe, var, at klassens lærer havde gjort mig opmærksom på, at der sad nogle elever i klassen, som matematisk set ikke var særligt stærke. Disse elever ville derfor let kunne blive tabt, hvis man kastede dem ud i et selvstændigt arbejde, der samtidigt var meget matematisk krævende. Min hensyntagen til disse elever fik dog den uheldige konsekvens, at eleverne i basisgruppe 3 ikke rigtigt kom til at diskutere den for forløbet relevante matematik før i ekspertgrupperne. At en af eleverne i basisgruppe 3 nok har set dette som et problem, fremgår af følgende citat fra besvarelsene af evalueringsspørgeskemaet. I dette citat svarer eleven på spørgeskemaets femtende spørgsmål om, hvad han synes, at der burde ændres ved forløbet, hvis det skulle gennemføres en gang til (se bilag F):

Citat 7.1

Sørge for at den historiske gruppe (samfundet) også beskæftiger sig med et funktionsbegreb, da man står helt uforstående over for de andre grupper.

I forbindelse med det ovenstående citat skal det siges, at jeg ikke kan være helt sikker på, at eleven vitterligt var en del af basisgruppe 3, da den aktuelle besvarelse af evalueringsspørgeskemaet var anonym. Ud fra resten af besvarelsen er jeg dog meget sikker på, at eleven har siddet i basisgruppe 3. Hvis denne formodning er rigtig, viser ovenstående citat, at eleven pga. den manglende matematik i basisgruppearbejdet har haft problemer med at følge med i ekspertgruppearbejdet. Denne utilsigtede konsekvens af basisgruppe 3's arbejde betyder, at jeg en anden gang ville sørge for, at alle basisgrupperne i en eller anden udstrækning kom til at arbejde med noget reelt matematisk stof.

Som nævnt i analysen i afsnit 6.2.3 viste eleverne under arbejdet med forløbet, at de i nogle henseender ikke var helt gode til at tage ansvar for deres arbejde. Samtidigt skriver flere elever i deres besvarelser af evalueringsspørgeskemaet, at de gerne ville have haft lov til selv at vælge de grupper, som de skulle arbejde i. Dette har fået mig til at overveje, om eleverne måske havde følt mere ejerskab og dermed også ansvarsfølelse overfor opgaven, hvis de selv havde fået lov til at vælge, hvilken basisgruppe de ville være i. I den konkrete klasse var der en del sociale problemer, som læreren ikke til fulde havde indsigt i, så i den klasse havde det måske været smart, at eleverne selv havde fået lov til at have indflydelse på, hvem de arbejdede sammen med.

8 Konklusion

Efter at have præsenteret min analyse af det indsamlede datamateriale og min diskussion af de opnåede resultater er tiden nu kommet til at give mit svar på min problemformulering. I forbindelse med problemformuleringens første delspørgsmål om hvorvidt matematikhistoriske aktiviteter kan bruges til understøttelse af elevers begrebsforståelse, er min konklusion, at matematikhistoriske aktiviteter i hvert fald kan bidrage til at understøtte elevers begrebsforståelse ved at afsløre nogle grundlæggende problemer i denne forståelse. I det gennemførte undervisningsforløb fik de matematikhistoriske aktiviteter ikke rettet op på problemerne i elevernes begrebsforståelse omkring funktionsbegrebet, men de hjalp til at afdække en række problemer med denne forståelse, hvilket er et første skridt på vejen til at få løst disse problemer.

I forbindelse med problemformuleringens andet delspørgsmål om hvorvidt matematikhistoriske aktiviteter kan bruges til at udvikle elevers matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik er min konklusion, at matematikhistorie i hvert fald kan bruges til at udfordre elevernes matematiske kompetencer. I min undersøgelse har jeg særligt haft fokus på elevernes kommunikationskompetence, symbol- og formalismekompetence og overordnede matematiske kompetence, og som min analyse har vist, førte arbejdet med forløbet til, at alt dette blev udfordret hos eleverne. Derudover viser min undersøgelse også, at matematikhistoriske aktiviteter kan bruges til at få et indblik i elevers matematiske kompetencer og overblik og dømmekraft vedrørende matematik. I mit arbejde har de bidraget til at afsløre problemer og mangler ved disse kompetencer og overblik og dømmekraft. Sådant en afsløring kan ikke i sig selv siges at udvikle elevernes kompetencer og overblik og dømmekraft, men den er et skridt på vejen til at opnå en sådan udvikling.

I forbindelse med problemformuleringens tredje delspørgsmål om hvorvidt matematikhistoriske aktiviteter kan bruges til at bringe metadiskursive regler frem i lyset, således at eleverne kommer til at reflektere over dem, viser min undersøgelse, at matematikhistorie kan bruges til dette. Dette fremgik f.eks. af elevernes arbejde med den variables generalitet, hvor især eleven Jesper kom til at reflektere meget eksplicit over denne matematikhistoriske metadiskursive regel. I elevernes refleksioner kom nogle af deres egne metadiskursive regler også frem i lyset. Dette betyder, at min undersøgelse viser, at matematikhistoriske aktiviteter også kan bruges til at få et indblik i de metadiskursive regler, som styrer elevernes matematiske opførsel og forståelse.

Det overordnede spørgsmål i min problemformulering spørger ind til, på hvilken måde matematikhistoriske aktiviteter kan understøtte elevers læring af matematik. Undersøgelsen i dette projekt viser, at matematikhistoriske aktiviteter i hvert fald er et nyttigt værktøj til afsløring og diagnosticering af problemer og fejl i elevers matematikforståelse. Matematikhistoriske aktiviteter kan bruges til at stille elever overfor nogle matematiske udfordringer, som tvinger dem til at reflektere over matematik på en væsentligt mere strukturel måde, end traditionelle regnearbejder gør. Under gennemførelsen af mit undervisningsforløb var det især de benyttede historiske kilders metadiskursive regler og brug af symbolsprog, som fik eleverne ud i sådanne strukturelle refleksioner. Elevernes refleksioner gav indblik i nogle grundlæggende problemer i deres mate-

matikforståelse, som deres normale undervisning sandsynligvis havde sløret eller måske ligefrem forårsaget. Resultaterne af min undersøgelse tyder derfor på, at matematikhistoriske aktiviteter kan være et meget brugbart redskab, hvis man vil sådanne grundlæggende forståelsesproblemer til livs, for før man kan afhjælpe dem, er man nødt til at få øje på dem.

A Plan over undervisningsforløbet

Nedenstående viser, hvordan de tretten undervisningstimer, som undervisningsforløbet strakte sig over, var fordelt mellem de forskellige aktiviteter, som indgik i forløbet. En grundigere gennemgang af strukturen i forløbet findes i afsnit 5.4.

Første time: Introduktion til formalierne omkring forløbet

Anden time: Selvstændigt arbejde i basisgrupperne

Tredje time: Selvstændigt arbejde i basisgrupperne

Fjerde time: Selvstændigt arbejde i basisgrupperne

Femte time: Selvstændigt arbejde i basisgrupperne

Sjette time: Selvstændigt arbejde i basisgrupperne

Syvende time: Klassediskussion som optakt til arbejdet i ekspertgrupperne

Ottende time: Selvstændigt arbejde i ekspertgrupperne

Aflevering af basisgruppernes aflevering

Niende time: Selvstændigt arbejde i ekspertgrupperne

Tiende time: Selvstændigt arbejde i ekspertgrupperne

Elvte time: Klassediskussion af ekspertgruppernes opgaver og arbejde

Tolvte time: Selvstændigt arbejde i ekspertgrupperne

Aflevering af ekspertgruppernes aflevering

Trettende time: Evaluering af forløbet

B Kompendiet til undervisningsforløbet

I dette bilag findes det kompendium, som eleverne arbejdede med under gennemførelsen af undervisningsforløbet. På kompendiets side 2 står der, at der er fem ekspertgrupper. Ved forløbets gennemførelse kom der reelt kun til at være fire ekspertgrupper, hvilket skyldtes, at to elever forlod klassen umiddelbart før forløbets start. Rent layoutmæssigt bør læseren være opmærksom på, at sidetallene i bilaget ikke refererer til resten af rapporten. Derimod er de oprindelige sidetal fra kompendiet.

Funktionsbegrebet

set med historiske og nutidige briller

Introduktion

I skal i matematiktimerne i uge 45 – 47 gennemføre et forløb, som jeg har valgt at kalde *Funktioner – set med historiske og nutidige briller*. I dette indledende kapitel finder I alt det formelle om dette forløb – spillereglerne for det, der skal foregå.

Plan for forløbet: Forløbet består af to faser. I den første fase, der varer fra mandag d. 8. november til og med mandag d. 15. november, skal I arbejde i det, jeg har valgt at kalde basisgrupper. Der er fire basisgrupper, der hver især har til opgave at sætte sig ind i hver sin del af det overordnede emne om funktioner. Mere konkret skal hver basisgruppe arbejde med en af de fire opgaver, som stilles på side 5 – 9 i dette kompendium. Under hver opgavebeskrivelse står der, hvem gruppen består af. Resultatet af hver basisgruppes arbejde skal være en tekst, som opfylder kravene, der er præciseret i gruppens opgavebeskrivelse. **Denne tekst skal afleveres mandag d. 15. november til mig og til alle jeres klassekammerater.** Hver basisgruppe skal aflevere én tekst. Den første fase af arbejdet vil blive afsluttet med en opsamlende klasses Diskussion i sidste time mandag d. 15. november. Denne klasses Diskussion skal lede frem mod anden fase af arbejdet.

Anden fase varer fra og med onsdag d. 17. november til og med mandag d. 29. november (OBS: I skal være opmærksomme på, at matematiktimerne mandag d. 29. november ikke er afsat til dette projekt). I denne fase skal I arbejde i nye grupper, som jeg har valgt at kalde ekspertgrupper. Hver ekspertgruppe består af ét medlem fra hver af basisgrupperne. Der kommer til at være fem ekspertgrupper, der hver især kommer til at bestå af følgende elever:

- Gruppe 1:
- Gruppe 2:
- Gruppe 3:
- Gruppe 4:
- Gruppe 5:

Hver ekspertgruppe skal besvare en skriftlig opgave vedrørende funktionsbegrebet set med historiske og nutidige briller. Opgaveformuleringen til denne opgave får I udleveret i sidste time mandag d. 15. november. Jeg tør dog godt afsløre, at I kommer til at få brug for den viden, som hver af basisgrupperne har opnået, for at kunne give en ordentlig besvarelse af ekspertgruppernes opgave. Repræsentanterne for hver basisgruppe skal altså i arbejdet i ekspertgrupperne fungere som eksperter indenfor deres del af emnet. Den del af arbejdets anden fase, som foregår i matematiktimerne, afsluttes med en klasses Diskussion onsdag d. 24. november. Formålet med denne Diskussion er, at grupperne skal hente inspiration fra hinanden til deres skriftlige opgave. **Ekspertgruppernes skriftlige opgave skal afleveres mandag d. 29. november til mig.** Hver ekspertgruppe skal aflevere én tekst. Onsdag d. 24. skal I også evaluere hele forløbet.

Evalueringskriterier: Jeres arbejde i basis- og ekspertgrupperne og jeres skriftlige afleveringer vil blive evalueret i forhold til følgende overordnede mål:

1. I skal opnå en forståelse af, hvad den moderne funktionsdefinition indeholder.
2. I skal komme til at reflektere over, hvad en funktion er for noget.

3. I skal få udvidet jeres opfattelse af, hvad en funktion er.
4. I skal opnå en forståelse af, at vores moderne funktionsbegreb er et resultat af en udviklingsproces.
5. I skal opnå indsigt i de menneskelige aktørers rolle i udviklingen af det moderne funktionsbegreb.
6. I skal træne jeres evne til at samarbejde og diskutere indbyrdes om matematikholdige emner.
7. I skal træne jeres evne til at formulere jer på skrift om matematikholdige emner.
8. I skal træne jeres evne til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner.

Evalueringsform: Den endelige evaluering af jeres arbejde vil bestå af to karakterer, en for basisgruppernes skriftlige aflevering og en for ekspertgruppernes skriftlige aflevering. Hver basisgruppe og ekspertgruppe får én samlet karakter for deres skriftlige produkt.

Materiale

Udover de tekster som findes i dette kompendium, vil følgende bøger, artikler o.l. være til jeres rådighed i arbejdet med opgaverne i basisgrupperne:

- Funktionsbegrebets historie: Dette er egentligt et kapitel skrevet af Tinne Hoff Kjeldsen fra en matematikbog beregnet til brug i gymnasiet. Bogen hedder *Teori og Redskab 1 – Tal og funktioner* og er udgivet i 1988.
- Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet: Dette er en artikel, der er skrevet af Jesper Lützen i 1978. Dele af artiklen går med at præsentere noget matematik, som er teknisk meget svært tilgængeligt, men der er også dele, som I sagtens vil kunne få noget ud af. Lad jer guide af mine bogmærker.
- Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb: Dette er en rapport, der er skrevet af fire studerende på RUC i 2002. Selvom visse dele af den er temmelig teknisk, vil den være interessant at kigge i for alle fire basisgrupper. Lad jer guide af mine bogmærker.
- The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass: Dette er en bog, der er skrevet af Umberto Bottazzini i 1986. Matematikken i den er på et meget højt niveau, så hold jer til mine bogmærker.

Derudover står det jer frit for at benytte andre bøger – men lad være med at bruge al jeres tid på biblioteket! I kan også inddrage forskellige hjemmesider i jeres besvarelse. I kunne f.eks. se på følgende to sider:

- <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/>: Denne hjemmeside indeholder mange gode informationer. I kan f.eks. finde informationer om forskellige matematikere via linket *Biographies Index* på hovedsiden, eller I kan finde noget om funktionsbegrebets historie via linket *History Topics Index* på hovedsiden (I skal så bare vide, at funktionsbegrebet hører ind under den matematiske disciplin, der kaldes analyse).
- <http://www.denstoredanske.dk>: Online leksikon på dansk. I kan evt. bruge artiklerne til at blive inspireret til, hvordan I kan komme videre med jeres opgaver.

Gruppe 1 - Historiske funktionsdefinitioner

Gruppens medlemmer:

Gruppens opgave: Her i kompendiet har I på side 11 et uddrag af Eulers bog *Introductio in Analysin Infinitorum* (tekst 1) og på side 12 et uddrag af Dirichlet artikel *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (tekst 3). Derudover har I på side 12 en kort forklaring af Eulers udvidelse af sit oprindelige funktionsbegreb (tekst 2). Disse tekster skal I bruge til at besvare følgende opgave:

I skal forklare, hvad en funktion er ifølge Eulers oprindelige funktionsdefinition fra *Introductio in Analysin Infinitorum*, Eulers udvidede funktionsdefinition og Dirichlets funktionsdefinition. Derudover skal I også beskrive, hvordan disse tre funktionsdefinitioner adskiller sig fra hinanden, og på hvilke måder de ligner hinanden. I skal også forklare, hvad princippet om den variables generalitet går ud på, hvordan hhv. Euler og Dirichlet forholder sig til dette princip og hvordan forholdet mellem dette princip og princippet om analysens generelle gyldighed er.

Krav til besvarelsen: Svarene på nedenstående spørgsmål skal indgå i jeres besvarelse af den ovenstående opgave. Jeres besvarelse skal dog ikke blot være en besvarelse i punktform af spørgsmålene. Derimod skal jeres besvarelse være en sammenhængende tekst, hvori svarerne på spørgsmålene indgår. Denne tekst må meget gerne indeholde mere end kun svarene på spørgsmålene. Jeres besvarelse af denne opgave skal danne en del af grundlaget for jeres kommende arbejde i de næste grupper (ekspertgrupperne), så det er vigtigt, at jeres klassekammerater også kan læse den og få mening ud af den. I jeres besvarelse af opgaven skal I huske at angive, hvilke kilder I har brugt.

1. I §4 i tekst 1 giver Euler en definition af en funktion. Hvad er de centrale begreber i denne definition?
2. Hvilket princip kendetegner ifølge Euler en variabel? Hvad kaldes dette princip? (Vink: Euler bruger ikke selv denne betegnelse. Se i stedet evt. i kapitel 3 i *Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb*)
3. Hvad går princippet om analysens generelle gyldighed ud på? (Vink: Se evt. i kapitel 2 i *Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb*)
4. Hvilke ligheder er der mellem princippet om den variables generalitet og princippet om analysens generelle gyldighed? Overvej, hvorfor begge disse principper har fået navne, der indeholder ordet "generel".
5. Hvordan adskiller Eulers udvidede funktionsbegreb sig fra Eulers oprindelige begreb, og hvordan ligner det det oprindelige (Vink: Hvad er det centrale begreb i det udvidede funktionsbegreb)?
6. I tekst 3 giver Dirichlet sin definition af en funktion. Kan I finde tre punkter, som denne definition adskiller sig fra Eulers definition på?

7. Forklar ud fra tekst 3, hvordan Dirichlet må have forholdt sig til princippet om den variables generelle gyldighed.
8. På side 10 er der fire billeder. Hvilke af disse billeder er ifølge hhv. Eulers funktionsdefinition fra *Introductio in Analysin Infinitorum*, Eulers udvidede funktionsbegreb og Dirichlets funktionsbegreb billeder af en funktion? Begrund jeres svar.

Gruppe 2 - Debatten om den svingende streng

Gruppens medlemmer:

Gruppens opgave: Her i kompendiet har I på side 11 et uddrag af Eulers bog *Introductio in Analysin Infinitorum* (tekst 1) og på side 12 en kort forklaring af Eulers udvidelse af sit oprindelige funktionsbegreb (tekst 2). Disse tekster skal I inddrage i jeres besvarelse af følgende opgave, men I bliver også nødt til at inddrage andet materiale:

I skal forklare, hvordan og hvorfor debatten om den svingende streng fik Euler til at udvide sit funktionsbegreb.

Krav til besvarelsen: Svarene på nedenstående spørgsmål skal indgå i jeres besvarelse af den ovenstående opgave. Jeres besvarelse skal dog ikke blot være en besvarelse i punktform af spørgsmålene. Derimod skal jeres besvarelse være en sammenhængende tekst, hvori svarerne på spørgsmålene indgår. Denne tekst må meget gerne indeholde mere end kun svarene på spørgsmålene. Jeres besvarelse af denne opgave skal danne en del af grundlaget for jeres kommende arbejde i de næste grupper (ekspertgrupperne), så det er vigtigt, at jeres klassekammerater også kan læse den og få mening ud af den. I jeres besvarelse af opgaven skal I huske at angive, hvilke kilder I har brugt.

1. På side 10 er der fire billeder. Billede III er ifølge Eulers funktionsdefinition i *Introductio in Analysin Infinitorum* ikke et billede af en funktion, mens det ifølge Eulers udvidede funktionsbegreb er et billede af en funktion. Forklar ud fra tekst 1 og tekst 2, hvorfor det er sådan.
2. Udgangspunktet for debatten om den svingende streng var, at en række matematikere forsøgte at løse et matematisk problem. Hvad gik dette problem ud på?
3. Hvad var det for en indsigt i forbindelse med debatten om den svingende streng, der tvang Euler til at udvide sit funktionsbegreb?
4. Hvordan forholdt Eulers samtidige matematikkolleger sig til hans udvidelse af funktionsbegrebet? Accepterede de det straks, var de skeptiske, eller...? Jeres besvarelse af dette spørgsmål skal begrundes med henvisninger til sekundære kilder som f.eks. artiklerne *Funktionsbegrebets udvikling* af Tinne Hoff Kjeldsen og *Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet* af Jesper Lützen.
5. Hvilken betydning fik Eulers matematikkollegers holdning til Eulers udvidede funktionsbegreb for dette begrebs udbredelse?

Gruppe 3 - Euler, Dirichlet og det samfund de levede i

Gruppens medlemmer:

Gruppens opgave: I skal i jeres basisgruppe give en besvarelse af følgende opgave:

I skal forklare, hvem Euler og Dirichlet var, og hvordan det matematiske samfund, som de hver især arbejdede i, så ud.

Krav til besvarelsen: Svarene på nedenstående spørgsmål skal indgå i jeres besvarelse af den ovenstående opgave. Jeres besvarelse skal dog ikke blot være en besvarelse i punktform af spørgsmålene. Derimod skal jeres besvarelse være en sammenhængende tekst, hvori svarerne på spørgsmålene indgår. Denne tekst må meget gerne indeholde mere end kun svarene på spørgsmålene. Jeres besvarelse af denne opgave skal danne en del af grundlaget for jeres kommende arbejde i de næste grupper (ekspertgrupperne), så det er vigtigt, at jeres klassekammerater også kan læse den og få mening ud af den. I jeres besvarelse af opgaven skal I huske at angive, hvilke kilder I har brugt.

1. Giv en kort biografi af Euler og Dirichlet. Hvem var de, og hvornår levede de?
2. I 1789 skete der noget, der ændrede især det franske, men også de andre europæiske samfund. Hvad var det?
3. Hvor foregik hhv. undervisning og forskning i matematik før 1789/1793? Foregik de samme steder?
4. Hvem financerede akademierne før 1789 og hvorfor?
5. Hvad skete der med akademierne i 1793?
6. Hvor foregik hhv. undervisning og forskning i matematik efter 1793?
7. Hvordan blev nye matematiske resultater viderefundet før og efter 1789/1793? Hvilken rolle spillede især brevveksling mellem matematikere og officielle matematiske udgivelser?
8. Hvad kom det ændrede forhold imellem undervisning og forskning i matematik og den ændrede måde at viderefunde nye matematiske resultater efter 1793 til at betyde for den måde, man arbejdede med matematik? (Vink: Se evt. i kapitel 2 i *Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb* og i s. 44 – 47 i *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis for Euler to Weierstrass*).

Gruppe 4 - Det moderne funktionsbegreb

Gruppens medlemmer:

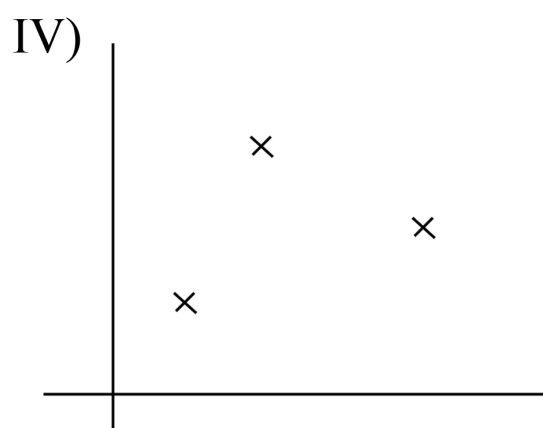
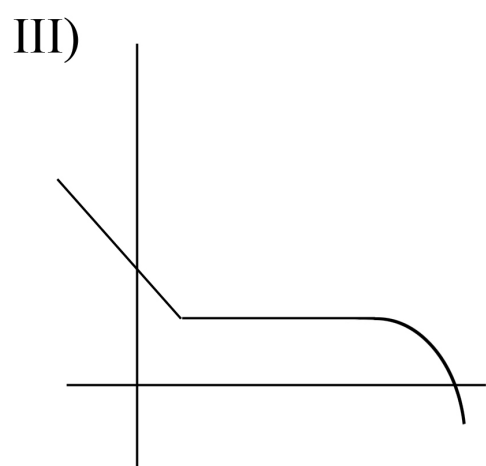
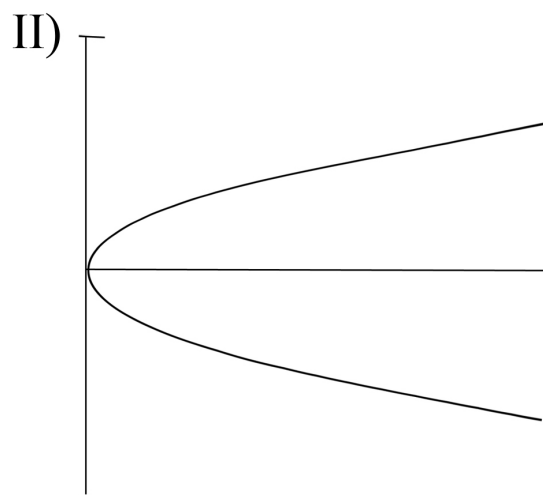
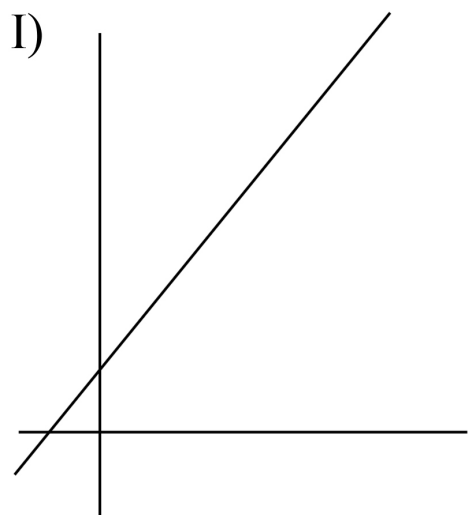
Gruppens opgave: Her i kompendiet har I på side 13 - 16 fem uddrag fra fem forskellige lærebøger i matematik på hhv. gymnasieniveau og universitetsniveau (tekst A – E). Ved hjælp af en sammenligning, analyse og vurdering af disse fem tekster skal I give en besvarelse af følgende opgave:

I skal give en beskrivelse af det nutidige funktionsbegreb og sammenhængen mellem dette funktionsbegreb og begreberne »graf«, »definitions­mængde« og »værdimængde«. I skal også give en forklaring på, hvorfor beviser er nødvendige i arbejdet med funktioner,

Krav til besvarelsen: Svarene på nedenstående spørgsmål skal indgå i jeres besvarelse af den ovenstående opgave. Jeres besvarelse skal dog ikke blot være en besvarelse i punktform af spørgsmålene. Derimod skal jeres besvarelse være en sammenhængende tekst, hvori svarerne på spørgsmålene indgår. Denne tekst må meget gerne indeholde mere end kun svarene på spørgsmålene. Jeres besvarelse af denne opgave skal danne en del af grundlaget for jeres kommende arbejde i de næste grupper (ekspertgrupperne), så det er vigtigt, at jeres klassekammerater også kan læse den og få mening ud af den. I jeres besvarelse af opgaven skal I huske at angive, hvilke kilder I har brugt.

1. Tekst A – E indeholder hver især en nutidig funktionsdefinition. Hvad er de centrale begreber i disse definitioner? Hvordan ligner de hinanden, og hvordan adskiller de sig fra hinanden? Kan I ud fra disse tekster sige noget samlet om, hvad man forstår ved en funktion i dag?
2. Tekst A og C indeholder en forklaring af, hvad en graf er. Hvad er de centrale begreber i disse forklaringer? Hvordan ligner de hinanden, og hvordan adskiller de sig fra hinanden? Kan I ud fra disse to tekster sige noget samlet om, hvordan man forstår forholdet mellem en funktion og en graf i dag? Hvordan forstår I selv forholdet mellem en funktion og en graf?
3. På side 10 er der fire billeder. Hvilke af disse billeder er grafer for funktioner? Begrund jeres svar.
4. Hvad er en definitions­mængde og en værdimængde?
5. Hvorfor er definitions­mængde og værdimængde ikke ligegyldige begreber, når man snakker om funktioner? Kan I komme på eksempler, hvor det er nyttigt at kende til definitions­mængden og værdimængden for en funktion?
6. Hvad er et bevis? Støt jer evt. til, hvad jeres lærebog skriver om beviser.
7. Hvorfor er beviser nødvendige i arbejdet med funktioner? Hænger det sammen med, hvor mange (eller hvor få) egenskaber, vi uden videre kan sige, at alle funktioner besidder?

Billeder til brug i opgaverne



Tekster om de historiske funktionsbegreber

De følgende tre afnit indeholder tre tekster, som omhandler hvert sit historiske funktionsbegreb. Tekst 1 er et uddrag fra første kapitel i første bog af værket *Introductio in Analysin Infinitorum*, som Leonhard Euler (1707-1783) udgav i 1748. Tekst 2 er en beskrivelse af, hvordan Euler senere udvidede den funktionsdefinition, som han selv havde opstillet i *Introductio in Analysin Infinitorum*. Tekst 3 er et uddrag fra artiklen *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* som Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet udgav i 1837.

Tekst 1 – Uddrag af *Introductio in Analysin Infinitorum*

§1: *En konstant størrelse er en bestemt størrelse, der altid beholder den samme værdi.*

Størrelser af denne type er tal af alle slags, som beholder den samme konstante værdi, når de har fået tildelt en. Hvis det er nødvendigt at repræsentere konstante størrelser med et symbol, bruges de første bogstaver i alfabetet, a , b , c osv.. [...]

§2: *En variabel størrelse er en størrelse, der er ubestemt eller universel, og som kan antage enhver værdi.*

Da alle bestemte værdier kan udtrykkes som tal, antager en variabel størrelse ethvert muligt tal (alle tal af alle typer). [...] Variable størrelser af denne slags repræsenteres normalt af de sidste bogstaver i alfabetet, z , y , x osv..

§3: *En variabel størrelse er bestemt, når den er blevet tildelt en bestemt værdi.*

Således kan en variabel størrelse bestemmes på uendeligt mange måder, da den kan blive udskiftet med alle tal overhovedet. Heller ikke symbolet for den variable størrelse er udtømt, før alle bestemte tal er blevet tildelt det. En variabel størrelse indeholder således i sig selv alle tal overhovedet, både positive og negative, heltal og rationelle tal, irrationelle tal og transcendent tal. [...] Selv nul og komplekse tal er ikke udelukket fra betydningen af en variable størrelse.

§4: *En funktion af en variabel størrelse er et analytisk udtryk sammensat på en hvilken som helst måde af den variable størrelse og tal eller konstante størrelser.*

Følgelig vil ethvert analytisk udtryk, i hvilket alle indgående størrelser undtagen variabelen z er konstante, være en funktion af z . Således er $a + 3z$, $az - 4x^2$, $ax + b\sqrt{a^2 + z^2}$, c^z funktioner af z . [...]

§10: *Endelig må vi foretage en skelnen mellem funktioner med én værdi og funktioner med flere værdier.*

En funktion med én værdi er en funktion, for hvilken en enkel værdi af funktionen er bestemt, uanset hvilken værdi der er tildelt den variable z . På den anden side er en funktion med flere værdier en funktion, der for variabelen z udskiftet med visse værdier bestemmer flere værdier. [...]

§11: *En funktion af z med to værdier er en funktion, som giver et par af værdier for hver bestemt værdi af z .*

En funktion af denne type fremstiller en kvadratrodsfunktion, som for eksempel $\sqrt{2z + z^2}$. Uanset hvilken værdi der er tildelt z , har udtrykket $\sqrt{2z + z^2}$ dobbelt betydning, enten positiv eller negativ. [...]

Tekst 2 – Eulers udvidelse af sit funktionsbegreb

I 1748 - samme år som *Introductio in Analysin Infinitorum* blev udgivet - foreslog Euler selv en udvidelse af sit funktionsbegreb. Denne udvidelse bestod i, at man både skulle arbejde med kontinuerte og diskontinuerte funktioner. De kontinuerte funktioner er de funktioner, som er beskrevet af funktionsdefinitionen i §4 i *Introductio in Analysin Infinitorum*. De diskontinuerte funktioner kan beskrives således¹:

En funktion kan ifølge Euler være diskontinueret på to måder:

1. Den kan svare til en mixet kurve, dvs. en kurve, der i forskellige intervaller er beskrevet ved forskellige analytiske udtryk.
2. Den kan svare til en helt frihåndstegnet kurve, hvor kurveforløbet ikke engang er beskrevet ved analytiske udtryk i små intervaller, med hvor udtrykket så at sige skifter fra punkt til punkt.

Det er værd at bemærke, at Euler her beskriver også de [diskontinuerte] funktioner ved hjælp af analytiske udtryk, selv i tilfælde 2), hvor betydningen af de analytiske udtryk synes temmelig uklare.

Tekst 3 – Uddrag af *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen*

Man tænker sig, at a og b er to konstante værdier, og at x er en foranderlig størrelse, som lidt efter lidt skal antage alle værdier, der ligger mellem a og b . Udspringer der nu af ethvert x et eneste definitivt y , og det således, at mens x kontinuerligt gennemløber intervallet fra a til b , forandrer $y = f(x)$ sig ligeledes gradvist, så kaldes y en kontinuert [...] funktion af x i dette interval. Det er tillige slet ikke nødvendigt, at y er afhængig af x i overensstemmelse med en samme lov i hele dette interval, ja man behøver ikke engang tænke på en afhængighed, der kan udtrykkes gennem matematiske operationer. Geometrisk repræsenteret, dvs. x og y tænkt som abscisse og ordinat, fremstår en kontinuert funktion som en sammenhængende kurve, for hvilken der kun udspringer et punkt for enhver abscisse der er indeholdt mellem a og b . Denne definition foreskriver ingen fælles lov for kurvens enkelte dele; man kan tænke på den samme [kurve] der er sammensat af de mest forskelligartede dele eller ganske lovløst tegnet. Det fremgår heraf, at en sådan funktion kun opfattes som fuldstændig bestemt for et interval, når den enten er givet grafisk for hele dets omfang eller bliver underkastet gældende matematiske love i dets enkelte dele. Så længe man kun har bestemt en funktion i en del af intervallet, forbliver opførelsen af dens forsættelse i resten af intervallet overladt til det helt tilfældige.²

¹Den følgende beskrivelse er hentet fra artiklen *Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet*.

²Til oversættelsen af denne tekst er der hentet hjælp i rapporten *Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb*

Tekster om det moderne funktionsbegreb

De følgende fem tekster indeholder fem forskellige præsentationer af vores nutidige funktionsbegreb. Tekst A er et uddrag af kapitel 2 i bogen *Gyldendals Gymnasiematematik - Grundbog B1* skrevet af Flemming Clausen, Gert Schomacher og Jesper Tolnø i 2005 - altså jeres nuværende lærebog. Tekst B er et uddrag af del 4 i bogen *Matema10k - Matematik for gymnasiet. Bind 1. C-niveau* skrevet af Thomas Jensen og Morten Overgård Nielsen i 2005 - altså jeres lærebog fra sidste år. Tekst C er et uddrag af kapitel 6 i bogen *Matematik 1 - For 1. G* skrevet af Erik Kristensen og Ole Rindung i 1977. Tekst D er et uddrag af det indledende kapitel i bogen *Calculus - A Complete Course* skrevet af Robert A. Adams i 2003. Tekst E er et uddrag af kapitel 1 i bogen *An introduction to analysis* skrevet af William R. Wade i 2004. Tekst A-C er alle uddrag af bøger, som bruges eller er blevet brugt i matematikundervisningen i gymnasiet, mens tekst D-E er uddrag fra bøger, som bruges på universitetet.

Tekst A - Uddrag af *Gyldendals Gymnasiematematik - Grundbog B1*

Når man ser på ligninger som $3x + 5(4 - 2x) = 10$ eller $3x^2 - 7x + 2 = 0$, er problemet som regel at bestemme de værdier af x , som opfylder ligningen. De ligninger, vi skal se på i dette afsnit, er af en noget anden slags, idet ligningerne indeholder to variable. Eksempler er

$$y = 3x + 5, \quad y = 3x^2 - x - 2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = x^2, \quad y = x^3.$$

Her er problemet ikke at finde x , men at undersøge, hvilke sammenhørende værdier af x og y der tilfredsstillers ligningen. Til enhver x -værdi svarer der en y -værdi, som fremkommer ved at indsætte x -værdien i ligningen. Til enhver x -værdi svarer derfor et koordinatsæt og dermed et punkt i et koordinatsystem. Samlingen af punkter udgør en kurve. Ligningen fremstiller således - eller repræsenterer - en kurve. [...]

At indføre notationen $f(x)$ og ordet funktion gør det lettere at tale om ligninger og de y -værdier, der svarer til bestemte x -værdier. I stedet for at tale om »den y -værdi, der svarer til $x = 3$ «, kan man benytte den korte formulering $f(3)$. Taler man om flere forskellige funktioner eller ligninger samtidigt, benytter man - ud over betegnelsen $f(x)$ - betegnelser som $h(x)$, $g(x)$ eller $k(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ eller $f_3(x)$. [...]

Enhver funktion $f(x)$ giver anledning til en ligning $y = f(x)$. Ligningen bestemmer en kurve, grafen for $f(x)$. Grafen for en funktion er et billede af funktionen, det grafiske billede. At kende en funktion $f(x)$ består bl.a. i, at man kender dens grafiske billede. Jo flere grafiske billeder man kender, des bedre er man i stand til at bevæge sig rundt i funktionernes verden. Derved bliver man også bedre til at anvende funktionerne.

Tekst B - Uddrag af *Matema10k - Matematik for gymnasiet. Bind 1. C-niveau*

Den *uafhængige variabel* er derfor den variabel, der ofte »står alene«, ikke afhænger af noget.

Den *afhængige variable* er den variabel der varierer som følge af hvad den uafhængige variabel er. Den afhængige variabel afhænger af den uafhængige variabel. [...]

En funktion er en matematisk beskrivelse af sammenhængen mellem uafhængige og afhængige variable.

Vi kan beskrive sammenhængen på følgende måde:

- Ved hjælp af en graf
- Ved hjælp af en tabel
- Ved hjælp af en regneforskrift, f.eks. $y = 1,10 \cdot x + 1020$ [...]

I forbindelse med funktioner bruger vi også begreberne *definitions­mængde* og *værdimængde*. Ved »definitions­mængde« for en funktion f forstås vi den mængde tal, som funktionen knytter et y til. I definitions­mængden afgrænser man således mængden af x -værdier.

Eksempel $f(x) = \sqrt{x}$: Definitions­mængden for funktionen er alle tal på nær de negative. Da vi ikke kan udregne kvadratroden af et negativt tal, knytter f jo ikke et y til et negativt tal.

Ved »værdimængde« for en funktion f forstås vi de funktions­værdier vi får, når vi lader x gennemløbe hele definitions­mængden. Værdimængden afgrænser mængden af y -værdier.

Tekst C - Uddrag af *Matematik 1 - For 1. G*

1.5 DEFINITION. Lad der være givet to mængder A og B . Ved en afbildning fra A til B forstås en forskrift, der til hvert element i en delmængde D til A knytter et bestemt element i B . Mængderne A og B kaldes henholdsvis primærmængden og sekundærmængden for afbildningen, og D kaldes afbildningens definitions­mængde. Det element i B , der knyttes til et vilkårligt element x i D , kaldes billedet af x ved den pågældende afbildning. En afbildning, der har A som primærmængde, siges at være defineret i A . Hvis definitions­mængden er lig med A , siges afbildningen at være defineret i hele A eller være defineret på A .

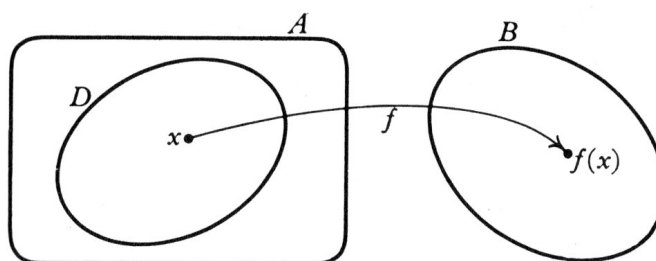


Fig. 1.II

Ved omtale af en afbildning af en mængde D ind i en mængde B er det ofte bekvemt at benytte en bogstavs­betegnelse for afbildningen. Hvis vi benytter betegnelsen f for en sådan afbildning, og x er et element i D , lader vi $f(x)$ betegne billedet af x ved afbildningen f . $f(x)$ er altså et element i B (fig. 1.II). [...]

Betegnelsen *afbildning* for det begreb, der blev defineret i (1.5), er af ret ny dato. I matematisk litteratur finder man adskillige andre betegnelser for samme begreb, f.eks. ordene *transformation* og *funktion*. [...]

Lad f være en afbildning af en mængde D ind i en mængde B , og lad M være en delmængde af D . Når x »gennemløber« M , vil $f(x)$ »gennemløbe« en delmængde af B , som vi betegner med

$$f(M)$$

Definitionen af $f(M)$ kan gives følgende formulering:

$$f(M) = \{y \mid \exists x \in M : y = f(x)\}$$

$f(M)$ kaldes *billedet af M* ved afbildningen f , og man siger, at f afbilder M på $f(M)$. Specielt kan vi betragte billedet $f(D)$ af definitionsmængden. Denne mængde kalder vi *billedmængden* eller *værdimængden* af afbildningen f , og vi betegner den med $Vm(f)$,

$$Vm(f) = f(D)$$

Hvis billedmængden for f er lig sekundærmængden, hvis altså

$$f(D) = B$$

siger man, at f afbilder D på B . I dette tilfælde er ethvert element i B billede af et eller flere elementer i D . [...]

Ved *det grafiske billede* (eller *graf*) af en funktion f forstås punktmængden

$$\{(x, y) \mid y = f(x)\}.$$

For enhver værdi af x , tilhørende definitionsmængden for f , registreres funktionsværdien $f(x)$ altså som ordinat til et punkt, der har abscissen x (se fig. 5.1).

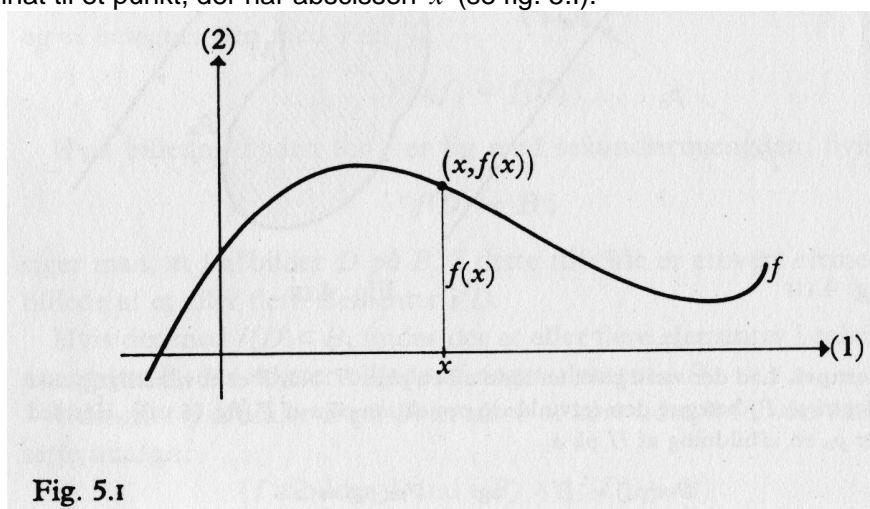


Fig. 5.1

Tekst D - Uddrag af *Calculus - A Complete Course*

En funktion f fra en mængde D ind i en mængde S er en regel, der tildeler et entydigt element $f(x)$ i S til ethvert element x i D .

Tekst E - Uddrag af *An introduction to analysis*

Lad X og Y være mængder. Det *Cartesiske produkt* af X og Y er mængden af *ordnede par* defineret ved

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

[...] To punkter $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ siges at være ens hvis og kun hvis $x = z$ og $y = w$.

Lad X og Y være mængder. En *relation* på $X \times Y$ er en hvilken som helst delmængde af $X \times Y$. Lad R være en relation på $X \times Y$. *Definitionsmængden* for R er samlingen af $x \in X$ for hvilke (x, y) tilhører R . [...]

En *funktion* f fra X ind i Y [...] er en relation på $X \times Y$, hvis definitionsmængde er X , således at for hvert $x \in X$ er der et og kun et $y \in Y$ der opfylder $(x, y) \in f$.

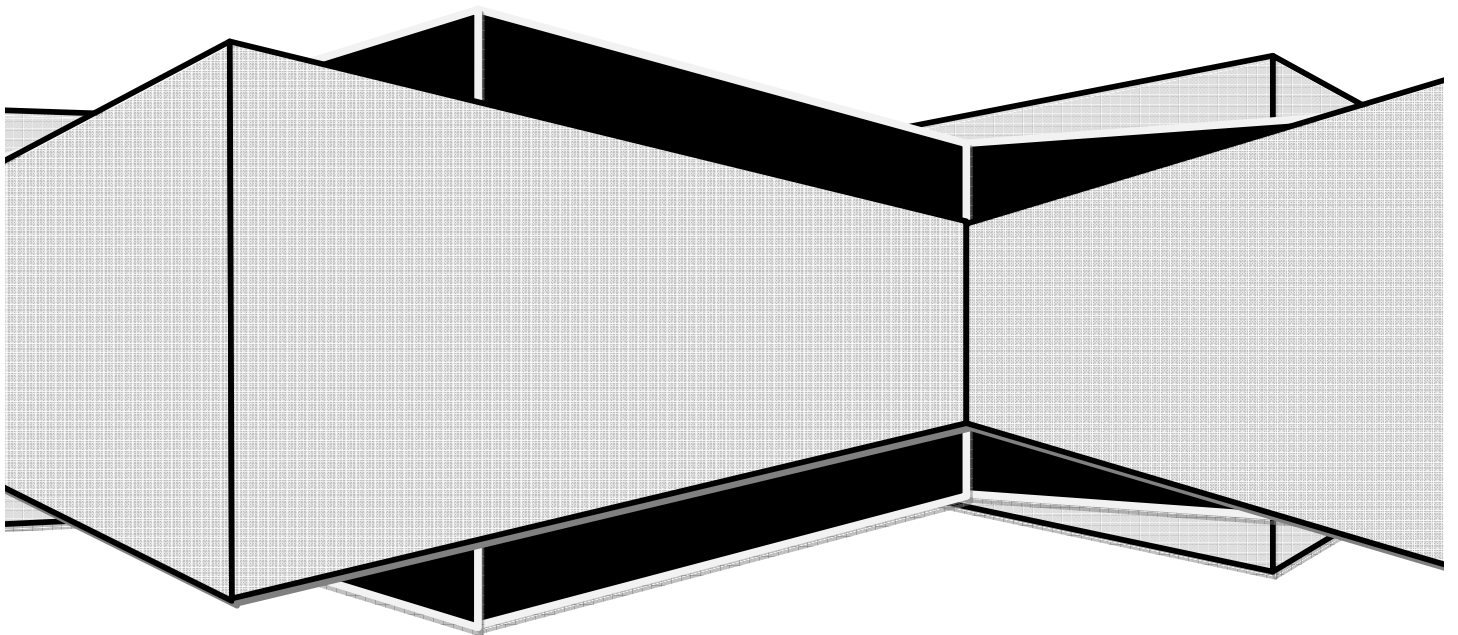
C Elevernes besvarelser af basisgruppernes opgaver

I dette bilag findes hver af de fire basisgruppers basisgruppeafleveringer. Rent layoutmæssigt bør læseren være opmærksom på, at rapportens sidetal ikke er vist i bilaget. Derimod er de sidetal, som findes i bilaget, de oprindelige sidetal fra elevernes afleveringer.

Basisgruppe 1
Matematik projekt;
Funktioner – set med historiske og nutidige briller
Avedøre Gymnasium
15 /11-2010

FUNKTIONER – SET MED HISTORISKE OG NUTIDIGE BRILLER

HISTORISKE FUNKTIONSDEFINITIONER



I denne opgave vil vi sætte fokus på henholdsvis Eulers oprindelige funktionsdefinition, hans udvidede funktionsdefinition og også Dirichlets funktionsdefinition.

Herudover vil vi finde forskelle og ligheder på disse tre funktionsdefinitioner, samt forklarer hvad den variables generalitet går ud på, hvordan Euler og Dirichlet ser på det, og hvordan forholdet mellem dette princip og princippet om analysens gyldighed er.

Til at starte med vil vi dog prøve at definere hvad gruppen selv mener en funktion er.

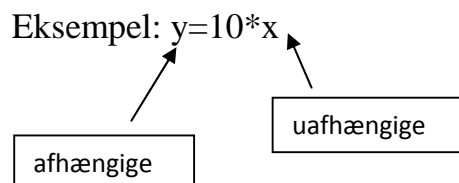
HVAD ER EN FUNKTION? – IFØLGE BASISGRUPPE 1

En funktion er en sammenhæng mellem variable, hvor af y og x som regel defineres som de variable.

Indenfor variable er der både afhængige og uafhængige; y er den afhængige og x er den uafhængige.

Den afhængige variabel (y) afhænger af den uafhængige variabel (x). Hvorimod den uafhængige variabel *ikke* afhænger af noget, den står frit.

Eksempel: $y=10*x$



Ifølge Leonhard Eulers første funktionsbegreb (det Eulerske funktionsbegreb) var der både funktioner med én værdi og funktioner med flere værdier.

Han mente, at en funktion blev sammensat vha. variable størrelser, tal i konstante størrelser samt de analytiske udtryk (-, +, /, * og roduddragning).

Euler definerede i sin tid en konstant størrelse, som værende en størrelse der havde samme værdi uanset hvad. Denne konstante størrelse blev som regel symboliseret med nogle af de første bogstaver i alfabetet for eksempel a, b, c og så videre.

Hvorimod han definerede en variabel som værende en størrelse, som kunne have en hvilken som helst værdi, en værdi hvor altså mængden var lige gyldig.

"A variable quantity is one which is not determined or is universal, which can take on take any value." – Euler, 1988. Art 2.

Denne variables ligegyldige størrelse blev symboliseret med de sidste bogstaver i alfabetet som for eksempel z, y, x og så videre. Samtidig kunne en bestemt variabel have alle mulige tal og symboler, hvilket betød at denne kunne udskiftes med alle tal overhovedet. En variable størrelse kunne være positiv, negativ, heltal, rationelle tal, irrationelle tal og transcendentale tal.

Euler lavede senere ud fra ovennævnte tanker, et princip der for ham kendetegnede variabler, dette princip blev kaldt *den variables generalitet* – hvilket vil sige, at det var en form for beskrivelse af den generelle¹ variabel. Tallene man refererede til heri kaldtes 'ubestemte eller universelle tal'.

¹ Kommer af tysk *generell*, og latin *generalis* hvor det betyder 'almindelig'

Den første konsekvens af Eulers krav om den variables generalitet var, at alle funktioner skulle beskrive alle talværdier i selve funktionen.

Han begrænsede dog til tider sine funktioner til de reelle tal, men kun grundet praktiske årsager.

Euler konkluderede nemlig, at da alle funktioner indeholdt variable størrelser, måtte funktionen selv være en variabel størrelse.

Han kaldte herefter både definitions – og værdimængden for \mathbf{C} , hvilket betød at det var et komplekst tal, dvs. at det kunne være alle tal.

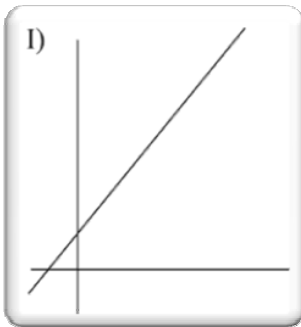
Ydermere mente Euler, at x ville føre til *flere* y 'er, og hermed flere resultater, han mente altså ikke ligesom Dirichlet, at der kun var *ét* y og dermed også et resultat for hvert x .

Dirichlets fulde navn var Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, han var en af tidens mange matematikere og han mente som sagt at der for hvert x kun var *ét* y og at a og b var to tal på x -aksen og at der imellem disse to, dvs. a og b kun kunne være nogle bestemte tal, mellem f. eks. 7 og 10.

Derudover mente Dirichlet, at funktioner ikke nødvendigvis behøvede, at være givet ved formler eller regneudtryk.

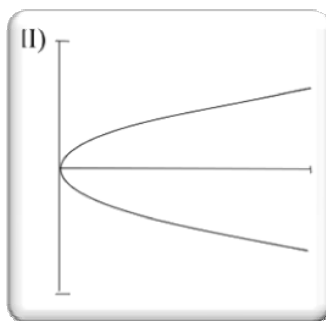
Dette stemte heller ikke overens med Eulers overbevisning om funktioner.

Disse fire figurer viser ganske kort hvor Euler og Dirichlet er enige, og hvor de ikke er det.



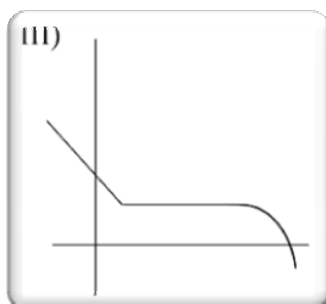
Figur 1: Denne figur passer ganske fint overens med Eulers funktionsbegreb fra *"Introductio in Analysin Infinitorum"*, og fra Eulers udvidede funktionsbegreb.

Dirichlet er enig i, at denne figur er en funktion.
(lineær funktion).



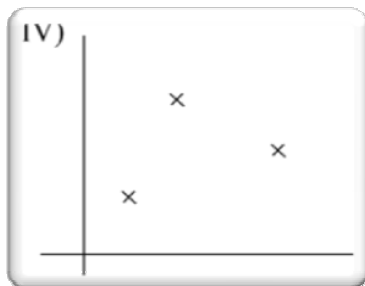
Figur 2: Igen passer denne figur fint overens med Eulers funktionsbegreb fra *"Introductio in Analysin Infinitorum"* samt Eulers udvidede funktionsbegreb.

Her er Dirichlet uenig.
(parabel).



Figur 3: Denne figur mente Dirichlet bestemt var en funktion og det gjorde Euler også ud fra hans udvidede funktionsbegreb.

(diskontinuert).



Figur 4: Denne figur er kun en funktion i følge Dirichlet.
(punktmængden).

Endvidere havde Euler også indflydelse på *analysen* der opstod i begyndelsen af 1700 tallet, som en udvidelse af algebraen. Euler havde indflydelse i den forstand, at han omkring år 1730, arbejdede med rækkeudvikling af de tidligere udtryk, der ofte førhen endte med mærkelige udtryk.

Eulers beregninger og konklusion illustrerer hvor meget fortidens matematikere stolede på symboler og på selve analysen.

Dette kaldtes *analysens generelle gyldighed*, da alle analysens udsagn blev set som værende generelt korrekte og troværdige.

Dette resulterede i, at matematikerne troede, at når de havde vist noget gjaldt i én sammenhæng, så måtte det jo gælde generelt. Derfor er mange af beviserne fra denne tid, blot et resultat af én undersøgelse der så generaliseredes.

Faktisk blev analysen i den første del af 1800 tallet opfattet, som et redskab til undersøgelse af kurver, f.eks. bestemmelse af arealer under kurver (bestemte og ubestemte integral) og så videre. Men med Eulers idé om, at funktionsbegrebet skulle være en fast, vigtig del af analysen, ændredes denne opfattelse endeligt.

Der er visse ligheder mellem disse to ovennævnte matematiske principper, dette ses eksempelvis i, det vi vælger at kalde ”princippernes overskrifter”, da begge såkaldte overskrifter indeholder ordene generelt eller generalitet.²

Ordene generelt og generalitet viser, hvordan matematikerne uden tøven troede på deres principper og på at de ud fra ganske få undersøgelser kendte resultaterne for adskillige tal, altså de troede at de vha. disse principper kunne generalisere resultaterne for alle talværdier på baggrund af enkelte undersøgelser.

Denne tillid til analysens generalitet kan også tydeliggøres yderligere, for eksempel mente Euler at alle funktioner kunne opstilles i uendelige rækker, fordi han igen tog udgangspunkt i et resultat hvor denne fremgangsmåde havde virket.

Trods matematikernes grænseløse tillid udvidede Euler senere sit funktionsbegreb, derfor blev dette kaldt, *det udvidede funktionsbegreb*.

I Eulers udvidede funktionsbegreb indførte han det der kaldtes diskontinuerte funktioner, hvilket betød at der kunne være såkaldte ’knæk’ i nogle af punkterne på kurverne, dog var kurverne stadig sammenhængende dvs. funktionerne var altså stadig kontinuerte (uden spring eller brud, i én lang streng).

I det Eulerske funktionsbegreb forekom der sjældent nogen former for ’knæk’ og der forekom ofte problemer, da funktionerne var svære at differentiere, hvilket var yderst upassende i denne periode, da man var af den opfattelse, at alle funktioner skulle kunne differentieres.

Derudover kunne de diskontinuerte funktioner *ikke* repræsenteres ved ét analytisk udtryk, men skulle defineres i forskellige intervaller, hvilket var endnu mere svært for samtidens matematikere at acceptere.

² ”Den variables generalitet”, samt ”Analysens generelle gyldighed.”

Side 11 og 12 i det udleverede kompendiet

Teksten,
FUNKTIONBEGREBETS UDVIKLING FRA EULER TIL DRICHLET,

Teksten,
FUNKTIONBEGREBETS UDVIKLING,

Til og Pernille:

Vi tror, at I måske har lavet en fejl i opgave 7, da vi ikke nogle steder i hverken vores udleverede materiale og/eller på nettet kunne finde noget om variables generelle gyldighed? Mente I analysens generelle gyldighed?

Vi har derfor valgt, at besvare opgave 7 både i vores sammenhængende tekst der indeholder og gerne skulle besvare alle 8 spørgsmål, og derudover forsøgt, at svare på spørgsmålet i bilag A, selvom vi i princippet ikke på nogen logisk måde kunne forholde os til opgaven?

Vi håber I er forstående overfor vores problem.

**Mange hilsener,
Basisgruppe 1 😊**

For at opsummere var der i følge Johan Dirichlet for hvert x kun var ét y .

Og a og b var to tal på x -aksen og at der imellem disse to, dvs. a og b kun kunne være nogle bestemte tal, f.eks. mellem 7 og 10.

Der var kun ét y og dermed også kun et resultat for hvert x .

Derudover mente Dirichlet, at funktioner ikke nødvendigvis behøvede, at være givet ved formler.

Dirichlet mente at resultatet, altså y afhang af a , b og ikke mindst af x . Hvilket også forklares i tekst 3:

”..at mens x kontinuerligt gennemløber intervallet fra a til b , forandrer $y = f(x)$ sig ligeledes gradvist, så kaldes y en kontinuert [...] funktion af ...” (tekst 3)

Men dette var en direkte modsætning til Euler, der ikke mente at der behøvede at være nogen sammenhæng mellem variablerne.

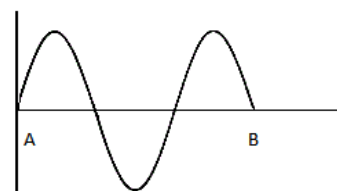
Herudover mente Euler også at variabler var ”vilkårlige elementer”, og at der ikke behøvede være nogen begrænsning på førnævnte variabler, heller ikke dette er Dirichlet helt enig i, da han mener at y vil være begrænset på en eller anden måde, da y 'et afhænger utvivlsomt af a , b og x .

Vi har på baggrund af vores opgave forstået det således; ifølge princippet om den variables generalitet kan den variable antage en vilkårlig værdi såsom tal eller symboler hvorimod Dirichlet mente, at den variable kun skulle befinde sig indenfor det givne interval, a og b ...

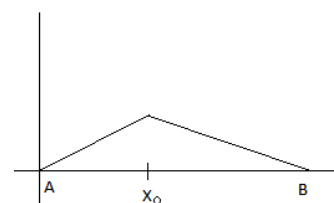
Gruppe 2 – Debatten om den svingende streng

Euler udviklede i 1748 sit første funktionsbegreb. En af hans påstande omkring funktionsbegrebet gik på, at en funktion for en variabel er et udregningsudtryk sammensat på en hvilken som helst måde. Dog skal udtrykket indeholde en variabel samt et til flere tal eller en til flere konstanter. Dette betød at funktionerne ville være kontinuerte (Bemærk! Forståelsen for kontinuerte funktioner dengang, er anderledes i forhold til nu!).

Senere samme år udvider Euler sit begreb. Han tilføjer muligheden for at en funktion kan være diskontinuert (Bemærk! Forståelsen for diskontinuerte funktioner dengang, er anderledes i forhold til nu!). Dette vil betyde at en sådan kurve kan være mikset. En mikset kurve, er en kurve der i forskellige intervaller er beskrevet ved forskellige analytiske udtryk. Dette betød at en funktion ville kunne se ud som illustration III¹, hvilket den ikke kunne under forholdene af det første funktionsbegreb. Grunden til dette er at det første funktionsbegreb bygger på at en funktion er beskrevet af et enkelt analytisk udtryk, hvorimod det udvidede funktionsbegreb kan beskrives ved flere analytiske udtryk, hvilket gør den diskontinuert. Grunden til at Euler begyndte at arbejde med de diskontinuerte funktioner, var fordi der var en stor debat imellem datidens matematikere. Debatten gik på at de funktioner som man arbejdede med ikke kunne beskrive en svingende streng, eksemplificeret ved denne illustration² (den øverste).



Euler mente heller ikke en knipset streng ville kunne beskrives ved ét analytisk udtryk, men ved to analytiske udtryk, nemlig ved ligningen for en ret linje i intervallet A til X_0 og intervallet X_0 til B (illustreret ved nederste billede). Derfor følte han sig nu nødsaget til at ændre sit eget funktionsbegreb, og arbejde



¹ Illustration III side 10 i det udleverede kompendium: *Funktionsbegrebet – Set med historiske nutidige og briller*

² Illustration på side 181 i den udleverede artikel: *Teori og redskab 1 tal og funktioner, en lærerbog for matematisk gymnasium s. 179-184*

Debatten om den svingende streng
Basisgruppe 2.
Avedøre Gymnasium

med flere funktioner, fordi han ønskede at anvende differentialregningen på kurverne. Eulers nye funktionsbegreb vandt ikke generel indpas i samtidens matematik, og blev ikke brugt i særlig grad i den følgende tid. Matematikerne var så vant til at tænke i de algebraiske baner, at de ikke rigtig kunne forstå det udvidede funktionsbegreb, der brød med de pæne egenskaber, som man tillagde de analytiske udtryk. D'Alembert var blandt andre en af dem som rejste stærk kritik mod Euler. Han mente at det var snyd, og mod alle 'analysens regler'³.

Det havde den påvirkning at Eulers udvidede funktionsbegreb ikke blev særligt udbredt i forhold til den praktiske anvendelse.

³ Funktionsbegrebet udvikling fra Euler til Dirichlet af Jesper Lützen s. 16-19

Euler, Dirichlet og det samfund de levede i

I det attende århundrede var undervisning og forskning i matematik stærkt opdelt. Universiteterne var meget lagt op om filosofien og de klassiske traditioner og der var ikke plads til udvikling af ny videnskab. Derfor blev der undervist og ikke forsket i ny matematik.

Forskningen i matematik blev derimod lavet på akademier rundt omkring i Europa. Akademierne blev finansieret af landenes monarker, da det var meget prestigefuldt at have kendte og respekterede videnskabsmænd tilknyttet éns akademi.

De forskere der arbejdede på disse akademier udførte brevvekslinger med andre matematikere rundt omkring i Europa og kunne dermed diskutere deres nye teorier med ligesindede, som kunne kritisere og udbygge dem i fællesskab med dem.

En af de mænd der bla. var tilknyttet til nogle af disse akademier var Leonhard Euler.

Leonhard Euler var en schweizisk matematiker og fysiker, han levede fra 1707-1783.¹ Han var en utroligt produktiv mand der udgav 530 bøger og artikler², og selv da han mistede synet på sit højre øje udtalte han blot: *"Så er der mindre der kan distrahere mig"*.³ Han er kendt for at have systemiseret matematikken ved at introducere de græske symboler. Selv introducerede han følgende symboler: e som ligesom π et infinitivt tal, e^x for den naturlige eksponentialfunktion og i som er et sumtegn. Desuden var han manden bag funktionsbegrebet: $f(x)$.⁴

I 1789 brød revolutionen ud i Frankrig og styreformen blev ændret fra at være enevælde til at være demokrati. Dette påvirkede ikke kun Frankrig, men også mange andre af de europæiske lande. Idéen om demokrati stammede fra naturen, som gik ud på at alle var født lige og frie.

Det var især i Frankrig at undervisningen og forskningen i matematik foregik, men dette ændrede sig drastisk efter revolutionen. I 1793 reformerede de nye magthavere hele systemet. De mente at undervisningen skulle komme folket til gode og man lukkede derfor de fleste akademier og universiteter. I stedet blev der især undervist i praktisk matematik, lagt op på at Frankrig skulle have et effektivt militær. Det var nu ikke forskning der blev lagt vægt på, men undervisningen.

¹ Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb. S. 13.

² Matematikkens Historie. - Af Dirk J. Struik.

³ <http://blog.gaiam.com/quotes/authors/leonhard-euler>

⁴ <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Euler.html>

Underviserne skulle nu fremlægge og diskutere ny matematik med de studerende.

Den nye forskning blev udgivet af matematiske publikationer så flere matematikere og studerende fik kendskab til denne.

En af disse undervisere og forskere var Johan Peter Lejeune Dirichlet.

Johan Peter Lejeune Dirichlet, blev født i Düren i Tyskland d. 13. februar 1805 og døde d. 5. maj 1859. Han var en kendt matematiker fra 1800-tallet og han var især kendt for Dirichlet funktionen og Dirichlet eta funktionen. Dirichlet arbejdede som underviser ved universitetet i Paris op til 3 gange og han fortjener i høj grad ære for at have formidlet den tyske matematiker Gauss' ideer til en bredere kreds af matematikere. I efteråret 1828 ankom Dirichlet til Berlin og blev tilknyttet militærakademiet, hvor han underviste dannede mænd på hans egen alder i matematik. Efter at have forsket og undervist i adskillige årtier, flyttede han i en alder af 50 år fra Berlin til Universitetet i Göttingen, hvor han overtog en stilling efter Gauss. Her arbejdede han i 4 år indtil at han i 1859 døde af en hjertesygdom.^{5 6}

Dirichlet var en af de første matematikere til at deltage i en ny matematisk tradition, i en ny måde at arbejde med matematikken på efter 1793. Eftersom undervisningen nu var i fokus med forelæsninger, eksamener og seminarer blev det nu andre ting der blev lagt vægt på, da matematikken især skulle kunne videreformidles. Derfor begyndte man at interessere sig langt mere for matematisk stringens og organisation af begreber. Denne måde at arbejde med matematik afspejler sig helt op til i dag.

⁵ <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Dirichlet.html>

⁶ Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb. S. 57-59.

Skrevet af

Avedøre Gymnasium

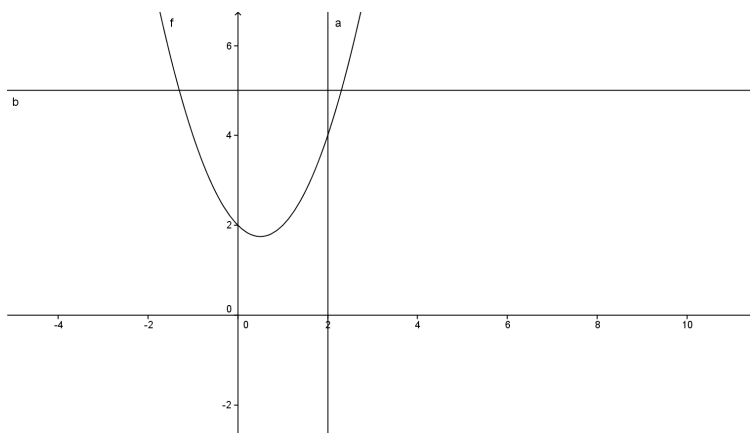
Det moderne funktionsbegreb

1. Tekst A – E indeholder hver især en nutidig funktionsdefinition. Hvad er de centrale begreber i disse definitioner? Hvordan ligner de hinanden, og hvordan adskiller de sig fra hinanden? Kan I ud fra disse tekster sige noget samlet om, hvad man forstår ved en funktion i dag?

- Vi vil gerne redegøre for de nutidige funktionsdefinitioner, som tekst A – E indeholder. Vi vil gerne undersøge hvordan definitionerne ligner og adskiller sig fra hinanden. Udfra det vil vi gerne forklare generelt hvad man forstår ved en funktion i dag.

I tekst A

Man definerer en funktion som en regneforskrift. Til enhver x-værdi svarer der én y-værdi, hvis der er flere y-værdier til en x-værdi er det ikke længere end funktion. Men på den anden side må der godt være flere x-værdier til en y-værdi, f.eks. her på dette billede. Man kan se på linje a, at til x-værdien 2 er der kun én y-værdi 5, og til y-værdien 5 er der 2 x-værdier f.eks. 2 og -2.



I ligninger går det ud på at finde ud af hvad x er (eller den ukendte), men i funktioner er problemet ikke at finde x. Det er at undersøge hvilke sammenhørende værdier af x og y der tilfredsstiller ligningen. Det grundlæggende er at hvis du kender x, kan du regne y ud. Og udfra det har man fundet, kan man så lave en graf eller tabel.

I tekst B-E

Her bliver der defineret hvad en definitionsmængde er og en værdimængde. En definitionsmængde er den mængde tal som funktionen knytter y til, dvs. x'erne. Det er de værdier man overhovedet kan

Skrevet af

Avedøre Gymnasium

tale om i forhold til en funktion. Hvis nu funktionen beskriver en kvadratrod af et x , vil definitionsmængden være alle tallene (inden for x), undtagen de negative tal – fordi man ikke kan tage kvadratrod af negative tal. De værdier vi derimod finder på y -aksen er værdimængden, fordi det er det er altså de værdier vi får, når vi lader x gennemløbe hele definitionsmængden – dvs. y -værdierne. Ellers er det på samme måde ligesom værdimængden.

Tekst C-E forklarer det samme som der står i tekst b – de forklarer det bare på mere komplicerede måder. De forklarer f.eks. gennem forskrifter og tegninger, at til hvert y hører der et x og omvendt – dvs. der kan ikke være flere x 'er til 1 y .

Tekst B-E ligner hinanden da de definerer funktioner gennem definitionsmængden og værdimængden, mens tekst A kun koncentrerer sig om en funktion som en regneforskrift.

I dag forstår man ved en funktion en sammenhæng mellem x og y . En funktion kan vises som en forskrift, graf og tabel. En funktion går ud på at finde ud af hvilke sammenhørende værdier der tilfredsstiller x og y – dvs. det handler altså ikke bare at finde x som i almindelige ligninger.

2. Tekst A og C indeholder en forklaring af, hvad en graf er. Hvad er de centrale begreber i disse forklaringer? Hvordan ligner de hinanden, og hvordan afskiller de sig fra hinanden? Kan I ud fra disse to tekster sige noget samlet om, hvordan man forstår forholdet mellem en funktion og en graf i dag? Hvordan forstår I selv forholdet mellem en funktion og en graf?

Vi vil gerne redegøre for de centrale begreber om hvad en graf er i tekst A og C. Vi vil gerne undersøge hvordan begreberne adskiller sig fra, og ligner hinanden, samt forklare hvad man forstår ved forholdet mellem en funktion og en graf.

I tekst A bliver en graf forklaret som et grafisk billede af en funktion. Der menes at jo flere grafiske billeder man kan lave i hovedet, jo lettere er det at se sammenhængen og ændringen for sig når man f.eks. taler om en forskrift, og dermed bestemme om det er en lineær, eksponentiel eller en potenssammenhæng.

I tekst C bliver grafen, også kaldet det grafiske billede, af en funktion forstået ved punktmængden. Dvs. at de tal man bliver oplyst, som gælder for x og y , bliver dannet til x - og y punkter i en graf.

De to tekster adskiller sig fra hinanden på den måde at tekst A kommer mere med et visuelt billede om en graf og snakker om at sammenhængen gør det nemmere at kunne forestille sig hvordan det ville se ud, mens tekst c kun snakker om en graf ud fra punktmængden.

Skrevet af

Avedøre Gymnasium

Forholdet mellem en funktion og en graf er, at en graf er et visuelt billede af en funktion. En funktion er sammenhængen mellem x og y , som bla. kan blive vist gennem en graf, ligesom den kan vises i form af en tabel og en forskrift. En graf giver i modsætning til en tabel og en forskrift, et godt billede af om funktionen viser en stigning eller en hældning.

3. På side 10 er der fire billeder. Hvilke af disse billeder er grafer for funktioner? Begrund jeres svar.

Billede nr. 1, 3 og 4 er billeder af grafer for funktioner, fordi at en y værdi kun har en x værdi. Og billede nummer 2 har 2 x 'er i en y værdi, og det er ikke nogen graf for en funktion. Og derfor er det kun 1,3, 4 som er grafer for funktioner, fordi de netop kun har en x -værdi per y -værdi – og dette er en grundlæggende regel når vi snakker om funktioner.

4. Hvad er en definitions­mængde og en værdimængde?

En definitions­mængde er den mængde tal som funktionen knytter y til, dvs. x 'erne. Det er de værdier man overhovedet kan tale om i forhold til en funktion. Hvis nu funktionen beskriver en kvadratrods af et x , vil definitions­mængden være alle tallene (inden for x), undtagen de negative tal – fordi man ikke kan tage kvadratroden af negative tal. De værdier vi derimod finder på y -aksen er værdimængden, fordi det er det er altså de værdier vi får, når vi lader x gennemløbe hele definitions­mængden – dvs. y -værdierne. Ellers er det på samme måde ligesom værdimængden.

5. Hvorfor er definitions­mængde og værdimængde ikke ligegyldige begreber, når man snakker om funktioner? Kan I komme på eksempler, hvor det er nyttigt at kende til definitions­mængden og værdimængden for en funktion?

Begreberne definitions­mængde og værdimængde er ikke ligegyldige begreber når man snakker om funktioner, fordi det er grundlæggende at man skal kende x -værdierne (definitions­mængden), for at finde y -værdierne (værdimængden), som udgør en funktion. Dette er bare begreber man bruger så det bliver nemmere at adskille de forskellige værdier.

Det kunne f.eks. være nyttigt at bruge disse begreber hvis man skulle lave en graf over hvordan befolkningstallet er steget gennem tiden i Danmark, så er det vigtigt at kende x (definitions­mængden), ellers kan man ikke finde ud af hvad y (værdimængden) er.

Skrevet af

Avedøre Gymnasium

6. Hvad er et bevis? Støt jer evt. til, hvad jeres lærebog skriver om beviser.

Et bevis er en argumentation, der så at sige får en til at acceptere og forstå påstanden. Et bevis er et bevis for at f.eks. Pythagoras sætning er gældende inden for matematikken. Man har altså en påstand som man så versificerer, det kan altså også ske at påstanden bliver falsificeret og bliver hermed ikke noget bevis.

Matematiske beviser er en udledning af en formel, sætning eller et udtryk. Det kan bestå i at vise at et udsagn/udtryk er korrekte ved hjælp af logik og matematik.

7. Hvorfor er beviser nødvendige i arbejdet med funktioner? Hænger det sammen med, hvor mange (eller hvor få) egenskaber, vi uden videre kan sige, at alle funktioner besidder?

Fordi at det er dem der sikrer at reglerne og formlerne er rigtige. Dvs. For enhver lineær funktion så skal man kende noget bestemt. I dette tilfælde er det y_1, x_1, y_2 og x_2 for at regne beviset. Det er vigtigt at vide hvorfor alle de formler, f.eks. ligningen for eksponentialfunktioner $y = b + a^x$ kan bruges, og kende baggrunden for det så man lettere forstår hvorfor den ser ud som den gør. Det kan være svært at forstå matematikken, hvis man bare får smidt en masse ligninger og påstande i hovedet, uden at forstå hvor de kommer fra og hvordan de virker – altså sammenhængen.

D Formuleringen af artikelopgaven

I dette bilag findes opgaveformuleringen til den artikelopgave, som eleverne arbejdede med i ekspertgrupperne. Rent layoutmæssigt bør læseren være opmærksom på, at rapportens sidetal ikke er vist i bilaget.

Artikelopgave

Der er opstået en hed debat blandt to grupper af matematikere om, hvordan et matematisk begreb som f.eks. en funktion bliver til, og hvad der styrer udviklingen af det. Den ene gruppe siger, at matematiske begreber er statiske begreber, der ikke påvirkes af menneskelige og samfundsmæssige faktorer. Matematiske begreber er altså for denne gruppe noget, som mennesker kan opdage, men ikke påvirke. Derudover udvikler et matematisk begreb sig ikke. Det centrale i det vil altid forblive det samme, selvom den måde, mennesker taler om det på, kan ændres over tid.

Den anden gruppe i debatten mener, at matematiske begreber er produkter af menneskelig aktivitet og samfundsmæssige påvirkninger. Begreberne er med andre ord noget, mennesker har opfundet. Derudover er et matematisk begreb et resultat af en lang udviklingsproces, i løbet af hvilken både menneskenes måde at tale om begrebet på og selve de centrale idéer i begrebet har ændret sig.

Tidsskriftet NORMAT har inviteret jer til at give jeres bidrag til debatten ved at skrive en artikel, der præsenterer jeres synspunkt i sagen, til tidsskriftet. I skal argumentere for jeres synspunkter med den viden, I har opnået om funktionsbegrebet. NORMAT kræver, at I i jeres artikel forholder jer til og diskuterer følgende fire problemstillinger:

- Eulers funktionsbegreber, Dirichlets funktionsbegreb og funktionsbegrebet i dag: Er der aspekter af de nævnte funktionsbegreber, der er uforenelige med hinanden, eller er de forskellige funktionsbegreber i virkeligheden forskellige formuleringer af det samme funktionsbegreb? Overvej hvordan forholdet er mellem Dirichlets funktionsbegreb og det funktionsbegreb, som vi benytter i dag.
- Den variables generalitet, analysens generelle gyldighed, definitionsængde, værdimængde og bevis: Kan udviklingen i holdningen til og brugen af disse principper og begreber bidrage med noget til den overordnede debat? Diskuter dette spørgsmål med udgangspunkt i, hvad Euler mente, hvad Dirichlet mente, og hvad vi mener i dag.
- De samfundsmæssige faktorer: Har samfundsmæssige omvæltninger som f.eks. revolutioner noget at skulle have sagt i forhold til den måde, matematik bliver udviklet på? Eller er matematikken hævet over den slags påvirkninger? Diskuter om arbejdsforholdene for matematikere på hhv. Eulers og Dirichlets tid kan have påvirket den måde, hvorpå hhv. Euler og Dirichlet arbejdede med matematik.
- De menneskelige faktorer: Kan mennesker via deres indsigter, handlinger og holdninger påvirke, hvilken retning udviklingen indenfor matematik tager, og hvordan matematiske begreber generelt bliver opfattet? Diskuter, hvilken betydning Eulers præsentation af sit udvidede funktionsbegreb og hans samtidige matematikkollegers holdning til denne udvidelse har haft for udviklingen af funktionsbegrebet. Diskuter i forbindelse med dette, hvilken betydning debatten om den svingende streng har haft for funktionsbegrebet, og hvorfor denne debat i det hele taget opstod.

Udover disse krav til det faglige indhold i jeres artikel har NORMAT opstillet følgende *Vejledning til forfattere*, som indeholder en række generelle krav til artikler, der skal udgives i tidsskriftet (og som jeres artikel derfor også skal opfylde):

Vejledning til forfattere

- Artiklen skal være på ca. 6 sider.
- Artiklen skal indledes med en kort introduktion, der præsenterer det, der står i resten af artiklen.

- Artiklen skal afsluttes med en konklusion, hvor der samles op på de argumenter og pointer, der er præsenteret i artiklen, og hvor artiklens overordnede budskab kommer klart til udtryk.
- Artiklen skal indeholde kildehenvisninger til de kilder (både historiske og sekundære), som er blevet benyttet. Citater til at understrege pointer er meget velsete.
- NORMAT's læsere er folk, der generelt er temmelig kompetente indenfor matematik. Det kan f.eks. være gymnasielærere i matematik, matematikere ved forskellige universiteter og matematikstuderende ved universiteterne. Artiklen skal skrives på en sådan måde, at disse folk vil være interesserede i at læse den.

Når I skriver jeres artikel, skal I huske på, at selvom NORMAT's læsere generelt er ret kompetente indenfor matematik, er det ikke dem alle, der besidder den samme viden om funktionsbegrebet og historien om det, som I gør. I bliver derfor nødt til at ridse baggrunden for jeres argumenter op, så alle kan følge med i jeres tankegang. Når I nævner Euler og Dirichlet, bliver I også nødt til kort at skitsere, hvem de var.

Jeres artikel skal afleveres d. 29. november. Hver ekspertgruppe skal aflevere én samlet artikel.

E Elevernes besvarelser af artikelopgaven

I dette bilag findes hver af de fire ekspertgruppers artikelopgaver. Rent layoutmæssigt bør læseren være opmærksom på, at rapportens sidetal ikke er vist i bilaget. Derimod er de sidetal, som findes i bilaget, de oprindelige sidetal fra elevernes opgaver.

Debatten om funktionsbegrebet

Af

Siden funktionsbegrebets begyndelse har der været en overhængende debat, hvorvidt det var brugbart eller ej. Dette har ført til flere ændringer og nyfortolkninger af hvordan man beskriver en sammenhæng, som funktionsbegrebet gjorde. Disse nyfortolkninger har ledt til en ny overhængende debat, omgående hvorvidt matematiske begreber er menneskeskabte eller kommer fra naturen.

Eulers første funktionsbegreb havde ifølge mange matematikere op til flere problemer. Derfor bestemmer Dirichlet et nyt funktionsbegreb, der bygger på nogle noget anderledes regler. Siden hen er dette begreb blevet modificeret til hvad vi har i dag. Når man så ser på den sammenhæng der er imellem de 4 funktionsbegreber. Helt grundlæggende så var Dirichlet og Euler meget uenige i deres definition af funktionsbegrebet. Kort sagt så byggede deres begreber på vidt forskellige regler, hvilket gør dem uforenelige. Det moderne funktionsbegreb har noget mere til fælles med Dirichlet en hvad Euler havde. De grundlæggende regler bygger nemlig på de samme idéer, og hvis man vælger at benytte Dirichlets regler frem for Det Moderne Begrebs regler, så er det ikke ilde set. Forholdet imellem de to definitioner er derfor meget nært. Dette må betyde at Dirichlet og Euler ville løse de samme problemstillinger, men på hver deres uforenelige måde. Det kunne de også, eller det kunne næsten. For det var hele idéen med

kritikken af Eulers funktionsbegreb. Han kunne beskrive og forklare en hel del funktioner og deres sammenhæng, bare ikke alle. Så hans funktionsbegreb var ikke forkert, det var bare ikke fyldestgørende, i nogle sammenhæng. I takt med at flere funktionsbegreber blev defineret ændrede forholdet til funktioners grundbegreber sig også. Eksempelvis bliver forholdet til den variables generalitet ændret, da Dirichlets funktionsbegreb bygger på en anden fortolkning af en diskontinuert funktion, i forhold til Eulers fortolkning. Hvilket var muligheden for et bestemt endepunkt. Tolkningen af værdimængden og definitions mængden har betydet en ændring i opfattelsen af begreberne kontinuert og diskontinuert. Sådanne ændrede opfattelser og fortolkninger, præger tydeligvis præg af en udvikling i ikke kun matematikken men også i samfundet. Hvilket betyder at grundlæggende matematiske begreber kan ændres med tiden, via en human påvirkning.

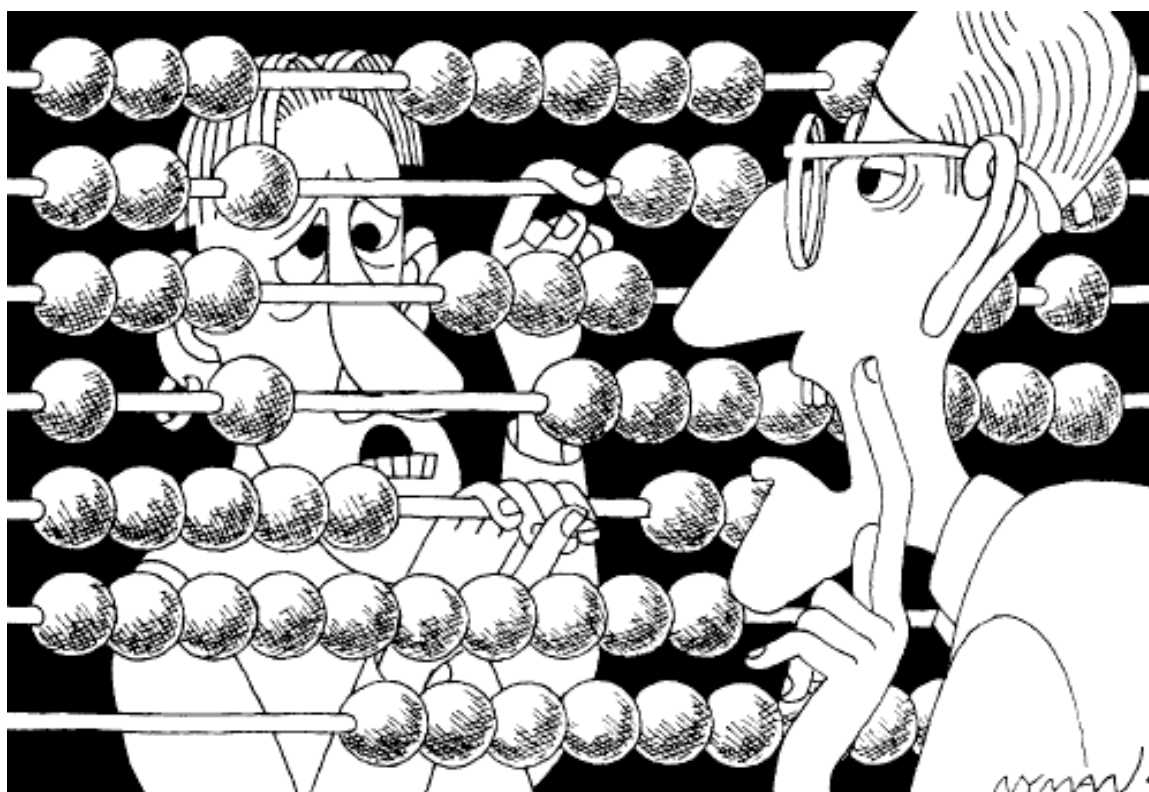
Mennesket som en faktor

Udviklingen i funktionsbegreberne siden Eulers første begreb har været massiv. Holdninger og fortolkninger til de grundlæggende begreber inden for funktionsbegrebet har desuden ændret sig massivt. Ændringen af disse holdninger og fortolkninger har som forståeligt været en betydningsfuld faktor for hvilket funktionsbegreb man anser/anså som værende det bedst brugbare. Derfor må udviklingen i funktionsbegreberne blandt andre ting skyldes menneskets holdninger og fortolkninger som vigtige faktorer. Eksempelvis mente nogle af Eulers samtidige matematikere at hans udvidede funktions begreb ikke burde benyttes, fordi det var snyd for matematikkens grundprincipper. Dette betød at Eulers udvidede funktionsbegreb aldrig kom til at blive benyttet efter hensigten, og et nyt funktionsbegreb blev lavet af Dirichlet.

*Ekspertgruppe:
Avedøre Gymnasium
29/11-2010*

Funktionsbegreber

- **set med historiske og nutidige
briller**



To grupper af højtstående matematikere er blevet uenige om hvordan funktionsbegreber opstår og hvilke faktorer der afgør udviklingen af disse. Den ene gruppe påstår at udviklingen af funktionsbegreberne er uafhængig af de samfundsmæssige faktorer og at de er statiske begreber, som vi mennesker ikke har indflydelse på, hverken i form af opstandelse eller i udviklingen – det er kun noget vi kan opdage.

Den anden gruppe af matematikere påstår derimod at begreberne er et resultat af menneskelig aktivitet og samfundsmæssige påvirkninger, og at vi har stor indflydelse på både opstandelse og udvikling af disse begreber.

Vi vil på tidsskriftet *NORMAT* gå i dybden med disse holdninger og analysere os frem til en mulig konklusion på denne debat.

Johan Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) var en kendt matematiker, født i Tyskland, men arbejdede som underviser i Paris. I 1828 blev han tilknyttet militærakademiet i Berlin og

Ekspertgruppe:
Avedøre Gymnasium
29/11-2010

underviste jævnaldrende mænd i matematik. I en alder af 50 overtog han en stilling efter Gauss på et universitet i Göttingern, her arbejdede han i 4 år indtil han døde af en hjertesygdom i 1859.

Dirichlet mente at man kunne nøjes med en bestemt mængde på x-aksen, fx mellem 7 og 10, mens Euler ikke mente at man kunne nøjes med en bestemt mængde. Han skabte definitionsmængden og sagde at x-variablen skulle være alle tal – enten det hele eller ingenting. Også kaldet variabelens generalitet.

Leonhard Euler(1707-1783) var matematiker og fysiker fra Schweiz, han udgav i alt 530 bøger og artikler. Han er bla. Kendt for at have introduceret de græske symboler, som systematiserede matematikken. Desuden opfandt han funktionsbegrebet: $f(x)$.

Eulers funktionsbegreb var det første rigtige begreb, derefter kom Dirichlets til – og som er det funktionsbegreb der minder mest om det vi har i dag.

Eulers funktionsbegreb ligner derimod ikke det funktionsbegreb som vi bruger i dag, fordi han mente at alle tallene på x-aksen skulle bruges. Fx i potensfunktioner eller i funktioner med en kvadratrods – da kan man ikke bruge alle tal, fordi man ikke i denne sammenhæng kan regne med negative tal.

Dirichlet og Euler var dog enige på et punkt som det moderne funktionsbegreb ikke er enig i, om de diskontinuerte og kontinuerte funktioner. Dirichlet og Euler mente at en knipset streng var en diskontinuert funktion, mens vi i dag ville opfatte en sådan som kontinuert. En diskontinuert funktion ville være, hvis de to strenge ikke rørte hinanden, ifølge det moderne funktionsbegreb.

Før 1793 var det et fåtal af matematikere der diskuterede funktionsbegreberne i matematikken, men efter 1793 foregik diskussionen og kritikken af funktionsbegreberne blandt mange flere mennesker, på universiteterne. På den måde havde samfundet en større påvirkning på funktionsbegreberne, da det foregik blandt mange flere mennesker og hvis de ikke anerkendte det, ville begrebet ikke blive anvendt.

**Ekspertgruppe:
Avedøre Gymnasium
29/11-2010**

Den franske revolution brød ud i 1789 og den havde stor indflydelse på udviklingen af funktionsbegreberne. Der kom drastiske ændringer i 1793 hvor man lukkede de fleste akademier og universiteter, man lagde mere vægt på praktisk politik – undervisningen skulle nemlig komme folket til gode. Det var nu ikke forskningen der blev lagt vægt på, men undervisningen.

Dvs. at matematikken altså ikke var hævet over de samfundsmæssige faktorer.

Som ovenstående beskriver, har menneskelige indsigter haft stor påvirkning på udviklingen indenfor matematikken. Netop pga. at det efter 1793 blev præsenteret for langt flere mennesker, som fremsatte flere kritikpunkter og hvis begreberne ikke vandt indpas blandt disse, ville begreberne ikke komme i anvendelse.

I 1748 fremsatte Euler et funktionsbegreb der sagde at en funktion for en variabel er et udregningsudtryk sammensat på en hvilken som helst måde, dog skulle udtrykket indeholde en variabel samt et til flere konstanter – dette betød at funktionerne ville være kontinuerte. Samme år udvider Euler sit funktionsbegreb til også at kunne være diskontinuert.

Det nye funktionsbegreb vandt ikke generel indpas blandt samtidens matematikere.

Matematikerne var så vant til at tænke i de algebraiske baner, at de ikke rigtig kunne forstå det udvidede funktionsbegreb, der brød med de pæne egenskaber, som man tillagde de analytiske udtryk.

Eulers matematikkolleger havde derfor den påvirkning at Eulers udvidede funktionsbegreb ikke blev særligt udbredt i forhold til den praktiske anvendelse.

Så vores konklusion her på **NORMAT**, er at samfundet har haft en stor påvirkning på udviklingen af disse funktionsbegreber, som bevist af den efterfølgende tid fra den franske revolution. Desuden har samtidens matematikere og kollegaer også haft stor indflydelse på udviklingen og udbredelsen af funktionsbegreberne. Således, altså via menneskelige indsigter og meninger, er de matematiske udtryk opstået, og vil fortsætte med at opstå.

Er matematiske begreber statiske begreber, der ikke påvirkes af menneskelige og samfundsmæssige faktorer? Eller er disse begreber produkter af menneskelige aktiviteter og samfundsmæssige påvirkninger?

I denne artikel vil disse store spørgsmål blive besvaret ved hjælp af blandt andet en kort gennemgang af henholdsvis Euler og Dirichlet som personer, deres funktionsbegreber og det moderne funktionsbegreb. For derefter at kunne sammenligne disse, samt undersøge om de samfundsmæssige forhold de levede under påvirkede den måde de og samtidens andre matematikere forskede på.

Vores håb er at dette vil sætte gang i en stor, interessant debat og at også *du* vil deltage.

Leonhard Euler og Johan Peter Lejeune Dirichlet var matematikere fra to vidt forskellige epoker, men de to herrer udgjorde begge en stor del af forhistoriens matematiske forskning. I det attende århundrede var forskningen især tilknyttet akademierne, som blev finansieret af konger og adelige. Leonhard Euler var fra netop denne tid.

Leonhard Euler var en schweizisk matematiker og fysiker, han levede fra 1707-1783.¹ Han var en utroligt produktiv mand der udgav omkring 530 bøger og artikler,² og selv da han mistede synet på sit højre øje udtalte

han blot: ”*Så er der mindre der kan distrahere mig*”.³

Han er kendt for at have systematiseret matematikken ved at introducere de græske symboler. Selv introducerede han følgende symboler: e som ligesom π et infinitivt tal, e^x for den naturlige eksponentialfunktion og i som er en forkortelse af kvadratroden af -1 . Desuden var han manden der fandt på, at kalde en funktion: $f(x)$ i forbindelse med arbejdet med sine funktionsbegreber.⁴

Det mest centrale i Eulers første funktionsbegreb var dog, at en funktion var ét samlet analytisk udtryk og at der både fandtes

¹ Fourier og Funktionsbegrebet – overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb. S. 13.

² Matematikkens Historie. - Af Dirk J. Struik.

³ <http://blog.gaiam.com/quotes/authors/leonhard-euler>

⁴ <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Euler.html>

funktioner med én værdi og funktioner med flere værdier.

Derudover mente Euler, at en funktion blev sammensat vha. variable størrelser, tal i konstante størrelser samt de analytiske udtryk, som vi også bruger i dag (-, +, /, * og roduddragning).

Euler gjorde brug af et princip der kaldtes *den variables generalitet*, hvilket vil sige, at det ⁵ var en form for beskrivelse af den generelle variabel.

Euler definerede i sin tid en konstant størrelse, som værende en størrelse der havde samme værdi uanset hvad.

Hvorimod han definerede en variabel som værende en størrelse, som kunne have en hvilken som helst værdi, en værdi hvor altså det var ligegyldigt at bestemme og præcisere dennes mængde.

"A variable quantity is one which is not determined or is universal, which can take on take any value."

– Euler, 1988. Art 2.

Ifølge princippet om den variables generalitet, som især Euler benyttede, kan den variable antage en vilkårlig værdi såsom tal eller ⁶ symboler hvorimod Dirichlet mente, at den

⁵

Kommer af tysk *generell*, og latin *generalis* hvor det betyder 'almindelig'

⁶

Læs om Dirichlets funktionsbegreb senere i

variable kun skulle befinde sig indenfor det givne interval, a og b.

Derudover mente Euler præcis som i dag, at den ene variabel (y) var afhængig af den anden variabel (x) og at hvis der var flere y-værdier var det altså ikke en funktion.

Herudover forekom der ifølge Eulers første funktionsbegreb sjældent nogen knæk på kurverne, men disse funktioner kunne til gengæld altid differentieres.

Hvorimod Euler i sit udvidede funktionsbegreb indførte det der kaldtes diskontinuerte funktioner, hvilket betød at der kunne være såkaldte 'knæk' i nogle af punkterne på kurverne, dog var kurverne stadig sammenhængende dvs. funktionerne var altså stadig kontinuerte i ordets nutidige forstand.

Disse diskontinuerte funktioner kunne altså *ikke* repræsenteres ved ét analytisk udtryk, men skulle defineres i forskellige intervaller og de var ofte svære at differentiere.

Endvidere havde Leonhard Euler også indflydelse på *analysen* der opstod i begyndelsen af 1700-tallet, som en udvidelse af algebraen. Euler arbejdede især med en rækkeudvikling af tidligere udtryk, der nemlig tit og ofte endte med underlige resultater.

artiklen

Da alle analysens udsagn blev set som værende generelt korrekte og troværdige, blev denne kaldt for *analysens generelle gyldighed*.

Dette resulterede i, at matematikerne troede, at når de havde vist noget gjaldt i én sammenhæng, så måtte det jo gælde generelt.

Derfor er mange af beviserne fra denne tid, blot et resultat af én undersøgelse der så generaliseredes.

Denne tillid til analysens generalitet kan også tydeliggøres yderligere, for eksempel mente Euler at alle funktioner kunne opstilles i uendelige rækker, fordi han igen tog udgangspunkt i et resultat hvor denne fremgangsmåde havde virket.

Denne tankegang prægede især tiden før 1793 hvor matematiske forskere fra forskellige akademier rundt omkring i Europa, selv kunne styre hvordan de ville udvikle deres teorier. Dette kunne de gøre, da der ikke var et krav i samfundet om at disse skulle diskuteres. En evt. diskussion skete på eget initiativ med en anden matematiker via en brevveksling. Som regel en anden matematiker med samme synspunkter.

Som førnævnt var Johan Peter Lejeune Dirichlet også en af forhistoriens store matematikere, han blev født i Düren i

Tyskland d. 13. februar 1805 og døde d. 5. maj 1859. Han var en kendt matematiker fra 1800-tallet og han var især kendt for Dirichlet funktionen, der gik ud på at der for hvert x kun var ét y , og dermed også kun ét resultat for hvert x , og derudover at a og b var to tal på x -aksen og at x *skulle* befinde sig imellem disse to.

Endvidere mente Dirichlet, at funktioner ikke nødvendigvis behøvede, at være givet ved formler eller regneudtryk.

Hvilket bestemt ikke stemmer overens med nutidens syn på funktioner, da vi i dag netop ser en funktion som værende en form for regneudtryk.

Dirichlet mente at resultatet, altså y afhang af a , b og ikke mindst af x .

”...at mens x kontinuerligt gennemløber intervallet fra a til b forandrer $y = f(x)$ sig ligeledes gradvist, så kaldes y en kontinuert [...] funktion af ...” (tekst 3)

Dirichlet mente også at både x og y kunne være begrænsede, specielt y da den som sagt afhang utvivlsomt af både a , b og x .

Dette var som sagt **imod** Eulers overbevisning, da han mente at variabler var 'vilkårlige elementer' og at der ikke behøvede være nogen begrænsning på netop disse variable.

Dirichlet var fra en helt anden tid end Euler. Han skulle nemlig diskutere sine teorier med andre matematikere og studerende før man kunne tale om, at teorierne var gennemarbejdet og dermed gyldige. Dette blev indført i 1793 i Frankrig som følge af den franske revolution i 1789 og spredte sig hurtigt til resten af Europa. Der blev især lagt vægt på matematisk stringens og organisering af begreber.

Dette er stadig gældende i dag.

Selv mener vi at matematiske begreber *er* styret af udefrakommende påvirkninger og menneskelige aktiviteter, og at matematiske begreber *ikke* er statiske begreber. Dette har vi konkluderet ud fra hvad vi, i dette matematik-historiske forløb, har lært om udviklingen inden for matematisk forskning på henholdsvis Eulers og Dirichlets tid. Det var en omstrukturering fra, at forskning kun foregik på akademierne, til at forskning skulle

kunne diskuteres af alle med en smule indsigt i matematik. Euler mente at matematiske begreber var statiske, mens at Dirichlet var uenig i dette da han var fra en anden tid hvor dette skulle diskuteres, han skabte sit eget funktionsbegreb dog til at beskrive et helt andet problem end Euler, men derfor kan man stadig tale om en videreudvikling af begrebet ”en funktion”.

I dag ved vi, at selvom alle de funktionstyper og begreber der findes i dag hver især er til for at beskrive hver deres problem, kan man stadig tale om en mere specifik videreudvikling af idéen om et funktionsbegreb. Desuden har eftertiden fundet nye måder at udtrykke mange forskellige begreber på.

Matematiske begreber er ikke statiske, ikke hvis man skal se på historien og dens logiske sammenhænge.

Matematik gennem tiden

Vi er fire studerende der i denne artikel vil diskutere matematik gennem tiden. Vi vil derfor diskutere Eulers første funktionsbegreb (Det Eulerske funktionsbegreb), Eulers udvidede funktionsbegreb (Det udvidede funktionsbegreb), Dirichlets og det moderne funktionsbegreb. Derudover vil vi komme ind på den variables generalitet, analysens generelle gyldighed, definitionsmængde, værdimængde og bevis, og om vi stadig bruger disse principper i dag. Endvidere vil vi også diskutere om samfundet har haft en påvirkning på matematik og om mennesker via. deres holdninger, handlinger og indsigter kan påvirke matematikken.

I dag forstår man ved en funktion en sammenhæng mellem x og y . Ved dette menes at y er afhængig af x , dvs. at y er den afhængig variable, mens x er den uafhængig variable. Ifølge det moderne funktionsbegreb kan en funktion vises som en graf, tabel og forskrift. En funktion går i dag ud på at finde ud af hvilke sammenhørende værdier tilfredsstiller ligningen.

Dirichlet mente at funktioner ikke behøvede være formler og regneudtryk, hvilket Euler var uenig med.

Forskellen mellem Euler og Dirichlet er at Euler mente at x -værdien havde flere y -

værdier, altså flere resultater, mens Dirichlet mener at x -værdien kun har en y -værdi. Han mente også at funktioner ikke behøvede være formler og regneudtryk, hvilket Euler heller ikke enige med. I dag er vi enige med Dirichlet og bruger derfor hans funktionsbegreb.

Eulers funktionsbegreb ændrede sig også gennem tiden. I hans første funktionsbegreb siger han at en funktion er skrevet med kun et analytisk udtryk, mens han i hans udvidede funktionsbegreb skriver at en funktion er beskrevet med flere analytiske udtryk. Ifølge Euler måtte en funktion selv være en variabel størrelse, da alle funktioner indeholdte variable størrelser.

Dirichlet mente at y afhang af både a , b og x , hvilket var en direkte modsætning til Euler, som mente at der ikke behøvede være nogen sammenhæng mellem variablerne.

Alle tal på x akse skulle bruges, men det ville give problemer, fordi alle bliver ikke funktioner. Ifølge Euler kunne man ikke begrænse en funktion, men det kunne man ifølge Dirichlet. Han mente at a og b f.eks. kun kunne være 5 og 8. Både Euler og Dirichlet mente at en lineær funktion var en funktion. En diskontinuert var også ifølge dem begge en funktion. Han var dog uenig med Euler om at en parabel var en funktion,

og Euler var uenig med Dirichlet om at en punktmængde var en funktion.

Den variables generalitet er at x i en funktion kan have alle værdier overhovedet. Dette er vi ikke enige med i dag, fordi man f.eks. ikke kan indsætte alle tal i en kvadratrods, såsom negative tal.

Analysens generelle gyldighed går ud på at hvis man har bevist noget får en funktion gælder det samme for alle. Dette er vi heller ikke enige med i dag fordi vi kommer frem til underlige ting. Vores holdning til dette har derfor udviklet sig.

En definitionsmængde er den mængde tal som funktionen knytter y til, dvs. x . Det er de værdier man kan tale om i forhold til en funktion. Hvis nu at der er en funktion som beskriver en kvadratrods af x , vil definitionsmængde være alle tallene inden for x , undtagne negative x 'er. Det er fordi at man ikke kan tage kvadratroden af negative tal.

Værdimængden er de værdier vi derimod finder på y -aksen, fordi det er de værdier vi får, når vi lader x gennemløbe hele definitionsmængden (altså y -værdierne). Ellers er det på samme måde ligesom værdimængden.

Et bevis er en argumentation der kan få et enkelt individ til at acceptere eller blive tvunget til accept og forstå en påstand.

Matematiske beviser er en udledning af en formel, sætning eller et udtryk. Det kan man gøre ved at vise et udsagn/udtryk er korrekt ved hjælp af logik og matematik.

Et bevis har helt klart påvirket den debat der har været gennem tiden, fordi debattørerne på den måde kan vise at et udsagn eller udtryk er rigtigt eller forkert.

Værdi- og definitionsmængden samt beviset er vi stadig enige med i dag.

Den franske revolution

Den franske revolution i 1789, ændrede styreformen i landet. Det gik fra at være enevælde til at være demokrati, det påvirkede ikke kun Frankrig men også resten af Europa. det var specielt i Frankrig, at undervisningen og forskningen i matematik foregik, men dette ændrede sig efter revolutionen. I 1793 mente de nye magthavere at undervisningen skulle komme folket til gode, så man lukkede derfor de fleste akademier og universiteter. I stedet for blev der undervist i praktisk matematik, det var nu ikke forskning man lagde vægt på, men undervisningen og forskningen. Nu skulle underviserne nemlig fremlægge og diskutere ny matematik med dem der studerede. Denne nye forskning blev udgivet af matematiske publikationer, så flere matematikere og studerende fik kendskab til dette.

Dirichlet var en af de første matematikere der deltog i en ny matematisk tradition, det var en ny måde at arbejde med matematikken på efter 1793. Nu når undervisningen var i fokus med forelæsninger, eksamener og seminarer blev det nu andre ting der blev lagt vægt på, da matematikken især skulle kunne viderefremmes. Derfor begyndte man nu at interessere sig langt mere for matematisk stringens og organisation af begreber. Denne måde at arbejde med matematik afspejler sig helt op til i dag.

Det var muligt for mennesker at ændre den retning matematik tog, via deres indsigter, handlinger og holdninger, dette skete bl.a. under den franske revolution, da der blev lavet om på forskningsmetoderne, for at gøre det mere effektivt. For at få klogere undervisere, så samfundet kunne få klogere elever.

Eulers nye funktionsbegreb, gik ud på at den knipset streng kunne beskrives ved to analytiske udtryk, hvilket blev kritiseret af mange, og blev derfor ikke brugt særlig meget. Matematikere var vant til at tænke i de algebraiske baner, hvilket var grunden til at de ikke kunne forstå det udvidede funktionsbegreb. Det førte til at Eulers udvidede funktionsbegreb ikke blev til en stor succes. Især D'Almbert og Dirichlet var imod funktionsbegreb.

Samfundet har haft en stor påvirkning på hvordan matematik har udviklet sig gennem tiden. Både holdninger, handlinger og indsigter har været med til at bestemme funktionsbegrebet i dag. Matematik har derfor udviklet sig markant gennem tiden. Dirichlet og Euler var begge meget omtalte matematikere. De havde hver deres holdninger og påvirkninger på funktionsbegrebet gennem tiden. Også den franske revolution havde den påvirkning at man lukkede universiteter og akademier for at fokusere mere på undervisning og forskning. I dag bruger vi stort set Dirichlets funktionsbegreb, derfor har matematik ændret sig gennem tiden.

F Evalueringsspørgeskemaet

I dette bilag findes det evalueringsspørgeskema, som eleverne besvarede ved forløbets afslutning. Rent layoutmæssigt bør læseren være opmærksom på, at rapportens sidetal ikke er vist i bilaget.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

8) Synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

G Elevernes besvarelser af evalueringsspørgeskemaet

I dette bilag findes indskrevne versioner af de femten afgivne besvarelser af evalueringsspørgeskemaet. Selvom nogle af eleverne skrev navn på deres besvarelse, er alle eleverne i det nedenstående blevet anonymiseret. Grunden til, at jeg har skrevet besvarelserne ind istedet for bare at vedlægge kopier af dem, er, at jeg vil sikre eleverne mod at kunne blive genkendt gennem deres håndskrift. I indskrivningen har jeg forsøgt at holde mig så tæt som overhovedet muligt til elevernes egen stavemåde, tegnsætning og lignende. Pga. computertekniske årsager er spørgeskemaerne her præsenteret i et andet layout end dem, der blev givet til eleverne. Det oprindelige layout kan ses i bilag F.

Besvarelse 1

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har fået det ud af det at dere findes en anden side af måden at arbejde med matematikken på. Jeg kan faktisk godt lide denne måde da jeg synes det spændende og anderledes :-) Thumps up!

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Jeg ved ikke om jeg decideret har lært noget om funktionsbegrebet - men jeg har lært noget om hvordan det var før, hvad tænkte man tilbage i sin tid og hvorfor er det som det er idag. Det synes jeg er en spændende udvikling.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

Ifølge Dirichlet er det når der er et x og ét y . Ifølge Euler er der ingen begrænsning - der kan være uendeligt mange. for hvert tal.

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

De to ting sammen har været forvirrende, det handlede for mig, meget om at holde tungen lige i munden. Jeg tror personligt det havde været federe hvis vi havde vidst det allerede inden - altså hvad en funktion er. (på en ordentlig måde)

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Ja bestemt. Førhen var jeg sikker på matematikkens historie bare var tallene, selvfølgelig vidste jeg godt der var en historie bag funktioner osv. blev opfundet ect. men troede ikke det var noget jeg sådan ville beskæftige mig med og anse som værende spændende.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Det har påvirket mig på den måde at jeg tænker mere over matematikken end førhen. Tænker mere over hvordan man er kommet frem til at regne på de forskellige måder osv.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Jeg synes »almindelige« matematik afleveringer er sværere. I disse grupper supplerer man hinanden på en anderledes måde - hvilket jeg synes er fedt, hvis alle putter ind med lige meget.

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

ja bestemt!

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Det synes jeg er godt, det gør folk mere selvstændige men også rart at der går en lærer rundt samtidig hvis der er brug for hjælp.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?

Næsten ikke noget - synes ikke folk var specielt forbedrede desværre.

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej. Synes nogle er lidt for sløve til at finde emner til diskussionen. til 2. diskussion var vi to grupper med et spørgsmål - og ingen ville besvare det.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Det ved jeg ikke hvordan jeg kan besvare.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Kreativ tænkning*
- *Anderledes - på en positiv måde*
- *idéen med Ekspert og Basisgrupper*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *ikke alle var lige engageret*
- *diskussionerne var sløve*
- *lidt forvirrende læsestof.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

- *Jeg ville gøre således at basisgrupperne var selvvalgt.*
- *Diskussionerne var lidt mere spændende - hvordan ved jeg ikke!*
- *Skide godt arbejde Pernille :D*

Besvarelse 2

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært at samarbejde på en ny og bedre måde i grupper, med flere forskellige mennesker. og selv lært om matematikkens historie »funktions begreber«

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Jeg syntes ikke rigtigt at jeg har lært sådan fuldt ud om hvordan et funktions begreb ser ud, men det med Historien bag det var meget spændende.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

Samfunds påvirket

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Det har for mit vedkommende bare givet mig noget baggrundsviden, men ikke givet mig sådan nogle bedre forståelser.

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Ja, fordi vi ud fra mange forskellige tekster fik en »bedre/ troværdig.« viden end hvis vi kun havde læst i en bog.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

har jeg ikke svaret på det en gang? ... Når men ihvertfald, så bliver et matematisk begreb ikke kun skabt ved at en eller anden klog man sidder alene i et mørkt rum og finder på et funktions begreb. Med det har vist sig at begrebet har ændret sig gennem tiden af samfundsmæssige årsager.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Det har været en del lettere! her er du flerer om at forstå det, og få hinanden til at forstå det. og været flere om at skrive selve opgaven.

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Ja lidt. der kommer altid noget godt med sig når man har mulighed for at diskutere med andre.

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Jeg syntes godt at vi kunne have fået endnu flere kilder og først mere undervisning om funktions begrebet! Det giver i hvert fald mig mere forståelse.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?

ikke så meget, folk var ikke forberedte...

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

lidt... nu har jeg da i hvertfald lært noget mere.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Ja, fordi jeg ved mere om funktions begreber mv.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *ændrende gruppe arbejde (skiftende makkere)*
- *udleverede kilder*
- *diskussioner i grupperne.*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *ikke så meget tavle undervisning*
- *intet fysisk (eksperimenterende) eller (film) arbejde.*
- *et kort forløb :(.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

flerer timer med samlet tavle undervisning så vi kunne få mere viden. måske en dokumentar film (hjælper i hvertfald rigtigt mange til at forstå tingene ved at se det i billeder eller eksperimenter. måske få muligheden får at snakke med en matematisk forsker.

Besvarelse 3

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært om forskellige teorier, hvad et funktionsbegreb

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Jeg har selvfølgelig lært noget, men jeg synes det var svært så det er noget jeg har glemt lidt af igen.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

En regnemåde?

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Har fået bedre forståelse for hvad en funktion er, men det er nok ikke noget jeg vil kunne huske.

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Ja at matematikken har udviklet sig så meget igennem tiden. Dette ville jeg nok ikke have vist hvis vi ikke havde haft dette forløb.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Jeg har mere viden omkring det, men ved ikke om det har påvirket mig.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Ja meget. Niveauet er højere og det er svært at få den fuldstændige rigtige forståelse

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Nej det synes jeg ikke, fordi det var svært for mig at forstå mange af tingene.

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Samarbejdet var godt så længe folk ikke bare lavede ingen ting, men synes det var stressende at der kørte kamara på en imens man lavede gruppearbejde.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassesdiskussioner i forløbet?

Ingenting, folk kunne ik rigtig diskutere fordi det simpelthen var for svært.

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej synes ikke der var noget diskussion. Netop fordi folk havde svært ved ar forstå teksterne og begreberne. + Teorierne

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej men det var fordi niveauet var for højt så man kæmpede en del med at forstå tingene

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Selvstændig arbejde*
- *god vejledning*
- *mulighed for at ændre planer.*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *Stresset af kamaret*
- *For lidt tid til at lave den i, uden man kunne fordybe sig ordentligt i emnet.*
- *Valgte grupper - man kunne risikere at komme sammen med en eller flere man arbejder dårligt med.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

- *Kan godt forstå idéen med et kamara men det stressede en.*
- *længere tid til opgaven.*
- *Selvvalgte grupper.*

Besvarelse 4

1) **Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.**

Jeg har lært om Euler og Dirichlets baggrund mht. matematik. Har lært om matematikkens historie.

2) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?**

Ja det har jeg. Vi bruger jo de funktionsbegreber, men fandt frem til var rigtige og det er dem vi bruger nu.

3) **Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.**

en funktion har noget med de variable at gøre.

4) **Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?**

det har givet mig en bedre forståelse.

5) **Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.**

Ja. Hvis vi kigger på fortiden der handlede om Dirichlet og Euler, var en del imod Euler. Han mente en ting, mens D. mener noget helt andet.

6) **Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?**

hvis man er enige er det muligt at et begreb bliver vedtaget. Hvis ikke, er man jo imod såsom med E.

7) **Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.**

Både ja og nej. Nej, fordi at man i grupper samarbejder sammen. og ja, fordi jeg husker bedre, hvis jeg undersøger alt selv. I stedet for at dele nogen spørgsmål op.

8) **synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?**

aner jeg ikke.

9) **Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?**

Det har fungeret fint. Vi har samarbejdet ordentligt.

10) **Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?**

Jeg har fået en bedre forståelse og mere viden. Og er kommet frem med mine egne meninger.

11) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

Sikkert.

12) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

DJa. For nu kender jeg til baggrunden om funktionsbegrebet. Til en anden gang er det nemmere at undersøge flere ting der gar med hovedpersonerne at gøre.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Samarbejde*
- *mere viden og*
- *forståelse for historien og D. og E.*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.
aner ikke.

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til.
Hvordan ville du ændre dem?
Nye emner.

Besvarelse 5

1) **Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.**

Hvordan de forskellige funktionsbegreber er blevet til og hvilke rolle Dirichlet og Euler har haft for matematikken

2) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?**

Ja det har jeg, fordi vi arbejdede med selve »udviklingen« af begreberne. Jeg har lært hvordan det er gået fra en teori til et mere konkret begreb også til hvordan vi opfatter datidens såvel som nutidens funktionsbegreber.

3) **Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.**

En funktion er et begreb som er sammensat af forskellige analytiske udtryk og variable. Funktion lkan som vi ser det idag ikke være diskontinuer.

4) **Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?**

Ærligt... ikke særligt meget, det har bare givet mig lidt baggrundsviden omkring hvordan begreberne er blevet til.

5) **Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.**

Nej, fordi jeg var sådan set klar over hvordan mennesker er med til at udvikle matematikken, måske har jeg fået lidt ekstra info men ikke noget væsentligt.

6) **Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?**

Det har ikke ændret min opfattelse, det har bare specificeret hvordan det foregår.

7) **Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.**

Ja det har været sværere, fordi der skulle meget mere tekst på end vi er vant til, men på den anden side har det hjulpet på forståelsen.

8) **Synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?**

både og, men det er mere fordi vi ikke har skullet formulere os specielt meget før hvor vi har været nød til det omkring disse opgaver.

9) **Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?**

Det har været den bedste måde at gøre det på ved at arbejde i gruppen, men nej det har ikke givet mig noget omkring arbejde med andre.

10) **Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?**

Ikke noget fordi det ikke rigtig blev til en diskussion fordi der ikke var nogle som havde spørgsmål

11) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

nej fordi vi ikke har haft nogle ordentlige diskussioner

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

nej, fordi vi i forløbet arbejdede i grupper og ikke rigtig selvstændigt.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *At det var gruppe arbejde.*
- *At vi havde om noget som vi ikke har haft om før.*
- *At vi lavede afleveringerne som en afrunding, som hjælp med forståelsen*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *At det var relativt tungt stof vi havde.*
- *Evt. gennemgang af nogle gennemgående relevante ting til opgaven, til forståelsen af de mest essentielle ting.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

Evt. et lidt længere forløb.

Besvarelse 6

1) **Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.**

Jeg har lært hvad en funktion er idag hvadd den var før, og Euler og Dirichlets forklaringer på de forskellige ting

2) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?**

Jeg har forstået hvad en funktion er og var før i tiden og hvordan det har udviklet sig gennem de diskussioner der har været

3) **Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.**

Vi forstår at en funktion idag kan bruges til grafer, tabeller osv... og at vi i dag bruger Eulers funktionsbegreb.

4) **Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?**

At det har gjort det nemmere og forstå, gennem

5) **Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.**

Ja, fordi mennesker i sin natur er subjektive og at de altid vil inddrage sine holdninger og værdier med omkring hvad funktionsbegrebet i virkeligheden er.

6) **Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?**

At man hele tiden har diskuteret og debatteret blandt matematikerne om hvad begrebet skal blive til.

7) **Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.**

Ja, fordi at i de almindelige afl skal der ikke skrives historisk, men bare mellemregninger, lidt tekst og resultat

8) **Synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?**

Ja en smule, fordi når man har den historiske viden, så det også nemmere at forstå det.

9) **Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?**

Jeg er blevet bedre til at samarbejde med gruppen

10) **Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassesdiskussioner i forløbet?**

At man fik afklaret problemstillinger som man ikke kendte svaret/løsning på det...

11) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

12) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Det moderne funktionsbegreb*
- *Euler*
- *gruppe arbejdet*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *Dirichlets forståelse som vi mener er forkert*
- *kilde teksterne var sværer...*
- *og opgaverne var lidt smule svært især Ekspertgruppe.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændre, hvis forløbet skulle afvikles en gang til.
Hvordan ville du ændre dem?

kan ikke komme itanke om noget...

Besvarelse 7

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært at forstå baggrunden for de lidt underlige formler bedre. Og at jeg ikke nødvendigvis behøver forstå alting ved alting.

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forståer ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Jeg tror ikke jeg har lært mere end det jeg vidste. Men selvfølgelig selve processen frem til det moderne funktionsbegreb har jeg lært om.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forståer ved en funktion.

En funktion er en regnemåde, der er variable og konstante. y afhænger af a , b og x . (a og b er konstante og x og y er variable.)

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Har lært (som sagt) at jeg ikke behøver forstå alle tallene og grundene til placeringerne. men derimod at forstå hvad man kan bruge funktionen til.

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Tja, vidst godt at samfundene havde betydning. Men det var sjovt ´med mere konkrete eksempler og historier.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Dette forløb har understreget at tilblivelse af et matematisk begreb tager tid, det er velovervejet og afprøvet. (Dog enkelte gange kun én gang) :o)

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Ja, meget. Det var svært at skrive om noget med at differentiere osv. når man ikke selv har prøvet at regne sådan. Dette ville have gjort projektet meget nemmere.

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Har skrevet mere samfundsmæssige ting i disse opgaver, men synes at formuleringen er den samme - bare om nye emner.

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Samarbejde er svært, da ikke alle er lige engagerede. Og sådan var det også denne gang. Så dem man snakker matematik med er de samme som før, på tværs af grupperne.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassesamtaler i forløbet?

Fik besvaret spørgsmål og problemstillinger om selve opgaveformuleringen.

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i samtaler om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej, det handler nok igen om den her manglende baggrundsviden, der i disse opgaver ville have været godt at have som sådan 'basal viden' inden opgavens start.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

ja, måske lidt. Jeg har tænkt og skrevet meget alene, så jeg har skulle overveje og konkludere meget med udgangspunkt i det jeg fik spurgt nogen om eller det jeg selv kom frem til.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Selve forløbet (emnet i sig selv var spændende nok)*
- *arbejdsmåden og omgangstonen.*
- *evalueringen + feedback.*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *At vi manglede den helt basale viden omkring de forskellige nævnte regne»metoder«.*
- *Opgaverne var af forskellig sværhedsgrad.*
- *Mange l på engagement gjorde ekspertgruppe opgaven svær*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

- *Grupperne → selv lave grupperne?*
- *Fordele spørgsmålene lidt bedre (ang sværhedsgrad)*
- *Flere tekster at vælge imellem. Mere materiale.*

Besvarelse 8

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært noget om euler og Dirichle og Deres Syn på funktions begreberne. Jeg har Sågar lært noget om Dem Personligt og hvordan matematikeren Sådan blev udbredt. men Jeg har svært ved at huske det, fordi Jeg havde Svært ved at forstå det.

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Jeg kan Simpelthen ikke huske det. Alle de funktions begreber På en gang. det Så Sindsygt Svært at Skeldne mellem.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

en funktion idag er noget med x og y kan være Alle tal Bortset fra 0?

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Hvis Jeg kunne huske noget af det... Så tror Jeg helt klart Jeg ville kunne forstå Hvordan funktionsbegreberne opstod og forstå hvorfor netop dette Denne funktion er Sådan her osv.

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Det ved Jeg ikke helt. Jeg er ikke helt sikker påhvad min opfattelse var før forløbet, men det er da blevet Slået klart at mennesket helt klart har en stor rolle, men har de ikke det i alt viden?

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Det er meget hen af spørgsmål 5 Jeg ved ikke hvad min opfattelse var før. men det har da klart ændret det, idet at vi nu Ser at en matematiker Siger noget hvor så hans lærling (hvis man kan sige det) Ser noget helt 3. der udvikler begreget sig Jo.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Klart sværer. men det er fordi her Skal det forstås en tekst hvor normale afleveringer er mere konkret. Vi har dog lavet noget Skrive matematik og det var klart lettere for det var nogle lettere og mere konkrete Spørgsmål man Skulle Svare på.

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Nej, egentligt ikke. Jeg har haft meget svært ved

1. at forstå emnet

2. yntes det var ALT for større grupper. Jeg havde Svært ved at følge med i basisgruppen og i Expertgruppen, var det svært at holde fokus.

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

nej, Jeg ved det ikke helt. Syntes det har været lidt ærgeligt. at vi ikke har fået noget basis på tavlen om disse funktions begreber Så alle ligesom havde noget at forholde sig til om de havde

løst eller ej Jeg har Personligt også Svært ved at bearbejde hvad Jeg læser kontra hvad Jeg høre og ser. Så personlig ville det klart gavne mig at kunne skrive noter til Sådan et emne som dette.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?

første klasse diskusion fik Jeg ikke noget ud af, kan ikke engan huske at Vi havde en, anden tilgengeld, fik Jeg klart mere ud af fordi vi Spurgte om konkrete spørgsmål som blev svaret På som man der efter kunne forholde sig til igen enten visuelt eller noget man lyttede til

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Et eller andet sted Ja. Jed ved nu Ca, hvad der forventes. Så det har da klart gavnet mig. Jeg er dog stadig ikke så god til det, men det kommer.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Det ved Jeg ikke. Jeg Syntes ikke vi har lavet så meget Selvstændigt, idet det har været i en gruppe, så hvis den ene ikke kunne finde ud af det, Så tog den anden over. Meget smart, men så lærer man bare ikke Sp meget af det.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Klasse diskussionen*
- *Valg af grupper*
- *Emnet, det var spændende nok*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *Størrelsen på grupperne, de var alt for større*
- *texten var meget kompliceret og svær at forstå*
- *Der var ikke noget visuelt på tavlen omkring emnet det var meget ærgeligt da Jeg er en visuel learner.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

- *Jeg ville lave mindre grupper, max 3 der er klart meget lettere at finde en tid efter Skole. og lettere at få alle folk til at forstå dte. og det er lettere at få folk ned På Jorden igen*
- *mere visuelt. Jeg får klart mere ud af at se tingne og Stille spørgsmålene til det.*
- *en smule mere tid. Det var lidt Svært med alle de amdre gruppe projekter i Samme 2 uger.*

Besvarelse 9

1) **Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.**

Jeg mener at jeg har lært en masse. Alt omkring Euler og dirichlet og hvorfor funktionsbegrebet er som det er idag. Jeg synes sel at Matematik Historie er en vigtig del af Matematik

2) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært? JA.**

3) **Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.**

4) **Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?**

Det har betydet at jeg nu forstår det endnu bedre, Når man får det hele med har man helt klart en bedre forståelse.

5) **Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.**

Ja. Vidste ikke at man kunne have så stor en rolle.

6) **Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?**

Jeg vidste ikke, at der var så meget forskelligt der kunne påvirke det.

7) **Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.**

Det har Været en smule svære. Men også anderledes. Vi plejer at lave regnestykker og forklare lidt med ord ellers har vi i 1g lavede vi noget skrive matematik.

8) **synes du, at du ved at udarbejde afeveringen i basisgurpperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?**

Ja. synes også at det var en super måde at gøre det på. Både så vi om i en anden gruppe men også så vi alle kom med forskellige input. Og på den mde var alle med

9) **Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?**

Det var rart at man ikke skulle side med det helt alene, da meget af det var baseret på diskussion så havde man mulighed for at snakke om det med de andre.

10) **Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassesdiskussioner i forløbet?**

Vi kom ikke rigtigt med mange ting til diskussionen, men det var ellers en god ide

11) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

Nej ikke sådan rigtigt?

12) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

Ja, en smule.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

Det var godt at det var struktureret og at vi fik oplysninger i starten af timen om hvad vi skulle lave og at vi skiftede grupper

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

Der var ikke rigtigt noget dårligt. Måske var sproget i kilderne en smule svære men vi fik hjælp både af hinanden og lærerne til at forstå det.

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

Ikke rigtigt noget. Det var super godt synes jeg

Besvarelse 10

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært meget mere om funktioner, og hvad en funktion er, og hvordan man skriver en forstående tekst i matematik

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Ja det har da ihvertfald hjulpet på min viden omkring funktioner

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Jeg har fået mere styr på hvad det egentligt er, og ville også bedre kunne forklare det til andre

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Har ikke rigtigt haft en holdning til det, men synes nu at mennesker spiller en stor rolle når man snakker matematikkens udvikling.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Ja det synes jeg helt bestemt det har, for det var et emne vi ikke havde haft før. Man skulle forklare hvad det var, selvom man ikke helt selv havde styr på detm det var en udfordring

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgurpperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

syntes ihvertfald at jeg er blevet bedre til at formulere matematik på skrift og ikke kun med tal

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

synes det gruppemæssige har været lidt svært, da det kan være svært at samle alle efter skole, så man kom til at dele det lidt op, specielt i ekspertgruppen.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassesdiskussioner i forløbet?

Syntes ikke rigtigt at det hjalp. det var ikke rigtig nødvendigt

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej ikke rigtigt, syntes stadig det er svært. Det kan være svært stof så man skal sætte sig godt ind i det

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Som sagt er det svært stof, me hus man lige kommer ind i det ville det nok kke være så svært

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Basisgrupperne*
- *emnet*
- *at man lærte ret meget*

14) **Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.**

- *Ekspert opgaven var ret svær, selvom man havde været i basisgrupper*
- *Der var ikke så meget tid*
- *Det var svært*

15) **Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?**

at man selv kunne vælge grupper, og måske lidt mere tid i skolen

Besvarelse 11

1) **Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.**

En lidt større mening af hvad en funktion er, og lært at bruge begreber som definitionsmængde og værdimængde

2) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?**

Ja det synes jeg → det har også været det jeg har beskæftiget mig mest med. Mange ting, bla. hvad der definerer en funktion.

3) **Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.**

4) **Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?**

Det har betydet lidt, men ikke meget → det var mest fordi vores ekspertgruppe ikke rigtigt fungerede og folk ikke kunne deres ting. Så det jeg har fået ud af det er hovedsageligt det med det moderne funktionsbegreb som jeg i basisgruppen arbejdede med

5) **Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.**

Det har ikke ændret det på den måde at jeg aldrig havde tænkt over det før, men det har tvunget mig til at tage stilling til det

6) **Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?**

Det har givet mig en lidt større indsigt i det. bla. omkring hvordan efter den franske revolution bevægede sig bredere ud til befolkningen og flere lærte og skulle tage stilling til det.

7) **Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.**

Ja, meget! ikke kun fordi det har været en anderledes matematik og sværere men mest pga. at det var gruppeafleveringer, og at i ekspertgrupperne var det forventet at folk kunne deres eget.

8) **synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?**

Næh, ikke specielt. Vi har tidligere været vant til at skulle forklare det meget grundigt.

9) **Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?**

Jeg synes det har fungeret dårligt → især i ekspertafleveringen. Folk ligger på meget forskellige niveauer. og langt fra alle har lige stor engagement til at lave en stor opgave. Jeg har lært lidt om at samarbejde med andre om matematiske emner. men jeg synes ikke det har fungeret.

10) **Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?**

Jeg synes det var en god idé og det fungerede også fint nok til dem der havde forberedt sig. Selvom det var den/de samme der svarede hver gang.

11) **Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.**

Nej, men det tror jeg kunne være blevet hvis det havde fungeret godt og man var sammen med »de rigtige«

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej det synes jeg ikke, det er det jeg har lært gennem almindelige afleveringer.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

Emnet har været interessant, klassediskussion og komme lidt væk fra den normale undervisning.

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

Gruppearbejdet! det at i ekspertgruppen blev forventet at alle kunne det og til dels at den ikke var en form for matematik andre end dig og Leif havde mulighed for at hjælpe med.

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændre, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

Jeg ville have kigget på elevernes kompetencer. og taget højde for det da jeg lavede grupperne, samt lave mindre grupper.

Besvarelse 12

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært om matematik med en historisk indgangsvinkel, som har været mere lærerig og forståelig i forhold til anden matematisk undervisningen. Desuden har vi lært at formidle arbejdet og lære det videre til et højere intellektuelt stadie, dvs i ekspert grupperne. Desuden har det været en god gruppe arbejdsøvelse.

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Det er altid godt for forståelsen af nutiden at havde en baggrundsviden. for hvordan det har været og hvordan og hvorfor det udviklede sig. Det er svært at uddybe her, men ihvertfald lærte vi om Euler og Dirichlet som på hver sin måde udviklede funktionsbegrebet til det vi har idag.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

Jeg vil kort påpege at der ved gruppearbejde også er nogle alvorlige ulemper. Fx i min ekspert-gruppe havde alle medlemmer ikke så godt styr på det, som de skulle have haft. Derfor er jeg ked af at jeg ikke uddybende kan give e definition på det moderne funktionsbegreb. Selv havde jeg om Euler.

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

En funktion siger jo én meget mere, efter et forløb som dette. Viden omkring det er blevet bredere - og ikke bare i forhold til det vi har idag, men i hele forståelsen for hvordan det er opstået.

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Ja, på sin vi. Aldrig før har vi haft matematik med en historisk indgangsvinkel og det var rart at få noget afveksling - Matematik er ikke kun tal -. Forløbet har ikke ændret min opfattelse, men givet mig en. Så det er positivt.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Jamen, som sagt i nr. 5 også. Så har jeg aldrig tænkt over matematikerne bag matematikken. Jeg har aldrig tænkt over hvordan et matematisk begreb blev til. Det har dette forløb hjulpet mig med. Før var matematik kun tal.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Nej, jeg syntes det har været nemmer og sjovere. Jeg er generelt mere til dansk og historie, så det var nemmere at skrive, da dette var mere end skrive opgave i forhold til at man normalt i matematik skal udregne ting.

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Vi har ikke før skulle formulere os om matematik holdige emner. Men om man skriver i matematik, engelsk, dansk, historie, dett går vel ud på ét.

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Jeg syntes stadig ike det er specielt at skulle lave samarbejde om matematikholdige emner. Samarbejdet er det samme, det handler om, om folk har viljen. Og her i klassen har vi desværre ikke den fornødne vilje, vil jeg mene.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?

Klassediskussionerne har været en ny måde at fremlægge en problemstilling eller debattere med de andre grupper. Det har været yderst gavnfuldt. Og syntes at det forløb effektivt og tilfredsstillende. Så bliv ved med det :) Handler igen om at flere skal være forberedt og aktive. Der ligger problemstillingen

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Endnu en gang, da vi ikke har haft om det før, så kan man heller ikke blive »bedre« Men jo bedre man har forberedt sig og jo flere forskellige og uddybende tekster man får uddleveret, jo bedre bliver diskussionerne.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej, vi har jo hele tiden været i grupper. Eller det har været meningen.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Klassediskussionerne.*
- *Selve ideen med en basisgruppe og dernæst en ekspertgruppe. Yderst genialt! vis det altså bare havde fungeret ordentligt. Tror vi har været den forkerte klasse :(*
- *Der var også godt med tid til selve udarbejdelsen*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

Hele forløbet var nøje planlagt og tilrettelagt. Og jeg har været dybt imponeret over ideen. Og ville ønske min klasse var mere engageret, og seriøse. Derfor inen kritik til dig. kun til kassen.

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

Tak for et super forløb og noget afveksling i matematik timerne. Håber at du har fået noget ud af det. Jeg har ihvertfald været glad for det. Og du må ikke mmiste mødet af en klasse som min :) tag ikke noget personligt. Hav en god jul! :)

Besvarelse 13

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært en del om forståelse for hvad en funktion kan være. Selv har jeg især lært noget om den tid henholdsvis Euler og Dirichlet levede i og hvad der påvirkede forskningen og undervisningen. Jeg synes dog ikke at jeg har opnået en særlig stor forståelse for hvad der forstås ved en funktion og om udviklingen af den.

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

At man definerer en funktion som et problem som har et svar (y) der kan påvirkes af forskellige variable (f.eks a , b). Ofte taler man om den afhængige variabel (y) og den uafhængige (x).

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

Se ovenfor (det var kort :P).

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Jeg forstår nu at funktionsbegrebet er et begreb der er blevet videreudviklet gennem lang tid og at nye teorier kunne opstå herudfra.

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Ofte når man i folkeskolen hører om matematikere, er det næsten kun Pythagoras der bliver nævnt. Det er vigtigt at forstå at alt matematik ikke stammer fra antikken eller før, men at de antikke teorier sagtens kan spille ind og være nyttige selv i et nutidigt samfund. Ligeledes med Euler og Dirichlet. Samfundet og den opfattelse af hvad matematikken skulle bruges til (af ideologiske grunde, for at få et bedre militær ect) spiller alle ind her.

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Man havde lidt før en tanke om at matematiske teorier blev udviklet af en lille gruppe kloge hoveder. At finde ud af at matematisk forskning igennem længere tid har været et diskuterbart emne for alle med en smule forståelse herom, ændrede min opfattelse radikalt.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Ja.

1. *det kan være sværere at skrive i grupper, pga. ambitionsniveau og koordinering af tider til at skrive det.*
2. *det er ofte nemmere at finde et endgyldigt facit end at skulle diskutere et emne der nødvendigvis ikke har et facit.*

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Nej. Jeg havde den historiske del, og havde svært ved at forstå de andres opgaver, og forstod ikke rigtigt deres forklaringer.

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Både godt og dårligt. Nogle gang var det irriterende ikke bare at have en lærer til at give én svaret. På den anden side gav det meget selv at sidde og finde oplysningerne og fortolke dem. Det var nogle gange svært i grupperne da ikke alle ligger inde med den samme baggrundsviden og derfor ikke ved hvad der skal laves/kan lave det. På den anden side kan man dele sin baggrundsviden og på den måde gøre alle det klogere.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?

Det var sjovt at høre andres tanker. Det var også sjovt at se hvor få der havde gjort sig nogle tanker om de andres spørgsmål.

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Ja jeg ved nu i hvert fald hvad en diskussion om matematikholdige emner er.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Nej - jeg synes mit var meget historisk. Det var ikke så megen forståelse af matematik over det.

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Min forståelse for fortiden blev større.*
- *Min forståelse af hvad et funktionsbegreb er blev større.*
- *Jeg blev præsenteret for hvad en matematisk diskussion kan være*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *Det var ærgeligt at alle ikke har det samme ambitionniveau.*
- *Det var ærgeligt at alle ikke nåede til den samme grad af forståelse for deres emner under arbejdet med basisgrupperne.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændre, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

Sørge for at den historiske gruppe (samfundet) også beskæftiger sig med et funktionsbegreb, da man står helt uforstående over for de andre grupper.

Besvarelse 14

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Noget mere om den historiske baggrund for hvordan vi fortolker matematiske begreber (nogle)

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært? Egentlig ikke mere end hvad jeg vidste på forhånd.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

Der kan for hvert x kun være et y , men der må gerne være flere x 'er pr. y . Desuden må funktioner gerne være diskontinuerte (jvf. vores fortolkning af begrebet) x er en uafhængig variabel y er afhængig. A og B er konstanter

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Eftersom jeg på forhånd havde en rimelig forståelse for det begreb vi idag benytter så betyder det ikke det store. Kun hvorfor det ser ud som det gør. Hviket nok også er ret essentielt.

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Nej. Jeg har altid ment og mener stadigvæk at det er mennesket der udvikler matematikken. Det er ikke naturskabt

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Ikke det store. Kun at jeg er blevet endnu mere sikker i min sag.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Ja. Jeg mener ikke at idéen med matrix-grupper fungerer. For der er for meget der afhænger af enkelte personer. Det går ud over dem der engagerer sig, for hvis en gruppe ikke kan få oplysninger ud af en person pga han har været uengageret så er det ikke acceptabelt! Og man kan ikke undgå de uengageret!

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Det har i hvertfald hjulpet mig med at sætte ord på hvad jeg lavede. Hvilke kan være svært

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Jeg mangler helt klart at vi skulle have haft undervisning forinden! For når nogle af årsagerne til hvad der rent matematikhistorisk skete omhandler emner vi ikke har haft (eks. differentialregning) Så får jeg ikke det jeg ville have ud af det!

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassediskussioner i forløbet?

Ikke det store for folk var uengageret og utrykke ved at svare. Højst sandsynligt fordi de ikke vidste had de snakkede om.

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie et blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Lidt. Jeg har lært at få tal til ord. men uengagementet fra nogle andre har gjort det svært

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Ikke umiddelbart nej. Der har jo trodsalt ikke været et større selvstændiger arbejde

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Udfordringen (dog var der lige rigeligt)*
- *Det var okay at prøve og skrive med ord i stedet for tal.*
- *idéen med Ekspert og Basisgrupper*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

- *Dum idé med matrixgrupper*
- *På trods af hvad du sagde så var kilderne ikke gode. vi er jo ikke på UNI.*
- *Vi manglede viden om ting så som differential regning.*

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændrer, hvis forløbet skulle afvikles en gang til. Hvordan ville du ændre dem?

- *Jeg ville droppe matrix grupperne og ændre det til selvvalgte grupper som kun lavede 1 opgave.*
- *Jeg ville bruge tid på reel undervisning i stedet at lave 2 opgaver*
- *Jeg ville benytte andre og mere forståelige kilder*

Besvarelse 15

1) Hvad mener du selv, at du har lært af forløbet? Uddyb dit svar.

Jeg har lært hvorfor funktioner er som de er, og om deres historie. Jeg vidste ikke at matematikkens historie var så vigtig.

2) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har lært noget om, hvad man forstår ved en funktion idag (det moderne funktionsbegreb)? Hvad har du lært?

Ja. Jeg har lært at stort set hele funktionsbegrebet vi bruger kommer fra Dirichlet.

3) Forklar kort, hvad vi i dag forstår ved en funktion.

En funktion kan være i form af f.eks. grafer og ligninger. En funktion er en sammenhæng mellem variable, hvor y er afhængig af x , altså er y afhængig, mens x er uafhængig.

4) Hvad tror du, at arbejdet med de historiske funktionsbegreber har betydet for din forståelse af, hvad en funktion er?

Ja meget

5) Har dit arbejde med forløbet om funktionsbegrebets historie ændret den opfattelse af menneskers rolle i matematikkens udvikling? begrund dit svar.

Ja, fordi jeg vidste ikke at så kunne ske, før at man kom frem til det rigtige

6) Hvordan har arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie påvirket din opfattelse af, hvordan et matematisk begreb bliver til?

Jeg vidste ikke at både holdninger, samfundet og meninger kan påvirke matematik.

7) Har selve det at skrive afleveringen i basisgrupperne og afleveringen i ekspertgrupperne været sværere end selve det at skrive en almindelig aflevering i matematik? Begrund dit svar.

Ja det har det, specielt fordi kilderne vi fik var svære.

8) synes du, at du ved at udarbejde afleveringen i basisgrupperne og aflevering i ekspertgrupperne er blevet bedre til at formulere dig om matematikholdige emner?

Ja det synes jeg.

9) Hvordan synes du, at det har fungeret, at størstedelen af arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie har været struktureret som selvstændigt gruppearbejde? Har du gennem arbejdet med forløbet lært noget om at samarbejde med andre om matematikholdige emner?

Det var fint, selvom det var lidt svært, fordi vi jo ikke har haft om dem før, og så fik udleveret endnu svære kilder.

10) Hvad synes du, at du fik ud af at deltage i de to klassesdiskussioner i forløbet?

Jeg fik ikke noget ud af det overhovedet.

11) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at indgå i diskussioner om matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Ja, fordi Jeg nu ved at der ligger mere bag hvorfor ting er som de.

12) Synes du, at du gennem arbejdet med forløbet om funktionsbegrebets historie er blevet bedre til at arbejde selvstændigt med matematikholdige emner? Begrund dit svar.

Ja

13) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var gode.

- *Vi kom til at arbejde med noget nyt.*
- *Det gode ved Forløbet er også at jeg nu ved at uanset hvor svær den er så kan jeg godt.*
- *Det var også godt at det hele var forberedt godt*

14) Nævn tre ting ved forløbet, som du synes, var dårlige.

Kilderne var svære. ellers var resten godt. Det var godt tænkt med diskussionerne, men jeg fik bare ikke noget ud af dem.

15) Nævn tre ting ved forløbet, som du ville ændre, hvis forløbet skulle afvikles en gang til.

Hvordan ville du ændre dem?

Jeg ville have nemmere kilder.

Referencer

- Robert A Adams. *Calculus, A Complete Course - Fifth Edition*. Addison, Wesley, Longman, 2003.
- Umberto Bottazzini. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag, 1986.
- Flemming Clausen, Gert Schomacker og Jesper Tolnø. *Gyldendals Gymnasiematematik - Grundbog B1*. Gyldendal, 2005.
- Gustav Lejeune Dirichlet. Über die darstellung ganz willkürlicher functionen durch sinus- und cosinusreihen. *Repertorium der Physik, Bd. I*, side 152–174, 1837.
- Leonard Euler. *Introduction to Analysis of the Infinite - Book I*. Springer-Verlag, 1988. Oversat af John D. Blanton.
- Michael N. Fried. Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science and Education*, 10:391–408, 2001.
- Rasmus Brauner Godiksen, Tony Moyer Hanberg, Claus Jørgensen og Bjørn Toldbod. Fourier og funktionsbegrebet - overgangen fra eulers til dirichlets funktionsbegreb. Technical report, Roskilde Universitetscenter - IMFUFA, 2003.
- Bente Halkien. *Fokusgrupper*. Forlaget Samfundslitteratur, 2008.
- Uffe Thomas Jankvist og Tinne Hoff Kjeldsen. New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. <http://www.springerlink.com/content/5478581m4q917084/fulltext.pdf>, 2010.
- Bernard Eric Jensen. *Historie - livsverden og fag*. Gyldendal, 2003.
- Bernard Eric Jensen. *Hvad er historie*. Akademisk Forlag, 2010.
- Thomas Jensen og Morten Overgård Nielsen. *Matema10k - Matematik for gymnasiet. Bind 1. C-niveau*. Frydenlund, 2005.
- Victor J. Katz. *A history of mathematics: An introduction*. Addison-Wesley Longman, 1998.
- Tinne Hoff Kjeldsen. Funktionsbegrebets udvikling. I *Teori og Redskab 1 - Tal og funktioner*, side 179–184. Christian Ejlers Forlag, 1988.
- Tinne Hoff Kjeldsen. Does history have a significant role to play for the learning of mathematics? : Multiple perspective approach to history, and the learning of meta level rules of mathematical discourse. *Proceedings of the 6th Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, 2011.
- Tinne Hoff Kjeldsen og Morten Blomhøj. Beyond motivation - history as a method for the learning of metadiscursive rules in mathematics. Indsendt til Educational Studies in Mathematics i januar 2010.

- Morris Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, 1990.
- Erik Kristensen og Ole Rindung. *Matematik 1 - For 1. G*. Gad, 1975.
- Emil Kruuse. *Kvalitative forskningsmetoder - i psykologi og beslægtede fag*. Psykologisk forlag, 2003.
- Jesper Lützen. Funktionsbegrebets udvikling fra euler til dirichlet. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, 25/26:5–32, 1978.
- Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen. *Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet, 2002.
- Anna Sfard. On the dual nature of mathematical conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22:1–36, 1991.
- Anna Sfard. On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 2:157–189, 2000.
- Anna Sfard. *Thinking as Communicating - Human Development, the Growth of Discourses and Mathematizing*. Cambridge University Press, 2008.
- David Eugene Smith. *History of mathematics - volume I og II*. Dover Publications, 1958.
- Dirk J. Struik. *Matematikkens historie*. Haase, 1966.
- David Tall og Schlomo Vinner. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12:151–169, 1981.
- Undervisningsministeriet. Bekendtgørelse nr. 741 af 30. juni 2008 om uddannelsen til studentereksamen (stx-bekendtgørelsen), 2008.
- Undervisningsministeriet. Bekendtgørelse nr. 692 af 23. juni 2010 om uddannelsen til studentereksamen (stx-bekendtgørelsen), 2010.
- William R Wade. *An Introduction to Analysis - Third Edition*. Pearson Prentice Hall, 2004.
- Wikipedia. Bevis (matematik). *Wikipedia, Den frie encyklopædi*. [http://da.wikipedia.org/wiki/Bevis_\(matematik\)](http://da.wikipedia.org/wiki/Bevis_(matematik)), 2011. Set d. 2. marts 2011.
- Carl Winsløw. *Didaktiske elementer - en indføring i matematikkens og naturfagets didaktik*. Forlaget biofolia, 2006.