IMFUFA tekst

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Syntetisk differentialgeometris grundlæggelse i kategoriteori

Lasse Grinderslev Andersen

Juni 2010

nr. 471 - 2010

Roskilde University,
Department of Science, Systems and Models, IMFUFA
P.O. Box 260, DK - 4000 Roskilde
Tel: 4674 2263 Fax: 4674 3020

Syntetisk differentialgeometris grundlæggelse i kategoriteori

IMFUFA tekst nr. 471/ 2010 – 104 sider – ISSN: 0106-6242

I denne IMFUFA-tekst redegøres for hvilke konsekvenser udviklingen af kategoriteori har for matematikkens filosofi. Derudover bruges syntetisk differential geometri som eksempel på udvikling af ny matematik indenfor kategoriteoriens rammer.

Mere konkret introduceres det basale kategoriteoretiske begrebsapparat efterfulgt af en gennemgang af de basale egenskaber ved topoi. Dette har til formål at redegøre for den logiske struktur i disse topoi, samtidig med at der trækkes linjer tilbage til mængdelæren til sammenligning. Mere præcist redegøres der for den udsagnslogiske struktur. For at dette kan lade sig gøre, skal der introduceres funktor kategorier, som også bruges i redegørelsen for den syntetiske differentialgeometris forankring i kategoriteorien. Ud fra denne matematiske teori diskuteres de erkendelsesteoretiske og ontologiske konsekvenser af denne matematik. Det bliver her klart at der ligger nogle metafysiske forudsætninger til grund for mængdelæren, og et andet til grund kategoriteorien. Der konkluderes at kategoriteorien er et opgør med det paradigme der ligger til grund for mængdelæren. Et opgør der medfører, med Kuhns paradigme teori i baghovedet, matematisk anti-realisme.

Lasse Grinderslev Andersen, juni 2010

Syntetisk differentialgeometris grundlæggelse i kategoriteori

Lasse Grinderslev Andersen
Integreret projekt i matematik og filosofi
2. Modul
Vejleder på filosofi: Klaus Frovin Jørgensen
Vejleder på matematik: Jørgen Larsen

20. april 2010

Forord

Denne IMFUFA-tekst er kommet ud af en revideret projektrapport fra maj 2008. Projektet var integreret 1. kandidatmodul i matematik & filosofi, og mine vejledere var Jørgen Larsen fra matematik og Klaus Frovin Jørgensen fra filosofi.

Jeg vil gerne sige tak til Jørgen Larsen for LaTeX konsultation, forslag til tekstopsætningen og givtig matematisk vejledning, til trods for at det sidste lå langt fra hans fagområde. Derudover en stor tak til Klaus Frovin Jørgensen, for at udvise et stort engagement i projektet. Først og fremmest ved gode konstruktive samtaler omkring de filosofiske aspekter, men også for at sætte sig ind i de matematiske dele, og dermed komme med uvurderlig vejledning i denne del af projektet.

Indhold

1 Introduktion

1.1 Indledning og problemformulering

Hensigten med dette projekt er at give en filosofisk undersøgelse af grundlaget for »syntetisk differential geometri« (fork. S.D.G.), dvs. hvordan dette er forankret i nye fundamentale matematiske strukturer givet ved kategoriteori. S.D.G. vil indgå som case, men den primære teori vil være af kategoriteoretisk art, da dette skal på plads for overhovedet at kunne tale om S.D.G.
Kategoriteorien spiller en central rolle for udviklingen af S.D.G., da kategoriteorien udgør grundlaget for S.D.G. og ydermere giver en ny måde at anskue matematikkens fundamentale strukturer på, og spiller dermed en grundlagsgivende rolle i stil med de klassiske ZFC aksiomer. Mere præcist er det udviklingen indenfor kategoriteoriens matematiske rammer, at objektet »topos« bliver defineret. En topos er et forsøg på at karakterisere en kategori[1] der besidder samme fundamentale struktur som mængdelæren, men resultatet er en langt mere generel konstrukion. Vi har altså at kategoriteori giver mulighed for at lave anderledes matematiske universer, altså en topos, indenfor hvilke der kan bedrives matematik. Den mest almindelige og kendte topos er **Set**, toposen for den klassiske mængdelære, som kendes ved ZFC aksiomerne (med underliggende klassisk logik). I dette projekt skal vi kigge nærmere på topoi generelt, og dermed de topoi der bruges som fundament for S.D.G.. Det matematiske univers hvori S.D.G. har hjemme, kaldes i litteraturen bl.a. for »smooth world« eller bare $\mathcal{S}$. Navnet kommer sig af det faktum, at alle afbildninger i $\mathcal{S}$ er $\mathcal{C}^\infty$ per definition, og denne differentialgeometri og analyse besidder nogle egenskaber der adskiller sig væsentligt fra den klassiske.

Indenfor $\mathcal{S}$ eksisterer infinitesimaler og det er muligt at opbygge en analyse, der implementerer disse i definitionen af gammelkendte begreber og beviser. Det vil altså sige vi har en analyse der baserer sig på nogle

1 Definitionen på en abstrakt kategori skal vi se på i næste kapitel.

anderledes idéer end den klassiske. Denne 'glatte' infinitesimal analyse (G.I.A.) udgør grundlaget for den teoretiske overbygning syntetisk differential geometri. For overblikkets skyld kan vi simplificere konstruktionen på følgende vis: Kategoriteori $\longrightarrow$ topos $\longrightarrow$ S.D.G.[2] Det er denne nye matematiske udvikling der bliver genstandsfeltet i dette projekt.

Hvorvidt kategoriteori udgør et grundlag for matematikken, på højde med ZFC, er noget der er blevet diskuteret blandt matematikfilosoffer inden for de sidste årtier. Det er i denne henseende at S.D.G. skal indgå i projektet, som et bidrag til denne diskussion. Vi skal dog først og fremmest kigge på nogle egenskaber ved kategoriernes verden, og dernæst sætte dem i relation til et frugtbart case - S.D.G. Det kategoriteoretiske objekt 'topos' skal studeres, og dernæst en kort analyse af basale egenskaber ved S.D.G., og på hvilken måde gammelkendte objekter anskues anderledes på, i dette matematiske univers. Det vil altså sige kategoriteorien er det primære genstandsfelt for projektet. Det er klart at i en sådan diskussion er ontologiske/erkendelsesteoretiske argumenter centrale, og dette fører til denne *overordnede* problemformulering:

> *Hvilke ontologiske og erkendelsesteoretiske konsekvenser får udviklingen af S.D.G., og dennes forankring i kategoriteori, for matematikkens filosofi?*

Denne meget generelle problemformulering skal udkrystalliseres i følgende underspørgsmål, med den hensigt at belyse det overordnede:

1. *På hvilken måde adskiller den basale udsagnslogiske struktur i en generel topos sig fra strukturen i den klassiske topos* **Set***?*
2. *Hvilken grundlæggende struktur har de topoi der udgør* $\mathcal{S}$*?*
3. *Hvilken betydning får den syntetiske opbygning af S.D.G. (og* $\mathcal{S}$*) for gammelkendte resultater i analyse og differentialgeometrien?*

Besvarelsen af disse tre delspørgsmål skal udgøre grundstenene i den overordnede diskussion af erkendelsesteoretiske/ontologiske konsekvenser som S.D.G. og den bagvedliggende kategoriteori får for matematikkens filosofi. $\mathcal{S}$ skal altså udgøre den konkrete matematik, der udfordrer opfattelsen af gammelkendte objekter, som f.eks. de reelle tal, og byder på en ak-

2 Dette er en matematikteoretisk udvikling der hentydes til, ikke den historiske.

siomatisering af infinitesimalerne - som ellers var havnet i glemmebogen. Kategoriteoretikernes indvendinger ift. grundlagsdiskussionen kombineret med S.D.G. udgør et solidt grundlag for en fornyet diskussion af matematiske objekters beskaffenhed. Men før vi overhovedet kan begynde en diskussion af dette, er der en del matematik der skal belyses. Først og fremmest en mere konkret og fyldelsgørende beskrivelse af det matematiske objekt »topos«. Dette kategoriteoretiske begreb, som ligger til grund for S.D.G., skal vi kigge nærmere på først. Det er meningen at vi så kan få en fornemmelse af hvordan en topos er opbygget, og hvordan den adskiller sig fra den konkrete topos **Set**. I **Set** kan alle konstruktioner føres tilbage til mængder og elementrelationer af mængder, men fremgangsmåden i kategoriernes verden er baseret på afbildninger. Hvad der helt formelt menes med det, skal vi kigge nærmere på. Vi skal dog lige stifte bekendtskab med det begrebslige apparat som en topos er indlejret i, dvs. kategoriteori. Hvordan er kategoriteorien bygget op i forhold til mængdelæren, hvilke konkrete strukturer 'ligger til grund' for de forskellige definitioner etc. Dette skal vi kigge nærmere på i næste kapitel.

2 Kategoriteoretisk kontra mængdeteoretisk formulering af matematikken

I dette kapitel gennemgås de kategoriteoretiske forudsætninger/konstruktioner der skal til for at definere en generel topos, og dermed den overordnede struktur på topoi der udgør $\mathcal{S}$. Vi skal altså se på, hvordan vi laver konstruktioner i kategoriernes verden, på hvilken måde dette er en generalisering af mængdelæren og hvordan det begrebslige apparat skiller sig ud fra samme. Kategoriteori er et temmelig stort teoretisk korpus, så vi vil i dette kapitel bruge en del tid på at starte fra bunden, og udbygge med de almindelige konstruktioner der kan foretages. På den måde skabes en solid begrebslig basis som vi skal bruge i den videre færd ud i kategoriernes verden. Der vil igennem kapitlet blive trukket linjer tilbage til den gængse mængdelære. Dels for at øge forståelsen af stoffet, dels for at på se på de strukturelle forskelle. For klarheds skyld er mængder skrevet med stort A og objekter i kategorier med a.

2.1 Introduktion til kategorier

Hvad er en kategori rent formelt, og hvad er den mest elementære forskel fra mængdelæren? Først og fremmest er definitionen/aksiomerne for en kategori ganske ligetil.

Definition 2.1
En kategori $\mathscr{C}$ *består af en samling* $ob(\mathscr{C})$ *af objekter, og en samling* $\hom(\mathscr{C})$[1] af såkaldte morfier mellem objekterne. Morfierne opfylder følgende betingelser, hvor f, g er vilkårlige morfier i $\mathscr{C}$ og a, b er vilkårlige objekter i $\mathscr{C}$.

1 En lignende notation fås ved $\hom(a, b)$ og $\mathscr{C}(a, b)$ der er samlingen af alle morfier fra a til b

- `Sammensætning:` Der er en binær operation $\hom(a,b) \times \hom(b,c) \to \hom(a,c)$ hvor vi sammensætter morfierne, dvs. $f : a \to b$ fra $\hom(a,b)$ og g fra $\hom(b,c)$ kan danne sammensætningen $g \circ f : a \to c$ hvor $g \circ f$ er i $\hom(a,c)$.
- `Associativitet:` Ovenstående operation er associativ, dvs. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- `Identitet:` For alle objekter a findes der en identitetsmorfi $Id_a : a \to a$, så for alle $f : a \to b$ har vi at $Id_b \circ f = f \circ Id_a = f$.

Morfierne er for kategorierne hvad afbildninger er for mængderne, altså en morfi $f : a \to b$ går fra objekt a til objekt b og angiver at man kan gå fra a til b 'på en eller anden måde'. Dernæst findes der *funktorer* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ der er for kategorier, hvad morfier er for objekter. For at øge abstraktionsniveauet en tand til, så findes der også *naturlige transformationer* der er 'afbildninger' mellem funktorer! Dette vil vi dog vente med komme ind på, indtil kapitel 4. En anden ejendommelig egenskab ved kategorierne er det såkaldte »dualitetsprincip«. Det siger at hvis vi har en given konstruktion Σ i en abstrakt kategori $\mathscr{C}$, så kan denne dualiseres på simpel vis og denne duale $\Sigma*$ vil også være beviselig inden for definitionen af en kategori. Rent praktisk foregår det ved at sige, at hvis vi har en abstrakt definition Σ formuleret i basal kategori teoretisk terminologi, kan denne formulering dualiseres ved at »vende« hhv. morfier og sammensætning om i Σ. Det vil sige at man bytter om på domæne og co-domæne[2], og dermed også på sammensætning, så $f \circ g = h$ i Σ bliver til $g^* \circ f^* = h^*$ i Σ^*. Har man bevist Σ, så vil Σ^* som *minimum* gælde i $\mathscr{C}^{op}$, den omvendte kategori af $\mathscr{C}$. $\mathscr{C}^{op}$ fås efter ovenstående princip ved at tage $\mathscr{C}$ og vende alle morfierne om, dvs. for hvert $f : a \to b$ i $\mathscr{C}$ har vi $f^{op} : b \to a$ i $\mathscr{C}^{op}$ og deraf følger at hvis $f \circ g$ gælder i $\mathscr{C}$, så gælder $g^{op} \circ f^{op}$ i $\mathscr{C}^{op}$. Vi vil anvende dette princip i konkrete tilfælde og se at mange konstruktioners duale modstykke rent faktsik gælder i samme kategori som deres modpart. For en liste af basale kategorier se tabel i appendiks.

I starten af kapitlet blev der stillet spørgsmålet om hvilke fundamentale forskelle der er mellem kategoriernes verden og den gammelkendte verden med mængder. Den består i at egenskaber bliver defineret ved hjælp af pile mellem objekter, i modsætning til mængdelæren, hvor man tager udgangspunkt i elementrelationen, hvilket vil blive klart i dette og følgende

2 Har vi en vilkårlig morfi $f : a \to b$, så er a domænet og b er codomænet.

kapitler. For at få en intutiv føling med denne forskel skal vi, når vi gennemgår fundamentale definitioner i kategori- og toposteori, tage vores udgangspunkt i mængdelæren, som i kategoriteorien er beskrevet ved kategorien **Set**[3]. Når vi kun er i mængdelæren refererer vi til **Set**, og objekterne i denne sammenhæng bliver præsenteret ved store bogstaver. Når vi til gengæld beskæftiger os med det generelle kategoriteoretiske tilfælde, bliver objekterne skrevet med lille. Men lad os starte blidt ud, og tage et eksempel der er ligetil.

2.1.1 Moniske pile

I mængdelæren **Set** beskrives funktioner $f : X \to Y$ som en (ægte) delmængde af det cartesiske produkt $R \subset X \times Y$[4] mellem domæne og co-domæne, så der til et givent $x \in X$ findes *netop et* $y \in Y$ så $(x, y) \in R$. Ud fra denne mængdeteoretisk formulering af funktionsbegrebet, kan injektivitet som bekendt defineres ved at $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Altså at der til et givet $y \in Y$ kun tilknyttes et $x \in X$. Udgangspunktet for definitionen af injektivitet er altså baseret på egenskaber ved delmængden R, og dermed elementerne i de mængder som vores funktion er defineret over.

Spørgsmålet er nu: Kan en injektiv funktion beskrives ved hjælp af sin relation til andre objekter og funktioner, og ikke nødvendigvis elementerne i R? Lad os se på en injektiv funktion $f : X \to Y$ og 2 parallelle funktioner $g, h : Z \rightrightarrows X$[5] der opfylder at

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

kommuterer, det vil altså sige at $f \circ g = f \circ h$ hvilket igen er det samme som $f(g(x)) = f(h(x))\ \forall x \in Z$. Fra vores definition af injektivitet ved vi at når f er injektiv, og ovenstående er opfyldt, så må $g(x) = h(x) \forall x \in Z$. Dvs. vi har at f er injektiv medfører at f er »venstre-ophævende«, dvs.

3 Se appendiks.

4 Et cartetisk produkt i mængdelæren defineres som et ordnet par ved $R = (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ for $x \in X$ og $y \in Y$ Cameron [1998]

5 Vi har to funktioner $g : Z \to X$ og $h : Z \to X$, samme notation gælder for to morfier $f, g : a \rightrightarrows b$.

$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$[6]. Omvendt kan vi vise, at hvis f er venstreophævende, så er f injektiv. Antag at f er venstreophævende, og lad der være givet $x, y \in X$ så $f(x) = f(y)$, så skal vi vise at $x = y$. Sæt $h, g : \{0\} \rightrightarrows X$ ved at $h(0) = x$ og $g(0) = y$. Da har vi at $f(h(0)) = f(g(0))$ og jvf. antagelsen har vi at $f \circ h = f \circ g \Rightarrow h = g$ da f er »venstreophævende«.

Vi har altså at injektive funktioner i **Set**, lige præcis er de morfier der er venstre-ophævende mht. sammensætning, og kan derfor formuleres i en generel kategori $\mathscr{C}$. Det vil altså sige vi har beskrevet injektivitet vha. afbildninger mellem objekter, i stedet for at ovenstående mængdeteoretiske definition med elementrelationen »$\in$«. Afbildningsbeskrivelsen formuleres i følgende kategoriteoretisk terminologi.

Definition 2.2
I en kategori $\mathscr{C}$, kaldes en given morfi $f : a \to b$ »monisk«[7] i $\mathscr{C}$ hvis den opfylder følgende: Givet to parallelle morfier $g, h : c \rightrightarrows a$ i $\mathscr{C}$ gælder der at $f \circ g = f \circ h \;\Rightarrow\; g = h$.

Moniske pile er symboliseret ved »$\rightarrowtail$«. Moniske morfier er en generalisering fra de injektive funktioner i mængdelæren, og de moniske morfier kan tage meget forskelligt udseende alt efter hvilken kategori man kigger på. Kigger man f.eks. på kategorien »**N**«[8] ser man at alle morfier er moniske da $m + n = m + p \Rightarrow p = n$. Ved at bruge dualitetesprincippet på den moniske morfi, kan de *episke* morfier defineres, og disse er i **Set** sammenfaldende med surjektive funktioner. Denne definition fås som ovenfor beskrevet, ved at bytte om på domæner og co-domæner i definitionen.

Definition 2.3
En morfi $f : a \to b$ i $\mathscr{C}$ kaldes »episk«[9] eller »højre-ophævende«, hvis der gælder følgende: Givet $g, h : b \rightrightarrows c$ i $\mathscr{C}$ der får

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "h"'] & c \end{tikzcd}$$

6 Her hentydes til at f står til venstre i sammensætningen, men hvis man kigger på diagrammet, så kunne man tolke det som »højreophævende«. Vi holder os til det første.
7 I litteraturen kaldes disse morfier også for *monomorfier*.
8 Se appendiks for en beskrivelse af denne morfis objekter og morfier.
9 I litteraturen kaldes disse også *epimorfier*.

til at kommutere (altså $g \circ f = h \circ f$) så gælder der at $g = h$.

Hvad angår ovenstående **N**, så er alle morfierne både moniske og episke. Dette er som bekendt langt fra altid tilfældet i kategorien **Set**. Det skal dog bemærkes, at der findes kategoriteoretiske definitioner af injektivitet/surjektivitet, som ikke nødvendigvis er sammenfaldende med moniske/episke morfier i alle kategorier. Men det viser sig at dette faktisk er tilfældet, hvis kategorien er en »well-pointed« topos[10] [Goldblatt, 1984, side 123].

Iøvrigt ved vi, at i **Set** er en funktion der både er monisk(injektiv) og episk(surjektiv), det vi kalder bijektiv. Det betyder at hvis en funktion $f : A \to B$ er bijektiv, så har den en invers funktion $f^{-1} : B \to A$, så $f \circ f^{-1} = Id_B$ og $f^{-1} \circ f = Id_A$. Denne egenskab ved bijektive funktioner, at de har en invers med ovenstående egenskab, har også en generaliseret pendant i kategoriteorien:

Definition 2.4
En morfi $f : a \to b$ kaldes »iso«, eller isomorfi, hvis der eksisterer en morfi $f^{-1} : b \to a$ så $f \circ f^{-1} = Id_b$ og $f^{-1} \circ f = Id_a$.

Der gælder ikke nødvendigvis i alle kategorier at:»f er monisk og episk hviss f er en iso morfi«, omend det gælder i alle topoi kategorier[Goldblatt, 1984, s. 40].

Ovenstående definitioner omhandlede en kategoriteoretisk generalisering af funktionsegenskaber i mængdelæren, hvilket i kategoriernes verden svarer til det partikulære tilfælde **Set**. Nu skal vi se på de specielle mængder fra mængdelæren, nemlig singleton'er og $\emptyset$. Disse kan også beskrives udelukkende ved hjælp af morfier mellem objekter, og på samme måde generaliseres fra **Set** til vilkårlige kategorier. De vil vise sig at være vigtige i definitionen/diskussionen af en topos. Vi tager atter vores udgangspunkt i mængdelæren, og dernæst formulerer det i kategoriteoretiske termer. I tilfældet med singletoner i **Set**, kan man spørge om der findes en fælles egenskab ved de funktioner hvori singleton'er enten er domænet eller co-domænet. Det er der, nemlig at der til en singleton $\{a\}$ og en vilkårlig mængde X kun findes en funktion fra domænet X til co-domænet $\{a\}$. Dette er ganske forståeligt i den mængdeteoretiske verden, fordi der til alle elementer i domænet skal være knyttet præcist et element i co-domænet. Eftersom der kun er et element i co-domænet, når dette er en singleton, har

10 Bliver diskuteret nærmere i kapitel 3, for definition se 3.2.

vi at der kun findes en funktion $f : X \to a$. Dette giver følgende generelle kategoridefinition.

Definition 2.5
Et objekt (kaldet »1«) er et terminalt objekt i en kategori $\mathscr{C}$, hvis der for alle andre objekter a i $\mathscr{C}$ kun findes en morfi $f : a \to 1$, fra a til 1. Den entydige morfi bliver benævnt »!«.

Vha. dualitetsprincippet fås en definition på et objekt, kaldet *initial* objekt (benævnt »0«), der i **Set** svarer til $\emptyset$.

Definition 2.6
Et objekt med den egenskab, at der for alle andre objekter x i $\mathscr{C}$ kun findes en morfi $f : 0 \to x$ der går fra 0 ind i x, kaldes et »initial« objekt.

At dette svarer til $\emptyset$ i **Set** er klart, for hvis $\emptyset$ er domæne, er der ingen elementer at knytte til co-domænet. Dermed kan der kun defineres en funktion der går fra $\emptyset$ ind i X, nemlig den funktion som ikke knytter nogle elementer fra X til domænet - der er jo ikke nogen! Kigger vi på kategorien $\mathbf{N}$, er det klart at der ikke findes nogle terminale eller initiale objekter, da vi kun har objektet $\mathbf{N}$ med dertilhørende uendeligt antal morfier.

Vi har nu set et par eksempler på morfi-definitioner, som i **Set** kan føres tilbage til egenskaber og definitioner ved/på gammelkendte objekter, men som i kategorilæren har langt bredere og mere generel betydning. Nu skal vi se på lignende, men mere komplekse konstruktioner, som er defineret ved hjælp af morfier, men som har en klar 'fortolkning' i mængdelæren. På den baggrund bliver det muligt at generalisere nogle fælles træk ved disse konstruktioner, kaldet »*universelle egenskaber*«. Hvad der helt præcist menes med dette skal vi komme ind på nu.

2.2 Universelle konstruktioner i kategorier

Ved at kigge på definitionen for det cartesiske produkt af to mængder og dernæst omformulere det i kategoriteoretisk termer, diskuteres betydningen af sidstnævnte kategori-definition, med henblik på at introducere begreberne »*universel egenskab*« og »*grænse*«. Ligesom i de indledende eksempler, kan mængdelærens forståelse af et cartesisk produkt omskrives til en kategori-definition vha. morfier og objekter mellem disse. Det virker måske ikke umiddelbart klart, men ved at tage udgangspunkt i mængdelærens terminologi kan vi få en intuitiv forståelse af sammenhængen mellem produktet i **Set** og produktet i en generel $\mathscr{C}$.

2.2.1 Produkt

Som bekendt er det cartesiske produkt i **Set** defineret ved $A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$. Antager vi nu at vi har sådan et produkt givet, kan vi konstruere 2 projektionsfunktioner $pr_A : A \times B \to A$ og $pr_B : A \times B \to B$ som defineres på følgende vis

$$pr_A(\langle x, y\rangle) = x$$
$$pr_B(\langle x, y\rangle) = y$$

Så lad en mængde C med tilknyttede funktioner $f : C \to A$ og $g : C \to B$ være givet. Ud fra dette kan vi konstruere endnu en funktion $p : C \to A \times B$ defineret ved $p(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$, som eksemplificeres ved at følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "pr_A"] \arrow[r, "pr_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Det vil sige at vi har $pr_A(p(x)) = f(x)$ og $pr_B(p(x)) = g(x)$ for alle $x \in C$ og dermed kan det konkluderes at ovenstående diagram kommuterer, hvilket er klart ud fra definitionen af p. Men det centrale fra vores synspunkt er, at ovenståenede konstruktion af p, er den *eneste* morfi, der får ovenstående diagram til at kommutere. Hvis $p(x) = \langle y, z\rangle$ for $y \in A \wedge z \in B$ så ved vi, da diagrammet jo kommuterer per antagelse, at $pr_A(p(x)) = f(x) = y$ og på samme måde med pr_B. Som det vil vise sig længere nede, så er det lige netop denne entydigt bestemte morfi mellem $A \times B$ og C, der er central for en lang række af konstruktioner i kategoriernes verden. Det samme gjaldt det terminale objekt 1, hvor der også kun fandtes en entydigt bestemt morfi fra et vilkårlig objekt a til 1.

Men lad os først få den formelle kategoriteoretiske definition på et produkt, da vi først skal diskutere denne og dens duale modstykke i sin egen ret, inden vi tager fat på de generelle træk ved definitionen. Igen skal vi have ovenstående mængdeteoretiske betragtninger in mente, hvilket fører til

Definition 2.7
Hvis a og b er objekter i en kategori $\mathscr{C}$, så består et produkt af a og b i $\mathscr{C}$ af et objekt $a \times b$ og et par af morfier $pr_a : a \times b \to a$ og $pr_b : a \times b \to b$

som opfylder følgende: For ethvert objekt c med dertil hørende morfipar $f : c \rightarrow a$ og $g : c \rightarrow b$, findes der kun en morfi $c \xrightarrow{k} a \times b$ så $f = pr_a \circ k$ og $g = pr_b \circ k$.

k kaldes sædvanligvis $\langle f, g\rangle$ og ovenstående definition er det samme som at følgende diagram

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b \end{tikzcd}$$

kommuterer, og den stiplede linje betyder at der kun findes en pågældende morfi, der får diagrammet til kommutere.

Definition af et produkt er imidlertidigt kun defineret entydigt op til »kategoriteoretisk« *isomorfi*. Dvs. at man i definitionen ikke kan skelne mellem to isomorfe objekter i kategoriens verden. To objekter er isomorfe $a \cong b$ i $\mathscr{C}$, når der findes en iso(morfi) mellem dem. I kategorien **Set** er to mængder isomorfe, når der er en bijektion imellem dem, som f.eks. mellem A og $A \times \{1\} = \{\langle x, 1\rangle : x \in A\}$. Det ses også hurtigt i definitionen af det terminale objekt, hvis vi ser på det i forhold til mængdelæren, at definitionen gælder for en hvilken som helst singleton og der ikke i kategoriteoriens abstrakte sprog kendes forskel på, hvad der i mængdelæren er to forskellige singleton'er. I mængdelærens sprog kan vi godt have to singleton'er $\{a\}$ og $\{b\}$ hvorom det gælder at det kan vises $\{a\} \neq \{b\}$, men dette er ikke muligt i den abstrakte kategoriteoretiske formulering, dvs. hvor formuleringen ikke knytter an til en bestemt kategori. På samme måde er definitionen af et produkt entydigt bestemt op til isomorfi, hvilket ikke er helt oplagt. Vi viser dette i et lemma nu, men det gælder for alle konstruktioner, der er formuleret i kategoriteoretiske termer, som f.eks. objekterne i tabel 2.1.

Lemma 2.1
Produktet af a og b i $\mathscr{C}$ er givet entydigt op til isomorfi.

Bevis
Vi tager udgangspunkt i definition (2.7), og antager at vi har sådan et produkt givet. For at vise at dette kun er defineret entydigt op til isomorfi, lad os antage der findes endnu et morfipar $a \xleftarrow{Pr'_a} (a \times b)' \xrightarrow{Pr'_b} b$, der opfylder at dette *også* er 'produktet' af a og b. Jvf. definitionen af produktet, må der for hhv. $a \times b$ og $(a \times b)'$ gælde at alle andre lignende konstruktioner,

dvs. et morfipar $a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$, er tilknyttet en entydig morfi jvf. defintion (2.7). Men nu har vi altså to sæt der opfylder at være et produkt af a og b, så hvorfor ikke bruge disse respektivt som værende et af disse morfipar $a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$ hvorom der findes en entydig morfi til produktet. I praksis kan dette gøres ved at sætte $f = pr'_a$, $g = pr'_b$ og $c = (a \times b)'$ i definition (2.7), og da disse c, f, g også opfylder produkt definitionen kan det 'oprindelige' produkt $a \times b$ agere c, altså vi bytter om på pladserne i definitionen. Dette kan vi så illustrere med følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
& (a \times b)' \arrow[dl, "pr'_a"'] \arrow[dr, "pr'_b"] \arrow[d, dotted, "\langle pr'_a, pr'_b \rangle"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] \arrow[d, dotted, "\langle pr_a, pr_b \rangle"] & b \\
& (a \times b)' \arrow[ul, "pr'_a"] \arrow[ur, "pr'_b"'] &
\end{tikzcd}$$

hvor $\langle pr'_a, pr'_b \rangle$ er den entydigt givne morfi til 'produktet' $a \times b$ af a og b og $\langle pr_a, pr_b \rangle$ er den entydige morfi mht. 'produktet' $(a \times b)'$ af a og b. Derefter kan vi udnytte at vi i tilfældet med $(a \times b)'$ kan bruge definitionen på sig selv, dvs. der findes en entydig morfi $s : (a \times b)' \to (a \times b)'$ der får den ydre kvadrat til at kommutere[11]. Det er klart at vi i så fald kan få kvadratet til at kommutere ved at sætte $s = Id_{(a \times b)'}$, men samtidig kan vi jo se af hele diagrammet, som jo jvf. definitionen kommuterer, at $s = \langle pr_a, pr_b \rangle \circ \langle pr'_a, pr'_b \rangle$, som jo så også er lig $Id_{(a \times b)'}$. Gentager vi hele denne argumentrække, men bytter om på $a \times b$ og $(a \times b)'$, så får vi det omvendte resultat at $s = \langle pr'_a, pr'_b \rangle \circ \langle pr_a, pr_b \rangle = Id_(a \times b)'$. Det vil altså sige at $\langle pr_a, pr_b \rangle$ og $\langle pr'_a, pr'_b \rangle$ er hinandens inverse, og dermed er der tale om en isomorfi så $a \times b \cong (a \times b)'$. □

Isomorfi er i kategoriens verden det generelle udtryk for strukturbevarelse mellem nogle objekter/konstruktioner inden for en given kategori. Dette kan eksemplificeres ved at kigge på kategorien **Grp**[12], hvor det vi kender

11 Det ses også ved at sætte $c = a \times b$,$f = pr_a$ og $g = pr_b$ ind i definition (2.7) og dertilhørende diagram.

12 Kategorien af grupper, hvor objekterne er alle grupper, og morfierne er (gruppe) homomorfier.

som gruppe isomorfier[13] lige netop er de isomorfier vi definerede ovenfor for abstrakte kategorier. Det vil altså sige at inden for »gruppernes verden«, hvor det er gruppestruktur der interessant, kan der ikke ses strukturelt forskel på to isomorfe grupper. Det samme gælder **Top**[14], hvor de homeomorfe topologiske rum/homemorfier er hhv. isomorfe objekter og iso morfier. Igen er homeomorfe topologiske rum strukturelt ens, fra et topologisk synspunkt. Det vil altså sige, hvis vi er i **Grp** og vi har to gruppe-produkter, og disse er isomorfe, vil de begge opfylde produktdefinitionen, til trods for at grupperne ikke nødvendigvis er ens. De fleste definitioner er kun defineret til og med isomorfi, som vi lige har set i eksemplet med produkt definitionen.

Afslutningsvis skal det siges at produkt definitionen kan dualiseres og dette vil frembringe kategori-definitionen for en sum. En kategoriteoretisk definition på sum er i kategorien **Set** sammenfaldende med en disjunkt forening, hvilket vil sige at man indekserer elementerne fra de respektive mængder man vil lave en disjunkt forening af. Altså givet A og B kan vi indeksere dem ved $A' = A \times \{0\}$ og $B' = B \times \{1\}$, og så bliver $A + B = A' \cup B'$. Definitionen af dette i kategoriernes verden er lige netop det duale modstykke til (2.7). Vi vender morfierne i modsat retning og får følgende definition

Definition 2.8
En sum i $\mathscr{C}$ er defineret entydigt op til isomorfi ved følgende: En sum består af tre objekter og to morfier $a \overset{In_a}{\to} a + b \overset{In_b}{\leftarrow} b$, så der til alle andre objekter c, med dertilhørende morfier $a \overset{f}{\to} c \overset{g}{\leftarrow} b$, vil eksistere en entydigt bestemt morfi $k = [f, g] : a + b \to c$, så

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "In_a"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, dotted, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "In_b"'] \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

kommuterer.

13 Altså en gruppe homomorfi der er bijektiv. Det første sikrer at gruppestrukturen bliver bevaret, altså $f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$,$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ osv.

14 Kategorien af topologiske rum, hvor objekterne er alle topologiske rum og morfierne er kontinuerte afbildninger mellem disse.

Hvis vi er i **Set**, defineres injektionerne In_A og In_B ind i $A + B$ ved $In_A(a) = (a, 0)$ og $In_B(b) = (b, 1)$. Den entydige morfi k er defineret ved:

$$k(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } y = 0 \\ g(x) & \text{hvis } y = 1 \end{cases}$$

Som det er blevet nævnt tidligere, så er disse definitioner af produkt,sum, terminale og initiale objekter partikulære tilfælde af en mere generel måde at at lave konstruktioner i kategorier. Vi skal nu introducere den generelle tilgang til konstruktioner, hvoraf de allerede gennemgåede er partikulære tilfælde.

2.2.2 Grænser og co-grænser i $\mathscr{C}$

Vi skal i dette afsnit kigge på grænser, men inden vi kommer med den formelle beskrivelse, skal vi prøve at efterrationalisere hvad vi allerede har kigget på. Det virker måske en smule søgt, men forhåbentlig vil det, i kombination med det formelle, giver en beskrivelse af hvad der er på færde.

Som beskrevet ovenfor, så har vi kigget på en lang række definitioner, og det er ikke umiddelbart klart hvad disse har til fælles. De har haft en ting til fælles. Hvis vi kigger på definitionen af et terminalt objekt og kalder et terminalt objekt for konstruktionen K_t, så gjaldt der at for alle andre konstruktioner af lignende beskaffenhed, dvs. de i dette tilfælde bare er et objekt, så var der en entydig bestemt morfi fra dette andet objekt til K_t. På samme måde med definitionen for produkt, hvis vi kalder $a \overset{Pr_a}{\leftarrow} a \times b \overset{Pr_b}{\rightarrow} b$ for konstruktionen K_p, så gjaldt der at alle konstruktioner af lignende beskaffenhed, det vil sige $a \overset{f}{\leftarrow} c \overset{g}{\rightarrow} b$, har en entydigt bestemt morfi der »forbinder«, eller mere præcist, som får $\overset{f}{\leftarrow} c \overset{g}{\rightarrow} b$ og K_p til at kommutere[15]. Dette betyder at alle andre konstruktioner der ligner K_t og K_p hhv., dvs. har forskellige morfier og *et* forskelligt objekt, men samme kommuterende diagram, *faktoriserer* entydigt igennem den givne entydige morfi. Den entydige morfi er iøvrigt altid en morfi mellem de to objekter der *ikke* er ens i de to konstruktioner. Hvordan dette foregår formelt, skal vi kigge på nu, da det viser sig der findes en generel fremgangsmåde til at beskrive de ovenstående konstruktioner. Derfor skal vi sætte de to ovenstående konstruktionerne K_p og K_t ind i denne generelle teori, og diskutere et nyt (og vigtigt) eksempel.

15 På samme måde fås lignende betragtninger om K_p og K_t's duale makkerpar, selvfølgelig med den entydige morfi i modsat retning.

For at beskrive dette fænomen, skal vi først introducere et par hjælpe begreber: et *diagram* D og *kegle* til et diagram D. Vi antager at nedenstående foregår i en given kategori $\mathscr{C}$. Et diagram D er defineret ved samling objekter $\{d_i : i \in I\}$ og en samling morfier $\{g_i : i \in I'\}$ der kan forbinde objekterne på vilkårlig vis. Dvs. der kan være $0 \ldots n$ morfier mellem et vilkårligt objektpar d_j, d_k. Nu antager vi så at et sådan diagram D er givet. En kegle over D er en samling $\{c \xrightarrow{f_i} d_i : i \in I\ \}$ der knytter en morfi f_i fra et fast objekt c til hvert af objekterne d_i i diagrammet. Derudover, så for hver morfi $g : d_i \to d_j$ i D, vil keglen over D få diagrammet i figur 2.1 til at kommutere. Keglens udseende afhænger helt af diagrammets

$$\begin{tikzcd}
d_i \arrow[rr, "g"] & & d_j \\
& c \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Figur 2.1 Et udsnit af D med dertilhørende kegle.

beskaffenhed, men når først en given kegle er givet kan vi definere *grænsen* for denne. Grænsen af et givet diagram indfanger lige præcis konstruktionen med den entydige morfi fra tidligere, da grænsen for et diagram D er en dertilhørende D-kegle, hvorom det gælder at for alle andre D-kegler $\{c' \xrightarrow{f'_i} d_i : i \in I\ \}$, findes der en dertilhørende entydig morfi $f : c' \to c$, så figur 2.2 kommuterer for alle objekterne d_i. En kegle med denne egenskab

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & d_i \arrow[d, "g"] & c' \arrow[l, "f'_i"'] \arrow[dl, "f'_j"] \arrow[ll, dotted, bend right, "f"'] \\
& d_j &
\end{tikzcd}$$

Figur 2.2 Denne egenskab som figur 2.1 skal besidde for at være en grænse. Det er igen kun et udsnit af keglen, der illustrerer princippet.

kaldes også for en universel kegle mht. D, og har en universel egenskab

grænse	pendant i **Set**	co-grænse	pendant i **Set**
Monisk morfi	injektiv funktion	Episk morfi	surjektiv funktion
Produkt	cartesisk produkt	Sum	disjoint union
Equaliser	Equaliser	co-Equaliser	...*
Pullback	...*	Pushout	...*

Tabel 2.1 En lille oversigt over for skellige objekter, dels som vi kender dem fra mængdelæren og deres abstrakte udgave i kategoriteorien.*Disse har ikke nogle pendanter i **Set** med samme oplagte fortolkning som de øvrige, men konstruktioner kan laves som opfylder definitionerne. Disse konstruktioner er der også knyttet klassiske matematiske idéer til, men de kræver en udredning som vi ikke har plads til her.

mht. de andre kegler af samme type. Egenskaben er at alle andre kegler til D faktoriserer entydigt igennem grænsekegelen, som figur 2.2 illustrerer. Som man ser har f den rolle, som k har i definitionen af et produkt, og faktisk er den eneste forskel på diagram-segmentet i ovenstående figur 2.2, og diagrammet i produktdefinitionen, at der er en morfi g mellem de to objekter. I produktdefinition har vi kun to objekter a og b, hvilket vi skal kigge nærmere på nu.

Som det er nævnt i foregående eksempler, kan denne grænse-definition dualiseres ved at vende retningen på pilene og på den måde fremkommer »co-grænsen«, med den dertilhørende universelle co-kegle. Dette giver os en generel måde at klassificere forskellige kategoriske konstruktioner på. I tabel 2.1 er der en lille oversigt over disse konstruktioner hvor vi har gennemgået nogle af dem, som f.eks. terminale objekter og produkter. Disse to vil vi nu beskrive i lyset af den overordnede teori om grænser. Fremgangsmåden er som i ovenstående generelle tilfælde, bare med fastlagt diagram D_t og D_p. Vi kan starte ud med at tage det tomme diagram, så vi antager at D_t hverken består af nogle morfier eller objekter. Hvad er så en D_t-kegle i dette tilfælde? Hvis der ikke er nogle objekter, så kan der ikke være nogle morfier som keglen kan relatere sig til diagrammet med, så vi har kun et objekt c. Så vil grænse-keglen til diagrammet D_t jo lige netop være sådan et c, hvorom det gælder at der for alle andre D_t-kegler c' gælder at der findes en entydig morfi $k : c' \to c$. Dvs. en grænse D_t-kegle er et objekt c i $\mathscr{C}$, hvorom det gælder at for alle andre objekter c' i $\mathscr{C}$, findes kun en morfi fra c' til c. Dette var jo lige netop vores definiton af et terminalt objekt c i en kategori $\mathscr{C}$! Hvis vi tager en co-kegle med dertilhørende co-grænse for ovenstående diagram D_t, så ender vi op med definitionen på et initial objekt. På lignende vis kan vi konstruere et produkt. Der definerer vi et diagram D_p til at bestå af to objekter d_1 og d_2, uden nogle morfier til hverandre. En D_p-kegle er i dette tilfælde et objekt c, med to morfier $f_1 : c \to d_1$ og $f_2 : c \to d_2$. Tager vi grænsen af denne D_p-kegle, får vi altså en konstruktion $d_1 \overset{f_1}{\leftarrow} c \overset{f_2}{\to} d_2$ hvorom det gælder at alle andre lignende konstruktioner $d_1 \overset{f_1'}{\leftarrow} c' \overset{f_2'}{\to} d_2$ skal faktorisere entydigt igennem vores c, hvilket altså er definitionen af et produkt. Dette ses også hvis man kigger på den illustration der hører til definition 2.7 af et produkt. Sæt $f = f_1'$, $g = f_2'$, $pr_1 = f_1$, $pr_2 = f_2$ og k er den entydigt givne morfi der faktoriserer fra c' til c. Kort sagt, definitionen af et produkt er grænsekeglen til et diagram »$a \quad b$«[16], og igen er det co-kegle og co-grænse der udgør det duale modstykke, som i dette tilfælde er definitionen på en sum.

Lad os dernæst tage et eksempel fra tabel 2.1, som vi endnu ikke har behandlet ovenfor. Det er oplagt at vælge et *pullback*, da dette er et vigtigt objekt i konstruktionen af en topos og kræver derfor en behandling her. Pullbacket bruges til at generalisere karakteristiske funktioner i **Set**, og er derudover vitalt for forståelsen af hvad komprehension er i en topos. Vi vil derfor først gennemgå den formelle konstruktion, og se på en konkret konstruktion i **Set**, som er et pullback.

I tilfældet med pullback består vores diagram D_{pu} af tre objekter og to morfier, der tilsammen udgør konstruktionen $a \overset{g}{\to} c \overset{f}{\leftarrow} b$. Dvs. vores D_{pu}-kegle må være et objekt d med tre morfier h_1, h_2, h_3, en der går til hvert objekt i D_{pu}, som får

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, "h_2"] & a \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

til at kommutere. Da diagrammet kommuterer har vi at $g \circ h_3 = f \circ h_1 = h_2$, kan vi se bort fra h_2 for fremtiden. Vi har nu beskrevet diagrammet, med en dertilhørende kegle. Så er det grænse-D_{pu}-keglen der udgør et pullback. Dvs. alle andre D_{pu}-kegler faktoriserer igennem ovenstående kegle, så hvis vi har en anden D_{pu}-kegle d', $h_1' : d' \to b$ og $h_3' : d' \to a$, så findes der en entydig morfi $k : d' \to d$ så diagrammet i figur 2.3 kommuterer. Vi vil få

16 Altså to objekter uden en morfi mellem sig.

$$\begin{tikzcd}
d' \arrow[drr, "h_3'"] \arrow[ddr, "h_1'"'] \arrow[dr, dashed, "k"] & & \\
& d \arrow[r, "h_3"'] \arrow[d, "h_1"] & a \arrow[d, "g"] \\
& b \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

Figur 2.3 Illustration af pullback'ets universelle egenskab.

brug for denne konstruktion i 2.3.

Hvorimod de øvrige konstruktioner vi har diskuteret i dette kapitel har haft en konkret og velkendt konstruktion i **Set**, har pullbacket ikke den samme grad af velkendthed. Til gengæld kan vi lave en pullback-konstruktion, som vi intuitivt kan se må gælde, i **Set**. Dette intuitive eksempel får vi brug for i 2.3.

Vi starter med en funktion i **Set**, $f : A \to B$ og en mængde C så $C \subseteq B$. Så har vi en mængde $f^{-1}(C) \subseteq A$, som er alle de elementer i A som har deres billede i C under f, altså $f^{-1}(C) = \{x : x \in A \wedge f(x) \in C\}$. Ovenstående konstruktion sammen med $f^* : f^{-1}(C) \to C$, som er restriktionen af f til mængden $f^{-1}(C)$, giver følgende

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(C) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, hook, "g_1"'] & C \arrow[d, hook, "g_2"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

pullback diagram, hvor g_1 og g_2 er inklusionsfunktioner. At ovenstående konstruktion er et pullback, ses ved følgende. Da vi påstår det er et pullback-kvadrat, så har vi en karakterisering af pullback-egenskaben i diagram 2.3, som let kan oversættes til vores konkrete kvadrat. Antag derfor det modsatte, nemlig at vi har to forskellige k og k' der opfylder at få diagram 2.3 til at kommutere, hvor det indre kvadrat udgøres af vores eksempel fra **Set**. Dvs. at $g_1 \circ k = g_1 \circ k' \Leftrightarrow g_1(k(x)) = g_1(k'(x)) \forall x \in f^{-1}(C)$. Men da k og k' er forskellige i mindst et element x_0 har vi, jvf. definitionen på en inklusionsfunktion, at $g_1(k(x_0)) = k(x_0) \neq k'(x_0) = g_1(k'(x_0)$, altså i modstrid med antagelsen om at k og k' begge får diagrammet til at kommutere. Vi siger at vi får $f^{-1}(C)$ ved at »trække« C tilbage langs f, altså »ekstrahere« $f^{-1}(C)$ fra C ved at trække C tilbage fra B vha. f. En interessant fortolkning af et pullback, som vi vil vende tilbage til.

Ovenstående grænse og co-grænse bruges til at definere en generel egenskab ved kategorier, og topoi i særdeleshed. Vi siger at en kategori $\mathscr{C}$ er hhv. *fuldstændig* og *co-fuldstændig*, hvis alle diagrammer i $\mathscr{C}$ har en hhv. grænse og co-grænse. Gælder disse egenskaber kun for endelige diagrammer, kaldes kategorien endelig fuldstændig etc. Som vi har set, er fuldstændighedsegenskaben tæt forbundet med konstruktionen og muligheden af produkter, produkter af n objekter, terminale objekter m.m. jvf. 2.1(og dualt gør det samme sig gældende med co-fuldstændighedsegenskaben)
Udover ovenstående kategoriteoretiske formuleringer af gammelkendte fænomener, mangler vi et par vigtige objekter der trænger til at blive sat i kategoriteoretisk ramme.

2.3 Delobjekt klassifikator

I dette afsnit skal vi kigge på hvordan man kan klassificere delobjekter i kategorier, og vi starter vanen tro med at kigge på hvordan det forholder sig i **Set**. Lad os først kigge på delmængder og deres egenskaber i **Set**, og se om ikke der er noget struktur der vil være oplagt at bruge i en kategoriteoretisk formulering. At beskrive en delmængde vha. funktioner i **Set** kan gøres ved at sige: Hvis $A \subseteq B$ så må der findes en inklusionsfunktion $f : A \hookrightarrow B$ defineret ved $f(x) = x$. Det følger deraf at f må være injektiv, altså monisk. Desværre går det ikke så let den anden vej. Vi kan sagtens have en monisk funktion i **Set** hvor domænet ikke er en delmængde af co-domænet[17].

Vi kan løse dette ved at se på følgende forhold. Hvis vi har en monisk morfi $g : C \hookrightarrow B$ og C ikke nødvendigvis er en delmængde af B, så vil der være en bijektion $i : C \cong A$ med en eller flere delmængder $A \subseteq B$, altså de er isomorfe[18]. Vi vil dog helst sørge for at billedet af g og billedet af f er de samme. Men det må de jo nødvendigvis være, hvis der for i gælder at $f(i(x)) = g(x) \forall x \in C$ (det svarer til diagrammet i marginen kommuterer).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ C \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

17 Et simpelt eksempel kan være $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Konstruér en funktion der tilskriver $1, 2, 3$ hhv. til hver deres respektive tal i B

18 I kategoriteoretisk forstand

To morfier f, g der har isomorft domæne og hvor vi har et kommuterende diagram ala margin, udgør en en ækvivalensrelation[19] mellem morfier, og så kan vi konstruere en klassedeling af mængden af morfier, som bliver praktisk senere. Vi vil ikke vise her, at dette vitterligt er en ækvivalensrelation, da det ses let ved at opskrive diagrammer for de 3 relationer, og se at disse kommutere. For en gennemgang af dette se [Goldblatt, 1984, s.76]. Pointen er at ovenstående betragtninger kan formuleres i kategoriteoretiske termer, og ikke kun i **Set**.

Dette gøres ved at sige at to moniske morfier $f : a \rightarrowtail b$ og $g : c \rightarrowtail b$ med co-domæne b er ækvivalente hviss $a \cong c$ og $f \circ i = g$ (jvf. diagrammet i marginen), og vi benævner da denne relation med »$f \simeq g$«. Klassedelingen gør os i stand til at definere samlingen af delobjekter til givet objekt d, i kategoriteoretisk forstand.

Definition 2.9
Til et objekt d, kaldes samlingen af delobjekter af d for $\mathrm{Sub}(d)$*, hvor* $\mathrm{Sub}(d) = \{[f] : f \text{ er monisk med co-domæne } d\}$ *hvor* $[f]$ *repræsenterer ovenstående ækvivalensklasse. Det vil altså sige at et delobjekt er en ækvivalensklasse af morfier.*

$\mathrm{Sub}(d)$ er altså også defineret ved klasser af morfier, men for nemheds skyld bruger vi notationen f, selvom vi i virkeligheden snakker om ækvivalensklassen $[f]$, medmindre der bliver sagt andet. Vi identificerer altså delobjekter vha. morfier i stedet for delobjekterne selv, og dette gøres kun op til isomorfi, hvilket ligger i tråd med de tidligere konstruktioner, og er altså ikke problematisk.

Nu vender vi igen tilbage til **Set**, hvor mængden af delmængder skrives som $\mathscr{P}(D)$. Udstyret med inklusionsrelationen $\subseteq$ som er en partiel ordningsrelation[20] på $\mathscr{P}(D)$, hvilket jo gør $(\mathscr{P}(D), \subseteq)$ til et poset kategori[21]. Det vil altså sige at hvis $A \subseteq B$, eksisterer der netop en inklusionsfunktion $A \rightarrowtail B$ mellem A og B. Det samme gør sig gældene for $\mathrm{Sub}(d)$ i en generel kategori $\mathscr{C}$ hvor den partielle ordningsrelation bruges på ækvivalensklasser af morfier i stedet, da vi som sagt ikke kan kende forskel på isomorfe objekter. At dette faktisk gør sig gældende kræver et par nøjere betragtninger, som vi ikke vil gå nærmere ind på i denne fremstilling. Det er lignende

19 Dvs. en relation der er transitiv, symmetrisk og refleksiv.

20 En partiel ordningsrelation $\subseteq$ på en mængde D er en relation der opfylder: I) Refleksivitet II) Antisymmetri III) Transitivitet.

21 En partiel ordning på en mængde udgør en kategori, se appendiks under poset.

overvejelser som ved ækvivalensklaserne, og de kan findes [Goldblatt, 1984, s.77]. Studiet af Sub(d) vil vende tilbage til i næste kapitel.

Vi fortsætter med at kigge på **Set**. Som bekendt er $\mathscr{P}(D) \cong 2^D$. Dette hentyder til at potensmængden kan beskrives vha. mængden af alle afbildninger fra D ind i $2 = \{1, 0\}$, så der for en vilkårlig delmængde E af D eksisterer en *karakteristisk funktion* $\chi_E : D \to 2$ defineret ved

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in E \\ 0 & \text{hvis } x \notin E \end{cases}$$

hvilket jo formelt betyder at $\mathscr{P}(D) \cong 2^D$. Dette er endnu en beskrivelse, hvor elementrelationen $\in$ eksplicit indgår, men det ses at der også i dette tilfælde er entydige funktionskarakteristika, som fører til en definition vha. morfier i kategoriernes verden. Med ovenstående karakteristiske funktion in mente, og hvis vi husker tilbage på vores pullback eksemplificering fra **Set**, så kan vi lave en entydig konstruktion i kategoriernes verden. Men lad os først bemærke at for ovenstående E i **Set** gælder at $E = \chi_E^{-1}(\{1\})$. Så kan vi se at for injektionen $f : E \hookrightarrow D$, vil

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "\chi_E"] \\ \{1\} \arrow[r, hook, "g"'] & 2 \end{tikzcd}$$

være et pullback hvor $g(\{1\}) = 1$. Dvs. vi får E, domænet af f, ved at trække D tilbage langs g (ligesom vores pullback-eksempel fra sidste afsnit). Det interessante er nu, at χ_E er den *eneste* morfi der gør ovenstående diagram til et pullback diagram. For hvis det ikke var tilfældet, ville det betyde at der fandtes to funktioner χ_E og χ'_E, som udgjorde den karakteristisk funktion for E, dvs. der ville som minimum eksistere et x_0 i D, hvor $\chi_E(x_0) \neq \chi'_E(x_0)$, hvilket strider mod antagelsen om at de begge er karakteristiske funktioner for samme delmængde. Morfien g kan omdøber vi til $\top$, hvilket vil blive klart senere, og χ_E kalder vi den karakteristiske funktion mht. E. Efter vi har lavet de ovenstående betragtninger over naturen af delmængder, er vi klar til at komme med den generaliserede formulering i kategoriteoretiske termer. Først et aksiom, der lyder således.

Ω-`aksiom`: *For alle moniske morfier $f : a \rightarrowtail d$, findes en entydig morfi i $\mathscr{C}$ $\chi_f : d \to \Omega$ så*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

er et pullback diagram.

hvor $\top$ og Ω er specielle objekter/morfier som vi forklarer efter vi har givet definitionen (op til isomorfi[22]) på en delobjekt klassifikator

Definition 2.10
Lad $\mathscr{C}$ være givet med et terminalt objekt 1, så er en delobjekt klassifikator for $\mathscr{C}$ et objekt Ω i $\mathscr{C}$ sammen med en morfi $\top : 1 \to \Omega$ der opfylder Ω-aksiomet.

I **Set** er $\Omega = 2$, og $\top$ defineret ved at have den karakteristiske morfi $\chi_\top = Id_\Omega$, og derudover har vi en morfi $\perp$ defineret ved at være den karakteristiske morfi til $! : 0 \to 1$, som kommer til at spille den omvendte rolle. Det vil vi vende tilbage til i næste kapitel. På lignende vis, i kategoriernes verden som i **Set**, har vi en isomorf korrespondance mellem delobjekter til et givet objekt d kaldet $\mathrm{Sub}(d)$, og $\mathscr{C}(d, \Omega)$. At det forholder sig sådan at $\mathrm{Sub}(d) \cong \mathscr{C}(d, \Omega)$ underbygger bare ligheden mellem konstruktionerne i hhv. mængdelæren og kategorilæren. Vi har det forhold at for to funktioner $f : a \to d$ og $f : b \to d$ at $\chi_f = \chi_g$ hviss $f \simeq g$[Goldblatt, 1984, side 82], og det vil sige at de morfier der tilhører den samme ækvivalensklasse[23] får tildelt den samme karakteristiske morfi vha. Ω-aksiomet. Da alle morfier $h : d \to \Omega$ er moniske, da de indgår i et pullback med $\top : 1 \to \Omega$ som er monisk, og pullback'et af en monisk morfi altid er monisk[Goldblatt, 1984, s. 83], så får vi at $\mathrm{Sub}(d) \cong \mathscr{C}(d, \Omega)$. Ovenstående henvisning er vigtig i forståelsen af logikken bag de **Set**-lignende kategorier, og det vil vi vende tilbage til senere.

Efter vores formulering af Ω-aksiomet, er det nærliggende at kigge på komprehensionsprincippet. Princippet i **Set** går ud på følgende. Hvis vi har

22 Beviset for dette følger samme fremgangsmåde som med beviset for at produktet er givet op til isomorfi. Tag to konstruktioner og anvend dem på hinanden, for at skabe den ønskede isomorfi. Se [Goldblatt, 1984, s.88] for detaljer.

23 Som vi brugte til at konstruere $\mathrm{Sub}(d)$ med.

en mængde B og en veldefineret egenskab ϕ, som er anvendelig i forhold til B, så kan vi definere en karakteristisk funktion χ_ϕ

$$\chi_\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ har egenskaben } \phi \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Ud fra denne funktion kan man definere en delmængde $A_\phi = \{x : \phi(x) = 1\}$ af B. Det er så oplagt, ud fra ovenstående teori om delobjekter, at der findes en inklusionsfunktion g, som gør

$$\begin{tikzcd} A_\phi \arrow[r, "g"] \arrow[d, "!"'] & B \arrow[d, "\phi"] \\ \{a\} \arrow[r, "\top"'] & 2 \end{tikzcd}$$

til et pullback diagram. Dvs. mængden A_ϕ fås ved at trække ϕ tilbage langs $\top$. Det vil altså sige vi har fået udtrykt komprehensionsprincippet efter samme devise som da vi skulle fundere Ω-aksiomet i **Set**'s intuitive ramme. Vi kan altså konkludere at Ω-aksiomet ligger fint i tråd med mængdelærens komprehensionsprincip[24].

I forlængelse af delobjekt klassifikatoren, kunne det være interessant at kigge på følgende. Vi antager i **Set** at $A \subseteq B$, og derudover et element $a \in B$, så kan vi spørge os selv om to ting. `I`) Kan vi generalisere $a \in B$ og `II`) kan vi generalisere en måde at beskrive hvorvidt a også er i A, i en vilkårlig $\mathscr{C}$. I **Set** kan vi uden større besvær beskrive et element $\{a\} \in B$ ved en funktion $f : \{a\} \to B$ defineret ved $f(a) = a$, lad os kalde denne funktion for elementmorfien x i kategoriernes verden[25]. Dernæst til `II`, hvilket vi kan formulere i kategoriteoretisk sprog som følger. Hvis $x : 1 \to b$ og $g : a \rightarrowtail b$, så siger vi at $x \in g$[26] hvis vores x faktoriserer igennem g, dvs.

24 Hvis vi har en mængde D og en veldefineret egenskab ϕ, siger komprehensionsprincippet at vi kan lave en delmængde af D givet ved $\{x : \phi(x)\}$

25 Det vil altså sige »elementer« i kategoriteorien beskrives som morfier fra et terminalt objekt til et andet objekt.

26 Husk at vi betragter delobjekter ved deres (klasse) morfier.

der findes $k : 1 \to a$ som får

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "x"] & \\
a \arrow[rr, tail, "g"'] & & b
\end{tikzcd}
$$

til at kommutere. Spørgsmålet er så, om der findes flere morfier der opfylder dette diagram? Svaret er nej, hvilket ses af det faktum at der til den moniske morfi g knytter sig et pullback diagram og en χ_g jvf. Ω-aksiomet[27]. Så hvis $x \in g$ så må det jo betyde at

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "1"'] & & \\
 & a \arrow[r, tail, "g"'] \arrow[d, "!"] & b \arrow[d, "\chi_g"] \\
 & 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

kommuterer. Da kvadratet er et pullback, og den ydre »omkreds« kommuterer, må k nødvendigvis være entydigt givet, jvf. definitionen på et pullback diagram. Dermed har vi fået kategoriteoretisk formulering og kortlægning af elementrelationen. Vi skal kigge nærmere på dette i næste kapitel.
Som vi har set, så har alle de objekter vi har introduceret og evt. gennemgået, haft den egenskab at de har taget udgangspunkt i mængdelæren, men er blevet generaliseret til kategoriernes verden. Den store forskel ligger i at elementrelationen, som jo er fundamental i mængdelæren, ikke har en fremtrædende rolle i kategoriernes verden. Fundamentale konstruktioner er udelukkende defineret ved den entydige måde de kan relateres til andre morfier og objekter i en given kategori. Når først egenskaber er defineret i kategoriterminologi, så kan de anvendes på kategorier hvor de slet ikke har en direkte relation til mængdelæren, jvf. SDG, til trods for at det var med udgangspunkt i mængdelæren, at egenskabernes definition havde deres oprindelse. Kategorierne er ganske enkelt for abstrakte, så man må

27 Vi antager selvfølgelig at dette gælder i den pågældende $\mathscr{C}$.

derfor stille sig spørgsmålet:»Hvilken ekstra struktur skal der til, for at en kategori ligner **Set**?« Det korte svar er: »Når en kategori er en topos.« Men et meget længere og mere uddybende svar på dette spørgsmål, vil optage en stor del af dette projekt. For til trods for de mange ligheder mellem topoi og mægdelæren, vil nogle divergere mere fra **Set** end andre, og især de topoi der ligger til grund for $\mathcal{S}$ vil afvige, men stadig bevare nok lighed til at der kan udfoldes frugtbar matematik. Det er dette vi skal kigge nærmere på i næste kapitel, men først en sidste definiton.

2.4 Potensobjekter

Et naturligt spørgsmål der rejser sig, efter vi har set på hvordan man klassificerer delobjekter, er om potensobjekterne i **Set**, dvs. mængden af alle delmængder $\mathscr{P}(A)$ af A, som jo svarer til 2^A i **Set**, har en naturlig generaliseret definition i kategoriteorien. Vi starter i **Set** og ser på nogle overvejelser der kan give anledning til en kategoriteoretisk definition.

Først og fremmest er der en sammenhæng mellem $\mathscr{P}(A)$, de relationer der kan laves på A med f.eks. B, og så funktionerne $f : B \to \mathscr{P}(A)$. Lad nu en sådan funktion f være givet, så kan vi definere en relation $R_f \subseteq B \times A$ med udgangspunkt i f ved at sige at xR_fy gælder hviss $y \in f(x)$ for $x \in B \wedge y \in A$. Omvendt kan en relation R definere en funktion $f_R : B \to \mathscr{P}(A)$ ved $f_R(x) = \{y : y \in A \wedge xRy\}$ og dermed får vi en delmængde af A til hvert x. Den første definition sørgede for at lave en relation, der lige netop var opfyldt xR_fy når $y \in f(x)$, og det burde være oplagt at disse to overgange fra hhv $R \to f_R$ og $f \to R_f$, er hinandens inverse. Dvs. vi kan finde en entydig R_f til en givet f og omvendt kan vi finde en entydig funktion f_R til en givet relation R. Dette skal vi bruge om lidt.

Men først lad os definere en mængde $\in_A$, der holder styr på hvilke elementer x der hører til hvilke delmængder U. Dette kan gøres ved flg. definition $\in_A = \{\langle U, x\rangle : U \subseteq A, x \in A \wedge x \in U\} \subseteq \mathscr{P}(A) \times A$, hvor vi til hvert U_n har en række $\langle U_n, x_1\rangle, \langle U_n, x_2\rangle$ for $x \in U$. Vi ved jo fra sidste afsnit at en delmængde kan beskrives ved hjælp af en karakteristisk funktion, så ovenstående mængde må være bijektiv med $\in'_A = \{\langle \chi_U, x\rangle : U \subseteq A, x \in A \wedge \chi_U(x) = 1\} \subseteq 2^A \times A$. Bemærk forskellen på hvad disse definerede mængder er delmængder af. Der er ikke den store forskel ved disse to mængder umiddelbart, men hvis vi definerer en evaluerings funktion ved

$ev : B^A \times A \to B$ ved $ev(f,x) = f(x)$ for $f \in B^A \wedge x \in A$[28] kan vi se at den i vores partikulære tilfælde med $\in'_A \subseteq 2^A \times A$ bliver til $ev(\chi_U, x) = \chi_U$, det vil altså sige at ev er den karakteristiske funktion for $\in'_A$, og der ved vi jo fra Ω-aksiomet at vi har et pullback diagram.

$$\begin{tikzcd}
\in'_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & 2^A \times B \arrow[d, "ev"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & 2
\end{tikzcd}$$

Når vi har givet en relation $R \subseteq B \times A$ har vi at $\langle x, y\rangle \in R$ hviss $y \in f_R(x)$ hviss $\langle f_R(x), y\rangle \in \in_A$ hvilket kommer sig af ovenstående definitioner. Kigger vi derudover på ovenstående mængdeteoretiske eksempel på et pullback (se sidst i afsnit 2.2.2) og med støtte fra følgende pullback,

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & B \times A \arrow[d, "f_R \times Id_A"] \\
\in_A \arrow[r, hook] & \mathscr{P}(A) \times A
\end{tikzcd}$$

kan vi konkludere at R er det inverse billede af $\in_A$ under funktionen $f_R \times Id_A$ som jo tager $\langle x, y\rangle$ til $\langle f_R(x), y\rangle$. Vi ved jo fra vores pullback-eksempel i afsnit 2.2.2 at denne konstruktion er et pullback, hvor g agerer f^*, dvs. er restriktionen af $f_R \times Id_A$, og så må den være entydigt givet ud fra f_R. Men derudover så gælder der også, at hvis vi har en relation R så er f_R den eneste funktion der vil give sidstnævnte pullback. Dette kommer sig af at $\in'_A \cong \in_A$ og $2^A \cong \mathscr{P}(A)$ dvs. vi kan sammensætte ovenstående pullbacks (illustreret i marginen). Vi har så, da de to kvadrater er pullbacks, at det ydre rektangel er et pullback (vha. pullback lemma'et[29]). Hvis vi så har et givet f_R (vi ved endnu ikke om dette er det enste), så ved vi at dette giver en entydig g, dvs. at $! \circ g = !$. Så har vi fra Ω-aksiomet at $ev \circ f_R \times Id_A = \chi_R$ er entydigt givet. Vi ved at $\chi_{\in_A}$ er entydigt givet via Ω-aksiomet og Id_A er også entydig, dvs. for at hele sammensætningen skal være entydig, må f_R også være det. Selvfølgelig er alt entydighed med

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[d, "g"'] & B \times A \arrow[d, "f_R \times Id_A"] \\
\in_A \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & \mathscr{P}(A) \times A \arrow[d, "ev"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & 2
\end{tikzcd}$$

28 Funktionen ev bruges også til at give en kategoriteoretisk formulering af eksponentiering, hvilket vi ikke når at gennemgå i projektet her.

29 se appendiks

det forbehold at det er op til isomorfi, hvilket som bekendt er nok ud fra et kategoriteoretisk standpunkt. Det fører til følgende kategoriteoretisk definition på potensobjekter i $\mathscr{C}$.

Definition 2.11
En kategori $\mathscr{C}$ (med produkt) har potensobjekter, hvis der til hvert $\mathscr{C}$-objekt a findes $\mathscr{C}$-objekter $\mathscr{P}(a)$, $\in_a$, og en monisk morfi $\in : \in_a \rightarrowtail \mathscr{P}(a) \times a$, så der for en vilkårlig »relation«, $r : R \rightarrowtail b \times a$ findes præcis en morfi $f_r : b \mathscr{P}(a)$ der resulterer i flg. pullback.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, tail] \arrow[d, "r"'] & b \times a \arrow[d, "f_r \times Id_a"] \\
\in_a \arrow[r, tail] & \mathscr{P}(a) \times a
\end{tikzcd}$$

Med denne definition i baggagen er vi klar til at studere de mere konkrete kategorier, nemlig dem der kan klassificeres som en topos. Dette vil vi gøre i næste kapitel.

3 Elementære egenskaber ved topoi

I dette kapitel vil vi gennemgå den generelle konstruktion af en topos, samt beskrive de måder hvorpå forskellene er til en meget konkret topos, nemlig **Set**. Dette vil bidrage til at give en forståelse af hvad der grundlæggende er på spil i de forskellige matematiske universer, der har en topos som grundlag, hvor der bedrives matematik. Men med bagagen fra sidste kapitel en mente, er vi faktisk allerede nu i stand til at give en definition på, hvilke kriterier en kategori skal opfylde, for at kunne kaldes en topos. [1]

Definition 3.1
En elementær topos er en kategori $\mathscr{T}$ der har følgende egenskaber[2] [3]

I $\mathscr{T}$ er endelig fuldstændig
II $\mathscr{T}$ er endelig co-fuldstændig
III $\mathscr{T}$ har eksponentiering
IV $\mathscr{T}$ har en delobjekt klassifikator

Som det blev sagt i sidste kapitel, så er en topos en kategori der ligner **Set**, men i og med det er en abstraktion, vil der være visse egenskaber i **Set**, som kan tage andre former[4]. Vi skal i dette kapitel se på nogle konkrete egenskaber, og se på hvilken måde disse afviger fra **Set**. De første 2 egenskaber i definitionen har at gøre med hvilke formelle konstruktioner det er muligt at lave jvf. 2.1, da alle disse konstruktioner lige netop er baseret på

1 Der findes en del ækvivalente, men kortere definitioner af en topos, da f.eks. nogle af grænserne kan defineres ud fra simplere diagrammer. Denne her er dog valgt, da den anses for at være mest pædagogisk. En kortere definition er for eksempel: En elementær topos er en cartetisk lukket categori med en delobjekt klassifikator.

2 Med fuldstændig (og co-fuldstændig) hentydes der til sidste del af afsnit 2.2.2

3 Bliver som tidligere sagt så bliver den kategoriteoretiske formulering af eksponentiering ikke gennemgået i dette projekt.

4 Vi skal kigge senere kigge på en kategori, der er en topoi, men som er så primitiv at den har meget lidt til fælles med **Set**

eksistensen af grænser og co-grænser for alle diagrammer. Eksponentering er ligeså en fundamental konstruktion, da denne konstruktion hævder eksistensen af at der til to vilkårlige objekter a og b findes et objekt b^a med dertilhørende morfi ev[5].

Egenskab **IV** er relateret til fundamentale strukturer, f.eks. i form af klassificering af delobjekter, komprehensionsprincippter og den bagvedliggende logisk struktur. Delobjekternes opførsel der skal studeres grundigt i dette kapitel. Det kan desuden vises at en vilkårlig topos $\mathscr{T}$ har potensobjekter, altså at man til et vilkårligt objekt a kan finde potensobjektet $\mathcal{P}(a)$, og beviset for at potensobjekter eksisterer i $\mathscr{T}$, gør brug af Ω-aksiomet[Goldblatt, 1984, s. 103].

Endnu har vi ikke stødt på nogle store problemer i forhold til afvigelser fra **Set** som konsekvens af generaliseringen til **Set**, og som det blev nævnt i indledningen, så opstår der et problem med den klassiske logik. Dette skal vi se på snarest, men først skal vi prøve at hive nogle karakteristiske egenskaber ved **Set** frem, som ikke nødvendigvis gør sig gældende for alle topoi. Det skal vise sig at disse egenskaber er tæt forbundet med den grundlæggende logiske struktur.

En egenskab ved **Set** som visse topoi afviger fra, er når det gælder extensionalitetsprincippet, som ellers er fundamental i mængdelæren Cameron [1998]. Vi kan nemlig komme med to forskellige definitioner på ikke-tomhed, som ellers er sammenfaldende i **Set**.

Vi kalder et objekt *ikke-nul*, hvis det ikke er isomorf med objektet 0, altså $a \not\cong 0$. Derudover kan vi kalde et objekt a for *ikke-tomt*, hvis der findes mindst en elementmorfi $x : 1 \to a$, og det ses let at disse to simple definitioner er sammenfaldende i **Set**. Men hvis vores konkrete topos er f.eks. $\mathbf{Set^2}$[6], så ser billedet anderledes ud. Denne kategori besidder den egenskab at være et produkt af **Set**, så indenfor for hver komponent i produktet gælder **Set**, og vi bevarer derfor mængdelære notation. I $\mathbf{Set^2}$ eksisterer et objekt $\langle \emptyset, \{0\} \rangle$ som ikke er isomorft med kategoriens initial objekt $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$. Da vi komponentvis er i **Set**, vil det sige vi komponentvis skal konstruere en bijektion mellem objekterne, hvilket ikke er muligt fra $\{0\}$ og til $\emptyset$, da funktionen ikke er defineret i domænet og derfor ikke kan eksistere. Samtidig, hvis objektet skulle være ikke-tomt, skulle der eksistere en morfi, f.eks. $\langle f, g \rangle : \langle \{0\}, \{0\} \rangle \to \langle \emptyset, \{0\} \rangle$. Men det ville kræve at funktionen f

5 Som beskrevet i sidste afsnit.

6 Se appendiks for nærmere beskrivelse. At dette er en topos vil blive behandlet i et mere generelt tilfælde senere.

igen skulle være defineret som $f : (\{0\}) \to \emptyset$. Summa summarum har vi altså en kategori, hvori der findes et objekt hvorom det gælder at det er ikke-nul, men tomt. Konstruktionen af $\mathbf{Set^2}$ er også interessant, da den jo i en hvis forstand »overskrider« rammerne for mængdelærens genstandsfelt. Man kunne blive fristet til at tolke f.eks. $\langle A, B\rangle$ som værende det cartesiske produkt af A og B, hvilket ville ændre ovenstående problematik. Pointen er bare, at det kan man ikke eftersom hvert objekt stammer fra mængdelæren, som heldhed, og derfor overskrider de gængse love for konstruktioner som gælder i **Set**. En helt anden interessant ting man kan bemærke her, er at dette er problematisk ift. at kunne tale om extension i mængdeteoretisk forstand, eftersom princippet forudsætter at ikke-tomhed og ikke-nulhed er sammenfalende. Dette til trods, kan vi dog stadig give en morfi-baseret defintion af det klassiske extensionsprincip.

Definition 3.2 (Morfibaseret extensionsprincip)
Hvis $f, g : a \rightrightarrows b$ er forskellige morfier, så findes der mindst en elementmorfi $x : 1 \to a$ så $f \circ x \neq g \circ x$. En ikke-degeneret[7] topos der opfylder extensionsprincippet kaldes for »well-pointed«[Goldblatt, 1984, s.116].

Det er klart at $\mathbf{Set^2}$ ikke opfylder ovenstående definition, tag nu for eksempel objekterne $\langle \emptyset, \{0\}\rangle$ og $\langle \emptyset, \{0,1\}\rangle$ i $\mathbf{Set}^2$. Det er klart at der findes 2 morfier fra $\langle \emptyset, \{0\}\rangle$ til $\langle \emptyset, \{0,1\}\rangle$ hhv. $\langle Id_\emptyset, f_1\rangle(\emptyset, 0) = (\emptyset, 0)$ og $\langle Id_\emptyset, f_2\rangle(\emptyset, 0) = (\emptyset, 1)$, men som vi så ovenfor så er der ingen elementmorfier tilknyttet $\langle \emptyset, \{0\}$. Faktisk forholder det sig sådan at

Sætning 3.1
Hvis $\mathscr{T}$ er well-pointed så er alle ikke-0 *objekter ikke-tomme[Goldblatt, 1984, s.116]*

I **Set** har man desuden to elementmorfier fra $1 = \{0\}$ til $\Omega = \{0,1\}$, hvilke er $\top(0) = 1$ og $\bot(0) = 0$. Tager vi disse morfiers domæner og summerer sammen (uanset hvad disse måtte være, så længe de er terminale objekter)) har vi et 2-element objekt, som derfor er isomorft med Ω i **Set**.

7 En topos $\mathscr{T}$ er degenereret, hvis alle objekter er isomorfe. Fremover antages det at vores well-pointed topoi ikke er degenererede.

Jvf. definitionen på co-produkt vil der så gælde at

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "In_1"] \arrow[dr, "\top"'] & 1+1 \arrow[d, dotted, "{[\top,\bot]}"] & 1 \arrow[l, "In_1"'] \arrow[dl, "\bot"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

kommuterer, hvoraf $[\top, \bot]$ er entydig. I en generel topos $\mathscr{T}$ vil den mindst være monisk, og ydermere er den en isomorfi i **Set**. Dette giver en karakterisering af forskellige topoi i retning af at være mere eller mindre **Set**-lignende. Vi siger at en vilkårlig topos er *klassisk* hvis $[1 + 1]$ er isomorf med Ω, hvor $[\top, \bot]$ er isomorfien. Derudover, hvis der gælder at $\top : 1 \to \Omega$ og $\bot : 1 \to \Omega$ er de eneste to element-morfier der findes til Ω i en given topos $\mathscr{T}$, så kaldes $\mathscr{T}$ for *bivalent*, og well-pointedhed medfører bivalens[Goldblatt, 1984, s.118]. Det gælder dog ikke den anden vej, hvilket f.eks. gælder for kategorien $\mathbf{M_2}$ som vi skal se nærmere på senere[8]. Det viser sig imidlertidigt at de disse forskellige karakteriseringer af **Set** lignende egenskaber hænger sammen på følgende måde

Sætning 3.2
En topos $\mathscr{T}$ er well-pointed hviss den er klassisk og ikke-0 mængder er ikke-tomme i $\mathscr{T}$ [Goldblatt, 1984, s.121].

Med disse overordnede strukturelle begreber på plads, skal vi ned og studere den nærmere logiske struktur i en topos, og se hvorfor at intuitionistisk logik er den generelle struktur i en vilkårlig topos.

3.1 Logik fra mængdelære til topos

Når man snakker om mængdelæren, er det svært at komme udenom den boolske algebra. Denne er bindeleddet mellem klassisk logik og mængde manipulation. Boolsk algebra bruges til at lave nye mængder fra allerede givne, og er selvfølgelig af den grund fundamental for at opbygge mængdelæren og dermed matematikken som vi kender den i dag.

Når vi har undersøgt den boolske algebra og dens anvendelse, vil vi kigge på hvordan det er muligt at generalisere fra udsagnslogikkens klassiske

8 Faktisk er $\mathbf{M_2}$ ret centralt i vores forsøg på at forstå den logiske struktur i $\mathscr{T}$. Se appendiks A.1 eksempel 9 for beskrivelse af $\mathbf{M_2}$ og den mere generelle $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$.

semantik, og generalisere denne til kategoriteoretisk terminologi, og få en såkaldt $\mathscr{T}$-semantik. Ud fra denne semantik skal vi se hvor det går galt mht. klassik logik, og dernæst kigge på en alternativ logik. Men først starter vi med at kigge på den klassiske boolske algebra.

3.1.1 Boolsk algebra og klassisk logik

I forbindelse med diskussionen om delobjekter, diskuterede vi dennes egenskab som poset[9]. Dette skal vi tage udgangspunkt i igen, men vi skal tilføje yderligere struktur på et poset. Mere konkret en mindste øvre grænse og største nedre grænse, og hvis disse eksisterer for alle objekter i et givet poset, kaldes det et *gitter*[10]. Et gitter med et største og mindste element kaldes begrænset. Vi definerer yderligere tre egenskaber

I_a $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \ \forall\ x, y, z$

I_b $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z) \ \forall\ x, y, z$

II $\forall x\ \exists y$ så $x \sqcap y = 0$ og $x \sqcup y = 1$ hvor hhv. 1 og 0 er det største og mindste objekt. y kaldes sædvanligvis for *komplementet* til x.

Et gitter der besidder I kaldes for distributivt og et gitter der besidder II kaldes for komplementeret[11], og vi skriver komplementet til x som x'. Ud fra disse egenskaber kan vi definere en boolsk algebra

Definition 3.3
En boolsk algebra **BA** *er et distributivt gitter med komplement.*

Vi skal kigge på nogle egenskaber ved den boolske algebra, som gør den anvendelig i mængdelæren.

Antag nu vi er i **Set**, og vi har en mængde D. Hvis vi tager mængden af delmængder af D og bruger den klassiske ordning vha. inklusion, får vi en boolsk algebra $(\mathscr{P}(D), \subseteq)$, hvor det største element er D og det mindste er $\emptyset$. Dernæst kan der gives en entydig korrespondance mellem operationerne

9 Altså en partielt ordnet mængde, givet som en kategori. Se A.1 eksempel 3 for nærmere beskrivelse.
10 Se A.1 eksempel 4
11 Et komplementeret gitter er per definition begrænset.

i en boolsk algebra og $(\mathscr{P}(D), \subseteq)$. Vi får at

$$\begin{aligned} x \sqcup y &= X \cup Y \\ x \sqcap y &= X \cap Y \\ x' &= D \setminus X \\ 1 = D \text{ og } \quad 0 &= \emptyset \end{aligned}$$

Dette er interessant, fordi en **BA** også har forbindelser til udsagnslogikken. Vi kan generalisere semantikken for klassisk logik vha. de boolske algebra'er. På baggrund af de udsagnslogiske konnektiver, dvs. negation $\sim$, konjuktion $\wedge$, disjunktion $\vee$ og implikation $\rightarrow$, kan vi generalisere semantikken fra udagnslogikken ved at fortolke den boolske algebras operationer ift. udsagnslogikken og se at udsagnslogikkens semantik er et specialtilfælde af den boolske algebra. Dog mangler vi en umiddelbar fortolkning af implikationen, men vi kan definere en operation $\Rightarrow$ på følgende måde $x \rightarrow y = x' \sqcup y = x \Rightarrow y$.

Hvis vi så har givet en boolsk algebra $\mathbf{BA} = (B, \sqsubseteq)$, kan vi sige at en **BA**-sandhedstilskrivning er en funktion $V : \Phi_0 \rightarrow B$ hvor Φ_0 er mængden af atomiske formler i vores klassiske logiske sprog, og dette domæne bliver udvidet til alle velformede formler $V : \Phi \rightarrow B$ på følgende måde

1. $V(\sim a) = V(a)'$
2. $V(a \wedge b) = V(a) \sqcap V(b)$
3. $V(a \vee b) = V(a) \sqcup V(b)$
4. $V(a \rightarrow b) = V(a)' \sqcup V(b) = V(a) \Rightarrow V(b)$

og vi siger at for en given formel a er gyldig $\mathbf{BA} \models a$ hviss $V(a) = 1$ for alle V. Vi kan se at hvis vi lader den boolske algebra være givet ved $\mathbf{B} = (2 = \{1, 0\}, \subseteq)$, så har vi sandhedstilskrivningen for den klassiske semantik, hvor $1 = \top$ og $0 = \bot$. Altså har vi at boolske algebraer bruges i konstruktionen af mængder ud fra en given mængde D, og at 2 som jo i **Set** er lig Ω, også er en boolsk algebra. Dette vil vi vende tilbage til senere, da opførslen, som vi har skiteseret ovenfor for **Set** ikke altid gælder for vilkårlige $\mathscr{T}$. Men lad os først se hvordan en semantik for en generel topoi ser ud.

3.1.2 $\mathscr{T}$-semantik

Eftersom vi har kortlagt basale strukturelle egenskaber ved mængdelæren, hvor den boolske algebra var et vigtigt element, skal vi kigge nærmere på sandhedstilskrivningerne for den klassiske logik. Måden hvorpå man tester hvorvidt et givet udsagn er sandt eller falsk, hænger sammen med de logiske konnektiver. Det er dem der relaterer de forskellige 'variable' til hinanden. Vi ved hvorvidt en given formel er en tautologi, ved at lade variablene være hhv. sande og falske og dernæst, vha. sandhedstavler/tableauer, se hvad udsagnet bliver. De logiske konnektiver er binære eller unære, og ud fra deres elementers sandhedsværdi har vi regler (sandhedstabeller) for hvorvidt hele udsagnet er sandt eller falskt til forskellige sandhedstilskrivninger. Sandhedstabellen for implikation er f.eks. illustreret i marginen. Fra ovenstående betragtning kan vi altså opfatte semantikken som en tilskrivning til $\mathbf{BA}(\mathbf{2})$, og igen har vi fokus på elementerne, hvordan de tilskrives. Men denne sandhedstabel kan også betragtes som en funktion, og vi starter som altid med at kigge på situationen i **Set**, inden vi generaliserer.

A	B	$A \to B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Implikationen kan altså betragtes som en funktion $\Rightarrow (A, B) : 2 \times 2 \to 2$, med værdierne $\Rightarrow (1, 0) = 0$ og $\Rightarrow (0, 0) = \Rightarrow (1, 1) = \Rightarrow (0, 1) = 1$. Denne fremgangsmåde kan gøres ud fra alle ovenstående logiske konnektiver, og en dertilhørende funktion kan laves som her, hvor domænet er hhv. 2×2 eller 2 alt efter om konnektivet er binært eller unært. Men lad os kigge nærmere på implikationsfunktionen. Som det ses er der en delmængde E af 2×2 der giver $\Rightarrow (A, B)$ værdien 1, så det er nærliggende at opfatte $\Rightarrow$ som en karakteristisk funktion. Delmængden vi kigger på er $E = \{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ og dertil hører en afbildning f ind i 2×2 som er monisk, hvor der jvf. Ω-aksiomet findes en og kun en morfi $\chi_E = \Rightarrow$. Det vil sige vi har formuleret sandhedstavlen i kategoriteoretiske termer og vi kan nu generalisere til en vilkårlig kategori $\mathscr{C}$ og dermed fra 2 til et vilkårligt Ω-objekt.

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, tail, "\Rightarrow"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

til et pullback diagram. Samme fremgangsmåde med de resterende konnektiver, som er opbygget efter samme opskrift med en delmængde af 2×2 (eller 2 jvf. $\neg$) og co-domæne 2 i **Set**. Derefter generaliserer vi til det generelle Ω-objekt, som kan bruges til de resterende konnektiver. På den måde har vi fået en morfi formulering af konnektiverne. Det centrale er at alle konnektiver kan beskrives som en karakteristisk morfi til et givet delobjekt af $\Omega \times \Omega$ eller Ω. Tager vi $\Rightarrow$ som eksempel, kan vi se i tilfældet med **Set**, dvs med $e = E$[12] vil $\top(!(x,y)) \Longrightarrow (x,y)\ \forall x,y \in E$ gælde, altså at ovenstående diagram kommuterer.

Man kan nu spørge sig selv, om der er nogen måde til at få ovenstående diagram til *ikke* at kommutere. Da ! er en entydig morfi, kan der ikke rokkes ved den, så for at få $\top(!(x,y)) \not\Longrightarrow (x,y)$ måtte $\top$ altså erstattes af en anden morfi. Det er altså kun $\top$ der kan få ovenstående diagram til at kommutere for alle $(x,y) \in E$. Selvom vi jo i **Set** kan finde flere morfier end $\top$ der går fra 1 ind i $\Omega = 2$. Med disse generaliseringer og efterfølgende betragtninger kan vi konstruere en $\mathscr{T}$-semantik for sproget $\mathcal{L}$[13].

En $\mathscr{T}$-semantik konstrueres på følgende måde: En $\mathscr{T}$-sandhedstilskrivning er en funktion $V : \Phi_0 \to \mathscr{T}(1,\Omega)$ der til hvert propositionssymbol $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i $\mathcal{L}$ fastlægger en sandhedsmorfi $V(p_i) = (1 \xrightarrow{\top} \Omega)$. Ligesom tidligere kan vi igen udvide dette til hele Φ ved at indføre nogle regler, der i stedet for ovenstående klassiske semantik basserer sig på sammensætning af morfier. I det simple tilfælde med $V(\sim a) = \neg \circ V(a)$[14] hvor dette kan beskrives ved et kommuterende diagram, se marginen. Samme fremgangsmåde bruges til de binære konnektiver. F.eks. implikationen som vi har set på tidligere, hvorom der i $\mathscr{T}$-semantik gælder at $V(a \to b) = \Rightarrow \circ \langle V(a), V(b)\rangle$ hvilket svarer til at

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "V(a)"] \arrow[dr, "V(\sim a)"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
 & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "V(a)"'] \arrow[d, "\langle V(a), V(b)\rangle"] \arrow[dr, "V(b)"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l, "pr_1"] \arrow[r, "pr_2"'] \arrow[d, "\Rightarrow"'] & \Omega \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

kommuterer. På denne måde kan vi udvide semantikken til at gælde for alle velformede formler[15]. Vi siger så at a er gyldig, $\mathscr{T} \models a$ hviss der for

12 Svarende til alle de sandhedstilskrivninger af A og B, der $A \Rightarrow B$ sand.

13 $\mathcal{L}$ er det udsagnslogiske sprog med propositionssymboler $p_1, p_2, p_3 ...$, paranteser '(','(' og de logiske konnektiver (som vi omtalte tidligere i afsnittet) negation: , konjuktion:$\wedge$, disjunktion:$\vee$ og implikation $\to$[Pedersen, 2002, s. 22].

14 $\neg$ er den karakteristiske funktion for sandhedsmorfien $\perp : 1 \to \Omega$, og $\perp$ er selv den karakteristiske funktion for $! : 0 \to 1$.

15 Den fremtidige notation for de resterende to sandhedsmorfier er hhv. at konnektivet $\wedge$'s giver anledning til sandhedsmorfien $\cap$ og $\vee$ giver anledning til $\cup$, hvilket vil blive klart senere.

alle $\mathscr{T}$-sandhedstilskrivninger V gælder at $V(p_i) = (1 \xrightarrow{\top} \Omega)$. På denne måde har vi fået defineret en $\mathscr{T}$-semantik for $\mathcal{L}$, og nu skal vi se hvorvidt denne harmonerer med klassisk udsagnslogik[16]. Fra indledningen ved vi at det ikke helt går så nemt, og den nærmere begrundelse fås her. Først og fremmest viser det sig nemlig at

Sætning 3.3 (Fuldstændighed i $\mathscr{T}$)
For en vilkårlig topos $\mathscr{T}$, hvis $\mathscr{T} \models a$ så $\vdash_{KL} a$[Goldblatt, 1984, s.143]

Bevisstrategi
Det egentlige bevis fylder for meget, men vi kan kort opridse strategien. Først og fremmest kan det vises at sandhedsmorfierne harmonerer med de klassiske sandhedstabeller. For at se dette, kan vi tage det simpleste eksempel med $\neg$. Her har vi at $\neg \circ \bot = \top$ og $\neg \circ \top = \bot$. $\neg \circ \bot = \top$ følger af det pullback der definerer $\neg$, mens $\neg \circ \top = \bot$ kræver lidt mere overvejelse. Ud fra definitonen af $\neg$ og $\bot$ har vi to pullbacks som vi kan sammensætte, se margin for illustration. Det nederste pullback er definitionen af $\neg$ og det øverste er definitionen for $\bot$, hvor pullback'et er »transponeret«. Da begge de små pullbacks kommuterer, har vi at rektanglet kommuterer jvf. pullback lemma'et[17]. Dette gør lige netop $\neg \circ \top$ til den karakteristiske funktion for $!0 :\to 1$, hvilket jo er defineret til $\bot$.
Dette kan gøres for de resterende sandhedstabeller. Når vi på den måde har en korrespondance mellem den klassisk sandhedsfunktion V' og den fra vores $\mathscr{T}$-semantik V, kan man vise at $V'(a) = 1 \Leftrightarrow V(a) = (1 \xrightarrow{\top} \Omega)$ for $a \in \Phi$. Dvs. når vi i sætningen antager at $\mathscr{T} \models a$ betyder det at $V(a) = \top$ for alle funktioner af typen V og dermed at $V'(a) = 1 \forall V'$, og vi ved jo at gyldighed i den klassiske semantik betyder at $\vdash_{KL} a$. $\diamond$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
1 \arrow[r, "\bot"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Hvis vi har en formel a, og denne har værdien $\top : 1 \to \Omega$ for alle fortolkninger $V(a)$, så vil denne også kunne fås ved at bruge de klassiske aksiomer og modus ponens til at deducere a. Men som antydet gælder der *ikke* det modsatte, altså $\vdash_{KL} a \Rightarrow \mathscr{T} \models a$. Dog kan vi forstærke ovenstående udsagn vha. vores definitioner fra tidligere, da

Sætning 3.4
For en vilkårlig **bivalent** *topos gælder at*
$\mathscr{T} \models a$ hvis og kun hvis $\vdash_{KL} a$[Goldblatt, 1984, s.143]

16 Dvs. de klassike aksiomer + slutningsregler
17 Se appendiks.

Bevis
Hvis $\mathscr{T} \models a$ så $\vdash_{KL}$ er givet ved sætning (3.3). Når vi går den anden vej, så antag at vi har et a givet hvorom det gælder at $\vdash_{KL} a$. Da $\mathscr{T}$ er bivalent må der gælde at $V(a) = \top$ eller $V(a) = \bot$ for alle V. Vi kan nu definere en klassisk sandhedstilskrivning V' ved at sige $V'(a) = 1$ eller 0 hvis $V(a) = \top$ eller $\bot$ hhv. Da 'konnektivmorfierne' opfører sig som sandhedstabellerne mht. sammensætning med $\top$ og $\bot$, har vi lavet en korrespondance mellem V og V'. Vi ved jo jvf. definition at $V'(a) = 1 \forall V'$ hvilket må medføre at $V(a) = \top$. □

Sætning (3.4) bidrager til at give en distinktion mellem de topoi hvor klassisk logik gælder(de bivalente), og dem hvor det ikke gælder. Men lad os kigge nærmere på de logiske love der gør sig gældende i **Set**. Hvis vi skriver $\mathscr{P}(D)$ som værende mængden af alle delmængder af D i **Set**, så udgør $(\mathscr{P}(D), \subseteq)$ en boolsk algebra og boolske algebraer følger de klassiske udsagnslogiske love. Som nævnt gælder det ikke nødvendigvis for en generel topos $\mathscr{T}$, hvor vi har generaliseret mængden af alle delobjekter af et givet opbjekt d i $\mathscr{T}$ som Sub(d). $\mathscr{P}(D)$ kan beskrives som en boolsk algebra, som altså er et distributivt gitter med komplement. Kan Sub(d) også beskrives på lignende vis? Dette skal vi se på nu, men inden dette kan lade sig gøre må vi først få lavet en sammenhæng mellem vores generelle Sub(d) og de klassiske mængdeoperationer $\cup, \cap$ og $\complement$ i **Set**.
Vi starter i **Set**, hvor vi jo har vores mængdeoperationer defineret. Da vi diskuterede den boolske algebra så vi at $(\mathscr{P}(D), \subseteq)$ udgjorde en boolsk algebra, men eftersom alle mængdeoperationer indenfor D kan ses som manipulationer med delmængder, er det jo oplagt at se om ikke der er en funktionskarakteristik af disse. Vi ved jo at delmængder kan beskrives ved hjælp af karakteristiske funktioner. Så mon ikke der er en sammenhænge mellem mængdeoperationerne i **Set** og de involverede mængders karakteristiske funktioner? Det viser sig faktisk at det er der. Faktisk så kan det kan vises at for to vilkårlige delmængder A, B af D gælder

Sætning 3.5 *(i)* $\chi_{\complement A} = \neg \circ \chi_A$[18]
(ii) $\chi_{A \cap B} = \cap \circ \langle \chi_A, \chi_B \rangle = \chi_A \cap \chi_B$
(iii) $\chi_{A \cup B} = \cup \circ \langle \chi_A, \chi_B \rangle = \chi_A \cup \chi_B$

18 Når vi senere refererer til $\complement$ af en funktion/morfi eller delobjekt, så er det altså med denne defintion in mente.

Bevisstrategi
Beviset for disse er lige ud af landevejen, så vi ser kun på det for (ii).Antag vi har $\chi_{A\cap B}(x) = 1 \Rightarrow x \in A\cap B \Rightarrow x \in A$ og $x \in B$. Det vil sige at $\chi_A(x) = 1$ og $\chi_B(x) = 1$. Da $\cap$ er den karakteristisk funktion for $\langle \top, \top \rangle$[Goldblatt, 1984, s. 139] har vi at $\langle \top, \top \rangle (\chi_A(x), \chi_B(x)) = \langle \top, \top \rangle (1, 1) = 1$. Antager vi omvendt $\chi_{A\cap B}(x) = 0$ betyder det $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0$ eller $\chi_A(x) = 0, \chi_B(x) = 1$ eller $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$, hvor alle tre tilfælde betyder at $\cap \circ \langle \chi_A, \chi_B \rangle (x) = 0$. $\diamond$

Dette kan på oplagt vis blive begyndelsen til en generalisering til Sub(d) i $\mathscr{T}$. Vi definerer f.eks. »fællesmængden« i $\mathscr{T}$ af $f : a \rightarrowtail d$ og $f : b \rightarrowtail d$ til at være et delobjekt $f \cap g : a \cap b \rightarrowtail d$ af d som fås ved trække $\top$ tilbage langs $\chi_f \cap \chi_g (= \cap \circ \langle \chi_A, \chi_B \rangle)$, hvilket svarer til et pullback (se margin). På samme måde som der er skabt en forbindelse mellem udsagnslogik(i form af klassisk semantik) og $\mathscr{P}(D)$ via. den boolske algebra, er der forsøgt skabt en forbindelse mellem udsagnslogik (i form af $\mathscr{T}$-semantik) og Sub(d). Spørgsmålet er så, om denne forbindelse også kan forenes i en boolsk algebra, hvilket vi skal kigge på nu. Dvs. vi skal se om Sub(d) opfylder definitionen på et distributivt gitter med komplement. Det viser sig at Sub(d) langt hen af vejen opfører sig som et gitter med dertilhørende komplement og distributivitet dvs. en boolsk algebra. Hvilke egenskaber det er som er opfyldt kan vises ved denne store sætning

$$\begin{tikzcd} a \cap b \arrow[r, "f\cap g"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f \cap \chi_g"] \\ 1 \arrow[r, tail, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Sætning 3.6
I en vilkårlig topos $\mathscr{T}$ hvori $f : a \rightarrowtail d$ og $g : b \rightarrowtail d$ er moniske morfier i poset'et (Sub(d), $\subseteq$). *Så gælder der følgende[Goldblatt, 1984, s.151-155]*

1. *$f \cap g$ er meet (infimum)*
2. *$f \cup g$ er join (supremum)*
3. *$f \cap (g \cup h) \simeq (f \cap g) \cup (f \cap h)$(distributivitet)*
4. *Er begrænset med enhed 1_d og nul 0_d*
5. *$\complement f \cap f \simeq 0_d$*

For en yderligere beskrivelse af 'meet' og 'join', se kategorieksempel 4 i appendiks. Beviserne for disse påstande er ganske omfattende, så vi må udelade nogle af dem. Vi skal gennemgå linjerne i beviset for 1.. Derudover vil vi kort bevise 4. da denne er kort og lige ud af landevejen. Egenskaberne i sætning (3.6) vil dog give give mere mening i kapitel 3.2.

Bevisstrategi (Nr. 1.**)**
Kigger vi på nummer 1. skal vi først give en karakterisering af $f \cap g$ i

form af et pullback. Antag vi har en vilkårlig $\mathscr{T}$ og to morfier $f : a \rightarrowtail d$ og $g : b \rightarrowtail d$ der udgør et pullback, se margin. Så gælder der at vi har $\alpha : c \to d$ hvor $\alpha = g \circ f' = f \circ g'$ har den karakteristiske funktion $\chi_f \cap \chi_g$ og det vil altså sige at α er delobjekt morfi for $a \cap b$, dvs. $\alpha \simeq f \cap g$ og alt dette svarer altså til et pullback af formen

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, tail, "g'"'] & b \arrow[d, tail, "g"] \\ a \arrow[r, tail, "f"'] & d \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \cap b \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, tail, "g'"'] \arrow[dr, tail, "f \cap g"] & b \arrow[d, tail, "g"] \\ a \arrow[r, tail, "f"'] & d \end{tikzcd}$$

Det er absolut ikke klart, men vi kan forhåbentligt kaste lys over dette, ved at bemærke at $\chi_{f \cap g} = \cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. Så det vil altså sige at vi kan opstille et dobbeltdiagram (se margin) hvor det nederst er et pullback jvf. def. på $\cap$. Man skal så vise at det øverste også er et pullback, da dette vha. pullback lemma'et, viser at rektanglet er et pullback og dermed at $\alpha = \cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. Med denne karakteristik af $f \cap g$ kan vi redegøre for at dette er meet af f og g i gitteret Sub(d). Et meet $p \sqcap q$ i en generel gitter er defineret ved at $p \sqcap q \sqsubseteq p$ og $p \sqcap q \sqsubseteq q$ skal gælde. Derudover så for alle c der opfylder at $c \sqsubseteq p$ og $c \sqsubseteq q$, skal der så gælde at $c \sqsubseteq p \sqcap q$[Goldblatt, 1984, s.55]. Dette ser vi tydeligt med ovenstående karakterisering. Antag så vi har vilkårlig $a \overset{h_1}{\leftarrowtail} c \overset{h_2}{\rightarrowtail} b$ så ved vi jvf. pullbackegenskaben at der findes en $k : c \to a \cap b$ så at bla. $h_1 = f' \circ k$. Vi ved at h_1 er monisk per antagelse, og så ved vi dermed at k også er monisk[19], og dermed er k en delobjektmorfi af $a \cap b$. $\diamond$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\langle \chi_f, \chi_g \rangle"] \\ 1 \arrow[r, tail, "\langle \top, \top \rangle"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\cap"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Bevis Nr. 4.
Vi skal vise at Sub(d) er begrænset med med enhed 1_d og nul 0_d. Ud fra disse, og en morfi $f : a \to d$ kan vi opskrive to diagrammer (se margin) der på oplagt vis kommuterer og dermed er det ønskede vist. $\square$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "1_d"] & d \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & d \\ 0 \arrow[u, "0_a"] \arrow[ur, "0_a"'] & \end{tikzcd}$$

Som det fremgår af sætningen, er det eneste vi mangler at vise for at Sub(d) er en boolsk algebra, at Sub(d) har komplement. Kigger vi på sætning (3.6) ser vi at bare mangler at vise at at $f \cup \complement f \simeq 1_d$ også gælder, men dette gør sig *ikke* gældende i alle topoi! Dog skal det lige siges, at det jo gælder i tilfældet med **Set** hvor alle Sub(d) udgør en boolsk algebra, hvilket fører til følgende definition.

19 Der en regel der siger hvis $g \circ f$ er monisk så er f monisk. Ses let ved at $(g \circ f) \circ h_1 = (g \circ f) \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$. Dermed må der også gælde at $f \circ h_1 = f \circ h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ så f er monisk.

Definition 3.4
En topos $\mathscr{T}$ siges at være boolsk, hvis der for alle $\mathscr{T}$-objekter d gælder at $(\mathrm{Sub}(d), \subseteq)$ *er boolske algebraer i den givne topos $\mathscr{T}$*

For at vise at $\mathrm{Sub}(d)$ generelt ikke opfører sig som en boolsk algebra, kan vi tage et modeksempel. Kigger vi på $\mathbf{M_2}$, viser det sig at denne faktisk er en topos som ikke er boolsk. Mere præcist så er $\top \cup \complement\top$ forskellig fra 1_Ω, hvilket vi vil vise gør sig gældende i $\mathbf{M_2}$.

Vi har i alle topoi $\mathscr{T}$ at for $\mathrm{Sub}(\Omega)$ er morfierne $\perp \simeq \complement\top$[20], hvilket vil sige at $\top \cup \complement\top = \top \cup \perp$. Men når vi er i $\mathbf{M_2}$, og kigger på objektet Ω, kan vi identificere hele objektet med morfien 1_Ω, da codomænet jo er $\Omega = \{\omega, L_2 = \{\{0\}, M, \emptyset\}\}$. $\top \cup \perp$ kan derimod identificeres med codomænet af morfien $[\top, \perp]$, som har co-domænet givet ved $\{\omega, \{M, \emptyset\} \neq L_2\}$[Goldblatt, 1984, s.156]. Det vil altså sige at $\top \cup \complement\top = \top \cup \perp$ er forskellig fra 1_Ω og dermed er $\complement\top$ jo *ikke* komplement til $\top$[21]!

Det kan vises at hvis $\top$ har et komplement i Ω, så må denne nødvendigvis være $\perp : 1 \to \Omega$, så $\mathrm{Sub}(\Omega)$ er slet ikke en boolsk algebra i $\mathbf{M}_2$[Goldblatt, 1984, s.156].

$\complement\top$ er ikke et komplement til $\top$, for vilkårlig $\mathrm{Sub}(\Omega)$, og faktisk gælder der at hvis morfien $\top$ fra et terminalt objekt ind i Ω har et komplement, skal det lige netop være $\complement\top$. Det vil altså sige at vi nu har vist at den klassiske boolske algebraiske egenskab, der gør sig gældende i **Set**, at $\mathscr{P}(D)$ er en boolsk algebra, ikke gælder for en vilkårlig topos. Nu skulle man tro, at det var muligt at konkludere fra det faktum at $\mathrm{Sub}(\Omega)$ ikke er en boolsk algebra, til at $a \vee \neg a$ ikke gælder, og vi dermed har at gøre med en topos, hvor den klassiske logik fejler. Men det viser sig faktisk at M_2 er bivalent[22]! Vi har jo fra sætning (3.4) at i en bivalent topos gælder klassisk logik, så hvad er der egentlig på spil her? Det kan vises[Goldblatt, 1984, side 159] at hvis $\mathscr{T}$ er boolsk, så gælder at $\mathscr{T} \models a \vee \neg a$ for alle formler, men dette går tydeligvis ikke den anden vej. Det viser sig at den lige linje mellem den boolske algebra og den logiske struktur ikke er så enkel, som man måske skulle tro trods erfaringen fra **Set**. Dette skal vi kaste lys over nu, og på denne måde bane vejen for en forståelse af det formelle grundlag for logikken i $\mathscr{T}$.

20 For at se dette bemærk at $\chi_\perp = \neg$(jvf. def. på$\neg$)$= \neg \circ 1_\Omega = \neg \circ \chi_\top$(jvf. def. på $\chi_\top$)$= \chi_{\complement\top}$.

21 Det betyder også $[\top, \perp]$ ikke er iso, og dermed er $\mathbf{M_2}$ ikke klassisk[Goldblatt, 1984, s.118].

22 Det resultat fås ved at kigge på sandhedstabellerne ved sandhedsmorfierne i $\mathbf{M_2}$, og der ses det at udsagnet $P \vee \neg P$ er en tautologi

Vi så i tilfældet med $\mathbf{M_2}$ at Sub(Ω) ikke var boolsk, og derfra kunne vi konkludere at toposen ikke er boolsk/klassisk(klassisk jvf. definitionen på en klassisk $\mathscr{T}$). Men det viser sig at det er nok at Sub(1) er boolsk, for at en generel topos opfører sig klassisk i logisk forstand[23], og at det derfor ikke afhænger af egenskaberne ved Sub(Ω). I **Set** har vi at $\mathrm{Sub}(1) \cong \mathscr{P}(1) \cong \Omega^1 \cong 2 \cong \Omega$, og da $\mathbf{B} = (2, \subseteq)$ er grundlæggende for den logiske struktur i **Set** giver dette god mening. Men spørgsmålet er om $\mathrm{Sub}(d) \cong \Omega^d$ gælder for alle $\mathscr{T}$. Vi ved jo fra tidligere, at potensmængden $\mathscr{P}(D)$ af en given mængde i **Set** udgør en boolsk algebra, og vi har klassificeret samlingen af delobjekter i form af $\mathrm{Sub}(d)$[24]. Om denne opfører sig boolsk, jvf. definition (3.4) er anført i nedstående sætning (3.7).

Sætning 3.7
For en givet $\mathscr{T}$ gælder at for alle $\mathrm{Sub}(d)$ *med dertilhørende gitterstruktur* $(\mathrm{Sub}(d), \subseteq)$*, at følgende udsagn er ækvivalente[Goldblatt, 1984, side 156]:*

1. *$\mathscr{T}$ er boolsk*
2. $\mathrm{Sub}(\Omega)$ *er en boolsk algebra*
3. $\top \cup \bot \simeq 1_\Omega$
4. *$\mathscr{T}$ er klassisk, altså morfien* $[\top, \bot] : 1 + 1 \to \Omega$ *er iso.*

For det første kan vi af sætningen se, at boolskhed ift. $\mathscr{T}$ afhænger af $\mathrm{Sub}(\Omega)$, så der er ikke umiddelbart nogen sammenhæng med $\mathrm{Sub}(d)$ og Ω^d. Derudover kan vi se at det er 3. punkt, som vi brugte ovenfor, til at vise at $\mathbf{M_2}$ ikke var klassisk. Så hvad er det egentlig der er på færde her? $\mathrm{Sub}(d)$ er ikke nødvendigvis et objekt i $\mathscr{T}$!

Vi definerede jo $\mathrm{Sub}(d)$ til at være alle moniske f med co-domæne d, over en ækvivalensrelation defineret i kapitel 2.3. Dette objekts eksistens i almene topoi, er vi slet ikke blevet lovet. Det vil altså sige at $\mathrm{Sub}(d)$ er ekstern, i forhold til universet $\mathscr{T}$, og indgår slet ikke som et objekt man kan benytte sig af, indenfor $\mathscr{T}$. Til gengæld findes Ω^d som objektet for alle delobjekter. Dette objekt har vi jo fået defineret tidligere, som værende et objekt af $\mathscr{T}$ og dermed blevet defineret i forhold til diagram egenskaber. Det samme gælder for mængden af morfier fra f.eks. 1 til Ω, også kaldet $\mathscr{T}(1, \Omega)$, hvor den interne version svarer til $\Omega^1 \cong \Omega$. Som vi så tidligere, så

23 Her tænker jeg på det forhold at følgende udsagn er ækvivalente:`I:` $\mathscr{T} \models a \Leftrightarrow \vdash_{CL} a$ for alle sætninger `II:` $\mathscr{T} \models a \vee \neg a$ for alle a `III:` Sub(1) er en **BA** [Goldblatt, 1984, side160]

24 som ikke er det samme som potensobjekter

er der nogle topoi, hvor Sub(d) og Ω^d er sammenfaldende(isomorfe), som f.eks. i **Set**. Følgelig gælder der, at vores $\mathscr{T}$-semantik også er ekstern. Dette forklarer også hvorfor $\mathbf{M_2}$ var bivalent, til trods for at man »udefra« så at $\Omega_{\mathbf{M_2}}$ havde 3 elementer (da $L_2 = \{2, \{0\}, \emptyset\}$). Denne eksterne teori er dog ganske anvendelig i beskrivelsen af logikken i vilkårlige topoi, som vi skal se i næste afsnit. Men først kan vi lige komme med en intern udgave af $p \vee \neg p$ i **Set**. Denne svarer, jvf. $\Omega = 2$, til at $x \cup \neg x = 2 \ \forall x \in 2$, og dette oversættes i kategoriteoretiske termer til at følgende diagram

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\langle id_2, \neg \rangle"] \arrow[d, "!"'] & 2 \times 2 \arrow[d, "\cup"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & 2 \end{tikzcd}$$

kommuterer. Det er klart at dette kan generaliseres til en vilkårlig topos $\mathscr{T}$ ved at erstatte 2 med det mere generelle Ω. Det er når dette generelle diagram, med Ω i stedet for 2, kommuterer, at Sub(Ω) er boolsk.
En anden ting vi skal bide mærke i, når vi ser på resultatet $\top \cup \bot$ forskellig fra 1_Ω i $\mathbf{M_2}$ er at dette måske får betydning for definitionen af morfien »$\Rightarrow$«. I en boolsk algebra er denne jo defineret som $a' \sqcup b$, og hvis sandhedsmorfierne, hvoraf operationen $'$ er generaliseret til $\neg$, ikke opfylder $\top \cup \bot$ forskellig fra 1 generelt, kan dette måske også få betydning for implikation.

3.2 Intuitionistisk logik

Som vi tidligere har nævnt og vist, så er den klassiske udsagnslogik ikke alment gældene i alle topoi, men hvad er så? Det er blevet nævnt, at intuitionistisk logik gør sig gældende, men på hvilken måde? Vi så hvordan den boolske algebra var tæt forbundet med klassisk logik, og findes der så en pendant til intuitionistisk logik? Svaret er at det gør der, og denne kaldes en Heyting algebra. Det er denne og dens anvendelse i forbindelse med generelle topoi, som vi skal kigge på i dette afsnit.

I forbindelse med boolsk algebra så vi at den var defineret som et distributivt gitter med komplement. Vi vil igen starte ud med et distributivt gitter, dog uden komplement, som vi nu vil tilføje ekstra struktur til, for at indfange hvad en heyting algebra er. Så lad et sådant gitter $\mathbf{L} = (L, \sqsubseteq)$ være givet, og så definerer vi et *pseudo-komplement* på følgende måde. Hvis vi har $a \in L$, så er $b \in L$ et pseudo komplement til a hvis det er det største element i L adskilt fra a, dvs. det størte element i $\{x \in L : a \sqcap x = 0\}$. Dette er et mindre restriktivt krav ift. komplementet, som jo er defineret ved $a \sqcap b = 0$ og $a \sqcup b = 1$. Det viser sig også at for alle boolske algebraer, f.eks. over $\mathscr{P}(D)$, at de respektive komplemente mængder også opfylder kravene for pseudo-komplement. Lad os illustrere det med et eksempel.

Tag nu for eksempel et gitter bestående af et system af åbne mængder, der udgør en topologi $(\Theta, \subseteq)$, der eksisterer ikke ægte komplementer, da der kun findes åbne mængder. Til gengæld findes der pseudo-komplementer som er defineret ved at der til et givet $U \in \Theta$ findes et pseudo-komplement defineret ved $(\complement U)^o \in \Theta$[25]. Det er klart at denne opfylder kravene for pseudo-komplement, da $(\complement U)^o \cap U = \emptyset$ og samtidig er den største åbne mængde der opfylder dette. Men samtidig opfylder den ikke kravene for komplement da mængden $U \cup (\complement U)^o = \Theta \setminus \partial U$ og er dermed ikke-tom. Det illustrerer også på hvilken måde at disse lempelige krav giver en art informationstab, for givet den logiske fortolkning af pseudo-komplement, som jo er »$\neg$«, ses det at det udelukkedes tredje princip ikke nødvendigvis gælder her. Vi har jo ikke nødvendigvis at $x \in U \wedge x \in \neg U$, eftersom x kan være i ∂U. På den måde bliver der 'noget tilbage', i modsætning til hvis $\neg$ identificeres med komplementet. Vi kan uddybe eksemplet yderligere ved følgende betragtning. Givet et topologisk rum der også er et metrisk rum følger der automatisk en definition af følger, og grænser af disse følger, i det givne metriske rum. Lad os kigge på $\mathbb{R}$ med standard metrik, så findes der en følgekarakteristik af f.eks. rand af mængder. Har vi en vilkårlig $U \subseteq \mathbb{R}$, så er randen givet ved mængden af alle punkter som opfylder at kunne beskrives ved to slags konvergente følger. Den ene type $\{x_n\}$ som har alle elementer i U, men hvor grænsen ikke er i U, og den anden type $\{y_n\}$ som har alle elementer i $\complement U$ men hvor grænsen ikke er i $\complement U$. Det lige netop disse følger som beskriver ∂U, og det er værd at overveje om ikke disse følger stiller høje krav til hvad vi kan vide om f.eks. $\mathbb{R}$. Ligger der ikke en forudantagelse om at vi, på en eller anden måde, ved at hvorvidt alle følger har en grænse *og* ydermere hvor denne grænse befinder sig? Det vil vi vende tilbage til i diskussionen.

Vi skal dog udvide en sidste definition indenfor gitter, før vi har en fuldbyrdet heyting algebra. Komplementet kan nemlig også tages relativt

25 Det er klart at nå vi kun arbejder med åbne mængder, så er operationen $\complement$ ikke defineret, da det jo giver en lukket mængde. At vi bruger det her, skyldes at det selvfølgelig ikke er problematisk i **Set**, og eksemplet udelukkende er til for forståelsens skyld.

til et andet objekt i gitteret. Vi siger at *pseudo-komplementet af a relativt til b* er givet ved det største x i mængden $\{x : a \sqcap x \sqsubseteq b\}$, og vi skriver dette som $a \Rightarrow b$. Hvis dette findes for alle objekter a og b kaldes det for et relativt pseudo-komplementeret gitter (r.p.k.). Vi er nu klar til definitionen

Definition 3.5
En heyting algebra **HA** *er et relativt pseudo-komplementeret gitter med et* 0*-objekt.*

Vi har at pseudo-komplementet til a er $a \Rightarrow 0$, og det kan vi se meget let ved at opskrive definitionen. Vi har $a \Rightarrow 0$ er $\max\{x : a \sqcap x \sqsubseteq 0\}$ og da 0 er det mindste element kan de altså ikke være inkluderet i 0 men må mindst være lig med, dvs. $\max\{x : a \sqcap x = 0\}$. Som en lille sidebemærkning skal det siges at pendanten i den boolske algebra mht. $\Rightarrow$, var at definere den på følgende måde for a og b ved $a \Rightarrow b = a' \sqcup b$.

Lad os kigge tilbage på vores tidligere eksempel, med toposen $\mathbf{M_2}$, så har vi at $\top \cup \bot$ forskellig fra 1_Ω i Ω, så hvis vi skulle følge den boolske algebras love, så ville vi have at $\top \Rightarrow \top = \complement\top \cup \top = \top \cup \bot = \{\emptyset, 2\}$ forskellig fra 1_Ω, men ud fra Heyting algebraen får vi et noget andet udtryk for $\Rightarrow$. Da $a \Rightarrow b = max\{a \sqcap x \sqsubseteq b\}$ og vi leder efter $\top \Rightarrow \top$ hvor $\top$ er delobjekt for $2 = M$ i $\Omega_{\mathbf{M_2}}$, det vil altså sige at vi har $\top \Rightarrow \top = max\{M \sqcap x \sqsubseteq M\}$ for $M \in L_2$. Eftersom alle elementer i L_2 opfylder dette krav, må $max\{M \sqcap x \sqsubseteq M\} = L_2$, hvilket også kan identificeres med 1_Ω.

At det relative pseudokomplement er sammenfaldende med $a' \sqcup b$ i en **BA** kan vi illustere ved at kigge på følgende eksempel. Den boolske algebra $(\mathscr{P}(D), \subseteq)$ fra **Set**. Vi ønsker at finde $A \Rightarrow B$, dvs. $A \Rightarrow B = max\{X : A \cap X \subseteq B\}$ som skal være lig med $\complement A \cup B$. Vi sætter $X = \complement A \cup B$ og får at $A \cap X = A \cap (\complement A \cup B) = (A \cap \complement A) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$, hvilket oplagt er den største mængde X der opfylder at $A \cap X \subseteq B$.

Løst sagt kan man sige at problemet ift. boolsk algebra som fundament, ligger i teorien om komplement(negation), og når man benytter komplementet til at lave implikation[26], er det naturligvis her at problemerne opstår. Når $\top \neq \complement\bot$ i $\mathbf{M_2}$, og vi ved at $\bot \cong \complement\top$ for vilkårlige topoi, må det betyde at $\top \neq \complement\complement\top$ i $\mathbf{M_2}$. I den generelle heyting algebra gælder der mere præcist at $x \sqsubseteq \neg\neg x$, men *ikke* at $\neg\neg x \sqsubseteq x$ [Goldblatt, 1984, side 184], og dermed at aksiomet om det udelukkede tredjes princip ikke gælder.

Nu mangler vi bare at kæde heyting algebraen sammen med den topos semantik vi gennemgik tidligere. Først definerer vi en semantik for $\mathcal{L}$ vha.

26 I klasssisk udsagnslogik kan man skabe de resterende logiske konnektiver ud fra $\neg$ og f.eks. $\vee$.

HA. Konstruktionen er meget lig den boolske algebra. Vi har en **HA** givet ved $\mathbf{H} = (H, \sqsubseteq)$ og definerer en sandhedstilskrivning $V : \Phi_0 \to H$, som bliver udvidet til hele Φ efter samme fremgangsmåde som en **BA**, men med den forskel at $V(a \to b) = \max\{x : a \sqcap x \sqsubseteq b\}$ og $V(\sim a) = \max\{x : a \sqcap x = 0\}$. På den måde gives de klassiske udsagnslogiske konnektiver en semantik. Vi siger så at a er **H**-gyldig, hvis $V(a) = 1$ for alle sandhedstilskrivninger V, og mere generelt at den er **HA**-gyldig, hvis $\mathbf{H} \models a$ for alle **H**. Vi har så at[Goldblatt, 1984, side 185]

Sætning 3.8
*a er **HA**-gyldig hviss $\vdash_{IL} a$*

Hvis vi kigger tilbage på tidligere, så prøvede vi at vise at Sub(d) var en boolsk algebra, men da vi kom til komplementet, så vi at det ikke kunne lade sig gøre for alle topoi. Men hvis vi stedet prøver at vise at Sub(d) opfører sig som en **HA**, ser det ud til at gå bedre. Vi har at pseudokomplementet kun kræver at $f \cap g = 0$, hvilket vi tidligere har sagt gælder for Sub(d). Derudover har vi at Sub(d) er et distributivt gitter, og dette mangler vi at redegøre for her. Det kan vises at et relativt pseudokomplementeret gitter også er distributivt, og dermed har vi at Sub(d) generelt opfører sig som en heyting algebra[Goldblatt, 1984, s.184].

Derudover så de klassiske egenskaber ud til at hænge sammen med Sub(1) og ikke Sub(Ω). Fra tidligere har vi pga. Ω-aksiomet at Sub(d) $\cong \mathscr{T}(d, \Omega)$, hvilket specielt betyder at Sub(1) $\cong \mathscr{T}(1, \Omega)$. I vores topossemantik hvor vi laver en morfibaseret semantik, fik vi overført strukturen fra Sub(d) til morfier vha. af sammensætning med sandhedsmorfierne, og dermed har vi fået bevaret gitterstrukturen. Dette er blevet bekræftet af det faktum, at Sub(d)og $\mathscr{T}(d, \Omega)$ er isomorfe. Vi har fra tidligere at det var nok at Sub(1) er boolsk, for at $p \vee \neg p$ gælder. Dette kan vi nu give en mere præcis forklaring af, da vi har følgende resultat[Goldblatt, 1984, s. 186]

$$\mathscr{T} \models a \;\Leftrightarrow\; \mathscr{T}(1, \Omega) \models a \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Sub}(1) \models a$$

kombineret med det faktum at Sub(1) er en heyting algebra, og at sætning (3.8) siger den underlæggende logik for en heyting algebra er intuitionistisk, gør os i stand til at komme med følgende resultat.

Sætning 3.9
hvis $\vdash_{IL} a$ så $\mathscr{T} \models a$[Goldblatt, 1984, s.186]

Vi mangler nu at komme med en sætning der siger noget om fuldstændigheden mht. en generel topos. For at gøre dette, bliver vi nødt til at gå i dybden med en speciel type kategorier, de såkaldte funktor-kategorier. Det er kategorier af formen $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ hvor $\mathscr{D}$ og $\mathscr{C}$ er vilkårlige kategorier. I forhold til projektet her, er det især funktor-kategorier af formen $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ der er interessante. Der gælder nemlig at hvis $\mathscr{D}$ er en *lille* kategori[27], så er $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ en topos![Goldblatt, 1984, s. 204]. Fra nu af vil det, hvis der ikke nævnes andet, antages det at i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ er $\mathscr{D}$ en lille kategori. Det vil vise sig, at nogle af disse topoi giver en naturlig generalisering af **Set**, og derudover bliver de også benyttet i konstruktionen af grundlaget for S.D.G. Det gælder specialtilfældet $\mathscr{D} = \mathbf{P}$, hvor $\mathbf{P}$ er en vilkårlig poset kategori, og dette bliver skal vi kigge nærmere på i næste kapitel.

27 En lille kategori er defineret ved at samlingen af morfier og samlingen af objekter i den pågældende kategori, også er mængder.

4 $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ - en generalisering af Set

Vi har nu behandlet den generelle topoi, og skal nu kigge nærmere på en bestemt type af topoi, der prøver at generalisere mængdelæren på en naturlig måde. Selvom kategorier af formen $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ er et specialtilfælde af vilkårlige topoi, så vil beskrivelsen af disse ift. vilkårlige $\mathscr{T}$ virke langt mere abstrakt. Det skyldes selvfølgelig i en vis grad at vi tidligere henholdte kategori/topos definitionerne op imod mængdelærens. Nu vil vi så kombinere disse definitioner, og indsætte dem i mere abstrakte konstellationer.

4.1 Generelle konstruktioner i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$

Indtil nu har vi ikke diskuteret bregrebet 'funktor', men dette bliver essentielt i vores forståelse af konstruktioner i $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$. En funktor F kan beskrives som en afbildning mellem kategorier, hvilket formelt udmønter sig i følgende definition.

Definition 4.1
En funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ knytter til et vilkårligt objekt c i $\mathscr{C}$ et objekt $F(c)$ i $\mathscr{D}$. Derudover vil en givet morfi $f : a \to b$ i $\mathscr{C}$, overføres til en tilsvarende morfi $F(f) : F(a) \to F(b)$ i $\mathscr{D}$. Ydermere skal en funktor opfylde et par krav

- $F(Id_x) = Id_{F(x)}$
- *Hvis $f \circ g$ er defineret, så gælder $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.*

Funktorer kan bl.a. bruges til at sammenligne forskellige strukturer i forskellige kategorier, men i vores tilfælde tager vi en tur op med abstraktionselevatoren og anser funktorer som værende objekter i en kategori! Det vil altså sige at objekterne i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ er alle funktorer $F : \mathscr{D} \to$**Set**. Det bliver dernæst naturligt at spørge: Hvad er så morfierne i denne kategori? Svaret er at det er naturlige transformationer, og disse kræver selvfølgelig en gennemgang.

4.1.1 Naturlig Transformation

En naturlig transformation er for funktorer, hvad morfier er for objekter. Det er kort fortalt en transformation af funktorer, til en anden given funktor. Den formelle beskrivelse er som følger: Vi starter med to funktorer fra $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, det vil altså sige at for hvert objektopar plus morfi $a \xrightarrow{f} b$ i $\mathscr{C}$ har vi to forskellige repræsentationer i $\mathscr{D}$ givet ved hhv. $F(a) \xrightarrow{F(f)} F(b)$ og $G(a) \xrightarrow{G(f)} G(b)$. Så vil en naturlig transformation τ mellem F og G være givet ved at der til hvert $a \xrightarrow{f} b$ i $\mathscr{C}$ kan skabes en relation mellem funktorernes billeder i $\mathscr{D}$ så $G(f) \circ \tau_a = \tau_b \circ F(f)$. Dette kan måske være lidt svært at overskue vha. ren notation, men i diagramform svarer det til at for $a \xrightarrow{f} b$ i $\mathscr{C}$ har vi følgende kommuterende diagram i $\mathscr{D}$

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] & a \arrow[d, "f"'] \\ F(b) \arrow[r, "\tau_b"'] & G(b) & b \end{tikzcd}$$

Det vil altså sige at det skal være muligt at komme fra et objekt $F(a)$ til G-funktorens billede $G(a)$. Men dette skal jo også gælde hvis $F(a)$ bliver transformeret vha. andre vilkårlige morfier $F(f), F(g), F(h)$ med domæne $F(a)$, hvor alle objekterne er i $\mathscr{D}$. Dette blev jo lige netop overholdt for en $F(a)$ med dertilhørende morfi $F(f)$ i ovenstående diagram, jvf. at det kommuterer. Men dette var jo kun konstrueret for et vilkårligt objektpar plus morfi. Dette skal jo gælde for alle objekter, dvs. at for alle objekter a i $\mathscr{C}$ findes der $\tau_a : F(a) \to G(a)$ i $\mathscr{D}$, hvor τ_a kaldes for en *komponent* af τ. Så i komprimeret notation har vi $F \xrightarrow{\tau} G$, for at indikere at dette gælder for alle objekter.

Dette udgør altså afbildningerne i funktorkategorier, og at det forholder sig sådan kan vi hurtigt se. Den identiske naturlige transformation $F \xrightarrow{\mathbf{Id}_F} F$ er lige ud af landevejen[Goldblatt, 1984, s. 204]. At de naturlige transformationer opfører sig som morfier i $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$, dvs. opfylder kategoriaksiomerne, ses let. Men for at vende tilbage til vores topoi af formen $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ vil et naturligt spørgsmål selvfølgelig være: Hvordan ser de elementære toposkonstruktioner ud i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, som vi gennemgik tidligere for en vilkårlig topos? Dette skal vi kigge nærmere på nu, og senere diskutere de logiske egenskaber ved disse.

4.1.2 Produkt, grænser m.m.

I afsnit 2 kiggede vi på produkt, universelle egenskaber osv. Her skal vi kort sætte dem i relation til $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$. Som vi gjorde tidligere, kan vi starte ud med den universelle konstruktion af det gammelkendte fænomen fra **Set**. Jvf. beskrivelsen universelle egenskaber, har vi at et produkt er grænsen af D-keglen »$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$«, hvorfra alle andre D-kegler ville faktorisere entydigt igennem. Samme fremgangsmåde bruges i definition af det partikulære tilfælde med $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, men med den forskel at dette gøres komponentvis først[Goldblatt, 1984, s. 204]. Vi har jvf. konstruktionen af produkt, givet et diagram bestående af to objekter, dvs. funktorerne F, G og konstruerer så den efterfølgende grænsekegle »$F \xrightarrow{\tau} H \xleftarrow{\sigma} G$«. Dette foregår komponentvis, så det vil sige at at for hvert objekt a i $\mathscr{D}$ har vi et produkt: $F(a) \xrightarrow{\tau_a} H(a) \xleftarrow{\sigma_a} G(a)$, som jo er i **Set**. I denne konstruktion har vi fastlagt et objekt $H(a)$ i **Set**, som fastlægger en funktor $H : \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$. Da denne konstruktion gælder for alle $\mathscr{D}$-objekter a, må det også gælde for et $\mathscr{D}$-objekt b. Så når vi i $\mathscr{D}$ har en morfi $f : a \to b$, må dennes billede $H(f)$ i **Set** være entydigt bestemt op til isomorfi, hvilket vi kan udtrykke ved at følgende pilediagram

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[d, "F(f)"'] & H(a) \arrow[l, "\tau_a"'] \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, dotted, "H(f)"] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(b) & H(b) \arrow[l, "\tau_b"] \arrow[r, "\sigma_b"'] & G(b) \end{tikzcd}$$

kommuterer. Da det gællder for alle komponenterne i τ og σ, så har vi at

$$F \xrightarrow{\tau} H \xleftarrow{\sigma} G$$

lige netop er en grænse-kegle i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, hvilket er definitionen på et produkt[1]. Som vi kan se, minder konstruktionen temmelig meget om den generelle, selvom det rent virker som om dette er et mere abstrakt tilfælde. Det giver god mening, da vi tidligere tog udgangspunkt i **Set**, men nu arbejder

1 For en gennemgang af pullback se [Goldblatt, 1984, s. 205].

med en generaliseret udgave af denne. Pointen er at vi komponentvis, dvs. ift. objekterne i $\mathscr{D}$, har de klassiske diagrammer som vi gennemgik i tidligere kapitler. Hvis der er flere komponenter der hænger sammen via en given morfi f i $\mathscr{D}$, som besidder sammen egenskab, så skal der faktoriseres entydigt igennem de komponentvise konstruktioner, som illustreret ved ovenstående to-kvadrat diagram.

Vi kan ved samme fremgangsmåde klassificere universelle egenskaber generelt i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$. Vi kan tage udgangspunkt i samme konstruktion som i kapitel 2, figur 2.1 og 2.2 hhv. Ligesom med produktet, skal der tages udgangspunkt i det komponentvise. I figur 2.1 er vist en kegle der minder umiskendeligt meget om produkt-keglen, med den forskel at der er en morfi mellem diagrammets to objekter. For at vi her har tale om en grænse af diagram 2.2 skal det, jvf. konstruktionen af produkt, gælde for hvert enkelt komponent. Så hvis vi antog at figur 2.1 var en grænsekegle, så skulle det være en grænse for hvert komponent. Så ville det svare til at figur 4.1 skal kommutere for alle objekter $a, b, ...$ i $\mathscr{D}$. Nu skal vi kigge på hvordan vi

$$\begin{tikzcd}
F_i(a) \arrow[d, "F_i(f)"'] & H(a) \arrow[l, "\tau_a"'] \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, dotted, "H(f)"] \arrow[rr, phantom] & F_j(a) \arrow[d, "F_j(f)"] \\
F_i(b) & H(b) \arrow[l, "\tau_b"] \arrow[r, "\sigma_b"'] & F_j(b)
\end{tikzcd}$$
$$F_i(a) \xrightarrow{\eta_a} F_j(a), \quad F_i(b) \xrightarrow{\eta_b} F_j(b)$$

Figur 4.1 Her ses formuleringen af grænser ift. $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$. Bemærk at funktorobjekterne kan relateres til de generelle objekter i 2.1 ved at sætte $d_{i,j} = F_{i,j}$ og $c = H$. Det vil altså sige at i, j'erne angiver forskellige funktorer.

klassificerer delobjekter i **Set**.

4.1.3 Delobjekt klassifikator i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$

Det næste nærliggende spørgsmål er selvfølgelig hvordan vi kan klassificere objekter i $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, og her skal vi introducere et nyt begreb, et 'Sieve'. Vi definerer først følgende: For et objekt a i $\mathscr{D}$, laver vi en samling

$S_a = \{f$: der eksisterer et b, så $a \xrightarrow{f} b$ i $\mathscr{D}\}$

Altså samlingen af alle morfier med domæne a og vilkårligt co-domæne. Det kan hurtigt ses at denne samling af morfier er lukket for venstre komposition. Har vi en morfi $g : b \to c$, så kan vi sammensætte med ovenstående, så vi får $f \circ g : a \to c$ som igen er i S_a. Et sieve er så defineret ved at at være en del af S_a, men samtidig være lukket over for venstre-sammensætning, altså $S = \{f : f \circ g \in S \text{ når } g \in S\}$. Ud fra dette begreb kan vi definere et funktor-objekt Ω, som er givet ved $\Omega(a) = \{S : S \text{ er et } a\text{-sieve }\}$. Ud fra dette er det klart at det største og mindste sieve er hhv. S_a og $\emptyset$. Herfra kan vi så definere en naturlig transformationsmorfi $1 \xrightarrow{\top} \Omega$, hvor hver komponent i **Set** er givet ved $\top_a : \{x\} \to \Omega(a)$ for $a \in \mathscr{D}$, hvor x er en vilkårlig singleton, og morfien knytter det største, til a hørende, sieve S_a i $\Omega(a)$. Først lad os kigge på det i det abstrakte tilfælde, og dernæst kan vi tage et simpelt eksempel. For et objekt a i $\mathscr{D}$ har vi billeder givet ved hhv. F og G, og lad os antage at vi har en monisk (naturlig transformations-) morfi τ i **Set**$^{\mathscr{D}}$. Det vil sige, jvf. alle de andre definitioner vi har gennemgået, at så er de komponentvis moniske. Da vi nu arbejder i **Set**, kan vi for simpelheds skyld tale om en indlejningsmorfi, dvs. til et $\mathscr{D}$-objekt a har vi at $\tau_a : F(a) \hookrightarrow G(a)$ og at $F(a) \subset G(a)$ (og $F(b) \subset G(b)$ etc.). Til en sådan τ, har vi en karakteristisk naturlig transformation $G \xrightarrow{\chi_\tau} \Omega$, der for hver komponent a i $\mathscr{D}$ er en mængdefunktion $(\chi_\tau)_a : G(a) \to \Omega(a)$, der til hvert $x \in G(a)$ fastlægger et a-sieve i $\Omega(a)$. Men hvornår vil et f i $\mathscr{D}$, med domæne a og vilkårligt co-domæne, være i billedet af $(\chi_\tau)_a(x)$ for $x \in G(a)$? Det vil den, når

$$\begin{tikzcd}
F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(b) \arrow[r, "\tau_b"'] & G(b)
\end{tikzcd}$$

kommuterer, og derudover skal $G(f)$ afbilde x ind i $F(b)$.

På den måde knytter vi et a-sieve til x, og lad os kalde den $(\chi_\tau)_a(x)$. Dvs. f hører til $(\chi_\tau)_a(x)$ når $G(f)(x) \in F(b)$, så x behøver ikke nødvendigvis at være en del af $F(a)$ for at f kan være være en del af $(\chi_\tau)_a(x)$, så længe billedet $G(f)(x)$ også er i $F(b)$ jvf. diagrammet. Mere formelt skrivers det som $(\chi_\tau)_a(x) = \{(f : a \to b) : G(f)(x) \in F(b)\}$. Dog var dette under antagelse af at der var tale om en inklusion, hvilket ikke nødvendigvis behøves at være tilfældet. Det mindre restriktive krav er at $G(f)(x)$ skal være inkluderet i $\tau_b(F(b))$, som jo ikke nødvendigvis er lig med de elementer i $G(b)$ som også er i $F(b)$. Vi vil komme med eksempel senere i kapitlet, som er knyttet op på mere konkret intuition.

4.2 $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$-semantik

Her skal vi se på logikken i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, hvor P er en post-kategori. Dels at få afklaret fuldstændighedsdelen af topossemantikken, og dels fordi der i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ er en god modallogisk måde at anskue dette på. En måde der giver en interessant generalisering af **Set**. Vi skal tage udgangspunkt i Saul Kripkes semantik, ved først at definere denne og dernæst kigge på fortolkningen af dette i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$. Som vi skal se, så er der forbindelser til, ikke bare den formelle intuitionistiske logik, men også den intuitionistiske måde at tænke på. Dette skal dernæst sættes i relation til $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$. I intuitionisme, og mere generelt konstruktivisme, er der lagt vægt på at der er visse udsagn, som vi endnu ikke ved om er sande eller falske. Dette kan ses som et tidsligt forhold, at vi til tiden t_1 ikke vidste om et givent udsagn var sandt eller falsk, men at til t_2 har vi afgjort udsagnets sandhedsforhold. For at se hvordan dette kan relateres til Kripkes semantik, skal kigge nærmere på den formelle konstruktion.

4.2.1 Kripke-semantik

Vi starter samme sted som med en generel heyting algebra, men da denne semantik skal ses i et modallogisk lys, er der selvfølgelig forskelle, til trods for at denne semantik udgør en delmængde af alle heyting algebra'er. Ligesom med heyting algebraen, så starter vi i kategoriteoretiske termer, med et poset $\mathbf{P} = (P, \sqsubseteq)$, som vi i denne kontekst vil kalde en ramme. Det var også med et poset plus noget mere, at vi definerede heyting algebraen. Nærmere bestemt var dette 'mere' supremum, infimum, pseudo komplement og relativt pseudokomplement. Nu starter vi i stedet ud med at kigge på en bestemt type delmængder i et poset. Vi kalder en mængde af objekter $A \sqsubseteq P$ for *arvelig*, hvis det er sådan at A er lukket opadtil mht. delmængder af P, dvs. at når $p \in A$ og $p \sqsubseteq q$, så må $q \in A$. Mængden af alle arvelige mængder der kan dannes af P, skrives $\mathbf{P}^+$. Ud fra dette kan vi definere en $\mathbf{P}$- sandhedstilskrivning V, der som i vores tidligere definerede semantikker, tilskriver de atomiske formler $\pi_i \in \Phi_0$ en mængde, i dette tilfælde en mængde fra $\mathbf{P}^+$. Vi siger at $V : \Phi_0 \to \mathbf{P}^+$ tilskriver til hvert π_i en arvelig mængde fra $\mathbf{P}^+$. Det vil sige vi har for alle vores sandhedstilskrivninger V, en model $\mathbb{M} = (\mathbf{P}, V)$. Ud fra sandhedstilskrivningen, kan vi så finde ud af om en givet udsagn a er sandt, til et givet $p \in P$, og hvis det er, skriver vi $\mathbb{M}_p \models a$. Nu kan vi udvide vores mængde af atomiske udsagn Φ_0 til Φ ved følgende regler[Goldblatt, 1984, s. 189]:

1. $\mathbb{M} \models_p \pi_i$ hviss $p \in V(\pi_i)$
2. $\mathbb{M} \models_p a \wedge b$ hviss $\mathbb{M} \models_p a \wedge \mathbb{M} \models_p b$
3. $\mathbb{M} \models_p a \vee b$ hviss $\mathbb{M} \models_p a \vee \mathbb{M} \models_p b$
4. $\mathbb{M} \models_p \neg a$ hviss for alle q med $p \sqsubseteq q$, $\mathbb{M} \not\models_q a$
5. $\mathbb{M} \models_p a \Rightarrow b$ hviss for alle q med $p \sqsubseteq q$, hvis $\mathbb{M} \models_q a$ så $\mathbb{M} \models_q b$

Den første giver næsten sig selv, og de to næste ligger i forlængelse af klassisk udsagnslogik. Men de to sidste skiller sig ud. Det skyldes at vi tilskriver sandhedsværdierne til arvelige mængder, så hvis A er en arvelig mængde, og hvis der for $p \in A$ gælder et udsagn, så må dette gælde for alle q der opfylder $p \sqsubseteq q$, det vi vil sige til alle fremtidige situationer. Så vis $\neg a$ gælder til et givent p, så må det betyde at det ikke til nogle q 'efter' p vil gælde at a. På lignende vis med nr. 5 hvis $a \Rightarrow b$ i p så vil de sige at der til alle fremtidige situationer, hvor a gælder, så må b også gælde. Til gengæld er det ikke et krav at a ikke må gælde senere, for i så fald vil implikationen jo stadig være sand.

Nu blev det påstået at denne semantik er en delmængde af generelle heyting algebraer, men det er ikke umiddelbart klart af det ovenstående. Men vi kan omskrive ovenstående definition 1.-5., så det bliver mere klart, men først skal vi lige introducere et par definitioner. Vi tager mængden af p'er hvorom det gælder at a er sand, og benævner denne $\mathbb{M}(a)$ altså $\mathbb{M}(a) = \{p : \mathbb{M} \models_p a\}$. Derudover definerer vi for en arvelig mængde S:

$$\neg^* S = \{p : \forall q \text{ hvor } p \sqsubseteq q, q \notin S\}$$ [2]

hvilket vil sige at $\neg^* S$ er mængden af alle p'er som er mindre end alle de q'er der ikke er i S. Så hvis vi har $P = 1, 2, 3, 4...$[3] med sædvanlig ordning og vi tager S som værende $S = \{4, ...\}$, så er $\neg^* S = \{1, 2, 3\}$. Dette er et rimeligt simpelt tilfælde, men vores næste definition af $\Rightarrow$ kræver lidt mere artikulerede eksempler. Definitionen er som følger: Givet to arvelige mængder S, T så

$$S \Rightarrow^* T = \{p : \ \forall q \text{ hvor } p \sqsubseteq q, \text{ hvis } q \in S \text{ så } q \in T\}$$ [4]

Det vil altså sige mængden af p'er hvorom det gælder at for alle q så $p \sqsubseteq q$ med egenskaben at hvis q er i S, så er q også i T. Hvis vi nu lader $T = \emptyset$, hvad sker der så med vores definition? Så har vi at

$$S \Rightarrow^* \emptyset = \{p : \text{for alle } q \text{ med egenskaben } p \sqsubseteq q, \text{ hvis } q \in S \text{ så } q \in \emptyset\}$$

2 Grunden til at vi skriver $\neg^*$ er for at illustrere at vi her afviger fra tidligere notation.

3 Jvf. definitionen på en poset kategori, så vil det altså sige objekter plus morfier visualiseret ved $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \ldots$.

4 Grunden til at vi skriver $\Rightarrow^*$ er for at illustrere at vi her afviger fra tidligere notation.

Men der findes ingen $q \in \emptyset$, så der findes slet ingen q i S med den egenskab, det vil sige at $q \notin S$, og deraf ses at definitionen falder sammen med $\neg^* S$, så $S \Rightarrow^* \emptyset = \neg^* S$, hvilket jo unægteligt minder om visse specialtilfælde i en heyting algebra, og det er det også. Vi kan nu opskrive tidligere principper i mængdenotation i stedet

1'. $\mathbb{M}(\pi_i) = V(\pi_i)$

2'. $\mathbb{M}(a \wedge b) = \mathbb{M}(a) \cap \mathbb{M}(b)$

3'. $\mathbb{M}(a \vee b) = \mathbb{M}(a) \cup \mathbb{M}(b)$

4'. $\mathbb{M}(\neg a) = \neg^* \mathbb{M}(a)$

5'. $\mathbb{M}(a \rightarrow b) = \mathbb{M}(a) \Rightarrow^* \mathbb{M}(b)$

De første 3 principper minder direkte om boolsk og heyting algebraen, og vi har vist at defintionen af $\neg^*$, kan beskrives ved hjælp af $\Rightarrow^*$ på samme måde som ved en heyting algebra. Kigger vi nærmere på definitionen for '$\Rightarrow^*$', så ser man at der kvantificeres over alle q som har en given egenskab ϕ, beskrevet ved definitionen, og for hvert q tager vi så alle p som $p \sqsubseteq q$. Det vil mere billedligt sige at vi med mængden af p'er får den største 'hale' i P, hvis 'hoved' opfylder ϕ. Lad os nu antage at vi har denne største hale C, hvad er det så for en egenskab ϕ den opfylder? Den skal indeholde $S \cap T$, jvf. definitionen. For at være den største hale, skal den jo først og fremmest indeholde en del af S (som også er i T), og eventuelle mindre elementer. Det kan vi sikre ved f.eks. at lade den være den største mængde der opfylder $S \cap X$, og da den samtidig skal være i T, må vi sikre os dette ved at sige den skal være den største mængde der opfylder $S \cap X \subseteq T$. Det er jo lige netop definitionen på det relative pseudokomplement i en heyting algebra! Men eftersom vi jo kigger på billederne af givne sandhedstilskrivninger V, skal vi altså kun kigge på $\mathbf{P}^+$, og det vil sige at vi i ovenstående eksempel med $\neg^* S$ fik en ikke-arvelig mængde ud af det, så vi må konkludere at i dette tilfælde er $\neg^* S = \emptyset$ (da vi jo er i $\mathbf{P}^+$), og det kunne være fristende at konkludere at alle komplementer til S må være tomme.

Nu forholder det sig sådan at i et generelt poset, kan der godt være forgreninger. Vi kan illustrere dette ved figur 4.2, som ydermere også kan bruges til at illustrere nogle af de logiske egenskaber ved $\mathbf{P}^+$, når denne behandles som en heyting algebra. På figuren ser vi et eksempel på en forgrening, hvor vi har to grene, hhv. α og β, og ordningsrelationen er angivet ved morfierne, som ikke er navngivet, da de jo er entydigt givet, jvf. definitionen. Nu antager vi at S i dette poset er lig med $\{3, 4_\alpha, 5_\alpha\}$, og så vil $\neg^* S = \{4_\beta, 5_\beta\}$. Det interessante er omvendt at hvis vi negerer $\neg^* S$, så får vi $\neg^* \neg^* S = \{4_\alpha, 5_\alpha\}$, altså $\neg^* \neg^* S \neq S$, hvilket som bekendt adskiller

Figur 4.2 Et eksempel på en forgrening i et poset $(P, \sqsubseteq)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{4}_\alpha \arrow[r] & \mathbf{5}_\alpha \\
\mathbf{1} \arrow[r] & \mathbf{2} \arrow[r] & \mathbf{3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & & \mathbf{4}_\beta \arrow[r] & \mathbf{5}_\beta
\end{tikzcd}$$

sig fra klassisk logik. Et andet illustrativt eksempel kunne være at vi har en formel ϕ, og en evaluering $V(\phi) = \{4_\alpha, 5_\alpha\}$, så har vi fra 1. (og 1'.) at $\mathbb{M} \not\models_3 \phi$, men samtidig har vi fra 4. at $\mathbb{M} \not\models_3 \neg\phi$, da α-halen jo gælder. Det vil altså sige at $\mathbb{M} \not\models_3 \neg\phi \vee \phi$.
På denne måde har vi fået illustreret et par af de klassiske egenskaber ved en heyting algebra, og vi kan konkludere at $\mathbf{P}^+$ er en heyting algebra, og eftersom de sidste defintioner 1'-5' knytter sig til en heyting algebra, kan vi konkludere at en $\mathbf{P}$-sandhedstilskrivning svarer til en $\mathbf{P}^+$-sandhedstilskrivning for heyting algeraen $\mathbf{P}^+$. Det vil altså sige vi har $\mathbb{M}(a) = V(a)$. Da vi har at $\mathbb{M} \models a$ hviss $\mathbb{M} \models_p a \ \forall p \in P$, kombineret med ovenstående, giver $\mathbb{M} \models a \Leftrightarrow \mathbb{M}(a) = P \Leftrightarrow V(a) = P$. Da P er enheden i heyting algebraen $\mathbf{P}^+$, og hvis et udsagn gælder for alle V har vi et sammenfald med heytingalgraen, altså $\mathbf{P} \models a$ hviss $\mathbf{P}^+ \models a$. Vi har derfor at gyldigheden af kripkes semantik på en ramme $\mathbf{P}$ er det samme som en heyting algebra over $\mathbf{P}^+$, altså mængden af alle arvelige mængder af $\mathbf{P}$. Da vi fra tidligere har at a er gyldig i en heyting algebra, hvis og kun hvis $\vdash_{IL} a$, kan vi nu fra ovenstående konkludere at

Sætning 4.1
$\vdash_{IL} a$ hvis og kun hvis a gælder i alle rammer $\mathbf{P}$ *[Goldblatt, 1984, s. 191]*

Bevisstrategi
Sundheden følger af at vi ved at hvis $\vdash_{IL} a$ så er a **HA**-gyldig så for alle $\mathbf{P}$ gælder at $\mathbf{P}^+ \models a$ og dermed $\mathbf{P} \models a$. Det er straks værre med fuldstændigheden, men vi kan kigge på de generelle linjer i beviset. Pointen er at skabe en speciel ramme, hvilket kan gøres som følger. Vi har en model $\mathbb{M}$ hvor p er et element. Så definerer vi en mængde $\Gamma_p = \{a : \mathbb{M} \models_p a\}$ det vil altså sige alle de formler i $\mathbb{M}$ der er gyldige ved p. Det kan vises at Γ_p opfylder følgende

1. Hvis $\vdash_{IL} a$ så $a \in \Gamma_p$ (sundhed)

2. Hvis $\vdash_{IL} a \to b$ og $a \in \Gamma_p$, så $b \in \Gamma_p$ (lukket under modus ponens)
3. Der findes mindst et a så $a \notin \Gamma_p$ (konsistens)
4. Hvis $a \vee b \in \Gamma_p$ så $a \in \Gamma_p$ eller $b \in \Gamma_p$

Pointen er at Γ_p beskriver hvilke formler der er gyldige til en given tilstand p. En sådan tilstandsbeskrivelse $\Gamma \subseteq \Phi$, der opfylder disse ovenstående betingelser, kan vi konstruere en ramme ud fra. Hvis vi har $a \in \Phi$ og denne opfylder $a \in \Gamma_p$, så er denne formel sand i den givne tilstand p. Ud fra dette kan vi konstruere end kanonisk ramme $\mathbf{P}_{IL} = (P_{IL}, \subseteq)$ hvor P_{IL} er mængden af alle Γ og $\subseteq$ er den sædvanlige delmængde ordning. Dertil er knyttet den kanoniske model $\mathbb{M}_{IL} = (\mathbf{P}_{IL}, V_{IL})$ hvor V_{IL} er defineret ved at for $\pi_i \in \Phi_0$ har vi $V_{IL}(\pi_i) = \{\Gamma : \pi_i \in \Gamma\}$, det vil sige mængden af Γ'er hvor π_i er element, dvs. sand. Man kan dernæst vise at der mere generelt gælder for $a \in \Phi$ og et givet Γ at $\mathbb{M} \models_\Gamma a$ hviss $a \in \Gamma$[Goldblatt, 1984, s. 191]. Dernæst skal vi bruge »Lindenbaums Lemma«, der siger at $\vdash_{IL} a$ hviss a er medlem af alle mængder Γ. Ud fra dette har vi jo jvf. gyldighed af kripke modeller, at $\vdash_{IL} a$ hviss $\mathbb{M}_{IL} \models a$. Det vil altså sige at $\vdash_{IL} a$ hviss $\mathbf{P}_{IL} \models a$. Da $\mathbf{P}_{IL}$ lige præcis er mængden af alle $\Gamma \subseteq \Phi$ har vi altså at hvis noget er gyldigt i denne kanoniske ramme, må det gælde for alle rammer.[Goldblatt, 1984, s.191-192] $\diamond$

Nu har vi altså fået kortlagt forbindelsen til den intuitionistiske logik, heyting algebraen og mængder af arvelige mængder over en ramme $\mathbf{P}$. Vi mangler nu bare at redegøre for en enkelt ting til, før vi kan sætte det i relation til et specialtilfælde af de af funktorkategorierne konstruede topoi. Det viser sig nemlig at man kan konstruere heyting algebra'er, ved de rette delmængde formationer i $\mathbf{P}^+$, og ydermere overføre operationer fra hele $\mathbf{P}^+$, til disse delmængde-algebra'er, og de bliver vigtige konstruktioner, når vi skal kigge på hvordan en delmængde klassifikator ser ud i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$. Men lad os gå mere formelt til værks.

Hvis vi har et $\mathbf{P}$, så kan vi konstruere for hvert p i $\mathbf{P}$ følgende mængde: $[p) = \{q : p \sqsubseteq q\}$, der selvfølgelig vil være arvelig og dermed $[p) \in \mathbf{P}^+$, og den kaldes den prinipale $\mathbf{P}$-arvelige mængde genereret af p. Ud fra definitionen kan man altså se at at $[p)$ udgør alle elementer fra $\mathbf{P}$, fra p og opefter, hvilket jo er en indskrænkning fra vores generelle definition af en arvelig mængde, hvor man jo kunne nøjes med at have en enkelt »hale« jvf. figur 4.2. Det følger også af defintionen af hvis vi har et $[p) \in \mathbf{P}^+$ og et $q : p \sqsubseteq q$, så kan vi lave en mængde $[q)_p = \{r : r \in [p) \wedge q \sqsubseteq r\} = [p) \cap [q) = [q) \in \mathbf{P}^+$, så man ender med den samme $[q)$, uanset om det er ud fra $\mathbf{P}$, eller $[p)$. Faktisk kan alle operationer i $\mathbf{P}^+$ overføres til

$[p)^+$, hvor $[p)^+$ er mængden af alle arvelige mængder der kan skabes ud fra $[p)$. Vi har altså at $([p)^+, \subseteq)$ er en heyting algebra, hvor gitter meet og join hhv. $\cap_p$ og $\cup_p$ er de gammelkendte operationer $\cup$ og $\cap$. Pseudokomplementet er en afbildning $\neg_p : [p)^+ \to [p)^+$. Har vi $S \subseteq [p)$, så er $\neg_p S$ defineret ved $\neg_p S = \{q : q \in [p) \wedge [p) \subseteq \complement S\}$ og det relative pseudokomplement er $\Rightarrow_p$: $[p)^+ \times [p)^+ \to [p)^+$ defineret ved at $S \Rightarrow_p T = \{q : q \in [p) \wedge S \cap [q)_p \subseteq T\}$ for $S, T \subseteq [p)$[Goldblatt, 1984, s.215], hvilket minder utroligt meget om definitionen ift. den generelle kripke semantik som vi kiggede på tidligere. Det vigtige er nu, at hvis vi har nogle mængder i $\mathbf{P}^+$, så kan vi overføre operationerne på disse, til operationer på $[p)^+$. Vi har følgende sætning[Goldblatt, 1984, s.215]

Sætning 4.2
For vilkårlige $S, T \in \mathbf{P}^+$ har vi at

1. $(S_p) \cap_p (T_p) = (S \cap T)_p$
2. $(S_p) \cup_p (T_p) = (S \cup T)_p$
3. $\neg_p(S_p) = (\neg S)_p$
4. $(S_p) \Rightarrow_p (T_p) = (S \Rightarrow T)_p$

Bevisstrategi
Hvor vi f.eks. med 1'eren hurtigt kan se at det er rigtigt ved $(S_p) \cap_p (T_p)$ jo føres tilbage til definitionen for derefter at bruge klassiske regneregler for mængder $(S_p) \cap_p (T_p) = (S \cap [p)) \cap (T \cap [p)) = (x \in S \wedge x \in [p)) \wedge (x \in T \wedge x \in [p)) = x \in [p = \wedge x \in T \wedge x \in S = (x \in S \wedge x \in T) \wedge x \in [p) = (S \cap T) \cap [p) = (S \cap T)_p$. ◇

Sagt på en anden måde, ovenstående en (heyting algebra) homomorfi fra $\mathbf{P}^+$ til $[p)^+$[Goldblatt, 1984, s.215].

4.2.2 $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$

Eftersom vi har kigget på de logiske egenskaber ved $\mathbf{P}$ (og $\mathbf{P}^+$ i særdeleshed) og de strukturelle egenskaber ved $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ er det nu tid til at føre disse to ting sammen, ved at studere topoi af formen $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, som er en delmængde af $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, hvor $\mathscr{D}$ er fastlagt til at være et poset. I afsnit 4.1.3 kiggede vi på delobjekt klassifikatoren for $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, og dér indgik et begreb »sieve«, som vi nu vil hive fat i igen. Vi havde at til et objekt a i $\mathscr{D}$ at funktoren Ω's billede i $\mathbf{Set}$, var givet ved $\Omega(a) = \{$mængden af a-sieves$\}$. Det interessante ligger her i det faktum at i et poset $\mathbf{P}$ er ordningsrelationen lige netop de givne morfier i kategorien, dvs. $f : a \to b = a \sqsubseteq b$. Vender vi nu tilbage til vores definition af sieves, og kigger på det størst mulige sieve til et givet $p \in \mathscr{D} = \mathbf{P}$, så har vi at $S_p = \{f$: for vilkårlige q, $p \xrightarrow{f} q$ i $\mathbf{P}\} = \{$for vilkårlige q, $p \sqsubseteq q\}$, hvilket jo lige netop er $[p)$! Det vil altså sige at $S_p = [p)$, og lad os dernæst kigge på sieves mere generelt. Mængden af sieves til et givet p er delmængde af S_p, der opfylder at de er lukket mht. venstresammensætning. Dvs. et sieve $S \subseteq S_p$ opfylder at $g \circ f \in S$ når $f \in S$ og g er en funktion i $\mathbf{P}$, med den betingelse at den kan sammensættes med f på ovenstående facon. Hvis vi nu antager at f er givet ved $f : p \to q = p \sqsubseteq q$, så generer denne et sieve ved alle g der kan sammensættes med f fra venstre. Så dvs. vi har $g : q \to r$ giver $f \circ g = p \sqsubseteq q \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqsubseteq r$. Så hvis vi f.eks. kigger på $S_p = [p)$, så kan vi konstruere et sieve $S_q \subseteq S_p$ ved at tage et $q \in [p)$ og sige $r \in S_q$ når $q \sqsubseteq r$.

Det vil altså sige at alle arvelige mængder er sieves, og mere konkret $\Omega(p) = \{S : S$ er et p-sieve$\} = [p)^+$. Her har vi et eksempel hvor vi tager udgangspunkt i den abstrakte definition fra kapitel 4.1.3, indsætter i det konkrete tilfælde hvor $\mathscr{D} = \mathbf{P}$.

Givet $\mathbf{P}$'s struktur, har vi også en relativ nem måde at anskue objekterne i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ på. Tag nu f.eks. en funktor $F : \mathbf{P} \to \mathbf{Set}$ som til et givet p har tilknyttet en mængde $F(p)$ i **Set**. Har vi nu et q som opfylder $p \sqsubseteq q$, så ved vi jo der er en morfi $f : p \to q = p \sqsubseteq q$, og denne har også et billede i **Set**, hvilket vi samlet set kan omskrive fra $F(p \sqsubseteq q) : F(p) \to F(q)$ til $F_{pq} : F_p \to F_q$. Det vil altså sige, når vi kigger på subobjekt klassifikatoren, så får vi at $\Omega_{pq} : \Omega_p \to \Omega_q$[5], som tager $S \in [p)^+$ til $S \cap [q) \in [q)^+$, dvs. $\Omega_{pq}(S_p) = S_q$, og det er også værd at bemærke at man på denne måde bevarer heyting algebraens struktur.

Derudover har vi et terminalt objekt i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, dvs. en funktor $1 : \mathbf{P} \to \mathbf{Set}$ defineret ved $1_p = \{0\}$ for alle p i $\mathbf{P}$, og der til morfierne $p \sqsubseteq q = 1_{pq}$ i $\mathbf{P}$ knytter morfien Id_0 i **Set**. Det sidste vi mangler for at have en delobjektklassifikator er en naturlig transformation der agerer sandhedsmorfi, hvilket er en naturlig transformation $1 \xrightarrow{\top} \Omega$, som komponentvis er defineret ved $\top_p(0) = [p) \in \Omega_p = [p)^+$, dvs. tilskriver det største p-sieve til hvert p i $\Omega(p)$. Derudover vil $p \sqsubseteq q$ bliver transformeret til restriktionen $[p)_q$ af $[p)$[6].

Så nu kan vi altså tage fat i en inklusionsmorfi $F \xhookrightarrow{\tau} G$ i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, og

5 Selvfølgelig vil dette kun være muligt når $p \sqsubseteq q$, hvilket det fremover vil være antaget implicit.

6 Denne situation minder om $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$, hvor det i stedet var det største ideal af M i stedet har det største sieve.

se på hvordan $G \xrightarrow{\chi_\tau} \Omega$ ser ud. Ud fra ovenstående definition af $\top$, kan vi se at for alle kompononter p, vil $(\chi_\tau)_p(x) : G_p \to \Omega_p = [p)^+$, hvor $(\chi_\tau)_p(x) = \{q : p \sqsubseteq q \wedge G_{pq}(x) \in F_q\} \in [p)^+$.[Goldblatt, 1984, s. 216] χ_τ tilskriver en mindste værdi p, som angiver hvornår x er i F, og så vil dette gælde for alle q der opfylder $p \sqsubseteq q$. Hvis ikke x vil være i F for nogen p, må $\chi_\tau(x) = \emptyset$ for alle komponenter p. Hvis $(\chi_\tau)_p(x) = [p)$ betyder det at x er i F, og hvis $(\chi_\tau)_p(x) = [p)_q = [q)$, så ved vi at x vil være i F for $(\chi_\tau)_q(x)$ og opefter. Man fornemmer altså at der kan ligge en tidslig eller variabel forståelse af hvornår et element er i en mængde. En sidste ting vi skal kigge på er et enkelt eksempel på hvordan sandhedsmorfier ser ud i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$. Vi får dog kun lejlighed til at stifte bekendtskab med en enkelt sandhedsmorfi, for at give et hurtigt indblik i hvordan disse fungerer i denne kategori.

4.2.3 Gyldighed i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$

Vi vil kigge på morfien for konjuktion. Den blev tidligere klassificeret som karakteristisk morfi til $\langle \top, \top \rangle : 1 \to \Omega \times \Omega$[7], dvs. vi har en naturlig transformation af formen $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\cap} \Omega$. Fra sidste afsnit husker vi hvordan en karakteristisk morfi virker, og dette skal vi bruge nu. Vi definerer komponentvis hvor $S, T \in \Omega(p) = [p)^+$ og vi har at[Goldblatt, 1984, s.223]

$$\begin{aligned}
\cap_p(\langle S, T \rangle) &=_1 \{q : p \sqsubseteq q \text{ og } \langle \Omega_{pq}(T), \Omega_{pq}(S) \rangle = \langle [q), [q) \rangle\} \\
&=_2 \{q : p \sqsubseteq q \text{ og } S \cap [q) = T \cap [q) = [q)\} \\
&=_3 \{q : p \sqsubseteq q \text{ og } [q) \subseteq T \wedge [q) \subseteq S\} \\
&=_4 \{q : p \sqsubseteq q \text{ og } q \in T \wedge q \in S\} \\
&=_5 T \cap S \cap [p) \\
&=_6 (T \cap S)_p \\
&=_7 T \cap S
\end{aligned}$$

hvor 1 følger af det faktum at delmængden som $\cap$ er (jvf. definitionen på sandhedsmorfien) karakteristisk funktion for, er $\langle [q), [q) \rangle \, \forall q$[8]. 2 følger af at Ω_{pq} tager mængder S fra $[p)^+$ og forkorter dem så $S_q \in [q)^+$. 3 følger af det faktum at hvis der skal gælde $A \cap B = B$ så må $B \subseteq A$. 4 er en omskrivning af 3. 5 følger ved omskrive kravet $q : p \sqsubseteq q$, og 7 følger fordi $T, S \subseteq [p)$. Det vil altså sige vi har en fin korrespondance mellem mængdeoperationen $\cap_p$ og sandhedsmorfien $\cap_p$. Det samme gælder for $\cup_p$ og $\cup_p$, det samme

7 Bemærk at funktoren $\Omega \times \Omega$ har $(\Omega \times \Omega)_p = \langle \Omega_p, \Omega_p \rangle$ og $(\Omega \times \Omega)_{pq} = \langle \Omega_{pq}, \Omega_{pq} \rangle$
8 Sandhed i $\Omega_p = [p)^+$ svarer jo til $[p)$

gælder for $\neg_p$ og pseudo-komplementet over $[p)^+$ og det samme med $\Rightarrow_p$ og det relative pseudo-komplement.
Det sidste vi skal se på, er en sætning vedr. logikken i $\mathbf{Set^P}$. Den skal vi bruge til at vise fuldstændigheden af $\mathscr{T}$ mht. intuitionistisk logik. Men først sætningen [Goldblatt, 1984, s.224]

Sætning 4.3 (Gyldighedssætningen)
For et givet poset $\mathbf{P}$ *og velformet formel* $a \in \Phi$ *har vi at*
$\mathbf{Set^P} \models a$ *hvis og kun hvis* $\mathbf{P} \models a$

Bevisstrategi
Beviset for gyldighedssætningen er temmelig lang, så vi giver et kort grundrids. For det første har vi fra tidligere i dette kapitel at

$$\mathbf{P} \models a \Leftrightarrow \mathbf{P}^+ \models a$$

I afsnittet om generelle heyting algebra'er så vi (i dette tilfælde er $\mathscr{T} = \mathbf{Set^P}$)

$$\mathbf{Set^P} \models a \Leftrightarrow \mathbf{Set^P}(1, \Omega) \models a \Leftrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathbf{Set^P}}(1) \models a$$

Det er disse to forbindelser vi skal have kædet sammen, og vi laver sammenkædningen mellem $\mathbf{Set^P}$ og $\mathbf{P}$. Først kigger vi på $\mathbf{Set^P} \models a \Rightarrow \mathbf{P} \models a$. Fremgangsmåden vil minde lidt om strategien ved $\mathscr{T}$-fuldstændighedsbeviset for KL, hvor vi ud fra en klassisk sandhedstilskrivning V definerede en $\mathscr{T}$-sandhedstilskrivning V'. Vi tager en model $\mathbb{M}(\mathbf{P}, V)$ med $V : \Phi_0 \to \mathbf{P}^+$. Så definerer vi en $\mathbf{Set^P}$-sandhedstilskrivning $V' : \Phi_0 \to \mathbf{Set^P}(1, \Omega)$, som til hvert symbol $\pi \in \Phi_0$ tilskriver en sandhedsmorfi $1 \overset{V'(\pi)}{\to} \Omega$ der til hvert komponent har $V'(\pi)_p = V(\pi) \cap [p) = V(\pi)_p \in [p)^+$, dvs. til hver $V(\pi)$ finder de objekter i $[p)$ hvor π er sand for den givne V. På den måde skæres et »hoved« af den arvelige mængde.
Vi har regler for hvordan vi kan udvide til Φ med en given model $\mathbb{M}$, og vi har at $\forall p \in P$ kan vi lave en mængde $\mathbb{M}(a)_p = \mathbb{M}(a) \cap [p)$ for $a \in \Phi$. På lignende måde kan det vises at for et $a \in \Phi$, har vi det p'e komponent af $1 \overset{V'(a)}{\to} \Omega$, dvs. $V'(a)_p : \{0\}_p \to [p)^+$, givet ved $V'(a)_p(0) = \mathbb{M}(a)_p(*)$, hvilket kan vises ved at udnytte fortolkningen af konnektiverne[Goldblatt, 1984, s.225]. På den måde har vi skabt en korrespondance mellem outputtet af V og V'_p. Så hvis vi har at $\mathbf{Set^P} \models a$ så er $V'(a) = \top$ og dermed $V'_p(a) = [p) = \mathbb{M}(a)_p$. Dette har vi for alle p så dermed må vi have$\mathbb{M}(a) = P$, og det må gælde for alle $\mathbb{M}$ da $\mathbf{Set^P} \models a$, og dermed har vi gyldighed ift. $\mathbf{P}$.

Den anden vej vises ved at lave et tilsvarende trick med at definere en type sandhedstilskrivning ud fra den anden. Denne gang tager vi udgangspunkt i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$'s V' og konstruerer en $\mathbf{P}$-sandhedstilskrivning V (begge med domæne Φ_0 til at starte med) ved følgende: $V'(\pi)$ tager for hvert $p \in P$ og tilskriver en mængde fra $[p)^+$. Foreningen af disse må så give $V(\pi)$ altså $V(\pi) = \cup\{V'(\pi)_q(0) : q \in P\}$. Det vil altså sige vi har to konstruktioner, hvor den ene definerer V ud fra V' og den anden definerer V' ud fra V. Det kan vises at disse to konstruktioner er hinandens inverse og at der dermed er en bijektion mellem $\mathbf{P}$-sandhedstilskrivningerne og $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$-sandhedstilskrivningerne. Så hvis $\mathbf{P} \models a$ så betyder det at $\mathbb{M}(a) = P$, og så ved vi at der jvf. vores to inverse definitioner gælder, at givet $p \in P$ så $\mathbb{M}(a)_p = \mathbb{M}(a) \cap [p) = [p) = \top_p(0)$ hvor $\top_p$ er det p'e komponent i den naturlige transformation $1 \xrightarrow{\top} \Omega$. Så har vi ud fra (*) at $V'(a)_p(0) = \top_p(0)$ hvilket gælder for alle p og derfor $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}} \models a$. På lignende vis kan vi argumentere for at man ud fra $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}} \models a$ kan få $\mathbf{P} \models a$. $\diamond$

En meget vigtig anvendelse af ovenstående sætning er lige netop at vise fuldstændigheden af en topos $\mathscr{T}$ mht. intuitionisk logik. Vi bruger $\mathbf{P}_{IL}$ som vi brugte i bevistrategien for sætning (4.1). Derfra havde vi jo $\vdash_{IL} a$ hviss $\mathbf{P}_{IL} \models a$, og nu har vi med gyldighedssætningen at dette jo medfører at $\vdash_{IL} a$ hviss $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}_{\mathbf{IL}} \models a$, så vi har altså at [Goldblatt, 1984, s.227]

Sætning 4.4 (Fuldstændighed for $\mathscr{T}$-gyldighed)
Hvis a er gyldig i enhver topos så $\vdash_{IL} a$

4.2.4 Refleksion over $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$

Nu har vi endelig fået kortlagt den udsagnslogiske struktur for en vilkårlig $\mathscr{T}$, hvilket var et af målene med dette projekt. Men hele teorien i kapitel 4 er interessant i sin egen ret. Dette er godt bevis på kategoriteoriens slagkraftige univers, der kan bidrage til noget ny matematik.
Da vi diskuterede »well-pointed« topoi, brugte vi også et eksempel med $\mathbf{Set}^{\mathbf{2}}$, til illustration af at nogle begreber afveg i en vilkårlig $\mathscr{T}$ ift. $\mathbf{Set}$. For det første er $\mathbf{Set}^{\mathbf{2}}$ et partikulært tilfælde af $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ og for det andet illustrerede eksemplet, at vi i kategoriteorien kan behandle $\mathbf{Set}$, som jo basalt set er hele mængdelæren, som et objekt der kan relaterer sig til andre objekter. $\mathbf{Set}^{\mathbf{2}}$ var det første eksempel på en kategori der overskred mængdelærens grænser, og i dette kapitel har vi gennemgået den generelle teori for disse kategorier. Dette er et konkret eksempel på en generalisering af mængdelæren, nærmere betegnet mængdelæren for 'varierende' mængder.

Helle denne teori giver mulighed for en helt ny underliggende dynamik i mængdelæren. Hvor vi i mængdelæren kan, ud fra en veldefineret egenskab ϕ, konstruere mængden $\{x : \phi(x)\}$ som værende alle de x hvor om $\phi(x)$ gælder. Nu har vi her fået generaliseret dette til $\phi_p = \{x : \phi(x)$hvor der til p at $\phi(x)\}$. Vi har altså at gøre med en intensionel mængdelære i modsætningen til den klassiske ekstensionelle[Goldblatt, 1984, s. 212]. Hvor vi har at gøre med funktorer der agerer objekter, og dermed besidder en langt højere grad af dynamik. Det interessante er at denne intuitive opfattelse af $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ også bliver interessant, når vi skal kigge på vores case med S.D.G.
En anden ting vi skal kigge på i forbindelse med $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ er opførslen af sandhedsmorfierne i denne kategori. Som eksemplet med $\cap$ viser, så er der en klar sammenhæng mellem den naturlige transformations komponenter og heyting algeraen på $\mathbf{P}$. Det interessante er at sandhedsmorfierne blev lavet ved en abstraktion af klassisk semantik, som blev formuleret i form af sandhedsmorfierne i $\mathbf{Set}$. Denne omfortolkning gjorde det muligt at generaliserere indenfor den kategoriteoretisk terminologi som, når det fortolkes i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, harmonerer med heyting algebraer og dermed med intuitionistisk logik. Så der er ingen tvivl om at »morfificeringen« har medført en mere generel struktur, og spørgsmålet er om der kan ses nogen sammenhæng mellem dette og hele det kategoriteoretiske program med vægt på morfier versus elementer. Dette skal vi tage op senere. Men lad os først kigge på vores konkrete case, som er grundlagt i kategoriteorien, nemlig syntetisk differentialgeometri.

5 Syntetisk Differential Geometri

I dette kapitel skal vi kigge på vores case, syntetisk differential geometri, da dette et eksempel på toposteorien i anvendelse. En anvendelse der fører til en reformulering af klassiske objekter i matematikken, som *ikke* er kompatible med samme objekter, konstrueret indenfor rammerne af ZFC. Hele korpuset af syntetisk differentialgeometri er enormt og ville kræve mere viden om kategoriteori og helt andre discipliner end vi har plads til i dette projekt[1]. Til gengæld kan vi uden problemer introducere de helt basale konstruktioner fra den basale I.G.A., da der her allerede er afvigelser fra klassisk analyse der har matematikfilosofisk interesse for os. Afslutningsvis vil vi kort kommentere på konstruktionen af de topoi der konstituerer $\mathcal{S}$, som igen kun vil være et snefnug af toppen af isbjerget[2], men stadig nok til at skabe en forbindelse med ovenstående teori, og forhåbentlig hjælpe med at afmystificere S.D.G.

5.1 Fundamentale egenskaber ved $\mathcal{S}$

Som nævnt er det den syntetiske anskuelse af geometrisk karaktér, hvor man f.eks. sondrer mellem en linje og mængden af punkter på denne[Kock, 2006, s. x]. Med denne bemærkning in mente kan vi starte ud, og lad os glemme den kategoriteoretiske baggrund for et øjeblik.

Det fundamentale objekt i $\mathcal{S}$ er først fremmest en geometrisk linje, lad os kalde den $\mathbf{R}$. Den naturlige pendant til $\mathbf{R}$ i klassisk analyse er selvfølgelig $\mathbb{R}$. I mange henseender besidder disse da også de samme egenskaber, men dog med nogle fundamentale forskelle. $\mathbf{R}$ besidder nemlig nogle infinitesimaler, der i forhold til $\mathbb{R}$ besidder nogle nogle mærkværdige egenskaber, men giver ny intutiv mening til det matematiske begreb 'glathed', hvilket formelt

1 Se Kock [2006] og Lavendhomme [1996] .
2 En detaljeret beskrivelse er i Reyes [1991].

beskrives ved et aksiom, som gælder i $\mathcal{S}$. Lad os først kigge formelt på aksiomet, og derfter diskutere betydningen. Lad $\mathbf{R}$ være en kommutativ unitær ring[3] og lad desuden $a \cdot a = b$ for $a \neq 0$ være defineret på $\mathbf{R}$. Det er ikke tilfældigt at vi ikke lader $\mathbf{R}$ være et legeme, hvilket bliver klart senere. Vi definerer vores mængde af infinitesimaler Δ på følgende vis:

$$\Delta := \{\delta \in \mathbf{R} : \delta^2 = 0\} \subseteq \mathbf{R} \tag{5.1}$$

Herefter postuleres følgende aksiom, som hævdes at gælde i $\mathcal{S}$:

Kock-Lawvere aksiom:

$$\forall f \in \mathbf{R}^{\Delta} \exists ! b \in \mathbf{R} \quad \text{gælder at:} \quad \forall \delta \in \Delta : f(\delta) = f(0) + \delta \cdot b \tag{5.2}$$

Dette aksiom postulerer at alle afbildninger fra Δ ind i $\mathbf{R}$ er rette linjer med entydig hældning b. Dette kaldes også for *»princippet om mikro-retlinethed«*[Bell, 1998, s.22], da aksiomet jo hævder at hvis vi ændrer infinitesimalt på $dom(f)$, kan den tilsvarende ændring i $codom(f)$ beskrives ved en ret linje. Anders Kock formulerer det på følgende måde:*»Δ is so small that one cannot distinguish the graph of a function from Δ to $\mathbf{R}$ from a segment of a straight line. But Δ is so big that its slope is uniquely determined«*[Lavendhomme, 1996, side 2]. Dette er klart et syntetisk element, da aksiomet jo intuitivt beskriver det forhold at en vilkårlig graf er sammensat af uendeligt mange små rette linjer. Bell formulerer det ved:*»...the microneighbourhood Δ can be subjected only to translations and rotations, i.e. behaves as if it were an infinitesimal 'rigid rod'.*«[Bell, 1998, s. 23]. Historien om infinitesimale er lang, og vi vil vende tilbage til dette tema i den filosofiske behandling af S.D.G.

Men lad os se nærmere på egenskaberne ved disse infinitesimaler, beskrevet ved (5.2). Den mest konkrete og radikalt anderledes forskel fra klassisk analyse og G.I.A., ses ved at den klassiske analyses klassiske logik sammen med ovenstående G.I.A. aksiom, (5.2), medfører at $\mathbf{R} = \{0\}$. Dette bevises let. Vi konstruerer først en funktion $g : \Delta \to \mathbf{R}$ defineret ved

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \neq 0, \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

3 En ring er defineret ved en mængde X, med to binære strukturer over, hvor den ene er en abelsk (dvs. kommutativ) gruppe, den anden en monoide. Derudover er monoiden distributiv mht. gruppen. At ringen er kommutative hentyder derfor til at monoiden er kommutativ. At den er unitær hentyder til at monoiden har en enhed e. I ovenstående tilfælde er gruppen addition og monoiden multiplikation.

Så ved vi fra (5.2) at der findes et entydigt $b \in \mathbf{R}$ så $\forall \delta \in \Delta : g(\delta) = \delta \cdot b$. Vi antager at der findes et $\delta \neq 0$, dette indsætter vi og får at $1 = \delta \cdot b$. Forlænges dette med δ har vi at $\delta = \delta^2 \cdot b = 0$ jvf. (5.1). Denne modstrid må jo betyde at $\Delta = \{0\}$. Så ramler korthuset da aksiomet jo hævder entydig eksistens af b, men $0 \cdot b = 0 \ \forall \ b \ \in \ \mathbf{R}$. Hvis den entydige eksistens, kombineret med $0 \cdot b = 0$ skal gælde, må der nødvendigvis gælde at $\mathbf{R} = \{0\}$. Dette må jo betyde at enten må vi droppe (5.2) eller også må vi droppe klassisk logik, og det kommer nok ikke som en overraskelse for læseren, at det er logikken vi modificerer. Det vil altså sige at i $\mathcal{S}$ gælder intuitionistisk logik. I intuitionistisk logik ved vi jo at det udelukkede tredjes princip $\neg a \vee a$ ikke gælder, og det ses hurtigt at ovenstående bevis gør brug af dette princip i definitionen af g, som er defineret for $(x = 0) \ \vee \ \neg(x = 0)$. Det vil altså sige at x *enten* er det ene *eller* det andet. Denne slutning er som sagt ikke gyldig i intuitionistisk logik, og definitionen af g er derfor ikke veldefineret i den logiske ramme hvori vi opererer. Så nu kan vi altså se at de reelle tal vi arbejder med her, udviser en noget anderledes adfærd end vi er vant til fra klassisk analyse.

Faktisk kan det vises at mængden Δ er en del af intervallet $[0, 0]$ og at dette interval er non-degenerate, dvs. det ikke falder sammen med $\{0\}$, hvilket ovenstående ikke-veldefinerede funktion var et bevis på. Det virker måske ikke umiddelbart klart, men det kan det måske blive, hvis vi går formelt til værks. Først, så lad os gøre nogle simple betragtninger. Hvis vi har $0 < \delta_1$ og $0 > \delta_2$, så kan vi forlænge disse to ligninger med δ_1 og δ_2 hhv., så får vi $0 < \delta_1^2 = 0$ og så fremdeles med δ_2, hvilket er selvmodsigende. Dette gælder for vilkårlige $\delta \in \Delta$, så vi kan konkludere at det for disse gælder at $\neg(\delta < 0 \vee \delta > 0)$. Det kan hurtigt ses at ved samme procedure med relationen $\leq$ er der ikke en selvmodsigelse og derfor gælder $\forall \delta \in \Delta : 0 \leq \delta$ og $0 \geq \delta$. Ud fra dette kan man jo så konkludere at Δ må være indeholdt i $[0, 0]$, men altså ikke degenerate. Vi kan også antage at $\{0\} = \Delta$ og definere en funktion $g : \Delta \to R$ ved $g(\delta) = \delta$ og vha. (5.2) se at $g(\delta) = g(0) + b \cdot \delta$ som jo derfor ville gælde for $b = 0 \wedge 1$, hvilket modsiger aksiomet, og vi har en modstrid. Det vil altså sige at vores infinitesimaler har en meget flygtig natur hvor de ikke kan skelnes fra 0.

Dette ses også let ved at kigge på definitionen af Δ, som jo under normale omstændigheder ville være $\{0\}$, men som jo jvf. den entydige eksistens postuleret i (5.2) ikke kan være lig 0. Dette medfører også at $\mathbf{R}$ ikke opfylder definitionen på et legeme, og i stedet opfylder de mindre restriktive krav på en kommutativ unitær ring, da legemedefinitionen ville kræve at $\Delta = 0$[Kock, 2006, s. 2]. Vi ved altså at disse elementer findes, men vi kan ikke 'se' dem i den forstand at de er indeholdt i $[0,0]$, og derfra kan vi slutte at $\neg(\exists\delta \in \Delta : \delta \neq 0)$, da det modsatte ville betyde at δ ville være til at skelne fra 0, hvilket vi lige har set ikke er muligt. Konsekvensen må dermed være at det er falsk at $\forall\delta \in \Delta : \delta = 0 \vee \delta \neq 0$. Dette giver infinitesimalerne en ejendommelig potentiel eksistens hvor vi ikke kan udtale os endegyldigt om disse tal, altså »hive et konkret δ ud af Δ« og dernæst konkludere at dette tal er forskelligt fra 0, og på den anden side kan vi konstatere at intervallet $[0,0]$, er non-degenerate[4].

Som en afsluttende bemærkning skal det siges at man kan konkludere fra $\delta a = \delta b \ \forall\delta \in \Delta$ til at $a = b$ (Mikroannuleringsprincippet), hvilket er et vigtigt princip i bevisførelse i $\mathcal{S}$.

Hvis vi vender tilbage til fortolkningen af (5.2) kan vi se at hvis vi kigger på et tilstrækkeligt lille interval (Δ), så har vi at grafen for en vilkårlig funktion f er identisk med den dertilhørende førstegrads approksimation. Dette er selvfølgelig kun gældende i en potentiel forstand, givet ovenstående beskrivelse af infinitesimalernes natur, og da infinitesimalerne indgår i beskrivelsen af ovenstående førstegradsapproksimation. Men mon ikke vi kan bruge denne egenskab ved funktionerne i $\mathcal{S}$ over $\mathbf{R}$? Det viser sig faktisk at dette kan anvendes i beviser i analysen, som ellers skulle klares ved brug af grænseværdier. Et eksempel ville her være på sin plads. Kigger vi på det b der indgår i (5.2) og med ovenstående tolkning en mente, kan vi passende definere b til at være $f'(0)$ og kalde denne for den afledede af f i 0. Det kan derefter let vises at aksiomet kan generaliseres til hele $\mathbf{R}$, og på denne måde bliver (5.2) udvidet til

Den fundamentale ligning for differentialanalysen i $\mathcal{S}$

$$\forall f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ gælder at } \ \forall\delta \in \Delta : f(x+\delta) = f(x) + \delta \cdot f'(x) \quad x \in \mathbf{R} \tag{5.3}$$

Dette gælder for alle f i $\mathcal{S}$, og da ovenstående let kan itereres til at give dobbelt afleddet osv., kan man konkludere at alle funktioner er $\mathcal{C}^\infty$ i $\mathcal{S}$, som vi startede med at postulere i indledningen. Dette resultat er vigtigt i analysen da det sammen med mikroannuleringsprincippet gør det muligt at bevise de gammelkendte formler fra analysen. Det interesssante er, at man ved denne metode frembringer resultater, som ellers ville være bevist ved hjælp af begreber om konvergens og grænseværdier af differenskvotienter. I klassisk analyse benytter vi os af konvergens til at beskrive kontinuitet og

4 Det kan iøvrigt vises at en konsekvens af dette er at $[\delta + a, b + \delta] = [a, b]$, hvilke betyder at $A = [a, b]$ er mikrostabil.

konvergens af differenskvotienter til at vise at funktioner er differentiable (i.e. at differenskvotienten i grænsen er en differentialkvotient). Men vi har jo lige set at alle funktioner i $\mathcal{S}$ er $\mathcal{C}^\infty$, så alle disse kunstgreb er overflødige. Derimod er vi jo stadig nødt til at vise hvordan regnereglerne for differentiation ser ud, da de jo ikke er indlejret i det faktum at de er $\mathcal{C}^\infty$. Vi skal selvfølgelig ikke gennemgå dem alle her, men blot vise en enkelt formel.

Sætning 5.1 (Leibniz' Regel i $\mathcal{S}$)
For to vilkårlige funktioner $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ har vi følgende:
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Bevis
Per definition har vi at

$$(f \cdot g)(x + \delta) = (f \cdot g)(x) + \delta(f \cdot g)'(x) \tag{5.4}$$

På den anden side kan vi også opskrive det som

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x + \delta) &= f(x + \delta) \cdot g(x + \delta) \\ &= (f(x) + \delta \cdot f'(x)) \cdot (g(x) + \delta \cdot g'(x)) \\ &= (f \cdot g)(x) + \delta \cdot f'(x) \cdot g(x) \\ &\quad + \delta \cdot f(x) \cdot g'(x) + \delta^2 \cdot f'(x) \cdot g'(x)\end{aligned} \tag{5.5}$$

Det sidste led går ud da $\delta^2 = 0$, og kombinerer vi (5.4) og (5.5) får vi

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) + \delta(f \cdot g)'(x) &= (f \cdot g)(x) + \delta \cdot f'(x) \cdot g(x) + \delta \cdot f(x) \cdot g'(x) \\ \delta(f \cdot g)'(x) &= \delta \cdot \Big(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\Big)\end{aligned}$$

Ved hjælp af annuleringsprincippet har vi vist det ønskede. □

Dette er et eklatant eksempel på en fundamental anderledes tilgang til begrebet differentiabilitet, hvilket selvfølgelig går tilbage til konstruktionen af $\mathbf{R}$ i $\mathcal{S}$. Vi har helt undgået at opskrive differenskvotient og tage den efterfølgende grænseværdi, hvilket umiddelbart virker mere omstændigt i forhold til ovenstående bevis. Derudover har vi altså at gøre med en matematisk ramme hvori alle funktioner er kontinuerte og differentiable, hvilket kan være mest behageligt at arbejde i for f.eks. fysikere, da en stor mængde af patologiske funktioner forsvinder.

Selvom vi kun har berørt differentialregningen og »de reelle tal« indenfor $\mathcal{S}$, kan vi allerede se hvordan disse discipliner opfører sig væsentligt anderledes. Det ses tydeligt hvordan vi har en geometrisk intuition som her er blevet aksiomatiseret til moderne matematik. Men fra ovenstående er det umuligt at se sammenhængen mellem kategoiterien ovenfor, og $\mathcal{S}$. Dette skal vi kort komme ind på nu.

5.2 Topoi som fundament for $\mathcal{S}$

Hvordan man helt formelt konstruerer matematiske universer $\mathcal{S}$, dvs. topoi hvori de basale ting som vi lige har gennemgået gør sig gældende, er en kompliceret affære som vi ikke har tid til at gennemgå her. Til gengæld kan vi allerede komme med en kort opsumering af en sådan konstruktion, som vil være mulig at forstå med den teoretiske balast vi allerede har opnået her i projektet. Det vil bidrage til at kaste lys over den konkrete forbindelse mellem toposteorien, og $\mathcal{S}$. En forbindelse vi hidtil ikke har set på.

Vi tager udgangspunkt i kategorien **Man** som er har som objekter differentiable mangfoldigheder og morfierne er $\mathcal{C}^\infty$ afbildninger mellem disse. Dette giver udmiddelbart god mening da vi jo arbejder med mangfoldiger i S.D.G. og denne kategori har kun de glatte afbidlninger, hvilket passer til karakteriseringen af $\mathcal{S}$ som 'smooth world'. Men i **Man** har vi ikke noget Δ. Men vi kan karakterisere Δ implicit ved ringen $\mathbb{R}^\Delta$ af funktioner fra Δ til $\mathbb{R}$ ved følgende betragtning[Bell, 1998, s. 112]: Det kan vises at $\mathbb{R}^\Delta \cong \mathbb{R}^*$ i **Set**, hvor $\mathbb{R}^*$ er en ring defineret ved $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \odot, \oplus)$ hvor $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ og $(a, b) \odot (c, d) = (ac, bc + ad)$. Vi kan for et element (a, b) i $\mathbb{R}^*$ definere en funktion $\phi_{ab} : \Delta \to \mathbb{R}$ ved $\phi_{ab} = a + \delta b$. Det er oplagt at dette giver en bijektion mellem disse to. Men faktisk kan det også vises at $\mathbb{R}^\Delta \cong \mathbb{R}^*$ i **Ring**, dvs. fastlæggelsen af ϕ til et givet $(a, b) \in \mathbb{R}^*$, også bevarer ringstruktur, dvs. er en ringisomorfi. Dette giver anledning til at konstruere en funktor F der knytter til en given mangfoldighed M knytter et objekt $F(M)$ der er funktionsringen givet ved $\mathbb{R}^M$ og derudover knyttes et passende mikroobjekt efter samme opskrift som med $\mathbb{R}^*$[Bell, 1998, s. 114], dvs. som skal agere Δ. Når vi har $f : M \to N$ så vil F knytte en ringhomomorfi $F(f) : F(N) \to F(M)$ ved $\forall g \in \mathbb{R}^N$ at sammensætte med f så $g \circ f : M \to \mathbb{R}$, dvs. $g \circ f \in F(M)$. Så vi har at F er en kontravariant funktor. Faktisk skal vi ikke bruge hele **Ring**, men kun en delkategori der indeholder ringe af formen $\mathbb{R}^M$ og funktionsringe der skal bruges til at agere mikroobjekt. Lad os kalde denne kategori A, så har vi altså at $F : \mathbf{Man} \to A^{op}$. Dette er dog ikke en topos, så vi må indlejre A^{op} i en der er. Den mest oplagte, taget vores viden i betragtning, ville være en kategori af formen $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$! Der er en speciel funktor, kaldet en »yoneda indlejring«[5] så vi får $Y : A^{op} \to Set^{A}$. Dette ved vi er en topos fra ovenstående teori, men der er stadig visse problemer. F.eks. så har vi et problemer med overdækninger, på f.eks. $\mathbb{R}$, dvs. udsagnet $\forall x \in \mathbf{R} : (x \in]-\infty, 1[\vee x \in]0, \infty[)$ er falskt[Bell, 1998, s. 114]. Løsningen på dette problem er uden for rammerne af dette projekt, men pointen er at det er muligt at lave en delkategori af Set^{A} hvori ovenstående udsagn er sandt. Eftersom problemer relaterer sig til åbne overdækninger, er løsningsstrategien at lave en generalisering af klassisk topologi, en såkaldt Grothendieck topologi hvori egenskaber ved åbne overdækninger er bevaret. Dette indebærer altså at man må lave restriktioner på objekterne i $\mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$. Det kan vises det er muligt at konstruere en sådan funktor $G : \mathbf{Set}^{\mathbf{A}} \to \mathbf{E}$ og den resulterende delkategori $\mathbf{E}$ af $\mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$ er en topos der udgør grundlaget for $\mathcal{S}$[6].

Afslutningsvis kan vi gøre os et par betragtninger om forholdet mellem konstruktionen af E og udsagn i $\mathcal{S}$. Vi har altså en funktorrække der til sammen udgør $\mathbf{E}$, altså $\mathbf{Man} \xrightarrow{F} A^{op} \xrightarrow{Y} \mathbf{Set}^{\mathbf{A}} \xrightarrow{G} \mathbf{E}$, der tilsammen udgør $S : \mathbf{Man} \to E$. Vi kan på den måde oversætte følgende $\mathbf{Man}$ til $\mathbf{E}$

1. $s(\mathbb{R})$ = geometriske tallinje $\mathbf{R}$ fra $\mathcal{S}$

2. $s(\mathbb{R} - \{0\})$ = mængden af invertible elementer af $\mathcal{S}$

3. $s(f') = s(f)'$ for alle $\mathcal{C}^{\infty}$ afbildninger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Her har vi nogle eksempler på betydningen af visse objekter/operationer i $\mathbf{Man}$ og hvad de betyder i $\mathcal{S}$. Derudover kan vi f.eks. kigge på et af de egendommelige egenskaber vi så på i starten af kapitlet, nemlig at $x = 0 \vee x \neq 0$. Vi kan nu give dette en nærmere forklaring[Bell, 1998, s. 115]. For et givet udsagn i $\mathbf{E}$, hvis det kvantificerer over $\mathbf{R}$, skal være opfyldt så svarer det til at det $\mathbf{Man}$ skal væreopfyldt $\forall x \in \mathbb{R}$ *også* skal være lokalt sandt for for alle (glatte) funktioner med codomæne $\mathbb{R}$. Så hvis $\forall x \in \mathbf{R}(x = 0 \vee x \neq 0)$ skal være sandt i $\mathcal{S}$ så skal det også gælde lokalt for alle $f : cod(f) = \mathbb{R}$ men vi ved jo at vi kan have at $f(a) = 0$ i punkt uden

5 En yoneda indlejning er defineret ved at $Y : C \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$, hvor C er en lille kategori. Hvis c er i C så er $Y(c)$ en funktor F i $\mathbf{Set}^{\mathbf{Cop}}$ der for et objekt x i C tilskriver $\hom(x, c)$, det vil altså sige at $Y(c) = \hom(-, c)$ og en morfi $f : a \to b$ til den naturlige transformation $\hom(-, f)$.

6 Reelt set kan der skabes flere forskellige topoi der kan agerere modeller for $\mathcal{S}$.

at være konstant 0 i en omegn U om a og derfor er $\neg(f(U) = 0 \vee f(U) \neq 0)$. Derfor er $\forall x \in \mathbf{R}(x = 0 \vee x \neq 0)$ altså falskt i $\mathcal{S}$.

Nu har vi kort kigget på vores case, de basale egenskaber for S.D.G. og hvordan denne matematik er grundlagt ud fra kategoriteoriske konstruktioner - et grundlag der *ikke* er muligt indenfor rammerne af ZF(C). Vi skal nu til at komme med en gennemgående diskussion af hvad vi har kigget på af matematik igennem rapporten.

6 Diskussion

Lad os først opsummere hvad vi har gennemgået i dette projekt. Vi har kortlagt den udsagnslogiske struktur i den generelle toposteori, og vi har kigget på en samling topoi af formen $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$, som vi kunne konkludere følgende interessante ting om. En partikulær type $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, er på oplagt vis generaliseringer af **Set**. Kategorier af typen $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ benytter sig af intuitionistisk logik og vi fandt en oplagt intuitiv måde at anskue disse kategorier på, ved hjælp af kripkes semantik. Sidst men ikke mindst fandt vi ud af, at vi ved en partikulær topos af formen $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$ kunne finde en delkategori af denne, og på den måde skabe topoi der kan udgøre grundlaget for S.D.G. Sidst men ikke mindst har vi kort kigget på S.D.G., indenfor S.D.G.'s egne rammer, og set hvordan denne udfordrer vores forståelse af klassiske objekter i matematikken.

6.1 $\mathcal{S}$ og intuitonisme

Lad os først kigge på S.D.G., hvor der efter en kort beskrivelse af nogle basale konstruktioner allerede melder sig et spørgsmål. Hvad er de reelle tal? Der er ingen tvivl om at den konstruktion vi har set, udfordrer den klassiske måde at konstruere de reelle tal på[1]. Det virker ikke som om vi kun har at gøre med to forskellige konstruktioner, men også to forskellige anskuelser af hvad de reelle tal er. Som vi har set, så har infinitesimaler været benyttet flere gange i matematikkens historie, og flere gange har det rent faktisk ført til resultater, som man nu har givet en mere rigid beskrivelse. Et oplagt eksempel som Anders Kock bruger i diskussionen af S.D.G., refererer til sofisten Protagoras[Kock, 2003, s. hmm], der benyttede et billede af en cirkel med en dertilhørende tangent[2]. Protagoras, hvis formål var at tilbagevise Euklid, sagde at man jo på tegningen tydeligt kunne se at

1 Her tænkes på Dedekind snit eller vha. Cauchy følger.

2 Man kan forestille sig enhedscirklen med centrum i $(0, 1)$ og tangenten som x-aksen.

der var mere end et punkt til fælles mellem tangent og cirkel, til trods for at der ifl. Pythagoras' sætning skulle gælde at $x^2 = 0$. Til trods for Protagoras' hensigter, illustrerer det en pointe der på sin vis gør sig gældende i dag. Hvis vi har en graf der beskriver et empirisk fænomen, så vil vi, hvis vi tegner en tangent til et punkt på grafen, kunne se et linjestykke med det blotte øje som er fælles med grafen. Kunne det ikke være et intuitivt argument for at der eksisterer nilpotente elementer i de reelle tal?[3] I historien har infinitesimaler generelt været benyttet[4], og kan man ikke hævde at de er intuitivt berettiget i menneskelig praksis? I naturvidenskaberne kan vi kun approksimere vores iagtagelser og dermed arbejder vi i praksis med et kontinuum med nilpotente elementer.

Umiddelbart virker det som om at vi intuitivt kan berettige en sådan konstruktion af reelle tal. Anders Kock vil i Kock [2003] også argumentere for dette standpunkt, og går derefter videre til at bestride den dedekindske konstruktion, hvilket han kalder »aritmiseringen af kontinuummet«, som værende den endegyldige konstruktion af de reelle tal. Han skriver

> The synthetic calculus and synthetic differential geometry is a theory which has interpretations in topos theory, and it reflects aspects of the real world: namely the reasoning and the concepts used over at least three centuries - with or without the aritmetization of the continuum. This old reasoning is the essence of the exisstence of the d's of square zero.[Kock, 2003, s. 229]

Dette er altså muligt indenfor kategoriteorien som vi har set, og for Anders Kock betyder dette at det monopol som den klassiske konstruktion har haft på de reelle tal og ydermere det monopol som ZF har haft som model for matematikken, må opgives[Kock, 2003, s. 230]. Dette monopolbrud er muligt, fordi vi indenfor kategoriteorien i langt større grad har mulighed for at lave et univers, en topos, hvorfra det er muligt at bedrive matematik. Når vi f.eks. har en topos som fundament for $\mathcal{S}$, så er det altså kun glatte afbildninger der eksisterer, og som Kock skriver: »...hence by the nature of smoothness, the law of excluded middle has no role.«. Hvilket fører os over til et helt andet aspekt af både S.D.G. og kategoriteori, som vi skal kigge på nu - intuitionistisk logik.

Hvis vi kigger på den intuitionistiske logiks oprindelse, så er denne helt og

3 Kock refererer også til en dansk geomet Hjelmslev der benyttede sig af samme argument til at lave de reelle tal som en ringstruktur med nilpotente elementer i.

4 Det var f.eks. vha. infinitesimaler at Leibniz udviklede sin calculus, hvilket der stadig er spor af i nutidens notation $\frac{df(t)}{dt}$.

aldeles uafhængig af kategoriteorien, eller er den? Det virker umiddelbart som et tilfælde, at toposteoriens underlæggende logiske struktur er intuitionistisk, men ved nærmere eftersyn er der måske et par historiske linjer at trække alligevel.

Den intutionistiske logik var en formalisering af nogle tanker som først og fremmest L.E.J. Brouwer (1881 - 1966) gjorde sig, og hvor Hermann Weyl (1885 - 1955) til dels tilsluttede sig efterfølgende. Sidstnævnte skrev en famøs artikel i 1921 hvor der blev slået på tromme for en ny forståelse af grundlaget i matematikken og kontinuummet i særdeleshed[Mancosu, 1998, s. 86]. Målet var at redegøre for nogle fundamentale problemer ved matematikkens grundlag, dvs. mængdelæren, hvilket senere viste sig at medføre en meget restriktiv matematisk praksis. Det interessante for vores synspunkt er hvilke matematikfilosofiske overvejelser der blev gjort i artiklen vedrørende de reelle tal og de udelukkedes tredje princip (UTP). For Weyl var den dedekindske konstruktion en konstruktion der hvilede på en *atomistisk* forståelse af de reelle tal. Det vil altså sige et fikst og færdigt kontinuum hvor alle elementerne eksisterede »som perler på en snor«. Dette havde Weyl en del kritikpunkter af, bl.a. imprædikative definitioner over uendelige mængder. I stedet opfattede han kontinuummet som noget kontinuert og underliggende foranderligt, i konstant udvikling, og dette brugte han til at argumentere for at UTP ikke var brugbar. For hvordan skal man udsige om et givent reelt tal er enten det ene eller det andet, hvis det er et tal i en endnu ikke afsluttet udvikling? Disse to opfattelser af kontinuummet som en afsluttet mængde med færdige elementer versus et kontinuum i konstant forandring, var efter Weyls opfattelse udtryk for et generelt skel i vestlig tænkning. Pointen er, at den dedekindske atomistiske konstruktion forudsætter en opfattelse af at matematiske objekter er fiks og færdige når først de er konstruerede, til trods for vi kan have at gøre med overtællelige mængder. Vi har altså at konstruktionen implicit forudsætter en *platonisme*, og med denne platonisme følger de klassiske logiske love.
Weyl snakker om potentielle elementer i kontinuummet, jvf. foranderligheden, og dette aspekt af kontinuummet går igen i den gennemgang vi har haft af de reelle tal i $\mathcal{S}$. Det vil altså sige at både Weyls intuitive opfattelse af kontinuummet og den intuitive opfattelse vi har kortlagt i $\mathcal{S}$, til trods for vidt forskellig motivation og historisk kontekst, begge besidder en matematisk anti-atomisme og anti-platonisme, foruden en afvisning af UTP. Derudover så førte bl.a. Weyls overvejelser til konstruktionen af intuitionistisk logik, og det har så efterfølgende vist sig at denne logik lige præcis er den logik der gør sig gældende i $\mathcal{S}$ og topoi generelt. Dvs. udover

det intuitive aspekt ved infinitesimaler, som man historisk har benyttet sig af siden antikken, er der *også* en sammenhæng mellem de filosofiske overvejelser vedr. de reelle tals beskaffenhed, der i sidste ende førte til intuitionistisk logik, og de reelles tals beskaffenhed i $\mathcal{S}$.
I det lys virker S.D.G. bl.a. som en raffinering af Weyls tanker vedr. $\mathbb{R}$, som akkompagneret af en aksiomatisering af infinitesimaler i $\mathcal{S}$, er gjort mulig i kategoriteoriens begrebslige ramme. På den måde er S.D.G. et meget konkret eksempel på kategoriteorien som redskab til at beskrive gammelkendte matematiske entiteter på stringent vis, og som udfordrer den klassiske forståelse af kendte objekter i matematikken. Den fundamentale og meget vigtige forskel på Weyls anti-atomisme og den anti-atomisme som f.eks. Kock plæderer for, er, at der for Weyl var tale om et opgør med matematikkens *nuværende* grundlag, mens der med Kocks synspunkt er tale om et opgør med *monopolet* på matematikkens grundlag. Det vil altså sige at der i det sidste tilfælde er en sameksistens med de klassiske reelle tal. Dette skal vi vende tilbage til, men i ovenstående har vi primært kigget på S.D.G. ift. klassiske resultater. Hvad med forholdet mellem kategoriteorien og mængdelæren som helhed? Det skal vi kigge på nu.

6.2 Kategorteori som alternativ til mængdelæren

Med ovenstående diskussion af atomisme i matematikken er det nærliggende at se på, ikke bare det konkrete eksempel med S.D.G., men også den teoretiske ramme som det er formuleret indenfor. Vi har jo igennem projektet set hvordan alle de gammelkendte begreber er blevet generaliseret til udelukkende at omhandle morfier som relaterer objekter, og ikke konstruktionen af mængder med deres respektive elementer. Det er oplagt at denne kategoriteoretiske fremgangsmåde med at »generalisere sig fra elementrelationen« er årsagen til at et objekt som $\mathbf{R}$ er muligt at konstruere. Kock bemærker også i starten af sin bog om S.D.G. at »The category theoretic viewpoint prevents the identification of A and B with point sets (and hence also prevents the formation of 'random' maps from A to B).«[Kock, 2006, s.x] hvilket stemmer godt overens med ovenstående sammenkædning. Det vil sige at kategoriteorien udgør en teoretisk ramme som har frigjort sig fra den atomisme som mængdelæren er en del af, hvor produkter, funktioner, pullbacks osv. beskrives ved ordnede elementer af mængder. Det interessante er så at denne atomisme er indeholdt i kategoriteoriens eget univers, som et partikulært tilfælde, nemlig **Set**. Det er også med intuitionen forankret i **Set** at det har været muligt at definere en masse forskellige kategoriteoretiske konstruktioner. Forskellen er som sagt bare, at de er strippet fra substans og dermed bliver de anvendelige i konstruktioner der overskrider mængdelærens eget univers, der især er begrænset af et atomisme-paradigme[5]. Tænker vi f.eks. på et topologisk rum, så kunne vi godt se på hvilken måde en Heyting algebra kunne bruges som eksempel til at illustere forskellen på pseudo-komplement og komplement, men med mængdelære-brillerne på, kunne vi jo antage at vi kiggede på f.eks. $\mathbb{R}$, og så »ved vi jo godt« at det er randen der mangler. Dette sidste postulat ville slet ikke give mening i kategoriteorien, for der er den »mængdelære metafysik« slet ikke tilgængelig for os, den er ikke del af den struktur vi kender ved et topologisk rum.Dvs. hvis vi er indenfor **Set**'s univers eller indenfor $\mathcal{S}$'s univers, så gælder der visse underliggende antagelser, og i det første tilfælde er det altså mængdelærens og i det sidste tilfælde bl.a. en forståelse af infinitesimaler karakteriseret ved $\delta^2 = 0$. Men ser vi på disse strukturer med kategoriteoretiske øjne, så er det kun strukturen uanset substansen der er interessant. Forholdet mellem struktur og substans er også noget der sætter kategoriteorien i et spændningsforhold til mængdelæren. Tidligere så vi at Kock plæderede for at vi må forlade tanken om at ZF er grundlaget for matematikken, og dette vil vi tage fat i nu.

Først og fremmest kan man diskutere i hvilken grad kategoriteorien kan gøre krav på at være 'generel' eller 'grundlagsgivende' for matematikken. Men der er ingen tvivl om at mængdelæren ikke gør ultimativt krav på at være det 'universielle sprog' som alt matematik til syvende og sidste falder tilbage på. En af pointerne, som gentagne gange er blevet eksemplificeret i dette projekt, er at den klassiske elementrelation »$\in$«, har mistet sin primære rolle i beskrivelsen af matematiske fænomener. Det vil sige at fokus er blevet flyttet fra elementrelationen, hvor mængdeuniverset skabes ud fra den tomme mængde som itereres vilkårligt[6], til i stedet at studere hvordan en samling objekter med en given egenskab i så fald relaterer sig til andre objekter indenfor en given kategori. Det sidste har vi studeret indgående i dette projekt, hvor vi har taget udgangspunkt i mængdelæren, og kigget på egenskaber ved produkt, delobjekter, initial objekter m.m.

5 Der en klar lighed mellem Awodeys »'foundationalist' preconception« og atomisme-paradigmet.

6 Når først man har skabt mængder ud fra den tomme mængde, kan der dernæst manipuleres yderligere med dem vha. mængdeoperationer som der via den boolske algebra er givet et præcist udtryk for.

Alle disse definitioner og den dertilhørende generalisering til universelle egenskaber, bygger på forholdet mellem objekter via morfier som vi har set. Derudover har vi også kigget på begrebet »funktor«, der kan bruges til at sammenligne og overføre struktur fra en kategori til en anden. Derudover har vi også set hvordan funktorer selv kan blive objekter i en kategori, og vi har set, at det kan være et stærkt redskab til at generalisere mængdelæren. Men alt dette har fået en klar implikation, fordi definitionerne giver et strukturelt syn på de matematiske objekter, hvor vi ikke interesserer os for eventuelle elementers oprindelse, men kun strukturen. Konsekvensen er derfor at en samling objekters struktur, for eksempel produktet af to objekter er, som vi har set, givet til og med isomorfi. Det vil altså sige, at hvad det *egentlig* er, der er konstrueret et produkt af, er underordnet[7]. Om det er et produkt indenfor kategorier af topologiske rum, grupper, mængder eller andet spiller ingen rolle for den matematiske struktur som disse objekter har til fælles ift. den givne kategori vi kigger på, hvilket vi har diskuteret i kapitel 2.2.1.

Dette kan opfattes positivt, som f.eks. Steve Awodey[8] gør, og han begrunder dette på følgende vis:

> *The definition* [of a product] *above provides a uniform, structural characterization of a product of two objects in terms of their relations to other objects and morphisms in a category, in contrast to 'material' set-theoretic definitions which depend on specific and often irrelevant features of the objects involved, introducing unwanted additional structure. Indeed it is just this material aspect of conventional set theory that gives rise to such pseudo-problems as whether the number 1 is 'really' the set* $\{\emptyset\}$*, or whether the real numbers are 'really' cuts in the rationals.*[Awodey, 1996, s. 220]

Awodey synes altså det er en fordel, at man i definitionen af f.eks. et produkt undlader den underliggende (mængdeteoretiske) struktur, der i mængdelæren må siges at være bestemt af den tomme mængde, som jo er denne mængde alle andre mængder skabes ud fra. Dette bliver altså til argument for at mængdelærens gamle status som et fikseret univers af mængder, kon-

7 I **Set** er det jo f.eks. muligt at have to produkter af samme to mængder, som i den kategoriteoretiske terminologi ikke kan skelnes fra hinanden, men som man indenfor mængdelærens eget sprog er forskellige, omend bijektive.

8 Awodey var PhD-studerende under Saunders Mac Lane, og har et positivt syn på kategoriernes rolle i hh. til grundlaget, omend ikke en kategoriske erstatning af mængdelæren.

strueret ud fra eksistensen af $\emptyset$, ikke nødvendigvis rammer matematikkens kerne, i modsætning til kategoriteoriens terminologi med dennes fikseren på struktur fremfor konstruktion. »*The subject matter of pure mathematics is invariant form, not a universe of mathematical objects consisting of logical atoms.*«[Awodey, 1996, s. 235]. Der ligger her også en kritik af, at der med mængdelæren uvægerligt følger en atomisme med, som ikke nødvendigvis er essentiel for at bedrive matematik[9]. Det interessante er også, at denne fokus på struktur automatisk også gør hele grundlagsdiskussionen til en overflødig tanke. Med mængdelærens fastlagte univers af mængder kan man så og sige lave en absolut (klassisk) baggrundslogik, og denne forsvinder i kategoriernes verden. Her studerer man lokale logiske strukturer, som man kan relatere til hverandre (vha. funktorer), konstruere nye ud fra osv. Det bliver en stræben efter at klassificere strukturer, og sammenligne dem med lignende strukturer, omend strukturerne kan være rodfæstet i vidt forskellige matematiske discipliner. Dette har vi blandt andet set eksempler på, hvor et helt basalt et kunne være i tilfældet med moniske/episke pile. Kategorier hvor moniske/episke morfiers struktur gør sig gældende, kan være en simpel (lille) kategori som $\mathbf{N}$, eller den omfattende (store) kategori som $\mathbf{Set}$. Et andet eksempel kunne være sandhedsmorfier og mængdelæreoperationer, som er formuleret med intuition fra mængdelæren, men hvis kategoriske formulering har et meget mere generelt udtryk, eksemplificeret gennem $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$. Dette kan så bidrage til en skabelse af ny matematik, hvor et eksempel herpå er S.D.G.

Men det er samtidig denne fokus på struktur, der giver anledning til kritiske røster. For selvom ingen vil betvivle kategoriteoriens evne til at beskrive strukturer, så er problemet lige netop at det ikke relaterer til et indhold. Der er ingen aksiomer der hævder eksistens, som bla. Hellman pointerer:»*...category theory - at least, as presented in axioms - is 'formal' or 'schematic': unlike the axioms of set theory, its axioms are not assertory.*«[Hellman, 2003, s. 135]. Det vil altså sige vi får et forklaringsproblem mht. hvorfra kategorier og topoi »kommer fra«, når ingen af aksiomerne hævder en eller anden form for matematisk eksistens. Mængdelæren er her i kontrast, da dette garanterer eksistensen af mængde og dernæst aksiomer til at skabe et hierarki af mængder og dermed et globalt bagvedliggende univers. Konklusionen bliver at aksiomerne får mere karakter af at være definitoriske, dvs. hvis der findes dette eller hin samling objekter Σ som er i relation

9 Det er interessant at bemærke hans ordvalg med »logical atoms«, eftersom han ikke eksplicit snakker om atomisme.

Φ til hinanden, så findes der Ξ egenskaber. Men hvor kommer Σ så fra? Hvordan er disse objekter konstrueret? Dette giver kategoriteorien intet svar på. Helt fundamentalt kan vi tage definitionen af en topos, som jo bare skitserer en kategori med nogle bestemte egenskaber. Går vi endnu længere tilbage, til kategoriernes egne aksiomer, så hævder disse kun at en samling objekter plus morfier, der opfylder meget simple egenskaber, er en kategori. Den klare fortsættelse til denne indvending må være, at hvis der ikke er nogen »substans«, men ren struktur, hvor skal der så komme noget substans fra? Svaret er mængdelæren. Det er mængdelæren der konstruerer de konkrete matematiske objekter, som kategoriteorien derefter kan klassificere, sammenligne, lave ny struktur ud fra osv. Dermed mister kategoriteorien sin autonomi, da den er substansløs uden objekter fra mængdelæren, og kan den så gøre krav på nogen form for grundlag ift. matematikken?

Hellmans kritik er en konsekvens af en langt mere konkret kritik fra Solomon FefermanFeferman [1977]. Feferman mener at for overhoved at kunne tale om struktur i matematisk forstand, så ligger der nogle underliggende begreber under overfladen, som skal behandles stringent. Disse begreber kalder han for »samling«(collection) og »operation«, og det er disse der er universelle for hele matematikken. Samling er et underliggende begreb, uanset om vi snakker ringe, grupper, mængder eller objekter i en kategori, og det samme gælder idéen om operation hvor funktorer mellem kategorier, funktioner mellem mængder osv. implicit benytter sig af et dette begreb. Pointen er at mængdelæren giver disse begreber en stringent behandling[10]. Både hvad angår konstruktionen af mængder og hvordan man kan relatere disse til hinanden vha. relationer, funktioner osv. Feferman skriver:

> »...to verify completeness in concrete categories, we must be able to form the operation of *Cartesian Product* over collections of its structures. Thus at each step we must make use of the unstructured notions of operation and collection to explain the structural notions to be studied.[Feferman, 1977, s. 150]«

Det vil altså sige at 'samling' og 'operation' skal bruges i beskrivelsen af struktur, og dette kan *ikke* foregå den modsatte vej. På den måde er der for Feferman en hierarkisk struktur, ikke ift. mængder per se, men i forhold til de basale idéer der ligger til grund for matematisk virke.Der er altså nogle begreber der kommer før andre, og som et eksempel fra matematikken, nævner han mængde og funktion, i forhold til cardinal ækvivalens, hvor

10 F.eks. definitionen af en funktion $f : X \to Y$ som vi så på i starten af kapitel 2

det første kommer før det sidste, dvs. beskrivelsen af det sidste er essentielt i beskrivelsen af det første[Feferman, 1977, s.152]. Dette giver altså en uformel hierarkisk struktur, og denne mangler helt i kategoriteorien, mener Feferman. Når det så er sagt, skal det bemærkes at Feferman på ingen måde bruger dette argument til at plædere for mængdelæren som værende det ubestridte grundlag for matematikken, han mener bare at enhver matematisk disciplin der vil gøre krav på universalitet, må forholde sig til ovenstående begreberFeferman [1977].
Hellmans og Fefermans underliggende kritik giver Awodey et svar på i Awodey [2004]. Udgangspunktet i dette svar er at kritikken fra Hellman bunder i et 'grundlagspræget' syn på matematikken, og at Awodeys pointe lige netop er at ville gøre op med dette. Det vil sige at Hellmans kritikpunkter er fremsat i lige netop det 'grundlagsparadigme', som Awodey vil væk fra. Mere konkret er det den anskuelse, at der findes et 'globalt univers' hvori man bedriver matematik, som Awodey vil af med. Vejen ud af dette er, som ovenfor forklaret, ved at ændre fokus fra grundlag, til i stedet at koncentrere sig om strukturen ved en samling af matematiske objekter. Vi er ikke interesseret i hvor tingene kommer fra, vi er kun interesserede i den struktur de har. Et produkt er i denne optik *ikke* $R = (x_1, x_2) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$, men en samling af objekter der er relateret til hinanden ved hjælp af morfier, og denne konstellation er så igen relateret på andre måder til andre objekter. Et spørgsmål om hvad disse objekter »basalt set« er, giver ikke mening fra dette synspunkt. Derfor bliver kategoriteori heller ikke en konkurrent der prøver at erstatte mængdelæren. Kategoriteori er et produkt af et syn på matematikken som *ikke* er kompatibelt med det syn, som mængdelæren er skabt ud fra. Dette forklarer også, at når vi generaliserer til kategoriteorien, dvs. formulerer konstruktioner fra mængdelæren i kategoriteoretisk termininologi, at det så er blevet tilgængeligt for et matematiksyn som er fundamentalt anderledes end mængdelæren. Kategoriteorien giver mulighed for at skabe nye strukturer, da man ikke interesserer sig for konkrete objekters herkomst (f.eks. de konstruktioner hvorfra vi ekstraherede strukturen), og dermed de restriktioner det giver, men i stedet kun koncentrerer sig om strukturen. Da kategoriteori lige netop er et værktøj til at manipulere strukturer med, er det derfor muligt at generere ny struktur (og dermed ny matematik) som ikke er bundet af et grundlagsparadigme, men i stedet et paradigme der sætter strukturen i højsædet. For Awodey er et theorem altså noget der siger følgende:»Hvis vi har at X gælder, så medfører det Y«. Vi antager så noget struktur ved et givet abstraktionsniveau, uanset 'hvad der ligger bag', og ud fra dette kan vi vise at der gælder noget, f.eks.

Y. Det vi antager er underordnet

> The laws, rules, and axioms involved in a particular piece of reasoning, or a field of mathematics, may vary from on the next, or even from one mathematician or epoch to another.[Awodey, 2004, s.56]

Det er altså ikke interessant for Awodey hvad det antagede er funderet i, men nærmere hvilken struktur det har. Man kan sige at antecedenten i et givet udsagn angiver under hvilke betingelser dette eller hint gælder. Man skaber altså en relation mellem konsekvent og antecedent, og denne relation byder ikke et »matematik moralsk« påbud om at skulle redegøre, i absolut forstand, for sine relata. Det vil sige vi skal ikke finde ud af hvad disse relata 'er'. Awodey skriver:

> The difficulty arises in the preoccupation with *relations* as the fundamental notion of 'structure'[..] If we take instead the perfectly autonomous notion of a morphism in a category, we can build structures out of them to our heart's content, without ever having to ask what might be in them.

Her begynder Awodey også at komme ind på Fefermans kritik, fordi for Awodey *er* en morfi $f : a \to b$ et fint værktøj, der måske ikke i sig selv er særlig interessant. Det er jo bare en tilknytning af et objekt a til et objekt b. hvorimod det interessante er, hvordan f.eks. $f : a \to b$ forholder sig til andre morfier og objekter. Der er altså noget holistisk over dette synspunkt, hvor de enkelte dele ikke er interessante, men derimod deres relationer der er interessante. Det er altså det tætteste vi kommer på en redegørelse for hvad en 'operation' er. Dette er i stærk kontrast til det 'grundlagssyn' på matematikken, som mængdelæren er et produkt af, hvor alt kan reduceres til »logical atoms«.

6.3 Kategoriteori som paradigme

Det ser umiddelbart ud til at en konsekvens af dette grundlagssyn uvægerligt bliver at vi må reducere tingene til noget ureducérbart, dvs. noget atomart. Atomismen hænger altså nøje sammen med grundlagssynet, og som vi ser, er det noget Awodey vil gøre op med. For i Awodeys kritik af grundlagssynet, med dertilhørende atomisme, ligger der et alternativ der ikke indeholder denne atomisme - nødvendigvis! Når disse grundlæggende krav er væk, er der pludselig plads til at matematik à la S.D.G., hvor et anderledes kontinuum kan konstrueres, hvori der er 'potentielle' elementer, som følger den intuitionistiske logiks love, og samtidig harmonerer mere med f.eks. Weyls opfattelse af et kontinuum. Hele den kategoriteoretiske anvendelse af intuitionistisk logik er utrolig ironisk. Da denne logik blev udviklet, var det rodfæstet i et restriktivt syn på matematikken, det vil sige med hårde intuitionistiske krav til konstruktion i bevisførelse og brug af logik (ingen UTP). I anvendelse i kategoriteorien har vi den omvendte effekt, at det generaliserer matematikken og giver mulighed for at f.eks. de klassiske reelle tal, og en konstruktiv udgave, kan eksistere sammen i en generel ramme. En platonisk tilgang til eksistens[11] i matematikken har ført til mange givtige konstruktioner, men i en kategoriteoretisk ramme, som er mere generel, er grundlaget for atomismen ikke forudsat. Elementrelationen er ikke noget bydende krav og gammelkendte objekter, som f.eks. funktioner, har pludselig ikke den samme statiske natur, som de havde i mængdelæren. Fra at være en mængde elementer, er fokus lagt på hvordan morfier og objekter *virker* og *interagerer*, en tanke der virker i modstrid med platonismen. Som Platon selv skriver:

> [...] no one who has even a slight acquaintance with geometry will deny that the nature of this science is in flat contradiction with the absurd language used by mathematicians, for want of better terms. They constantly talk of 'operations' like 'squaring', 'applying', 'adding', and so on, as if the object were to do something, whereas the true purpose of the whole subject is knowledge - knowledge, moreover, of what eternally exists, not of anything that comes to be this or that at some time and ceases to be. (Republic 527a)Jørgensen [2006]

Dette virker som en skarp modsætning til hele de bagvedliggende tanker, vi i rapporten har redegjort for mht. kategoriteori. Tag nu for eksempel $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$, som har en intuitiv fortolkning i form af en ikke-ekstensionel mængdelære, hvor man kan anvende kripkes semantik. Et objekt i $\mathbf{Set}^{\mathbf{P}}$ har en egenskab af variation, en egenskab der virker som en direkte modsætning til en platonisk opfattelse. De samme indvendinger gælder $\mathcal{S}$, som jo også er af formen $\mathbf{Set}^{\mathscr{D}}$. Derudover kan man sige at hele Awodeys overordnede opfattelse af struktur besidder et stort element af konstruktion. Vi, matematikerne, *konstruerer* strukturerne og vi skal *ikke* hænge os i spørgsmål om eksistens, altså om en given struktur f.eks. kan berettiges i principper for samling, operation og eksistens som Feferman og Hellman gør. Disse tanker som de fleste matematikere naturligt vil stille sig, ligger i forlængelse af denne

11 F.eks. er imprædikative definitioner ikke problematiske.

grundlagstanke, som igen er tæt forbundet med atomismen og platonismen. Vi har et statisk univers, hvori objekterne er, og dette univers angiver rammerne for den matematik man kan 'opdage', 'lave' eller 'bedrive'. Det er denne tanke som Feferman og Hellman har taget deres udgangspunkt i, og er det er den som Awodey og Kock vil væk fra. Afslutningsvis kan vi tage et citat fra Awodey der slår hovedet på sømmet.

> When you consider, for example, the notion (involving just a few objects and arrows and a couple of diagrams) of a group G in an arbitrary category $\mathbb{C}$, and pass to the category Group($\mathbb{C}$) of all groups in that category, and then to the category $\mathbb{C}^{Group(\mathbb{C})}$ of all functors from that category of groups back down to $\mathbb{C}$, and so on, then these constructions have to take place somewhere! They require some collection principles! No; the idea that one is 'going up' in a hierarchy, and that this requires stronger and stronger collection principles and existence assumptions rests on the 'foundationalist' conception that the 'objects' involved are fixed and determinate. From a categorical perspective, one is rather 'going down', by specifying more of the ambient structure to be taken into account[Awodey, 2004, s. 62]

Selvfølgelig kan man bedrive matematik uanset ens filosofiske tilgang til matematikken, men som det fremgår af dette projekt, så virker ZF(C) som en teori med en indlejret ontologisk og erkendelsesteoretisk anskuelse der er gennemsyret af atomisme og platonisme, som vi har set bl.a. Weyl kritisere allerede i 1920'erne. Siden da har kategoriteorien gjort sin entré, og denne virker som delvist forenende og delvist udraderende. På den ene side generaliserer den mængdelæren og gør op med det atomistiske og grundlagsprægede syn på matematikken, og på den måde giver plads til at ellers uforenelige discipliner kan eksistere indenfor den samme overordnede begrebslige ramme (og logik). Men på den anden side ligger der i kategoriteorien et opgør med absolutheden og den platoniske uforanderlighed. For selvom den 'atomistiske matematik' er indeholdt i kategoriteorien, så er den ikke længere et grundlag og på den måde går luften ud af platonismen. Jeg vil afslutningsvis komme med et eksempel fra fysikkens og videnskabsteoriens verden der skal illustrere den diskrepans der er mellem grundlagssynet og det syn som Awodey i ovenstående citat plæderer for. Jeg tænker her på overgangen fra Newton til Einsteins relativitetsteori i en Thomas S. Kuhnsk optik.

For Kuhn er dette et eksempel på at en teori både kan indfange den gamle teoris anvendelsesområde samtidig med at vi får forkastet nogle basale metafysiske antagelser (til fordel for nogle nye). I Newtons mekanik er rummet euklidisk og upåvirket af stof, det er det ikke i Einsteins relativitetsteori. Sågar hele opfattelsen af samtidighed mister sin betydning i relativitetsteorien. Det interessant for Kuhn var bl.a. at selvom relativitetsteorien havde indekluderet newtons mekanik i et specialtilfælde, så er den underlæggende metafysiske opfattelse af rum og tid ændret totalt.

> Det, man tidligere havde ment med rum, var nødvendigvis flat, homogent, isotropt og uberørt af stofs tilstedeværelse. Hvis det ikke havde været det, ville den newtonske fysik ikke havde fungeret. For at foretage overgangen til Einsteins univers måtte hele det net af begreber, hvis tråde er rum, tid, stof, kraft osv., udskiftes og igen lægges ned over naturen i sin helhed.[Kuhn, 1995, s. 188]

Vi får kort sagt et helt nyt sprog at tale om gammelkendte fænomener i, selvom det gamle sprog stadig kan bruges på de fænomener hvortil de kunne anvendes inden relativitetsteorien gjorde sin indtræden. Vi får et nyt sprog til at udvide vores fysiske viden, men på bekostning af at nogle gamle metafysiske antagelser må bortkastes. For eksempel begrebet 'samtidighed'. Ovenstående citat af Awodey bevidner også om en radikalt anderledes opfattelse af hvad matematik er. Hans opfattelse giver på lignende vis mulighed for at bedrive ny matematik, og bibeholde gamle kendte fænomener som ZF(C). Men på bekostning af hvad? Det virker umiddelbart som om den platoniske tilgang til matematikken har hårde kår. Ikke kun i de abstrakte strukturelle forskelle på kategoriteori og mængdelære, men på konkrete objekter som f.eks. de reelle tal. For ligesom samtidighed har mistet sin betydning i overgangen fra newtonsk fysik til relativitetsteorien, så har begrebet om de reelle tal som værende en endegyldig struktur, mistet sin betydning. De er ikke nødvendigvis dedekind snit i de rationelle tal, der findes pludselig flygtige entiteter, og at UTP er blevet reduceret til partikulære tilfælde, trodser også den tanke at matematikkens objekter er uforanderlige. En anden konsekvens af et sådan skift er at vi, som med relativitetsteorien, har fået et nyt syn/sprog at se matematikkens objekter ud fra. For Kuhn medførte dette en form for anti-realisme, da der ikke findes noget neutralt sprog at kommunikere den virkelige verdens fænomener i. På samme måde udfordrer kategoriteorien et syn på matematikken som værende entydig. Dette er S.D.G. vs. klassisk differential geometri et godt eksempel på. Denne diskussion sætter Weyls artikel titel »Über die neue Grundlagskrise der Mathematik« i et ironisk lys. For artiklen indeholder bl.a. en kritik af UTP og et atomistisk kontinuum, som var medaktør til formulere en logik der senere skulle bruges i matematisk projekt der udfordrer grundlagssyn som Weyl jo stadig besad jvf. titlen. Så grundlagskrisen Weyl formulerede skulle føre til at begrebet 'grundlagskrise' skulle blive et pseudo-problem, og dermed ophæve det primære mål i artiklen.

7 Konklusion

Kategoriteorien er et værktøj for et nyt syn på matematikken der gør op med det grundlagsorienterede, atomistiske syn og de dertilhørende klassiske konstruktioner, som f.eks. element-relationen som en primær relation. I stedet opstår et strukturelt syn på matematikken og der bliver, jvf. eksemplet med S.D.G., plads til at bedrive matematik der ikke før var mulig indenfor de gamle rammer. Dette nye syn medfører at gammelkendte objekter, der før havde status af at være entydige, pludselig bliver en af flere og som konstrueres vidt forskeligt. Disse omvæltninger medfører en anti-realisme, hvor f.eks. ZF(C) har ikke monopol på at være 'grundlaget' for matematikken.

A Appendiks

A.1 Eksempler på kategorier

Her er en række eksempler på kategorier som vil blive brugt igennem projektet og som samtidig kan redegøre for alle de forskelligartede kategorier der er mulige at konstruere. Den første vi ser på, er den mest simple kategori overhovedet.

`Eksempel 1:` **1**
Denne kategori består bare af et objekt og en morfi der afbilder objektet ind i sig selv, og det er oplagt at den opfylder kravene for at være en kategori.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop below, "f"] \end{tikzcd}$$

`Eksempel 2:` **Set**
Denne kategori er nok den mest kendte, kategorien hvor objekterne er vilkårlige mængder, og morfierne er afbildningerne imellem disse. Kort sagt, det gammelkendte univers hvori vi plejer at bedrive matematik.

`Eksempel 3:` $\mathbf{P}$=$\langle P, \sqsubseteq \rangle$ (Posets)
En poset kategori er defineret ved en samling objekter P hvorom det gælder at der findes højst en morfi mellem to objekter fra P. Mere formelt har vi P og en relation R givet ved

$\langle p, q \rangle \in R$ hviss der findes en morfi $p \to q$ i $\mathbf{P}$

Denne relation er transitiv og refleksiv svarende til de krav der er for en kategori, og derudover anitsymmetrisk for at imødekomme ovenstående krav om højst en morfi mellem p og q. Det ligner umiskendeligt en struktur man har set før og det er det også. Tag f.eks. $\omega = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ med den sædvanlige ordning($\leq$), så ses det let at dette udgør en poset kategori hvor morfierne er givet ved den klassiske partielle ordningsrelation.

`Eksempel 4:` Gitre
Tager vi ovenstående kategori og tilføjer to nye operationer. Tager vi to elementer q og p fra vores poset, defineres supremum og infimum ved hhv.
$q \sqcap p$ er største nedre grænse af q og p (eng. meet)
$q \sqcup p$ er mindste øvre grænse af q og p (eng. join)
Hvis der for hvert par af elementer i en poset findes et supremum og infimum kaldes denne for et *gitter*. Derudover kan der yderligere defineres nogle yderligere, men ikke altid gældende, krav til gitre. Først fremmest at ovennævnte operationer er distributive, dvs. for q, p, r gælder at
$q \sqcap (q \sqcup r) = (q \sqcap p) \sqcup (q \sqcap r)$ og
$q \sqcup (q \sqcap r) = (q \sqcup p) \sqcap (q \sqcup r)$
Dernæst kan der findes et største og et mindste element i et gitter, kaldet 1 og 0. Vha. disse kan der defineres et komplement q' til q ved
$q \sqcap q' = 0$ og $q \sqcup q' = 1$
Et gitter der opfylder disse betingelser kaldes et distributivt gitter med komplement.

`Eksempel 5:` **N**
En anden måde at skabe en kategori vha. de naturlige tal er **N**. I denne kategori er der kun et objekt N, men uendelig mange morfier med samme domæne og co-domæne. Morfierne er defineret ved

$$n \circ m = n + m$$

hvor m og n er morfier, og det er igen klart at aksiomerne for kategorier er opfyldt. Denne kategori kan hurtigt abstraheres, så enhver monoide udgør en kategori.

`Eksempel 6:` **Produkt kategorier**
For 2 kategorier $\mathscr{C}$ og $\mathscr{D}$ kan skabes en ny produktkategori $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ med par $\langle a, b\rangle$ hvor de to komponenter tilhører de to kategorier respektivt altså $\langle f, g\rangle \circ \langle f', g'\rangle = \langle f \circ f', g \circ g'\rangle$ for f,f' tilhører $\mathscr{C}$ og g,g' tilhører $\mathscr{D}$. Det samme gør sig gældende for morfier, da sammensættes på lignende måde og sammensætning af morfier sker også komponentvis. Et specialtilfælde inden for dette er f.eks. $\mathbf{Set^2}$. Der findes en del forskellige måder hvorpå nye kategorier kan skabes fra gamle.

`Eksempel 7:` **Morfi kategorier** $\mathscr{C}^{\rightarrow}$
Som navnet antyder, så er der i dette tilfælde tale om at morfierne fra en given kategori $\mathscr{C}$ bliver til objekter i $\mathscr{C}^{\rightarrow}$. Hvis vi har en morfi $f : a \rightarrow b$ så udgør dette et objekt. Morfierne i $\mathscr{C}^{\rightarrow}$ er et funktionspar $\langle h, k\rangle$, så der til

to objekter $f : a \to b$ og $g : c \to d$ gælder at

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd}$$

kommuterer, altså $g \circ h = k \circ f$. En en samling af partikullære (og simplere) morfi kategorier er komma kategorier $\mathscr{C} \downarrow a$ og $\mathscr{C} \uparrow a$ hhv., hvor den første har et fastlagt co-domæne a og den sidste et fastlagt domæne. Dvs. givet to objekter i $\mathscr{C} \downarrow a$ hhv. $f : d \to a$ og $g : e \to a$ findes der en $\mathscr{C} \downarrow a$ morfi k så

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ e \arrow[rr, "k"'] & & a \end{tikzcd}$$

kommuterer. På lignende måde konstrueres $\mathscr{C} \uparrow a$.

`Eksempel 8:` **Funktor kategorier**

I de tidligere eksempler har vi set hvordan morfier af gammelkendte kategorier bliver til objekter i en ny type, osv. I disse kategorier er functorerne objekterne! Givet to kategorier $\mathscr{C}$ og $\mathscr{D}$ kan vi skabe functor-kategorien $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, hvor functorerne $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ er objekter, og morfierne er de naturlige transformationer i mellem.

`Eksempel 9:` **M-Set**

Lad $\mathbf{M} = (M, *, e)$ være en monoide, så lad $m \in M$ bestemme en funktion $\lambda_m : M \to M$ ved $\lambda_m(n) = m * n \ \forall \ n \in M$ (venstre multiplikation). Dette udgør en samling funktioner $\{\lambda_m : m \in M\}$ der indeholder λ_e og hvor sammensætning foregår ved $\lambda_m \circ \lambda_p = \lambda_m(\lambda_p(n)) = m * (p * n) = (m * p) * n = \lambda_{m*p}$, og ved $m = 0$ har vi identitetsfunktionen. Ved at udvide λ-funktionerne kan vi konstruere en mere generel funktion $\lambda : M \times X \to X$ givet ved $\lambda(m, x) = \lambda_m(x)$, $\forall \ m \in M \ x \in X$, hvor $\lambda_n(x) = n * x$ og X er en mængde hvor monoide operationen er defineret på. Det vil altså sige at vores monoide M virker på en given mængde X[1]. På den måde får vi et objekter $\mathbf{M} - \mathbf{set}$ af formen (X, λ), som til et givent valg af M udgør en kategori $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$ for vilkårlige mængder X som M kan virke på.

1 Et simpelt eksempel kunne være $\mathbf{M} = (\mathbb{N}, +, 0)$ og $X = \mathbb{R}$.

I denne kategori vil et terminalt objekt i $\mathbf{M} - \mathbf{set}$ være defineret ved $1 = (\{0\}, \lambda_0)$ hvilket giver at virkningen af M på $\{0\}$ er givet ved $\lambda_0(m, 0) = m * 0 \; \forall m \in M$. Morfierne vil være $f : (X, \lambda) \to (Y, \mu)$, der er afbildningsbevarende, dvs. $f(\lambda(m, x)) = \mu(m, f(x))$, hvilket svarer til at følgende diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\lambda_m"'] & Y \arrow[d, "\mu_m"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Denne kategori, som iøvrigt er en topos[Goldblatt, 1984, s.103], bliver vigtig ift. at kigge på egenskaber ved topoi generelt. Vi vil derfor kort beskrive Ω-objektet for $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$, som er defineret ved $\Omega = (L_M, \omega)$ hvor L_M er mængden af venstreidealer[2] for monoiden M og $\omega : M \times L_M \to L_M$ er $\omega(m, B) = \{n : n * m \in B\}$ for $B \in L_M$. Lad nu $f : (X, \lambda) \to (Y, \mu)$ være en given *monisk* morfi, hvor det gælder at f indlejrer X i Y, så kan vi opskrive en delmængde klassifikatior ved at

$$\begin{tikzcd} X, \lambda \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & Y, \mu \arrow[d, "\chi_f"] \\ \{0\}, \lambda_0 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

være et kommuterende diagram. $\top : 1 \to \Omega$ har $\top(\{0\}) = M$, hvor M er hele monoiden og dermed det største ideal[3]. Det følger også af konstruktionen af morfier i $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$, og den generelle definition af $\top$, at følgende diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\top"] \arrow[d, "\lambda_0"'] & L_{\mathbf{M}} \arrow[d, "\omega"] \\ 0 \arrow[r, "\top"'] & L_{\mathbf{M}} \end{tikzcd}$$

2 Et venstreideal for monoiden $\mathbf{M}$ er en mængde $B \subseteq M$ hvor $\forall m \in M$ og $\forall b \in B$ gælder at $b * m \in B$.

3 Tilsvarende har vi $\perp : 1 \to \Omega$ hvor $\perp(\{0\}) = \emptyset$

kommuterer.

Delobjekt-morfien er defineret ved $\chi_f(y) = \{m : \mu(m, y) \in X\} \; \forall \; y \in Y$, og det er klart at da $m * x \in X \; \forall \; x \in X$ og $\forall m \in M$, så må $\chi_f(y) = M$ lige netop når $f(x) = y$.

Et interessant specialtilfælde, da det er det simpleste, er $\mathbf{M_2}$ over monoiden $M = (\mathbf{2}, \cdot, 1)$ hvor $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, og operationen er defineret på sædvanlig vis ved multiplikation $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ og $1 \cdot 1 = 1$. Mængden af venstre idealer L_2 er $\{2, \emptyset, \{0\}\}$, og $\{1\}$ er ikke med da $1 \cdot 0 = 0 \notin \{1\}$. $\Omega = (L_2, \omega)$ hvor $\omega(m, B) = \{n : n \in \mathbf{2} \wedge n \cdot m \in B \text{ for } B \in L_2\}$, så $\omega(m, B)$ tildeler en mængde $A \subseteq \mathbf{2}$ for givne $B \in L_2$ og $m \in \mathbf{2}$, hvilket vises på nedenstående tabel,

ω	2	$\{0\}$	$\emptyset$
1	2	$\{0\}$	$\emptyset$
0	2	2	$\emptyset$

hvor eksempelvis $\omega(0, \{0\})$ er $2 = \{0, 1\}$ da både 1 og 0 ganget med 0 tilhører $\{0\}$.
I $\mathbf{M_2}$ er $\top : 1 \to \Omega$ givet ved $\top(\{0\}) = 2$ dvs. hele M og $\bot(\{0\}) = \emptyset$.

Afslutningsvis skal vi opsummere en mængde almindelige kategorier i en tabel.

Kategori	Objekter	Morfier
Top	topologiske rum	kontinuerte funktioner mellem topologiske rum
Man	mangfoldigheder	glatte afbildninger imellem
Grp	grupper	gruppe homomorfier
Mon	monoider	monoide homomorfier
Vect	vektor rum	lineære transformationer

A.2 Pullback lemma'et

Hvis vi har et diagram af formen

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & E \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "k"'] & D \arrow[r, "n"'] & F
\end{tikzcd}$$

der kommuterer. Så hvis de to kvadrater er pullbacks, så er det store rektangel et pullback.
Hvis rektanglet er et pullback og det højre er et pullback, så er det er det venstre kvadrat også et pullback.

Referencer

Steve Awodey. Structure in mathematics and logic: a categorical perspective. *Philosophia Mathematica*, 4(3):209–237, 1996.

Steve Awodey. An answer to G. Hellman's question 'does category theory provide a framework for mathematical structuralism?'. *Philosophia Mathematica*, 12(3):54–64, 2004.

John L. Bell. Infinitesimals and the continuum. *The Mathematical Intelligencer*, 17(2):55–57, 1995.

John L. Bell. *Toposes and Local Set Theories - An Introduction*. Oxford University Press, United States, New York, 1988.

John L. Bell. *A Primer of Infinitesimal Analysis*. Cambridgde University Press, United Kingdom, Cambridge, 1998.

Peter J. Cameron. *Set, Logic and Categories*. Springer-Verlag London Limited, London, 1998.

Solomon Feferman. Set-theoretical foundations of category theory. *Reports of the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in Mathematics*, 106: 201–247, 1969.

Solomon Feferman. Categorical foundations and foundations of category theory. *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory.*, 106:201–247, 1977.

Robert Goldblatt. *Topoi - The Categorical Analysis of Logic*. Elsevier Science Publisher, The Netherlands, Amsterdam, 1984.

Geoffrey Hellman. Does category theory provide a framework for mathematical structuralism. *Philosophia Mathematica*, 11(3):129–157, 2003.

Klaus Frovin Jørgensen. Construction and schemata in mathematics. *P-hinews*, 9:4–28, 2006.

Anders Kock. *Synthetic Differential Geometry*. Cambridge University Press, United Kingdom, Cambridge, 2nd udgave, 2006.

Anders Kock. Differential calculus and nilpotent real numbers. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 9(2):225–230, 2003.

Thomas S. Kuhn. *Videnskabens Revolutioner.* Fremad A/S, Denmark, Copenhagen, 1995.

Saunders Mac Lane. One universe as a foundation for category theory. *Reports of the Midwest Category Seminar III, Lecture Notes in Mathematics*, 106:192–200, 1969.

René Lavendhomme. *Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry.* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, Dordrecht, 1996.

Paolo Mancosu. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920's.* Oxford University Press, New York, 1998.

Vincent F. Hendricks & Stig Andur Pedersen. *Moderne Elementær Logik.* Høst & Søns Forlag, Denmark, København, 2002.

Platon. *Platons skrifter - Staten bog VII.* S.L. Møllers Bogrtrykkeri, Denmark, Copenhagen, 1954.

Ieke Moerdjik & Gonzalo E. Reyes. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, USA, New York, 1991.

F. William Lawvere & Stephen H. Schanuel. *Conceptual Mathematics - A First Introduction to categories.* Cambridge University Press, United Kingdom, Cambridge, 1997.