

IMFUFA **tekst**

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Modellering med elektriske netværk - Noter fra Fysik B kurset

Niels Boye Olsen

Juni 2009

nr. 466 - 2009



Modellering med elektriske netværk – Noter fra Fysik B kurset

Af: Niels Boye Olsen

IMFUFA tekst nr. 466/ 2009

– 53 sider –

ISSN: 0106-6242

Denne IMFUFA tekst er et genoptryk af "*Noter til Fysik B – kursus*"
ved Niels Boye Olsen.

Teksten introducerer (bla.) til:

Kompleks strøm og spænding

 Måling af strøm og spænding

 Impedans og admitans

Lineær responseteori

 Tids- og frekvensbilledet

 Sammenhængen mellem responsefunktioner

Modellering af fysiske systemer med elektriske komponenter

 Kædelinien

 Bølgekædelinien

 Diffusionskædelinien

 Transducere

Noten blev brugt som undervisningsmateriale til "Fysik B – kurset" over en årrække i
1980'erne og 1990'erne. Kurset blev gennem hele denne periode afholdt af Niels Boye Olsen.
Fysik B kurset er i dag erstattet af kurset "Fysisk modellering".

Denne genudgivelse er foretaget af Bo Jakobsen, maj 2009, for at sikre at disse noter, som en
hel generation af IMFUFA fysik-studerende har haft store glæde af, er tilgængelige for
fremtidige studerende.

INDHOLDSFORTEGNELSE

Afsnit 1

Kirshoffs love	side 1
I-V karakteristikker	3
Måling af strøm og spænding	5

Afsnit 2

Definition af fasevektor	7
Ohm's lov for vekselstrømme	8
Formulering af Ohm's	9
Impedans og admitans for sammensatte systemer	11
Energidissipation i vekselstrømskredsløb	12
Måling af impedans og admitans	13

Afsnit 3

Lineær response, responsefunktioner	15
Modellering	22

Afsnit 4

Kædelinien	26
Bølgekædelinien	28
Diffusionskædelinien	29
Transport i kontinuerte medier	30
Bølgetransmission	35
Diffusion	37
Varmediffusion	41
Forsøg med varmediffusion i kobber stang	43
Transduceren	45
Forsøg med højttaler og resonansrør	48
Højttaleren	49

KIRSHOFFS LOVE

Bestemmelse af samtlige strømme og spændinger i et elektronisk kredsløb:

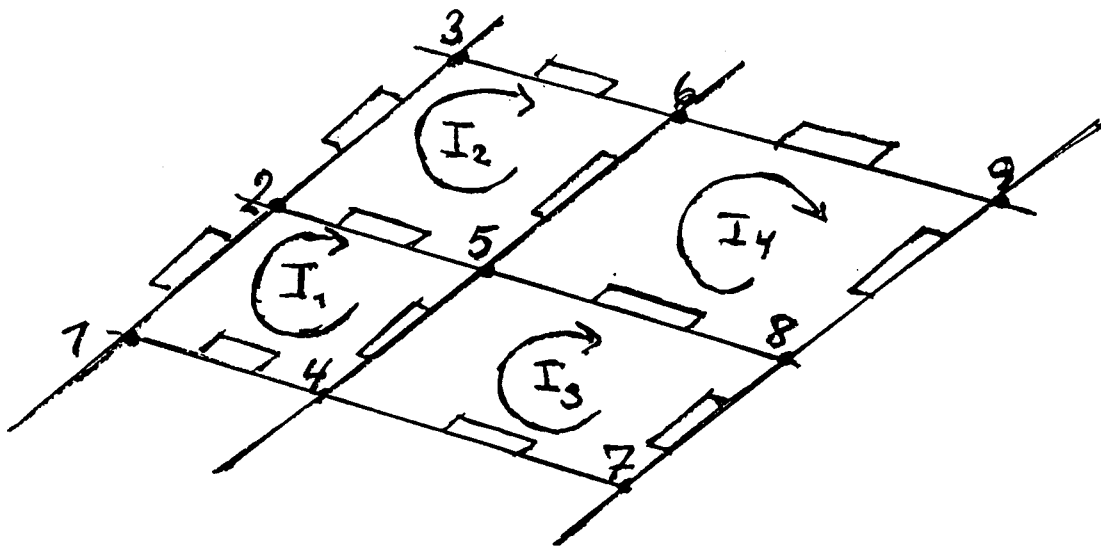
Knudepunkter og masker

fig.1

Knudepunkter: "Loddepunkter" i et elektrisk kredsløb, på figuren nummereret med 1,2,3 ... osv.

Maske: En lukket vej gennem en række knudepunkter, f.eks. $7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 7$ på fig.1.

Lov I : "Summen af samtlige strømme til et knudepunkt er nul".

$$\text{f.eks. : } I_{25} + I_{45} + I_{65} + I_{85} = 0$$

hvor I_{ij} regnes med fortegn, f.eks. I_{25} regnes positiv, hvis den går fra 2 til 5.

Spørgsmål: Hvilken bevarelsessætning og hvilken egenskab af knudepunktet ligger til grund for lov I ?

Lov II : "Summen af spændingsforskellene mellem knudepunkter rundt i en maske er 0".

$$\text{f.eks. } V_{12} + V_{25} + V_{54} + V_{41} = 0$$

hvor f.eks. V_{54} betegner spændingsforskellen mellem 5 og 4 regnet med fortegn. V_{54} angiver det arbejde de elektriske kræfter udfører når ladningsmængden 1 Coulomb føres fra 5 til 4.

Lov II udtrykker at det arbejde de elektriske kræfter udfører når en ladningsmængde føres rundt i en lukket kreds er nul.

Spørgsmål: Hvorledes hænger begreber som potentiel energi og potentialer sammen med lov II ?

REGNETEKNIK ANVENDT TIL BESTEMMELSE AF STRØMME OG SPÆNDINGER I ET GIVET NETVÆRK:

Maskestrømme: En maskestrøm (f.eks. I_3 på fig.1) er en fiktiv eller "hjælpe"strøm, som fastlægges med ligningen:

$$\text{lign.1. } I_{ij} = \sum_K I_K$$

hvor I_{ij} angiver den sande strøm fra knudepunkt i til j og I_K angiver maskestrømmen i den Kte maske som indeholder grenen i - j. (f.eks. haves på fig.1 $I_{45} = I_3 - I_1$). Den sande strøm i en gren fremkommer altså som summen af maskestrømmene i de tilstødende masker.

Maskestrømme er hjælpestørrelser, ved hjælp af hvilke, det er nemt at opstille et sæt af ligninger til bestemmelse af disse og dermed til bestemmelse af de sande strømme, forudsat sammenhængen mellem strøm og spænding i de enkelte grene er kendt.

Tænker vi f.eks. på et netværk bestående af "ohmske" passive elementer og spændingskilder (batterier) kan vi, efter at have inddelt netværket i et passende antal masker som hver tildeles en omløbsretning (se fig.1), opstille et tilsvarende antal ligninger:

$$\begin{array}{lcl} \text{maske 1:} & R_{11}^O I_1 + \dots & R_{1j}^O I_j + \dots & R_{1n}^O I_n - V_1^O = 0 \\ \vdots & & & \\ \text{Lign.2} \quad \text{maske i:} & R_{i1}^O I_1 + \dots & R_{ij}^O I_j + \dots & R_{in}^O I_n - V_i^O = 0 \\ \vdots & & & \\ \text{maske n:} & R_{n1}^O I_1 + \dots & R_{nj}^O I_j + \dots & R_{nn}^O I_n - V_n = 0 \end{array}$$

I ligning 2 angiver n antallet af masker i netværket, R_{ij}^O angiver den samlede modstand i den gren som er fælles for maske i og maske j med et fortegn som er positivt, hvis de valgte maskestrømme i grenen er ensrettede, og negativ, hvis de er modsat rettede (bemærk at R_{ii}^O angiver den samlede modstand rundt i maske i). V_i^O angiver den samlede elektromotoriske kraft (batterispænding) i den i .te maske, regnet med fortegn således at V_i^O er positiv, hvis den valgte omløbsretning fører fra batteriets positive pol gennem den ydre kreds til den negative pol.

Ved at flytte alle V_i^O -erne over på den anden side af lighedstegnet og benytte forskrifter for multiplikation af matricer kan lign.2 skrives på en mere kompakt form:

$$\begin{pmatrix} R_{11}^O & \dots & R_{1j}^O & \dots & R_{1n}^O \\ \vdots & & & & \\ R_{i1}^O & \dots & R_{ij}^O & \dots & R_{in}^O \\ \vdots & & & & \\ R_{n1}^O & \dots & R_{nj}^O & \dots & R_{nn}^O \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1^O \\ \vdots \\ I_i^O \\ \vdots \\ I_n^O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^O \\ \vdots \\ V_i^O \\ \vdots \\ V_n^O \end{pmatrix}$$

eller blot

$$\text{lign 3} \quad \bar{R}_{nn}^O \times \bar{I}_n^O = \bar{V}_n^O$$

hvor $\times$ tegnet angiver multiplikation af $n \times n$ matricen $\bar{R}_{nn}^O$ med vektoren $\bar{I}_n^O$. Ovenstående ligning repræsenterer således en slags Ohm's lov for omske netværk skrevet på matriceform. Moderne selv ret små computere kan udføre matriceregning og vi skal i kurset se hvorledes man ved hjælp af en computer let kan bestemme $\bar{I}_n$, altså samtlige maskestrømme ud fra lign.3.

I - V KARA KTERISTIKKER

Lign.2 blev opstillet under forudsætning af simpel proportionalitet mellem strøm og spænding i netværkets passive elementer. Kirshoff love gælder imidlertid generelt og fastlægger sammen med strøm-spændingskarakteristikken for de enkelte elementer netværkets strømme og spændinger. I det følgende vises nogle eksempler på

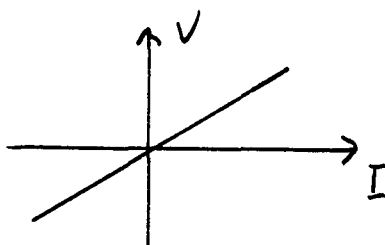
elektroniske komponenters I-V karakteristikker samt de tegn de er symboliseret ved:

passive elementer:

ohmsk modstand



symbol



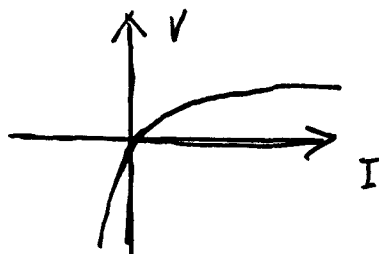
I-V karakteristikk

lineært element

ohms lov

$$V = R \cdot I$$

diode

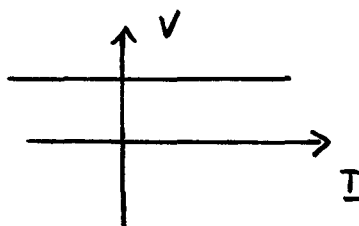
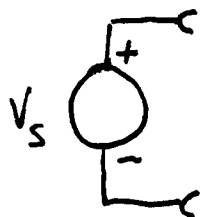


ikke lin. element

komplex lov sammenheng.

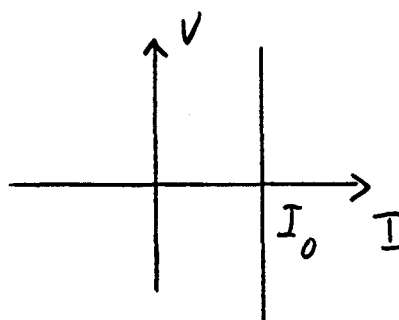
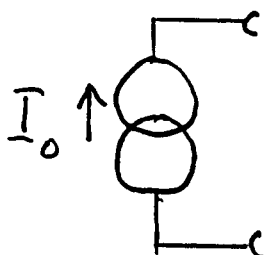
aktive elementer:

spændingskilde



$$V(I) = V_s$$

strømgenerator

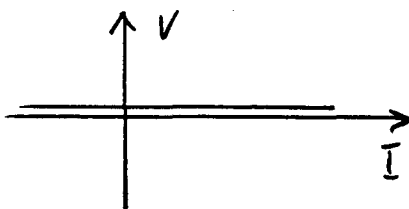
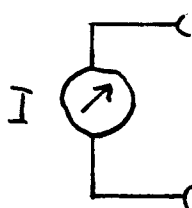


$$I(V) = I_0$$

MÅLING AF STRØM OG SPÆNDING

Forskellige instrumenter benytter sig af forskellige principper til måling af strøm og spænding. Fælles for dem alle er imidlertid at følgende ideelle karakteristikker tilstræbes:

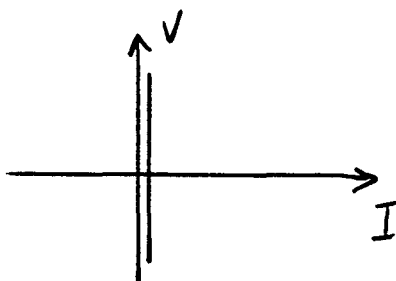
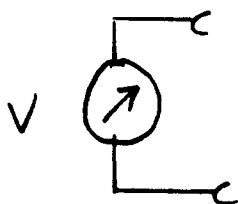
Amperemeter



$$V(I) = 0$$

dvs spændingen over amperemeteret er 0 uafhængigt af strømmen gennem instrumentet, altså dets indre modstand $R_i = 0$.

Voltmeter

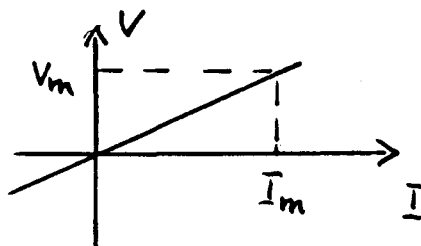
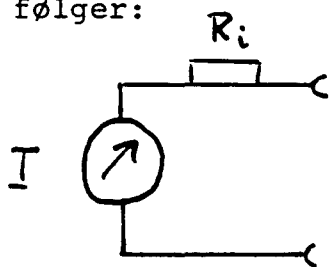


$$I(V) = 0$$

dvs. strøm gennem voltmeter er 0 uafhængig af spænding, $R_i = \infty$

I praksis er det ikke muligt at opnå ovenstående ideelle karakteristikker. Ser vi f.eks. på det traditionelle "universalmeter" som er bygget op omkring et drejespoleinstrument vil u.-meteret i et givet måleområde have en indre modstand, som afhænger af drejespoleinstrumentets følsomhed (viserudslag/strøm) samt dets indre modstand.

Et rimelig godt drejespoleinstrument vil have en karakteristik som følger:



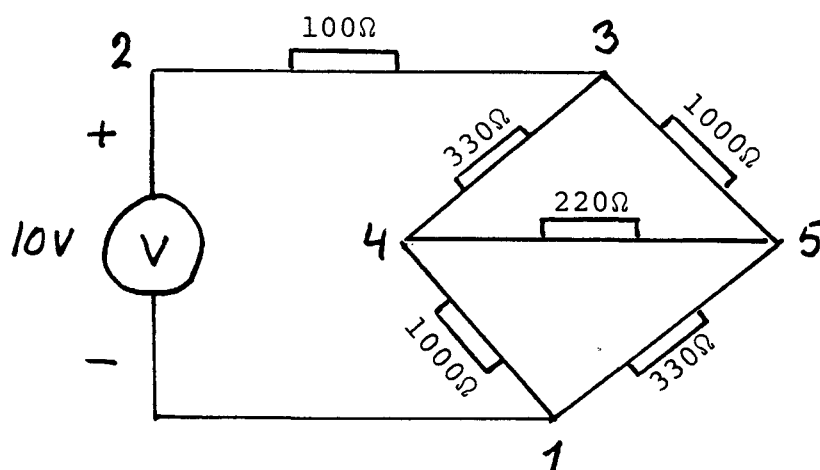
hvor $I_m = 50 \mu A$ og $V_m = 0,5 V$ angiver hhv strøm og spænding for fuldt viserudslag.

Opgave:

Hvor stor er R_i som vist på ovenstående ækvivalentdiagram for drejespoleinstrumentet ?

Hvor stor er R_i hvis ovenstående drejespoleinstrument anvendes i et universalmeter og dette benyttes i måleområderne hhv 10 V og 1 Amp. for fuldt udslag ?

Måling og beregning af strømme og spændinger i "Wheatstones bro".



a) opdel ovenstående netværk i et passende antal masker med angivne omløbsretninger. Vis at definitionen af de tilsvarende maskestrømme som angivet i lign.1 er i overensstemmelse med Kirshoffs knudepunkts lov. Opstil ved hjælp af Kirshoffs maskelov et sæt ligninger til bestemmelse af maskestrømmene og vis at disse ved reduktion fører til ligningssystemet lign.2. Beregn herefter samtlige grenstrømme og -spændinger.

b) Mål hved hjælp af universalmeteret samtlige grenstrømme og -spændinger. Diskuter eventuelle afvigelser mellem tilsvarende målte og beregnede størrelser.

c) Mål og indtegn på millimeterpapir karakteristikken af hhv en diode og en modstand i spændingsområdet -3V til +3V.

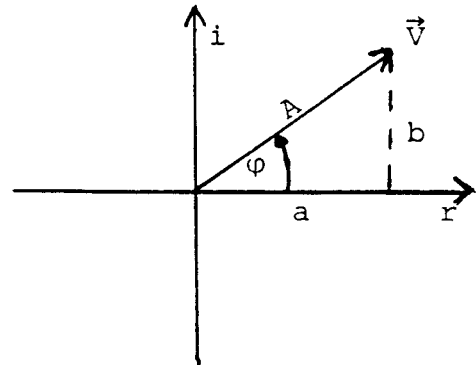
DEFINITION AF FASEVEKTOR.

Givet et signal: $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

A = amplitude, φ = fase.

fasevektor:

til signalet $f(t)$ knyttes en vektor $\vec{V}$ med polære koordinater (A, φ) dvs med længden A og drejet vinkelen φ "mod uret" ud fra første akse.

Komplex notation:

Fasevektoren tilskrives et komplekst tal $\tilde{V} = a + ib$ således at realdelen a og imaginærdelen b bestemmes ved følgende relation:

$$a = A \cos \varphi$$

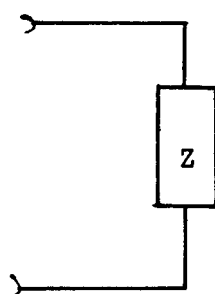
$$b = A \sin \varphi$$

Idet det komplekse tal $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ kan fasevektoren også skrives som følger:

$$\tilde{V} = A \cdot e^{i\varphi}$$

Med hensyn til regneregler for komplekse tal se f.eks.

O.U. TS 282 M.E.

"OHM'S LOV" FOR VEKSELSTRØMME

Vi tænker på et system bestående af et vilkårligt netværk af lineære elektroniske komponenter (f.eks. modstande, condensatorer og selv-induktioner). Vi har forbindelse til systemet gennem to elektriske ledninger som vist på figuren. Et sådant

lineært system har bl.a. den egenskab at en harmonisk (sinus-formet) spænding over ledningerne medfører en ligeledes harmonisk strøm gennem disse om omvendt.

Impedansfunktionen $\tilde{Z}(\omega)$:

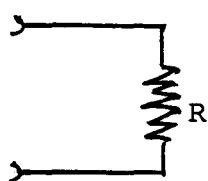
Vi definerer den komplekse impedansfunktion $\tilde{Z}(\omega)$ som fasevektoren, skrevet på kompleks form, af spændingssignalet når strøminputtet er givet ved standardfunktionen $I(t) = \cos \omega t$. $\tilde{Z}$ afhænger kun af ω .

Admitansfunktionen $\tilde{Y}(\omega)$:

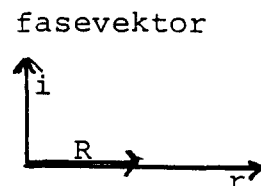
$\tilde{Y}(\omega)$ defineres tilsvarende som fasevektoren for strømoutputtet når spændingsinputtet er $\cos \omega t$.

Eksempler:

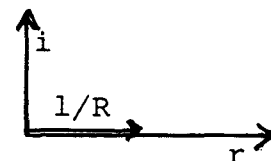
Ohmsk modstand:



$$\begin{array}{ll} \text{Input} & \text{output} \\ I = \cos \omega t, & V = R \cos \omega t \\ \hline \tilde{Z}(\omega) = R \end{array}$$

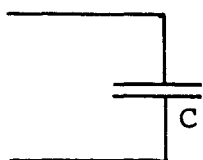


$$\begin{array}{ll} \text{Input} & \text{output} \\ V = \cos \omega t & I = \frac{1}{R} \cos \omega t \\ \hline Y(\omega) = \frac{1}{R} \end{array}$$

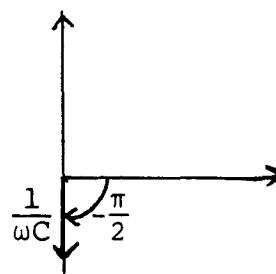


Condensator:

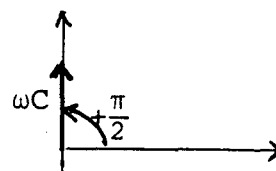
$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt$$



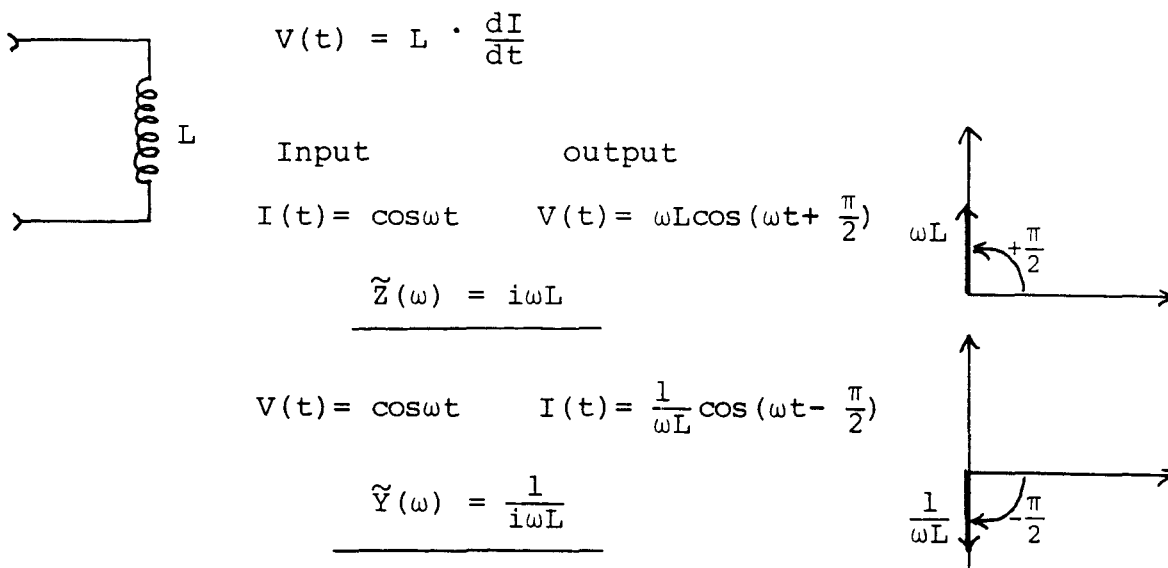
$$\begin{array}{ll} \text{Input} & \text{output} \\ I(t) = \cos \omega t & V(t) = \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\ \hline \tilde{Z}(\omega) = \frac{1}{i\omega C} \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} V(t) = \cos \omega t & I(t) = \omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \hline \tilde{Y}(\omega) = i\omega C \end{array}$$



Selvinduktion:



bemærk at i de viste eksempler er $\tilde{Z}(\omega) = \frac{1}{\tilde{Y}(\omega)}$

FORMULERING AF OHM'S LOV FOR VEKSELSTRØMME

For jævn-strøm og -spænding gælder det at modstandsværdien R angiver det tal vi skal multiplisere strømmen med for at beregne spændingen. Tilsvarende angiver ledningsevnen $1/R$ det tal vi skal multiplicere spændingen med for at finde strømmen. Lignende simple regneregler for vekselstrømme kan anvendes uden at begrænse sig til Ohmske modstande.

Lad os betragte et elektrisk system med impedansfunktionen $\tilde{Z} = |z| e^{i\varphi}$, hvor $|z|$ angiver længden af fasevektoren og φ fasevinklen. Hvis vi som standardinputfunktion formelt erstatter den reelle funktion $\cos \omega t$ med funktionen $e^{i\omega t}$ (samme realdel) kan vi opretholde en formel lighed med Ohms lov for jævnstrømme på følgende måde: (I det følgende angiver c i f.eks. $I^c(t)$ at I^c er en kompleks funktion af t .)

Input	output
$I^c(t) = e^{i\omega t}$	$V^c(t) = \tilde{Z}(\omega) I^c(t)$

Ovenstående ligning er analog til Ohm's lov, blot skrevet på kompleks form. Ligningen får mening hvis vi tyder den fysiske strøm som realdelen af $I^c(t)$ og tilsvarende for

spændingen. Vi har nemlig

$$\text{Input strøm } I(t) = \text{real } I^C(t) = \text{real } e^{i\omega t} = \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} \text{Output spnd. } V(t) &= \text{real } V^C(t) = \text{real } [|\tilde{Z}| e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}] \\ &= \text{real } |\tilde{Z}| e^{i(\omega t + \varphi)} \\ &= |\tilde{Z}| \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

dvs at $\text{real}.V^C(t)$ netop angiver spændingen som funktion af tiden når input strømmen er $\cos \omega t$ og impedansfunktionen er $\tilde{Z}(\omega)$. Ovenstående udgave af Ohm's lov kan let vises at gælde for alle strøminput på formen $I^C(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$.

Ved at anvende regnereglerne for komplekse tal finder vi sammenhængen mellem impedans $\tilde{Z}(\omega)$ og admittans $\tilde{Y}(\omega)$ ved

$$I^C(t) = \frac{1}{\tilde{Z}(\omega)} V^C(t) = \tilde{Y}(\omega) \cdot V^C(t) \quad \text{altså}$$

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{1}{\tilde{Z}(\omega)}$$

IMPEDANS OG ADMITANS FOR SAMMENSATTE SYSTEMER

Kirshoffs love for jævnstrømsnetværk gælder generelt dvs også for øjebliksværdierne af spændinger og strømme i et vekselstrømskredsløb. Lovene anvendes til at bestemme impedans og admitans for sammensatte systemer.

Serieforbindelse:

$I(t)$

$V(t)$

$V_{1(t)} I_1$ $\tilde{Z}_1$

$V_{2(t)} I_2$ $\tilde{Z}_2$

Kirshoffs knudepunkts lov: $I_1(t) = I_2(t) = I(t)$

Kirshoffs maskelov: $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$

heraf fås:

$$V(t) = \text{real}(\tilde{Z}_1 \cdot I_1^C(t)) + \text{real}(\tilde{Z}_2 \cdot I_2^C(t))$$

$$= \text{real}[(\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2) I^C(t)]$$

eller

$$V^C(t) = (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2) I^C(t)$$

dvs

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$$

Parallelforbindelse:

$I(t)$

$V_0(t)$

$\tilde{Y}_1$

$\tilde{Y}_2$

Af Kirshoffs love fås

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t)$$

$$V_0(t) = V_1(t) = V_2(t)$$

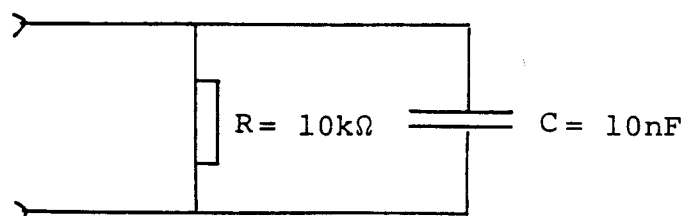
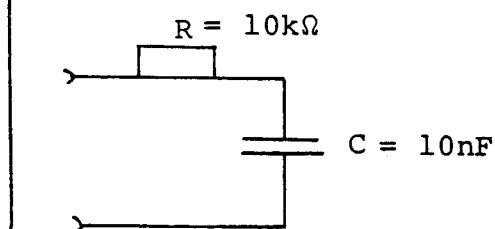
eller

$$I(t) = \text{real}(\tilde{Y}_1 \cdot V^C(t)) + \text{real}(\tilde{Y}_2 \cdot V^C(t))$$

$$I^C(t) = (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2) V^C(t)$$

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2$$

Beregn impedanser og admitanser for et serieforbundet R-C led og et parallelforbundet R-C led. Mål herefter med Oscilloskop og funktionsgenerator.



ENERGIDISSIPATION I VEKSELSTRØMSKREDSLØB

Den afsatte energi pr.sec. (effekt) er til enhver tid givet ved produktet af strøm og spænding $W(t) = I(t) \cdot V(t)$. I vekselstrømskredse varierer den afsatte effekt med tiden, og for at få et mål for kredsløbets energidissipation må man beregne den afsatte middeleffekt over en periode T :

$$\langle W(t) \rangle = \langle V(t) \cdot I(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) \cdot I(t) \cdot dt$$

Lad os antage at vi har strøminput

$$\begin{aligned} I(t) &= A_I \cos \omega t = A_I \cdot \frac{1}{2} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] && \text{vis dette} \\ \text{og} & \\ V(t) &= \text{real}(\tilde{Z}(\omega) \cdot A_I e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Hvis operatoren $(\)^*$ betyder kompleks konjugering haves

$$V(t) = \frac{1}{2} [(\tilde{Z}(\omega) \cdot A_I e^{i\omega t})^* + (\tilde{Z}(\omega) \cdot A_I e^{i\omega t})]$$

ved indsættelse i integralet fås

$$\begin{aligned} \langle W(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{4} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] A_I^2 [\tilde{Z}(\omega) e^{i\omega t} + (\tilde{Z}(\omega))^* e^{-i\omega t}] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{4} A_I^2 [\tilde{Z}(\omega) + (\tilde{Z}(\omega))^* + \tilde{Z}(\omega) e^{i2\omega t} + (\tilde{Z}(\omega))^* e^{-i2\omega t}] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{4} A_I^2 \cdot 2 \text{ real } \tilde{Z}(\omega) dt \\ &= \left(\frac{A_I}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \text{real } \tilde{Z}(\omega) = \boxed{\left(\frac{A_I}{\sqrt{2}} \right)^2 \tilde{Z}_1(\omega)} \end{aligned}$$

I ovenstående er benyttet følgende

$$\tilde{Z}(\omega) = \tilde{Z}_1(\omega) + i\tilde{Z}_2(\omega) \quad (\tilde{Z}_1 = \text{realdel}, \tilde{Z}_2 = \text{imaginærdel})$$

$$(\tilde{Z}(\omega))^* = \tilde{Z}_1(\omega) - i\tilde{Z}_2(\omega) \quad \text{dvs}$$

$$(\tilde{Z}(\omega))^* + \tilde{Z}(\omega) = 2\tilde{Z}_1(\omega)$$

endvidere

$$(\tilde{a} \cdot \tilde{b})^* = (\tilde{a})^* \cdot (\tilde{b})^* \quad \text{samt} \quad \int_0^T e^{i2\omega t} dt = 0$$

betegnes $\frac{A_I}{\sqrt{2}}$ for effektivstrømmen ser vi at ligning

$$\langle W(t) \rangle = I_{\text{eff}}^2 \tilde{Z}_1(\omega)$$

fremkommer af den tilsvarende ligning for jævnstrømme, hvis vi her erstatter R med realdelen af impedansfunktionen.

Tilsvarende fås

$$\langle W(t) \rangle = V_{\text{eff}}^2 \cdot \tilde{Y}_1(\omega)$$

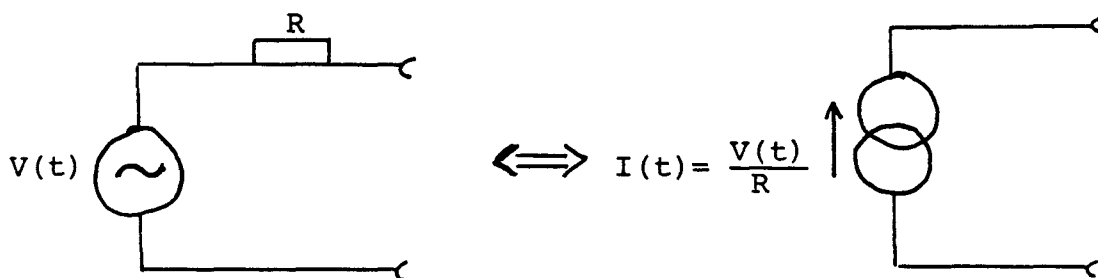
vis dette

hvor $V_{\text{eff}} = \frac{A_V}{\sqrt{2}}$.

MÅLING AF IMPEDANS OG ADMITANS

Påtrykkes et elektrisk kredsløb et signal $i(t)$ (input) svarer det igen med et response $o(t)$ (output). Hvis $i(t)$ er en tidsafhængig strøm vil spændingen $o(t)$ være et udtryk for systemets modstand eller impedans. Ved at bytte om på strøm og spænding kan systemets ledningsevne eller admitans undersøges.

Impedansmåling.



På ovenstående figur er vist hvordan en spændingsgenerator er lavet om til en strømgenerator. Modifikationen er korrekt når R gøres så stor, at spændingsfaldet over modstanden R er af samme størrelse som $V(t)$.

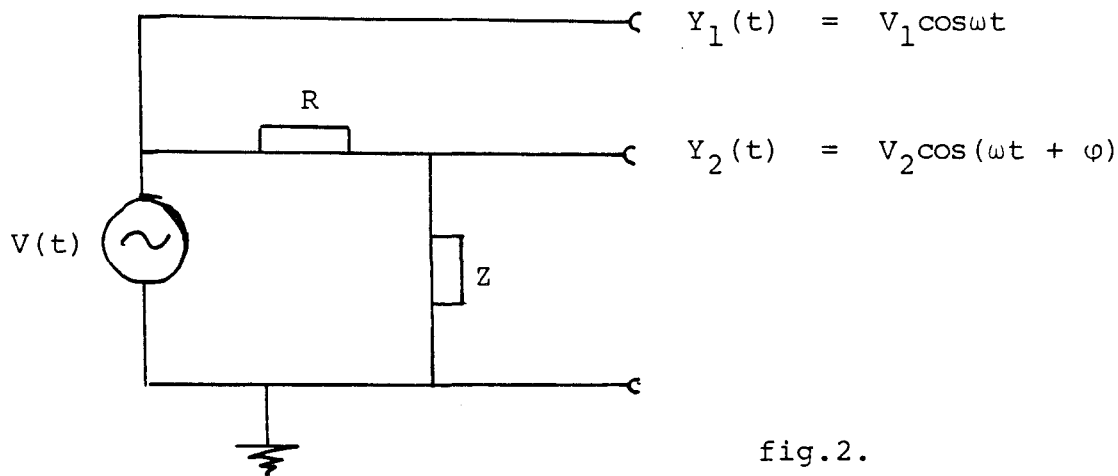


fig.2.

Ved hjælp af opstillingen på fig.2 kan et systems impedansforhold måles ved at forbinde Y_1 og Y_2 til de respektive indgange på oscilloscopet. Strøminputtet til systemet Z er givet ved

$$I(t) = \frac{Y_1(t) - Y_2(t)}{R} \approx \frac{Y_1(t)}{R} = \frac{V_1}{R} \cos \omega t$$

hvis $Y_2 \ll Y_1$ [i praksis skal Y_2 være nede på ca. 1% af Y_1]

Spændingsoutputtet måles som $Y_2(t)$

$$V(t) = V_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

hvor V_2 angiver amplitude og φ fasedrejning.

Mål forholdet mellem spændingsamplituden V_2 og strømamplituden V_1/R samt fasedrejning φ for en kondensator og en selvinduktion. Plot amplitudeforhold og fasedrejning som funktion af frekvensen.

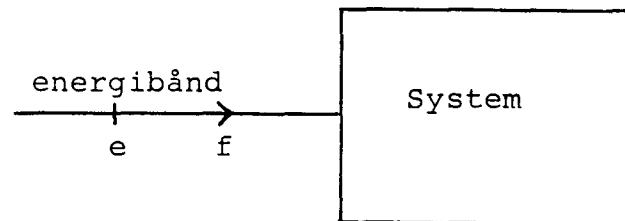
Admitansmåling

Find selv på en opstilling, hvor I styrer spændingen over måleobjektet, samtidig med at I måler strømresponset. Gentag så målingerne fra før.

AFSNIT 3

LINEÆR RESPONSE

RESPONSEFUNKTIONER



Lad os tænke på et system (f.eks. et elektrisk, et mekanisk, magnetisk eller termodynamisk) med hvilket vi kan vekselvirke gennem et bestemt energibånd. Vekselvirkningen er ensbetydende med at der løber et energiflow W i et energibånd. W vil altid kunne bestemmes som produktet af et "kvantitets"-flow f og en kvalitetsstørrelse e (tænk f.eks. på elektrisk strøm og spænding). Vi kan etablere vekselvirkning ved enten at styre e eller f . Hvis vi styrer e , repræsenterer e input til systemet og f output fra systemet, og omvendt.

Systemets indre egenskaber er entydigt bestemt af sammenhængen mellem input og output, og vi skal se, at denne sammenhæng kan beskrives ved en række standard response funktioner ($\tilde{Z}(\omega)$ er et eksempel på en sådan).

I det følgende betegner vi et tidsafhængigt input med $i(t)$ (f.eks. en tidsafhængig strøm, spænding, kraft, forskydning etc.). Vi indskrænker os til kun at behandle tidshomogene og lineære systemer, dvs systemer, hvis egenskaber ikke afhænger explicit af tiden og hvis input-output relation kan skrives på formen

$$\begin{aligned} o(t) &= F(k_1 \cdot i_1(t) + k_2 \cdot i_2(t)) \\ &= k_1 \cdot F(i_1(t)) + k_2 \cdot F(i_2(t)) \end{aligned}$$

Den mest generelle lineære sammenhæng mellem $o(t)$ og $i(t)$ kan skrives

$$I \quad o(t) = \int_0^{\infty} M_{iO}(\tau) i(t-\tau) d\tau$$

Ligning I udtrykker at o til tiden t afhænger af alle fortidige værdier af i som en vægtet sum med vægtfaktoren $M_{iO}(\tau)$. $M_{iO}(\tau)$ benævnes ofte memory funktionen for systemet i den givne input-output situation, idet $M_{iO}(\tau)$ er et mål for hvor godt systemet husker den til fortiden $t-\tau$ antagne værdi af inputtet.

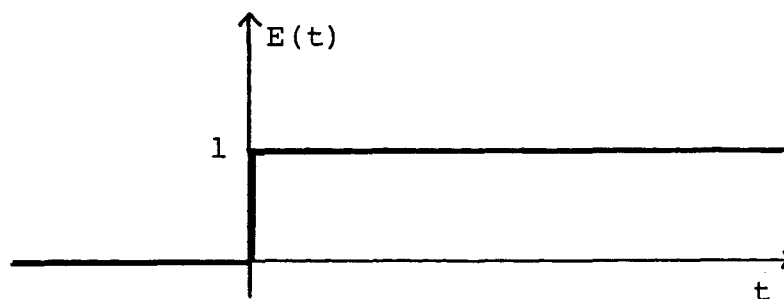
Med ligning I som udgangspunkt vil vi undersøge hvordan $o(t)$ hænger sammen med $M_{iO}(\tau)$ når vi vælger forskellige standard input funktioner.

a) tidsbilledet

Vi vælger $i(t) = i_0 \cdot E(t)$ hvor $E(t)$ betegner en "heaviside-funktion" ($E(t)$ har ingen fysisk dimension)

$$E(t) = 1 \quad \text{for} \quad t > 0$$

$$E(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \leq 0$$



Af ligning I fås

$$o(t) = \int_0^{\infty} M_{iO}(\tau) \cdot i_0 \cdot E(t-\tau) d\tau$$

$$II \quad o(t) = i_0 \int_0^t M_{iO}(\tau) d\tau$$

$$\text{idet} \quad E(t-\tau) = 0 \quad \text{for} \quad \tau \geq t$$

$$E(t-\tau) = 1 \quad \text{for} \quad \tau < t$$

Ligning II definerer den tidsafhængige responsefunktion

$$\text{IIb} \quad \hat{R}(t) = \int_0^t M_{iO}(\tau) d\tau$$

b) frekvensbilledet

Standardinput: $i(t) = \text{real } i_0 e^{i\omega t} = i_0 \cos \omega t$

$$o(t) = \int_0^\infty M_{iO}(\tau) \text{real } i_0 e^{i\omega(t-\tau)} d\tau$$

eller

$$\text{III} \quad o(t) = \text{real}(i_0 e^{i\omega t} \int_0^\infty M_{iO}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau)$$

Ligning III definerer den frekvensafhængige komplekse responsefunktion

$$\text{III b} \quad \tilde{R}(\omega) = \int_0^\infty M_{iO}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Vi skal nu definere en række standardresponse funktioner udfra fire fundamentale "energibands"-variable. Tidligere har vi kun behandlet strøm f og spænding e som mulige input-output variable til et system. ($f \cdot e$ angav energistrømmen til systemet). Vi vil nu udvide antallet af variable med de to til "rate"-variablene p og q hørende "level"-variable p og q , defineret ved ligningerne

$$p = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau \quad \text{og} \quad q = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau .$$

p og q benævnes henholdsvis den generaliserede impuls (jf. Newton II) og -forskydning.

Af de 16 mulige input-output relationer er kun 8 meningsfulde. I nedenstående skema er bogstav og navn for 6 af de 8 responsefunktioner angivet (de sidste to har af forskellige grunde ikke fundet plads i litteraturen).

output input	forskydning deformation q	strøm hastighed f	spænding kraft e	impuls p
forskydning deformation q			modulus "stivhed" G	
strøm hastighed f			impedans modstand Z	inertans "masse" M
spænding kraft e	creep compliance J	admittans bevægelighed Y		
impuls p		"lethed" F		

De 6 responsefunktioner kan nu hver have to iklædninger afhængig af det valgte input signal. Vi vil i det følgende lade f.eks. $\tilde{Z}(\omega)$ betegne den komplekse impedansfunktion, der, som vi kender den, angiver responset på et harmonisk strøm-input (se III b), medens $Z(t)$ angiver den reelle tidsresponsefunktion på et heaviside strøminput (se II b).

Pilene i skemaet angiver integration m.h.t. tid for tidsresponsefunktionerne og division med $i\omega$ for frekvens-responsefunktionerne. Rigtigheden af ovennævnte indses let hvad angår de vandrette pile. F.eks. angiver $\hat{Y}(t)$ og $\hat{J}(t)$ hhv. strøm- og forskydningsoutput for samme heaviside-spændingsinput dvs

$$\hat{J}(t) = \int_0^t \hat{Y}(\tau) d\tau, \text{ og tilsvarende } \hat{M}(t) = \int_0^t \hat{Z}(\tau) d\tau$$

(bemærk at inertansen M og memoryfunktionen M_{oi} er forskellige responsefunktioner).

Knap så simpelt er det at vise rigtigheden af de lodrette

pile. Som hjælp hertil ser vi på egenskaber af den såkaldte deltafunktion:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(x) \cdot dx = f(0)$$

IV

samt

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} E(x)$$

Delta funktionen er altså kun forskellig fra 0 for $x=0$ men har alligevel arealet 1.

Lad os f.eks. betragte pilen fra F til Y.

Y: Admitansfunktionen $\hat{Y}(t)$ er defineret ved kraftinput $e(t) = e_0 \cdot E(t)$ med $e_0=1$ [enhed for kraft f.eks. Newton, Volt etc.] og strømoutput $f(t)$. Af ligning II fås

$$\bar{Y} \quad \hat{Y}(t) = \int_0^t M_{ef}(\tau) d\tau$$

hvor M_{ef} angiver memoryfunktionen overfor kraftinput og strømoutput.

F: Lethedsfunktionen $\hat{F}(t)$ er defineret ved heaviside-impulsinput $p_h(t)$ og strømoutput $f(t)$. Da $e(t) = \frac{d}{dt} p(t)$ kan vi som følge af IV vælge at opfatte $\hat{F}(t)$ som resultat af et deltafunktions spændingsinput dvs

$$\hat{F}(t) = \int_0^{\infty} M_{ef}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (\text{se I})$$

eller med $t-\tau = \tau^*$

$$\hat{F}(t) = \int_t^{-\infty} M_{ef}(t-\tau^*) \delta(\tau^*) d\tau^*$$

$$\text{VI} \quad \hat{F}(t) = M_{ef}(t) \quad (\text{se IV})$$

Af $\bar{V}$ fås så

$$\underline{\hat{Y}(t) = \int_0^t \hat{F}(\tau) d\tau}$$

Tilsvarende kan det vises at

$$\underline{\hat{Z}(t) = \int_0^t \hat{G}(\tau) d\tau}$$

Af definitionen på frekvensresponse funktionen $\tilde{Y}(\omega)$ fås af III

$$\text{VII} \quad \tilde{Y}(\omega) = \int_0^\infty M_{ef}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Analogt til fremgangsmåden ovenfor fås

$$\tilde{F}(\omega) = i\omega \int_0^\infty M_{ef}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

dvs

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{i\omega}$$

Tilsvarende fås

$$\tilde{Z}(\omega) = \frac{\tilde{G}(\omega)}{i\omega}$$

Opgave: Prøv selv at gennemføre beviset for de resterende pile.

Pilene i responsefunktionsskemaet viser hvordan man kan bevæge sig inden for to klasser af responsefunktioner nemlig J, Y og F som den ene og G, Z og M som den anden klasse.

I frekvensbilledet kan man komme fra en klasse af funktioner til en anden gennem følgende relationer:

$$\tilde{Y}(\omega) = \frac{1}{\tilde{Z}(\omega)} \quad , \quad \tilde{J}(\omega) = \frac{1}{\tilde{G}(\omega)} \quad , \quad \tilde{M}(\omega) = \frac{1}{\tilde{F}(\omega)} \quad .$$

I tidsbilledet er dette kun muligt ved at gå over frekvensfunktionerne ved følgende transformationer:

$$\tilde{Y}(\omega) = \int_0^{\infty} \hat{F}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{se VI og VII})$$

tilsvarende

$$\text{VIII} \quad \tilde{J}(\omega) = \int_0^{\infty} \hat{Y}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\tilde{Z}(\omega) = \int_0^{\infty} \hat{G}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Vi har nu etableret et fuldstændigt sæt af responsefunktioner og vi er i stand til at beregne en vilkårlig af de ialt 2 x 6 funktioner blot vi kender én.

Responsefunktionerne er defineret gennem de matematiske standard funktioner $e^{i\omega t}$ og $E(t)$, samt de hertil svarende input-output relationer. Input-output variablene er generelle og er alene bestemt ved deres egenskab som bærere af energien i systemets vekselvirkning med omgivelserne.

MODELLERING

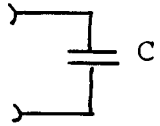
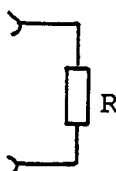
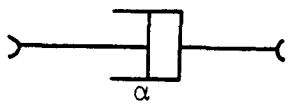
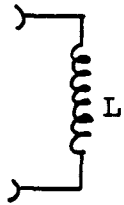
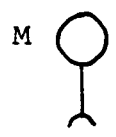
Lad os tænke på et fysisk system med hvilket vi kan vekselvirke gennem et lineært ydre "energibånd". Vi ønsker nu at modellere systemets indre egenskaber ved et modelsystem, hvis response egenskaber formelt er identiske med det fysiske systems, og hvis bestanddele står i et korrekt energetisk vekselvirkningsforhold, korresponderende til hvad man kunne kalde "elementarprocesserne" i det fysiske system. Den færdige model vil nu fremstå som et netværk af forbundne elementardele ligesom et elektrisk netværk af modstande, kondensatorer etc.

I dette kursus har vi valgt det elektriske netværk som modelredskab. Det har imidlertid vist sig, at man kan formulere et mere generelt modelsprog, som i flere situationer gør modelarbejdet nemmere. Denne "Energi-bånd-graf"-formalisme er behandlet i Tekst nr.8: "Dynamik og Diagrammer", P.V.C. (IMFUFA tekstserie).

Der kræves ialt 12 standardkomponenter i et sådant modelsprog. Dette kursus vil nøjes med at behandle et "begynderbyggesæt", der ud over elektronikkens strøm- og spændingsgenerator kun består af tre komponenter, nemlig modstande, kondensatorer og selvinduktioner.

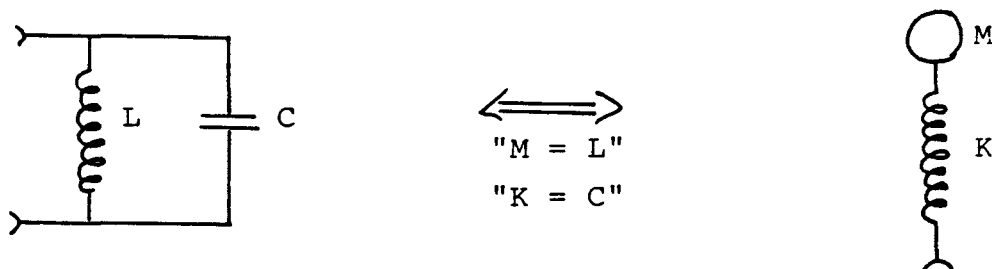
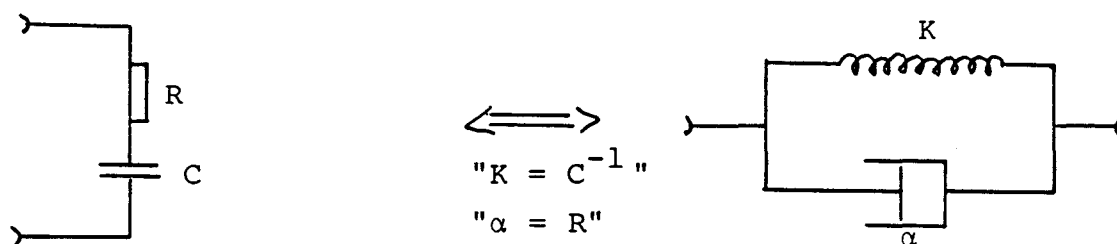
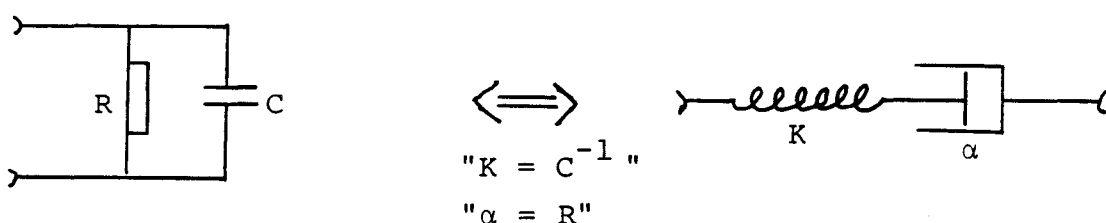
Dette indskrænker modelleringsmulighederne til kun at omfatte fysiske systemer, hvori der ikke finder transformationer mellem forskellige energiformer sted.

I nedenstående skema er angivet egenskaberne af de tre elektriske grundelementer, samt deres mekaniske analoge elementer i en mekanisk udgave af "modelbyggesættet".

Symbol	Responsefunktion	Strøm-spændingsrel.
 Kondensator med kapacitans C	$\tilde{J}(\omega) = \hat{J}(t) = J_0$ $\tilde{G}(\omega) = \hat{G}(t) = G_0$ $J_0 = G_0^{-1}$	$e(t) = G_0 \int_0^t f(\tau) d\tau$ $G_0 = \begin{cases} C^{-1} & \text{el.} \\ K & \text{mek.} \end{cases}$
 mekanisk fjeder med fjederkonstant K	$\tilde{Y}(\omega) = \hat{Y}(t) = Y_0$ $\tilde{Z}(\omega) = \hat{Z}(t) = z_0$ $z_0 = Y_0^{-1}$	$e(t) = z_0 f(t)$ $z_0 = \begin{cases} R & \text{el.} \\ \alpha & \text{mek.} \end{cases}$
 Resistor med modstand R  Stempel med gnidningskoefficient α	$\tilde{F}(\omega) = \hat{F}(t) = F_0$ $\tilde{M}(\omega) = \hat{M}(t) = M_0$ $F_0 = M_0^{-1}$	$f(t) = F_0 \int_0^t e(\tau) d\tau$ $F_0 = \begin{cases} L^{-1} & \text{el.} \\ M^{-1} & \text{mek.} \end{cases}$
 Induktor med selv-induktion L  partikel med masse M		

Af skemaet ses, at der til hvert grundlement svarer to frekvens- og tidsuafhængige responsefunktioner. Bemærk endvidere at realdelen af den frekvensafhængige admitans for både kondensator og induktor er nul, hvilket er i overensstemmelse med at disse elementer optræder som tabsfri bærere af henholdsvis potentiel og kinetisk energi.

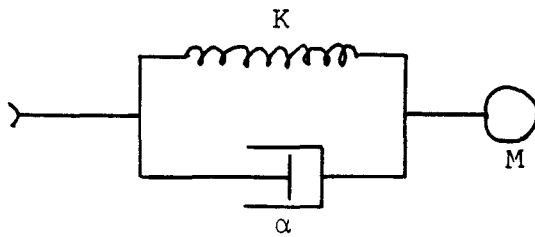
I det følgende vises nogle eksempler på sammensatte mekaniske og elektriske systemer som er modelmæssigt ækvivalente.



Af eksemplerne fremgår det, at den elektriske serieforbindelse er ækvivalent med den mekaniske parallellforbindelse og omvendt. Dette hænger sammen med at forskydningshastighed og strøm samt kraft og spænding er ækvivalente responsevariable.

Opgave:

Angiv den elektriske modelækvivalent til nedenstående mekaniske system



Beregn den mekaniske impedans $\tilde{Z}(\omega)$ og $\tilde{Z}(t)$ samt admitansen $\tilde{F}(\omega)$ og $\hat{Y}(t)$.

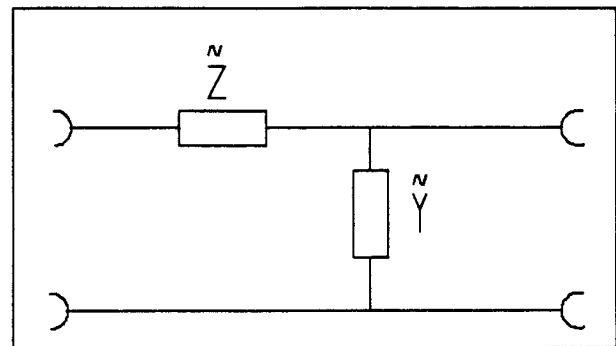
KÆDELINIEN

Kædelinien anvendes ofte i forbindelse med modellering af komplekse systemer med visse symmetriegenskaber. Vi skal se hvorledes kædelinien i to varianter kan modellere h.h.v. lydbølger og varmediffusion.

En kædes led defineres som en energetisk toport , dvs et system som vekselvirker med sine omgivelser gennem to "kanaler" .

Nedenstående figur viser et simpelt men ikke trivielt eksempel på et sådant kædeled . Det element som i figuren er betegnet

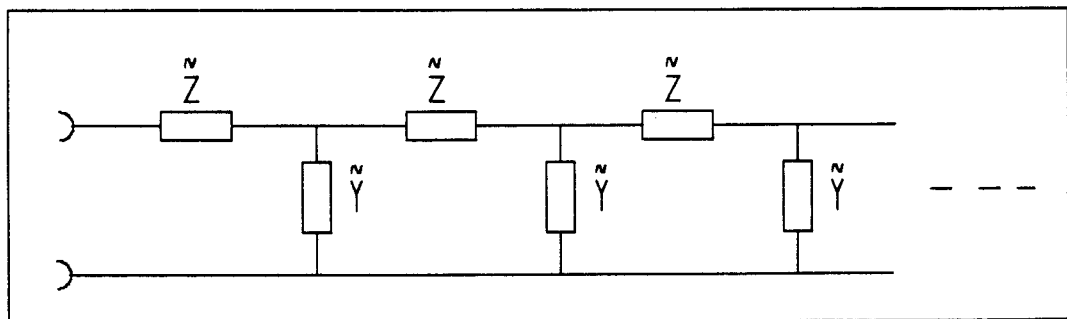
med $\tilde{Z}$, bestemmer leddets "langsgående" modstand , medens $\tilde{Y}$ bestemmer leddets "tværgående" ledningsevne . Vi vil nu finde impedansen af en halvuendelig kæde , dvs vi søger impedansen af fig.1's



Figur 1

venstre port når den højre er

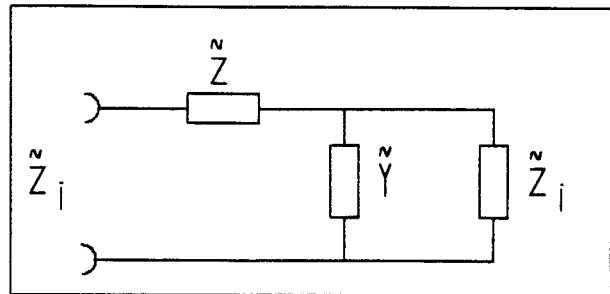
forbundet med en uendelig følge af led identisk med leddet på fig.1 . Bemærk at $\tilde{Z}$ og $\tilde{Y}$ begge kan være frekvensafhængige .



Figur 2

Antager vi nu at spænding og strøm i det n'te led konvergerer mod nul for n gående mod uendelig kan kæden i fig.2 ækvivaleres med nedenstående simple netværk .

Fig 3 udtrykker det forhold at impedansen af den halvuelige kæde ikke ændres når vi fjerner det første led i kæden . Ved at benytte de sædvanlige regneregler for beregning af sammensatte systemers impedans fås en ligning til bestemmelse af $\tilde{Z}_1$.



Figur 3

$$\tilde{Z}_1 = \tilde{Z} + \frac{1}{\tilde{Y} + \tilde{Z}_1^{-1}} \quad \text{Lign.1}$$

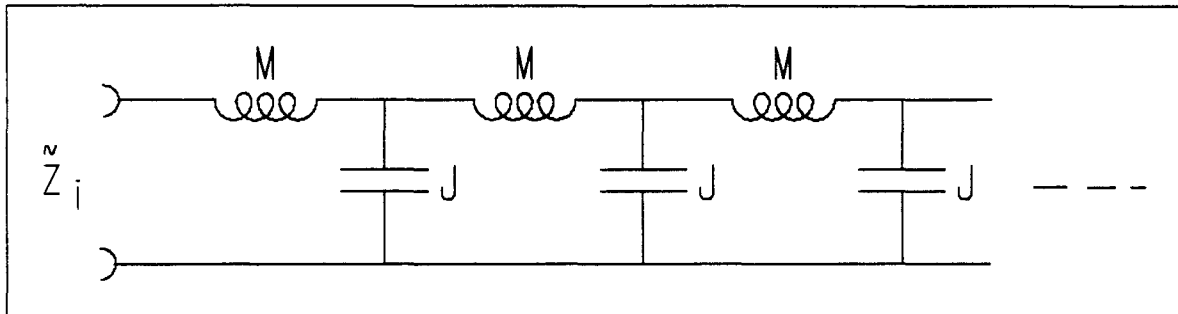
Af lign.1 fås i grænsen for $|\tilde{Z} * \tilde{Y}| \ll 4$

$$\tilde{Z}_1 = \sqrt{\frac{\tilde{Z}}{\tilde{Y}}} \quad \text{lign.2}$$

$\tilde{Z}_1$ kaldes også kædeliniens karakteristiske impedans .

Vi kan nu vælge $\tilde{Z}$ og $\tilde{Y}$ vilkårligt ,men vil til en start behandle to vigtige specialtilfælde (i det følgende vil vi angive en frekvensuafhængig responsefunktion ved dens bogstavsymbol men uden tilde) : I tilfælde 1. vælges $\tilde{Z} = i\omega M$ og $\tilde{Y} = i\omega J$ hvor M og J angiver henholdsvis den frekvensuafhængige inertans og krybefunktion (kapasitans) , og i tilfælde 2. vælges $\tilde{Z} = Z$ og $\tilde{Y} = i\omega J$.

BØLGEKÆDELINIEN



Figur 4

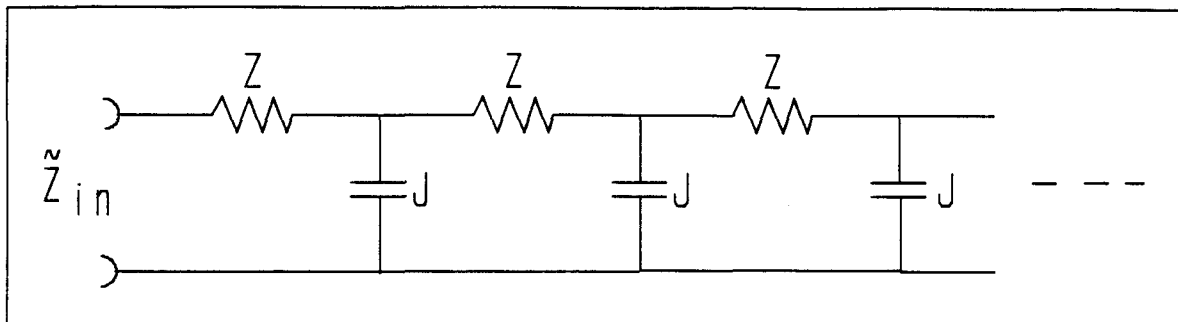
Bølgekædeliniens led består af to elementer hvis impedanser begge er rent imaginære ,dvs ikke dissiperer energi (se afsnit om energidissipation) , i et mekanisk system består leddet således af en masse og en fjeder og udgør dermed en harmonisk oscillator. Af lign.2 fås nu

$$\tilde{Z}_i = \sqrt{\frac{M}{J}} \quad \text{for } \omega^2 MJ \ll 4 \quad \text{lign.3}$$

opgaver

- 1) tegn den mekaniske version af ovenstående model
- 2) af lign.3 ses at bølgekædeliniens karakteristiske impedans er reel og den dissiperer dermed energi , hvordan kan dette forenes med det forhold at kædens led består af ikke dissiperende elementer ?
- 3) forklar hvorfor en endelig bølgekædelinie afsluttet med den karakteristiske impedans kan ækvivaleres med en halvuendelig kædelinie

DIFFUSIONSKÆDELINIEN



Figur 5

Her er $\tilde{Z}=Z$ og $\tilde{Y}=i\omega J$ og af lign.2 fås

$$\tilde{Z}_1 = \sqrt{\frac{Z}{i \cdot \omega \cdot J}} \quad \text{for} \quad |\tilde{Z} \cdot \tilde{Y}| = Z \cdot J \cdot \omega \ll 4 \quad \text{lign.4}$$

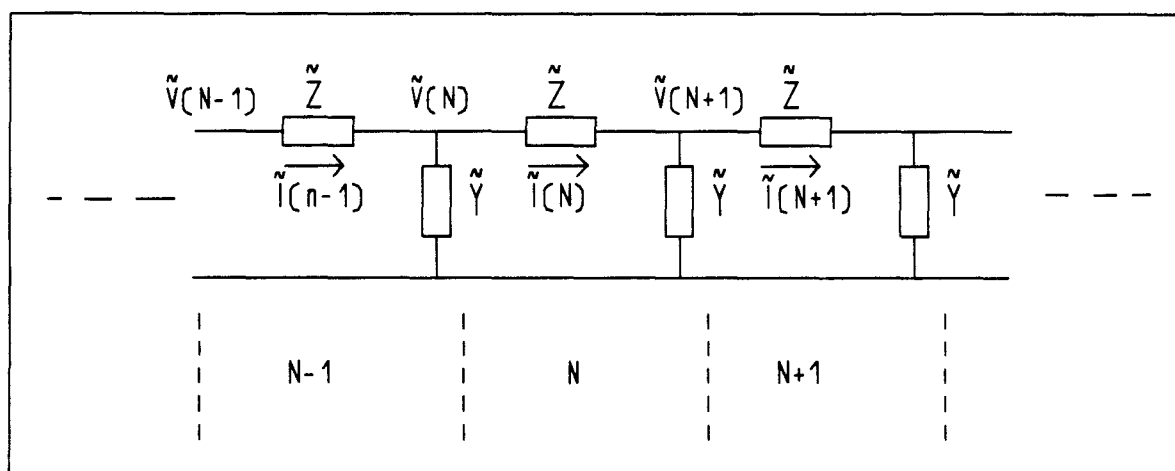
Vi ser at kædens led består af en kombination af dissipative og reversible (dvs ikke dissipative) elementer, samme kombination kunne vi have opnået ved at vælge $\tilde{Z}=i\omega M$ og $\tilde{Y}=Y$. Selvom sidstnævnte version af kædelinien har en anden karakteristisk impedans (reciprok), ligner den på mange måder (se senere) den på fig5 viste, og den betegnes også som en diffusionskæde.

opgave

1) tegn de mekaniske versioner af hhv den på fig.5 viste og den netop omtalte diffusionskædelinie.

TRANSPORT I KONTINUERTE MEDIER

Lad os betragte den generelle kædelinie igen



Figur 6

Vi ser på tre sammenhængende led i kæden , nemlig nr. N-1 , N , N+1 , og ønsker at finde en ligning som forbinder de tre kædeleds inputspændinger (NB! $\tilde{V}$ og $\tilde{I}$ angiver fasevektorer for hhv. spænding og strøm , vi benytter de elektriske symboler V og I men burde egentlig havde valgt e og f (se p 15) for den generaliserede spænding og strøm). Af Kirchhoffs maskeligninger anvendt på hhv led N-1 og N samt led N og N+1 (se fig.6) fås

$$\tilde{V}(N+1) - \tilde{V}(N) = -\tilde{I}(N) * \tilde{Z}$$

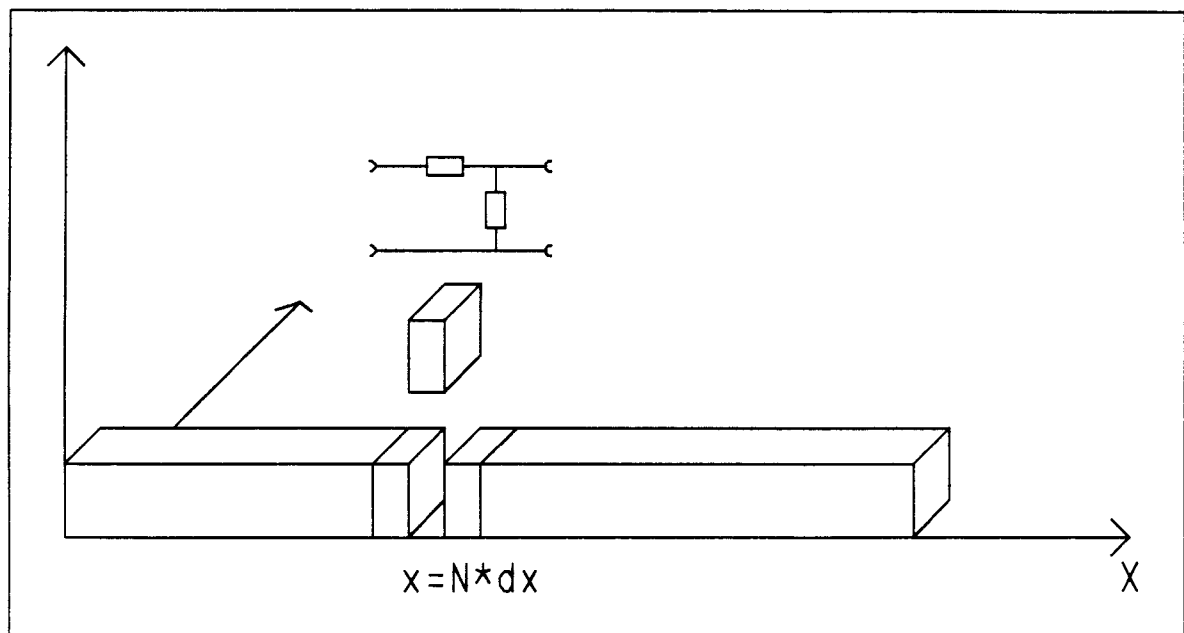
Af knudepunkt.lign. fås

$$-\tilde{I}(N) + \tilde{I}(N-1) = \tilde{Y} * \tilde{V}(N)$$

Ved indsættelse fås

$$[\tilde{V}(N+1) - \tilde{V}(N)] - [\tilde{V}(N) - \tilde{V}(N-1)] = \tilde{Z} * \tilde{Y} * \tilde{V}(N) \quad \text{lign.5}$$

Vi skal nu anvende kædelinien som model på energitransport i et kontinuert medie (tænk på transport af energi via f.eks lydbølger, elektromagnetiske bølger varmediffusion etc.) Lad mediet for transport være en stang(halvuendelig), dvs. vi ser på transport i en dimension.



Figur 7

Vi skærer stangen op i skiver med tykkelsen dx . Til hver skive svarer der således en position $x = N * dx$ hvor N angiver den aktuelle skives nr. i rækken. Vi antager nu at hver skive kan modelleres ved et kædeled hvis impedans og admitans begge er

proportional med tykkelsen dx , dvs. $Z = \tilde{Z}_1 * dx$ og $Y = \tilde{Y}_1 * dx$

hvor $\tilde{Z}_1$ og $\tilde{Y}_1$ angiver stangens specifikke impedans hhv. admitans . Vi kan nu skrive lign.5 som følger :

$$\frac{\frac{\tilde{V}(x+dx) - \tilde{V}(x)}{dx} - \frac{\tilde{V}(x) - \tilde{V}(x-dx)}{dx}}{dx} = \tilde{Z}_1 * \tilde{Y}_1 * \tilde{V}(x) \quad \text{lign.6}$$

Lader vi nu $dx \rightarrow 0$ får vi den til kædelinien hørende differentialligning :

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(x)}{\partial x^2} = \tilde{Z}_1 * \tilde{Y}_1 * \tilde{V}(x) \quad \text{lign.7}$$

Tilsvarende fås

$$\frac{\delta \tilde{V}(x)}{\delta x} = -\tilde{Z}_1 * \tilde{I}(x) \quad \text{lign.7a}$$

Vi ser at harmoniske svingninger som udbreder sig i mediet (stangen) bestemmes af en sædvanlig 2.ordens differentialligning i den stedafhængige fasevektor (komplekse amplitude) , hvor koefficienten er bestemt af mediets specifikke admitans og impedans .

Disse er almindeligvis frekvensafhængige , hvilket som vi skal se fører til en partiel diff.lign. for det reelle fysiske signal , som både afhænger af tid og sted .

opgave :

- 1) Vis at den karakteristiske impedans for et kontinuum (fig.7) , er givet ved

$$\tilde{Z}_k = \sqrt{\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Y}_1}} \quad \text{lign.8}$$

- 2) Idet vi definerer bølgevektoren k ved $k^2 = -\tilde{Z}_1 * \tilde{Y}_1$ skal det vises at

$$\tilde{V}(x) = \tilde{A}_- * e^{i*k*x} + \tilde{A}_+ * e^{-i*k*x} \quad \text{lign.9}$$

er en løsning til ligning 7 .

- 3) Vis at

$$V(x, t) = \text{real}(\tilde{A}_+ * e^{-i*k*x} * e^{i*\omega*t}) \quad \text{lign.10}$$

repræsenterer en bølge som udbreder sig i x-aksens positive retning med hastigheden v , er eksponentielt dæmpet med dæmpningskonstanten α og har bølgelængden λ givet ved følgende udtryk:

$$v = \frac{\omega}{\text{real } k} \quad \alpha = \text{imag } k \quad \lambda = \frac{2\pi}{\text{real } k} \quad \text{lign.11}$$

Af ligning 11 fås den velkendte sammenhæng mellem lydhastighed, bølgelængde og frekvens : $v = \lambda\omega / 2\pi = \lambda v$

Vi betragter nu , stadig i det generelle tilfælde , et endeligt kontinuert medie (f.eks. en stang med længden L) . Størrelsen af $\tilde{A}_+$ og $\tilde{A}_-$ i den generelle løsning til lign.7 kan så være bestemt af grænsebetingelserne $\tilde{V}(0)$, $\tilde{V}(L)$, $\tilde{I}(0)$ og $\tilde{I}(L)$. Lad os tænke os at vi i $x=-L$ påvirker mediet med et

strøminput dvs. $\tilde{I}(-L)=I_0$ og i $x=0$ "afslutter mediet med en impedans $\tilde{Z}_a$. Af lign.7 og 7a får vi til bestemmelse af $\tilde{A}_+$ og $\tilde{A}_-$

$$\tilde{V}(x) = \tilde{A}_- * e^{-i*k*x} + \tilde{A}_+ * e^{i*k*x} \quad \text{lign.12}$$

$$\tilde{I}(x) = \frac{i*k}{\tilde{Z}_1} * (\tilde{A}_- * e^{i*k*x} - \tilde{A}_+ * e^{-i*k*x})$$

eller vha. lign.8 og definitionen på k

$$\tilde{I}(x) = \frac{1}{\tilde{Z}_k} * (\tilde{A}_+ * e^{-i*k*x} - \tilde{A}_- * e^{i*k*x}) \quad \text{lign.13}$$

som med grænsebetingelserne

$$\tilde{V}(0) = \tilde{I}(0) * \tilde{Z}_a \quad \text{og} \quad \tilde{I}(-L) = I_0 \quad \text{lign.14}$$

fastlægger $\tilde{A}_+$ og $\tilde{A}_-$. Ved hjælp af grænsebet.for $x=0$ sammen med lign.-12 og 13 kan forholdet mellem de to amplituder bestemmes. Kaldes dette forhold for $\tilde{R}$ ($\tilde{R}$ kan opfattes som reflektionskoefficienten hidrørende fra mediets afslutningsimpedans) fås efter nogle regninger

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{A}_-}{\tilde{A}_+} = \frac{\tilde{Z}_a - \tilde{Z}_k}{\tilde{Z}_a + \tilde{Z}_k} \quad \text{lign.15}$$

Det ses som forventet at $\tilde{R}=0$ for $\tilde{Z}_a=\tilde{Z}_k$. Tilsvarende fås med randbetingelsen i $x=-L$ et udtryk for mediets generaliserede impedans

$$\tilde{Z}_1 = \frac{\tilde{V}(-L)}{\tilde{I}(-L)} = \tilde{Z}_k * \frac{e^{i*k*L} + \tilde{R} * e^{-i*k*L}}{e^{i*k*L} - \tilde{R} * e^{-i*k*L}} \quad \text{lign.16}$$

Igen ses det som ventet at $\tilde{Z}_1=\tilde{Z}_k$ for $\tilde{R}=0$ eller $\text{imag}kL \gg 1$.

I det følgende vil vi igen se på de to specialtilfælde :
bølgetransmission samt varmediffusion .

BØLGETRANSMISSION

Vi ser på tilfældet $\tilde{Z}_1 = i\omega\tilde{M}_1$ og $\tilde{Y}_1 = i\omega J_1$, hvor M_1 og J_1 angiver den specifikke frekvensuafhængige inertans hhv. kapacitans for mediet, af lign.7 fås

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(x)}{\partial x^2} = M_1 * J_1 * (i\omega)^2 * \tilde{V}(x) \quad \text{lign.17}$$

Ved at multiplicerer lign.17 med $\exp(i\omega t)$ og benytte definitionen på fasevektoren, dvs $V(x,t) = \text{real}(\tilde{V}(x) * \exp(i\omega t))$ fås

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} * \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{hvor } v = (M_1 * J_1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{lign.18}$$

Denne ligning (som benævnes bølgeligningen) gælder som vi har set det for harmoniske signaler, men det kan vises (Fouries sætning) at ligningen kan udvides til at gælde generelt. I udtrykket angiver v signalhastigheden, i overensstemmelse med at den vilkårlige funktion $f(x-vt)$ altid er løsning til lign.18

opgave

- 1) Find signalhast. i et 50 ohm koaksialkabel med $J_1=100\text{pF/m}$
- 2) Idet Youngs modul E defineres ved $dK=(E \cdot A/L) \cdot dL$ hvor dK/dL angiver kraft pr. længdeforøgelse af en stang med tværsnit A og længde L , skal i finde den mekaniske karakteristisk impedans, samt lydhastighed for en halvuendelig tynd stang. (find E og massefylde for f.eks. aluminium i "Gummibibelen"). Lad nu stangen have længden L og lad os tænke os at vi påvirker denne med et hastighedsinput i den ene ende. Benyt ligning 15 og 16 til at bestemme stangens impedans som funktion af frekvensen når stangens anden ende er hhv. fri og fastspændt.
- 3) Hvordan ser stangens deformationshastighed og spænding ud som funktion af x , i de forskellige resonanspunkter for $\tilde{Z}_1$
- 4) Mål $\tilde{Z}_1$ af en endelig transmissionskæde (22 led) som vist på figur 4 i de to tilfælde, hvor det sidste led efterlades hhv. Åben og kortsluttet. Bestem de to laveste resonansfrekvenser og mål $\tilde{V}(n)$ ved disse. Sammenhold resultaterne med ovenstående beregning af $\tilde{V}(x)$.

DIFFUSION

Diffusion i en dimension modelleres ved diff.kæden (se fig 5), hvis led består af impedansen $\tilde{Z}=Z_1*dx$ og admitansen $\tilde{Y}=i\omega J_1*dx$, her er impedansen reel medens admitansen er imaginær

Af lign 7 fås så

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(x)}{\partial x^2} = Z_1 * J_1 * i * \omega * \tilde{V}(x) \quad \text{lign.19}$$

Analogt til transformationen lign.8 -> lign.8a fås

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = D^{-1} * \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \quad \text{hvor} \quad D = (Z_1 J_1)^{-1} \quad \text{lign.20}$$

Vi definerer nu ladningstætheden $q(x, t)$ som

$$q(x, t) = \frac{dQ(x, t)}{dx} = J_1 * V(x, t) \quad \text{lign.21}$$

Hvor $dQ(x, t)$ angiver ladningen på den N'te kapacitor med kapaciteten $J_1 * dx$ og med position x . Ved indsættelse i lign.10 fås så

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} = D^{-1} * \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad \text{lign.22}$$

Den samlede ladning Q_0 som befinder sig i en isoleret diffusionskædelinie er bevaret dvs.

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x, t) * dx$$

er uafhængig af t .

opgave: Vis at

$$q(x, t) = \frac{Q_0}{\sqrt{4 * \pi * D * t}} * e^{\frac{-x^2}{4 * D * t}} \quad \text{lign.23}$$

er en løsning til lign. 22 og at

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x, t) * dx = Q_0 \quad \text{lign.24}$$

Tænker vi nu på en uendelig diffusionslinie som vi kan vekselvirke med gennem et energibånd anbragt i $x=0$, og anbringer vi til $t=0$ en ladning Q_0 i $x=0$, vil ladningen brede sig ud i begge retninger og ladningstætheden vil som funktion af tid og sted være givet ved lign.23 , ved at anvende lign.21 sammen med lign.23 fås så spændingen som funktion af tid og sted.

$$V(x, t) = \frac{Q_0}{J_1 * \sqrt{4 * \pi * D * t}} * e^{\frac{-x^2}{4 * D * t}} \quad \text{lign.25}$$

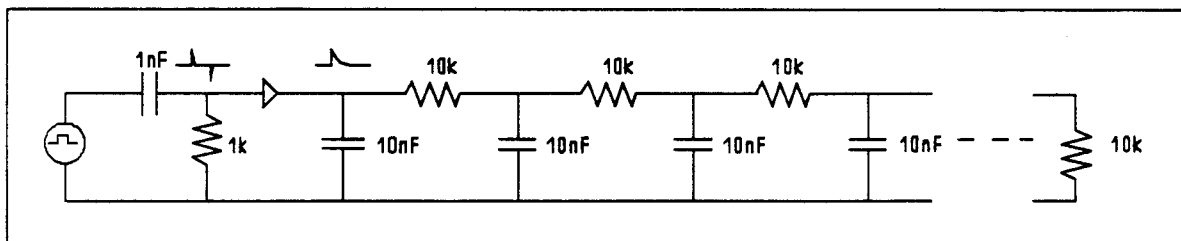
Som model kan vi tænke på to halvuendelige kæder , en til hver retning på x-aksen , parallelforbundet i $x=0$.

opgave

Gør rede for at ladningsfordelingen i hver af to parallelforbundne halvuendelige diffusionskæder er den samme som ladningsfordelingen i en enkel af disse diffusionskæder når blot ladningsinputet til denne halveres .

Anvend funktionsgenerator og påtryk et "firkantsignal" med en varighed lang nok til at alle kondensator-spændinger på nedenstående diagram når at komme i ligevægt . Mål spændingen som funktion af kondensator nr. og tid

Anvend lign. 25 og beregn den tidsafhængige spænding på hver af figurens kondensatorer. Hvorledes får den sidste modstand som kortslutter diffusionskæden indflydelse på denne sammenhæng og hvorfor er den anbragt ?



figur 9

I ovenstående diagram er firkantgeneratorens spænding koblet til diffusionskæden gennem et differentierende RC-led med koblingskondensatoren J_k (1nF) og en diode . Dioden sikrer at den tilførte ladning (varmemængde) Q_0 ikke løber baglæns ud igen men diffunderer videre gennem diffusionskæden.

| Opgave: vis at

$$Q_0 = \frac{J_K * J}{J_K + J} * V_0$$

hvor V_0 og J angiver hhv. genratorens spænding og kapacitansen af diffusionskædens admitanselement .

Vi har tidligere set at impedansen af en halvuendelig diffusionslinie er givet ved

$$\tilde{Z}(\omega) = \sqrt{\frac{Z_1}{i * \omega * J_1}} = \frac{1}{J_1 * \sqrt{i * \omega * D}} \quad \text{lign.26}$$

For at vise konsistensen af de anvendte modeller ser vi igen på et lokalt ladnings input i $x=0$ til den uendelige diffusionslinie , givet ved $Q(t)=Q_0 * E(t)$. Responset $V(0,t)$ som fås af lign.25 fastlægger så den tidsafhængige stivhedsfunktion $\tilde{G}(t)$

$$\hat{G}(t) = \frac{V(0, t)}{Q_0} = (J_1 \sqrt{\pi * 4 * D * t})^{-1} \quad \text{lign.27}$$

|Opgave Ved transformationen (se p21)

$$\tilde{Z}(\omega) = \int_0^\infty \hat{G}(\tau) * e^{-i * \omega * \tau} d\tau$$

skal det vises at (anvend integrationstabel)

$$\tilde{Z}(\omega) = \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{Z_1}{i * \omega * J_1}}$$

Hvordan er dette udtryk konsistent med udtrykket for impedansen af en halvuendelig diffusionskæde ?

VARMEDIFFUSION

Varmen udbreder sig i et stof gennem to mekanismer :

1) Varmelagring

Når en lille varmemængde dQ føres fra et reservoir med temperatur T_0 til en lille stofprøve med volumen dV med temperaturen T , øges det "termiske potentiale" af stofprøven (dvs. dennes evne til at udføre et arbejde) med størrelsen $dQ \cdot (T - T_0) / T$. For små temperaturændringer af stofprøven i forhold til T_0 kan faktoren $(T - T_0) / T$ (Carnot-faktoren) med god tilnærmelse erstattes med størrelsen $dT / T_0 = (T - T_0) / T_0$. Med dT / T_0 som generaliseret spænding og dQ / dt som generaliseret strøm vil produktet $dT / T_0 \cdot dQ / dt$ således angive lagringshastigheden af termisk potentiel energi (Exergi), i overensstemmelse med kravet til energibandsvariable (se afsnit om responsefunktioner).
For små værdier af dQ haves

$$dT = \frac{dQ}{c_p \cdot \rho \cdot dV} \text{ hvor } \rho = \text{massfylde og } c_p = \text{specifik varmfylde}$$

dvs. den generaliserede termiske kapacitans er givet ved

$$J = c_p \cdot \rho \cdot dV \cdot T_0 \quad \text{lign.28}$$

2) Varmeledning

Varmestrømmen i et stof drives af temperaturforskelle. Den

samlede varmestrøm dQ/dt gennem et tværsnitareal A afhænger af temperatur gradienten dT/dx som følger

$$\frac{dQ}{dt} = -A \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dx} \quad \lambda = \text{specifik varmeledningsevne} \quad \text{lign.29}$$

I tre dimensioner ser varmeledningsligningen således ud

$$\vec{I} = -\lambda \cdot \nabla T \quad \text{hvor } \vec{I} = \text{strømtæthed og } \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Vi ser nu på varmeledning i en lang tynd stang , hvor varmen strømmer i een retning . Hvis vi som i fig.7 skærer stangen i små skiver med tykkelsen dx og tværsnittet A vil en sådan skives generaliserede termiske kapacitans være givet ved

$$J = A \cdot dx \cdot c_p \cdot \rho \cdot T_0 \quad \text{og} \quad J_1 = A \cdot c_p \cdot \rho \cdot T_0 \quad \text{lign.30}$$

Tilsvarende fås for den generaliserede impedans

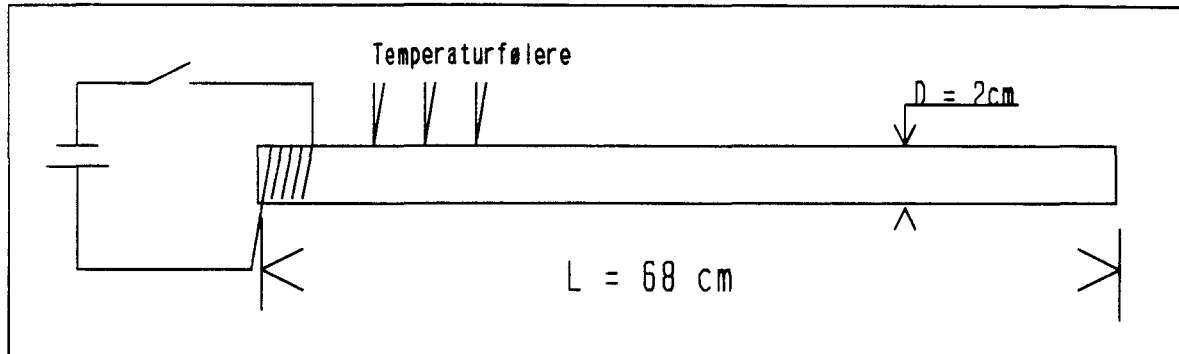
$$Z = \frac{dx}{T_0 \cdot A \cdot \lambda} \quad \text{og} \quad Z_1 = \frac{1}{T_0 \cdot A \cdot \lambda} \quad \text{lign.31}$$

Vi kan nu anvende ligningerne 20 og 22 til bestemmelse af varmens forplantning ned gennem stangen ved i lign.20 at indføre

følgende substitutioner

$$V = \frac{dT}{T_0} \quad \text{samt} \quad D = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \quad \text{lign.32}$$

Forsøg med varmediffusion i cobberstang



figur 10

En rund cobberstang er forsynet med 16 temperaturfølere som er anbragt i en indbyrdes afstand på 4 cm , samt en varmevikling på 30 ohm (se ovenstående figur). Temperaturfølerne er forbundet til en computer gennem et dataopsamlingskort . Samtlige temperaturer registreres som elektriske spændinger som funktion af tiden, spændingen måles i hele tal med enheden 0.1 mV. Forsøget foregår nu på følgende måde :

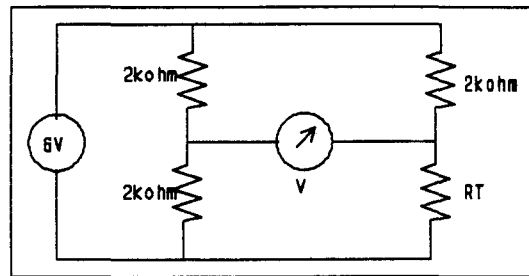
Til tiden 0 tændes for strømmen i 30 sec. . Temperaturfordelingen måles nu i de efterfølgende ca. 15 min. indtil temperaturen i sidste føler begynder at ændre sig.

opgave

Beregn temperaturen i hver af de 16 følere som funktion af tiden når der til $t=0$ afsættes 30 watt i 30 sec. i varmeviklingen . Cobber har følgende termiske konstanter :

$$c_p = .38 \cdot 10^3 \text{ joule} \cdot K^{-1} \cdot Kg^{-1} \quad \rho = 8.96 \cdot 10^3 Kg \cdot m^{-3} \quad \lambda = 385 \text{ Watt} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$$

Temperaturfølerne består af små temperaturafhængige modstande som er anbragt inde i cobberstangen . Spændingen måles i en "Wheatstone's bro" som vist på nedenstående figur 11



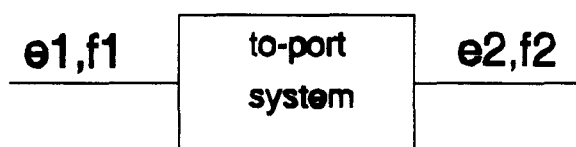
figur 11

Her er $R_T = 2\text{k}\Omega$ ved 20°C med en relativ ændring på 0.7% pr grad
opgave

Beregn spændingen som funktion af temperaturen når strømmen i måleinstrumentet sættes til nul.

Transduceren

I Afsnittet, Modellering, har vi omtalt tre standardelementer for energetiske 1.porte . vi vil her behandle to eksempler på såkaldte toporte som udmærker sig ved ikke at disipere energi.



En energetisk toport er et system med hvilket man kan vekselvirke gennem to kanaler. De to sæt af energibandsvariable e_1, f_1 og e_2, f_2 behøver ikke at have samme fysiske dimension.

En transducer er en energetisk toport som omsætter energi uden tab eller optagelse af indre energi.

For en lineær toport gælder der følgende generelle relation :

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} \\ o_{21} & o_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

hvor O_{ij} kaldes for overføringsmatricen

Hvis toporten ikke lagre eller dissiperer energi må der for øjebliksværdierne af e og f gælde:

$$e_2 * f_2 = e_1 * f_1$$

Opgave: vis at der findes netop to former af O_{ij}

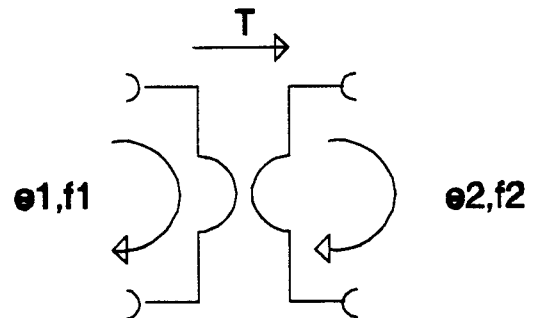
a) Transformatoren $O_{ij} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}$

b) Gyratoren $O_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ G^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

Transformatoren :

Spændingsinput: $e_2 = T * e_1$

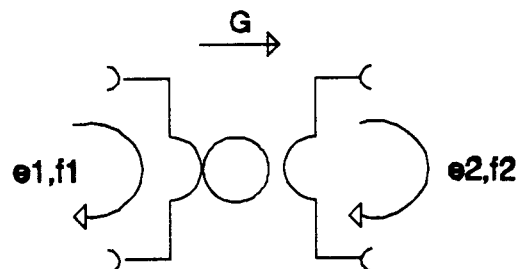
Strøminput: $f_2 = T^{-1} * f_1$



Gyratoren :

Spændingsinput: $f_2 = G^{-1} * e_1$

Strøminput: $e_2 = G * f_1$



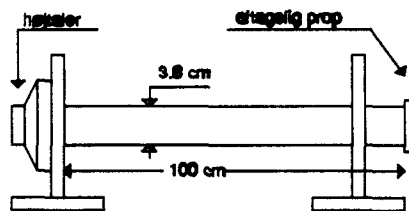
D.v.s. at vi f.eks. med spændingsinput styrer spændingsoutput med transformatoren og strømoutput med gyratoren. Pilene på de to ovenstående figurer angiver orientering for energien samt retning fra primær til sekundær side af transduceren.

Som et simpelt eksempel på en transformator kan nævnes en vippe, her transformeres mekanisk energi til mekanisk energi, transformatorforholdet er 1 hvis vippens arme er lige lange, og er ellers givet ved forholdet mellem armenes længder. Som et eksempel på en gyrator kan nævnes et drejespoleinstrument, her fungerer selve drejespolen med magnetfelt som gyrator idet et strøminput til instrumentet gennem dets vekselvirkning med magnetfeltet resulterer i et krafmoment på drejespolen (prøv selv at finde på andre eksempler).

Opgave Find indgangsimpedansen $\tilde{Z}_i$ af h.h.v. transformator og gyrator når disse belastes med impedansen $\tilde{Z}_a$ på output-siden

Forsøg med højttaler og resonansrør

Et resonansrør med længden 100 cm er koblet til en højttaler efter nedenstående figur.



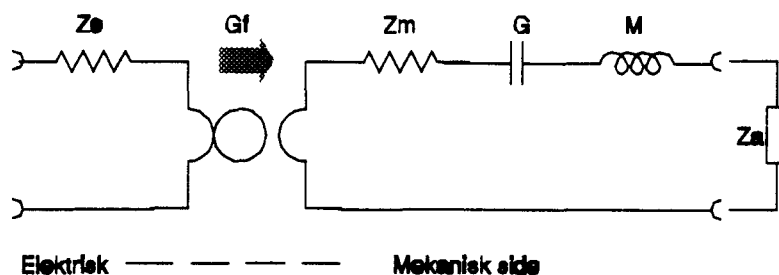
Røret kan lukkes med en aftagelig prop for enden. Da højttaleren på den mekaniske side er koblet til resonansrøret kan man ved at måle den elektriske impedans af højttaleren "se" lydbølge resonanser i resonansrøret og derigennem f.eks. måle lydhastigheden af den luftart som udfylder røret.

Opgave Benyt den samlede kraft på "luftsøjlen" som generaliseret spænding og hastigheden af "luftsøjlen" som generaliseret strøm, og find den specifikke impedans $\tilde{Z}_1$, admitans $\tilde{Y}_1$ og dermed den karakteristiske impedans Z_k af røret udtrykt ved luftens massefylde, lydhastigheden i luft samt rørets tværsnitsareal. (benyt lign 8. og lign. 11 p.33)

Benyt dernæst lign. 15-16 og find rørets lydimpedans $\tilde{Z}_1$ set fra højttaleren med og uden prop.

Højtaleren

En højttaler kan modelleres ved en gyrator i nedenstående netværk:



| opgave : Gør rede for ovenstående model, d.v.s. identificer de indgående elektriske og mekaniske elementer og angiv den fysiske dimension af disse.

Opstil et udtryk for impedansen af højttaleren når denne belastes med den mekaniske impedans $\tilde{Z}_a$.

| øvelse : Mål den numeriske værdi af den frekvensafhængige impedans for højttaleren, dels når denne er ubelastet, og dels når denne belastes med et jernlod på 1 gram. (jernloddet anbringes på membranen og fastholdes af højttalerens magnetfelt). Beregn heraf samtlige indgående størrelser i modellen.

| øvelse med højttaler + resonansrør :

Nu kobles resonansrøret til højttaleren og den frekvensafhængige impedans måles igen således at de 10 første resonansfrekvenser kan bestemmes. Sammenhold disse målinger med den beregnede $\tilde{Z}_1$ og bestem lyd hastigheden i luft.

