TEKST NR 409 2002

Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy

- et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning *før* Gauss, Abel og Galois

David Heiberg Backchi,
Uffe Thomas Volmer Jankvist,
Neslihan Sağlanmak.

Vejleder: Bernhelm Booß-Bavnbek

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA · Roskilde Universitetscenter · Postboks 260 · DK-4000 Roskilde

David Heiberg Backchi, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Neslihan Sağlanmak.
Vejleder: Bernhelm Booß-Bavnbek: Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy. - et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning *før* Gauss, Abel og Galois.

IMFUFA tekst nr. 409/2002 184 sider ISSN 0106-6242

Abstract:

Dette projekt er et studie af kombinationers, permutationers og invariansbegrebets (symmetriers) betydning for – og i – den algebraiske ligningsløsning i perioden fra ca. 1545 til 1815. I projektet redegøres for Cardanos metode til løsning af tredjegradsligningen, Ferraris metode til løsning af fjerdegradsligningen, Viètes og Girards udvikling af de såkaldte *Viète-relationer* samt metoderne af Tschirnhaus, Bezout og Euler til løsning af ligninger af grad ≤ 4. Hernæst beskrives Warings hovedsætning for symmetriske polynomier, Malfattis metode til løsning af generelle tredje- og specielle femtegradsligninger samt arbejderne omhandlende den algebraiske ligningsløsningsteori af hhv. Lagrange og Vandermonde. Også Ruffinis og Cauchys udvikling af permutationsbegrebet beskrives i projektet.

På baggrund af denne redegørelse gives en opsamling af hvor der i de pågældende metoder/arbejder forefindes brugen af kombinationer, permutationer og invarians og hvorledes disse tre begreber er blevet implementeret og etableret igennem den algebraiske ligningsløsning.

Ydermere gives der en vurdering af i hvilken grad de pågældende matematikere, selv anså deres metoder for at være konceptudviklende samt hvilken betydning de anså deres arbejder for at have i henhold til udviklingen af den algebraiske ligningsløsning.

'Aquila non capit muscas'

Forord

Nærværende projektrapport er resultatet af et semesters projektarbejde på matematikoverbygningen ved IMFUFA, RUC. Projektet er et videnskabsfagsprojekt under 2. modul og svarer til 1/2 semesterværk. Rapporten henvender sig til folk med en interesse for matematikhistorie og et grundlæggende kendskab til gruppe- og permutationsteori.

Vi vil gerne takke vores vejleder lektor Bernhelm Booß-Bavnbek, for et konstruktivt, engageret og til tider højrøstet samarbejde. Desuden vil vi takke lektor Viggo Andreasen for at have ydet en stor hjælp mht. forståelsen af Ian Stewarts *Galois Theory* i forbindelse med vores E8-studiekreds i efteråret 2001. Ligeledes vil vi også takke Ph.D.-studerende Henrik Kragh Sørensen, AU, for inspiration til projektet og undervejs, via korrespondance pr. e-mail, at have ydet hjælp mht. problemformulering samt at finde relevant litteratur.

Vi takker også adjunkt Tinne Hoff Kjeldsen, lektor Carsten Lunde Pedersen samt professor Christian U. Jensen, KU, for i begyndelsen af projektet at have henvist til sekundærlitteratur på baggrund af egne erfaringer. Også lektor Jacob Jacobsen ønsker vi at takke for hans velvilje til at besvare spørgsmål under forløbet.

Ligeledes vil vi takke lektor og TEX-ansvarlig Jørgen Larsen for hans hjælp mht. LATEX, samt studerende Bo Jakobsen (datastuen) og lektor Anders Madsen for deres bistand mht. *Maple*.

Til sidst vil vi takke alle dem vi har glemt og som mener at de havde fortjent at blive nævnt i vores forord.†

Neslihan Sağlanmak
David Heiberg Backchi
Uffe Thomas Volmer Jankvist

IMFUFA, Roskilde, den 17. september 2002

†Forsidebilledet stammer fra Rundetårn og forestiller stjernebilledet af Ørnen (Aquila). `http://www.rundetaarn.dk/dansk/observatorium/stjernebilleder/aql.htm`

Indhold

1 Indledning

1.1 Motivation

Idéen til denne projektrapport fik vi i sommeren 2001, da vi var på DMF's sommerskole på Sandbjerg Gods i Sønderjylland. Her holdt Henrik Kragh Sørensen fra Instituttet for Videnskabshistorie ved Århus Universitet et oplæg ved navnet *Fra algebraisk ligningsløsning til abstrakt gruppeteori*. Vi fandt foredraget særdeles interessant og vi lod os fænge af historien om den unge franske matematiker Evariste Galois. Men især undrede vi os over hvad gruppeteori dog i alverden havde at gøre med ligningsløsning. Efter hjemkomsten fra sommerskolen tog vi kontakt til Henrik Kragh, som sendte os noterne til sit oplæg med tilhørende litteraturliste samt sin progress rapport *Matematikken i starten af 1800-tallet - Niels Henrik Abel i en matematisk brydningstid*, og endvidere henviste os til anden litteratur. Dette materiale har været et godt udgangspunkt for os, og vores videre søgen på en fornuftig problemstilling inden for området.

Interessen for historien om Galois udmøntede sig i at vi i efteråret dannede en studiekreds, hvor vi læste et udvalg af kapitler fra Ian Stewarts *Galois Theory*. På denne måde blev vi fortrolige med den moderne fremstilling af Galois' teori og fik således også stillet en del af vores nysgerrighed mht. Galois' banebrydende arbejde. Sideløbende med denne studiekreds læste vi nogle historiske tekster om den algebraiske ligningsløsning og ikke mindst om Galois' forgængere, som f.eks. Lagrange, Ruffini og Cauchy.

Vores oprindelige idé var at lave en historisk undersøgelse af Galois' arbejde, idet vi fandt det utrolig interessant at Galois, i forhold til alle andre samtidige matematikere der beskæftigede sig med samme problem, havde taget det afgørende skridt og inddraget anvendelsen af 'gruppeteori' (nærmere betegnet elementer af vore dages gruppeteori) til at løse ligningsløsningsproblemet. Vi fandt hans idéer meget banebrydende og ville gerne undersøge, hvordan han kunne have fået en sådan idé, der lå så langt fra hans samtidiges tilgangsvinkler samt den umiddelbare formulering af problemet.

I de historiske tekster vi læste fandt vi dog at Galois' idé ikke lå så langt fra samtidige matematikeres endda (vi tænker her på Lagrange m.fl.). Vi opdagede at der tidligere rent faktisk var tiltag til løsning af ligninger af højere grad i sammenhæng med et væld af idéer. I særdeleshed faldt vores interesse på de permutations- og symmetribetragtninger som visse af disse matematikere gjorde sig. Disse er jo idag veletablerede teorier og begreber, og vi var overraskede over at disse for os idag så velkendte fænomener, måske rent faktisk skulle være udsprunget af ligningsløsningsteorien. Samtidig var vi overraskede over at de første optræk til disse teorier havde set dagens lys mere end 200 år før Galois (vi tænker her bl.a. på de såkaldte *Viète-relationer*). Vi besluttede os på grundlag af denne nytilegnede viden, at lade tilvejebringelsen af teorierne om *permutationer*, *kombinationer* samt *invarians*, herunder symmetriske funktioner, være kerneproblemet i vores projekt.

Samtidig fandt vi i vor studie af sekundærlitteraturen at den gængse opfattelse af mange af Lagranges (og dermed Galois') forgængere var at deres arbejder alle var af en beregningsmæssig karakter. At disse matematikere ikke prøvede at udvikle nye koncepter, men blot var interesserede i at finde nye værktøjer, hvormed man kunne beregne rødder i en eller anden højeregradsligning. Kan det virkelig passe, tænkte vi, kan man rent faktisk sætte det op så firkantet? Var nogle af disse matematikere i en eller anden udstrækning ikke klar over at de var med til at lægge fundamentet til nye teorier? Ovenstående spørgsmål og overvejelser har udmøntet sig i følgende problemformulering.

1.2 Problemformuleringen

1. Med udgangspunkt i en historisk gennemgang af udviklingen af ligningsløsningsteorien fra Cardano til Cauchy, ønsker vi at undersøge hvorledes begreber som *kombinationer*, *permutationer* og *invarians* (symmetrier) er blevet implementeret og etableret igennem udviklingen af den algebraiske ligningsløsningsteori i denne periode.

2. Ydermere ønsker vi, med udgangspunkt i originalkilder, at undersøge i hvilken udstrækning matematikerne i ovennævnte periode selv var klar over det når de bidrog med nye koncepter, eller om den ovennævnte udvikling for dem blot udmøntede sig i nye beregningsmæssige værktøjer.

Uddybning af problemformuleringen

Den første del af problemformuleringen er langt den vægtigste, og fylder således størsteparten af projektet, ikke mindst i form af den historiske gennemgang og den løbende diskussion der findes igennem hele projektet. Mht. gennemgangen af den algebraiske ligningsløsnings udvikling skal det pointeres at vi selvfølgelig kun gennemgår dennes højdepunkter, idet en fuldstændig redegørelse vil være alt for omfattende for et projekt som dette. Slår man op under 'Gleichung' i *Mathematisches Wörterbuch* fra 1805 finder man således et i forhold til værkets længde særdeles langt afsnit udelukkende omhandlende ligninger, hvilket også taler for hvor omfattende dette emne er [Klügel, 1805, s. 361-503]. Udvælgelsen af periodens højdepunkter indenfor den algebraiske ligningsløsning har vi foretaget på baggrund af sekundærlitteraturens vægtning, fortrinsvist med udgangspunkt i værker som [van der Waerden, 1985], [Tignol, 1980/1988], [Dieudonné, 1987/1992] og [Nový, 1973].

Med hensyn til invarians i problemformuleringens første del, tænker vi på såvel invariante udtryk som andre symmetrier der måtte være af relevans for den algebraiske ligningsløsning.

Når vi i problemformuleringens anden del skriver nye koncepter tænker vi (1) på en overordnet idè (plan) udledt af allerede foreliggende specifikke tilfælde, eller (2) på begreber, enten deciderede nye begreber eller brugen af allerede etablerede begreber i en ny forstand eller sammenhæng; det være sig enten de begreber der undersøges i første del af problemformuleringen eller andre.

Denne anden del af problemformuleringen kan selvfølgelig kun besvares i det omfang udtalelser af de pågældende matematikere er til vores rådighed, det være sig f.eks. i form af forord, afsluttende bemærkninger i deres værker o.lign. Vores tese mht. til denne anden del er dog at de fleste af datidens matematikere formentlig selv mente at de ramte hovedet på sømmet, eller udtrykt i terminologien af citatet: *Aquila non capit muscas*, at de selv mente at de var 'ørne' (aquila).

1.3 Modulbinding

Denne projektrapport svarer til 1/2 semesterværk på matematikoverbygningen ved Roskilde Universitetscenter. Projektet er et såkaldt *videnskabsfagsprojekt* og skal overholde følgende modulbinding

> *Projektet skal behandle matematikkens natur og indretning som videnskabsfag, herunder dens begreber, metoder, teorier og opbygning m.v. Behandlingen skal ske på en sådan måde at matematikkens videnskabsteoretiske status, historiske udvikling eller samfundsmæssige placering belyses.*[1]

I dette projekt mener vi at opfylde modulbindingen ved at behandle den historiske udvikling af teorien for algebraisk ligningsløsning samt metoderne der bruges indenfor dette område. Vi har bevidst ikke tilsigtet at anskue og analysere vore historiske undersøgelser udfra videnskabsfilosofiske teorier/vinkler, men istedet valgt at forholde os til perioden udfra vores egen diskurs (med alt hvad det indebærer).

1.4 Overordnet metode

Det foreliggende projekt er et meget bredt projekt, forstået i den forstand at vi søger at dække en forholdsvis lang periode af den algebraiske ligningsløsnings historie (ca. 300 år). Det er således ikke vores intention at gå i dybden med alt hvad der blev lavet i denne periode, men derimod at fremtrække de tråde der er vitale for netop vores vinkel på perioden. Iøvrigt havde det af hensyn til projektets varighed (et semester) heller ikke været muligt at beskrive alt i stor detalje, ikke mindst fordi de værker vi har set på ofte har en længde af 300-500 sider, hvilket dog ikke er unormalt for denne periode.

På baggrund af en redegørelse for periodens metoder og tilgangsvinkler til den algebraiske ligningsløsning søger vi at belyse træk ved disse som er af en enten kombinations-, permutations-, eller invariansmæssig karakter. Disse betragtninger er nogle gange lette at spotte, f.eks. hvis et arbejde præcis handler om

[1] [*Studieordningen for matematik* § 6].

disse, og andre gange svære at få øje på, og man kan i sådanne tilfælde være nødsaget til næsten at overfortolke og analysere teksterne i bagklogskabens lys. Det faktum at de begreber vi er på udkig efter ofte kan være skjulte, har selvfølgelig indvirket på vores valg af litteratur.

For at øge forståelsen af selve metoderne, har vi ofte fundet støtte i ældre sekundærlitteratur hvis fremstilling lægger sig forholdsvist tæt op ad originallitteraturen. Til belysning af de eftersøgte begreber samt disses eventuelle videre betydning for udviklingen af den algebraiske ligningsløsning, har vi ofte fundet nyere sekundærlitteratur behjælpelig, idet denne behandler de historiske kilder i en moderne kontekst.

Af hensyn til eventuelle fejl forbundet med oversættelser har vi, når vi har citeret, gjort det i den udstrækning vi har haft muligheden derfor, på originalsprog. Når dette ikke har været muligt har vi citetet på det sprog som en eventuel oversættelse af værket har måttet foreligge i. Vi har dog hvis vi er stødt på en sådan, som en service til læserne – og os selv – ofte skrevet en engelsk oversættelse fra sekundærlitteraturen i en fodnote. Vi er klar over at det mest korrekte, ikke mindst for at undgå denne 'rodebutik' af citater på forskellige og ikke-originale sprog, ville have været at fremskaffe alle kilder i originalform. I og med at dette projekt er skrevet i løbet af et semester, har vi ikke kunnet vente på fremskaffelsen af sådanne kilder, og har derfor benyttet det bedste vi havde til vores rådighed.

1.5 Rapportens opbygning

Den teoretiske del af projektet består i al sin væsentlighed af fire kapitler, hvori vi i lyset af vores problemformulering redegør for udviklingen af den algebraiske ligningsløsning fra Cardano og frem til Cauchy. Herefter følger med udgangspunkt i vores problemformulering en diskussion af disse fire kapitler, en konklusion på vores undersøgelse samt et efterskrift, hvori vi kort vil skitsere den videre udvikling af den algebraiske ligningsløsning efter Cauchy. I appendiks forefindes dels et kapitel om ligningernes forhistorie, altså tiden fra babylonerne og frem til 1500-tallet, dels et kort kapitel om de matematiske strømninger i 1700-tallets Europa, samt nogle computerudregninger.

Vi har hver gang vi introducerer en ny matematiker valgt at bringe en biografi. Det har vi valgt at gøre af flere årsager, dels mener vi at det kan være med til at fremme forståelsen af den pågældendes matematiske arbejder at man har et indblik i hvilken tid denne levede i og hvilke omstændigheder der her gjorde sig gældende, dels var disse biografier noget af det vi selv fandt underholdende i vores litteraturstudier, ikke mindst da mange af datidens matematikere har levet en noget omskiftelig tilværelse.

Vi har i vores gennemgang af de enkelte matematikeres arbejder valgt løbende at fremdrage vigtige træk når vi har fundet det relevant. Samtidig har vi til sidst i hvert kapitel indført et afsnit kaldet *Afrunding*, hvori vi som navnet antyder søger at runde kapitlet af, men også at trække de væsentlige tråde i kapitlet frem og diskutere disse. Således er der altså i projektet dels en løbende diskussion, dels en mængde deldiskussioner i form af afrundingerne samt en større endelig diskussion, hvori vi vil trække på de relevante dele af de tidligere bragte deldiskussioner.

Når vi i projektet opremser kilder er vores strategi følgende: Vi opremser efter hvert afsnit samtlige af de kilder som vi har benyttet i det pågældende afsnit. Vi nævner, enten de kilder som er benyttet tidligst i det pågældende afsnit eller de kilder som er benyttet mest i afsnittet, først. Når der er tale om én specifik information og vi ønsker dette fremhævet skriver vi kildehenvisningen umiddelbart efter informationen inde i afsnittet. Ved citater står kildehenvisningen umiddelbart efter citatet, dette er også tilfældet ved visse sætninger, beviser og deslige.

I selve kildehenvisningen kan i forbindelse med originalkilder forekomme to årstal. Det første af disse indikerer hvilket år det pågældende arbejde oprindeligt stammer fra, det andet hvilket år den udgave vi er i besiddelse af er fra.

1.5.1 De enkelte kapitler

Vi har til de enkelte kapitler benyttet forskellig slags litteratur; primær- hhv. sekundærlitteratur. Vi vil nedenfor redegøre dels for vores brug af litteratur, dels de enkelte kapitlers formål.

Kapitel 2

Det er med dette kapitel meningen at give læseren en indsigt i, hvorledes laveregradsligninger løses i moderne matematik, inden vi kaster os over den historiske gennemgang af den algebraiske ligningsløsning. Vi vil i dette kapitel ikke redegøre i detalje for hvem der er ophavsmænd til de enkelte metoder. Vi har i kapitlet benyttet os af sekundærlitteratur i form af matematiske oversigtsværker og -artikler, så som [Skau, 1990] og [Aleksandrov et al., 1956/1969].

Kapitel 3

I dette kapitel gennemgår vi Cardanos metode til løsning af tredjegradsligningen samt Ferraris metode til løsning af fjerdegradsligningen som begge forefindes i *Ars Magna*. Dette kapitel er ikke det vægtigste i vores projekt, men vi har alligevel valgt at gennemgå metoderne da det er et meget godt sted at starte vores historiske gennemgang. Vi er klar over at [Andersen et al., 1986] vælger at bringe Cardanos metode som en opgave, og det er da i kapitlet heller ikke vores mål at 'regne' denne opgave, men derimod at se disse metoder i lyset af vores problemformulering. Vi har i dette kapitel benyttet os fortrinsvist af primærlitteratur, [Cardano, 1545/1968], men i visse sammenhænge støttet os til den sekundære så som [Andersen et al., 1986], [van der Waerden, 1985] og [Tignol, 1980/1988].

Kapitel 4

Det er i dette kapitel ikke vores formål at give en generel historisk analyse af matematikken i perioden fra ca. 1545-1770. Vi søger derimod at beskrive de for vores problemstilling relevante nye discipliner (koncepter) der opstod i denne periode, med henblik på at fange de kombinations-, permutatios- og symmetriovervejelser som matematikerne her gjorde sig mht. ligningsløsning. Vi har til gennemgangen af Viètes og Eulers arbejder benyttet primærlitteratur, [Viète, 1615/1983] og [Euler, 1770/1972], hvorimod vi bygger gennemgangen af Girards, Tschirnhaus' samt Bezouts metoder på sekundærlitteratur så som [Tignol, 1980/1988], [Kracht & Kreyszig, 1990] og [Petersen, 1877]. Eftersom vi bygger gennemgangen af Tschirnhaus' metode på Tignols fremstilling af denne, har vi i vores gennemgang valgt at adoptere Tignols notation; store bogstaver som pladsholdere for ubekendte i et polynomium og små for værdierne fra et givet legeme i en ligning. Dette er gjort udelukkende for at lette sammenligningen af projekt og kilde for den grundige læser. Vi skelner i vores projekt ikke mellem brugen af polynomier og ligninger, idet denne skelnen ikke er af den store betydning for vores undersøgelse.

Kapitel 5

Her gennemgås det for vores problemstilling relevante i de fire samtidige afhandlinger fra 1770-71. Med 'det relevante' menes brugen af kombinationer, permutationer og symmetrier i den videre udvikling af teorien for den algebraiske ligningsløsning som her finder sted, hvorfor det således ikke er meningen at kortlægge indholdet af afhandlingerne fuldstændigt, hvilket i sig selv også ville være et alt for omfattende arbejde i et projekt som dette. I hovedparten af gennemgangen af de fire arbejder bygger vi på primærlitteratur, dvs. [Waring, 1782/1991], [Vandermonde, 1770/1888] og [Lagrange, 1770-71], på nær afsnittet om Malfatti som vi baserer på [van der Waerden, 1985]. Undervejs vil vi dog også henvise til sekundærlitteratur hvis vi i vores fremstilling har støttet os til denne, som i tilfældet med Warings hovedsætning, eller hvis sekundærlitteraturen i høj grad er mere forståelig end den primære. Af sekundærlitteratur til dette afsnit kan nævnes [Tignol, 1980/1988], [Nový, 1973], [Wussing, 1969], [van der Waerden, 1985], [Skau, 1990] og [Kiernan, 1971].

Kapitel 6

Dette kapitel runder vores undersøgelse af med to for udviklingen af permutationsteorien vigtige afhandlinger, nemlig Ruffinis fra 1799-1813 og Cauchys fra 1815. I gennemgangen af Ruffinis afhandling er det fortrinsvist vores hensigt at beskrive de permutationsbetragtninger der opstår som biprodukter af hans bevis. I fremstillingen af Cauchys arbejde ønsker vi ligeledes ikke at redegøre for hans oprindelige formål, nemlig at vise en bestemt sætning, men derimod beskrive de for permutationsteorien vigtige bidrag som Cauchy i dette arbejde yder. Af primærlitteratur har vi til dette afsnit benyttet [Ruffini, 1799/1915] og [Cauchy, 1815], af sekundær [Ayoub, 1980], [Burkhardt, 1892], [Pierpont, 1895], [Kiernan, 1971], [Sørensen, 1999] og [Wussing, 1969].

Kapitel 7

I dette kapitel samler vi op på vores løbende diskussion af problemformuleringens første del, samt diskuterer problemformuleringens anden del.

1.5.2 Appendiks

De dele af vores skriftlige materiale som ikke direkte hører ind under projektrapporten har vi valgt at bringe i et appendiks, det være sig enten opremsninger, udregninger eller skriftligt materiale primært baseret på sekundær litteratur.

Appendiks A

Dette appendiks er et persongalleri, hvis formål det er at anskueliggøre for læseren hvornår de for projektet relevante matematikere levede i forhold til hinanden.

Appendiks B

Her optræder en liste af afhandlinger og arbejder (primærlitteratur) som vi henviser til i projektrapporten. .

Appendiks C

Her beskrives ligningernes forhistorie, ved dette menes den historie der går forud for del Ferro. Litteraturen til dette appendiks består udelukkende af sekundærlitteratur så som [Andersen et al., 1986], [Tignol, 1980/1988], [Kline, 1972], [Katz, 1998] og [van der Waerden, 1985].

Appendiks D

Dette appendiks indeholder udregninger for Tschirnhaus' metode for $n = 4$ og $n = 5$ foretaget i *Maple*.

Appendiks E

I dette findes en kort og generaliseret gennemgang af matematikken i det 18. århundrede. Dette appendiks bærer dog mest præg af at være arbejdspapirer, men på trods af dette mener vi stadig at man kan drage nytte heraf. Vi har til dette appendiks taget udgangspunkt i [Katz, 1998].

2 Matematisk optakt

Vi vil her gennemgå hvorledes man idag i matematiske lærerbøger løser hhv. den generelle første-, anden-, tredje- og fjerdegradsligning. Formålet med dette er at introducere emnet 'ligningsløsning' og derved give læseren en indsigt i det område hvori vores problemfelt ligger.

2.1 Første- og andengradsligningen

En ligning af første grad har formen

$$x + a_0 = 0.$$

Denne løses øjeblikkeligt ved at trække a_0 fra på begge sider af lighedstegnet, og løsningen bliver således

$$x = -a_0.$$

Der er flere måder hvorpå man kan løse den generelle andengradsligning

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \tag{2.1}$$

Den ene er ved kvadratkompletering – en tretusind år gammel teknik – som vi vil anvende her, da den benyttes i den gængse løsningsmetode af andengradsligningen. En anden løser f.eks. andengradsligningen vha. en symmetrisk betragtning og blev først fremsat af Vandermonde i 1770 (jf. afsnit 5.2.).

Kvadratkompletering består i følgende; først omskrives (2.1) til

$$x^2 + a_1 x = -a_0$$

og dernæst lægges $(a_1/2)^2$ til på begge sider

$$x^2 + a_1 x + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0. \tag{2.2}$$

Nu observeres det at venstresiden af (2.2) er kvadratet på en to-leddet størrelse (også kaldet et 'perfekt kvadrat'), hvorfor vi får

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 \quad \Leftrightarrow \\ x + \frac{a_1}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}. \end{aligned}$$

Ud fra denne opnås de velkendte løsninger af andengradsligningen

$$x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}.$$

Kvadratkompletering er en blændende teknik, men desværre lader den sig ikke generalisere[1]. For at løse tredjegradsligningen må man således ty til andre metoder.

2.2 Tredjegradsligningen

Ligesom løsningen af andengradsligningen bygger løsningen af tredjegradsligningen på et trick (kvadratkompletering er jo i en vis forstand et trick), blot er dette trick af en fundamentalt anderledes karakter. Det går ud på først at foretage en substitution og dernæst udtrykke den ubekendte som summen af to andre ubekendte; $y = u + v$ (et af de mest symmetriske udtryk man kan forestille sig).

Til løsning af tredjegradsligningen får vi brug for følgende definition.

Definition 2.1
Med en primitiv n'te enhedsrod ω *forstås en løsning til ligningen* $x^n - 1 = 0$*, med den egenskab at de* n *rødder til denne ligning er* $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^n$ *hvor* $\omega^n = 1$.[2] *Bemærk at hvis* n *er primtal, så er enhver n'te enhedsrod forskellig fra 1 en primitiv n'te enhedsrod.* [Skau, 1990, s. 55]

Lad os nu betragte den generelle tredjegradsligning

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{2.3}$$

Første skridt i løsningsproceduren er at man i (2.3) fjerner andengradsleddet ved substitutionen $x = y - a_2/3$. Indsat i (2.3) opnås da

$$y^3 + py + q = 0, \tag{2.4}$$

hvor

$$p = a_1 - \left(\frac{a_2^2}{3}\right) \quad \text{og} \quad q = \left(\frac{2a_2^3}{27}\right) - \left(\frac{a_2a_1}{3}\right) + a_0.$$

Vi benytter nu tricket med at sætte $y = u + v$, hvilket ved indsættelse i (2.4) giver

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{2.5}$$

[Skau, 1990, s. 58-59]

[1] For en diskussion af kvadratkompleterings betydning for udviklingen af nye metoder jf. afsnit 3.3.

[2] Eksempelvis har $x^4 - 1 = 0$ fjerderødderne $1, -1, i, -i$, hvor kun i og $-i$ er primitive.

Uanset hvad summen af de to tal u og v er, er det altid muligt at vælge deres produkt, uv, vilkårligt. Hvis $u+v=A$ og vi ønsker at $uv=B$ fås, da $v=A-u$, at

$$u(A-u)=B \quad \Leftrightarrow \quad u^2-Au+B=0,$$

hvorfor det er tilstrækkeligt at u er en løsning til denne andengradsligning, da vi jo ved at enhver andengradsligning har enten reelle eller komplekse rødder. [Aleksandrov et al., 1956/1969, vol. 1, s. 267]

I vores tilfælde er $u+v$ jo lig den ønskede rod y i tredjegradsligningen, og produktet uv vælger vi at underlægge betingelsen

$$3uv=-p$$

dvs.

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}. \tag{2.6}$$

Af (2.5) får man da

$$u^3+v^3=-q. \tag{2.7}$$

Nu følger af (2.6) og (2.7) at u^3 og v^3 er rødder i andengradspolynomiet[3] (eller hjælpeligningen)

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0. \tag{2.8}$$

Løses (2.8) ved den sædvanlige formel (jf. afsnit 2.1) findes rødderne

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \quad \text{og} \quad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{2.9}$$

Løsningen af den generelle tredjegradsligning er således reduceret til løsningen af en andengradsligning og til ligningerne (2.9). Tager man i betragtning at $3uv=-p$ og at kubikrødderne kun er bestemt op til en tredje enhedsrod, så følger det af $y=u+v$ at de tre rødder y_1, y_2 og y_3 til (2.4) er givet ved formlerne

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\
y_2 &= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\
y_3 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Her er ω en primitiv tredje enhedsrod. Løsningerne i (2.10) er også kendt som Cardanos formler (jf. afsnit 3.1). Ved at benytte at $1+\omega+\omega^2=0$ følger af ovenstående formler at

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \frac{1}{3}(y_1+\omega y_2+\omega^2 y_3) \tag{2.11}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \frac{1}{3}(y_1+\omega^2 y_2+\omega y_3). \tag{2.12}$$

[3] Det følger eksempelvis af Viète-relationerne (jf. afsnit 4.1.1).

Ved at opløfte (2.11) og (2.12) til tredje potens, trække (2.12) fra (2.11) og dernæst dele med 2 udledes at

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{1}{9}(\omega+\frac{1}{2})(y_1-y_2)(y_1-y_3)(y_2-y_3), \tag{2.13}$$

når man bl.a. igen benytter at $1+\omega+\omega^2=0$ samt en omskrivning af denne

$$\frac{1}{2}\omega(1-\omega)=\omega+\frac{1}{2}.$$

Til sidst indsættes i (2.10), (2.11) og (2.12) samt (2.13) for

$$y_i=x_i+\frac{a_2}{3}=x_i-\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \quad \text{med} \quad i=1,2,3,$$

og for p og q udtrykt ved a_0, a_1, a_2, og man får da de ønskede løsninger. [Skau, 1990, s. 58-59] og [Aleksandrov et al., 1956/1969, vol. 1, s. 266-268]

Vi har således set hvordan man løser den generelle tredjegradsligning ved at udtrykke den ubekendte som summen af to andre ubekendte. Den første løsning til fjerdegradsligningen tog imidlertid andre metoder i brug.

2.3 Fjerdegradsligningen

Hovedparten af de løsninger til fjerdegradsligningen som forefindes i matematiske lærebøger bygger ligesom Ferraris oprindelige metode fra 1545 (jf. afsnit 3.1) i høj grad på kvadratisk kompletering. Der er dog et iøjenfaldende lighedspunkt mellem ovenstående løsning af tredjegradsligningen og nedenstående løsning af fjerdegradsligningen. For tredjegradsligningen så vi nødvendigheden af at løse en hjælpeligning[4] af grad 2 (2.8), ligeledes kan løsningen af fjerdegradsligningen baseres på løsningen af en hjælpeligning af grad 3.

Den generelle fjerdegradsligning

$$x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \tag{2.14}$$

omskrives til

$$x^4+a_3x^3=-a_2x^2-a_1x-a_0.$$

Lægges nu $(a_3^2x^2)/4$ til på begge sider opnår vi på venstre side det perfekte kvadrat

$$\left(x^2+\frac{a_3x}{2}\right)^2=\left(\frac{a_3^2}{4}-a_2\right)x^2-a_1x-a_0. \tag{2.15}$$

Lægges nu til begge sider af (2.15) udtrykket

$$\left(x^2+\frac{a_3x}{2}\right)t+\frac{t^2}{4},$$

[4] På engelsk 'auxiliary equation'.

hvor t er en ny variabel, får vi på venstresiden igen et perfekt kvadrat, nemlig

$$\left(x^2 + \frac{a_3x}{2} + \frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_3^2}{4} - a_2 + t\right)x^2 + \left(\frac{a_3t}{2} - a_1\right)x + \left(\frac{t^2}{4} - a_0\right). \quad (2.16)$$

Ligesom i afsnit 2.2 har vi altså reduceret vores problem til et med to ubekendte. [Aleksandrov et al., 1956/1969, vol. 1, s. 269]

Dernæst bemærker vi at der på højre side af (2.16) står et udtryk i x hvis koefficienter afhænger af t. Vi vælger t således at dette udtryk vil være kvadratet af et førstegrads udtryk i x; $\alpha x + \beta$. Lad os for nemhedens skyld kalde koefficienterne på højresiden af (2.16) for hhv. A, B og C. For at $Ax^2 + Bx + C = 0$ skal kunne udtrykkes som kvadratet af $\alpha x + \beta$ er det tilstrækkeligt at

$$B^2 - 4AC = 0. \quad (2.17)$$

For med (2.17) opfyldt vil

$$Ax^2 + Bx + C = \left(\sqrt{A}x + \sqrt{C}\right)^2,$$

således at vi med

$$\alpha = \sqrt{A} \quad \text{og} \quad \beta = \sqrt{C}$$

får

$$Ax^2 + Bx + C = (\alpha x + \beta)^2.$$

Dvs. at vi skal vælge t således at

$$\left(\frac{a_3t}{2} - a_1\right)^2 - 4\left(\frac{a_3^2}{4} - a_2 + t\right)\left(\frac{t^2}{4} - a_0\right) = 0. \quad (2.18)$$

Ophæves paranteserne i (2.18) får vi en tredjegradsligning i t;

$$t^3 - a_2t^2 + (a_3a_1 - 4a_0)t - (a_0(a_3^2 - 4a_2) + a_1^2) = 0.$$

Løses denne hjælpeligning[5] af grad 3 (f.eks. ved metoden i afsnit 2.2) kan vi finde α og β udtrykt ved f.eks. dens løsning t_0. Altså

$$\left(x^2 + \frac{a_3x}{2} + \frac{t_0}{2}\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2$$

fra hvilket vi udleder at

$$x^2 + \frac{a_3x}{2} + \frac{t_0}{2} = \pm(\alpha x + \beta). \quad (2.19)$$

Af (2.19) fås således fire løsninger, som når de kendte størrelser t_0, α og β samt a_0, a_1, a_2, a_3 indsættes giver løsningerne til (2.14). [Aleksandrov et al., 1956/1969, vol. 1, s. 269-270]

Bemærk hvorledes vi også i løsningen af fjerdegradsligningen fik reduceret vores problem til et med to ubekendte. Igen nåede vi altså vores mål via en vej af smarte kneb.

[5]Hjælpeligningen i løsningen af fjerdegradsligningen kaldes også for en 'kubisk resolvent'. For en definition af resolventen i en mere generel forstand jf. definition 5.2 kapitel 5.

2.4 Afrunding

Løsningen af andengradsligningen er baseret på kvadratkompletering, løsningen af tredjegradsligningen på et kneb hvor man udtrykker den variable symmetrisk i to nye ubekendte, og i løsningen af fjerdegradsligningen benyttede vi igen i høj grad kvadratkompletering. Altså tre forskellige metoder til tre 'lignende' problemer (laveregradspolynomier). Algebraen er da også kendt for at trække på alskens teknikker til løsning af sine problemer. En af forrige århundredes store matematikere og matematikfilosoffer A. N. Whitehead kom således i en konference for matematiklærere i 1912 med den morsomme – og skarpe – udtalelse[6],

> *The art of reasoning consists in getting hold of the subject at the right end, of seizing on the few general ideas which illuminate the whole, and of persistently marshalling all subsidiary facts round them. Nobody can be a good reasoner unless by constant practice he has realised the importance of getting hold of the big ideas and of hanging on to them like grim death. For this sort of training geometry is, I think, better than algebra.* The field of thought of algebra is rather obscure [...]. [Whitehead, 1929, s. 128]

Whitehead sætter det måske en anelse på spidsen – hvilket ikke gør det mindre morsomt – men han har ret i at det i algebraen kan være svært at få øje på de generelle træk. Vi vil dog alligevel i dette projekt forsøge netop dette.

[6]Fremhævelsen i citatet er vor egen.

3 Metoderne i *Ars Magna*

Ligninger er af forskellige – og uransagelige – årsager blevet studeret i flere årtusinder. For en kortfattet gennemgang af ligningernes historie fra babylonerne over grækerne og araberne til 1500-tallets Europa se appendiks C. I nærværende kapitel vil vi koncentrere os om det gennembrud i ligningsløsningen som fandt sted i midten af det 16. århundrede. På dette tidspunkt begyndte matematikerne nemlig at skabe 'nyt', istedet for blot at fortolke og videreudvikle gamle skrifter. Problemet med den algebraiske løsning af den generelle tredje- og fjerdegradsligning var således aldrig blevet løst af de antikke grækere, eller araberne for den sags skyld. Som det kan ses i appendiks C var dette dog ikke ensbetydende med at man ikke havde forsøgt. På trods af at det i starten af 1500-tallet endnu ikke var lykkedes at komme med en løsningsformel for tredjegradsligningen var de fleste dog stadig overbeviste om at en sådan måtte findes. En enkelt undtagelse er dog ifølge Andersen den italienske munk Luca Pacioli, som i 1494 hævdede at det var lige så svært at finde en generel formel for en rod i en tredjegradsligning, som det er at kvadrere cirklen[1] [Andersen et al., 1986, s. 162]. I løbet af de næste årtier blev Paciolis påstand dog tilbagevist. [Høyrup, 1998, s. 5] og [Andersen et al., 1986, s. 162]

Nedenfor vil vi gennemgå Cardanos metode til løsning af tredjegradsligningen, samt Ferraris metode til løsning af fjerdegradsligningen. Vi er klar over det faktum at disse i store træk er de samme som de i afsnit 2.2 og afsnit 2.3 beskrevne. Alligevel vælger vi at bringe metoderne igen, blot denne gang i en mere original form. Metoderne er dog heller ikke helt ens, f.eks. er Cardanos udtryk y her lig $u - v$, hvor vi i afsnit 2.2 havde det 'symmetriske' udtryk $u + v$. Der knytter sig imidlertid til opdagelsen af tredjegradsligningens løsning en morsom historie, denne kan findes refereret i adskillige kilder – selv i en matematisk grundbog som [Lindstrøm, 1996] – her følger vores gengivelse.

Det første store fremskridt mht. algebraiske løsningsmodeller for tredjegradsligningen fandt først sted i renæssancens Italien. Scipione del Ferro (1465-1526), som arbejdede ved universitetet i Bologna, fandt omkring 1510 et udtryk for den positive rod til ligningen $x^3 + cx = d$ (og formentlig også et for den positive rod til $x^3 = cx + d$) hvor c og d er positive tal[2] [Andersen et al., 1986, s. 163]. I modsætning til hvad der idag er kutyme, hverken offentliggjorde eller publicerede del Ferro sit store resultat. Umiddelbart kan dette måske forekomme os en smule mærkeligt, men situationen blandt matematikerne i 1500-tallets Italien var en anden end den er idag. Stillingerne ved universiteterne var ofte kortvarige og de ansatte blev hyppigt udskiftet af universitetsbestyrelserne. En måde at beholde sig stilling på – eller fratage en anden hans – var ved at dyste i en

[1]For en forklaring af cirklens kvadratur jf. appendiks C.

[2]Datidens matematikere foretog denne skelnen da de ikke arbejdede med negative tal.

form for matematikturneringer. Dette må formodes at være grunden til at del Ferro hemmeligholdt sin opdagelse. Inden sin død gav del Ferro dog løsningen videre til sin elev Antonio Maria Fiore, som levede i den første halvdel af det 16. århundrede, samt sin efterfølger ved Bologna, Annibale della Nave (1500-1558). Rygtet spredte sig dog, at dette gamle problem var eller snart ville blive løst, men intet skete indtil Niccolò Fontana fra Brescia (1499-1557) – også kaldet Tartaglia, 'Stammeren', efter et sabelhug han som barn havde modtaget i ansigtet af en fransk soldat – gjorde sin entré. Det forholder sig nemlig således at Fiore søgte at drage fordel af del Ferros formel ved at udfordre Tartaglia til en offentlig dyst. Fiore stillede Tartaglia 30 opgaver og Tartaglia stillede ligeledes Fiore et vist antal. Tartaglia var overrasket over at opdage at disse alle førte til tredjegradsligninger af formen $x^3 + cx = d$. Tartaglia, der var en dygtigere matematiker end Fiore, klarede dog udfordringen ved at løse alle 30 opgaver samt udlede en formel til løsning af disse. Eftersom Fiore ikke kunne løse særlig mange af de af Tartaglia stillede opgaver, der omhandlede andre områder af matematikken, blev Tartaglia erklæret som vinder, i dette tilfælde af 30 banketter som taberen skulle tilberede for vinderen og dennes venner. Tartaglia afslog dog præmien og nøjedes med æren for sin sejr. [Andersen et al., 1986, s. 163-164], [Katz, 1998, s. 359] og [Kline, 1972, s. 263]

3.1 Cardanos formel

Matematikdysten blev fulgt af mange, specielt af matematikeren Girolamo Cardano (1501-1576). Cardano var uægte søn af Farzino Cardano, en jurist og ven af Leonardo da Vinci, og en enke ved navn Chiara Micheri. Cardanos første år var præget af sygdom. Opfordret af sin fader begyndte Cardano at studere de klassiske fag samt matematik og astrologi. I 1520 påbegyndte han således sine studier ved universitetet i Pavia og færdiggjorde dem i 1526 i Padova med en doktorgrad i medicin. De næste seks år praktiserede han medicin i Saccolongo, en lille by nær Padova, og senere skal Cardano have refereret til disse år som de lykkeligste i sit liv. Efter at være blevet kureret for impotens, som han havde lidt af hele sin ungdom, blev Cardano i 1531 gift med Lucia Bandareni. De fik to sønner og en datter. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 64]

I 1534 blev Cardano underviser i matematik ved en offentlig skole i Milano. Han fortsatte dog med at praktisere medicin, hvilket han til ærgrelse for sine kollegaer havde stor succes med. I løbet af et par år blev Cardano den mest kendte læge i Milano, og opnåede også stor anseelse i resten af Europa. I året 1539 hørte Cardano for første gang om metoden til løsning af tredjegradsligningen (jf. nedenfor). I 1543 accepterede Cardano en stilling i medicin ved universitetet i Pavia (samme år blev han tilbudt en stilling som livlæge for Christian III, hvilket han dog afslog). Cardano forblev i Pavia indtil 1560, hvor hans ældste og kæreste søn blev henrettet under anklage for at have forgiftet sin kone i jalousi. Efter denne begivenhed flyttede Cardano i 1562 til Bologna, hvor han ligeledes underviste ved universitetet i medicin. I 1570 blev Cardano fængslet af inkvisitionen for kætteri, formentlig under anklage for at have lagt Jesu horoskop og dermed have indikeret at Jesu liv skulle være blevet påvirket af stjernerne[3].

[3]Ifølge Oystein Ore (forfatter af forordet til vores engelske oversættelse af *Ars Magna*)

Han blev dog løsladt efter fem måneder, og i 1571 rejste han til Rom, idet han ejendommeligt nok var blevet tildelt en pension af pave Pius V. Cardano havde selv forudsagt sit dødsår, og for at denne profeti skulle gå i opfyldelse sultede han sig selv ihjel. Den 21. september 1576 led Cardano således sultedøden i Rom. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 64-65], [Andersen et al., 1986, s. 165-170] og [Wussing & Arnold, 1975, s. 112-116]

Figur 3.1 Girolamo Cardano (1501-1576). [O'Connor & Robertson, 2002]

Cardano har skrevet mere end 200 afhandlinger om medicin, matematik, fysik, filosofi, religion, musik og geologi. Indenfor matematikken har Cardano, grundet sin lidenskab for spil, bl.a. også behandlet sandsynlighedsregning, omend hans værk *Liber de ludo alea*[4] omhandlende dette ikke fik den store betydning for udviklingen af sandsynlighedsbegrebet. [Andersen et al., 1986, s. 168-170] og [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 64-67]

3.1.1 Cardanos løsning af tredjegradsligningen

Efter i 1539 at have hørt om Tartaglias løsning skrev Cardano til Tartaglia for at få denne, så den kunne blive inkluderet i en aritmetik Cardano var ved at skrive, dog med fuld anerkendelse af at være Tartaglias opdagelse. Først afslog Tartaglia, men efter mange brevudvekslinger og vennetjenester indvilligede han i 1539 i at give Cardano sine løsninger til tre typer af tredjegradsligninger – dette tilmed i et digt – under forudsætning af at Cardano ikke videregav disse til nogen. Cardano holdt tildels sit løfte. Han udgav sin aritmetik uden at nævne

skyldtes Cardanos fængsling muligvis hans dedikation til Andreas Osiander, som på daværende tidspunkt var mistænkt for kætteri.

[4]'Bogen om chancespil'.

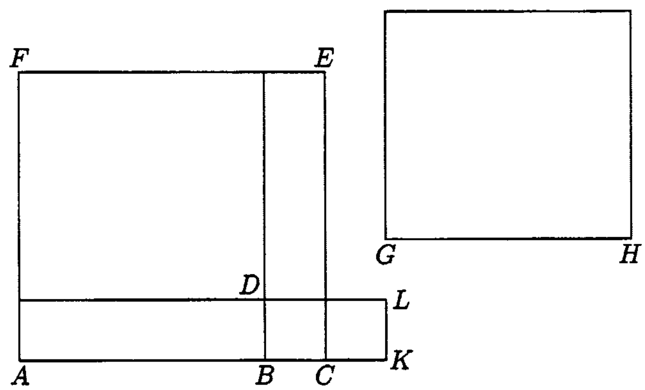
løsningerne til tredjegradsligningerne, men han fortsatte dog med at arbejde på disse sammen med sin tjener og elev Lodovico Ferrari (1522-1565). I løbet af en årrække lykkedes det Cardano at løse alle de forskellige typer af tredjegradsligningen (Ferrari løste tilmed fjerdegradsligningen, jf. afsnit 3.2). På dette tidspunkt havde Tartaglia stadig intet udgivet mht. løsningen af tredjegradsligningen, men Cardano opdagede at del Ferro ca. 20 år tidligere end Tartaglia også havde løst problemet. Efter at have fået tilladelse af della Nave til at studere del Ferros papirer i Bologna besluttede Cardano at udgive løsningerne i 1545 i sin *Artis Magnæ Sive De Regulis Algebraicis*[5], kort kaldet *Ars Magna*[6]. Cardano undlod dog ikke at nævne Tartaglia i sit nye værk; han skriver således

> *Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirty years ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccolò Tartaglia of Brescia gave Niccolò occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in reponse to my entreaties, though withholding the demonstration. Armed with this assistance, I sought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.* [Cardano, 1545/1968, s. 96]

Som eksempel bringer vi løsningen af tredjegradsligningen[7]

$$x^3 + cx = d, \tag{3.1}$$

kendt og hemmeligholdt af fire italienske matematikere inden den endelig blev offentliggjort af Cardano. [Katz, 1998, s. 359-61], [Andersen et al., 1986, s. 163-164] og [Cardano, 1545/1968, s. 96]



Figur 3.2 [Cardano, 1545/1968, s. 96].

Idéen er at løse denne ligning ved at sætte $u^3 - v^3 = d$ og $u^3v^3 = (c/3)^3$. I kapitel XI: *On the Cube and First Power Equal to the Number* af *Ars Magna* lægger Cardano ud med et (geometrisk) eksempel

[5]'Den store kunst eller om algebraens regler'.

[6]Vi har benyttet en engelsk oversættelse, *Ars Magna or the Rules of Algebra*, af T. Richard Witmer fra 1968.

[7]Denne er faktisk den generelle tredjegradsligning i f.eks. y efter variabelskiftet $x = y - (a/3)$.

> *For example, let GH^3 plus six times its side GH equal* 20 [...]. [Cardano, 1545/1968, s. 96],

hvilket kan oversættes til 'lad en terning, $(GH)^3$, plus seks gange dens side, GH, være lig 20', eller blot ligningen $x^3 + 6x = 20$. Idéen er nu at løse denne ligning ved at sætte $x = u - v$; Cardano udtrykker dog dette i en geometrisk terminologi. Han sætter u hhv. v lig liniestykkerne AC og CK (jf. figur 3.2). Værdien, eller det x, han jagter bliver derfor liniestykket AB. Cardano skriver

> [...] *and let AE and CL be two cubes the difference between which is* 20 *and such that the product of AC, the side [of one], and CK, the side [of the other], is* 2, *namely one-third the coefficient of x. Marking off BC equal to CK, I say that, if this is done, the remaining line AB is equal to GH and is, therefore, the value of x, for GH has already been given as [equal to x].* [Cardano, 1545/1968, s. 96]

Når $x = u - v$ i det givne eksempel fås at

$$\begin{aligned} x^3 + 6x &= (u - v)^3 + 6(u - v) \\ &= (u^3 - v^3) - 3uv(u - v) + 6(u - v) \\ &= 20. \end{aligned}$$

Nu underlægges u og v følgende betingelser

$$u^3 - v^3 = 20 \quad \text{og} \quad 3uv = 6. \tag{3.2}$$

Det følger at $x = u - v$ opfylder ligningen $x^3 + 6x = 20$. [Cardano, 1545/1968, s. 96-98] og [van der Waerden, 1985, s. 52-56]

Betingelserne for u og v er dem der i citatet ovenfor er formuleret som $AE - CL = 20$ og $3(AC \cdot CK) = 2$. Vi har jo nemlig, da $AC = u$ og $CK = v$, at $AE = (AC)^3 = u^3$ samt $CL = (CK)^3 = v^3$. I Cardanos geometriske terminologi er reduktionen af $(u - v)^3$ til $(u^3 - v^3) - 3uv(u - v)$ noget omstændelig, men den fundamentale idé er den samme som her.

Af betingelsen for uv i (3.2) følger nu at

$$uv = 2$$

dvs.

$$u^3v^3 = 8.$$

Nu har man således givet både forskellen og produktet af u^3 og v^3, og kan da løse systemet af de to ligninger. Dette fører til to andengradsligninger i hhv. u^3 og v^3

$$(u^3 - 10)^2 - 100 = 8 \quad \text{og} \quad (v^3 + 10)^2 - 100 = 8,$$

hvis løsninger er

$$u^3 = \sqrt{108} + 10 \quad \text{og} \quad v^3 = \sqrt{108} - 10.$$

Dette giver os den ønskede løsning til tredjegradsligningen, nemlig

$$x = u - v \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Cardano formulerer dette som en generel regel

> *Cube one-third the coefficient of x; add to it the square of one-half the constant of the equation; and take the square root of the whole. You will duplicate this, and to one of the two you add one-half the number you have already squared and from the other you subtract one-half the same. You will then have a* binomium *and its* apotome [8]. *Then, subtracting the cube root of the* apotome *from the cube root of the* binomium, *the remainder [or] that which is left is the value of x.* [Cardano, 1545/1968, s. 98-99]

Denne formel oversættes i moderne notation til at ligningen (3.1) har løsningen

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}},$$

hvor vi altså har 'binomium' og dets 'apotome'

$$u^3 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2} \quad \text{og} \quad v^3 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}.$$

Det er nemt at se at en løsning til Cardanos eksempel er $x = 2$, men det er ikke nemt at se at den fundne værdi for x rent faktisk er 2. Cardano nævner selv dette et par sider senere, men han viser ikke at udtrykket er lig værdien 2. [Cardano, 1545/1968, s. 96-101], [Andersen et al., 1986, s. 170-176] og [van der Waerden, 1985, s. 52-56]

Som før nævnt var det ikke Cardano der løste problemet med den generelle fjerdegradsligning, det var derimod hans elev Lodovico Ferrari.

3.2 Ferraris metode

Der vides kun lidt om Ferraris liv. Hans fader, Alessandro, var søn af en flygtning fra Milano der havde slået sig ned i Bologna. Efter sin faders død levede Ferrari hos sin onkel Vincenzo. I november 1536 blev Ferrari af sin onkel sendt til Milano for at tjene hos Girolamo Cardano istedet for onklens søn Luca, som allerede tjente der. Selv om Ferrari ikke havde modtaget en uddannelse var han ekstremt intelligent, hvorfor Cardano lærte ham latin, græsk og matematik, og tilmed ansatte ham som sin sekretær. I Cardanos selvbiografi, skrevet mange år senere, beskriver han Ferrari som havende

> [...] *excelled as a youth all my pupils by the high degree of his learning.* [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IV, s. 586]

I 1540 blev Ferrari offentlig lærer i matematik i Milano, og kort tid herefter besejrede han Zuanne da Coi, en matematiker fra Brescia, i en af de før omtalte

[8] 'Binomium' (to-navn) er en to-leddet størrelse. Udtrykket 'apotome' (fra-skåret) stammer fra Euklid, i den engelske oversættelse af hans *Elementer* bog X proposition 73 står således: *If from a rational straight line there be subtracted a rational straight line commensurable with the whole in square only, the remainder is irrational; and let it be called an* apotome. [Euklid, ca. 300 f.v.t./1956, s. 158]

offentlige dyster i matematik. Efter udgivelsen af *Ars Magna*, og de derpå følgende stridigheder mellem Tartaglia og Cardano om sidstnævntes ret til at have udgivet tredjegradsligningens løsning[9], blev Ferrari tilbudt flere job. Han tog et job hos Ercole Gonzaga, kardinal af Mantova, hvilket han forblev i i henved otte år. Grundet dårligt helbred flyttede Ferrari tilbage til Bologna, hvor han boede sammen med sin søster. Fra 1564 og indtil sin død i oktober 1565 fungerede Ferrari som 'lector ad mathematicam' ved universitetet i Bologna. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IV, s. 586-587]

3.2.1 Ferraris løsning af fjerdegradsligningen

Ferraris metode minder i store træk om den i afsnit 2.3 allerede introducerede. Dette skyldes at det stadig i dag er en variant af Ferraris metode, der i matematiske oversigtsbøger præsenteres som metoden til løsning af den generelle fjerdegradsligning. Hvor Cardano i et vist omfang benyttede sig af et nyt kneb, byggede Ferrari sin metode op omkring den gamle kendte teknik, kvadratisk kompletering.

Lodovico Ferrari var som nævnt den første ophavsmand til en metode til løsning af fjerdegradsligningen. Ferrari udviklede den og Cardano bragte den i sin *Ars Magna* med kommentaren

> *It is Lodovico Ferrari's, who gave it to me on my request.* [Cardano, 1545/1968, s. 237]

Løsningen af den generelle fjerdegradsligning vakte dog ikke den store røre, og hvor Cardano brugte tretten kapitler på tredjegradsligningen skitserede han nærmest kun fjerdegradsligningens løsning i det næstsidste kapitel af *Ars Magna*. Dette kan måske tilskrives at algebraens logiske fundament, uagtet fremskridtene på området, stadig var geometrisk som hos de antikke grækere (jf. appendiks C). Cardano skriver

> *For as positio [the first power] refers to a line, quadratum [the square] to a surface, and cubum [the cube] to a solid body, it would be very foolish for us to go beyond this point. Nature does not permit it.* [Cardano, 1545/1968, s. 9]

Dette bevirker bl.a. at enhver størrelse har en dimension og kun størrelser med samme dimension kan adderes eller sættes lig hinanden, hvilket set i bagklogskabens lys må siges at være en unødvendig komplicering og begrænsning, da størrelser fra et aritmetisk synspunkt jo betragtes som dimensionsløse, og kan opløftes til potenser og sættes lig hinanden vilkårligt. [Cardano, 1545/1968, s. 9 og s. 237]

Ferrari tager i sin metode også udgangspunkt i et (geometrisk) eksempel og henviser flere gange til Euklids *Elementer*. Cardanos gennemgang af Ferraris metode til løsning af fjerdegradsligningen er i forhold til gennemgangen af metoden til

[9] For en mere uddybende diskussion af Ferraris rolle i stridighederne mellem Tartaglia og Cardano se [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80] eller [Cardano, 1545/1968].

tredjegradsligningen noget overfladisk og kortfattet. Vi vil derfor i nedenstående gennemgang tage udgangspunkt i Tignols beskrivelse af Ferraris metode, men undervejs sammenholde den med relevante citater fra *Ars Magna*. Haves den generelle fjerdegradsligning

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

er Ferraris idé at foretage en lineær substitution $x = y - a/4$, som eliminerer x^3-leddet. Således opnås

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{3.3}$$

hvor

$$\begin{aligned} p &= b - 6\left(\frac{a}{4}\right)^2 \\ q &= c - \left(\frac{a}{2}\right)b + \left(\frac{a}{2}\right)^3 \\ r &= d - \left(\frac{a}{4}\right)c + \left(\frac{a}{4}\right)^2 b - 3\left(\frac{a}{4}\right)^4 . \end{aligned}$$

I *Ars Magna* står

> [...] *always reduce the side of [the equation with]* x^4 *[in it] to its square root - that is, by adding so much to both sides that* x^4+bx^2+N *will have a square root. This is easy, since you can assume that one-half the coefficient of* x^2 *is the root of the constant.* [Cardano, 1545/1968, s. 238-239]

Dvs. at flyttes det lineære led samt konstanten i (3.3) over på den anden side af lighedstegnet, samtidig med at der foretages en kvadratkompletering – altså at der lægges $(p/2)^2$ til på begge sider – fås

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 .$$

> *Then, having done all this, add as many squares and such a number to one side, [...] as have to be added to the other side - the side which has the first power - in order to make a* trinomium [10] *having a square root with* x. *You will thus have a certain number of squares and a number to be added to both sides.* [Cardano, 1545/1968, s. 239]

Altså adderes størrelsen u ind i kvadratet på venstresiden fås

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2uy^2 + pu + u^2,$$

og vi har således vores 'trinomium'.

Formålet er altså at bestemme u således at højresiden også bliver et perfekt kvadrat (mht. variablen y). Ved at se på leddene med y^2 og y konkluderes det

[10] 'Trinomium' (tre-navn) er en tre-leddet størrelse.

at højresiden skal være et kvadrat af $y\sqrt{2u} - q/(2\sqrt{2u})$; altså skal vi have at

$$\begin{aligned} -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2uy^2 + pu + u^2 &= \left(y\sqrt{2u} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2 && (3.4) \\ &= 2uy^2 + \frac{q^2}{8u} - qy. && (3.5) \end{aligned}$$

Dette svarer til

$$-r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + pu + u^2 = \frac{q^2}{8u},$$

som igen svarer til

$$8u^3 + 8pu^2 + (2p^2 - 8r)u - q^2 = 0. \qquad (3.6)$$

Dermed kan man ved at løse denne tredjegradsligning i u (den kubiske resolvent) finde en værdi for u således at (3.5) er opfyldt. Ligning (3.4) ser herefter således ud

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = \left(y\sqrt{2u} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2.$$

> *Having gone this far, extract the square root of both.* [Cardano, 1545/1968, s. 239]

Altså opnås følgende udtryk

$$y^2 + \frac{p}{2} + u = \pm\left(y\sqrt{2u} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right).$$

Værdierne for y kan nu beregnes ved at løse de to andengradsligninger, og Cardano refererer da i denne anledning også til kapitel V, hvori han netop løser den generelle andengradsligning. Afslutningsvis skal man betragte tilfældet $u = 0$ da ovenstående beregninger fordrer at $u \neq 0$. Dette tilfælde opstår kun hvis $q = 0$ (jf. (3.6)), hvorved (3.3) bliver til

$$y^4 + py^2 + r = 0,$$

som nemt løses da det jo er en andengradsligning i y^2. [Cardano, 1545/1968, s. 237-243] og [Tignol, 1980/1988, s. 31-35]

Igen ser vi altså hvilken afgørende rolle kvadratisk kompletering spiller i Ferraris løsning af fjerdegradsligningen. Spørgsmålet man nu kan stille sig selv er hvilken rolle brugen af den kvadratiske kompletering i løsningerne for anden-, og fjerdegradsligningerne har spillet for udviklingen og tilvejebringelsen af nye metoder til brug i ligningsløsningsteorien. Dette bl.a. vil vi diskutere nedenfor.

3.3 Afrunding

Som tidligere nævnt er kvadratkompletering en blændende teknik, blot lader den sig desværre ikke generalisere. Vi ved idag at babylonerne for 3-4000 år siden benyttede sig af kvadratisk kompletering. Fremskridtene inden for matematikken har været store siden da, men alligevel skulle der gå mere end 2500 år førend nogen fandt en metode til løsning af tredjegradsligningen. Vi er tilbøjelige til at mene at kvadratkompleteringen, i og med at det netop er en så forblændende teknik, har en stor del af skylden for den manglende udvikling af nye metoder til løsning af algebraiske ligninger. Den har altså om vi så må sige skygget for nye initiativer.

Det er ikke helt klart hvem der rent faktisk er ophavsmanden til denne nye metode til løsning af tredjegradsligninger; Cardano, Tartaglia eller del Ferro. Cardano påstår at del Ferros metode er den samme som Tartaglias, hvorimod Tartaglia hævder at metoden er hans egen. Muligheden af at Cardano har modificeret metoden kan heller ikke udelukkes, man alt i alt er det svært at sige, da Tartaglia (og del Ferro) aldrig publicerede noget. Ferrari graver, i modsætning til de andre, ned i de gamle gemmer og fremdrager på ny kvadratkompleteringen. Selvfølgelig benytter han sig også af Cardanos metode til løsning af den kubiske resolvent, men det er alligevel den kvadratiske kompletering der er hjørnestenen i hans metode, i og med at denne jo i sidste ende går ud på at få to perfekte kvadrater som er lig hinanden. At sige at Ferraris idé ligefrem var dårlig er måske så meget sagt, han var jo trods alt – selvfølgelig i kraft af Cardanos metode – i stand til at løse et gammelt problem. Men i og med at kvadratkompletering ikke i sig selv er en metode der lader sig generalisere, er Ferraris metode altså heller ikke særligt fremadpegende.

Selvfølgelig har de gamle græske og arabiske matematikere ikke haft de forudsætninger man har idag, men alligevel mener vi nok at man kan sige at deres arbejder i højere grad fokuserer på generalitet end på abstraktion. For dette taler bl.a. det faktum at araberne studerede samtlige andengradsligninger og tilmed var i stand til at løse dem (jf. appendiks C), uden dog at stille sig spørgsmålet om hvorvidt det ikke skulle være muligt at løse dem alle med en og samme teknik[11]. Hos Cardano og hans samtidige ses generaliseringen meget tydeligt, men heller ikke her er abstraktionen i fokus. Den første matematiker som virkelig hæver abstraktionsniveauet op til førhen usete højder er Viète (jf. afsnit 4.1).

De næste ca. 200 år efter Cardano og Ferrari bliver ofte beskyldt for ikke at have bidraget med noget bemærkelsesværdigt til ligningsteorien. Dette er dog efter vores overbevisning ikke helt korrekt. Som vi i næste kapitel skal argumentere for var disse ca. 200 år udtryk for stor kreativitet, ja, faktisk kan man måske endda hævde at det var i denne periode at man med Viète fik lagt hele grundlaget for den abstrakte matematik. Værd at nævne er måske også at det var i denne periode at man for alvor begyndte at arbejde med de komplekse tal (Cardano kendte dem godt men anerkendte dem ikke helt). Man kastede sig over løsningsmetoder til højeregradspolynomier, hvilket dog ikke blev den succes man havde håbet. Større succes havde man derimod med nogle symmetribetragtninger angående forholdet mellem et polynomiums koefficienter og dets rødder; de såkaldte Viète-relationer. Disse sammenhænge skulle vise sig at blive fundamentale i den videre udvikling af ligningsløsningsteorien.

[11]Ifølge Kirsti Andersen var årsagen til dette at de negative tal ikke eksisterede for araberne, hvilket medførte at problemet ikke var naturligt at undersøge.

4 De efterfølgende to århundreder

De ca. 200 år fra 1645-1770 bliver i litteraturen ofte omtalt som værende 'sløve' mht. studiet af algebraiske ligninger, f.eks. skriver Tignol

> *In comparison to the rapid development of the theory of equations around the middle of the sixteenth century, progress during the next two centuries was rather slow.* [Tignol, 1980/1988, s. 36]

Det er sandt at udviklingen af den algebraiske ligningsløsningsteori med matematikere som del Ferro, Tartaglia, Cardano og Ferrari i front havde nået et højdepunkt i midten af det 16. århundrede. Måske er det også sandt at disse næste 200 år har stået lidt i skyggen af det 16. århundrede, men dermed ikke sagt at der intet skete. Udviklingen i disse 200 år blev blot markant anderledes. På overfladen så det måske ud som om at man gang på gang løb panden mod en mur, men i virkeligheden var det i denne periode at grundlaget for den moderne matematik blev lagt. Matematikerne i denne tid var også, som vi i nærværende kapitel skal se, særdeles kreative, og tiden var fuld af nye idéer og tiltag som vi skal se det hos f.eks. Tschirnhaus, Bezout og Euler. Det vigtigste fremskridt på vejen til symmetribetragtninger i løsningsmetoderne var dog en analyse af ligningernes struktur (og natur), som vi i første omgang finder hos Viète og dernæst i en mere generel udgave hos Girard.

Det 16. århundredes algebraiske notationsform var så uegnet at det satte praktiske begrænsninger for behandlingen af ligninger. F.eks. var den eneste symbolik som Cardano benyttede sig af, forkortelser som p for plus og m for minus. Eksempelvis skrev han ligningen $x^2 + 2x = 48$ som

$$1.\ quad.\ p\ :\ 2\ pos.\ aeq.\ 48, \tag{4.1}$$

hvor *quad.* (quadratum) står for kvadratleddet, *pos.* (positiones) står for førstegradsleddet og *aeq.* (aequatur) betyder 'lig med'. Følgende udtryk

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

ville med datidens notation kunne skrives som

$$\begin{array}{l} 5p\ :\ R\!\!\!\!/\ m\ :\ 15 \\ 5m\ :\ R\!\!\!\!/\ m\ :\ 15 \\ \hline 25m\ :\ m\ :\ 15\ \tilde{q}d\ est\ 40 \end{array}$$

hvor R (radix) er symbolet for kvadratroden. [Tignol, 1980/1988, s. 36]

Denne primitive og uhåndterlige notation stod altså til udskiftning førend man kunne komme videre med algebraen. Man kan måske mene at f.eks. m, p og *aeq.*

er lige så praktiske som $-$, $+$ og $=$ er det i dag, men der er et signifikant skridt fra (4.1), som er en formulering af et problem, til beregning med udtrykket $x^2 + 2x = 48$ i variablen x. Udviklingen i notationsform og paradigmeændringen fra løsning af et problem til løsning af en ligning var ikke så meget et søgt og bevidst tiltag, men skete mere gradvist og implicit. [Tignol, 1980/1988, s. 36-37]

Et signifikant fremskridt i denne retning finder sted med den franske matematiker Viètes spæde begyndelse til den analytiske geometri, hvor geometriske problemer oversættes til algebraiske. Viètes gennembrydende arbejde skyldes primært hans nye notationsform, som udover at være en generalisering af ligningerne, også viser hans enestående evne til at abstrahere fra de specifikke matematiske størrelsers virkelige betydning og i stedet behandle dem som matematiske symboler. Viètes indførelse af hvad vi idag vil betegne som bogstavregningen må siges at være banebrydende, i og med at denne danner grundlaget for hele den moderne videnskabelige fremgangsmåde. På daværende tidspunkt resulterede Viètes nytænkning i at hans arbejde bl.a. medvirkede til en ny (og bedre) forståelse af ligninger end den hidtil geometriske tolkning af disse. For yderligere information om dette end det nedenstående henvises til [Andersen et al., 1986] samt [van der Waerden, 1985].

Først nogle for kapitlet nødvendige definitioner.

Definition 4.1
Et rationalt *udtryk er et udtryk sammensat af koefficienter fra et givet legeme ved operationerne addition, subtraktion, multiplikation (og dermed potensopløftning) samt division.*

Definition 4.2
Et algebraisk *eller et* radikalt *udtryk er et rationalt udtryk, hvorom det gælder at også roduddragning er en tilladt operation.*

Definition 4.3
Med en ren *ligning vil vi forstå en ligning af formen $x^n - r = 0$.*

4.1 Viète, Girard og symmetrirelationerne

Viète har grundet sit bidrag til en bedre forståelse af ligninger lagt navn til en for symmetribetragtninger vigtig korrelation mellem koefficienterne i et polynomium og rødderne til dette; nemlig *Viète-relationerne* (jf. afsnit 4.1.1). Men faktisk forholder det sig sådan at det var Albert Girard (jf. afsnit 4.1.3) der i sin *Invention nouvelle en l'algèbre* fra 1629 – altså lang tid efter Viètes død – var den første der mht. den generelle n'tegradsligning publicerede noget angående forholdet mellem koefficienterne og rødderne. [Tignol, 1980/1988, s. 48-50]

Vi vil i det nærværende afsnit gennemgå Viètes betragtninger samt Girards udlægning af de såkaldte Viète-relationer. Som vi skal se forefindes Girards relationer i en mere generel version end de betragtninger som Viète gør sig. Først vil vi dog præsentere Viète-relationerne i den form man kender dem idag.

4.1.1 Viète-relationerne

Viète-relationerne giver en sammenhæng mellem koefficienterne i et polynomium og dets rødder, og de defineres som følger: Har man det generelle n'tegradspolynomium

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er rødderne, fås faktoriseringen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{4.2}$$

Ganger man nu højresiden ud og sammenligner koefficienterne opnås Viète-relationerne

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = s_1 \\ a_{n-2} &= x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = s_2 \\ &\vdots \\ (-1)^n a_0 &= x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n = s_n \end{aligned}$$

hvor $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kendes som de *elementære symmetriske polynomier*[1] i de n variable $x_1, \ldots, x_n$. Under tiden betegnes de elementære symmetriske polynomier også som de elementære symmetriske funktioner. [Skau, 1990, s. 62] og [Tignol, 1980/1988, s. 48-50]

Nu til de to herrer Viètes og Girards arbejder omhandlende disse relationer.

4.1.2 Viètes betragtninger

François Viète (1540-1603) var, ligesom sin far, oprindeligt uddannet jurist fra universitetet i Poitiers, men arbejdede kun i dette embede i fire år, inden han besluttede sig for at skifte karriere. I 1564 blev Viète ansat til at overvåge undervisningen af den 11-årige Catherine de Parthenay, og flyttede i 1566 med familien til Rochelle. I 1570 rejste Viète fra Rochelle til Paris, hvor han arbejdede med matematik og astronomi, og det var her at han i 1571 publicerede sit første matematiske arbejde. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XIV, s. 18-19]

Fra 1573 til 1580 var Viète ansat som rådgiver for regeringen i Bretagne, i 1580 blev han ansat i parlamentet i Paris som privat kongelig rådgiver for Henrik III. På grund af de religiøse stridigheder i landet blev Viète i 1584 forvist fra sin stilling af sine politiske modstandere. I den følgende periode fik Viète fordybet sig i sine matematiske interesser og det var i denne periode at han lavede sine vigtigste matematiske arbejder. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XIV, s. 18-19]

I 1589 blev Viète genindsat i parlamentet under Henrik III og senere under Henrik IV, hvor han blandt andet brugte sin matematiske kunnen til at bryde fjendens kodede beskeder. En morsom historie fortæller at Viète i løbet af fem

[1] For en definition af et *symmetrisk polynomium* jf. definition 5.1 i kapitel 5.

en halv måned i 1589-90 brød Philip II af Spaniens dengang yderst avancerede kode bestående af 400 kodegrupper, som han derefter overleverede til sin konge Henrik IV. Da Philip II opdagede at den kode som han troede ikke kunne brydes var kendt, meldte han Henrik IV til paven for at have brugt sort magi. Paven derimod var bedre informeret; hans egen kryptolog Argenti havde også tjent ham godt, og Philip II blev gjort til grin. [Bauer, 1997, s. 67-68]

Figur 4.1 François Viète (1540-1603). [O'Connor & Robertson, 2002]

Viète gav forelæsninger i matematik, hvor han blandt andet diskuterede cirklens kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling[2]. Viète skrev også bøger omhandlende algebra, trigonometri og geometri, og på trods af at han ikke var uddannet matematiker var hans bidrag til matematikken betydelige. Viètes vigtigste bidrag inden for algebraen er hans værk *In Artem Analyticem Isagoge* fra 1591. [Viète, 1591/1973, s. 11-12] og [Viète, 1615/1983, s. 1-3]

Hele livet igennem forblev Viète Catherine de Parthenays loyale ven og rådgiver. Catherine må have været en stor inspirationskilde for Viète, og muligvis er hun at takke for Viètes store bidrag til matematikken. I indledningen til den tyske oversættelse af *In Artem Analyticem Isagoge*[3] står således til Catherine:

> *Verehrungswürdigste Fürstin, was neu ist, pflegt anfangs roh und unförmig vorgelegt zu werden und muß dann in den folgenden Jahrhunderten geglättet und vervollkommnet werden. So ist auch die Kunst,*

[2]Jf. appendiks C for mere information om terningens fordobling.

[3]Vi har denne i en tysk oversættelse, *Einführung in die Neue Algebra*, af Karin Reich og Helmuth Gericke fra 1973, samt i en engelsk overættelse *The Analytic Art* af Richard T. Witmer fra 1983. Dedikationen (*Widmungsbrief*) af dette værk til Catherine forefindes ikke i den engelske oversættelse.

> *die ich nun vortrage, eine neue oder doch auch wieder eine so alte und von Barbaren so verunstaltete, daß ich es für notwendig hielt, alle ihre Scheinbeweise zu beseitigen, damit auch nicht die geringste Unreinheit an ihr zurückbleibe und damit sie nicht nach dem alten Moder rieche, und ihr eine vollkommen neue Form zu geben, sowie auch neue Bezeichnungen zu erfinden und einzuführen. Da man allerdings bisher an diese zu wenig gewöhnt ist, wird es kaum ausbleiben, daß viele schon von vorneherein abgeschreckt werden und Anstoß nehmen. Zwar stimmten alle Mathematiker darin überein, daß in ihrer Algebra oder Almucabala, die sie priesen und eine große Kunst nannten, unvergleichliches Gold verborgen sei, aber gefunden haben sie es nicht. So gelobten sie Hekatomben und rüsteten zu Opfern für Apollo und die Musen, für den Fall, daß einer auch nur das eine oder andere der Probleme lösen würde, von deren Art ich zehn oder zwanzig ohne weiteres darlege, da es meine Kunst erlaubt, die Lösungen aller mathematischen Probleme mit größter Sicherheit zu finden.* [Viète, 1591/1973, s. 34-35]

Netop i denne bog introducerede Viète en systematisk algebraisk notation. Han foreslog at benytte bogstaver som symboler for matematiske størrelser; vokaler til de ukendte størrelser og konsonanter til de kendte. Lige præcis dette tiltag med at repræsentere også de kendte størrelser ved bogstaver viser hvorledes Viète var i stand til at hæve abstraktionsniveauet. Ydermere var det også Viète der indførte betegnelserne 'polynomium' og 'koefficient' i algebraen. Han var i stand til ved brug af sine nye teknikker at løse de irreducible tredjegradsligninger, dvs. dem hvor den algebraiske løsningsformel giver de komplekse rødder ved et uigennemskueligt komplekst udtryk. [Viète, 1591/1973, s. 34-35], [Wussing & Arnold, 1975, s. 125-132] og [Andersen et al., 1986, s. 180 og 190]

I delen *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores* af *In Artem Analyticem Isagoge* opskriver Viète binomialudviklingen af $(A+B)^n$ for $n = 1, \ldots, 6$. Det lykkedes dog ikke for Viète at gennemskue systemet i disse og opskrive en binomialformel for alle $n \in \mathrm{N}$, hvilket nok skyldes det faktum at han for potenser bruger bogstaver, f.eks. skrev han $(A+B)^q$ for $n = 2$ og $(A+B)^c$ for $n = 3$, hvor q står for 'quadratum' og c for 'cubum', hvilket gør mønstret i binomialformlen mindre gennemskueligt.

Udover det ovenfor nævnte pointerer Viète også vigtigheden af at forstå strukturen i et polynomium, f.eks. sammenhængen mellem koefficienterne og rødderne. I kapitel XVI; *On Syncrisis* af delen *De Recognitione Aequationum*, skriver han:

> *Syncrisis is the comparison of two correlative equations in order to discover their structure.* [Viète, 1615/1983, s. 207]

Viète deler sine ligninger op i tre typer, hvor den første type[4]; *the ambiguos type*, som vi vil give en gennemgang af, svarer til tredjegradsligningen

$$B^p X - X^3 = Z^s.$$

[4] De to andre er hhv. *the contradictory type* og *the inverse type*. Vi vil ikke komme nærmere ind på dem her, for mere information jf. [Viète, 1615/1983, s. 207].

'Eksponenterne' for koefficienterne B og Z henviser til koefficienternes dimension. Det vil sige at p og s står for hhv. 'plano' (planen med dimension 2) og 'solido' (en rumlig figur med dimension 3). Viète tænker altså på leddene som geometriske størrelser og sørger derfor for at alle leddene får samme dimension[5]. [Viète, 1615/1983, s. 207-211]

Om ovenstående type tredjegradsligning skriver han

> *It follows that the coefficient of the affections in the ambiguous cases arises from a division of the difference between the powers by the difference between the grades which the coefficient accompanies.* [Viète, 1615/1983, s. 208]

Altså at koefficienten for førstegradsleddet kan skrives som

$$B^p = \frac{A^3 - E^3}{A - E},$$

hvor A, E er rødderne i ligningen. Dette viser han i Problem I:

> *To discover by syncrisis the structure of two ambiguous equations.* [Viète, 1615/1983, s. 208]

Han betragter ligningerne

$$B^p A - A^3 = Z^s \tag{4.3}$$

og

$$B^p E - E^3 = Z^s \tag{4.4}$$

og antager at $A > E$. Da højresiderne af (4.3) og (4.4) begge er lig Z^s, kan han sætte venstresiderne lig hinanden

$$A^3 - E^3 = B^p A - B^p E \quad \Leftrightarrow \quad A^2 + E^2 + AE = B^p, \tag{4.5}$$

hvor anden del af (4.5) fås ved at dividere igennem med $A - E$. Viète har således vist

> [...] *B^p is the sum of the squares of the two roots being sought plus their product and arises from dividing the difference between the cubes by the difference between the roots, as has been shown in general terms.* [Viète, 1615/1983, s. 211]

Ligeledes viser han at

$$Z^s = \frac{A^3E - E^3A}{A - E} = A^2E + E^2A,$$

hvilket fås ved at erstatte B^p med $A^2 + E^2 + AE$ i (4.3). [Viète, 1615/1983, s. 208-211]

[5] Eksempelvis er B^{ps} koefficienten til førstegradsleddet i en sjettegradsligning. Se f.eks [Viète, 1615/1983, s. 228].

Med henførelse til afsnit 4.1.1 kan vi se at Viètes ovenstående resultat stemmer overens med Viète-relationerne. Viète ser kun på to af rødderne i hans tredjegradsligning, som i moderne notation svarer til ligningen

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

hvor $a_2 = 0$, $a_1 = -B^p$ og $a_0 = Z^s$. Han kalder disse rødder for A og E. Vi kan nu med henvisning til Viète-relationerne bestemme den sidste rod, som vi kalder I, og vi får

$$-a_2 = A + E + I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -(A + E)$$

(bemærk at denne rod for $A, E > 0$ er negativ). Med kendskab til den sidste rod kan vi opskrive følgende relationer

$$\begin{aligned} a_1 &= -B^p &&= AE + AI + EI = AE - A(A+E) - E(A+E) \\ \Rightarrow \quad & B^p &&= A^2 + E^2 + AE \end{aligned}$$

og

$$-a_0 = -Z^s = AEI = -AE(A+E) \quad \Rightarrow \quad Z^s = A^2E + AE^2,$$

hvilket er de samme resultater som dem Viète opnår. Altså bestemmer Viète for specifikke ligningstyper koefficienterne udtrykt ved rødderne, men blandt andet pga. en manglende beskrivelse af alle rødderne til en ligning lykkedes det ham ikke at generalisere sammenhængen helt. Viète accepterer ikke negative rødder til polynomier[6], hvilket må anses som en mulig forklaring på hans manglende succes i formuleringen af relationerne i en mere generel kontekst. Den første det derimod lykkedes at formulere sammenhængen mellem koefficienter og rødder i det generelle n'tegradspolynomium (i den enkle form vi kender i dag) var Albert Girard.

4.1.3 Girards relationer

Informationerne om Girards liv er sparsomme. Albert Girard (1595-1632) blev født i St. Mihiel, Frankrig, men bosatte sig i Holland som religiøs flygtning, da han var en af de på det tidspunkt forfulgte protestanter. Girard studerede formentlig matematik på universitetet i Leiden. Han var mest interesseret i matematikkens anvendelser indenfor militæret, og det vides med sikkerhed at han har arbejdet som ingeniør i Frederik Henrik af Nassaus hær omkring 1629. Den eneste titel som Girard i sine værker giver sig selv er dog matematiker, på trods af at han af andre oftest i sine senere år blev omtalt som ingeniør. Om Girards sidste leveår står i [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80]:

> *The end of Girard's life was difficult. He complaines [...] of living in a foreign country, without a patron, ruined, and burdened with a large family. His widow [...] is more precise. She is poor, with eleven orphans to whom their father has left only his reputation of having faithfully served and having spent all his time on research on the most noble secrets of mathematics.* [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. V, s. 408]

[6] Jf. H. L. L. Busards afsnit om Viète i [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XIV, s. 23] samt [Kline, 1972, s. 252].

Girard har arbejdet med både algebra, trigonometri og aritmetik. Indenfor algebraen havde han idéer der kunne lede frem til algebraens fundamentalsætning, og han er også kendt for at have formuleret den induktive definition af Fibonacci-sekvensen. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. V, s. 408-410]

Vores gennemgang af Girards arbejde *Invention nouvelle en l'algèbre* fra 1629 bygger udelukkende på Tignols beskrivelse af dette. Lad os til at begynde med introducere nogle af de begreber som Girard benytter sig af. Girard kalder[7] en ligning *incomplete* hvis den mangler et led, dvs. hvis mindst en af koefficienterne er nul. De forskellige led (eller nærmere koefficienter foran hvert led) kaldes *minglings*, og den sidste koefficient (konstanten) kaldes *closure*. Hans *factions* svarer til det vi kender som de elementære symmetriske polynomier. [Tignol, 1980/1988, s. 48-49]

En ligning er i den *alternative orden* når de ulige potenser af den ubekendte er på en side af lighedstegnet og de lige på den anden side, samt når koefficienten til den højeste potens[8] er 1. Girard postulerer

> *All the equations of algebra receive as many solutions as the exponent of the highest quantity shows, except the incomplete ones : and the first faction of the solutions is equal to the number of the first mingling, the second faction of the same is equal to the number of the second mingling; the third to the third, and so on, so that the last faction is equal to the closure, and this according to the signs that can be noticed in the alternative order.* [Tignol, 1980/1988, s. 49]

Hvorfor han begrænser sig til *complete* ligninger vides ikke, da postulatet gælder lige vel for *incomplete* ligninger, og da det iøvrigt for begge slags gælder at løsningerne kan være komplekse (*impossible*). Girard skriver da også senere at sætningen holder hvis man gør polynomiet *complete* ved, at addere (de manglende) potenser af den ubekendte med koefficient nul til ligningen. Altså gælder ifølge Girard at

$$x^n + s_2x^{n-2} + s_4x^{n-4} + \ldots \quad = \quad s_1x^{n-1} + s_3x^{n-3} + s_5x^{n-5} + \ldots$$

har n rødder $x_1, \ldots, x_n$ således at

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_i x_i \\ s_2 &= \sum_{i<j} x_ix_j \\ s_3 &= \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k \\ &\vdots \\ s_n &= x_1x_2\cdots x_n. \end{aligned}$$

Det at der virkelig er n rødder viser Girard naturligvis ikke – det bevises først endeligt af Gauss med algebraens fundamentalsætning – men det er på daværende

[7] I Tignols oversættelse til engelsk.

[8] Altså når det pågældende polynomium er monisk.

tidspunkt ved at være accepteret i matematikerkredse, og det uden bevisførelse! Girard beviser strengt taget heller ikke resten af sin sætning, og den er derfor mere et postulat end en sætning[9]. Dette gøres egentlig nemt ved at benytte (4.2) og identificere koefficienterne som tidligere gjort, men den egenskab (den lineære faktorisering) var ikke kendt af Girard. Det at a er en rod til et polynomium $p(x)$ hvis og kun hvis $x - a$ går op i $p(x)$ er en observation som tilskrives René Descartes. [Tignol, 1980/1988, s. 48-56]

En ting var at have fastlagt sammenhængen mellem et polynomiums koefficienter og rødder, en anden ting var at være i stand til at løse højeregradspolynomier. Johann Hudde videreudviklede Cardanos metode til løsning af tredjegradsligningen, denne er dog ifølge Petersen analog til den af Euler (jf. afsnit 4.4) beskrevne metode, hvorfor vi kun vil begrænse os til at se på Eulers version [Petersen, 1877, s. 104]. Som før antydet udvikler også Descartes en metode der løser fjerdegradsligningen[10] og inddrager visse trigonometriske overvejelser. Vi vil ikke her komme nærmere ind på denne metode. Derimod vil vi i det nedenstående redegøre for hhv. Tschirnhaus' og Bezouts metoder til løsning af højeregradspolynomier. Disse metoder er baseret på *elimination*, og benytter sig af *ligningers ændring*, dvs. det at bortskaffe led af en given ligning. Også Euler har udviklet en lignende eliminationsmetode, men ifølge Petersen ligner denne metode i væsentlige træk den af Tschirnhaus, hvorfor vi her ikke vil gennemgå Eulers [Petersen, 1877, s. 98-100 og 103-104]. I de nærværende afsnit beskrives altså Tschirnhaus' og Bezouts eliminationsmetoder samt Eulers metode til løsning af fjerdegradsligningen.

4.2 Tschirnhaus' note

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus, greve af Kieslingwalde og Stolzenberg, Tyskland, (1651-1708) blev født i Kieslingswalde som havde været i familiens eje i mere end 400 år. Hans fader Christoph Tschirnhaus havde studeret i Italien, og allerede i sin tidlige skolegang, som foregik i Görlitz, fik Tschirnhaus private lektioner i matematik. Som 17-årig begyndte Tschirnhaus at studere moderne matematik og medicin ved universitet i Leiden, Holland, hvor han arbejdede i syv år kun afbrudt af værnepligt og et enkelt besøg til sin hjemegn i 1764. [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 17]

I 1665 rejste Tschirnhaus til England og Frankrig, hvor han bl.a. mødte Leibniz, som han blev nære venner med. I henved tretten måneder arbejdede disse to i fællesskab med matematiske problemstillinger i såvel analyse som algebra. Årene 1676-79 tilbragte Tschirnhaus derimod i Italien, hvor han udførte fysiske forsøg i samarbejde med bl.a. fysikeren Kircher. Det meste af perioden fra 1679-92 tilbragte Tschirnhaus i Kieslingwalde, hvor han bl.a. producerede hovedparten af sine matematiske arbejder. I 1693 blev Tschirnhaus tilbudt en stilling som leder af det nyoprettede universitet i Halle, hvilket han dog afslog da han på dette tidspunkt var dybt involveret i oprettelsen af industriområder i Saksen. De sidste år af sit liv brugte Tschirnhaus på at udvikle en ny metode til fremstilling

[9] Ifølge Kline bevises sætningen af Newton. [Kline, 1972, s. 600]

[10] For en demonstration af dette henvises til [Tignol, 1980/1988, s. 86-87] samt [Petersen, 1877, s. 102 og 104-108].

af porcelæn i samarbejde med Johann Friedrich Böttger. [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 17-18]

Figur 4.2 Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708). [O'Connor & Robertson, 2002]

Tschirnhaus beskriver sin metode i *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione*[11] – en 4-siders 'note' fra 1683. Dette var et arbejde der gav anledning til videre udvikling af ligningsteorien. I og med at vi ikke er i besiddelse af Tschirnhaus' originale tekst, vil vi her først bringe Kracht & Kreyszigs udlægning af denne, idet den forekommer os at være den mest autentiske af de fremstillinger vi har set. Dernæst vil vi gennemgå Tignols beskrivelse af Tschirnhaus' metode, da han fremlægger denne i en lidt mere moderne kontekst og da vi skal gøre brug af denne gennemgang i vores afsnit om Bezout (jf. afsnit 4.3). Til sidst i dette afsnit vil vi sammenligne de to fremstillinger af Tschirnhaus' metode for tredjegradsligningen[12].

4.2.1 Tschirnhaus' transformation del I

Tschirnhaus foreslår en metode til løsning af ligninger af enhver grad (metoden gælder naturligvis ikke generelt, da f.eks. den generelle femtegradsligning jo som bekendt ikke kan løses algebraisk). Havde Tschirnhaus' metode fungeret ville han have kunnet reducere en hvilken som helst n'tegradsligning til en ren ligning, og dermed have løst hovedproblemet inden for algebraen på hans tid.

Metoden er forholdsvis enkel og bygger videre på at det altid er muligt at eliminere andet led i et vilkårligt n'tegradspolynomium,

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{4.6}$$

[11] 'Metode til at eliminere alle mellemliggende led i en given ligning'.

[12] I appendiks D belyser vi Tschirnhaus' metode for hhv. fjerde- og femtegradsligningen.

ved et variabelskift $y = x + b_0$:

$$\begin{aligned} P(y) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i y^{n-i} b_0^i + a_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i y^{n-1-i} b_0^i + \ldots \\ &= y^n - n y^{n-1} b_0 + \ldots + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Ser vi på koefficienterne til de to led af grad $n-1$;

$$-n b_0 y^{n-1} + a_{n-1} y^{n-1} = 0,$$

er det klart at b_0 skal sættes lig a_{n-1}/n for at y^{n-1}-leddet går ud.

Med henvisning til Descartes' *Géométrie* tager Tschirnhaus udgangspunkt i den ovenfor gjorte betragtning, nemlig at det altid er muligt at eliminere andengradsleddet i en vilkårlig tredjegradsligning. Således betragter han tredjegradsligningen

$$y^3 - qy - r = 0. \tag{4.7}$$

Dernæst antager han ligningen[13]

$$z = y^2 - by - a, \tag{4.8}$$

for passende a og b. Ved elimination af y mellem (4.7) og (4.8) opnår han nedenstående *resulterende ligning*[14] (4.9) i z, som han opskriver på otte linier:

$$\begin{array}{ccccccc} z^3 & + & 3az^2 & + & 3a^2z & + & a^3 \\ & - & 2qz^2 & - & 4qaz & - & 2qa^2 \\ & & & + & q^2z & + & q^2a \\ & & & - & qb^2z & - & qb^2a \\ & & & + & 3rbz & + & 3rba \\ & & & & & - & r^2 \\ & & & & & - & qrb \\ & & & & & + & rb^3 = 0, \end{array} \tag{4.9}$$

Bemærk at denne opskrivning er ordnet efter z; første 'søjle' er z^3-led, anden 'søjle' er z^2-led osv. Ifølge Kracht & Kreyszig er det netop denne opskrivning af ligning (4.9) i otte linier som er nøglen til Tschirnhaus' transformation. [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 25]

I det nedenstående vil vi redegøre for hvordan Kracht & Kreyszig mener at Tschirnhaus er kommet frem til den resulterende ligning (4.9). Omskrives (4.8) til

$$z + a = y(y - b)$$

[13] Tschirnhaus opskriver denne ligning på formen $y^2 = by + z + a$. [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 25]

[14] Petersen kalder den resulterende ligning for *endeligningen*. [Petersen, 1877, s. 52]

kan vi udtrykke hver linie i (4.9) indeholdende z ved y:

$$\begin{aligned}
(z+a)^3 &= y^3(y-b)^3 && \text{(4.10a)}\\
-2q(z+a)^2 &= -2qy^2(y-b)^2 && \text{(4.10b)}\\
q^2(z+a) &= q^2y(y-b) && \text{(4.10c)}\\
-qb^2(z+a) &= -qb^2y(y-b) && \text{(4.10d)}\\
3rb(z+a) &= 3rby(y-b) && \text{(4.10e)}\\
-r^2 &= -r^2 && \text{(4.10f)}\\
-qrb &= -qrb && \text{(4.10g)}\\
rb^3 &= rb^3. && \text{(4.10h)}
\end{aligned}$$

Idèen er nu at addere højresiderne i dette ligningssystem; for er summen af disse lig nul, vil den resulterende ligning (4.9) også være lig nul, da den jo er summen af venstresiderne. Udskiftes y^3 i overenstemmelse med (4.7) på højresiden af (4.10a) fås

$$(qy+r)(y^3-3by^2+3b^2y-b^3).$$

Adderes denne dernæst med (4.10h) forsvinder $-rb^3$-leddet. Addition med (4.10b) giver

$$-qy^4+qby^3+qb^2y^2-qb^3y+ry^3-3rby^2+3rb^2y.$$

Igen udskiftes y^3 med $(qy+r)$, hvorefter vi adderer (4.10f) og (4.10g), hvorved den foreløbige sum bliver

$$-qy^4+(qb^2-3rb)y^2+(q^2b+qr-qb^3+3rb^2)y.$$

Adderes til sidst de manglende linier, (4.10c), (4.10d) og (4.10e), opnår vi følgende form af den resulterende ligning

$$-qy(y^3-qy-r). \tag{4.11}$$

Altså når (4.9) er lig nul er (4.11) dermed lig nul. Heraf følger at når z_i er en rod til (4.9) er det korresponderende y_i en rod til (4.11) og dermed en rod til (4.7). Metoden må dog forudsætte at $q \neq 0$. [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 26]

Tschirnhaus' idé er nu at eliminere de mellemliggende led i (4.9), altså at opskrive denne som en ren ligning. Til dette observerer han at z^2-leddene i anden 'søjle' af (4.9) går ud, hvis

$$3a-2q=0,$$

hvorfor

$$a=\frac{2}{3}q.$$

Dernæst observeres at z-leddene i tredje 'søjle' af (4.9) går ud, hvis

$$3a^2-4qa+q^2-qb^2+3rb=0.$$

Dette er en andengradsligning i b, som med $a=2q/3$ giver følgende løsninger

$$b=\frac{3}{q}\left(\frac{r}{2}\pm\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{q}{27}}\right).$$

Tschirnhaus opnår hermed sin rene ligning. [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 25-26]

For videre løsning henviser vi enten til eksempel 4.2.3, eller foreslår følgende; den rene ligning; $z^3 - t = 0$, giver ved løsning nedenstående tre rødder

$$\sqrt[3]{t}, \quad \omega\sqrt[3]{t}, \quad \omega^2\sqrt[3]{t},$$

hvor ω er en primitiv tredje enhedsrod.

En langt nemmere metode til bestemmelse af den resulterende ligning i Tschirnhaus' metode er dog følgende: Multiplicer (4.8) med y og fratræk dette fra (4.7)

$$by^2 = (q - a - z)y + r.$$

Fra dette trækkes (4.8) multipliseret med b, hvorved fås

$$(z + a + b^2 - q)y = -bz - ab + r.$$

Altså haves

$$y = \frac{-bz - ab + r}{z + a + b^2 - q},$$

som ved indsættelse i (4.8) giver (4.9). [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 25-26]

Ifølge Kracht & Kreyszig diskuterer Tschirnhaus herefter, hvorledes man bestemmer passende a og b til elimination af det tredje led i en fjerde-, femte,- eller sjettegradsligning, i hvilken det andet led allerede er elimineret, ligesom ovenfor. Tschirnhaus skriver i overenstemmelse med titlen på sin note

> *And the same process applies to* 3, 4, 5, *etc., terms to be eliminated.* [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 27 og 33]

Vi vil i appendiks D belyse det faktum at Tschirnhaus' metode generelt ikke lader sig anvende til løsning af ligninger af højere grad end 3.

4.2.2 Tschirnhaus' transformation del II

Tignol giver en mere indgående (og moderne) beskrivelse af Tschirnhaus' transformation. Ifølge Tignol kan n'tegradspolynomiet,

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 = 0, \tag{4.12}$$

når der foretages følgende generelle variabelskift

$$Y = X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_1X + b_0, \tag{4.13}$$

(for $m < n$) omskrives til en ligning hvori et antal led er elimineret. Man vil med passende valg af de m parametre $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ således opnå følgende resulterende ligning i Y;

$$Y^n + c_{n-1}Y^{n-1} + \ldots + c_1Y + c_0 = 0,$$

hvor m vilkårlige af koefficienterne c_i kan elimineres. Dette kan lade sig gøre idet c_i er udtrykt ved koefficienterne i (4.12) og (4.13) og da $(b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$ giver

m frihedsgrader til at opfylde m betingelser. Specielt vil man, hvis $m = n - 1$, kunne få alle led elimineret på nær eksempelvis det første og sidste. Ligningen i Y får således formen

$$Y^n + c_0 = 0,$$

og kan derved åbenlyst løses algebraisk. Sættes $Y = \sqrt[n]{-c_0}$ ind i (4.13) fås en løsning til den oprindelige ligning af grad n (4.12), ved at løse en ligning af grad $m = n - 1$:

$$X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_1 X + b_0 = \sqrt[n]{-c_0}.$$

Vha. induktion efter graden følger det at ligninger af enhver grad kan løses ved radikaler. Der er dog et problem ved metoden, og det er at, for at få alle koefficienterne $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ til at 'gå ud' skal man løse et system af ligninger af forskellig grad i parametrene b_i, og dette system kan være særdeles svært at løse. Faktisk svarer det til at løse en enkelt ligning af grad $(n-1)!$, og umiddelbart virker metoden altså ikke for $n > 3$, undtagen hvis ligningen af grad $(n-1)!$ har karakteristika, som gør at den kan reduceres til ligninger af grad mindre end n [Tignol, 1980/1988, s. 91]. Dette viser sig at være tilfældet for $n = 4$, hvor den resulterende sjettegradsligning kan faktoriseres til et produkt af faktorer af grad 2, hvis koefficienter er løsninger til tredjegradsligninger. For $n \geq 5$ findes der ingen sådan åbenbar simplifikation[15]. [Tignol, 1980/1988, s. 90-92]

For at forstå det foregående er det på sin plads at bringe en definition samt en sætning fra Tignol[16].

Definition 4.4
Lad

$$P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0,$$

hvor $a_n \neq 0$, *og*

$$Q = b_m X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \ldots + b_0 - Y,$$

hvor $b_m \neq 0$, *være polynomier over et legeme* F. *Så er* resultanten R *af* P *og* Q *givet ved determinanten*[17] *af nedenstående* $(m+n) \times (m+n)$*-matrix.*

$$R = \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & \ldots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & & & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & & & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & & \ldots & b_1 & b_0 - Y \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{array}$$

[15]For sammensatte tal n kan Tschirnhaus' metode anvendes på anden (og formentlig nemmere) vis. I f.eks. tilfældet $n = 4$ kan man ved at eliminere Y- og Y^3-leddet opnå en andengradsligning i Y^2.

[16]Et bevis for sætning 4.1 er at finde i [Tignol, 1980/1988, s. 78].

[17]Brugen af resultanten (som her defineret) er lidt anakronistisk, da determinantbegrebet ikke var 'opfundet' på Tschirnhaus' tid, men eliminationsmetoderne, som Tschirnhaus benyttede til at bestemme den resulterende ligning med, er ifølge Tignol analoge til determinantberegninger, og var faktisk medvirkende til udviklingen ('opfindelsen') af determinantbegrebet. [Tignol, 1980/1988, s.93]

Sætning 4.1
Antag at P og Q spalter i lineære faktorer over et legeme K indeholdende F, og lad R betegne resultanten af P og Q. Da gælder at P og Q har en fælles rod i K hvis og kun hvis $R = 0$. [Tignol, 1980/1988, s. 77-78]

Ifølge Tignol kan Tschirnhaus' løsningsmetode altså 'oversættes' til følgende: Betragt ligningerne (4.12) og (4.13) som følgende polynomier

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_1X + a_0 = 0 \quad (4.14)$$
$$Q(X) = X^m + b_{m-1}X^{m-1} + b_{m-2}X^{m-2} + \ldots + b_1X + b_0 - Y = 0. \quad (4.15)$$

Ifølge sætning 4.1 har $P(X)$ og $Q(X)$ en fælles rod (hvilket er ensbetydende med at (4.14) og (4.15) begge er opfyldt) hvis og kun hvis resultanten R af $P(X)$ og $Q(X)$ er lig 0. Hvis vi udtrykker resultanten som et polynomium i Y, har vi altså:

$$R(Y) = 0 \textit{ hvis og kun hvis } P(X) \textit{ og } Q(X) \textit{ har en fælles rod.}$$

Da Y kun optræder i de sidste n rækker, må $R(Y)$ være et n'tegradspolynomium i Y. Yderligere optræder der kun (og altid) produkter af maximalt k faktorer (b_i) i koefficienten for Y^{n-k}, idet determinanten jo er en alternerende sum af produkter af koefficienterne fra forskellige rækker og søjler. Derfor får vi at

$$R(Y) = c_nY^n + c_{n-1}Y^{n-1} + \ldots + c_1Y + c_0,$$

hvor c_{n-k} er et polynomium af grad k i $b_0, \ldots, b_{m-1}$ (og $c_n = (-1)^n$). Resultanten er altså den resulterende ligning, som vi skal forsøge at få på formen $Y^n + c_0 = 0$. Dette betyder at vi skal bestemme koefficienterne b_i fra (4.15) på en sådan måde at vi kan eliminere alle mellemliggende led i den resulterende ligning. [Tignol, 1980/1988, s. 93]

For at kunne eliminere $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1$ betragtes situationen hvor $m = n - 1$. Af ovenstående fås at

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= 0 \\ c_{n-2} &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

er et system af $n-1$ ligninger af grad $1, 2, 3, \ldots, n-1$ i variablene $b_0, \ldots, b_{m-1}$. Iblandt disse ligninger kan $n-2$ variable elimineres, og resultatet af denne elimination vil føre til en ligning i én variabel med graden $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!$. [Tignol, 1980/1988, s. 92-94]

Leibniz var den første der opdagede dette problem angående graden af den resulterende ligning i Tschirnhaus' metode, Bezout var den første der viste det [Tignol, 1980/1988, s. 94]. Vi er ikke bekendte med Bezouts bevis, så vi ved ikke hvorledes han har argumenteret. Men en måde at argumentere på kunne være som følger: Med udgangspunkt i Tignols notation lad $m = n - 1$ og lad c_i for $0 \leq i \leq n$ være defineret som ovenfor, da er c_{n-k} et polynomium af grad k i de

m variable $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$. I udtrykket for c_{n-1} optræder et led af formen b_0, i c_{n-2} optræder et af formen b_0^2, i c_{n-3} et af formen b_0^3 osv. indtil vi i c_1 har b_0^m.

Isolerer vi de respektive b_{i_j}'er i systemet af de $n-3$ ligninger (c_{n-1} til c_2) får vi i værste tilfælde følgende:

$$\begin{array}{rcccrcl} c_{n-1} & = & 0 & \Rightarrow & b_0 & = & \ldots + b_{i_1}^1 + \ldots \\ c_{n-2} & = & 0 & \Rightarrow & b_{i_1} & = & \ldots + b_{i_2}^2 + \ldots \\ c_{n-3} & = & 0 & \Rightarrow & b_{i_2} & = & \ldots + b_{i_3}^3 + \ldots \\ & & \vdots & & & & \\ c_2 & = & 0 & \Rightarrow & b_{i_{m-2}} & = & \ldots + b_{i_{m-1}}^{m-1} + \ldots \end{array}$$

hvor $i_1, \ldots, i_{m-1} \in \mathrm{N}_{m-1}$ og der for $j \neq k$ gælder at $i_j \neq i_k$. I udtrykket for c_1 optræder som ovenfor bemærket, da $m = n-1$, leddet b_0^{n-1}. Substitueres nu successivt ind i dette led gående fra oven og nedefter i ovenstående system, får vi følgende:

$$\begin{array}{rcl} b_0^{n-1} & = & (\ldots + b_{i_1}^1 + \ldots)^{n-1} \\ & = & (\ldots + (\ldots + b_{i_2}^2 + \ldots)^1 + \ldots)^{n-1} \\ & = & (\ldots + (\ldots + (\ldots + b_{i_3}^3 + \ldots)^2 + \ldots)^1 + \ldots)^{n-1} \\ & \vdots & \end{array}$$

hvor vi i sidste substitution indsætter $b_{i_{m-1}}^{m-1}$, som jo er lig $b_{i_{m-1}}^{n-2}$. Dvs. at vi ved første substitution får et led af formen $b_{i_1}^{1\cdot(n-1)}$, ved anden substitution et af formen $b_{i_2}^{1\cdot 2\cdot(n-1)}$ osv. I sidste instans ender vi altså med et led af formen $b_{i_{m-1}}^{1\cdot 2\cdots(n-2)\cdot(n-1)} = b_{i_{m-1}}^{(n-1)!}$, men det betyder jo at den resulterende ligning c_1 i én variabel ($b_{i_{m-1}}$) netop har graden $(n-1)!$.

Tschirnhaus korresponderede med vennen Leibniz pr. brev, og allerede i april 1677 berettede han om sin metode til Leibniz. Ifølge Kracht & Kreyszig må Leibniz have opdaget at man ved at anvende metoden på femtegradsligningen får at de fire betingelser (c_4 til c_1) er af første, anden, tredje og fjerde grad (respektivt), hvorfor den endelige ligning er af grad 24, og derfor ikke generelt kan reduceres til et produkt af ligninger af lavere grader. Leibniz skrev i perioden 1678-79 et brev til Tschirnhaus, hvori han påpegede at han grundet egne erfaringer tvivlede på metodens anvendelighed i femtegradsligningens tilfælde. Leibniz skrev

> *Concerning your* [...] *method for finding the roots of an equation, which for solving*
>
> $$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$
>
> *consists in assuming*
>
> $$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = q \qquad [q \textit{ should read } y]$$

> *and then eliminating x by y and [...] eliminating the middle terms in the resulting equation [...] I do not believe that it will be succesful for equations of higher degree, expect in special cases. I believe that I have a proof for this.* [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 27]

Til trods for Leibniz' skepsis var Tschirnhaus' tro på sin metode ikke til at rokke, han fortsatte sit arbejde med denne. Udgivelsen blev dog forsinket ca. 6 år, men en sådan forsinkelse var på daværende tidspunkt ikke unormal. Omkring udgivelsestidspunktet skriver Tschirnhaus i et brev til Leibniz at hans metode *er* korrekt, også i det generelle tilfælde, og at han snart vil publicere den for femtegradsligningen. [Kracht & Kreyszig, 1990, s. 27-28]

Lad os nu først se hvordan Tignols udlægning af Tschirnhaus' transformation kommer til udtryk når den anvendes på tredjegradsligningen, og hvorledes dette stemmer overens med gennemgangen i afsnit 4.2.1.

4.2.3 Eksempel for tredjegradsligningen

Til illustration af ovenstående betragter vi tilfældet $n = 3$ og $m = 2$. Vi har tredjegradsligningen

$$P(X) = X^3 + pX + q = 0, \tag{4.16}$$

hvor $p \neq 0$. Lad nu

$$Y = X^2 + b_1 X + b_0. \tag{4.17}$$

Elimination af X mellem (4.16) og (4.17) ved den beskrevne metode giver følgende resultant

$$R(Y) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 1 & b_1 & b_0 - Y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & b_0 - Y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 & b_0 - Y \end{pmatrix}$$

som er ensbetydende med følgende resulterende ligning af grad 3 i Y:

$$c_3 Y^3 + c_2 Y^2 + c_1 Y + c_0 = 0, \tag{4.18}$$

hvor

$$\begin{aligned} c_3 &= -1 \\ c_2 &= 3b_0 - 2p \\ c_1 &= 4pb_0 - 3qb_1 - 3b_0^2 - pb_1^2 - p^2 \\ c_0 &= q^2 + p^2 b_0 - pqb_1 + 3qb_0 b_1 - 2pb_0^2 + b_0^3 - qb_1^3 + pb_0 b_1^2. \end{aligned}$$

For nu at få

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0, \end{aligned}$$

kan vi, helt analogt til hvad vi gjorde i afsnit 4.2.1, sætte

$$b_0 = \frac{2}{3}p$$

og vælge b_1 som en rod til andengradsligningen $pb_1^2 + 3qb_1 - p^2/3 = 0$, eksempelvis

$$b_1 = \frac{3}{p}\left(\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}\right).$$

Med et sådant valg af b_0 og b_1, har vi at $c_2 = c_1 = 0$. Hermed følger af (4.18), da jo $c_3 = -1$, at

$$Y^3 - c_0 = 0.$$

Nu sættes $\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} = A$, hvorved vi opnår at

$$Y^3 = c_0 = 2^3 A^3 \left(\frac{3}{p}\right)^3 \left(A - \frac{q}{2}\right),$$

og således fås at en af rødderne til resultanten (4.18) altså er

$$Y = 2A\frac{3}{p}\sqrt[3]{A - \frac{q}{2}}.$$

En rod til den oprindelige ligning (4.16) fås ved at løse andengradsligningen (4.17) som nu ser således ud

$$X^2 + \frac{3}{p}\left(A - \frac{q}{2}\right)X + 2\frac{p}{3} = 2A\frac{3}{p}\sqrt[3]{A - \frac{q}{2}}. \tag{4.19}$$

Eksemplet her er således beskaffent at man allerede nu står med en ligning der nemt kan løses, da det jo er en andengradsligning. I det generelle tilfælde havde man eventuelt været nødt til køre maskineriet igen hvor $P(X)$ i (4.16) nu var det man fik ud af (4.19) og så fremdeles. At dette lader sig gøre vises ved induktion efter graden. Fra egenskaberne ved den resulterende ligning $R(Y)$ ved vi at mindst én af rødderne i (4.19) også er rod i (4.16), hvorfor vi altså kan faktorisere et lineært led 'ud' af (4.16), så at vi kan finde samtlige rødder til (4.16); også dette vises ved induktion. [Tignol, 1980/1988, s. 94-95]

Bemærk at dette eksempel i det store hele svarer til gennemgangen af Tschirnhaus' transformation for tredjegradsligningen i afsnit 4.2.1. Resultanten i dette eksempel (4.18) er den samme som den resulterende ligning, altså ottelinierssudtrykket (4.9), på nær nogle afvigelser i fortegnene som skyldes de forskellige opskrivninger af hhv. tredjegradsligning og den antagede ligning (4.17). Den første 'søjle' i (4.9) svarer til c_3, den anden 'søjle' til c_2 osv. (igen på nær afvigelser i fortegnene). Ligeledes svarer b_0 i ovenstående eksempel til $-a$ og b_1 til $-b$. En forskel ved de to metoder er måden hvorpå man bestemmer den resulterende ligning; Tignol benytter sig af determinantbegrebet, hvilket ikke eksisterede på Tschirnhaus' tid. Men da den resulterende ligning i begge tilfælde viser sig at være stort set ens, formoder vi – i overensstemmelse med Tignols bemærkning (jf. fodnote 17 s. 38) – at begge metoder i bund og grund er ækvivalente, dvs. at de bygger på de samme eliminationsteknikker.

Grunden til at det går godt for løsning af tredjegradsligningen ved Tschirnhaus' metode er som tidligere bemærket at c_1, i systemet af de $n-1=3-1=2$ ligninger, her kun bliver en andengradsligning i b_1, da jo $(n-1)! = (3-1)! = 2$. Tschirnhaus' metode virker, som tidligere nævnt, kun generelt for $n \leq 3$, for f.eks. fjerde- eller femtegradsligningen vil c_1 i værste tilfælde blive en ligning af grad hhv. $(4-1)! = 3! = 6$ eller $(5-1)! = 4! = 24$. Vi har til lejligheden foretaget beregningerne for fjerde- og femtegradsligningen i *Maple*, som er et symbolsk regneprogram (jf. appendiks D). Disse beregninger skal illustrere hvor kompliceret c_1 udtrykt ved et enkelt b_i kan gå hen og blive for voksende n.

Som tidligere nævnt har også Bezout udviklet en metode som sigter efter løsning af højeregradspolynomier, og som ligeledes er baseret på elimination. Selv om denne metode også bygger på resultanten og den resulterende ligning, adskiller den sig dog alligevel fra Tschirnhaus' metode på visse punkter, som vi nedenfor skal se.

4.3 Bezouts 1764-arbejde

Étienne Bezout (1730-1783) blev født 31. marts i Nemours, Frankrig. Da både hans bedstefader og fader, Pierre Bezout, var dommere, blev det forventet at Étienne ville følge i deres fodspor, men efter at have læst Eulers værker besluttede han sig for at fordybe sig i matematikken i stedet. Bezout publicerede flere artikler og fik ansættelser ved Académie des Sciences, Gardes de la Marine og Corps d'Artillerie. Det vigtigste arbejde i denne forbindelse blev at skrive en lærebog i matematik til studerende. Lærebøgerne blev til *Cours de mathematiques à l'usage des gardes de la marine* (1764-67) i fire bind samt *Cours complet de mathematiques à l'usage de marine et de l'artillerie* (1770-82) i seks bind. Sidstnævnte var meget populær blandt studerende som søgte ind på Ecole Polytechnique og blev endda brugt, i en engelsk oversættelse, som lærebog i analyse ved Harvard University. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. II, s. 111-114]

Udover disse lærebøger er Bezout kendt for sine studier indenfor algebraen. I hans første artikel om ligningsteori, *Sur plusiers classes d'equations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique*, beskriver han hvorledes en ligning med en ubekendt kan omskrives til to ligninger med to ubekendte, hvor en af disse er simplere, og derved nemmere at løse end den oprindelige ligning. Hans største resultater findes i eliminationsteorien, hvilket for ham var at studere resultanten i en variabel for n givne ligninger med n ubekendte. Hans arbejde med resultanter motiverede flere undersøgelser i den moderne eliminationsteori. Bezouts artikler om ligninger blev samlet i *Théorie générale des équation algébraiques* som blev publiceret i 1779. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. II, s. 111-114]

4.3.1 Bezouts metode

Bezout skriver i 1764 en artikel, *Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues*, som er speciel interessant, da han som den første matematiker foreslår en *eksplicit* brug af enhedsrødder til løsning af ligninger af grad op til og med fire. Bezout var bekendt med de tidligere metoder af Tschirnhaus og Euler, og hans metode trækker da også en hel del på Tschirnhaus'. Bezout vurderer, ligesom Tschirnhaus gjorde det om sin, at hans metode også vil virke for polynomier af grad større end fire, men Lagrange viser i sit store værk *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* hvorfor den ikke gør (jf. afsnit 5.4). Vi bygger udelukkende gennemgangen af Bezouts metode på Tignols fremstilling af denne, og ligesom Tignol i sin udlægning af Tschirnhaus' metode gav en moderne fremstilling gør han det også her. [Tignol, 1980/1988, s. 163-164]

Lad os se på hvordan Bezouts metode ifølge Tignol virker. Hvis udgangspunktet er at finde rødderne til et polynomium af grad n

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 = 0,$$

så er essensen i Bezouts metode at gøre brug af ligningerne

$$Y^n = 1 \tag{4.20}$$

$$a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \ldots + a_{n-1} Y^{n-1} = X. \tag{4.21}$$

Ligesom ved Tschirnhaus' metode sigter vi nu efter at eliminere Y mellem (4.20) og (4.21). Igen er den resulterende ligning lig resultanten[18] $R_n(X)$ af (4.20) og (4.21), og også denne er af grad n men i dette tilfælde i variablen X. [Tignol, 1980/1988, s. 164]

Vi har nu n parametre $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$ at skrue på for at få $R_n(X)$ lig 0, og dermed bestemme en fælles rod for (4.20) og (4.21) (jf. sætning 4.1). Den ledende koefficient er $(-1)^n$ og vi kan uden tab af generalitet antage at R_n er monisk. En egenskab ved $R_n(X)$ er jo at hvis x og y relaterer til hinanden som i (4.20) og (4.21), dvs. at y er en n'terod ω og

$$x = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1},$$

så er x en rod i $R_n(X)$. Dermed går[19]

$$X - (a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1})$$

op i $R_n(X)$. Da $a_0, \ldots, a_n$ bliver betragtet som uafhængige vil værdierne af x, som korresponderer til de forskellige n'terødder ω (altså rødderne til (4.20)), være forskellige, hvilket giver at[20]

$$R_n(X) = \prod_{\omega} \left(X - \left(a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1}\right)\right), \tag{4.22}$$

og samtlige rødder til $R_n(x)$ er dermed kendte. [Tignol, 1980/1988, s. 164]

Hvis vi ser på et monisk polynomium $P(X) = 0$ af grad n, så er pointen at bestemme parametrene $a_0, \ldots, a_{n-1}$ i (4.21) således at polynomiet $R_n(X)$ bliver

[18] Brugen af determinantbegrebet i beregning af den resulterende ligning er ligeledes her anakronistisk.

[19] Hvis z er rod i $P(x)$ så går $x - z$ op i $P(x)$.

[20] Da $X - (a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1})$ alle er indbyrdes primiske, og da der er n forskellige af disse, må deres produkt være $R_n(X)$.

identisk med $P(X)$. Lykkes dette er rødderne til $P(X)$ jo netop $R(X)$'s rødder som kan fås på formen

$$a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1}. \tag{4.23}$$

Det hele afhænger nu af, om man er i stand til at bestemme værdier til $a_0, \ldots, a_{n-1}$, så at R_n er identisk med P, og dette lader sig gøre for $n = 2, 3, 4$. [Tignol, 1980/1988, s. 164-165]

4.3.2 Eksempel

Vi vil her gennemgå metoden for $n = 3$. Vi har at

$$R_3(X) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & a_1 & a_0 - X & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 - X & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 - X \end{pmatrix} = 0.$$

Dvs.

$$(a_0 - X)^3 + 3a_1a_2(X - a_0) + (a_1^3 + a_2^3) = 0,$$

og når denne omskrives til et monisk polynomium fås

$$(X - a_0)^3 - 3a_1a_2(X - a_0) - (a_1^3 + a_2^3) = 0. \tag{4.24}$$

Alternativt kan dette resultat fås ved at gange højresiden ud på (4.22). For at udregne løsninger til tredjegradsligningen

$$X^3 + pX + q = 0 \tag{4.25}$$

skal man bestemme værdier for a_0, a_1, a_2 så $R_3(X)$, dvs. (4.24), bliver identisk med (4.25). Det ses at a_0 må være lig nul i det der ikke er noget andengradsled i (4.24), og vi har dermed at ligningerne

$$-3a_1a_2 = p \qquad \text{og} \qquad -(a_1^3 + a_2^3) = q \tag{4.26}$$

skal være opfyldt. Udtrykkes a_2 ved a_1 fås fra den anden ligning i (4.26) at

$$\begin{aligned} -a_1^3 - \left(-\frac{p}{3a_1}\right)^3 &= q \Rightarrow \\ a_1^6 + qa_1^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 &= 0, \end{aligned}$$

som er en andengradsligning i a_1^3, og dermed altså let kan løses. Lad os vælge

$$a_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

som rod i ovenstående ligning[21]. Disse to respektive værdier for a_1 og a_2 opfylder altså (4.26) og dermed er

$$X^3 + pX + q = R_3(X).$$

Rødderne til (4.25) er derfor ifølge ligning (4.22) på formen

$$a_1\omega + a_2\omega^2,$$

hvor ω løber over mængden af tredje enhedsrødder. De to andre løsninger vil dermed være hhv.

$$a_1 + a_2, \qquad a_1\omega^2 + a_2\omega.$$

I den for tredjegradsligningens normale generelle opskrivningsform kan rødderne ligeså findes ved Bezouts metode, men udregningerne bliver mindre gennemskuelige. [Tignol, 1980/1988, s. 164-166]

Bezouts metode kan altså tolkes som et forsøg på at gøre Tschirnhaus' transformation mere transparent. Men det er dog kun på overfladen at Bezouts metode kan virke mere simpel, komplikationerne ved løsning af ligninger af større grad end 4 er meget lig dem der opstår ved brug af Tschirnhaus' metode, nemlig løsning af en resulterende ligning som i værste tilfælde har grad $(n-1)!$. Dette vil vi ganske kort komme ind på igen når Lagrange tager metoderne under inspektion (jf. afsnit 5.4).

I og med at Eulers metode til løsning af højeregradsligninger ved brug af elimination i store træk ligner Tschirnhaus' vil vi her gennemgå nogle af Eulers andre metoder. [Petersen, 1877, s. 98-100 og 103-104]

4.4 Eulers løsningsmetoder

Leonhard Euler (1707-1783) er en af de største og mest producerende matematikere gennem tiden. Han har fået publiceret utallige værker omhandlende mange af matematikkens områder.

Euler var søn af præsten Paul Euler, som i sin studietid blandt andet havde fulgt matematikforelæsninger hos Jacob Bernoulli, og derfor kunne lære sin søn elementær matematik inden påbegyndt skolegang. Det var Paul Eulers ønske at hans søn ligesom han selv skulle studere teologi på universitetet og blive præst. Som kun 14-årig begyndte Leonhard Euler på universitetet i Basel, hvor han blev introduceret for den berømte professor Johann Bernoulli. Med Bernoullis hjælp fik Euler tilladelse af sin far til at opgive teologistudiet og i stedet studere matematik. Euler færdiggjorde sine studier i 1726, altså i en alder af 19 år, og samme år fik han udgivet sin første artikel. [Euler, 1770/1972, s. vii-li][22] og [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IV, s. 467-468]

Den 24. maj 1727 ankom Euler til Skt. Petersborg, for at udfylde en stilling på det nyligt stiftede akademi og var faktisk tilknyttet dette akademi resten af

[21] $-(q/2) + \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}$ er den ene af de to rødder i $(a_1^3)^2 + qa_1^3 - (p/3)^3 = 0$; den anden er $-(q/2) - \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}$.

[22] Der er i denne udgave af Eulers værk to indledninger omhandlende bl.a. Eulers liv; en af C. Truesdell og en af Fracis Horner.

sit liv. I 1731 blev han professor i fysik, men arbejdede også med flere andre områder, som f.eks. med geografiske landkort. Hans vigtigste arbejde lå dog i matematikken, og i 1741 havde han udarbejdet 80-90 artikler m.m. (hvoraf 55 blev udgivet) primært omhandlende analyse, talteori og mekanik. [Euler, 1770/1972, s. vii-li] og [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IV, s. 468-469]

I 1733 giftede Euler sig med Katharina Gsell og fik sønnerne Johann Heinrich og Karl i hhv. 1734 og 1740. I 1741 flyttede hele familien til Berlin hvor Euler havde fået tilbudt en stilling. Her boede de i de næste 25 år og de fik endnu tre børn, en dreng og to piger. Under sin tid i Berlin fik Euler produceret 380 arbejder, hvoraf de 275 blev publiceret. I 1766 vendte Euler tilbage til Skt. Petersborg. I 1738 mistede Euler, som følge af en sygdom, synet på højre øje, og få år efter hans tilbagekomst til Skt. Petersborg mistede han også næsten hele synet på det venstre; i 1771 var han fuldstændig blind. På trods af blindheden producerede Euler næsten halvdelen af alt sit arbejde i perioden efter 1765, med hjælp fra bl.a. to af sine sønner samt andre elever. Om aftenen den 18. september 1783 døde Euler af en hjerneblødning. [Euler, 1770/1972, s. vii-li] og [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IV, s. 467-474]

Figur 4.3 Leonhard Euler (1707-1783). [O'Connor & Robertson, 2002]

Euler fik fordybet sig i mange områder (mekanik, astronomi, navigation, geografi, hydraulik m.m.), men først og fremmest var han matematiker. Hans største område indenfor matematikken var analysen, men han har dog formået også at arbejde med stort set alle andre områder. Han havde ikke mange elever, men var ifølge Laplace en vejleder for alle matematikere i hans tid. I [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80] står således

> *In mathematics the eighteenth century can fairly be labeled the Age of Euler, but his influence upon the development of mathematical sciences was not restricted to that period. The work of many outstanding nineteenth-century mathematicians branched out directly from the work of Euler.* [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IV, s. 474]

Også hans *Vollständige Anleitung zur Algebra*[23] (som udkom på tysk i 1770) har haft en stor indflydelse på det 19. og 20. århundredes tekster omhandlende emnet. Det er i denne vi finder hans arbejde om algebraisk ligningsløsning. [Euler, 1770/1972, s. vii-li] og [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IV, s. 474]

4.4.1 Ligninger af tredje grad

Euler indleder section IV[24] af *Vollständige Anleitung zur Algebra* med

> *The principal object of Algebra, as well as of all the other branches of Mathematics, is to determine the value of quantities that were before unknown; and this is obtained by considering attentively the conditions given, which is always expressed in known numbers. For this reason, Algebra has been defined,* The science which teaches how to determine unknown quanties by means of those that are known. [Euler, 1770/1972, s. 186]

I kapitel XI (sektion IV i del I) ser Euler på løsningen af komplette tredjegradsligninger, dvs. tredjegradsligninger på formen

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0.$$

Han argumenterer for at sådanne ligninger må have tre rødder (hverken flere eller færre), hvor nogle af dem kan være imaginære (*impossible*). For ligninger af formen

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0, \tag{4.27}$$

hvor a, b, c er hele tal, betyder dette at (4.27) kan skrives som produktet af de tre faktorer $(x-p)$, $(x-q)$ og $(x-r)$, hvor p, q, r er rødderne i (4.27). Da Euler udemærket kender til Viète-relationerne, finder han at rødderne kan bestemmes ved at se på samtlige divisorer i det konstante led c, (en eventuel rational rod må nødvendigvis være et heltal som er en divisor i c). [Euler, 1770/1972, s. 253-254]

Herefter betragter Euler forskellige ligninger, hvor koefficienterne a, b, c ikke er heltal men rationale tal og hvor koefficienten til x^3 er et heltal forskellig fra 1

[23] Denne er publiceret i adskillige udgaver på engelsk, hollandsk, italiensk, fransk og russisk. Vi er i besiddelse af et genoptryk af femte udgave fra 1840 i engelsk oversættelse af John Hewletts.

[24] I den engelske oversættelse hedder denne sektion *Of Algebraic Equations, and the Resolution of Them.*

(som kan omskrives til ligninger på samme form som (4.27)). Euler gør sig også den observation at antallet af positive rødder er bestemt ved antallet af gange leddene i ligningen skifter fortegn og antallet af negative rødder er bestemt ved antallet af gange at efterfølgende led har samme fortegn[25]. [Euler, 1770/1972, s. 256]

I kapitel XII betragter Euler tredjegradsligninger, hvor rødderne ikke er heltal, men derimod irrationale eller imaginære. Her anvender han Cardanos metode til at bestemme rødderne. [Euler, 1770/1972, s. 253-271]

4.4.2 Ligninger af fjerde grad

Euler begynder sin undersøgelse af fjerdegradsligningen ved at se på en ren ligning

$$x^4 = f,$$

hvorom han pointerer at man ved løsning af denne skal være opmærksom på positive hhv. negative samt imaginære rødder. Dernæst beskriver han ligninger af formen

$$x^4 + fx^2 + g = 0,$$

som kan betragtes som en andengradsligning i x^2. Endnu en mulighed er ifølge Euler at faktorisere en rod ud af en given fjerdegradsligning. Dette gøres ved, som i afsnit 4.4.1 beskrevet, først at bestemme en rod blandt de mulige divisorer i det konstante led, faktorisere denne ud og dernæst løse en tredjegradsligning f.eks. vha. Cardanos metode. [Euler, 1770/1972, s. 272-273]

Det næste eksempel på en speciel form for ligninger, som Euler betragter, er ligninger af formen

$$x^4 + max^3 + na^2x^2 + ma^3x + a^4 = 0.$$

Denne omskriver han til

$$(x^2 + pax + a^2)(x^2 + qax + a^2) = 0, \tag{4.28}$$

hvor vi, hvis vi ganger (4.28) ud, ser at p og q må opfylde følgende;

$$p + q = m \tag{4.29}$$
$$pq = n - 2. \tag{4.30}$$

Kvadreres nu ligning (4.29) samtidig med at der trækkes fire gange (4.30) fra, opnås

$$p^2 - 2pq + q^2 = m^2 - 4n + 8.$$

Dernæst tager Euler kvadratroden på begge sider og får[26]

$$p - q = \sqrt{m^2 - 4n + 8},$$

[25] Dette gælder også for den generelle n'tegradsligning. Denne sammenhæng tilskrives Descartes af franskmænd og Harriot af englændere. Den generelle demonstration af sammenhængen blev dog givet af l'Abbé de Gua. [Euler, 1770/1972, fodnote s. 274]

[26] Dette giver $p - q = \pm\sqrt{m^2 - 4n + 8}$, men Euler betragter kun den positive løsning.

som sammen med $p+q=m$ leder frem til at

$$\begin{aligned} p &= \frac{m+\sqrt{m^2-4n+8}}{2} \\ q &= \frac{m-\sqrt{m^2-4n+8}}{2}. \end{aligned}$$

Nu kendes p og q, og x kan findes ved at sætte de to faktorer fra ligning (4.28) lig 0. Dette giver følgende løsninger til (4.28)

$$\begin{aligned} x_1,\ x_2 &= -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{p^2-4} \\ x_3,\ x_4 &= -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{q^2-4}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

[Euler, 1770/1972, s. 275-276]

Vi har her gennemgået ovenstående løsning af fjerdegradsligningen (4.28), som den er beskrevet i Eulers værk. Hvad der ikke fremgår så klart af denne fremstilling, men som vi mener at Euler helt sikkert har været klar over, er at vi her har en 'hvis og kun hvis'-sætning, nemlig: *En fjerdegradsligning kan opskrives på formen (4.28) hvis og kun hvis den har rødderne (4.31).*

4.4.3 Eulers metode

Euler nævner at der er opdaget to metoder til løsning af fjerdegradsligningen, begge af mere generel karakter.

I kapitel XIV gennemgår Euler den første af disse, som er Bombellis metode. Denne metode går primært ud på at reducere fjerdegradsligningen til en tredjegradsligning, og derefter løse denne ved brug af Cardanos metode. [Euler, 1770/1972, s. 278-282]

I kapitel XV præsenterer Euler den anden metode, en ny metode som Euler selv er ophavsmand til. Han antager at rødderne i en fjerdegradsligning har formen

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}, \tag{4.32}$$

hvor p, q, r er rødder i en tredjegradsligning,

$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0, \tag{4.33}$$

dvs.

$$\begin{aligned} f &= p+q+r \\ g &= pq+pr+qr \\ h &= pqr. \end{aligned}$$

Nu kvadreres den oprindelige ligning (4.32), og der opnås

$$x^2 = p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr},$$

hvilket er det samme som

$$x^2 - f = 2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}.$$

Denne kvadreres endnu en gang, og der fås

$$x^4 - 2fx^2 + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2},$$

hvilket er lig

$$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{h}x + f^2 - 4g = 0, \tag{4.34}$$

da jo $4pq + 4pr + 4qr = 4g$ og da $8\sqrt{p^2qr} + 8\sqrt{pq^2r} + 8\sqrt{pqr^2} = 8\sqrt{pqr}(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$, hvor vi husker at $pqr = h$ og $x = (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$. Euler finder altså en rod $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ til fjerdegradsligningen, hvor p, q, r er rødder i tredjegradsligningen (4.33). [Euler, 1770/1972, s. 282-283]

Euler argumenterer for at (4.34) er en generel fjerdegradsligning.

> *The equation of the fourth degree, at which we have arrived, may be considered as general, although the second term x^3y is wanting; for we shall afterwords shew, that every complete equation may be transformed into another, from which the second term has been taken away.* [Euler, 1770/1972, s. 283]

Metoden giver ikke kun én rod til fjerdegradsligningen, men alle fire rødder.

> *This appears at first to furnish only one root of the given equation; but if we consider that every sign $\sqrt{\ }$ may be taken negatively, as well as positively, we immediately perceive that this formula contains all the four roots.* [Euler, 1770/1972, s. 284]

Hvis det tillades at lave alle mulige fortegnskombinationer af $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ fås otte løsninger, men da der samtidig gælder at $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$ og da der skal tages højde for at $\sqrt{h}$ kan være positiv hhv. negativ, vil de fire løsninger være

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x &= \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \end{aligned}$$

for positive $\sqrt{h}$, og

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} \\ x &= \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} \\ x &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} \end{aligned}$$

for negative $\sqrt{h}$. [Euler, 1770/1972, s. 283-284]

4.4.4 Eksempel

Som et eksempel på sin metode viser Euler løsningen af ligningen

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0. \tag{4.35}$$

Sammenligner vi med (4.34), har vi at $f = 25/2$, $g = 769/16$ og $h = 225/4$. Det vil sige at p, q, r er rødder i tredjegradsligningen

$$z^3 - \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0. \tag{4.36}$$

For at slippe af med brøkerne substituerer han $z = u/4$ og får

$$\frac{u^3}{64} - \frac{25u^2}{32} + \frac{769u}{64} - \frac{225}{4} = 0,$$

som ganges igennem med 64

$$u^3 - 50u^2 + 769u - 3600 = 0. \tag{4.37}$$

De tre (positive) rødder til ligning (4.37) findes til at være 9, 25 og 16, hvilket betyder at rødderne til ligning (4.36) er $p = 9/4$, $q = 4$ og $r = 25/4$, idet vi havde at $z = u/4$. Euler betagter hernæst den negative løsning til $\sqrt{h} = \sqrt{(9/4) \cdot 4 \cdot (25/4)} = \pm 15/2$. I dette tilfælde får vi løsningerne:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{4} - \sqrt{\frac{25}{4}} = 1 \\
x &= \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{4} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 2 \\
x &= -\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{4} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 3 \\
x &= -\sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{4} - \sqrt{\frac{25}{4}} = -6.
\end{aligned}$$

Til sidst kontrollerer Euler at disse løsninger rent faktisk er rødder til (4.35). Det vil sige at produktet af de fire faktorer $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ og $(x+6)$ giver $x^4 - 25x^2 + 60x - 36$, hvilket han ser det gør. [Euler, 1770/1972, s. 284-285]

Det pudsige ved Eulers valg af dette eksempel er at han jo kunne have bestemt rødderne langt nemmere ved sin 'method of trial', altså ved at finde divisorer i det konstante led.

Euler gør hen mod afslutningen af dette kapitel opmærksom på følgende.

> *This is the greatest length to which we have yet arrived in the resolution og algebraic equations. All the pains that have been taken in order to resolve equations of the fifth degree, and those of higher dimensions, in same manner, or at least, to reduce them to inferior degrees, have been unsuccesful: so that we can not give any general rules for finding the roots of equations, which exceed the fourth degree.* [Euler, 1770/1972, s. 286]

Ifølge Nový skal Euler allerede i en udgivelse fra 1732 (som vi desværre ikke er i besiddelse af) have foreslået følgende form af rødderne i den generelle n'tegradsligning

$$x = \sqrt[n]{A_1} + \sqrt[n]{A_2} + \ldots + \sqrt[n]{A_{n-1}}, \tag{4.38}$$

hvor A_i er rødderne af resolventen[27] af grad $n-1$. Euler viste dernæst at hans udtryk fungerer for $n = 2,3,4$, men for $n = 5$ postulerede han det kun men viste det ikke. Nový påpeger dog at man af Eulers efterladte papirer skulle have fundet at han i 1769 reviderede sin opfattelse, og istedet foreslog en ny form af rødderne;

$$x = w + B_1 \sqrt[n]{\nu} + B_2 \sqrt[n]{\nu^2} + \ldots + B_{n-1} \sqrt[n]{\nu^{n-1}},$$

hvor w er et rationalt tal, $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ enten er rationale tal eller 'tal som ikke indeholder nogle rødder af n'te grad', og ν er en rod af resolventen af grad $n-1$. Euler viste igen at denne form opfylder ligninger af grad $n = 2,3,4$, og skulle tilmed have været overbevist om at der var den største sandsynlighed for at denne form af roden var generel. [Nový, 1973, s. 21-22]

Den af Nový af Euler beskrevne form af rødderne fra 1732 er ikke helt i overensstemmelse med Eulers antagelse af røddernes form i afsnit 4.4.3, hvilket undrer os. Samtidig skal det bemærkes at den form som Malfatti opskriver rødderne på under henvisning til Euler (jf. afsnit 5.3), er mere i overenstemmelse med den ifølge Nový i Eulers efterladte papirer beskrevne form!

4.5 Afrunding

En ting som ved gennemgangen af den ovenfor beskrevne periode falder en i øjnene er måden hvorpå matematikerne forsøger at komme frem til den rigtige løsning på deres problemer. Hele tiden forsøger de at opnå større generalitet ved at ændre blot en lille smule på de allerede etablerede metoder. Det virker omtrent som om de har tænkt; 'når den gamle metode til løsning af tredjegradsligningen (eller fjerdegradsligningen) ikke lader sig generalisere, så må det være fordi der er noget galt med den'. I en vis forstand er denne periodes matematikere at sammenligne med datidens alkymister. På samme måde som alkymisterne hele tiden forsøgte at lave guld ved at blande forskellige metaller på forskellige måder, forsøger disse matematikere at bestemme rødder ved hele tiden at kombinere ligningernes koefficienter på forskellig vis. 'Ved at 'rafle' tilstrækkeligt længe med koefficienterne, kan man være heldig at 'slå' netop den kombination som fører til en afsløring af rødderne'. Også mht. Viètes arbejde med kodebrydning kan her drages en alkymistisk parallel, nemlig at hvis man blot bliver ved at kombinere tegnene på forskellig vis, vil man til sidst kunne fremdrage den oprindelige tekst. Det er måske således tænkeligt at Viète har ladet sine erfaringer som kryptograf påvirke sine studier af algebraisk ligningsløsning, i alt fald taler hans omtale i citatet på side 28 af guld som værende hemmelighedsfuldt (*unvergleichliches Gold*) for at han har ligget under for tidens trend.

Den alkymistiske tankegang som herskede i vores del af Europa er noget helt specielt i den forstand at den ikke var udbredt i andre dele af verden. Rusland for eksempel var slet ikke præget af denne tanke om at alt kunne opnås og afdækkes ved at kombinere ting på forskellig vis. Tschirnhaus især synes påvirket af den alkymistiske tanke, men også Cardano formoder vi var under denne påvirkning, hvilket vi dog ikke direkte bygger på hans matematiske arbejde, men snarere

[27] Ifølge Nový er Euler også den første som navngiver resolventen; *aequatio resolvens* [Nový, 1973, s. 21]. For en definition af resolventen anden end 'hjælpeligning' jf. definition 5.2 kapitel 5.

hans øvrige interesseområder. [*The Great Soviet Encyclopedia*, 1970-79/1973-82, vol. 1, s. 214-215 og vol. 12, s. 39]

Figur 4.4 Dette motiv fra Notre Dame i Paris er en allegori for alkymien. Figurens hoved berører skyerne, hun sidder på en trone og holder i højre hånd et scepter som tegn på magt, i venstre hånd en åben og en lukket bog som tegn på den hemmelige og den tilgængelige videnskab. Stigen er et symbol på den tålmodighed der kræves i afdækningen af 'det store værks' enkelte niveauer, her symboliseret ved stigens trin. [Gebelein, 2000]

Muligvis kan det også tænkes at det er denne faste tro på at den rigtige løsning hele tiden var lige om hjørnet, der har været kilde til den enorme kreativitet, som vi – i modsætning til visse andre der har behandlet denne periode – mener var til stede. Spørgsmålet man kan stille sig er nu, hvorvidt denne kreativitet udelukkende var rettet mod beregningsmæssige værktøjer eller om der også var tale om udvikling af nye koncepter. Selvfølgelig kan man ikke benægte at der i denne periode blev lagt en vis vægt på beregning, men vi er tilbøjelige til at mene at konceptudvikling, eller i alle tilfælde påbegyndelsen deraf, ligeledes var en vigtig del af perioden – for en videre diskussion af dette henvises til afsnit 7.2.

I modsætning til andre af periodens matematikere er Euler med sin 'method of trial' mere præget af en form for problemløsningsmentalitet, eller hvad vi i dag måske vil referere til som 'eksperimentel matematik'. Sagt lidt groft går Tschirnhaus (og Bezout) mere op i selve metoden end dens anvendelighed, de anvender den i alle tilfælde ikke på specifikke højeregradspolynomier, hvorved de muligvis ville have opdaget dens mangler. Det virker næsten som om at de er mere bevægede af selve strukturerne og ikke så meget af det at løse specifikke ligninger. Det forekommer ikke som om at Euler i samme grad er på jagt efter denne generelle metode. Han behandler utallige eksempler og har, om man så må sige, i sin fremstilling begge fødder på jorden uden dog af den grund at blive for elementær, blot er han omhyggelig. Men helt uden periodens påvirkning er han alligevel ikke, hvilket ses af eksemplet til illustration af hans nye metode til løsning af fjerdegradsligningen, da han som tidligere påpeget kunne have løst dette eksempel langt nemmere ved sin 'method of trial'. Hos Euler mener vi ligeledes at finde et strejf af alkymiens efterdønninger. Vi baserer dette på Eulers tidligere arbejde med at udtrykke rødderne til den generelle n'tegradsligning på én bestemt form (4.38), hvor han først foreslår en kombination og derefter en ny og revideret udgave af denne.

Mht. første del af vores problemformulering, er der ingen tvivl om at der i Viète-relationerne foreligger symmetribetragtninger (de elementære symmetriske polynomier er jo symmetriske!), men det er snarere af kombinationsmæssige årsager end det er invariansbetragtninger. Selvfølgelig har Viète ikke været klar over generaliteten af sine betragtninger i samme grad som Girard har, men ikke desto mindre har han gjort sig dem. Som tidligere antydet skyldes Viètes manglende indsigt i generaliteten af relationerne, formentlig det faktum at han ikke accepterede negative rødder. Også hos Bezout finder vi som et biprodukt af hans forgæves forsøg på at forbedre Tschirnhaus' transformation en symmetrisk observation; de her såkaldte 'indre symmetrier'. Det er den smukke idé om at udtrykke roden til resultanten som en kombination af koefficienter og enhedsrødder (jf. (4.23)) som vi her tænker på. Man kan vel næppe forestille sig noget mere symmetrisk end enhedsrøddernes placering rundt på enhedscirklen. Euler gør sig ligeledes nogle symmetribetragtninger; også her tænker vi på de 'indre symmetrier' af rødderne, altså måden hvorpå han vil opskrive rødderne som en sum af rodtegn.

Permutationsbetragtninger kan vi ikke spore hos nogle af denne periodes matematikere, selvom vi i bagklogskabens lys kan se at de indirekte indgår i nogle af disses arbejder. En ting er at de elementære symmetriske polynomier er invariante under en permutation af rødderne, men noget andet er de skjulte permutationer i determinantberegningerne hos Tschirnhaus og Bezout (og Euler for den sags skyld, da han jo ligeledes er ophavsmand til en metode lignende Tschirnhaus' og Bezouts). Igen må vi påpege det faktum at ingen af disse tre matematikere har benyttet sig af rent faktiske determinantberegninger, men derimod andre beregninger som svarer til vore dages kendte determinantbegreb. Men tilbage til permutationerne. En determinant kan defineres på flere måder, og en af disse tager netop udgangspunkt i permutationer:

Definition 4.5
Lad $A = (a_{ij})$. Determinanten opfylder udtrykket

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

hvor summen tages over alle permutationer af heltallene $\{1, \dots, n\}$ og $\epsilon(\sigma)$ er permutationernes fortegn. [Lang, 1972, s. 194]

Dvs. denne definition taget i betragtning er der altså under overfladen hos Tschirnhaus og Bezout gemt visse permutationsbetragtninger. Det er dog nok højst usandsynligt at Tschirnhaus og Bezout selv har været klar over dette, og vi udtaler os da også kun i bagklogskabens skærende lys.

Kombinationer forefindes næsten alle steder i de ovenfor gennemgåede metoder; fra kombinationer af rødderne som giver koefficienterne i Viète-relationerne samt

Viètes binomialudtryk til determinantberegninger i udtrykket for resultanten, idet determinanter jo er kombinatorik i rendyrket form.

Ved udgangen af denne ca. 200 års periode var der stadig ikke udviklet en generel metode til løsning af højeregradspolynomier. Det skulle blive Lagrange der som den første hævede abstraktionsniveauet til nye højder, ved at stille spørgsmålet om hvorfor metoderne kun virkede generelt for laveregradspolynomier og hvorfor de i det hele taget virkede. Men inden vi gennemgår Lagranges idéer, vil vi redegøre for de andre arbejder som kom samtidigt med Lagranges værk i 1770.

5 De fire afhandlinger i 1770-71

Årene 1770-71 blev skelsættende i ligningsløsningsteoriens historie. Her blev der nemlig offentliggjort hele fire betydelige arbejder alle viet til ligningsløsningsteorien. Afhandlingerne blev præsenteret ved akademierne i London, Paris, Berlin og Siena (Italien) af hhv. Waring, Vandermonde, Lagrange og Malfatti [Skau, 1990, s. 68]. Hver af disse afhandlinger indeholder vigtige bidrag til teorien om løsningen af ligninger, og samtidig benytter forfatterne sig her af nye metoder og angrebsvinkler, hvori der indgår såvel symmetribetragtninger som permutationer. Vi vil nedenfor gennemgå de for os relevante træk ved hver af disse fire arbejder.

Først et par for kapitlet nødvendige definitioner. Vi husker (jf. afsnit 4.1) at for en ligning af grad n

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

med n rødder $(x_1, \ldots, x_n)$ gælder Viète-relationerne, som bekendt udtrykker koefficienterne ved de elementære symmetriske polynomier. Den moderne definition af et symmetrisk polynomium (funktion) lyder

Definition 5.1
Et polynomium $f(x_1, \ldots, x_n)$ i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ over et givet legeme kaldes symmetrisk hvis

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

for enhver permutation σ af symbolerne $1, 2, \ldots, n$. Indføres notationen $f_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ bliver betingelsen da

$$f_\sigma = f.$$

[Skau, 1990, s. 62]

Hidtil har vi brugt ordet 'resolvent' som et synonym for en hjælpeligning, men en resolvent er ikke altid til 'hjælp' for vores problem, idet resolventen kan være et udtryk, som har større grad end den oprindelige ligning. Vi vil i det følgende bruge resolventen i den bredere betydning og bringer derfor her en definition af den.

Definition 5.2
En ligning, hvis rødder er samtlige permutationer af et udtryk i rødderne af den oprindelige ligning, kaldes en resolvent. [Dehn, 1960, s. 66]

Den sidste definition vi her bringer er definitionen af en Lagrange-resolvent.

Definition 5.3
Med en Lagrange-resolvent *forstås polynomier af formen*

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \ldots + \omega^{n-1} x_n,$$

hvor ω *er en n'te enhedsrod.* [Tignol, 1980/1988, s. 182], [van der Waerden, 1985, s. 80] og [Lagrange, 1808, s. 245]

5.1 Warings *Meditationes Algebraicæ*

Edward Waring (1734-1798) blev født i Old Heath nær Shrewsbury (England), og var den ældste søn af den velhavende jordejer John Waring. Fra skolen i Shrewsbury kom Edward på Magdalen College, Cambridge, hvorfra han i 1757 bestod med udemærkelse. Allerede tre år efter blev Waring udnævnt til Lucasian professor ved Cambridge. Grundet sin unge alder mødte Waring dog modstand ved sin udnævnelse, og så sig derfor nødsaget til at udgive første kapitel af *Miscellanea Analytica.* Dette arbejde blev dog angrebet for ikke nærmere specificerede fejl af William Powell, og i kølvandet på dette fulgte et længerevarende mundhuggeri. Waring blev dog vinderen af denne 'kamp', og fastholdt rent faktisk sit professorat indtil sin død. [Waring, 1782/1991, s. 383] og [*Dictionary of Scientific Biography,* 1970-80, vol. XIV, s. 179-180]

Waring holdt sig ikke kun til studiet af matematik. I 1767 begyndte han at studere medicin, og i 1770 stod han listet som læge (mediciner) ved to hospitaler i hhv. Cambridge og Huntingdonshire. Waring måtte dog opgive dette arbejde grundet sin nærsynethed. I 1776 giftede han sig med Mary Oswell og de bosatte sig nær Shrewsbury. I mellemtiden havde han skiftet fra Magdalen College til Trinity College. Warings kone brød sig imidlertid ikke om Shrewsburys klima, så de returnerede til hans landejendom, Plealy, i Petersbury, hvor Waring døde den 15. august 1798. [Waring, 1782/1991, s. 383-384] og [*Dictionary of Scientific Biography,* 1970-80, vol. XIV, s. 179-180]

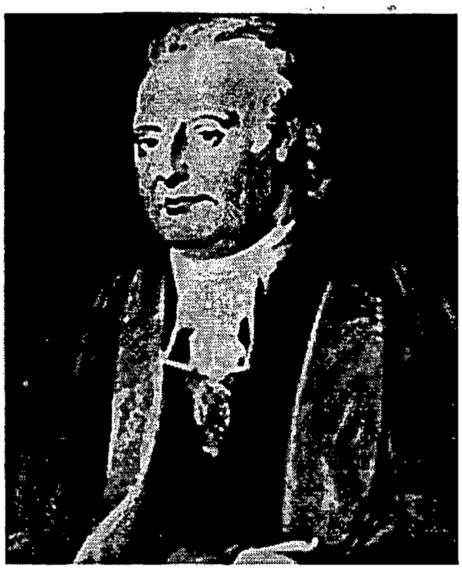
Waring var i sin samtid ikke specielt kendt uden for England på trods af at han, som han selv udtrykte det, havde publiceret

> *300-400 new theorems, more than any other English writer.* [Waring, 1782/1991, s. 384]

Warings fulde værk *Miscellanea Analytica* samt et appendiks om algebraiske kurvers egenskaber blev første gang udgivet i 1762 under titlen *Miscellanea Analytica De Æquationibus Algebraicis Et Curvarum Proprietatibus.* Anden udgave udkom i 1770 under titlen *Meditationes Algebraicæ* (appendikset udkom selvstændigt i 1772). Tredje udgave af *Meditationes Algebraicæ* udkom i 1782[1], og i denne udgave er mange af de metoder, som kun var skitseret i tidligere udgaver nu videreudviklet og yderligere generaliseret. [Waring, 1782/1991, s. 384-385]

Warings arbejde er set fra et pædagogisk synspunkt meget usystematisk opbygget og det er således svært at se den røde tråd i det. Yderligere led hans originale

[1] Det er denne udgave vi benytter da den foreligger i engelsk oversættelse af Dennis Weeks fra 1991.



Figur 5.1 Edward Waring (1734-1798). [O'Connor & Robertson, 2002]

udgaver, som var skrevet på latin, i følge Weeks under mange trykfejl og deslige. Dette er muligvis en af de primære grunde til at hans arbejde ikke fik den store opmærksomhed. F.eks. lyder et citat i oversætterens forord således

> [...] *but the inelegance and obscurity of his writings prevented him from obtaining that reputation to which he was entitled. Except Emerson, there is scarcely any writer whose works are so revolting as those of Waring.* [Waring, 1782/1991, s. x]

Waring baserer en stor del af sit værk på analyse af værker af hans forgængere og samtidige. Således lægger han ud med en ret præcis og koncis opsummering af algebraens historie fra de gamle grækere og frem til hans samtidige. Waring afslutter sin indledning med følgende ord:

> *After so much labor by so many workers in the field of Algebra, some might be astonished that I have produced another work, one with so many pages, on the subject. But the fault would be mine had I done so, if the pages were fewer and the first book that could compile all the discoveries of recent writers should emphasize none of them, nor any of my own discoveries which also perhaps deserve elaboration. But of this the erudite reader must be the judge. My duty indeed has been to serve faithfully, and to promote as much as I can, the cause of knowledge. I beg you then to accept this book, despite its tedious verbiage, for a little greater mastery of the subject that it seeks to convey.* [Waring, 1782/1991, s. xlvi]

[Nový, 1973, s. 41] og [Waring, 1782/1991, s. ix-xlvi]

5.1.1 Warings hovedsætning

Warings arbejde er omfattende og han går – i forhold til n'tegradsligningens løsbarhed – ud af mange tangenter undervejs. I en stor del er værket beskæftiger Waring sig med at udvikle sætninger omhandlende, hvorvidt rødder til polynomier er hhv. komplekse, positive eller negative og hvor mange der er af hver slags afhængig af koefficienternes natur og graden af polynomiet osv. Dette vidner om at Waring i forhold til Lagrange[2] har en meget praktisk tilgang til ligningsløsningen, og ikke i særlig grad søger at hæve abstraktionsniveauet. Faktisk foreslår Waring en numerisk løsning af højeregradspolynomier i stedet for at beskæftige sig med en algebraisk [Waring, 1782/1991, s. 179-180]. Det for vor undersøgelse essentielle i Warings arbejde er hans dybdegående (og utrættelige) behandling af symmetriske rationale funktioner. Det er også her at vi finder, hvad der i dag anses som værende Warings umiddelbart vigtigste bedrift indenfor algebraen, nemlig det at han som den første viser hovedsætningen for symmetriske polynomier (jf. sætning 5.1) samt en noget omstændelig metode til at udtrykke et symmetrisk polynomium ved de elementære symmetriske polynomier, og det er det vi har i sinde at behandle i dette afsnit.

Waring indleder første kapitel af *Meditationes Algebraicæ* med at formulere det problem han i kapitlet søger at løse. Således skriver han

> *A method to find an equation whose roots are any algebraic function of the roots of the given equation or of the given equations*[3]. [Waring, 1782/1991, s. 1]

Allerede i 1762-udgaven af sit værk havde Waring vist, at alle rationale symmetriske funktioner af rødderne i den generelle n'tegradsligning kan udtrykkes som rationale funktioner af koefficienterne i ligningen[4]. Dette gør han ved først at udlede en direkte formel[5] til at udtrykke potenssummerne

$$r_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m \tag{5.1}$$

i koefficienterne til den n'tegradsligning som $x_1, \ldots, x_n$ er rødder i. Dernæst ser han på funktioner af formen

$$x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \cdots + x_1^\beta x_2^\alpha x_3^\gamma \cdots + \cdots,$$

hvor $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \geq 0$ og hvert led i ovenstående udtryk opnås ved en permutation af eksponenterne fra et af de andre led. Han viser at disse er repræsentanter for alle rationale symmetriske polynomier og kan udtrykkes som en funktion af potenssummer hvis koefficienter er heltal. Således har Waring vist at alle symmetriske rationale funktioner i $x_1, \ldots, x_n$ kan udtrykkes i de elementære

[2] Jf. afsnit 5.4.

[3] *De methodo inveniendi æquationem, cuius radices sint quæcunque algebraica datæ æquationes vel datarum æquationum functio.* [Waring, 1782/1991, s. 388]

[4] Ifølge van der Waerden benytter Waring sig i 1762 af potenssummerne (5.1), hvorimod han i 1770 udleder en ny metode til at udtrykke de symmetriske polynomier ved. Det forekommer dog os at denne omtalte metode fra 1762 ligeledes figurerer i den 1782-udgave vi er i besiddelse af.

[5] Newton havde tidligere udledt en rekursiv formel for dette. [Petersen, 1877, 34-35]

symmetriske polynomier til den oprindelige ligning, dvs. koefficienterne i denne. [Waring, 1782/1991, s. 388-389] og [van der Waerden, 1985, s. 76-77]

Vi vil her vise Warings sætning ved brug af en anden fremgangsmåde end hans egen, idet vi finder Warings bevis meget omstændeligt og i særdeleshed uoverskueligt, hvilket bl.a. skyldes det faktum at det lider under manglen af notationer som sumtegn og fakultet. Vi bringer således sætning og bevis i en moderne formulering[6].

Hovedsætningen for symmetriske polynomier 5.1
Et polynomium i de n ubekendte $x_1, \ldots, x_n$ over et legeme, kan udtrykkes som et polynomium i $s_1, \ldots, s_n$ (de elementære symmetriske polynomier i $x_1, \ldots, x_n$) hvis og kun hvis det er symmetrisk.

Før vi går igang med beviset vil vi introducere en bekvem notationsform som gør det muligt at betegne symmetriske polynomier uden at skrive leddene ud. Vi skriver

$$\sum x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

for det symmetriske polynomium, hvis led er de forskellige monomier (uden gentagelse) opnået fra $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ ved permutation af variablene. For at notationen skal være utvetydig skal det totale antal variable angives og fremgå klart af sammenhængen. Eksempelvis har vi for det symmetriske polynomium $\sum x_1^2 x_2$ i to variable at

$$\sum x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1,$$

hvorimod vi i tre variable har at

$$\sum x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_1^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_2.$$

Med denne notation kan de elementære symmetriske polynomier skrives så simpelt som

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum x_1 \\
s_2 &= \sum x_1 x_2 \\
&\vdots \\
s_{n-1} &= \sum x_1 \cdots x_{n-1} \\
s_n &= \sum x_1 x_2 \cdots x_n.
\end{aligned}$$

For at kunne definere *graden* af et polynomium i n variable tildeler vi mængden af n-tupler, $\mathbf{N}^n$, den lexicografiske ordning; dvs.

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) \geq (j_1, j_2, \ldots, j_n),$$

[6] Denne formulering bygger på Tignols fremstilling af Warings sætning og bevis.

hvis den første værdi i n-tuplen $(i_1 - j_1, i_2 - j_2, \dots, i_n - j_n)$, forskellig fra nul, er positiv. For ethvert polynomium $P = P(x_1, \dots, x_n)$ forskelligt fra nulpolynomiet i de n variable over et legeme, defineres *graden* af P, $\deg(P)$, som den største n-tupel $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, hvorom det gælder at koefficienten af $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ i P er forskellig fra nul. Eksempelvis har vi for de elementære symmetriske polynomier at

$$\begin{aligned}
\deg(s_1) &= (1,0,0,\dots,0,0)\\
\deg(s_2) &= (1,1,0,\dots,0,0)\\
&\vdots\\
\deg(s_{n-1}) &= (1,1,1,\dots,1,0)\\
\deg(s_n) &= (1,1,1,\dots,1,1).
\end{aligned}$$

Metoden til at bevise at man kan udtrykke ethvert symmetrisk polynomium i $s_1, \dots, s_n$, minder i princippet om f.eks. Euklids divisionsalgoritme. Idéen er at 'matche' $P(x_1, \dots, x_n)$ med et polynomium i $s_1, \dots, s_n$ som har samme grad som P. Dernæst justerer man den ledende koefficient[7] så den svarer til den ledende koefficient i P. Differensen mellem P og det indtil videre opnåede polynomium i $s_1, \dots, s_n$ har så grad mindre end $\deg(P)$. Ved induktion efter graden lader dette sig dermed gøre. [Tignol, 1980/1988, s. 131-135]

Bevis for hovedsætning 5.1

Det bemærkes at hvis $\deg(P) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ for et symmetrisk polynomium P, så er $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$; for hvis et led $a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ optræder i P, så optræder alle leddets permutationer af $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ også i P, da P jo er symmetrisk. Graderne af disse led er de forskellige n-tupler $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ opnået ved permutationerne, og den største n-tupel blandt disse er den hvor i_k står i aftagende orden.

Derved kan vi, da vi nu er sikre på at $i_k - i_{k+1} \geq 0$, betragte polynomiet

$$f = s_1^{i_1 - i_2} s_2^{i_2 - i_3} \cdots s_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} s_n^{i_n}.$$

Da relationen $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ for polynomier i én variabel også gælder i flere variable fås

$$\begin{aligned}
\deg(f) &= (i_1 - i_2)\deg(s_1) + (i_2 - i_3)\deg(s_2) + \dots + (i_n)\deg(s_n)\\
&= (i_1 - i_2, 0, \dots, 0) + (i_2 - i_3, i_2 - i_3, 0, \dots, 0) + \dots + (i_n, \dots, i_n)\\
&= (i_1, i_2, i_3, \dots, i_n).
\end{aligned}$$

Det verificeres nemt, omend omstændeligt, at den ledende koefficient i f (koefficienten til $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$) er 1, så at

$$f = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} + (\text{led af lavere grad}).$$

Hvis $a \in F \backslash \{0\}$, hvor F er koefficientlegemet, er den ledende koefficient i P, således at

$$P = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} + (\text{led af lavere grad}),$$

[7] Her menes koefficienten til det led med den højeste *grad*.

får man af $P_1 = P - af$, at $\deg(P_1) < \deg(P)$. Yderligere er P_1 symmetrisk da P og f er symmetriske. Ved samme procedure kan man finde et P_2 af mindre grad end P_1 osv.

For at induktionsmaskinen kan køre, skal man dog overbevise sig om at en sådan gradreducering af P terminerer efter et endeligt antal skridt. Til dette benyttes følgende lemma[8].

Lemma 5.1
$\mathbb{N}^n$ *opfylder den nedadgående kædebetingelse; f.eks. indeholder den ikke nogen uendelige strengt aftagende sekvenser af elementer.*

[Tignol, 1980/1988, s. 131-141] □

Udover også at studere den cyklotomiske ligning $x^n - 1 = 0$ diskuterer Waring ligeledes problemet med at finde ligninger som kan løses ved summer af formen

$$x = \sqrt[n]{\alpha_1} + \sqrt[n]{\alpha_2} + \ldots + \sqrt[n]{\alpha_n},$$

altså netop ligninger der kan løses ved radikaler, hvorfor Waring også må anses som en af de tidligste forgængere for Galoisteorien. [Waring, 1782/1991, s. 1-31] og [van der Waerden, 1985, s. 76-77]

Warings bidrag til algebraen er altså fortrinsvist hans sætning om symmetriske funktioner. Ifølge Nový anså Waring dog selv det at bestemme en passende hjælpeligning (resolvent) som sit vigtigste formål. Nový skriver således

> *Waring at first determined the degree of the resolvent by elimination. He asked what degree equation could be used to reduce an equation of degree n to an equation of degree $m, n > m$. He reached the conclusion that this would be possible by means of an equation of degree*
>
> $$n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{n-3}{4}\cdots\frac{n-m+m}{m}.$$
>
> [Nový, 1973, s. 27]

Ifølge Nový beskæftigede Waring sig også med permutationer af rødderne, men dog på et mere elementært niveau end både Vandermonde og Lagrange og uden at bringe nyt til veje mht. notation eller forståelsen for permutationen. [Nový, 1973, s. 27 og 43]

5.2 Vandermondes afhandling

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) blev født i Paris, hvor hans far, der var læge, havde sin praksis. Faderen opmuntrede sin søn til en karriere inden for musikken, hvor sønnens foretrukne instrument blev violinen. Den unge Vandermonde var ikke interesseret i matematik, han forfulgte sin musikkarriere, og begyndte ikke sit studium af matematik førend i en alder af 35 år. Det

[8] Et bevis for lemma 5.1 kan findes i [Tignol, 1980/1988, s. 136-137].

var Fontaine des Bertins som vakte Vandermondes interesse for matematik. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XIII s. 571-572]

I november 1770 blev Vandermondes afhandling *Sur la résolution des équations* præsenteret ved Académie des Sciences i Paris på trods af at han ikke var medlem. Med denne afhandling som eneste evidens for sin matematiske kunnen blev Vandermonde i 1771 ansat ved akademiet. I årene 1771 og 1772 udgav Vandermonde yderligere tre afhandlinger. Disse i alt fire afhandlinger udgør Vandermondes samlede matematiske arbejde. Herefter rettede han sin interesse mod andre områder. I 1777 studerede han 'lavtemperaturfænomener' sammen med bl.a. Bezout. I 1778 og 1780 udgav han to afhandlinger omhandlende musik, og kontroversielt nok var disse starten på en diskussion som senere skulle få flyttet studiet af musik fra det matematiske fakultet, hvor det havde hørt hjemme siden det gamle Grækenland, til fakultetet for kunst. Vandermonde sad i flere af akademiets komitéer og var sammen med bl.a. Lagrange og sin ven Monge involveret i oprettelsen af Ecole Normale. Vandermonde var så nære venner med Monge at han ofte blev refereret til som 'femme de Monge'. I 1786 udgav disse to da også i samarbejde to artikler om fabrikationen af stål, med det formål at forbedre kvaliteten af det stål som skulle benyttes til fremstilling af bajonetter. Ligesom Monge var også Vandermonde en stor tilhænger af den franske revolution, der jo som bekendt begyndte med stormen af Bastillen den 14. juli 1789. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XIII s. 571-572]

Idag er Vandermonde nok mest kendt for *Vandermondes determinant*, men selv om det er sandt at Vandermonde i sin fjerde afhandling netop studerer teorien for determinanter, så forekommer netop denne determinant ingen steder i hans arbejde. Hvorfor Vandemonde alligevel fik æren for determinanten vides ikke, dog mener man at det muligvis skyldtes en misforståelse af Vandermondes notation, således at man har ment at denne determinant optrådte i hans afhandling. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XIII s. 571-572] og [Tignol, 1980/1988, s. 203]

5.2.1 Vandermondes observationer

Vi vil nu vende vores opmærksomhed mod Vandermondes første afhandling, *Sur la résolution des équations*, fra 1770[9]. I sin indledning skriver Vandermonde om de hidtige resultater indenfor ligningsløsning, at de mest bemærkelsesværdige resultater må ses hos Euler og Bezout. Han mener at disses afhandlinger giver et billede af hvad analytikere har opnået indenfor dette område.

> *Es genügt, von diesen beiden ausgezeichneten Abhandlungen Einsicht zu nehmen, um sich eine Vorstellung von den Fortschritten zu bilden, welche die Analysten auf diesem Gebiete erzielt haben, und um zu begreifen, welche mannigfaltigen Schwierigkeiten noch zu überwinden bleiben. Doch will es mir scheinen, dass diese Schwierigkeiten teilweise in der Natur derjenigen analytischen Methoden selbst begründet sind, von welchen man bisher ausschließlich Gebrauch gemacht hat; ich habe deshalb versucht, auf einem anderen Wege vorzudringen.* [Vandermonde, 1770/1888, s. 1]

[9] Vi benytter den tyske udgave i oversættelse af Carl Itzigsohn fra 1888.

Han forsætter med at beskrive sin metode.

> *Die Methode, die ich hier entwickeln werde, setzt nicht die Einführung irgend welcher Unbekannten voraus; wenn eine derartige Einführung im Laufe der Untersuchung einmal vorübergehend erfolgen sollte, so hat man es mit Gleichungen zu tun, deren Richtigkeit durch Ausführung der vorgeschriebenen Operationen leicht nachzuweisen ist. Hierin besteht der eigentümliche Charakter meiner Methode; ich überlasse es den Geometern, ihre Vorzüge zu würdigen.* [Vandermonde, 1770/1888, s. 2]

Vandermonde sammenfatter sine mål i tre hovedpunkter

1. *Man soll eine* Function *der* Wurzeln *finden, von der man sagen kann, daß sie* jeder *beliebigen unter diesen Wurzeln gleich ist, je nach der Bedeutung, welche man der Function beilegt.*
2. *Soll man diese* Function *auf eine* Form *bringen, welche* bei *einer gegenseitigen* Vertauschung *der Wurzeln sich* nicht ändert.
3. *Soll man* in diese Function *die* Werte einführen, *die aus der Summe dieser Wurzeln, aus der Summe der Producte von je zweien u. s. w. gebildet sind.* [[10]] [Vandermonde, 1770/1888, s. 8]

Vandermonde tager udgangspunkt i de til anden- og tredjegradsligningen kendte løsninger. I andet afsnit behandler han andengradsligningen[11]

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - s_1 x + s_2 = 0, \tag{5.2}$$

hvor s_1 og s_2 er de elementære symmetriske polynomier i rødderne. Han opskriver løsningen til andengradsligningen på formen[12]

$$\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}\right), \tag{5.3}$$

og viser tilmed at dette udtryk indsat i (5.2) giver nul. Bemærk at de to rødder fremkommer ved at lade kvadratroden være hhv. positiv og negativ. Dernæst omskriver han denne til

$$\frac{1}{2}\left(s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_2}\right), \tag{5.4}$$

[10] *1. Find the function of the roots, of which it can be said that it is equal to each of these roots according to the meaning which is given to the function. 2. This function should be reduced to a form which would not change when the roots change. 3. Finally, express this function as a function of elementary symmtric functions of the roots, to use modern terminology, i.e. coefficients of the equation.* [Nový, 1973, s. 36]

[11] Vi har valgt at bruge følgende notation for at lette indførelsen af de elementære symmetriske polynomier. Hos Vandermonde betegnes rødderne $a, b, c, \ldots$ og han har ingen symboler for de elementære symmetriske polynomier; disse skrives som udtryk i rødderne, f. eks. $(abc\cdots)$ og $(a + b + c + \ldots)$.

[12] I gengivelser af Vandermondes værk finder man ofte ligning (5.3) på formen $(1/2)(x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2})$.

og får således en løsningsformel indeholdende udelukkende udtryk i de elementære symmetriske polynomier i rødderne.

I andengradsligningens tilfælde opfylder (5.3) det første hovedpunkt, da dennes løsning er en funktion af x_1 og x_2, som er lig værdierne x_1 eller x_2 afhængig af kvadratrodens fortegn. Andet hovedpunkt er ligeledes opfyldt da (5.3) ikke ændres, når x_1 og x_2 ombyttes. Tredje hovedpunkt kræver en evaluering af (5.3) i termer af s_1 og s_2, man får

$$x_1 + x_2 = s_1 \quad \text{og} \quad (x_1 - x_2)^2 = s_1^2 - 4s_2$$

og opnår således (5.4). [Vandermonde, 1770/1888, s. 8], [Tignol, 1980/1988, s. 204-205] og [Nový, 1973, s. 36-37]

Nu udsætter han tredjegradsligningen for en lignende behandling, men da denne minder meget om Lagranges, vil vi ikke give en gennemgang af selve behandlingen her, da en sådan findes i afsnit 5.4. Vi vil her blot se på hans resultater i forhold til hovedpunkterne. Som den funktion der skal opfylde hovedpunkterne fåreslår han udtrykket

$$\frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{(x_1 + \omega_1 x_2 + \omega_2 x_3)^3} + \sqrt[3]{(x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_1 x_3)^3}\right), \tag{5.5}$$

hvor ω_i her er en primitiv tredje enhedsrod. Funktionen i (5.5) er et udtryk i rødderne x_1, x_2 og x_3, og den antager værdierne x_1, x_2 og x_3, hvilket opfylder første hovedpunkt. Hvis udtrykkene indenfor kubikrødderne ganges ud, fås udtryk der består af led som er forskellige produkter af rødderne samt enhedrødderne. F.eks. er den første kubikrod i (5.5) lig

$$\begin{aligned}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 &+ 3\omega_1(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) \\ &+ 3\omega_2(x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2))^{1/3}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Den anden kubikrod i (5.5) er lig det udtryk der fremkommer når der i (5.6) byttes om på ω_1 og ω_2. Med kendskab til disse udtryk ses det at (5.5) er symmetrisk i rødderne, og dermed også opfylder andet hovedpunkt. Angående tredje hovedpunkt skriver Vandermonde

> [...] *so ist dieselbe, wie wir sogleich sehen werden, jederzeit sehr leicht zu erfüllen.* [Vandermonde, 1770/1888, s. 8]

Herefter går Vandermonde i gang med at vise sin påstand om at tredje hovedpunkt er let at opfylde. Til dette indfører han en ny notation for symmetriske udtryk.

> *Allgemein werde ich durch*
>
> $$(A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots)$$
>
> *die Summe aller derjenigen verschiedenen Glieder bezeichnen, welche entstehen, indem man an Stelle der großen Buchstaben $A, B, C \ldots$ alle möglichen Substitutionen der kleinen Buchstaben $a, b, c, d, e \ldots$ in irgend welcher Reihenfolge setzt, und diese abgekürzten Ausdrücke werde ich* Combinationstypen *oder einfach* Typen *nennen.* [Vandermonde, 1770/1888, s. 9]

Han indser herefter at de funktioner som opfylder andet hovedpunkt, dvs. ikke ændrer sine værdier ved en permutation af rødderne, må være funktioner af disse symmetriske udtryk (*Typen*). Nu går problemet ud på at vise at symmetriske udtryk altid kan skrives som funktioner af de elementære symmetriske polynomier. Dette er det samme problem som Waring med sin hovedsætning viser (jf. sætning 5.1), hvorfor vi ikke her vil give en gennemgang af Vandermondes bevis, men blot antyde at han viser noget tilsvarende. [Vandermonde, 1770/1888, s. 2-14] og [Wussing, 1969, s. 52-53]

På baggrund af sine observationer for anden- og tredjegradsligningen foreslår Vandermonde en lignende funktion for den generelle n'tegradsligning

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) \quad &+ \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{(\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n)^n}+\frac{1}{n}\sqrt[n]{(\omega_1^2 x_1+\ldots+\omega_n^2 x_n)^n} \\ &+ \quad \ldots+\frac{1}{n}\sqrt[n]{(\omega_1^{n-1} x_1+\ldots+\omega_n^{n-1} x_n)^n},\end{aligned}$$

hvor $\omega_1, \ldots, \omega_n$ er n'te enhedsrødder. Funktionen for tredjegradsligningen har ovenstående form, men også i andengradsligningens tilfælde er løsningsformlen på ovenstående form. Vandermondes observation for andengradsligningen er jo således at en rod til denne kan skrives på formen

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{(1\cdot x_1-1\cdot x_2)^2}\right),$$

hvor $\omega_1 = 1$ og $\omega_2 = -1$. [Vandermonde, 1770/1888, s. 14-15] og [van der Waerden, 1985, s. 77-78]

Vandermondes arbejde bærer præg af en dybere indsigt end Warings. Vandermonde finder ligesom Lagrange (jf. afsnit 5.4) på at benytte sig af hjælpeligninger (resolvente) [Vandermonde, 1770/1888, s. 49]. Vandermonde ser også på permutationer baseret på studiet af symmetriske funktioner og det faktum at disse kan udtrykkes ved de elementære symmetriske funktioner. Vandermonde må således, som ovenfor bemærket, enten formodes at have kendt til Warings arbejde fra 1762, eller have vist samme resultat uafhængigt af Waring. Det mest bemærkelsesværdige ved Vandermondes studier af disse permutationer er dog at han introducerer, hvad der idag svarer til cykliske permutationer [Vandermonde, 1770/1888, s. 35-38]. Hans introduktion til permutationerne er dog ifølge Nový ganske omstændelig og ikke nær så klart formuleret som den af Lagrange. Alligevel skal hans idéer og arbejder på dette felt senere have spillet en vigtig rolle i udviklingen af permutationsteorien. [Nový, 1973, s. 38-40]

5.3 Malfattis metode

Gianfrancesco Malfatti (1731-1807), født i Ala (Trento, Italien), studerede under Riccati, Zanotti og Manfredi ved Akademiet af San Francesco Saverio i Bologna. I 1754 rejste han til Ferrara, hvor han underviste i matematik og fysik på en skole som han selv var med til at oprette. I 1771 blev Malfatti ansat i matematikafdelingen ved universitetet i Ferrara, som på det tidspunkt var ledet af Alberto V. Dette universitet var i 1309 blevet grundlagt af Pave Boniface IX, og Copernicus havde studeret her i 1503. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IX s. 55]

Figur 5.2 Gianfrancesco Malfatti (1731-1807). [O'Connor & Robertson, 2002]

Malfatti havde mange interessefelter, bl.a. skrev han om metoder i matematisk analyse, om sandsynlighedsregning, kombinatorik, endelige differentialligninger, mekanik og om geometri. I særdeleshed inden for sidstnævnte område er Malfatti kendt. I 1802 gav han en løsning på problemet om i en trekant at beskrive tre omkredse (cirkler) som er indbyrdes tangente og som hver rører netop to sider i trekanten. Dette problem er senere kommet til at hedde *Malfatti-problemet.* Men det er Malfattis bidrag inden for algebraen som vi her skal interessere os for. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. IX s. 55]

5.3.1 Malfattis løsning

Da vi ikke har kunnet komme i besiddelse af Malfattis eget værk, har vi taget udgangspunkt i van der Waerdens udlægning[13]. Malfattis afhandling *De aequationibus quadratocubicis dissertatio analytica* fra 1770 (offentliggjort i 1771) omhandler i al sin væsentlighed femtegradsligningen. Malfatti betragter først ligningen

$$x^3 + 3ax + b = 0. \tag{5.7}$$

Med henvisning til Euler betragter han dernæst en rod x, som opfylder den lineære ligning

$$x + m\sqrt[3]{h^2} + n\sqrt[3]{h} = 0. \tag{5.8}$$

Malfatti eliminerer nu tredjerødderne[14]; han substituerer $\sqrt[3]{h}$ med hhv. $\alpha\sqrt[3]{h}$ og $\alpha^2\sqrt[3]{h}$, hvor α er en tredje enhedsrod, og får ud af dette to lineære udtryk for x

$$x + m\alpha^2\sqrt[3]{h^2} + n\alpha\sqrt[3]{h} = 0 \tag{5.9}$$

[13] van der Waerden påpeger at ifølge Raffaela Franci og Laura Toti Rigatelli er Malfattis afhandling skrevet i et dårligt latin og indeholder mange trykfejl, hvorfor den er svært tilgængelig.

[14] Ifølge van der Waerden benytter han her Manfredis metode. [van der Waerden, 1985, s. 82]

samt

$$x + m\alpha\sqrt[3]{h^2} + n\alpha^2\sqrt[3]{h} = 0, \tag{5.10}$$

da jo $\alpha^4 = \alpha$. Begge disse multipliceres nu med (5.8), hvilket er tilladt da resultatet fortsat giver nul, altså

$$(x + M + N)(x + \alpha M + \alpha^2 N)(x + \alpha^2 M + \alpha N),$$

hvor $M = m\sqrt[3]{h^2}$ og $N = n\sqrt[3]{h}$. Malfatti opnår således, ved at benytte at $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ samt at $x + M + N = 0$, følgende ligning af tredje grad

$$x^3 - 3mnhx + m^3h^2 + n^3h = 0.$$

Ved dernæst at sætte $h = 1$ opnår han

$$x^3 - 3mnx + m^3 + n^3 = 0. \tag{5.11}$$

Sættes også

$$mn = -a \quad \text{og} \quad m^3 + n^3 = b$$

ses at ligning (5.11) er ækvivalent med den først betragtede ligning (5.7). Som set i afsnit 3.1 kan man nu vha. ligningerne $m^3n^3 = -a^3$ og $m^3 + n^3 = b$ bestemme m og n ved at løse to andengradsligninger i hhv. m^3 og n^3. [van der Waerden, 1985, s. 81-82]

Bemærk at vi ved isolation af x i (5.8), (5.9) og (5.10) når $h = 1$, får at rødderne af (5.7) har følgende form

$$-m - n, \qquad -\alpha m - \alpha^2 n, \qquad -\alpha^2 m - \alpha n,$$

hvor α igen er en tredje enhedsrod, hvilket er i overenstemmelse med formen af rødderne i Bezouts metode (jf. afsnit 4.3).

Malfatti benytter samme metode på femtegradsligningen

$$x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0. \tag{5.12}$$

Hans idé er her at uddrage en rod x til femtegradsligningen fra følgende ligning

$$x + m\sqrt[5]{h^4} + p\sqrt[5]{h^3} + q\sqrt[5]{h^2} + n\sqrt[5]{h} = 0. \tag{5.13}$$

Igen substitueres, blot her $\sqrt[5]{h}$ med $\alpha\sqrt[5]{h}$, $\alpha^2\sqrt[5]{h}$, $\alpha^3\sqrt[5]{h}$ og $\alpha^4\sqrt[5]{h}$, hvor α er en femte enhedsrod. Herved opnås fire lineære udtryk, som atter multipliceres med hinanden samt med (5.13) og Malfatti får således en kanonisk ligning af grad 5 for x. Igen sættes $h = 1$ og koefficienterne i den kanoniske ligning udtrykkes ved koefficienterne i ligning (5.12). Således opnår Malfatti et sæt af betingelser for m, p, q og n, og for at simplificere disse betingelser sætter han

$$mn = y, \quad pq = u, \quad 25uy - 5a^2 + 5\left(\frac{c}{3}\right) = z.$$

Efter omstændelige udregninger kommer Malfatti frem til en sjettegradsligning i z. I det generelle tilfælde har denne ligning ingen rationale divisorer af grad

1, 2 eller 3, men hvis den har kan den givne ligning (5.12) løses ved radikaler. Man kan i det tilfælde bestemme først z dernæst m, p, q, n for til sidst at kunne bestemme rødderne

$$\begin{aligned}
x_1 &= -(m+p+q+n) \\
x_2 &= -(\alpha m+\alpha^2 p+\alpha^3 q+\alpha^4 n) \\
x_3 &= -(\alpha^2 m+\alpha^4 p+\alpha q+\alpha^3 n) \\
x_4 &= -(\alpha^3 m+\alpha p+\alpha^4 q+\alpha^2 n) \\
x_5 &= -(\alpha^4 m+\alpha^3 p+\alpha^2 q+\alpha n).
\end{aligned}$$

Ovenstående lineære ligninger kan nu løses for m, p, q og n, hvorefter det følger at m, p, q, n er lineære funktioner af rødderne og at z er et fjerdegradspolynomium af rødderne. [van der Waerden, 1985, s. 82-83]

Malfatti kommer frem til noget som er at sammenligne med den resolvent som Lagrange finder frem til (jf. afsnit 5.4) for femtegradsligningen, nemlig i form af hans udtryk z. Både Malfattis og Lagranges udtryk antager seks værdier når rødderne permuteres. van der Waerden forklarer dette med at begge udtryk er invariante under en gruppe af 20 permutationer af rødderne x_k. Dette kan i moderne notation, siger han, beskrives ved at permutationerne af denne gruppe er defineret ved formlen

$$k' \equiv gk+h \mod 5$$

med $g = 1,2,3,4$ og $h = 1,2,3,4,5$ ($h = 5 = 0$). [van der Waerden, 1985, s. 83]

5.4 Lagranges værk

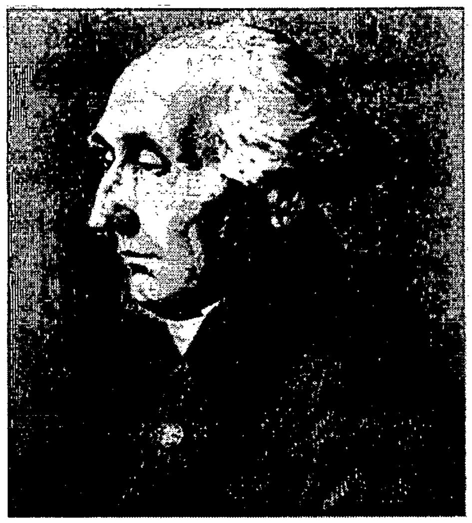
Christian Skau nævner i sin artikel også de i dette kapitel fire beskrevne afhandlinger og fortsætter

> *Men det var Lagranges arbeid som hadde desidert størst spennvidde og perspektiv, og hans 'Reflexions sur la résolution algébrique des équations' ble en hjørnesten for ligningsteorien. Ruffini, Abel og Galois står alle i stor gjeld til Lagranges analyse av og forklaring på hvorfor tredje- og fjerdegradsligningen lar seg løse algebraisk.* [Skau, 1990, s. 68]

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) blev født i Torino, Italien, og døbt Giuseppe Lodovico Lagrangia, hvorfor han af italienere regnes som italiensk, mens han i resten af verden betragtes som værende fransk. Lagranges fader var tolder i Torino, hans moder datter af en læge fra Torino, og selv var han den ældste ud af elleve børn, hvoraf kun han og en anden levede længe nok til at blive voksne. På faderens side havde Lagrange franske aner, og allerede i en tidlig alder hældte Lagrange mod disse ved bl.a. at underskrive sit efternavn med den franske version. Lagranges familie var fattige på trods af hans fars stilling, fattigdommen skyldtes primært uheldige økonomiske spekulationer som faderen havde gjort sig. Derfor blev det bestemt at Lagrange skulle studere jura. Han studerede ved universitetet i Torino, hvor hans yndlingsfag var klassisk latin. I begyndelsen havde Lagrange ikke den store interesse for matematik, tilmed fandt han græsk geometri i særdeleshed kedeligt. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. VII, s. 559-560], [Wussing & Arnold, 1975, s. 258-259] og [Bell, 1944, s. 171-191]

Lagranges interesse for matematikken blev først vakt, da han læste et eksemplar af Halleys arbejde fra 1693 om anvendelsen af algebra indenfor optik. Lagrange var en autodidakt matematiker, og havde ikke haft mulighed for at studere i samarbejde med førende matematikere, hvilket hans første udgivelse (juli 1754) da også skulle bære præg af. Lagrange sendte en kopi af dette arbejde til Euler. Også sit næste arbejde fra 1755 sendte Lagrange til Euler, som denne gang svarede og gav udtryk for at være imponeret over Lagranges nye idéer. På baggrund af dette arbejde blev Lagrange i 1755, i en alder af 19 år, tilbudt et professorat i matematik ved den royale artilleriskole i Torino, hvilket han dog afslog. Euler indstillede Lagrange til et professorat ved det berlinske akademi i 1756, men igen afslog Lagrange. Lagrange var på dette tidspunkt i Torino dybt involveret i første udgivelse af *Mélanges de Turin*, et videnskabeligt tidsskrift. I 1764 deltog Lagrange i en prisopgave ved Académie des Sciences i Paris. D'Alembert fattede i den anledning sympati for den unge italiener og forsøgte at skaffe ham en stilling ved det berlinske akademi. Lagrange afslog, med begrundelse om at stedet måske ikke var passende for ham så længe Euler var der! Men tredje gang var lykkens gang; i 1766 vidste d'Alembert at Euler skulle rejse tilbage til Skt. Petersborg, og skaffede igen Lagrange professoratet og denne gang accepterede Lagrange. Han blev da Eulers efterfølger, som leder af det matematiske institut ved det videnskabelige akademi i Berlin. I 1767 giftede han sig med sin kusine Vittoria Conti; der blev dog ingen børn ud af dette ægteskab, da Lagrange ingen ønskede sig. Lagrange forblev i Berlin i henved 20 år, hvor han producerede en jævn strøm af afhandlinger – alle af stor kvalitet – og jævnligt vandt prisopgaver udstedt af det parisiske akademi. I 1783 døde Lagranges kone, og med kong Frederik II's død tre år senere søgte Lagrange væk fra Berlin. Han fik i den anledning adskillige tilbud, især fra Italien som gerne ville have Lagrange 'hjem' igen, men det mest attraktive tilbud kom fra Académie des Sciences i Paris. Denne stilling indebar nemlig ingen undervisning, og Lagrange ville således kunne hellige sig helt og holdent til sin forskning. I maj 1787 forlod han således Berlin, og indtrådte i sin nye stilling i Paris (hvor han forblev frem til sin død i 1813). I 1792 giftede Lagrange sig for anden gang, denne gang med en kollegas datter Renée-Françoise-Adélaide Le Monnier. Lagrange var involveret i oprettelsen af Ecole Polytechnique i 1794 og Ecole Normale i 1795. Grundet revolutionen blev hans undervisningsfri-kontrakt anulleret, hvorfor han måtte undervise i elementær matematik ved Ecole Normale. Ifølge Fourier var Lagranges egenskaber som underviser ikke blændende. Lagrange nåede inden sin død at modtage to ærestitler, i hhv. 1808 og 1813, af Napoleon I. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. VII, s. 560-571], [Wussing & Arnold, 1975, s. 258-259] og [Bell, 1944, s. 171-191]

Lagranges interesseområder spænder vidt og bredt, hans publikationer omhandler både astronomi, solsystemets stabilitet, mekanik, dynamik, fluidmekanik, sandsynlighedsregning samt analysens fundament og talteori. Men vi skal her kun interesse os for hans algebraiske arbejder, nærmere bestemt udgivelsen *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* fra 1770-71. Dette arbejde



Figur 5.3 Joseph Louis Lagrange (1736-1813). [O'Connor & Robertson, 2002]

refereres ofte til som det første skridt i retning af udviklingen af gruppeteori, og det er i dette arbejde at matematikere som Ruffini, Cauchy og Galois har taget deres udgangspunkt. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. VII, s. 559-571]

5.4.1 Lagranges gennemgang af metoderne

Lagranges arbejde slår så at sige, som det er karakteristisk for mange store værker, en knude på tidens landvindinger ved at granske sine kollegers arbejder nøje. I stedet for direkte at springe ud i at udvikle en – eller arbejde videre med en allerede opfundet – metode til løsning af n'tegradsligningen, lægger Lagrange ud med at analysere allerede etablerede metoder til tredje-, og fjerdegradsligningens løsning. Hensigten med denne *a priori*[15] tilgang er at finde ud af hvorfor og hvordan metoder som Cardanos, Ferraris, Tschirnhaus', Bezouts og Eulers giver en løsning til disse generelle ligninger af grad op til og med fire, og hvorfor de fejler i at føre til en løsning af den generelle femtegradsligning. Vi bringer her et uddrag af Lagranges indledning:

> *La théorie des équations est de toutes les parties de l'Analyse celle qu'on eût cru devoir acquérir les plus grands degrés de perfection et par son importance et par la rapidité des progrès que les premiers inventeurs y ont faits; mais quoique les Géomètres qui sont venus depuis n'aient cessé de s'y appliquer, il s'en faut beaucoup que leurs efforts aient eu le succès qu'on pouvait désirer.* [[16]]

[15]Groft sagt mener Lagrange med *a priori*, det at finde ud af hvorfor en metode virker, hvilket er i kontrast til *a posteriori*, hvormed menes at finde en metode som virker. Det er denne *a posteriori*-tilgang som matematikerne før Lagrange fortrinsvist havde benyttet sig af.

[16]*The theory of equations is of all parts of analysis the one, we would think, which ought*

> *A l'égard de la résolution des équations littérales, on n'est guère plus avancé qu'on ne l'était du temps de Cardan, qui le premier a publié celle des équations du troisième et du quatrième degré. Les premiers succès des Analystes italiens dans cette matière paraissent avoir été le terme des découvertes qu'on y pouvait faire; du moins est-il certain que toutes les tentatives qu'on a faites jusqu'à présent pour reculer les limites de cette partie de l'Algèbra n'ont encore servi qu'à trouver de nouvelles méthodes pour les équations du troisième et du quatrième degré, dont aucune ne paraît applicable, en général, aux équations d'un degré plus élevé.* [17]
>
> *Je me propose dans ce Mémoire d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux, et de faire voir* à priori *pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré, et sont en défaut pour les degrés ultérieurs.* [18]
>
> *Cet examen aura un double avantage: d'un côté il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du quatrième degré; de l'autre il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs, en leur fournissant différentes vues pour cet objet et en leur épargnant surtout un grand nombre de pas et de tentatives inutiles.* [19] [Lagrange, 1770-71, s. 206-207]

Hvorfor metoder som Eulers og Bezouts fejlede – og hvorvidt de egentlig reelt fejlede – til femtegradsligningens løsning, var nær sagt umuligt at sige noget om, da man ved ibrugtagen af disse endte med meget lange uhåndterlige udtryk. Det var derfor også svært at bevise at en sådan metode ikke ville føre til en løsning – som jo f.eks. Tschirhaus og Bezout hævdede at deres metoder ville – idet man ikke kunne udelukke at det, når man så sad fast, blot var et spørgsmål om at hitte på en god idé for at få 'maskineriet' til at køre videre. Lagranges genistreg var dels at han indså behovet for en sådan *a priori* analyse, dels at det lykkedes ham at få så mange essentielle resultater ud af den. [Nový, 1973, s. 27] og [Lagrange, 1770-71, s. 305-307]

to have acquired the greatest degree of perfection, by reason both of its importance and of the rapidity of the progress that its first inventors made; but although the mathematicians of later days have not ceased to apply themselves, there remains much in order that their efforts may meet with the success that one could desire. [Pierpont, 1895, s. 196]

[17] *In regard to the resolution of literal equations one has hardly advanced further than one was in Cardan's time, who was the first to publish the resolution of equations of the third and fourth degree. The first successes of the Italian analysts in this branch seem to have marked the limit of possible discoveries: at least it is certain that all attempts that have been made up to the present to push back the limits of this branch of algebra have hardly served for other purposes than to find new methods to solve the equations of third and fourth degree, none of which seem applicable to equations of higher degrees.* [Pierpont, 1895, s. 196-197]

[18] *I propose in this Memoir to examine the various methods found so far for the algebraic solution of equations, to reduce them to general principles, and to let see* a priori *why these methods succeed for the third and the fourth degree, and fail for higher degrees.* [Tignol, 1980/1988, s. 168]

[19] *This examination will have a double advantage: on one hand, it will shed a greater light on the known solutions of the third and fourth degree; on the other hand, it will be useful to those who will want to deal with the solution of higher degrees, by providing them with various views to this end and above all by sparing them a large number of useless steps and attempts.* [Tignol, 1980/1988, s. 168]

Lagranges *a priori* tilgang bestod i at han så at sige arbejdede 'baglæns', så at han bestemte rødderne til hjælpeligningen som rationale funktioner af rødderne til den oprindelige ligning. Som vi skal se blev egenskaberne ved hjælpeligningens rødder således åbenlyse, og viste klart hvorfor disse rødder gav rødderne til den oprindelige ligning. Lagrange viste altså at problemet med ligningsløsning afhang af egenskaberne ved de rationale funktioner i rødderne. [Tignol, 1980/1988, s. 169] og [Pierpont, 1895, s. 197]

Lagranges ***Réflexions sur la résolution algébrique des équations*** er delt op i fire dele. I første del behandles tredjegradsligningen og diverse metoder til løsning af denne. I del II udsættes fjerdegradsligningen for en lignende behandling. I del III og IV forsøges femtegradsligningen og højeregradsligninger løst, og der udledes på baggrund af de gjorte *a priori*-iagttagelser visse sætninger omhandlende bl.a. graden af ligningen samt løsbarheden af den generelle n'tegradsligning. Vi vil i det følgende specielt redegøre for del I og II, men løbende inddrage resultater fra del IV som de implicerede analyser giver anledning til.

Cardanos metode

Lagrange begynder med en udlægning af Cardanos metode til løsning af den generelle tredjegradsligning[20]

$$x^3 + px + q = 0. \tag{5.14}$$

Ved substitutionen $x = u + v$ fås

$$u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv + p) = 0, \tag{5.15}$$

som underlægges betingelsen

$$3uv + p = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{p}{3u}. \tag{5.16}$$

Indsættes nu udtrykket for v i ligning (5.15), som herefter ganges igennem med u^3, fås en sjettegradsligning i u:

$$u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0. \tag{5.17}$$

Dette er hjælpeligningen som Cardanos formel bygger på og som Lagrange i sin afhandling kalder den *reducerede ligning* (la réduite). [Lagrange, 1770-71, s. 213]

Istedet for at gå direkte til beregningen af løsningen[21], altså bestemme rødderne til (5.14), x_i, som funktion af u_i – rødderne til (5.17) – så bestemmes u_i som funktion af x_i. Da (5.17) er en sjettegradsligning har den seks rødder, altså ender vi med seks rødder til vores oprindelige tredjegradsligning. Til al 'held' er de disse seks rødder $u_1, \ldots, u_6$ dog parvis ens, hvilket Lagrange viser på essentielt følgende vis: Da (5.17) er en andengradsligning i u^3, antager de seks rødder opløftet i tredje potens $u_1^3, \ldots, u_6^3$ kun to værdier; y_1 og y_2, hvor $y_1 y_2$

[20] Denne metode er analog til den beskrevet i afsnit 2.2.

[21] Hvilket er muligt da (5.17) er en andengradsligning i u^3.

ifølge Viète-relationerne er lig det konstante led $-(p/3)^3$. Man kan, eventuelt ved omnumerering, antage at

$$u_1^3 = u_2^3 = u_3^3 = y_1 \quad \text{og} \quad u_4^3 = u_5^3 = u_6^3 = y_2.$$

Kaldes u_1, u_2, u_3 for 'gruppe 1' er således de tre løsninger til $u^3 = y_1$:

$$\sqrt[3]{y_1} \quad \omega\sqrt[3]{y_1} \quad \omega^2\sqrt[3]{y_1},$$

i en eller anden rækkefølge, hvor ω er en primitiv enhedsrod. Kaldes u_4, u_5, u_6 'gruppe 2', er de tre løsninger til $u^3 = y_2$:

$$\sqrt[3]{y_2} \quad \omega\sqrt[3]{y_2} \quad \omega^2\sqrt[3]{y_2},$$

i en eller anden rækkefølge. Altså haves at

$$u_2 = \omega u_1, \; u_3 = \omega^2 u_1, \; u_5 = \omega u_4, \; u_6 = \omega^2 u_4. \tag{5.18}$$

Da man fra Viète-relationerne har at $y_1 y_2 = -(p/3)^3$, må nogle produkter af et u_i fra 'gruppe 1' og et u_j fra 'gruppe 2' være lig $-p/3$; antag, evt. efter omnumerering indenfor de to grupper, at $u_1 u_4 = -p/3$. Dette bevirker at også $u_2 u_6 = \omega^3 u_1 u_4 = -p/3$ og ligeledes at $u_3 u_5 = -p/3$. Da man ifølge (5.16) har at $uv = -p/3$ haves, hvis man lader v_i betegne den værdi af v som korresponderer med u_i, at

$$v_1 = u_4, \; v_2 = u_6, \; v_3 = u_5, \; v_4 = u_1, \; v_5 = u_3, \; v_6 = u_2.$$

Følgeligt er der altså kun tre forskellige værdier af $u_i + v_i$, nemlig

$$\begin{aligned} &u_1 + u_4 \\ &u_2 + u_6 = \omega u_1 + \omega^2 u_4 \\ &u_3 + u_5 = \omega^2 u_1 + \omega u_4, \end{aligned}$$

som altså er tre rødder til den oprindelige tredjegradsligning (5.14)

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + u_4 \\ x_2 &= \omega u_1 + \omega^2 u_4 \\ x_3 &= \omega^2 u_1 + \omega u_4. \end{aligned} \tag{5.19}$$

[Lagrange, 1770-71, s. 208-216] og [Tignol, 1980/1988, s. 171-172]

Tilbage til bestemmelsen af $u_1, \ldots, u_6$ som funktioner af rødderne x_1, x_2, x_3. Dette gøres nemt hvis man bruger at $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ og ganger anden ligning af (5.19) med ω^2 hhv. ω og tredje ligning med ω hhv. ω^2, og dernæst lægger disse til den første ligning i (5.19). Herved får man

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = 3u_1 + (1 + \omega + \omega^2)u_4$$

henholdsvis

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = 3u_4 + (1 + \omega + \omega^2)u_1.$$

Altså er

$$u_1 = \frac{1}{3}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$$

og

$$u_4 = \frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3).$$

Den reducerede lignings resterende rødder følger direkte af udtrykkene i (5.18)

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{3}(\omega x_1 + x_2 + \omega^2 x_3) \\ u_3 &= \frac{1}{3}(\omega^2 x_1 + \omega x_2 + x_3) \\ u_5 &= \frac{1}{3}(\omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3) \\ u_6 &= \frac{1}{3}(\omega^2 x_1 + x_2 + \omega x_3). \end{aligned}$$

[Lagrange, 1770-71, s. 208-216] og [Tignol, 1980/1988, s. 172-173]

Lagrange ser altså at man kan udtrykke alle rødderne til hjælpeligningen (5.17), som altså med rette også kan kaldes en resolvent, ved at permutere rødderne x_1, x_2, x_3 i udtrykket

$$\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$

hvilket er et rationalt[22] udtryk i x_1, x_2, x_3.

Pointen i at løse den reducerede ligning er at bestemme nogle, og dermed alle, u_i. Deraf drager Lagrange nogle sindrige konklusioner. *A priori* forklarer det hvorfor hjælpeligningen har grad 6: Da hjælpeligningens koefficienter er rationale funktioner af koefficienterne i den oprindelige ligning, hvis koefficienter er de elementære symmetriske polynomier er hjælpeligningens koefficienter symmetriske i x_1, x_2, x_3. Derved gælder, at hvis et udtryk i x_1, x_2, x_3 er en rod til hjælpeligningen, så er samtlige permutationer af x_1, x_2, x_3 i udtrykket også en rod til hjælpeligningen. Da eksempelvis $3u_4 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ ved permutation af rødderne har seks forskellige værdier[23], gælder at disse er rødder til den reducerede ligning som derfor må have grad 6. Yderligere forklarer Lagrange ved dette hvorfor hjælpeligningen er en andengradsligning i u^3. F.eks. antager u_4^3 kun to forskellige værdier ved de $3! = 6$ permutationer af rødderne, hvilket ses på følgende vis. Da

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \omega^2(\omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3) = \omega(\omega^2 x_1 + x_2 + \omega x_3)$$

så gælder

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 = (\omega x_1 + \omega^2 x_2 + x_3)^3 = (\omega^2 x_1 + x_2 + \omega x_3)^3,$$

$$(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 = (\omega^2 x_1 + \omega x_2 + x_3)^3 = (\omega x_1 + x_2 + \omega^2 x_3)^3,$$

hvilket giver at

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3$$

[22]Med rational menes implicit, her og i det følgende, rationalt over et koefficientlegeme; her indeholdende n'te enhedsrødderne.

[23]Med en værdi mener Lagrange udtrykkets formelle værdi og ikke den numeriske værdi [Lagrange, 1770-71, s. 385]. Han antager implicit at addition og multiplikation er kommutative, dvs. at $ab = ba$ og $a + b = b + a$ [Kiernan, 1971, s.46].

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$$

er rødderne til en ligning der altså har grad 2. Generelt vil Lagranges observation kunne formuleres som

Proposition 5.1
Lad f være et rationalt udtryk i n ubekendte $x_1, \dots, x_n$. Hvis f antager m forskellige værdier $f_1, f_2, \dots, f_m$ ved alle permutationer af $x_1, \dots, x_n$, så er f en rod i en monisk ligning $\theta(t) = 0$ af grad m

$$\theta(t) = (t - f_1)(t - f_2) \cdots (t - f_m),$$

hvis koefficienter er symmetriske i $x_1, \dots, x_n$, og altså kan udtrykkes som rationale funktioner af de elementære symmetriske polynomier. Yderligere gælder at hvis f er rod i en anden ligning $\phi = 0$ med koefficienter symmetriske i $x_1, \dots, x_n$ så er $\deg(\phi) \geq m$. [Tignol, 1980/1988, s. 174]

[Tignol, 1980/1988, s. 172-175]

Proposition er dermed et første skridt på vejen til en *generel* metode til at finde rødderne til et n'tegradspolynomium: Hvis man finder et rationalt udtryk i de n rødder, $f(x_1, \dots, x_n)$, som antager færre end n værdier ved permutation, så kan alle $f_{\sigma_i}(x_1, \dots, x_n)$ bestemmes som rødder til $\theta(t) = 0$, hvor $\theta(t)$'s koefficienter kan bestemmes rationalt ved koefficienterne i den oprindelige ligning. Hvordan $\theta(t)$'s koefficienter bestemmes i koefficienterne til den oprindelige ligning er i og for sig irrelevant, pointen er at det kan gøres ved rationale operationer. Yderligere gælder selvfølgelig at $f(x_1, \dots, x_n)$ er af en sådan beskaffenhed at man kan beregne $x_1, \dots x_n$ udfra f og dets værdier ved permutation af rødderne.

Tschirnhaus' og Bezouts metoder

Efterfølgende tager Lagrange Tschirnhaus', Bezouts og Eulers metoder til løsning af tredjegradsligningen

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0 \tag{5.20}$$

under behandling. Med udgangspunkt i Tignol vil vi her gennemgå Lagranges fremstilling af hhv. Tschirnhaus' og Bezouts metoder. Lagranges gennemgang af Tschirnhaus' metode er tilsyneladende ikke helt i overenstemmelse med strategien i hans gennemgang af Cardano, hvor han søger at udtrykke rødderne til resolventen i x_1, x_2, x_3.

I Tschirnhaus' metode står man efter variabelskift (elimination af x) gennem

$$y = x^2 + b_1 x + b_0 \tag{5.21}$$

fra x til y med den rene tredjegradsligning

$$y^3 + c_0 = 0,$$

som har rødderne

$$\sqrt[3]{-c_0}, \quad \omega\sqrt[3]{-c_0}, \quad \omega^2\sqrt[3]{-c_0},$$

hvor ω er en tredje enhedsrod forskellig fra 1. Dette kan siges at være hjælpeligningen i Tschirnhaus' metode, og således burde pointen være at udtrykke dennes rødder i x_1, x_2, x_3. Dette kan man da også sige at Lagrange gør, da der ifølge Tchirnhaus' metode (evt. ved omnumerering af rødderne) gælder at

$$\begin{aligned} x_1^2 + b_1 x_1 + b_0 &= \sqrt[3]{-c_0} \\ x_2^2 + b_1 x_2 + b_0 &= \omega \sqrt[3]{-c_0} \\ x_3^2 + b_1 x_3 + b_0 &= \omega^2 \sqrt[3]{-c_0}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Det at Lagrange også tager forbehold for de komplekse løsninger til $y^3 = c_0$ gør faktisk Tschirnhaus' metode endnu hurtigere, idet man jo kan bestemme samtlige rødder første gang og ikke succestivt skal arbejde sig fremad ved at faktorisere et lineært led ud ad gangen. En observation man kan gøre sig, er at c_0 er nul hvis tredjegradsligningen har gentagne rødder. [Tignol, 1980/1988, s. 175-176] og [Lagrange, 1770-71, s. 232-237]

Afvigelsen fra behandlingen af Cardano, ligger i at hvert udtryk i x_1, x_2, x_3, som er en rod til hjælpelignigen, umiddelbart kun implicerer et x_i, eksempelvis

$$x_1^2 + b_1 x_1 + b_0, \tag{5.23}$$

hvor de to andre rødder igen fås ved permutation. Nu er idéen så at verificere, ved brug af proposition 5.4.1, at c_0 kan udtrykkes rationalt i b_0, b_1 og koefficienterne af (5.20) samt at b_0 og b_1 kan udtrykkes rationalt i koefficienterne til (5.20). Når dette er vist kan man så udregne x_1, x_2, x_3 som vist i afsnit 4.2. Det er ikke fordi vi drager tvivl om denne fremgangsmåde, vi synes blot at den afviger fra det som vi havde forstået som værende Lagranges målsætning.

Husker man på at $1 + \omega + \omega^2 = 0$ og ganger man de tre udtryk i (5.22) med hhv. $1, \omega, \omega^2$ og lægger dem sammen og isolerer b_1, får man at

$$b_1 = -\frac{x_1^2 + \omega x_2^2 + \omega^2 x_3^2}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}. \tag{5.24}$$

Denne polynomiumsbrøk har ved permutation af x_1, x_2, x_3 to værdier, nemlig b_1 og

$$b_1' = -\frac{x_1^2 + \omega^2 x_2^2 + \omega x_3^2}{x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3},$$

og kan derfor ifølge proposition 5.4.1 bestemmes ved at løse en andengradsligning

$$\theta(t) = t^2 - (b_1 + b_1')t + b_1 b_1' = 0,$$

hvis koefficienter er symmetriske i x_1, x_2, x_3 og derfor kan udtrykkes rationalt i koefficienterne af den oprindelige ligning. Dernæst ses at b_0 kan udtrykkes ved at man i (5.22) adderer de tre ligninger

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + b_1(x_1 + x_2 + x_3) + 3b_0 = 0.$$

Da $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ og $x_1 + x_2 + x_3$ er symmetriske udtryk i x_1, x_2, x_3 kan disse udtrykkes rationalt i koeffecienterne til (5.20)[24]. Alt i alt fås at b_0 kan udtrykkes

[24]Der gælder at $x_1+x_2+x_3 = -m$ og $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = m^2-2n$ altså er $(m^2-2n)-mb_1+3b_0 = 0$.

rationalt i b_1 og koefficienterne til den oprindelige ligning (5.20). På samme vis fås at c_0, som jo er produktet af de tre ligninger i (5.22)

$$-c_0 = (x_1^2 + b_1 x_1 + b_0)(x_2^2 + b_1 x_2 + b_0)(x_3^2 + b_1 x_3 + b_0),$$

kan udtrykkes rationalt i b_0 og b_1 samt koefficienterne til (5.20). [Tignol, 1980/1988, s. 176-177]

Vi synes egentlig at pointen i alt dette burde have været, at rødderne til hjælpeligningen $y^3 + c_0 = 0$ bestemt ved rødderne x_i, kan udtrykkes rationalt i koefficienterne, bortset fra løsningen af en andengradsligning $\theta(t) = 0$ til at bestemme b_1. Det ses endvidere at (5.23) som antager tre værdier ved permutation af rødderne, således kan bestemmes som rod i et $\theta'(t) = 0$ af grad 3, hvis koefficienter kan bestemmes rationalt i koefficienterne til (5.20) samt b_0 og b_1. Det morsomme ville her være at man så ville vise at Tschirnhaus' metode kan løse en tredjegradsligning, fordi det er muligt at løse en andengradsligning $\theta(t) = 0$ og en tredjegradsligning $\theta'(t) = 0$.

Efter at have behandlet tredjegradsligningen og de kendte metoder til dens løsning går Lagrange i del II igang med fjerdegradsligningen og diverse metoder til løsning af denne. Vi har udskudt gennemgangen af denne til senere i kapitlet af grunde vi vil redegøre for der (jf. afsnit 5.4.3).

Lagrange konkluderer efter behandlingen af de kendte metoder til løsningen af ligninger til og med grad 4 følgende[25]:

> *On a dû voir par l'analyse que nous venons de donner des principales méthodes connues pour la résolution des équations, que ces méthodes se réduisent toutes à un même principe général, savoir à trouver des fonctions des racines de l'équation proposée, lesquelles soient telles:* 1° *que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données, c'est-à-dire dont elles seront les racines (équations qu'on nomme communément les* réduites*), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée, ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là;* 2° *que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées.*
>
> *L'art de résoudre les équations consiste donc à découvrir des fonctions des racines, qui aient les propriétés que nous venons d'énoncer; mais est-il toujours possible de trouver de telles fonctions, pour les équations d'un degré quelconque, c'est-à-dire pour tel nombre de racines qu'on voudra? C'est sur quoi il paraît très-difficile de pouvoir prononcer en général.*
>
> *A l'égard des équations qui ne passent pas le quatrième degré, les fonctions les plus simples qui donnent leur résolution peuvent être représentées par la formule générale*
>
> $$x' + yx'' + y^2x''' + \ldots + y^{\mu-1}x^{(\mu)},$$
>
> $x', x'', x''', \ldots, x^{(\mu)}$ *étant les racines de l'équation proposée, qu'on suppose être du degré* μ*, et* y *étant une racine quelconque autre que*

[25] Lagrange betegner rødderne til den oprindelige ligning $x', x'', \ldots, x^{(\mu)}$ og de n'te enhedsrødder $y, y^2, \ldots, y^{\mu-1}$.

l'unité de l'équation

$$y^\mu - 1 = 0,$$

c'est-à-dire une racine quelconque de l'équation

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \ldots + 1 = 0,$$

comme il résulte de tout ce qu'on a exposé dans les deux premières Sections, touchant la résolution des équations du troisième et du quatrième degré. [...]

Il semble donc qu'on pourrait conclure de là par induction que toute équation, de quelque degré qu'elle soit, sera aussi résoluble à l'aide d'une réduite dont les racines soient représentées par la même formule

$$x' + yx'' + y^2x''' + y^3x^{IV} + \ldots.$$

[26] [Lagrange, 1770-71, s. 355-357]

Bemærk at udtryk som det sidste i ovenstående citat idag er kendt som *Lagrange-resolvente.*

Forsøget med at løse femtegradsligningen ud fra en generalisering af det foregående, vil gå ud på at finde et polynomium

$$f_1 = f(x_1, \ldots, x_5) = x_1 + \omega x_2 + \ldots + \omega^4 x_5,$$

hvor $x_1, \ldots, x_5$ er rødderne og ω er en primitiv femte enhedsrod. Ved permutation af rødderne er der ialt $5! = 120$ forskellige værdier $(f_1, f_2, \ldots, f_{120})$, men man observerer også at der for f_i gælder at også ωf_i, $\omega^2 f_i$, $\omega^3 f_i$ og $\omega^4 f_i$ er indeholdt i mængden af de 120 værdier. Sammenholdt med denne observation fås af proposition 5.4.1 at $\theta(t)$ indeholder faktoren[27]

$$(t - f_1)(t - \omega f_1)(t - \omega^2 f_1)(t - \omega^3 f_1)(t - \omega^4 f_1) = t^5 - f_1^5,$$

hvor θ ialt vil indeholde 24 af ovenstående udtryk hvert med forskelligt f_i. Dette giver at θ er et polynomium af grad 24 i t^5. Hvis man kan finde rødder til dette specielle polynomium af grad 24 viser Lagrange at man derudfra kan bestemme

[26] *As should be clear from the analysis that we have just given of the main known methods for the solution of equations, all these methods reduce to the same general principle, namely to find functions of the roots of the proposed equation which are such: 1° that the equation or equations by which they are given, i.e., of which they are the roots (equations that are usually called the reduced equations), happen to be of a degree smaller than that of the proposed equation, or at decomposable in other equations of degree smaller than this one; 2° that the values of the sought roots can be easily deduced from them. The art of solving equations thus consists of discovering functions of the roots which have the above mentioned properties; but is it always possible to find such functions, for equations of any degree, i.e. for any number of roots? That is a question which seems very difficult to decide in general. As to equations which do not exceed the fourth degree, the simplest functions which yield their solution can be represented by the general formula: $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \ldots + \omega^{n-1} x_n$, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ being the roots of the proposed equation* [...]. *It thus seems that one could conclude from this by induction that every equation of any degree will also be solvable with the help of a reduced equation whose roots are represented by the same formula: $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \omega^3 x_4 + \ldots$.* [Tignol, 1980/1988, s. 181-182]

[27] Lighedstegnet indses ved at $(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4) = 0$.

rødderne $x_1, \ldots, x_5$. Problemet er dog at det ikke er muligt for ham at bestemme de 24 rødder. [Skau, 1990, s. 70]

Vi vil nu med udgangspunkt i Tignol og Pierpont kort skitsere hvilke observationer Lagrange gjorde mht. plausibiliteten af Bezouts metode til løsning af n'te- samt specifikke femtegradsligninger. Ifølge Bezouts metode vil rødderne til en ligning af grad n være på formen

$$a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{n-1}\omega^{n-1},$$

hvor ω løber over mængden af n'te enhedsrøddder. Lader vi ζ betegne en primitiv n'te enhedsrod så er mængden af n'te enhedsrødder lig $\{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}\}$. Indsættes nu hver af disse n'te enhedsrødder i stedet for ω får vi følgende n udtryk for rødderne x_i

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \\
x_2 &= a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_{n-1}\zeta^{n-1} \\
x_3 &= a_0 + a_1\zeta^2 + a_2\zeta^4 + \ldots + a_{n-1}\zeta^{2(n-1)} \\
&\vdots \\
x_n &= a_0 + a_1\zeta^{(n-1)} + a_2\zeta^{2(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)^2},
\end{aligned}$$

hvilket kan skrives generelt som

$$x_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\zeta^{j(i-1)}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

Dette system kan løses for $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Vil man have udtrykt a_k skal man gange de ovenstående ligninger med de potenser af ζ der får koefficienten foran a_k til at blive 1. Lagranges analyse af Bezouts metode er noget regnetung omend forholdsvis ligetil, hvorfor vi ikke vil beskrive den i detaljer. Essensen er at man får udtrykt a_k i rødderne, som ved permutation af $x_1, \ldots, x_n$ antager alle de $n!$ forskellige værdier, hvilket jo medfører at a_k er en rod i en ligning af grad $n!$. Udtrykket for a_k^n derimod antager kun $(n-1)!$ forskellige værdier, og hvis n er et primtal så kan a_k^n bestemmes ud fra en ligning af grad $n-1$, hvis koefficienter kan bestemmes ud fra løsningen af en enkelt ligning af grad $(n-2)!$.[28] For en femtegradsligning vil bestemmelsen af a_k^5 således fordre løsningen af en ligning af grad $3! = 6$. [Tignol, 1980/1988, s. 179-181], [Pierpont, 1895, 198-199] og [Lagrange, 1770-71, s. 241-46 og 329-342]

Lagrange skriver

> *Mais, d'après ce que nous avons démontré dans la Section précédente à l'occassion des méthodes de MM. Euler et Bezout, lesquelles conduisent directement à de pareilles réduites* [[29]], *on a, ce semble, lieu de se convaincre d'avance que cette conclusion se trouvera en défaut dès le cinquième degré; d'où il s'ensuit que, si la résolution algébrique*

[28]Hvis $n = p\nu$ er et sammensat tal, hvor p er en primfaktor i n, vil koefficienterne kunne bestemmes udfra en ligning af grad $n!/(\nu!)^p p!$. [Tignol, 1980/1988, s. 180-181] og [Pierpont, 1895, s. 199]

[29]Resolvente, hvis rødder er Lagrange-resolvente i den oprindelige lignings rødder.

des équations des degrés supérieurs au quatrième n'est pas impossible, elle doit dépendre de quelques fonctions des racines, différentes de la précédente. [30] [Lagrange, 1770-71, s. 357]

5.4.2 Lagrange hæver abstraktionsniveauet

I det foregående er vægten ikke fortrinsvist lagt på de mange, set med datidens øjne, generaliseringer og abstraktioner Lagrange formår at gøre i sine analyser, men derimod på det lidt mere jordnære aspekt i hans analyse. I nærværende afsnit vil vi i henhold til vores problemformulering redegøre for de abstraktioner Lagrange – bevidst eller ubevidst – imødegår med sine sætninger.

Lagrange var faktisk i overraskende grad i stand til at skære ind til benet og koncentrere sig om de essentielle egenskaber for en lignings løsbarhed; dvs. *a priori*-studiet af funktioner $f(x_1, \ldots, x_n)$ og deres værdier ved samtlige permutationer af $x_1, \ldots, x_n$. Lagrange kalder selv denne procedure for 'ligningernes metafysik'. Således er Lagrange altså at betragte som en pioner mht. eksplicit brug af permutationer inden for algabraen, omend heller ikke han kommer med en streng definition af en permutation. Desværre for gruppeteoriens udvikling ligger Lagranges opmærksomhed ved udtrykket $f(x_1, \ldots, x_n)$ og ikke ved selve permutationen. Lagrange opfandt af den årsag en ad hoc notation til at betegne om et udtryk blev ændret ved en permutation eller ej, i stedet for at besvære sig med at opfinde en notation for selve permutationen[31]. [Kiernan, 1971, s. 46-47]

Lagrange indser det fundamentale i at klassificere udtryk efter den indvirkning en permutation har på dem, men af ovenstående grund er de af Lagranges sætninger, som i dag er en del af gruppeteorien, formuleret med udgangspunkt i de algebraiske udtryk og ikke permutationerne selv. Eksempelvis er Lagranges definition af similare funktioner

> [...] *si l'on a plusieurs fonctions des mêmes quantités, on appellera fonctions* semblables *celles qui varient en même temps ou demeurent les mêmes lorsqu'on y fait les mêmes permutations entre les quantités dont elles sont composées, de manière qu'elles puissent être désignées d'une manière analogue.* [32] [Lagrange, 1770-71, s. 358-359]

[30] *However, after what have been proved in the preceding section about the methods of MM. Euler and Bezout, which readily lead to such reduced equations, one has, it seems, the occasion to convince oneself beforehand that this conclusion will be wrong from the fifth degree on; hence it follows that, if the algebraic solution of the equations of degree higher than four is not impossible, it most rely on some functions of the roots, other than the above.* [Tignol, 1980/1988, s. 181-182]

[31] I denne notation betyder $f[(x_1)(x_2)(x_3)]$ at f ændrer værdi ved alle permutioner pånær identiten, og $f[(x_1, x_2)(x_3)]$ at f forbliver uændret ved permutationen (angivet i cykelnotation ved x'ernes fodtegn) (12)(3) men ændres af enhver permutation som substituerer x_1 eller x_2 med x_3.

[32] [...] *if we have several functions of the same quantities, we will term* similar *functions those which change together or remain unchanged together when we apply to them the same permutations of the quantities of which they are formed, as a result of which they may be represented in analogous notation.* [Kiernan, 1971, s. 47]

Med udgangspunkt i permutationerne oversættes dette analogt til: Alle permutationer $\sigma \in S_n$ som lader et udtryk f være uændret; også kaldet isotropigruppen til f.

Et andet vigtigt eksempel på Lagranges bidrag til gruppeteorien (og dermed permutationsteorien), som udsprang af Lagranges søgen efter at kunne klassificere udtrykkene $f(x_1, \ldots, x_n)$, er hans sætning om at graden af θ i proposition 5.4.1, altid er $n!$ eller en divisor i $n!$.[33] For Lagrange tjener denne sætning primært til at få begreb om, hvilke grader en resolvent kan have i forhold til graden n af den oprindelige ligning, men det er ikke desto mindre denne sætning som i en mere generel gruppeteoretisk kontekst er navngivet efter Lagrange[34]. Dermed er denne sætning et biprodukt af en af Lagranges andre sætninger, som kan siges at være en udvidelse af proposition 5.4.1, hvor to funktioner sammenholdes relativt til hinanden. Her følger den i en moderne version.

Sætning 5.1
Lad ϕ og ψ være rationale funktioner i rødderne $x_1, \ldots, x_n$ til den oprindelige ligning . Hvis ϕ antager m forskellige værdier ved de permutationer som lader ψ invariant, så er ϕ en rod i en ligning af grad m, hvis koefficienter er rationale udtryk i ψ og i koefficienterne i den oprindelige ligning. Specielt gælder hvis ϕ er invariant ved de permutationer som lader ψ invariant, at ϕ kan udtrykkes rationalt i ψ og koefficienterne i den oprindelige ligning. [Tignol, 1980/1988, s. 190], [van der Waerden, 1985, s. 81] og [Lagrange, 1770-71, s. 374][35]

Udfra sætning 5.1 bliver strategien for løsningen af den generelle ligning således: Man skal finde en endelig følge af rationale funktioner $V_0, V_1, \ldots, V_r$ i de n rødder, således at den første funktion V_0 er symmetrisk i $x_0, \ldots, x_n$ og den sidste V_r er lig en af rødderne, f. eks. $V_r = x_1$. Derudover skal V_i for $i = 1, \ldots, r$ opfylde én af de følgende to betingelser:

1. $V_i^n = V_{i-1}$,

2. Antallet af værdier k, som V_i antager ved alle de permutationer af $x_1, \ldots, x_n$ som lader V_{i-1} invariant, er skarpt mindre end n.

Hvis betingelse 1. er opfyldt kan V_i udregnes fra den foregående V_{i-1} ved uddragning af en n'te rod, og hvis betingelse 2. er opfyldt kan V_i ifølge sætning 5.1 udregnes ved at løse en ligning af grad k (strengt mindre end n). Da den sidste funktion V_r er lig en af rødderne til den oprindelige ligning betyder dette at en rod, f. eks. x_1, kan bestemmes ved succestivt at uddrage rødder og løse ligninger af lavere grad end n. De resterende rødder $x_2, \ldots, x_n$ kan ligeledes findes ved at erstatte $V_0, \ldots, V_r$ med similare funktioner til disse. [Kiernan, 1971, s. 54-55]

[33] Mere præcist viser Lagrange $m = n!/|I(f)|$ hvor $I(f)$ er stabilisatoren til f, dvs. undergruppen af permutationer som lader f invariant. [Lagrange, 1770-71, s. 370-373]

[34] Lagranges sætning: I en endelig gruppe vil ordnen af en undergruppe altid være en divisor i gruppens orden.

[35] Selve sætningen er hos Lagrange meget løst formuleret og det fremgår først præcis hvad den implicerer når beviset for den gennemgås. [Lagrange, 1770-71, s.374-379]

Lad os illustrere denne argumentation for anden-, tredje- og fjerdegradsligningen. For $n = 2$ og $x^2 + bx + c = 0$ kan man vælge:

$$\begin{aligned} V_0 &= (x_1 + x_2) \\ V_1 &= x_1 - x_2 \\ V_2 &= x_1. \end{aligned}$$

V_0 kan ifølge proposition 5.4.1 udtrykkes ved en andengradsligning i de elementære symmetriske polynomier – koefficienterne til den moniske andengradsligning[36]. V_1 antager to værdier under de permutationer der holder V_0 invariant, og dermed er V_0 rod i en andengradsligning med koefficienter rationale i b og c.[37]

På samme måde kan der deduceres mht. tredjegradsligningen: Vælg til V_0 enhver symmetrisk funktion i x_1, x_2, x_3, eksempelvis $V_0 = x_1 + x_2 + x_3$. Lad

$$\begin{aligned} V_1 &= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 \\ V_2 &= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) \\ V_3 &= x_1 \end{aligned}$$

hvor ω er en tredje enhedsrod forskellig fra 1. Da V_1 kun antager to værdier ved permutation af x_1, x_2, x_3 kan denne bestemmes ved at løse en andengradsligning i de elementære symmetriske polynomier. Derefter bestemmes V_2 ved uddragning af en kubikrod til V_1 og til sidst kan V_3 udtrykkes rationalt i V_2, dvs. ved at løse en lineær ligning; V_3 er invariant under alle permutationer der holder V_2 invariant (V_2 er kun invariant under identiteten). [Tignol, 1980/1988, s. 194]

For $n = 4$ kan man vælge V_0 til enhver symmetrisk funktion i rødderne og

$$\begin{aligned} V_1 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ V_2 &= x_1 + x_2 \\ V_3 &= x_1. \end{aligned}$$

Således har man at V_1 kan bestemmes ved en tredjegradsligning i $s_1, \ldots, s_4$, V_2 som en andengradsligning da den kun antager to værdier ved de permutationer af $x_1, \ldots, x_4$ som V_1 er invariant under, og til sidst kan V_3 bestemmes ved en andengradsligning i V_2 da V_3 antager to værdier ved de permutationer der lader V_2 uændret. x_2 bestemmes let da dette er den anden rod i den andengradsligning som giver værdien af V_3. x_3 og x_4 findes nemt ved tilsvarende udregninger, da $x_3 + x_4$ er den anden rod til den andengradsligning der giver V_2 osv. Dette er faktisk devisen i Ferraris oprindelige metode, men et andet valg af følgen $V_1, \ldots, V_3$ vil eksempelvis kunne give proceduren i Lagranges brug af Lagrange-resolventen:

$$\begin{aligned} V_1 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \\ V_2 &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ V_3 &= x_1, \end{aligned}$$

[36] $V_0 = -b$.

[37] $\theta(t) = (t-(x_1-x_2))(t-(x_2-x_1)) = (t-(x_1-x_2))(t+(x_1-x_2)) = t^2-(x_1^2+x_2^2)-2x_1x_2 = t^2-(b^2-4c) = 0$.

hvor den implicerede fjerde enhedsrod er valgt til −1. [Tignol, 1980/1988, s. 194-195]

Eller vi kunne vælge $V_1, \ldots, V_3$ så de korresponderer med vores gennemregning i afsnit 5.4.3,

$$\begin{aligned} V_1 &= x_1x_2 + x_3x_4 \\ V_2 &= x_1x_2 \\ V_3 &= x_1, \end{aligned}$$

hvor man også starter med løsningen af en tredjegradsligning, da man får ialt tre forskellige værdier ved permutation af rødderne. Dernæst en andengradsligning for V_2 da permutationerne, hvorunder V_1 er invariant $(\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(24), (12)(3)(4)$, etc.), giver to forskellige værdier for V_2 (disse to værdier fås f.eks. ved permutationerne $\mathrm{id}, (13)(24)$) og til sidst igen en andengradsligning da permutationer der lader V_2 uændret giver to værdier af V_3.

> *Voilà, si je ne me trompe, les vrais principes de la résolution des équations et l'analyse la plus propre à y conduire; tout se réduit, comme on voit, à une espèce de calcul des combinaisons, par lequel on trouve* à priori *les résultats auxquels on doit s'attendre. Il serait à propos d'en faire l'application aux équations du cinquième degré et des degrés supérieurs, dont la résolution est jusqu'à présent inconnue; mais cette application demande un trop grand nombre de recherches et de combinaisons, dont le succès est encore d'ailleurs fort douteux, pour que nous puissions quant à présent nous livrer à ce travail; nous espérons cependant pouvoir y revenir dans un autre temps, et nous nous contenterons ici d'avoir posé les fondements d'une théorie qui nous paraît nouvelle et générale.* [38] [Lagrange, 1770-71, s. 403]

Lagrange viste hverken eksistensen eller ikke-eksistensen af en sådan følge $V_0, \ldots, V_r$ af hjælpeligninger til at løse den generelle femtegradsligning. Han viste blot at eksistensen er en nødvendig betingelse for den algebraiske løsbarhed af den generelle n'tegradsligning. Eftersom Lagrange ikke eksplicit udtaler sig om hvorvidt han tror femtegradsligningen kan løses algebraisk eller ej, er der således blandt nutidige matematikere delte opfattelser om netop dette. Den mest gængse opfattelse har dog været at Lagrange ikke troede på løsbarheden af femtegradsligningen, men man kan ikke underbygge det ud fra hans arbejde, og spørgsmålet er om ikke det er den store anseelse Lagrange nyder der har præget tolkningen af hans vage udtalelser omkring emnet; faktum er i hvert fald at han lader begge muligheder stå åbne. [Nový, 1973, s. 29-30]

[38] *These are, if I am not mistaken, the genuine principles of the solution of equations and the analysis which is most suitable to lead to it; everything is reduced, as is seen, to a kind of calculus of combinations, by which the results to which one is led are found* a priori.*It would be appropriate to apply this to the equations of fifth degree or higher, whose solution is at present unknown; but that application requires too large a number of trials and calculations, whose success is still very much in doubt, for us to be able to spend all our time on it just now. We hope to be able, nevertheless, to return to it at another time, and we content ourselves now with having laid the foundations of a theory which seems to us to be new and far-reaching.* [Kiernan, 1971, s. 56]

Fra et Galoisteoretisk synspunkt ser vi at Lagrange allerede her lægger grunden til at udtrykke mellemliggende udtryk i $V_0, \ldots, V_r$ i rødderne til den oprindelige ligning. Ligeledes ser vi at han med sine Lagrange-resolvente tager et skridt i Galois' retning[39]. Og oversætter man til gruppeteoretisk terminologi har man ifølge Skau den letteste implikation i Galois' sætning anvendt på den generelle n'tegradsligning: Hvis S_n er en opløselig gruppe, så er den generelle n'tegradsligning algebraisk løsbar. I følge Nový kan man hos Lagrange implicit se en skelnen mellem forskellige algebraiske legemer, men det vil vi ikke komme nærmere ind på, andet end at påpege at Lagranges følge af $V_0, \ldots, V_r$ svarer til at udvide $\mathbf{Q}$ succestivt med rødderne til de korresponderende hjælpeligninger. [Skau, 1990, s. 70] og [Nový, 1973, s. 30-32]

5.4.3 Fjerdegradsligningen

Vi har valgt at placere behandlingen af den generelle fjerdegradsligning til sidst i dette kapitel, da denne fortrinsvist skal illustrere præcis hvad Lagrange mener i citatet på side 85 mht. til den involverede kombinatorik som det indebærer at udtrykke hjælpeligninger i koefficienterne til den oprindelige ligning.

Vi har til gennemgang af Lagranges løsningsmetode til fjerdegradsligningen valgt at tage udgangspunkt i Dieudonnés udlægning af denne. Det har vi gjort da denne udlægning var den første vi læste, og det derfor er i dennes terminologi at vi har gennemført nogle af de af Lagrange omtalte omstændelige udregninger. Princippet i Dieudonnés fremstilling er dog det samme som i Lagranges [Lagrange, 1770-71, s. 263-265].

Vi begynder med at se på

$$P(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0,$$

som kan omskrives til

$$x^4 - a_1 x^3 + a_2 x^2 - a_3 x + a_4 = 0, \tag{5.25}$$

hvor vi observerer at

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ a_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ a_4 &= x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Knebet er nu at bestemme et polynomium som antager færre end fire formelle værdier, lad os prøve med det ikke-symmetriske udtryk $h_1 = x_1x_2 + x_3x_4$. Dette antager ved alle 24 permutationer kun tre værdier (jf. eksemplet på 85). Essensen i dette afsnit er dog at bestemme koefficienterne til de implicerede hjælpeligninger udtrykt i rationale funktioner af a_i, hvorfor vi her vil gå grundigt til værks.

[39]Som i afsnit 5.2 bemærket opdager Vandermonde uafhængigt af Lagrange også de såkaldte Lagrange-resolvente, hvilket også implikerer vigtigheden af disse.

Polynomierne dannet udfra h_1 ved permutation er

$$h_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad h_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad h_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

De i variablene h_i $(i = 1, 2, 3)$ elementære symmetriske funktioner

$$\begin{aligned} b_1 &= h_1 + h_2 + h_3 \\ b_2 &= h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 \\ b_3 &= h_1h_2h_3 \end{aligned}$$

er selv symmetriske polynomier i x_1, x_2, x_3, x_4, og dermed også polynomier i a_1, a_2, a_3, a_4. Således er h_1, h_2, h_3 rødder i tredjegradsligningen

$$Q(t) \equiv t^3 - b_1t^2 + b_2t - b_3 = 0,$$

hvor

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 \\ b_2 &= a_1a_3 - 4a_4 \\ b_3 &= a_3^2 + a_1^2a_4 - 4a_2a_4. \end{aligned}$$

Dette verificeres let for b_1 og b_2. b_3 derimod er en sværere nød at knække. Det er uden tvivl udregninger af f.eks. koefficienter som b_3, Lagrange henviser til i citatet på side 85; for udregning af b_3 se afsnit 5.5[40]. For at beregne x_1 og x_2 beregner vi i første omgang $x_1 + x_2$ og x_1x_2. Vi observerer at

$$(x_1x_2) + (x_3x_4) = h_1 \quad \text{og} \quad (x_1x_2)(x_3x_4) = a_4,$$

hvorfor x_1x_2 er en rod i andengradsligningen

$$t^2 - h_1t + a_4 = 0. \tag{5.26}$$

Bemærk at vi her kender koefficienterne i denne ligning; a_4 er konstanten i fjerdegradsligningen og h_1 er en af rødderne i $Q(t)$ (af symmetrigrunde er det underordnet hvilken). Hernæst får vi den idé at betragte polynomiet

$$y_1 = x_1 + x_2 - (x_3 + x_4).$$

I og med at

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a_1^2 - 2a_2,$$

har vi

$$y_1^2 = a_1^2 - 2a_2 + 2(h_1 - h_2 - h_3) = a_1^2 - 4a_2 + 4h_1,$$

og fremdrager således y_1 ved at tage kvadratroden af dette udtryk. Da $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_1$ må vi have at

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(a_1 + y_1).$$

[40]Dieudonné bringer i sin fremstilling kun udtrykkene for b_1 og b_2, hvorfor vi i bestemmelsen af b_3 har været overladt til os selv. Udregningerne fylder et par sider, hvorfor vi bringer dem i et selvstændigt afsnit, så man i dette ikke mister kontinuiteten i gennemgangen af løsningsmetoden til fjerdegradsligningen.

Lader vi α være en rod (x_1x_2) i (5.26) så er x_1 og x_2 rødder i

$$t^2 - \frac{1}{2}(a_1 + y_1)t + \alpha = 0. \tag{5.27}$$

Tilmed har vi nu at

$$x_3x_4 = h_1 - \alpha \quad \text{og} \quad x_3 + x_4 = \frac{1}{2}(a_1 - y_1),$$

hvorfor x_3 og x_4 er rødder i

$$t^2 - \frac{1}{2}(a_1 - y_1)t + (h_1 - \alpha) = 0. \tag{5.28}$$

Vi har altså nu fået udtrykt rødderne i (5.25) som rødder i to andengradsligninger (5.27) og (5.28) hvor vi enten kender eller kan beregne koefficienterne. [Dieudonné, 1987/1992, s. 113-115 og 167]

5.5 Udregning af b_1, b_2 og b_3

Vi vil i dette afsnit gennemgå udregningerne for bestemmelse af hhv. b_1, b_2 og b_3 i afsnit 5.4.3. Udregningerne har vi foretaget ved brug af to metoder. Den første af disse metoder er hvad man kan kalde en 'ad hoc'-metode, altså en metode hvor man ved en række af overvejelser og sindrigt opstillede tabeller gennemskuer udtrykket for b_i. I den anden metode gør vi brug af Tignols moderne fremstilling af beviset for Warings hovedsætning. Selv om det umiddelbart virker som to meget forskellige angrebsvinkler er metoderne essentielt ens, idet de begge indebærer kombinationsovervejelser. Udregningerne af b_i'erne vha. første metode har vi selv foretaget på et tidligt tidspunkt i projektforløbet. Sidenhen fik vi kendskab til Tignols bevis for Warings hovedsætning (sætning 5.1), som vi også mener giver et fint billede af brugen af kombinationer som redskab til bestemmelse af et symmetrisk udtryk udfra andre. Vi har derfor i nærværende afsnit gjort brug af begge metoder.

5.5.1 Udregning ved brug af 'ad hoc'-metode

Vi formoder at den her såkaldte 'ad hoc'-metode indeholder overvejelser analoge til dem man har måttet gøre sig inden den endelige etablering af de gruppeteoretiske aspekter i ligningsløsningsteorien.

Rødderne i $Q(t)$ er h_1, h_2 og h_3, hvorfor vi ifølge Viète-relationerne har at

$$\begin{aligned} b_1 &= h_1 + h_2 + h_3 \\ b_2 &= h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 \\ b_3 &= h_1h_2h_3. \end{aligned}$$

Da

$$h_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad h_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \quad h_3 = x_1x_4 + x_2x_3,$$

får vi følgende udtryk for b_1, b_2 og b_3

$$\begin{aligned}
b_1 &= (x_1x_2 + x_3x_4) + (x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_4 + x_2x_3) \\
b_2 &= (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) + \\
&\quad (x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) \\
b_3 &= (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3).
\end{aligned}$$

Når dette ganges ud bliver b_1 et udtryk bestående af seks led, b_2 et af tolv og b_3 et af otte:

$$\begin{aligned}
b_1 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
b_2 &= x_1x_2x_1x_3 + x_1x_2x_2x_4 + \ldots + \ldots \\
b_3 &= x_1x_2x_1x_3x_1x_4 + x_1x_2x_2x_4x_1x_4 + \ldots + \ldots
\end{aligned}$$

Det ses umiddelbart af Viète-relationerne for $P(x)$, opskrevet i afsnit 5.4.3, at

$$b_1 = a_2.$$

For at udregne b_2 kan vi gøre os følgende observationer:

1. b_2 består af tolv led hver indeholdende fire x_i'er.
2. I et enkelt led af b_2 er det umuligt at have tre ens x_i'er, da h_1, h_2 og h_3 hver for sig er uden gentagelse.
3. Kombinationen af fire uens x_i'er i et led er ligeledes umulig.
4. Kombinationen $x_ix_ix_jx_k$ for $i \neq j \neq k \neq i$ er den højeste ophobning af samme x_i vi kan opnå.

Hvis vi med f.eks. $(ll\ l\ l\ 0)$ forstår et led af b_2 indeholdende to ens x_i'er, to enkelte x_i'er og ingen af det sidste x_i, som i punkt 4. ovenfor, ses det at der er fire måder at placere 0 på, tre måder at placere ll på og at de sidste l'er da ligger fast, hvorfor kombinationen i punkt 4. netop giver os $4 \cdot 3 = 12$ led.

Eftersom vi ønsker at udtrykke b_i'erne ved a_i'erne, observerer vi (jf. afsnit 5.4.3) at a_1 multipliceret med a_3 netop giver os led indeholdende fire x_i'er[41]. Lad os opskrive en tabel (jf. tabel 5.1).

Ser vi nærmere på opskrivningerne for leddene indeholdt i hhv. b_2 og a_1a_3 observerer vi at a_1a_3 indeholder fire led mere end b_2, og at disse fire led netop er leddene af formen $(l\ l\ l\ l)$, som jo ifølge punkt 3. var en umulig kombination i b_2. Når vi dernæst har overbevist os om at de resterende tolv led i de to udtryk er de samme har vi at

$$b_2 = a_1a_3 - 4a_4.$$

Som tidligere bemærket opskriver Dieudonné ikke noget udtryk for b_3, hvilket forekommer os lidt mærkeligt, han skriver blot

[41] Vi burde i virkeligheden overveje alle kombinationerne af a_i'erne, blot er vi her så 'heldige' at vælge et udtryk første gang som giver os det ønskede resultat.

b_2	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1a_3	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	*ll*	*l*	*l*	1	0	*ll*	*l*	*l*
2	0	*l*	*ll*	*l*	2	0	*l*	*ll*	*l*
3	0	*l*	*l*	*ll*	3	0	*l*	*l*	*ll*
4	*ll*	0	*l*	*l*	4	*l*	*l*	*l*	*l*
5	*l*	0	*ll*	*l*	5	*ll*	0	*l*	*l*
6	*l*	0	*l*	*ll*	6	*l*	0	*ll*	*l*
7	*ll*	*l*	0	*l*	7	*l*	0	*l*	*ll*
8	*l*	*ll*	0	*l*	8	*l*	*l*	*l*	*l*
9	*l*	*l*	0	*ll*	9	*ll*	*l*	0	*l*
10	*ll*	*l*	*l*	0	10	*l*	*ll*	0	*l*
11	*l*	*ll*	*l*	0	11	*l*	*l*	0	*ll*
12	*l*	*l*	*ll*	0	12	*l*	*l*	*l*	*l*
					13	*ll*	*l*	*l*	0
					14	*l*	*ll*	*l*	0
					15	*l*	*l*	*ll*	0
					16	*l*	*l*	*l*	*l*

Tabel 5.1 Antallet af l'er angiver antallet af x_i'er i det pågældende led af b_2 hhv. a_1a_3.

> [...] *and* b_3 *is a polynomial in* a_1, a_2, a_3, a_4, *which we do not write down.* [Dieudonné, 1987/1992, s. 167]

Udtrykket for b_3 er nemlig ikke specielt grimt, blot ikke så nemt at bestemme.

Som tidligere nævnt indeholder b_3 otte led hver indeholdende seks x_i'er. Lad os på samme måde som gjort ovenfor opskrive en tabel for b_3 (jf. tabel 5.2).

b_3	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	*ll*	*ll*	*ll*
2	*ll*	0	*ll*	*ll*
3	*ll*	*ll*	0	*ll*
4	*ll*	*ll*	*ll*	0
5	*lll*	*l*	*l*	*l*
6	*l*	*lll*	*l*	*l*
7	*l*	*l*	*lll*	*l*
8	*l*	*l*	*l*	*lll*

Tabel 5.2 Antallet af l'er angiver antallet af x_i'er i det pågældende led af b_3.

Bemærk at der i b_3 ikke forekommer nogen led af formen (ll ll l l) eller (lll ll l 0).

Dernæst observerer vi at følgende produkter af a_i'erne giver led indeholdende seks x_i'er:

$$a_1^6,\ a_2^3,\ a_1^2a_2^2,\ a_3^2,\ a_1^3a_3,\ a_2a_4,\ a_1^2a_4,\ a_1a_2a_3.$$

Hver af disse kombinationer indeholder (opskrevet i samme rækkefølge) følgende antal led med seks x_i'er:

$$4^6 = 4096,\ 6^3 = 216,\ 4^2 \cdot 6^2 = 576,\ 4^2 = 16,$$
$$4 \cdot 4^3 = 256,\ 1 \cdot 6 = 6,\ 1 \cdot 4^2 = 16,\ 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96.$$

Vi skal altså kunne opskrive '8' som en linearkombination af disse, altså

$$8 = \alpha \cdot 4096 + \beta \cdot 216 + \gamma \cdot 576 + \delta \cdot 16 + \epsilon \cdot 256 + \zeta \cdot 6 + \eta \cdot 16 + \theta \cdot 96,$$

dvs.

$$b_3 = h_1 h_2 h_3 = \alpha a_1^6 + \beta a_2^3 + \gamma a_1^2 a_2^2 + \delta a_3^2 + \epsilon a_1^3 a_3 + \zeta a_2 a_4 + \eta a_1^2 a_4 + \theta a_1 a_2 a_3.$$

En mulig løsning er at vælge $\delta = \eta = 1$ samt $\zeta = -4$

$$8 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 16 - 4 \cdot 6.$$

Udtrykt ved a_i'er er dette

$$b_3 = a_3^2 + a_1^2 a_4 - 4a_2 a_4.$$

Det skal dog igen pointeres at dette kun er én mulig løsning, men det er dog den mest simple, hvorfor vi vælger at undersøge den nærmere. Igen gør vi os nogle observationer ved at se på formen af a_i'erne. Mht. a_3^2 gælder:

1. Der er ingen led indeholdende mere end to ens x_i'er.
2. Punkt 1. medfører at et led højst kan indeholde et 0, hvilket betyder at der er fire led af formen $(ll\ ll\ ll\ 0)$.
3. Resten af leddene må da være af formen $(ll\ ll\ l\ l)$, og dem er der $4 \cdot 3 = 12$ af.

Mht. $a_1^2 a_4$ gælder:

1. Alle x_i'er skal optræde i hvert led (0 optræder ikke).
2. Punkt 1. medfører at et x_i højst kan optræde tre gange i et led, hvilket betyder at der er fire led af formen $(lll\ l\ l\ l)$.
3. Resten af leddene må da være af formen $(ll\ ll\ l\ l)$, og faktisk er disse de samme som for a_3^2, og der er ligeledes tolv af dem.

Vi kan nu opskrive tabellerne for disse to udtryk (jf. tabel 5.3).

Mht. $a_2 a_4$ gælder:

1. Alle x_i'er skal optræde i hvert led (0 optræder ikke).
2. Præcis to rødder skal være dobbelte, dvs. alle led er af formen $(ll\ ll\ l\ l)$.

Vi kan nu opskrive tabellen for $a_2 a_4$ (jf. tabel 5.4).

Bemærk at der fra 1 til 4 i tabel 5.3 rent faktisk står de led som er indeholdt i $h_1 h_2 h_3 = b_3$. I de resterende tolv linier optræder hvert af leddene fra tabel 5.4 netop fire gange. Altså har vi

$$b_3 = a_3^2 + a_1^2 a_4 - 4a_2 a_4,$$

og er således færdige.

a_3^2	x_1	x_2	x_3	x_4	$a_1^2a_4$	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	*ll*	*ll*	*ll*	1	*lll*	*l*	*l*	*l*
2	*ll*	0	*ll*	*ll*	2	*l*	*lll*	*l*	*l*
3	*ll*	*ll*	0	*ll*	3	*l*	*l*	*lll*	*l*
4	*ll*	*ll*	*ll*	0	4	*l*	*l*	*l*	*lll*
5	*ll*	*ll*	*l*	*l*	5	*ll*	*ll*	*l*	*l*
6	*ll*	*ll*	*l*	*l*	6	*ll*	*ll*	*l*	*l*
7	*l*	*ll*	*ll*	*l*	7	*l*	*ll*	*ll*	*l*
8	*l*	*ll*	*ll*	*l*	8	*l*	*ll*	*ll*	*l*
9	*l*	*l*	*ll*	*ll*	9	*l*	*l*	*ll*	*ll*
10	*l*	*l*	*ll*	*ll*	10	*l*	*l*	*ll*	*ll*
11	*ll*	*l*	*l*	*ll*	11	*ll*	*l*	*l*	*ll*
12	*ll*	*l*	*l*	*ll*	12	*ll*	*l*	*l*	*ll*
13	*ll*	*l*	*ll*	*l*	13	*ll*	*l*	*ll*	*l*
14	*ll*	*l*	*ll*	*l*	14	*ll*	*l*	*ll*	*l*
15	*l*	*ll*	*l*	*ll*	15	*l*	*ll*	*l*	*ll*
16	*l*	*ll*	*l*	*ll*	16	*l*	*ll*	*l*	*ll*

Tabel 5.3 Antallet af *l*'er angiver antallet af x_i'er i det pågældende led af hhv. a_3^2 og $a_1^2a_4$.

a_2a_4	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*ll*	*ll*	*l*	*l*
2	*l*	*ll*	*ll*	*l*
3	*l*	*l*	*ll*	*ll*
4	*ll*	*l*	*l*	*ll*
5	*ll*	*l*	*ll*	*l*
6	*l*	*ll*	*l*	*ll*

Tabel 5.4 Antallet af *l*'er angiver antallet af x_i'er i det pågældende led af a_2a_4.

5.5.2 Udregning ved brug af metoden fra afsnit 5.1.1

Øvelsen med bestemmelsen af b_i'erne er ligeledes en formidabel mulighed for at benytte den metode som er udviklet i beviset for Warings hovedsætning omhandlende symmetriske polynomier. Denne metode er langt mere gennemskuelig end den ovenfor gennemgåede 'ad hoc'-udregning, men den bygger jo også på den elegante notationsform[42] $\sum x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ som Waring og hans samtidige ikke havde til deres rådighed, men også denne metode ligesom 'ad hoc'-udregningen kræver kombinatoriske regneteknikker så som binomialtal og multinomialtal.

Igen følger udtrykket for b_1 trivielt. Til udregning af b_2 bemærkes først at vores

[42]Jf. afsnit 5.1 for genopfriskning af bevis samt notationsform.

ligning (5.25) har alternerende fortegn således at

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum x_1 \\ a_2 &= \sum x_1 x_2 \\ a_3 &= \sum x_1 x_2 x_3 \\ a_4 &= \sum x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Ser vi på tabellen for b_2 (tabel 5.1), ser vi at alle led har et x_i i anden potens, to x_i'er i første potens og ét manglende x_i, samt at ingen af leddene er ens. Ergo kan b_2 udtrykkes som $\sum x_1^2 x_2 x_3$. At denne også har tolv led som i tabellen indses let da $\sum x_1 x_2 x_3$ har fire led og ethvert x_i kan være i anden potens; altså tre muligheder per led, dvs. ialt $4 \cdot 3 = 12$ led. Proceduren er nu følgende:

$$b_2 = \sum x_1^2 x_2 x_3,$$

og leddet med den højeste grad er selvfølgelig $\sum x_1^2 x_2 x_3$ selv, da det er det eneste. Graden af dette er $(2, 1, 1, 0)$; altså skal $f = a_1^{2-1} a_2^{1-1} a_3^{1-0} a_4^0 = a_1 a_3$ udtrykkes ved

$$a_1 a_3 = \sum x_1 \sum x_1 x_2 x_3 = \sum x_1^2 x_2 x_3 + 4 \sum x_1 x_2 x_3 x_4,$$

hvorfor der haves at

$$b_2 = \sum x_1^2 x_2 x_3 = a_1 a_3 - 4a_4.$$

Udtrykket for b_3 udregnes på lignende vis. Først betragtes tabellen for b_3 (tabel 5.2), hvoraf det ses at der er fire – og dermed alle de forskellige – led med hver tre forskellige x_i'er opløftet i anden potens, og at alle disse fire led er forskellige. Ydermere er der fire forskellige – og dermed alle de forskellige – led af typen

$$x_{\sigma(1)}^3 x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)},$$

hvor σ tilhører den symmetriske gruppe S_4. Altså kan b_3 skrives som $\sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \sum x_1^3 x_2 x_3 x_4$. Af disse to led er $\sum x_1^3 x_2 x_3 x_4$ det med den højeste grad, $(3, 1, 1, 1)$. Således skal $a_1^{3-1} a_2^{1-1} a_3^{1-1} a_4^1 = a_1^2 a_4$ udtrykkes ved

$$a_1^2 a_4 = \left(\sum x_1\right)^2 x_1 x_2 x_3 x_4 = \sum x_1^3 x_2 x_3 x_4 + 2 \sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4,$$

hvorfor vi får at

$$b_3 = \sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 2 \sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 + a_1^2 a_4.$$

Igen udvikles efter leddet der nu har højeste grad, hvilket er $\sum x_1^2x_2^2x_3^2$, og a_3^2 udtrykkes da ved

$$a_3^2 = \left(\sum x_1x_2x_3\right)^2 = \sum x_1^2x_2^2x_3^2 + 2\sum x_1^2x_2^2x_3x_4.$$

b_3 kan nu skrives som

$$a_3^2 - 4\sum x_1^2x_2^2x_3x_4 + a_1^2a_4,$$

hvor leddet med højeste grad er $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$, hvilket giver at a_2a_4 skal udtrykkes ved

$$a_2a_4 = \sum x_1x_2 \cdot x_1x_2x_3x_4 = \sum x_1^2x_2^2x_3x_4.$$

Da vi har -4 gange $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$, skal a_2a_4 ganges med -4 for at det er lig med højestegradsleddet, og da der efterfølgende ikke er nogen rest er algoritmen således slut. Vi har nu b_3 udtrykt i koefficienterne a_1, a_2, a_3, a_4:

$$b_3 = a_3^2 + a_1^2a_4 - 4a_2a_4.$$

5.6 Afrunding

I de fire afhandlinger fra 1770-71 træder kombinations-, permutations-, og invariansbegreberne tydeligere frem end de hidtil har gjort. De er dog stadig ikke i centrum, dvs. der er endnu ikke tale om teorier udelukkende omhandlende disse begreber, men brugen af dem er langt mere åbenlys og gennemskuelig end vi oplevede det i afsnittet om de foregående 200 år.

De tre distingverede herrer Lagrange, Vandermonde og Warings arbejder tog i en vis forstand udgangspunkt i at metoder til løsning af laveregradsligninger fejlede, og at de hver især havde en intuition om hvorfor de fejlede. Under denne mere eller mindre eksplicitte formulerede intuition forsøgte de at komme til 'bunds' i problemet. Warings tilgang i hans arbejde er ifølge Novy at undersøge graden af resolventen, hvorimod Vandermonde forsøger en lidt anden tilgang, nemlig at finde det simpleste udtryk hvorfra man kan udregne rødderne til en given ligning. Lagrange derimod underbygger sin intuition, som er analog til Vandermondes, ved systematisk at undersøge ligningsløsningsmetoderne. Alligevel er der en væsentlig forskel i tilgang mellem Lagrange og Vandermonde. Førstnævnte anlægger en meget generel og algebraisk synsvinkel på problemet, hvilket sætter den aritmetiske tilgang lidt i baggrunden, hvorimod sidstnævnte med stor dygtighed udfører aritmetiske manipulationer, hvilket forøger muligheden for at bestemme forhold mellem koefficienter og rødders natur. [Nový, 1973, s. 27 og 36]

Lagrange og Vandermonde bidrager i denne sammenhæng indirekte til permutationsteorien, da de jo netop kigger på værdier af udtryk, hvor så mange permutationer som muligt i den symmetriske gruppe holder udtrykket invariant. I det hele taget er Lagranges og Vandermondes arbejde meget ens, dog er Lagranges langt mere konkluderende og omfattende. Vandermonde var dog den af dem, der nåede længst mht. løsningen af den cyklotomiske ligning, som ansås for særlig interessant af trigonometriske grunde. Dog var Gauss den der endegyldigt viste den algebraiske løsbarhed af den cyklotomisk ligning af vilkårlig grad. Vi har ikke i vores projekt ydet retfærdighed til den cyklotomiske ligning da den mest bidrager til bedre forståelse af de komplekse tal og gruppebegrebet, som ikke direkte er en del af vor problemafgrænsning i rapporten. Af samme grund har Gauss ikke fået spalteplads i projektet på trods af at mange senere matematikere inden for algebraisk ligningsløsning har fået stor indsigt vha. netop hans arbejder. [Nový, 1973, s. 38-39] og [Kline, 1972, s. 600]

Lagrange og Vandermonde følges også ad i den henseende at de opfinder en særlig notation for de udtryk i rødderne der holdes invariant under bestemte permutationer, dvs. Lagrange opfinder en notation som redegør for hvilke slags permutationer i den symmetriske gruppe der holder et udtryk i rødderne invariant, og Vandermonde opfinder en notation for symmetriske polynomier i rødderne samt en produktregel for to sådanne polynomier. Hos begge disse er der ligheder til Cauchys permutationer, men der er stadig nogen vej igen, da de som før nævnt behandler udtrykket i rødderne og ikke selve permutationen. [Vandermonde, 1770/1888, s. 35-41], [Nový, 1973, s. 40] og [Tignol, 1980/1988, s. 207-209]

Waring bruger også permutationer af rødder omend på et meget rudimentært plan og hans arbejde lægger ikke direkte op til nyudvikling, men han formår i høj grad at kapitalisere på allerede etablerede matematiske metoder og bevise nye sætninger. Der hvor Lagrange blot postulerer at et rationalt og symmetrisk udtryk i rødderne, $f(x_1, \ldots, x_n)$, kan udtrykkes rationalt i koefficienterne til den givne ligning, går Waring ind og konkret udtrykker ret komplicerede symmetriske udtryk i koefficienterne, hvilket må have krævet stor regnekunnen og kombinatorisk indsigt.

Især Lagranges arbejde har haft en enorm betydning for Abel og Galois som de også selv påpeger, og hele permutationsbetragtningen for at bestemme Galoisgruppen i moderne abstrakt algebra stammer fra netop Lagrange og Vandermonde.

Mht. den algebraiske løsning af femtegradsligningen, forekommer disse fire matematikere stadig ikke at have opgivet håbet. Det er svært at udtale sig præcist om Lagranges holdning på området. Vandermondes holdning formoder vi er positiv, idet han opskriver et udtryk for rødderne til en vilkårlig algebraisk n'tegradsligning. Warings holdning kender vi ikke, kun at han anser højeregradsligninger for værende så besværlige at han foreslår numeriske metoder. Malfatti derimod synes særdeles overbevist, hvilket dels fremgår af hans arbejde og dels, som vi skal se i næste kapitel, af hans respons til Ruffinis bevis for netop femtegradsligningens algebraiske uløselighed.

6 Ruffini, Cauchy og permutationerne

Som vi så i forrige kapitel, studerede matematikere som f.eks. Vandermonde og Lagrange permutationer af rødderne i et polynomium. Deres studium af permutationer var dog altid knyttet til en bestemt kontekst, nemlig den af polynomier, og deres notation var ikke altid lige bekvem. Ruffini anvendte permutationerne på en mere direkte vis, omend stadig i forbindelse med ligningsløsning, i sine afhandlinger (1799-1813). I Ruffinis bevis forekommer tilmed elementer af hvad vi idag vil betegne som gruppeteori. Med Cauchys afhandling fra 1815 blev der sat fokus på selve permutationerne[1], der blev udviklet 'regneregler' for disse, en mere sindrig notation og i det hele taget blev permutationsteorien i højere grad en selvstændig diciplin.

6.1 Ruffinis permutationsbegreb

Paolo Ruffini (1765-1822) blev født i Valentano (det nuværende Italien), hvor hans fader var læge. Da Paolo var teenager flyttede familien til Reggio, nær Modena i Emilia-Romagna regionen i det nordlige Italien. Her begyndte Ruffini i 1783 på universitetet i Modena, hvor han studerede matematik, medicin, filosofi og litteratur. I 1787-88 underviste Ruffini – på trods af at han stadig var studerende – i analysens grundlag ved universitetet, grundet en professors fravær. Den 9. juni 1788 bestod Ruffini med en grad i filosofi, en i medicin samt en grad i kirurgi. Snart herefter bestod han også med en grad i matematik. Ruffinis arbejde mht. analyseundervisningen må have været særdeles tilfredsstillende, for den 15. oktober 1788 blev han i alle fald udnævnt til professor i netop analysens grundlag. I 1791 modtog han igen en udnævnelse, denne gang til professor i 'matematikkens elementer', en stilling han overtog efter sin gamle professor i geometri. Ydermere fik Ruffini også sin licens til at praktisere medicin i 1791. Også Ruffini levede i en tid med krig, og selv om det var meget imod hans ønske, fandt han i 1796 sig selv i midten af en politisk konflikt, med Napoleon I's besættelse af Modena. Napoleon oprettede en republik, kaldet Cisalpine, beliggende i et område tilsvarende det nuværende Lombardiet og Emilia-Romagna. Ruffini blev i den anledning udpeget til repræsentant for denne republiks koncilium. Han forlod dog denne post i 1798 for at vende tilbage til universitetet i Modena, hvilket imidlertid blev en kort affære, da Ruffini ikke ville sværge den påkrævede troskabsed til republikken. Hermed mistede han sit professorat samt retten til at undervise. Ruffini lod imidlertid ikke til at lade sig påvirke af dette

[1] Ved opslag i *Mathematisches Wörterbuch* fra 1831 under 'Versetzungen' (permutation) gives hovedsageligt henvisning til Hindenburg. [Klügel, 1831, s. 767]

– at han ikke længere kunne undervise, gav ham blot mere tid til at praktisere medicin og tage sig af sine patienter. Ydermere gav det ham tid til at arbejde på et af matematikkens måske mest originale projekter, nemlig det at vise at den generelle femtegradsligning – og dermed ligninger af højere grad – ikke kan løses ved radikaler. Det kan diskuteres hvorvidt Ruffini var den første der overbeviste sig selv om femtegradsligningens algebraiske uløselighed eller ej. En mulighed er at Lagrange havde lugtet lunten, men det er svært at udtale sig sikkert om(jf. afsnit 5.4). [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XI, s. 598-599] og [Ayoub, 1980, s. 275-276]

Figur 6.1 Paolo Ruffini (1765-1822). [O'Connor & Robertson, 2002]

Ruffini publicerede sin sætning første gang i 1799 i sin lærebog *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto.* Desværre blev der blandt andre matematikere næsten ingen notits taget af dette arbejde, en undtagelse var Pietro Paoli, en italiensk professor i analyse ved universitetet i Pisa, hvis begejstring dog synes at være af en mere patriotisk karakter. Ruffini selv var en stor beundrer af Lagrange, og i 1801 sendte han derfor et eksemplar af sit værk til netop Lagrange, med ønsket om at Lagrange ville påpege hvis han havde fejlet i sit bevis. Lagrange svarede aldrig, og i 1802 sendte Ruffini endnu et eksemplar – men stadig intet svar. Ruffini udgav i disse år (1801 og 1802) nye afhandlinger omhandlende femtegradsligningens algebraiske uløselighed. Efter disse udgivelser modtog Ruffini i det mindste en kommentar fra Malfatti, men desværre havde denne ikke forstået Ruffinis argumenter og kom derfor med uretmæssige indvendinger. Malfattis mening var højst sandsynligt også farvet af at han selv et par år forinden havde udgivet, hvad han påstod var et bevis for at femtegradsligningen kunne løses. Ruffini forsatte dog at forfine sit bevis og udgav det igen i 1806 og 1813. Ud af disse fem versioner regnes det sidste bevis i *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali* fra 1813 for at indeholde i særdeleshed elegant matematik. [Burkhardt, 1892, s. 221-259], [Ayoub, 1980, s. 269] og [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XI s. 598-599]

Ruffinis liv var dog andet end blot hans håbløse kamp imod det etablerede matematikmiljø. Efter hans udgivelse i 1799 forlod han universitetet og underviste i de næste syv år i anvendt matematik ved et militærakademi i Modena. Han fortsatte med at praktisere medicin i samtlige af samfundets sociale lag. Efter Napoleon I's fald blev han i 1814 rektor ved universitetet i Modena, hvor han senere også kom til at besidde en stilling i medicin samt en i klinisk medicin. Under tyfusepidemien i 1817 fortsatte Ruffini med at behandle sine patienter, indtil han selv blev smittet med sygdommen. Han kom sig kun delvis oven på denne sygdom, hvorfor han opgav den ene af sine stillinger (klinisk medicin). Ruffini fortsatte imidlertid sit videnskabelige arbejde, og i 1820 udgav han en videnskabelig artikel om tyfus, baseret på hans egne erfaringer med sygdommen. Året efter døde han. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 598-599]

Udover det ovenfor nævnte publicerede Ruffini også filosofiske værker, hvori han bl.a. modsagde nogle af Laplaces filosofiske idéer. Ydermere skrev han om sandsynlighedsregning og anvendelsen af denne som evidens i retssale. Spørgsmålet om hvorfor det var Abel og ikke Ruffini, som fik æren for at have løst problemet angående femtegradsligningens algebraiske uløselighed, står dog stadig tilbage. Som svar på dette foreslår Ayoub

> [...] *the mathematical community was not ready to accept so revolutionary an idea: that a polynomial could not be solved by radicals. Then, too, the method of permutations was too exotic and, it must be conceded, Ruffini's early account is not easy to follow.* [Ayoub, 1980, s. 271-272]
>
> [...] *between 1800 and 1820, say, the mood of the mathematical community had changed from one attempting to solve the quintic to one proving its impossibility.* [Ayoub, 1980, s. 274]

Også hos f.eks. Kiernan ser vi den samme holdning

> [...] *they were unprepared to accept, and unable to understand, the new approach through theoretical and existential arguments. Thus the most frequent objection to the works of the new mathematicians was "vagueness".* [Kiernan, 1971, s. 59]

[*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XI, s. 598-599] og [Ayoub, 1980, s. 271-274]

6.1.1 Ruffinis brug af permutationer

Vi vil i dette afsnit ikke redegøre fuldstændigt for Ruffinis bevis eller dets eventuelle mangler, vi vil blot med udgangspunkt i vores egen problemstilling skitsere nogle af de biprodukter der opstod som følge af hans bevis. Som i citatet ovenfor antydet skulle Ruffinis arbejde ikke være umiddelbart tilgængeligt, og efter at have stiftet bekendtskab med kapitel XIII *Riflessioni intorno alla soluzione generale delle equazioni* i 1799 udgaven af *Teoria generale delle equazioni*[2] forholder vi os da også mere forståelige overfor denne pointe. Vi har derfor i nærværende gennemgang af Ruffinis arbejde valgt at støtte os til udlægninger som f.eks. dem der findes i Kiernan og Sørensen, hvorfor gennemgangen delvis vil foregå i en moderne terminologi. Vi vil dog undervejs forsøge at forholde os til Ruffinis egne formuleringer, hvor vi finder dette relevant.

Introduktionen til Ruffinis lærebog fra 1799 begynder således

> *La soluzione algebraica delle equazioni generali de grado superiore al quarto è sempre impossible. Ecco un teorema troppo importante nelle. Matematiche, che io credo, se pur non erro, di poter asserire, e de cui la dimostrazione quella si è, che principalmente mi ha spinto alla pubblicazione del presente volume. L'immortale de La Grange con le sublimi sue riflessioni intorno alle equazioni,* [...], *ha somministrato il fondamento alla mia dimostrazione* [...]. [[3]] [Ruffini, 1799/1915, s. 3]

Ruffini søger i sit værk, med udgangspunkt i Lagranges arbejde omhandlende funktioners $f(x_1, \ldots, x_n)$ opførsel ved permutation af variablene (rødderne), at bestemme samtlige sådanne permutationer af variablene som lader funktionerne invariante. Ruffinis permutationsbegreb er dog anderledes end det idag udbredte, men forstås ifølge Sørensen alligevel bedst ved brug af moderne termer: Hvis f er en given funktion i n variable forstår Ruffini med en *permutazione*[4] en mængde G af omarrangementer (nutidens permutationer) fra den symmetriske gruppe S_n, hvorom der gælder

$$\forall \sigma \in G: \quad f \circ \sigma = f,$$

for et givet f. Vi vil nedenfor referere til Ruffinis *permutazione* som permutationsgruppen[5] G til f. [Sørensen, 1999, s. 36] og [Burkhardt, 1892, s. 132]

Ruffini deler sine permutationsgrupper op i to hovedtyper; *simple* ('semplice') og *sammensatte* ('composte') permutationsgrupper. Med en simpel permutationsgruppe forstår han en mængde af permutationer som er frembragt ved potensopløftning af et enkelt element. Simple permutationsgrupper kan ifølge Ruffini være af to typer; enten er de potenser af en permutation som består af én cykel, eller også er de potenser af en permutation som er et produkt af flere cykler. Ruffini formulerer dette på følgende vis.

> *Chiamo permutazione semplice quella in cui le radici che la compongono devonsi muovere tutte simultaneamente dal loro luogo.* [...]

[2] Denne har vi fra første bind af Ruffinis *Opere*.

[3] *The algebraic solution of general equations of degree greater than four is always impossible. Behold a very important theorem which I believe I am able to assert (if I do not err): to present the proof of it is the main reason for publishing this volume. The immortal Lagrange with his sublime reflections, has provided the basis of my proof.* [O'Connor & Robertson, 2002]

[4] Burkhardt forklarer Ruffinis *permutazione* således: *Als 'einfache Permutationen' bezeichnet er Gruppen, welche (nach jetziger Ausdrucksweise) aus den Potenzen einer einzigen Substitution bestehen* [...]. [Burkhardt, 1892, s. 132]

[5] Fremover vil vi nøjes med at betegne denne som G.

> *Due genèri distingueremo di permutazioni semplici.*
>
> *Diremo del* secondo genere *quelle nelle quali, mentre alcune delle radici che le formano cambiansi fra di loro, altre si cambiano fra loro disgiuntamente dalle prime* [...].
>
> *Diremo poi permutazioni del* primo genere *quelle nelle quali non possono alcune delle radici cambiarsi fra loro separatamente dalle altre.* [Ruffini, 1799/1915, s. 161-162]

De sammensatte permutationsgrupper er frembragt af flere end en permutation og er derfor ikke-cykliske. Disse inddeles i to hovedtyper, som svarer til transitive og intransitive undergrupper.

Definition 6.1
En permutationsgruppe G kaldes intransitiv, *hvis der eksisterer to 'værdier' a og b i mængden af 'værdier' ved permutation af $f(x_1, \ldots, x_n)$ hvorom det gælder at*

$$\forall \sigma \in G: \ \sigma(a) \neq b,$$

og transitiv *hvis et sådant par (a, b) ikke eksisterer*[6].

De transitive permutationsgrupper kan være hhv. *primitive* eller *imprimitive.*

Definition 6.2
En transitiv gruppe G kaldes imprimitiv *såfremt der eksisterer en ikke-triviel delmængde H af de n rødder, hvis billede under enhver permutation σ i gruppen G er enten H selv eller disjunkt med H, dvs.*

$$\forall \sigma \in G: \ \sigma(H) = H \quad \vee \quad \sigma(H) \cap H = \emptyset,$$

og primitiv *hvis en sådan delmængde ikke eksisterer.*

Ruffinis formulering af denne inddeling lyder

> *Le permutazioni composte distinguonsi in tre generi.*
>
> > *Il* genere primo *comprende quelle nelle quali niuna delle radici esistenti in una qualunque delle permutazioni componenti può passare tra le radici, o nel luogo occupato dalle radici di un'altra.*
> >
> > *Il* secondo *abbraccia quelle nelle quali le radici di una permutazione componente possono passare tutte ad occupare il luogo già prima occupato dalle radici di un'altra, senza però che le radici della prima si framischino a quelle della seconda.*
> >
> > *Il* terzo *finalmente comprende le permutazioni, in cui le radici di una delle componenti possono passare a mescolarsi tra le radici di un'altra.* [Ruffini, 1799/1915, s. 163]

Sørensen anskueliggør Ruffinis inddeling i de ovennævnte fem typer ved et skema i stil med tabel 6.1. [Kiernan, 1971, s. 57] og [Sørensen, 1999, s. 36-37]

[6] Petersens formulering af denne definition lyder som følger: *'En Gruppe kaldes* transitiv, *dersom man ved dens Substitutioner kan bringe et hvilketsomhelst af Bogstaverne til at afløse et hvilketsomhelst af de andre; den kaldes derimod* intransitiv, *dersom dette ikke er Tilfældet'.* [Petersen, 1877, s. 282-283]

simple permutationsgrupper (*permutazioni semplici*)	•potenser af en cykel (*Il genere secondo*) •potenser af en ikke-cykel (*Il genere primo*)
sammensatte permutationsgrupper (*permutazioni composte*)	•intransitive (*Il genere primo*) •transitive, imprimitive (*Il genere secondo*) •transitive, primitive (*Il genere terzo*)

Tabel 6.1 Ruffinis klassifikation af permutationsgrupper [Sørensen, 1999, s. 37]. Med en ikke-cykel menes en permutation som er et produkt af flere cykler.

Efter at have klassificeret permutationsgrupperne går Ruffini igang med sit bevis. Vi vil her blot gennemgå et par af elementerne i dette bevis. Ruffini viser at der for den generelle femtegradsligning ikke eksisterer nogen resolvent af mindre grad end 5. Mere præcist viser han at der ikke eksisterer et rationalt udtryk i de n objekter som kun antager 3, 4 eller 8 værdier under permutationerne af de n rødder når $n > 4$. Til dette benytter Ruffini Lagranges resultat; antallet af forskellige værdier som et udtryk i n variable kan antage er en divisor i $n!$. Ruffinis idé er at bestemme hvilke divisorer af $n!$ der i dette tilfælde er mulige – altså hvilke grader femtegradsligningens resolvent ifølge Langranges proposition 5.4.1 kan antage. Til dette formål definerer han graden af ækvivalens, *grado de uguaglianza*, af en funktion f i de n rødder af en ligning, som antallet af de forskellige permutationer der ikke ændrer f; altså antallet af permutationer i permutationsgruppen til f. Med Ruffinis egne ord lyder denne definition som følger:

> [...] *se questi risultati fra loro uguali sono di numero p,* [...]. *Chiameremo questo numero p* il grado di uguaglianza *della nostra funzione.* [Ruffini, 1799/1915, s. 164]

Hvis p betegner graden af ækvivalens, haves således ifølge Lagranges resultat at p er en divisor i $n!$, og at $n!/p$ er antallet af forskellige værdier af f. Med udgangspunkt i dette bestemmer Ruffini de mulige værdier af p for alle de fem typer af permutationsgrupper (jf. tabel 6.1) ved omstændelige udregninger, og han viser at værdien af p ikke kan være et multiplum af 5. Dvs. at for femtegradsligningen, $n = 5$, haves

$$\frac{n!}{p} = 5k,$$

hvor $k \in \mathrm{N}$, altså $n!/p \geq 5$, og ifølge proposition 5.4.1 er resolventen således mindst en femtegradsligning. [Kiernan, 1971, s. 57-58], [Wussing, 1969, s. 57] og [Sørensen, 1999, s. 37]

Ruffini antager uden bevis at et hvilket som helst algebraisk udtryk indeholdt i en antaget løsning kan udtrykkes rationalt i rødderne af ligningen og n'te enhedsrødderne[7]. En mulighed er at udtrykket f giver en resolvent som er en

[7]Det er denne antagelse uden bevis som er 'hullet' i Ruffinis bevis af femtegradsligningens algebraiske uløselighed og som først vises af Abel i ca. 1824.

ren femtegradsligning

$$z^5 - r = 0.$$

Lad os sige at $(f_1, \ldots, f_{120})$ er værdierne af f under permutation af rødderne $x_1, \ldots, x_5$. Ruffini undersøger alle disse og observerer at enten er alle f_i'er ens (hvilket kan udlukkes da $z^5 - r = 0$ i hvert fald har fem forskellige rødder), eller at f antager fem forskellige værdier. Er det sidste tilfældet viser Ruffini at r ikke er rational i rødderne, hvilket er i modstrid med hans ovenstående korrekte antagelse. [Kiernan, 1971, s. 58-59]

For en mere indgående gennemgang af Ruffinis bevis henvises til [Burkhardt, 1892], [Pierpont, 1896] samt [Skau, 1990][8].

Historien om Ruffinis kamp for at få anerkendt sit bevis for femtegradsligningens algebraiske uløselighed må siges at være lidt af en matematisk tragedie. Det er svært at lade være at tænke, at havde en eller anden matematiker dog blot skrevet til ham og gjort ham opmærksom på bevisets mangler, havde han i det mindste haft chancen for at rette den. Men måske var sandheden i virkeligheden den at datidens matematikmiljø ikke rigtig ville indse uløseligheden af femtegradsligningen. En af de eneste som tog en interesse i Ruffinis arbejde var ironisk nok Cauchy, da han ellers var kendt for at være en af de værste matematikere mht. det at give andre kredit og anerkendelse (jf. afsnit 6.2). Han skrev til Ruffini i 1821, mindre end et år før Ruffinis død,

> *Your memoir on the general solution of equations is a work that has always seemed to me worthy of the attention of matematicians and one that, in my opinion, demonstrates completely the impossibility of solving algebraically equations of higher than the fourth degree.* [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XI, s. 598]

Cauchy var inspireret af Ruffini, og i sit værk om permutationer fra 1815 generaliserer han da også netop nogle af Ruffinis resultater, samtidig med at han præsenterer en helt ny notationsform. Dette er måske den eneste måde, hvorpå Ruffinis arbejde kom til at spille en rolle i udviklingen af matematikken. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. XI, s. 598-599]

6.2 Cauchys permutationsteori

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) blev født i Paris, men grundet urolighederne vedrørende revolutionen flyttede faderen i 1793 familien til Arcueil. Her levede familien under yderst fattige kår, og de rejste snart tilbage til Paris. Cauchys fader var en aktiv deltager i den unge Augustin Louis' uddannelse. Både Laplace og Lagrange var gæster i Cauchy-familiens hjem, og det lader til at specielt Lagrange var interesset i den unge Cauchys matematiske uddannelse. Lagrange rådede faderen til at sørge for at sønnen fik en god grunduddannelse i de klassiske sprog inden påbegyndelsen af et større matematikstudium. Derfor begyndte

[8] I Skaus udlægning af Ruffinis bevis benyttes bl.a. at en 3-cykel kan skrives som produkt af to 5-cykler, og at en 5-cykel kan skrives som produktet af to 3-cykler, hvilket også må siges at være noget af en permutationsbetragtning. [Skau, 1990, s. 75]

Augustin Louis i 1802 ved Ecole Centrale du Panthéon, hvor han tilbragte to år med et sådant studium. Efter eksamen herfra fulgte Cauchy lektioner i matematik, og i 1805 tog han adgangseksamen til Ecole Polytechnique, som han bestod med glans. To år efter, i 1807, bestod Cauchy fra Ecole Polytechnique og indmeldte sig på ingeniørskolen Ecole des Ponts et Chaussées. Cauchy var her en eminent studerende, og grundet sit praktiske arbejde fik han tildelt en plads ved Ourcq-kanal projektet, hvor han arbejdede under Pierre Girard. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 131-146] og [Bell, 1944, s. 255-281]

I 1810 tog Cauchy sit første rigtige job i Cherbourg, hvor han arbejdede med havnefaciliteterne for Napoleon I's engelske invasionsflåde. Dette var en travl tid for Cauchy, men med sig havde han dog et eksemplar af Laplaces *Méchanique Céleste* samt et af Lagranges *Thèorie des Fonctions*, og få matematikstudier blev det alligevel til. I 1811 beviste Cauchy at vinklerne af en konveks polyhedron er bestemt af dens flader. Efter udgivelsen af dette resultat blev han opfordret af bl.a. Legendre til at fortsætte dette studium, og i 1812 udgav han endnu et arbejde omhandlende polygoner og polyedre. På baggrund af dette følte Cauchy at han måtte returnere til Paris, hvis han skulle fortsætte sit matematiske arbejde, så det gjorde han i september 1812. I november samme år havde Cauchy et arbejde færdigt omhandlende symmetriske funktioner, men dette blev dog ikke udgivet førend i 1815. Cauchy forsøgte hårdt at undgå tilbagevenden til Cherbourg, – hvilket ellers var meningen – og måtte herfor optage sit gamle arbejde på Ourcq-kanal projektet. Cauchy forsøgte i de følgende år at opnå en stilling ved en af de parisiske læreanstalter, og i 1816 lykkedes det ham med sin ansættelse ved Académie des Sciences. Cauchy havde dog ikke ligget på den lade side i de fire forgangne år, han havde bl.a. i 1814 udgivet et memoir om bestemte integraler, som senere kom til at lægge grundlaget for hans studium af komplekse funktioner. I 1816 vandt han prisopgaven ved Académie des Sciences for hans arbejde om bølger. Men virkelig berømmelse opnåede han da han indgav et arbejde til akademiet, hvori han beviste en af Fermats påstande til Mersenne omhandlende polyedertal. I 1817 fik Cauchy en stilling ved Collège de France. Her gav han forelæsninger om integrationsmetoder, som han tidligere havde opdaget men ikke udgivet. I de følgende år arbejdede Cauchy med de grundlæggende dele af analysen. Han gav sin definition af et integral og var den første som lavede en streng undersøgelse af betingelserne for konvergens af uendelige rækker. I 1821 udkom *Cours d'analyse*, et rigoristisk baseret undervisningsmateriale omhandlende udledningen af analysens grundlæggende sætninger. Af andre arbejder fra denne tid kan nævnes *Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinétesimal* fra 1826 samt *Leçons sur le calcul différential* fra 1829, hvor Cauchy for første gang definerer en kompleks funktion af en kompleks variabel. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 131-146]

Cauchy var hele sit liv igennem en ivrig katolik – og senere en støtte af jesuitterne – hvilket ofte medførte problemer i hans arbejde, da han ville lade sin religiøse overbevisning influere på sin videnskabelige dømmekraft. Også hans forhold til kollegaerne var ofte anspændt, ikke mindst fordi han havde ry for at være stolt, arrogant og selvhøjtidelig. Cauchys behandling og forhaling af både Abels og Galois' arbejder[9] var yderst uheldigt og vil nok aldrig blive ham tilgivet. Abel skrev om sit møde med Cauchy i 1826

[9]Abels arbejde om uløseligheden af femtegradsligningen og Galois' arbejde omhandlende

Figur 6.2 Augustin Louis Cauchy (1789-1857). [O'Connor & Robertson, 2002]

Cauchy is mad and there is nothing that can be done about him, although, right now, he is the only one who knows how mathematics should be done. [O'Connor & Robertson, 2002]

Især Legendre protesterede mod Cauchys behandling af Abels arbejde, og først to måneder efter Abels død[10] – tre år forsinket – fremlagde Cauchy sin iøvrigt forhastede og overfladiske rapport. Mht. Galois' arbejder formåede Cauchy helt at forlægge disse. Cauchy besluttede sig i 1830 til at tage væk fra Paris og tilbragte de næste otte år i hhv. Schweiz, Torino og Prag. I 1838 vendte Cauchy tilbage til Paris og i 1839 opnåede han en stilling ved Bureau des Longitudes, hvor han fra 1840-47 udgav det yderst vigtige 4-binds værk *Exercises d'analyse et de physique mathematique.* Med Louis Philippes død i 1848 genvandt Cauchy sin universitetsstatus – tidligere havde han nægtet at sværge den obligatoriske troskabsed til kongen. Kl. 3:30 den 23 maj 1857 døde Cauchy i sit hjem i Sceaux, nær Paris. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 131-146]

Cauchy producerede i sin levetid det formidable antal af 789 matematiske arbejder og har fået adskillige matematiske termer opkaldt efter sig, f.eks. en Cauchyfølge, Cauchys middelværdisætning, Cauchy-produkt og Cauchy-Kovalevskajas sætning. Hans samlede værker, *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (1882-1981), blev udgivet i 27 bind. Vi skal imidlertid her koncentrere os om artiklen *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme* fra 1815. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80, vol. III, s. 131-146]

hvilke klasser af ligninger der kan løses algebraisk. For yderligere information om dette jf. for eksempel [Sørensen, 1999] samt [van der Waerden, 1985].

[10]Abel døde i april 1829 i en alder af 27 år.

6.2.1 Cauchys artikel fra 1815

Cauchy skriver i sin indledning:

> *Je vais exposer dans ce mémoire ce qu'on avait déja trouvé de plus important sur cet objet, et ce que mes propres recherches m'ont permis d'y ajouter. J'examinerai plus particulièrement le cas où le nombres des valeurs d'une fonction est supposé plus petit que le nombre des lettres, parce que les fonctions de cette nature sont celles dont la connaissance est la plus utile en analyse.* [Cauchy, 1815, s. 2]

Cauchys primære formål med denne artikel er at bevise følgende sætning.

Sætning 6.1
Antallet af forskellige værdier, R, som et ikke-symmetrisk udtryk, K, i n ubekendte antager, kan ikke være mindre end det største primtal p som ikke overstiger n, med mindre $R = 2$.

Cauchy deler beviset for denne sætning op i beviserne af de følgende tre propositioner

1. Hvis $R < p$, så vil enhver værdi[11] af K ikke kunne ændres ved en permutation[12] af orden p.
2. Hvis en værdi K er invariant ved en permutation af orden p, så forbliver den uændret under enhver 3-cykel[13].
3. Hvis en værdi K er invariant under enhver 3-cykel, så er K enten symmetrisk i dets variable eller antager præcis to værdier under samtlige permutationer.

Cauchy pointerer at dette er en generalisering af et af Ruffinis resultater; umuligheden af at have et udtryk i fem eller flere variable som antager netop tre eller fire forskellige værdier. Vi vil ikke gennemgå beviset for sætningen her, en gennemgang af det kan findes i [Kiernan, 1971, s. 65-66], istedet vil vi koncentrere os om biprodukterne til beviset; bidrag til den idag kendte permutationsteori. [Cauchy, 1815, s. 9] og [Kiernan, 1971, s. 64]

Cauchy bevæger sig i sin artikel ud over permutationers tilknytning til ligningsløsningsteorien, og nævner kun i forbifarten at variablene kan anses som værende rødder i et eller andet polynomium. Hans egen motivation, påpeger han, for sit studium af permutationer stammer fra talteorien, som han så har sammenkædet med Ruffinis arbejde. Bemærkelsesværdigt er det ligeledes at Cauchy i sit bevis af ovenstående sætning introducerer begreber og notationer som stadig benyttes i moderne terminologi. F.eks. benytter han to-rækkersnotationen for en permutation, hvilket han er den første der gør; en sådan findes hverken hos Lagrange eller Ruffini. Tager vi f.eks. de fire objekter $1, 2, 4, 3$ i given rækkefølge, og lader

[11]Med værdi menes 'som sædvanlig' udtrykkets formelle 'udseende'.
[12]Ved permutation menes det som Cauchy kalder en substitution (jf. senere).
[13]Cauchy brugte ikke udtrykket 3-cykel, men derimod: En cyklisk substitution af orden tre.

$2, 4, 3, 1$ være permutationen af disse, så etablerer Cauchy for denne permutation 'loven'

$$1 \mapsto 2, \qquad 2 \mapsto 4, \qquad 4 \mapsto 3, \qquad 3 \mapsto 1.$$

Dette er den samme lov som man også benytter for permutationer idag, nemlig en bijektiv afbildning af mængden $\{1, 2, \ldots, n\}$ på sig selv. Cauchy kalder denne lov for en *substitution* – altså det der for os er en permutation – og han skriver den som[14]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Altså er en substitution en to-liniers notation; øverste linie er objekternes oprindelige rækkefølge, og nederste linie er billederne af objekterne. Med en *permutation* mener han derimod en en-linies notation; dvs. rækkefølgen af objekterne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, f.eks. som før $2, 4, 3, 1$. Cauchy er dog udemærket klar over at rækkefølgen, hvori de fire objekter bliver omarrangeret ikke har nogen betydning for hans definition af en permutation (en permutation af n objekter kan således opskrives på $n!$ forskellige måder). F.eks. gælder at

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cauchy begrænser sig dog ikke til kun fire objekter, men forsøger at håndtere et vilkårligt antal objekter, men selv om han foreslår en generel notation:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & l \\ \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

for en vilkårlig permutation, er det klart at dette 'billede' kun er praktisk for et mindre antal af objekter. Selv benytter han derfor den forkortede notation

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

hvor A_1 og A_2 er vilkårlige permutationer af de pågældende objekter. [Cauchy, 1815, s. 1-10] og [Dieudonné, 1987/1992, s. 115-116]

I relation til ovenstående redegørelse af Cauchys arbejde skal det påpeges, som eksempelvis sætning 6.1 antyder, at Cauchys abstraktionsniveau ikke er mere vidtløftigt end at han tog udgangspunkt i netop et udtryk i n variable samt hvilke egenskaber dette måtte have under den symmetriske gruppe S_n. Dette er ikke meget forskelligt fra f.eks. Lagranges tilgang, men Cauchy indser altså at det essentielle i udtrykket er variablenes indbyrdes placering, hvorfor udtrykket udemærket kan erstattes af en 'pladsholder' – det han kalder en permutation, og det er netop disse og ikke udtrykkene selv som Cauchy grupperer i forhold til visse egenskaber. Derved tager Cauchy et stort skridt fremad i udviklingen af den generelle permutations- og gruppeteori, da han ligeledes har udviklet regneregler for disse.

Cauchys måske vigtigste bidrag er sammensætningen (*le produit*) af to permutationer. Ved sammensætningen $\binom{A_2}{A_3}\binom{A_4}{A_5}$ skal forstås den substitution der

[14]Cauchy benyttede punktum og ikke mellemrum mellem objekterne, hvorfor han f. eks. skriver (1 2 4 3) som (1.2.4.3).

fremkommer ved først at foretage substitutionen $\binom{A_2}{A_3}$ og derefter $\binom{A_4}{A_5}$. Han definerer at $\binom{A_2}{A_3}\binom{A_4}{A_5}$ anvendt på A_1 giver en ny 'permutation' A_6, med samme resultat som når A_6 anvendes på A_1. Altså

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_4 \\ A_5 \end{pmatrix}.$$

[Cauchy, 1815, s. 10] og [Dieudonné, 1987/1992, s. 115-116]

Lad os illustere dette med et eksempel. Vi vælger A_1 og A_2 ligesom Cauchy gør, A_3, A_4 og A_5 vælger vi selv, da Cauchy ikke giver eksempler på disse. Lad os f.eks. antage at vi har følgende 'permutationer'

$$\begin{aligned} A_1 &= (1\ 2\ 4\ 3) \\ A_2 &= (2\ 4\ 3\ 1) \\ A_3 &= (4\ 3\ 2\ 1) \\ A_4 &= (3\ 4\ 1\ 2) \\ A_5 &= (4\ 1\ 2\ 3). \end{aligned}$$

Vi har nu at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Når (6.1) anvendes på A_1 får vi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

som vi altså døber A_6;

$$A_6 = (2\ 1\ 4\ 3).$$

Ligeledes har vi at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

hvorfor vi altså, i overenstemmelse med Cauchy, har at (6.1) er lig (6.2).

Cauchy genkender også identitetspermutationen som en permutation, han skriver

> *Une substitution* identique *est celle dont les deux termes sont égaux entre eux. Les substitutions*
>
> $$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_N \\ A_N \end{pmatrix}$$
>
> *sont toutes identiques.* [Cauchy, 1815, s. 10]

Dernæst ser Cauchy på sammensætningen af flere permutationer. Han observerer at to nabopermutationer opererer succestivt,

> *Je dirai que deux substitutions sont* contiguës, *lorsque le second terme de la première sera égal au premier terme de la seconde.* [Cauchy, 1815, s. 10]

For eksempel er

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

hvorfor han får at der generelt gælder at

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix}.$$

Cauchy bringer nu begrebet *potensen* af en permutation på banen, ved at sige at

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^r.$$

Altså at $\binom{A_1}{A_2}$ sammensat med de $r-1$ på hinanden følgende nabopermutationer giver $\binom{A_1}{A_r}$. [Cauchy, 1815, s. 11]

Cauchy viser at der altid findes et naturligt tal N så at[15]

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_t \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix},$$

og betegner herefter det mindste N som graden (*degré*) af substitutionen. Han definerer også en cyklisk permutation[16], dennes potenser samt en transposition[17]. [Cauchy, 1815, s. 10-18], [Dieudonné, 1987/1992, s. 117] og [Nový, 1973, s. 207-208]

Afslutningsvis vil vi pointere vigtigheden af Cauchys konceptudvikling af permutationen som en selvstændig disciplin og ikke kun som et virkemiddel på et udtryk i flere variable. Med dette fulgte regneregler så som sammensætning og potensopløftning af permutationer som i forhold til tidligere notationsformers kunnen medførte klart nemmere beregninger, og man kan ikke overvurdere disse værktøjers betydning for udviklingen af f.eks. Galoisteorien.

[15]Med notationen $\binom{A_1}{A_t}^N$ skal forstås sammensætningen af N substitutioner lig substitutionen $\binom{A_1}{A_t}$.

[16]Cauchy bruger dog ikke samme notation for cykliske permutationer, som den vi kender i dag. Han opskriver permutationer omkring en cirkel, for at illustrere at de er cykliske. Jf. f.eks. [Cauchy, 1815, s. 12].

[17]Transpositioner benytter han for eksempel i tredje del af beviset for sætning 6.1. [Cauchy, 1815, s. 18]

6.3 Afrunding

Med Ruffini og Cauchy bliver der sat et helt andet fokus på permutationerne, og man skal således ikke længere lede med lys og lygte efter (skjulte) permutations- og kombinationsbetragtninger. Måden hvorpå Ruffini og Cauchy indfører deres permutationer er dog vidt forskellige. Cauchys permutationer, altså substitutionerne, svarer til vore dages permutationer, hvorimod Ruffinis permutationer, 'permutazioni', svarer til hvad vi idag vil betegne som en stabilisator G_f af f, dvs.

$$G_f = \{g \in G \mid g(f) = f\}.$$

Karakteriseringen af disse undergrupper G_{f_i} i forskellige typer er alle meget grundigt behandlet hos Ruffini. Dette er ikke det eneste 'forklædte' element fra gruppeteorien i Ruffinis arbejde, også hans 'grad af ækvivalens' kan oversættes til et moderne gruppebegreb, nemlig det af indexet (eller ordnen af en permutationsgruppe).

Definition 6.3
Lad G være en endelig gruppe og lad H være en undergruppe af G. Da kaldes antallet af forskellige venstre-sideklasser af H i G for indexet, *og skrives som $|G : H|$, dvs.*

$$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}.$$

[Biggs, 1989, s. 290]

Man kan således argumentere for at Ruffini i sit arbejde benytter sig af vore dages gruppeteori, eller i alt fald elementer af denne. Ruffini havde selvfølgelig ikke denne teori til sin rådighed, hvorfor han selv måtte opfinde hvad han behøvede. Ruffini er således den første der introducerer hvad der svarer til stabilisatoren, indexet, cykelopløsningen af en permutation (permutationsgruppe), primitive og imprimitive permutationer. Derudover viser han at S_5 ikke indeholder nogen undergrupper af index 3 eller 4.

Som nævnt i teksten indfører Cauchy også en masse af de begreber som man idag benytter indenfor permutations- og dermed gruppeteorien. Her tænker vi bl.a. på en permutation defineret som en bijektiv afbildning af n elementer på sig selv, toliniers notationen af denne permutation, sammensætningen af to permutationer, identiteten af en permutation, ordnen af en permutation, en cyklisk permutation samt dennes potens og sidst men ikke mindst en transposition.

Nok regnes gruppeteoriens begyndelse for at have fundet sted med Lagrange, men det er først med Ruffini og Cauchy at man for alvor begynder at genkende samlede brudstykker af teorien i den form den har idag. Både Ruffini og Cauchy var dog bekendte med Lagranges værk fra 1770-71 og bygger således videre på teorier udviklet i dette, og i særdeleshed Ruffini har, som han selv påpeger, været inspireret af Lagrange. Men mest fascinerende er det alligevel at de begge (eller alle tre) har frembragt så vægtige resultater uden på nogen måde at have haft kendskab til det gruppebegreb som vi idag tager for givet.

Også eksempler på brugen af invarians og symmetri kan findes i teksterne. Hos Ruffini har vi tilfældet med en transitiv imprimitiv gruppe indeholdende del-mængden H, hvorom det gælder at den kan være invariant overfor en permutation $\sigma \in G$; $\sigma(H) = H$. Hos Cauchy har vi underinddelingen af sætning 6.1 i de tre propostioner, i hvis formuleringer der indgår såvel udtryk der er invariante overfor permutationer som udtryk der er symmetriske i deres variable, samtidig med at der i selve sætningen (sætning 6.1) optræder udtrykket K, som er ikke-symmetriske i de n ubekendte.

Cauchys to-liniers substitutionsbegreb lider som tidligere påpeget bl.a. af ikke at være entydigt. Derimod må man formode at denne opskrivning for fremtidige matematikere har haft den fordel at gruppestrukturen, dvs. aksiomerne om lukkethed, associativitet samt eksistens af et inverst element og identiteten, har været mere åbenlys end hvis Cauchy i et hug havde opfundet cykelnotationen.

Med Cauchys artikel er det som tidligere nævnt ikke længere selve ligningsløsningen der er i højsædet men derimod permutationerne (substitutionerne), og det er med udgangspunkt i disse at Cauchy udleder alle sine resultater og indfører sine notationer. Således giver Cauchy abstraktionsniveauet endnu et nøk opad, idet han i en mere generel kontekst (den af permutationer) udleder resultater og sætninger som han dernæst anvender på de algebraiske udtryk, f.eks. betragtes de n objekter som permuteres ikke som rødderne i et polynomium. Cauchys arbejde om permutationer er i den næste lange periode[18] enkeltstående, og således en uundgåelig kilde til inspiration for den næste generations matematikere, såsom Abel og Galois.

[18]Cauchy udgiver ikke selv noget nyt omhandlende permutationer førend i 1844, hvor han vender tilbage til sit 1815-arbejde og videreudvikler dette. [Nový, 1973, s. 207]

7 Opsamling og diskussion

Med udgangspunkt i de fire foregående kapitler, vores løbende diskussion i disse samt hvert kapitels afrunding vil vi nu diskutere dels hvor der forefindes permutationer, kombinationer og invarians, dels disses betydning for udviklingen af den algebraiske ligningsløsningsteori i denne periode (jf. afsnit 7.1). Ydermere vil vi diskutere anden del af vores problemformulering, nemlig i hvilken udstrækning der i de omtalte matematikeres værker har fundet en konceptudvikling sted, samt i hvilken grad de selv har været opmærksomme på tilstedeværelsen af en sådan (jf. afsnit 7.2).

Vi vil i dette kapitel også bringe en diskussion af den til projektet benyttede litteratur, altså både primær- og sekundærlitteratur (jf. afsnit 7.3). Vi vil her diskutere forståeligheden af den primære litteratur samt eventuelle oversættelser af denne. Mht. sekundærlitteraturen vil vi, med udgangspunkt i projektets diskurs, diskutere anvendeligheden af denne og i hvilken grad den har været os behjælpelig i projektskrivningen, samt eventuelle mangler den set ud fra vores synspunkt måtte have.

7.1 Problemformuleringens første del

Oprindeligt havde vi forestillet os at vi i forbindelse med besvarelsen af problemformuleringens første del ville kunne danne os et klart billede af, hvordan de tre implicerede begreber kombinationer, permutationer og invarians indenfor den algebraiske ligningsløsning havde udviklet sig op igennem tiden. Vi fandt imidlertid at udviklingen af disse begreber ikke kan beskrives som værende en kontinuert proces, den er som sådan mere sporadisk. F.eks. er udviklingen af kombinationsbegrebet en i særdeleshed spredt affære, hvilket et opslag under 'Combination' i Krügels *Mathematisches Wörterbuch* fra 1805 da også viser. Udviklingen af kombinationer[1] finder sted inden for så forskellige discipliner som lykkespil, forsikring, kryptering, musik m.fl., hvilket rækker langt ud over vores problemfelt. [Klügel, 1805, s. 440-511]

Nový peger som grund til denne sporaditet i udviklingen af den algebraiske ligningsløsning på det faktum, at der i denne periode ikke er en tilstrækkelig stor udgivelse af mindre afhandlinger indenfor deciderede specialiserede områder af matematikken, til at give det kontinuerte 'flow' som vi f.eks. kender idag. Samtidig, skriver han, er det også kun i et fåtal af de udgivede arbejder der forsøger at løse generelle problemer, eller i det hele taget på at formulere disse [Nový, 1973, s. 3-4]. Han fortsætter

[1] Under 'Combinatorische Analysis' i Klügels værk henvises igen til Prof. Hindenburg. [Klügel, 1803, s. 475]

> *Moreover, in mathematical literature, as opposed to other sciences, general concepts which are to be fittet by the investigated terms are rarely formulated; it is more a case of creating a framework against a silently accepted background. To what extent a special treatise agrees with prevailing ideas can only be determined with difficulty and, therefore, represents an important methodological problem for mathematical historians.* [Nový, 1973, s. 4]

På baggrund af den i projektet allerede løbende diskussion, vil vi i det følgende søge at samle op på vores besvarelse af første del af problemformuleringen ved for hver af de pågældende matematikere at give vores bud på, i hvilken udstrækning de tre begreber kombinationer, permutationer og invarians optræder i deres arbejder.

7.1.1 *Ars Magna*

Vi kan ikke se nogen tydelig indikation på at Cardano benytter kombinations-, permutations- eller symmetribetragtninger ved løsningen af tredje- og fjerdegradsligningen. Man kan dog hævde, selv om det måske er lidt søgt, at han med sit udtryk $x = u - v$ er tæt på et symmetrisk udtryk, dvs. hvis han havde udskiftet $-$ med $+$. Som set i afsnit 2.2 giver udtrykket $x = u + v$ nemlig anledning til brug af Viète-relationerne i deres simpleste form. Cardano gør dog brug af substitutioner som hjælpemiddel til løsningen og er måske en af de første der substituerer én variabel med to, hvilket man umiddelbart ville formode gjorde problemet mere kompliceret. Efter vores mening, er netop denne substitution Cardanos store bidrag til ligningsløsningen, i og med at den er af betydning for hans efterfølgeres arbejder.

7.1.2 Viète og Girard

Viète og Girard lægger med deres opdagelse af, at koefficienterne i en ligning kan udtrykkes symmetrisk i rødderne, fundamentet for symmetribetragtninger i polynomier samt hovedsætningen for symmetriske polynomier.

De elementære symmetriske polynomier er invariante udtryk i rødderne, men betydningen af dette mener vi ikke at hverken Viète eller Girard har været opmærksomme på, idet de ikke permuterer rødderne i disse udtryk. Derimod må Girard helt klart have gennemskuet de specielle (kombinatoriske) træk ved opskrivningen af de elementære symmetriske polynomier, mens Viète må have gennemskuet de samme træk ved sine udtryk, dog uden at have set det generelle ved disse, idet han ikke medtager alle rødderne. Også i Viètes binomialudvikling af $(A + B)^n$ ses tydeligt brugen af kombinationsbetragtninger.

7.1.3 Tschirnhaus, Bezout og Euler

Hos Tschirnhaus og Bezout ser man brugen af elimination af én variabel, til bestemmelse af resultanten til polynomierne P og Q. Da determinanten som sagt ikke var 'opdaget', må udregningen af den resulterende ligning (resultanten) have krævet eksplicit brug af en kombinatorisk baseret regnemetode, men hvor bevidste Tschinhaus og Bezout var om deres brug af kombinationer ved vi ikke, idet vi som sagt ikke har været i besiddelse af deres originale arbejder. Der forekommer os hverken hos Tschirnhaus eller Bezout at være nogen overvejelser angående invarians.

Hos både Bezout og Euler ses hvad vi tidligere har omtalt som de 'indre symmetrier', nemlig formen af rødderne til n'tegradsligningen, som for Bezouts vedkommende fremkommer som et biprodukt af hans metode. Euler gør sig dog også visse overvejelser angående kombinationer i henhold til sin metode til løsning af fjerdegradsligningen, hvor han f.eks. finder de resterende rødder ved at tillade alle mulige fortegnskombinationer.

7.1.4 Waring

Waring beviser, ligesom Vandermonde også senere gør det, hovedsætningen for symmetriske polynomier, og han opskriver ligeledes en direkte (i modsætning til Newtons rekursive) formel til at opskrive potenssummer af rødderne i en given ligning, udtrykt i koefficienterne til den givne ligning. Waring skriver i sit arbejde komplicerede symmetriske udtryk op i rødderne, og demonstrerer sine veludviklede regnefærdigheder ved at udtrykke dem i de (symmetriske) koefficienter til ligningen. Som tidligere i projektet påpeget kræves der for sådanne udregninger en vis kombinatorisk snilde.

7.1.5 Malfatti, Vandermonde og Lagrange

Malfatti gør brug af de såkaldte 'indre symmetrier', dvs. Eulers (og for den sags skyld også Bezouts) form af rødderne til en n'tegradsligning. I sin metode til løsning af femtegradsligningen når Malfatti frem til en sjettegradsligning i z som er at sammenligne med Lagranges resolvent for femtegradsligningen. I kraft af at Malfatti således, ligesom Lagrange, betragter denne resolvent må man formode at han har gjort sig visse invariansbetragtninger, eller i alt fald hvad der svarer til. I van der Waerdens udlægning af Malfattis metode er de beregningstekniske færdigheder dog det eneste vi synes at spore.

Både Lagrange og Vandermonde kigger på permutationer af udtryk i den oprindelige lignings rødder som rødder i en hjælpeligning, altså resolventen, og begge peger de på Lagrange-resolvente som 'ideelle' rødder til resolventen. Idet de begge finder at graden af hjælpeligningen er bestemt ved antallet af værdier som et rationalt udtryk i rødderne antager ved permutationer af rødderne, må det siges at der helt klart bag disse observationer må ligge en bevidsthed om permutationer samt invariante udtryk. I forbindelse med opskrivningen af 'værdierne' af udtrykkene indgår også helt klart kombinationsovervejelser.

Det er først rigtigt med Lagrange og Vandermonde at permutations- og invariansbetragtninger bliver en etableret del af den algebraiske ligningsløsningsteori. Deres, om vi så må sige, genistreg er at de projicerer den gamle (alkymistiske) kombinationstanke over på udtryk i rødderne og indser at det netop er sådanne udtryk samt deres værdier ved samtlige permutationer, der er ligningsløsningens 'metafysik'.

7.1.6 Ruffini og Cauchy

Hos Ruffini og Cauchy kommer selve permutationerne i højere grad end nogensinde før i centrum. Ruffinis 'permutazione' er ikke det idag anvendte, det svarer derimod til det vi kender som stabilisatoren, men Cauchys substitution er præcis det samme som en permutation er for os idag, nemlig en bijektiv afbildning af n elementer på sig selv.

I Ruffinis arbejde indgår også invariansbetragtninger, i og med at hele hans idè med at betragte permutationsgrupper er opbygget omkring disse; alle de permutationer hvorunder et udtryk er invariant udgør permutationsgruppen til dette udtryk. Samtidig indgår der også invariansbetragtninger i forbindelse med hans definition af en transitiv imprimitiv permutationsgruppe. Også i Cauchys arbejde indgår invariante udtryk, dels i den sætning han viser og dels i de propositioner han opdeler sætningen i. Både Ruffini og Cauchy bygger på værkerne af Lagrange og Vandermonde, men de giver problemstillingen en ny drejning. Hvor Lagrange så på samtlige (formelle) værdier af et udtryk under S_n ser de på samtlige permutationer som holder udtrykket invariant.

Der er således ingen tvivl om at de af os eftersøgte tre begreber forefindes hos Ruffini og Cauchy i stor stil. Ej heller mener vi at det er for meget sagt at disse to herrer med deres arbejder er med til at lægge fundamentet for vore dages abstrakte algebra.

7.2 Problemformuleringens anden del

Som nævnt i indledningen kan vi selvfølgelig kun besvare anden del af problemformuleringen i den udstrækning vi har haft de pågældende matematikeres originale litteratur til vores rådighed. Vores oprindelige plan var dog at se om vi i sekundærlitteraturen kunne finde noget omhandlende de matematikere, hvis originalkilder vi ikke havde til vores rådighed, men dette har desværre ikke vist sig muligt. Man vil derfor i nærværende afsnit ikke finde en gennemgang af Girard, Tschirnhaus, Bezout og Malfatti.

7.2.1 *Ars Magna*

Vi vil i dette afsnit beskrive de eventuelle nye koncepter i Cardanos *Ars Magna*, når vi således omtaler Cardano tænker vi, når dette er relevant, også på del Ferro, Tartaglia og ikke mindst Ferrari. Matematikken i perioden omkring Cardano var af en mere beregningsmæssig karakter; fandt man noget nyt var det således oftest fordi man havde løst et (specifikt) problem og ikke nødvendigvis udviklet nye begreber. Set i dette lys er der ingen tvivl om at Cardano med sin *Ars Magna* var nyskabende i sin tid. Oystein Ore skriver i forordet til *Ars Magna*,

> *To Cardano's contemporaries it was a breakthrough in the field of mathematics, exhibiting publicly for the first time the principles for solving both cubic and biquadratic equations, giving the roots by expressions formed by radicals, in a manner similar to the method*

> *which had been known for equations of the second degree since the Greeks, or even the Babylonians.* [Cardano, 1545/1968, s. vii-viii]

I forhold til Cardanos efterfølgere bærer *Ars Magna* i højere grad præg af generalitet end abstraktion. Generaliteten er, mener vi, klart til stede i værket i og med at der opstilles de løsningsformler der gør. Udsagnet om den manglende abstraktion bygger vi på at han påpeger at fjerdepotensen af en størrelse er unaturlig (jf. citatet side 21), hvilket skyldes hans geometriske forståelse af problemet. Et andet faktum som peger i retning af manglende abstraktion i denne periode er, at man ikke er i stand til at opskrive et generelt formeludtryk som vi kender det idag. Cardano er således nødt til at bringe sine løsninger ved ord og taleksempler.

Af Cardanos forord fremgår det at han selv betragter sit værk som værende helt og aldeles nyskabende, bl.a. skriver han .

> *It is so replete with new discoveries and demonstrations by the author - more than seventy of them - that its forerunners* [*are*] *of little account* [...]. [Cardano, 1545/1968, s. 1]

Cardano mener at han med sit værk afdækker hele området omhandlende ligningsløsning.

> *It is a pleasure, therefore, to publish this book separately so that, this most abstruse and unsurpassed treasury of the entire* [*subject of*] *arithmetic being brought to light and, as in a theater, exposed to the sights of all, its readers may be encouraged and will all the more readily embrace and with the less aversion study thoroughly the remaining books of the Perfect Work which will be published volume by volume.* [Cardano, 1545/1968, s. 1]

Udfra tendenserne i perioden, og ikke mindst dennes hemmeligholdelse af eventuelle opdagelser inden for problemløsning, stiller vi os forstående overfor Cardanos syn på sit værks betydning. I denne forstand må Cardano siges at være en 'ørn'[2] i sin tid, men dog ikke i sammenligning med sine efterkommere.

7.2.2 De to århundreder

Som i starten af kapitel 4 antydet betegnes den ca. 200 års periode fra 1545-1762 i mange sekundærkilder som værende stagnerende og uden den store udvikling inden for den algebraiske ligningsløsning. Vi har fra starten stillet os uforstående overfor denne holdning, idet de fire samtidigt udgivede afhandlinger fra 1770-71, der alle regnes for at være gennembrydende, må formodes at have bygget på et allerede eksisterende grundlag. Vi har derfor fundet analysen af netop denne periode særdeles interessant.

[2] En 'ørn' skal forstås i den tidligere omtalte terminologi af citatet: *Aquila non capit muscas.*

Viète

Som bemærket i afsnittet om Viète (jf. afsnit 4.1.2) er der ingen tvivl om at Viète med sin nye systematiske notationsform, hvor han også betegner allerede kendte størrelser med bogstaver, hæver abstraktionsniveauet betydeligt. Dette mener vi viser at Viète, i alt fald på dette område, er ophavsmand til et i særdeleshed nyt koncept.

En af de overordnede idèer med Viètes undersøgelser i sit værk fra 1615 er at beskrive ligningernes natur, hvilket han gør ved at sammenligne to lignende ligninger, og derudfra bestemme forskellige relationer imellem kendte og ukendte størrelser i ligningerne. Dette må siges at være en ny idè, idet Viète herigennem forelægger en helt ny problemstilling for studiet af ligninger, nemlig en af en mere analytisk karakter, hvorfor hovedformålet for ham således ikke er at opskrive en ny løsningsformel for de pågældende ligninger. Det som Viète med sin afhandling lægger op til, nemlig at koefficienterne i ligningen er lig de elementære symmetriske polynomier, en observation først fremsat af Girard, mener vi dog ikke at han selv har været fuldstændig bevidst om.

Med hensyn til Viètes egen opfattelse af sit arbejde og dettes status, er der næppe nogen tvivl om han anser sig selv for en 'ørn'. Viète skriver til Catherine de Parthenay (indledningen til *In Artem Analyticem Isagoge*) at den kunst han nu forelægger ikke er en ny kunst, men derimod en som har været udforsket i lange tider, blot har de tidligere udforskninger ikke ført til hvad Viète betragter som ægte beviser.

> *So ist auch die Kunst, die ich nun vortrage, eine neue oder doch auch wieder eine so alte und von Barbaren so verunstaltete, daß ich es für notwendig hielt, alle ihre Scheinbeweise zu beseitigen, damit auch nicht die geringste Unreinheit an ihr zurückbleibe und damit sie nicht nach dem alten Moder rieche, und ihr eine vollkommen neue Form zu geben, sowie auch neue Bezeichnungen zu erfinden und einzuführen.* [Viète, 1591/1973, s. 34]

Viète fortsætter hernæst med at skrive, at alle matematikere synes enige deri at deres 'algebra' eller 'almucabala' er den største, og at de priser og sammenligner denne med det hemmelighedsfulde guld, men guld har de ikke fundet. Det har derimod Viète selv!

> [...] *es meine Kunst erlaubt, die Lösungen aller mathematischen Probleme mit größter Sicherheit zu finden.* [Viète, 1591/1973, s. 35]

Viète synes udemærket klar over at hans nye tilgang hovedsageligt består i den metodiske orientering han i sine værker vælger. I introduktionen til *In Artem Analyticem Isagoge* skriver han således

> *There is a certain way of searching for the truth in mathematics that Plato is said first to have discovered. Theon called this analysis* [...]. [Viète, 1615/1983, s. 11]
>
> [...] *the whole analytic art* [...], *may be called the science of correct discovery in mathematics.* [Viète, 1615/1983, s. 12]

> *It no longer limits its reasoning to numbers, a shortcoming of the old analysts, but works with a newly discovered symbolic logistic.* [Viète, 1615/1983, s. 13]

Euler

Euler er en matematiker der har beskæftiget sig med mange områder inden for matematikken, vi mener dog at han generelt opfatter matematik som en beregningsbaseret disciplin, med hans egne ord forklarer han

> *Mathematics, in general, is the* science of quantity; *or, the science which investigates the means of measuring quantity.* [Euler, 1770/1972, s. 1]

Med hensyn til algebraen mener Euler, som antydet ved citatet på side 48, at hovedformålet

> [...] *is to determine the value of quantities that were before unknown* [...]. [Euler, 1770/1972, s. 186]

Dette, forklarer han, opnås ved et opmærksomt studium af de givne betingelser, der iøvrigt altid er udtrykt i kendte tal. Med denne begrundelse definerer han algebraen som, *The science which teaches how to determine unknown quantities by means of those that are known.* Alt dette, mener vi, indikerer at Euler ikke har opfattet sit arbejde som udviklingen af nye koncepter, men nærmere som et arbejde der har ført til nye beregningsmæssige værktøjer, som kan benyttes til at bestemme de ukendte størrelser.

I stil med Tschirnhaus' og Bezouts metoder er hovedtrækkene i Eulers metode, til løsning af fjerdegradsligningen, at udtrykke rødderne til denne som et algebraisk udtryk i rødderne til en tredjegradsligning. Dermed får han reduceret problemet med løsningen af en fjerdegradsligning til løsningen af en tredjegradsligning. Konceptet i Eulers metode er altså et allerede etableret koncept, og dermed ikke hans eget, blot anvender han det på lidt anderledes vis. Vores indtryk er derfor, med henvisning til ovenstående, at dette allerede etablerede koncept i højere grad benyttes af Euler som et beregningsmæssigt værktøj.

I vores øjne er Euler en af de største matematikere gennem tiderne. Dog forkommer det os ikke at Euler betragtede sig selv som en 'ørn', hvilket vi dels begrunder med hans opfattelse af matematikken, dels hans mange let tilgængelige eksempler og opgaver med tilhørende løsning. I og med at Euler stort set har beskæftiget sig med alle områder inden for matematikken, må han uden tvivl have været bevidst om at han *har* bidraget med megen nytænkning, men ikke nødvendigvis selv anset dette for nye koncepter. Personligt var Euler dog nok mest interesset i at løse problemer frem for at afdække disses strukturelle natur. En af Euler vigtig pointe kunne således formodes at være at hans værker skulle kunne føre til noget, hvorfor de selvfølgelig også skulle skrives på et sprog som var forståeligt.

Som i begyndelsen af dette afsnit antydet mener vi at denne 200 års periode i en vis forstand må have lavet forarbejdet for de fire matematikere som udgav deres arbejder i 1770-71, at disse afhandlinger alle udkom omtrent samtidigt mener vi i en vis forstand taler for at tiden var moden. En lignende holdning fandt vi hos Nový, som også argumenterer for tilstedeværelsen af konceptudvikling i denne periode. Nový skriver[3]

> [...] *there exists one more argument of a historical nature in favour of this; three independent studies* [[4]] *could not have been created nearly simultaneously around 1770 without* the evolution of general ideas. [Nový, 1973, s. 30]

7.2.3 Årene 1770-71

De fire afhandlinger fra 1770-71 må siges at være et gennembrud indenfor den algebraiske ligningsløsningsteori. Det er i denne periode at konceptudvikling og abstraktionsniveau når nye højder, og at man begynder at undre sig over hvorfor (i modsætning til hvordan) allerede udviklede metoder hhv. virker eller ikke virker.

Waring

Waring giver i indledningen af sin bog en meget udførlig og detaljeret redegørelse for den hidtidige udvikling af den algebraiske ligningsløsning. Han er her særdeles flink til at kreditere de forskellige matematikere for deres respektive opdagelser hhv. metoder og undlader i den anledning ikke at nævne sig selv og sine opdagelser. Samtidig er han specielt opmærksom på hvilke opdagelser han er den første der har gjort sig. Følgende citat er et af mange lignende.

> *Never before had anyone transformed the roots, except by reducing equations in order to eliminate unknowns by substitution, nor had anyone previously shown how such a transformation could lead to a method for determining the sum of the individual values of any algebraic function of the roots. No one before me had ever showed how to evaluate an irrational or fractional function of the roots of a given equation. No one else has deduced* [...]. [Waring, 1782/1991, s. xxvii]

Og således fortsætter han. Waring nød ikke den store anseelse i sin samtid, hvilket formentlig var uretmæssigt, og han er da også selv opmærksom på dette. Som i citatet på side 58 påpeger Waring selv at han er ophavsmand til ikke mindre end 300-400 nye sætninger. En mulig grund til Warings manglende anerkendelse må formodes at have været hans måde at fremlægge sine resultater på (jf. citatet på side 59). Waring sendte bl.a. sin metode, hvor rødderne til den generelle n'tegradsligning kan udtrykkes på følgende form

$$x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + \ldots + B\sqrt[n]{p^{n-3}} + C\sqrt[n]{p^{n-2}} + D\sqrt[n]{p^{n-1}},$$

[3]Fremhævelsen i citatet er vor egen.
[4]Nový medregner ikke Malfattis afhandling.

til matematikere som Euler, D'Alembert, Bezout, Lagrange, Frisi m.fl. [Waring, 1782/1991, s. xxxvii] Den eneste af disse som svarede var dog Frisi, hvorfor en mulig grund til de andres manglende interesse måske kan tilskrives Warings uoverskuelige måde at fremstille sine resultater på.

Mht. hvilke nye koncepter Waring i sit arbejde skaber, kan fortrinsvist nævnes hans bevis af hovedsætningen for symmetriske polynomier (jf. sætning 5.1). I det vi har haft svært ved at tyde originalkilden kan vi ikke med sikkerhed sige noget om i hvilken udstrækning Waring har betragtet sit arbejde som konceptudviklende. Udfra hvad vi har læst i sekundære kilder formoder vi dog at Waring har været nyskabende i en eller anden forstand, men om han selv har været klar over hvad han var på sporet af skal vi ikke gøre os til endegyldige dommere over. Skulle vi alligevel komme med et bud, vil vores formodning være at han ikke ser sine resultater i en større sammenhæng. Dette bygger vi på de utallige egenskaber han i sit værk viser for såvel specielle som generelle ligninger, uden på noget tidspunkt at samle op på sine resultater og overveje betydningen af dem i den større sammenhæng.

Vi føler os overbeviste om at Waring har betragtet sig selv som en 'ørn', idet han egenhændigt har gjort så mange opdagelser. Mht. at skabe nye koncepter mener vi dog ikke at man kan betegne ham som en 'ørn'.

Vandermonde

Vandermondes undersøgelse af de algebraiske ligninger er ikke lige så dybdegående som Lagranges, men i det store hele er han på samme spor. Vandermondes grundlæggende idè er at finde en symmetrisk funktion af rødderne der som værdi kan antage de n rødder. I betydningen af vores definition af et koncept mener vi at Vandermonde må siges at være nyskabende. Med udgangspunkt i sin grundlæggende idè samt de allerede kendte løsningsformler for anden- og tredjegradsligningen foreslår han et generelt udtryk for rødderne til n'tegradsligningen. Vandermonde må siges at være på rette spor idet betragtninger angående invariante udtryk i rødderne indgår i hans overvejelser, hvilket vi anser for at kunne betragtes som et nyt koncept.

Vandermonde henviser i sin indledning til metoderne af hhv. Euler[5] og Bezout som værende tidligere forsøg på at løse samme problem, som han søger at løse. Han tillægger dog deres mislykkede forsøg selve deres metoder, da man i disse skal overvinde adskillige besværligheder for at komme frem til en løsning. Vandermondes løsning på dette problem er at udvikle en helt ny metode. Af denne grund mener vi at Vandermonde selv må betragte sin metode som værende et nyt koncept, hvilket vi også er enige i. Samtidig overlader han det til andre matematikere at vurdere hans metodes fortrin frem for andre metoders.

> *Hierin besteht der eigentümliche Charakter meiner Methode; ich überlasse es den Geometern, ihre Vorzüge zu würdigen.* [Vandermonde, 1770/1888, s. 2]

Det at han ingen tvivl lader herske om hvorvidt hans metode har fortrin eller ej, mener vi peger i retning af at han opfatter sig selv som en 'ørn'. Der er

[5] Her tænkes på Eulers eliminationsmetode.

dog næppe heller nogen tvivl om at han var det, f.eks. skal Lebesgue have talt i særdeles pæne vendinger om Vandermondes arbejde indenfor ligningsløsning. I tilfælde af at vi i ovenstående ikke har ydet Vandermonde den anseelse han fortjener, vil vi dække os ind under følgende citat af Lebesgue (i oversættelse af Tignol)

> *To assess exactly what Vandemonde saw, understood and what he did not catch, one would have to reconstruct not only the mind of a man from the eighteenth century, but Vandermonde's mind, and at the moment when he had a glimpse of genius and went ahead of his age. When trying to do so, one will always give too much or too little credit to Vandermonde.* [Tignol, 1980/1988, s. 217]

Lagrange

Lagrange tager i sin afhandling udgangspunkt i metoderne udviklet af hans forgængere. Hans idé er igennem en dybdegående undersøgelse at kunne fremdrage de generelle træk ved disse metoder, og igennem denne analyse at se *a priori* hvorfor metoderne virker for tredje- og fjerdegradsligninger men ikke for $n > 4$.

I sit arbejde benytter Lagrange sig af de allerede etablerede begreber 'resolvent' og 'Lagrange-resolvent'[6], men tillægger dem dog i sin analyse en ny status. Lagrange søger i sit arbejde at bestemme antallet af forskellige (formelle) værdier som resolventen antager under samtlige permutationer af rødderne. Dette antal stræber Lagrange efter at få så lille som muligt, dvs. at der er så mange permutationer som mulig som lader resolventen uændret. I sit arbejde med dette bringer Lagrange en del nye resultater (sætninger), hvoraf mange har vist sig anvendelige indenfor mere generelle områder af matematikken. Vi mener at al denne nytænkning som forefindes hos Lagrange i særdeleshed taler for at udviklingen af nye koncepter hos ham var i højsædet.

Lagrange synes ikke i tvivl om sin egen udvikling af nye koncepter. Han er helt tydeligt af den opfattelse at der siden Cardano ikke har forekommet nogen udvikling af den algebraiske ligningsløsning.

> *A l'égard de la résolution des équations littérales, on n'est guère plus avancé qu'on ne l'était du temps de Cardan* [...]. *Les premiers succès des Analystes italiens dans cette matière paraissent avoir été le terme des découvertes qu'on y pouvait faire* [...]. [Lagrange, 1770-71, s. 206]

Der er ingen tvivl om at Lagrange med sit værk står for konceptudvikling i stor stil, dette synes han da heller ikke selv i tvivl om, f.eks. skriver han

> [...] *nous contenterons ici d'avoir posé les fondements d'une théorie qui nous paraît nouvelle et générale.* [Lagrange, 1770-71, s. 403]

Vi mener, i overenstemmelse med hvad vi formoder Lagrange også selv mente, at Lagrange er en af de største 'ørne' inden for den algebraiske ligningsløsningsteori.

[6] Denne forefindes tidligere, som i projektet vist, hos blandt andre Euler og Bezout, blot var det Lagrange der lagde navn til denne.

7.2.4 Ruffini og Cauchy

Ruffinis og Cauchys arbejder er hver for sig banebrydende, idet de i langt højere grad end tidligere benyttede sig af permutationer. Med Cauchys arbejde blev permutationerne tilmed sat i forgrunden for ligningerne.

Ruffini

Ruffini takker i indledningen af sin lærebog fra 1799 Lagrange for at have vist ham vejen inden for ligningsløsningen (jf. citatet 100). Han fortsætter herefter med at beskrive sit arbejde, bl.a. forklarer han at han udover beviset for femtegradsligningens algebraiske uløselighed har samlet op på allerede eksisterende arbejder.

> *Oltre l'accennato teorema, varie altre cose riguardanti le equazioni essendomi stato dato di determinare, ed altre di raccogliere, specialmente dal chiarissimo de La Grange, ho stimato bene il congiungere tutto insieme, e insieme darlo alla luce. Ma l'ordine neccesario a darsi a simili materie esigeva una certa distribuzione: quella, che seco porta una teoria di equazioni, sembra certamente la più opportuna; questa dunque trascelgo, e mi lusingo così di presentare al pubblico una teoria generale delle equazioni adorna delle più recenti scoperte e, per quanto io sappia, la più completa finora.* [Ruffini, 1799/1915, s. 3]

Ruffini påpeger altså at han præsenterer en generel ligningsteori udsmykket med de nyeste opdagelser inden for området, som ifølge ham er den hidtil mest komplette.

Ruffinis bevis for femtegradsligningens algebraiske uløselighed, mener vi er et tydeligt tegn på eksistensen af nye koncepter. Hidtil havde det grundlæggende problem inden for dette område bestået i at kunne finde en algebraisk løsningsformel for højeregradsligninger, altså at *løse* disse. Med sit bevis fik Ruffini vendt billedet; det var nu så at sige uløseligheden der blev løsningen på problemet. Det faktum at Ruffinis samtidige ikke kunne finde sig til rette med dette for dem uventede aspekt af ligningsteorien, mener vi også er et stærkt argument for den konceptudvikling der her fandt sted. Som i afrundingen til kapitel 6 skitseret, bidrog Ruffini i kraft af sit bevis også med en række andre nye begreber, så som stabilisator, index osv.

I og med at Ruffini udemærket selv er klar over at han er den første som viser den algebraiske uløselighed af femtegradsligningen, mener vi at han må se sig selv som nyskabende, og dermed i vores terminologi en 'ørn'. Som citatet ovenfor antyder er Ruffini dog stadig beskeden, vi vil derfor betegne ham som en beskeden og af andre matematikere udstødt 'ørn'.

Cauchy

Cauchy lægger i sin indledning ud med at henvise til Lagranges og Vandermondes arbejder, idet de, i alt fald hvad han ved af, påpeger han, er de første som betragter funktioner af flere variable relative til antallet af værdier disse antager ved permutation af variablene. Især Ruffini, forsætter Cauchy, har med stor succes beskæftiget sig med samme område. Cauchy vil med sin artikel gå et skridt videre. Han skriver

> *J'examinerai plus particulièrement le cas où le nombre des valeurs d'une fonction est supposé plus petit que le nombre des lettres, parce que les fonctions de cette nature sont celles dont la connaisance est la plus utile en analyse.* [Cauchy, 1815, s. 2]

Cauchys hovedformål er altså at vise, hvad der udmønter sig i at være én bestemt sætning, nemlig sætning 6.1.

Som tidligere nævnt mener vi at Cauchy var den første til at hæve abstraktionsniveauet påny efter Lagrange. Med Cauchys 1815-arbejde var det ikke længere ligningerne der var i centrum, men derimod permutationerne som tidligere kun havde været et af flere aspekter ved den algebraiske ligningsløsningsteori. Cauchy opbygger på det nærmeste en ny teori omhandlende permutationerne, hvorfor vi også mener at han må anses for at være en af de store konceptudviklere. Han tager et allerede eksisterende koncept (permutationer) og udvikler dette til et af en endnu højere generalitet. Som i afrundingen af kapitel 6 nævnt introducerer Cauchy i denne anledning en række nye begreber omhandlende permutationer; sammensætningen af to permutationer, en transposition osv.

Vi har ikke i Cauchys 1815-arbejde kunnet finde nogle indikationer som peger i retning af at han selv skulle finde sit arbejde særdeles nyskabende. Cauchy påpeger at hans arbejde er en generalisering af et af Ruffinis resultater, og samtidig henviser han til Lagrange såvel som Vandermonde, hvilket, set i lyset af Cauchys omdømme, kunne tyde på at han mht. sit 1815-arbejde var en smule beskeden. Med vores beskedne kendskab til Cauchy, opnået udfra læsning i biografier samt sekundærlitteratur, kan vi dog ikke tro dette. Vi synes at Cauchy er en 'ørn' og vi føler os overbeviste om at han selv er af samme opfattelse.

7.3 Benyttet litteratur

Vi beskriver her nedenfor den primær- og den sekundærlitteratur vi i projektet har benyttet, dvs. den primærlitteratur der er opremset i appendiks B samt den sekundærlitteratur, det være sig bøger, artikler og deslige, som vi fortrinsvist har støttet os til i projektet.

7.3.1 Primærlitteratur

Vi vil i dette afsnit beskrive vores egne oplevelser med primærlitteraturen, det være sig i hvilken grad de pågældende værker har været forståelige, eventuelle mangler en oversættelse måtte have og i det hele taget hvad der ved læsning af disse er faldet os ind.

Cardanos værk *Ars Magna* er, til trods for at vi kun har studeret det i en engelsk oversættelse, til tider lidt kringlet i formuleringerne. Dette skyldes muligvis datidens notationsform samt det faktum at fremstillingen og argumentationsformen er fundamentalt anderledes end hvad vi idag er vant til. Den engelske oversættelse er dog sprængfyldt med fodnoter, som til tider kan kaste lidt lys over hvad der i originalformuleringen kan forekomme uforståeligt.

Viètes værk *In Artem Analyticem Isagoge*, som vi har haft i en engelsk hhv. tysk oversættelse, er i sammenligning med Cardanos forholdvist nemt at læse. Dette skyldes til dels den nye notation som Viète her introducerer, men samtidig også at den er skrevet i et tilgængeligt sprog. Opskrivningen af udtrykkene i den engelske oversættelse er dog mere overskuelig end i den tyske.

Eulers originalværk *Vollständige Anleitung zur Algebra*, som vi har læst i engelsk oversættelse, var i forhold til mange af de andre originalværker en sand fryd at læse i. Den er skrevet i et forståeligt og let tilgængeligt sprog, den er fyldt med gennemregnede eksempler samt opgaver med tilhørende løsninger, hvilket letter forståelsen af pointerne. Samtidig er der i Eulers beviser også rigeligt med mellemregninger, hvilket gør de matematiske elementer lettere af forstå. C. Truesdell skriver da også om Eulers måde at skrive på

> *It was Euler who first in the western world wrote mathematics openly, so as to make it easy to read.* [Euler, 1770/1972, s. x]

Bernoulli, som oversatte dette værk til fransk, er af samme mening, han skriver

> *To praise its merits, would almost be injurious to the celebrated name of its author. It is sufficient to read a few pages, to percieve, from the perspicuity with which every thing is explained, what advantage beginners may derive from it.* [Euler, 1770/1972, s. x]

Eulers fremstilling af metoderne er dog meget omfattende og han dvæler ved hvert lille specialtilfælde, hvilket ikke er karakteristisk for metoden, men kun underholdende for læseren.

Warings værk *Meditationes Algebraicæ*, som vi ligeledes har haft i engelsk oversættelse, er fortrinsvist utilgængeligt[7], til trods for at oversætteren påpeger at han har forbedret Warings ukorrekte latin og de mange typografiske fejl i hans oprindelige udgivelse samt omarrangeret visse afsnit af hensyn til forståelsen. Vi finder dog stadig Warings stil uorganiseret og til tider rodet, det er svært at lokalisere beviser i teksten og vi kunne i høj grad godt have ønsket os en indholdsfortegnelse. Det er også grundet Warings utilgængelighed at vi har måttet ty til sekundærlitteraturen i fremstillingen af hans hovedsætning.

Vandermondes arbejde *Sur la résolution des équations*, som vi har i en tysk oversættelse, er efter vores mening også et tilgængeligt værk. Størsteparten af notationsformen i Vandermondes arbejde er også tidssvarende, hvilket letter læseligheden. Samtidig forklarer Vandermonde den notationsform som han benytter sig af, og han bringer ligeledes adskillige mellemregninger. Kronecker skal i en forelæsning have udtalt:

[7] Jf. citatet side 59, eller se Weeks forord i [Waring, 1782/1991, s. ix-xvii].

> *Mit Vandermonde's im Jahre 1770 der Pariser Akademie vorgelegten Abhandlung über die Auflösung der Gleichungen beginnt der neue Aufschwung der Algebra; die Tiefe der Auffassung, welche sich in dieser Arbeit in so klaren Worten ausspricht, erregt gradezu unser Erstaunen.* [Vandermonde, 1770/1888, Vorrede]

Lagranges store værk *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* er forholdsvis forståeligt. Dette skyldes bl.a. det faktum at Lagrange er flink til at tydeliggøre pointen i hans redegørelser, f.eks. forklarer han gerne i starten af et bevis essensen af det, hvilket gør det nemmere at følge den røde tråd. Lagrange er dog ligesom hans samtidige meget omhyggelig i sine udredninger, hvorfor hans værk også er særdeles langt (216 sider), men man skal nok også have for øje at Lagranges afhandling i virkeligheden er en undersøgelse. I modsætning til f.eks. Warings værk er Lagranges sat op på en overskuelig måde, hvilket letter læsningen, vi ved dog ikke om denne opsætning i virkeligheden skyldes Serret, da han jo var editor af *Œuvres de Lagrange.*

Ruffinis arbejde *Teoria generale delle equazioni*, som vi har haft i dets oprindelige form, er heller ikke det mest tilgængelige vi er blevet præsenteret for (omend det på ingen måde er lige så slemt som Warings). Burkhardt beskriver med et af sine pænere tillægsord om Ruffinis bevis, beviset som 'langtrukkent' eller 'endeløst' (langathmigen) [Burkhardt, 1892, s. 157]. Kiernan bemærker dette og forklarer dernæst:

> *It suffices to say here that the pioneering work of Ruffini, handicapped as it was be the lack of any workable notation and terminology, could expect little sympathy from a precise and methodical German of the late* 19^{th} *century.* [Kiernan, 1971, s. 60]

Cauchys artikel *Mémoire sur le nombre...* fra 1815 mener vi er klar i sin fremstilling og i sit mål. Mange af Cauchys definitioner og formuleringer ligner også dem vi idag er vant til, hvilket er med til at tilgængeliggøre teksten. Vi har fundet studiet af Cauchys 1815-arbejde i særdeleshed berigende, i og med at det er den første indførelse af permutationer som en selvstændig 'teori'.

7.3.2 Sekundærlitteratur

Det meste sekundærlitteratur har været os til stor hjælp i vores studier af udviklingen af den algebraiske ligningsløsningsteori. Men set ud fra vores problemstillings synspunkt er det selvfølgelig ikke al litteratur der dækker vores interessefelt og ej heller al litteratur der går i dybden med netop vores problematik. Vi vil i dette afsnit beskrive de set fra vores synspunkt gode sider ved litteraturen, samt nævne de eventuelle fejl og mangler denne måtte have i forhold til projektets diskurs.

Bøger og værker

Af deciderede lærebøger har vi fortrinsvist benyttet Tignols *Galois' theory of algebraic equations* og Petersens *De algebraiske Ligningers Theori*, hvilke begge er lærebøger i algebraisk ligningsløsning og Galoisteori. I og med at Petersens bog er af ældre dato ligger dennes fremstilling også tættere op af den primærlitteratur vi har studeret end anden sekundærlitteratur gør, og det har til tider været en hjælp for os. Petersens bog er, synes vi, berigende og underholdende læsning.

Tignols bog er en bog som i særdeleshed har vakt vor begejstring; den er stringent i sin fremstilling, beskriver metoderne i stor detalje, og dækker stort set hele spektret lige fra babylonerne og frem til og med Galois. Fremstillingen i Tignol er dog af et mere lærebogsagtigt præg, hvorfor den heller ikke har kunnet benyttes som decideret matematikhistorie. Ligeledes er Tignols skelnen mellem polynomier og ligninger heller ikke helt i vores boldgade. Alligevel er det Tignols bog der mangen en nat har ligget ved vort pudevår igennem projektforløbet. De i litteraturlisten andre nævnte lærerbøger i algebra, så som f.eks. [van der Waerden, 1930/1970], [Fraleigh, 1999], [Jacobsen, 1951] og [Lang, 1977], har vi fortrinsvist benyttet til opslag, og således på ingen måde baseret vores fremstilling på.

van der Waerdens *A History of Algebra* og Nový́s *Origins of Modern Algebra* er begge bøger som beskriver udviklingen inden for algebraen, van der Waerdens dog over en længere tidsperiode end Nový́s. van der Waerden søger i sin bog at trække de store linier, og vælger derfor kun på udvalgte steder at give en grundig matematisk gennemgang. Vi kunne godt have ønsket os at han på visse steder havde været mere uddybende på trods af at de gennemgange han bringer er gode og præcise.

Nový er i sin fremstilling af den moderne algebra mere snakkende end mange af de andre forfattere af sekundærlitteraturen. Her er ikke de store matematiske udledninger, og beregninger gør han sig næsten ikke i. Han trækker dog nogle andre tråde; ofte beskriver han hvorfra matematikere hentede deres inspiration, sammenligner dette og hint med hvad foregående matematikere havde lavet osv. På trods af Nový́s ikke så gængse matematiske fremstilling har vi dog nydt at læse i hans værk, ikke mindst på grund af de mange pointer som han løbende bringer.

Også Wussings *Die Genesis des Abstrakten Gruppenbegriffes* er en bog der beskriver udviklingen af algebraen/gruppeteorien. Wussing beskæftiger sig i sin bog heller ikke med de lange udregninger og formelopskrivninger, men fokuserer derimod på argumenter, definitioner og resultater opnået gennem tiden. Wussings bog har ofte været behjælpelig med at forstå, hvad der i virkeligheden sker i primærlitteraturen.

Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning, editeret af bl.a. A. D. Aleksandrov, er i høj grad et matematisk opslagsværk, hvilket Dieudonnés *Mathematics – The Music of Reason* til en vis grad også er. Aleksandrovs har været en god indgangsvinkel i vores studium, da den til trods for sit formål stadig er nuanceret, og ikke mindst da den er let tilgængelig samt skrevet i et behageligt og læsevenligt sprog.

Dieudonnés bog har også været en god referenceramme for os i vores studium, til trods for at den fortrinsvist beskæftiger sig med milepælene i matematikkens historie. Vi har dog indimellem godt kunne ønske os mere udførlige forklaringer af Dieudonné, og er især forundrede over at han til tider springer over hvor gærdet er lavest, som f.eks. i tilfældet b_3 (jf. afsnit 5.4.3).

Både Katz' *A History of Mathematics* samt Klines *Mathematical Thoughts From Ancient to Modern Times* er bøger, omhandlende matematikkens historie, som i en vis forstand skyder med spredte hagl. Begge bøger er gode til at give et overblik over en historisk periode og lige ridse de vigtigste aspekter i en teori op. Vi finder dog at Katz til tider tangerer til det populærvidenskabelige, hvorfor vi således mener at Kline er en bedre reference ikke mindst da denne i sin fremstilling er mere søgende og problematiserende mht. matematikkens historiske udvikling.

Den danske gymnasiebog *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*, editeret af K. Andersen, har også været os til stor gavn i vores studium af den algebraiske ligningsløsning, ikke mindst mht. at give et overblik over ligningsløsningens lange forhistorie (jf. appendiks C). Men også mht. den algebraiske ligningsløsning i 1400- og 1500-tallet har bogen været os behjælpelig på trods af at vores tilgang til ligningsløsningen er mere specifik end dennes.

Artikler og afhandlinger

Artiklerne af Burkhardt og Pierpont er alle af ældre dato, hhv. 1892, 1895 og 1896, hvorfor de har samme fordel som f.eks. Petersens lærebog, nemlig at de ikke afviger lige så meget fra originalkilden som nyere værker. Generelt må man formode at en artikel skrevet om noget, der i forvejen er skrevet en masse om, højst sandsynligt må indeholde overvejelser som andre har gjort sig. Dette er en mulighed som Burkhardt og Pierpont ikke i samme grad har haft. Både Burkhardt og Pierpont er dog efter Abel og Galois, hvorfor de har haft muligheden for at se f.eks. Ruffinis arbejde i dette lys. Alt i alt er disse artikler af samme karakter som f.eks. Kiernans, blot er de det ældre.

Kracht & Kreyszigs artikel fra 1990 beskriver i stor detalje Tschirnhaus' transformation i dens oprindelige form, og vi har intet at udsætte på deres fremlægning af Tschirnhaus' note (men vi har selvfølgelig heller ikke haft denne at sammenligne med). Det ærgerlige, set ud fra vores synspunkt, er dog at Kracht & Kreyszig i deres artikel på ingen måde beskriver de kombinationsbetragtninger som Tschirnhaus' metode må formodes at have indeholdt. Kracht & Kreyszig citerer heller ikke Tschirnhaus' note i deres artikel, hvorfor vi heller ikke her har kunnet hente inspiration til anden del af vores problemformulering. Det skal dog siges at artiklen indeholder en kort biografi af Tschirnhaus, noget som f.eks. mangler i [*Dictionary of Scientific Biography*, 1970-80].

Kiernans artikel fra 1971 giver et bredt overblik over den algebraiske ligningsløsningteori fra Lagrange til Artin. Kiernans vinkel er dog en ganske anden end vores; hvor vi beskriver den 'bold' de pågældende matematikere gik efter, beskriver Kiernan den 'bold' de rent faktisk ramte. En sådan tilgang vil set i lyset af vores problemformulering være en smule 'snyd', idet der jo indirekte lægges ord i munden på de pågældende matematikere[8]. Kiernans artikel er rig på gode pointer mht. udviklingen af teorierne, men den er i sin fremstilling af de pågældende arbejder ikke altid lige klar[9].

[8] Vi tænker her bl.a. på hele det legemsudvidelsesapparat der lægges ned over Lagranges arbejde, selv om Lagrange aldrig eksplicit gør brug af udvidelser.

[9] Vi tænker her specielt på afsnittet om Ruffini.

Skaus artikel fra 1990 beskriver beviset af femtegradsligningens algbraiske uløselighed ved en blanding af hhv. Ruffinis og Abels beviser. Også Skau gør i sin gennemgang af beviserne brug af moderne matematik, såsom legemsudvidelser o.lign., til gengæld giver han en grundig gennemgang af løsningsformlen for tredjegradsligningen, hvilket vi i starten af projektforløbet drog stor nytte af.

Også Ayoub (1980) kører i sin gennemgang af Ruffinis bevis det store moderne algebraiseringsapparat i stilling, men vi har dog i projektet gjort brug af hans redegørelse for omstændighederne omkring beviset og dettes udgivelse.

Udvalgte dele af Sørensens progress rapport (1999) har til visse af projektets afsnit også været os til stor hjælp, i og med at Sørensens beskrivelser af originalværkerne ofte ligger tæt op ad disse, samtidig med at han dog relaterer resultaterne til den moderne matematik samt dennes notation og terminologi.

Leksika og opslagsværker

Vi har hovedsageligt baseret vores biografier på *Dictionary of Scientific Biography* (*DSB*), hvilket vi i denne sammenhæng synes har været et uundværligt værk. I og med at der er forskellige forfattere af de enkelte biografier, er der i disse også anlagt forskellige tilgangsvinkler, men dette gør dog på ingen måde biografierne mindre spændende at læse. *DSB* indeholder i forhold til mange andre biografiske værker også matematiske redegørelser, hvilket er med til at skabe overblik. Af kritikpunkter mht. *DSB* skal nævnes deres manglende biografi af Tschirnhaus.

Tschirnhaus var kun at finde i *Den Store Danske Encyklopædi* i forbindelse med alkymi – ikke et ord om hans matematiske arbejder. Dette undrer os i og med at der i *Salmonsens Konversations Leksikon* forefindes et afsnit omhandlende hans matematiske arbejde, men dog intet om hans alkymistiske interesser så som porcelænsfremstilling. Dette beskrives dog til overflod i *The Great Soviet Encyclopedias* beskrivelse af Tschirnhaus som en tysk oplysningsfilosof. Til gengæld nævnes her heller intet om hans arbejde med matematik. Bortset fra dette har vi ellers fundet værket særdeles brugbart, ikke mindst i forbindelse med vores alkymistiske niche.

Mht. matematiske opslag har ovenstående leksika ikke rigtig kunnet hjælpe os, men det har til gengæld Klügels værk *Mathematisches Wörterbuch* fra starten af 1800-tallet. Undervejs i projektforløbet har dette værk ofte været os behjælpelig i kraft af de opslag vi heri har gjort.

Bells *Matematikkens mænd* har også været spændende læsning, omend gennemgangen i denne er meget lidt matematisk.

Wussing & Arnolds *Biographien bedeutender Mathematiker* vægter heller ikke i sin gennemgang de matematiske aspekter, alligevel har den ofte været os behjælpelig mht. vores biografier, og vi har sågar i den fundet oplysninger som ikke figurerede i *Dictionary of Scientific Biography.*

O'Connor & Robertsons matematikhistoriske internetside giver en overskuelig omend mindre matematisk redegørelse for de enkelte matematikeres liv og matematiske produktion. Desværre bærer 'artiklerne' på siden dog ofte præg af at være skrevet i hast.

8 Konklusion

På baggrund af den i projektet foretagede undersøgelse mener vi at have observeret følgende brug af kombinationer, permutationer og invarians (symmetrier) hos de af os beskrevne matematikere: Vi finder hos Cardano ingen brug af de tre begreber, hos Viète og Girard finder vi begyndelsen til symmetribetragtninger samt især kombinatoriske træk. Tschirnhaus og Bezout forekommer os i deres metoder at have gjort omfangsrige og systematiske overvejelser angående kombinationer, og Bezout ligeledes enestående symmetriske overvejelser angående formen af en n'tegradsligningsrødder. Også Euler har gjort sig disse dybdegående symmetriske overvejelser angående formen af rødderne til en n'tegradsligning, samt visse kombinatoriske overvejelser mht. hans generelle løsningsformel for fjerdegradsligningen. Waring gør i sit arbejde helt klart brug af kombinatoriske såvel som symmetriske betragtninger. Malfatti gør umiddelbart kun brug af Eulers og Bezouts form af rødderne, men vi formoder at han har gjort sig visse overvejelser angående invariante udtryk. Med Lagrange og Vandermonde finder vi stadfæstelsen af permutations- og invariansbetragtninger i den algebraiske ligningsløsningsteori, og samtidig gør begge disse matematikere i deres arbejder brug af kombinationer. Hos Ruffini og i særdeleshed hos Cauchy finder vi begyndelsen til en decideret permutationsteori, samtidig med at de begge gør eksplicit brug af invariante udtryk.

Ydermere konkluderer vi at næsten samtlige af de i projektet beskrevne matematikere anså deres egne metoder/teorier og dermed sig selv for at være skelsættende og konceptudviklende, den eneste undtagelse er måske Euler, der i det af os beskrevne værk forekommer os at være mere beskeden end hvad almindeligt åbenbart er.

9 Efterskrift

En matematiker som vi i selve projektet har undladt at nævne er Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Grunden til at Gauss ikke er nævnt i vores projekt er at vi på trods af at han figurerer samtidig med Ruffini og Cauchy finder at han hører mere hjemme i perioden med Abel og Galois. Vi vil dog alligevel yde ham den respekt kort at omtale nogle af hans resultater i dette efterskrift.

Figur 9.1 Carl Friedrich Gauss (1777-1855). [O'Connor & Robertson, 2002]

Gauss præsenterer i 1799 sit første bevis for algebraens fundamentalsætning; ethvert polynomium med reelle eller komplekse koefficienter kan faktoriseres til lineære faktorer over det komplekse tallegeme **C**. Gauss giver i denne anledning udtryk for sin skepsis mht. til femtegradsligningens algebraiske uløselighed[1]. Ifølge Nový skulle det have været Gauss' mening netop at vise dette, men han udgiver aldrig noget derom og ej heller i hans efterladte papirer findes noget omhandlende umuligheden af den generelle løsning af algebraiske ligninger. I syvende del af *Disquisitiones arithmeticae* fra 1801, hvor Gauss beskæftiger sig med ligningers løsbarhed, ytrer han med omtrent samme ord som to år tidligere igen sin skepsis.

> *Everyone knows that the most eminent geometers have been unsuccessful in the search for a general solution of equations higher than the fourth degree, or (to define the search more accurately) for the* reduction of mixed equations to pure equations. *And there is little doubt that this problem is not merely beyond the powers of contemporary analysis but proposes the impossible.* [Gauss, 1801/1966, s. 445]

[1]Nový bringer følgende citat af Gauss: [...] *post tot tantorum geometrorum labores perexiguam spem superesse, ad resolutionem generalem aequationem algebraicarum unq uam parveniendi, ita ut magis magisque verisimile fiat, talem resolutionem omnino esse impossibile et contradictoriam* [...]. [Nový, 1973, s. 44]

Det er ligeledes i syvende del af *Disquisitiones arithmeticae* at Gauss viser et af sine hovedresultater; nemlig at den cyklotomiske ligning,

$$x^n - 1 = 0,$$

kan løses for vilkårlige værdier af $n \in \mathbb{N}$. [Nový, 1973, s. 44-46], [Gauss, 1801/1966, s. 459] og [Sørensen, 1999, s. 22-28]

En matematiker som foruden Cauchys og Lagranges værker også var bekendt med Gauss' var den unge nordmand Niels Henrik Abel (1802-1829). Abel præsenterede i 1826[2] sit bevis for femtegradsligningens algebraiske uløselighed. Som nævnt tidligere i projektet havde Ruffini et par årtier forinden ligeledes præsenteret et bevis for dette, blot blev Ruffinis bevis ikke accepteret i datidens matematiske miljø. Abel var selv bekendt med Ruffinis bevis og han skriver således

> *Le premier, et, si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, est le géomètre* Ruffini; *mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnement n'est pas toujours satisfaisant*[3]. [Abel, 1826/1881, s. 218]

I modsætning til Ruffini var Abel i sin samtid kendt og accepteret, hvilket bl.a. skyldtes hans arbejde med elliptiske funktioner.

Figur 9.2 Niels Henrik Abel (1802-1829). [O'Connor & Robertson, 2002]

Figur 9.3 Evariste Galois (1811-1832). [O'Connor & Robertson, 2002]

En matematiker der ligesom Ruffini heller ikke nød den store anerkendelse i sin samtid var den unge franskmand Evariste Galois (1811-1832). Hans studie af klasser af algebraisk løselige ligninger skulle vise sit at sætte prikken over i'et mht. den algebraiske ligningsløsningsteori. Galois var således den første der viste hvilke klasser af ligninger der var algebraisk løsbare, og dermed hvilke der ikke

[2] Abel udgav første gang sit bevis som en pamflet i 1824, men først i 1826 kom en mere udførlig version af dette med i Crelles *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* [Sørensen, 1999, s. 73]

[3] *The first and, if I am not mistaken, the only one who, before me, sought to prove the impossibility of the algebraic solution of general equations is the mathematician Ruffini. But his memoir is so complicated that it is very difficult to determine the validity of his argument. It seems to me that his arguments is not completely satisfying.* [Kiernan, 1971, s. 60]

var. I forbindelse med beviset af dette udviklede Galois sit koncept omhandlende irreducible og reducible polynomier samt udvidelsen af koefficientlegemet med polynomiets rødder. Ligesom Abel mente Galois oprindeligt at have løst den generelle femtegradsligning, og også han studerede teorien for elliptiske funktioner foruden sit studie af algebra. Også Galois' forgangsbilleder var i høj grad de samme som Abels: Lagrange, Cauchy og i særdeleshed Gauss. Værd at bemærke sig er det at Galois i sit arbejde slet ikke beskæftiger sig med problemet angående femtegradsligningens uløselighed, men derimod med henvisning til Ruffinis og Abels beviser betragter dette problem som løst:

> *C'est aujourd'hui une vérité vulgaire que les équations générales de degré supérieur au 4^e ne peuvent se résoudre par radicaux, c'est-à-dire que leurs racines ne peuvent s'exprimer par des fonctions des coefficients qui ne contiendraient pas d'autres irrationnelles que des radicaux.*
>
> *Cette vérité est devenue vulgaire, en quelque sorte par ouï-dire et quoique la plupart des géomètres en ignorent les démonstrations présentées par Ruffini, Abel, etc., démonstration fondée sur ce qu'une telle solution est déjà impossible au cinquième degré.* [Nový, 1973, s. 58-59][4]

Galois var om man så må sige en matematiker der (måske ligesom Ruffini) var forud for sin tid. Galois forsøgte adskillige gange at få sit arbejde præsenteret ved akademiet i Paris, men af forskellige årsager mislykkedes det hver gang. Galois fortsatte med at uddybe sine argumenter indtil han i en alder af 21 år døde i den inden for matematikhistorien sagnomspundne duel[5]. Ikke førend ca. 30 år efter Galois' død blev hans arbejde udgivet, og på dette tidspunkt var problemet angående hvilke klasser af ligninger der var algebraisk løselige, stadig ikke løst af andre matematikere. [Nový, 1973, s. 58-60]

Abel og Galois bygger i en vis forstand på den videre algebraisering af ligningsløsningsteorien som fandt sted med Lagrange og Vandermonde og som virkelig tog fart med Cauchy. Men også disse matematikere byggede videre på andres arbejde. Et meget vigtigt aspekt af den i vores projekt behandlede periode, er således den udvikling algebraen gennemgår som en naturlig del af de fremskridt man gør sig inden for den algebraiske ligningsløsningsteori. Vi har allerede været inde på, hvordan introduktionen af symbolsk algebra med bl.a. Viète, overskueliggjorde algebraen og gav mulighed for videre abstraktion. Senere og sideløbende kom den fulde accept af de negative tal som tal og rødder i et polynomium, og lidt senere endnu accepten af de komplekse tal som ægte 'tal'. Indtil da havde man draget tvivl om hvorvidt et algebraisk udtryk til f.eks. at udtrykke en rod i et polynomium, nu også gjaldt for alle værdier, hvilket var noget der kunne drage tvivl om den 'universale' validitet af udtrykket, i og med at man jo nogle gange fik disse problematiske ikke-tal som løsninger.

[4]Bemærk at Galois i modsætning til Abel ikke ytrer utilfredshed mht. Ruffinis bevis.

[5]For mere information om Galois' arbejde med algebraiske ligninger jf. f.eks. [Tignol, 1980/1988]. For information om Galois' kamp for at få accepteret sit matematiske arbejde, hans problemer mht. optagelse på Ecole Polytechnique samt hans tragiske død jf. [Rothman, 1982] og [Knutsen, 1997].

Da disse 'unaturligheder' var blevet accepteret, fik algebraen status af at være det ideelle abstraktionsredskab i matematikken og altså dermed matematikkens 'sprog'. F.eks. skriver Lagrange at det algebraiske 'sprog' med dets simple symboler, som er meget generelle og præcise, gør det nemt at forstå og tilmed muliggør at overskue meget komplicerede relationer mellem objekter [Nový, 1973, s. 184]. På en måde kan man sige at algebraen fjernede nødvendigheden af abstraktion i og med at den blev en abstraktion i sig selv.

A Persongalleri

Scipione del Ferro (1465-1526)

Antonio Maria Fiore (første halvdel af 16. århundrede)

Niccolò Fontana af Brescia – Tartaglia – (1499-1557)

Annibale della Nave (1500-1558)

Girolamo Cardano (1501-1576)

Lodovico Ferrari (1522-1565)

François Viète (1540-1603)

Albert Girard (1595-1632)

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708)

Leonhard Euler (1707-1783)

Étienne Bezout (1730-1783)

Gianfrancesco Malfatti (1731-1807)

Edward Waring (1734-1798)

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Paolo Ruffini (1765-1822)

Augustin Cauchy (1789-1857)

B Afhandlinger og arbejder

Cardano: *Artis Magnæ Sive De Regulis Algebraicis* (1545)

Viète: *In Artem Analyticem Isagoge* (1591)

Girard: *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629)

Tschirnhaus: *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione* (1683)

Bezout: *Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues* (1764)

Euler: *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1769)

Waring: *Meditationes algebraicæ* (1770 og 1782)

Vandermonde: *Sur la résolution des équations* (1770)

Malfatti: *De aequationibus quadratocubicis dissertatio analytica* (1770)

Lagrange: *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (1770-71)

Ruffini: *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* (1799)

Cauchy: *Mémoire Sur le Nombre des Valeurs qu'une Function peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme* (1815)

C Ligningernes forhistorie

Dette appendiks er tænkt som en overordnet historisk introduktion til emnet algebraisk ligningsløsning. Vi vil på disse få sider i store træk prøve at dække ligningernes historie fra oldtiden og frem til der hvor vores projekt begynder, nemlig ved Cardano i midten af 1500-tallet. Denne oversigt er udelukkende baseret på sekundærlitteratur.

Ligninger har været kendt og anvendt i flere tusinde år[1]. Man kan spore ligninger så langt tilbage som til sumererne i Mesopotamien ca. 2000 f.v.t. Her har man i udgravninger fundet lertavler med matematiske tekster. Teksterne bærer præg af at være blevet brugt til undervisning og består mest af opgaver vedrørende kanaludgravninger, arealberegninger og deslige. Dog optræder der i teksterne eksempler på både første-, anden- og tredjegradsligninger. [Andersen et al., 1986, s.1-50]

De gamle grækere studerede og benyttede også ligningerne i deres skrifter. I Euklids *Elementer* (ca. 300 f.v.t.) optræder disse i f.eks. Pythagoras' sætning og i konstruktionen af den regulære femkant, ydermere kendes de fra det gyldne snit samt ligninger for cirklens omkreds og areal. Fælles for grækerne er dog at ligningerne ofte optræder som en del af den geometriske algebra. [Andersen et al., 1986, s. 51-68]

Af andre tidlige eksempler på brugen af ligninger kan nævnes ægypterne, som benyttede disse i konstruktionen af deres pyramider og kineserne som ligeledes udregnede arealer, men ydermere konstruerede små opgaver vedrørende handel o.lign., hvori der f.eks. optræder systemer af lineære ligninger. Også inderne benyttede ligninger til blandt andet at beregne pythagoraiske tripler. [Katz, 1998, s. 192-230]

Som det ses har ligningsløsning været noget der har optaget mange folk gennem tiden, og dette har ført til mange metoder og løsninger af ligningerne. Udvalgte (læs; specifikke) ligninger af højere grad har været løst tidligt, især ved brug af geometriske argumenter, og en egentlig generel løsningsformel for andengradsligningen foreligger da også ret tidligt, hvorimod en sådan i tredjegradsligningens tilfælde først introduceres langt senere. Vi vil i det følgende give en kort beskrivelse af udviklingen af ligningernes løsningsmetoder gennem tiden. For ikke at gøre beskrivelsen for omfattende har vi udvalgt enkelte matematikere, og deres metoder, til at belyse udviklingen. For mere uddybende studier af den historiske gennemgang end den nærværende henvises til [Kline, 1972], [Andersen et al., 1986], [Høyrup, 1998], [Høyrup, 2002], [Johansen, 1945], [Varadarajan, 1998] og [van der Waerden, 1985].

[1] Det skal pointeres at når oldtidens matematikere arbejdede med ligninger, så er det ikke ligninger i vor forstand. F.eks. tænkte mange på rødderne som værende længder.

C.1 Andengradsligninger

Den første kendte løsning til en andengradsligning kendes fra en babylonsk tavle og kan dateres tilbage til 2000 f.v.t. Denne lyder

> *I have substracted from the area the side of my square : 14.30. Take 1, the coefficient. Divide 1 into two parts : 30. Multiply 30 and 30 : 15. You add to 14.30, and 14.30.15 has the root 29.30. You add to 29.30 the 30 which you have multiplied by itself : 30, and this is the side of the square.* [Tignol, 1980/1988, s. 7]

Ved inspektion ser man at ovenstående er en metode til at udregne længden af siden på et kvadrat, når differensen mellem arealet og siden er givet, med andre ord løser metoden ligninger af formen $x^2 - x = b$. Aritmetikken i citatet virker måske sær, og dette skyldes at babylonerne arbejdede med et 60-talsystem, og at de oveni havde en anden notationsform, hvor f.eks. 10-talsystemets $^1/_2$ skrives som 30, da de ikke havde nullet (og 30 er ligeledes 10-talsystemets 5). [Tignol, 1980/1988, s. 7]

Babylonerne arbejdede med tre typer af andengradsligninger

$$x^2 + ax = b, \quad x^2 = ax + b, \quad x^2 + b = ax, \tag{C.1}$$

hvor alle koefficienter er positive. Selv om man ikke har fundet en generel løsningsformel, tyder meget dog på at babylonerne, med udgangspunkt i arealberegninger, har kendt en sådan. I hvert tilfælde kendte de løsningerne til

$$x^2 + ax = b \quad \text{som} \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}$$

og

$$x^2 = ax + b \quad \text{som} \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}.$$

Også de gamle grækere interesserede sig for andengradsligningen, og ifølge Kline viser Euklid – dog ikke eksplicit – i proposition 28 og 29 i Bog VI af *Elementerne*, hvordan man, sagt med moderne sprog, kan løse en vilkårlig andengradsligning givet at en eller begge rødder er positive. Kravet om en positiv rod skyldes at Euklid tænker på rødderne som værende længder. Også grækerne Heron (1. århundrede) og Diofant (midten af 3. århundrede) behandler i deres skrifter løsningen af andengradsligningen. Heron diskuterer kun specifikke eksempler på andengradsligninger, selv om løsningerne af disse dog ifølge Mejlbo[2] tyder på kendskab til en løsningsalgoritme. Diofant derimod synes at have en mere generel tilgang til problemet i sin bog *Aritmetikken*. Diofant var i besiddelse af en metode til at løse ligninger af hver af typerne

$$ax^2 + c = bx \quad \text{og} \quad ax^2 = bx + c,$$

for positive værdier af a, b og c, hvilket fremgår af nogle mellemregninger i forbindelse med løsningen af andengradsuligheder, hvor Diofant iøvrigt også studerer ligningen

$$ax^2 + bx = c.$$

[2] [Andersen et al., 1986].

Diofant, og grækerne i almindelighed, accepterede kun rationale koefficienter i deres ligningsudtryk, og dermed selvfølgelig også kun rationale løsninger til disse. Både Herons og Diofants tilgang til løsningen af andengradsligningen minder i fremgangsmåde mere om den man mener babylonerne har benyttet end den man f.eks. finder i den arabiske matematik. [Kline, 1972, s. 73-77] og [Andersen et al., 1986, s. 69-72]

Tilmed og mere perspektivudvidende for algebraen vises det omkring 400 f.v.t., vha. et geometrisk argument som svarer til løsningen af en andengradsligning med løsning $\sqrt{2}$, at hele tal eller brøker af disse ikke er nok til at beskrive geometriske størrelser[3]. Dette kom grækerne omkring ved teknikker, hvormed de så at sige udviklede en slags 'geometrisk' algebra baseret på geometriske størrelser, hvor man undgik problemet med at tildele talværdier til disse. Dette var i kontrast til babylonerne, som selvsagt heller ikke havde opdaget de irrationale tal, men i deres mere pragmatiske tilgang til matematikken ikke fangede de teoretiske problematikker omkring disse irrationale værdier, selvom de uundgåeligt må være stødt på dem i behandlingen af geometriske problemer. Babylonerne udskiftede simpelthen tallene med rationale tilnærmelser til disse. [Tignol, 1980/1988, s. 11-15] Det man havde brug for, for at nå videre med ligningsteorien, var at

Figur C.1 Euklid (ca. 300 f.v.t.). [O'Connor & Robertson, 2002]

Figur C.2 al-Khwarizmi (770-840). [O'Connor & Robertson, 2002]

kunne koncentrere sig mere om formalisme end koefficienterne og variablenes natur, og grækernes geometriaspekt, som bl.a. bevirkede at de fandt deres tal usammenlignelige med deres geometriske størrelser, vanskeliggjorde dette. Men med det næste skridt inden for ligningsløsningsteorien begynder dette så småt at ændre sig.

Den arabiske matematiker al-Khwarizmis (770-840) lærebog *al-Kitab al-mukhatasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala*[4] behandler andengradsligningen ved opdeling i seks typer. De tre af typerne er de samme som babylonerne (og for den sags skyld grækerne) drøfter, men al-Khwarizmi kigger yderligere på typerne

$$ax^2 = bx, \;\; ax^2 = c, \;\; bx = c.$$

Igen skyldes denne opdeling i typer det faktum at man kun arbejdede med positive tal. I modsætning til grækerne begrænser araberne sig ikke kun til brugen

[3] Det at alt måleligt var måleligt i tal og brøker af tal, var ellers en af hjørnestenene i den græske matematik.

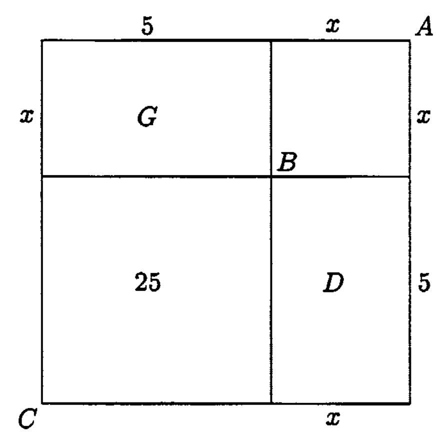
[4] 'Lærebog om beregning ved fuldstændiggørelse og sammenligning'. [Andersen et al., 1986, s. 87]

af rationale tal, både $\sqrt{5}$, $\sqrt{30}$ og $\sqrt{7^1/_2}$ optræder som løsninger til andengradsligninger i al-Khwarizmis behandlede eksempler. Dog er der hos al-Khwarizmi ingen eksempler på at koefficienterne i ligningerne kan være irrationale. Det er der derimod hos abu Kamil (ca. 850-930), som i sin lærebog *Kitab fi'l-jabr wa'l-muqabala*[5] bl.a. bringer følgende eksempel med tilhørende løsning

$$(10+x)\sqrt{5} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1\frac{1}{4}+\sqrt{500}} + \sqrt{1\frac{1}{4}}.$$

Abu Kamil deler også sine andengradsligninger op i seks typer, de samme som al-Khwarizmis, men i modsætning til denne henviser abu Kamil direkte til Euklids *Elementer*. Beviserne for formlerne hos abu Kamil er ligesom hos al-Khwarizmi bygget på geometriske argumenter, og tager udgangspunkt i et konkret eksempel. F.eks. bevises $ax^2 + c = bx$ på basis af $x^2 + 21 = 10x$. Abu Kamils beviser er dog grundigere og langt mere omhyggeligt udført end de tidligere beviser for løsningsformlerne til andengradsligningen. Derfor regnes abu Kamils algebra også, ifølge Jakobsen, for at være det første arbejde der helt til bunds beviser rigtigheden af de længe kendte formler. [Andersen et al., 1986, s. 86-103]

Men tilbage til al-Khwarizmi, lad os se et eksempel på hvordan han løser andengradsligningen $x^2 + 10x = 39$.



Figur C.3 [Tignol, 1980/1988, s. 18].

> *The following is an example of squares and roots [6] equal to numbers : a square and 10 roots are equal to 39 units. The question therefore in this type of equation is about as follows : what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. Now the roots in the problem before us are 10. Therefore take 5, which mulitiplied by itself gives 25, an amount which you*

[5]'Lærebog om fuldstændiggørelse og sammenligning'. [Andersen et al., 1986, s. 98]
[6]Med 'root' menes der x, altså en længde.

> *add to 39, giving 64. Having taken the square root of this which is 8, subtract from it the half of the roots, 5, leaving 3. The number three therefore represents one root of this square, which itself of course, is 9. Nine therefore gives that square.* [Tignol, 1980/1988, s. 17-18]

Efter at have gennemgået løsninger til alle seks typer af andengradsligninger beviser han vha. af kvadratkompletering rigtigheden af løsningen for $ax^2+bx=c$ ved brug af eksemplet $x^2+10x=39$ (igen). Procedurens rigtighed argumenteres der for på følgende vis: Lad x^2 være kvadratet AB. Så deles $10x$ til to rektangler G og D, hvert havende areal $5x$, som lægges til siderne x (jf. figur C.3). Pr. definition er arealet af den opnåede figur $x^2+10x=39$. Nu skal det sidste hjørne med areal 5^2 udfyldes for at få kvadratet AC. Derfor får man ved addition med 25 kvadratet $(x+5)^2$ med arealet $25+39=64$. Heraf følger at $(x+5)^2=64 \Rightarrow x+5=8 \Rightarrow x=3$. [Tignol, 1980/1988, s. 16-20]

Også inderne studerede andengradsligningen, men I modsætning til både grækerne og araberne tillod inderne negative rødder såvel som irrationale rødder. Tilmed havde inderne fra omkring år 600 taget nullet i brug som et selvstændigt tal og ikke blot som en pladsholder, hvortil grækerne benyttede det. Dette resultererde i at inderne omformulerede Diofants tre typer at andengradsligninger til én, nemlig

$$px^2+qx+r=0,$$

da inderne samtidig tillod visse negative koefficienter. [Kline, 1972, s. 186]

Ifølge Katz præsenterer Brahmagupta (7. århundrede) formlen til løsning af andengradsligningen på stort set samme måde som vi gør i dag. Brahmagupta skriver

> *Take absolute number on the side opposite to that on which the square and simple unknown are. To the absolute number multiplied by four times the [coefficient] of the square, add the square of the [coefficient of the] unknown; the square root of the same, less the [coefficient of the] unkvown, being divided by twice the [coefficient of the] square is the (value of the) unknown.* [Katz, 1998, s. 226-227]

Selvom Brahmagupta ikke nævner noget om den anden rod til ligningen, kan hans ord nemt oversættes til formlen

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a},$$

som værende den ene løsning til ligningen $ax^2+bx=c$. Bhāskara (1114 - 1185) derimod behandler multiple rødder. Hans teknik til at løse andengradsligningen var at udtrykke denne som kvadratet på en to-leddet størrelse (kvadratkompletering). Bhāskara lægger et passende tal til på begge sider af ligningen $ax^2+bx=c$, således at venstre side bliver et perfekt kvadrat: $(rx-s)^2=d$. Derefter løser han ligningen $rx-s=\sqrt{d}$ for x. Dog bemærker Bhāskara

> *If the root of the absolute side of the equation is less than the number, having the negative sign, comprised in the root of the side involving the unknown, then putting it negative or positive, a two-fold value is to be found of the unknown quantity.* [Katz, 1998, s. 227]

Hvilket vil sige at hvis $\sqrt{d} < s$, så er der to værdier for x, nemlig

$$\frac{s+\sqrt{d}}{r} \quad \text{og} \quad \frac{s-\sqrt{d}}{r}.$$

Selvom Bhāskara udleder ovenstående formler trækker han alligevel lidt i land ved at sige at det ikke gælder i alle tilfælde. Bhāskara giver i sine skrifter aldrig eksempler på andengradsligninger med to negative rødder eller ingen reelle rødder, og selvom andre indiske matematikere ifølge Kline opererer med irrationale rødder giver Bhāskara heller ingen eksempler herpå. [Katz, 1998, s. 225-228] og [Kline, 1972, s. 185]

C.2 Tredjegradsligninger

Ligesom andengradsligningen har også tredjegradsligningen været kendt og studeret i ca. tre årtusinder. Men i modsætning til andengradsligningen har løsningsformler til tredjegradslignignen ikke været kendt i mere end nogle få århundreder.

Tredjegradsligninger kom naturligt på banen i nogle at de problemer der optog grækerne, f.eks. i to af de tre klassiske problemer; *cirklens kvadratur*, konstruktion af et kvadrat med samme areal som en given cirkel; *terningens fordobling*, konstruktion af en terning hvis rumfang er det dobbelte af en given ternings; *vinklens tredeling*, konstruktion af en vinkel der er en tredjedel af en given vinkel. De to sidste problemer fører, når de formuleres algebraisk, til to tredjegradsligninger. [Andersen et al., 1986, s. 110-111]

Hos Arkimedes (287-212 f.v.t.) finder man et eksempel på en tredjegradsligning i forbindelse med en volumenberegning. I afhandlingen om *Kuglen og cylinderen* formulerer Arkimedes følgende problem

> *Del en kugle med en plan, så de to volumener har et givet forhold.* [Andersen et al., 1986, s.111],

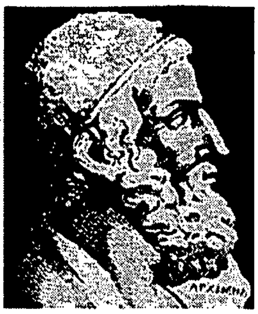
hvilket er ensbetydende med at Arkimedes ser på følgende tredjegradsligning

$$\frac{4r^2}{x^2} = \frac{(3r-x)(m+n)}{mr},$$

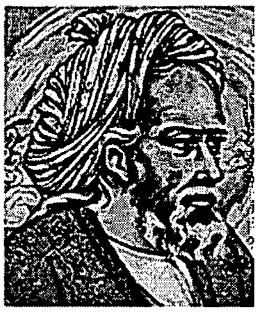
hvor r er den givne radius og m/n det givne forhold. Ifølge senere græske matematikere skulle Arkimedes have løst problemet ved at finde skæringen mellem parablen $ax^2 = b^2y$ og hyperblen $(a-x)y = ac$, men han præsenterer ikke selv nogen løsningsformel. Også Heron og Diofant berører emner der fører til tredjegradsligninger, men heller ikke her er der antydninger af en generel (algebraisk) løsningsformel. [Andersen et al., 1986, s. 111-112] Bogen *Risāla fi'l-barāhīn 'alāmasā'il al-jabr wa'l muqābala*[7] af Omar Khayyam[8] (1048-1131) er en af de

[7]'Afhandling om bevis for problemer om fuldstændiggørelse og sammenligning'. [Andersen et al., 1986, s. 116]

[8]Omar Khayyam er kort for Omar ibn Ibrāhīm al Nisaburī al Khayyam Ghiyāth al-Dīn abu'l Fath.



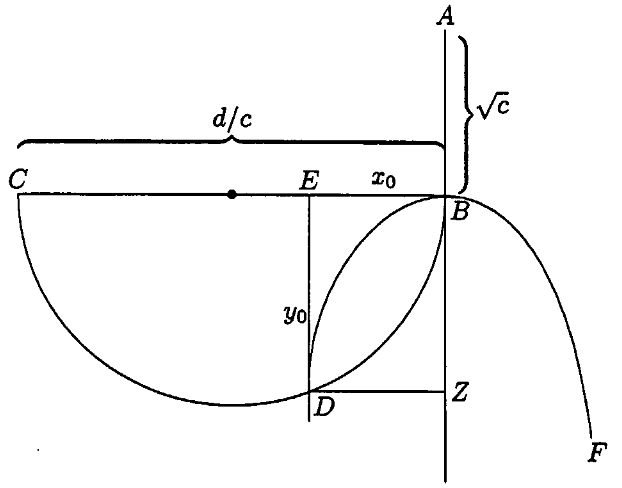
Figur C.4 Arkimedes (287-212 f.v.t.). [O'Connor & Robertson, 2002]



Figur C.5 Omar Khayyam (1048-1131). [O'Connor & Robertson, 2002]

første systematiske behandlinger af tredjegradsligningen. Omar Khayyam deler ligninger til og med tredje grad op i grupper efter hvor mange led de indeholder, og ser så på hvor mange typer der i hver gruppe forekommer når det kræves at koefficienterne er positive. Alt i alt betragtede han 25 forskellige typer, hvoraf 14 af dem ikke kan reduceres til andengradsligninger. [Andersen et al., 1986, s. 116], [van der Waerden, 1985, s. 24-31] og [Katz, 1998, s. 260]

Omar Khayyams løsningsmetoder er ligeledes af et geometrisk islæt, og som et eksempel på dette har vi valgt at give en beskrivelse af den af Katz gennemgåede løsning til ligningen $x^3 + cx = d$.



Figur C.6 [Katz, 1998, s. 261].

Khayyam opfatter alle leddene som tredimensionale, altså bliver tredjegradsligningen en ligning mellem tredimensionale geometriske objekter. Da x repræsenterer en side af en terning må c være et areal – som kan udtrykkes som et kvadrat – således at cx bliver et tredimensionalt objekt, mens d selv er et tredimensionalt objekt. For at konstruere en løsning sættes AB lig længden af en side i kvadratet c, dvs. $AB = \sqrt{c}$ (jf. figur C.6). Nu konstrueres BC vinkelret på AB således at $BC \cdot (AB)^2 = d$, eller $BC = d/c$. Hernæst udvider han AB i retning af Z, og konstruerer en parabel med toppunkt B, akse BZ og parameter AB. I moderne notation er dette parablen med ligningen $x^2 = \sqrt{c} \cdot y$. Ligeledes konstruerer han en halvcirkel på linien BC, dennes ligning er

$$\left(x - \frac{d}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2c}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(\frac{d}{c} - x\right) = y^2.$$

Cirklen og parablen skærer hinanden i et punkt D, og det er x-koordinaten af dette punkt – her repræsenteret ved liniestykket BE – som giver løsningen til ligningen. Ifølge Katz viser Khayyam at hans løsning er korrekt ved at benytte de grundlæggende principper for hhv. parablen og cirklen. Hvis $BE = DZ = x_0$ og $BZ = ED = y_0$ fås først, da D ligger på parablen,

$$x_0^2 = \sqrt{c} \cdot y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{c}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Da D ligeledes ligger på halvcirklen fås dernæst

$$x_0\left(\frac{d}{c} - x_0\right) = y_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{(d/c) - x_0}.$$

Det følger heraf at

$$\frac{c}{x_0^2} = \frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{y_0^2}{((d/c) - x_0)^2} = \frac{y_0}{(d/c) - x_0} \cdot \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0}{(d/c) - x_0},$$

og således fås $x_0^3 = d - cx_0$, altså er x_0 den ønskede løsning. Khayyam påpeger her, uden antydning af bevis, at denne type af ligninger altid kun har én løsning, m.a.o. at parablen og cirklen kun skærer hinanden i et punkt udover udgangspunktet B, som ikke tilvejebringer en løsning til problemet. Khayyams bemærkning kan oversættes til det moderne udsagn om at ligningen $x^3 + cx = d$ altid kun har netop én positiv løsning. [Katz, 1998, s. 260-262]

Figur C.7 Fibonacci (ca. 1170-1250).
[O'Connor & Robertson, 2002]

En af middelalderens vigtigste matematikere, Leonardo de Pisa (ca. 1170-1250), også kaldet Fibonacci, kastede sig over tredjegradsligninger i sit værk *Flos*[9].

[9]'Blomsten'.

Her prøvede han kræfter med ligningen $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci viste at denne ligning ikke kunne have en rational løsning, og heller ikke en løsning der er kvadratroden af et rationalt tal. Han var i stand til at udelukke disse, og flere, som løsninger til ligningen, men ikke til at bestemme den eksakte løsning

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3} + \frac{352}{27}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3} - \frac{352}{27}} - \frac{2}{3} \\ &\approx 1,37. \end{aligned}$$

Selv om han ikke beregner løsningen eksakt har han imidlertid godt styr på størrelsen, og bestemmer ved approksimation at $x \approx 1,35$. [Andersen et al., 1986, s. 161-62]

C.3 Kommentar

Overordnet kan man sige at løsningsmetoderne til løsning af anden- og tredjegradsligningerne op igennem tiden har trukket på vidt forskellige dele af matematikken, fra analyse over geometri til algebra. Ligningerne dukker op i mange forskellige sammenhænge lige fra udregninger af markarealer, grøftegravninger og hestekøbsopgaver til noget som fremspringer af spørgsmål angående abstrakte geometriske overvejelser.

Generelt, ved ibrugtagen af geometriske og algebraiske løsningsmetoder til andengradsligningen, gælder for beviserne af rigtigheden af disse, at den kvadratiske kompletering er hovednøglen. Dette ses både hos araberne al-Khwarizmi og abu Kamil hos indernes Bhāskara og flere andre.

D Tschirnhaus' metode for $n = 4$ og $n = 5$

Følgende eksempler har vi udregnet i *Maple V Release 5*. Udtrykkene er kopieret direkte fra Maple og står derfor i kode. Udtrykkene er ligeledes opstillet i den rækkefølge de er blevet udregnet i. I eksemplet for femtegradsligningen har vi dog ikke kunnet opnå et udtryk for c_1 i b_3, idet Maple ikke har kunnet håndtere beregningerne. Istedet har vi derfor udtrykt c_1 ved samtlige b_i'er. Beregningerne frem til indsættelsen af b_2 i c_1 foreligger dog, og vi mener derfor at det skulle være muligt at danne sig et klart billede af hvor kompliceret et udtryk c_1 må være.

D.1 Fjerdegradsligningen

I fjerdegradsligningens tilfælde har vi

$$P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r = 0, \tag{D.1}$$

hvor $r, q \neq 0$, og

$$Y = X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0. \tag{D.2}$$

Elimination af X mellem (D.1) og (D.2) fører til følgende resultant

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p & q & r \\ 1 & b2 & b1 & b0-Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b2 & b1 & b0-Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b2 & b1 & b0-Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b2 & b1 & b0-Y \end{pmatrix}$$

$= (3*b2*b1*b0^2*q-3*b2*b1*b0*q^2+q*b2^2*b0*r-5*b0*q*r*b1-4*b0*b2*b1^2*r+2*p*b1^2*b0*q+3*q*b0*r*p+3*q*b2*b1^2*r+q*b0^2*p*b2+r*b2^2*b1^2*p-b2^3*q*r*b1+p*q^2*b2*b0-b1*b0*p^2*q-2*p^2*r*b2*b0-2*p*b2^3*r*b0-3*b0^3*q+3*b0^2*q^2-b0*q^3+2*r^2*b1^2+b1^4*r+b2^4*r^2+p^3*b0^2+b0^4+r^3+2*b2^2*b0^2*r-2*b0^3*p*b2+4*b0^2*r*b1-3*b0^2*r*p+q^2*r*b1-4*b2^2*b1*r^2+4*b0*r^2*b2+4*b2*b1*b0*r*$

$p-q*r^2*b2-2*b1^3*r*p-b1^3*b0*q+p^2*b1^2*r+b2^3*q^2*b0-2*b1*r^2*p+p*r^2*b2^2-$
$2*p^2*b1*b0^2+p*b1^2*b0^2+p^2*b2^2*b0^2-b1*q*b2^2*b0*p-p*q*b2*r*b1)+(-2*p^3*$
$b0-b2^3*q^2+q^3+b1^3*q-4*b2*b1*r*p+b1*q*b2^2*p-2*q*b0*p*b2+3*b2*b1*q^2-$
$3*q*r*p+2*p*b2^3*r+b1*p^2*q-6*b2*b1*b0*q+2*p^2*r*b2-2*p*b1^2*b0-p*q^2*$
$b2+9*b0^2*q-6*b0*q^2-4*r^2*b2-2*p*b1^2*q-2*p^2*b2^2*b0-q*b2^2*r-4*b2^2*b0*$
$r+6*b0^2*p*b2-4*b0^3+4*b2*b1^2*r-8*b0*r*b1+6*b0*r*p+5*q*r*b1+4*p^2*b1*$
$b0)*Y+(-9*b0*q+6*b0^2-2*p^2*b1-6*b0*p*b2+p^3+q*p*b2-3*r*p+4*r*b1+$
$p^2*b2^2+p*b1^2+3*b2*b1*q+2*b2^2*r+3*q^2)*Y^2+(2*p*b2-4*b0+3*q)*Y^3+1*Y^4$

hvor

$c4 := 1$

$c3 := -4 * b0 + 2 * p * b2 + 3 * q$

$b0 := 1/2 * p * b2 + 3/4 * q$

$c2 := p * b1^2 + p^2 * b2^2 + q * p * b2 - 2 * p^2 * b1 + 6 * (1/2 * p * b2 + 3/4 * q)^2 + 3 *$
$b2 * b1 * q - 6 * (1/2 * p * b2 + 3/4 * q) * p * b2 + 2 * b2^2 * r + 4 * r * b1 - 3 * r *$
$p + 3 * q^2 - 9 * (1/2 * p * b2 + 3/4 * q) * q + p^3$

$b1 := 1/16 * (-24 * q * b2 + 16 * p^2 - 32 * r + 4 * sqrt(36 * q^2 * b2^2 + 8 * q * b2 * p^2 +$
$96 * q * b2 * r - 16 * p^2 * r + 64 * r^2 + 6 * p * q^2 + 8 * p^3 * b2^2 - 32 * p * b2^2 * r))/p$

$c1 := -3*q*r*p-q*b2^2*r-1/2*(1/2*p*b2+3/4*q)*r*(-24*q*b2+16*p^2-32*$
$r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*$
$b2^2-32*p*b2^2*r))/p-4*r^2*b2+9*(1/2*p*b2+3/4*q)^2*q-4*(1/2*p*b2+3/4*$
$q)^3+q^3-3/8*(1/2*p*b2+3/4*q)*b2*(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*$
$b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*$
$r))*q/p+2*p^2*r*b2+1/16*p*(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*$
$q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))*q-6*$
$(1/2*p*b2+3/4*q)*q^2-b2^3*q^2+1/4096*(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*$
$q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*$
$r))^3*q/(p^3)+6*(1/2*p*b2+3/4*q)^2*p*b2+6*(1/2*p*b2+3/4*q)*r*p+5/16*q*$
$r*(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*$
$r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))/p-4*(1/2*p*b2+3/4*q)*b2^2*r-$
$2*p^2*b2^2*(1/2*p*b2+3/4*q)-p*q^2*b2+2*p*b2^3*r-2*q*(1/2*p*b2+3/4*q)*$
$p*b2+1/64*b2*(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*$
$q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))^2*r/(p^2)-1/128*$
$(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*$
$r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))^2*q/p-1/4*b2*(-24*q*b2+16*p^2-$
$32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*$
$p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))*r+1/16*(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+$
$8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))*q*$
$b2^2+3/16*b2*(-24*q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*$
$b2*r-16*p^2*r+64*r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))*q^2/p-1/128*(-24*$
$q*b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*$
$r^2+6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))^2*(1/2*p*b2+3/4*q)/p+1/4*p*(-24*q*$
$b2+16*p^2-32*r+4*sqrt(36*q^2*b2^2+8*q*b2*p^2+96*q*b2*r-16*p^2*r+64*r^2+$

$6*p*q^2+8*p^3*b2^2-32*p*b2^2*r))*(1/2*p*b2+3/4*q)-2*p^3*(1/2*p*b2+3/4*q)$

D.2 Femtegradsligningen

For femtegradsligningen

$$P(X) = X^5 + sX^3 + rX^2 + pX + q = 0, \tag{D.3}$$

hvor $s, r, q \neq 0$, og

$$Y = X^4 + b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0. \tag{D.4}$$

Elimination af X mellem (D.3) og (D.4) fører i dette tilfælde til følgende resultant

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & r & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q & r & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p & q & r & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & p & q & r & s \\ 1 & b3 & b2 & b1 & b0-Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b3 & b2 & b1 & b0-Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b3 & b2 & b1 & b0-Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b3 & b2 & b1 & b0-Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b3 & b2 & b1 & b0-Y \end{pmatrix}$$

$= (-3*b3*b1^3*b2*s*q-b3*b1^3*p*s*q-p*b3^3*s^3-b3^4*r^2*s*b1+b3^4*r*s^2*b2-$
$2*b3*b1^3*p*b0*r-3*b3^4*s*r*b0*q+p*b1^2*b0^3+p*b3^2*b2*b1^2*s*q-q*b2^3*b1*$
$r*b0+q*b2^3*b1^2*s+3*b1^4*s*q-10*b3*b1*r*b0*s*q-2*b3^2*b1^3*r*s+s^4+3*p^2*$
$b3^2*b0*s^2-p*b3^2*r^2*s*b1-4*b0^3*s*q+q^2*b3^3*b0*r*b1+2*q*b3^4*s^2*b1-p^2*$
$b3^2*q*b1*b0^2+2*p*b3^3*r*b1^2*s-3*p*b3^2*r*b0*s*q+3*p*b3^3*r*b0^2*q+p^2*b2*$
$q^2*b0^2-p^2*b2*b1*q*b0*r-2*p*b2^2*q^2*b0^2+p^2*b2^2*b0^3+2*p*b2^2*b1*b0*r*q+$
$6*p^2*b2*b0^2*s*b3+4*p*b2*b3*b1*b0^2*r-2*p^3*b2*r*b0^2+p*b2*b0^3*q*b3+4*$
$p*b2^3*b0*s*q+3*p*b2^3*b0*s*b1+2*p*b2^3*r*s*b1-2*p^3*b2*b0^3+4*p*b2*b3*$
$b1*b0*r^2-7*p*b2*s^2*b1^2-3*p*b2^2*b3*b0^2*s-q^2*b3^3*b1^2*s+p*b3^2*b0*r^3+p*$
$b3^2*r*s^2*b2-2*p^2*b2*b3^2*b0^2*r+4*p^2*b2^2*b0^2*r+p^4*b0^3+4*p^2*b0^2*s*q-2*$
$p^2*b3*b1*b0*r^2+2*p^2*b2*b1^3*s-2*p*b2^3*b0^2*r+p*b2^3*b3^2*s^2-p*b2^2*b1^3*s+$
$p*b2*b1*s^2*q+p*b2^2*b0*b1^2*r-p*b2^2*b1*b0^2*q-p*b2^2*b3^2*r*s*b1-9*p*b2*$
$s^2*b3^2*b0+b3*b1^2*q*b0*r*p-b3*b1*q^2*b0^2*p-3*b3*b1*q^2*b2*b0^2+p^2*b0^3*q*$
$b3-3*p^3*b0^2*s*b3+3*b3*b1^2*b2*b0*r*q-2*b3*b1*b0^3*p^2+6*b3*b1*b2^2*b0*s*$
$q+4*b3*b1^2*b2^2*r*s+b3*b1*b0^2*s*q+2*b3^2*b1^2*b0*r^2-5*b3*b1*b2^3*s^2+2*$
$p*b3^2*b1*s^2*q+3*p*b3^4*s^2*b0-3*p^2*b3^3*b0^2*s-2*p*b3^3*b1*b0*r^2+p*b3^2*$
$b0^2*s*q+p^3*b3^2*b0^3+2*b3*b1^4*p*s+7*b3*b1^2*s^2*q+3*b1^2*b0*q^2*r+5*b2^2*$
$b1^2*s^2-3*b0*q*r*b1^3-p^2*b3^2*b1^3*s+b1*q^2*p*b0*s-b1*q*p^2*b0*s*b3+6*b1*$

$b0*q^2*s*b2+2*q^2*p*b3*b0*s*b2+q^2*p*b3*b1*b0*r+3*r*b3*b0*s*q^2-b1*b0*$
$q^3*r-2*b1*s^2*b3*q^2-12*p*b2*b0^2*s*q-2*b0*q^3*s*b2-11*b0^2*r*s*b1+4*b0^2*$
$s*b1*p*b2+2*p*b1^2*b0^2*r+s*b0^2*q^2*b3+7*b0^2*b3^2*b1*s*p-3*b1*r*b2*b0*$
$q^2*b3-2*r*b3*b0^2*s*b2-3*b1*q*s^2*b2^2+6*r*b0^2*s*p*b3-3*q^2*b1^3*s-b1*q*$
$p*b3^3*s*b0-3*b1*q^3*b0^2+b1^4*b0*r-q^3*p*b0^2*b3-4*b0^2*r^3-7*q*b3^2*b0^2*s*$
$b2-5*q*b3^2*b1*b0^2*r+5*b0^3*s*b1-5*q*b1*b0^3*p+3*s*b3^3*r*b0^2+4*b3^2*b2*$
$r^2*b0^2+8*r*b0^2*s*q-q^2*p*b3*b1^2*s+5*r*b0^3*q*b3-5*b0^2*b3*b1^2*s+2*b0*$
$s^2*q^2-6*b3*b2^2*b0*q^2*s+b3*b2*q*p*r*s*b1+r^2*b0*s*p*b3+2*r^2*s*b1*p*b2-$
$3*r^2*b3*b0*s*b2+b3^4*r^3*b0-4*r^2*b3*b1^2*s-4*r^2*b0*s*q-r^2*b0^2*q*b3+2*$
$b2^2*b0*r^3-3*p*b1^2*b0*r^2-r^3*s*b1+s*b3^3*r^2*b0-q*b2^2*p*b3*s^2-4*b3^2*b2*$
$r^3*b0-6*q*b3^2*b2*s^2*b1+5*b0*s^3*b3+q*b3^2*b1*b0*r^2+3*q*b3*b2^2*b0*r^2+$
$b0*r^4+q*r^2*b3*s*b1-q*r*b3*s^2*b2+b0*p*b1^2*s*q-q*r^2*b3*b0*p*b2-9*b0*$
$b2*b1^2*s*q-5*b0*s^2*b3^3*b1+3*b2*q^3*b3*b0^2+7*b0*r^2*s*b1+b0*s^2*b3*p*b1+$
$2*b0*r*s*b1*p*b2-5*b0*b1*s^2*b3*b2+3*s*b2*b1^2*q^2*b3+q^2*s^2*b2^2+13*b0*$
$r*b3*b1^2*s+q^3*b1^2*s-q^2*r*b2*s*b1+q^2*b0*r^2*b2-6*b0*r*s^2*b2+q^4*b0^2-4*$
$r*b0^4+8*b0*b2^2*s^2*p-3*r*p*b1^2*s*q+5*r*b2*b1^2*s*q-r*s^2*b3^3*b1-5*b3*$
$b2^2*s^3-r*q^2*b3^2*b0^2+2*r*q*b1*b0^2*p-r*s^2*b3*p*b1+7*r*b1*s^2*b3*b2-5*$
$r*b0*b3^2*b1*s*p-4*b0^2*b2*b1^2*r+3*b2*b1*b0^3*q-7*b0^3*s*p*b3+2*b1*b2*$
$b0^2*r*q-5*q*b0*s^2*p*b3+4*b3*b1*b0^3*r+b0^2*s*p^2*b1+2*b0^4*p^2-5*b2^2*b0^2*$
$s*b1+6*b0^3*r^2+8*b2^2*b0^2*s*q+5*b3^3*b2*s^3+2*r^2*b0^2*p*b2-8*b3*b1*b0^2*$
$r^2+4*q*b3*b0*s^2*b2-q*r^3*b3*b0-3*b3^2*b0^3*r*p-2*q*s^3*b2+5*b3*b0^3*s*$
$b2+4*r*b0*s^2*p-2*r*b2^2*s^2*p+b0^5-2*q*s^2*b3^3*b0+3*q*b3*b2^3*s^2-3*q*b3*$
$b2^2*r*s*b1+4*r*p*b2*b0*s*q+11*r*q*b3^2*b0*s*b2+q*s^3*b3^2+r*b2^2*b0^2*q*$
$b3+b2^5*s^2-2*b2^4*b0*q*s-b2^4*r*s*b1+2*b3^2*b0^2*r^2*p-b2^2*q*b3^3*s^2+3*q^2*$
$b1^2*b0^2-3*b1*s^3*p-5*b3*b1^3*s^2-p^3*b1^3*s+4*b0*b2*b1^2*r^2-5*b3^2*b1*s^3+$
$4*b3^2*b2*r^2*s*b1+3*b1*q*b0*r^2*p-r*s^3*b3+p^2*b2^3*s^2-5*b1*b2*b0*r^2*q-$
$3*r*s^2*b1^2+5*b0*s^2*b1^2+2*r^2*b0^2*p^2-2*b0^4*p*b2+2*b2^2*b0^3*r+5*b0^2*s^2*$
$b2+5*s^2*b3^2*b0^2+4*q^2*b0^3*p-q*b1^3*b0^2-3*q^2*b2*b0^3-4*r*b0^3*p^2-3*b0^4*$
$q*b3-2*b2^2*r^2*s*b1+r^2*s^2*b2-4*b0^2*s^2*p-2*r^3*b0*p*b2+4*b3*b1*b0*r^3+$
$q^2*b2^3*b0^2-2*b0*p*b1^3*s+5*b0*b3^2*b2^2*s^2-7*b0*b1*s^2*q+5*b0*b2*b1^3*s-$
$7*b0*b3^2*b2*r*s*b1+3*b0*b2^2*r*s*b1+3*b0*q*b3^2*b1^2*s-5*b0*b2^3*s^2-2*p*$
$b2^2*r*b3*b0*s+p*b2^2*b3^2*r^2*b0-2*p^2*b2^2*b0*s*q+p^2*b2*r*b0*s*b3-6*p^2*$
$b2^2*b0*s*b1-2*p^2*b2*b1^2*b0*r+3*p^2*s^2*b1^2+p^2*b2*b1^2*s*q-2*p*b2^2*b1^2*$
$s*q-p^2*b2^2*r*s*b1-4*b2^2*b0^2*r^2+b2*r*b3^3*s*b1*q+3*p*b2*s^3*b3+b2^4*b0*$
$r^2-3*p*b2*s^2*b3^3*b1+2*r*b0^3*p*b2+3*r*p*b1^3*s-4*r*b3^2*b2^2*s^2+3*r*b1*$
$s^2*q-4*r*b2*b1^3*s+r*s^2*b3^2*b0-4*r*q^2*b0^2*p+2*r*q^2*b2*b0^2-5*r*b0*s*$
$p^2*b1+2*r*b2^3*s^2-4*r*b2^2*b0*s*q-r*q*b3^2*b1^2*s+r*b3*b2^3*b0*s-b1^5*s+$
$2*b2*q^2*b3^3*s*b0-q^3*b3^3*b0^2+p^3*b1^2*b0*r-2*p*b2^4*s^2-p*b2*q*b3^2*b1*b0*$
$r-3*p^2*b2*b0*s^2-2*p*b2^3*b0*r^2+p*b2*q^2*b3^2*b0^2+3*p^2*b2*b0*b3^2*b1*s+2*$
$p^2*b2*q*b1*b0^2-3*p^2*b2*s^2*b3*b1+6*p*b2^2*b1*s^2*b3-b2*r^2*b3^3*b0*q-6*p*$
$b2*b0*b3*b1^2*s-p^3*q*b1*b0^2+3*q^2*b3^2*b0^3+2*p^2*r*b3*b1^2*s+3*p^2*r*b0^2*$
$q*b3+3*p^3*b0*s*b1*b2-8*p*b2*r*b0^2*q*b3+3*b3^2*b1^2*s^2*p+5*b3^2*b1^2*s^2*$
$b2+p^2*b2^2*b0*r^2+5*b1*s^3*b2-4*b3*b1*b2^2*b0*r^2-2*p*b2^2*q*b3^2*b0*s+p*$
$b2*s*b3^3*r*b0-4*p*b2*r*b3*b1^2*s+2*b3*b1^2*q*b0^2*p-b3^5*s^3+p^2*b3^2*b1^2*$
$b0*r+5*b3*b1*p*b2*b0*s*q)+(-2*b2^2*r^3-2*s^2*q^2+6*b3*b1*q^2*b2*b0+10*$
$b3*b1*r*s*q-3*p^4*b0^2-2*b3*b1*b0*s*q-2*p*b3^2*q^2*b2*b0+3*p*b3^2*r*s*q-$
$4*p*b2*b3*b1*r^2+6*p^2*b3^3*b0*s-q^2*b3^3*r*b1-4*p*b2^3*s*q-5*b3*b1*p*b2*$
$s*q-p^2*b3^2*b1^2*r-6*p^2*r*b0*q*b3+2*p*b2^2*q*b3^2*s+6*p*b2*b3*b1^2*s-p*$
$b2*s*b3^3*r+p*b2*q*b3^2*b1*r+b2*r^2*b3^3*q-8*p^2*b0*s*q+6*p^3*b0*s*b3+4*$
$b3*b1*b2^2*r^2-8*p*b2*b0*b3*b1*r+2*p*b2^2*r*b3*s+16*p*b2*r*b0*q*b3+6*p*$

$b2^2*b0*b3*s-12*p^2*b2*b0*s*b3+4*p^2*b2*b0*b3^2*r-p^2*b2*r*s*b3+4*p^3*b2*$
$b0*r+6*p^2*b2^2*s*b1+2*p^2*b2*b1^2*r+9*p*b2*s^2*b3^2-6*r*b0^2*p*b2+4*r*b2^2*$
$s*q+2*r*q^2*b3^2*b0-3*p^2*b2*b3^2*b1*s-r*b3*b2^3*s-2*b2*q^2*b3^3*s-2*p^2*b2*$
$q^2*b0+4*p*b2^2*q^2*b0-p*b2^2*b3^2*r^2+2*p^2*b2^2*s*q-3*p^3*b2*s*b1-11*r*q*$
$b3^2*s*b2-4*r*p*b2*s*q-2*b0*r*b2^2*q*b3+5*r*b3^2*b1*s*p+5*q*s^2*p*b3-$
$3*b1*q*r^2*p+5*b1*b2*r^2*q-4*q*b3*s^2*b2-4*r*q^2*b2*b0+5*r*s*p^2*b1+8*$
$r*q^2*b0*p-2*s*b0*q^2*b3+q*r^2*b3*p*b2-r^4+3*r^2*b3*s*b2-4*b0*b3^2*r^2*p-$
$3*q*b3*b2^2*r^2-q*b3^2*b1*r^2+3*b3*b2*b1*q^2*r-r^2*s*p*b3+2*r^2*b0*q*b3-6*$
$b3*b2*q^3*b0+4*r^2*s*q+b1*q*p*b3^3*s-2*q^2*p*b3*s*b2+6*b3*b2^2*q^2*s+b1*q*$
$p^2*s*b3-q^2*p*b3*b1*r-b1*q^2*p*s+2*q^3*p*b0*b3-3*r*b3*s*q^2-6*b1*q^2*s*$
$b2+2*p^2*b3^2*q*b1*b0-6*b3*b1*b2^2*s*q-2*q^4*b0-3*p^2*b0^2*q*b3+2*p^2*b3*$
$b1*r^2+6*b3*b1*b0^2*p^2+2*p*b3^3*b1*r^2-2*p*b2^2*b1*r*q+p^2*b2*b1*q*r-8*p^2*$
$b0*b2^2*r+2*p^3*q*b1*b0+2*q^3*b3^3*b0-4*b3*b1^2*q*b0*p-3*b3*b1^2*b2*r*q-$
$b3*b1^2*q*r*p+3*b3^4*s*r*q-4*p^2*b2*q*b1*b0-3*p*b2*b0^2*q*b3-3*p*b2^3*s*$
$b1-2*b3^2*b1^2*r^2-6*p*b3^3*r*b0*q+2*b3*b1^3*p*r+2*b3*b1*q^2*b0*p-2*p*b3^2*$
$b0*s*q-b3^4*r^3-r*s^2*b3^2+5*s^2*b3^3*b1-5*s^3*b3-2*r*s*b1*p*b2-12*r*b0*s*$
$p*b3+4*r*b3*b0*s*b2+9*b2*b1^2*s*q-p*b1^2*s*q-4*p*b1^2*b0*r-14*b0*b3^2*$
$b1*s*p-8*b0*s*b1*p*b2+22*b0*r*s*b1+10*b0*b3*b1^2*s-15*r*b0^2*q*b3-16*$
$r*b0*s*q-13*r*b3*b1^2*s+24*p*b2*b0*s*q-8*b3^2*b2*r^2*b0+5*b1*s^2*b3*b2-$
$s^2*b3*p*b1-6*s*b3^3*r*b0+15*q*b1*b0^2*p-15*b0^2*s*b1-7*r^2*s*b1-9*q^2*$
$b3^2*b0^2+8*b2^2*b0*r^2-8*b2^2*s^2*p+8*b0*s^2*p+6*r*s^2*b2+10*q*b3^2*b1*b0*$
$r+14*q*b3^2*b0*s*b2+8*b0*r^3+5*b2^3*s^2-5*s^2*b1^2-15*b3*b0^2*s*b2+9*b3^2*$
$b0^2*r*p+16*b3*b1*b0*r^2+12*b0^2*s*q-4*r^2*b0*p*b2-3*q*b3^2*b1^2*s-3*b2^2*$
$r*s*b1-16*b2^2*b0*s*q+10*b2^2*b0*s*b1-2*b0*s*p^2*b1+12*b0^3*q*b3+12*r*$
$b0^2*p^2-8*b0^3*p^2-18*b0^2*r^2+16*r*b0^3-12*b3*b1*b0^2*r+21*b0^2*s*p*b3-4*$
$b1*b2*b0*r*q-4*b1*q*b0*r*p+9*q^2*b2*b0^2-12*q^2*b0^2*p+7*b3^2*b2*r*s*b1-$
$10*s^2*b3^2*b0-4*b0*r^2*p^2+2*r^3*p*b2+2*p*b2^3*r^2-9*b2*b1*b0^2*q+8*b0*b2*$
$b1^2*r-r*b2^2*b1^2*p+b2^3*q*r*b1+4*p*b2^3*r*b0-b1^4*r-b2^4*r^2+6*b1*q^3*b0+$
$6*p^3*b2*b0^2-5*b2*b1^3*s-s*b3^3*r^2+3*p*b1^2*r^2-p^3*b1^2*r-10*b0*s^2*b2-4*$
$r*s^2*p+2*q^3*s*b2-p*b3^2*r^3-q^2*r^2*b2-3*p^3*b3^2*b0^2-4*b3*b1*r^3-p^2*b2^2*$
$r^2+7*b1*s^2*q+3*q*r*b1^3-5*b3^2*b2^2*s^2+b1*q^3*r+2*p*b1^3*s-5*b0^4-6*b2^2*$
$b0^2*r+8*b0^3*p*b2+2*b1^3*b0*q-2*b2^3*q^2*b0-3*p*b1^2*b0^2-3*p^2*b2^2*b0^2+q*$
$r^3*b3-4*b2*b1^2*r^2-3*p*b3^4*s^2-3*p^2*s^2*b3^2-6*q^2*b1^2*b0+2*b1*q*b2^2*b0*$
$p-3*b1^2*q^2*r+3*p^2*b2*s^2+2*b2^4*q*s+2*q*s^2*b3^3+4*b3^2*b2*r^3)*Y+(3*p^4*$
$b0+2*r^2*p^2-q^3*b3^3+6*p^2*b2*s*b3-3*p*b2^2*b3*s-p^2*b3^2*q*b1+p*b3^2*s*q+$
$3*p*b3^3*r*q+3*p*b2*b0*q*b3+3*p^2*b0*q*b3+2*b3*b1^2*q*p-8*p*b2*r*q*b3+$
$3*p^2*r*q*b3+p*b2*q^2*b3^2+2*p^2*b2*q*b1-4*b2^2*r^2+r*b2^2*q*b3+2*b1*b2*$
$r*q+2*r*q*b1*p+q^4-5*q*b3^2*b1*r-12*p*b2*s*q-7*q*b3^2*s*b2-3*b1*q^3+$
$3*q^2*b1^2+4*p*b2*b3*b1*r-b3*b1*q^2*p-3*b3*b1*q^2*b2-3*p^3*s*b3-2*p^2*b2*$
$b3^2*r+b2^3*q^2-b1^3*q+b3*b1*s*q+7*b3^2*b1*s*p+12*b3*b1*b0*r+12*b0^2*p^2+$
$4*s*b1*p*b2-6*b3*b1*b0*p^2-21*b0*s*p*b3+6*r*s*p*b3+15*r*b0*q*b3+15*$
$b3*b0*s*b2-9*b3^2*b0*r*p+18*b0*r^2+5*s^2*b2-4*s^2*p-b1*q*b2^2*p-2*r*b2*$
$s*b3-5*s*b2^2*b1+5*s^2*b3^2-2*p*b2^3*r+9*b2*b1*b0*q-15*p*b1*b0*q+3*p*$
$b1^2*b0+9*b0*q^2*b3^2+4*p^2*b2^2*r-24*r*b0^2+2*p*b1^2*r-q^3*p*b3+s*q^2*b3-$
$2*p*b2^2*q^2-6*p^3*b2*b0+12*q^2*b0*p-p^3*q*b1+4*b3^2*b2*r^2+3*p^2*b2^2*b0-$
$4*r*q^2*p-9*q^2*b2*b0+3*p^3*b3^2*b0-2*p^3*b2*r+p^2*b2*q^2+3*b2*q^3*b3-3*p^2*$
$b3^3*s+2*b3^2*r^2*p+2*r^2*p*b2-18*b0^2*q*b3+6*b2^2*b0*r+s*p^2*b1-12*r*b0*$
$p^2+8*r*s*q-11*r*s*b1-12*b0*s*q+15*b0*s*b1-5*b3*b1^2*s-12*b0^2*p*b2+$
$10*b0^3-4*r^3-4*b2*b1^2*r-r*q^2*b3^2+4*p^2*s*q+2*r*q^2*b2-r^2*q*b3+8*b2^2*$
$s*q+3*s*b3^3*r-8*b3*b1*r^2+6*r*b0*p*b2)*Y^2+(2*p^3*b2-p^3*b3^2-2*r*p*b2-$

$$p*b2*q*b3-4*q^2*p-3*q^2*b3^2+3*q^2*b2-p^4+4*r*p^2-2*b2^2*r+16*b0*r-8*b0*p^2-5*s*b1+4*s*q+3*b3^2*r*p-3*b2*b1*q-5*r*q*b3-10*b0^2-6*r^2-p*b1^2-p^2*b2^2+5*q*b1*p+7*s*p*b3+12*b0*q*b3-4*b3*b1*r+8*b0*p*b2+2*b3*b1*p^2-p^2*q*b3-5*b3*s*b2)*Y^3+(-4*r+2*p^2-2*p*b2-3*q*b3+5*b0)*Y^4-1*Y^5$$

hvor

$$c5 := -1$$

$$c4 := 5*b0+2*p^2-3*q*b3-2*p*b2-4*r$$

$$b0 := -2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r$$

$$c3 := 5*q*b1*p+3*b3^2*r*p-10*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)^2-8*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*p^2+16*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*r-p^2*q*b3-p*b2*q*b3-5*s*b1+4*s*q+7*s*p*b3+2*b3*b1*p^2+12*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*q*b3-2*r*p*b2+8*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*p*b2-3*q^2*b3^2-4*b3*b1*r-5*b3*s*b2-3*q*b1*b2-5*r*q*b3+2*p^3*b2+4*r*p^2-p^2*b2^2+3*q^2*b2-4*q^2*p-2*b2^2*r-6*r^2-p^4-p*b1^2-p^3*b3^2$$

$$b1 := 1/10*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+\mathit{sqrt}(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))/p$$

$$c2 := q^2*b2^3-4*r^3+5*s^2*b2-4*s^2*p+3*p^4*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)+12*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)^2*p^2-4*b2^2*r^2+5*s^2*b3^2+3*p*b3^3*r*q+p*b3^2*s*q+r*b2^2*q*b3-1/10*p^2*q*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+\mathit{sqrt}(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))+1/5*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+\mathit{sqrt}(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*r*q-1/10*b2^2*q*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+\mathit{sqrt}(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))+2/5*s*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+\mathit{sqrt}(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*b2+1/50*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+\mathit{sqrt}(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+$$

$400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*$
$q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+$
$440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*$
$p^3*b3))^2*r/p-3/2*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*q*(-15*q*b2+25*$
$q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*$
$q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*$
$b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*$
$b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-$
$100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))+1/10*s*p*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-$
$20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+$
$400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*$
$q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+$
$440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*$
$p^3*b3))+7/10*b3^2*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*$
$q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*$
$b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*$
$r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*$
$s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*s+3/100*q^2*$
$(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-$
$850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*$
$p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+$
$60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+$
$750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))^2/(p^2)-q^3*b3^3-7*q*b3^2*s*b2+8*b2^2*$
$s*q+8*r*s*q+2*r^2*p*b2+4*b3^2*b2*r^2-12*p*b2*s*q+3*p^2*r*q*b3-8*p*b2*r*$
$q*b3+6*p^2*b2*s*b3+6*r*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*p*b2+3*b2*$
$q^3*b3-3*p^3*s*b3+4*p^2*s*q-9*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*b3^2*r*$
$p+15*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*b3*s*b2-21*(-2/5*p^2+3/5*q*$
$b3+2/5*p*b2+4/5*r)*s*p*b3+3/2*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*s*$
$(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-$
$850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+$
$60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*$
$s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*$
$p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))/p-1/2*q*b3^2*(-15*q*b2+25*$
$q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*$
$q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*$
$p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*$
$p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*$
$s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*r/p+9/10*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+$
$4/5*r)*q*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*$
$p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+$
$40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-$
$500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*$
$b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*b2/p+1/5*(-15*$
$q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*$
$p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*$
$b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+$
$60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+$
$750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*b2*r*q/p+1/50*b3*(-15*q*b2+25*$
$q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*$
$q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*$

$b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*$
$b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-$
$100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))^2*q/p-2*r*b3*s*b2+3*s*b3^3*r+12*(-2/5*p^2+$
$3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*q^2*p-q^3*p*b3+6/5*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*$
$p*b2+4/5*r)*b3*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*$
$q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*$
$b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*$
$r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*$
$s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*r/p-11/10*$
$r*s*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*$
$s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*$
$r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*$
$b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*$
$b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))/p-3/10*b3*(-15*q*b2+$
$25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+$
$225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-$
$120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-$
$200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*$
$q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*q^2*b2/p+3*p*b2*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+$
$2/5*p*b2+4/5*r)*q*b3+3*p^2*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*q*b3+$
$15*r*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*q*b3+18*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+$
$2/5*p*b2+4/5*r)*r^2+10*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)^3+q^4+6*r*$
$s*p*b3-24*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)^2*r+2*r^2*p^2-3*p*b2^2*b3*$
$s-2*p^2*b2*b3^2*r-1/10*p*b3^2*q*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*$
$b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*$
$b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*$
$b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*$
$p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))-$
$1/2*b2^2*s*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*$
$p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+$
$40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-$
$500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*$
$b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))/p+2*b3^2*r^2*p-$
$1/10*b3*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+$
$625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*$
$p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*$
$b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*$
$b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*q^2-3/10*(-15*q*b2+25*$
$q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*$
$q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*$
$p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*$
$p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*$
$s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*q^3/p-4*r*q^2*p+2*r*q^2*b2-4/5*b3*(-15*q*$
$b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*$
$s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-$
$120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-$
$200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*$
$b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*r^2/p-1/25*b2*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*$
$p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*$
$q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*$

$$
p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*
q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-
80*q*p^3*b3))^2*r/(p^2)+2/5*b2*b3*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*
b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*
b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*
b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*
p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*
r+1/5*p*b2*q*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*
b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*
p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*
b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*
s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))-3/5*b3*p*
(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*s^2-
850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*r^2+
60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*b3*s*
b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*b3*p^2*
s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+
4/5*r)-1/20*b3*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*
q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*
b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*
b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*
r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))^2*s/(p^2)+1/10*
b3*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*q^2*b2*p+625*
s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*b3*p^2+40*p*
r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*r*b3-500*p*
b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*s*r*b3+200*
b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))*s*q/p-r*q^2*b3^2-2*p*b2^2*
q^2+p^2*b2*q^2-2*p^3*b2*r-2*p*b2^3*r+p*b3^2*q^2*b2+4*p^2*b2^2*r-3*p^2*b3^3*s+
s*q^2*b3+3/100*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*
q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*
b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*p*
r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+1000*
s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))^2*(-2/5*p^2+
3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)/p+3*p^3*b3^2*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+
4/5*r)+9*q^2*b3^2*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)+6*b2^2*(-2/5*p^2+
3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*r-9*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*q^2*
b2-6*p^3*b2*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)-12*(-2/5*p^2+3/5*q*
b3+2/5*p*b2+4/5*r)*s*q-12*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)*r*p^2-
18*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)^2*q*b3+3*p^2*b2^2*(-2/5*p^2+3/5*
q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)-12*(-2/5*p^2+3/5*q*b3+2/5*p*b2+4/5*r)^2*p*b2-
r^2*q*b3-1/1000*q*(-15*q*b2+25*q*p+10*b3*p^2-25*s-20*r*b3+sqrt(-450*
q^2*b2*p+625*s^2-850*q*p*s+225*q^2*b2^2+225*q^2*p^2+400*r^2*b3^2+80*q*b2*
b3*p^2+40*p*r^2+60*p^3*b2^2-120*p^4*b2-240*r*p^3+600*q*b2*r*b3-540*q*
p*r*b3-500*p*b3*s*b2+60*p^5-200*p*b2^2*r+60*p*q^2*b3^2+440*r*p^2*b2+
1000*s*r*b3+200*b3*p^2*s+750*q*b2*s-100*b3^2*p^2*r-80*q*p^3*b3))^3/(p^3)
$$

$$
b2 := RootOf(-1152500*q^3*p^3*s^3-83300*p^8*s*q^3-41600*b3^2*r^5*p^4+6075*
q^6*b3^4*p^4+14600*p^8*q^4*b3^2-123125*p^6*s^3*q-9450*q^7*b3^3*p^3+234375*
s^4*b3^4*p^3-390625*s^5*b3^3*p+15875*p^9*s^2*b3^2-21600*p^7*q^5*b3-67050*r*
q^4*p^7+(-1536*p^{1}4+372480*p^8*r^3-19200*p^{1}1*q^2-3840*r^6*p^2+1800*r^5*p*
$$

$q^2-15000*r^4*p*s^2+3315000*q^3*p^2*s^3-2000000*s^4*q^2*p+308125*p^5*q*s^3+$
$88352*r^5*p^4-13850*s^2*p^9+203600*p^9*q^2*r+410200*p^7*q^3*s+810000*q^5*p^4*$
$s+46400*p^1 0*q*s-2419625*s^2*q^4*p^3-578900*p^7*r^2*q^2-860650*r^2*s^2*p^5+$
$578125*s^4*p^2*r-79800*p^8*q^4+1649600*r^2*p^6*s*q-2000*s*q*r^5+390625*$
$s^5*q-1600*r^6*q*b3-390625*s^5*b3*p-2819375*r*p^3*s^3*q+4078125*r*p^4*$
$q^2*s^2-134375*s^3*q^3*r-50625*q^5*p^2*r*s+169875*q^4*p*s^2*r-560500*p^8*$
$q*r*s+93750*r^2*s^3*p*q+403750*r^2*s*q^3*p^3-798200*p^4*s*q*r^3-2196600*$
$p^5*r*q^3*s-412680*r^4*p^6-659000*p^6*s^2*q^2-59400*q^4*p^4*r^2+16200*q^4*p^2*$
$r^3+391500*r*p^6*q^4+277900*r*p^7*s^2-58950*r^3*s*q^3*p+58000*r^3*s^2*p^3+$
$343500*p^5*r^3*q^2+143100*r^4*s*q*p^2-76400*r^4*q^2*p^3-101250*p^5*q^6-554625*$
$q^2*p^2*s^2*r^2-76000*b3^2*r^2*p^9-3125*p^4*b3^5*s^3-12800*r^6*p*b3^2+1350*q^7*$
$b3^5*p-390625*s^4*b3^4*p^2+60000*b3^4*r^3*p^6+108000*q^5*p^6*b3-1000000*s^4*$
$b3^2*p^3+8640*p^8*q^3*b3^3-58400*p^7*q^4*b3^2-5000*b3^4*r^2*p^8+23680*p^1 2*r+$
$9375*s^4*p^4+686000*q^3*b3^3*p^3*s^2+473300*r^3*s*p^5*b3-13500*r^3*q^3*p^3*b3-$
$6250*r^3*s^2*p*q*b3-22560*p^1 0*q*b3*r-77600*p^7*q^2*b3^3*s+1640625*s^4*q*$
$r*b3+603125*q*p^3*s^3*b3^4-316500*p^4*b3^4*s^2*q^2-8257500*q^2*p*s^2*b3^2*r^2-$
$5234125*b3^2*r*p^3*q^2*s^2-2702100*p^5*q*b3*r*s^2-1848750*q^3*s^2*p*b3^3*r+$
$28350*q^7*p^2*b3^3+305200*b3^2*r^3*p^7+44800*p^9*q^3*b3-206250*q^4*s^3*b3-$
$1296250*b3^3*r*p^4*q*s^2+128250*q^5*p^3*b3^3*r+273375*q^5*p^3*b3^2*s+3030000*$
$p^4*q^3*b3*s^2-1159850*p^5*q^2*b3^2*s^2-1015625*q^3*s^3*p*b3^2+5860000*r^2*s^2*$
$p^2*b3^3*q+5896875*r*s^3*p^2*b3^2*q-4784600*r^3*s*q*p^3*b3^2-121900*b3^2*r*$
$p^7*s*q-545520*b3^2*r^2*p^6*q^2+10800*b3^4*r*p^7*q^2+126900*b3^2*r*p^5*q^4-$
$676500*b3^2*r^2*p^4*s^2-687500*q*p*s^3*b3^4*r-4949125*r^2*s^2*p^3*q*b3+670200*$
$p^5*b3^3*r*q^2*s-21200*p^6*b3^4*r*q*s-2375000*s^3*b3^3*p*r^2+662500*s^3*b3^3*$
$p^3*r+488025*q^5*p^4*r*b3+42525*q^6*p^2*r*b3^2-101250*q^6*p^2*s*b3+7400*$
$p^7*q*b3^3*r^2-309300*p^8*q^2*b3*s+48800*p^9*q*b3^2*s-586000*p^7*s*b3*r^2+$
$6250*s^2*b3^5*r*p^3*q+2500*p^7*b3^5*r*s+47500*q^2*s^2*r^3-1900*p^6*b3^5*q^2*s-$
$24000*r^5*p*s*b3-286380*r^4*q*b3*p^4-1640625*r*s^4*p*b3^2-138840*r^2*p^1 0-$
$212825*r^3*s*q^2*p^2*b3+6380225*r^2*s*q^3*p^2*b3^2+1794600*b3^3*r^3*p^2*q^3+$
$1432000*b3^3*r^4*p^2*s-320000*b3^5*r^4*p*s-1400000*b3^4*r^3*p*s^2+65600*r^4*$
$q^2*p^2*b3^2+6400*b3^3*r^5*p*q-62775*q^6*b3^4*p*r+62500*s^3*b3^5*r*p^2-37050*$
$r^4*q^3*p*b3-13725*q^4*b3^5*p^3*s+217900*p^9*s*b3*r-2625*p^5*b3^5*s^2*q+3200*$
$p^8*b3^4*s*q-112000*r^4*p^3*b3*s-40000*b3^4*r^2*p^3*s^2-1650*b3^5*r^2*p^3*q^3+$
$1797180*b3^2*r^3*p^4*q^2+373960*p^6*r^3*q*b3-4573125*q^2*p^3*s^3*b3+6360*$
$p^4*b3^4*r*q^4+79375*q^3*b3^5*p^2*s^2-93750*s^3*p*b3^5*q^2+68000*r^4*q^2*s*b3+$
$74250*q^5*b3^4*s*r+92800*r^5*p^2*q*b3+325000*q^2*p^2*s^2*b3^4*r-6237500*s^3*$
$b3*p*r*q^2+809475*p^6*s*q^2*r*b3-4680*q^4*b3^4*p^6+318000*q^4*p^2*s*b3^3*r-$
$3233250*q^4*p^3*r*s*b3-12000*p^9*q*b3^3*r-33900*p^7*q^3*b3*r-87500*q^2*p^2*$
$s^3*b3^3+75000*s^2*b3^5*q^3*r+77200*b3^3*r*p^8*s-18960*b3^3*r*p^6*q^3-24800*$
$p^1 1*s*b3+320000*b3^4*r^5*p^2-2400*p^1 0*b3^3*s+59400*r^3*q^4*b3^4+160000*b3^5*$
$r^5*q+68400*r^4*q^3*b3^3+93750*q^3*s^3*b3^4+37800*q^5*b3^5*r^2+24000*r^5*q^2*$
$b3^2-2134800*b3^3*r^2*p^3*s*q^2+7303375*q^3*s^2*p^2*r*b3-275000*s^2*b3^5*r^2*$
$p*q-78750*s*b3^5*r*p*q^4+6400*b3^2*r*p^1 1-8960*p^1 0*q^2*b3^2-240000*b3^4*$
$r^4*p^4-201250*p^5*s^3*b3^3-109500*p^8*s^2*b3^2-12150*q^6*b3^4*p^3-102600*q^6*$
$b3^2*p^4+1064*p^4*b3^5*q^5+36600*p^5*b3^3*q^5+76800*b3^2*r^5*p^3-432800*b3^2*$
$r^4*p^5-13250*p^7*s^2*b3^4-293125*p^6*s^3*b3+703125*q^2*s^4*b3^2+33750*q^5*s^2*$
$b3^3+5120*p^1 2*q*b3-1373600*b3^3*r^4*p^3*q-961950*p^5*r^2*q^3*b3+151500*p^5*$
$s^2*b3^4*r+421000*p^6*s^2*b3^2*r-40000*s*b3^5*r^2*p^5-407000*r^2*s*p^6*b3^3-$
$22500*p^5*b3^4*r^2*q^2-1391175*r^2*q^4*p^3*b3^2+2500*p^6*b3^5*r^2*q-220140*p^4*$
$b3^3*r^2*q^3-3300*p^5*b3^5*r*q^3+177750*p^6*b3^3*s^2*q-375050*p^4*b3^3*s*q^4+$

$40700*p^5*b3^4*s*q^3+505400*b3^3*r^3*p^5*q+200000*b3^5*r^3*p^3*s-36000*r^4*s*$
$q*p*b3^2-10500*s*b3^5*r^2*p^2*q^2-4799000*r^3*s*p*b3^3*q^2+1660000*p^2*b3^4*$
$r^3*q*s+129600*r*q^5*b3^2*p*s-15450*r^2*s*q^4*p*b3-808500*p*b3^4*s*q^3*r^2-$
$16875*p^2*b3^4*r^2*q^4+78000*r^3*s*q^3*b3^2-964800*b3^4*r^4*p*q^2+1710000*r*$
$s^3*p^4*b3+2790000*r^3*s^2*p^2*b3^2+355100*p^6*b3^2*s*q^3+56160*b3^2*r*p^8*q^2+$
$46575*q^5*p^2*r^2*b3-923325*q^4*p^5*s*b3+632175*p^7*q*b3*s^2-68620*p^8*q*b3*$
$r^2-116875*q^3*s^2*r^2*b3-156250*q*p*s^4*b3^3-125625*q^4*p*s^2*b3^4+1983750*$
$q*p^4*s^3*b3^2+146375*q^3*b3^4*p^3*s*r+30725*s*b3^5*r*p^4*q^2+4303350*r^2*s*$
$p^4*b3*q^2-442900*p^4*b3^4*s*q*r^2+951225*p^4*b3^2*s*q^3*r+949400*r^2*s*q*$
$p^5*b3^2+188400*b3^3*r^3*p^4*s+162400*b3^4*r^3*p^3*q^2+1718750*q^2*s^3*b3^3*r-$
$294375*q^4*s^2*r*b3^2+2053125*r^2*s^3*p^2*b3-10000*p^4*b3^5*r^3*q+302250*q^5*$
$p*s^2*b3+124625*q^4*p^2*s^2*b3^2+2750000*s^3*q*b3^2*r^2+2734375*s^4*q*p^2*b3-$
$75600*q^6*p*s*b3^3+1845*p^2*b3^5*r*q^5+89775*p^2*b3^4*s*q^5+920000*b3^4*r^4*$
$q*s-40000*b3^5*r^4*p^2*q-29250*q^4*b3^3*s*r^2+240000*s*b3^5*r^3*q^2-108675*$
$r^3*q^4*p*b3^2-95850*q^5*p*b3^3*r^2+1225000*q^2*s^2*b3^4*r^2+2250000*r^3*s^2*q*$
$b3^3-32600*p*b3^5*r^3*q^3)*z+625*s^3*q^5+103000*r^2*q^2*p^8-12200*p^6*q^5*b3^3+$
$170500*p^7*s^2*q^2+13300*q^4*p^9+124000*b3^2*r^4*p^6-1064*q^5*b3^5*p^5+22500*$
$s^4*p^5-8960*p^{1}0*q^3*b3+625*p^7*b3^6*s^2+80740*r^4*p^7-30000*b3^4*r^3*p^7+2340*$
$p^7*q^4*b3^4+312500*s^5*b3*p^2+2875*p^8*s^2*b3^4-40*r^6*q^2-1024*p^{1}3*q*b3-$
$34680*r*q^2*p^{1}0+25650*q^6*p^5*b3^2-5400*r^3*p^3*q^4-262500*s^4*p^3*r-14375*$
$s^3*b3^5*p^5-135*q^8*b3^6-1350*q^7*b3^5*p^2+196*q^6*b3^6*p^3+120000*b3^4*r^4*p^5+$
$70625*p^7*s^3*b3-67560*r^3*p^9-168750*p^5*s*q^5+96875*s^4*b3^2*p^4-160000*$
$b3^4*r^5*p^3+4000*p^{1}2*s*b3+56250*s^3*b3^3*p^6+800*p^{1}1*b3^3*s+12800*r^6*p^2*$
$b3^2+19400*b3^2*r^2*p^{1}0+15750*r^4*p^2*s^2+14850*r^2*q^4*p^5+975000*s^4*q^2*p^2+$
$640750*s^2*p^4*q^4-1600*b3^2*r*p^{1}2+23200*r^4*q^2*p^4+2500*b3^4*r^2*p^9-9600*$
$p^{1}1*s*q-72300*r^3*q^2*p^6-80600*b3^2*r^3*p^8+16875*q^6*p^6-25152*r^5*p^5+$
$4825*s^2*p^{1}0-2880*p^9*q^3*b3^3+3200*p^{1}2*q^2-4032*p^{1}3*r-4500*r*q^5*b3^6*s-$
$1200*r^5*p^2*q^2+(1062560*r^3*p^6+825200*q^3*p^5*s+219000*s^2*r*p^5+1233000*$
$p^4*r*q^4-1472500*s^2*r^2*p^3-1697400*p^5*r^2*q^2+1485000*q^5*p^2*s-655500*$
$p^4*s^2*q^2-5120*p^{1}2-2150625*s^2*p*q^4-16875*r*q^5*s+5400*q^4*r^3-337500*$
$q^6*p^3-1258200*p^6*r*q*s+53300*p^7*s^2+4594375*s^2*r*p^2*q^2+188250*s*$
$r^2*p*q^3-4308700*s*r*p^3*q^3+78125*s^4*p^2-1041600*r^4*p^4+70400*r^5*p^2-$
$421840*p^8*r^2+20000*s*r^4*q-59400*p^2*r^2*q^4-48000*p*r^4*q^2+729100*p^3*r^3*$
$q^2+1015625*q^3*s^3-65625*s^3*p^3*q+3619700*p^4*r^2*q*s-156250*s^3*b3^3*q^2+$
$648800*r*p^7*q^2-64000*q^2*p^9-1343750*r*s^3*p*q-50000*q^2*s^2*r^2+86400*$
$p^8*q*s-266000*p^6*q^4-841000*p^2*r^3*q*s+75520*p^{1}0*r-72800*b3^2*r^2*p^7+$
$75000*s^3*p^4*b3-246500*p^6*s^2*b3^2+186400*b3^3*r^3*p^3*q-1387500*q*p*s^2*$
$b3*r^2-3341250*q^4*s*p*r*b3+1078650*q^5*p^2*r*b3-36160*p^8*q*b3*r-600*p^5*$
$b3^3*r^2*q+50850*p*b3^3*r*q^5+89600*p^7*q^3*b3+390625*s^4*q*b3-33750*q^6*s*$
$b3+1549875*q^3*s*p^2*b3^2*r+1155000*s^2*p^4*b3^2*r-1730000*s^2*p^3*b3^2*q^2-$
$1800650*q^4*p^3*b3*s+300000*q^3*b3^3*s^2*p+9450*q^7*b3^3+181500*s*b3^3*r*p^3*$
$q^2+616600*p^7*s*b3*r-56250*s*b3^3*r*q^4+111250*p^4*b3^3*s^2*q-178840*p^6*$
$r^2*q*b3+76000*p^7*b3^2*s*q+742600*r^3*q*b3*p^4+4152250*s*q^2*p^2*r^2*b3+$
$440000*b3^3*r^3*p^2*s-480000*b3^3*r^4*p*q-35100*r^3*q^3*p*b3+1532000*r^3*$
$p^3*b3*s-1480275*b3^2*r^2*p*q^4-143250*p^2*b3^3*s*q^4-540800*b3^2*r^2*p^4*q^2-$
$9400*p^5*r*q^3*b3-1745600*p^5*s*b3*r^2-2084200*q^3*b3*p^3*r^2-80000*r^4*p*s*$
$b3-408000*r^4*p^2*q*b3+20000*r^3*q^2*s*b3-3031250*q^2*p*s^3*b3+2160000*q^3*$
$s*b3^2*r^2+4074375*q^3*s^2*p^2*b3+212625*q^5*s*p*b3^2+16000*r^5*q*b3+6400*$
$b3^2*r*p^9+10240*p^{1}0*q*b3-102600*q^6*b3^2*p^2+2880*p^6*b3^3*q^3-68800*p^9*$
$s*b3-8960*p^8*b3^2*q^2-390625*s^4*p*b3^2-250000*p^3*b3^3*s^3-800*p^8*b3^3*s+$

$$
\begin{aligned}
&634000*b3^3*r^3*q^3+24000*r^4*q^2*b3^2+100000*s^2*b3^3*r*p^2*q+216000*p^4*q^5*\\
&b3-345600*b3^2*r^4*p^3+275200*p^5*b3^2*r^3-58400*p^5*b3^2*q^4+12200*q^5*p^3*\\
&b3^3-28125*q^4*s^2*b3^2+14175*r*q^6*b3^2+15525*r^2*q^5*b3-6241250*s^2*p^3*r*\\
&q*b3-2487500*q^2*p*s^2*b3^2*r+35200*p^6*b3^3*s*r-38800*p^5*b3^3*s*q^2+47520*\\
&b3^2*r*p^6*q^2+863250*s^2*q*p^5*b3+409700*s*q^3*p^4*b3^2-672200*s*q^2*p^6*b3-\\
&1100000*s*q*p*r^3*b3^2-935000*p*b3^3*s*q^2*r^2-4000*p^7*b3^3*r*q-72200*b3^3*\\
&r^2*p^2*q^3+1866800*b3^2*r^3*p^2*q^2-3200*p^4*b3^3*r*q^3+90300*b3^2*r*p^3*q^4+\\
&2418750*q^3*s^2*r*b3+2931950*p^4*b3*s*r*q^2-823000*s*q*p^3*b3^2*r^2-1300*\\
&s*q*p^5*b3^2*r-238000*b3^3*r^2*p^4*s+2203125*q*p^2*s^3*b3^2+2218750*r*s^3*p^2*\\
&b3-800000*s^2*p^2*b3^2*r^2-250000*s^2*q*b3^3*r^2+625000*s^3*p*r*b3^3)*_Z^3+2240*\\
&p^1 1*q^2*b3^2+2304*r^6*p^3-65700*s^2*p^8*r-312500*s^5*q*p-608750*b3^3*r*p^4*\\
&s^3+4000*b3^3*r*p^1 0*q+5625*s^2*p*b3^6*q^4-405*r*q^7*b3^5-180*r^5*q^3*b3+675*\\
&s*q^7*b3^4-5625*s^2*q^5*b3^5+300*s*q^3*r^4+3000*r^5*p*s*q+2560*r^6*p*q*b3+\\
&375*p^4*b3^6*s^2*q^2+24000*r^5*p^2*s*b3-16000*r^5*p*s*b3^3-32500*r^4*p*s^2*\\
&b3^2+2745*q^6*b3^6*p*r-3450*q^5*b3^6*p^2*s+3375*q^6*b3^5*p*s+46875*s^3*b3^5*\\
&p^2*q^2+137125*p^5*b3^4*s^2*q^2+625*p^5*b3^6*r^2*q^2+(40000*r^4*p-9375*s^2*p^4-\\
&3520*r*p^7-44000*r^3*p^3+56250*s*q^3*r+16875*q^6-100000*s*q*p*r^2-25000*\\
&r^3*q^2+13300*q^4*p^3+31250*r*s*q*p^3+256*p^9+3200*p^6*q^2+18500*r^2*p^5+\\
&31250*r*p^2*s^2-7500*q^3*p^2*s+71000*q^2*p^2*r^2-30200*r*q^2*p^4-56250*p*r*\\
&q^4)*_Z^6+671875*s^4*b3^3*p^2*q+(-55360*p^9*r+315000*r^3*p*q*s+506250*s^2*\\
&q^4+302460*p^7*r^2+253125*q^6*p^2-16000*r^5*p-708750*q^5*p*s+156250*s^3*\\
&q*r+62500*s^3*p^2*q-743400*r^3*p^5-41600*p^7*s*q+187500*s^2*q^2*p^3+14850*\\
&r^2*p*q^4-75625*s^2*p^6+2311500*q^3*s*p^2*r+9000*r^4*q^2-453600*r^3*q^2*p^2-\\
&22500*q^3*s*r^2+70000*s^2*p^4*r+2240*p^7*q^2*b3^2+681250*s^2*p^2*r^2+758950*\\
&p^5*r*q*s-436300*s*q^3*p^4-2216000*s*q*p^3*r^2+1196600*r^2*p^4*q^2-475400*\\
&p^6*r*q^2-897750*q^4*p^3*r+699200*r^4*p^3+3840*p^1 1-1575000*r*s^2*p*q^2-\\
&234375*s^3*p^3*b3+84375*p^5*b3^2*s^2+992000*p^4*b3*s*r^2-10800*p^5*b3^2*r*q^2-\\
&880000*r^3*p^2*s*b3-349300*p^6*s*b3*r+907875*p^2*s*b3*q^4-9900*q^3*b3*p^4*\\
&r-17750*p^4*b3^2*s*r*q-18000*p^2*b3^2*r*q^4+135925*b3^2*r^2*p^3*q^2-111000*\\
&q^3*p^3*b3^2*s-474500*b3^2*r^3*p*q^2-434375*p^3*b3^2*s^2*r+1070550*q^3*b3*p^2*\\
&r^2+490625*p^2*b3^2*s^2*q^2-366000*r^3*p^3*q*b3+97300*p^5*r^2*q*b3+15840*p^7*\\
&r*q*b3+353100*p^5*s*b3*q^2+192000*r^4*p*q*b3-390625*s^3*p*q*b3^2+93750*\\
&s^2*q^2*b3^2*r-1415625*q^3*s^2*p*b3-1805125*s*q^2*p^3*r*b3+39200*p^8*s*b3-\\
&1600*p^8*b3^2*r+80000*b3^2*r^4*p^2-50625*q^5*b3^2*s+468750*q^2*s^3*b3+13500*\\
&r^3*q^3*b3+422500*b3^2*r^2*p^2*s*q-65600*b3^2*r^3*p^4+17800*p^6*b3^2*r^2+25650*\\
&p*b3^2*q^6+384750*b3^2*r^2*q^4+2737500*s^2*p^2*r*q*b3-258125*s^2*q*p^4*b3-\\
&1016250*s*q^2*p*r^2*b3-466875*p*b3^2*s*q^3*r-564975*q^5*p*r*b3+843750*\\
&q^4*s*r*b3+437500*s^2*p*r^2*b3^2-468750*s^3*p*r*b3-62500*s^2*r^2*q*b3-\\
&150000*s*q*r^3*b3^2-22400*p^6*b3^2*s*q+48000*q^2*p^8+199500*q^4*p^5-5120*\\
&p^9*q*b3-44800*p^6*q^3*b3+14600*q^4*b3^2*p^4-108000*q^5*b3*p^3)*_Z^4-890625*\\
&s^4*q^2*p*b3^2+658125*q^3*p^2*s^3*b3^2+19400*p^8*q^2*b3^3*s-5400*p^8*q^2*b3^4*r-\\
&240000*p^5*q*b3^2*s^3+1233125*p^4*q^2*b3*s^3-685000*p^5*q^3*b3*s^2-2500*b3^5*\\
&r^2*p^7*q+(6075*q^6*p^2*b3^4-117600*r^5*p^3+303750*s^3*p^5*b3-216000*q^5*p^5*\\
&b3+969000*s^2*q^2*p^5+1356600*r^2*q^2*p^6-57920*p^1 1*r-98000*r^4*p*s*q+\\
&1600*r^6*p-680700*r^3*q^2*p^4-600*q^2*r^5+87600*p^6*q^4*b3^2+1015625*q^2*s^4-\\
&497800*p^8*q^2*r-815300*q^3*p^6*s+253125*q^6*p^4-109375*s^4*p^3+1589625*\\
&s^2*r^2*p^4-312500*s^4*p*r+1157150*r*p^7*s*q+890340*r^4*p^5-419950*r*p^6*\\
&s^2-89600*p^8*q^3*b3+3423250*q^4*s^2*p^2-1552500*q^5*p^3*s-36600*q^5*p^4*b3^3-\\
&3178125*s^3*q^3*p+92200*p^2*r^4*q^2-16200*r^3*q^4*p+89100*q^4*p^3*r^2-82500*\\
&q^4*r*s^2-951750*r*p^5*q^4+393750*b3^3*s^3*p^4+3106250*s^3*p^2*r*q-89600*
\end{aligned}
$$

$p^9*q*s+153900*q^6*p^3*b3^2-181875*s^3*p^4*q-26250*r^3*s^2*p^2-612450*b3^3*s*$
$p^4*q^2*r-6435000*q^3*r^2*b3^2*p*s-2800000*q*r^2*b3^3*s^2*p+2438500*q^2*r^2*$
$b3^3*p^2*s-980000*q*r^3*b3^4*s*p+97000*b3^3*s*p^6*q^2-235750*b3^3*s^2*p^5*q-$
$155000*b3^4*s^2*p^4*r-162900*r*q^4*p^4*b3^2+11925*q^4*r^2*b3^4*p-66600*q^2*r^4*$
$b3^2*p+2380000*q^2*r^3*b3^3*s-1844400*q^3*r^3*b3^3*p-6350750*r^2*p^3*b3*q^2*s+$
$199500*q^4*p^7+48000*p^1 0*q^2-859280*r^3*p^7+331260*p^9*r^2+50625*q^5*s*r*$
$p-3025*p^8*s^2-10240*p^1 1*q*b3+3840*p^1 3+27750*q^3*s*r^3+111600*b3^2*r^2*$
$p^8+28125*s^2*b3^4*q^4+390625*s^4*p*b3^4-30000*b3^4*r^3*p^5+120000*b3^4*r^4*p^3+$
$1328125*s^4*b3^2*p^2+255750*p^7*s^2*b3^2+2500*p^7*b3^4*r^2-434200*b3^2*r^3*p^6-$
$1276400*r^3*s*p^4*b3-439250*q^3*s*r^2*p^2-354375*q^5*p^2*b3^2*s+40640*p^9*q*$
$b3*r+468750*q^2*p*s^3*b3^3-81000*q^4*s*p*b3^3*r-146250*q^5*s^2*b3-7287500*$
$s^2*q^3*p*r*b3-3187500*s^3*q*p*b3^2*r+4941000*q^4*p^2*s*r*b3-1870575*q^3*$
$p^3*s*b3^2*r-2265850*p^5*q^2*s*r*b3-6248125*s^2*q^2*r*p^3+2011800*q^3*p^4*r^2*$
$b3+4288350*q^3*p^4*r*s+38600*q^3*p^6*b3*r-570100*q^3*p^5*b3^2*s+812110*p^5*$
$q^2*r^2*b3^2-3562500*s^3*p^3*b3^2*q+184000*r^4*p^2*s*b3+561200*r^2*p^5*b3^3*s-$
$748880*r^3*p^5*b3*q-1071750*r*p^5*s^2*b3^2-3341100*r^2*p^5*s*q+2146500*q^4*$
$p^2*b3^2*r^2-2748150*r^3*q^2*p^3*b3^2+4652500*s^2*q*r^2*p^2*b3+6259500*s^2*q*$
$p^4*b3*r-91100*s*p^4*q*r^2*b3^2+196000*b3^4*r^2*p^3*q*s+4339000*r^3*p^2*s*q*$
$b3^2-529000*p^8*s*b3*r+12000*p^8*b3^3*r*q-9600*b3^2*r*p^1 0+98400*b3^2*s*p^6*$
$r*q-11250*s^2*q^4*p*b3^2+343750*s^2*q^2*p*r^2-2109375*s^4*q*p*b3-5144375*$
$s^2*q^3*p^3*b3+3156250*s^3*q^2*r*b3+5900000*s^3*q^2*b3*p^2+1810950*q^4*p^4*b3*$
$s-1027350*q^5*p^3*r*b3-1118150*p^6*q*s^2*b3+643000*p^7*q^2*b3*s+220350*$
$r^2*p^3*b3^3*q^3+472000*r^4*p^3*b3*q+666250*r^2*p^3*b3^2*s^2-756000*r^3*p^3*b3^3*$
$s+1154650*r^3*p^3*s*q-3231250*r*p^3*s^3*b3+14280*p^5*b3^3*r*q^3-77760*p^7*$
$b3^2*r*q^2+2208375*b3^2*s^2*p^4*q^2-27200*b3^4*s*p^4*q^3+453750*b3^3*s^2*p^3*$
$q*r-720000*b3^3*r^4*p*s+450000*s^2*b3^4*r^2*p^2-1850*q^4*b3^4*p^3*r-421875*$
$q*b3^4*s^3*p^2+1477400*p^6*s*b3*r^2-312500*s^3*b3^4*q*r-70400*r^5*p*q*b3-$
$50625*q^5*b3^4*p*s+60000*r^4*q*s*b3^2-1600*p^7*b3^4*s*q+6125625*s^2*p^2*r*$
$q^2*b3^2-93600*p^8*q*b3^2*s+600000*q^3*s^2*b3^3*r-70875*q^5*s*r*b3^2-91400*$
$b3^3*r*p^7*s+59200*p^1 0*s*b3-160000*b3^4*r^5*p-35200*b3^2*r^5*p^2-28350*q^7*$
$b3^3*p+2400*p^9*b3^3*s+500000*b3^4*r^4*q^2+50625*q^5*b3^3*r^2+56700*r^3*q^4*$
$b3^2-390625*q*s^4*b3^3+33075*q^6*b3^4*r+19800*r^4*q^3*b3+106250*s^2*b3^4*r*$
$p*q^2+574400*b3^2*r^4*p^4+10375*p^6*b3^4*s^2+421875*q^3*s^3*b3^2+33750*q^6*s*$
$b3^3-5400*p^6*b3^4*r*q^2+80500*s*q^2*p*r^3*b3-94875*s*b3^4*r*p^2*q^3-46575*$
$q^5*p*r^2*b3+75000*r^3*s^2*q*b3-140400*p^2*b3^3*r*q^5-534000*p^4*b3^3*r^3*q+$
$399800*s*q^4*p^3*b3^3+2250*q^4*s*r^2*b3+101250*q^6*s*p*b3+159720*p^7*q*$
$b3*r^2-1062500*s^3*b3*p*r^2-2800*b3^3*r^2*p^6*q+19650*p^5*b3^4*r*q*s+9250*$
$b3^4*r^2*p^4*q^2+4087500*q^2*s^2*b3^2*r^2-788125*q^3*p^2*s^2*b3^3-1425000*r^3*$
$s^2*p*b3^2-687500*s^3*p^2*b3^3*r-79600*b3^4*r^3*p^2*q^2+157500*s*b3^4*r^2*q^3+$
$1412800*b3^3*r^4*p^2*q+32400*r^3*q^3*p^2*b3+197500*q^2*b3^4*s^2*p^3-42525*q^6*$
$p*b3^2*r-8640*p^7*q^3*b3^3+13440*p^9*q^2*b3^2+2340*p^5*b3^4*q^4)*{\_Z}^2+(-256000*$
$r^4*p^2+43750*s^2*p^5-240500*s*q*p^4*r+21632*p^8*r+159000*r^3*p*q^2-101250*$
$p*q^6+135000*q^5*s+118125*q^5*r*b3-115800*p^6*r^2+348300*p^2*r*q^4+8000*$
$s*q*p^6-40000*r^4*q*b3+279200*r^3*p^4-125000*s^2*p*r^2-12500*s^2*p^2*q^2+$
$107000*s*q^3*p^3-112500*s^2*p^3*r-50000*s*q*r^3+187500*s^2*r*q^2+727500*$
$s*q*p^2*r^2-450900*q^2*p^3*r^2+185680*q^2*p^5*r+4900*q^3*p^3*r*b3-1536*p^1 0-$
$20700*r^2*q*p^4*b3-607500*q^3*s*p*r-218250*q^3*p*r^2*b3-74500*p^4*b3*s*$
$q^2+77500*p^5*b3*s*r-185625*p*b3*s*q^4-2720*p^6*q*r*b3+9375*p^3*b3*s^2*$
$q-220000*p^3*b3*s*r^2+78125*p^2*b3*s^3-8800*p^7*b3*s+140625*s^2*q^3*b3+$
$429375*p^2*b3*s*r*q^2-406250*s^2*p*q*r*b3+200000*s*p*r^3*b3-19200*p^7*q^2-$

$79800*p^{4}*q^{4}+72000*q*p^{2}*r^{3}*b3+8960*p^{5}*q^{3}*b3+21600*q^{5}*p^{2}*b3+1024*p^{8}*q*$
$b3)*{}^{5}_{Z}-109375*s^{4}*q^{3}*b3-62500*s^{4}*q^{2}*r+225625*q^{4}*p*s^{3}*b3+142500*q^{3}*p*$
$s^{3}*r-83700*p^{7}*q^{3}*b3^{2}*s+7880*p^{7}*q^{3}*b3^{3}*r-15120*p^{9}*q^{2}*b3^{2}*r+187275*s^{2}*$
$p^{6}*r^{2}+13250*b3^{4}*r^{2}*p^{6}*q^{2}+83800*b3^{3}*r^{2}*p^{7}*s+40000*b3^{5}*r^{2}*p^{6}*s-4000*$
$b3^{3}*r^{2}*p^{8}*q+261500*r^{2}*s^{2}*q^{2}*p^{3}-184675*p^{4}*b3^{3}*s^{2}*q^{3}+600*p^{4}*b3^{5}*r^{2}*q^{3}+$
$1562500*s^{4}*b3^{2}*p^{2}*r-859375*s^{4}*b3^{4}*p*r+373375*r^{2}*s^{2}*p^{5}*b3^{2}-426000*$
$s^{2}*b3^{4}*r^{2}*p^{4}+75000*s^{2}*b3^{6}*r^{2}*p^{3}+71990*p^{5}*r^{2}*q^{3}*b3^{3}+138285*p^{7}*r^{2}*q^{2}*$
$b3^{2}-31350*r^{3}*p^{4}*s^{2}-157800*b3^{3}*r^{3}*p^{6}*q-82750*s^{2}*q^{4}*b3^{2}*p^{3}+6035*r^{2}*q^{4}*$
$b3^{4}*p^{3}+9700*p^{8}*q^{3}*b3*r+59900*p^{9}*q^{2}*b3*s-8800*p^{1}0*q*b3^{2}*s-53250*p^{7}*$
$q*b3^{3}*s^{2}-21000*b3^{3}*r*p^{9}*s+24260*r^{2}*p^{1}1+3300*b3^{5}*r*p^{6}*q^{3}+4750*b3^{4}*r*$
$p^{6}*s^{2}-156000*q^{5}*p^{2}*s^{2}*b3-51000*q^{5}*p*s^{2}*b3^{3}+25000*s^{3}*q^{4}*b3^{3}+390625*$
$s^{5}*q*b3^{2}-87375*q^{4}*p^{2}*s^{2}*r-1025000*s^{4}*q*p^{3}*b3+256*p^{1}5-457800*b3^{2}*r^{2}*$
$p^{6}*s*q-239250*b3^{3}*r*p^{6}*s*q^{2}+1512050*b3^{2}*r*p^{4}*q^{2}*s^{2}-2765000*b3^{2}*r*p^{3}*$
$s^{3}*q+1550*b3^{4}*r*p^{7}*s*q+1315625*q^{3}*p^{2}*s^{2}*b3^{3}*r-2218750*s^{3}*q^{2}*p*b3^{3}*$
$r+1146875*s^{3}*b3^{4}*p^{2}*r*q-25525*p^{5}*b3^{5}*r*q^{2}*s-1088600*r^{2}*s*q^{2}*p^{5}*b3-$
$99825*p^{7}*q^{2}*b3*r*s+42550*p^{8}*q*b3^{2}*r*s-2432125*q^{3}*p^{3}*s^{2}*r*b3+3089375*$
$q^{2}*p^{2}*s^{3}*r*b3+286000*q^{4}*p*s^{2}*r*b3^{2}+1171875*s^{4}*q*b3^{3}*r-1421875*s^{4}*$
$q*r*p*b3-234375*s^{3}*q^{3}*r*b3^{2}+625750*p^{4}*b3^{3}*r^{2}*q^{2}*s-12500*p^{4}*b3^{6}*r^{2}*$
$q*s+247000*p^{5}*b3^{4}*r^{2}*q*s-54950*p^{4}*b3^{4}*r*q^{3}*s-105250*p^{4}*b3^{5}*s^{2}*q*r+$
$748750*p^{5}*b3^{3}*s^{2}*q*r-2783250*r^{2}*s^{2}*q*p^{3}*b3^{3}+1749025*r^{2}*s^{2}*q*p^{4}*b3-$
$2108575*r^{2}*s*q^{3}*p^{3}*b3^{2}-163650*p^{5}*r*q^{3}*b3^{2}*s+70450*s*b3^{5}*r^{2}*p^{3}*q^{2}-$
$310750*s^{2}*b3^{4}*r*p^{3}*q^{2}-183550*r*q^{4}*b3^{3}*p^{3}*s+900*q^{4}*r^{3}*b3*s+1350*q^{6}*r*$
$b3^{3}*s-62500*s^{3}*b3^{4}*p*q^{3}+2387500*s^{3}*b3^{3}*p^{2}*r^{2}-83950*p^{4}*b3^{4}*r^{3}*q^{2}-700*$
$p^{4}*b3^{6}*r*q^{4}-4510*p^{5}*b3^{4}*r*q^{4}+10000*p^{5}*b3^{5}*r^{3}*q-326875*p^{4}*b3^{4}*s^{3}*q+$
$10225*p^{4}*b3^{5}*s*q^{4}+190850*p^{6}*b3^{2}*s^{2}*q^{2}+118500*p^{5}*b3^{3}*s*q^{4}-2500*b3^{5}*r*$
$p^{8}*s-69875*b3^{2}*r*p^{7}*s^{2}-36300*b3^{2}*r*p^{6}*q^{4}-1600*p^{9}*q*b3^{4}*s-73680*p^{7}*q*$
$b3*r^{3}-128525*p^{8}*q*b3*s^{2}+11140*p^{9}*q*b3*r^{2}-246875*q^{2}*p^{3}*s^{3}*b3^{3}-53250*$
$q^{2}*p*s^{2}*r^{3}+18750*s^{3}*q*r^{3}-92500*s^{3}*q*r^{2}*p^{2}-18750*s^{3}*b3*p*r^{3}-991875*$
$s^{3}*b3*p^{3}*r^{2}+440400*p^{4}*b3^{3}*r^{4}*q-38700*p^{4}*b3^{3}*r*q^{5}+8875*p^{6}*b3^{5}*s^{2}*q-$
$81000*p^{4}*b3^{2}*s*q^{5}-1036875*r*s^{2}*q^{2}*p^{5}-130250*r^{2}*s*q^{3}*p^{4}-441330*p^{5}*$
$r^{3}*q^{2}*b3^{2}+182050*p^{6}*r^{2}*q^{3}*b3+168750*s^{3}*b3^{5}*r*p^{3}-200000*s*b3^{5}*r^{3}*p^{4}+$
$127200*r^{3}*s*p^{5}*b3^{3}-583010*r^{3}*q^{3}*b3^{3}*p^{3}-1257*r*q^{5}*b3^{5}*p^{3}+340200*r^{2}*$
$q^{4}*b3^{2}*p^{4}-40550*s*q^{5}*b3^{4}*p^{3}-65500*r^{4}*s*q*p^{3}+899375*r*s^{3}*q*p^{4}+16875*$
$r*s*q^{5}*p^{3}+219550*r^{3}*s*q*p^{5}+70380*p^{5}*r^{4}*q*b3-92475*p^{5}*r*q^{5}*b3-11875*$
$s^{2}*b3^{6}*r*p^{5}-706400*s*b3^{3}*r^{4}*p^{3}+7600*r^{4}*s*p^{4}*b3-230000*r*s^{3}*p^{5}*b3-$
$48900*r^{3}*s*p^{6}*b3-22135*r^{4}*q^{2}*b3^{2}*p^{3}-14175*r*q^{6}*b3^{2}*p^{3}+33750*s*q^{6}*b3*$
$p^{3}+2700*r^{3}*q^{3}*b3*p^{4}-42500*s^{2}*b3^{5}*p^{3}*q^{3}-13500*q^{3}*b3^{4}*p^{6}*s+190775*p^{6}*$
$s*q^{4}*b3+456700*p^{6}*s*q^{3}*r-38032*r^{5}*q*b3*p^{3}-15525*r^{2}*q^{5}*b3*p^{3}+103625*$
$q^{3}*p*s^{2}*r^{2}*b3+4178250*q^{2}*p^{2}*s^{2}*b3^{2}*r^{2}-112500*s^{3}*q^{2}*r^{2}*b3-2596875*s^{3}*$
$q*b3^{2}*r^{2}*p+110375*r^{3}*s*q^{2}*p^{3}*b3+1250*p^{6}*b3^{6}*r*q*s+1692450*p^{4}*b3^{2}*$
$s*q*r^{3}+352600*r*s^{2}*q*p^{6}*b3+789750*r*s*q^{4}*p^{4}*b3-660400*s*b3^{4}*r^{3}*p^{3}*$
$q+11300*s*b3^{6}*r*p^{3}*q^{3}-1354875*s^{2}*b3^{2}*p^{3}*r^{3}-700*q^{3}*b3^{6}*p^{5}*s+82200*$
$p^{8}*s*b3*r^{2}-339700*p^{7}*s*q*r^{2}+23900*p^{2}*b3^{5}*r^{3}*q^{3}+5000*p^{3}*b3^{6}*r^{3}*q^{2}+$
$40000*b3^{5}*r^{4}*p^{3}*q+4960*p^{1}1*q*b3*r-30000*p*b3^{6}*r^{4}*q^{2}-49275*r^{3}*q^{4}*b3^{4}*$
$p+45225*r^{2}*q^{5}*b3^{3}*p^{2}+111850*r*s*q*p^{9}+457200*p^{2}*r^{4}*q^{2}*b3^{4}-33700*r*$
$s*p^{1}0*b3+27600*r^{4}*q^{3}*b3^{5}-675*q^{6}*r^{2}*b3^{4}-450*q^{4}*r^{4}*b3^{2}-750*q^{4}*s^{2}*r^{2}-$
$1125*q^{6}*s^{2}*b3^{2}-7300*p^{2}*b3^{6}*r^{2}*q^{4}+78000*p^{2}*b3^{4}*s^{2}*q^{4}+320000*s*b3^{5}*r^{4}*$
$p^{2}+1440000*s^{2}*b3^{4}*r^{3}*p^{2}-150000*s^{2}*b3^{6}*r^{3}*p-625000*s^{3}*b3^{5}*r^{2}*p+31200*$
$r^{3}*s*q^{3}*p^{2}-60000*r^{4}*q^{3}*b3^{3}*p-31050*r^{2}*q^{5}*b3^{5}*p+51975*r^{3}*q^{4}*b3^{2}*p^{2}+$
$29700*r*q^{6}*b3^{4}*p^{2}+41850*s*q^{6}*b3^{3}*p^{2}+32800*r^{5}*q^{2}*b3^{4}+16400*q^{4}*b3^{6}*r^{3}-$

$$160000*b3^5*r^5*p*q-19700*r^5*p*q^2*b3^2+17250*r^4*p^2*q^3*b3-8000*r^5*p^2*q*$$
$$b3^3+1900*p^7*b3^5*s*q^2+12800*r^6*q*b3^3-675*q^5*r^3*b3^3-1125*q^5*s^2*r*b3-$$
$$160000*q^3*s^2*b3^3*r^2+1312500*s^3*b3^4*q*r^2-519000*p*b3^5*r^3*q^2*s-1768750*$$
$$p*b3^4*r^2*q^2*s^2+611875*p^2*b3^4*s*q^3*r^2+60000*r^4*s*q^2*b3^3-86525*r^3*s*$$
$$q^3*p*b3^2+13200*r^2*s*q^4*p^2*b3-26250*r^3*s^2*q^2*b3^2+2378300*r^3*s*q^2*p^2*$$
$$b3^3+650000*s^2*b3^5*r^3*q-2290000*r^3*s^2*p*b3^3*q+500*r^3*q^3*b3^4*s+20325*$$
$$s*q^4*b3^3*p*r^2-58725*s*q^5*b3^2*p^2*r+120000*s*b3^6*r^4*q-984000*r^4*s*p*$$
$$b3^4*q+382500*p^2*b3^5*r^2*q*s^2-34300*r^4*s*q*p^2*b3^2-69000*r^3*s^2*q*p^2*b3+$$
$$32925*p^2*b3^5*r*q^4*s-68650*r^4*s*q^2*p*b3-36250*s^2*b3^5*r*p*q^3-10000*s*$$
$$b3^6*r^2*p*q^3-7500*s^2*b3^6*r*p^2*q^2-80325*r*q^5*b3^4*p*s+36000*q^4*b3^5*s*r^2+$$
$$39375*q^4*b3^4*s^2*r+42000*r^5*q*s*b3^2+47500*r^4*q*s^2*b3+1575*q^5*s*r^2*b3^2)$$

Her gik Maple så ned. Åbenbart blev c_1 udtrykt i b_3 for kompliceret. Derfor bringer vi her i stedet c_1 udtrykt ved samtlige b_i'er.

$$c1 := 8*b0*s^2*p+6*r*s^2*b2-2*r*s*b1*p*b2-5*s^3*b3-8*b0*s*b1*p*b2+5*$$
$$r*b3^2*b1*s*p-12*r*b0*s*p*b3+4*r*b3*b0*s*b2+16*q*b3*r*b0*p*b2+14*q*$$
$$b3^2*b0*s*b2-6*q*b3^3*b0*r*p-5*q*b3*s*b1*p*b2-2*q*b3*b0*s*b1-6*q*b3*r*$$
$$b0*p^2-3*q*b3*b0^2*p*b2+q*b3*s*b1*p^2+6*b2^2*b0*s*p*b3+6*p*b2*b3*b1^2*s-$$
$$3*p^2*b2*b3^2*b1*s-8*p*b2*b3*b1*b0*r-12*p^2*b2*b0*s*b3+4*p^2*b2*b3^2*b0*$$
$$r+24*p*b2*b0*s*q-4*r*s^2*p-5*b2*b1^3*s+2*p*b1^3*s-5*b3^2*b2^2*s^2-10*s^2*$$
$$b3^2*b0+5*s^2*b3^3*b1+9*q^2*b0^2*b2-12*q^2*b0^2*p+16*b0^3*r-8*b0^3*p^2-18*$$
$$b0^2*r^2+8*b0*r^3+5*b2^3*s^2-5*s^2*b1^2-2*s^2*q^2+8*b2*b1^2*b0*r-p*b1^2*s*q-$$
$$4*p*b1^2*b0*r+2*r*b3^2*b0*q^2-6*b2*b1*s*q^2-p*b1*s*q^2-4*b0*b2*r*q^2+8*$$
$$b0*p*r*q^2+10*q*b3*r*s*b1+q*b3^3*b1*s*p+10*q*b3^2*b1*b0*r-2*q*b3^2*b0*s*$$
$$p-3*b2^2*r*s*b1+4*b2^3*r*b0*p-3*b2^3*s*b1*p+10*b2^2*b0*s*b1-16*b2^2*b0*$$
$$s*q-8*b2^2*r*b0*p^2+6*b2^2*s*b1*p^2+4*p^3*b2*r*b0-3*p^3*b2*s*b1+22*b0*r*$$
$$s*b1+10*b0*b3*b1^2*s-2*b0*s*b1*p^2-15*r*b0^2*q*b3-13*r*b3*b1^2*s-16*r*$$
$$b0*s*q+5*r*s*b1*p^2+9*b2*b1^2*s*q-2*q^2*b3*b0*s-12*b3*b1*b0^2*r+21*b0^2*$$
$$s*p*b3-6*r*b0^2*p*b2-15*b3*b0^2*s*b2+9*b3^2*b0^2*r*p+16*b3*b1*b0*r^2-4*$$
$$r^2*b0*p*b2-4*b3^2*b0*r^2*p-4*q*b3*s^2*b2+5*q*b3*s^2*p-3*q*b3^2*b1^2*s-3*$$
$$q*b3*b0^2*p^2+2*q*b3*b0*r^2-5*b0^4-15*b0^2*s*b1+12*b0^2*s*q+12*r*b0^2*p^2+$$
$$8*b0^3*p*b2-7*r^2*s*b1-4*r^2*b0*p^2-9*q^2*b3^2*b0^2-8*b2^2*s^2*p-6*b2^2*b0^2*$$
$$r-3*b2^2*b0^2*p^2+8*b2^2*b0*r^2+3*p^2*b2*s^2+6*p^3*b2*b0^2-10*b0*s^2*b2-14*$$
$$b0*b3^2*b1*s*p-8*b3^2*b2*r^2*b0+5*b1*s^2*b3*b2-6*s*b3^3*r*b0-s^2*b3*p*b1-$$
$$9*q*b1*b0^2*b2+15*q*b1*b0^2*p-4*b1*b0*b2*r*q-4*b1*b0*p*r*q+7*b1*s^2*$$
$$q+7*b3^2*b2*r*s*b1-6*b3*b2^2*b1*s*q-2*b3*b2^2*b0*r*q+12*b0^3*q*b3+2*p^2*$$
$$b2*b1^2*r+3*b3^4*s*r*q+2*p^3*q*b1*b0+6*p^2*b3^3*b0*s+2*p^2*b3*b1*r^2-4*p*$$
$$b2^3*s*q-p*b2^2*b1^2*r+4*p*b2^2*q^2*b0+9*p*b2*s^2*b3^2-p^2*b3^2*b1^2*r+4*r*$$
$$b2^2*s*q-8*p^2*b0*s*q+b2*r^2*b3^3*q+2*q^3*p*b0*b3+2*p^2*b2^2*s*q-r^2*s*p*$$
$$b3-q*b3^2*b1*r^2-r*b3*b2^3*s+5*b1*b2*r^2*q+q*b2^3*b1*r-3*q*b3*b2^2*r^2+6*$$
$$b3*b1*b0^2*p^2+6*p^3*b0*s*b3-p*b2^2*b3^2*r^2+2*q^3*b3^3*b0+2*p*b2^3*r^2-r*s^2*$$
$$b3^2-6*q^2*b1^2*b0+2*q^3*s*b2+4*r^2*s*q+4*b3^2*b2*r^3+3*p*b1^2*r^2-p*b3^2*$$
$$r^3-p^2*b2^2*r^2+q*r^3*b3-4*b3*b1*r^3-4*b2*b1^2*r^2-3*p*b1^2*b0^2+6*b1*q^3*$$
$$b0-s*b3^3*r^2-2*q^2*b2^3*b0-3*b1^2*q^2*r+2*q*b1^3*b0-3*p^2*s^2*b3^2+2*b2^4*$$
$$q*s-3*p*b3^4*s^2+2*r^3*p*b2-q^2*r^2*b2+3*q*b1^3*r+b1*q^3*r-p^3*b1^2*r-2*$$
$$b3^2*b1^2*r^2+2*q*s^2*b3^3-3*p^3*b3^2*b0^2-2*q^4*b0-b3^4*r^3-3*p^4*b0^2-b1^4*r-$$
$$2*b2^2*r^3+p*b2*q*b3^2*b1*r-2*p*b2*q^2*b3^2*b0-4*r*p*b2*s*q-11*r*q*b3^2*$$
$$s*b2-4*p^2*b2*q*b1*b0+3*b1*r*b2*q^2*b3-r^4-b2^4*r^2+2*p*b2^2*q*b1*b0+2*$$

$p*b2^2*q*b3^2*s+p^2*b2*b1*r*q-p*b2*s*b3^3*r-q^2*p*b3*b1*r-p^2*b2*r*s*b3-2*p*b2^2*b1*r*q+q*r^2*b3*p*b2-4*p*b2*b3*b1*r^2+2*p*b2^2*r*b3*s+2*p^2*b3^2*q*b1*b0-2*q^2*p*b3*s*b2-3*b3*b1^2*b2*r*q-4*b3*b1^2*q*b0*p+2*b3*b1*q^2*b0*p+6*b3*b1*q^2*b0*b2-b3*b1^2*p*r*q+3*p*b3^2*r*s*q+2*p*b3^3*b1*r^2+3*r^2*b3*s*b2-3*r*b3*s*q^2-2*b2*q^2*b3^3*s+4*b3*b1*b2^2*r^2+6*b3*b2^2*q^2*s-6*b2*q^3*b3*b0-q^2*b3^3*b1*r+2*b3*b1^3*p*r-2*p^2*b2*q^2*b0-3*b1*p*r^2*q$

E Matematikken i det 18. århundrede

Dette appendiks består udelukkende af generelle oplysninger, hvorfor stilen i det derfor er lidt i modstrid med den linie vi i resten af vores projekt har søgt at lægge. Nedenstående afsnit er i overensstemmelse med den fremstilling man finder i oversigtsprægede naturvidenskabelige historiske værker, og skal derfor her tages med et smil på læben. Men lidt nytte kan man dog måske alligevel drage af en sådan gennemgang; det har vi i alt fald gjort.

E.1 Optakten til det 18. århundrede

I det 16. århundrede var videnskaben så småt begyndt at sætte spørgsmålstegn ved naturens fuldendthed - og dermed indirekte den kristne kirke - grundet flere observationer som tydede på afvigelser i naturens systemer.

Astronomen Nicolaus Copernicus (1473-1543) satte spørgsmålstegn ved den katolske kirkes verdensbillede, der jo som bekendt anså jorden for universets centrum, og foreslog istedet det heliocentriske. Johannes Kepler (1571-1630) forfinede dette system ved at observere at planeternes baner er ellipser og ikke cirkler. Anvendelserne af matematik i det 16. århundrede og starten af det 17. strakte sig lige fra perspektiv- og korttegning, navigation og astronomi til kinematik og ballistik. En anden stor videnskabsmand i denne periode som man heller ikke kommer uden om er Galileo Galilei (1564-1642), hvis vigtigste arbejder omhandler faldlovene og projektilets bane. Også Galilei var med til at forme opgøret med den kristne kirke og dermed bringe Europa ind i en ny videnskabelig æra. [Katz, 1998, kap. 10]

Af matematiske fremskridt i denne periode kan nævnes adskillige. Udover den analytiske geometri var det også i denne periode at matematikere som John Napier (1550-1617) og Henry Briggs (1561-1631) fik ideen til logaritmen. Blaise Pascal (1623-1662) og Pierre de Fermat (1601-1665) udviklede den elementære sandsynlighedsregning og som tidligere nævnt blev der stadig arbejdet med algebraen, men også områder som talteori blev der nu ofret opmærksomhed på, ikke mindst af Fermat. Det er også i denne periode at den projektive geometri fremkommer, dette står i særdeleshed Pascal og Girard Desargues (1591-1661) for. [Katz, 1998, kap. 10 og 11]

Men det vigtigste bidrag til matematikken i denne periode var dog nok differential- og integralregningen, hvis introduktion de to herrer Isaac Newton (1642-1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) stod for (uafhængigt af hinanden vel og mærket). Både Fermat og Isaac Barrow (1630-1677) havde puslet med problemer som på mange måder lignede Newtons og Liebnizs teorier, og spørgsmålet om hvorvidt det skulle være dem som først opfandt disse er dog også blevet stillet. Svaret til dette spørgsmål må dog ifølge Katz siges at være et klart nej, da Barrow ikke udregner arealer og da Fermat ikke indser den inverse egenskab hos de to 'operationer'. [Katz, 1998, kap. 12]

Figur E.1 Sir Isaac Newton (1642-1727). [O'Connor & Robertson, 2002]

Figur E.2 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). [O'Connor & Robertson, 2002]

Med opkomsten af differential- og integralregningen var det første spadestik til det vi idag kender som analysen taget.

E.2 Matematik og strømninger i det 18. århundrede

Også dette afsnit bærer mere præg af arbejdspapirer end egentlig rapport, men vi vælger dog at bringe det alligevel da vi selv har draget nytte heraf.

Den i de foregående halvanden hundrede års udvikling på matematikområdet taget i betragtning må man sige at det 18. århundrede havde en del at leve op til. Trods dette gik hovedparten af århundredets første halvdel med at forsøge at tolke og forstå al denne nytænkning - og om muligt videreudvikle den. Matematikken i det 18. århundrede var genstand for stor offentlig opmærksomhed, f.eks. var Euler beundret af folk på samme måde som filmstjerner er det idag. Med hensyn til matematikkens status i samfundet var der dog delte meninger. Diderot var af den opfattelse at matematikkens æra var slut, d'Alembert derimod mente at matematikkens æra først lige var ved at begynde. Rousseau mente i modsætning til de to andre at matematikken var et udtryk for det nye mørke på samme måde som biblen havde været det tidligere.

En ting der kom til at præge dette århundrede var den manglende stringens i bevisførelse[1]. Fra tidligere at have benyttet den græske deduktive fremgangsmåde var man nu i højere grad begyndt at benytte en mere induktiv metode. Kunne man udregne et par specifikke eksempler og derefter generalisere sin metode så

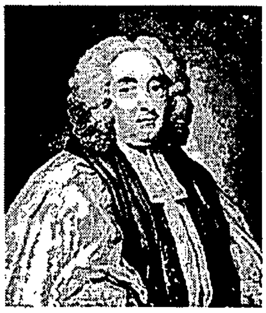
[1] Det er dog ikke alle matematikere der deler denne mening.

var dette acceptabelt på trods af evt. manglende grundlag. F.eks. en matematiker som Euler benyttede sig ofte af idag helt uacceptable metoder; det sjove ved lige præcis ham er dog at han alligevel næsten altid kom frem til de korrekte resultater trods hans til tider ad-hoc-agtige ræsonnementer. Matematikken må dog også i denne periode siges at have været præget af en vis anvendelsesorientering. Det var oftest fysikken der spillede ind her, og den havde også sit ansvar for at matematikken kom til at bygge på et mere løst og intuitivt grundlag. Man anvendte matematik på fysiske problemstillinger og hvis de teoretiske resultater stemte overens med de empiriske, så var det garanti nok for deres korrekthed.

Figur E.3 Jacob Bernoulli (1654-1705). [O'Connor & Robertson, 2002]

Figur E.4 Johann Bernoulli (1667-1748). [O'Connor & Robertson, 2002]

I det 18. århundrede var den matematiske aktivitet forbeholdt en forholdsvis lille skare og udfoldede sig fortrinsvist på akademierne i Europa, hovedsageligt Paris og Berlin. Mange matematikere var også folk fra overklassen, som havde råd til at tage sig tid til at dyrke denne hobby[2]. Ligeledes var det også akademierne som støttede tidens forskellige tidsskrifter. Ikke før omkring 1795-1800 blev de første deciderede professorater i matematik oprettet ved universiteterne i Europa.



Figur E.5 George Berkeley (1685-1753). [O'Connor & Robertson, 2002]

Der blev i det 18. århundrede arbejdet videre på mange af de samme dicipliner som der var blevet arbejdet på i det forrige århundrede (f.eks. geometri, sandsynlighedsregning og algebra), men det blev analysen der kom til at præge 1700-tallet. Differentialligninger blev udviklet af Bernoulli brødrene (Jacob Bernoulli

[2]Noget lignende gjorde sig iøvrigt gældende i det 17. århundrede. [Andersen et al., 1986, s. 184-186]

(1654-1705) og Johann Bernoulli (1667-1748)) og Euler, som også beskæftigede sig med trigonometriske funktioner samt prøvede på at redegøre for begreber som f.eks. uendelighed og funktion. [Katz, 1998, kap. 12 og 13]

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) udviklede den flerdobbelte integration, Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) de partielle differentialligninger og Lagrange gjorde sig også her bemærket med sine arbejder om potensrækker. Et stort problem var dog stadig hvordan man skulle tænke på og regne med infinitisimaler, og en stor kritiker af den intuitive tankegang var den irske filosof og biskop George Berkeley (1685-1753). Berkeley argumenterede for at hvis man kunne acceptere noget så udefineret som infinitisimaler, så kunne man heller ikke tillade sig at være kræsen mht. uafklarede spørgsmål i kristendommen. [Katz, 1998, kap. 12 og 13]

Litteratur

Abel, N. H. [1826/1881]. *Œuvres Complètes de Niels Henrik Abel*, Grøndahl, Christiania.

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. & Lavrent'ev, M. A. [1956/1969]. *Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning,* i oversættelse fra russisk, The M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

Andersen, K., Andersen, I., Garm, K., Holth, K., Jakobsen, I. T. & Mejlbo, L. [1986]. *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*, Forlaget Trip, Vejle. Editor: Kirsti Andersen.

Ayoub, R. G. [1980]. Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic, *Archive for History of Exact Sciences* **23**: 253–277.

Bauer, F. L. [1997]. *Decrypted Secrets – Methods and Maxims of Cryptology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Bell, E. T. [1944]. *Matematikkens mænd,* på dansk ved Niels og Ellen Arley, C. A. Reitzels Forlag, Axel Sandal, København.

Bell, E. T. [1945]. *The Development of Mathematics,* Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, London.

Biggs, N. L. [1989]. *Discrete Mathematics* Revised Edition, Oxford Science Publications.

Burkhardt, H. [1892]. Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini, *Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik* **38**: 119–159.

Cardano, G. [1545/1968]. *Artis Magnæ Sive De Regulis Algebraicis,* i engelsk oversættelse, *Ars Magna or the Rules of Great Art,* af T. Richard Witmer fra 1968, Dover Publications, Inc. New York.

Cauchy, A. L. [1815]. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une function peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme, *Journal de l'Ecole Polytechnique* **10**: 1–28.

Dehn, E. [1960]. *Algebraic Equations – An Introduction to the Theories of Lagrange and Galois*, Dover Publications, Inc., New York.

Den Store Danske Encyklopædi [1994-2001]. Udkommet i 20 bind. Gyldendal, København.

Dictionary of Scientific Biography [1970-80]. Udkommet i 18 bind. Charles Scribner's Sons, New York.

Dieudonné, J. [1987/1992]. *Mathematics - The Music of Reason,* oversat fra fransk af H. G. og J. C. Dales, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Edwards, H. M. [1984]. *Galois Theory,* Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

Euklid [ca. 300 f.v.t./1956]. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* i oversættelse af Sir Thomas L. Heath fra 1956, Dover Publications Inc., New York.

Euler, L. [1770/1972]. *Vollständige Anleitung zur Algebra,* i engelsk oversættelse, *Elements of Algebra,* af John Hewlett fra 1840, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

Fraleigh, J. B. [1999]. *A First Course in Abstract Algebra* Sixth Edition, Addison-Wesley, Massachusetts.

Friedberg, S. H., Insel, A. J. & Spence, L. E. [1997]. *Linear Algebra* Third Edition, Prentice-Hall International, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.

Gauss, C. F. [1801/1966]. *Disquisitiones Arithmeticae,* i engelsk oversættelse af Arthur A. Clarke fra 1966, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

Gebelein, H. [2000]. *Alchemie,* Diederichs Gelbe Reihe, München.

Høyrup, J. [1998]. *Algebra på lertavler,* Matematiklærerforeningen.

Høyrup, J. [2002]. *Lengths, Widths, Surfaces - A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin,* Springer Verlag New York Inc.

Jacobsen, N. [1951]. *Lectures in Abstract Algebra* (vol. 1 & 2), Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Johansen, T. [1945]. *Matematik i oldtiden,* Forlaget AV, H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard), Oslo.

Katz, V. J. [1998]. *A History of Mathematics - An Introduction* Second Edition, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc. Massachusetts.

Kiernan, B. M. [1971]. The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin, *Archive for History of Exact Sciences* **8**: 40–154.

Klügel, G. S. [1803]. *Mathematisches Würterbuch,* 1. Abtheilung, Die reine Mathematik, 1. Theil von A bis D, Leipzig.

Klügel, G. S. [1805]. *Mathematisches Wörterbuch,* 1. Abtheilung, Die reine Mathematik, 2. Theil von E bis J, Leipzig.

Klügel, G. S. [1831]. *Mathematisches Wörterbuch,* 1. Abtheilung, Die reine Mathematik, 5. Theil von T bis Z, Leipzig.

Kline, M. [1972]. *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times,* Oxford University Press, New York.

Knutsen, H. [1997]. Matematikerne på barrikaden, *Normat* **4**: 150–166.

Kracht, M. & Kreyszig, E. [1990]. E. W. von Tschirnhaus: His Role in Early Calculus and His Work and Impact on Algebra, *Historia Mathematica* **17**: 16–35.

Lagrange, J.-L. [1770-71]. ***Réflexions sur la résolution algébrique des équations*** i *Œuvres de Lagrange Tome III* 1867-1892, Gauthier-Villars, Paris. Editor: J.-A. Serret.

Lagrange, J.-L. [1808]. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris.

Lang, S. [1972]. *Linear Algebra* Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, Massachusetts.

Lang, S. [1977]. *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.

Lindstrøm, T. [1996]. *Kalkulus*, Universitetsforlaget AS, Oslo.

Nový, L. [1973]. *Origins of Modern Algebra*, Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences Prague.

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. [2002]. *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians.html* .

Petersen, J. [1877]. *De algebraiske Ligningers Theori*, Andr. Fred. Høst & Søns Forlag, Kjøbenhavn.

Pierpont, P. J. [1895]. Lagrange and His Place in The Theory of Substitutions, *Bulletin of the American Mathematical Society* **2**: 196–204.

Pierpont, P. J. [1896]. On the Ruffini-Abelian Theorem, *Bulletin of the American Mathematical Society* **2**: 200–221.

Rothman, T. [1982]. Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois, *American Mathematical Monthly* **89**: 84–106.

Ruffini, P. [1799/1915]. *Opere matematiche di Paolo Ruffini – tomo primo*, Tipografia Matematica di Palermo. Editor: Prof. Dr. Ettore Bortolotti.

Salmonsens Konversations Leksikon Anden Udgave bind XXIII [1927]. J. H. Schultz Forlagsboghandel A/S, København.

Skau, C. [1990]. Gjensyn med Abels og Ruffinis bevis for umuligheten av å løse den generelle n'tegradsligningen algebraisk når $n \geq 5$, *Normat* **2**: 53–84.

Sørensen, H. K. [1999]. *Niels Henrik Abel and the theory of equations*, History of Science Department University of Århus, Denmark.

Stewart, I. [1989]. *Galois Theory* Second Edition, Chapman and Hall, London, New York.

The Great Soviet Encyclopedia [1970-79/1973-82]. Udkommet i 31 bind i oversættelse fra russisk. Macmillian, Inc. New York.

Tignol, J.-P. [1980/1988]. *Galois' Theory of Algebraic Equations* i oversættelse fra fransk, John Wiley & Sons, Inc. New York.

van der Waerden, B. L. [1930/1970]. *Algebra* (vol. 1 & 2), i oversættelse fra tysk af, Frederick Ungar Publishing Co. New York.

van der Waerden, B. L. [1985]. *A History of Algebra - From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Vandermonde, N. [1770/1888]. *Sur la résolution des équations,* i tysk oversættelse, *Abhandlungen aus der reinen Mathematik,* af Carl Itzigsohn fra 1888, Berlin Verlag von Julius Springer.

Varadarajan, V. [1998]. *Algebra in Ancient and Modern Times*, American Mathematical Society and Hindustan Book Agency.

Viète, F. [1591/1973]. *In Artem Analyticem Isagoge,* i tysk oversættelse, *Einführung in die Neue Algebra,* af Karin Reich og Helmuth Gericke fra 1973, Werner Fritsch, München.

Viète, F. [1615/1983]. *In Artem Analyticem Isagoge,* i engelsk oversættelse, *The Analytic Art,* af T. Richard Witmer fra 1983, The Kent State University Press, Ohio.

Waring, E. [1782/1991]. *Meditationes Algebraicæ,* i engelsk oversættelse af Dennis Weeks fra 1991, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Whitehead, A. N. [1929]. *The Aims of Education and Other Essays*, The Macmillan Company, New York.

Wussing, H. [1969]. *Die Genesis des Abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin.

Wussing, H. & Arnold, W. [1975]. *Biographien Bedeutender Mathematiker*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: http://mmf.ruc.dk eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen

358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen

359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)

360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhelm Booß-Bavnbek, Kenro Furutani

362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen

363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen

364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup

365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege

366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

368/99 Kvartvejsraport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen

369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen

370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter tekst nr. 350/98

371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen

373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki

374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen

375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik

376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder

377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen

378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and termal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski

386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen

388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen

390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System#: Thomas Engberg Pedersen##, Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2#: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen*, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen**, Bent Sørensen
#Indtil 1/1-2000 Elkraft, ## fra 1/5-2000 Cowi Consult
* Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ** fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram

391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen

392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.

393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.

395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorthe Posselt

398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt

399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss

400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen

401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen

402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen

403/01 Generaliseringer i integralteorien
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen

404/01 "Mere spredt fægtning"
Af: Jens Højgaard Jensen

405/01 Real life routing
- en strategi for et virkeligt vrp
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jogvan Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak
Vejleder: Jørgen Larsen

406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik
Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg

407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang