

Generaliseringer i integralteorien

- En undersøgelse af Lebesgue-integralet,
Radon-integralet og Perron-integralet.

Et 2. modul matematikprojekt

udarbejdet af

Stine Timmermann og Eva Uhre

vejledt af

Tinne Hoff Kjeldsen
Bernhelm Booß-Bavnbek

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA – Roskilde Universitetscenter

Postbox 260

DK-4000 Roskilde

Tlf. 4674 2263/ Fax. 4674 3020/ email kl@ruc.dk

Stine Timmermann og Eva Uhre: Generaliseringer i integralteorien – En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet.

Et matematisk 2. modul videnskabsfagsprojekt.

IMFUFA-tekst nr. 403/2001

78 sider

ISSN 0106-6242

I denne rapport undersøges en del af integralteoriens udvikling, eksemplificeret ved Lebesgue, Radon og Perron integralerne, der publiceres i henholdsvis 1901, 1913 og 1914.

Specielt undersøges det, hvilken motivation Henri Lebesgue, Johann Radon og Oskar Perron havde for at generalisere integralbegrebet, og hvilken karakter og rækkevidde de respektive integralbegreber har.

Undersøgelsen af matematikernes motivation bygges på et studie af de artikler, hvori de første gang præsenterede deres integralbegreber. Resultatet af undersøgelsen er, at der heri forekommer flere forskellige motivationsgrunde for at generalisere integralbegrebet, heriblandt ønsket om at kunne løse stamfunktionsproblemet, at lave en forenkling eller oprydning indenfor integralteorien, eller at benytte integralet som et redskab i udledningen af andre teorier.

Generaliseringerne karakteriseres som enten en abstraktion eller en udvidelse af et tidligere integralbegreb. Det viser sig, at Lebesgues og Perrons generaliseringer kan karakteriseres som en udvidelse af henholdsvis Riemann- og Lebesgue-integralet, mens Radons integralbegreb er en generalisering af integralbegrebet og kan således karakteriseres som en abstraktion.

Overordnet er formålet med denne projektrapport at medvirke til at belyse, hvordan der kan være vidt forskellige 'slags' grunde involveret i skabelsen af ny matematik og hvordan matematikkens udvikling kan foregå.

Forord

Denne rapport er det fysiske resultat af et semesters projektarbejde på 2. modul på matematikoverbygningen på Roskilde Universitetscenter. Vi vil gerne takke Bernhelm Boock-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen for god vejledning, og Mogens Niss for inspirerende samtaler.

Stine Timmermann og Eva Uhre

juni 2001

I forbindelse med udgivelsen af nærværende rapport som IMFUFA-tekst har vi foretaget enkelte rettelser af fejl og formuleringer i den oprindelige rapport.

September 2001

Indhold

1	Indledning	1
1.1	Personlig motivation	1
1.2	Faglig motivation	1
1.3	Modulbinding og problemformulering	2
1.4	Metode	3
1.5	Rapportens opbygning	5
2	Matematisk baggrund	7
3	Udviklingen fra Riemann til Lebesgue	11
3.1	Fourierrækker	11
3.2	Riemanns bidrag	12
3.3	Perioden mellem Riemann og Lebesgue	13
3.3.1	Udviklingen af funktionsbegrebet	14
3.3.2	Målbegrebet	15
4	Henri Lebesgue (1875-1941)	19
4.1	Kort biografi	19
4.2	Lebesgues artikler: ' <i>Intégrale, Longueur, Aire</i> ' og ' <i>Sur une généralisation de l'intégrale définie</i> '	20
4.3	Lebesgues integralbegreb	21
4.3.1	Den geometriske definition	21
4.3.2	Lebesgues indføring af mål	23
4.3.3	Den analytiske definition	24
4.3.4	Lebesgues brug af ordet summabel	25
4.4	De centrale sætninger	26
4.4.1	Lebesgues konvergenssætning	26
4.4.2	Det ubestemte integral	29
4.4.3	Lebesgues udgave af Analysens Fundamentalteorem 2	30
4.5	Lebesgues videre arbejde	32
4.6	Opsamling	33
5	Oskar Perron (1880-1975)	37
5.1	Kort biografi	37
5.2	Perrons artikel: ' <i>Über den Integralbegriff</i> '	37
5.3	Perrons integralbegreb	38
5.4	De centrale sætninger	43
5.5	Sammenhængen mellem Lebesgue- og Perron-integralet	46
5.6	Ubegrænsede funktioner	47
5.7	Opsamling	47

6	Johann Radon (1887-1956)	49
6.1	Kort biografi	49
6.2	Radons artikel: ' <i>Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen</i> '	49
6.3	Radons integralbegreb	50
6.3.1	Generaliseringen af målbegrebet	51
6.3.2	Generaliseringen af Stieltjes' og Lebesgues integralbegreber	52
6.4	Integraler som kontinuerte lineære funktionaler	54
6.5	De absolut additive mængdefunktioners integralfremstilling	54
7	Delkonklusion	57
7.1	Karakteren af vores konklusioner	58
8	Generaliseringer	61
8.1	Generaliseringernes karakter	61
8.2	Generaliseringernes rækkevidde	62
8.3	Delkonklusion	65
9	Afrunding	67
10	Perspektivering	69
	Litteratur	71

1 Indledning

1.1 Personlig motivation

Igennem vores matematikuddannelse på Roskilde Universitetscenter har vi stiftet bekendtskab med Riemann-integralet i forbindelse med kurset 'Ikke-lineære strukturer fra algebra og analyse I'. På dette kursus indføres først Darboux's version af Riemann-integralet, hvorefter det vises, at Darboux's og Riemann's formuleringer er ækvivalente. I en bemærkning i lærebogen får man derefter at vide, at der findes ikke-integrable funktioner, hvilket geometrisk set er ækvivalent med, at der findes mængder, som det er umuligt på fornuftig vis at tillægge et areal. I denne forbindelse nævnes det, at der findes metoder, som er 'smartere og mere fleksible' (end Riemann-integralet), således at flere funktioner kan integreres, og at Lebesgue-integralet er et eksempel på en sådan. Dette vakte vores interesse og undren: Hvad kan dette mystiske Lebesgue-integral? Da der ikke er nogen faste kurser i mål- og integralteori på Roskilde Universitetscenters matematikuddannelse, var vi imidlertid henvist til selv at undersøge sagen.

Der dukkede dog hurtigt flere spørgsmål op end svar, for eksempel fandt vi ud af, at der findes en hel mangfoldighed af forskellige integraler; Denjoy-, Perron-, Henstock-, Radon-Stieltjes- og Burkill-integralet for blot at nævne nogle få¹. Alle disse integraldefinitioner beskrives i litteraturen oftest som *generaliseringer*, af og til som *udvidelser*, af enten Riemann- eller Lebesgue-integralet. Dette affødte spørgsmål som: Hvad kan disse integraler? Hvorfor er der blevet udviklet så mange forskellige integraler? Og hvorfor er det altid Lebesgue-integralet man hører om? Hvad menes i denne sammenhæng med *generalisering*? I hvilken forstand er der, for de respektive definitioner, tale om generaliseringer af tidligere integraldefinitioner? Har disse samme karakter?

Ovennævnte spørgsmål hænger sammen med en overordnet undren over, hvordan matematikken udvikler sig og hvad der driver denne udvikling, det vil sige hvorfor matematikken udvikler sig som den gør.

1.2 Faglig motivation

Nærværende projektrapport kan forhåbentlig medvirke til at belyse, hvordan matematikkens udvikling kan foregå, og hvordan der kan være vidt forskellige 'slags' grunde involveret i skabelsen af ny matematik. I denne forbindelse kan vores projekt også illustrere, at matematiske resultater kan have forskellig status, for eksempel afhængigt af om resultatet viser sig at være vigtigt i forbindelse med anvendelser, teoretisk afklaring eller som 'drivmiddel' i den videre udvikling.

¹For uddybning og yderligere eksempler på integraler i det tyvende århundrede henvises blandt andet til [Henstock, 1988].

På det mere konkrete plan håber vi at kunne belyse, hvordan en del af udviklingen er foregået indenfor området mål-og integralteori, det vil i denne sammenhæng kort fortalt sige at få svar på spørgsmålet 'hvorfor er der så mange generaliseringer af integralbegrebet?'.

1.3 Modulbinding og problemformulering

Vi valgte at beskæftige os med ovenstående spørgsmål i forbindelse med et projektarbejde, svarende til $1/2$ semesterværk, på andet modul på Roskilde Universitetscenters matematikoverbygning. Projektet er et såkaldt *videnskabsfagsprojekt* og skal overholde følgende modulbinding:

Projektet skal behandle matematikkens natur og indretning som videnskabsfag, herunder dens begreber, metoder, teorier og opbygning m.v. Behandlingen skal ske på en sådan måde at matematikkens videnskabsteoretiske status, historiske udvikling eller samfundsmæssige placering belyses.²

Der er mange interessante ting vi kunne have taget fat på i forlængelse af vores overordnede motivation for at beskæftige os med integralbegrebets udvikling.

Matematikens udvikling er både styret af de mennesker, der skaber den nye matematik, og betydningen af den matematik, der bliver udviklet. For at matematik bliver skabt indenfor et område er der nødt til at være nogle matematikere, som faktisk er interesseret i at undersøge og afdække området. Ved at studere motivationen hos de folk, som har været med til at udvikle integralbegrebet kan vi få et indblik i, hvorfor et matematisk område bliver undersøgt.

Når et nyt matematisk begreb er skabt afhænger dets videre skæbne af flere ting. En af de centrale ting er de matematiske konsekvenser som begrebet får for resten af matematikken. Det vil lidt banalt sige: Hvad kan den nye matematik? Ved at undersøge dette er det måske muligt at svare på, hvorfor noget matematik får større gennemslagskraft og matematisk betydning end andet.

Vi har valgt at beskæftige os med tre forskellige generaliseringer af integralet lavet af matematikerne Henri Lebesgue, Oskar Perron og Johann Radon, fordi vi mener, at deres arbejde er af tilstrækkelig forskellig karakter til at kunne udspænde forskellige mulige svar på spørgsmålet om, hvorfor der er så mange generaliseringer af integralbegrebet.

Denne udvælgelse er sket gennem en overordnet litteratursøgning, baggrunds- og kilde-læsning som førte til, at vi valgte at betragte de tre ovenfor nævnte generaliseringer, samt to andre generaliseringer indført af henholdsvis Arnaud Denjoy og Ralph Henstock³. Efter nærmere læsning af deres artikler valgte vi at koncentrere os om Lebesgue, Perron og Radon.

Den præcise formulering af de spørgsmål vi vil undersøge er:

²Studieordningen for matematik på Roskilde Universitetscenter, §6.

³Vi kommer kort ind på deres integralbegreber i kapitel 7.

Problemformulering

- Hvad var henholdsvis Lebesgue, Perron og Radon motiverede af i forbindelse med deres respektive generaliseringer af integralet?
- Hvilken karakter og rækkevidde har generaliseringerne indført af Lebesgue, Perron og Radon, og hvilke forskelle er der imellem de tre?

Begrebet *generalisering* kan tillægges mange betydninger. I [*Great Soviet Encyclopedia*, 1978] angives to typer af generaliseringer. Den første er en generalisering i form af en abstraktion, hvor der genereres nye love, principper og teorier, som ikke er bestemt af det begreb, der generaliseres. Den anden type er ikke en abstraktion, men en variant af det oprindelige begreb. Her vil generaliseringen på visse punkter kunne være en udvidelse af det allerede eksisterende begreb, således at generaliseringen på disse punkter indeholder det generaliserede begreb som et specialtilfælde, mens det ikke behøver at være tilfældet for alle aspekter af det generaliserede begreb.

Med inspiration i ovenstående har vi valgt at bruge begrebet generaliseringer dels i betydningen type I) en abstraktion af det begreb, der tages udgangspunkt i, og dels i betydningen type II) en udvidelse, der omfatter det begreb, der tages udgangspunkt i.

Med spørgsmålet om karakteren af generaliseringerne tænker vi på hvilken type af generalisering, der er tale om. Med generaliseringernes rækkevidde menes, hvilke sætninger og egenskaber der gælder for det nye integralbegreb.

Vi vil i vores arbejde lægge hovedvægten på besvarelsen af det første spørgsmål i problemformuleringen.

Der eksisterer (selvfølgelig) mange glimrende bøger, der beskriver både den historiske udvikling, samt de matematiske relationer og forskelle mellem de forskellige integralbegreber. I [Hawkins, 1975] bliver den matematiske udvikling, som leder frem til Lebesgues formulering af sit integralbegreb, grundigt afdækket. Derudover findes der i denne kilde en epilog omkring Radons integral med en kort præsentation af et udvalg af Radons resultater fra afhandlingen. Stilen i [Hawkins, 1975] er deskriptiv, og formålet synes at være en præsentation af de konkrete resultater uden en eksplicit fortolkning af den matematiske udvikling, som fremstilles.

I [Dalen & Monna, 1972] foretages også en afdækning (dog ikke så grundig som i [Hawkins, 1975]) af udviklingen frem til Lebesgues integralbegreb, og der gives en præsentation af både Perron- og Radon-integralet. De to ovennævnte fremstillinger har vi støttet os til undervejs i projektet.

Vi er dog ikke stødt på en fremstilling, der sammenligner de motivationer, der ligger bag udarbejdelsen af integralerne, eller som diskuterer ligheder og forskelle mellem karakteren og rækkevidden af generaliseringerne, hvilket er indfaldsvinklen i vores undersøgelser.

1.4 Metode

Vi har allerede nævnt, at vi ikke vil tillægge de to spørgsmål i problemformuleringen samme vægt i vores besvarelse. Herudover har vi tænkt os at arbejde med de to spørgsmål på forskellig vis.

Undersøgelsen af hvad der motiverede de tre matematikere, har vi tænkt os at gribe historisk an. Når vi bruger ordet historisk, mener vi i denne sammenhæng først og fremmest, at vi vil betragte motivationen for en given udvikling, løsrevet fra den sammenhæng hvori begrebet indgår i dag og løsrevet fra vores viden om, hvilken betydning begrebet senere fik. Vores undersøgelse vil primært være af internalistisk karakter, det vil sige en undersøgelse af en intern matematisk motivation. I forbindelse med studiet af motivationerne er der imidlertid nogle metodiske problemer. Det er ikke muligt, på baggrund af en analyse af de historiske kilder, at afgøre med sikkerhed, hvilken motivation der ligger til grund for udarbejdelsen af generaliseringerne. Ydermere er der en fare for efterrationalisering, således at man lader sig styre af de ting, der har vist sig at være centrale i udviklingen. Disse problemer har vi så vidt muligt været opmærksomme på undervejs i vores analyse.

I gennemgangen af de historiske tekster har vi forsøgt at holde os meget tekstnært til artiklerne. Enkelte steder har vi dog modificeret formuleringerne af definitioner og sætninger ved eksempelvis at præcisere de indgående størrelser. I nogle af kilderne anvendes notationen

$$\lim \xi = x \quad \text{og} \quad \lim_{n=\infty}$$

for det vi i dag ville betegne med

$$\xi \rightarrow x \quad \text{og} \quad \lim_{n \rightarrow \infty}.$$

Vi har valgt at ændre notationen til den moderne notation for at lette gennemgangen. Med hensyn til vores brug af *limes*-begrebet, har vi valgt at benytte skrivemåden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

også i de tilfælde, hvor det ikke vides, om følgen (f_n) faktisk konvergerer.

Det andet spørgsmål i problemformuleringen, omhandlende karakteren af generaliseringerne, har vi tænkt os at besvare med udgangspunkt i en 'ren' matematisk undersøgelse, det vil sige, hvilken karakter ved man i dag, at generaliseringerne har.

Vi vil i gennemgangen af Perrons, Lebesgues og Radons arbejder lade hovedvægten være på de to første og kun give en oversigt over Radons arbejde og mulige motivation. Dette skyldes, at Radons arbejde er omfattende og bygger på et stort teoretisk forarbejde af mange andre matematikere, som det havde været nødvendigt også at inddrage i en analyse. Vi mener dog, at vi er i stand til, på baggrund af den undersøgelse vi har lavet, at udtale os om Radons motivation, karakteren af hans generalisering og de forskelle, der er mellem hans generalisering og dem lavet af Lebesgue og Perron, i det omfang det er nødvendigt for besvarelsen af problemformuleringen.

I forbindelse med besvarelsen af begge spørgsmål viste det sig undervejs, at der er to egenskaber ved integralbegreberne, der er meget relevante. Det drejer sig om hvilke konvergenssætninger, der kan formuleres i forhold til det givne integralbegreb, og udseendet af Analysens Fundamentalteorem. Derfor vil vi kort introducere til disse her.

Konvergenssætninger

Hvis (f_n) er en følge af funktioner, der konvergerer mod en funktion f på $[a, b]$, så er en konvergenssætning en sætning der, for en given slags integration, angiver betingelser så nedenstående gælder:

- f er integrabel på intervallet $[a, b]$;
- Der gælder, at $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ for $n \rightarrow \infty$.

Når vi fremover taler om konvergens, menes der punktvis konvergens, hvis ikke andet nævnes.

Analysens Fundamentalteorem

Analysens Fundamentalteorem udtaler sig om, hvornår integration og differentiation er hinandens omvendte operationer. Analysens Fundamentalteorem har to dele:

- Givet en integrabel funktion f . Er det ubestemte integral af f en differentiabel funktion og 'genfinder' differentiationen f ? Det vil sige er

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)?$$

- Givet en afledt f' på $[a, b]$. Er f' integrabel og 'genfinder' integrationen f ? Det vil sige er:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)?$$

Disse to dele vil vi kalde henholdsvis Analysens Fundamentalteorem 1 og 2. Betragter man mængden af kontinuerte funktioner gælder Analysens Fundamentalteorem 1 og 2 uden ekstra betingelser, det vil sige, at det ubestemte integral af en kontinuert funktion er differentiabel, og den afledte er lig funktionen selv, samt at integration af enhver kontinuert afledt som resultat giver en stamfunktion. Dette betyder altså, at hvis vi begrænser os til mængden af kontinuerte funktioner, så er integration og differentiation hinandens omvendte operationer. Denne egenskab refererer vi til ved at sige, at Analysens Fundamentalteorem er *symmetrisk*.

I sammenhæng med Analysens Fundamentalteorem 2 vil vi ofte snakke om *stamfunktionsproblemet*, som kan gives følgende formulering: Givet en funktion ϕ , bestem en funktion f således, at den afledte af f er lig ϕ . Således kan Analysens Fundamentalteorem 2 formuleres som et spørgsmål om, hvorvidt integration løser stamfunktionsproblemet. Det er denne del af Analysens Fundamentalteorem, vi vil koncentrere os om.

Afhængigt af hvilket integralbegreb man tager udgangspunkt i, får både konvergenssætningen og Analysens Fundamentalteorem forskellige formuleringer. De forskellige formuleringer af sætningerne angår de betingelser man må stille for at få sætningerne til at gælde.

1.5 Rapportens opbygning

Vi vil starte vores undersøgelser med at give en kort beskrivelse af hvilke problemer, der ligger i definitionen af Riemann-integralet og hvordan Lebesgue-integralet løser problemerne. Afsnittet har to funktioner, dels at opfriske hukommelsen med hensyn til definitionen på Riemann-integralet, og dels at give en kort introduktion til det centrale i Lebesgues definition, og til begreberne mål og målelige-mængder.

Herefter følger et kort historisk rids af perioden fra Riemanns integral i 1854 og frem til 1901, hvor Lebesgue publicerer sit nye integral. For at få en større forståelse for målbegrebet og dets udvikling giver vi i dette afsnit en præsentation af to af de målbegreber, der udarbejdes i denne periode.

I de følgende kapitler præsenteres Lebesgues, Perrons og Radons arbejde, med henblik på at undersøge, hvad der motiverede dem. I afsnittene om Lebesgue og Perron gennemgår vi beviserne for Analysens Fundamentalteorem 2 og den konvergenssætning, de hver især angiver for deres integralbegreb. Vi har valgt at gengive beviserne blandt andet fordi det centrale i integraldefinitionerne og forskellene mellem de to integralbegreber herigennem fremtræder tydeligere. Efter præsentationerne diskuterer og konkluderer vi på første spørgsmål i problemformuleringen, motivationsdelen.

Efter dette vil vi tage vores historiske briller af og betragte deres arbejde ud fra spørgsmålene om, hvilken karakter og rækkevidde deres generaliseringer har. Dette vil blive gjort delvis ud fra den viden om generaliseringerne, som vi har fået ved at gennemgå Lebesgues, Perrons og Radons arbejde, men først og fremmest med udgangspunkt i den moderne litteratur.

I forbindelse med en konklusion på andet spørgsmål i problemformuleringen vil vi kort komme med vores bud på i hvilken forstand, integralerne har forskellig gennemslagskraft.

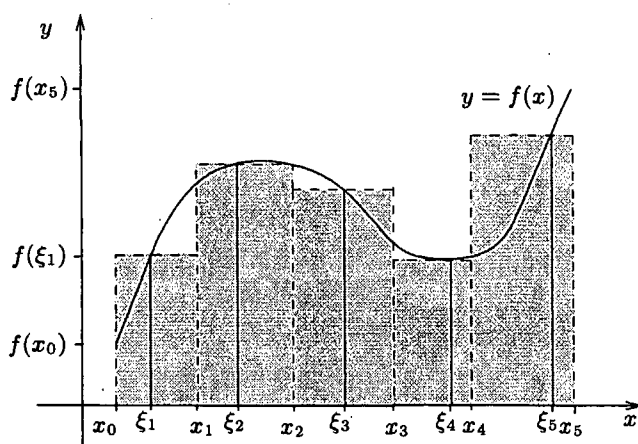
Afslutningsvis karakteriserer vi de forskellige generaliseringers status i den matematiske udvikling af integralteorien.

2 Matematisk baggrund

Vi vil her give et bud på den matematiske baggrund for, at der har været behov for at lave generaliseringer af integralbegrebet.

Det bestemte integral fra a til b af en begrænset funktion f kan opfattes som arealet af den mængde i planen, som er begrænset af henholdsvis kurven for f , x -aksen og de to linjer parallelle med y -aksen, som går igennem a og b .

Riemanns løsning på problemet med at finde dette areal bygger på at betragte en opdeling af det givne interval $[a, b]$ i delintervaller, vælge en funktionsværdi hørende til hvert af delintervallerne, og derefter danne rektangler hvis grundlinjer er længderne af delintervallerne, og hvis højder er de respektive funktionsværdier, se eksemplet i figur 2.1. Arealet af disse rektangler approksimerer det ønskede areal.



Figur 2.1 På figuren ses grafen for funktionen f med en partition af x -aksen og den approksimation af arealet, som denne partition giver anledning til.

Hvis vi altså har givet en partition af x -aksen, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ og et udvalg af x -værdier (ξ_i 'er) fra hvert delinterval $[x_{i-1}, x_i]$, så betragtes summen:

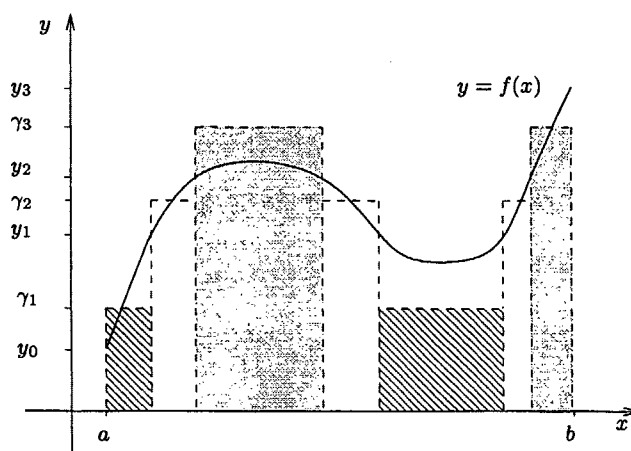
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Funktionen f siges at være Riemann-integrabel, hvis denne sum går imod en endelig grænseværdi, uafhængigt af partitionen og udvalget, for længden af delintervallerne gående mod nul.

Dette er en god metode, når den funktion man ønsker at integrere ikke er alt for grim, sådan at man får en god tilnærmelse til arealet bare man betragter tilstrækkeligt små

delintervaller. Men hvad nu hvis funktionen er så diskontinuert, at det er umuligt at finde funktionsværdier, som med rimelighed kan siges at approksimere f på de betragtede delintervaller, uanset hvor små disse intervaller gøres?¹ I dette tilfælde kommer Riemanns definition til kort, det vil sige disse funktioner er ikke Riemann-integrabler.

Lebesgues løsning på problemet med at finde arealet under funktionen tager udgangspunkt i en opdeling af y -aksen, i stedet for en opdeling af x -aksen. Lebesgue betragter altså en partition $k = y_0 < y_1 < \dots < y_n = K$ af y -aksen, for en funktion for hvilken der for alle $x \in [a, b]$ gælder, at $k \leq f(x) \leq K$. Et eksempel er vist i figur 2.2.



Figur 2.2 På figuren ses grafen for funktionen f med en partition af y -aksen. Eksempelvis ses at de hvide rektangler afgrænser tre intervaller på x -aksen. Foreningen af disse intervaller er mængden A_2 .

Vi kan nu betragte summen:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i m(A_i),$$

hvor $\gamma_i \in [y_{i-1}, y_i]$, $A_i = \{x \mid y_{i-1} < f(x) \leq y_i\}$, og $m(A_i)$ betegner *målet* af mængden af x 'er som har funktionsværdier, der ligger i intervallet $[y_{i-1}, y_i]$. Nu vil vi gerne kunne definere Lebesgue-integralet som grænseværdien til den ovenstående sum for n gående mod uendelig og størrelsen af partitionen gående mod nul.

Hvis denne definition er mulig vil den ikke give de samme problemer som Riemanns metode, idet opdelingen af y -aksen netop sikrer, at vi kan vælge funktionsværdier, der approksimerer funktionen vilkårligt godt for en mængde af x -værdier. Vi støder imidlertid på et andet problem, for der er jo ingen der lover, at opdelingen af y -aksen giver os mængder A_i , som er intervaller vi kan bestemme længderne af. Udtrykket $m(A_i)$ har kun mening, hvis man kan tillægge en 'længde' til mængder, som ikke nødvendigvis er intervaller. Der er altså et behov for at udvide længdebegrebet til også at kunne omfatte vilkårlige punktmængder.

Man vil gerne have et mål til at være en funktion, der tildeler et tal, $m(E) \in [0, \infty[$ eller værdien uendelig, til enhver mængde E i en given samling af mængder. I den bedste af alle verdener vil man gerne have målet af mængder i $\mathbf{R}$ til at opfylde følgende egenskaber:

¹Og sådan nogle funktioner eksisterer selvfølgelig, det mest benyttede eksempel er Dirichlets funktion, som er 0 i de irrationelle tal og 1 i de rationelle tal. -

- Alle delmængder i $\mathbf{R}$ tillægges et mål, det vil sige m 's domæne er potensmængden af $\mathbf{R}$.
- For et interval, I , skal der gælde at $m(I) = |I|$.
- Hvis $E_1, E_2, \dots$ er parvist disjunkte mængder og målet $m(E_n)$ er defineret for alle $n \in \mathbf{N}$ så skal $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.
- Målet skal være translations invariant, det vil sige når $m(E)$ er defineret skal $m(E + y) = m(E)$, hvor $E + y = \{x + y \mid x \in E\}$ og $y \in \mathbf{R}$.

[Royden, 1988, s. 54] Den første og anden egenskab udtrykker, at man gerne vil kunne tillægge alle delmængder i $\mathbf{R}$ et mål, og at det skal opfylde, at målet af intervaller faktisk er længden af intervallet, så der bliver overensstemmelse med længdebegrebet. Den tredje egenskab kaldes tællelig additivitet. Længdebegrebet er tælleligt additivt, og den egenskab ønsker man også, at det generaliserede begreb skal have. Den fjerde egenskab beskriver egenskaben, som også kendes fra længdebegrebet; at et interval har den samme længde uanset, hvor det er placeret på den reelle tallinje.

Det viser sig at være umuligt at definere et mål, der opfylder alle fire betingelser, derfor giver man køb på betingelse 1, så det ikke er alle mængder, der kan tillægges et mål, det vil sige som er *målelige* [Royden, 1988, s. 54]. Men for de mængder, som kan tillægges et mål sætter man som krav, at komplementærmængderne og tællelige foreningsmængder også er målelige².

Således bliver 'integrationsproblemet' reduceret til problemet at tillægge et mål til en mængde.

Der er imidlertid også en anden måde at definere det bestemte integral på, nemlig som en tilvækst i en stamfunktion for den funktion man ønsker at integrere. Et eksempel på en sådan integraldefinition er Newtons definition af integralet. Newton definerede det ubestemte integral af en funktion f som en funktion F , der differentieret giver f [Henstock, 1963, s. 4]. Denne tilgang vil vi komme nærmere ind på i afsnittet om Perron, se kapitel 5.

²Dette viser sig at være opfyldt, hvis man definerer målet på en σ -algebra, se eksempelvis [Madsen, 1975, s. 14].

3 Udviklingen fra Riemann til Lebesgue

Det følgende kapitel skal give et overblik over de mest centrale dele i den matematiske udvikling, der ledte fra Bernhard Riemanns (1826-1866) definition af integralet til Henri Lebesgues (1875-1941) integralbegreb i 1901.

En af de områder, der især fik betydning for udviklingen af integralet er teorien for Fourierrækker. Af hensyn til de læsere, der ikke har stiftet bekendtskab med Fourier-rækker har vi valgt at begynde med en kort introduktion til den moderne definition.

3.1 Fourierrækker

Dette afsnit bygger på [Logan, 1998][Dym & McKean, 1972][Hawkins, 1975].

Fourierrækken for en funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, der er integrabel på $[-\pi, \pi]$ er den trigonometriske række

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (3.1)$$

hvor koefficienterne a_n og b_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{for } n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

I moderne sammenhænge skriver man ofte 3.1 på formen:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (3.4)$$

hvor c_n 'erne er komplekse og givet ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \text{for } n \in \mathbf{Z}. \quad (3.5)$$

Spørgsmålet er nu, hvornår det er muligt at repræsentere en funktion ved en Fourier-række. Der kan siges at være tre centrale problemer.

For det første er der spørgsmålet om funktionerne $f(x) \cos(nx)$ og $f(x) \sin(nx)$ er integrable, hvilket er en nødvendig betingelse for bestemmelsen af koefficienterne i Fourier-rækken, som givet ved ligning 3.2 og 3.3. For at $f(x) \cos(nx)$ og $f(x) \sin(nx)$ er integrable er det ihvertfald nødvendigt, at $f(x)$ er det.

For det andet er der spørgsmålet om Fourierrækken for en given funktion f konvergerer på en nærmere specificeret måde mod f på intervallet. Hvis det er tilfældet giver det mening at benytte skrivemåden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (3.6)$$

For det tredje kan man spørge om Fourierrækkefremstillingen for en given funktion er entydig, det vil sige er koefficienterne som findes ved ligning 3.2 og 3.3 de eneste koefficienter for funktionen f , som opfylder ligning 3.6.

Udtrykkene for koefficienterne, ligning 3.2 og 3.3, kan findes ved at multiplicere ligning 3.6 med henholdsvis $\cos(kx)$ og $\sin(kx)$ og integrere fra $-\pi$ til π på begge sider af lighedstegnet. Hvis det er lovligt at ombytte integraltegnet og sumtegnet, er resultatet af denne operation udtrykkene 3.2 og 3.3, og det er dermed vist at, hvis en funktion er fremstillet ved en trigonometrisk række, så er denne række Fourierrækken som givet ovenfor. Lovligheden af dette er imidlertid ikke trivielt, som vi skal se senere.

3.2 Riemanns bidrag

Riemanns motivation til at videreudvikle Augustin-Louis Cauchys (1789-1857) integraldefinition for kontinuerte funktioner¹ udsprang primært af hans interesse i teorien for Fourierrækker², og ønsket om at kunne angive Fourierrækken for ikke-kontinuerte funktioner i forbindelse med talteori. Riemann syntes primært at være inspireret af sin lærer Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), der i 1829 som den første gav et bevis for en tilstrækkelig betingelse for konvergens af Fourierrækker³. Riemann arbejdede videre med trigonometriske rækker for funktioner, der ikke opfylder Dirichlets betingelse for konvergens. Følgende citat fra [Hawkins, 1975] skal illustrere Riemanns begrundelse for at beskæftige sig med disse funktioner:

Riemann remarked that it is reasonable to assume "that the functions not covered by Dirichlets analysis do not occur in nature" [1902:237]. Nevertheless, for two reasons he felt it worthwhile to consider the case of more general functions. First because, as Dirichlet himself had maintained, "this subject is very closely related to the principles of the infinitesimal calculus and can help bring greater clarity and precision to these principles" [1902: 238]. And, secondly, because "the application of Fourier series is not limited to physical investigations; it is now being applied successfully in a domain of pure mathematics, the theory of numbers, and here those functions whose representability by a trigonometric series Dirichlet did not investigate seem to be of importance" [1902:238]. [Hawkins, 1975, s. 17]

¹Cauchy definerer i 1823 som den første integralet som en grænse af summer af arealer af rektangler, der approksimerer arealet under en funktion. Cauchy viser endvidere, at alle kontinuerte funktioner er integrable. [Hawkins, 1975, s. 3-12]

²Riemann undersøgte også trigonometriske rækker generelt. [Hawkins, 1975, s. 16-17]

³Dirichlet viste, at Fourierrækker konvergerer for alle funktioner f , der er stykvis kontinuerte, stykvis monotone [Lützen, 1978, s. 26].

Som vi så i starten af dette kapitel (jvf. ligning 3.2 og 3.3) er det nødvendigt, at en funktion er integrabel for at man kan bestemme dens Fourierkoefficienter – dette motiverede blandt andet Riemann til at indføre et nyt integralbegreb, hvor visse ikke-kontinuerte funktioner er integrable, således at Fourierkoefficienterne også kan defineres for dem. [Hawkins, 1975, s. 17]

Med hensyn til konvergens af Fourierrækker i Riemanns ramme så eksisterer der tilstrækkelige betingelser på funktionen f , der sikrer, at Fourierrækken konvergerer mod funktionen, for eksempel Dirichlets betingelse. Der eksisterer ingen betingelse der både er nødvendig og tilstrækkelig. [Laursen, 1992]

Angående tredje problem, er det i Riemanns ramme ikke muligt at vise entydighed af Fourierrækkefremstillingen for en funktion ved den i afsnit 3.1 beskrevne metode, idet sum og integraltegn kun kan ombyttes, når rækken konvergerer uniformt. Det er imidlertid langt fra de fleste Fourierrækker, der opfylder betingelsen om uniform konvergens.⁴

Disse problemer i teorien for Fourierrækker, som forblev uløste i rammen af Riemann-integralet var en medvirkende årsag til den videre udvikling af integralbegrebet. [Strichartz, 1995, s. 623-625]

Med Riemanns integral kan man i modsætning til med Cauchys integral integrere bestemte diskontinuerte funktioner⁵. Men det, at mængden af integrable funktioner er udvidet fra kontinuerte funktioner til også at omfatte visse diskontinuerte funktioner, ødelægger den symmetri, der med Cauchys integraldefinition er i Analysens Fundamentalteorem. I Riemanns integraldefinition får Analysens Fundamentalteorem 2 følgende formulering:

Hvis f er differentiabel på $[a, b]$, og hvis f' er Riemann-integrabel på $[a, b]$, så er $\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$ for ethvert $x \in [a, b]$.

Der er nu en betingelse på f' , nemlig at den skal være Riemann-integrabel. Denne antagelse er nødvendig, idet der findes begrænsede afledte funktioner, som ikke er Riemann-integrable. Med hensyn til Analysens Fundamentalteorem 1 gælder det ikke generelt, at det ubestemte integral af en Riemann-integrabel funktion er differentiabel [Dalen & Monna, 1972, s. 105-106].

Samlet betyder det, at sammenhængen mellem differentiation og integration som hinandens omvendte ikke direkte kan opnås i Riemanns integralbegreb; symmetrien i Analysens Fundamentalteorem er brudt.

3.3 Perioden mellem Riemann og Lebesgue

Denne periode var overordnet præget af udviklingen af funktionsbegrebet, samt teorien for uendelige mængder og mål af mængder.

⁴Paul du Bois-Reymond (1831-1889) gav omkring 1870 et langt og omstændeligt bevis for entydighed af koefficientudtrykkene uden brug af ledvis integration. [Hawkins, 1975, s. 25-26 og 164].

⁵Lebesgue viste senere, at de Riemann-integrable funktioner netop er dem, der er næsten overalt kontinuerte, hvilket vil sige, at de er kontinuerte undtagen på en mængde med (Lebesgue)mål nul. Hvad man skal forstå ved Lebesgue-mål kommer vi tilbage til i kapitel 4.

3.3.1 Udviklingen af funktionsbegrebet

Indtil 1830'erne var funktionsbegrebet styret af den Eulerske tradition, hvor en funktion opfattedes som noget, der var givet ved et formeludtryk eller en ligning. Denne opfattelse af en funktion kan også findes hos Joseph Fourier (1768-1830) og Cauchy, og selvom Leonhard Euler (1707-1783) og Cauchy definerede kontinuitet på to forskellige måder, havde de dog det tilfælles, at de kun anerkendte funktioner med et endeligt antal diskontinuiteter. [Hawkins, 1975, s. 3-12]

I 1837 definerede Dirichlet det moderne funktionsbegreb, hvor en funktion opfattes som en entydig sammenhæng mellem variable; en sammenhæng der ikke nødvendigvis angives med en forskrift eller formel [Lützen, 1978, s. 26].

Med Dirichlets nye funktionsbegreb 'eksploderede' mængden af funktioner. Det blev nu muligt at forestille sig funktioner, der er diskontinuerte på alle mulige (og umulige!) måder. Med alle disse nye funktioner opstod der et behov for kortlægning. Dette medførte forskellige klassificeringer af funktioner, efter deres 'kontinuitetsegenskaber'. I 1899 publiceredes en klassificering af kontinuerte og diskontinuerte funktioner af René Baire (1874-1932), som inspirerede Lebesgue⁶ [Hawkins, 1975, s. 118, 120][Birkhoff & Kreyszig, 1984, s. 267].

Udvidelsen af funktionsbegrebet medførte et ønske om også at kunne definere en rækkeudvikling for ikke-kontinuerte funktioner, specielt undersøgtes muligheden for at angive de nye funktioners Fourierrækker. I forbindelse med dette blev der i sidste halvdel af 1800-tallet gjort flere forsøg på at udvide integraldefinitionen, men det var forgæves forsøg, som ikke fik nogen succes i forbindelse med teorien for Fourierrækker. Af eksempler på sådanne integraler kan nævnes Weierstrass' definition fra 1886, samt Harnacks og Hölders definitioner ligeledes fra 1880'erne [Hawkins, 1975, s. 69, 75-76].

Thomas Jan Stieltjes (1856-94) offentliggjorde i 1894 en generalisering af integralbegrebet, som var motiveret i en helt anden type problemer end ovennævnte. Dette skete i artiklen '*Recherches sur les fractions continues*', der omhandler kædebrøker. Denne generalisering viste sig senere at være et af de mere frugtbare forsøg på en generalisering af Riemann-integralet.

Stieltjes repræsenterede en positiv massefordeling langs en linie som en voksende funktion $\phi(x)$, der angiver den totale masse i intervallet $[0, x]$ for $x > 0$. Stieltjes betragtede summen:

$$\sum_{i=0}^n f(\xi_i)(\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)),$$

hvor $x_0, x_1, \dots, x_n$ er en partition af $[a, b]$ og $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ for $i = 1, \dots, n$ er et udvalg. Hvis denne sum, uafhængigt af partition og udvalg, går imod en grænseværdi for n gående mod uendelig og længden af partitionen (det vil sige længden af det største delinterval i partitionen) gående mod nul, kaldes denne grænseværdi for Stieltjes-integralet af f og betegnes:

$$\int_a^b f(x) d\phi(x).$$

⁶Vi er ikke gået dybere ind i betydningen af Baires arbejde for udviklingen af Lebesgues integraldefinition. Baires arbejde synes imidlertid at have haft indflydelse både på Lebesgues arbejde, men også på udviklingen af senere integralbegreber, blandt andre Denjoy-integralet. [Hawkins, 1975, s. 137]

[Kline, 1972, s. 1041]

Riemann-integralet er et specialtilfælde af Stieltjes-integralet med $\phi(x) = x$. En generalisering af Stieltjes' integralbegreb kom senere til at spille en central rolle i Radons integrationsteori.

3.3.2 Målbegrebet

I sidste halvdel af 1800-tallet begyndte udviklingen af et nyt matematisk område, nemlig teorien for uendelige mængder, primært drevet af Georg Cantors (1845-1918) arbejde. Parallelt med dette ønskede man, som nævnt i forrige afsnit, i denne periode at udvide integraldefinitionen til flere diskontinuerte funktioner end Riemanns definition kunne klare. Dette førte til et studie af mængden af diskontinuitetspunkter for funktioner, og en undersøgelse af, hvordan man kan måle indholdet eller 'volumenet'⁷ af sådanne mængder [Kline, 1972, s.1041].

Cantor præsenterede i 1884 en definition af det ydre indhold⁸ af en begrænset mængde i $\mathbf{R}^n$. Vi har valgt at betegne Cantor-indholdet med c_c for at kunne skelne definitionen fra den senere definition givet af Camille Jordan (1838-1922).

Definition 3.1 (Cantor-indhold)

Lad $A \subseteq \mathbf{R}^n$ være begrænset og lad mængderne $K_{x,\rho}$ og W_ρ for hvert $x \in A$, $\rho > 0$ være givet ved

$$\begin{aligned} K_{x,\rho} &= \{k \in \mathbf{R}^n \mid |k - x| < \rho\}, \\ W_\rho &= \bigcup_{x \in A} K_{x,\rho}. \end{aligned}$$

Lad $c_c(W_\rho)$ være volumenet af W_ρ . Cantor-indholdet $c_c(A)$ af A defineres som:

$$c_c(A) = \lim_{\rho \rightarrow 0} c_c(W_\rho).$$

[Dalen & Monna, 1972, s. 94-95]

Definitionen handler altså om at overdække en mængde med kugler, hvor vi bemærker, at kuglerne ikke er disjunkte. Når værdien af ρ bliver mindre vil volumenet af foreningen af kuglerne give en bedre approksimation til volumenet af mængden. Cantor bestemte volumenet af W_ρ ved beregning af et integral, hvordan dette gøres vil vi ikke komme nærmere ind på.

Man kan altså tillægge et Cantor-indhold til enhver begrænset mængde, men 'indholdet' viser sig at være ikke-additivt. Spørgsmålet om additivitet går på, om man kan definere indholdet af en forening af mængder som summen af indholdet af mængderne. Som nævnt i afsnit 2 er dette en egenskab man ønsker et 'indholds'-begreb skal opfylde.

Ikke-aditiviteten i Cantors definition kan illustreres ved følgende eksempel:

⁷Her mener vi et 'generaliseret volumen', hvilket i én dimension angiver længde, i to dimensioner er et areal og i $\mathbf{R}^n$ bliver et 'hypervolumen'.

⁸Der bruges i litteraturen flere forskellige betegnelser for denne karakteristik af en mængde, blandt andet *content* [Hawkins, 1975] og *extent* [Pesin, 1970]. Vi har valgt at oversætte det til *indhold*.

Lad $I = [0, 1]$ og mængderne $A, B \subseteq I$ være givet ved

$$A = \{a \mid a \in \mathbf{Q}, a \in [0, 1]\} \quad \text{og} \quad B = \{b \mid b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, b \in [0, 1]\}$$

Da de rationelle tal ligger tæt vil I være en delmængde af $\bigcup_{x \in A} K_{x, \rho}$ uanset hvor lille ρ bliver, og tilsvarende er I en delmængde af $\bigcup_{x \in B} K_{x, \rho}$. Cantor-indholdet af henholdsvis A og B vil derfor være 1, og da indholdet af I også er 1, er summen således forskellig fra indholdet af I . [Dalen & Monna, 1972, s. 95]

I 1892 gav Jordan en definition af to forskellige indhold af en delmængde af $\mathbf{R}$ og et kriterie for, hvornår en mængde kan kaldes *målelig*. [Pesin, 1970, s. 32]

Definition 3.2 (Jordan-indhold)

Lad $A \subseteq \mathbf{R}$ være en begrænset mængde og (I_i) være et endeligt system af afsluttede intervaller. Lad $A \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$. Det ydre Jordan-indhold af A er defineret ved:

$$c_e(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |I_i| \mid A \subset \bigcup_{i=1}^n I_i \right\}.$$

Lad nu I_i 'erne være parvis disjunkte, og $\bigcup_{i=1}^n I_i \subset A$. Det indre indhold af A defineres som:

$$c_i(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |I_i| \mid \bigcup_{i=1}^n I_i \subset A \right\}.$$

A siges at være en Jordan-målelig mængde, hvis $c_e(A) = c_i(A)$. I dette tilfælde kaldes denne størrelse Jordan-målet af A .

[Hawkins, 1975, s. x]

Det ydre indhold er en approksimation af mængdens indhold udefra, mens det indre indhold approksimerer indefra. Hvis de to approksimationer er ens, er mængdens indhold bestemt.

Som tilfældet er med Cantors definition har Jordans indholdsbegreb også visse uhensigtsmæssige egenskaber. Der findes blandt andet åbne mængder, som ikke er Jordan-målelige. I modsætning til Cantors definition er additiviteten opfyldt, men kun for *endelig* mange disjunkte delmængder. [Dalen & Monna, 1972, s. 96]

Den endelige additivitet er imidlertid nok til, at Jordan-indholdet kan bruges til at give Riemann-integralet en målteoretisk formulering⁹, hvilket Jordan gjorde i 1892 [Hawkins, 1975, s. 93-96] [Pesin, 1970, s. 37-38]. Ifølge [Hawkins, 1975] var det denne målteoretiske formulering af Riemann-integralet, der var med til at indikere, at en frugtbar generalisering af integralbegrebet skulle søges i udviklingen af mål-begrebet:

In this form Riemann's definition no longer appears incapable of generalization; or, at least, it is possible to see a relationship between the problem of extending Riemann's definition and the problem of extending the class of measurable sets and the accompanying measure. [Hawkins, 1975, s. 95]

⁹Dette vil vi komme nærmere ind på i kapitel 4.

Det blev Emile Borel (1871-1956), der med sin definition af målet af en mængde, på afgørende vis udvidede klassen af mængder, der kan tillægges et mål. Det der primært adskiller Borelmålet fra de tidligere måldefinitioner er egenskaben, at det er tælleligt additivt. Det er dette målbegreb, Lebesgue bygger sin integraldefinition på. Borel, der på dette tidspunkt var optaget af problemer indenfor kompleks funktionsteori, indførte det nye mål i sin afhandling fra 1894. [Hawkins, 1975, s. 97][Birkhoff & Kreyszig, 1984, s. 267]

4 Henri Lebesgue (1875-1941)

Vi vil nu undersøge, hvordan Lebesgue indfører integralet, hvilke sætninger han viser og hvordan han viser dem, med henblik på at undersøge, hvad det siger om hans motivation. Vi begynder med en kort biografi af Lebesgue, hvorefter vi undersøger hvilken motivation Lebesgue selv angiver i sin afhandling '*Intégrale, Longueur, Aire*'. Efter vi har gennemgået den måde, hvorpå Lebesgue indfører integralet, ser vi på beviserne for Analysens Fundamentalsætning 2 og en konvergenssætning, som er de centrale sætninger i Lebesgues afhandling. Afslutningsvis samler vi op på vores resultater, og giver vores bud på, hvad Lebesgue var motiveret af.

4.1 Kort biografi

Henri Lebesgue studerede i årene 1894 til 1897 på École Normale Supérieure, hvor også Borel og Baire havde studeret. Efter færdiggørelsen af studierne arbejdede han i biblioteket på École Normale Supérieure, og her fik han lejlighed til at stifte bekendtskab med Baires studier af diskontinuerte funktioner. Fra 1902 og frem til 1910, hvor han blev *maître de conférences* ved Sorbonne i Paris, varetog han forskellige poster ved universiteter i provinsen. Lebesgue opnåede at blive professor ved Collège de France, og blev i 1920'erne tildelt æresfyldte medlemsskaber af forskellige videnskabelige selskaber. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1973, vol. VIII, s. 110-112]

I årene 1899-1901 publicerede Lebesgue fem noter i '*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*'¹. De fem noter var alle baseret på Lebesgues doktorafhandling '*Intégrale, Longueur, Aire*', der blev publiceret i tidsskriftet '*Annali di Matematica pura ed applicata*' i 1902 [Lebesgue, 1902]. Overskrifterne på disse noter er, i kronologisk rækkefølge '*Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan*', '*Sur la définition de l'aire d'une surface*', '*Sur la définition de certaines intégrales de surface*', '*Sur le minimum de certaines intégrales*' og '*Sur une généralisation de l'intégrale définie*' [Lebesgue, 1901].²

I disse fem noter betragtede Lebesgue rektifikation af kurver, arealbestemmelse af skæve polygoner ved approksimation, overfladeintegraler og bestemmelse af flade med mindste areal ud fra en given begrænset rand [Burkill, 1944]. I den femte note, [Lebesgue, 1901], offentliggjorde han for første gang sin generalisering af integralbegrebet.

Lebesgue havde i første omgang problemer med at få optaget selve afhandlingen, og da den endelig blev publiceret var modtagelsen meget forbeholden på grund af Lebesgues be-

¹ '*Comptes Rendus*' er et tidsskrift med korte artikler eller noter, hvor der gives en præsentation af forskningen, men ingen uddybning. Noterne kan opfattes som lange abstracts af den egentlige artikel, og publiceres forud for hovedartiklen.

² Vi har ikke de første fire noter med i vores litteraturliste, men de præcise oplysninger kan findes i for eksempel [Hawkins, 1975, s. 218].

skæftigelse med diskontinuerte funktioner og funktioner uden kontinuerte afledte. [Dalen & Monna, 1972, s. 115] [Kline, 1972, s. 1049]

4.2 Lebesgues artikler: '*Intégrale, Longueur, Aire*' og '*Sur une généralisation de l'intégrale définie*'

Vi har i forbindelse med besvarelsen af vores problemformulering valgt at undersøge Lebesgues note fra 1901 og afhandlingen fra 1902. Vi har valgt disse frem for hans senere og muligvis mere gennearbejdede fremstillinger, idet vi er interesserede i at undersøge, hvad Lebesgues motivation er på det tidspunkt, han indfører det nye integralbegreb. I afhandlingen har vi begrænset os til at studere introduktionen, dele af første kapitel om mål, samt det kapitel, der omhandler integration (kap 2), da det er disse dele af afhandlingen, der har direkte relevans for besvarelsen af vores problemformulering.

Det viste sig ved nærmere eftersyn, at der er stor lighed mellem fremstillingerne i de to tekster. I sagens natur er 1901-noten fra *Comptes Rendus* dog kun en kort introduktion til Lebesgues integral, mens afhandlingen fra 1902 indeholder en mere gennearbejdet, afrundet fremstilling af definitionen på integralet og medtager beviser for de sætninger, der også præsenteres i noten. Vi har derfor valgt at gennemgå begge tekster under ét, dog med hovedvægten lagt på fremstillingen, som den er givet i afhandlingen.

I introduktionen til '*Intégrale, Longueur, Aire*' skriver Lebesgue hvilke emner, han vil komme ind på i sin afhandling, samt hvorfor det er interessant. Han starter med at sige, at han vil forsøge at give så generelle og præcise definitioner som muligt på det bestemte integral, længden af en kurve og arealet af en overflade. Herefter nævner Lebesgue, at Riemanns integral ikke i alle tilfælde kan løse det Lebesgue kalder 'integralregningens fundamentale problem', eller 'stamfunktionsproblemet', nemlig at finde en funktion når man kender dens afledte:

... l'intégration, telle que l'a définie Riemann, ne permet pas dans tous les cas de résoudre le problème fondamental du calcul intégral: Trouver une fonction connaissant sa dérivée. Il peut donc sembler naturel de chercher une autre définition de l'intégrale, telle que, dans des cas plus étendus, l'intégration soit l'opération inverse de la dérivation.³ [Lebesgue, 1902, s.231]

Lebesgue er altså ude efter at finde en definition af integralet således, at integration i de fleste tilfælde er den inverse operation af differentiation. Dette er også den motivation Lebesgue angiver i noten [Lebesgue, 1901, s. 1025].

Lebesgue nævner også, både i indledningen til afhandlingen og i noten, at det viser sig, at en grænsefunktion for en konvergent følge af begrænsede, integrable funktioner er integrabel [Lebesgue, 1902, s. 232] [Lebesgue, 1901, s. 1027]. Dette bliver nævnt i sammenhæng med, at han angiver, hvilke typer af funktioner, der bliver integrable i den nye integraldefinition. I forbindelse med integration af de funktioner, der kan angives ved

³Vores oversættelse af citat: "...integrationen, sådan som Riemann definerer den, tillader ikke i alle tilfælde at løse det fundamentale problem i integralregningen: At finde en funktion, når man kender dens afledte. Det må altså virke naturligt at søge efter en anden definition af integralet, således at integration i de fleste tilfælde er den omvendte operation af differentiation."

en konvergent række skriver Lebesgue, at man her kan benytte en egenskab ved hans integral, som tillader ledvis integration. [Lebesgue, 1902, s. 233]

'*Intégrale, Longueur, Aire*' består af seks kapitler, hvor begreberne mål, integral, kurvelængde og areal af overflader indføres i de første fire kapitler, mens de to sidste kapitler omhandler anvendelser indenfor overfladers geometri.

4.3 Lebesgues integralbegreb

Afhandlingen er opbygget i nummererede afsnit, som vi henviser til med §-numre. Lebesgue nummererer ikke sætninger, men skriver dem i en anden skrifttype; vores nummerering i det følgende er kun medtaget for at lette overskueligheden. I sætninger og beviser bruger Lebesgue ofte tekst i stedet for matematiske symboler, vi har flere steder valgt at erstatte Lebesgues tekst med symboler for at øge forståelsen.

4.3.1 Den geometriske definition

Lebesgue starter med en geometrisk definition af integralet. Først formuleres 'integralproblemet' for de kontinuerte funktioner, og det vises, at integralet i disse tilfælde altid har en mening og kan findes. Herefter rekapitulerer Lebesgue Darboux's version af Riemanns integral og sætter denne i forhold til Jordans indholdsbebegreb. Dette motiverer indførelsen af Lebesgues generalisering.

Fra det geometriske synspunkt formulerer Lebesgue 'integralproblemet' (for kontinuerte funktioner) på følgende måde:

Étant donnée une courbe C par son équation $y = f(x)$ (f est une fonction continue positive, les axes sont rectangulaires) trouver l'aire du domaine limité par un arc de C , un segment de Ox et deux parallèles à l'axe des y d'abscisses données a et b , ($a < b$).⁴ [Lebesgue, 1902, s. 248]

Det bestemte integral fra a til b af en kontinuert positiv funktion er således arealet under kurven for funktionen.

Lebesgue betragter henholdsvis undersummen s og oversummen S

$$s = \sum \delta_i m_i \quad \text{og} \quad S = \sum \delta_i M_i,$$

hvor δ_i er længden af et interval på x -aksen og m_i, M_i er henholdsvis infimum- og supremumværdier for f på de tilhørende intervaller. Disse over- og undersummer approksimerer henholdsvis det ydre og det indre indhold⁵ af det domæne i planen, som Lebesgue beskriver i citatet, det vil sige disse indhold kan findes som grænseværdier for henholdsvis over- og undersummen. For de kontinuerte funktioner kan det vises, at det ydre indhold er lig det indre, og dermed lig det areal som integrationsproblemet gik ud på at finde. [Lebesgue, 1902, §15, s. 249]

⁴Vores oversættelse af citat: "Givet en kurve C ved sin ligning $y = f(x)$ (f er en kontinuert, positiv funktion, akserne er rektangulære) at finde arealet af området begrænset af et stykke af C , en del af x -aksen og to paralleller til y -aksen, gennem a og b , ($a < b$)." Lebesgues notation Ox har vi oversat til x -aksen.

⁵Ydre og indre indhold er begreber som Jordan introducerede, se afsnit 3.3.2.

Ifølge Lebesgue har Darboux vist, at for begrænsede funktioner går både over- og undersummen mod en entydigt bestemt grænseværdi (ikke nødvendigvis den samme for de to), det *øvre integral* og det *nedre integral*. Når de to er lig hinanden siges funktionen at være Riemann-integrabel, og den fælles grænseværdi kaldes det bestemte integral af f taget mellem a og b .

Denne formulering gives også en geometrisk fortolkning. Lebesgue betragter først en vilkårlig positiv funktion defineret på intervallet $[a, b]$. Svarende til denne funktion defineres mængden E af punkter, hvis koordinater opfylder ulighederne:

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Det vil altså sige mængden:

$$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Det er denne mængde, det drejer sig om at finde et areal for. Som for de kontinuerte funktioner haves, at det ydre indhold af denne mængde er grænseværdien for oversummen, og det indre indhold er grænseværdien for undersummen, for intervallængderne gående mod nul og antallet af intervaller gående mod uendelig. Så eksistensen af øvre og nedre integraler for en begrænset funktion er ækvivalent med eksistensen af indre og ydre indhold for en begrænset mængde. Af dette fås, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at f er Riemann-integrabel er, at mængden E er Jordan-målelig, og der fås, at målet af E er lig med integralet af f . [Lebesgue, 1902, §16]

For en vilkårlig (det vil sige ikke nødvendigvis positiv) begrænset funktion f betragtes summen (den kaldes E) af mængden E_1 bestående af koordinaterne med positive y -værdier og mængden E_2 bestående af koordinaterne med negative y -værdier. Hvis E er Jordan-målelig er f Riemann-integrabel, og integralet er lig

$$m_J(E_1) - m_J(E_2),$$

hvor J 'et er vores tilføjelse, der angiver, at der er tale om Jordan-mål.

Løsningen af integralproblemet er altså muligt for flere funktioner end de kontinuerte. Lebesgue skriver, at disse resultater peger mod en generalisering af integralbegrebet, der bygger på en generalisering af mål. Han giver følgende definition af det bestemte integral for en begrænset funktion, som bygger på denne generalisering:

Definition 4.1 (Den geometriske definition)

Hvis mængden E er målelig (i såfald er E_1 og E_2 det også) er det bestemte integral af f taget mellem a og b lig med $m(E_1) - m(E_2)$. De funktioner f der hører til sådanne mængder E siges at være summable⁶. [Lebesgue, 1902, s. 250]

Dette viser altså, at problemet med at finde et integral for en begrænset funktion svarer til problemet med at finde målet for en begrænset mængde.

Men hvad skal man nu forstå ved det nye mål, som Lebesgue indfører, og hvori består generaliseringen? Målet indføres som sagt i afhandlingens første kapitel. Hvordan det gøres vil vi kort komme ind på.

⁶Vores oversættelse af det franske ord 'sommable'.

4.3.2 Lebesgues indføring af mål

Der er altså i forbindelse med generaliseringen af integralet behov for at kunne tillægge så mange mængder som muligt et mål. Lebesgue indfører, inspireret af Borel, i første kapitel 'målproblemet', med hvilket han mener følgende: Kan man tillægge enhver begrænset mængde i $\mathbf{R}^n$ et tal større end eller lig med nul, således at følgende egenskaber er opfyldt:

- Der eksisterer mængder med mål forskellig fra nul.
- To ens mængder har samme mål.
- Målet af foreningen af et endeligt eller tælleligt antal parvist disjunkte mængder er summen af målene af disse mængder.

[Lebesgue, 1902, §1, s. 236]

Lebesgue bemærker, at 'målproblemet' kun løses for de mængder, som han vil kalde målelige. Sammenlignes de tre betingelser og Lebesgues kommentar med den 'ønskeliste' for et mål, som vi opstillede i kapitel 2, svarer Lebesgues kommentar om, at 'målproblemet' kun løses for de målelige mængder til, at det ikke er muligt at tillægge alle delmængder i $\mathbf{R}^n$ et mål. Den første af Lebesgues betingelser er blot med for at undgå det trivielle tilfælde. Den anden betingelse mener vi svarer til, at målet er translations invariant, og den sidste af Lebesgues betingelser er den tællelige additivitet.

Først betragtes mål for mængder, hvis elementer er punkter på den reelle akse. Lebesgue definerer målet af et linjestykke til at være længden af linjestykket og viser, at denne definition opfylder de tre stillede betingelser [Lebesgue, 1902, §2, s. 237]. Med dette opfylder Lebesgues mål altså også den anden betingelse stillet i kapitel 2. Derefter betragter Lebesgue vilkårlige delmængder af punkter fra den reelle akse. En sådan mængde E kan, på et uendeligt antal måder, indelukes i et endeligt eller tælleligt antal intervaller. Kaldes mængden af punkter i disse intervaller for E_1 , det vil sige E_1 er foreningen af intervaller, der omslutter E , haves at målet af mængden E altid er mindre end eller lig med målet af mængden E_1 :

$$m(E) \leq m(E_1).$$

Herefter definerer Lebesgue det ydre mål af E som

$$m_e(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \mid E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = E_1 \right\}. \quad (4.1)$$

[Lebesgue, 1902, §3, s. 237]

Lad E befinde sig på linjestykket AB , og $\mathcal{C}_{AB}(E)$ betegne komplementærmængden til E på linjestykket AB . Så er det indre mål af mængden E , $m_i(E)$, defineret ved:

$$m_i(E) = m(AB) - m_e(\mathcal{C}_{AB}(E)) = B - A - m_e(\mathcal{C}_{AB}(E)). \quad (4.2)$$

[Lebesgue, 1902, §3, s. 238]

Lebesgue definerer nu målelige mængder på samme måde som Jordan, se afsnit 3.3.2:

Definition 4.2 (Mål og målelige mængder)

De mængder E , for hvilke der gælder $m_i(E) = m_e(E)$, kaldes målelige mængder. Den fælles værdi for disse to størrelser kaldes målet af mængden ($m(E)$), forudsat dette mål opfylder de tre betingelser stillet i forbindelse med 'målproblemet'. [Lebesgue, 1902, §4, s. 238]

Lebesgue viser, at målet m opfylder betingelserne i målproblemet, hvis man indskrænker sig til kun at betragte de målelige mængder.

Sammenholdes det ydre og indre mål med Jordans indhold får Lebesgue:

$$c_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq c_e(E). \quad (4.3)$$

[Lebesgue, 1902, §8, s. 242]

En mængde er Jordan-målelig, hvis det ydre indhold er lig med det indre indhold. Heraf følger, at alle Jordan-målelige mængder også er målelige i den forstand, Lebesgue har defineret, og at i de tilfælde, hvor målene eksisterer, er de to værdier ens.

For det tilfælde, hvor mængderne består af punkter i en plan, definerer Lebesgue ydre og indre mål på akkurat samme måde som ovenfor, blot med den forskel, at han nu ikke længere betragter foreninger af intervaller som indeholder mængden, men går over til at betragte foreninger af trekanter, som indeholder den betragtede mængde. Definitionen af mål er analog med definitionen af mål for de én-dimensionelle mængder. [Lebesgue, 1902, s. 243-244].

Målet, der optræder i definition 4.1, er altså veldefineret. Forudsat at man kan finde en mængde, således at der gælder skarpe ulighedstegn i udtryk 4.3, giver Lebesgue-målet anledning til, at flere mængder kan tillægges et mål, end det var tilfældet med Jordans målbegreb. Dette betyder altså også, at alle begrænsede Riemann-integrable funktioner er Lebesgue-integrable, og at der er begrænsede funktioner, der er Lebesgue-integrable, men ikke Riemann-integrable.

4.3.3 Den analytiske definition

Efter at have lavet generaliseringen af integralet fra det geometriske synspunkt, går Lebesgue i afhandlingen videre til at give en analytisk definition af integralet. Her har vi valgt at gennemgå, hvordan Lebesgue indfører den analytiske definition i noten fra 1901. Vi har dog ændret notationen, så den passer bedre til den, Lebesgue anvender i afhandlingen.

Lebesgue betragter en begrænset funktion $f(x)$ på et interval, for hvilken der gælder, at $a_0 \leq f(x) \leq a_n$, for alle x tilhørende det betragtede interval. Integralet defineres på følgende måde:

Lad f være indeholdt mellem a_0 og a_n og givet partitionen

$$a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n.$$

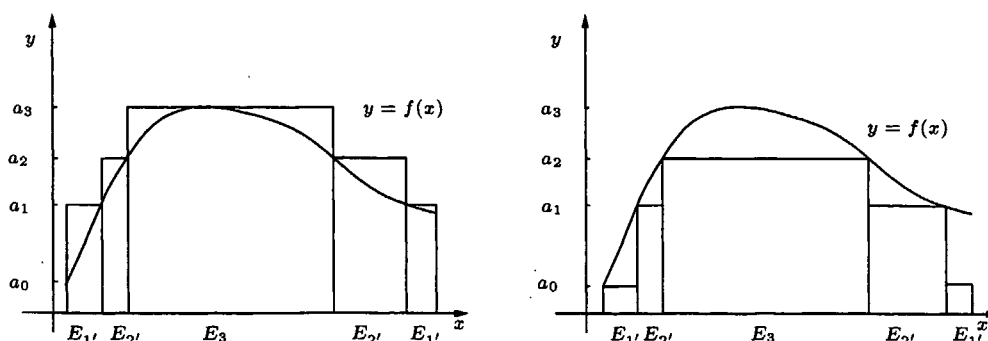
Mængderne E_0 og E_i er da defineret ved

$$E_0 = \{x \mid f(x) = a_0\} \quad \text{og} \quad E_i = \{x \mid a_{i-1} < f(x) \leq a_i\}.$$

Hvis E_0 og E_i 'erne er målelige for $i = 1, 2, \dots$ betegner $m(E_0)$ henholdsvis $m(E_i)$ målene for disse mængder.

Lebesgue betragter summerne:

$$a_0 m(E_0) + \sum_{i=1}^n a_i m(E_i) \quad \text{og} \quad a_0 m(E_0) + \sum_{i=1}^n a_{i-1} m(E_i),$$



Figur 4.1 På den venstre figur ses oversummen og på den højre ses undersummen for integralet af f . På begge figurer er $E_i = \cup E_i'$. Mængderne E_i er de intervaller på x -aksen, som afgrænses af de respektive rektangler.

hvor den første er en oversum og den anden en undersum for integralet af f , se figur 4.1. Hvis disse to summer går mod den samme grænseværdi – uafhængigt af de valgte a_i 'er – for den maksimale afstand mellem to på hinanden følgende a_i 'er gående mod nul, siges f at være integrabel og grænseværdien er integralet af f . [Lebesgue, 1901, s. 1026]

Den geometriske definition af integralet kan ikke udvides til tilfældet, hvor den betragtede funktion ikke er begrænset, men det kan den analytiske derimod. Dette vil vi ikke komme nærmere ind på, blot nævne, at Lebesgue laver denne udvidelse i [Lebesgue, 1902, §24, s. 258].

4.3.4 Lebesgues brug af ordet summabel

I moderne litteratur bruges ordet summabel som et synonym for Lebesgue-integrabel. Dette synes dog ikke helt at være den måde Lebesgue bruger ordet på i afhandlingen. Første gang, det optræder, er i forbindelse med den geometriske definition af integralet [Lebesgue, 1902, §17, s. 250], som vi ovenfor kaldte definition 4.1. Her bruger Lebesgue ordet, som man ville bruge det i dag, men senere definerer han, at en funktion er summabel hvis:

$$\forall a, b \{x \mid a < f(x) < b\} \text{ er målelig.}$$

[Lebesgue, 1902, §24, s. 258] Dette ville vi i dag kalde, at funktionen er målelig. I tilfældet med de begrænsede funktioner er enhver målelig funktion dog integrabel, så i dette tilfælde er det ikke så vigtigt at skelne. For de ubegrænsede funktioner bemærker Lebesgue, at man skal huske, at en ubegrænset summabel funktion ikke nødvendigvis har et integral [Lebesgue, 1902, §24, s. 259]. Dette tyder på, at Lebesgue i afhandlingen rent faktisk bruger ordet summabel som et udtryk for det, man i dag kalder målelig. Ifølge Hawkins er det først senere, at Lebesgue indfører den betydning af ordene summabel og målelig, som man bruger i dag [Hawkins, 1975, s. 125]. Det er altså ikke helt klart for os, om Lebesgue bruger summabel i den ene eller den anden betydning. Vi vil lade det afhænge af konteksten, om vi oversætter '*sommable*' som målelig eller integrabel.

4.4 De centrale sætninger

Lebesgue nævner specielt Analysens Fundamentalteorem 2 og konvergenssætningen i indledningen til afhandlingen, og det er derfor oplagt at undersøge, hvordan han faktisk beviser disse sætninger. Derudover viser Lebesgue ikke andre 'store' sætninger, hvilket også er en årsag til, at vi betragter sætningerne som centrale i Lebesgues afhandling.

I forbindelse med beviserne for de to sætninger er det nødvendigt at kende andre af Lebesgues resultater. Dem vil vi anføre her, i vores egne formuleringer, uden bevis.

Hjælpesætning 1

Lad $E_1, E_2, \dots$ være målelige mængder, for hvilke der for alle n gælder $E_{n+1} \subset E_n$ og lad mængden E være givet ved: $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, så er

$$m(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n).$$

[Lebesgue, 1902, §9, s. 243]

Hjælpesætning 2

Lad (f_n) være en følge af summable funktioner. Hvis $f_n(x) \rightarrow f(x)$ for $n \rightarrow \infty$ og f er begrænset, så er f også summabel. [Lebesgue, 1902, §22, s. 257]

Men hvad skal man nu forstå ved summabel i denne sætning? Hvis summabel betyder målelig, er forudsætningen at f skal være begrænset unødvendig. Hvis summabel i stedet betyder integrabel vil sætningen som den står også være rigtig, da en målelig begrænset funktion er integrabel.

Således bevæbnet med vigtige 'hjælpesætninger', vil vi nu som lovet kaste os over konvergenssætningen.

4.4.1 Lebesgues konvergenssætning

Lebesgue viser én konvergenssætning i afhandlingen. Et specialtilfælde af denne konvergenssætning bliver i dag kaldt 'begrænset konvergens' [Gordon, 1994, s. 34]. Som en begrundelse for, at sætningen er interessant, nævner Lebesgue, at størstedelen af de diskontinuerte funktioner, som man indtil da er stødt på i analysen, er defineret ved hjælp af rækker [Lebesgue, 1902, §25, s. 259]. Konvergenssætningen fører netop til en sætning om ledvis integration af rækker.

Sætning 4.1 (Konvergenssætning)

Hvis en følge af summable funktioner $f_1, f_2, f_3, \dots$, (definerede på en målelig mængde E), som har integraler, har en grænse f , og hvis

$$\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in E \forall n \in \mathbf{N} : |f(x) - f_n(x)| \leq M,$$

så har f et integral, som er grænseværdien af integralerne for funktionerne f_n , det vil sige $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$. [Lebesgue, 1902, s. 259]

Udsagnet i parenteser er vores tilføjelse. Brugen af ordet summabel kan i denne sammenhæng både betyde målelig og integrabel, men da Lebesgue præciserer, at ' $f_1, f_2, f_3, \dots$ har integraler' er det klart, at de er integrable og derfor også målelige.

Bevis

Lebesgues bevis for ovenstående sætning starter med omskrivningen

$$f = f_n + (f - f_n), \quad (4.4)$$

hvor de to funktioner på højresiden ifølge Lebesgue er integrable, hvorved f også er integrabel.

Lebesgue uddyber ikke, hvorfor sidste led er integrabelt. Dette vil vi argumentere for på følgende måde. f_n er integrabel ifølge forudsætningerne, og for at vise, at $(f - f_n)$ er integrabel danner vi følgen $(f_m - f_n)_m$; det vil sige en følge, hvis m 'te element er givet ved differensen af det m 'te element fra den oprindelige følge og én bestemt af funktionerne i følgen, nemlig f_n . Denne følge går imod $(f - f_n)$ for m gående mod uendelig, ydermere er alle elementer i følgen integrable og $(f - f_n)$ er begrænset ifølge forudsætningerne. Vi kan således bruge hjælpesætning 2 til at konkludere, at $(f - f_n)$ er integrabel som ønsket.

Altså er f integrabel. Herefter vises, at $\int f_n \rightarrow \int f$ for $n \rightarrow \infty$. Lebesgue tager udgangspunkt i leddet $(f - f_n)$.

Et vilkårligt $\epsilon > 0$ betragtes⁷. Lad e_n være mængden af værdier af x , for hvilke man *ikke* har, at der for ethvert $p \geq 0$ gælder

$$|f(x) - f_{n+p}(x)| < \epsilon. \quad (4.5)$$

Sagt på en anden måde så er e_n :

$$e_n = \{x \in E \mid \exists p \in \mathbb{N} : |f(x) - f_{n+p}(x)| \geq \epsilon\}. \quad (4.6)$$

Lebesgue bemærker at e_n er en målelig mængde, det vil vi uddybe. Ligning 4.6 kan skrives som:

$$e_n = \bigcup_{p=1}^{\infty} \{x \in E \mid |f(x) - f_{n+p}(x)| \geq \epsilon\}, \quad (4.7)$$

hvor nogle af mængderne i foreningen muligvis er tomme. For hver af disse mængder gælder, at funktionen $|f - f_{n+p}|$ er en differens af to målelige funktioner og dermed målelig. Dermed er alle mængderne i foreningen målelige og ifølge [Lebesgue, 1902, s. 239] er e_n også målelig.

Efter at have bemærket, at e_n er en målelig mængde skriver Lebesgue, at man har:

$$\left| \int (f(x) - f_n(x)) dx \right| \leq M m(e_n) + \epsilon [m(E) - m(e_n)]. \quad (4.8)$$

Der angives ikke, hvordan man kommer frem til dette resultat. Vi har gjort på følgende måde, inspireret af [Hawkins, 1975, s. 128].

$$\begin{aligned} \left| \int_E (f(x) - f_n(x)) dx \right| &\leq \int_E |f(x) - f_n(x)| dx \\ &= \int_{e_n} |f(x) - f_n(x)| dx + \int_{E \setminus e_n} |f(x) - f_n(x)| dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Fodtegnene E , e_n m.fl. er vores tilføjelser. Af disse mellemregninger fås udtryk (4.8), idet $M m(e_n)$ er en oversum for $\int_{e_n} |f - f_n| dx$ og $\epsilon [m(E) - m(e_n)]$ er en oversum for $\int_{E \setminus e_n} |f - f_n| dx$.

⁷Lebesgue starter med at betragte et Σ , men skifter senere til ϵ . Vi bruger betegnelsen ϵ fra starten.

Vi skal nu betragte mængderne e_n . Lebesgue bemærker, at mængden e_n indeholder alle mængder med index større end n , og at der ikke eksisterer nogle punkter, der er fælles for alle e_n 'erne, det vil sige, at $\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = \emptyset$. Dette argumenterer Lebesgue ikke for, men vi vil dog lige stoppe op et øjeblik og argumentere for at det gælder.

Først viser vi, at der for ethvert n haves, at $e_{n+1} \subseteq e_n$. Lad x være et vilkårligt element fra e_{n+1} . For dette x eksisterer der et $p \geq 0$, således at $|f(x) - f_{(n+1)+p}(x)| \geq \epsilon$, ifølge definitionen på mængden e_{n+1} . Sættes nu $p' = p + 1$, haves et tal $p' \geq 0$ således, at $|f(x) - f_{n+p'}(x)| \geq \epsilon$. Dette betyder, at x tilhører e_n , hvilket skulle vises.

At $\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = \emptyset$ følger af, at følgen (f_n) er punktvis konvergent.

Disse to egenskaber giver ifølge hjælpesætning 1, at $m(e_n) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

I ligning (4.8) kan man nu se, at for $n \rightarrow \infty$ kan højresiden gøres vilkårlig lille, afhængigt af ϵ , hvilket altså vil sige, at $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$. Dette afslutter Lebesgues bevis.

Dette vil vi dog lige uddybe. At $m(e_n) \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ kan jo også udtrykkes således:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N : m(e_n) < \epsilon.$$

Dette må specielt gælde for det ϵ vi valgte i starten, ergo haves fra 4.8, fra et vist $n \geq N$ at regne, at

$$\begin{aligned} \left| \int_E (f(x) - f_n(x)) dx \right| &\leq M m(e_n) + \epsilon [m(E) - m(e_n)] \\ &< M\epsilon + \epsilon m(E) \\ &= \epsilon(M + m(E)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Altså: Når fjenden kommer med sit ϵ , dividerer vi det straks med $(M + m(E))$, kører beviset igennem med dette nye $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M+m(E)}$, indtil ovenstående resultat. Her indsættes udtrykket for ϵ' , og vi får:

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in E \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N : \left| \int_E f(x) dx - \int_E f_n(x) dx \right| < \epsilon. \quad (4.11)$$

Det vil altså sige, at $\int f_n \rightarrow \int f$ for $n \rightarrow \infty$. Med andre ord udtrykket $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ er sandt. $\square$

[Lebesgue, 1902, §25, s. 259-260]

Lebesgue bemærker tilsidst, at når f er begrænset kan sætningen formuleres på følgende måde:

Sætning 4.2

Lad $f_1, f_2, f_3 \dots$ være en følge af summable funktioner, definerede på E . Hvis der eksisterer et $M \in \mathbb{R}$ så $|f_n(x)| < M$ for alle $x \in E$, $n=1,2,\dots$, og hvis $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, så har f et integral, som er grænseværdien af integralerne for funktionerne f_n , det vil sige $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$. [Lebesgue, 1902, s. 260]

Denne variant af sætningen optræder under navnet 'sætningen om begrænset konvergens' i den moderne litteratur [Gordon, 1994, s. 34]. Begrænset konvergens er et specialtilfælde af sætningen om majoriseret konvergens, som Lebesgue viser i 1908 [Hawkins, 1975, s. 118]. Kort fortalt går denne sætning ud på, at forudsætningen om, at alle funktionerne

(f_i) , $i = 1, 2, \dots$ i følgen skal være begrænsede af en konstant værdi, erstattes med forudsætningen, at de er begrænsede af en Lebesgue-integrabel funktion. I tilfældet begrænset konvergens er denne funktion selvfølgelig bare en konstant funktion.

Af den generelle formulering af konvergenssætningen, sætning 4.1, kan man, ved at betragte afsnitsfølger, udlede følgende sætning om ledvis integration:

Sætning 4.3

Hvis 'mængden af rester' for en konvergent række af integrable funktioner er begrænset opadtil af en absolut værdi, så er rækken ledvis integrabel. [Lebesgue, 1902, s. 260]

Man betragter altså rækken $\sum f_n$, som konvergerer mod f . Denne række har afsnitsfølgen $s_n = \sum_{i=1}^n f_i$, så rækkens konvergens kan udtrykkes: $s_n \rightarrow f$ for $n \rightarrow \infty$. At mængden af rester skal være begrænset må, analog med sætning 4.1, betyde at

$$\exists M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in E \quad \forall n \in \mathbf{N} : |f - s_n| \leq M.$$

Hvis disse forudsætninger er opfyldt, så har vi altså, at rækken er ledvis integrabel.

4.4.2 Det ubestemte integral

Inden Lebesgue tager fat på Analysens Fundamentalteorem 2, introducerer han det ubestemte integral [Lebesgue, 1902, §26].

Definition 4.3 (Det ubestemte integral)

Det ubestemte integral for en funktion $f(x)$, som har et bestemt integral på intervallet $[\alpha, \beta]$, er en funktion $F(x)$ defineret på $[\alpha, \beta]$, således at for alle $a, b \in [\alpha, \beta]$ gælder der

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

I denne lighed kan man lægge $F(a)$ til på begge sider, og dermed fås (b erstattes med x):

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + F(a).$$

Altså har enhver funktion, som har et bestemt integral, et uendeligt antal ubestemte integraler, som kun afviger fra hinanden med en konstant $F(a)$. [Lebesgue, 1902, s. 260-261]

Det ubestemte integral, $F(x)$, er en kontinuert funktion. Dette vises ligeledes i [Lebesgue, 1902, §26], men vi vil ikke komme ind på hvordan.

Som en optakt til Lebesgues udgave af Analysens Fundamentalteorem 2 vises i [Lebesgue, 1902, §27], at for de kontinuerte funktioner er det ubestemte integral F af f altid en stamfunktion for f , det vil sige $F' = f$. Dette gælder også for de afledte funktioner, der er Riemann-integrable. Men, siger Lebesgue, der eksisterer afledte funktioner, der ikke er Riemann-integrable, for disse kan man ikke finde stamfunktioner ved hjælp af Riemann-integration.

Det er altså dette problem, der motiverer Analysens Fundamentalteorem 2.

4.4.3 Lebesgues udgave af Analysens Fundamentalteorem 2

Lebesgue viser, at med hans integralbegreb gælder Analysens Fundamentalteorem 2 for alle begrænsede afledte. Han er ikke i stand til at vise gyldigheden for alle ikke-begrænsede afledte, men angiver i sammenhæng med denne undersøgelse en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, på f , som ifølge Lebesgue sikrer, at den afledte er integrabel, og at det ubestemte integral er en af dens stamfunktioner. Vi vil dog kun betragte Analysens Fundamentalteorem 2 for begrænsede afledte.

Lebesgue viser sætningen i to etaper, først vises at enhver begrænset afledt er summabel, derefter at dens ubestemte integral er en af dens stamfunktioner. I første del af beviset angiver Lebesgue dog ikke eksplicit, at han betragter begrænsede afledte. Det går vi alligevel ud fra, at han gør, fordi beviset ellers ikke er rigtigt. Nu til sætningen:

Sætning 4.4 (Analysens Fundamentalteorem 2)

Enhver begrænset afledt funktion 'antager' [admet] som ubestemte integraler sine stamfunktioner. [Lebesgue, 1902, s. 263]

Bevis

Først viser Lebesgue, at enhver afledt er summabel. Da der i resten af beviset kun betragtes begrænsede funktioner, kan summabel i det følgende opfattes i betydningen integrabel.

Den afledte $f'(x)$ af en funktion $f(x)$ er grænsen for $h \rightarrow 0$ af udtrykket:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \phi(x). \quad (4.12)$$

Når h fastholdes, repræsenterer udtrykket en kontinuert funktion $\phi(x)$. Den afledte er altså grænsefunktion for en følge (af ϕ 'er for varierende h 'er) af kontinuerte funktioner. Da kontinuerte funktioner er summable giver hjælpesætning 2 altså, at enhver begrænset afledt er summabel.

Derefter viser Lebesgue, at enhver begrænset afledt antager sine stamfunktioner som ubestemte integraler. I det følgende betragtes f og f' på intervallet $[a, b]$. Antag at den afledte f' for ethvert $x \in [a, b]$ opfylder $|f'(x)| < M$, hvor M er en konstant. På grund af middelværdisætningen [théorème des accroissements finis] haves for ethvert x (da f er kontinuert og differentiabel på $(x, x+h)$), at der eksisterer et $0 < \theta < 1$ således, at $\phi(x) = f'(x + \theta h)$. Da f' er begrænset, må ϕ 'erne således også være det på hele definitionsområdet. Nu kan Lebesgue bruge sætningen om begrænset konvergens (her i rapporten er det sætning 4.2), idet ϕ 'erne er summable, begrænsede funktioner, og dermed er integralet af f' grænseværdien til integralerne af funktionerne ϕ :

$$\int_a^b f'(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \phi(x)dx = \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dx \right]_a^b. \quad (4.13)$$

Herpå konkluderer Lebesgue direkte, at

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \quad (4.14)$$

Disse skridt har vi valgt at uddybe. Vi starter med at give en uddybning af integralmanipulationerne i det sidste skridt i lighed (4.13):

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \phi(x) dx &= \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dx \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x+h) dx - \int_a^b f(x) dx \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_{a+h}^{b+h} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_{a+h}^b f(x) dx + \int_b^{b+h} f(x) dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^{a+h} f(x) dx - \int_{a+h}^b f(x) dx \right) \\
 &= \frac{1}{h} \left(\int_b^{b+h} f(x) dx - \int_a^{a+h} f(x) dx \right) \\
 &= \left[\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx \right]_a^b. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Første lighedstegn opnås ved at sætte udtrykket for $\phi(x)$ ind, andet lighedstegn ved at trække h udenfor integraltegnet og bruge regneregler for integralet af en sum af to funktioner. Tredje og fjerde lighedstegn opnås ved et variabelskift og indskydelse af værdier i intervallerne $[a+h, b+h]$ og $[a, b]$, hvilket er lovligt ifølge [Lebesgue, 1902, § 21, s. 255]. Den sidste omskrivning er blot en kortere notation for det samme.

Dette var en uddybning af lighed (4.13), herefter følger vores forklaring på springet fra lighed (4.13) til lighed (4.14). Ved manipulation af højresiden i lighed (4.13) får vi ligning (4.14): Lad c være et tilfældigt element tilhørende definitionsområdet for f . Så er

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = \int_c^{x+h} f(x) dx - \int_c^x f(x) dx. \tag{4.16}$$

Sætter vi nu

$$g(x) = \int_c^x f(x) dx, \tag{4.17}$$

hvor g er en funktion af den øvre integrationsgrænse, kan vi se, at udtrykket i ligning (4.13) ligner en differentialkvotient:

$$\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx \right]_a^b = \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]_a^b. \tag{4.18}$$

Og da f er en kontinuert funktion er det ubestemte integral af f differentiabel med f som afledet (ifølge Analysens Fundamentalteorem 1, der gælder for de kontinuerte funktioner, se afsnit 1.4). Derfor kan vi skrive:

$$\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx \right]_a^b = [g'(x)]_a^b. \tag{4.19}$$

Ved indsættelse af udtrykket for g får vi den ønskede overgang fra lighed 4.13 til lighed 4.14:

$$\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx \right]_a^b = \left[\left(\int_c^x f(x) dx \right)' \right]_a^b = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a). \quad (4.20)$$

[Lebesgue, 1902, § 28, s. 263]

□

Med gennemgangen af Lebesgues bevis for Analysens Fundamentalteorem 2 afsluttes vores præsentation af Lebesgues afhandling.

4.5 Lebesgues videre arbejde

Allerede samme år som afhandlingen udgives efterfølges den af *Comptes Rendus*-noten 'Un théorème sur les séries trigonométriques', hvori Lebesgue anvender det nye integralbegreb i teorien for trigonometriske rækker. I 1903 uddybes noten i artiklen, 'Sur les séries trigonométriques', hvor Lebesgue indledningsvis omtaler sit formål:

En m'occupant des séries trigonométriques, j'ai eu surtout pour but de montrer l'utilité que pouvait avoir, dans l'étude de fonctions discontinues de variable réelle, la notion d'intégrale que j'ai introduite dans ma Thèse.⁸ [Lebesgue, 1903, s. 453]

Specielt viser han, at hvis en begrænset funktion kan fremstilles ved en trigonometrisk række, så er rækkens koefficienter Fourierkoefficienterne og rækken altså en Fourierrække [Hawkins, 1975, s. 164]. Dette viser entydigheden af Fourierrække-fremstillingen. Det er muligt at føre beviset ved at benytte ledvis integration, jævnfør metoden nævnt i afsnit 3.1, fordi der i Lebesgues integraldefinition findes konvergenssætninger, der er tilstrækkelig stærke, således at uniform konvergens ikke er en nødvendig betingelse.

I 1904 udgiver Lebesgue '*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*' som er 6. bind i en række af monografier redigeret af Borel. Bogen bygger på forelæsninger om afhandlingen og relaterede emner, som Lebesgue afholder i 1902-1903. [Hawkins, 1975, s. 132]

I '*Leçons*' præsenterer Lebesgue en deskriptiv eller aksiomatisk definition af det bestemte integral. Lebesgue opstiller seks betingelser, som han mener et bestemt integral skal overholde [Dalen & Monna, 1972, s. 111] [Hawkins, 1975, s. 132]:

1. For alle a, b, h gælder

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h) dx;$$

2. For alle a, b, c gælder

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0;$$

⁸Vores oversættelse af citat: "I mit arbejde med trigonometriske rækker har jeg især haft som formål at vise den nytte, som det integralbegreb jeg har introduceret i min afhandling kan være til i studiet af diskontinuerte funktioner af en reel variabel."

3. For alle integrable funktioner f og g gælder

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

4. Hvis $f \leq 0$ og $b > a$, så gælder

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0;$$

5. $\int_0^1 1 dx = 1$;

6. For enhver voksende funktionsfølge (f_n) , der konvergerer mod f , gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Betingelse 4 udtrykker at integralet skal være en positiv funktional og betingelse 6 er Lebesgues sætning om monoton konvergens. Lebesgue foreslår, at en definition af integralet for en begrænset funktion på intervallet $[a, b]$ skal være et reelt tal, betegnet $\int_a^b f(x) dx$, der tilegnes på en sådan måde, at betingelserne er opfyldt. Denne definition peger henimod den moderne (og Radons) opfattelse af integralet som en lineær funktional. [Dalen & Monna, 1972, s. 111]

4.6 Opsamling

Vi mener, at der forekommer to motivationsgrunde for Lebesgue. Den ene er Lebesgues interesse for bestemmelsen af overfladers areal, samt længder af kurver, mens det andet er at skabe et integralbegreb som genskaber sammenhængen mellem ubestemte integraler og stamfunktioner. Med sammenhæng menes, at alle afledte skal være integrable og at integrationen frembringer en stamfunktion. Dette er, hvad Lebesgue selv angiver som formålet med indførelsen af det nye integral.

Overskriften på afhandlingen og på de noter, der ligger til grund for afhandlingen tyder på, at Lebesgues matematiske motivation for indførelsen af integralet er opstået i forbindelse med hans arbejde med arealer og overfladers geometri i det hele taget. Dette underbygges også af afhandlingens opbygning, hvor behandlingen af de tre begreber integral, længde og areal sidestilles. Herudover omhandler de to anvendelser af integralbegrebet overfladers geometri.

Hvordan kan vi underbygge påstanden om, at stamfunktionsproblemet er en motiverende faktor for Lebesgue?

Først og fremmest kan vi underbygge det med Lebesgues egne ord i indledningen⁹, om, at det er stamfunktionsproblemet der har motiveret ham. Da stamfunktionsproblemet og Analysens Fundamentalteorem 2 er to sider af samme sag, er det rimeligt at se på, hvilken status Lebesgue giver Analysens Fundamentalteorem 2. Vi mener, at dette hænger sammen med det sætningshierarki, der er i Lebesgues afhandling.

⁹Se citat i afsnit 4.2.

Til beviset af Analysens Fundamentalteorem 2 gør Lebesgue brug af nogle af de sætninger han har vist tidligere i afhandlingen. I beviset bruges konvergenssætningen, som igen er afhængig af den tællelige additivitet. Sætningerne indgår således i et hierarki, og er ikke sideordnede sætninger, der kan bevises direkte med anvendelse af definitionen.

Kan konvergenssætningen derved opfattes som en slags hjælpesætning, hvis eksistens kun er berettiget af Analysens Fundamentalteorem 2? I *Comptes Rendus*-noten og indledningen til afhandlingen introduceres konvergenssætningen i sammenhæng med en undersøgelse af hvor mange funktioner, der er integrable. Inden Lebesgue beviser konvergenssætningen angiver han en grund til, at sætningen er vigtig, nemlig at diskontinuerte funktioner defineres ved hjælp af rækker¹⁰. Dette peger i retning af hans senere udtrykte interesse i at kunne angive Fourierrækker for diskontinuerte funktioner (i *Comptes Rendus*-noten fra 1902 om Fourierrækker). Der er altså flere forskellige årsager til, at Lebesgue er interesseret i konvergenssætninger.

Analysens Fundamentalteorem og stamfunktioner er det sidste emne, Lebesgue beskæftiger sig med inden han i afhandlingen går over til multiple integraler. Dette ser vi som et tegn på, at Lebesgue vægter sætningen højt; som kronen på værket, så at sige. I indledningen skriver Lebesgue, at Riemann-integralet kommer til kort med hensyn til visse afledte funktioner; denne bemærkning står som den første forklaring på, hvorfor Lebesgue vil gentage Jordans øvelse i definitionen af det bestemte integral. Dette gentages umiddelbart inden Analysens Fundamentalteorem præsenteres, hvor han omtaler den manglende symmetri, der er opstået i Analysens Fundamentalteorem i overgangen fra Cauchys integraldefinition til Riemanns. Vi mener, at Lebesgues gentagelse af motivationen for at beskæftige sig med Analysens Fundamentalteorem – han kunne bare have bevist den uden at give en motiverende introduktion – viser at det er et problem, som har interesse for Lebesgue.

Med hensyn til Fourierrækker er det værd at bemærke, at det er den første anvendelse af integralet, som Lebesgue kaster sig over efter afhandlingen, som nævnt allerede samme år. Dette viser, at Lebesgue selvfølgelig er interesseret i at bruge sit integral som et redskab i forbindelse med teorien for Fourierrækker, men vi mener altså ikke, at der i '*Intégrale, Longueur, Aire*' er belæg for at sige, at Fourierrækkerne var en motiverende faktor for Lebesgues indførelse af integralet.

Der er blandede udsagn i litteraturen om Lebesgues motivation og beskrivelse af, hvad han gør i afhandlingen.

[Pesin, 1970] fremhæver, at Analysens Fundamentalteorem 2 tilsyneladende har en særlig status for Lebesgue:

It seems that in Lebesgue's opinion the most interesting and desirable property of integrals is that which enables us to solve the fundamental problem of integral calculus: determination of a function from a known derivative (see IIA, Introduction). [Pesin, 1970, s. 74]

[Pesin, 1970] baserer altså denne kommentar på Lebesgues ord i indledningen til '*Intégrale, Longueur, Aire*', og udtalelsen om, hvad Lebesgue mener er de vigtigste egenskaber ved integraler, fremstår på denne baggrund som en lidt udokumenteret påstand.

¹⁰Se afsnit 4.4.1.

I [Birkhoff & Kreyszig, 1984] er der en kort beskrivelse af Lebesgues afhandling. Her fokuseres der på Lebesgues konvergenssætning og det påstås, at Lebesgue i afhandlingen anvender integralet i forbindelse med Fourierrækker:

In it, Lebesgue established the great power, generality, and elegance of his new integral, applying it to Fourier series and other problems. [Birkhoff & Kreyszig, 1984, s. 268]

Denne påstand er dog ikke rigtig; Lebesgue omtaler ikke Fourierrækker i *'Intégrale, longueur, Aire*, men først i den omtalte *Comptes Rendus*-note om Fourierrækker samme år. At [Birkhoff & Kreyszig, 1984] netop fremhæver konvergenssætningen og Fourierrækker skyldes måske, at Lebesgues arbejde præsenteres i forbindelse med en udredning af funktionalanalysens historie.

5 Oskar Perron (1880-1975)

Vi skal nu undersøge et integral, som er defineret på en anden måde end Lebesgues integral, der som vi har set defineres som et areal. Vi vil starte kapitlet med en kort biografi af Perron, hvorefter der gives en beskrivelse af artiklen '*Über den Integralbegriff*', herunder hvad han selv nævner som formål med at lave det nye integral. Derefter vil vi introducere Perrons integralbegreb og gennemgå beviserne for Analysens Fundamentalteorem 2 og en konvergenssætning, som er de sætninger, der også her viser sig at være centrale. Dette gøres med henblik på at finde ud af om der er overensstemmelse imellem det erklærede formål, og det som Perron rent faktisk gør. Til slut vil der komme en opsamling på vores resultater, og vores bud på Perrons motivation.

5.1 Kort biografi

Oskar Perron begyndte sine matematikstudier i 1898 på Universitetet i München. I 1906 blev han efter afslutningen af sine studier ansat som lektor ved München Universitet, og i 1914 fik han et professorat ved universitetet i Heidelberg. Hans karriere blev på dette tidspunkt afbrudt for en periode på grund af hans deltagelse i Første Verdenskrig. [Frank, 1982]

I årene frem til publiceringen af hans integral i 1914 beskæftigede Perron sig først med undersøgelsen af kædebrøker og deres konvergenssegenskaber, og senere omkring 1909 begyndte også studiet af differentiaalligninger at optræde i hans publiceringer. Senere i hans karriere blev hans forskning styret i retning af især talteori, algebra og geometri, men også formidling af matematik spillede en rolle i hans senere arbejde. [Frank, 1982]

5.2 Perrons artikel: '*Über den Integralbegriff*'

Perron præsenterer sit integralbegreb i artiklen '*Über den Integralbegriff*', der publiceres i tidsskriftet '*Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*' i 1914 [Perron, 1914]. I starten af artiklen omtaler Perron hensigten med at udvikle integralet, idet han skriver at:

Im folgenden stelle ich eine Definition des bestimmten Integrals zur Diskussion, die, wie ich zeigen werde, mindestens so weittragend ist, wie die LEBESGUESche. Sie ist aber viel elementarer, und auch der Nachweis der fundamentalen Gesetze gestaltet sich viel einfacher. Aus der Theorie der Punktmengen wird gar nichts vorausgesetzt.¹ [Perron, 1914, s. 3]

¹Vores oversættelse af citat: "I det følgende stiller jeg en definition af det bestemte integral til diskus-

I artiklen præsenteres altså en ny integraldefinition af det bestemte integral, som ifølge Perron er mere elementær end Lebesgues definition, men mindst ligeså vidtrækkende. Perron viser, at enhver Lebesgue-integrabel funktion også er Perron-integrabel, hvilket vi ser som et tegn på, at han med ordet '*weittragend*' hentyder til, at mængden af Lebesgue-integrable funktioner er en delmængde af de Perron-integrable funktioner. Han nævner også i citatet, at beviserne for de fundamentale sætninger bliver enklere. Heri ser vi to spørgsmål. Dels hvilke sætninger Perron henviser til som de fundamentale sætninger, og dels, hvad han lægger i ordet enkel. Sidste spørgsmål vil vi vende tilbage til i afsnit 5.7.

Inden vi giver et bud på det første spørgsmål vil vi kort ridse opbygningen af artiklen op. Først i artiklen definerer Perron integralet for begrænsede funktioner. Herefter beviser han i et afsnit med titlen '*Regningen med bestemte integraller*' ti sætninger om egenskaber ved integralet, både egenskaber af regneteknisk art, for eksempel sætningen om, at integralet af en sum er lig summen af integralerne. Der er også sætninger af en anden art eksempelvis Analysens Fundamentalteorem 1 og 2, en konvergenssætning og en sætning om, at produktet af en Riemann-integrabel funktion og en Perron-integrabel funktion er Perron-integrabel. I det efterfølgende afsnit undersøges forbindelsen med Lebesgue-integralet, og i det sidste afsnit omtaler han kort, hvordan hans integralbegreb forholder sig til ikke-begrænsede funktioner.

Vender vi tilbage til spørgsmålet om, hvilke sætninger han henviser til som *de fundamentale sætninger* mener vi, at det må dreje sig om nogle (eller alle) af de ti sætninger han beviser om integralets egenskaber. Det kunne også være sætningen om, at enhver Lebesgue-integrabel funktion er Perron-integrabel, men den vil vi i denne sammenhæng ikke betegne som fundamental.

Analysens Fundamentalteorem 2 og konvergenssætningen er i blandt de ti sætninger, og vi antager derfor, at Perron ihvertfald også henviser til beviserne for dem, når han bruger betegnelsen *de fundamentale sætninger*. Analysens Fundamentalteorem og konvergenssætningen er som nævnt ovenfor af en anden karakter end de andre sætninger, der vises, som er af regneteknisk art og beskriver nogle basale egenskaber ved integralet. Disse to sætninger kan således siges at være centrale for vores undersøgelse af Perrons motivation, og vi vil derfor undersøge om beviserne for disse sætninger bliver enklere i Perrons integralbegreb.

I det følgende præsenteres først Perrons integraldefinition og dernæst gennemgår vi beviserne for Analysens Fundamentalteorem 2 og konvergenssætningen, og tilsidst præsenteres sætningen om, at enhver Lebesgue-integrabel funktion er Perron-integrabel.

5.3 Perrons integralbegreb

Perrons integraldefinition for begrænsede reelle funktioner af én reel variabel bygger på begreberne *adjungerede over- og underfunktioner*, som defineres ud fra *øvre og nedre afledte*. I en forbemærkning i starten af artiklen definerer Perron de øvre og nedre afledte og beviser en af to hjælpesætninger til brug for den videre definition af det bestemte integral. Vi har dog valgt at begynde med Perrons indførelse af de adjungerede over- og underfunktioner, for at motivere indførelsen af de øvre og nedre afledte.

sion, og som jeg viser er den mindst ligeså vidtrækkende som Lebesgues [definition]. Den er dog mere elementær og også beviserne for de fundamentale sætninger former sig meget enklere. Der bliver ikke forudsat noget om teorien for punktmængder."

Definition 5.1 (Adjungeret underfunktion)

Lad $f(x)$ være en begrænset reel funktion defineret på intervallet $a \leq x \leq b$, således at

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Enhver kontinuert funktion $\phi(x)$, hvor følgende er opfyldt

$$\phi(a) = 0 \quad (5.1)$$

$$\overline{D\phi(x)} \leq f(x) \quad \text{når } a \leq x \leq b, \quad (5.2)$$

hvor $\overline{D\phi(x)}$ betegner den øvre afledte af ϕ , kaldes en adjungeret underfunktion til f på intervallet $[a, b]$. [Perron, 1914, s. 5]

Og tilsvarende defineres den adjungerede overfunktion:

Definition 5.2 (Adjungeret overfunktion)

Enhver kontinuert funktion $\psi(x)$, for hvilken der gælder

$$\psi(a) = 0 \quad (5.3)$$

$$\underline{D\psi(x)} \geq f(x) \quad \text{når } a \leq x \leq b, \quad (5.4)$$

hvor $\underline{D\psi(x)}$ betegner den nedre afledte af ψ , kaldes en adjungeret overfunktion til f på intervallet $[a, b]$. [Perron, 1914, s. 5]

I definitionerne bliver de øvre og nedre afledte $\overline{D\phi(x)}$ og $\underline{D\psi(x)}$ af de adjungerede funktioner indført. Perron indfører dem for at kunne tale om en slags afledte af kontinuerte funktioner, der ikke nødvendigvis er differentiable.

Definition 5.3 (Øvre og nedre afledte)

Lad $w(x)$ være en kontinuert, reel funktion defineret på intervallet $a \leq x \leq b$. Er x en konstant, ξ en variabel værdi i intervallet vil funktionen af ξ

$$\frac{w(\xi) - w(x)}{\xi - x}$$

for $\xi \rightarrow x$ svinge mellem en øvre og nedre 'Unbestimmtheitsgrenze', som kaldes henholdsvis den øvre og nedre afledte af $w(x)$ og betegnes

$$\overline{Dw(x)}, \quad \underline{Dw(x)}.$$

[Perron, 1914, s. 3]

I tilfældet, hvor $w(\xi)$ er differentiable angiver definitionen den kendte definition på en differentialkvotient for funktionen $w(\xi)$ i punktet x . Definitionen på den øvre og nedre afledte af f kan gives følgende formulering:

$$\overline{Dw(x)} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{w(\xi) - w(x)}{\xi - x} : 0 < |\xi - x| < \delta \right\} \quad (5.5)$$

$$\underline{Dw(x)} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \frac{w(\xi) - w(x)}{\xi - x} : 0 < |\xi - x| < \delta \right\}. \quad (5.6)$$

[Gordon, 1994, s. 54]

Hvis en funktion er differentiabel i et punkt x vil den øvre og nedre afledte være ens og lig med differentialkvotienten, mens hvis funktionen ikke er differentiabel i punktet vil de øvre og nedre afledte eksistere, men have forskellige værdier. De øvre og nedre afledte kan godt være henholdsvis $\pm\infty$.

I det ikke-differentiable tilfælde vil den øvre afledte have en større værdi end den nedre afledte, hvilket man kan overbevise sig om ved at se på den alternative formulering, ligning 5.5 og 5.6, idet supremum af en mængde nødvendigvis er større end eller lig med infimum af mængden.

Perron viser herefter nogle simple sammenhænge for de afledte, og to hjælpesætninger, som han benytter i senere beviser. Vi vil her gengive de to hjælpesætninger, men vi har ikke medtaget beviserne, idet vi mener det ville flytte fokus fra det væsentlige.

Hjælpesætning 3

Er $\overline{Dw(x)}$ opadtil begrænset på intervallet $[a, b]$ er forholdet

$$\frac{w(x_2) - w(x_1)}{x_2 - x_1},$$

for to værdier x_1 og x_2 i intervallet, også begrænset opadtil af den samme værdi. [Perron, 1914, s. 4, 'Hilfssatz 1']

Hjælpesætning 4

Er $\underline{Dw(x)}$ nedadtil begrænset på intervallet $[a, b]$ er forholdet

$$\frac{w(x_2) - w(x_1)}{x_2 - x_1},$$

for to værdier x_1 og x_2 i intervallet, også begrænset nedadtil af den samme værdi. [Perron, 1914, s. 4, 'Hilfssatz 2']

I forbindelse med definitionen af de øvre og nedre afledte betegner x en konstant og ξ den variable; i resten af artiklen betegner x en variabel i intervallet $[a, b]$.

Efter nu at have indført definitionerne på de øvre og nedre afledte for en kontinuert funktion vender vi tilbage til de adjungerede over- og underfunktioner. Perron skal bruge de adjungerede funktioner til at definere integralet med, men først overbeviser han sig om, at der for alle begrænsede funktioner faktisk eksisterer et adjungeret funktionspar (en adjungeret over- og underfunktion). Lad nemlig f være en begrænset funktion, således at $m \leq f(x) \leq M$. Da vil $\phi(x) = m(x - a)$ og $\psi(x) = M(x - a)$ være et adjungeret funktionspar, idet de opfylder betingelserne givet i definition 5.1 og 5.2. [Perron, 1914, s. 5]

Perrons integraldefinition bygger på, at underfunktionerne i intervalendepunktet er begrænsede opadtil af en værdi g , mens overfunktionerne i punktet er begrænsede nedadtil af en værdi G . Dette ophøjer Perron ikke til en sætning, men beviser det alligevel, hvilket vi også gør her.

Lad $f(x)$ være en begrænset funktion på intervallet $[a, b]$, og lad $\phi(x)$ være en til f adjungeret underfunktion. For $x \in [a, b]$ gælder uligheden

$$\overline{D\phi(x)} \leq f(x) \leq M, \quad (5.7)$$

ifølge definitionen på en adjungeret underfunktion. Nu gør Perron brug af hjælpesætningen, som han viste i starten af artiklen, se hjælpesætning 3.

Da ligning 5.7 netop siger, at $\overline{D\phi(x)}$ er begrænset fås ved brug af hjælpesætningen, og at $\phi(a) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a} &\leq M \Rightarrow \\ \phi(b) &\leq M(b - a). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Her har vi således, at enhver adjungeret underfunktion til en begrænset funktion f vil være begrænset opadtil, og derfor vil mængden af værdier $\{\phi(b) : \phi \text{ er en adjungeret underfunktion til } f\}$ have et supremum (kaldet g).

Tilsvarende viser Perron, at den adjungerede overfunktion er begrænset nedadtil ved at gøre brug af hjælpesætning 4. Da $\underline{D\psi(x)} \geq f(x) \geq m$ fås således at

$$\begin{aligned} \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} &\geq m \Rightarrow \\ \psi(b) &\geq m(b - a). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Det vil sige, at mængden af værdier $\{\psi(b) : \psi \text{ er en adjungeret overfunktion}\}$ har et infimum (kaldet G). Perron har således afklaret de adjungerede funktioners henholdsvis øvre og nedre grænser, og er nu interesseret i at kunne udtale sig om sammenhængen mellem grænserne, det vil sige vise at $G \geq g$.

I starten af artiklen efter indførelsen af de øvre og nedre afledte viser Perron simple sammenhænge mellem de afledte; en trekantsulighed for den øvre og nedre afledte, og at $\underline{D(-w(x))} = -\overline{Dw(x)}$ [Perron, 1914, s. 3]. Dette bruges nu til at vise, at for vilkårlige over- og underfunktioner er den nedre afledte af funktionen $\psi(x) - \phi(x)$ begrænset nedadtil af værdien nul:

$$\underline{D(\psi(x) - \phi(x))} \geq \underline{D\psi(x)} + \underline{D(-\phi(x))} = \underline{D\psi(x)} - \overline{D\phi(x)} \geq 0, \quad (5.10)$$

hvor sidste ulighedstegn følger af

$$\overline{D\phi(x)} \leq f(x) \leq \underline{D\psi(x)},$$

da $\phi(x)$ og $\psi(x)$ er et adjungeret funktionspar. Den nedre afledte af $\psi(x) - \phi(x)$ er således begrænset nedadtil af nul, hvorved

$$\frac{\psi(x_2) - \phi(x_2) - (\psi(x_1) - \phi(x_1))}{x_2 - x_1} \geq 0,$$

ifølge hjælpesætning 4. Hvis $x_1 = a$ og $x_2 = b$ indsættes, og da $\psi(a) = \phi(a) = 0$ fås

$$\frac{\psi(b) - \phi(b)}{b - a} \geq 0 \quad (5.11)$$

og derved er $\psi(b) - \phi(b) \geq 0$. For vilkårlige ψ, ϕ gælder således, at $\psi(b) \geq \phi(b)$, og derved når Perron frem til ligningen $G \geq g$.

Nu kan Perron give definitionen på Perron-integrabilitet for en begrænset funktion.

Definition 5.4 (Perron-integralet)

Lad f være en begrænset funktion på intervallet $[a, b]$. Lad

$$G = \inf\{\psi(b) \mid \psi \text{ er en adjungeret overfunktion for } f\}$$

og

$$g = \sup\{\phi(b) \mid \phi \text{ er en adjungeret underfunktion for } f\},$$

som defineret ovenfor.

Når $G = g$ kaldes f integrabel i intervallet $[a, b]$, og værdien $G = g$ kaldes det bestemte integral:

$$\int_a^b f(x) dx = G = g. \quad (5.12)$$

[Perron, 1914, s. 6]

Af denne definition fås, at der for enhver adjungeret over- og underfunktion til en integrabel funktion $f(x)$ må gælde uligheden:

$$\phi(b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \psi(b), \quad (5.13)$$

hvormed Perron kan angive følgende betingelse for, at $f(x)$ er Perron-integrabel i intervallet $[a, b]$:

Sætning 5.1 (Perron-integrabilitet)

Hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ eksisterer en adjungeret underfunktion ϕ og en adjungeret overfunktion ψ , således, at $\psi(b) - \phi(b) < \epsilon$, så er f Perron-integrabel. [Perron, 1914, s. 6]

På hvilken måde kan vi nu forstå Perron-integralet? Det adjungerede funktionspar består af to funktioner, der har den egenskab, at deres 'afledte' klemmer den funktion inde, som skal integreres. De adjungerede funktioner er således valgt på baggrund af sammenhængen mellem deres 'afledte' og integranden, således at den øvre afledte af underfunktionen er mindre end f , og den nedre afledte af overfunktionen er større end f . Men netop denne sammenhæng giver dem status som en form for approksimerede stamfunktioner til funktionen. Selvfølgelig er de ikke rigtige stamfunktioner, idet de jo ikke behøver at være differentiable.

Perrons integraldefinition bygger på en sammenligning af supremum og infimum for mængderne af de adjungerede under- og overfunktioner (evalueret i $x = b$), og ved lighed er funktionen integrabel og integralet er fundet. De adjungerede underfunktioner evalueret i interval-endepunktet giver således en nedre grænse for integralet, mens de adjungerede overfunktioner giver en øvre grænse. De adjungerede funktioner er altså en slags øvre og nedre integraler, der approksimerer stamfunktioner for integranden. Det centrale punkt i Perrons definition, mener vi derfor, er stamfunktionen, og selve afgørelsen af Perron-integrabilitet og bestemmelsen af integralet handler om at finde en stamfunktion. Det bestemte integral er således defineret som en tilvækst i en stamfunktion.

Denne måde at betragte integralet på er i sin natur én-dimensionel. Der findes ikke nogen naturlig måde, hvorpå man kan generalisere denne definition af integralet til funktioner af flere variable. Stamfunktionsbegrebet giver kun mening for funktioner af en variabel.

5.4 De centrale sætninger

Analysens Fundamentalteorem 2 og konvergenssætningen har vi ladet stå i Perrons egne ord (dog oversat til dansk), mens vi har uddybet beviserne i forhold til det i artiklen angivne, dog ikke i en sådan grad, at den overordnede gang i beviserne er ændret.

Sætning 5.2 (Analysens Fundamentalteorem 2)

Er $f(x)$ begrænset og den afledte af en funktion $F(x)$, så er $f(x)$ integrabel og der gælder:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

[Perron, 1914, s. 8-9]

Denne sætning er Perrons 'Satz 6'.

Bevis

Først viser Perron, at $f(x)$ er integrabel ved at finde et adjungeret funktionspar for f , der opfylder integrabilitetsbetingelsen, se sætning 5.1. Som kandidat til den adjungerede underfunktion ϕ og den adjungerede overfunktion ψ for f i intervallet $[a, b]$ betragter Perron funktionerne:

$$\phi(x) = F(x) - F(a) \quad \text{og} \quad \psi(x) = F(x) - F(a). \quad (5.14)$$

Det er oplagt, at disse to funktioner faktisk er under- og overfunktioner til f , idet betingelserne fra definition 5.1 og 5.2 er opfyldt; da $F(x)$ er kontinuert er ϕ og ψ kontinuerte, og

$$\phi(a) = \psi(a) = F(a) - F(a) = 0.$$

Da $F(x)$ er differentiabel fås for underfunktionen

$$\overline{D\phi(x)} = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x),$$

og tilsvarende for overfunktionen

$$\underline{D\psi(x)} = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x).$$

For ethvert $\epsilon > 0$ gælder, at

$$\psi(b) - \phi(b) = F(b) - F(a) - (F(b) - F(a)) = 0 < \epsilon.$$

Da $\phi(b) = \psi(b)$ er integralet af $f(x)$ lig denne værdi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5.15)$$

□

Det eneste Perron benytter sig af for at bevise Analysens Fundamentalteorem er betingelsen for Perron-integrabilitet, sætning 5.1, hvilket igen er tegn på, at hans integraldefinition er bygget op omkring bestemmelsen af en stamfunktion.

Vi kommer nu til gennemgangen af Perrons konvergenssætning. Det er værd at lægge mærke til, at sætningen kræver uniform konvergens af den betragtede funktionsfølge. Denne konvergenssætning er altså ækvivalent med den, der gælder i Riemann-integralets ramme, og svagere end de konvergenssætninger, der kan vises i Lebesgue-integralets ramme.

Sætning 5.3 (Konvergenssætning)

Når de integrable funktioner $f_1(x), f_2(x), \dots$ defineret på intervallet $[a, b]$ konvergerer uniformt mod en grænsefunktion $f(x)$, så er $f(x)$ også integrabel og der gælder:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x).$$

[Perron, 1914, s. 10-11]

Denne sætning er Perrons 'Satz 9'.

Bevis

Gangen i beviset er først, at vise at $f(x)$ er integrabel på intervallet ved at vise, at differensen mellem en valgt adjungeret over- og underfunktion kan gøres vilkårlig lille. Derefter vises det, at $\int f_n \rightarrow \int f$ for $n \rightarrow \infty$, det vil sige, at differensen mellem integralet af $f(x)$ og integralet af $f_n(x)$ for et passende stort n kan gøres vilkårlig lille.

Lad $\epsilon > 0$ være givet. Da følgen af funktioner $f_1(x), f_2(x), \dots$ konvergerer uniformt vil der for alle $\epsilon > 0$ eksistere et $N \in \mathbb{N}$, således at der for alle $x \in [a, b]$ og for alle $n > N$ gælder:

$$f_n(x) - \epsilon < f(x) < f_n(x) + \epsilon. \quad (5.16)$$

Da $f_n(x)$ er integrabel kan vi vælge et adjungeret funktionspar, $\phi_n(x)$ og $\psi_n(x)$, til $f_n(x)$ således, at der givet et $\epsilon_1 > 0$ gælder, at $\psi_n(b) - \phi_n(b) < \epsilon_1$. Perron benytter sig senere af dette, men han skriver det aldrig eksplicit.

Som kandidat til et adjungeret funktionspar til $f(x)$ betragter Perron de kontinuerte funktioner:

$$\Phi(x) = \phi_n(x) - \epsilon(x - a) \quad \text{og} \quad \Psi(x) = \psi_n(x) + \epsilon(x - a). \quad (5.17)$$

At funktionerne faktisk er et adjungeret funktionspar ses, idet (vi viser kun for underfunktionen; beviset for overfunktionen forløber analogt):

$$\Phi(a) = \phi_n(a) - \epsilon(a - a) = 0 - 0 = 0,$$

da ϕ_n er en adjungeret underfunktion. For at vise, at den anden betingelse er opfyldt, det vil sige $\overline{D\Phi(x)} \leq f(x)$, benytter vi to af de egenskaber ved øvre og nedre afledte, som Perron viser i starten af artiklen². Vi betragter den øvre afledte af $\Phi(x)$ og får ved indsættelse af funktionsudtrykket:

$$\begin{aligned} \overline{D\Phi(x)} &= \overline{D(\phi_n(x) - \epsilon(x - a))} \\ &\leq \overline{D\phi_n(x)} - \overline{D\epsilon(x - a)} \\ &\leq f_n(x) - \epsilon \\ &< f(x), \end{aligned} \quad (5.18)$$

hvor det tredje ulighedstegn følger af, at $\phi_n(x)$ er en underfunktion for $f_n(x)$, og at $\epsilon(x - a)$ er differentiabel, hvorved $D\epsilon(x - a) = \epsilon(x - a)' = \epsilon$. Det sidste ulighedstegn følger af konvergens af funktionsfølgen, ligning 5.16. Nu betragter Perron differensen:

$$\Psi(b) - \Phi(b) = \psi_n(b) - \phi_n(b) + 2\epsilon(b - a). \quad (5.19)$$

² Disse egenskaber er trekantsuligheden og at $\overline{D(-w(x))} = -\overline{D(w)}$. Dette giver i kombination egenskaben $\overline{D(w_1(x) - w_2(x))} \leq \overline{Dw_1(x)} + \overline{D(-w_2(x))} = \overline{Dw_1(x)} - \overline{Dw_2(x)}$.

Denne størrelse, skriver Perron, kan gøres vilkårlig lille, men han giver ikke en argumentation. Det sidste led kan oplagt gøres vilkårlig lille. Vurderingen af det første led følger imidlertid af, at det adjungerede funktionspar er valgt således, at $\psi_n(b) - \phi_n(b) < \epsilon_1$. Da $\Psi(x)$ og $\Phi(x)$ er et adjungeret funktionspar for $f(x)$, og forskellen mellem dem kan gøres vilkårlig lille, følger det af sætning 5.1, at $f(x)$ er integrabel. Det var første skridt.

Idet $f(x)$ er integrabel, er det nu muligt at undersøge forskellen mellem integralet af $f(x)$ og integralet af $f_n(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx, \quad (5.20)$$

for hvilken der ifølge Perron gælder

$$-\epsilon(b-a) < \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx < \epsilon(b-a), \quad (5.21)$$

hvormed han afslutter beviset.

Dette vil vi lige uddybe. Da Perron-integralet er en positiv funktional³, kan vi på baggrund af ligning 5.16 vurdere integralet af funktionen $f(x) - f_n(x)$. For $n > N$ fås således, at

$$\begin{aligned} -\epsilon &< \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx < \epsilon && \Rightarrow \\ -\int_a^b \epsilon dx &< \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx < \int_a^b \epsilon dx && \Rightarrow \\ -\epsilon(b-a) &< \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx < \epsilon(b-a). \end{aligned} \quad (5.22)$$

På baggrund af ligning 5.22 kan vi hermed slutte, at forskellen udtrykt ved ligning 5.20 kan gøres vilkårlig lille, hvorved

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (5.23)$$

□

I en moderne lærebogsudgave af dette bevis ville man have anvendt et andet ϵ i ligning 5.16, således at ligning 5.22 i stedet ville blive

$$-\epsilon < \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx < \epsilon.$$

For et givet $\epsilon > 0$ er det derfor vist, at der for alle $x \in [a, b]$ eksisterer et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$|\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx| < \epsilon \quad \text{for alle } n > N.$$

Dette er ensbetydende med, at

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

³Denne egenskab har Perron vist som en af de ti sætninger, der omhandler regning med bestemte integraler; hvis $f_1(x) \geq f_2(x)$ på intervallet $[a, b]$ så er $\int_a^b f_1(x) dx \geq \int_a^b f_2(x) dx$. [Perron, 1914, s. 8, 'Satz 5']

Beviset for konvergenssætningen er således bygget op på samme måde som beviset for Analysens Fundamentalteorem 2. I begge beviser viser Perron, at f er integrabel ved at benytte sætning 5.1 om Perron-integrabilitet. Til at bevise værdien af integralet benyttes i beviset for Analysens Fundamentalteorem 2, at de to adjungerede funktioner har den samme værdi i interval-endepunktet, hvorved integralet er lig denne værdi. I beviset for konvergenssætningen er de to adjungerede funktioner ikke ens i interval-endepunktet, så dette argument kan ikke bruges her. I stedet vurderes forskellen mellem integralet af $f(x)$ og den værdi af integralet af $f(x)$, der er givet i sætningen.

5.5 Sammenhængen mellem Lebesgue- og Perron-integralet

Perron nævner i starten af artiklen, at hans integral er mindst ligeså vidtrækkende som Lebesgues, hvilket vi, jævnfør afsnit 5.2, netop opfatter som, at enhver Lebesgue-integrabel funktion er Perron-integrabel. Dette understøttes af Perrons optakt til sætningen:

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß unsere Theorie sogar mindestens so weit geht, wie die LEBESGUESche, indem wir folgenden Satz bewiesen: Wenn eine Funktion $f(x)$ im LEBESGUESchen Sinne integrierbar ist, so ist sie auch in unserem Sinne integrierbar, und das LEBESGUESche Integral ist gleich dem unseren.⁴ [Perron, 1914, s. 13]

Vi har valgt kun at give en antydning af gangen i beviset for sætningen.

Som med beviserne for de to andre sætninger er det centrale også i dette bevis at angive kandidater til et adjungeret funktionspar for den funktion, man ønsker at vise er Perron-integrabel. I dette tilfælde handler det om en Lebesgue-integrabel funktion f på intervallet $[a, b]$.

Som kandidat til den adjungerede overfunktion ψ betragter Perron en overestimation af arealet under f , som han konstruerer ved at benytte Lebesgues analytiske definition af integralet. Han viser, at kandidaten opfylder betingelserne for at være en overfunktion til f , og at funktionen taget i endepunktsværdien b kan vurderes i forhold til Lebesgue-integralet af f . Ved at foretage de samme ræsonnementer for en adjungeret underfunktion ϕ , får Perron følgende vurdering:

$$\psi(b) - \epsilon < \int_a^b f(x) dx < \phi(b) + \epsilon. \quad (5.24)$$

Han kan nu vurdere de to adjungerede funktioner i forhold til hinanden, og på baggrund af sætningen om Perron-integrabilitet konkludere, at f er Perron-integrabel. Ud fra udtryk 5.24 ses det endvidere, at forskellen mellem Perron-integralet af f og Lebesgue-integralet af f kan gøres vilkårlig lille, hvorved også sidste halvdel af sætningen er bevist. [Perron, 1914, s. 13-15]

⁴Vores oversættelse af citat: "Vi vil nu vise, at vores teori sogar er mindst ligeså vidtrækkende som Lebesgues, idet vi beviser følgende sætning: Når en funktion $f(x)$ er Lebesgue-integrabel er den også integrabel i vores forstand, og Lebesgue-integralet er-lig vores."

5.6 Ubegrænsede funktioner

Afslutningsvis vil vi omtale Perrons integraldefinition i forbindelse med ubegrænsede funktioner. Perron skriver selv til sidst i artiklen, at integraldefinitionen '*ohne Schwierigkeit*' kan overføres til ubegrænsede funktioner, dog med den betingelse, at der eksisterer et adjungeret funktionspar til funktionen. Dette er ikke nødvendigvis opfyldt for ubegrænsede funktioner. Perron skriver, at forudsat at denne betingelse er opfyldt er både Analysens Fundamentalteorem 2 og konvergenssætningen stadig gyldige for ubegrænsede funktioner. [Perron, 1914, s. 15]

I [Dalen & Monna, 1972, s. 129] understøttes Perrons påstand om, at gyldigheden af Analysens Fundamentalteorem 2 kan overføres til ubegrænsede afledte funktioner, mens det i [Pesin, 1970, s. 165] bemærkes, at Analysens Fundamentalteorem 2 kun er gyldig for begrænsede afledte funktioner⁵. I ingen af disse kilder finder vi dog en underbygning af påstandene. [Gordon, 1994] viser Analysens Fundamentalteorem 2 for alle afledte [Gordon, 1994, s. 134].

Vi mener ikke, at beviset for Analysens Fundamentalteorem 2 forudsætter begrænsethed af den afledte. Det er muligt at vælge stamfunktionen som adjungeret over- og underfunktion uanset om den afledte er begrænset eller ej, og dermed vil Analysens Fundamentalteorem 2 være gyldig også for ubegrænsede afledte.

5.7 Opsamling

Ifølge Perrons egne indledende kommentarer er hans primære motivation for at lave en generalisering af integralet at lave en definition, der ikke bygger på målteori, men som har den samme rækkevidde som Lebesgue-integralet, og hvor sætningerne ligeledes kan vises uden brug af målteoretiske argumenter. Vi mener nemlig, at han med '*der Theorie der Punktmengen*' mener målteori, og at udtrykkene '*viel elementarer*' og '*viel einfacher*' fra citatet i afsnit 5.2 blandt andet hentyder til, at der ikke indgår målteori og at dette, ifølge Perron, gør integralbegrebet og beviserne enklere end Lebesgues.

Men hvad er det så Perron gør? Perrons definition af integralet involverer ikke målteori, det vil sige overvejelser over hvordan man kan tillægge punktmængder et mål. Dette kan i en vis forstand siges at forenkle argumenter og definitioner. Derimod har det den ulempe, at definitionen bliver mere abstrakt, den intuitive fornemmelse af integralet som et areal eller mål af en mængde forsvinder. Man kan ikke give det adjungerede funktionspar ϕ og ψ en geometrisk fortolkning, kun den relativt abstrakte fortolkning at de er en 'slags' stamfunktioner. Derudover angiver Perrons integraldefinition ikke en metode til at konstruere integralet. Til gengæld har definitionen den fordel, at man i praksis næsten altid finder integralet ved at finde en stamfunktion for den funktion, der skal integreres. Definitionen afspejler altså det man i praksis gør, når man integrerer og kan derved siges at være didaktisk smart. Da Perrons definition bygger på stamfunktionsaspektet gives der ingen naturlig generalisering til højere dimensioner.

På hvilken måde er Perrons definition så forskellig fra Lebesgues? Lebesgues definition bygger, som vi har set, på fortolkningen af integralet som et areal og afhænger følgelig af

⁵Den nærværende udgave af [Pesin, 1970] er en oversættelse fra russisk af Samuel Kotz, Department of Mathematics, Temple University, Pennsylvania. Det er oversætteren, der er ansvarlig for påstanden om, at Analysens Fundamentalteorem 2 kun er gyldig for begrænsede funktioner.

målteoretiske overvejelser. Lebesgues definition af integralet, som den er givet i afhandlingen, er konstruktiv, det vil sige den angiver en metode integralet kan konstrueres på. Vi mener, at den væsentligste forskel på de to integralbegreber, med hensyn til hvilket der er det *mest elementære*, er denne forskel i tilgang, mellem fortolkningen af det bestemte integral som et areal eller som en stamfunktionstilvækst. 'Konflikten' mellem disse to forskellige tilgange er ikke ny i integralregningens historie, men stammer helt tilbage fra Newton, der som den første indfører et integral baseret på en tilvækst i en stamfunktion [Henstock, 1963, s. 4].

Forudsat at man mener, at stamfunktionsaspektet er det mest centrale eller elementære i forbindelse med integration, så mener vi godt man kan sige, at Perrons definition er *mere elementær* (end Lebesgues).

Angående beviserne laves disse også uden brug af målteori. Som nævnt bygger beviserne for både Analysens Fundamentalteorem 2 og konvergenssætningen på at finde adjungerede funktionspar ϕ og ψ og derefter gøre brug af sætning 5.1 om Perron-integrabilitet og vise, at der for ethvert $\epsilon > 0$ eksisterer et adjungeret funktionspar, så $\psi(b) - \phi(b) < \epsilon$. På denne måde kan begrebet siges at være bevistechnisk enkelt.

Der er altså noget der tyder på, at Perron ved enkle beviser forstår beviser, der ikke benytter sig af målteoretiske argumenter, og som i stedet benytter sig af ovennævnte metode. I Lebesgues afhandling bruges blandt andet konvergenssætningen i beviset for Analysens Fundamentalteorem 2, mens denne sætning i Perrons integralbegreb nærmest falder direkte ud af definitionen ved hjælp af ovenstående metode. I denne forstand mener vi godt, at man kan sige, at beviserne er enklere.

Hvis Perron bruger udtrykkene 'mere elementær definition og enklere beviser' i ovenstående betydning, så underbygger det vores påstand om, at Perrons primære motivation er at lave et integralbegreb uden brug af målteori.

På grund af definitionens karakter bliver løsningen af stamfunktionsproblemet en grundlæggende del af Perrons integralbegreb. Perron fremhæver ikke løsningen af stamfunktionsproblemet som et specielt formål, men det er sandsynligt, at han blandt andet har konstrueret integralet med dette for øje. Det ser ikke ud til, at Perron er specielt motiveret af ønsket om at angive brugbare konvergenssætninger. I så fald ville det være mærkeligt, at han har stillet sig tilfreds med en konvergenssætning, der kræver uniform konvergens.

Han er tilsyneladende heller ikke interesseret i den egenskab, at hans integralbegreb er mere generelt end Lebesgues i den forstand, at det kan integrere flere funktioner, ihvertfald undersøger han det ikke. Han viser kun, at det er ligeså generelt som Lebesgues. Perron nævner, at hans integralbegreb og de sætninger han viser også gælder for ubegrænsede funktioner. På baggrund af dette og Analysens Fundamentalteorem 2 kunne han have konkluderet, at hans integral faktisk kan integrere *flere* funktioner end Lebesgue-integralet, idet der findes ubegrænsede afledte som ikke er Lebesgue-integrable. Men det gør han ikke.

6 Johann Radon (1887-1956)

Formålet med det følgende er at give en kort introduktion til de første dele af Radons artikel, sådan at man kan få en fornemmelse af Radons motivation, karakteren af hans integraldefinition og de resultater han viser i sammenhæng hermed.

6.1 Kort biografi

Omdrejningspunktet i Radons videnskabelige karriere syntes at være Universitetet i Wien. Her startede han sine matematikstudier i 1905, blev 'Privatdozent' i 1914 og endelig blev han i 1949 professor efter at have varetaget adskillige professorater ved andre universiteter blandt andet i Tyskland og Østrig-Ungarn. I årene mellem 1910, hvor han færdiggjorde sine studier, og 1913 havde han flere lektorater, blandt andet på Den Tekniske Højskole i Wien. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1973, vol. XI, s. 260-261]

Radon var motiveret af både matematiske og fysiske problemstillinger, og studerede da også begge fag på universitetet. Undervejs i studierne inspireredes han til at studere reel funktionsteori og variationsregning, hvor sidstnævnte område blev emnet for en afhandling i 1910. Variationsregningen, som gav mulighed for en syntese af matematiske og fysiske områder, vedblev med at være en af hans interesseområder. [*Dictionary of Scientific Biography*, 1973, vol. XI, s. 260-261]

6.2 Radons artikel: '*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*'

I juni 1913 bringes Radons artikel '*Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*' i tidsskriftet '*Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*' [Radon, 1913]. I indledningen giver Radon en beskrivende præsentation af indholdet af artiklen med henvisninger til de arbejder af andre matematikere, der danner grundlaget for hans eget arbejde.

Radon er i dette arbejde motiveret af en artikel af David Hilbert (1862-1943) fra 1906, hvor Hilbert beskæftigede sig med integralligninger. En integralligning er en ligning på formen

$$f(y) = \int_a^b K(x, y)u(x) dx,$$

hvor $u(x)$ er den ubekendte [Kline, 1972, s. 1076]. Radon skriver, at han vil udarbejde en generel teori for de lineære integralligninger, hvor det arbejde Hilbert har lavet om integralligninger fremkommer som et specialtilfælde. [Radon, 1913, s. 1295]

Radon refererer til to artikler, som hans teori er en videreudbygning af. Den ene er en artikel af Riesz fra 1910 '*Über Systeme integrierbarer Funktionen*', hos Radon citeret som Riesz I, den anden er en artikel af Lebesgue fra 1910 '*Sur l'intégration des fonctions discontinues*' [Radon, 1913, s. 1295-1296]. Derudover henviser Radon til endnu en artikel af Riesz '*Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales*' også fra 1910, hos Radon citeret som Riesz II. Vi vil i det følgende kort opridse hvad disse tre artikler, som en del af Radons arbejde bygger på, omhandler.

I Riesz I indfører Riesz begrebet et L^p rum, som er mængden af funktioner f for hvilke der gælder, at $|f|^p$ er Lebesgue-integrabel. I artiklen beskæftiger Riesz sig blandt andet med spørgsmålet om at bestemme en funktion svarende til en given mængde af Fourier-koefficienter, og behandler integralligninger, hvor de indgående funktioner tilhører L^p . [Kline, 1972, s. 1072-1073]

Lebesgue beskæftiger sig i ovennævnte artikel med absolut kontinuerte mængdefunktioner. En mængdefunktion ν er absolut kontinuert i forhold til en mængdefunktion μ , hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at $|\nu(E)| < \epsilon$ for enhver målelig mængde E for hvilken $\mu(E) < \delta$. I artiklen viser Lebesgue, at man kan betragte det ubestemte integral som en absolut kontinuert mængdefunktion [Hawkins, 1975, s.185]. Ifølge Radon giver Lebesgue i denne artikel antydninger til den teori for mængdefunktioner, som Radon laver, men Radon begrænser sig ikke til kun at betragte de absolut kontinuerte mængdefunktioner [Radon, 1913, s. 1295].

Riesz giver i Riesz II en fremstilling gennem Stieltjes-integralet af enhver kontinuert lineær funktional for funktioner, der er kontinuerte på et interval. Riesz viser, at for enhver kontinuert lineær funktional eksisterer der en funktion g af begrænset variation¹, således at der for alle kontinuerte funktioner f , som er definerede på intervallet $[a, b]$, gælder:

$$U(f) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Dette kaldes *Riesz' repræsentationsteorem*. [Hawkins, 1975, s. 182]

Titlen på Radons artikel indikerer, at det centrale i artiklen er teorien for og anvendelsen af absolut additive mængdefunktioner. Disse mængdefunktioner er Radons generalisering af målbegrebet, som han sammen med en generalisering af integralet forbinder med teorien for kontinuerte lineære funktionaler (i Radons terminologi kaldes de funktional-operationer). Han skriver, at det er nødvendigt at indføre teorien for mængdefunktioner for at opnå den størst mulige generalitet i den teori han vil lave for integralligninger. [Radon, 1913, s. 1295]

6.3 Radons integralbegreb

Vi har valgt først at give en beskrivelse af Radons fremstilling af teorien for mængdefunktioner. Herefter følger hans generalisering af Stieltjes-integralet og den efterfølgende generalisering af dette integral, så det også omfatter Lebesgue-integralet. I nærværende gennemgang har vi undervejs støttet os til [Hawkins, 1975].

¹En funktion f er af begrænset variation på intervallet $[a, b]$, hvis der eksisterer en konstant $M \in \mathbf{R}$, således at $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$ for enhver partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ af $[a, b]$. [Hawkins, 1975, s. 200-201]

6.3.1 Generaliseringen af målbegrebet

I afhandlingens første kapitel beskæftiger Radon sig med de absolut additive mængdefunktioner. Radon giver først en definition på et 'Grundintervall', og herefter indfører han en klasse T af delmængder af dette grundinterval, som bliver definitionsområdet [definitionsbereich] for mængdefunktionerne.

Radon starter med at præcisere, at vi arbejder med punktmængder E i det n -dimensionale rum. I dette rum defineres grundintervallet J som mængden af punkter, hvis koordinater er definerede på et interval $[-M, M[$ for en vilkårlig værdi $M > 0$. Dette noteres som

$$J = \left[\begin{array}{ccc} M, & M, \dots & M \\ -M, & -M, \dots & -M \end{array} \right], \quad (6.1)$$

hvilket også kan skrives som:

$$J = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -M \leq x_i < M, i = 1, \dots, n\}.$$

På den reelle tallinje er J et almindeligt interval med længden $2M$ og i $\mathbb{R}^2$ vil J blive et kvadrat med sidelængderne $2M$ og så fremdeles.

Radon definerer nu et system T af delmængder af J , hvor følgende krav er opfyldt:

- Alle intervaller i J og hele J tilhører T .
- Hvis mængderne E_1 og E_2 tilhører T , tilhører $E_1 \cap E_2$ og $E_1 \setminus E_2$ også T .
- Er $E_1, E_2, \dots$ disjunkte mængder i T tilhører foreningsmængden $\cup_i E_i$ også T (både for endelige og tællelige foreninger).

[Radon, 1913, s. 1299] Et system af delmængder der opfylder disse krav kaldes i dag en σ -algebra. Kravet om at $E_1 \cap E_2$ skal tilhøre T hvis E_1 og E_2 tilhører T medtages normalt ikke i definitionen på en σ -algebra, da det følger af de andre krav. [Madsen, 1975]

På denne mængde af delmængder, T , definerer Radon en mængdefunktion f , som til enhver mængde i T tilordner det reelle tal $f(E)$. De mængdefunktioner, som er af interesse for Radon er dem, der er absolut additive. Absolut additivitet går på, at der for en endelig eller tællelig forening af disjunkte mængder $E_1, E_2, \dots$ i T gælder, at

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(E_i) \quad (6.2)$$

på betingelse af, at rækken på højre side konvergerer absolut. [Radon, 1913, s. 1299] En absolut additiv mængdefunktion er altså et mål, som også kan antage negative værdier.

Radon generaliserer altså målbegrebet, som indgår i integralet. Han betragter ikke én bestemt mængdefunktion, men en vilkårlig mængdefunktion, som er defineret ovenfor ved hjælp af de egenskaber man ønsker opfyldt.

6.3.2 Generaliseringen af Stieltjes' og Lebesgues integralbegreber

I andet kapitel indfører Radon de to generaliseringer af Stieltjes-integralet (se afsnit 3.3.1 for en introduktion til Stieltjes-integralet). Først generaliseres Stieltjes-integralet til flere dimensioner, og således at en funktion kan integreres med hensyn til en vilkårlig absolut additiv mængdefunktion.

Radon betragter en uniform kontinuert funktion $F(P)$ defineret på en mængde $E_0 \subseteq J$, hvor $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, og lader f være en absolut additiv mængdefunktion på E_0 . Der indføres en partition Π af E_0 . Dette resulterer i delmængderne $E_1, E_2, \dots, E_n$, hvor der fra hver delmængde E_k vælges et punkt P_k . Delmængderne er en del af systemet af mængder T , således at de tre betingelser (se ovenstående afsnit) er opfyldt. Radon betragter den endelige sum:

$$S_\Pi = \sum_{i=1}^n F(P_k) f(E_k) = \sum_{E_0} F(P) \Delta f. \quad (6.3)$$

[Radon, 1913, s. 1322] Den første sum genkendes som en slags Cauchy-sum, som den optræder i Stieltjes-integralet, generaliseret til n dimensioner, hvor $F(P_k)$ er værdien af det udvalgte punkt i E_k og $f(E_k)$ er målet af mængden E_k . Den anden sum er Radons notation for det samme [Radon, 1913, s. 1300].

Radon definerer efterfølgende, at hvis grænseværdien for summen eksisterer, når størrelsen af partitionen går mod nul, uafhængigt af partitionen, så er integralet af F med hensyn til mængdefunktionen f lig denne grænseværdi

$$\int_{E_0} F(P) df = \lim_{\Pi \rightarrow 0} \sum_{E_0} F(P) \Delta f, \quad (6.4)$$

[Radon, 1913, s. 1324] hvor vi mener han med notationen $\lim_{\Pi \rightarrow 0}$ angiver, at 'længden' af partitionen går mod nul, det vil sige at den største af værdierne $f(E_k)$ går mod nul. Radon har således generaliseret Stieltjes-integralet til $n \geq 1$ dimensioner, og til at være defineret med hensyn til en vilkårlig absolut additiv mængdefunktion.

Men Radon vil også have dette resultat kædet sammen med Lebesgues analytiske integraldefinition. I den første generalisering af Stieltjes-integralet så vi, at han først lavede en partition for derefter at vælge et vilkårligt punkt i hver delmængde. Hvis denne procedure vendes, således at værdierne (det vil sige $F(P_k)$ 'erne) vælges først og partitionen betinges heraf, opnår Radon et integral som generaliserer Lebesgue-integralet, med en vilkårlig additiv mængdefunktion på Lebesgue-målets plads.

Radon starter denne del af generaliseringen med at definere, hvad der skal menes med at en funktion $F(P)$ er målelig med hensyn til en absolut additiv mængdefunktion. Når for alle tal A mængden af punkter P , for hvilke $F(P) > A$ tilhører definitionsområdet T for mængdefunktionen f , så kaldes F målelig². [Radon, 1913, s. 1325]

²Denne definition af målelighed er ækvivalent med Lebesgues. Altså hvis mængden af punkter P for hvilke $F(P) > A$ er målelig for alle A , er dette ensbetydende med, at mængden af punkter P for hvilke $A < F(P) \leq B$ er målelig for alle tal, hvor $A < B$. Lad mængden N af punkter P for hvilke $F(P) > A$ tilhøre T for alle A , således at F er målelig. For alle tal B vil mængden M af punkter P for hvilke $F(P) > B$ også tilhøre T . For alle $A < B$ vil mængden $N \setminus M$ også tilhøre T ifølge den anden betingelse, som T skal opfylde, se afsnit 6.3.1. Og mængden $N \setminus M$ består netop af de punkter P for hvilke $A < F(P) \leq B$.

Først betragtes tilfældet, hvor f er en monoton mængdefunktion og F er en ikke-negativ funktion defineret på mængden E og målelig med hensyn til f . Radon udvider senere til situationen, hvor F kan antage negative værdier, og hvor f ikke er monoton. Vi vil her nøjes med at introducere tilfældet hvor f er en monoton mængdefunktion, og F er en vilkårlig funktion. [Radon, 1913, s. 1325-1328]

Radon indfører en '*Fundamentalreihe mit Maximaldifferenz α* '. Dette begreb dækker over en følge af tal

$$\dots, y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \dots,$$

hvor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_{-n} = -\infty,$$

og hvor

$$\sup\{d \mid d = y_{i+1} - y_i, i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \alpha.$$

Det vil sige en fundamentalrække er en partition af hele y -aksen. Herefter vælger Radon en vilkårlig fundamentalrække og definerer mængderne E_k som:

$$E_k = \{P \in E \mid y_k \leq F(P) < y_{k+1}\}. \quad (6.5)$$

Denne inddeling af punkterne P kræver ikke, at F er begrænset.

Ud fra fundamentalrækken kan han danne rækken

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k f(E_k), \quad (6.6)$$

[Radon, 1913, s. 1328] og det viser sig, at konvergens af denne række er nødvendig og tilstrækkelig for, at F er integrabel. Når F er integrabel med hensyn til f , så defineres integralet

$$\int_E F df = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k^{(n)} f(E_k^{(n)}), \quad (6.7)$$

hvor $y_k^{(n)}$ er en følge af fundamentalrækker, $y_k^{(n)} = y_k^1, y_k^2, \dots$. Til denne følge korresponderer en følge (α_n) , hvorom det antages, at $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Det vil sige at integralet af F er grænseværdien af rækken (6.6), for α gående mod nul, uafhængigt af den valgte partition. [Radon, 1913, s. 1328]

Men dette var for f monoton. For ikke-monotone mængdefunktioner siger Radon, at funktionen kan opdeles i monotone dele ϕ og ψ [Radon, 1913, s. 1303]. Er F integrabel med hensyn til disse funktioner, er F også integrabel med hensyn til f . Da defineres integralet til:

$$\int_E F df = \int_E F d\phi - \int_E F d\psi. \quad (6.8)$$

[Radon, 1913, s. 1328]

Efter at have defineret det generaliserede Stieltjes-integral og vist at det kan fortolkes i rammen af Lebesgue-integralet angiver Radon seks sætninger, hvoraf de to bevises. Blandt disse findes sætningerne om majoriseret og monoton konvergens [Radon, 1913, s. 1329-1330].

6.4 Integraler som kontinuerte lineære funktionaler

Radon definerer nu, hvad han vil forstå ved kontinuerte lineære funktionaler. Han betragter mængden af uniformt kontinuerte funktioner defineret på en begrænset og afsluttet mængde E_0 ³ (vi kalder denne mængde $C_u(E_0)$, hvor u 'et angiver at funktionerne er uniformt kontinuerte). Til hver af disse funktioner tilordnes et reelt tal $U(F)$, således at U opfylder:

$$U(F_1 + F_2) = U(F_1) + U(F_2) \quad (6.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(F_n) = U(F), \quad (6.10)$$

for to vilkårlige funktioner F_1 og F_2 tilhørende $C_u(E_0)$ og for enhver funktionsfølge F_n , som konvergerer uniformt mod F på E_0 . Radon nævner, at man herudfra let beviser, at U er lineær (men henviser dog til Riesz II for et bevis). [Radon, 1913, s. 1332] U kaldes en kontinuert lineær funktional.

Radon viser herefter sammenhængen mellem det generaliserede Stieltjes-integral (den første generalisering) og de kontinuerte lineære funktionaler på $C_u(E_0)$, nemlig at enhver kontinuert lineær funktional af en funktion F kan fremstilles som et Stieltjes-integral af F med hensyn til en mængdefunktion f :

$$U(F) = \int_{E_0} F df. \quad (6.11)$$

Dette viser Radon ved at tage udgangspunkt i en kontinuert lineær funktional og derefter konstruere en mængdefunktion f , således at sammenhængen 6.11 gælder.

Sætningen siger altså, at der for enhver lineær funktional $U : C_u(E_0) \rightarrow \mathbf{R}$ eksisterer en mængdefunktion f , således at for ethvert F i $C_u(E_0)$ er den lineære funktional $U(F)$ lig med integralet af F med hensyn til f .

Dette er en generalisering af Riesz' repræsentationsteorem for $n \geq 1$ dimensioner og for vilkårlige absolut additive mængdefunktioner.

6.5 De absolut additive mængdefunktioners integral-fremstilling

Senere i artiklen viser Radon et repræsentationsteorem, som siger at enhver absolut additiv mængdefunktion kan repræsenteres som Lebesgue-Stieltjes-integralet af en funktion med hensyn til en anden mængdefunktion [Radon, 1913, s. 1351]. Den moderne formulering lyder:

For enhver absolut additiv mængdefunktion g , der er absolut kontinuert i forhold til en anden mængdefunktion f , eksisterer der en funktion ψ , der er integrabel i forhold til f , således at

$$g(E) = \int_E \psi(P) df, \quad (6.12)$$

³Da E_0 er begrænset og afsluttet er den kompakt, hvormed enhver kontinuert funktion defineret på E_0 er uniformt kontinuert. Bemærkningen om at funktionerne skal være uniformt kontinuerte er derfor overflødig

for alle E . [Halmos, 1950, s. 129]

Radon angiver, at f skal være en basis for g , og ikke at g skal være absolut kontinuert i forhold til f . Såvidt vi kan se er disse begreber imidlertid ens; definitionen på absolut kontinuitet angav vi i afsnit 6.2, og for en basis gælder ifølge [Hawkins, 1975, s. 189]: En mængdefunktion g har f som en basis, hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at $|g(E)| < \epsilon$ når $f(E) < \delta$.

Dette repræsentationsteorem er en generalisering af Lebesgues resultat i artiklen '*Sur l'intégration des fonctions discontinues*' fra 1910 og er senere blevet kaldt Radon-Nikodym-sætningen [Hawkins, 1975, s. 189].

I indledningen skriver Radon, at de absolut additive mængdefunktioners integralfremstilling skal bruges i den generelle teori for integralligninger. Ud fra Radons bemærkninger, ser det altså ud som om, at hans motivation for at udvikle integralet primært var, at han skulle bruge det som et redskab i forbindelse med udviklingen af en generel teori for integralligninger. Dette underbygges også af titlen teori og anvendelse af absolut additive mængdefunktioner.

7 Delkonklusion

Vi har nu igennem behandlingen af artikler af Lebesgue, Radon og Perron set, at de i deres generaliseringer af integralbegrebet havde forskellige motivationer.

Som vi har set spillede Analysens Fundamentalteorem 2, og dermed stamfunktionsproblemet på forskellig vis en væsentlig rolle i forbindelse med udviklingen af både Lebesgues og Perrons integralbegreber. Lebesgues integralbegreb er funderet på opfattelsen af integralet som et areal og Lebesgues generalisering af integralet hænger altså sammen med en udredning af, hvad man skal forstå ved længde, areal, og volumen for vilkårlige mængder. Lebesgue angiver eksplicit Analysens Fundamentalteorem 2 som sin primære motivation for at udvikle integralet.

Perron er, hvis man skal dømme efter de indledende ord i hans artikel, ikke primært ude efter at løse stamfunktionsproblemet. Han er derimod, som vi har vist, ude efter en enkel definition som også bevisteknisk set er simpel. Dette kunne tolkes som, at han ikke er ude i ærindet at lave et nyt integral, men måske nærmere at forsimple et allerede eksisterende begreb, i dette tilfælde Lebesgues. Stamfunktionsproblemet bliver imidlertid centralt i Perrons integralbegreb, fordi definitionen netop er bygget op omkring bestemmelsen af en stamfunktion.

Det ser ud til, at Radons motivation for at lave en generalisering af integralet var, at han havde brug for en teoretisk afdækning af mængdefunktionerne indenfor sit arbejde med integralligninger.

Der har altså været forskellige motivationer forbundet med udviklingen af den del af integralteorien, som vi har kigget på. Dette illustrerer, som vi var inde på i indledningen, at der godt kan være flere forskellige grunde involveret i skabelsen af ny matematik. Dette gælder ikke kun, når det drejer sig om udviklingen af forskellige discipliner af matematikken, men også indenfor det samme område, som i dette tilfælde, hvor videreudvikling af det samme begreb er sket udfra flere forskellige synsvinkler og begrundelser. Dette illustrerer også, at matematikken ikke nødvendigvis udvikler sig ad en slagen vej og, at det måske først er i bagklogskabens klare lys, at én bestemt tilgangsvinkel fremtræder som den mest naturlige.

Som vi nævnte i indledningen overvejede vi på et tidspunkt at inddrage Denjoy og Henstock i vores undersøgelser, men valgte at koncentrere os om Lebesgue, Radon og Perron. Vi vil dog her kort komme med et bud på, hvad der kan have motiveret Denjoy og Henstock, udfra baggrundslæsning og overfladisk læsning af artiklerne [Denjoy, 1912b][Denjoy, 1912a][Henstock, 1966].

Denjoy præsenterer sit nye integral i 1912 i *Comptes Rendus*-noterne '*Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*' [Denjoy, 1912b] og '*Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale*' [Denjoy, 1912a]. Denjoy indfører i den første note et nyt begreb, som han kalder en *totalisation*. En totalisation af en funktion f på intervallet $[a, b]$ er en værdi,

som udregnes ved at tage udgangspunkt i Lebesgue-integralet og derefter benytte nogle, af Denjoy, opstillede regler. En funktion f defineret på et interval er Denjoy-integrabel, hvis totalisationen af f på intervallet eksisterer, og integralet er lig med totalisationen. I den anden note vises Analysens Fundamentalteorem 2 for alle afledte.

Denjoys formål er tilsyneladende at lave en udvidelse af Lebesgues integral, der løser stamfunktionsproblemet for alle afledte, hvilket også lykkes.

Henstock publicerer sit integralbegreb i 1961 i artiklen '*Definitions of Riemann Type of the Variational Integrals*' [Henstock, 1961]. Integralet benævner han i denne artikel 'The Riemann-complete integral'. I en senere artikel af Henstock, '*A Riemann-type integral of Lebesgue power*', der blev publiceret i 1966 [Henstock, 1966], gives en forenklet tilgang til integralet, samt en indledende motivation for generaliseringen af integralet. I indledningen af artiklen [Henstock, 1966] giver Henstock en beskrivelse af den måde, hvorpå integrationsbegrebet præsenteres for den studerende, hvor man som matematikstuderende først møder Riemann-integralet i Darboux's version for senere at stifte bekendtskab med Lebesgues '*more powerful theory*' [Henstock, 1966, s. 79]. Meget få studerende kommer ifølge Henstock i kontakt med det integral, som kræver færrest betingelser på de funktioner, man ønsker at integrere, nemlig Denjoy-integralet, på grund af kompleksiteten af teorien for integralet.

Det gennemgående tema i Henstocks optakt til definitionen af integralet synes at være et ønske om at konstruere et integral som i 'dybde' kan konkurrere med Lebesgues og Denjoys, men som bygger på et mere simpelt teoretisk grundlag. Med ordet 'dybde' henviser Henstock tilsyneladende til antallet af funktioner, som er integrable. Motivationen bag generaliseringen af integralet fremstår altså i artiklen som et ønske om at kunne integrere så mange funktioner som muligt samt et didaktisk ønske om at gøre tilegnelsen af integralteorien nemmere.

Her har vi således endnu to eksempler på motivationer til at generalisere integralet. Der er stor lighed mellem Denjoys motivation og Lebesgues motivation, mens Henstocks motivation er anderledes end de andre vi er stødt på. Samlet har vi altså set eksempler på seks forskellige slags motivationer, nemlig løsning af stamfunktionsproblemet, bestemmelse af arealer og overflader, integration af flere funktioner, forenkling eller oprydning indenfor integralteorien, som et redskab i udledningen af andre teorier, og endelig den didaktiske motivation.

Det er derfor ikke så underligt, at der opstår så mange integraler, idet de er udviklet i forskellige sammenhænge og med forskellige motivation.

7.1 Karakteren af vores konklusioner

Der er visse metodiske vanskeligheder forbundet med den slags undersøgelser vi har foretaget. Vi vil i sagens natur aldrig med sikkerhed kunne vide, hvad der har motiveret de matematikere vi har undersøgt.

For det første undersøger vi motivationen ad indirekte vej, ved at analysere kilderne hvori begreberne bliver publiceret for første gang. Vores udtalelser om motivation er baseret på en fortolkning af forfatterens udtalelser, og en vurdering af om disse faktisk stemmer overens med artiklernes indhold. Vores konklusioner har altså karakter af en tolkning.

Det er imidlertid kun på denne måde, vi kan få svar på vores spørgsmål om motivationen ud fra et studie af kilderne.

For det andet er det muligt, at artiklerne er skrevet udfra en konvention omkring publikationer, som går ud på, at man slører, hvordan man faktisk er kommet på sine ideer. I så fald vil vores konklusioner sige mere om, hvad der var oppe i den tid, hvor artiklerne er skrevet end om forfatterens individuelle motivation.

Endelig er det svært at undgå en vis efterrationalisering. Når man ved indenfor hvilke områder et begreb har vist sig nyttigt, så vil man muligvis være tilbøjelig til at søge en forklaring på opfinderens motivation indenfor det samme område.

Vores konklusioner kan altså kun være af typen 'det er sandsynligt at...'. Med hensyn til for eksempel Lebesgues motivation var vores konklusion, at det er sandsynligt, at han primært var motiveret af stamfunktionsproblemet. Denne påstand har vi argumenteret for på forskellig vis på baggrund af Lebesgues egne ord i afhandlingen og det han faktisk gør.

Der er forskel på karakteren af vores konklusioner om Lebesgues og Perrons motivationer, og Radons motivation. Dette skyldes forskellen i den måde vi har behandlet de tre kilder på. Med hensyn til Lebesgue og Perron er vores konklusioner mere underbyggede, idet vi i langt højere grad er gået i dybden med deres respektive artikler.

8 Generaliseringer

Vi vil nu undersøge i hvilken forstand de tre integralbegreber er generaliseringer af tidligere begreber, det vil sige hvilken karakter generaliseringerne har. I denne forbindelse vil vi rekapitulere, hvad det er for en egenskab, der generaliseres, og hvordan dette gøres. Herefter vil vi undersøge, hvilket udbytte disse generaliseringer viser sig at have, det vil sige hvilke sætninger og egenskaber opnås med det nye begreb, og hvilke går tabt. Vi har som nævnt i indledningen valgt at kalde dette generaliseringens rækkevidde.

Til slut vil vi komme med vores bud på i hvilken forstand integralerne har forskellig gennemslagskraft.

8.1 Generaliseringernes karakter

Lebesgues generalisering

Når man taler om, at Lebesgue-integralet er en generalisering af Riemann-integralet, så er det i den forstand, at der med Lebesgue-integralet bliver flere integrable funktioner, at de Riemann-integrable funktioner stadig er integrable i det nye integralbegreb, samt at integralet har den samme værdi. Men dette gælder jo kun for de begrænsede funktioner? Riemann-integralet omfatter ikke de ubegrænsede funktioner eller ubegrænsede intervaller, disse tilfælde dækkes af Cauchy-Riemann-integralet¹, som kan siges at være en generalisering af Riemann-integralet i en anden retning end Lebesgues [Munroe, 1971, s. 135]. Eksempelvis er Cauchy-Riemann-integralet af en funktion f på intervallet $[a, \infty[$ givet ved

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt. \quad (8.1)$$

For de ubegrænsede funktioner er Lebesgue-integralet ikke en generalisering af Cauchy-Riemann integralet, idet der findes ubegrænsede funktioner, som ikke er Lebesgue-integrable, men hvor Cauchy-Riemann-integralet eksisterer. For de ubegrænsede funktioner er Lebesgues integralbegreb altså et andet end Cauchy-Riemann-integralet.

Hvad er det så for en egenskab ved Riemann-integralet som Lebesgue generaliserer? Lebesgue-integralet bygger på en generalisering af målbegrebet, som gør det muligt at tillægge flere mængder et mål. Dette gøres ved at konstruere et mål, som er tælleligt additivt.

Lebesgues generalisering er således primært en udvidelse af integralbegrebet for de begrænsede funktioner, og er således en generalisering af den type, vi i indledningen betegnede type II. Som vi var kort inde på i afsnit 4.5 lægger Lebesgue i 'Leçons' op til en

¹ Disse integraler betegnes også de uegentlige integraler.

generalisering i form af en abstraktion, idet han ekstraherer de vigtige egenskaber ved et integral, det vil sige en generalisering af type I.

Radons generalisering

Radons generalisering har en anden karakter end den generalisering Lebesgue præsenterer i afhandlingen. Det er ikke en generalisering i den forstand, at der indføres et nyt integralbegreb, der udvider klassen af integrable funktioner. Med Radons arbejde generaliseres integralbegrebet.

Som vi har set starter Radon med at generalisere Stieltjes' integralbegreb, således at det giver mening at integrere med hensyn til enhver additiv mængdefunktion. Det er således målbegrebet, Radon starter med at generalisere i Stieltjes integral. Derefter generaliserer Radon dette integralbegreb på samme facon som Lebesgue generaliserer Riemanns, ved ikke længere at tage udgangspunkt i en given opdeling i delmængder af domænet, men en opdeling af funktionsværdierne, der herefter bestemmer opdelingen af domænet i delmængder. Det nye og centrale i Radons generalisering er den abstrakte definition af målet som en vilkårlig absolut additiv mængdefunktion.

Radons generalisering kan vi således karakterisere som en generalisering af type I.

Perrons generalisering

Perrons integralbegreb er en generalisering af Lebesgue-integralet i samme forstand som Lebesgue-integralet er en generalisering af Riemann-integralet. Det vil sige, at der er flere funktioner, der bliver integrable. For de begrænsede funktioner er Perrons integralbegreb ækvivalent med Lebesgues [Pesi, 1970, s. 167], mens det for de ubegrænsede funktioner er en generalisering, idet alle Lebesgue-integrable funktioner (specielt de ubegrænsede) er Perron-integrable, og det kan vises at der eksisterer ubegrænsede Perron-integrable funktioner, som ikke er Lebesgue-integrable [Gordon, 1994, s. 108 og 169]. I øvrigt er Perron-integralet også en generalisering af Riemann-integralet.

Perrons generalisering er af den samme type som Lebesgues generalisering, altså en generalisering af type II, hvor generaliseringen er en udvidelse af det begreb, der generaliseres.

8.2 Generaliseringernes rækkevidde

Det følgende afsnit er en overordnet gennemgang af den matematiske betydning integralerne har. Vi vil ikke komme ind på beviserne for de resultater vi præsenterer.

Lebesgue-integralet

Som vi har været inde på i forbindelse med vores gennemgang af Lebesgues '*Intégrale, Longueur, Aire*' så løser Lebesgue-integralet stamfunktionsproblemet for alle begrænsede afledte. Stamfunktionsproblemet løses ikke for alle ubegrænsede afledte, det vil sige Analysens Fundamentalteorem 2 gælder i Lebesgues ramme ikke for alle afledte.

Udover sætningen om begrænset konvergens, som Lebesgue viser i afhandlingen, gælder to andre konvergenssætninger indenfor rammerne af Lebesgues integralteori, henholdsvis monoton konvergens og majoriseret konvergens. Disse konvergenssætninger er af stor betydning, specielt indenfor teorien for Fourierrækker, hvor de 'sikrer' entydigheden af Fourierrækkefremstillingen for en Lebesgue-integrabel funktion.

Der er imidlertid også en anden egenskab ved Lebesgues integralbegreb, der er vigtig i forhold til teorien for Fourierrækker. Mængden af Lebesgue-integrable funktioner på en given mængde X betegnes $\mathcal{L}_1(X)$. Tilsvarende kaldes mængden af funktioner, $f: X \mapsto \mathbf{R}$ for hvilke der gælder, at $|f|^p$ ($1 \leq p < \infty$) er integrabel for $\mathcal{L}_p(X)$. Man er interesseret i at kunne definere en norm på vektorrummet $\mathcal{L}_p(X)$, og kandidaten til denne er:

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (8.2)$$

Her støder man imidlertid på et problem, idet denne definition ikke opfylder betingelsen om, at hvis normen af f er nul, så er funktionen lig med nul-funktionen. Integralet har nemlig den egenskab, at hvis $f = g$, undtagen på en mængde med Lebesgue-mål nul, så er integralet, taget over en given mængde E , ens for de to funktioner: $\int_E f dx = \int_E g dx$. Herved kan normen af en funktion blive nul, selvom funktionen er forskellig fra nul-funktionen på en mængde med mål nul.

Da $\|\cdot\|_p$ opfylder de andre krav til en norm, kan man imidlertid reparere dette 'hul' ved at indføre ækvivalensklasser, således at man i stedet betragter en mængde af ækvivalensklasser af funktioner, modulo $\mathcal{N}_p(X) = \{f \in \mathcal{L}_p(X) \mid \int |f(x)|^p dx = 0\}$.

Det vil sige ækvivalensklassen for f er:

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}_p \mid g - f \in \mathcal{N}_p(X)\}. \quad (8.3)$$

Man lader nu $L_p(X) = \mathcal{L}_p(X)/\mathcal{N}_p(X)$, det vil sige elementerne i $L_p(X)$ er de ovenfor beskrevne ækvivalensklasser $[f]$.

Defineret på denne måde er $L_p(X)$ et fuldstændigt normeret vektorrum, med de sædvanlige definitioner af addition og skalarmultiplikation af funktioner, og normen

$$\|[f]\|_p = \left(\int_E |g(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (8.4)$$

hvor g er et vilkårligt element i $[f]$. [Gohberg & Goldberg, 1981, s. 270]

Der er imidlertid et af L_p -rummene, der er specielt interessante. Det drejer sig om L_2 , der viser sig at være et Hilbertrum². Det indre produkt er defineret således:

$$\langle g, f \rangle = \int_E g(x)^* f(x) dx, \quad (8.5)$$

hvor der med $*$ angives, at g skal kompleks konjugeres. Konvergens i forhold til den norm, som det indre produkt giver anledning til kaldes *konvergens i middel*.

Det viser sig, at enhver funktion f i $L_2(X)$, kan fremstilles ved sin Fourierrække, som i *middel* konvergerer mod f . For enhver funktion $f \in L_2(X)$ kan man nemlig finde en og kun en følge af Fourierkoefficienter, således at Fourierrækken for f konvergerer i

²Et Hilbertrum er et fuldstændigt, normeret vektorrum, hvor normen stammer fra et indre produkt.

middel. Og omvendt, hvis man har en følge (c_n) af komplekse tal, så rækken $\sum_n |c_n|^2$ konvergerer, så eksisterer en funktion $f \in L_2(X)$, hvor (c_n) er Fourierkoefficienterne for f (se afsnit 3.1). Dette er i det væsentligste indholdet i Riesz-Fischers sætning. [Rudin, 1974, s. 96-97][Dym & McKean, 1972, s. 22-29]

Det er i denne forstand, at udtrykket ' $L_2(X)$ er den rette ramme for Fourier-rækker' skal forstås.

Radon-integralet

Som vi var inde på i kapitel 6 udvider Radon Riesz' repræsentationsteorem til at gælde i $\mathbf{R}^n$. Radons udgave af Riesz' repræsentationsteorem viser, at alle lineære funktionaler (på $C(\mathbf{R}^n)$) er generaliserede Stieltjes-integraler og omvendt. Derved er de integralbegreber, der er kontinuerte lineære funktionaler indeholdt i Radons integralbegreb, ihvertfald på klassen af kontinuerte funktioner i $\mathbf{R}^n$.

Med dette viser Radon, at der matematisk set ikke er nogen diskussion om hvad der er mest grundlæggende, den målteoretiske tilgang eller den funktionalanalytiske tilgang, mål og lineære funktionaler hænger nemlig sammen, således at har man et mål følger der en lineær funktional med og omvendt.

I artiklen viser Radon som sagt også en udgave af den sætning, som senere bliver kendt som Radon-Nikodyms sætning. Alle mål (absolut additive mængdefunktioner) kan således gives en integralfremstilling. Samlet kan man således betragte Riesz' repræsentationsteorem og Radon-Nikodyms sætning som et udtryk for, at et integral både kan opfattes som et mål og som en lineær funktional.

Tilsyneladende beskæftiger Radon sig også med Riesz-Fischers sætning i afhandlingen, men dette har vi ikke undersøgt nærmere.

Perron-integralet

Perrons integralbegreb løser stamfunktionsproblemet, det vil sige enhver afledt er integrabel i Perrons forstand, og det bestemte integral er tilvæksten i en stamfunktion for funktionen.

I Lebesgues integralramme gælder der, at f er integrabel hvis og kun hvis $|f|$ er det. Dette kalder man absolut integrabilitet. Perrons integraldefinition tillader imidlertid betinget konvergente integraler, det vil sige, at f kan være integrabel selvom $|f|$ ikke er det. [Munroe, 1971, s. 135]

Ved at se på Radons definition af en kontinuert lineær funktional, se afsnit 6.4, kan man overbevise sig om, at Perrons integral faktisk er en kontinuert lineær funktional, som altså svarer til et Stieltjes-integral på rummet af kontinuerte funktioner. Perron viser i sin artikel ('Satz 4'), at integralet opfylder betingelsen i udtryk (6.9), og betingelsen i udtryk (6.10) opfylder Perron-integralet gennem konvergenssætningen, som vi viste i afsnit 5.4.

At Perron-integralet er en kontinuert lineær funktional betyder (på grund af Radons udgave af Riesz' repræsentationsteorem), at der faktisk ligger et mål til grund for Perrons integralbegreb, selvom det ikke formuleres eksplicit. Målsætningen om at lave et integral uden målteori får således alene didaktisk og/eller bevisteknisk karakter.

Perrons integral på rummet af Perron-integrable funktioner svarer dog ikke til et Lebesgue-Stieltjes integral. Perron laver en anden udvidelse end den, der i Radons ramme fører til Lebesgue-Stieltjes integralet, og derved mister mængden af Perron-integrable funktioner (vi kan jo kalde den $P_1(X)$) mange af de egenskaber, der gælder for $L_1(X)$.

Dette gælder selvfølgelig også for rummet vi kan kalde $P_2(X)$, det vil sige mængden af kvadratisk Perron-integrable funktioner. Dette rum er ikke, som $L_2(X)$, et Hilbertrum, da det på grund af tilføjelsen af de ekstra funktioner ikke længere er fuldstændigt [Schechter, 2000].

Perron løser stamfunktionsproblemet for alle afledte, men må til gengæld betale med, at klassen af integrable funktioner bliver udvidet så meget, at de pæne egenskaber vi kender fra Lebesgues integral ikke længere gælder.

8.3 Delkonklusion

Vi har nu set tre eksempler på generaliseringer af de to typer, som vi opstillede i indledningen. Radons generalisering er en abstraktion og Perrons generalisering er en udvidelse. Lebesgues generalisering har elementer af begge typer, men hans tidlige arbejde, som vi har undersøgt er fortrinsvis en udvidelse. I foregående afsnit var vi inde på, at generaliseringerne udover at være af forskellig karakter også kan noget forskelligt; de har fået forskellig matematisk betydning.

Læser man om integralerne i lærebøger, bliver de forskellige generaliseringer ofte præsenteret og karakteriseret alene i forhold til deres matematiske betydning. Om Lebesgues integral kan man typisk læse udtalelser som, at man i Lebesgues integrationsbegreb kan formulere pæne sætninger for de trigonometriske rækker og at Lebesgue-integralets placering som et meget vigtigt matematisk resultat skyldes dets betydning for udviklingen af den moderne integralteori. [Strichartz, 1995, s. 626] skriver endda:

Lebesgue's theory stands at the doorway to twentieth century mathematics,
and all who enter must pass through this gate.

Om Radon siges det ligeledes, at han har haft betydning for udviklingen og specielt, at Radons abstrakte begreber har fundet anvendelse indenfor blandt andet sandsynlighedsregningen og spektralteorien. [Kline, 1972, s. 1050]

Om Radon skriver [Hawkins, 1975, s. xv]

...the fusion of the integrals of Lebesgue and Stieltjes, based as it is upon the concept of a countably additive set function, helped lay the foundations for modern abstract theories of measure and integration.

Man kan altså sige, at Lebesgues og Radons integraler har fået en gennemslagskraft, som rækker udover den sammenhæng hvori de blev udviklet og deres generaliseringer er blevet inkorporeret i og har været med til at lægge grunden for den moderne mål- og integralteori.

Med hensyn til Perron så har hans integral ikke på denne måde fået gennemslagskraft. Dette illustrerer, at integral-generaliseringernes videre skæbne ikke afhænger af den sammenhæng hvori og motivation hvormed de oprindeligt blev udviklet. Den afgøres i højere grad af den betydning og anvendelse begreberne får i matematikken.

Igennem de undersøgelser vi har lavet kan vi se, at generaliseringernes gennemslagskraft afgøres af rækkevidden og betydningen af generaliseringen. Dette er selvfølgelig ikke så mærkeligt. I vores undersøgelse viste de mest levedygtige generaliseringer sig enten at have givet anledning til anvendelser udover den sammenhæng de er udviklet i og/eller at være vigtige i forbindelse med skabelsen af et teoretisk fundament gennem abstraktion af de grundlæggende træk ved begrebet.

9 Afrunding

De tre generaliseringer vi har undersøgt adskiller sig fra hinanden på flere punkter; både med hensyn til motivationen bag udarbejdelsen af de nye integraler og i forhold til karakteren og rækkevidden af generaliseringerne. De motivationer, der ligger bag Lebesgues, Radons og Perrons arbejder har vi diskuteret i kapitel 7, og i afsnit 8.3 samlede vi op på de forskelle, der er mellem generaliseringernes gennemslagskraft. Her vil vi afslutningsvis samle trådene med hensyn til den status de generaliseringer, vi har undersøgt, har i matematikken og dens udvikling.

Lebesgue-integralet giver en løsning på stamfunktionsproblemet for begrænsede, afledte funktioner, men det er ikke her den afgørende 'force' ved dette integral ligger. Det viser sig, at integralet har stor betydning indenfor teorien for Fourierrækker, hvilket giver Lebesgues generalisering en væsentlig anvendelsesmæssig fordel. Lebesgue-integralet har imidlertid også været vigtig som et 'drivmiddel' i den matematiske udvikling. Både Perron-integralet og Radon-integralet bygger på Lebesgue-integralet, dog på to forskellige måder.

Perron-integralet har en anden status end Lebesgue-integralet. Integralet giver ikke umiddelbart anledning til anvendelse, hverken indenfor andre matematiske områder eller konkret i form af at angive en måde at konstruere stamfunktioner på. Men med løsningen af stamfunktionsproblemet for alle afledte afklarer Perron-integralet et fundamentalt problem indenfor integral- og differentialregningen. Der er dog i praksis ikke noget stort behov for at kunne integrere de ekstra funktioner, der med Perrons begreb bliver integrable. Den status Perron-integralet har i udviklingen betegner vi som et oprydningsarbejde efter Lebesgue i én bestemt retning, nemlig med hensyn til det problem Lebesgue selv var motiveret af, og på denne måde kan man betragte Lebesgue-integralet som et drivmiddel for udviklingen af Perron-integralet.

Radon-integralet har en helt anden status. Her har vi at gøre med en afdækning af det teoretiske fundament, integralregningen står på. I forbindelse med dette integral taler vi ikke om, hvor mange funktioner der bliver integrable, men om hvilken fortolkning et integral dybest set kan gives. Radons integralbegreb er en generalisering af Lebesgue-integralet; så også her ser vi, at Lebesgues integral kan opfattes som et drivmiddel i udviklingen af Radon-integralet.

Vi har således i de tre generaliseringer set fire eksempler på, hvilken status et matematisk resultat, i dette tilfælde integralbegrebet, kan have i forhold til matematikken og dens udvikling; nemlig en anvendelsesmæssig betydning, som et drivmiddel til videre matematisk udvikling, som oprydning efter andre matematiske resultater og i form af afdækning af det teoretiske fundament.

Vores motivation for at gå i gang med dette projekt var en undren over, hvorfor der er så mange forskellige integraler. Vi har nu givet et bud på, hvorfor Lebesgue-, Radon- og Perron-integralet blev udarbejdet og set seks forskellige eksempler på motivation for udviklingen af integralet. Herudover har vi set, at integralbegreberne af og til viser sig at få betydning i andre forbindelser end den sammenhæng integralet er udviklet i, og på måder som ikke har meget at gøre med det oprindelige formål. Dette illustrerer, at udviklingen foregår i et samspil mellem motivationen og den sammenhæng et begreb opstår i, og den matematiske betydning begrebet får.

Så et banalt svar på det banale spørgsmål om, hvorfor der er så mange integraler er altså, at integralerne er udviklet med forskellige formål, og kan noget forskelligt.

10 Perspektivering

Undervejs i dette projektarbejde er der opstået mange interessante spørgsmål, som vi desværre ikke har haft tid til at undersøge nærmere. Det følgende er ment som inspiration til andre, der har lyst til at give sig i kast med at undersøge den matematiske udvikling af integralbegrebet.

I forbindelse med Perrons arbejde er der flere ting, som kunne være interessante at undersøge, især fordi der ikke er skrevet særlig meget om Perron¹. Det centrale spørgsmål er, hvad Perron faktisk skal bruge sit integral til. Vi har set, at han ønsker et integral, der er mere elementært og bevisteknisk enklere end Lebesgues integralbegreb, men vi ved ikke om han har haft andre interesser end en forenkling. I 1914, hvor Perrons integral publiceres, er rækkevidden af og anvendelsesmuligheder i Lebesgues integral kendt, og det forekommer derfor mærkeligt, at Perron ikke undersøger om de vigtige egenskaber ved Lebesgue-integralet også er opfyldt for hans eget integral.

Vi har set, at definitionen af Perron-integralet er baseret på stamfunktionen, hvorved beviset for Analysens Fundamentalteorem 2 fremkommer direkte. Dette har vi tolket som, at Perron har haft en løsning af stamfunktionsproblemet for øje. Perron fremkommer med sit nye integral efter, at Denjoy har løst stamfunktionsproblemet for alle afledte, og der synes derfor ikke at være grund til at lave endnu et integral med det formål at løse stamfunktionsproblemet. Medmindre Perron ikke har kendt til Denjoys arbejde eller Perron havde ønsket et integral, der er bevisteknisk mere enkelt end Denjoys integralbegreb og ikke Lebesgues.

Forklaringen på, hvorfor Perron ikke undersøger rækkevidden af sit integral i forhold til Lebesgue-integralet (og slet ikke konkluderer på baggrund af Analysens Fundamentalteorem 2, at man med hans integral kan integrere flere funktioner) og hans manglende reference til Denjoys arbejde kan muligvis findes i det arbejde Perron laver omkring 1914, nemlig ved at undersøge, *hvad* Perron faktisk skal bruge sit integral til. Hvorfor har han brug for et integral med en mere elementær definition, og med enklere beviser?

I vores præsentation af Radons integral nævnte vi, at hans arbejde bygger på andres arbejde, fortrinsvis af Riesz og Lebesgue. [Hawkins, 1975, s. 194] mener ligefrem, at '*Radon's contribution to integration theory depended heavily upon the ideas of others*'. Vi synes det kunne være interessant at undersøge i hvor høj grad Radons arbejde kan siges at bygge på andres arbejde. Vi er ikke i vores gennemgang af litteraturen stødt på en afdækning af dette, udover den summariske behandling i [Hawkins, 1975].

Med hensyn til Lebesgue har det været bemærkelsesværdigt, at han så kort tid efter sin afhandling publicerer en artikel om integralets anvendelse indenfor teorien for Fourier-rækker, men slet ikke nævner denne anvendelsesmulighed i afhandlingen. Desværre er det umuligt at afgøre, om dette har været en bevidst prioritering fra Lebesgues side.

¹ Han findes end ikke i *Dictionary of Scientific Biography*.

Litteratur

- Birkhoff, G. & Kreyszig, E. [1984]. The Establishment of Functional Analysis, *Historia Mathematica* **11**: 258–321.
- Burkill, J. C. [1944]. Henri Lebesgue, *Journal of The London Mathematical Society* **19**(74): 56–64.
- Dalen, D. V. & Monna, A. F. [1972]. *Sets and Integration - An Outline of the Development*, Wolters-Noordhoff Publishing, The Netherlands.
- Denjoy, A. [1912a]. Calcul de la Primitive de la Fonction Dérivée la plus Générale, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **154**: 1075–78.
- Denjoy, A. [1912b]. Une Extension de l'Intégrale de M. Lebesgue, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **154**: 859–62.
- Dictionary of Scientific Biography* [1973]. Charles Scribner's Sons, New York.
- Dym, H. & McKean, H. P. [1972]. *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York.
- Frank, E. [1982]. In memoriam Oskar Perron, *Journal of Number Theory* **14**: 281–291.
- Gohberg, I. & Goldberg, S. [1981]. *Basic Operator Theory*, Birkhauser.
- Gordon, R. A. [1994]. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, USA.
- Great Soviet Encyclopedia* [1978]. Collier Macmillan Publishers, London.
- Halmos, P. R. [1950]. *Measure Theory*, 6. edn, D. Van Nostrand Company, INC., USA.
- Hawkins, T. [1975]. *Lebesgue's Theory of Integration - Its Origins and Development*, 2. edn, Chelsea Publishing Company, New York.
- Henstock, R. [1961]. Definitions of Riemann Type of the Variational Integrals, *Proceedings of the London Mathematical Society* **11**: 402–418.
- Henstock, R. [1963]. *Theory of Integration*, Butterworths Mathematical Texts, Butterworth & co., London.
- Henstock, R. [1966]. A Riemann-type Integral of Lebesgue Power, *Canadian Journal of Mathematics* **20**: 79–87.
- Henstock, R. [1988]. A Short History of Integration Theory, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics* **12**(2): 75–95.

- Kline, M. [1972]. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. 3, Oxford University Press, New York.
- Laursen, K. R. [1992]. *Aspekter af de trigonometriske rækker historie: De trigonometriske rækker udvikling indtil slutningen af 1800-tallet med hovedvægten lagt på perioden fra Riemann til du Bois-Reymond*, Master's thesis, Institut for Videnskabshistorie, Århus Universitet.
- Lebesgue, H. [1901]. Sur une Généralisation de l'Intégrale Définie, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **132**: 1025–28.
- Lebesgue, H. [1902]. Intégrale, Longueur, Aire, *Annali di Matematica pura ed applicata* **7**(3): 231–359.
- Lebesgue, H. [1903]. Sur les Séries Trigonométriques, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **20**(3): 453–485.
- Logan, J. D. [1998]. *Applied Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- Lützen, J. [1978]. Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet, *Nordisk Matematisk Tidsskrift* **25-26**.
- Madsen, T. G. [1975]. *Mål- og Integralteori*, Forelæsningsnoter fra Københavns Universitets Matematiske Institut. Notetryk 0780/120.
- Munroe, M. E. [1971]. *Measure and Integration*, 2 edn, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA.
- Perron, O. [1914]. Über den Integralbegriff, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Mat.-Naturv. K. Berlin A.* **16**: 1–16.
- Pesin, I. N. [1970]. *Classical and Modern Integration Theories*, Academic Press, INC., New York, USA.
- Radon, J. [1913]. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Sitzungsberichte. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse / Österreichische Akademie der Wissenschaften. Wien IIa* **122**: 1295–1438.
- Royden, H. L. [1988]. *Real Analysis*, 3. edn, Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA.
- Rudin, W. [1974]. *Real and Complex analysis*, 2 edn, McGraw-Hill, Inc., USA.
- Schechter, E. [2000]. An Introduction to the Gauge Integral, <http://math.vanderbilt.edu/schechter/ccc/gauge/>.
- Strichartz, R. S. [1995]. *The Way of Analysis*, Jones and Bartlett Publishers, INC., USA.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: <http://mmf.ruc.dk> eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialrapport af: Sine Korremann
Vejleder: Dorte Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss
- 342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND
AND SUPPLY
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTTELSE
AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

- 344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen
- 345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen
- 346/98 Klyngedannelse i en hukatode-forsøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
- 347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact
assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen
- 349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i
arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
- 350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter tekstene 3/78, 261/93 og 322/96
- 351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss
- 352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen
- 353/98 Problemløsning og modellering i en almindende matematikundervisning
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen
- 354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom
- 355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

- 356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K. W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
-
- 359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meiborn)
- 360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tine Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhard Booss-Bavnbek, Kenro Furutani
- 362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspring af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campbell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen
- 364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjølrup
- 365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege
- 366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX
og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

- 367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhard Booss-Bavnbek
- 368/99 Kvarterrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen
- 370/99 OPGAVERSAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter tekst nr. 350/98
- 371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss
- 372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen
- 373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhard Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki
- 374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen
- 375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik
- 376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder
- 377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen
-
- 378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and thermal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

- 379/00
EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjeseesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 380/00
MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumentrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det kardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3. moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen
- 381/00
Matematikviden og teknologiske kompetencer hos korthundede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege
- 382/00
Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen
- 383/00
Beviser i matematik
af: Anne K.S. Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss
- 384/00
Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre
- 385/00
The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski
- 386/00
Neutrale mandatfordelingsmetoder - en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 387/00
A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 388/00
Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen
- 389/00
University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen
- 390/01
SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System[®]: Thomas Engberg Pedersen[®], Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2[®]: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyse[®]: Kaj Jørgensen, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Enk Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen[®], Bent Sørensen[®]
Indtil 1/1-2000 Elkraft, [®] fra 1/5-2000 Cowi Consult
Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, [®] fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram
- 391/01
Matematisk modelleringskompetence - et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inan Castella, Jan Lauridsen, Maria Gatzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 392/01
"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.
- 393/01
Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 394/01
"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.
- 395/01
Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege
- 396/01
2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

- 397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorte Posselt
- 398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt
- 399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss
- 400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen
- 401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen
- 402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen