TEKST NR 362 1999

# Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen

En videnskabsfagsprojekt-rapport af:
Martin Niss

Vejleder:
Mogens Nørgaard Olesen (1. semester)

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

Er matematik en naturvidenskab - en udspænding af diskussionen

En matematik videnskabsfagsprojekt-rapport af:
Martin Niss

Vejleder:
Mogens Nørgaard Olesen (1. semester)

IMFUFA tekst nr. 362/99, RUC. 84 sider. ISSN 0106-6242

## ABSTRACT

Dette er en revidering af en videnskabsfagsprojekt-rapport udarbejdet fra sommeren 1997 til sommeren 1998 på matematikoverbygningen på RUC. Rapporten er en undersøgelse af om matematik er en naturvidenskab eller ej, men diskussionen af dette spørgsmål forsøges ikke afklaret én gang for alle. I stedet bliver der givet et bud på en udspænding af diskussionens centrale spørgsmål, som består af to hovedtyper. For det første er der spørgsmål om matematikkens natur: Er naturen kilde til de matematiske begreber og kommer matematikken med udsagn om den fysiske virkelighed, herunder hvorfor matematik er et effektivt redskab indenfor naturvidenskaberne. For det andet er der spørgsmålet om matematikkens udvikling er forskellig fra naturvidenskabernes, både hvad angår interne og eksterne faktorers betydning for udviklingen. Udover denne diskussionsbeskrivelse indeholder rapporten en beskrivelse af nogle af de væsentligste positioner indenfor matematikkens filosofi, og deres svar på spørgsmålene til matematikkens natur. Endelige beskrives nogle af de indvendinger som er fremført mod den traditionelle opfattelse af at matematikken og naturvidenskaberne udvikler sig forskelligt.

# Forord

Dette er i alt væsentligt en 2. modul-projektrapport af videnskabsfagsvarianten på matematik-overbygningen på Roskilde Universitetscenter. Projektet blev udarbejdet fra sommeren 1997 til sommeren 1998. Jeg har valgt at lave det til en IMFUFA-tekst af to grunde; dels fordi undersøgelsen indeholder nogle resultater som jeg tror kan være interessante for andre, men vigtigere fordi projektet er en særlig variant af videnskabsfagsprojekttypen. Mit videnskabsfagsprojekt er særligt fordi målet i højere grad har været "alene" at udrede hvad diskussion går ud på, end i mere snæver forstand at svare endegyldigt på et spørgsmål (om matematik er en naturvidenskab).

En tak til Mogens Nørgaard Olesen for vejledning i det første af de to semestre projektet har varet, til Cayley-gruppen for eminent midtvejsevaluering, til Johnny Ottesen og min bror, Henning Niss, for at læse rapporten igennem og komme med gode råd og kommentarer, og til min far, Mogens Niss, for væsentlige råd undervejs i processen.

Martin Niss
IMFUFA, Roskilde Universitetscenter
Januar 1999

# Indhold

**Forord** i

**1 Indledning** 1
1.1 Problemformulering . . . . . 2
1.1.1 Hvad er mit bidrag? . . . . . 2
1.1.2 Debattens overordnede struktur . . . . . 3
1.2 Matematisk praksis . . . . . 4
1.2.1 Grundlagskrisen . . . . . 4
1.2.2 Relevansen af matematisk praksis . . . . . 5
1.2.3 Hvad er matematisk praksis? . . . . . 6
1.3 Hvad er naturvidenskab? . . . . . 7
1.4 Rapportens opbygning . . . . . 8

**2 Udspænding af diskussionen** 9
2.1 Ontologiske og erkendelsesteoretiske spørgsmål . . . . . 9
2.1.1 Naturen som kilde til matematiske begreber . . . . . 9
2.1.2 Matematiske sætningers udsagn om verden . . . . . 11
2.2 Matematikkens udvikling . . . . . 11
2.2.1 Interne aspekter i matematikkens udvikling . . . . . 12
2.2.2 Eksterne aspekter i matematikkens udvikling . . . . . 14
2.3 Hvilke krav kan man på forhånd stille til debatten? . . . . . 15
2.3.1 Hvor har jeg lagt vægten? . . . . . 17

**3 Positioner** 19
3.1 Formalisme . . . . . 19
3.2 Konstruktivisme . . . . . 22
3.3 Realisme . . . . . 24
3.3.1 Platonisme . . . . . 26
3.3.2 Ikke-platonisk realisme . . . . . 29
3.4 Et eksempel som illustrerer forskellen mellem disse tre positioner 30
3.5 Konceptualisme . . . . . 31
3.5.1 Konventionalisme . . . . . 31
3.6 Matematisk empirisme . . . . . 35

3.7 Naturalisme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
3.8 Et eksempel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

4 **Diskussion** **45**
4.1 Er naturen kilde til matematiske begreber? . . . . . . . . . . 45
4.2 Kommer matematikken med udsagn om den fysiske virkelighed? 48
4.3 Hvorfor er matematik et effektivt redskab? . . . . . . . . . . . 49
4.4 Hvorfor er matematiske ræsonnementer effektive? . . . . . . . 50
4.5 Matematiske sætningers sandhedsværdi . . . . . . . . . . . . . 53
4.6 En kritik af empirisiske og naturalistiske matematikfilosofier . 54

5 **Indre aspekter i matematikkens udvikling** **55**
5.1 Bidrager observationer til matematikkens udvikling? . . . . . 55
5.2 Den matematiske metode . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
5.2.1 Euklidiske og kvasi-empiriske teorier . . . . . . . . . . 56
5.2.2 Matematik er kvasi-empirisk . . . . . . . . . . . . . . . 58
5.2.3 'Potentielle falsifikatorer' i matematik . . . . . . . . . 59
5.3 Er matematisk viden sikker? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
5.4 Kumulativitet . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
5.4.1 Er matematikken kumulativ? . . . . . . . . . . . . . . 63
5.4.2 Er der forskel mellem matematik og naturvidenskab på dette punkt? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
5.5 Opsummering af spørgsmål om matematikkens udvikling . . . 65

6 **Konklusion og perspektivering** **67**
6.1 Konklusion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
6.2 Perspektivering . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

7 **Referenceliste** **69**

# Kapitel 1

# Indledning

I nogle sammenhænge går matematik for at være en naturvidenskab, f.eks. er matematik tilknyttet den Naturvidenskabelige Basisuddannelse på RUC, mens den i andre sammenhænge ikke går for at være det. Under opslaget *Naturvidenskab* står der i Politikens filosofileksikon "[Naturvidenskab] er på den ene side afgrænset i forhold til matematik og andre *formalvidenskaber*..." (s. 309)

Hvis man vender sig mod matematikken selv, forstår man hvorfor to så forskellige opfattelser kan leve side om side. Her kan man genfinde træk som fra en umiddelbar betragtning virker umiskendeligt naturvidenskabelige. Det virker nærliggende at påstå at det matematiske begreb en cirkel på en eller anden måde er skabt udfra cirkelformede objekter i virkeligheden, på samme måde som f.eks. begrebet krystal er abstraheret fra de forskellige typer af krystaller man finder i naturen. Krystallografien beskæftiger sig med krystaller, dvs. kortlægger de forskellige krystaltyper, beskriver deres egenskaber osv. Desuden opstilles teorier for krystallers egenskaber som kan testes på virkelighedens krystaller. Dette er to væsentlige træk ved naturvidenskaberne: deres begreber er på en eller anden måde afledt af naturen og de kommer med udsagn om den fysiske verden. Er euklidisk geometri på samme måde en naturvidenskab om de geometriske objekter som trekanter, cirkler osv., der eksisterer i den fysiske virkelighed, for den kommer jo med udsagn af typen: vinkelsummen i en trekant er 180°? Den franske matematiker Charles Hermite (1822-1901) har i et brev til Stieltjes (1856-1894), som ligeledes var matematiker, udtrykt noget tilsvarende med hensyn til tal og funktioner:

> I believe that the numbers and functions of analysis are not the arbitrary product of our minds; I believe that they exist outside of us with the same character of necessity as the objects of the objective reality; and we find or discover them and study them as do the phycisists, chemist and zoologist. (Citeret i Kline (1980), s. 322).

På den anden side virker det ikke som om positive definite matricer, for nu at tage et eksempel, i særlig høj grad hverken er direkte afledt af eller i sig selv kommer med udsagn om virkeligheden. At de indgår i fysiske teoriers beskrivelse af naturen mener jeg ikke ændrer ved at deres forhold til naturen ikke er direkte. Nogle matematikere har givet udtryk for at matematikken har træk som er væsenforskellig fra naturvidenskaberne. William Rowan Hamilton (1805-65) skriver f.eks. :

> Those purely mathematical sciences of algebra and geometry are sciences of the pure reason, deriving no weight and assistance from experiment, and isolated or at least isolable from all outward and accidental phenomena. (Hamilton i Kline (1980), s. 321)

## 1.1 Problemformulering

Vi står altså i en situation hvor der kan siges for og imod, dels at matematikken har naturvidenskabelige træk og dels at nogle dele af matematikken opfører sig som naturvidenskab, mens andre ikke gør det. Det er dette problem jeg gerne ville undersøge med dette projekt, som derfor er centreret om problemfeltet: i hvilke henseender og i hvilket omfang kan matematik kaldes en naturvidenskab? Af tidsmæssige årsager har jeg overhovedet ikke forsøgt at kortlægge matematikken i et omfang som gør det muligt at besvare det andet spørgsmål, så jeg har koncentreret mig om det første spørgsmål. Min **problemformulering** er derfor

"I hvilke henseender kan matematik kaldes en naturvidenskab?"

### 1.1.1 Hvad er mit bidrag?

Diskussionen af matematikkens natur går tilbage til tiden før Platon (ca. 428/427-348/347 f.v.t.), og den er langt fra afklaret endnu. Benacerraf og Putnam (1983) skriver ligefrem, at det er denne uafklarethed som gør matematikkens filosofi så spændende. Dette betyder at jeg ville begå noget nær hybris hvis jeg forestillede mig, at jeg kunne afklare matematikkens filosofi, eller dele af den, i et snuptag af to semestre, som mit projekt har varet. Jeg har derfor ikke haft ambitioner om at afgøre én gang for alle om matematik er en naturvidenskab eller ej, men har slået mig til tåls med en udredning af debatten. At der rent faktisk er et arbejde i denne udredning, vil jeg gerne argumentere for.

Der er skrevet mange bøger om matematikkens filosofi, som redegør for de mange holdninger der findes til forskellige spørgsmål indenfor det område, så man skulle tro at der eksisterer bøger om dette problem. Det er muligt at der gør dette, men jeg er ikke stødt på dem. Det tætteste man kommer på en sådan bog er måske Ole Skovsmoses *Ud over matematikken*, som beskriver en del af de filosofiske positioner. Den er dog ikke særligt fokuseret på at systematisere hvilke spørgsmål debatten om matematikken i forhold til naturvidenskaberne består af. Dette betyder at der er et behov for at udrede debattens centrale spørgsmål.

Der findes mange forskellige matematikfilosofiske positioner som undersøger en hel vifte af spørgsmål; spørgsmål om matematisk sandhed, hvordan vi opnår matematisk viden m.m. I fremstillinger af en stor del af disse positioner, tages der sjældent direkte stilling til om matematik er en naturvidenskab eller ej. Jeg mener derfor at en udredning af disse positioners holdning til de væsentlige spørgsmål i debatten er påkrævet.

Jeg ser således mit bidrag til debatten som todelt; for det første giver jeg mit bud på en udspænding af hvilke spørgsmål den består af og for det andet undersøger jeg hvad der fornuftigvis kan siges og er blevet sagt om disse spørgsmål. Dette skal ikke være en total kortlægning af hvad filosoffer og matematikere har sagt fra de gamle grækere til nu, men et forsøg på at beskrive nogle af hovedstrømningerne.

### 1.1.2 Debattens overordnede struktur

Der er to observationer som er centrale i en afvisning af at matematik er en naturvidenskab. For det første kan man få det indtryk at store dele af matematikken intet har at gøre med den fysiske virkelighed, fordi de er meget abstrakte, så påstanden er at matematiske begreber ikke er opstået ud fra den fysiske verden. For det andet fremtræder matematikken som en videnskab hvis udvikling adskiller sig fra naturvidenskabernes, fordi det både virker som om naturen ikke spiller nogen rolle i denne udvikling og som om matematisk viden hele tiden ophobes uden at der sker markante brud. Rigtigheden af den første observation har været draget i tvivl længe, mens den anden har haft status af kendsgerning. Denne status er der siden 1960'erne sat spørgsmålstegn ved. Dette gør at jeg mener at to spørgsmål er de centrale i debatten om matematik er en naturvidenskab, nemlig:

- Er naturen på en eller anden måde kilde til de matematiske begreber og studeres matematiske objekter på samme måde af matematikerne som naturvidenskabsfolk studerer deres objekter?

- Udvikler matematikken sig på samme måde som naturvidenskaberne?

Disse to spørgsmål har jeg valgt at bruge til en overordnet opdeling af debatten, men man kunne foretage andre opdelinger.

Det første spørgsmål tror jeg alle vil mene er relevant for reflektioner over matematikken. Det andet spørgsmål vil derimod af mange, især for nogle år siden, blive forkastet som irrelevant, fordi refleksioner over matematikken alene skal tage udgangspunkt i de matematiske teorier som færdige formelle produkter, og ikke i deres tilblivelsehistorie.

## 1.2 Matematisk praksis

Det er altså nødvendigt at argumentere for relevansen af at inddrage udviklingsmæssige spørgsmål i tanker om matematikken, hvilket er en del af et større projekt som går ud på at få anerkendt relevansen af den såkaldte *matematisk praksis* i matematikkens filosofi. Udover at argumentere for denne relevans, sætter dette afsnit diskussionen om matematik er en naturvidenskab i relation til en mere generel diskussion om matematikkens natur. Desuden tjener afsnittet til at introducere vigtige begreber.

### 1.2.1 Grundlagskrisen

Traditionelt har matematikkens filosofi beskæftiget sig med at skabe et sikkert fundament for matematikken. Grunden til at dette har været opfattet som nødvendigt, er den såkaldte grundlagskrise i matematikken. Det følgende er et sammenkog af beskrivelsen i Davis og Hersh (1981) om denne krise.

I forrige århundrede oplevede matematikken forskellige 'katastrofer'. Indtil dette århundrede var der kun én geometri, nemlig euklidisk geometri, og den blev opfattet som en beskrivelse af rummets egenskaber. Men János Bolyai (1802-1860) og Nikolai Ivanovich Lobatjevski (1793-1856) beskrev i 1829, uafhængigt af hinanden, geometrier hvor Euklids parallelpostulat ikke er opfyldt, dvs. ikke-euklidiske geometrier. En værre krise var analysens 'overhaling' af geometrisk intuition ved at man fandt kurver som fylder rummet (Peanos kurve er kontinuert og går igennem ethvert punkt i enhedskvadratet) og funktioner som er kontinuerte, men intetsteds differentiable (Weierstrass' funktion). Disse bemærkelsesværdige resultater viste sårbarheden af det solide fundament som det mentes at matematikken byggede på.

Ført af Weierstrass (1815-1897) og Dedekind (1831-1916) gik matematikerne fra geometrien over til aritmetikken som grundlaget for matematik. Dette betød i realiteten at mængdelæren kom til at udgøre grundlaget for matematikken, fordi det blev vist at aritmetikken kunne dannes ud fra mængder. For at vise at aritmetikken kunne danne grundlag for matematikken, var det nødvendigt med en konstruktiv opbygning af det reelle talsystem udfra de naturlige tal. Dette blev gjort på forskellig måde af Dedekind, Cantor (1845-1918) og Weierstrass, men de brugte alle uendelige mængder af rationale tal (som kan opbygges fra de naturlige tal. For at reducere matematisk analyse og geometri til aritmetik, introducerede man altså mængder i matematikkens grundlag og mængdelæren blev det vigtigste område for studier i matematikkens filosofi.

Men dette nye grundlag for matematikken oplevede paradokser. Man mente at enhver fornuftig egenskab kunne bruges til at beskrive en mængde, nemlig således at et element er med i mængden hvis og kun hvis elementet har denne egenskab. Men så opstår ubehageligheder som Russells paradoks, hvor man bruger egenskaben 'er ikke element i sig selv' til at danne mængden af elementer som har denne egenskab. Men er mængden et element i sig selv? Dette viste at det nye grundlag for matematikken, i stedet for være mere sikker end grundlaget for klassisk matematik, snarere oplevede større problemer end geometri og aritmetik.

Traditionelt har matematikkens filosofi drejet sig om sådanne grundlagsproblemer for matematikken, og hvad man kunne kalde grundlagsisme (fra engelsk *foundationism*), dvs. forsøg på at etablere en ubetvivlelig basis for matematikken, har domineret matematikkens filosofi i det tyvende århundrede.

### 1.2.2 Relevansen af matematisk praksis

I slutningen af vort århundrede er grundlagsismens position som dominerende program indenfor matematikkens filosofi blevet udfordret. Thomas Tymoczko skriver:

> The last few decades have witnessed a growing dissatisfaction with the foundations approaches to mathematics. There are powerful limitations, often in the form of mathematical theorems, that each foundationalist approach has come up against. We are no nearer to the correct foundations today than we were a century ago. The same basic arguments and objections can be repeated at ever higher levels of abstraction. Moreover, close analysis has revealed certain key assumptions behind foundationalism that seemed obvious to its original proponents but seem much more implausible to us today. (Tymozcko, 1985, s. xv)

Ovenstående citat er hentet fra en bog Tymoczko er redaktør af og som bærer den karakteristiske titel 'New directions in the philosophy of mathematics'. Det er en samling artikler af filosoffer, matematikere, logikere og dataloger, som udover at argumentere for at grundlagstilgangen til matematikkens filosofi ikke er tilstrækkelig, argumentere for at *matematikernes faktiske praksis* skal være udgangspunkt for refleksioner over matematikkens filosofi. Tymoczko skriver:

> It is the practice of mathematics that gives rise to any philosophical perplexities we might have about mathematics and the practice that holds the key to any solutions we might obtain. (Tymoczko (1985), s. 125)

Det er vigtigt at understrege at selvom mange af citaterne er hentet fra Tymoczko, er det ikke kun ham der mener at fokus i højere grad skal rettes mod matematisk praksis. Lakatos og Putnam (Tymoczko (1985)) har navngivet sådanne matematikfilosofier, som mener det er relevant at inddrage matematisk praksis, for kvasi-empirisme.

### 1.2.3 Hvad er matematisk praksis?

Tymoczko nævner at følgende træk ved matematikken i store træk hidtil er blevet ignoreret i matematikkens filosofi: uformelle beviser, den historiske udvikling, muligheden for matematiske fejl, matematiske forklaringer (i modsætning til beviser), kommunikation mellem matematikere, brugen af computere i matematik m.m. Ifølge Tymoczko vil folk som mener at matematikkens filosofi er identisk med grundlagsundersøgelser, ignorere sådanne aspekter fordi de fortolker matematisk praksis i termer af grundlag. For dem er matematisk aktivitet i alt væsentligt afdækningen af sandheder om mængder, verificering af formelle beviser eller andre grundlagsafklaringer. Tymoczko's pointe er altså at dette er forkert, for hvis en beskrivelse af matematik skal være en acceptable redegørelse, må den kunne redegøre for *faktisk* matematisk praksis, dvs. aspekter som matematisk forklaringer, udvikling, osv., ellers redegør den simpelthen ikke for matematik.

Davis og Hersh er inde på noget af det samme i deres skelnen mellem virkelig og formel matematik. De taler om fejlen ved at identificere matematik i sig selv (hvad virkelige matematikere gør i det virkelige liv) med dens model eller repræsentation i formel matematik. De fortsætter:

> On the one side, we have real mathematics, with proof which are established "by consensus of the qualified". A real proof is not checkable by a machine, or even by any mathematician not privy to the gestalt, the mode of thought of the particular field of mathematics in which the proof is located. Even to the "qualified reader," there are normally differences of opinion as to whether a real proof (i.e., one that is actually spoken or written down) is complete or correct. (Davis & Hersh (1981), s. 354)

På den anden side har vi den formelle teori, hvor et bevis kan tjekkes af en computer. Et af de vigtigste begreber i matematisk praksis er sådanne uformelle eller faktiske beviser. Tymoczko føjer til Davis og Hersh' beskrivelse af faktiske beviser, en påpegning af at faktiske beviser er del af en kontinuert proces som starter med plausibilitetsargumenter for gisninger, forfiner disse til uformelle beviser, for endelig at teste de sætninger som fremkommer på denne måde og til sidst assimilere dem i matematikken. Dette betyder at hvis man vil forstå matematikken, må man forstå hvordan matematikken vokser og ændrer sig.

Dette synspunkt er i skarp kontrast til den position som kaldes *formalisme*. Ifølge formalismen er der ingen matematiske objekter, og matematik består alene af aksiomer, definitioner og sætninger, kort sagt formler. Indenfor denne opfattelse af matematik er den uformelle teori ikke matematik, så matematikken er endnu ikke kommet igang med den uformelle teori. Hvor matematikken begynder for formalisterne, stopper den ifølge folk som Davis, Hersh og Tymoczko. Desuden er det ifølge formalismen ikke relevant for forståelsen af en matematisk teori at inddrage dens udvikling fra de første gisninger til den uformelle teori. Ifølge Davis og Hersh (1981) er de fleste matematikere platonister (dvs. mener at matematikkens objekter er abstrakte og har en eksistens uafhængig af vores erkendelse af den) til hverdag og formalister om søndagen. De citerer matematikeren Dieudonné (f. 1906-) for at matematikerne i deres arbejde tænker som platonister, men giver formalistiske svar på filosoffernes spørgsmål om matematik.

Hvis man valgte alene at inddrage det formelle slutprodukt i en undersøgelse af matematikken, ville man allerede have valgt side i debatten, fordi dette ville skære de dele væk som ikke-formalister argumenterer udfra. På den anden side har man tilsvarende valgt side hvis man inddrager dem. Jeg har dog valgt at inddrage sådanne aspekter, fordi jeg gerne vil undersøge om matematik som menneskelig *aktivitet* adskiller sig fra naturvidenskaberne, ikke bare om det matematiske produkt adskiller sig.

## 1.3 Hvad er naturvidenskab?

Jeg vil betragte naturvidenskab som de traditionelle naturvidenskaber som fysik, kemi, biologi, geologi og naturgeografi. Disse er ret forskellige discipliner hvad angår genstandsområde, mål, metoder og struktur mm. Det vil føre for vidt at beskrive alle forskellene, men udover de forskellige genstandsområder, er det mest iøjenfaldende vel at nogle er meget deskriptive og systematiserende, men kun i lille udstrækning er ude på at bygge teorier, mens det omvendte er tilfældet for andre. Desuden er der en forskel i hvor formel teoriopbygningen er og i hvor høj grad eksperimenter anvendes. Fælles for dem alle er den styrende rolle naturen har, både som leverandør af beskrivelseobjekter og som højeste dommer i forhold til teoriernes accept.

Der er dele af nutidig teoretisk fysik, såsom superstrengsteorier, som er så langt fra naturen, at det er svært at påstå at naturen i realiteten fungerer som dommer og hvor grænsen mellem fysik og matematik er temmelig udvisket. Spørgsmålet er her det omvendte af det jeg vil undersøge: Er teoretisk fysik i virkeligheden matematik? Hvis disse dele af fysikken tages med i betragtning, er diskussionen således nærmest afgjort. Jeg vil derfor ikke tage de mest teoretiske dele af fysikken med i min undersøgelse, så når jeg i det følgende omtaler naturvidenskab, er de ikke medregnet.

Der hersker stor uenighed om videnskabsteoretiske spørgsmål om naturvidenskaberne; spørgsmål om hvad deres natur er, hvordan de udvikler sig, herunder sociologiske aspekter af deres udvikling. Som det fremgår af det ovenstående, er det netop i forbindelse med sådanne spørgsmål, jeg gerne vil undersøge om der er lighedspunkter mellem matematikken og naturvidenskaberne. Denne uafklarethed indenfor naturvidenskabernes teori giver fra starten en tilsvarende usikkerhed i forbindelse med mine konklusioner, fordi en påstand om et lighedspunkt kræver at man mener at det er et træk ved en eller flere naturvidenskaber. Jeg har valgt at forholde mig pragmatisk til dette faktum om uafklarethed, idet jeg blot ønsker at konkludere at man i matematikken kan se træk, som man nok også kan se indenfor naturvidenskaberne.

## 1.4 Rapportens opbygning

I næste kapitel udspændes diskussionen, dvs. det beskrives hvilke spørgsmål der er relevante for den. Der er to forskellige spørgsmålstyper, ontologiske og erkendelsesteoretiske på den ene side og spørgsmål til matematikkens udvikling på den anden side. De svar der er givet på disse spørgsmål er henvist til kapitel fire, men kapitel to indeholder en kort beskrivelse af nogle af de besvarelser på spørgsmål angående eksterne aspekter af matematikkens udvikling. Disse spørgsmål er dem jeg har beskæftiget mig mindst med, så en opdeling over to kapitler ville være overflødig. Kapitel tre er en kort beskrivelse af de positioner som jeg mener er de vigtigste og som har taget stilling til matematikkens natur: formalisme, konstrukturalisme, konceptualisme, realisme, empirisme og naturalisme. Dernæst følger et kapitel hvor de forskellige positioner svarer på de spørgsmål som er opstillet i kapitel to, enten som et referat af deres svar eller en beskrivelse af hvad jeg tror de kunne svare. Kapitel fem indeholder en beskrivelse af den kritik der er kommet af påstanden om at matematikkens og naturvidenskaberns udvikling er væsensforskellig. Kapitel seks indeholder en konklusion og en perspektivering.

Mit bidrag er ikke en afklaring af spørgsmålet om matematik er en naturvidenskab eller ej, men dels en udredning af hvad dette spørgsmål dækker over, dels en beskrivelse af de vigtigste positioners svar, enten i form af hvad de rent faktisk har svaret eller hvad de kunne svare.

# Kapitel 2

# Udspænding af diskussionen

Det følgende er et forsøg på at strukturere diskussionen af om matematik er en naturvidenskab, ved en beskrivelse af de vigtigste spørgsmål der kan stilles.

## 2.1 Ontologiske og erkendelsesteoretiske spørgsmål

Ontologi er studiet af hvad der er, dvs. hvilken virkelighed man kan tilskrive objekter: hvor eksisterer de, eksisterer de med nødvendighed osv. Erkendelsesteori (eller epistemologi som bruges i samme betydning) er studiet af hvad vi kan vide om verden og hvordan vi kommer til at vide det.

Matematikken kan opfattes som bestående af objekter eller entiteter, f.eks. mængder, tal og funktioner, og matematikken går ud på at opstille sætninger som afdækker entiteternes egenskaber og indbyrdes relationer. Til at bevise disse sætninger benyttes en række ræsonnementer, hvis karakter diskuteres af matematikere og filosoffer. Disse tre komponenter, entiteter, sætninger og beviser, altså de matematiske teorier, vil jeg kalde produktet matematik.

Det er fornuftigt at trække en skillelinie mellem realister, som påstår at de objekter som matematiske begreber er dannet udfra, eksisterer uafhængigt at vores erkendelse af dem og ikke-realister som mener at matematiske objekter ikke har anden eksistens end i vores matematiske begreber som er indeni vore hoveder, dvs. det er overflødigt at skelne mellem matematiske objekter og matematiske begreber. En anden måde at beskrive forskellen mellem de to positionstyper er at påpege at realisterne mener at matematikken er opdaget, mens ikke-realisterne mener at matematikken er opfundet.

### 2.1.1 Naturen som kilde til matematiske begreber

Naturvidenskaberne beskæftiger sig som bekendt med naturen, og en stor del af naturvidenskabens begreber er afspejlinger af objekter som findes i naturen[1] Det er objekter som gener, elektroner, krystaller, væsker, osv., dvs. objekter vi har forskellig form for adgang til, men hvis fællestræk er at de eksisterer i naturen. Andre naturvidenskabelige begreber afspejler ikke på samme måde objekter som eksisterer i naturen, f.eks. entropi og energi, som mere har status af teoretiske hjælpestørrelser. Jeg har tidligere nævnt at det er besnærende at mene at de cirkler som forekommer i naturen er kilde til det matematiske begreb en cirkel indenfor geometrien. Det er derfor naturligt at stille følgende spørgsmål: På hvilke måder, hvis nogen, er naturen en kilde til de matematiske begreber? og hvor mange af matematikkens begreber er skabt på baggrund af naturen?

Euklidisk geometri indeholder dels nogle grundlæggende aksiomer for hvad man skal forstå ved begreber som punkter, linier osv., dels nogle definitioner af begreber udfra disse aksiomer, f.eks. definitionen af cirkel. Naturen kan være kilde til begrebsdannelsen på begge niveauer. Spørgsmålene ovenfor kan altså præciseres: På hvilke måder, hvis nogen, er naturen kilde til aksiomerne og definitionerne indenfor de matematiske teorier? og hvor mange af aksiomerne og definitionerne er skabt på baggrund af naturen?

Lad os starte med de positioner som mener at naturen ikke er kilde til matematiske begreber. Nogle realister holder på at matematiske objekter er abstrakte objekter som eksisterer i en virkelighed som er væsensforskellig fra den fysiske virkelighed. Dette synspunkt går under navnet platonisme i debatten. Indenfor de positioner som mener at matematikken er en opfindelse, er der nogle der mener at den matematiske virkelighed er en mental konstruktion, konstruktivisterne, mens andre mener at begreberne er konventioner, konventionalisterne. Men hvis matematikken er opfundet, hvordan dannes begreberne så? Er det konventioner som vi har vedtaget eller er de nødvendige betingelser for vores måde at anskue verdenen på?

Vi går nu over til positioner som mener at naturen er kilde til matematiske begreber. Man kan være realist og mene at matematiske objekter eksisterer i naturen, på to måder. Man kan mene at matematiske objekter har samme type eksistens som borde og hunde, dvs. middel-størrelse fysiske objekter; en position som til tider kaldes *common-sense* realisme. Eller man kan mene at uobservable teoretiske entiter som kvarker, elektroner og gener i naturvidenskaberne eksisterer uafhængigt at vores erkendelse af dem og at matematiske objekter eksisterer på samme måde. Denne position kaldes videnskabelig realisme. Er matematiske begreber opfundet, kan man mene at vi har dannet de matematiske begreber ved at trække karakteristika ud ad fysiske objekter. Er det så alle matematiske begreber som dannes på denne måde eller kun nogle? Hvis det er kun er nogle som dannes sådan, hvordan

[1] Det debateres om objekter som elektroner, kvarker osv. rent faktisk findes i naturen eller om de blot er entiteter, som ikke eksisterer andre steder end i vores bevidsthed, men som benyttes til at sammenfatte mange observationer. Denne debat vil jeg ikke gå ind i, men blot konstatere at når jeg skriver findes, er det ikke fordi jeg postulerer at disse entiteter eksisterer objektivt.

opstår så de andre matematiske begreber?

De positioner som mener at matematiske aksiomer er empiriske baseret, hævder at sandheden af matematiske sætninger som udledes fra disse aksiomer ligeledes er empirisk baseret. De positioner som hævder det modsatte, altså at aksiomerne er sande i kraft af noget andet end empiriske kendsgerninger, åbner således for at matematisk sandhed er begrundet i noget andet. Spørgsmålet er hvad sandhedsbegrundelsen så er, hvilket vi skal se at der er flere svar til.

### 2.1.2 Matematiske sætningers udsagn om verden

Udover at de naturvidenskabelige begreber afspejler objekter i naturen er et andet karakteristika ved naturvidenskaberne, at de kommer med udsagn om verden. Det er udsagn som udledes ud fra en teori og som ikke bare er definitioner af begreber. Udfra elektrodynamikkens love kan man f.eks. udlede at en elektron som kommer vinkelret ind i homogent magnetfelt, vil bevæge sig en cirkelbevægelse med en radius som kan beregnes. Dette udsagn siger i en vis forstand mere end der er proppet ind, hvilket adskiller det fra rene definitioner. De udsagn som naturvidenskaberne leverer er meget forskellige, men jeg vil ikke gå ind i en nærmere klassifikation, blot konstatere at de kommer med sådanne udsagn. Man kan derfor spørge om matematikken overhovedet kommer med sådanne udsagn om verden som ikke bare er definitioner eller aksiomer, og hvis dette er tilfældet, om alle matematiske sætninger er sådanne udsagn om den fysiske virkelighed?

## 2.2 Matematikkens udvikling

Produktet matematik er forskelligt til forskellige tider, således at matematikken udvikler sig med tiden. Filosoffen Philip Kitcher (1983) nævner f.eks. at omkring 1400 mente matematikerne ikke at ethvert polynomium med rationale koeffecienter har rødder, hvilket deres efterfølgere i det nittende århundrede mente. Et andet eksempel Kitcher nævner, er Leibniz' (1646-1716) og nogle af hans efterfølgeres overbevisning om at $1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$, hvilket Cauchy (1789-1857) og Abel (1802-29) senere hånende afviste. Mængden af matematiske sætninger ændres således, argumenterer Kitcher, ved at sætninger accepteres som tidligere blev opfattet som forkerte, men ligeledes den anden vej. Kitcher nævner følgende andre måder matematikken udvikler sig på:

> Equally evident are alterations in mathematical language, variations in style and standards of reasoning, changes of emphasis on kinds of problems, even modifications of views about the scope of mathematics. (Kitcher (1983), s. 149)

Der er altså alle mulige ting i spil, så en strukturering er påkrævet.

Overordnet er der to positioner som optræder i forsøget på at beskrive og forstå matematikkens udvikling. For det første kan man undersøge den *indre* matematiske udvikling. Skovsmose skriver: "[man kan] se på hvorledes spørgsmål afløses af nye; se ... på hvorledes en foreløbig formulering og en tentativ løsning af en matematisk problemstilling afføder nye (matematiske) problemstillinger. Dette er det internalistiske perspektiv." (s. 93) Indførslen af ikke-euklidisk geometri skete f.eks. som svar på det 'rene' matematik spørgsmål: 'hvad sker der hvis vi ikke antager parallelaksiomet?'. Den anden position er at disse indre faktorer ikke er nok til at beskrive matematikkens udvikling, så ydre faktorer skal inddrages. Sådanne eksternalistiske aspekter (Skovsmose nævner organisatoriske, sociale, ideologiske og økonomiske som eksempler), er siden 1960'erne blevet inddraget i forståelsen af naturvidenskaberns udvikling. Hovedargumentet for at inddrage sådanne faktorer i beskrivelser af matematikkens udvikling, er selvfølgelig at denne sker på en måde som er uforklarlig hvis der kun inddrages indre faktorer. Skovsmose skriver:

> Der findes eksempler på at et matematisk forskningsområde ekspanderer voldsomt uden at den "indre logik" giver en tilstrækkelig forklaring herpå, hvor det altså er "ydre" omstændigheder der er med til at kreere forskningsfeltet som interessant og væsentligt. Eksempelvis kan man tænke på operationsanalysen som ekspanderede voldsomt i løbet af 40'erne. (Skovsmose (1990), s. 93)

Jeg har valgt at bruge denne generelle opdeling i interne og eksterne aspekter til at strukturere diskusionen af matematikkens udvikling. Ikke fordi jeg er interesseret i at undersøge om det er den ene eller anden som er styrende for udviklingen, men for at understrege at man kan mene at eksterne faktorer spiller en rolle og fordi jeg har begrænset min beskrivelse af diskussionen til hovedsageligt at dreje sig om de indre faktorer. Vi går nu over til en udspændning af hvordan diskussionen af matematikkens udvikling ser ud i forhold til den overordnede diskussion af matematik kontra naturvidenskab.

### 2.2.1 Interne aspekter i matematikkens udvikling

Kitcher nævner to observationer som kan give anledning til en mistanke om at matematikken og naturvidenskaberne ikke udvikler sig på samme måde. Han skriver om den første:

> One apparent major difference between the growth of scientific knowledge and the growth of mathematical knowledge is that the natural sciences seem to evolve in response to experience. As observations and experiments accumulate, we find ourselves forced to extend and modify our corpus of beliefs. In

> mathematics, however, the observation of previously unobserved phenomena and the contrivance of experiments seem to play no important role in stimulating change of belief. So we are easily led to conclude that the springs of change are different in the two cases. (Kitcher (1983), s. 150)

Den anden observation, at der er forskel på den måde matematikken og naturvidenskaberne udvikler sig på, er at matematik fremtræder kumulativ på en måde som ikke umiddelbart kan genfindes i naturvidenskaberne. Men mere om denne observation om lidt.

Et vigtigt spørgsmål i debatten er altså om matematikkens udvikling sker som et svar på erfaringen. Det er vigtigt at præcisere at erfaringen skal forstås som *sanse*erfaring, for de fleste vil vel mene at matematikken udvikler sig på baggrund af en eller anden erfaring, hvad enten det er erfaringer om objekterne i et ikke-tidsligt eller rumligt rige (platonisme) eller det er inspektion af objekter i bevidstheden (konstruktivisme) eller noget andet. Et ligeså vigtigt spørgsmål som 'udvikler matematikken sig som et svar på sanseerfaringen' er om naturvidenskaberne udvikler sig sådan. Jeg har valgt at se bort fra videnskabsteoretiske spørgsmål til naturvidenskaberne, for det første for at indskrænke debatten til at dreje sig om matematik, for det andet fordi debatten om naturvidenskabernes teori meget langt fra er afklaret.[2]

Et af de væsentlige karakteristika ved naturvidenskaber er at deres påstande skal stå til doms hos naturen, dvs. hvis de ikke er i overensstemmelse med naturen bliver de forkastet. Hvis vi nu ser bort fra at det er *naturen* som naturvidenskaberne skal aflægge rapport overfor, kan man spørge om den måde naturvidenskaberne afprøves i forhold til deres virkelighedsområde er analog med matematikkens forhold til sit virkelighedsområde. Hvis vi f.eks. antager at en eller anden form af Poppers opfattelse af naturvidenskabernes udvikling som en proces med fremsættelse af, helst dristige, gisninger/hypoteser og efterfølgende forsøg på falsifikation, er korrekt, kan vi spørge om matematikken udvikler sig på samme måde. Ikke så det nødvendigvis er naturen som en eventuel falsifikation sker i forhold til, men i forhold til matematikkens virkelighedsområde. En sådan lighed mellem naturvidenskaberne og matematikkens måde at udvikle sig på, kunne man kalde en strukturel udviklingslighed, for at understrege at de udvikler sig på samme måde, men i forhold til forskellige virkelighedsområder.

Vi kan nu vende tilbage til den anden observation, Kitcher mener ligger til grund for mistanken om at matematik ikke udvikler sig på samme måde som naturvidenskaberne. Han skriver:

> A second feature of the growth of mathemetical knowledge is the appearance of cumulative development in mathematics

[2] Kitcher (1983) stiller i høj grad spørgsmål ved om observationer er den *eneste* kilde til naturvidenskabelige udvikling.

> in ways which seem absent in natural sciences. Because contemporary mathematics appears to preserve so much of what was accepted by the mathematicians in the past, it is tempting to suppose that the manner in which mathematical knowledge evolves must be fundamentally different from that in which scientific knowledge grows. Mathematical methods must be more sure-footed than those used by natural scientists. (Kitcher (1983), s. 150)

### 2.2.2 Eksterne aspekter i matematikkens udvikling

Med udgivelsen af Thomas S. Kuhns bog *The Structure of Scientific Revolutions* i 1962 er der kommet fokus på den rolle kontekstuelle aspekter spiller for naturvidenskabernes udvikling, en debat som stadig ikke er afsluttet. Kragh og Pedersen (1981) skriver om Kuhns beskrivelse af naturvidenskabelig udvikling:

> Kuhn opdeler skematisk en videnskabs udvikling i to faser, kaldet hhv. den *normalvidenskabelige* fase og den *revolutionære* fase. Normalvidenskabelige aktiviteter er underlagt et s.k. *paradigme,* idet revolutioner i videnskaben netop identificeres med paradigmeskift. Som et fjerde centralt begreb i Kuhns teori står det *videnskabelige samfund,* udøverne af en bestemt videnskabelig disciplin.
>
> Inspireret af videnskabshistorien fremhæver Kuhn, at videnskabelige disciplinеrs udvikling er karakteriseret ved successive perioder af normalvidenskab. I sådanne perioder er gruppen af forskere enige om de standarder og modeller, der fastsætter den pågældende tradition. Denne fælles opfattelse af hvad videnskaben er, hvilke problemer den er rettet mod, og hvornår den er succesfuld, er den normalvidenskabelige aktivitets grundlag, dens paradigme. (Kragh & Pedersen (1991), s. 179)

Kuhns beskrivelse betyder at i de revolutionære faser opstår der disputer og uenigheder med tilhængere på hver side af en kløft. Tre eksempler på revolutioner bliver typisk fremhævet. Det er overgangen fra den Aristoteliske-Ptolemæiske opfattelse af solsystemet til den Kopernikanske. I kemi gik man fra en forståelse af forbrænding som tabet af flogiston til en hvor forbrænding blev opfattet som tilførsel af oxygen. Endelige blev Newtons opfattelse af tid og rum som absolutte erstattet af Einsteins relativitetsteori.

Den traditionelle opfattelse af matematikkens filosofi er at sådanne kontekstuelle aspekter ikke er relevante at inddrage i forståelsen af matematikken. Dette kunne derfor være et punkt hvor man kunne påpege en forskel på matematik og naturvidenskaberne. Helt overordnet kan man spørge om Kuhns teorier eller nogle tilsvarende gælder for matematik. I artiklen *T. S.*

*Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics* som er genoptrykt i Gillies (1992), stiller Herbert Mehrtens dette spøgsmål. Mehrtens når frem til at Kuhns generelle mønster for naturvidenskabelige revolutioner ikke er anvendbar på matematik, men at mange af Kuhn's begreber for sig selv er relevante for matematik.

Et af de vigtigste punkter i Kuhns teori er videnskabelige revolutioner, et punkter hvor matematikken og naturvidenskaberne fra en umiddelbar betragtning adskiller sig. Donald Gillies (1992) skriver i indledningen til en bog om revolutioner i matematik, at efter hans opfattelse er Kuhn's overordnede billede af naturvidenskabernes vækst accepteret af de fleste naturvidenskabsfilosoffer og -historikere, selvom de er uenige i nogle af detaljerne. Gillies' bog er en samling af artikler hvor det diskuteres om sådanne revolutioner optræder i matematikkens historie, et spørgsmål der dog ikke bliver afklaret.

Matematikhistorikeren Michael Crowe opstiller i artiklen *Ten 'laws' concerning patterns of change* (også genoptrykt i Gillies (1992) hvor sidetallene refererer til) fra 1975, som titlen siger, ti såkaldte love for matematikkens udvikling. I følge Crowe er matematikkens udvikling ikke bare en rationel, uproblematisk, jævnt stigende akkumulation af viden, hvor det eneste der tæller i forbindelse med introduktionen af nye begreber er argumenter. Crowe beskriver i stedet en situation hvor sociologiske faktorer spiller en væsentlig rolle i udviklingen. Det er sociologiske faktorer som den enkelte matematikers berømmelse, forskernes modvilje mod at indføre nye begreber og mod at indse kriser, osv. Som eksempel på hans love, vil jeg nævne den femte lov, som angår matematikernes metafysik (hans kursivering):

> *The 'knowledge' possessed by mathematicians concerning mathematics at any point in time is multilayered. A 'metaphysics' of mathematics, frequently invisible to the mathematician yet expressed in his writings and teaching in ways more subtle than simple declarative sentences, has existed and can be uncovered in historical research or becomes apparent in mathematical controversy.* (Crowe (1975), s. 17)

Dette er alt hvad jeg vil sige om den sociologiske deldiskussion; det skal ikke forstås som værende hverken udtømmende for hvilken problemer diskussionen angår eller hvilke argumenter der fremføres for de positioner jeg har nævnt, men et forsøg på at illustrere hvad diskussionen går ud på.

## 2.3 Hvilke krav kan man på forhånd stille til debatten?

Fysikeren Eugene P. Wigner (1902-1995) har udgivet en berømt artikel med titlen *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*(optrykt forskellige steder, f.eks. i Mickens (1990), hvor sidetallene refererer til). Her spørger han hvordan det kan være at matematik er så brugbar i naturvidenskaberne. Han skriver om matematikkens anvendelse:

> It is difficult to avoid the impression that a miracle confronts us here, quite comparable in its striking nature to the miracle that the human mind can string a thousand arguments together without getting itself into contradictions or to the miracles of the existence of laws of nature and of the human mind's capacity to divine them.(Wigner (1960), s. 299))

Diskussionen af matematikkens "urimelige effektivitet" er en anden end diskussionen af om matematik er en naturvidenskab. Grunden til jeg nævner Wigners artikel er som eksponent for en fundamental antagelse, nemlig at matematik er et yderst effektivt redskab til at beskrive verden, især indenfor fysik, men også andre naturvidenskaber og andre menneskelige aktiviteter, såsom økonomi. Det kan være at matematikken har styret naturvidenskaberne i en bestemt retning, men matematikkens effektivitet indenfor vore dages naturvidenskaber, mener jeg ikke der kan sættes spørgsmålstegn ved.

Denne antagelse har to konsekvenser for debatten. For det første er der, som vi skal se, positioner indenfor deldiskussionen om sammenhængen mellem naturen og matematiske objekters virkelighed som hævder at matematikkens og den fysiske virkeligheds objekter intet har med hinanden at gøre. Disse må forklare hvordan resultaterne fra studiet af matematiske objekter kan bruges i beskrivelsen af objekter i den fysiske virkelighed, når disse to typer objekter er væsensforskellige. Den anden konsekvens er om matematiske ræsonnementer: hvordan kan det være at en naturvidenskabsmand, isoleret fra omverden, kan sidde ved sit skrivebord og komme med forudsigelser om verden som viser sig at holde stik, blot ved at deducere matematisk konsekvenser fra sine teorier? Eller sagt på en anden måde: hvorfor er matematiske ræsonnementer effektive indenfor andre felter? Dette er et krav som ikke kun retter sig til positioner som mener at matematiske objekter og fysiske objekter eksisterer i forskellige typer virkelighed, men også til dem som mener at de har samme virkelighedsområde. For selvom matematikken har basis i den fysiske virkelighed, hævder de fleste positioner at det kun er en lille del af matematikken som er opstået direkte fra den fysiske virkelighed og at resten er kommet på baggrund af en udvikling af matematikken. Saunders Mac Lane skriver f.eks.:

> Thus group theory is the study of symmetry — wherever it appears. The same axioms describe a group, whether it be a symmetry group of a crystal, of a Moorish ornament, or a physical system... , a transformation group in geometry, or a group of numbers under multiplication. Any theorem about groups is intended to apply to all of these cases. (Mac Lane (1997), s. 150)

Hvordan kan det være at en sætning om grupper som ikke er direkte afledt af de forskellige praktiske sammenhænge hvor grupper "optræder", men som er bevist matematisk, rent faktisk kan bruges i fysikken?

Umiddelbart er dette et krav til deldiskussionen om matematikken og virkeligheden, men svarene (der er ikke ret mange som tager stilling til spørgsmålet) vil typisk hentes fra matematikkens udvikling og vil være i retning af at der sker en 'falsifikation' af matematiske ræsonementer hvis de viser sig ikke at være brugbare i en virkelighedsbeskrivelse.

### 2.3.1 Hvor har jeg lagt vægten?

I resten af rapporten har jeg valgt hovedsageligt at beskrive den del af debatten om matematik er en naturvidenskab, som falder ind under de ontologiske og erkendelsesteoretiske spørgsmål, og i lidt mindre grad de interne aspekter og overhovedet ikke de eksterne. I alle deldiskussionerne har jeg dog langt fra taget alle positioner med, men jeg håber at give et indtryk af debatten.

# Kapitel 3

# Positioner

I dette afsnit beskriver jeg de vigtigste positioner som har beskæftiget sig med generelle ontologiske og erkendelsesteoretiske spørgsmål om matematikkens natur.

## 3.1 Formalisme

Ingen som observerer matematikere i aktion, kan undgå at bemærke at de manipulerer symboler i overensstemmelse med visse regler. Det er derfor naturligt at foreslå at matematik simpelthen er regelstyrede eller *formelle* manipulationer med symboler og intet andet. Observationer af denne type har haft så stor indflydelse, at formalismen ifølge Davis og Hersh (1981) var den dominerende filosofiske attitude i lærebøger og 'officielle' matematiske skrifter i midten af det tyvende århundrede. Dette har også givet sig udslag i det skråsikre citat fra Politikens filosofileksion på side 1 om at matematik er en formalvidenskab.

David Hilbert forsøgte på baggrund af grundlagskrisen at give matematikken et sikkert grundlag. Skovsmose skriver om hans program:

> Når der opstår modsigelser i matematikken, indikerer det at man har tilladt sig for meget; draget konklusioner hvor det ikke er legalt; benyttet aksiomer der giver anledning til inkonsistenser, eller lignende. Hilbert vil give en beskrivelse og analyse af selve de matematiske teorier og bevismåder, og på denne måde sikre sig mod at de kan føre til inkonsistenser... Hilbert ønsker at gøre selve de matematiske teorier til objekter for formelle analyser. Hilbert introducerer en *metamatematik.* (Skovsmose (1990), s. 40)

For at kunne anvende metamatematikken skal de matematiske teoriers aksiomer være eksplicit formulerede. Dette gjorde Hilbert selv indenfor euklidisk geometri, hvor han gjorde de aksiomer eksplicitte som Euklid implicit havde antaget. I euklidisk geometri refererer definitionerne til den fysiske virkelighed, f.eks. defineres et punkt som det der ikke kan deles. Hilbert løsrev disse definitioner fra en fysisk forståelse, således at punkter ikke refererer til små prikker, men alene *navngives* ved aksiomerne. Skovsmose skriver:

> Det principielle er at Hilbert ved at opregne alle aksiomerne ... er i stand til at bevise en række elementære geometriske sætninger uden på nogen måde at støtte sig til en form for "anskuelse". Af hensyn til bevisførelsen er det nødvendigt at indse noget ved hjælp af en illustration, som netop refererer til en bestemt måde at fortolke begreberne på. (Skovsmose (1990), s. 41)

Aksiomerne skal kun beskrive *relationerne* mellem definitionernes begreber, ikke være selv-indlysende sandheder. I stedet for at spørge om der eksisterer punkter, linier, flader osv., skal man spørge om de matematiske teorier er *konsistente*. En hovedopgave bliver derfor at gennemføre en fuldstændig aksiomatisering af matematikken så den løsrives fra enhver form for intuivitiv fundering.

Normalt forbinder man formalismen med noget andet end Hilberts position, men der er selvfølgelig visse lighedspunkter. Ifølge det jeg vil kalde formalismen består matematik alene af aksiomer, definitioner og sætninger, kort sagt formler; mere kontroversiel er påstanden om at formler ikke drejer sig om noget, idet de er tømt for indhold og bare er strenge af symboler. Dette gør at matematikken, fra aritmetik og opad i det matematiske hieraki, får karakter af et spil, og nogle formalister sammenligner da også matematik med et spil skak. Formalisterne definerer ofte matematik som videnskaben om rigoristiske beviser. Ethvert bevis må starte et sted, så matematikerne må starte med nogle udefinerede begreber og nogle ubeviste påstande om dem, aksiomerne. Eksempelvis er i plan-geometri 'punkter' og 'linier' udefinerede begreber, mens påstanden 'gennem to adskilte punkter går netop en ret linie' er et aksiom. Formalisterne pointerer at de logiske konsekvenser af dette aksiom ikke afhænger af de mentale billeder vi danner af det, så vi kunne for den sags skyld lige så godt tale om 'bleeper' og 'neep' og omformulere aksiomet til 'gennem to adskilte bleeper går netop en neep'. Det vigtige er ikke indholdet af en matematisk teori, men kun den logiske struktur.

Hvis vi giver punkter og linier en fortolkning udenfor matematik, såsom punkter og linier i den fysiske verden, kan vi give aksiomet en sandhedsværdi gennem en fortolkning. Antageligt vil formalisterne hævde at kun aksiomer hvor det er muligt at finde en sådan fortolkning i forhold til den virkelige verden, hvor aksiomerne er sande, er interessante. Men når man først er gået i gang med at lave matematik, er det kun de logiske deduktioner som er vigtige og i denne forstand er fortolkningen af aksiomerne irrelevant for formalisterne. Dette gør at formalisterne skelner mellem geometri som en deduktiv struktur og geometri som en deskriptiv videnskab. Kun geometri i den første forstant opfattes af formalisterne som matematik. Anvendelser og hvad der gør at matematikerne giver præcis de definitioner og antager nøjagtig de aksiomer som de gør, bliver ifølge Davis og Hersh (1981) sjældent opfattet som relevant, og bliver derfor kun parentetisk og kort berørt.

Nicolas D. Goodman (1979) skriver at hvis vi spørger en formalist hvad indholdet af aritmetikkens fundamentalsætning[1] er, vil han svare at den ikke har noget indhold. Sætningen er, når alt kommer til alt, bare en streng af symboler.

Logikeren Haskell B. Curry har i *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*[2] fra 1951 beskrevet en radikal form for formalisme. Han er ude på at undersøge hvad matematisk sandhed er. Ifølge ham giver det kun mening at tale om sandhed i forhold til et formelt system. Et formelt system er et system som er renset for alt andet indhold end symboler og relationer mellem dem og hvor nye relationer udledes vha. logiske manipulationer. Hvis et system skal kaldes formelt, skal det være gjort klart hvilke symboler der er tilladelige, slutningsreglerne skal være eksplicitte, og formlerne skal være delt op i hhv. aksiomer, beviser og sætninger. Et bevis er en endelig følge af formler, $F_1, F_2, ....F_n$, hvor $F_i$ enten er et aksiom eller kan udledes af de tidligere formler vha. de tilladte slutningsregler. Det afgørende for formalisterne er dels at systemet skal være helt formelt, dels at den sidste formel er sand i matematisk forstand. Denne kaldes sætningen. Matematisk sandhed er derfor lig med bevisbarhed inden for et formelt system. Det kan være at negationen af en sætning som er sand i et formelt system, kan bevises i et andet formelt system, så matematisk sandhed er relativ i forhold til valg af formelt system.

Curry indfører begrebet *acceptabilitet* til at beskrive hvorfor vi accepterer et formelt system frem for et andet. Acceptabilitet er et spørgsmål om fortolkning af det formelle system i relation til et eller andet emne, og involverer overvejelser som inddrager argumenter udenfor matematikken selv, typisk af empirisk karakter. Hvad angår anvendelsen af matematiske teorier kommer Curry desværre ikke ind på hvorfor de virker i naturvidenskaberne.

Davis og Hersh (1981) og Hersh (1979) mener at formalismen ikke svarer til matematikernes egne oplevelser af matematisk praksis. Goodman er inde på noget af det samme når han siger:

> Introspection shows that when I am actually doing mathematics, when I am wrestling with a problem that I do not know how to solve, then I am hardly dealing with symbols at all, but rather with ideas and constructions. Some of the hardest work a mathematician does occurs when he has an idea but is, for the moment, unable to express that idea in a formal way. (Goodman

[1] Aritmetikkens fundamentalsætning siger at ethvert sammensat naturligt tal kan skrives entydigt som et produkt af primtal.

[2] Min fremstilling bygger hovedsageligt på Skovsmose (1990).

(1979), s. 84[3])

Goodman påpeger at matematikerne taler om idéer, konstruktioner og beviser, på en måde som gør det klart at de har noget andet i tankerne end de symboler de bruger. Brouwer har introduceret begrebet 'konstruktioner' til generisk at refererer til de entiteter som ligger bag de symboler som matematikerne grifler ned og som giver disse symboler liv og indhold. Goodman påpeger at matematikere taler om dem hele tiden, at de er enige om deres generelle egenskaber, og er enige om at det er dem som er vigtige i matematisk skabelse. Enten nævner formalisterne overhovedet ikke disse konstruktioner, eller også affærdiger de dem som 'heuristik' uden at forsøge at forklare deres sammenhæng med det formelle system. Selvom formalismen fra en umiddelbar betragtning virker som om den beskriver matematisk praksis, drages dens dybere overensstemmelse med matematisk praksis altså i tvivl.

## 3.2 Konstruktivisme

Konstruktivismen[4] er grundlagt af matematikeren Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966). Dens grundlæggende påstand er at vi konstruerer vore matematiske begreber i vores bevidsthed. Goodman beskriver kort intuitionisme på følgende måde:

> It is characteristic of intuitionism that it denies the existence of any mathematical reality external to the mathematician or even of any mathematical truth beyond what the mathematician has actually proved or could actually prove. Mathematical objects exists for me only insofar as they are the conclusions of arguments I can make ... Statements which have so far been neither proved of refuted, like Fermat's conjecture[5] have no definite truth-value. (Goodman (1979), s. 85)

Konstruktivismen mener at det udelukkede tredies princip (enhver påstand er enten sand eller falsk) ikke kan bruges til påstande om uendelige mængder. Kragh og Pedersen (1991) nævner Cantors mængde som eksempel. Betragt et liniestykke med endepunkterne $A$ og $B$ som deles i tre lige store dele, hvorefter det miderste stykke fjernes. De resterende to stykker tredeles og de to midsterstykker i hver fjernes. Hvis vi forestiller os at processen fortsættes i det uendelige fremkommer Cantors mængde. Lad nu $a$ være et vilkårligt punkt på det oprindelige liniestykke. At afgøre om $a$ ikke tilhører Cantors mængde, betyder at vi i hvert trin i processen skal undersøge om $a$ er med i den trediedel som fjernes. Men hvis $a$ rent faktisk er med i mængden, kan

[3] Sidetallene referer til udgaven i Tymoczko (1985).

[4] Jeg vil bruge intuitionisme og konstruktivisme som betegnelse for den samme position. Det er muligt at der er en forskel, men jeg er ikke stødt på nogle som skelner.

[5] Artiklen er fra 1979, altså før Wiles og Taylor beviste Fermats sidste sætning.

vi komme i den situation at vi aldrig får det at vide fordi det ville kræve uendelig mange undersøgelser. Kragh og Pedersen skriver:

> Hvilken glæde har man af at hævde, at enten det ene eller det andet af de to udsagn er sandt, når man principielt er afskåret fra at afgøre hvilket af dem, der er tale om? (Kragh & Pedersen (1991), s. 147)

Konstruktivismen involverer altså dels en ontologi, idet matematiske objekter kun eksisterer i matematikerens bevidsthed, dels en erkendelsesteori, idet den mener at det ikke er lovligt at anvende det udelukkede tredies princip i alle situationer.

Hvad angår aritmetikkens fundamentalsætning, mener konstruktivisten, i modsætning til formalisten, at denne ikke bare er en streng af symboler. Sætningen har en mening, men det er ikke en sandhed om et domæne for de naturlige tal som eksisterer udenfor os. I stedet udtrykker sætningen en bestemt evne vi har, nemlig evnen til at faktorisere et vilkårligt naturligt tal i primtal, og dernæst undersøge om to sådanne faktoriseringer består af de samme primtal med de samme multipliciteter.

Ifølge konstruktivisterne er det muligt at opnå matematisk erkendelse vha. matematisk intuition. Deres intuitionsbegreb er inspireret af Kants redegørelse for matematisk intuition. Ifølge denne redegørelse konstruerer vi figurer i tankerne og inspicerer dem med 'sindets øje', hvorved vi opnår a priori viden om de aksiomer som vore beviser tager udgangspunkt i. Spørgsmålet er nu hvordan sådan betragten af 'mentale tegnefilm', som Kitcher kalder det, kan give os viden, med mindre det er en ret kedelig viden om lige præcis de figurer som optræder foran os? Hvis matematiske påstande ikke bare er rapporter om vore private mentale entiteter, hvordan kan det så være at vores intuition (den evne som aflæser og udleder egenskaber ved disse entiteter), kan bruges til at opnå viden? Hvis matematiske påstande er sådanne rapporter, bliver de så ikke forskellige fra person til person og varierer til forskellige tider?

Kant vælger side i dette dilemma og mener at matematiske påstande ikke bare er private, mentale entiteter. Ifølge Kant er vores erfaring formet i tid og rum, som er såkaldte *anskuelsesformer*, dvs. grundstrukturer ved vores erkendelse af verden. Vi kan kun sanse objekter som er givet i tid og rum. Når vi danner geometriske figurer, såsom trekanter, i tankerne og inspicerer dem, opnår vi erkendelse om hvad der nødvendigvis må gælde om rummet, som anskuelsesform, og dermed om alle vore erfaringer. Tilsvarende gælder om aritmetikken at den drejer sig om tidsfølger, og når vi beskæftiger os med den, opnår vi erkendelse om anskuelsesformen tiden. I følge Kant påtvinger vores bevidsthed altså en struktur på al erfaring, og ved at konstruere figurer i bevidstheden bliver vi opmærksomme på de principper som nødvendigvis karakteriserer al vores erfaring. Konstruktionen af matematiske entiteter oplyser denne struktur, sådan at vi ved at inspicere vore mentale konstruktioner afdækker træk som karakteriserer mulig erfaring.

Konstruktivisterne baserer deres argumentation for at sandheden af matematiske påstande afgøres uafhængigt af erfaringen, på denne redegørelse for matematisk intuition. Argumentationen bygger på følgende to hovedtanker: 1) matematiske påstande er sande i kraft af den struktur som vores psykologiske indretning pålægger al erfaring; 2) ved at fatte egenskaber ved mentalt forelagte matematiske entiteter, kan vi afdække de strukturelle egenskaber ved bevidstheden i kraft af hvilke matematiske påstande er sande. Ved at fatte disse egenskaber opnås a priori matematisk viden. Brouwers viderefører Kants idé med sammenhængen mellem tid og aritmetik, idet intuitionen om to adskilte hændelser i tiden fører til begrebet om *tohed.* Kline citerer ham for at sige:

> Mathematics arises when the subject of twoness, which results from the passage of time, is abstracted from all special occurences. The remaining empty form of the common content of all these twonesses becomes the original intuition of mathematics and repeated unlimitedly creates new mathematical subjects. (Brouwer i Kline (1980), s. 234)

Ved ubegrænset gentagelse mente Brouwer dannelsen af følgen af naturlige tal. Ifølge Kline (1980) indrømmede Brouwer at matematikken er nytteløs til praktiske anvendelser. Ifølge Brouwer er matematikken 'indstøbt' i den menneskelige hjerne forud for sprog, logik og erfaring.

## 3.3 Realisme

Der er rod i litteraturen hvad angår definitioner af begreberne matematisk realisme og platonisme (i det følgende bare hhv. realisme og platonisme). Penelope Maddy betegner realisme på følgende måde:

> Realism, then (at first approximation), is the view that mathematics is the science of numbers, sets, functions, etc., just as physical science is the study of ordinary physical objects, astronomical bodies, subatomic particles, and so on. That is, mathematics is about these things, and the way these things are is what makes mathematical statements true or false. (Maddy (1990), s.2)

Penelope Maddy opfatter platonisme som synonym med realisme anvendt på matematik og beskriver denne opfattelse på følgende måde

> Mathematics is the scientific study of objectively existing mathematical entities just as physics is the study of physical entities. The statements of mathematics are true or false depending

> on the properties of those entities, independent of our ability, or lack thereof, to determine which. (Maddy (1990), s. 21)

Synspunktet at de objektivt eksisterende matematiske entiteter derudover er abstrakte objekter som ikke har tids-rumlig udstrækning og eksisterer med nødvendighed, kalder Maddy for traditionel platonisme.

Davis og Hersh skriver:

> According to Platonism, mathematical objects are real. Their existence is an objective fact, quite independently of our knowledge of them. Infinite sets, uncountable infinite sets, infinite-dimensional manifolds, space-filling curves — all the members of the mathematical zoo are definite objects, with definite properties, some known, many unknown.

(Davis & Hersh (1981), s. 318)

Så langt er Maddy og Davis og Hersh enige, men Davis og Hersh fortsætter:

> These objects are, of course, not physical or material. They exist outside the space and time of physical existence. They are immutable — they were not created, and they will not change or disappear. Any meaningful question about a mathematical object has a definite answer, whether we are able to determine it or not. According to Platonism, a mathematician is an empirical scientist like a geologist; he cannot invent anything, because it is all there already. All he can do is discover. (Davis & Hersh (1981), s. 318)

Når jeg i det følgende skriver platonisme, hentyder jeg til Davis og Hersh's betydning, og når jeg skriver realisme, benytter jeg Maddys beskrivelse af matematiske realisme hvilket svarer til første citat af Davis og Hersh. Dvs. med (matematisk) realisme forstår jeg det synspunkt at matematikkens objekter har en objektiv eksistens og objektivt set har visse egenskaber, hvad enten de er erkendt eller ej. Platonisme er så den variant hvor der derudover tilføjes at de skal være abstrakte, dvs. hverken fysiske eller materielle.

Denne distinktion mellem realisme og platonisme er vigtig for diskussionen om kilderne til matematisk begreber, fordi jeg mener at en platonist må sige at naturen eller den fysiske virkelighed ikke er en kilde til matematiske begreber, hvorimod en realist godt kan mene at naturen er en kilde til matematiske begreber (en synspunkt Penelope Maddy advokerer for, som vi skal se senere).

En anden skelnen man kan indføre er mellem ontologiske og epistemologiske realister. Ontologiske realister er dem beskrevet ovenfor, dvs. dem som mener at matematiske objekter tilhører en objektiv verden uafhængig af vores erkendelse af den. En epistemisk (afledt af epistemologi) realist mener at viden om matematiske objekter til dels er opnået gennem direkte bekendtskab med dem, eventuelt vha. en "sans" forskellig fra de fem sædvanlige sanser. Den position som indeholder både ontologisk og epistemisk realisme (hhv. platonisme), vil jeg slet og ret kalde realisme (hhv. platonisme).

### 3.3.1 Platonisme

Platonismen tager udgangspunkt i de fleste matematikeres oplevelse af at de studerer en verden som eksisterer uafhængigt at vores erkendelse af den. Denne verden er ikke som den fysiske virkelighed, fordi den på en svært definérbar måde hverken er tidslig eller rumlig, den er abstrakt. Roger Penrose udtrykker i *The Emperor's New Mind* fra 1990 en sådan platonisme, hvor han bl.a. beskriver Mandelbrot-mængden[6] på følgende måde:

> Benoit Mandelbrot himself, the Polish-American mathematician (and protagonist of fractal theory) who first studied the set, had no real prior conception of the fantastic elaboration inherent in it, although he knew that he was on the track of something very interesting ... Moreover, the complete details of the complication of the structure of Mandelbrot's set cannot really be fully comprehended by any one of us, nor can it be fully revealed by any computer. It would seem that this structure is not just part of our minds, but has a reality of its own. Whichever mathematician or computer buff chooses to examine the set, approximations to the *same* fundamental mathematical structure will be found ... The mandelbrot set is not an invention of the human mind: it was a discovery. Like Mount Everest, the Mandelbrot set is just *there*. (Penrose (1990), s. 124-5)

På tilsvarende måde mener Penrose at systemet af komplekse tal har en dyb og tidsløs realitet. Til at løse tredjegradsligninger brugte Gerolamo Cardano komplekse tal, således at det ved første øjekast virker som om de komplekse tal blot er et redskab — en matematisk opfindelse til et bestemt formål. Penrose mener at dette er en forkert opfattelse, fordi man senere har fundet at de har "magiske" egenskaber som man ikke på forhånd vidste de havde.

Penrose mener således at strukturer som de komplekse tal og Mandelbrot-mængden er opdaget og han mener at der kommer mere ud af disse strukturer end der proppes ind. Sådan forholder det sig imidlertid ikke med alle matematiske strukturer. Midt i et bevis kan en matematiker f.eks. blive nødt til at introducere en 'kunstig' og langt fra entydig konstruktion for at komme til et specifikt resultat. Denne konstruktion har en helt anden status end de platoniske objekter, idet den snarere er opfundet og det er ikke sandsynligt

[6] Det er gennem Kragh og Pedersen (1991) at jeg er blevet gjort opmærksom på dette eksempel på platonisme.

at der kommer mere ud end ind. Jeg synes ikke det er helt klart hvad Penrose præcist mener.

Man kunne få den tanke at platonisterne på en eller anden måde forfægter en platonisme hvad angår *mængder*, men ikke andre matematiske begreber. Men der findes platonister, som René Thom, der forsvarer en platonisme hvor idéerne i den verden som eksisterer uafhængigt af os er *geometriske*.

Hvad angår forholdet mellem den fysiske virkelighed og platonismens abstrakte ideverden, skriver Penrose:

> By some miraculous insight Plato seems to have foreseen ... that: on the one hand, mathematics must be studied and understood for its own sake, and one must not demand completely accurate applicability to the objects of physical experience; on the other hand, the workings of the actual external world can ultimately be understood only in terms of precise mathematics — which means in terms of Plato's ideal world 'accessible via the intellect'! (Penrose (1990), s. 205)

Penrose besvare, så vidt jeg kan se, desværre ikke det afgørende spørgsmål, nemlig hvordan det kan være at studiet af denne ideelle verden giver indsigt i den fysiske verden.

Hvordan opnår vi viden om dette abstrakte rige, som ikke eksisterer i den tids- og rumlige virkelighed, og som det derfor er svært at forestille sig påvirker os kausalt? Platonister appellerer typisk til matematisk *intuition* og den klassiske eksponent for denne opfattelse er Kurt Gödel (1906-78) som i artiklen *What is Cantor's continuum problem?* (1963) beskriver denne særlige evne ved en analogi med empirisk sansning. Han skriver:

> ... the objects of transfinte set theory... clearly do not belong to the physical world and even their indirect connection with physical experience is very loose... But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. (Gödel (1963), s. 483-4)

Matematisk intuition er altså en sanseevne på linie med sansning af fysiske objekter, men den giver ikke nødvendigvis direkte viden om objekterne:

> It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an *immediate* knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we *form* our ideas also of those objects on the basis of something else which *is* immediately given. (Gödel (1963), s. 484)

Begrundelsen for at der er noget som er umiddelbart givet, følger af Gödels holdning til sansning generelt og altså uafhængigt af matematisk intuition. For vores idéer om fysiske objekter indeholder bestanddele som er kvalitativt forskellige fra sanseindtryk eller kombinationer af sanseindtryk, f.eks. begrebet om et objekt i sig selv. Disse idéer kan på den anden side heller ikke stamme fra vores tænkning, fordi denne ikke kan skabe kvalitative nye elementer, men kun reproducere og kombinere dem der allerede er givet. Det er dette Gödel kalder det umiddelbart 'givne' hvad angår empiriske ideer. Gödel konkluderer at det er åbenlyst at der er en tæt relation mellem det givne som ligger under matematikken og det givne hvad angår vore empiriske idéer, dvs. de abstrakte elementer som er indeholdt i disse ideer. Selvom data om dette givne ikke tillægges påvirkningen af bestemte ting på vores sanseorganer, behøver disse ideer ikke at være subjektive. I stedet kan de repræsentere et aspekt ved den objektive virkelighed, men deres tilstedeværelse i os skyldes en anden form for sammenhæng mellem os og virkeligheden end sansningerne. Dvs. ligesom at der er fakta om fysiske objekter som ikke er sanselige, er der kendsgerninger om matematiske objekter som ikke er intuitive. Maddy (1990) bringer følgende citat fra en anden af Gödels artikler:

> ... even disregarding the intrinsic neccesity of some new axiom, and even in the case it has no intrinsic neccesity at all, a probable decision about its truth is possible also in another way, namely, inductively by studying its success. Success here means fruitfulness in consequences, in particular in "verifiable" consequences demonstrable without the new axiom, whose proof with the help of the new axiom, however, are considerably simpler and easier to discover, and make it possible to contract into one proof many different proofs... There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole field, and yielding such powerful methods for solving problems ... that, no matter whether or not they are intrinsically necessary, they would have to be accepted at least in the same sense as any well-established physical theory. (Gödel i Maddy (1990), s. 32-3)

Gödels analogi med naturvidenskabelige teorier er altså to-sidet: De simplere aksiomer og begreber begrundes intuitivt på samme måde som simple begreber og sætninger begrundes ved sansning, mens mere teoretiske hypoteser begrundes udfra deres konsekvenser, som i naturvidenskaberne.

Reuben Hersh (1979) fremkommer med følgende kritik af det han kalder platonismens myte:

> It remains alive because it corresponds to something real in the daily experience of the mathematician. Yet remains alive only as a halfhearted, shamefaced Platonism, because it is incompatible with the general philosophy or worldview of most scientists —

> including mathematicians ... For those whose general world view excludes mysticism, Platonism in the full sense is very difficult to maintain once the full force of scientific sceptism is focused on it. (Hersh (1979), s. 18)

Hersh citerer formalisten Abraham Robinson for at sige at han aldrig vil vende tilbage til platonisternes rækker, som ser det uendelige spredt ud foran sig og tror at de kan fatte det ufattelige.

### 3.3.2 Ikke-platonisk realisme

I bogen *Realism in Mathematics*, fra 1990, redegør filosoffen Penelope Maddy for en realistisk opfattelse af matematik, som ikke er platonistisk. Maddy's variant af mængdelære-realisme går, i modsætning til bl.a. Gödels, ud på at når vi f.eks. ser en bakke med tre æg, *sanser* vi en matematisk mængde med tre elementer. Hun kommer med en beskrivelse af neurofysiologiske teorier for hvordan ordinære fysiske objekter perceperes. For det første tager hun empirien på området til indtægt for at begreber som 'trekant' og 'uafhængigt eksisterende fysisk objekt', for det første ikke er medfødt og for det andet erhverves over en længere tidsperiode. Til at beskrive hvordan denne begrebserhvervelse foregår, inddrager hun en neurofysiologisk teori af Donald Hebb, men hun mener ikke at de konklusioner hun drager, afhænger af den specifikke teori. Jeg vil ikke komme nærmere ind på hendes lidt indviklede redegørelse, men hun når frem til at vi, når vi ser en samling af fysiske objekter, danner en struktur i hjerne, en såkaldt mængde-detektor. Denne mængde-detektor gør os i stand til at sanse en mængde, på samme måde som vi sanser begrebet 'fysisk objekt' når vi sanser et træ. Hun opstiller nogle krav til at man kan sige at vi sanser et objekt, hvad enten det er fysisk eller det er matematisk. Dernæst argumenterer hun for at vi sanser en mængde i denne forstand, når vi f.eks. sanser en bakke med tre æg.

Et individ som har dannet en objekt-detektor, f.eks. evnen til at genkende trekanter, vil automatisk have forskellige generelle overbevisninger om naturen af de objekter som stimulerer det. Maddy skriver:

> ... Crudely put, the very structure of one's triangle-detector guarantees that one will believe any triangle to be three-sided. ... These are primitive, very general beliefs about the nature of whatever stimulates the appropriate higher-order assembly. I call them 'intuitive beliefs'. (Maddy (1990), s. 69-70)

Højere-ordens samling er den dannede struktur i hjernen. Pointen er nu at det som gælder for fysiske objekter også skal gælde for mængder: Strukturen af mængde-detektoren er ansvarlig for forskellige intuitive overbevisninger om mængder, f.eks. at de har tal-egenskaber, at disse tal-egenskaber ikke ændrer sig når elementerne flyttes, at de har forskellige delmængder, at de kan kombineres osv. Disse intuitioner ligger under de mest basale aksiomer for vores videnskabelige teori for mængder. Maddy kan derfor tilslutte sig Gödel når han siger at mængdelærens aksiomer tvinger os til accepterer dem som sande (se side 27).

Maddy når frem til at sådanne intuitive overbevisninger kan tælle som viden, men hun mener ikke at det meste af vores erkendelsesteoretiske støtte for mængdelæren er intuitiv. Hun skriver:

> In many cases, set theoretic methodology has more in common with the natural scientist's hypothesis formation and testing than with the caricature of the mathematician writing down a few obvious truths and proceeding to draw logical consequences. As the science/mathematics analogy would indicate, our set theoretic hypotheses demand theoretical or extrinsic support, that is, support, as in natural science, in terms of verifiable consequences, lack of disconfirmation, breadth and explanatory power, intertheoretic connections, simplicity, elegance, and so on. (Maddy (1990), s. 75)

Indtil videre har Maddy kun beskæftiget sig med mængdelæren, så spørgsmålet rejser sig i hvor høj grad noget tilsvarende gør sig gældende for resten af matematikken. Maddy skriver ikke meget om dette punkt, men hun tager psykologien til indtægt for følgende påstande: I forbindelse med at barnet opnår begrebet 'fysisk objekt', udvikler det også et begreb om rummet som omgiver det fysiske objekt, hvorved barnet udvikler en evne til at percepere en grænse eller form. Parallelt med at barnet udvikler de ideer som fører til det diskrete mængdebegreb, udvikler det også de grundlæggende begreber indenfor geometri og analyse. Disse begreber begynder ligesom deres modstykker i mængdelæren i sansning og handling, og fører til sidst til sansningen af linier, skæring af planer og kurver som kontinuerte strukturer. Når barnet er ti eller elleve, har det opnået intuitive begreber om geometriske figurer som afslører primitive ideer om kontinuitet. Disse intuitioner spiller en rolle i vores systematiske tænkning i geometri og analyse som er analog til den rolle som intuitioner om diskrete samlinger spiller i aritmetik og intuitioner om fysiske objekter i naturvidenskaberne. De fører f.eks. til at densiteten af de reelle tal fremtræder som indlysende.

## 3.4 Et eksempel som illustrerer forskellen mellem disse tre positioner

Davis og Hersh (1981) beskriver et klassisk eksempel som illustrerer forskellen mellem formalisme, realisme og konstruktivisme, nemlig Cantor's kontinuumshypotese. Den udtaler sig om mængders *kardinalitet* hvilket er et udtryk for antallet af elementer i en mængde; kardinaliteten af de naturlige tal betegnes $\aleph_0$, mens de reelle tals kardinalitet er $2^{\aleph_0}$. Cantors hypotese siger at der ikke er nogen mængde hvis kardinalitet er mellem $\aleph_0$ og $2^{\aleph_0}$. Gödel og P. J. Cohen har vist at på basis af aksiomerne for mængdelæren kan Cantors hypotese hverken bevises eller modbevises. *Realisterne* vil hævde at vores aksiomer er ufuldstændige i beskrivelsen af de reelle tal; de er simplethen ikke stærke nok. Kontinuumshypotesen er enten sand eller falsk, men vi forstår ikke de reelle tal godt nok til at afgøre dens sandhedsværdi. For *formalisterne* giver realisternes redegørelse ingen mening, for der er ikke noget talsystem udover det vi har beskrevet i vore aksiomer. Vi kan godt ændre disse aksiomer hvis vi vil, på baggrund af bekvemmelighed, anvendelighed eller andre kriterier, men vi kommer ikke tættere på virkeligheden, for der er ikke nogen virkelighed. Formalisterne og realisterne skændes om eksistens og virkelighed, men de er enige om hvilke principper som skal benyttes i matematiske ræsonnementer. Her udgør de en front mod *konstruktivisterne* som kun accepterer endelige ræsonnementer. Mængden af reelle tal eller andre uendelige mængder kan ikke opnås på denne måde, så Cantor's kontinuumshypotese er meningsløs snak.

## 3.5 Konceptualisme

Konceptualister mener at matematiske påstande er sande i kraft af vores matematiske begreber. Tag f.eks. påstanden: 'alle grupper indeholder et enhedselement'. Det er naturligt at opfatte sandheden af denne påstand som på en eller anden måde bestemt af gruppebegrebet. Hvis en person var uenig i påstanden ville vi hævde at hans brug af begrebet 'gruppe' afviger fra vores, fordi vi ville mene at man ikke kan forstå 'gruppe' som os og samtidig være uenig i påstanden. Tilsvarende ville vi, hvis vi blev spurgt om hvorfor vi mener at påstanden er korrekt, svare ved at citere vores opfattelse af 'gruppe'. De fleste positioner vil tilslutte sig disse betragtninger, men konceptualismen ønsker at opbygge en teori på baggrund af dem.

### 3.5.1 Konventionalisme

Én version af konceptualismen er konventionalismen, som hævder at matematik er sand alene i kraft af konventioner, både hvad angår logikken og matematikkens love. Hvis man spørger personer som forfægter en sådan position om hvorfor Zermelo-Fraenkels aksiomer for mængdelæren er sande, vil de svare: fordi de er del af det sprog vi tilslutter os ved at bruge ordet mængde. Carl G. Hempel forfægter i artiklen *On the nature of mathematical truth* fra 1945, en sådan konventionalistisk position hvad angår matematik (artiklen angår eksplicit aritmetik, algebra og analyse, men ikke geometri). Om sætningen $3 + 2 = 5$ skriver han:

> ... it merely states that any set of 3+2 objects may also be

> said to consist of 5 objects. And this is so because the symbols "3+2" and "5" denote the same number; they are synonymous by virtue of the fact that the symbols "2," "3," "5," and "+" are *defined* (or tacitly understood) in such a way that the above identity holds as a consequence of the meaning attached to the concepts involved in it. (Hempel (1945), s. 379)

Sætningen $3 + 2 = 5$ er sand af analoge grunde til at vi mener at ingen 60-årige er 45 år gamle. Begge er sande i kraft af definitioner eller tilsvarende aftaler som bestemmer betydningen af nøglebegreber som indgår. Sådanne sætninger kaldes for *analytiske*. Hempel skriver at denne type sætninger deler visse væsentligt karakteristika: at deres gyldighed ikke kræver empirisk underbygning og at de kan vises at være sande ved en analyse af den mening som er tilknyttet begreberne som optræder i dem. Dvs. ingen empirisk basis eller vidnesbyrd er påkrævet for at etablere sandheden af aritmetikkens sætninger. Det kan godt være at visse erfaringer *psykologisk* er med i begrebsdannelsen, men det er irrelevant for Hempel som vil finde *grundlaget* for at aritmetikkens sætninger skal accepteres som sande. Ligesom formalisterne, hævder Hempel at matematiske sætninger intet har at gøre med fakta:

> The propositions of mathematics are devoid of all factual content; they convey no information whatever on any empirical subject matter. (Hempel (1945), s. 390).

Hempels konventionalisme er en *logicisme*, hvilket han definerer på følgende måde:

> Mathematics is a branch of logic. It can be derived from logic in the following sense:
>
> **a** All the concepts of mathematics, i.e. of arithmetic, algebra, and analysis, can be defined in terms of four concepts of pure logic.
>
> **b** All the theorems of mathematics can be deduced from those definitions by means of the principles of logic.
>
> (Hempel (1945), s. 389)

Denne position rejser to spørgsmål. For det første: hvordan kan det være at vi laver de aftaler vi gør for aritmetikken, eller formuleret i Hempels termer, hvorfor vælger vi præcis de basale eller primitive termer vi gør? For det andet, hvorfor er matematik et effektivt værktøj i naturvidenskaberne? Hempel svarer desværre ikke på første spørgsmål, hvilket vel kan forstås når artiklen drejer sig om grundlaget for matematisk sandhed. Hvad angår det andet spørgsmål svarer han ved at tage udgangspunkt i et eksempel med en gas som opfylder Boyles lov om at produktet af en gas volume og tryk er en konstant (ved fastholdt temperatur). Denne konstant bestemmes f.eks. ved at gange værdierne $p = 9atm$ og $v = 4fod^3$, hvorved fås at konstanten er $36atm \cdot fod^3$. Når trykket derfor er $6atm$ er volumenet $6fod^3$, hvilket kan testes på virkeligheden. Hempel mener at hele forudsigelseskraften ligger i Boyles lov og i begyndelsesdata, ikke i aritmetikkens sætninger. Om matematikkens funktion, skriver Hempel, at:

> ... it renders explicit certain assumptions or assertions which are included in the content of the premisses of the argument (in our case, these consists of Boyle's law plus additional data); mathematical reasoning reveals that those premisses contain — hidden in them, as it were, — an assertion about the case as yet unobserved. In accepting our premisses — so arithmetic reveals — we have — knowingly or unknowingly — already accepted the implication that the $p$-value in question is 6. Mathematical as well as logical reasoning is a conceptual technique of making explicit what is implicitly contained in a set of premisses. (Hempel (1945), s. 390)

Dette svar rejser det andet spørgsmål om matematikkens effektivitet stillet i indledningen, nemlig hvorfor er matematikkens *ræsonnementer* effektive redskaber til at presse juicen ud af præmisserne, som Hempel beskriver det? Dette forklarer Hempel desværre ikke.

I bogen *Science and Hypothesis* (fransk udgave 1903, engelsk 1952) giver matematikeren Henri Poincaré (1854-1912) udtryk for den modsatte type konventionalisme, nemlig hvad angår geometri, men ikke aritmetik. Her kommer han ind på hvorfor vi vælger netop euklidisk geometri som den 'grundlæggende' geometri. Jeg starter med at beskrive hvilken status aritmetik har hos Poincaré. Han undersøger rekursion-ræsonnementer, som danner basis for matematisk induktion, således at matematisk induktion er bevis ved rekursion. Poincaré undersøger definitionen af addition. Han antager at operationerne $x + 1$ og $x + (a - 1)$ er definerede. Hvad der end kan siges om disse definitioner, optræder de ikke i det følgende som andet end en definitioner. Det næste man gør er at definere operationen $x + a$, dvs. additionen af tallet $a$ til et givet tal $x$ udfra identiten: $(I) x + a = [x + (a - 1)] + 1$. Vi ved hvad $x + a$ er, fordi vi har antaget at vi ved hvad $x + (a - 1)$ og $x + 1$ er. Vi kan efterfølgende definere operationerne $x + 2, x + 3$, osv. rekursivt. Dette princip adskiller sig fra en ren logisk definition; identiteten $I$ indeholder et uendeligt antal af adskilte definitioner som hver kun har mening når vi kender dens forgængers mening.

Men hvordan kan dette princip legitimeres? Poincaré mener at det ikke kan begrundes på basis af syllogismer, for syllogismer kan ikke fortælles os noget essentielt nyt og dette gør rekursionsprincippet. Da princippet ikke kan vises ud fra syllogismer, kan det ikke være analystisk, men på den anden side tilegner vi os det heller ikke vha. eksperimenter. Eksperimenter kan fortælle os at reglen gælder for de første 10 eller hundrede tal, men det kan ikke fortælle os at den gælder for en uendelig række af tal. Poincaré skriver:

> Why then is this view imposed upon us with such an irresistible weight of evidence? It is because it is only the affirmation of the power of the mind which knows it can conceive of the indefinite repetition of the same act, when the act is once possible. The mind has a direct intuition of this power, and experiment can only be for it an opportunity of using it, and thereby of becoming conscious of it ... Mathematical induction — *i.e.*, proof by recurrence — is ... necessarily imposed on us, because it is only the affirmation of a property of the mind itself.(Poincaré (1952), s. 12-13)

Hvad angår aritmetikken er Poincarés position således en form for konstruktivisme, idet han mener at studiet af denne del af matematikken giver indsigt i de strukturelle egenskaber ved bevidstheden (se side 24).

Poincaré skelner mellem aksiomer i analyse og i geometri. Aksiomer i analyse er f.eks. 'to ting som hver er lig med den samme ting, er lig med hinanden' og han hævder at disse aksiomer er intuitivt indlysende alene ud fra logik/semantik og uafhængigt af erfaringen. Poincaré kalder dem analytisk a priori intuitioner. Geometriske aksiomer er f.eks. 'der går netop én linie gennem to adskilte punkter'. Poincaré skriver om naturen af disse geometriske aksiomer:

> Are they synthetic *à priori* intuitions, as Kant affirmed? They would then be imposed upon us with such a force that we could not conceive of the contrary proposition, nor could we build upon it a theoretical edifice. There would be no non-Euclidean geometry. (Poincaré (1952), s.48)

Hvorfor nu det? Betragt induktionsbeviset: hvis en sætning er sand for tallet 1, og hvis den kan vises at være sand for $n + 1$ under forudsætning af at den er sand for $n$, så er den sand for alle tal. Poincaré har argumenteret for at induktionsbeviset er et syntetisk a priori princip. Lad os prøve at forkaste induktionsbeviset og samtidig konstruere en aritmetik hvis forhold til den sædvanlige aritmetik er analogt til forholdet mellem euklidisk og ikke-euklidisk geometri. I ikke-euklidisk geometri har vi fjernet et aksiom, nemlig parallel-postulatet, fra euklidisk geometri. Jeg tror at det Poincaré sigter til er en tilsvarende fjernelse af et af Peanos aksiomer. Poincaré mener at vi ikke vil være i stand til at konstruere en sådan aritmetik, men angiver ikke en nærmere begrundelse. Vi kan altså konstruere en geometri som er forskellig fra euklidisk geometri, men ikke en aritmetik som på analog vis er forskellig fra den sædvanlige aritmetik, så geometri og aritmetik må være væsensforskellige. Aritmetik er syntetisk a priori, så geometri kan ikke være syntetisk a priori.

Men hvis geometriske aksiomer ikke er syntetisk a priori sandheder, er de så eksperimentelle sandheder? Definitionen af at to figurer er ens, er at de kan overlejres, dvs. de kan flyttes så de dækker hinanden. Men hvordan kan de flyttes? Svaret er at det skal ske uden at de deformeres og på samme måde som et fuldstændigt stift legeme flyttes. Grunden til at det virker indlysende hvordan et sådant legeme flyttes, er at vi lever i verden hvor vi er vænnet til eksistensen af faste legemer og ikke i verden hvor der kun eksisterer væsker. Vi ræsonnerer således hele tiden som om geometriske figurer opfører sig som fuldstændige faste legemer, men der eksisterer ikke sådanne legemer i den virkelige verden. Hvis geometrien var eksperimentel funderet ville den ikke være en fuldstændig eksakt videnskab, fordi dens sætninger ville være underkastet forsat revision, ja den ville ligefrem blive bevist at være fuld af fejl. Poincaré mener at dette ikke er en korrekt beskrivelse af geometri, så den kan ikke være en eksperimentel videnskab. Poincaré konkluderer:

> *The geometrical axioms are therefore neither synthetic à priori intuitions or eksperimental facts.* They are conventions. (Poincaré (1952), s. 50, hans kursiv)

Hvis vi skal vælge mellem alle mulige konventioner for aksiomerne og dermed geometri, kan vi lade os guide af eksperimentelle fakta, men valget forbliver frit og er kun begrænset af nødvendigheden af at undgå modsigelser. Det svarer til valget af sprog. Fordi aksiomerne bare er konventioner, kan de forblive helt sande selvom de eksperimentelle love som har bestemt deres valg kun er approksimationer. Med andre ord er geometriens aksiomer kun definitioner i forklædning. Vi kunne for den sags skyld lige så godt vælge ikke-euklidisk geometri, for en geometri kan ikke være mere sand end en anden. Euklidisk geometri er den mest bekvemme geometri, for det første fordi den er den simpleste og for det andet fordi den i tilstrækkelig grad stemmer overens med de egenskaber som de faste legemer i den fysiske virkelighed har og som er de legemer som vi sammenligner og måler vha. vore sanser.

## 3.6 Matematisk empirisme

Den filosofiske retning empirisme har to hovedteser angående vores erkendelse generelt (altså ikke kun matematiske erkendelse): Den første går ud på at alle begreber er afledt af sanseerfaringer, mens den anden tese siger at ethvert udsagn som hævder noget om faktiske forhold er begrundet i sanseerfaringen. Empirismen er traditionelt en induktivisme, dvs. generelle lovmæssigheder sluttes udfra enkeltobservationer. Hvis vi f.eks. ud fra en masse observationer af hvide svaner slutter at alle svaner er hvide, har vi foretaget en induktiv slutning. Traditionelt skelner empiristerne mellem naturvidenskaberne og matematikken, hvor de to teser gælder for naturvidenskaberne, men ikke for matematikken. Filosoffen John Stuart Mill (1806-73) har udvidet empirismen til også at gælde for matematik og har i "A System of

Logic"(1843)[7] udviklet den klassiske form for matematisk empirisme, dvs. det synspunkt at matematik er en empirisk videnskab på linie med naturvidenskaberne. Mills overordnede mål er at vise at alle deduktive videnskaber, og altså ikke bare matematik, i virkeligheden er induktive og at deres grundlag i sidste instans er erfaringen. Dette mål står i modsætning til en såkaldt hypotetisk-deduktiv opfattelse af naturvidenskaberne, hvor det er logiske udledninger af nogle sætninger som testes, men mere om det senere. Mill forfægter altså en induktiv videnskabsopfattelse, hvor samtlige videnskaber bygger på empiriske generaliseringer.

Mill modsætter sig det synspunkt at matematik er rent sproglige konventioner, idet han mener at i ethvert trin i en aritmetisk eller algebraisk beregning foregår en induktion, hvor fakta udledes fra fakta. Skovsmose skriver at Mill hævder at matematikken har et genstandsområde og at den som de empiriske videnskaber handler om noget:

> Ten must mean ten bodies, or ten sounds, or ten beatings of the pulse. But though numbers must be numbers of something, they may be numbers of anything. Propositions, therefore, concerning numbers have the remarkable peculiarity that they are propositions concerning all things whatever; all objects, all existences of every kind, known to our experience. (Mill i Skovsmose (1990) s. 18)

Påstanden $1 + 2 = 3$ udtrykker en identitet, og man kunne tro at $1 + 2$ og 3 refererer til den samme størrelse, som en konventionalist ville hævde. Men Mill skriver:

> This, however, though it looks so plausible, will not bear examination. The expression 'two pebbles and one pebbles', and the expression 'tree pebbles', stand indeed for the same physical fact. They are names of the same objects, but those objects in two different states: though they denote the same things, their connotation is different. (Mill i Skovsmose (1990), s. 18)

Det er forskellige sanseindtryk vi modtager alt efter om de tre sten er samlet eller de er delt i to bunker. Sætningen $1+2 = 3$ påstår at vi ved flytte rundt på stenene kan modtage det ene eller det andet sanseindtryk. Hvad angår en grundlæggende matematisk påstand som at $1 + 2 = 3$, skriver Mill:

> It is a truth known to us by early and constant experience — an inductive truth: and such truths are the foundations of the science of numbers. The fundamental truths of that science all rest on the evidence of sense; they are proved by showing to our eyes and our fingers that any number of objects, ten balls, for

[7] Min fremstilling bygger dog på Skovsmose (1990).

> example, may by separation and rearrangement exhibit to our senses all the different sets of numbers the sum of which is equal to ten. (Mill i Skovsmose (1990), s. 19)

I dette citat hævder Mill altså for det første at en sådan basal matematisk påstand er en empirisk påstand, hvis sandhed vi lærer ved at foretage en induktiv slutning direkte ud fra sanseindtryk. Dertil kommer at Mill hævder at matematiske ræsonnementer bygger på empiriske manipulationer med fysiske objekter. Hempel (1945) skriver at ifølge Mill er grunden til at vi opfatter matematiske påstande som meget mere sikre end naturvidenskabelige påstande, er at de første i langt højere grad end de sidste er blevet testet.

Mill skriver at hele matematikken er induktiv, men hans eksempler er hentet fra aritmetikken og algebraen og den matematik der var kendt på hans tid var helt anderledes end vore dages. Spørgsmålet rejser sig derfor om man skal tolke hans filosofi som gældende for hele matematikken. Jeg tror det er svært at finde personer som vil opretholde at hele matematikken er induktiv baseret, og ikke kun dele af den.

Ifølge Skovsmose spurgte logikeren Gottlob Frege (1848-1925) retorisk om hvilket observeret eller fysisk faktum tallet 777684 svarer til? Frege foreslog selv at Mill kan påpege at store tal dannes udfra mindre tal, som så fundereres empirisk. Men hvis f.eks. 11 kan defineres udfra 10 og 1, kan 2 vel defineres udfra 1 og 1, og det er svært at påpege at tallet 1 er empirisk givet. For har vi abstraheret det fra begrebet et fysisk objekt, er det vel snarere givet uafhængigt af erfaringen. Det er sådanne argumenter som gør at der er fremkommet mere sofistikerede versioner der ikke, som empirisme, baserer matematiske sætningers sandhed på direkte sanseindtryk, men på manipulationer med objekterne i den fysiske verden eller observationer af sådanne manipulationer. Disse positioner går under betegnelsen *naturalisme.*

## 3.7 Naturalisme

Philip Kitcher opstiller i bogen *The Nature of Mathematical Knowledge* fra 1983 en sådan naturalistisk[8] matematik-filosofi. Hans erklærede mål er at forstå hvordan både almindelige mennesker og professionelle matematikere opnår matematisk viden. I Kitchers redegørelse opnår individerne det meste af deres matematiske viden ved en overførsel fra det samfund de tilhører. Denne overførsel sker via lærere og lærebøger som Kitcher kalder for samfundets autoriteter. Samfundsautoriteternes viden er på sin side overført fra tidligere tiders samfund og autoriteterne i disse samfunds viden. På denne måde kan et nutidig individs matematiske viden forklares via en kæde tilbage til starten af den matematiske viden. I det nyeste led i kæden står autoriteterne i vore dages samfund, dvs. lærerne og lærebøgerne idag. Kitcher skal

[8] I bogen kalder han sin filosofi for matematisk empirisme, men i en senere artikel mener han at den retteligt burde hedde naturalisme.

redegøre for hvordan individerne i det første led i kæden opnåede matematisk viden, hvilket han mente skete på baggrund af sansning. For flere tusinde år siden lærte vores forfædre, sandsynligvis helt tilbage i Mesopotamien, nogle basale aritmetiske og geometriske sandheder på baggrund af praktiske erfaringer. Fra denne ydmyge start blomstrede matematikken op til det vi kender i dag, ved en udvikling hvor problemer løses, hvilket medfører nye problemer og spørgsmål. Grækerne udviklede teorier som systematiserede babylonernes metoder og løsninger på praktiske problemer. Dvs. grækernes viden var baseret på babylonernes empiriske viden, mens grækernes viden dannede basis for deres efterkommeres viden. Pappus og Diofantes var kilder til inspiration for Fermat som på sin side inspirerede Gauss, Kummer og Kronecker. Euklid og Descartes satte scenen for Newton og Leibniz, hvis metoder udvides og modificeres af Euler, Lagrange, Cauchy og Weierstrass. Nye matematiske emner har deres udspring i tidligere teorier. Kitcher beskriver kortfattet sin teori således:

> I propose that a very limited amount of our mathematical knowledge can be obtained by observations and manipulations of ordinary things. Upon this small basis we erect the powerful general theories of modern mathematics. (Kitcher (1983), s. 92)

For at retfærdiggøre denne opfattelse af matematisk viden, mener Kitcher at han for det første må redegøre for hvordan denne kæde, som går fra Mesopotamiens matematiske viden til vore dages matematik er startet, dvs. han skal beskrive hvor fra den allerførste matematiske viden stammer. For det andet må han redegøre for at den matematiske udvikling er sket på en måde som er i overensstemmelse med 'kæde-beskrivelsen', altså levere en redegørelse for hvordan ændringerne sker, som udover at stemme overens med kæde-beskrivelsen, ikke er i modstrid med matematikkens faktiske udvikling. Kitchers matematik-filosofi består af disse to dele. Jeg vil forsøge nogenlunde kort at redegøre for hans hovedtanker om det første punkt, som er det vigtigste i min undersøgelse.

Kitcher skriver at matematik handler om de strukturer som er til stede i den fysiske virkelighed:

> I shall attempt to work out an interpretation which will give sense to the thesis that mathematics is about structure... By taking mathematical structure to be reflected in the properties of ordinary things, we can begin to dissolve epistemological perplexities. Perception can be viewed as a process in which our causal interaction with ordinary objects lead us to discern the structure which they exemplify. There is no suggestion of a gap between these ordinary objects and other, more ethereal, entities which lurk behind them. (Kitcher (1983), s. 107)

Vi opnår matematiske viden, enten ved overførsel fra autoriteterne eller ved erkendelse af disse strukturer. Den måde vi opnår erkendelse om disse strukturer er ved manipulationer med de fysiske objekter eller ved at observere andre foretage disse manipulationer.

Grundlæggende matematisk viden vil for Kitcher sige de elementære teorier for de naturlige tal og geometri (herunder nogle af de reelle tals egenskaber). Det første han redegør for er aritmetikken, en redegørelse som jeg vil beskrive lidt mere indgående end de andre.

I stedet for at tænke sig til hvordan babylonerne (eller hvor den matematiske viden nu havde sit udspring) opnåede matematisk viden, vil Kitcher beskrive hvordan et barns leg med klodser kan føre til at det opnår rudimentær matematisk viden. Det skal understreges at Kitcher ikke mener at han har givet en beskrivelse af hvordan nulevende personers aritmetiske viden er perceptionsbaseret, for han mener at det meste af den nuværende matematiske viden generelt og aritmetisk viden i særdeleshed, er overført fra det nuværende samfund til det nuværende individ. Det er snarere et forsøg på en forklaring af hvordan vore fjerne forfædre som startede den matematiske tradition kunne have opnået aritmetisk viden ud fra sansning. Det skal dog også tjene som beskrivelse af hvordan de nulevende mennesker opnår noget af deres matematiske viden.

I sin leg med klodser, udskiller og undersøger barnet nogle klodser, og lægger dem derefter sammen med tidligere undersøgte klodser, en handling Kitcher kalder at *samle*. I en anden situation sætter barnet klodserne i forbindelse med hinanden ved at placerere dem ved siden af hinanden, ovenpå hinanden eller lignende, hvilket kaldes at *korrelere* (efter det engelske ord correlation). Når barnet har udført en del samle- og korrelerehandlinger, bliver det i stand til at udføre operationerne i tankerne uden fysisk at flytte dem rundt, hvorved dets samleoperationer bliver abstrakte. Ved at indføre symboler for disse handlinger, bliver barnet i stand til at danne hierakier af samle- og korrelereoperationer.

Samle og korrelere er de elementære matematisk aktiviteter, fordi barnet, ved selv at udføre eller observere andre foretage disse operationer, lærer betydningen af 'mængde', 'tal', 'addition' og basale aritmetiske sandheder. Ifølge Kitcher skal vi ikke fortolke disse aktiviteter som vejen til viden om abstrakte objekter som platonikerne ville hævde, men snarere sådan at de basale aritmetiske sandheder er sande i kraft af selve operationerne. Ved at foretage aktiviteter som at lege med klodser lærer vi at bestemte typer af samlingsaktiviteter har bestemte egenskaber. Vi lærer f.eks. at foretager vi først samlingsoperationen som kan kaldes 'at lave to' på nogle objekter og dernæst samlingsoperationen på nogle andre objekter fra en anden gruppe kaldet 'at lave tre' og til sidst foretager samlingsoperationen 'at kombinere', svarer den totale operation til samlingsoperationen 'at lave fem'.

De handlinger som barnet der leger med klodser benytter sig af, bruger Kitcher nu til at opstillen en såkaldt *Mill'sk aritmetik* som er et alternativ til standard-aritmetik for de naturlige tal ved at introducere begrebet *udskillelse-operationer*, hvor fysiske objekter, f.eks. klodser, udskilles. Han opstiller aksiomer svarende til Peanos aksiomer og additions-aksiomer for standard aritmetik i termer af sådanne udskillelsesoperationer, nemlig en-operation, efterfølger-operation, additions-operation og at to operationer er tilsvarende. De tre første kan forstås umiddelbart i forhold til eksemplet med barnet som leger med klodser, mens to operationer kaldes tilsvarende hvis de udskiller de samme objekter. Jeg vil ikke gå i detaljer med hvordan han udformer aksiomerne, kun bemærke at han støder ind i problemer med at der er uendelig mange naturlige tal, men at mennesker kun kan udføre endeligt mange operationer. Men fordi man ofte har det indtryk at man kunne fortsætte med at foretage udskillelser så længe man lyster, er det på sin vis tilfældigt at man stopper efter et vist antal operationer. Kitcher mener derfor at man kan indføre en *ideel agent* som ikke har vores tilfældigheder i hvilke operationer vi udfører og vores biologiske begrænsninger og som derfor kan foretage uendelig mange operationer.

Kitcher mener at relationen mellem den faktiske og den ideelle agents aritmetiske operationer er som relationen mellem ideelle og faktiske gasser i fysikken. Vi kan opfatte idealgas-ligningen enten som del af en implicit specifikation af hvad en idealgas skal opfylde eller vi kan opfatte idealgas defineret på et højere plan, ud fra kinetisk gasteori, og opfatte ligningen som udledt udfra denne teori. Men vores viden er ikke udtømt ved at sige at en idealgas er defineret med ligningen eller at vi kan udlede den fra kinetisk gasteori. Vi må forklare hvad det er der gør den *aftale* fornuftig, som ligger bag at kalde en gas som tilfredsstiller ligningen for en idealgas. Aftalen er fornuftig eller rettere sagt den giver viden, dels fordi den er passende begrundet da faktiske gasser tilnærmelsesvis opfører sig som idealgasser, dels fordi man ved hjælp af kinetisk gasteori kan nå frem til udtrykket, under passende antagelser. Denne opdagelse gør at vi kan abstrahere fra visse træk ved den faktiske situation til et begreb om idealgas, som viser hvordan faktiske gasser ville opfører sig hvis komplicerende faktorer blev fjernet. På tilsvarende vis med ideelle og reelle agenter, hvor de ideelle agenter er fornuftige fordi man har fjernet komplicerende faktorer, men sådan at reelle agenter tilnærmelsesvist opfører sig som ideelle.

Som konstruktivisterne mener Kitcher at aritmetiske sætninger er sande i kraft af de operationer vi foretager os, men i modsætning til dem, mener han at de relevante operationer ikke er private transaktioner i et eller andet indre mentalt medium. Hans tese har et vist realistisk indhold, fordi strukturerne eksisterer uafhængigt af os i den fysiske verden:

> ... we might consider arithmetic to be true in virtue not of what *we can do* to the world but rather what *the world* will let us do *to it*... arithmetic describes those structural features of the world in virtue of which we are able to segregate and

> recombine objects: the operations of segregation and recombination bring about the manifestation of underlying dispostional traits... I want to suggest both that arithmetic owes its truth to the structure of the world and that arithmetic is true in virtue of our constructive activity. (Kitcher (1983), s. 108-9)

Hans position adskiller sig fra platonisterne ved at det ikke er en abstrakt verden matematikken eksisterer i. Men er det ikke inkonsistent eller udtryk for en sammenblandingen at påstå at aritmetikkens sandhed både skyldes verdens struktur og vores konstruktive aktiviteter? Udfra følgende analogi argumenterer Kitcher for at det ikke er inkonsistent. En person som kun kender før-Lobatjevskisk geometri og som kommer til vort århundrede, vil måske sige at påstanden 'vinkelsummen i en trekant er 180 grader' er sand i kraft af *både* trekanters egenskaber og rummets struktur. Man kan fornuftigt mene at den ontologiske tese at en geometrisk påstands sandhed skyldes trekanters egenskaber, simpelthen er en formulering af den ontologiske tese at geometriske påstandes sandhed skyldes rummets struktur. Trekanters egenskaber skyldes rummets struktur, og omvendt vil et rums struktur sige at trekanter har de og de egenskaber. På tilsvarende vis skal dobbeltheden i Kitchers svar på spørgsmålet 'hvorfor er aritmetiske sandheder sande?', forstås som to sider af samme svar.

Kitchers mål er at give en redegørelse for matematisk virkelighed således at den viser at perception kan være en basis for elementære matematiske påstande. Han mener nu at have givet en sådan redegørelse for aritmetiske påstande. Udover aritmetikken regner han også geometrien, inklusiv de dele af egenskaberne for de reelle tal som de gamle grækere indlejrede i geometri, som elementær matematisk viden.

Kitcher opsummerer sin holdning til geometri på følgende vis:

> Our geometrical statements can finally be understood as describing the performances of an ideal agent on ideal objects in an ideal space. However, these performances are sufficiently similar to what we do with actual objects in actual space to justify us in the attempt to unfold the character of those performances, an attempt which contitutes Euclidean geometry. (Kitcher (1983), s. 124)

Kitchers opfattelse af geometri er altså analog til hans beskrivelse af aritmetik.

Kitcher mener at de reelle tal har samme forhold til det at måle, som de naturlige tal har til det at tælle. I vore dage konstrueres de reelle tal som mængder af rationale tal, som igen konstruereres udfra de naturlige tal. $\sqrt{2}$ kan f.eks. defineres som $\{r \in \mathbf{Q} | r^2 < 2\}$. Kitcher vil vise at det at acceptere den mængde-teoretiske tilgang til de reelle tal, ikke nødvendigvis medfører at man må acceptere platonikernes påstand om at de reelle tal er abstrakte objekter. For at vise dette omformulerer han Zermelo-Fraenkels aksiomer for mængdelæren i termer af operationer som vi udfører på fysiske objekter. Dvs. han omformulerer dem fra samlinger til samleoperationer. Jeg vil ikke beskrive detaljerne i hvordan han kommer frem til aksiomerne, blot konstatere at han udvikler teorien for ordnede par og for relationer uafhængigt af mængdelæren, en skelnen som ikke indføres i standard-mængdelære. Det gør han for at kunne tilskrive det ideelle matematiske subjekt *to* fundamentale evner: evnen til at udføre samling og evnen til at udføre parvis ordning. Udover dette adskiller hans mængdelære sig fra standard-mængdelære i to henseender. For det første refererer han ikke til objekter men til operationer og for det andet opfatter han den resulterende teori som sand i kraft af de aftalte betingelser som det ideelle matematiske subjekt skal opfylde.

Kitcher mener nu at han har opstillet en måde hvor på man kan opfatte matematik, ikke som beskrivende abstrakte objekter, men som en idealiserende videnskab om de to distinkte operationer, samling og ordning.

Det er interessant at matematikeren Saunders Mac Lane (Mac Lane (1986, 1990, 1997)) og psykologen Jean Piaget er inde på nogle tanker som meget minder om Philip Kitchers. De er alle tre strukturalister, idet de opfatter matematik som en beskrivelse af strukturer i den fysiske verden. Mac Lane mener at elementære dele af matematikken har sin oprindelse i praktiske anvendelser og at resten er opstået udfra en udvikling i matematikken, som dels er betinget af indre faktorer, dels af menneskelige aktiviteter i det hele taget (han nævner f.eks. gambling). De adskiller sig ved at Kitcher medtager lærernes overførsel af matematisk viden til eleverne, og det ene samfunds overførsel af viden til det næste. Desuden er Mac Lane ikke helt klar hvad angår præcis hvordan vi opnår den elementære viden, men det virker som om han er tæt på Mills opfattelse, som jo adskiller sig fra Kitchers opfattelse. På dette punkt er Kitcher og Piaget enige, idet Piaget skriver:

> The essential fact is that... logico-mathematical experience has to do with the actions which the subject carries out on the objects. (Beth & Piaget, i Skovsmose(1990), s. 99).

Dette er den måde som barnet opnår matematisk erkendelse, og ikke ved en overførsel fra andre subjekter. På dette punkt adskiller Kitcher og Piaget. Desuden inddrager Piaget vist ikke matematikkens udvikling i sin redegørelse.

De adskiller sig alle tre ved den *metode* de har anvendt til at komme frem til resultaterne. Filosoffen Kitcher er meget filosofisk stringent, han bruge f.eks. ca. 20 sider på at definere hvornår vi har a priori viden som er begrundet, mens Mac Lane beskriver en meget stor del af matematikken (også langt mere advancerede emner end Kitcher har med), for så at drage sine konklusioner, mens Piaget tager den eksperimentelle psykologi i brug. De er altså fra tre vidt forskellige udgangspunkter og metoder nået frem til nogenlunde de samme resultater.

## 3.8 Et eksempel

For at give et eksempel på forskellen mellem konventionalisme, empirisme og naturalisme, kan man spørge hvordan de forholder sig til den matematiske påstand at summen af vinklerne i en euklidisk trekant er 180°? I følge konventionalisterne (Poincarés variant) er euklidisk geometri en konvention, så trekantsætning er ligeledes en konvention. Kitcher mener at vi opnår erkendelse om denne sætning ved manipulationer med fysiske objekter. Vi kunne f.eks. klippe i en paptrekant og samle stumperne på en sådan måde at vi bliver overbevist om at vinkelsummen er lige med to rette vinkler. Mill vil hævde at vi måler vinkelsummen i en hel masse trekanter og derfra slutter at alle trekanter har vinkelsummen 180°.

# Kapitel 4

# Diskussion

Vi er nu klar til at beskrive hvad de forskellige positioner svarer på spørgsmålene skitseret i udspændingen af diskussionen i kapitel 2, enten hvad de rent faktisk svarer eller hvad jeg tror de ville svare.

## 4.1 Er naturen kilde til matematiske begreber?

Det første spørgsmål er: Er de matematiske aksiomer afledt af naturen i en eller anden forstand?

I David Hilberts version af formalismen[1] er de formelle teorier formaliseringer af de uformelle matematiske teorier. Hilbert selv formaliserede f.eks. den euklidiske geometri, ved at gøre Euklids implicitte aksiomer, eksplicitte. Samtidig løsrev han definitionerne fra deres tilknytning til den fysiske virkelighed. Formålet med denne formalisering var at give matematikken et sikkert grundlag ved at bevise konsistensen af de matematiske teorier, så de formaliserede teorier var *ikke* et mål i sig selv. På dette punkt adskiller Hilbert sig fra dem jeg har kaldt formalisterne, men disse overtager denne opfattelse af aksiomerne som referenceløse i forhold til virkeligheden. Matematik er bare et spil med symboler. Dette gør at det er svært at forestille sig at formalisterne mener at naturen er kilde til de matematiske aksiomer, selvom det er muligt at Hilbert mente dette.

Ifølge Poincarés konventionalistiske redegørelse for geometrien er erfaringen med til at lede vores valg af geometri, og grunden til at vi har valgt euklidisk geometri er at den er mest bekvem: dels fordi det er den simpleste geometri og dels fordi der er tilstrækkelig overensstemmelse mellem denne geometri og de egenskaber som faste legemer i naturen har. Naturen har altså en vis indflydelse på vores geometriske begreber, men den spiller langtfra en altafgørende rolle. Situationen er analog til idealgas-loven i fysik som virkelige gasser tilnærmelsesvist opfylder, og som medfører store simplificeringer. På samme måde som euklidisk geometri er simpel, men samtidig er

[1] Hilberts version går for at være forskellig fra det jeg har kaldt formalismen.

i rimelig overensstemmelse med virkeligheden, er idealgas-loven enkel, uden at være meget forkert (i et passende temperatur- og tryk-område). Et andet eksempel er en ohmsk-modstand, som på samme måde er enkel og tilnærmelsesvis korrekt. På denne måde svarer geometriens aksiomer til definitionerne indenfor fysikken.

Hempel kommer ikke ind på spørgsmålet om naturen er kilde til matematiske begreber, men skriver dog

> It may very well be the case that certain experiences occassion psychologically the formation of arithmetical ideas and in this sense form an empirical "basis". (Hempel (1945), fodnote s. 379)

Dette kan man forstå sådan at de matematiske begreber indenfor aritmetikken dannes i vores bevidsthed på baggrund af naturen, idet den giver os nogle sanseindtryk.

Konstruktivisterne mener at vore matematiske begreber alene eksisterer i vores bevidsthed, idet vi selv har konstrueret dem. Man kunne forestille sig konstruktivister som mener at vi konstruerer matematiske begreber på baggrund af naturen, men dette er blot en anden form for naturalisme, som jeg beskriver om lidt. Når vi undersøger matematiske entiteter med 'sindets øje' bliver vi opmærksomme på de principper som nødvendigvis må gælde for al erfaring. Man kan derfor sige at i stedet for at matematiske begreber er afledt af vores erfaring med naturen, er situationen snarere den modsatte, således at nogle af vore matematiske begreber er en del af vores mentale erfaringsstruktur. Dvs. disse matematiske begreber er ikke blot givet uafhængigt af erfaringen, men forud for den, jvf. Brouwers tanke om at matematiske begreber er 'indstøbt' i den menneskelige hjerne (se side 24).

Ifølge platonikerne eksisterer matematikken i en abstrakt verden, dvs. en verden som hverken er tids- eller rumlig og som er uafhængig af vores erkendelse af den. Da den eksisterer udenfor vores bevidsthed kan den ikke bestå af begreber vi har konstrueret mentalt ved at abstrahere træk fra virkeligheden. Ifølge denne position er naturen derfor ikke kilde til de matematiske begreber[2].

I de empiriske og naturalistiske positioner, dvs. i Mills, Kitchers (også Mac Lanes og Piagets) og Maddys redegørelser, er naturen kilde til i hvert fald en del af de matematiske begreber. Mill mener at man abstraherer matematiske begreber som tallet 10 udfra sanseindtryk som ti legemer og ti lyde osv. Alle tallene abstraheres på denne måde udfra sanseindtryk, men som Frege påpeger, er det svært at finde et sanseindtryk som svarer til tallet 777684. En mere nutidig empirisme ville påstå at sanseindtryk giver viden om aritmetiske sætninger, og på baggrund af disse sætninger opstilles Pea-

[2]Platon selv mente at *fænomenerne* som er objekterne vi observerer, er afspejlinger af *ideerne* i idéverden hvor de matematiske objekter eksisterer. Denne fortolkning vil de færreste vist gå med til idag.

nos aksiomer for de naturlige tal og additionsaksiomerne ved en efterrationalisering. Kitcher, Mac Lane og Piaget påstår at elementære matematiske sætninger abstraheres fra den fysiske virkelighed, hvorefter man opstiller Peanos aksiomer og additionsaksiomer, som kan 'forklare' disse sætninger. Fremkomsten af aksiomerne sker, både historisk og i forhold til individet, efter erkendelsen af aritmetikkens principper. I Maddys redegørelse sanser vi en del af matematikken, nemlig mængder, når man betragter objekter i virkeligheden.

Men hvor mange af matematikkens begreber mener naturalisterne og empiristerne at naturen er kilde til? I Kitchers redegørelse opnår vi matematisk viden om de strukturer som eksisterer i den fysiske verden, ved at manipulere med fysiske objekter, hvorved vi får erkendelse om det *ideelle matematiske subjekts* evner; dette subjekt eksisterer ikke, men er et billede på et 'supermenneske' som ikke har vores *tilfældige* begrænsninger. Det er dog kun erkendelse af dele af matematikken vi opnår ved sådanne manipulationer med fysiske objekter, resten er fremkommet ved en indviklet udviklingsproces i matematikken, hvor ny matematik dels er fremkommet som svar på matematiske spørgsmål, dels ud fra ikke-matematiske impulser, f.eks. fra naturvidenskaberne.

Ifølge Mill er *hele* matematikken empirisk baseret, dvs. alle matematiske sætninger er generaliseringer af empiriske påstande. Hans teori er fra 1843 og den 'kendte' matematik på hans tid var meget mindre og meget anderledes end vore dages matematik og han beskriver hovedsageligt aritmetik. Dette gør det nærliggende at stille spørgsmålet om der er nogen idag som ville forfægte en sådan position hvor hele matematikken er direkte empirisk. Det tror jeg ikke, dels på baggrund af Freges påpegning af at det er svært at finde et fysisk faktum der svarer til tallet 777684, dels at der er store dele af matematikken som det er meget svært at forsvare er direkte empiriske. I stedet kunne man mene at *dele* af matematikken er direkte empirisk, såsom aritmetik, uden nødvendigvis at 'købe' Kitchers naturalistiske redegørelse, hvor matematisk viden opstår på baggrund af manipulationer med fysiske objekter. Denne beskrivelse kunne suppleres med en redegørelse for resten af matematikken a la Kitcher og Mac Lane, således at man ville undgå begge ovennævnte indvendinger.

Maddy forfægter i en vis forstand den mest klare form for opfattelse af at naturen er kilde til matematiske begreber, fordi der ikke er noget 'filter' den matematiske erkendelse skal igennem, i form af manipulationer eller generaliseringer. Ifølge Maddy sanser vi direkte nogle elementære matematiske begreber, nemlig mængder, når vi perceperer objekter i den fysiske virkelighed. Når vi først har været udsat for tilstrækkelig mange mængder, har vi dannet langtidsvarende strukturer i vore hjerner og har på denne måde skabt mængde-detektorer. Dette gør at vi opnår intuitive overbevisninger om mængder, således at f.eks. Zermelo-Fraenkels aksiomer fremtræder intuitivt indlysende. Naturen er på denne måde kilde til de matematiske aksiomer hos Maddy. Hun redegør for en mængdelære-realisme, og skriver ikke meget om andre dele af matematikken end mængdelæren, men mener dog at viden om andre elementære matematiske begreber opnås på samme måde som mængdelærens aksiomer. Det er svært at forestille sig at hun forsvarer en position hvor vi direkte sanser *alle* matematiske begreber på samme måde som mængder, hvilket dels ville kræve en detektor for hvert matematisk begreb i hjernen, dels at alle matematiske begreber bliver virkeliggjort i den fysiske virkelighed. Det sidste krav er det, af de samme grunde som hos Mill, temmeligt svært at forestille sig. Jeg tror derfor at hendes redegørelse, som hos Mill, må suppleres med en udviklingsteori for matematikken i stil med Kitchers og Mac Lanes. Et sådant supplement tror jeg ikke ligger Maddy fjernt fordi hun bruger en del kræfter på at argumentere for at matematiske teorier kan retfærdiggøres som en del af vores bedste teori for verden, og ved et sådant supplement kan man forklare de mere advancerede matematiske teorier.

Opsummerende kan man sige at ifølge nogle positioner er naturen overhovedet ikke er kilde til de matematiske begreber, at andre mener at elementære dele af matematikkens begreber er opstået udfra naturen, men at der vist ikke er nogen i dag som mener at *hele* matematikken er opstået på denne måde.

## 4.2 Kommer matematikken med udsagn om den fysiske virkelighed?

I følge Hempel kommer matematikken ikke med udsagn om verden, hvilket han skriver klart i citatet på side 32. Matematiske sætninger er blottet for for alt faktuelt indhold og de overfører overhovedet ingen information om noget empirisk emne. I Poincarés redegørelse har de geometriske aksiomer status af konventioner, så på samme måde som idealgas-loven ikke direkte giver ny indsigt, giver de heller ikke ny indsigt.

Som jeg forstår formalisterne mener de at det er irrelevant om det formelle system er en formaliseret *naturlig* teori eller ej. Det er derfor svært at påstå at formalisterne hævder at matematiske teorier kommer med udsagn om den fysiske verden. Vi kan *fortolke* de matematiske teorier i forhold til et eller andet virkelighedsområde, men dette har på sin vis intet med matematikken at gøre. Hvad formalisterne i hvert fald hævder er at det kun er nogle formelle teorier som er formaliseringer af 'naturlige' teorier, mens kriterierne for hvilke 'spilleregler' som besluttes for andre formelle teorier ikke beskrives. I formalisternes redegørelse kan det således højst være dele af matematikken som udtaler sig om den fysiske virkelighed. Hvis man alligevel påstår at formalisterne hævder at matematiske sætninger siger noget om den fysiske virkelighed, opfatter formalisterne det for første ikke som et væsentligt træk ved de matematiske teorier, og for det andet er det kun dele af de formelle teorier som er formaliseringer af naturlige teorier.

Det er svært at forestille sig hvordan platonisterne, som mener at matematiske objekter eksisterer i en abstrakt verden uafhængig af os, kan hævde at matematikken udtaler sig om den fysiske virkelighed. Konstruktivisterne vil hævde at matematiske sætninger udtaler sig om vores måde at erfare verden på, og derfor om vilkårene for vores erkendelse.

Ifølge Kitcher er aritmetikken sand i kraft af verdens struktur, dvs. vi når frem til aritmetikkens aksiomer (Peanos aksiomer og aksiomer for addition) på baggrund af den fysiske virkelighed. Resten af aritmetikken udledes udfra disse aksiomer, og den kommer derfor med påstande om verdens indretning. Disse påstande er sande for ellers ville aritmetikken være falsificeret i tidens løb, fra de opstod hos babylonerne (eller hvornår det nu var) og til nu. Noget tilsvarende gør sig gældende med euklidisk geometri, de reelle tal og mængdelæren, mens store dele af resten af matematikken er fremkommet på baggrund af en lang udvikling. Disse dele af matematikken behøver derfor ikke at sige noget om verden, som f.eks. ikke-euklidiske geometrier, men gør det dog i nogle tilfælde. Ifølge Mills version af matematisk empirisme udtaler matematikken sig i høj grad om den fysiske verden, aritmetikkens sætninger er f.eks. om alle de objekter vi kender via erfaringen. Som tidligere nævnt er det nok svært i dag at finde fortalere for Mills totale empirisme hvad angår hele matematikken. Jeg tror at det er lettere at forestille sig positioner som hævder at det kun er dele af matematikken som er empirisk baseret. Dvs. begreberne indenfor disse dele af matematikken er opstået på baggrund af den fysiske virkelighed og at de kommer med udsagn om denne virkelighed. Resten af matematikken er udsprunget af disse empiriske dele, og noget af den kommer med udsagn om verden. Altså noget svarende til Kitchers position.

Der er altså positioner som hævder at matematikken kommer med udsagn om den fysiske virkelighed, dvs. vi kan udlede påstande om verden ud fra de matematiske aksiomer. Disse aksiomer er leveringsdygtige i sådanne korrekte udsagn, for hvis sætningerne var forkerte, ville man aldrig have accepteret aksiomerne. Der er også positioner som forfægter det synspunkt at matematikken ikke siger noget om den fysiske verden, enten fordi matematikken kun består af konventioner eller fordi den er tømt for indhold og skal *fortolkes* i forhold til et empriske område, før den kommer med udsagn.

## 4.3 Hvorfor er matematik et effektivt redskab?

De positioner som ikke er empiriske eller naturalistiske, er ikke meget for at forklare om naturen er kilde til matematikken. Platonismen, formalismen og konstruktivismen er svære at fortolke som positioner der advokerer for at naturen er kilde til matematiske begreber. Desværre er de endnu mindre interesserede i at forklare hvordan det kan være at matematikken er så succesfuld som redskab i beskrivelsen af den fysiske verden, når matematikkens objekter intet har at gøre med objekterne i denne fysiske verden. I de varianter af formalismen som mener at de formaliserede matematiske teorier er formaliseringer af naturlige teorier, er det ikke så underligt at matematikken er et effektivt værktøj i naturvidenskaberne, for så har den sit udspring i en eller anden ydre virkelighed. Problemet er at nutidens formalister mener at det er irrelevant hvad de formaliserede teorier er formaliseringer af. Konstruktivisterne mener at studiet af matematiske entiteter giver os erkendelse af erfaringsstrukturen i vores bevidsthed. De matematiske entiteter er således en del af vores erfaringsstruktur, hvorfor det ikke er så mærkeligt at dette studie giver erfaringer om den fysiske verden, vores erfaringer er så at sige skrevet i matematik. Matematikkens effektivitet kommer til at fremstå som lidt af et mysterium, hvad angår platonismen, fordi den ikke forklarer hvordan det kan være at studiet af en abstrakt verden giver indsigt i den fysiske verden.

## 4.4 Hvorfor er matematiske ræsonnementer effektive?

Ligegyldigt hvad sammenhængen er mellem de matematiske og de fysiske objekter, er der et behov for en forklaring af hvorfor matematiske *ræsonnementer* er effektive indenfor ikke-matematiske områder, som fysikken.

Ifølge Hempel har matematikken ingen forudsigelseskraft, men trækker logiske konsekvenser ud af præmisserne. Men hvordan kan det være at logiske udledninger er sandhedsbevarende i forhold til virkeligheden? Jeg tror at der er to mulige svar Hempel kan give. Enten en ontologisk tese om verden: sammenhængen mellem objekterne i den virkelige verden adlyder logikkens love (som logicist må Hempel mene at de grundlæggende slutninger alene består af logik), dvs. virkeligheden er skrevet i matematik. Den anden mulighed er at logikkens love på en eller anden måde er afledt af virkeligheden. Jeg tror at begge dele er lige uacceptable for Hempel, den første mulighed fordi han som logisk positivist afviser metafysik som meningsløs, og den anden fordi han mener at logik er analytiske sandheder, dvs. de eksisterer uafhængigt af erfaringen.

Ifølge Davis og Hersh (1981) finder formalisterne det ikke særlig relevant at svare på spørgsmål om matematikkens anvendbarhed. Men hvad kan de svare på problemet om matematiske ræsonnementers effektivitet? Hilbert mener at de formaliserede teorier er formaliseringer af uformelle naturlige teorier. Hilbert formaliserede f.eks. Euklids geometri, som i sig selv var en rigorisering af tidligere teorier for rummet. Hilbert kan påpege at matematiske ræsonnementer 'arver' overførslen af sandhed fra de naturlige teorier som de formaliserer. Maddy er inde på dette i beskrivelsen af den beslægtede position 'hvis - så'-ismen (*if-thenism*), hvis svar på spørgsmålet om anvendbarhed ofte er at en matematisk hvis-så påstand opfattes som en idealisering af en fysisk påstand. Påstanden 'hvis vi har et objekt og et objekt, så har vi to objekter', er en idealisering af 'et æble og et æble er lig med to æbler'. Når videnskabsmanden drager en fysisk slutning, foretager han så at sige en slutning den anden vej, altså en om-idealiseringen af den matematiske påstand. Hvis dette skal være et svar, skal de basale fysiske påstande være fuldstændig matematik-fri, for hvis de indeholder matematik skal vi jo stadig redegøre for denne matematiks forhold til virkeligheden. Desværre virker det som om mange af påstandene i fysik ikke kan formuleres uden matematik, som f.eks. Newtons gravitationslov. Desuden går teorien i virkeligheden hen og bliver empirisk baseret, når den er en idealisering af empiriske sætninger, hvorved man ender i empirisme eller naturalisme.

Konstruktivisterne hævder at matematiske sætninger er sande i kraft af den struktur som vores psykologiske indretning pålægger al erfaring. Konstruktivisterne har derfor ikke et problem med at forklare matematiske ræsonnementers effektivitet i naturvidenskaberne, fordi disse netop angår erfaringer og matematikken angiver betingelser for at vi kan opnå erfaring.

Gödel, Thom og Penrose forklarer ikke (i hvertfald ikke i de artikler jeg har læst) hvordan det kan være at studiet af abstrakte matematiske objekter kan bruges i beskrivelsen af virkeligheden, eller hvorfor matematiske ræsonnementer er effektive. Penrose konstaterer bare i citatet på side 27, at det må være sådan. Gödel åbner dog to muligheder for at platonisterne kan forklare succesen af matematiske ræsonnementer. Den første mulighed er at påpege at i det abstrakte rige hvor matematiske objekter eksisterer, er forholdet mellem objekterne analogt til forholdet mellem objekter i den fysiske verden, sådan at ræsonnementer om de abstrakte objekters relationer er de samme som de ræsonnementer som udføres om de fysiske objekter. De to "riger" skal strukturelt set have fælles træk. Men det virker mirakuløst at der skulle være en sådan sammenhæng. Den anden mulighed er at påpege at matematikken indgår i det Maddy kalder vores bedste teori for verden og argumentere med at når fysiske teorier testes, bliver matematikken og logikken også testet. Filosoffen W.V.O. Quine (f. 1908) er inde på dette:

> ...some...remote confrontation with experience may be claimed even for pure and elementary logic ... For a self-contained theory which we can check with experience includes, in point of fact, not only its various theoretical hypotheses of so-called natural science but also portions of logic and mathematics as it makes use of. (Quine (1954), s. 367)

Dette argument giver matematiske teorier eller rettere sagt de dele af matematikken som anvendes i naturvidenskaberne, et falsifikationistisk træk, hvor falsifikationen sker i forhold til den fysiske virkelighed. Naturen fungerer således som dommer for dele af matematikken, et træk som man jo nok må kalde naturvidenskabeligt. De matematiske teorier som forkastes efter konfrontation med den fysiske virkelighed, kan have været fejlagtige fra vores side i forhold til den objektivt eksisterende matematiske virkelighed. Så konfrontationssynspunktet er ikke nødvendigvis i uoverensstemmelse med en realisme. Hvis man opretholder en realisme hvor objekterne eksisterer abstrakt (altså platonisme) og samtidig bruger konfrontationsargumentet, er man tilbage i at forklare sammenhængen mellem de abstrakte og fysiske objekter. Nu skal man oven i købet forklare hvordan det kan være at konfrontation med den *fysiske* verden kan gøre at vi forkaster nogle af vores teorier om en *abstrakt* verden, så det er ikke en brugbar udvej for platonismen.

I de empiriske og naturalistiske positioner (som Mill, Kitcher, Mac Lane, Piaget og Maddy tilhører) har dele af eller hele den matematiske viden sit udspring i den virkelige verden, enten som direkte observationer eller indirekte gennem manipulationer. De positioner som hævder at det kun er dele af matematikken hvor naturen er kilde til matematisk viden, mener at resten af matematikken er dannet udfra denne elementære matematik. Spørgsmålet er så om restens effektivitet er garanteret udfra den proto-matematiske videns udspring? Mac Lane mener at dette er tilfældet, og nævner at lang tids erfaring med former og konstruktioner af bygninger førte til empiriske observationer om formers egenskaber. Dette dannede grundlag for euklidisk geometri, som angår trekanter og rette linier. Riemannsk geometri og den relaterede tensoranalyse opstod fordi det viste sig at ikke alle former er rette i den virkelige verden, men at nogle er kurvede. At Riemannsk geometri og tensoranalyse kan bruges i en teori for verden, den generelle relativitetsteori, er derfor ikke noget mirakel, men skyldes deres udspring i den fysiske verden.

Dette er måske til at forstå hvis både matematik og fysik har deres udspring i den fysiske verden og udfra stort set samme erfaringsgrundlag, men hvad med teorier hvor dette ikke gør sig gældende, f.eks. komplekse tal og kvantemekanik? Komplekse tal kan ses som opstået efter en indre udvikling i matematikken hvor Cardano introducerede dem i et forsøg på at løse tredie-gradsligninger i det 16'ende århundrede[3]. Ifølge Wigner (1960) er de komplekse tal nødvendige i formuleringen af kvantemekanikken i fysik (f.eks. er Schrödingerligningen en kompleks differentialligning). Men kvantemekanik er så forskellig fra klassisk fysik, for ikke at sige almindelige dagligdags erfaringer, at det kræver en selvstændig argumentation at redegøre for hvordan ræsonnementer som opstod mere eller mindre på baggrund af hverdagserfaringer, kan bruges på et område som er så berygtet for sin kontraintuitivitet.

Kitcher kommer med noget som måske kan bruges som svar. Han skriver:

> The great utility of mathematics will be explained by refer-

[3] Johnny Ottesen har påpeget at Caspar Wessel fremkom med en teori for de komplekse tal i forbindelse med en praktisk anvendelse (landmåling) uden at kende til Cardanos arbejde. Men dette rokke dog ikke ved at Cardanos arbejde fremkom på baggrund af en indre matematisk udvikling.

ence to its delineation of a structure exemplified by all physical objects. (Kitcher (1983), s. 107)

Mac Lane er inde på det samme, idet han argumenterer med en ontologisk tese om verden, nemlig at den udviser visse regulære mønstre som gentager sig og som matematikken afdækker, altså en eller form for at naturen er skrevet i matematikkens sprog. Aritmetikken blev skabt på baggrund af praktiske aktiviteter, såsom tælning, og aritmetikken skabte grundlaget for de komplekse tal. Men det er jo en ret bastant hypotese om verdens indretning at de mønstre som praktiske aktiviteter afdækker, er de samme som de mønstre som atomfysikken afdækker. En anden mulighed er at matematik så at sige er en anskuelsesform, og det derfor kun er muligt at erfare naturen gennem matematikken, en hypotese der jo også rimelig bastant. En tredie mulighed som naturalisterne og empiristerne kan bruge til at forklare effektiviteten af matematiske ræsonnementer, er Quines idé på side 51 om at matematikken og logikken testes sammen med naturvidenskaberne.

Grunden til at jeg ikke diskuterer Penelope Maddys position hvad angår effektiviteten af matematiske ræsonnementer, er at hun ikke i særlig høj grad redegør for andre dele af matematikken end mængdelæren. Dog skriver hun lidt om vores indlæring af elementære sandheder indenfor analyse og geometri. Hvad angår mere advancerede matematiske emner berører hun dem ikke, så det er nødvendigt at supplere hendes redegørelse for de elementære dele af matematikken. Dette kunne gøres ved at tilføje en redegørelse ligesom Kitchers eller Mac Lanes, hvor de mere advancerede matematiske emner opstår udfra de elementære matematiske sandheder, efter en kompliceret udvikling indenfor matematikken. Men disse positioner er jo diskuteret ovenfor.

Besvarelsen af spørgsmålet om matematiske ræsonnementers effektivitet volder således nogen problemer for de forskellige positioner. Enten i form af nogle kraftige ontologiske hypoteser om verdens indretning eller nogle forklaringer som ikke helt er i overensstemmelse med positionernes øvrige holdninger.

## 4.5 Matematiske sætningers sandhedsværdi

Formalisme, konceptualisme, konstruktivisme og platonisme forfægter alle en matematisk a priorisme, dvs. mener at vi kan have viden om matematiske sandheder forud for og uafhængigt af erfaringen, men de har meget divergerende meninger om hvad det er som gør matematiske sætninger sande. Ifølge Currys formalisme giver det kun mening at tale om at matematiske sætninger er sande, hvis det er specificeret i forhold til hvilket formelle system, hvorved matematisk sandhed bliver relativ i forhold til valg af formelt system. Den fundamentale kløft mellem de tre andre positioner er mellem konceptualisterne, som mener at matematiske påstande er sande i kraft af vore begreber, på den ene side, og på den anden, konstruktivisterne og realisterne som fastholder at disse påstande er sande pga. matematiske fakta. De første redegør for at matematisk viden er a priori ved at påstå at denne viden stammer fra vores forståelse af matematiske påstande. De to andre positioner forsøger at beskrive en eller anden form for a priori måde at få adgang til matematisk virkelighed. Det gør de på to måder: konstruktivisterne påstår at matematisk virkelighed er en konstruktion i den menneskelige bevidsthed, mens realisterne mener den er uafhængigt af vores mentale erkendelse af den.

Hvad angår a posteriori positionerne er der en mere eller mindre fin skelnen mellem Mills empirisme ifølge hvilken matematiske sætninger er *induktive* sandheder på den ene side, mens de andre (dvs. Kitcher, Maddy og Piaget) mener at matematiske påstande er naturalistiske sandheder, dvs. hvor vi opnår viden om verden, ikke som direkte empiriske sandheder, men som generalisering udfra vores operationer med fysiske objekter i verden. Mac Lane er ikke helt klar på dette punkt, men jeg tror han hælder til Mills position. Det er klart at i alle disse positioner er sandheden af i hvert fald dele af matematikken empirisk baseret.

## 4.6 En kritik af empirisiske og naturalistiske matematikfilosofier

Empirismen har været udsat for kraftig kritik igennem tiden, f.eks. er Hempel fremkommet med en kritik af Mill, som kan generaliseres til også at gælde for de naturalistiske postioner: Hvis sætningen $3 + 2 = 5$ rent faktisk er baseret på empiri, skal det være muligt at angive hvilke observationer der ville gøre at vi indrømmede at sætningen er forkert. Men hvis der optrådte en sådan situation hvor der var uoverensstemmelse mellem teorien og observationer, ville vi bortforklare observationer, ikke afvise teorien. Lehman (1979) beskriver følgende mulige bortforklaringer: Vi ville sige at nogle af objekterne var vokset sammen, at nogen havde fjernet et af objekter mens vi talte eller at vi simpelthen havde talt forkert. Dette argument går ikke kun på Mills position, men på positioner generelt som hævder at matematikken er empirisk baseret. Men Lehmann mener at kritikken rammer ved siden af, fordi det kan testes om bortforklaringerne er korrekte, vi kan tjekke om objekterne er vokset sammen, vi kan tælle en gang til eller undersøge om nogen har fjernet et objekt under optælningen. Desuden er situationen analog til nogle af fysikkens love, f.eks. energibevarelse, hvor man hellere vil opfinde nye partikler end forkaste teorien. Sammenholdt med Mills påstand om at matematikken i højere grad end naturvidenskaberne er testet, er det ikke svært at forsvare at vi ikke forkaster den ved uoverensstemmelser med den fysiske virkelighed, men forsøger at bortforklare empirien.

# Kapitel 5

# Indre aspekter i matematikkens udvikling

Den traditionelle opfattelse af matematikkens udvikling er at den er forskellige fra naturvidenskabernes, bl.a. hvad angår de indre aspekter. Dette kapitel indeholder beskrivelser af nogle af de indvendinger der er kommet mod denne opfattelse. Dette er ikke en kortlægning af de vigtigste positioner, men en beskrivelse af nogle af diskussionens fronter.

## 5.1 Bidrager observationer til matematikkens udvikling?

I indledningen (side 13) blev Kitcher citeret for at det *virker* som om der er en forskel mellem matematikkens og naturvidenskaberns vækst, idet matematikken ikke udvikler sig som svar på nye observationer som i naturvidenskaberne. Kitcher påpeger at det er en oversimplifikation at påstå at alle relevante observationer er samlet i starten af en matematisk undersøgelse og at matematiske teorier udvikler sig alene som udfra disse observationer og at alle efterfølgende problemer og modifikationer kun opstår på baggrund af teorien. Kitcher mener at nye observationer rent faktisk skaber nye matematiske problemer som søges løst. Han skriver at borgerne i Königsbergs forsøg på krydse byens syv broer uden at gå i deres fodspor, førte til at Euler opstillede et matematisk problem som han løste og som senere blev inkorpereret i en ny gren af matematikken, nemlig topologien. Tilsvarende kan kortfarvning, katastrofeteori og Pascals undersøgelser inden for sandsynlighedsregning, alle opfattes som matematiske svar på observationer i hverdagen. Han skriver til sidst:

> Moreover, as with the natural sciences, the "new" observation is often concerned with some familiar phenomenon whose significance has not hitherto been appreciated. (Kitcher (1983), s.

154)

Udover denne direkte problemskabende effekt som observationer har, spiller de også en indirekte rolle når matematik bliver anvendt i naturvidenskaberne, hvor problemer ved de matematiske begreber og principper først bliver opdaget når matematikken bliver anvendes. I det 18'ende og 19'ende århundredes studie af funktioner, variationsproblemer og differentialligninger, gik modifikation af den fysiske teori og de matematiske forudsætninger hånd i hånd.

## 5.2 Den matematiske metode

Hempel beskriver matematikkens struktur på følgende måde:

> For the rigourous development of a mathematical theory proceeds not simply from a set of definitions but rather from a set of non-definitional propositions which are not proved within the theory; these are the postulates or axioms of the theory. They are formulated in terms of certain basic or primitive concepts for which no definitions are provided within the theory... Once the primitive terms and the postulates have been laid down, the entire theory is completely determined; it is derivable from its postulational basis in the following sense: Every term of the theory is logically deducible from the postulates. (Hempel, 1945, s. 380-1)

Crowe skriver i *Afterword (1992)* at de fleste nutidige videnskabsfilosoffer mener at den *hypotetisk-deduktive metode* benyttes i naturvidenskaberne.

Ifølge den hypotetisk-deduktive opfattelse består videnskabelige teorier af en mængde påstande som er hierakisk forbundet vha. deduktive slutninger. I 'toppen' af de videnskabelige teori er de mest generelle udsagn, mens sætninger som testes befinder sig i 'bunden'. Udfaldet af disse afprøvninger har konsekvenser for påstande højere oppe i hierakiet, idet nogle positioner vil mene at positive tests er med til at verificere de øvrige påstande, mens andre mener at negative udfald falsificerer dem. Den hypotetisk-deduktive metode går således kort fortalt ud på at videnskabsmanden opstiller hypoteser, hvorefter der vha. logik deduceres forudsigelser, som dernæst testes.

Hvis Hempel beskrivelse af matematisk metodologi er korrekt, mener jeg at man må konkludere at der er forskel på denne metodologi og naturvidenskabernes, så dette punkt er en undersøgelse værd.

### 5.2.1 Euklidiske og kvasi-empiriske teorier

Filosoffen Imre Lakatos (1922-1974) argumenterer i artiklen *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* fra 1978 for at der ikke er kvalitativ forskel på den metode som benyttes i matematik og den eller de som benyttes i naturvidenskaberne. Han indfører en helt generel skelnen mellem euklidiske og kvasi-empiriske teorier (som ikke direkte har noget at gøre med geometri). En *euklidisk teori* er modelleret over den traditionelle opfattelse af euklidisk geometri. Lakatos skriver at en euklidisk teori er et deduktivt system med en ubetvivlelig 'sandheds-indsprøjtning' i toppen (som består af en endelig samling af aksiomer) sådan at sandhed 'flyder' fra toppen ned gennem de sandheds-bevarende kanaler af gyldig udledninger til bunden, og dermed 'oversvømmer' hele systemet.

Videnskabelige teorier er derimod *kvasi-empiriske*, dvs. organiseret i deduktive systemer hvor den afgørende sandheds-indsprøjtning sker i bunden, men hvor sandhed ikke flyder opad. Sådanne teorier er karakteriseret ved at det vigtige logiske *flow* ikke er transmission af sandhed, men opad-transmission af *falsifitet* til mængden af aksiomer i toppen. Dette betyder at hvis afprøvninger af påstandene i bunden falder negativt ud, er påstandene i toppen falske. En væsentlig forskel mellem euklidiske og kvasi-empiriske teorier er således at euklidiske teorier kan påstås at være sande (forudsat at aksiomerne er det), mens kvasi-empiriske teorier i bedste fald er vel-bestyrkede, men altid er gisninger. I euklidiske teorier beviser de sande basale påstande (sædvanligvis kaldet aksiomer) i toppen af det deduktive system resten af systemet; i kvasi-empiriske teorier er de (sande) basale påstande i bunden *forklaret* af resten af systemet. En kvasi-empirisk teori er således en hypotetisk-deduktiv teori, hvor påstandene i bunden kan falsificere påstandene i toppen, mens en euklidisk teori er en aksiomatisk teori, hvor påstandene i bunden udledes fra dem i toppen.

Den måde sandhedsværdien 'flyder' gennem systemet er uafhængig af de konventioner som regulerer 'indsprøjtningen af sandhedsværdi' i de basale påstande. Dette betyder at en kvasi-empirisk teori ikke behøver at være en empirisk teori i sædvanlig forstand, hvor de basale sætninger er rum- og tidslig singulære basale påstande (som 'aflæsningen af voltmetret var $3,2V$'), hvis sandshedsværdi er afgjort af den eksperimentelle videnskabsmand.

Hvad angår udviklingen af euklidiske teorier skriver Lakatos:

> The development of Euclidean theory consists of three stages: first the naive prescientific stage of trial and error which constitues the prehistory of the subject; this is followed by the foundational period which reorganizes the discipline, trims the obscure borders, establishes the deductive struture of the safe kernel; all that is then left is the solution of problems inside the system, mainly constructing proofs or disproofs of interesting conjectures. (Lakatos (1978), s. 34)

Udviklingen af kvasi-empiriske teorier er helt anderledes:

> It starts with problems followed by daring solutions, then by

> severe tests, refutations. The vehicle of progress is bold speculation, criticism, controversy between rival theories, problemshifts. Attention is always focussed on the obscure boders. The slogans are growth and permanent revolution, not foundations and accumulation of eternal truths. (Lakatos (1978), s. 35)

### 5.2.2 Matematik er kvasi-empirisk

Ifølge Lakatos er matematikken ikke på det endelige stadium for en euklidisk teori, så det var en del af grundlagsstudiernes opgave at omorganiserer matematikken til en færdig euklidisk teori. Men disse studier førte uventet til konklusionen at dette måske er umuligt og at i hvertfald de indholdsrigeste matematiske teorier, lige som videnskabelige teorier, er kvasi-empiriske. De to største forsøg på at omorganisere matematikken til en euklidisk teori, nemlig logicismen og formalismen, mislykkedes hvad angår dette projekt. Lakatos' argumenter for denne mangel på succes er lidt tekniske og er kun rettet mod disse to positioner og ikke generelt mod euklidiske teorier indenfor matematikken. Michael Crowe er i artiklen *Ten Misconceptions about Mathematics and Its History*(1988) inde på noget af det samme, men nøjes med at påpege at den hypotetisk-deduktive metode rent faktisk anvendes nogle steder i matematikken. Han tager ikke stilling til om afprøvningerne medfører falsifikationer eller verifikationer. Han skriver:

> ... whereas the pretense is that mathematical axioms justify the conclusions drawn from them, the reality is that to a large extent mathematicians have accepted axiom systems on the basis of the ability of those axioms to bring order and intelligibility to a field and/or to generate interesting and fruitful conclusions. (Crowe (1988), s.271-2)

Crowe nævner at det som for Leibniz og Newton legitimerede deres udgaver af matematisk analyse var at de ved hjælp af disse metoder opnåede resultater som blev opfattet som korrekte og meningsfulde. Crowe påstår ikke at det kun er nytte-kriterier som bestemmer om matematiske systemer accepteres, men mener at resultaternes karakteristika, f.eks. deres forståelighed, har spillet en stor rolle.

> To put it differently, calculus, complex numbers, non-Euclidean geometries, etc., were in a sense hypotheses that mathematicans subjected to test in ways comparable in logical form to those used by physicists. (Crowe (1988), s. 273)

Crowe citerer Putnam og Kitcher for lignende synspunkter, bl.a. skriver Kitcher at ofte er vores viden om matematiske sætninger mere sikre end vores viden om aksiomerne. Nogle gange er det ligefrem sådan at vores viden om aksiomerne opnås ved ikke-deduktive slutninger ud fra de sætninger de skal systematisere. Jeg tror at Kitchers påstand skal forstås sådan at situationen i matematik til tider er analog til en aksiomatiseret kvantemekanik. Her er det sætningerne om kvantemekanikken man forstår, og de giver derfor en forståelse af de aksiomer som sætningerne kan udledes fra.

### 5.2.3 'Potentielle falsifikatorer' i matematik

Ufuldstændig argumentation eller ej, mener Lakatos nu at have godtgjort at matematik er kvasi-empirisk. Men hvis både matematikken og naturvidenskaberne er kvasi-empiriske, må den afgørende forskel mellem dem være naturen af de basale påstande eller 'potentielle falsifikatorer' i Lakatos terminologi. Ingen, mener Lakatos, vil hævde at matematik er empirisk i den forstand at de potentielle falsifikatorer er singulære rum-tidslige påstande, dvs. hårde fakta. Men hvad spiller så rollen som potentielle falsifikatorer i matematik? Der er i hvert fald *logiske* potentielle falsifikatorer, hvis man eksempelvis kan vise at teorien indeholder påstande af formen $p \wedge \neg p$, er teorien inkonsistent. Naiv mængdelære blev f.eks. afvist på baggrund af problemer som Russells paradoks, der optrådte som en logisk falsifikator. Er der andre falsifikatorer end logiske? Lakatos skriver:

> If we accept the view that a formal axiomatic theory implicitly defines its subject-matter, then there would be no mathematical falsifiers except the logical ones. But if we insist that a formal theory should be the formalization of some informal theory, then a formal theory may be said to be 'refuted' if one of its theorems is negated by the corresponding theorem of the informal theory. One could call such an informal theorem a *heuristic falsifier* of the formal theory. (Lakatos (1978), s. 36)

Det er dog ikke alle områder af matematikken som kan afvises på baggrund af uoverensstemmelse med den uformelle teori. I gruppeteori, skriver Lakatos, er den oprindelige uformelle teori i så høj grad erstattet af den aksiomatiske teori, at sådanne heurisiske gendrivelser ikke synes mulige. Situationen er en anden hvad angår mængdelæren, for mængdelæren spiller rollen som den dominerende, forenende teori for matematik, i hvilken alle matematiske fakta (d.v.s. også uformelle sætninger) skal forklares. Dette betyder at der er to måder mængdelæren i givet fald kan kritiseres på. For det første kan konsistensen af mængdelærens aksiomer testes og for det andet kan dens definitioner testes for deres 'korrekthed' i oversættelsen af matematiske discipliner, såsom aritmetik. Lakatos forklarer den sidste type ved at komme med følgende eksempel. Christian Goldbach (1690-1764) fremkom med en formodning om at ethvert lige tal kan skrives som summen af to primtal, en hypotese som endnu ikke er bevist eller modbevist. Antag at en maskine kommer med et formelt bevis i en formel mængdelære for at der eksisterer et ikke-Goldbachsk lige tal. Et formelt bevis som vi accepterer som korrekt. På samme tid beviser en tal-teoretiker uformelt at alle lige tal er Goldbachske. Hvis dette result kan formaliseres indenfor vores formelle mængdelæresystem, vil mængdelæren være inkonsistent. Men hvis tal-teoretikerens bevis ikke kan formaliseres, vil vores formelle mængdelære ikke være inkonsistent, men kun være en falsk teori for aritmetik. Lakatos pointe er at dette vil falsificere mængdelæren:

> Then we may call the informally proved Goldbach theorem a *heuristic falsifier*, or more specifically, an *arithmetical falsifier* of our formal set theory. The formal theory is false in respect of the informal *explanandum* that it had set out to explain; we have to replace it by a better one. (Lakatos (1978), s. 40)

Lakatos må antage at vi hellere vil afvise mængdelæren, end *repræsentationen* af aritmetikken i den.

En heuristisk falsifikator falsificerer ikke hypotesen, den foreslog kun en falsifikation og foreslag kan ignoreres. Det er kun en hypotese-rival. Crowe tager dette punkt op ved at påpege at den såkaldte Duhem-Quine tese indenfor naturvidenskabsteori, også gælder indenfor matematik. Denne tese går ud på at videnskabelige teorier skal opfattes som et netværk af påstande. Det er ikke enkelte påstande eller hypoteser som afprøves, men kun større dele af eller hele netværket. Fordi teorier kun kan testes i klynger, kan videnskabsmanden klare uoverensstemmelser med eksperimenter ved at modificere dele af teorien i stedet for at forkaste den helt. Crowe mener at noget tilsvarende gør sig gældende indenfor matematik:

> I suggest that in history of mathematics one frequently encounters cases in which a mathematical claim, faced with an apparent... falsification, has been rescued by modifying some other aspect of the system. In other words, mathematical assertions are usually not tested in isolation but in conjunction with other elements in the system. (Crowe (1978), s. 273)

Som eksempel nævner Crowe de komplekse tal som i århundreder var omgivet af modsigelser: nogle mente at de blev modsagt fordi de ikke opfylder regler om at tal skal være større end, mindre end eller lig med nul og at kvadratet på et tal skal være ikke-negativt; andre fremførte at en geometrisk repræsentation af dem er umulig. De komplekse tal overlevede disse angreb, mens de traditionelle regneregler for tal ikke gjorde det. Lakatos position er en skepticistisk position, idet vi aldrig kan opnå fuldstændig sikker viden, men alene hypoteser som hidtil ikke er tilbagevist.

Selvom heuristiske falsifikatorer ikke falsificerer teorier, men kun foreslår falsifikationer, mener Lakatos ikke at dette adskiller matematik og fysik så skarpt som man kunne tro. Ifølge Popper, som Lakatos er tilhænger af, er de basale påstande i fysik kun hypoteser. Både i matematikken og naturvidenskaberne er heuristiske gendrivelsers vigtigste funktion at dreje forskning mod vigtigere problemer og at stimulere udviklingen af teorier med mere indhold. Man kan vise at de fleste klassiske gendrivelser i naturvidenskabernes og matematikkens historie er heuristiske falsifikationer. Slaget mellem rivaliserende matematiske teorier bliver oftest afgjort af deres relative forklarelsesevner.

Historien om kvasi-empiriske teorier er historien om "vovelige spekulationer og dramatiske afvisninger", men sådanne gendrivelser er ikke hverdagskost, hverken i naturvidenskaberne eller indenfor matematikken. Der er lange stagnationsperioder, hvor en enkelt teori dominerer scenen uden rivaler eller accepterede afvisninger. Sådanne stagnationsperioder får mange til at glemme at det er muligt at kritisere basale antagelser.

Lakatos vender sig nu mod spørgsmålet om på hvilket grundlag sandshedsværdier sprøjtes ind i de *potentielle falsifikatorer*. Dette spørgsmål kan tildels reduceres til et spørgsmål om de potentielle falsifikatorer for *uformelle* teorier. Er disse falsifikatorer i virkeligheden *empiriske* teorier, således at matematiske teorier viser sig at være indirekte empiriske? Eller er det *mentale konstruktioner* som er den eneste kilde til sandshedsindsprøjtningen i de basale matematiske påstande? Eller *platonistisk intuition* eller *konvention*? Lakatos svarer kun at svaret næppe vil være monolitisk og at historiske studier sandsynligvis vil føre til et sofistikeret og sammensat svar. Lakatos tager altså ikke stilling til hvor matematikkens genstandsområde befinder sig, men beskriver alene matematikkens metodologi.

Davis og Hersh (1981) opsummerer Lakatos' arbejde på følgende måde:

> Lakatos holds that informal mathematics is a science in the sense of Popper, that it grows by a process of successive critism and refinement of theories and the advancement of new and competing theories (*not* by the deductive pattern of formalized mathematics). (Davis & Hersh (1983) s. 349)

De konkluderer at Lakatos viser at en poppersk filosofi for matematik er mulig.

## 5.3 Er matematisk viden sikker?

Lakatos betvivler således kraftigt at matematisk viden ikke er underkastet ændringer. Hempel giver udtryk for det stik modsatte synspunkt i artiklen *Geometry and Empirical Science* fra 1945:

> The most distinctive characteristic which differentiates mathematics from the various branches of empirical science... is no doubt the peculiar certainty and necessity of its results... a mathematical theorem, once proved, is established once and for all. (Hempel, i Crowe (1988), s.261-2).

Crowe skriver at Hempel hermed tilslutter sig et synspunkt som dusiner af forfattere har udtalt i århundreder, forfattere som tit citerer fra Euklid. Hempel nævner at der i nogle af Euklids beviser mangler postulater. Dvs. det nok mest berømte eksempel på matematisk sikkerhed indeholder eksempler på forkerte argumenter. Hvad kan Hempel svare på en sådan indvending? Crowe svarer for ham:

> Hempel's claim may be construed as containing the implicit assertion that a mathematical system embodies certainty only after defects have been removed from it. What is problematic is whether we can be certain that this is done. Surely the fact that the inadequacy of some of Euclid's arguments escaped detection for over two millenia suggests that certainty is more elusive than usually assumed. (Crowe (1988), s. 262)

Forskellige eksempler kan nævnes på situationer hvor man har været meget sikre på at den matematiske viden var sikker. Cauchy mente at grænsefunktionen af konvergente følger af kontinuerte funktioner er kontinuert, hvilket blev afvist af Weierstrass. Crowe referer andre forfattere som har taget stilling til spørgsmålet om matematikkens sikkerhed. Kline har f.eks. i en bog med den sigende titel *Mathematics: The Loss of Certainty*(1980) beskrevet hvordan Ampère (1775-1836), Lacroix (1765-1843) og Bertrand (1822-1900) alle gav beviser for at enhver funktion er differentiabel i ethvert punkt hvor den er kontinuert, hvilket selvfølgelig blev afvist med Weierstrass' patologiske eksempel på en funktion som er kontinuert i alle punkter, men ikke differentiabel noget sted. Der er altså eksempler på at gisninger og begreber, principper og beviser er blevet gendrevet. På den anden side skriver René Thom at en vigtig fejl aldrig er sluppet ind i en konklusion, uden at blive opdaget stort set umiddelbart efter. Matematikkens ufejlbarlighed kan selvfølgelig reddes ved at påpege at det er matematikerne som har foretaget fejlene.

Kleiner og Movshovitz-Hadar (1997) skriver i artiklen *Proof: A Many-Splendored Thing* om den såkaldte Enorme Sætning om klassifikation af endelige simple grupper. Beviset for denne sætning er omkring 15000 sider langt, er fordelt over 500 artikler, næsten alle sammen publiceret mellem de sene 1940'ere og de tidlige 1980'ere ved en fælles indsats af over 100 matematikere fra 6 lande. Der er andre eksempler på lange beviser, f.eks. fire-farve problemet og Fermat's sidste sætning og nogle mener at lange beviser bliver reglen snarere end undtagelsen i fremtiden. Talteoretikeren Jean-Pierre Serre har udtalt om sådanne lange beviser:

> What shall one do with such theorems if one has to use them? Accept them on faith? Probably. But this is not a very comfortable situation. (Kleiner og Movshovitz-Hadar (1997), s. 22)

Hvis dette faktum, at sådanne lange beviser eksisterer og bruges, kombineres med at en matematiker af Cauchys format kan begå fejl af en sådan karakter som ikke at antage ligelig konvergens, er det et stærkt argument for at der i realiteten er usikkerhed om matematikkens sikkerhed. Den side af debatten som mener at matematikken og naturvidenskaberne er forskellige hvad sikkerhed angår, kan påpege at de matematikere som har påstået fejlagtige sætninger, ikke har været *begrundet* i at antage sandheden af disse sætninger, mens naturvidenskabsfolk i fortiden har været begrundet i deres fejlagtige opfattelser. Om denne indvending skriver Kitcher at hvis vi accepterer den, adskiller vi den måde sandhed begrundes i matematik fra andre felter, men værre endnu kommer vi til at opfatte den fremadskridende afsløring af subtile fejl som en række af svipsere som på mirakuløs vis kulminerer i forståelse af sandheden.

## 5.4 Kumulativitet

Hvad angår matematikkens kumulativitet, undersøger Kitcher dels om matematikken er kumulativ, dels om der er forskel hvad angår kumulativiteten af matematikken og naturvidenskaberne.

### 5.4.1 Er matematikken kumulativ?

Matematikeren Hermann Hankel (1839-1873) har sagt:

> In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. (Crowe (1988), s. 263)

Kitcher skriver at opfattelsen af at matematik fremskrider strengt akkumulativt, dvs. at nye påstande føjes til uden at gamle påstande forkastes, er meget naiv og at selv det mest kursoriske blik på matematikkens historie vil modbevise denne opfattelse. Analyse i det 18'ende århundrede er fuld af påstande vi ikke længere accepterer, og primtallenes historie indeholder mange begyndelser, som viste sig at være blindgyder. Kitcher giver derfor påstanden om at der en *essentiel* forskel på hvor kumulative matematik og naturvidenskaberne er, følgende tre formuleringer:

1. Når matematikere diskuterer er i hvert fald den ene altid irrationel, og det er *ham* der er noget galt med, ikke matematikken. I naturvidenskabelig diskussioner kan modstridende holdninger forfægtes, uden at der nødvendigvis er en side som er ufornuftig.

2. Mange matematiske sandheder fra oldtiden accepteres også i vore dage, hvilket ikke er situationen i naturvidenskaberne.

3. Hvis matematiske påstande som på ét tidspunkt ansås for sande, men som senere afvistes som forkerte, var personerne som antog dem for sande ikke begrundet i denne tro. Indenfor naturvidenskaberne kan man godt have god grund til at forfægte et synspunkt som senere viste sig at være forkert. Det arbejde, som matematikeren der lider af vrangforestillinger har lavet, kan afvises under henvisning til at han var ubegrundet i sin tro, uden at der er modstrid med kumulativitetstanken. Naturvidenskabsmandens forkerte arbejde kan ikke på bortforklares på samme måde, og der sker et brud med tidligere tids tankegang når hans arbejde forkastes.

Disse påstande er sværere at modbevise end den naive opfattelse af matematisk kumulativitet. Kitcher kommer med nogle eksempler på episoder i matematikkens historie hvor de tre påstande er forkerte. Hvad angår det første punkt kommer Kitcher med Newton og Leibniz som eksempel; de påstod begge at deres metode var bedre end den andens. Leibniz' tilhængere var stolte af deres metodes evne til at løse problemer, hvor Newton fremførte at hans teori var i stand til at bevare vigtige træk ved tidligere tids matematik. Vi skal ikke, mener Kitcher, i højere grad tugte Newton og hans efterfølgere for at klynge sig til en matematisk stil som analysen senere har transformeret, end vi skal bebrejde kemikeren Priestley for hans forsøg på at redde flogiston-teorien[1] og benytte den til at redegøre for sine egne resultater.

Det taler for rigtigheden af den anden påstand, at det virker som om man ikke accepterer nær så mange af oldtidens sandheder indenfor naturvidenskaben, som man gør indenfor matematikken. Vi har f.eks. ikke opgivet aritmetikkens sandheder, Euklids sætninger eller babylonernes løsninger til andengradsligninger. Kitcher mener ikke der er en modstrid mellem matematikken og naturvidenskaberne på dette punkt, for vi deler en mængde overbevisninger om almindelige tings egenskaber med vores forfædre. Disse overbevisninger er af naturvidenskabelig karakter, men Kitcher kommer desværre ikke nærmere ind på hvad det mere præcist er for overbevisninger.

Hvis vi accepterer den tredie påstand, medfører det at vi ikke yder retfærdighed til matematikere som fremkommer med simplificerede og forkerte påstande, men som brolægger vejen for korrektion af disse fejlagtige sætninger. Euler og Cauchy troede ikke at der kunne gives en repræsentation af en vilkårlig funktion i form af trigonometriske rækker. Cauchy's forsøg på at artikulere sin begrundelse for denne opfattelse, førte til at man senere fandt ud af hvad der var ukorrekt i påstanden. Hvis vi accepterer den tredie påstand, må vi også acceptere at retfærdiggørelsen af matematikeres overbevisninger afviger fra retfærdiggørelsen på andre felter. På samme måde som beskrevet i afsnittet om matematisk sikkerhed (5.3), bliver matematikkens udvikling til en række svipsere som til sidst, på mirakuløs vis, kulminerer i en korrekt

[1] Flogiston-teorien var en kemisk teori om forbrænding som Priestley fremsatte, der forklarer forbrænding ved at der udsendes flogiston.

opfattelse.

### 5.4.2 Er der forskel mellem matematik og naturvidenskab på dette punkt?

Kitcher mener dog at der er to punkter hvor matematik og naturvidenskaber er forskellige hvad angår kumulativitet. For det første har matematiske teorier en højere overlevelsesrate end naturvidenskabelige teorier. For det andet er der en kvalitativ forskel fordi der ikke er nogen analoger i matematikken til naturvidenskabernes kasserede teorier; der optræder ikke noget svarende til Aristoteles bevægelsesteori eller flogiston-teorien for forbrænding, teorier som begge er forkastet i vore dage. Kitcher sammenligner udviklingerne af ikke-euklidisk geometri med den stort set samtidige oxygen-teori for forbrændings. Efter at matematikere havde forsøgt at bevise Euklids femte postulat (parallel-postulatet) ud fra de foregående fire postulater, i næsten to årtusinder, prøvede Lobatjevski, Bolyai og Gauss at undersøge konsekvensen af, til de første fire postulater, at tilføje en påstand om eksistensen af mange paralleller. Dette førte til den variant af ikke-euklidisk geometri vi kalder 'Lobatjevskisk'. Efter at matematikerne var blevet overbeviste om at de nye geometrier var konsistente, accepterede de dem som en del af matematikken og følte ikke noget behov for at kassere euklidisk geometri. Hvad der oprindeligt virkede som en konkurrence mellem to matematiske teorier endte i en eksistens side om side, hvilket skyldes at ifølge matematikere er begge teorier korrekte beskrivelser, men af forskellige ting.

Den historiske udvikling af det 19'te århundredes teorier for forbrænding var helt anderledes. Priestleys flogiston-teori konkurrerede med Lavoisiers oxygen-teori, som siger at oxygen bliver absorberet ved forbrænding. Omkring 1800 accepterede det videnskabelige samfund oxygen-teorien og kasserede flogiston-teorien, og efter Priestleys død i 1840 forskede ingen større videnskabsmand i konsekvenserne af flogiston-teorien.

## 5.5 Opsummering af spørgsmål om matematikkens udvikling

I dette kapitel og i kapitlet om udspændingen af diskussionen, har vi set nogle af de indvendinger der er fremført mod at der skulle være en forskel på matematikken og naturvidenskabernes udvikling. Hvad angår spørgsmålet om nye observationer bidrager til matematikkens udvikling, har Kitcher påpeget to ting. For det første at det er forkert at naturvidenskaberne kun udvikler sig som svar på observationer, altså at de ikke oplever en indre udvikling. For det andet giver han eksempler på at matematikken rent faktisk har udviklet sig på baggrund af nye observationer. Ifølge Hempel er der en forskel mellem den matematiske metode, som er aksiomatisk, og den metode som benyttes i naturvidenskaberne, som er hypotetisk-deduktiv. Putnam, Lakatos, Kitcher og Crowe har påpeget at dette ikke er korrekt fordi den hypotetisk-deduktive metode anvendes i det meste af eller dele af matematikken. Lakatos har en hel teori hvor han argumenterer for at matematikken udvikler sig på samme måde som naturvidenskaberne (som Lakatos mener udvikler sig i overensstemmelse med Poppers teorier). I følge den traditionelle opfattelse adskiller matematisk viden sig fra andre typer viden ved at være sikker. Dette synspunkt er draget i tvivl af Crowe og Kline, som kommer med eksempler hvor store matematikere har draget forkerte konklusioner. Kombineres dette med fremkomsten af store sætninger, som den Enorme Sætning, og som det forudsiges bliver normen i fremtiden, er det ikke sikkert at situationen bliver bedre. Kitcher sætter spørgsmålstegn ved påstanden om at matematikkens udvikling i modsætning til naturvidenskabernes foregår kumulativt. Han mener dog at der er en forskel mellem matematik og naturvidenskabelig kumulativitet, idet matematiske teorier ikke forkastes på samme måde som naturvidenskabelige.

Hvad angår eksterne aspekter, har matematikhistorikere undersøgt om Kuhns teorier for naturvidenskaberne kan anvendes på matematik. Herbert Mehrtens konkluderer at Kuhns generelle mønster for naturvidenskabelige revolutioner ikke kan benyttes på matematik, men at nogle af Kuhns begreber kan bruges. Der er udgivet en hel bog (Gillies (1992)) hvor det diskuteres om der optræder revolutioner i matematikken. Michael Crowe skriver at opfattelsen af matematikken som *sociologisk* forskellig fra naturvidenskaberne ikke holder ved et nærmere eftersyn. Jeg er ikke gået så meget ind i denne del af diskussionen, men at der i det hele taget er en diskussion viser at matematikken og naturvidenskaberne ikke er så forskellige, at det er hul i hovedet at diskutere om de eksterne aspekter er de samme for disse to typer af menneskelige aktiviteter.

# Kapitel 6

# Konklusion og perspektivering

## 6.1 Konklusion

Jeg har givet mit bud på hvilke spørgsmål der er de centrale i diskussionen om matematik er en naturvidenskab eller ej. Der er to hovedtyper af spørgsmål: For det første ontologiske og erkendelseteoretiske spørgsmål om naturen er kilde til de matematiske begreber og om matematikken kommer med udsagn om den fysiske virkelighed, herunder hvorfor matematik er et effektivt redskab indenfor naturvidenskaberne. Den anden type spørgsmål er om matematikkens udvikling er forskellig fra naturvidenskabernes, hvad angår indre faktorer og eksterne faktorer i udviklingen. Derudover har jeg beskrevet nogle af de væsentligste positioner indenfor matematikkens filosofi, og hvad de har svaret eller hvad de ville svare på de ontologiske og erkendelesteoretiske spørgsmål i diskussionen. Jeg har ikke taget stilling til hvilke svar som er bedst, blot fremsat nogle indvendinger mod de forskellige positioner. Det sidste jeg har gjort er at beskrive indvendinger mod den traditionelle opfattelse af at matematikken og naturvidenskaberne udvikler sig forskelligt, dog uden at lægge mit lod i den ene eller anden positions vægtskål.

## 6.2 Perspektivering

Fra starten var det min plan at finde ud af hvor store dele af matematikken, der kunne kaldes naturvidenskabelige. Denne undersøgelse har det af tidsmæssige årsager ikke været muligt at gennemføre. Dertil kommer at der er et problem med matematikkens enorme omfang som er fordelt på adskillige delområder, så en sådan undersøgelse ville kræve indsigt i langt mere matematik end jeg besidder. Problemet er ikke i så høj grad om naturen oprindeligt har været direkte kilde til de matematiske begreber, for der tror jeg at sagen skal afgøres ved at pege på elementær aritmetik, euklidisk geometri og nogle af de reelle tals egenskaber. Den indirekte rolle som naturen spiller via naturvidenskaberne, er derimod langt mere kompleks. Desuden kræver undersøgelsen af de matematiske teoriers udsagn om den fysiske verden en nærmere præcisering og analyse i forhold til naturvidenskaberne. Jeg har koncentreret mig om de positioner jeg har fundet vigtigst, men der eksisterer langt flere: fysikalisme, monisme, struktralisme, modalisme osv. som skal placeres i det skema for diskussionen jeg har givet.

Hvad angår matematikkens udvikling, har jeg kun beskrevet nogle indvendinger mod det traditionelle billede af matematikkens udvikling som væsensforskellig fra naturvidenskabernes. Denne del af diskussionen kunne med fordel udbygges ved tilføjelsen af flere holdninger, især indenfor de sociologiske aspekter. Derudover kræver diskussionen langt flere historiske studier, både i forhold til de få jeg har nævnt, men også i forhold til dem der i det hele taget er foretaget.

Det var fra starten min mening at beskrive en case fra matematikkens historie, dels for at illustrere diskussioen, dels for at afprøve positionernes rigtighed. Et sådan eksempel ville dog ikke kunne afgøre diskussion, og ikke engang frasortere nogen positioner, dertil positionerne for fleksible. Jeg har i stedet forsøgt at komme med eksempler undervejs, men en samlet case ville langt fra være at foragte.

# Kapitel 7

# Referenceliste


Aspray, W. og P. Kitcher (1988): *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, Minneapolis

Benacerraf, P. og H. Putnam (red.) (1983): *Philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK

Crowe, M. (1975): "Ten 'Laws' concerning patterns of change in the history of mathematics" i *Historia Mathematica* 175, 2, 161-6, genoptrykt i Gillies (1992b)

Crowe, M. (1988): "Ten Misconceptions about Mathematics and its History" i Aspray og Kitcher (1988)

Crowe, M. (1992): "Afterword (1992): A revolution in the historiography of mathematics?" i Gillies (1992a)

Curry, H.B. (1951): *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdan/London

Davis, P.J. og R. Hersh (1981): *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart

Gillies, D. (1992a) (red.): *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford

Gillies, D. (1992b): "Introduction" i Gillies (1992)

Goodman, N.D. (1979): "Mathematics as an objective Science" i *American Mathematical Monthly*, Vol. 86, Nr. 7, genoptrykt i Tymoczko (1985)

Hempel C. G. (1945): "On the nature of mathematical truth", i *The American Mathematical Monthly*, vol. 52 (1945), s. 543-556, genoptrykt i Benacerraf og Putnam (1983)

Hersh (1979): "Some proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics", *Advances in Mathematics*, vol. 31, 1979, s. 31-50, genoptrykt i Tymoczko (1985)

Kitcher, P. (1984): *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford

Kleiner, I. og N. Movshovitz-Hadar (1997): "Proof: A Many-Splendored Thing", *Math. Intelligencer* 19:3(1997), 16-26

Kline, M. (1980): *Mathematics, the Loss of Certainty*, Oxford University Press, New York

Kragh, H. og S.A. Pedersen (1991): *Naturvidenskabens teori*, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, København

Lakatos, I. (1978): "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics" i I. Lakatos: *Philosophical Papers*, Red: J. Worrall and G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge

Lehman, H. (1979): *Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Basil Blackwell, Oxford

Mac Lane, S. (1986): *Mathematics: Form and Function*, Springer-verlag, New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo

Mac Lane, S. (1990): "The Reasonable Effectiveness of Mathematical Reasoning" i Mickens (1990)

Mac Lane, S. (1997): "Despite Physicists, Proof is Essential in Mathematics", *Synthese* 111, 1997, s. 147-154

Maddy, P. (1990): *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford

Mehrtens, H. (1976): "T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historigraphy' of mathematics" i *Historia Mathematica*, 1976, 3, 297-320, genoptrykt i Gillies(1992b)

Mickens, R.E. (Red) (1990): *Mathematics and Science*, World Scientific, Singapore/New Jersey/London/Hong Kong

Penrose, R. (1990): *The Emperor's New Mind*, Vintage, London

Poincaré, H. (1952): *Science and Hypothesis*, Dover, New York, oversat fra den franske udgave fra 1903

Politikens filosofileksikon (1983), (Red: Poul Lübcke), Politikens Forlag, København

Quine, W.V.O. (1954): "Carnap and logical truth" i P.A. Schlipp (red.): *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court, La Salle, Ill, 1963, genoptrykt i Benacerraf og Putnam (1983)

Skovsmose, O. (1990): *Ud over matematikken*, Systime, Herning

Tymoczko, T. (1985): *New directions in the philosophy of mathematics*, Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart

Wigner, E. P. (1960): "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences" i *Commun. Pure Appl. Math* XIII (1960), 1-14, genoptrykt i Mickens (1990)

*Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat*

tlf. 46 74 22 63

---

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

*223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT*

*by: Thomas P. Branson*

*224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES*

*by: Jeppe C. Dyre*

*225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium*

*af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard*

*Vejleder: Petr Viscor*

*226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"*

*by: Bent Sørensen*

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"

En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og især deles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"

af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård

Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS

- Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

---

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler. Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

*250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV*

*Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen*

*Vejleder: Stig Andur Pedersen*

***251|93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones***

***by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen***

***252|93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER***

***Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen***

***253/93 Kuglepakning***

***Teori og model***

***af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse***

***Vejleder: Mogens Niss***

***254/93 Regressionsanalyse***

***Materiale til et statistikkursus***

***af: Jørgen Larsen***

***255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED***

***af: Peter Harremoës***

***256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezoelectric Spherical Shell (Preprint)***

***by: T. Christensen and N.B.Olsen***

***257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker***

***af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård***

***Vejleder: Tage Christensen***

***258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"***

***af: Mogens Brun Heefelt***

***259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES***

***by: Jeppe C. Dyre***

***260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4***

***by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski***

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

---

**265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES**
**To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday**
**by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson**

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen

271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

**272/94** Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel

273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen

274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth Helmgaard
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen

275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)

279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen

280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann

281/94 Modellering af Det Cardiovaskulære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen

282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)

af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen

284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!
Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem

En specialerapport af Peter Hauge Jensen og Linda Kyndlev

Vejleder: Mogens Niss

285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and its diploid host
by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

286/94 The energy master equation: A low-temperature approximation to Bässler's random walk model
by: Jeppe C. Dyre

287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the Calculation of Time Auto-Correlation Functions
by: Jeppe C. Dyre

288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION
by: Bent Sørensen

289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square Displacement in Extremely Rugged Energy Landscapes with Equal Minima
by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen

290/95 Modellering af uregelmæssige bølger
Et 3.modul matematik projekt
af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson, Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

291/95 1st Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
an example of using methods developed for the OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study
by: Bent Sørensen

292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3
af: Bent Sørensen

293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?
af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen
Vejleder: Anders Madsen

294/95 Universets udvidelse - et metaprojekt
Af: Jesper Duelund og Birthe Friis
Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen

295/95 A Review of Mathematical Modeling of the Controled Cardiovascular System
By: Johnny T. Ottesen

296/95 RETIKULER den klassiske mekanik
af: Peder Voetmann Christiansen

297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with bifurcations
by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen

298/95 Mordet på Schrödingers kat - et metaprojekt om to fortolkninger af kvantemekanikken
af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst, Christina Specht
Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen

299/95 ADAM under figenbladet - et kig på en samfunds-videnskabelig matematisk model
Et matematisk modelprojekt
af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Jørgen Larsen

300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation
by: Bent Sørensen

301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning af ozon
af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe Nielsen og Bettina Sørensen
Vejleder: Jesper Larsen

302/95 KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for aksialkompressorer
Projektrapport sf: Stine Bøggild, Jakob Hilmer, Pernille Postgaard
Vejleder: Viggo Andreasen

303/95 Masterlignings-modeller af Glasovergangen
Termisk-Mekanisk Relaksation
Specialerapport udarbejdet af:
Johannes K. Nielsen, Klaus Dahl Jensen
Vejledere: Jeppe C. Dyre, Jørgen Larsen

304a/95 STATISTIKNOTER Simple binomialfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304b/95 STATISTIKNOTER Simple normalfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304c/95 STATISTIKNOTER Simple Poissonfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304d/95 STATISTIKNOTER Simple multinomialfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen

304e/95 STATISTIKNOTER Mindre matematisk-statistisk opslagsværk indeholdende bl.a. ordforklaringer, resuméer og tabeller
af: Jørgen Larsen

305/95 The Maslov Index:
A Functional Analytical Definition
And The Spectral Flow Formula

By: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani

306/95 Goals of mathematics teaching

Preprint of a chapter for the forth-comming International Handbook of Mathematics Education (Alan J.Bishop, ed)

By: Mogens Niss

307/95 Habit Formation and the Thirdness of Signs

Presented at the semiotic symposium

The Emergence of Codes and Intensions as a Basis of Sign Processes

By: Peder Voetmann Christiansen

308/95 Metaforer i Fysikken

af: Marianne Wilcken Bjerregaard, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Klaus Dahl Jensen Ole Schmidt

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Petr Viscor

309/95 Tiden og Tanken
En undersøgelse af begrebsverdenen Matematik udført ved hjælp af en analogi med tid

af: Anita Stark og Randi Petersen

Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

---

310/96 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)

af: Mogens Brun Heefelt

311/96 2nd Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

by: Hélène Connor-Lajambe, Bernd Kuemmel, Stefan Krüger Nielsen, Bent Sørensen

312/96 Grassmannian and Chiral Anomaly

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

313/96 THE IRREDUCIBILITY OF CHANCE AND THE OPENNESS OF THE FUTURE
The Logical Function of Idealism in Peirce's Philosophy of Nature

By: Helmut Pape, University of Hannover

314/96 Feedback Regulation of Mammalian Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

315/96 a + b "Rejsen til tidens indre" - Udarbejdelse af et manuskript til en fjernsynsudsendelse + manuskript

af: Gunhild Hune og Karina Goyle

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Bruno Ingemann

316/96 Plasmaoscillation i natriumklynger

Specialerapport af: Peter Meibom, Mikko Østergård

Vejledere: Jeppe Dyre & Jørn Borggreen

317/96 Poincaré og symplektiske algoritmer

af: Ulla Rasmussen

Vejleder: Anders Madsen

318/96 Modelling the Respiratory System

by: Tine Guldager Christiansen, Claus Dræby

Supervisors: Viggo Andreasen, Michael Danielsen

319/96 Externality Estimation of Greenhouse Warming Impacts

by: Bent Sørensen

320/96 Grassmannian and Boundary Contribution to the -Determinant

by: K.P.Wojciechowski et al.

321/96 Modelkompetencer - udvikling og afprøvning af et begrebsapparat

Specialerapport af: Nina Skov Hansen, Christine Iversen, Kristin Troels-Smith

Vejleder: Morten Blomhøj

322/96 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1996

323/96 Structure and Dynamics of Symmetric Diblock Copolymers
PhD Thesis

by: Christine Maria Papadakis

324/96 Non-linearity of Baroreceptor Nerves

by: Johnny T. Ottesen

325/96 Retorik eller realitet ?
Anvendelser af matematik i det danske Gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903 - 88

Specialerapport af Helle Pilemann

Vejleder: Mogens Niss

326/96 Bevisteori
Eksemplificeret ved Gentzens bevis for konsistensen af teorien om de naturlige tal

af: Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen, Klaus Frovin Jørgensen, Ivar Peter Zeck

Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Stig Andur Pedersen

327/96 NON-LINEAR MODELLING OF INTEGRATED ENERGY SUPPLY AND DEMAND MATCHING SYSTEMS

by: Bent Sørensen

328/96 Calculating Fuel Transport Emissions

by: Bernd Kuemmel

329/96 The dynamics of cocirculating influenza strains conferring partial cross-immunity

and

A model of influenza A drift evolution

by: Viggo Andreasen, Juan Lin and Simon Levin

330/96 LONG-TERM INTEGRATION OF PHOTOVOLTAICS INTO THE GLOBAL ENERGY SYSTEM

by: Bent Sørensen

331/96 Viskøse fingre

Specialerapport af:

Vibeke Orlien og Christina Specht

Vejledere: Jacob M. Jacobsen og Jesper Larsen

---

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG

Specialerapport af:

Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters

an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity

by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids

by: Jeppe C. Dyre

336/97 PROBLEM-ORIENTATED GROUP PROJECT WORK AT ROSKILDE UNIVERSITY

by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose - et projekt om matematisk modellering

af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen

Vejleder: Jørgen Larsen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne

Første modul fysikprojekt

af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss, Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup

Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline

by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -

by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry

by Mogens Niss

342/97 LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY

A global clean fossil scenario discussion paper

prepared by Bernd Kuemmel

Project leader: Bent Sørensen

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG

af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks

by Carsten Lunde Petersen

---

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anestesia Simulator

Ph.D. Thesis

by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces

af: Sebastian Horst

Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller - en analyse af Den Danske Eulerske Model

af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschlæger

Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark

by: Stefan Krüger Nielsen

Project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne

af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998

Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education

by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications

by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

Vejleder: Morten Blomhøj

354/98 A GLOBAL RENEWABLE ENERGY SCENARIO

by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces

by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

*357/98 Cayleys Problem*
*En historisk analyse af arbejdet med Cayley problem fra 1870 til 1918*
*Et matematisk videnskabsfagsprojekt af:*
*Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff*
*Vejleder: Jesper Larsen*

*358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models*
*Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen*

*359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios*
*by: Bent Sørensen*

*360/99 SYMMETRI I FYSIK*
*En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné*
*Vejleder: Peder Voetmann Christiansen*

*361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants*
*by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani*

*362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen*
*En videnskabsfagsprojekt-rapport af Martin Niss*
*Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen*

*363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION*
*by: Donald T. Campbell, MArk H. Bickhard and Peder V. Christiansen*

*364/99 Illustrationens kraft*
*Visuel formidling af fysik*
*Integreret speciale i fysik og kommunikation*
*af: Sebastian Horst*
*Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup*

*365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context*
*by: Tine Wedege*

*366/99 LATEX FOR FORFATTERE*
*En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX*

*af: Jørgen Larsen*