

Model for kort- og mellemdistanceløb

Verifikation af model

Lise Fabricius Christensen,
Helle Pilemann, Bettina Sørensen

Vejleder: Mette Olufsen



TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model

af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen

Vejleder: Mette Olufsen

IMFUFA tekst nr. 273/94

94 sider

ISSN 0106-6242

Abstract

Der beskrives udledningen af Joseph B. Kellers model for kort- og mellemdistanceløb bl.a. ved hjælp af variationsregning. Modellen har til formål at beskrive den optimale løbestrategi for en løber samt enkelte fysiologiske parametre. Modellen verificeres bl.a. ved hjælp af databehandling med Matlab. Det viser sig ikke overraskende, at det ikke altid gælder om at løbe til, men at løberen undervejs skal variere sin hastighed.

Forord

Denne 2. modul projektrapport er udarbejdet af tre matematikstuderende i foråret 1994, på Roskilde Universitetscenter, IMFUFA. Vi har valgt at verificere en matematisk model for kort- og mellemdistanceløb. Denne er udviklet af Joseph B. Keller og er præsenteret i artiklen *Optimal velocity in a race* publiceret i *The American Mathematical Monthly*, vol. 81, 1974. Udlædningen af modellen omfatter løsning af et optimeringsproblem.

Vi vil gerne takke Inge-Lise Salomon, Datalogi, Roskilde Universitetscenter, for kritik af fysiologiafsnittet, Jørn Wulff Helge, Ph.D studerende ved August Krogh Instituttet, Københavns Universitet, for hjælp med at forstå fysiologiske antagelser i modellen, og endelig vil vi gerne takke Erik Laursen, Statestik- og rekordudvalget, Århus, for hjælp med at fremskaffe oplysninger om de nyeste rekorder.

Studerende:

- Lise Fabricius Christensen
- Helle Pilemann
- Bettina Sørensen

Vejleder:

- Mette Olufsen

Indhold

1	Indledning	5
2	Udledning af Kellers model	9
2.1	Præsentation	9
2.2	Omformulering af problemet	11
2.3	Løsning	13
2.4	Præsentation af Kellers resultater	26
3	Afprøvning af data	31
3.1	Planlægning af forsøg	31
3.2	Præsentation af resultater	41
4	Antagelser og begrænsninger	51
4.1	Modelleringsproces	51
4.2	Klassificering af Kellers model	52
4.3	Diskussion af antagelserne i Kellers model	53
4.4	Diskussion af modellens begrænsninger	56
5	Afslutning	59
5.1	Diskussion	59
5.2	Perspektivering	64
5.3	Konklusion	66
A	Fysiologi	67
A.1	Iltoptagelse i hvile	67
A.2	Iltoptagelse under arbejde	68

B	Grundlæggende variationsregning	71
B.1	Simple variationsproblemer	71
B.2	Isoperimetriske problemer	75
C	Kildetekster og resultattabeller	79
C.1	Kildetekster til MatLab	79
C.2	Resultattabeller	86

Kapitel 1

Indledning

Modul 2 giver mulighed for at arbejde med matematiske modeller. Dette vil vi gøre dels ved konkret at bearbejde en model dels mere generelt ved at sætte os ind i dele af teorien om verifikation af modeller.

I arbejdet med en konkret model benytter vi Joseph B. Kellers model [11], der viser, hvordan en kort- og mellemdistanceløber ved at variere sin hastighed igennem et løb kan komme hurtigst muligt i mål. Modellen bygger på Newtons 2. lov, samt enkle fysiologiske betragtninger om energi i musklerne. Vi har valgt at se på netop denne model, fordi den giver os mulighed for at sætte os ind i en overskuelig model inden for et semester.

Keller præsenterer sin model for kort- og mellemdistanceløb i to artikler [10] og [11]. For at kunne forstå disse i detaljer er vi nødt til at sætte os ind i dele af teorien om variationsregning. Ligeledes får vi brug for viden omkring menneskets fysiologi for at få kendskab til, hvad der sker i kroppen under et arbejde. Denne viden kan vi så benytte, når vi skal tage stilling til, om modellens antagelser er i overensstemmelse med virkeligheden.

Keller udarbejder sin model ved at opstille følgende optimeringsproblem:

Hvordan skal en løber variere sin hastighed for at komme hurtigst muligt i mål under hensyntagen til den mængde af energi, som er tilstede i musklerne?

Keller inddrager fire fysiologiske parametre i sin problemstilling:

- F , en maksimale kraft fremad,
- τ , en modstandskraft,
- σ , mængden af energi, der tilføres musklerne pr. sek. pr. kg. legemsvægt og endelig
- E_0 , den energimængde, der er tilstede i musklerne ved løbets start.

Disse fire fysiologiske parametre fittes ud fra 22 verdensrekorder i kort- og mellemdistanceløb. Siden Keller udgav sin artikel, er flere af verdensrekorderne forbedret. Det giver os således mulighed for at tage udgangspunkt i disse nye rekorder og dermed verificere modellen på baggrund heraf. I den forbindelse vil det være interessant at undersøge, om de fysiologiske parametre har forandret sig i de seneste år. Dette kunne muligvis være et resultat af forbedrede træningsmetoder. Disse betragtninger har vi samlet i følgende problemformulering:

Problemformulering

Kan vi fitte samme værdi for de samme fire fysiologiske parametre, som Keller fitter, og kan vi derved få samme resultat som i artiklerne [11] og [10] ? Kan Kellers model anvendes på et andet datasæt (de nyeste rekorder inden for løb)? Kan vi på baggrund af de antagelser og begrænsninger, der er foretaget i Kellers model vurdere, om modellen opfylder sit formål: at give et bud på en optimal løbestrategi for kort- og mellemdistanceløb?

Formål

Vi ønsker at behandle Kellers model for løb ud fra et modelteoretisk perspektiv. Det vil sige, at vi er interesserede i at verificere modellen både ved at eftergøre Kellers udledning af modellen og afprøve modellen på forskellige datasæt. På baggrund af førnævnte vil vi således kunne vurdere, om vores metode er anvendelig. Vi vil gøre de modelteoretiske overvejelser, der skal til for at kunne vurdere en models anvendelighed og gyldighed i forhold til dens formål.

Rapportens opbygning

I dette afsnit gives en uddybning af de enkelte kapitler for derved at give en ide til, hvilke kapitler læseren har behov for at læse.

1. Indledning

2. Udledning af Kellers model.

I dette kapitel formulerer vi Kellers problem. Derudover foretages en simplificering af problemet. På baggrund af denne simplificering er selve udledningen foretaget. Det er i forbindelse med dette arbejde, at vi får brug for teorien om variationsregning og analyse. Endelig afsluttes kapitlet med en præsentation af Kellers resultater.

3. Afprøvning af data

Dette kapitel omhandler en skitsering af, hvad vi har planlagt at efterprøve på computer, og hvordan vi har tænkt os at udføre det. Herefter vil resultaterne blive præsenteret. Programmer og data vil være at finde i appendiks C.

4. Antagelser og begrænsninger

Vi redegør i dette kapitel for, hvad vi forstår ved at udvikle og verificere en matematisk model. I den forbindelse vil modellens antagelser og begrænsninger blive diskuteret. Samtidig vil vi give en fysiologisk fortolkning af parametrene.

5. Afslutning

- Diskussion

I dette afsnit vil vi afrunde rapporten med at diskutere vores resultater fra databehandlingen. Derudover vil vi samle op på diskussionen af modellens antagelser og begrænsninger beskrevet i kapitel 4. Vi vil svare på problemformuleringen. Dette gør vi ved at se på, hvilken betydning verifikationen har for Kellers model samt vurdere dens anvendelse og gyldighed.

- Perspektivering

Vi vil her påpege emner, der kunne være interessante at arbejde videre med.

- Konklusion

Appendiks indeholder:

- Fysiologi

Her præsenteres den fysiologiske teori bag modellen i det omfang, der er nødvendigt for at vurdere Kellers model. Hvis man ikke har kendskab til fysiologi, kan dette appendiks med fordel læses før diskussionen af antagelser og begrænsninger i kapitel 3.

- Grundlæggende variationsregning

I dette appendiks udledes de begreber indenfor variationsregningen, som har været nødvendige at behandle for at forstå udledningen af Kellers model. Igen vil det være en fordel at læse dette appendiks, hvis man ikke har kendskab til variationsregning, før kapitel 2, hvor udledningen af modellen beskrives.

- Kildetekster og resultattabeller

Appendiks C indeholder kildetekster til de programmer, der er benyttet for at kunne vurdere modellen. Programmerne er udviklet i MatLab. Der vil ligeledes være udskrifter af de resultattabeller, der ligger til grund for graferne i kapitel 3.

Kapitel 2

Udledning af Kellers model

Dette kapitel omhandler udledningen af Kellers model. Kapitlet bygger hovedsageligt på Kellers artikel fra 1974, hvori en model for optimal løbestrategi for kort- og mellemdistanceløb bliver opstillet.[11] Undervejs vil der imidlertid også blive refereret til Kellers indledende artikel fra 1973, der behandler modellen udfra en mere fysiologisk vinkel.

Keller ønsker at opstille en model, der viser sammenhængen mellem en løbers hastighed, løbets distance og sluttiden. Formålet er at fastlægge hastigheden for en løber gennem et løb, således at denne kommer hurtigst muligt i mål. Løberen kan kontrollere sit energiforbrug ved at variere sin hastighed.

Opbygningen af dette kapitel vil følge [11] med en indledende præsentation af modellen samt af de elementer, der indgår i den (afsnit (2.1)). Herefter følger en simplificering af problemet, hvor enkelte af de ubekendte elimineres (afsnit (2.2)). Dernæst følger løsningen af problemet (afsnit (2.3)). I det sidste afsnit (2.4) præsenteres Kellers resultater for modellen.

2.1 Præsentation

Målet er at opstille en model for den optimale strategi for en løber gennem et løb. Altså, hvordan skal løberen variere sin hastighed for at komme hurtigst muligt i mål. Distancen er givet, og hastigheden er den eneste parameter, løberen kan kontrollere.

Følgende elementer indgår i modellen:

D Løbets distance [m].

T Den tid det tager at løbe distancen D [s]. NB: det er T , der ønskes minimeret.

$v(t)$ Hastigheden til tiden t [$\frac{m}{s}$].

Sammenhæng mellem den tilbagelagte distance og hastigheden er givet ved:

$$D = \int_0^T v(t) dt \quad (2.1)$$

Endvidere antages det, at hastigheden opfylder ligningen:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = f(t) \quad (2.2)$$

hvor

$f(t)$ er den fremadgående kraft pr. masse [$\frac{m}{s^2}$]. Denne bestemmes af løberen via hastigheden.

$\frac{v}{\tau}$ er modstandskraften, og den virker negativ på accelerationen¹. $\frac{1}{\tau}$ beskriver vindmodstanden, friktionen mod underlaget og det arbejde at løfte kroppens tyngdepunkt opad og fremad [s^{-1}]. Denne kraft øges med hastigheden.

Ved løbets start er løberen helt i ro. Det vil sige, at ligningen for hastigheden skal opfylde:

$$v(0) = 0 \quad (2.3)$$

Endvidere antages det, at der findes et maksimum for den fremadgående kraft. Den menneskelige fysik sætter begrænsning for, hvor hurtigt man kan komme fremad. Dette maksimum kaldes F , og der må derfor gælde:

$$f(t) \leq F \quad (2.4)$$

Under løbet forbrænder løberen en mængde energi. Det antages, at der udelukkende anvendes aerob forbrænding (se appendiks A). Der gælder derfor følgende energibalancer:

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - fv \quad (2.5)$$

¹ $a(t) = \frac{dv}{dt} = f(t) - \frac{v}{\tau}$.

$E(t)$ Mængden af ilt tilstede i musklerne pr. masse $[\frac{kcal}{kg}]$. Ilt om-sættes via aerob forbrænding til energi, der kan forbruges under løb.

$f(t)v(t)$ Den hastighed, hvorved energien forbruges.

σ Den mængde af energi, der ved hjælp af vejtrækningen og blod-cirkulation tilføres musklerne pr. sek. pr. kg. legemsvægt $[\frac{kcal}{kgs}]$. Bemærk, at σ er raten af ilttilførelse udover den tilførelse, der finder sted i hvilende tilstand.

Ved løbets start er der en vis iltmængde tilstede i musklerne. Keller antager, at løberen kan opbruge al sin energi. Ligeledes siger Keller, at mængden af energi ikke kan være negativ. Der skal derfor gælde følgende for modellen:

$$E(0) = E_0. \quad (2.6)$$

og

$$E(t) \geq 0 \quad (2.7)$$

Vi er nu i stand til opstille problemet:

Find $v(t)$, $f(t)$ og $E(t)$, som tilfredsstiller ligningerne (2.2) til (2.7), således at T defineret ved ligning (2.1) minimeres. De fire fysiologiske konstanter (Keller antager de er konstante) τ , σ , F , E_0 og distancen D er givet.

2.2 Omformulering af problemet

I stedet for at have tre ubekendte funktioner $f(t)$, $E(t)$ og $v(t)$ omformulerer vi problemet, således at $f(t)$ og $E(t)$ kan udtrykkes ved hjælp af $v(t)$. Samler man ligning (2.2) og (2.4) ses det, at :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} \leq F \quad (2.8)$$

Vi kan helt fjerne $f(t)$ fra ligning (2.5) ved at indsætte udtrykket fra (2.2)

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - v \left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} \right)$$

Herefter integreres for at finde $E(t)$ udtrykt ved $v(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dE}{ds} ds &= \int_0^t \left(\sigma - vv' - \frac{v^2}{\tau} \right) ds \Rightarrow \\ E(t) - E(0) &= \sigma t - \int_0^t vv' ds - \frac{1}{\tau} \int_0^t v^2 ds \end{aligned}$$

Ifølge ligning (2.6) ved vi, at $E(0) = E_0$. Andet led kan integreres ved hjælp af substitution:

$$u = v(s) \Rightarrow du = v'(s) ds.$$

$$\int_0^t vv' ds = \int_{v(0)}^{v(t)} u du = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_{v(0)}^{v(t)} = \left[\frac{1}{2} v^2(s) \right]_0^t = \frac{1}{2} v^2(t)$$

Tredje led kan der ikke gøres noget ved, så længe $v(t)$ er ukendt. Vi får derfor, at:

$$E(t) = E_0 + \sigma t - \frac{1}{2} v^2(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t v^2(s) ds \quad (2.9)$$

Ud fra ligning (2.7) fås, at følgende ulighed skal gælde:

$$E_0 + \sigma t - \frac{1}{2} v^2(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t v^2(s) ds \geq 0 \quad (2.10)$$

Vi har nu $E(t)$ og $f(t)$ udtrykt ved $v(t)$ og kan derfor omformulere problemet. Det er det efterfølgende problem, vi skal igang med at løse:

Find $v(t)$, der tilfredstiller (2.3), (2.8) og (2.10), så T minimeres. Parametrene τ, σ, F, E_0 og distancen D er givet.

Tilsvarende kan man se på det ækvivalente problem: Givet T samt de fire fysiologiske parametre, find maksimum for D . Det vil sige, hvor langt kan der maksimalt løbes på T sek.

2.3 Løsning

Ved løbets start $t = 0$ ved vi, at $v(0) = 0$. Det betyder, at $f(0)v(0) = 0$ ligegyldigt hvilken værdi, f antager. Det antages nu, at $f(0) = F$, og at denne tilstand holdes i et kort tidsinterval $[0, t_1]$. Såfremt $t_1 \neq 0$ kan vi nu finde et udtryk for $v(t)$, idet

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = F \quad \text{for } 0 \leq t \leq t_1 \quad (2.11)$$

Dette er en differentiaalligning af formen $v' + v\frac{1}{\tau} = F$, og den kan løses². Vi har, at $y(x) = v(t)$, $x = t$, $a = 0$ og $b = v(0) = 0$. Først findes $A(s)$.

$$A(s) = \int_0^t \frac{1}{\tau} ds = \left[\frac{1}{\tau} s \right]_0^t = \frac{t}{\tau}$$

Vi kan nu opskrive:

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t F e^{\frac{s}{\tau}} ds \\ &= e^{-\frac{t}{\tau}} F [\tau e^{\frac{s}{\tau}}]_0^t \\ &= F\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ligning (2.12) er således løsning for $v(t)$ i delintervallet $[0, t_1]$. $f(t)$ er kendt på intervallet nemlig konstant F . Derimod mangler $E(t)$ at blive bestemt. Ved at benytte (2.12) sammen med (2.10) fås:

$$E(t) = E_0 + \sigma t - \frac{F^2 \tau^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2}{2} - \frac{1}{\tau} \int_0^t F^2 \tau^2 \left(1 - e^{-\frac{s}{\tau}} \right)^2 ds \geq 0$$

Integralet i 4. led kan udregnes til:

$$\begin{aligned} &\frac{-F^2 \tau^2}{\tau} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{s}{\tau}} \right)^2 ds = \\ &\frac{-F^2 \tau^2}{\tau} \left(\int_0^t 1 ds + \int_0^t e^{-\frac{2s}{\tau}} ds - 2 \int_0^t e^{-\frac{s}{\tau}} ds \right) = \end{aligned}$$

²Ifølge [1] gælder der for differentiaalligninger, at hvis $y' + P(x)y = Q(x)$, hvor P og Q er givne funktioner, så findes y ved:

$$y(x) = b e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t) e^{A(t)} dt$$

Hvor $b = y(a)$ og $A(x) = \int_a^x P(t) dt$

$$\begin{aligned} & \frac{-F^2\tau^2}{\tau} \left(t + \left[\frac{-\tau}{2} e^{\frac{-2t}{\tau}} \right]_0^t - 2 \left[-\tau e^{\frac{-t}{\tau}} \right]_0^t \right) = \\ & -F^2\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} e^{\frac{-2t}{\tau}} - \frac{3}{2} + 2e^{\frac{-t}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

De to sidste led kan vi nu sætte sammen til:

$$\begin{aligned} & -F^2\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} e^{\frac{-2t}{\tau}} - \frac{3}{2} + 2e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\frac{-2t}{\tau}} - e^{\frac{-t}{\tau}} \right) = \\ & -F^2\tau^2 \left(-1 + e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} \right) \end{aligned}$$

som til sidst indsættes i udtrykket for $E(t)$ i intervallet $[0, t_1]$:

$$E(t) = E_0 + \sigma t - F^2\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{\frac{-t}{\tau}} \right) \geq 0 \quad (2.13)$$

Keller nævner, at hvis $\sigma \geq F^2\tau$ er ligning (2.13) opfyldt for alle t , så vil ligning (2.10) altid være opfyldt, og (2.12) vil således altid være den optimale hastighed. Grundet fysiologiske årsager er dette imidlertid urealistisk (se kapitel 4). Vi vil derfor kun betragte $\sigma < F^2\tau$.

I dette tilfælde vil uligheden i ligning (2.10) og dermed løsningen i (2.13) kun gælde for et helt løb, hvis det kan løbes på tilpas kort tid mindre end eller lig med en kritisk tid, kaldet T_c . Denne er den positive rod i ligning (2.13). I løb af kortere varighed end T_c skal der ikke økonomiseres med energien, men derimod løbes til gennem hele løbet, idet energien ikke kan nå at slippe op. Vi kan dele løb op i to typer: Type I, hvor resultattiden $T \leq T_c$ og type II, hvor $T > T_c$.

Type I

Løb af denne type, er løb, der løbes hurtigere end T_c . $T_c \leq t_1$, da dette er det maksimale interval, hvor ligning (2.12) og derfor ligning (2.13) er defineret. Når denne parameter er bestemt, kan vi beregne den kritiske distance, D_c , distancen til tiden T_c . Dette kan vi gøre ved at benytte vores resultat for (2.12) i (2.1).

$$\begin{aligned} D &= \int_0^T v(t) dt \\ &= \int_0^T F\tau(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F\tau \left(T - [-\tau e^{\frac{-t}{\tau}}]_0^T \right) \\
&= F\tau \left(T + \tau e^{\frac{-T}{\tau}} - \tau \right) \\
&= F\tau^2 \left(\frac{T}{\tau} + e^{\frac{-T}{\tau}} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Det løb, hvor $T = T_c$, er det længste løb, hvortil (2.12) gælder.

Type II

I disse løb er $T > T_c$, og derfor må $T > t_1$. Under disse løb indføres den nye *antagelse*, at energien til tiden T er brugt op, det vil sige $E(t) = 0$. Det antages, at denne tilstand gælder for et kort interval lige inden mål. Altså

$$E(t) = 0 \quad , t_2 \leq t \leq T \tag{2.15}$$

Anvendes denne antagelse i ligning (2.9) fås:

$$E(t) = E_0 + \sigma t - \frac{1}{2}v^2(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t v^2(s)ds = 0 \quad , t_2 \leq t \leq T$$

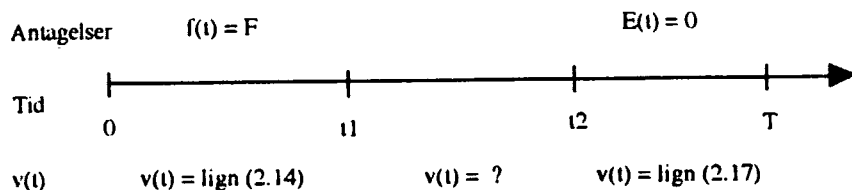
Energibalancen $\frac{dE}{dt}$ vil således også være nul i dette interval $[t_2, T]$, hvilket ses når vi differentierer (2.15), hvor $E(t)$ er bestemt ved ligning (2.9).

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - \frac{1}{2} \frac{dv^2(t)}{dt} - \frac{1}{\tau} v^2(t) = 0 \quad , t_2 \leq t \leq T \tag{2.16}$$

Hvis vi her opfatter $v^2(t)$ som en funktion $q(t)$, kan (2.16) omskrives til:

$$\frac{dE}{dt} = \sigma - \frac{1}{2} \frac{dq}{dt} - \frac{1}{\tau} q(t) = 0$$

Denne differentiaalligning kan løses for $q(t)$. Først må vi anvende et par trick. Vi omskriver ligning (2.16) til $q' + \frac{2}{\tau}q = 2\sigma$. Vi beregner dernæst $q(t_2) = v^2(t_2)$ og finder, jævnfør fodnoten på side 13, at $A(t) = \frac{2}{\tau} \int_{t_2}^t ds = \frac{2(t-t_2)}{\tau}$.



Figur 2.1: t -akse, der viser hvilke ligninger, der gælder til hvilke tider samt hvilke antagelser, der tages.

Vi kan nu finde $q(t)$ i intervallet $t_2 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}
 q(t) &= e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} \left(v^2(t_2) + 2\sigma \int_{t_2}^t e^{\frac{2(s-t_2)}{\tau}} ds \right) \\
 &= e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} \left(v^2(t_2) + 2\sigma \left[\frac{\tau}{2} e^{\frac{2(s-t_2)}{\tau}} \right]_{t_2}^t \right) \\
 &= v^2(t_2) e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} + \sigma \tau e^{\frac{2t_2-2t+2t-2t_2}{\tau}} - \sigma \tau e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} \\
 &= e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} (v^2(t_2) - \sigma \tau) + \sigma \tau
 \end{aligned}$$

$v(t)$ indføres, og vi får:

$$v(t) = \left(e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} (v^2(t_2) - \sigma \tau) + \sigma \tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t_2 \leq t \leq T \quad (2.17)$$

Dette er løsningen for $v(t)$ for $T > T_c$ og $t_2 \leq t \leq T$. Figur 2.1 samler op på det, vi på nuværende tidspunkt ved. Vi har altså flere detaljer til at opskrive ligning (2.1). Den efterfølgende ligning er en opsamling på, hvor langt vi hidtil er nået.

$$\begin{aligned}
 D &= \int_0^{t_1} F \tau (1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) dt + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \\
 &\quad + \int_{t_2}^T \left(e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} (v^2(t_2) - \sigma \tau) + \sigma \tau \right)^{\frac{1}{2}} dt
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vi mangler nu kun at finde et udtryk for $v(t)$ i $t_1 \leq t \leq t_2$.

Dette problem løses ved hjælp af variationsregning, idet det er et variationsproblem med betingelsen $E(t_2) = 0$. Problemet kan identificeres

som isoperimetrisk og kan behandles som et sådant. (se appendiks B). Derfor vælges funktionalen $D + \lambda \frac{E(t_2)}{2}$, hvor λ er en Lagrange multiplikator (se appendiks B). Som nævnt på side 12 vil vi i stedet for at minimere T for et givet D se på problemet at maximere D for et givet T . D er en funktional og kan skrives som:

$$D\{v\} = \int_0^T H(t, v) dt$$

Ifølge ligning (2.18) kan vi se på dette ledvis, det vil sige:

$$D\{v\} = \int_0^{t_1} H_1(t, v) dt + \int_{t_1}^{t_2} H_2(t, v) dt + \int_{t_2}^T H_3(t, v) dt$$

Vi kender H_1 , H_2 og H_3 fra ligning (2.18), men endnu ikke $v(t)$. D skal maximeres under betingelsen, vi vil kalde $J\{v\}$:

$$J\{v\} = \int_0^T G(t, v) dt = \frac{E(t_2)}{2} = 0$$

I en sådan situation kan vi gøre brug af Lagrange multiplikatorer, hvor det gælder (se appendix B), at:

$$\int_0^T H'_v \eta + H'_{v'} \eta' dt = \lambda \int_0^T G'_v \eta + G'_{v'} \eta' dt$$

Hvor λ som før nævnt er en Lagrange multiplikator og η er en funktion. Vi benytter nu, at $\eta = \delta v(t)$ og således $\eta' = \delta v'(t)$.

Da ingen af de tre led H_1 , H_2 og H_3 afhænger af v' vil $H'_{v'} = 0$. Integralet af G er givet ved ligning (2.9), hvor v' heller ikke indgår, så $G'_{v'}$ bliver nul. Dette medfører, at andet led i begge integraler er nul. Betragtes D ledvis fås:

$$\int_0^{t_1} H'_{1v} \delta v(t) dt = -\lambda \int_0^{t_1} G'_v \delta v(t) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} H'_{2v} \delta v(t) dt = -\lambda \int_{t_1}^{t_2} G'_v \delta v(t) dt$$

$$\int_{t_2}^T H'_{3v} \delta v(t) dt = -\lambda \int_{t_2}^T G'_v \delta v(t) dt$$

Til at begynde med ser vi på venstresiderne: I første ligning afhænger H_1 ikke af v (se ligning (2.18)), så integralet her bliver nul. Anden ligning bliver nu:

$$\int_{t_1}^{t_2} H'_{2v} \delta v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta v(t) dt$$

Tredje ligning er mere indviklet. H_3 er givet ved:

$$H_3 = \left(e^{\frac{-2(t-t_2)}{\tau}} (v^2(t_2) - \sigma\tau) + \sigma\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

og når denne differentieres med hensyn til $v(t_2)$ fås:

$$\frac{dH_3}{dv(t_2)} = \frac{1}{2} \left(\sigma\tau + (v^2(t_2) - \sigma\tau) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} \right)^{-\frac{1}{2}} 2v(t_2) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}}$$

og tredje ligning bliver da:

$$\int_{t_2}^T H'_{3v} \delta v(t_2) dt = v(t_2) \delta v(t_2) \int_{t_2}^T \left(\sigma\tau + (v^2(t_2) - \sigma\tau) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} dt$$

Højresiderne ses på under et, idet G ikke behøver at blive evalueret ledvis. Vi vælger kun at betragte en variation, der varierer fra $[t_1, t_2]$, idet $E(t) = 0$ for $t \in [t_2, T]$. Højresiden for $[0, t_1]$ er ikke interessant, da vi allerede ved, at venstresiden er nul.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} H'_{2v} \delta v(t) dt &= -\lambda \int_{t_1}^{t_2} G'_v \delta v(t) dt \\ &= -\frac{\lambda}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} G dt \\ &= -\frac{\lambda}{2} \delta (E(t_2)) \end{aligned}$$

$E(t_2)$ er givet ved ligning (2.9):

$$= -\frac{\lambda}{2} \delta \left(E_0 + \sigma t - \frac{1}{2} v^2(t_2) - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} v^2(s) ds \right)$$

Her benytter vi definitionen på en variation omkring en funktional (se appendiks B). $I\{v + \delta v\} - I\{v\}$.

$$\begin{aligned} &= -\frac{\lambda}{2} \left(\left\{ E_0 + \sigma t - \frac{1}{2} (v(t_2) + \delta v(t_2))^2 - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} (v + \delta v)^2 ds \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ E_0 + \sigma t - \frac{1}{2} v^2(t_2) - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} v^2 ds \right\} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{2} \left(-v(t_2) \delta v(t_2) - \frac{1}{2} (\delta v(t_2))^2 - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} 2v \delta v + (\delta v)^2 ds \right) \end{aligned}$$

Der ses bort fra 2. ordensleddene, idet $(\delta v)^2$ er lille.

$$\approx \frac{\lambda}{2} v(t_2) \delta v(t_2) + \frac{\lambda}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} v(s) \delta v(s) ds$$

Trækker vi denne højreside over på venstre siden og samler den ledvise opdeling af H til en ligning fås:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta v(t) dt + v(t_2) \delta v(t_2) \int_{t_2}^T \left(\sigma \tau + (v^2(t_2) - \sigma \tau) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} dt \\ - \frac{\lambda}{2} v(t_2) \delta v(t_2) - \frac{\lambda}{2\tau} \int_{t_1}^{t_2} 2v(t) \delta v(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ligning (2.19) skal således gælde for enhver valg af $\delta v(t) \neq 0$ (og dermed også for $\delta v(t_2)$) samt $v(t_2) \neq 0$. I ligning (2.19) isolerer vi nu disse to størrelser ved at slå 1. og 4. led sammen og samle 2. og 3. led.

$$\begin{aligned} v(t_2) \delta v(t_2) \left(\int_{t_2}^T \left(\sigma \tau + (v^2(t_2) - \sigma \tau) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} dt - \frac{\lambda}{2} \right) + \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta v(t) dt - \frac{\lambda}{2\tau} \int_{t_1}^{t_2} 2v(t) \delta v(t) dt = 0 \end{aligned}$$

Da $\delta v(t) \neq 0$ og $v(t_2) \neq 0$, må parentesen til $\delta v(t_2)$ nødvendigvis være lig nul, ifølge variationsregningens fundamentallemma (se appendiks B). Udfra første led kan vi nu finde at udtryk for λ :

$$\begin{aligned} \int_{t_2}^T \left(\sigma \tau + (v^2(t_2) - \sigma \tau) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} dt - \frac{\lambda}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ 2 \int_{t_2}^T \left(\sigma \tau + (v^2(t_2) - \sigma \tau) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} dt = \lambda \end{aligned} \quad (2.20)$$

Udfra fra de sidste to led er vi nu i stand til at beregne $v(t)$ for intervallet $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta v(t) dt - \frac{\lambda}{2\tau} \int_{t_1}^{t_2} 2v(t) \delta v(t) dt = \\ \frac{\lambda}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\tau}{\lambda} \delta v(t) - v(t) \delta v(t) dt = \\ \frac{\lambda}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} \delta v(t) \left(\frac{\tau}{\lambda} - v(t) \right) dt = 0 \end{aligned}$$

Igen da $\delta v(t) \neq 0$, må det nødvendigvis gælde at:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\lambda} - v(t) &= 0 & \Leftrightarrow \\ v(t) &= \frac{\tau}{\lambda}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Derved er hastigheden i dette interval konstant.

Vi kigger nu på grænsepunkterne t_1 og t_2 . D ønskes at være kontinuert. For $v(t) = v(t_1)$ har vi ifølge ligningerne (2.12) og (2.21):

$$\frac{1}{\lambda} = F(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}) \quad (2.22)$$

Ud fra denne ligning kan vi finde t_1 , men det kræver kendskab til λ . Vi kan evaluere integralet i ligning (2.20) ved at udnytte ligning (2.21) for $t = t_2$. Dette giver

$$\lambda = 2 \int_{t_2}^T \left[\sigma\tau + \left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} \right]^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} dt$$

Vi omskriver dette til et udtryk, der er lidt lettere at arbejde med. Til dette formål benyttes konstanterne $b = \sigma\tau$, $a = (\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau)$, $c = \frac{2t_2}{\tau}$ og endelig $h = \frac{2}{\tau}$:

$$\lambda = 2 \int_{t_2}^T \frac{e^{c-ht}}{\sqrt{b + ae^{c-ht}}} dt$$

Her substituerer vi $x = e^{c-ht}$, hvilket giver at $\frac{dx}{dt} = -he^{c-ht} = -hx$.

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \int_{X_1}^{X_2} \frac{x}{\sqrt{b + ax}} \frac{1}{-hx} dx \\ &= \frac{-2}{h} \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sqrt{b + ax}} dx \end{aligned}$$

Her er X_1 og X_2 de ændrede grænser for integralet. Integralet løses nu udfra kendskab til at $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$

$$\lambda = \frac{-2}{h} \left[\frac{2\sqrt{ax+b}}{a} \right]_{X_1}^{X_2}$$

Vi indfører nu de gamle grænser igen, samt de oprindelige konstanter:

$$\lambda = -2\tau \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-t)}{\tau}} + \sigma\tau}}{\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau} \right]_{t_2}^T$$

$$\begin{aligned}
&= -2\tau \left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right)^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} + \sigma\tau} - \sqrt{\left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) + \sigma\tau} \right) \\
&= -2 \left(\frac{\tau}{\lambda^2} - \sigma \right)^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} + \sigma\tau} - \frac{\tau}{\lambda} \right) \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Endvidere ønsker vi at kunne bestemme t_2 . Vi udnytter betingelsen $E(t_2) = 0$ og benytter dette i ligning (2.9), hvor udtrykket for $v(t)$ er givet ved ligninger (2.12) og (2.21):

$$\begin{aligned}
E(t_2) &= E_0 + \sigma t_2 - \frac{v^2(t_2)}{2} - \frac{1}{\tau} \int_0^{t_1} v^2(s) ds - \frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} v^2(s) ds \\
&= E_0 + \sigma t_2 - \frac{\tau^2}{2\lambda^2} - \\
&\quad F^2\tau \left[s + 2\tau e^{\frac{-s}{\tau}} - \frac{\tau}{2} e^{\frac{-2s}{\tau}} \right]_0^{t_1} - \frac{\tau}{\lambda^2} [s]_{t_1}^{t_2} \\
&= E_0 + \sigma t_2 - \frac{\tau^2}{2\lambda^2} - \\
&\quad F^2\tau \left(t_1 - \frac{\tau}{2} e^{\frac{-2t_1}{\tau}} + \frac{\tau}{2} + 2\tau e^{\frac{-t_1}{\tau}} - 2\tau \right) - \frac{\tau}{\lambda^2} (t_2 - t_1) \\
&= E_0 + \sigma t_2 - \frac{\tau^2}{2\lambda^2} - F^2\tau \left(\frac{-3\tau}{2} + t_1 + 2\tau e^{\frac{-t_1}{\tau}} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\tau}{2} e^{\frac{-2t_1}{\tau}} \right) - \frac{\tau}{\lambda^2} (t_2 - t_1) = 0 \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Ligning (2.22) til (2.24) kan give os t_1 , t_2 og λ under forudsætning af, at $t_1 \leq t_2 \leq T$. Hvis i stedet ligningerne giver, at $t_1 > t_2$, så må $t_1 = t_2$, og dette giver ifølge (2.24), at $t_1 = t_2 = T_c$. For $t_1 \leq t_2$ ser vi på ligning (2.23) som løses bikvadratisk for λ .

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2} \left(\sigma - \frac{\tau}{\lambda^2} \right) + \frac{\tau}{\lambda} &= \left(\sigma\tau + \left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} \right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\
\left(\frac{\lambda}{2} \left(\sigma - \frac{\tau}{\lambda^2} \right) + \frac{\tau}{\lambda} \right)^2 &= \left(\sigma\tau + \left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} \right)
\end{aligned}$$

Vi forlænger med λ^2 , hvorved der introduceres to nye rødder:

$$\left(\frac{1}{2}(\sigma\lambda^2 - \tau) + \tau \right)^2 = \left(\sigma\tau\lambda^2 + (\tau^2 - \sigma\tau\lambda^2) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} \right)$$

Dette er en maskeret andengradsligning, som kan løses for λ . Det vil sige, at vi kan finde fire rødder, men kun de to er rødder i den oprindelige ligning (2.23).

Keller udregner de fire rødder til:

$$\lambda = \pm \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = \pm \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vi vil nu godtgøre, at to af de fire fundne rødder virkelig er rødder til ligning (2.23) ved at indsætte de fire værdier for λ i ligningen.

Vi prøver først med $\lambda = \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} &= -2 \left(\frac{\tau}{\sigma} - \sigma\right)^{-1} \left(\left[\left(\frac{\tau^2}{\sigma} - \sigma\tau\right) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma\tau \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau}{\sigma} - \sigma\right) &= -2 \left(\left[(\tau\sigma + (\tau\sigma - \tau\sigma)e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}) \right]^{\frac{1}{2}} - (\tau\sigma)^{\frac{1}{2}} \right) \Leftrightarrow \\ 0 &= -2 \left((\tau\sigma)^{\frac{1}{2}} - (\tau\sigma)^{\frac{1}{2}} \right) \Leftrightarrow \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vi har hermed vist, at $\lambda = \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$ er rod. Det kan vises, at den tilsvarende negative rod ikke er rod i (2.23). Det er således en af de ekstra introducerede rødder.

Vi viser nu, at $\lambda = \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}}$ er rod i ligning (2.23):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} &= \\ 2 \left(\sigma - \frac{\tau}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \left(1 - 4e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}\right)} \right)^{-1} &\cdot \\ \left[\left\{ \left(\frac{\tau^2}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \left(1 - 4e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}\right)} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} + \sigma\tau \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{\lambda} \right] & \end{aligned}$$

Vi substituerer $e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}$ med k og deler udtrykket op i tre dele, der behandles hver for sig.

1. del:

$$2 \left(\sigma - \frac{\tau}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)(1-4k)} \right)^{-1} = 2 \left(\sigma - \frac{\sigma}{(1-4k)} \right)^{-1} = \frac{2}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{1-4k} \right)^{-1}$$

2. del:

$$\left\{ \left(\frac{\tau^2}{\frac{\tau}{\sigma}(1-4k)} - \sigma\tau \right) k + \sigma\tau \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sigma\tau \left(\frac{k}{1-4k} - k \right) + \sigma\tau \right\}^{\frac{1}{2}}$$

3. led:

$$\frac{\tau}{\lambda} = \frac{\tau}{\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}(1-4k)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\sigma\tau}{1-4k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Disse tre led sættes sammen. Bemærk at der undervejs ganges igennem med $(1-4k)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}(1-4k)^{\frac{1}{2}} &= \frac{2}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{1-4k}\right)^{-1} \left[\left\{ \sigma\tau \left(\frac{k}{1-4k} - k \right) + \sigma\tau \right\}^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\sigma\tau}{1-4k} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Leftrightarrow \\ & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}(1-4k)^{\frac{1}{2}} &= \frac{2\sqrt{\tau\sigma}}{\sigma(1-\frac{1}{1-4k})} \left[\left\{ \frac{k}{1-4k} - k + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{1-4k} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Leftrightarrow \\ & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-4k)^{\frac{1}{2}} &= \frac{2}{-4k} \left[\left\{ (1-4k)^2 \left(\frac{k}{1-4k} - k + 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} - (1-4k)^{\frac{1}{2}} \right] \Leftrightarrow \\ & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4k(1-4k)^{\frac{1}{2}} &= 2 \left[\left\{ k(1-4k) - k(1-4k)^2 + (1-4k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - (1-4k)^{\frac{1}{2}} \right] \Leftrightarrow \\ & \end{aligned}$$

$$-2k = \left(\left\{ k - k + 4k^2 + 1 - 4k \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$-2k = \sqrt{(1-2k)^2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$-2k = -2k$$

Hermed har vi vist, den anden positive rod er rod. Den negative rod vil ikke være rod i den oprindelige ligning. Idet $\lambda = \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$ ikke vil gælde for (2.20), er den eneste rod:

$$\lambda = \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 4e^{\frac{2(t_2 - T)}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

Dernæst sættes $t_1 = t_2 = T_c$, samtidig med at udtrykket for λ fra (2.25) indsættes i (2.22) og løses for $T = T^*$ ³:

$$\begin{aligned} F \left(1 - e^{\frac{-t_2}{\tau}}\right) &= \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - 4e^{\frac{-2(T^* - t_2)}{\tau}}\right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\ F^2 \left(1 - e^{\frac{-t_2}{\tau}}\right)^2 &= \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-1} \left(1 - 4e^{\frac{-2(T^* - t_2)}{\tau}}\right)^{-1} \Leftrightarrow \\ \left(1 - 4e^{\frac{-2(T^* - t_2)}{\tau}}\right) &= F^{-2} \left(1 - e^{\frac{-T_c}{\tau}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-1} \Leftrightarrow \\ \ln \left(4e^{\frac{-2(T^* - T_c)}{\tau}}\right) &= \ln \left\{1 - F^{-2} \left(1 - e^{\frac{-T_c}{\tau}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-1}\right\} \Leftrightarrow \\ \ln 4 + \ln \left\{e^{\frac{-2(T^* - T_c)}{\tau}}\right\} &= \ln \left\{1 - F^{-2} \left(1 - e^{\frac{-T_c}{\tau}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-1}\right\} \Leftrightarrow \\ \frac{-2(T^* - T_c)}{\tau} &= -\ln 4 + \ln \left\{1 - F^{-2} \left(1 - e^{\frac{-T_c}{\tau}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-1}\right\} \Leftrightarrow \\ -2T^* &= -2T_c + \tau \left[-\ln 4 + \ln \left\{1 - F^{-2} \left(1 - e^{\frac{-T_c}{\tau}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-1}\right\}\right] \Leftrightarrow \\ T^* &= T_c + \tau \left[\ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left\{1 - F^{-2} \left(1 - e^{\frac{-T_c}{\tau}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{-1}\right\}\right] \quad (2.26) \end{aligned}$$

Når t_1 , t_2 og λ er fundet, er $v(t)$ således givet ved (2.12), (2.17) og (2.21). Disse benyttes i (2.18), og vi kan udlede D . Vi kender allerede D for $0 \leq t \leq t_1$ fra (2.14) og for $t_1 \leq t \leq t_2$ givet ved (2.21), så vi mangler bare at integrere det sidste led i (2.18):

$$\int_{t_2}^T \left(\sigma \tau + \left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma \tau \right) e^{\frac{2(t_2 - t)}{\tau}} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

³Keller præsenterer i sin artikel denne størrelse, derfor har vi valgt også at udlede ligning (2.26). Vi har ikke benyttet den i vores beregninger.

Vi har her gættet os til en løsning til integralet og vil vise, vi opnår samme resultat som Keller:

Lad nu $a = \sigma\tau$, $b = \left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau\right)e^{2t_2}$ og substituer $u = \frac{1}{\tau}t$, hvorved vi får, at $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau}$ og $dt = \tau du$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a} \tau \int_{X_1}^{X_2} \left(1 + \frac{b}{a}e^{-2u}\right)^{\frac{1}{2}} du = \\ & \sqrt{a} \tau \left[\tanh^{-1} \left(1 + \frac{b}{a}e^{-2u}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{b}{a}e^{-2u}\right)^{\frac{1}{2}} \right]_{X_1}^{X_2} = \\ & \sqrt{a} \tau \left[\tanh^{-1} \left(1 + \frac{b}{a}e^{\frac{-2T}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{b}{a}e^{\frac{-2T}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. - \tanh^{-1} \left(1 + \frac{b}{a}e^{\frac{-2t_2}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{b}{a}e^{\frac{-2t_2}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ & \sqrt{\sigma\tau} \tau \left[\tanh^{-1} \left(1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1\right)e^{2t_2}e^{\frac{-2T}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} - \right. \\ & \quad \left(1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1\right)e^{\frac{2t_2}{\tau}}e^{\frac{-2T}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \left. - \tanh^{-1} \left(1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1\right)e^{\frac{2t_2}{\tau}}e^{\frac{-2t_2}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \left(1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1\right)e^{\frac{2t_2}{\tau}}e^{\frac{-2t_2}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ & \sqrt{\sigma\tau} \tau \left[\tanh^{-1} \left(1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1\right)e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. - \left(1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1\right)e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}}\right)^{\frac{1}{2}} - \tanh^{-1} \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Vi kan nu samle op på udtrykkene for D . For $T \leq T_c$ er D givet ved ligningen (2.14)

$$D = F\tau^2 \left(\frac{T}{\tau} + e^{-\frac{T}{\tau}} - 1 \right)$$

og for $T \geq T_c$ er D givet ved:

$$\begin{aligned} D = & F\tau^2 \left(\frac{t_1}{\tau} + e^{\frac{-t_1}{\tau}} - 1 \right) + \frac{\tau(t_2 - t_1)}{\lambda} \\ & + \tau(\sigma\tau)^{\frac{1}{2}} \left[+\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} - \tanh^{-1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ 1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2 \sigma} - 1 \right) e^{\frac{2(t_2 - T)}{\tau}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
& + \tanh^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2 \sigma} - 1 \right) e^{\frac{2(t_2 - T)}{\tau}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Denne ligning stemmer ikke helt overens med Kellers. Vi har ændret et fortegn umiddelbart inden for den kantede parentes i 3. led. Vi antager, at det er en trykfejl i artiklen.

Vi har nu opstillet Kellers to ligninger for den optimale løbestrategi. Hvilken af ligningerne, der skal benyttes, afhænger af løbets længde. Til løb kortere end D_c skal ligning (2.14) anvendes og for løb længere end D_c ligning (2.27)

2.4 Præsentation af Kellers resultater

Der er to muligheder for at finde værdierne for de enkelte parametre:

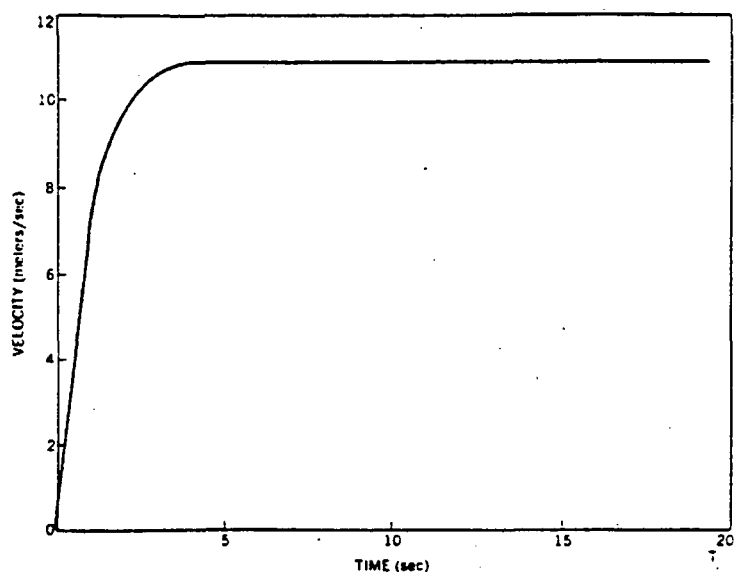
- Fitte parametrene udfra faktiske data.
- Fastlægge parametrene gennem fysiologiske studier.

Keller vælger den første metode, bl.a. fordi han selv umiddelbart er istand til at udføre den.

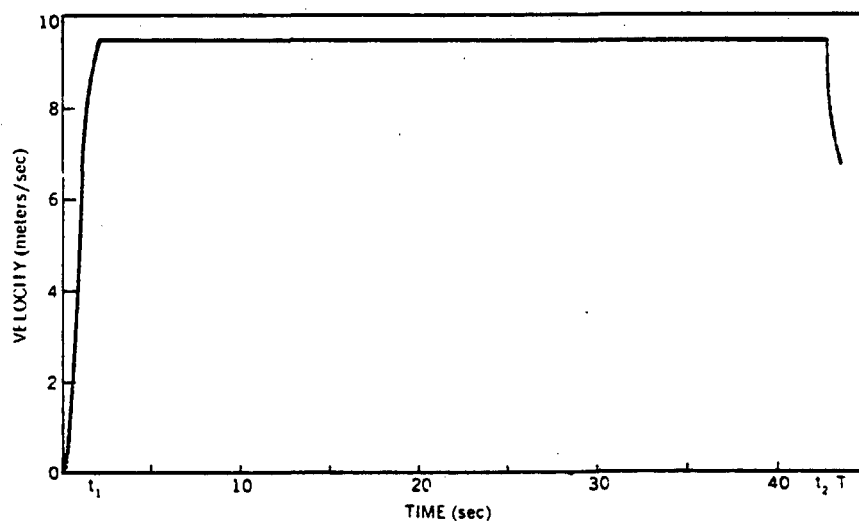
Under udledningen af modellen bliver man nødt til at udregne en kritisk distance og en kritisk tid. Dette er nødvendigt for, at kunne skelne mellem i hvilke løb, der skal løbes for fuld kraft, og i hvilke hastigheden skal bestemmes nærmere. Keller kommer frem til resultatet illustreret ved figurerne 2.2 og 2.3.

Keller udregner, at i løb op til 291 m skal løberen løbe for fuld kraft hele vejen (se figur 2.2), hvilket svarer til den kritiske tid 27.7004 sek. Derimod skal løberen, hvis distancen er over 291 m, kun i et kort tidsinterval i starten af løbet løbe for fuld kraft. Resten af vejen skal hastigheden holdes konstant. Et lille stykke før mål er energien brugt op, det vil sige, at løberen nærmest falder i mål. Derfor ses en sænkning af hastigheden sidst i løbet (se figur 2.3).

På baggrund af denne skelnen fitter Keller F og τ udfra løb under den kritiske distance og σ og E_0 fittes udfra de længere løb. Keller fitter



Figur 2.2: Løb på 220 yd. Den optimale hastighed plottet mod t . Den fremadrettede kraft $f(t) = F$ er maksimal gennem hele løbet [10].



Figur 2.3: Løb på 400 m. Den optimale hastighed plottet mod t . Den fremadrettede kraft $f(t) = F$ er maksimal på de første 1.78 sek. Efter denne indledende acceleration er v konstant indtil 0.86 sek. før slutningen af løbet, hvor mængden af energi slipper op. $E(t) = 0$ i disse 0.86 sek. [10]

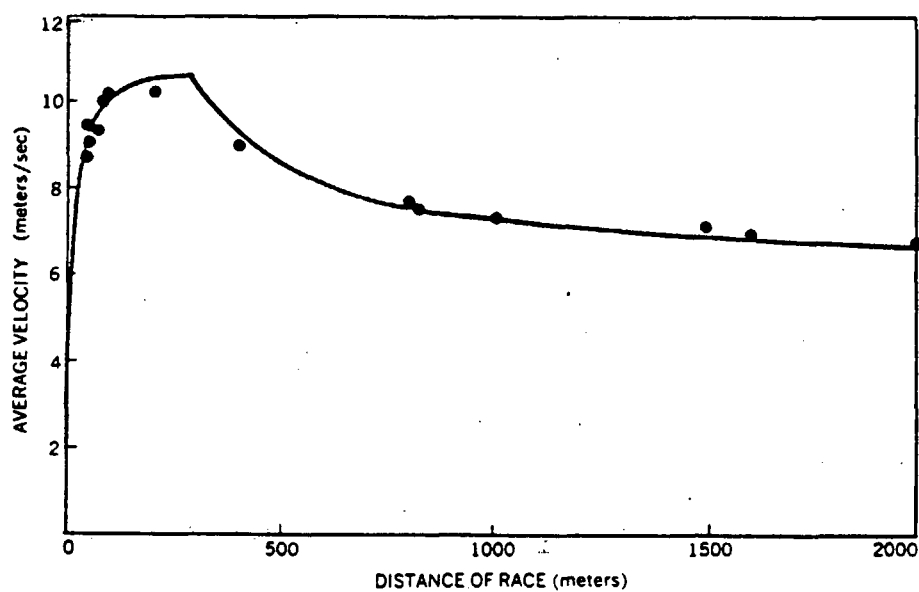
Distance D	Time T (record) min:sec	Time T (theory) min:sec	Error (per cent)	Average velocity D/T (theory) m/sec	t_1 sec	$T-t_2$ sec
50 yd	5.1	5.09	-0.2	8.99		
50 m	5.5	5.48	-0.4	9.12		
60 yd	5.9	5.93	0.5	9.26		
60 m	6.5	6.40	-1.5	9.38		
100 yd	9.1	9.29	2.1	9.85		
100 m	9.9	10.07	1.7	9.93		
200 m	19.5	19.25	-1.3	10.39		
220 yd	19.5	19.36	-0.7	10.39		
400 m	44.5	43.27	-2.8	9.24	1.78	.86
440 yd	44.9	43.62	-2.9	9.22	1.77	.86
800 m	1:44.3	1:45.95	1.6	7.55	1.07	1.08
880 yd	1:44.9	1:46.69	1.7	7.54	1.06	1.08
1000 m	2:16.2	2:18.16	1.4	7.24	0.98	1.16
1500 m	3:33.1	3:39.44	3.0	6.84	0.88	1.31
1 mile	3:51.1	3:57.28	2.7	6.78	0.87	1.34
2000 m	4:56.2	5:01.14	1.7	6.64	0.84	1.43
3000 m	7:39.6	7:44.96	1.2	6.45	.80	1.60
2 miles	8:19.8	8:20.82	0.2	6.43	.80	1.63
3 miles	12:50.4	12:44.89	-0.7	6.31	.77	1.80
5000 m	13:16.6	13:13.11	-0.4	6.30	.77	1.82
6 miles	26:47.0	25:57.62	-3.1	6.20	.75	2.10
10000 m	27:39.4	26:54.10	-2.7	6.20	.75	2.12

Figur 2.4: Tabel over Kellers data.

parametrene ud fra mindste kvadraters metode. Han får:

$$\begin{aligned}
 \tau &= 0,892 \text{ s} \\
 F &= 12,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
 \sigma &= 9,93 \frac{\text{kcal}}{\text{kg s}} = 41,57691 \text{ kJ/kg} \\
 E_0 &= 575 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} = 2407,525 \text{ kJ/kg} \\
 D_c &= 291 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Når disse vigtige parametre er fundet, kan man udregne gennemsnits-hastighederne for de enkelte distancer og sammenligne dem med verdensrekorderne. I den forbindelse udregnes en fejlprocent over afvigelsen mellem de udregnede tider og rekordtiderne. Disse resultater er vist på figur 2.4. Endvidere er der i artiklen præsenteret en graf over de udregnede gennemsnitstider og målte tider (se figur 2.5).



Figur 2.5: Den gennemsnitlige hastighed ved løb. Den teoretiske kurve ser ud til at passe med verdensrekorderne (de indtegnede punkter på figuren).

Kapitel 3

Afprøvning af data

Dette kapitel indeholder en oversigt over hvilke beregninger, der er blevet udført under vores databehandling. Vi har anvendt den matematiske programpakke MatLab, der er i stand til at udføre numeriske beregninger. Idet beregningerne er udført ved hjælp af MatLab, er de matematiske metoder ikke forklaret i deltaljer. Vi har derfor ikke sat os ind i alle de algoritmer, der ligger til grund for MatLabs funktioner, men har blot anvendt dem som redskaber. Vi vil dog nævne hvilke, der er anvendt. Herefter følger en overordnet beskrivelse af de programmer, vi selv har skrevet. Kildeteksterne til disse kan ses i appendiks C. Til sidst i dette kapitel præsenteres de resultater, vi er kommet frem til. Den endelige tolkning og diskussion af resultaterne vil finde sted i det afsluttende kapitel 5.

3.1 Planlægning af forsøg

Vi har til hensigt at efterprøve, om vi kan opnå resultater, der på tilfredstillende vis svarer til resultaterne, som Keller præsenterer i sine artikler [10] og [11]. Derudover vil vi konfrontere modellen med nye sæt af data. I de indledende forsøg tager vi udgangspunkt i de parametre, som Keller allerede har beregnet. Mens vi i de efterfølgende forsøg ønsker at fitte nye værdier for de 4 fysiologiske parametre: F , τ , σ og E_0 . I sin artikel behandler Keller 22 forskellige distancer. Datasættene vil bestå af løb med de samme distancer. I tabel 3.2 er datasættene præsenteret. I det sidste forsøg har distancerne 3 og 6 miles ikke været til vores rådighed. Et problem, som Erik Laursen har gjort os opmærksom på, er, at rekordtider fra før 1970'erne (og dermed også Kellers datasæt)

er registreret som håndtider. Dette har en betydning for de kortere løb (50 yd til 220 yd), hvorfor man er nødt til at korrigere forskellen for at kunne sammenligne nyere og ældre rekorder. De nye datasæt er blevet korrigeret for forskellen mellem elektroniske tider og håndtider på de korte løb. Parametrene σ og E_0 er af Keller opgivet i enhederne $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg s}}\right]$ og $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}\right]$, men i sine beregninger indgår parametrene opgivet i SI enheder (joule). Vi har derfor skaleret σ og E_0 med 4.187. Alle distancer, der er angivet i yard, er blevet omregnet (faktor 0.9144) til meter, og ligeledes er miles blevet omregnet (faktor 1.6093) til meter. Sluttiderne er typisk opgivet i minutter, sekunder og hundrededele af sekunder. Vi har omregnet alle tiderne til sekunder og hundrededele sekunder. Alt dette er gjort for at få et homogent datamateriale.

Forsøg 1 Eftergørelse af Kellers forsøg ud fra Kellers parametre

I denne del anvendes Kellers egne data som grundlag. Det er for at se, om vi ud fra de samme rekorder og de samme værdier for parametrene F , τ , σ og E_0 kan nå frem til Kellers værdier for T . De beregnede sluttider benævnes T_{cal} , mens de oprindelige målte sluttider kaldes T_{rec} . Hvis det lykkes at få tilnærmelsesvis de samme værdier, så holder vores metoder. Hvis det derimod ikke er tilfældet, tyder det på, at de metoder vi anvender, ikke er de samme som Kellers. Det kunne også betyde, at Kellers beregninger og/eller modellen er forkert. For at kunne sammenligne resultaterne beregnes de procentvise afvigelser mellem T_{cal} og T_{rec} .

Data: Det datasæt som Kellers anvender i artikel [10]. Se tabel 3.2

Parametre: F , τ , σ og E_0 udregnet af Keller.

Forsøg 1B Afprøvning af Kellers parametre på et nyt sæt data

Det er også relevant at, se om Kellers model og de parametre, han er nået frem til, også gælder for andre datasæt, end det de er udregnet på baggrund af. Derfor forsøger vi her at beregne T_{cal} for et sæt data, der er sammensat af de nyeste rekorder. Ligeledes beregnes den procentvise afvigelse, (E_p), mellem T_{cal} og T_{rec} .

Data : Nye data, sammensat fra Guinness Rekordbog [18] og oplysninger fra Erik Laursen.

Parametre: F, τ, σ, E_0 beregnet af Keller.

Fremgangsmåden i de to delforsøg er ens og vil blive skitseret i det følgende. Dog er der den forskel, at T_{rec} tilhører de nye data i forsøg 1b.

Løbene i datasættet inddeles i to typer. Type I er sprint, det vil sige de helt korte løb, og type II er mellemdistance løb. Skillelinien mellem disse to typer løb er den kritiske distance D_c og dermed den kritiske tid T_c . Denne kan beregnes ved at finde roden i ligning (2.13):

$$E(t) = E_0 + \sigma t - F^2 \tau^2 \left[\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = 0, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

Det viser sig, at de 8 første løb er af type I og de resterende 14 af type II. Et løb benævnes: R_i , og de enkelte løb består af talparret $R_i = \{D_i, (T_i)_{rec}\}$.

Beregning af T_{cal} og E_P for type I løb:

I disse løb er $0 \leq T \leq T_c$. Der forekommer en løkke, hvor der for hvert løb $R_1 \rightarrow R_8$ udregnes:

- T_{cal} beregnes ved at finde roden i ligning (2.14)

$$D_i = F \tau^2 \left(\frac{T_i}{\tau} + e^{-\frac{T_i}{\tau}} - 1 \right)$$

- Den procentvise afvigelse E_P beregnes mellem $(T_i)_{cal}$ og $(T_i)_{rec}$.

$$E_P = \frac{(T_i)_{cal} - (T_i)_{rec}}{(T_i)_{cal}} 100\% \quad (3.1)$$

For at finde roden i ligning (2.14) anvendes MatLab-kommandoen **fzero**, der anvender en algoritme udviklet af T. Dekker. Denne benytter en kombination af metoderne bisektion, sekant og invers kvadratisk interpolation [20]. Der henvises endvidere til:

R. Brent, *Algorithms for Minimization Without Derivatives*, Prentice-Hall, 1973.

G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, og C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice-Hall, 1976.

Beregning af T_{cal} og E_P for type II løb:

For denne type løb er $T \geq T_c$. Dette krav dækker løbene $R_9 \rightarrow R_{22}$, og for hver af disse skal følgende beregnes:

- t_1, t_2 og λ findes ud fra 3 de koblede ligninger (2.22), (2.23) og (2.24):

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\lambda} + F(1 - e^{\frac{-t_1}{\tau}}) \\ 0 &= -\lambda + 2\left(\sigma - \frac{\tau}{\lambda^2}\right)^{-1} \left(\left[\left(\frac{\tau^2}{\lambda^2} - \sigma\tau \right) e^{\frac{2(t_2-T)}{\tau}} + \sigma\tau \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{\lambda} \right) \\ 0 &= E_0 + \sigma t_2 - \frac{\tau^2}{2\lambda^2} - F^2\tau \left(-\frac{3\tau}{2} + t_1 + 2\tau e^{\frac{-t_1}{\tau}} - \frac{\tau}{2} e^{\frac{-2t_1}{\tau}} \right) \\ &\quad - \frac{\tau}{\lambda}(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Til løsning af det koblede ligningssystem anvendes MatLab-kommandoen `fsolve`, der bruger Levenberg-Marquardts metoden. [6] Der henvises bl.a. til:

J. J. More, The Levenberg-Marquardt Algorithm : Implementation and Theory, *Numerical Analysis* red. G. A. Watson, Lecture Notes in Mathematics 630, Springer-Verlag, side 105 - 116, 1977.

- T_{cal} beregnes ved hjælp af ligning (2.27)

$$\begin{aligned} D &= F\tau^2 \left(\frac{t_1}{\tau} + e^{\frac{-t_1}{\tau}} - 1 \right) + \frac{\tau(t_2 - t_1)}{\lambda} \\ &\quad + \tau(\sigma\tau)^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} - \tanh^{-1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1 \right) e^{(-2/\tau)(T-t_2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \tanh^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\tau}{\lambda^2\sigma} - 1 \right) e^{(-2/\tau)(T-t_2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \right], \quad T \geq T_c. \end{aligned}$$

Denne beregning foregår i praksis ved, at 0 isoleres på venstresiden, og T_{cal} findes som rod ved hjælp af den førnævnte løsningsmetode til at finde rødder.

- Den procentvise afvigelse mellem T_{cal} og T_{rec} beregnes ved ligning (3.1).

Resultaterne for de to typer løb placeres i en 22×7 resultatmatrice (Res). Der er således gjort plads til resultater for alle 22 forskellige løb, og for hvert løb registreres 7 forskellige oplysninger. Det drejer sig om:

1. Distancen for det givne løb D
2. Målt sluttid for løbet T_{rec}
3. Den af modellen beregnede sluttid T_{cal}
4. Den procentvise afvigelse E_P mellem T_{rec} og T_{cal} .
5. Intervalinddeler t_1
6. Intervalinddeler t_2
7. Lagrange multiplikator λ

For de korte løb i type I har t_1, t_2 og λ (som vi tilsammen kalder hjælpeparametre) ingen relevans, fordi de ikke indgår i ligning (2.14). Elementerne i matricen for disse løb vil være initialiseret til 0.

Forsøg 2 - 4

Disse forsøg vil omhandle de beregninger, der skal udføres på nye data. Det er derfor først her, at den egentlige fitning begynder. For at foretage denne er vi imidlertid nødt til at gætte på parametrene værdier. Afhængigt af resultatet kan vi så variere de parametre, der indgår, således at fejlsummen minimeres. Fejlsummen benævnes her E_Σ .

Forsøg 2 Fitning af parametre ud fra Kellers datasæt.

For at få en fornemmelse af hvor god vores metode er til at fitte, vil vi først forsøge at fitte 4 parametre F, τ, σ og E_0 til de oprindelige data, som Keller opgiver.

Vi vil sammensætte 2 forskellige nye datasæt, hvilket er beskrevet i forsøgene 3 og 4.

Forsøg 3 Fitning af parametre udfra et datasæt, hvor rekorderne er sat af mænd.

I dette forsøg benyttes data fra Guinness Rekordbog og fra Erik Laursen. Disse skal for de korte løb korrigeres, således at tiderne svarer til håndtider.

Forsøg 4 Fitning af parametre udfra et datasæt, hvor rekorderne sat af kvinder.

Endelig vil vi undersøge et datasæt, der stammer fra løb foretaget af kvinder. (De øvrige løb er alle foretaget af mænd.) Det har dog ikke været muligt at skaffe tider for løb af distancerne 3 mile og 6 mile, hvorfor vi i dette tilfælde har 20 distancer at arbejde med. Dette sæt af data er ligeledes korrigerede for de korte løb. Oplysningerne har vi henholdsvis fra [18] og Erik Laursen.

Fremgangsmåden i alle 3 forsøg er ens.

Parametrene:

Parametrene F , τ , σ og E_0 findes ved *Mindste kvadraters metode*. Parametrene findes parvis ved først at finde τ og F for de korte distancer, hvor $T \leq T_c$.¹ Dernæst findes σ og E_0 for $T > T_c$. I forbindelse med at fitte de sidstnævnte benyttes de allerede fundne værdier for F og τ .

Fitning af τ og F :

Data: De første 8 rekorder, det vil sige distancerne $50 [yd] \rightarrow 220 [yd]$, hvilket drejer sig om løbene $(R_1 \rightarrow R_8)$.

Principiel algoritme:

- Sæt $E_\Sigma = \infty$
- Så længe $E_\Sigma >$ en acceptabel lille fejl
begynd løkke :

¹På trods af at T_c endnu ikke kendes for de nye datasæt.

- Sæt (det vil sige gæt i første omgang og variér derefter) parametrene τ og F . For at variere parametrene, så E_{Σ} minimeres, benyttes MatLab-kommandoen `fmins`, der søger efter minimum for funktioner af flere variable. [6] og endvidere: J. A. Nelder og R. Mead, A Simplex Method for Function Minimization, *Computer Journal* Vol. 7, side 308 - 313.
- For løbene $R_1 \rightarrow R_8$ beregnes $(T_i)_{cal}$ ud fra ligning (2.14). (OBS! Dette er også en løkke).
- Beregn fejlsummen E_{Σ} :

$$E_{\Sigma} = \sum_{i=1}^8 \frac{((T_i)_{rec} - (T_i)_{cal})^2}{(T_i)_{rec}^2}$$

slut på løkke.

Den metode, kommandoen `fmins` anvender hertil, er en Nelder-Mead simplex søgemetode. Fejlsummen E_{Σ} er udtrykt som en funktion af variabelen x , der er en vektor bestående af parametre F og τ . Algoritmen søger således efter en minimumsvektor $x = (F, \tau)^T$ for funktionen E_{Σ} . Efter at have bestemt de to parameter er vi nu i stand til at beregne T_c ved at finde den positive rod i ligning (2.13). Ud fra denne kan vi bestemme den nye værdi for D_c . Sidstnævnte gøres ud fra ligning (2.14), hvor $T = T_c$.

Fitning af σ og E_0 :

Data: De sidste 14 rekorder, det vil sige $400 [m] \rightarrow 10000 [m]$. Dette er drejer sig om løbene $R_9 \rightarrow R_{22}$.

Principiel algoritme:

- Sæt $E_{\Sigma} = \infty$
- Så længe $E_{\Sigma} >$ en acceptabel lille fejl
begynd løkke:
 - Sæt (det vil sige gæt og variér som før) værdierne for σ og E_0 . Her anvendes ligeledes `fmins`-kommandoen.
 - Find t_1, t_2 og λ ud fra førnævnte metode (`fsolve`) med det koblede ligningssystem.

- For hvert af $D_9 \rightarrow D_{22}$ beregn $(T_i)_{cal}$ ud fra ligning (3.17). (OBS! Dette er også en løkke).
- Beregn fejlsommen E_Σ :

$$E_\Sigma = \sum_{i=9}^{22} \frac{((T_i)_{rec} - (T_i)_{cal})^2}{(T_i)_{rec}^2}$$

slut på løkke.

Der anvendes igen Nelder-Mead simplexsmetode i `fmins` for at finde minimum. Efter disse beregninger kendes nu værdierne for F, τ, σ og E_0 . Endvidere kendes for hvert løb T_{cal} og hjælpeparametrene t_1, t_2 og λ . Herefter ønsker vi at kunne vurdere resultatet af parametrene, så for hvert løb ($R_1 \rightarrow R_{22}$) beregnes de procentvise afvigelser som i forsøg 1. Bemærk, at T_{cal} allerede er udregnet under fitningen. Endelig samles resultaterne i en matrix som før.

Oversigt over forsøg

På figur 3.1 ses en oversigt over hvilke data og parametre, der anvendes i hvert forsøg og en specificering af, om resultatet er en tabel af procentvise afvigelser (E_p) eller/og et sæt parametre. Derudover kommer der også delresultater som T_c og D_c . Endvidere noteres her filnavn på de anvendte datafiler.

Ligeledes viser vi her en tabel over de datasæt, der anvendes i forsøgene. Se tabel 3.2.

Grafiske præsentationer

Vi har valgt at fremstille to forskellige typer grafiske præsentationer dels en graf, der viser udsvinget i den procentvise afvigelse i alle de forskellige løb og dels en graf, der viser modellens beregninger af den gennemsnitlige hastighed (D/T) mod distancen D .

FORSØG	PARAMETRE	DATA	FILNAVN	PRODUKT
1	Keller	Keller	Keldata.m	Ep-tabel
1B	Keller	Nyeste Data	Nydata.b.m	Ep-tabel
2	Fittet	Keller	Keldata.m	Ep-tabel parametre, Dc og Tc
3	Fittet	Nyeste Data	Nydata.b.m	Ep-tabel parametre, Dc og Tc
4	Fittet	Kvindelige Data	Qdata.m	Ep-tabel parametre, Dc og Tc

Tabel 3.1: Oversigt over planlagte forsøg.

D meter	Kellers data T_{rec} sek.	Nyeste data T_{rec} sek.	Kvinde data T_{rec} sek.
45.72	5.1	4.98	5.5
50	5.5	5.37	5.76
54.86	5.9	5.76	6.30
60	6.5	6.17	6.68
91.44	9.1	8.97	9.86
100	9.9	9.62	10.25
200	19.5	19.48	21.1
201.17	19.5	19.66	22.46
400	44.45	43.29	47.6
402.34	44.9	44.5	51.71
800	104.3	101.73	113.28
804.67	104.9	104.1	120.3
1000	136.2	132.18	150.6
1500	213.1	208.86	232.47
1609.3	231.1	226.32	255.61
2000	296.2	290.81	328.69
3000	459.6	448.96	502.62
3218.6	499.8	493.45	578.44
4827.9	770.4	767.8	—
5000	796.6	778.39	877.33
9655.8	1607.0	1596.8	—
10000	1659.4	1618.38	1813.74

Tabel 3.2: De forskellige data, der anvendes i forsøgene [18] og [10] samt Erik Laursen.

Plot af E_P

For hver løb $R_1 \rightarrow R_{22}$ findes i resultatmatricen oplysninger om E_P . Punkter (løb nr., E_P) plottes og forbindes med en linie. Det er udelukkende de absolutte værdi af E_P , der plottes. Grafen er ikke udtryk for en kontinuert funktion, men linien har vi valgt at tegne med for at lette læsningen af, hvordan afvigelsen svinger omkring 0 %. I de første forsøg, hvor datasættet stammer fra [10], vil vi for at kunne sammenstille vores resultater med Kellers, også afbilde grafen for E_P beregnet af Keller.

Plot af $\frac{D}{T}$

For at kunne give en fornemmelse af, hvorledes modellens resultater for T_{cal} stemmer overens med de faktisk målte sluttider, plottes her den gennemsnitlige hastighed mod distancen D . Hastigheden vises som en kontinuert kurve, men er egentlig en sammensat, idet den er beregnet ud fra to ligninger for distancen D . For $T \leq T_c$ anvendes ligning (2.14), og for $T > T_c$ anvendes ligning (2.27). Ligeledes plottes datasættet, der har ligget til grund for fitningen af de parametre, der indgår. Disse punkter betegnes med (+). Punkterne ligger spredte, da der ikke findes løb til enhver distance. Grafen begrænses til distancerne 0 til 2000 [m], hvilket svarer til de 16 første løb. Se figur 2.5

For hvert af forsøgene 2 til 4 opnås et sæt af parametrene F, τ, σ og E_0 . Det er derfor relevant at fremstille grafer for $\frac{D}{T}$ mod D for hvert af forsøgene. Fra resultatmatricen for det givne forsøg kendes D, T_{cal} og T_{rec} . Fremgangsmåden i hvert forsøg for at opnå disse grafer er derfor givet som følger:

- Først plottes de 16 første punkter (+) fra datasættet. $(D/T_{rec}, D)$.
- For intervallet $[0, D_c]$ tegnes kurven for $\frac{D}{T}$, hvor D beregnes udfra ligning (2.14).
- Det viser sig ikke at være let at beregne den sidste del af kurven udfra ligning (2.27), idet der (i princippet) skal fittes uendelig mange værdier for hjælpeparametrene t_1, t_2 og λ . Selv for at få en 'pæn' graf er det omfattende. I stedet har vi valgt at fitte en kurve gennem de modelberegnete punkter. Det vil sige gennem punkterne $(\frac{D}{T_{cal}}, D)$, hvor T_{cal} kun i disse punkter er beregnet

ud fra ligning (2.27). Derfor plottes først de punkter (o), som vi ønsker at fitte efter. Dette drejer sig om distancerne : $D_c = 400$ [m], 440 [yd], 800 [m], 880 [yd], 1000 [m], 1500 [m], 1 [mile] og 2000 [m].

- Der fittes nu et polynomium af 4. grad til disse 9 punkter. Graf for polynomium tegnes for intervallet $[D_c, 2000]$. Dette gøres ved hjælp af MatLab-kommandoen `polyfit` [20], der finder koefficienterne A, B, C, D, og E i et 4. gradspolynomium af form:

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

3.2 Præsentation af resultater

Vi er nu i stand til at præsentere resultaterne af vores beregninger. Der er undervejs forekommet problemer i arbejdet med MatLab, således at de førnævnte strategier ikke altid er blevet fulgt. Det har været nødvendigt at gå på kompromis med vores ønsker for at kunne opnå resultater. Den væsentligste ændring i planerne er, at med undtagelse af et enkelt tilfælde har det ikke været muligt at udføre simplex-metoden (ved `fmins`) til ende. Vi har altså været nødt til at stoppe processen undervejs og har godtaget det resultat, der var beregnet indtil da. Vi har afbrudt, enten fordi metoden var kørt fast i et lokalt minimum eller fordi, der opstod problemer i underliggende metoder, det vil sige i udregningen af t_1, t_2 og λ . Vi har derfor i resultattabellen tabel 3.3 valgt også at afbilde værdien af E_Σ , hvor metoden er stoppet.

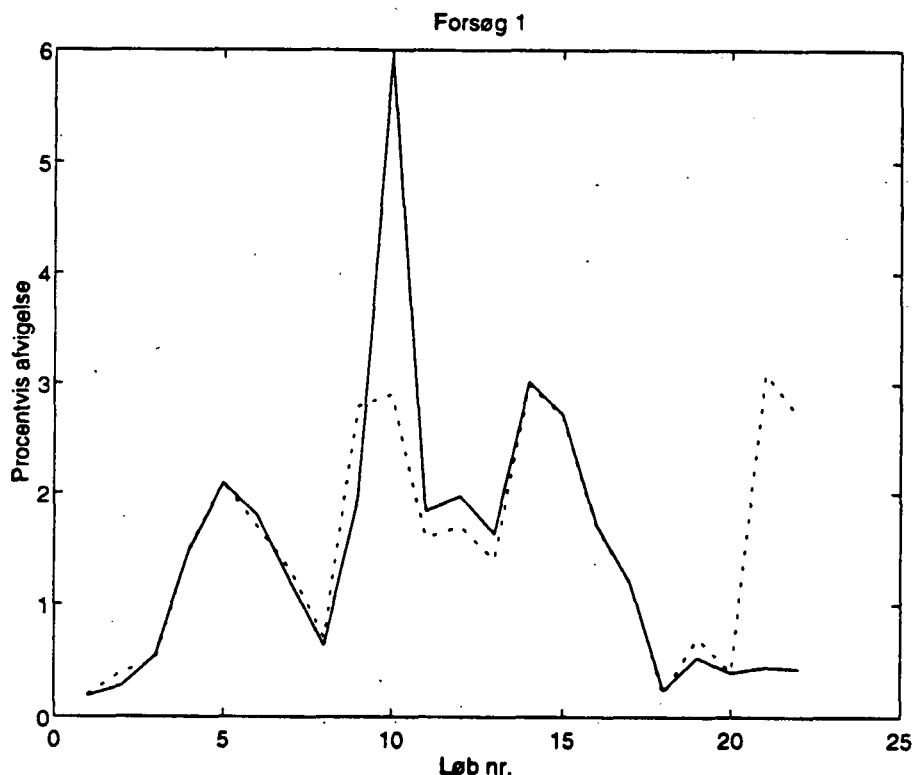
I diskussionen i kapitel 5 vil vi yderligere komme ind på vores erfaringer med metoderne, samt vurdere vores resultater. I appendiks C er resultatmatricerne for de enkelte forsøg afbildet.

	FORSØG 2	Σ	FORSØG 3	Σ	FORSØG 4	Σ
F	12.204	0.0000	15.7552	0.0024	14.8870	0.0083
τ	0.89296		0.6870		0.6581	
σ	41.5769	0.0034	56.1288	0.0039	45.7346	0.0241
E0	2648.3		3250.2		2407.5	
Dc	291.4187		204.4735		228.7736	
Tc	27.6343		19.581		24.0092	

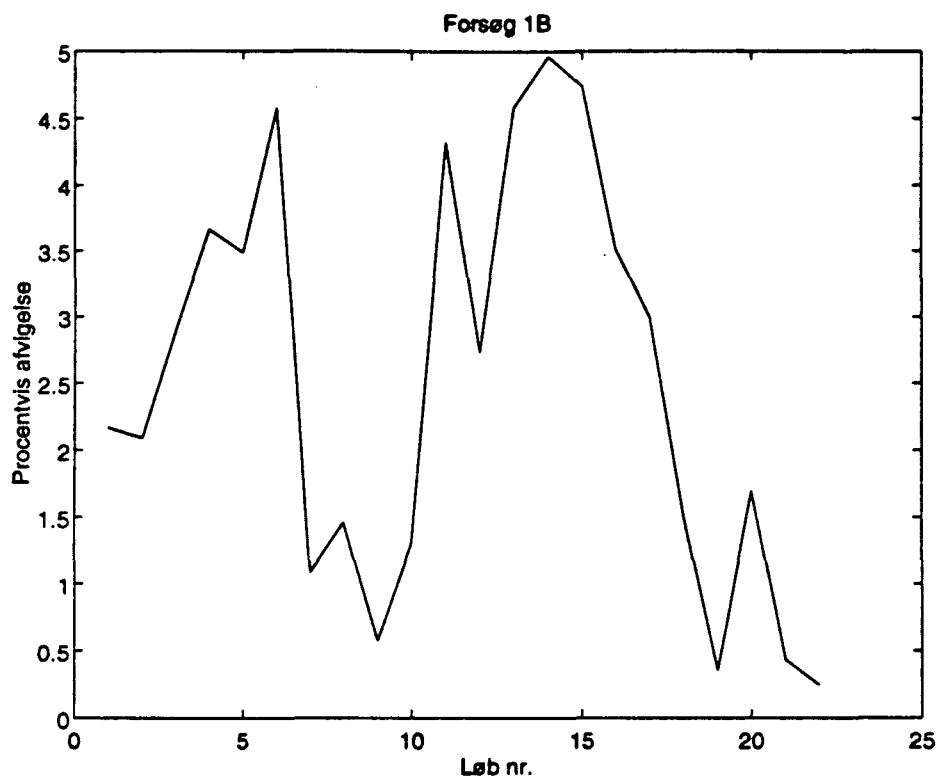
Tabel 3.3: Oversigt over resultater fra forsog 2 til 4.

Plot af E_P

I forsøg 1, der ses på figur 3.1, er der opstået en fejl i løb nummer 10. Levenberg-Marquardt metoden har givet et negativt bud på parametrene t_1 og λ , derfor det markante udsving i fejlkurven i løb nummer 10. Det er dog lykkedes os at gætte væsentligt bedre end Keller i de sidste to løb. (Løb nr. 21 og 22).

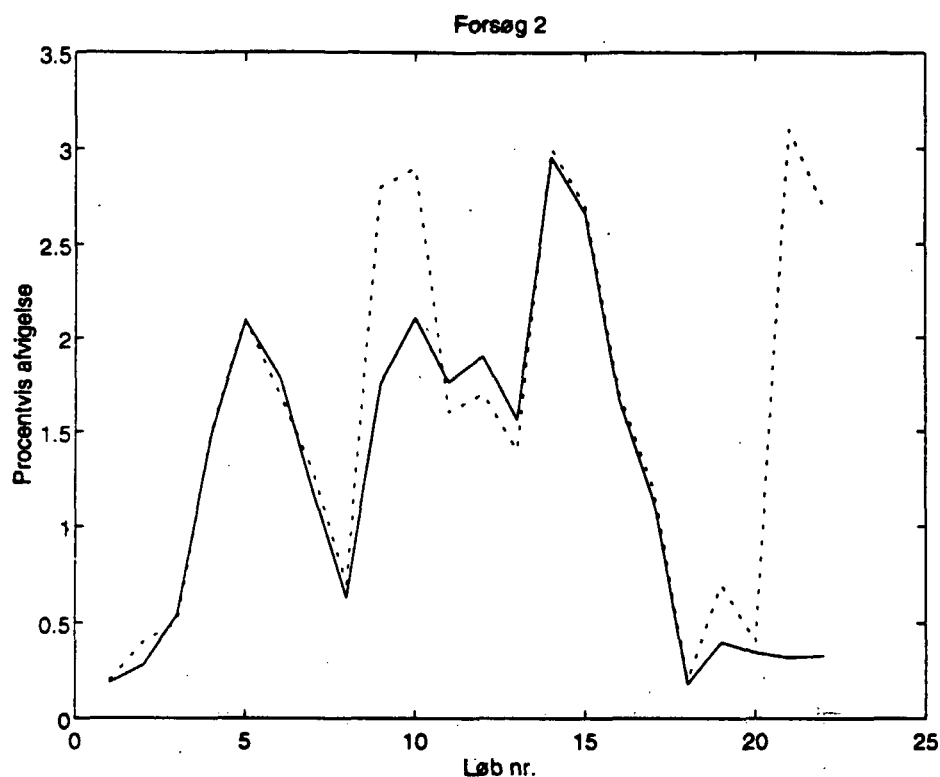


Figur 3.1: Forsøg 1. Den absolutte procentvise afvigelse for hvert løb. Den sammenhængende linie er vores resultater, mens den stiplede linie er Kellers resultater.



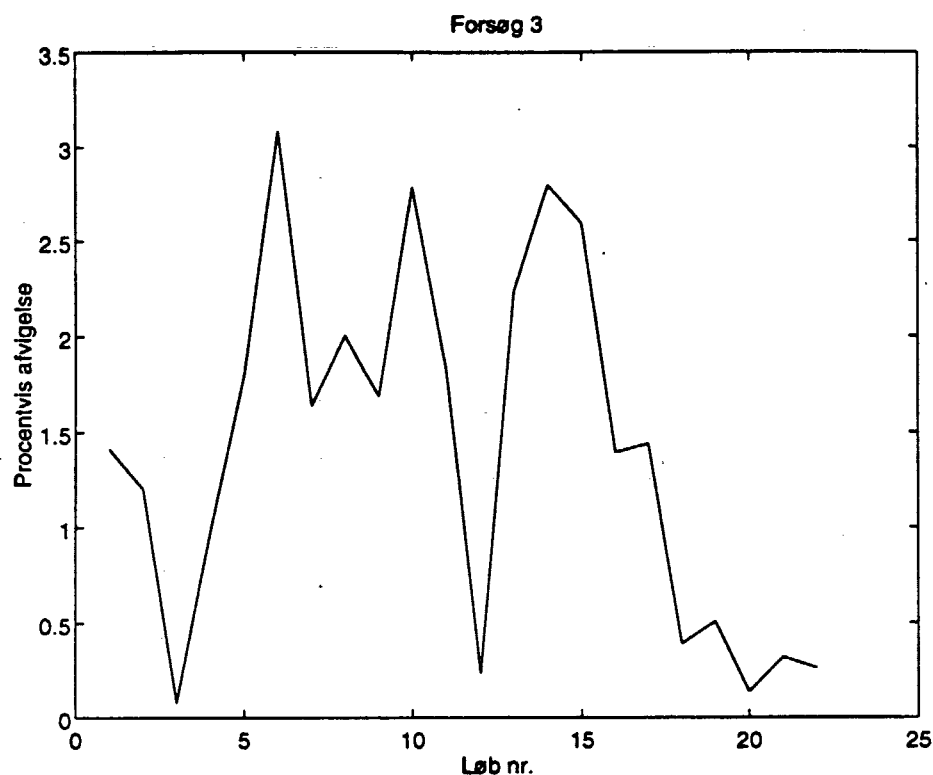
Figur 3.2: Forsøg 1B. Den absolutte procentvise afvigelse for hvert løb.

Det ses, at fejlprocenterne i figur 3.2 (for forsøg 1B) har væsentlig større udsving end i forsøg 1 (når der ses bort fra løb nr. 10). Dog holder det sig inden for et maksimum på 5 %. De sidste par løb giver igen bedre resultater end de øvrige løb.



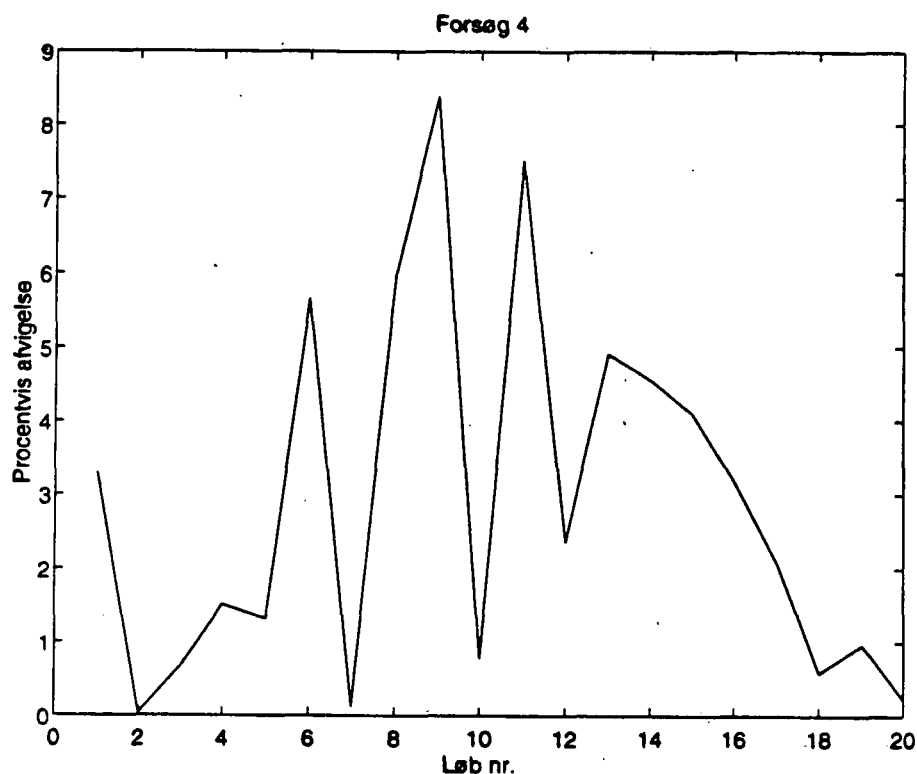
Figur 3.3: Forsøg 2. Den absolutte procentvise afvigelse for hvert løb. Den sammenhængende linie er vores resultater, mens den stiplede linie er Kellers resultater.

På figur 3.3 fra forsøg 2 er billedet meget tilsvarende situationen i forsøg 1. Der er en pæn overstemmelse mellem de to grafer. De parametre, der er blevet fittet i dette forsøg, er meget lig Kellers egne resultater. Man kan derfor heller ikke forvente de store variationer i de procentvise afvigelser.



Figur 3.4: Forsøg 3. Den absolutte procentvise afvigelse for hvert løb.

I forsøg 3, der ses på figur 3.4, er udsvingene i de absolutte procentvise afvigelser inden for 3 %, hvilket må siges at være acceptabelt. Dette er endda en forbedring i forhold til forsøg 1B. Det er fortsat de mellem-liggende løb, der giver de største udsving på de målte værdier.

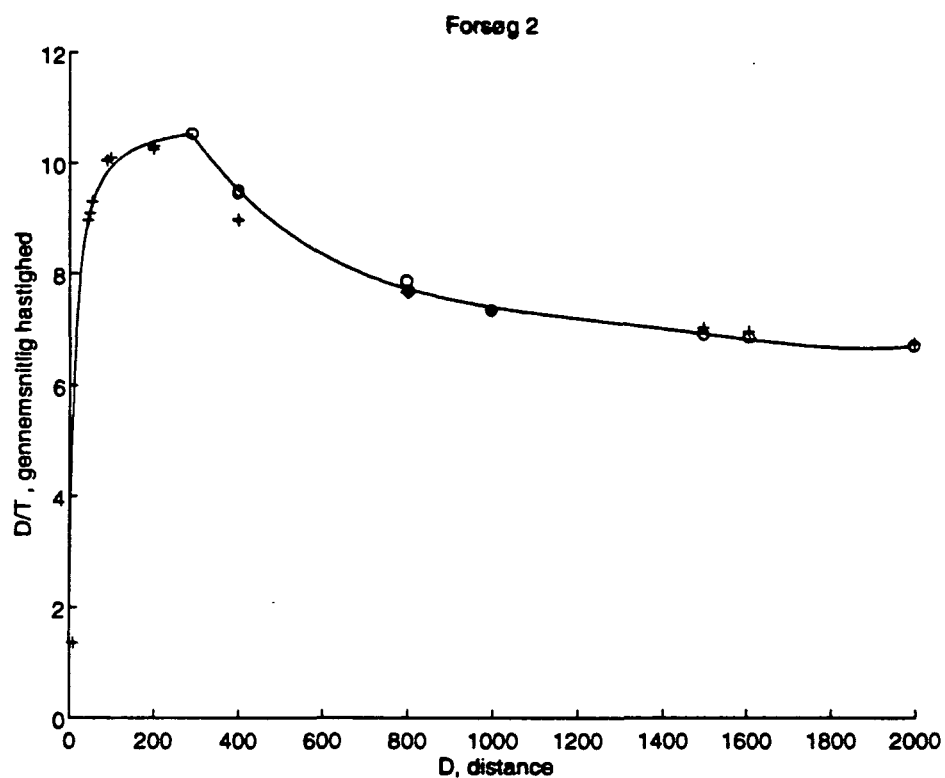


Figur 3.5: Forsøg 4. Den absolutte procentvise afvigelse for hvert løb.

Figur 3.5 viser situationen i forsøg 4. Her er udsvingene væsentlig større, nemlig helt op på over 8 %. Dette kan skyldes, at fitningen af σ og E_0 er blevet stoppet tidligere end i de øvrige forsøg, og man må derfor forvente større usikkerhed på disse parametre.

Plot af $\frac{D}{T}$

På de følgende figurer er modellens bud på den gennemsnitlige hastighed til en given distance afbildet. Ligeledes er de målte datasæt plottet ind. Disse er markeret med et kryds (+). For distancer større end den beregende værdi af D_c er modellens kurve et fittet 4. grads polynomium gennem en række punkter beregnet udfra modellen. Disse punkter er afbildet som en cirkel (o). Første-aksen er angivet i [m], mens anden aksens er angivet i $\left[\frac{m}{s}\right]$.

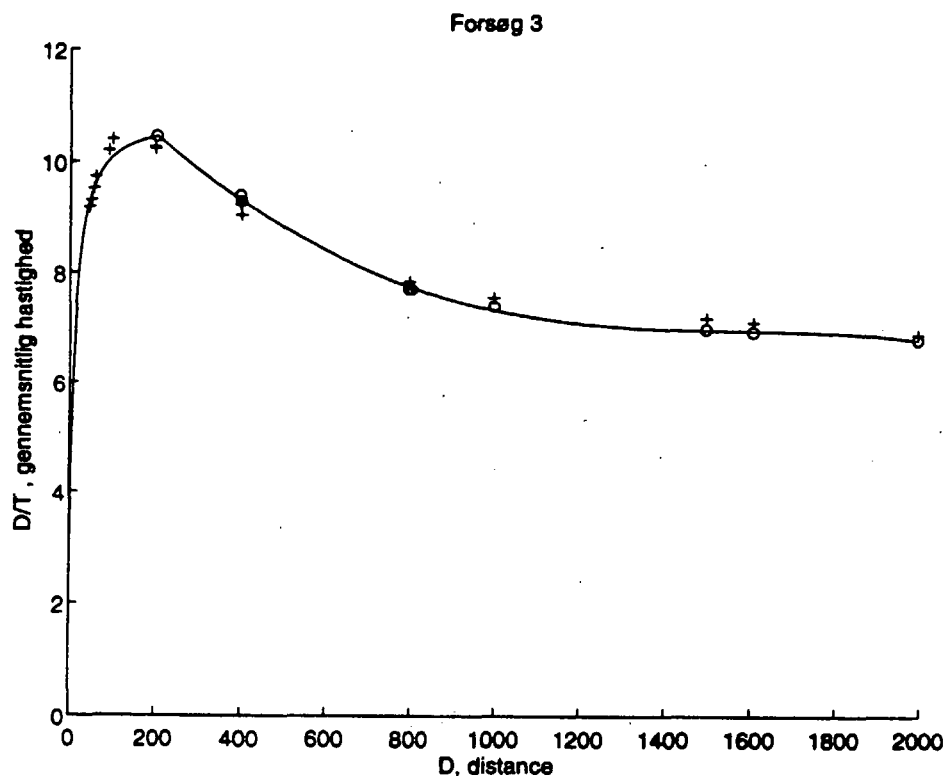


Figur 3.6: Forsøg 2. Den gennemsnitlige hastighed mod distance D.

På figur 3.6 ses en rimelig overensstemmelse mellem de målte data og modellens beregnede værdier. Polynomiet, der er blevet fittet, har følgende ligning:

$$f(x) = 1.9763 \cdot 10^{-12}x^4 - 1.0801 \cdot 10^{-8}x^3 + 2.1953 \cdot 10^{-5}x^2 - 0.0206x + 14.8937$$

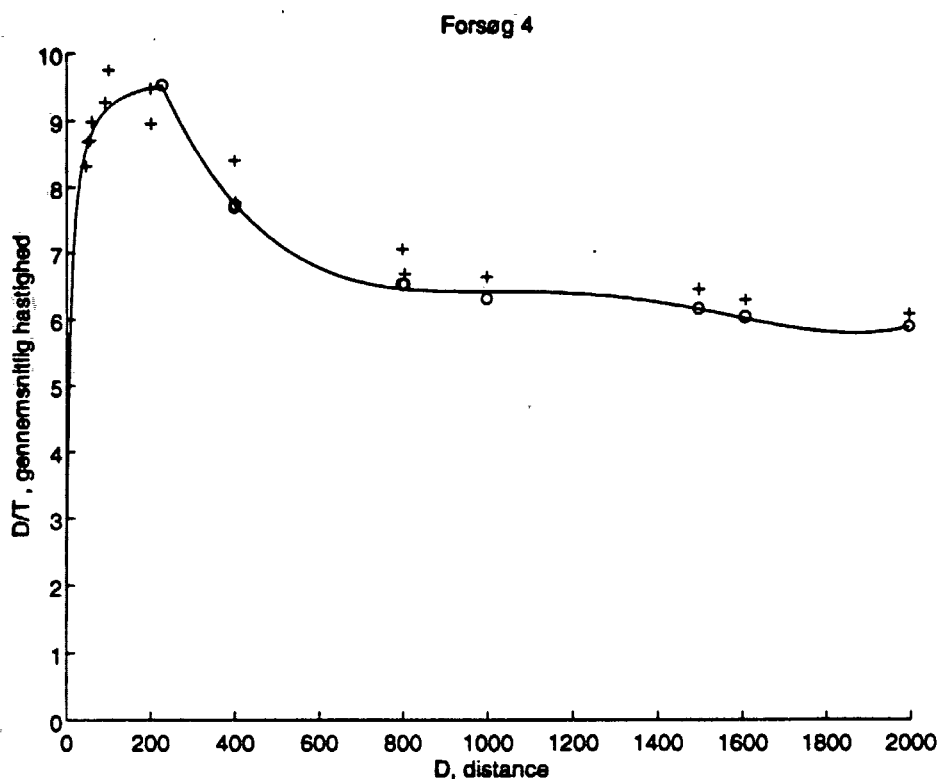
Bemærk, hvordan denne graf, figur 2.5, svarer til Kellers.



Figur 3.7: Forsøg 3. Den gennemsnitlige hastighed mod distance D .

Igen på figur 3.7 ses, at modellens resultater i forsøg 3 ligger nær de data, hvorfra de er fittet. Dette var ligeledes tilfældet i figur 3.4. Det fittede 4. grads polynomium har ligningen:

$$\begin{aligned} f(x) = & -3.741 \cdot 10^{-13}x^4 + 5.8616 \cdot 10^{-10}x^3 \\ & + 2.8663 \cdot 10^{-6}x^2 - 0.0076x + 11.8998 \end{aligned}$$



Figur 3.8: Forsøg 4. Den gennemsnitlige hastighed mod distance D.

Det ses som på figur 3.8. at modellens resultater ikke er nær så tæt på de målte værdier som i de forrige forsøg. Modellens bud på T_{cal} har generelt været større end værdierne i datasættet, derfor er de gennemsnitlige hastigheder alle generelt lidt for små. Ligningen for det fittede polynomium er:

$$f(x) = 3.3491 \cdot 10^{-12}x^4 - 1.7368 \cdot 10^{-8}x^3 + 3.2114 \cdot 10^{-5}x^2 - 0.0255x + 13.8543$$

Kapitel 4

Antagelser og begrænsninger

I dette kapitel vil vi tage stilling til de antagelser og begrænsninger, der er gjort i Kellers model. I den forbindelse vil vi fokusere på følgende aspekter:

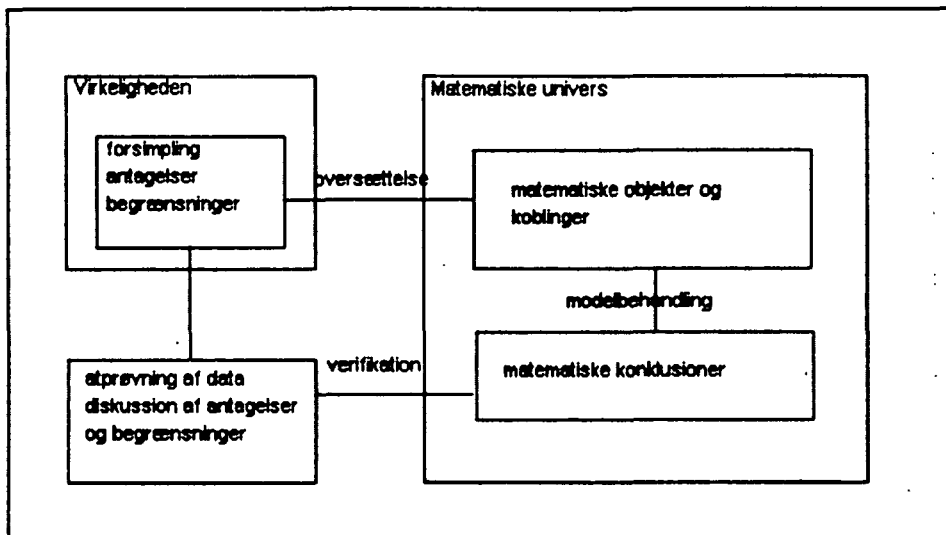
Er antagelserne realistiske?
Hvad betyder antagelserne for modellen?
Hvilke begrænsninger lægger de på modellen?

Selve den modelleringsproces, der ligger til grund for udviklingen af Kellers model, har vi ikke kendskab til. Beskrivelsen i dette kapitel er derfor udelukkende baseret på vores fortolkning.

4.1 Modelleringsproces

Vi har valgt at betragte modelleringsprocessen, som illustreret på figur 4.1:

I følge 4.1 indgår der flere faser i modelleringsprocessen. Først udvælges dele af virkeligheden, der skal indgå i modellen. Derved fravælges indirekte de faktorer, der antages ikke at have indflydelse på modellen. Herefter sker en forsimpelning af virkeligheden. Delene oversættes sluttelig til matematiske objekter og koblinger. Dette svarer til, at Keller opstiller sit matematisk formulerede problem - at finde en optimal løbestrategi.



Figur 4.1: Figuren viser de faser, der gennemgås ved udviklingen af en matematisk model. Figuren er forsimplet i forhold til kilden [16].

Der foretages nu en matematisk behandling af modellen. Keller udleder sin model og løser sit problem bl.a. ved brug af variationsregning. Efter udledningen drages nogle matematiske konklusioner. Disse konfronteres dernæst med virkeligheden ved verifikation. Keller gør dette ved at prøve modellen på et sæt af rekorder og får et passende resultat. Vi har ligeledes afprøvet modellen på samme datasæt samt på to nye sæt af rekorder og undersøgt, om modellen stadig er gældende (se kapitel 3). Hvis afvigelsen fra virkeligheden er for stor, må man gå tilbage til et tidligere trin i modelleringsprocessen for at undersøge, om de forsimplinger og antagelser, der er blevet gjort, er forkerte, eller om oversættelsen til matematik er mislykket. Denne proces fortsættes til afvigelsen er så lille, at den er acceptabel. Det er indlysende, at en model aldrig kan blive lige så fyldestgørende som den virkelighed, der ønskes modelleret. Idet, der ved at foretage antagelser og begrænsninger undervejs i modelleringsprocessen, sker informationstab.

4.2 Klassificering af Kellers model

Årsagen til, at man beskæftiger sig med matematiske modeller, er, at man ønsker at afdække/forklare/forudsige visse sammenhænge mellem f.eks. fysiske, biologiske eller som i vores model fysiske og fysiologiske faktorer.

Der findes forskellige typer af matematiske modeller. En type modeller er de, hvis formål det er at forudsige fremtidige hændelser, et eksempel er Danmarks økonomi. Her anvender Økonomiministeriet bl.a modellen ADAM [16]. En anden type modeller er de, der giver konkrete løsningsforslag. Her kan f.eks nævnes Vejdirektoratets model, der giver et konkret forslag til, hvornår det bedst kan betale sig at reparere een af Danmarks broer [5]. Endelig findes der modeller, hvis funktion det er at give overblik over sammenhænge i et system, der ønskes studeret nærmere.

Kellers model er af sidstnævnte type. Modellen ønsker ikke at forudsige fremtidige hændelser inden for løb, ligesom der heller ikke gives nogle løsningsforslag til beslutningsprocesser. Modellen forsøger derimod at beskrive en løbers hastighed under et kort- eller mellemdistanceløb.

En model kan kategoriseres ud fra den viden, der ligger til grund for modellen. En model kaldes teoribaseret, hvis den er udviklet på grundlag af velkendte fysiske, biologiske eller f.eks. fysiologiske teorier. Det er så disse teoretiske sammenhænge, der sættes sammen til en model. Er modellen derimod en ad hoc model, så tager modellen udgangspunkt i den øjeblikkelige situation. Ofte er ad hoc modeller baseret på en række kendte data ofte fundet ved forsøg. Langt de fleste modeller indeholder både teori og ad hoc antagelser. Dette gør sig også gældende i Kellers model. Den er baseret på enkel fysiologisk teori samt Newtons 2.lov, mens de indgående konstanter i modellen er fittet ud fra verdensrekorder.

4.3 Diskussion af antagelserne i Kellers model

Nu har vi fået placeret vores model i nogle overordnede rammer. Vi vil derfor betragte de antagelser, der er blevet gjort og verificere modellen i forhold til dens formål. Vi mener, at Kellers formål med modellen er at give en strategi for variationen af hastighed ved et optimalt løb. Det er samtidig vigtigt for ham at kunne estimere de fire fysiologiske parametre [10].

Vi vil diskutere parametrene indbyrdes og undersøge, om det er realistisk at antage, at de er konstante, eller om de burde defineres anderledes. Derudover vil vi give et bud på deres fysiologiske fortolkning.

Hertil har vi fået hjælp af Jørn Wulff Helge (JWH) fra August Krogh Institutttet.

$E(t)$ Mængden af energi tilstede i musklerne

Det er forståeligt nok, at mængden af energi $E(t)$ aldrig er negativ. Modellen, som Keller har udviklet, er afhængig af, at energien i musklerne slipper op lige inden målstregen. Hvis der er mere energi tilbage, ville løberen ikke have ydet en maksimal indsats. Antagelsen om, at $E(t) = 0$ er umiddelbart svær at vurdere. Keller fortæller ikke, om energien til musklerne leveres udelukkende ved aerobe processer eller også ved anaerobe. Hvis det er Kellers mening, at energien udelukkende kommer fra de aerobe processer, så er det i orden at antage, at $E(T) = 0$. Hvis derimod energien kommer fra både aerobe og anaerobe processer, så er det nok mest en ønskelig tilsnigelse, der kan anvendes i en model. Fra en praktisk betragtning kan man sige, at efter et løb, der slutter med en lang sprint, er $E(t)$ tæt på nul i afslutningsøjeblikket. I modelsammenhæng er det i følge JWH sikkert rimeligt at antage, at $E(T) = 0$.

E_0 Mængden af energi i musklerne ved løbets start

Det vil være nødvendigt for modellen at definere E_0 , som energimængden til $t = 0$. I musklerne findes myoglobin, der kan binde ilt (se appendiks A). Denne iltmængde frigøres i det øjeblik, de lokale iltkoncentrationer er lave, det vil sige ved arbejdets begyndelse. I følge JWH er det derfor lidt svært at definere E_0 . Vi mener, det er en rimelig antagelse, at E_0 er konstant, men den vil dog variere fra løber til løber.

τ En begrænsningsfaktor

τ er en konstant, men $\frac{v}{\tau}$ er en hastighedsafhængig samlet vurdering af modstanden ved en given hastighed. Dette inkluderer dels arbejdet med at løfte kroppens tyngdepunkt opad og fremad, dels arbejdet mod vindmodstanden¹ og dels friktionen mod underlaget. Sidstnævnte er afhængig af underlaget og skoene. Vi mener derfor at kunne konkludere, at det er rimeligt, at τ antages at være konstant.

¹Arbejdet mod vindmodstanden stiger med kvadratet på hastigheden (JWH).

F Den maksimale fremdrift

Fremdriften, $f(t)$, som er den kraft, løberen råder over, kan ikke blive større end en maksimal værdi F , som er afhængig af løberens fysik. Dette er en rimelig antagelse, idet der er en begrænsning for, hvad den menneskelige fysik kan præstere.

σ Iltilførsel udover hvileoptagelsen

σ er stigningen af iltoptagelsen fra hvileiltoptagelsen til den iltoptagelse, der anvendes under arbejdet. I modellen antages σ konstant. Dette er en realistisk antagelse på distancer af varighed over 2,5 min. (se appendiks A figur A.2). På disse distancer er hastigheden konstant. Energibalanceligningen $\frac{dE}{dt} = \sigma - fv$, som Keller opstiller, er i følge JWH fysiologisk set i orden. På kortere distancer burde den anaerobe komponent medtages (se appendiks A).

Alle de nævnte konstanter kan måles, men det vil være nødvendigt at forudsætte en del antagelser for at kunne få tilfredsstillende resultater. Desuden er det nødvendigt at fastsætte parametrene individuelt for hver løber. JWH mener, at den eneste konstant, der umiddelbart kan måles er σ . Problemerne med at måle parametrene kan være en grund til, at Keller har valgt at fitte dem. Når Keller beregner sluttiderne i modellen med disse, får han tider, der stemmer overens med virkeligheden [10]. Derfor antager han, at de fittede parametre giver værdier, der må være tæt på de virkelige fysiologiske data.

Den maksimale iltoptagelse og hvileiltoptagelsen kan måles uden problemer. Man kan udtrykke den maksimale iltoptagelse som antal liter ilt/minut/kg. legemsvægt. Den sidste værdi kendes som konditallet. Hvis man trak hvileoptagelsen fra konditallet, svarer det til σ . I følge JWH er der store individuelle forskelle blandt de bedste idrætsudøvere i maksimal iltoptagelse og udnyttning af ilten. Derfor er data over sådanne målinger ikke særlig gode til vores formål.

$\sigma \geq F^2\tau$ En fysiologisk antagelse

Undervejs i udledningen [11] nævner Keller, at $\sigma \geq F^2\tau$ er urealistisk rent fysiologisk. Dette er vi enige i. Betydningen er nemlig den, at σ skal være så stor, at den maksimale kraft fremad mod den givne modstand kan fastholdes uanset tiden. Dette er urealistisk. Selv ikke på en

100m kan man fastholde den maksimale hastighed. Omkring 60 – 80m kan man for de allerbedste sprintere begynde at ane en reduktion af hastigheden. Det er i følge JWH netop løberen Carl Lewis' fordel, at han kan fastholde den maksimale hastighed lidt længere end de øvrige. Det vil sige, at Kellers antagelse fysiologisk set er rigtig.

Opsamling

Generelt er antagelserne rimelige, men vi mener dog, at den mest katastrofale forsimpling er den, at Keller ikke tager hensyn til den anaerobe proces i musklerne.

4.4 Diskussion af modellens begrænsninger

Keller begrænser sig til kun at behandle løb, der foregår under vindstille forhold. Det har stor betydning ved internationale konkurrencer, hvor vindstyrken bliver målt meget nøje, idet en rekord ikke er gyldig, hvis der er for kraftig vind. Netop derfor kan det retfærdiggøres, at Keller ikke har lavet en model, der tager højde for vindstyrke, idet rekorder sat under disse vindforhold alligevel ville blive forkastet.

En anden begrænsning ved modellen er, at der ikke tages hensyn til, hvilken højde over vandoverfladen løbene foregår i. Vi ved fra [3], at højden over havoverfladen har betydning for resultattiden.

Modellen tager ikke højde for individuelle forskelle. Parametre som F , E_o , τ og σ varierer fra løber til løber. Iltoptagelsen har f.eks. stor betydning for præstationen. Idrætsudøvere kan med fordel træne i tynde luftlag, idet deres iltoptagelse derved forbedres (se appendiks A).

Forudsætningerne for, at Kellers model skal gælde, må således være, at løbet afholdes under vindstille vejrforhold, i højde med havoverfladen, og at løberen kun løber mod tiden. Ligeledes må tidligere nævnte fysiologiske antagelser være opfyldt (se kapitel 2).

Kellers model tager ikke højde for de psykologiske faktorer, der finder sted under et løb. For eksempel sætter mange løbere ind med en slutspurt for på den måde at overraske sine modstandere. Modellen er

derfor sandsynligvis mest velegnet til at beskrive en situation, hvor der løbes mod tiden alene. Derved er der ikke nogle modstandere at tænke på, og løberen kan udelukkende koncentrere sig om at løbe så hurtigt som muligt - ikke om at vinde løbet.

Når modellen har til formål at give et bud på en løbestrategi, så mener vi, at det kan opfyldes for individuelle løb mod tid. Det kan synes underligt, at modellen er udviklet ud fra konkurrencetider. Det kan sandsynligvis skyldes, at Keller for at kunne finde en optimal løsning på sit problem har været nødt til at anvende tider fra rekordholderne. Disse, ved han, var i optimal træningsform, da de satte rekorden. Derudover giver det os og andre en bedre mulighed for at verificere modellen, når der anvendes officielle data. Disse er lette at få adgang til.

Keller siger ikke, at modellen er for konkurrenceløb, men vi tillægger ham at have det formål, fordi modellen er udformet ud fra konkurrencetider.

De fysiologiske parametre, der indgår i modellen, er fittet ud fra rekordholderne, det vil sige, at parametrene generelt beskriver nogle fysiske tilstande hos løbere i topform. Hvis modellen skal være individuel, må Kellers model indeholde individuelle fysiologiske parametre. De kan findes ved, at en løber skal løbe alle distancer fra 50 – 10000m, men det ville give et anderledes billede i modellen, idet løbere ikke kan løbe optimalt over så forskellige distancer. Oftest er de bedst egnede til sprint eller til mere udholdende distancer. Kellers model kan derfor ikke være individuel, men er udtryk for generelle betragtninger omkring fysiologiske parametre.

Kapitel 5

Afslutning

Vi vil nu diskutere vores resultater og metode. Dette indebærer dels en vurdering af de resultater, vi regner os frem til og dels en diskussion af den forskel, der er mellem de nye og gamle parametre. Endelig vil vi samle op på modellens antagelser og begrænsninger, som er diskuteret i kapitel 4. I perspektivering ser vi på problemstillinger, der kunne udvide vores arbejde. Endvidere nævnes et par andre undersøgelser omkring løb.

5.1 Diskussion

Forsøg 1

I forsøg 1 (se kapitel 3) har vi undersøgt, om vi har kunnet få de samme resultater for T_{cal} som Keller på baggrund af hans parametre. Dette er gjort dels for at godtgøre, at Kellers resultater er rigtige og dels for at sikre, at vores metode til databehandling har givet rigtige resultater.

Vi har tegnet en graf, der viser den procentvise afvigelse mellem modellens resultater T_{cal} og de virkelige rekorder T_{rec} . Vi har indtegnet Kellers og vores procentvise afvigelser i samme koordinatsystem. Som det ses af figur 3.1, følger de hinanden pænt. Den relativt store afvigelse ved løb nr. 10 skyldes, at algoritmen, der beregner t_1 , t_2 og λ i dette tilfælde, er kommet med negativt resultat for t_1 og λ . Vi har derfor valgt at se bort fra dette løb i vores vurdering. Bortset fra denne store afvigelse er udsvingene ikke større end 3 %. I den forbindelse bør det bemærkes, at vores resultat giver meget små fejl for de sidste løb. Vi kan hermed konkludere, at metoden til beregning af t_1 , t_2 og λ kan bruges.

Forsøg 1B

Kellers parametre samt de nye data giver en større afvigelse end med de gamle data. Dette kan ses på figur 3.2. Dog er denne afvigelse ikke større end 5 %, hvilket ikke er så ringe. Derfor kan Kellers parametre godt anvendes på dette datasæt. Fejlen bliver mindre, hvis man fitter nye fysiologiske parametre. Det er i dette tilfælde ikke strengt nødvendigt, da de nye rekorder ikke afviger meget fra de gamle. Hvis dette imidlertid havde været tilfældet, ville den procentvise afvigelse blive langt større.

Forsøg 2

Vi har ønsket at fitte os frem til samme parameterværdier, som Keller har fundet udfra det samme sæt data. Det er lykket for F , τ , og σ , hvor vi får samme værdi. E_0 har derimod resulteret i en lidt større værdi (se tabel 3.3). Vi vurderer, at løberen har mere energi at tære på i starten af løbet, end Kellers parametre antyder.

På figur 3.3 ses det således, at den procentvise afvigelse ikke er større end 3 %. Situationen er lig den i forsøg 1. Dette fremgår ligeledes af figur 3.6. Ændringen af E_0 har ikke den store betydning, idet E_0 ikke indgår direkte i ligningerne (2.14) og (2.27) i modellen. E_0 indgår kun et enkelt sted nemlig for beregning af λ i ligning (2.25).

Vi har regnet os frem til samme resultat for D_c og T_c som Keller. De første 8 løb kan således stadig betegnes som korte og de sidste som værende lange.

Forsøg 3

Parametrene er udtryk for en øjeblikssituation¹, og som vi så i forsøg 1B, kan Kellers parametre rimeligt nok anvendes til det nye datasæt. Imidlertid vil det ikke være korrekt kun at benytte Kellers fittede parametre. Vi har derfor valgt at fitte dem selv.

På grund af de hurtigere tider er F steget. Grænsen for, hvor hurtigt en løber kan løbe maksimalt, er steget. Modstanden $\frac{1}{\tau}$ er imidlertid også steget, idet τ er mindre. Dette er underligt. Vi ville forvente, at de bedre forhold og udstyr har gjort den samlede modstand mindre. Eksempelvis løbes der på bedre underlag og med bedre sko. Derudover er tøjet udviklet til at give mindre luftmodstand. Iltilførslen til musklerne, σ , er blevet større. Denne ændring kan skyldes bedre træningsmetoder, så løbere idag har bedre evne til at optage og udnytte

¹Parametrene har som tidligere nævnt en fysiologisk fortolkning, hvorfor de ændres, når tiderne ændres.

ilten. Løbere kan med fordel træne i højderne, hvorved iltoptagelsen forbedres (se appendiks A).

På figur 3.4 kan vi se, at de nye parametre er forbedret, så udsvingene i den procentvise afvigelse er nede på 3 %, hvilket er i samme størrelsesorden som Kellers forsøg.

D_c og dermed T_c er begge væsentligt mindre end dem i forsøg 2. Det kunne betyde, at der er færre løb, der vil falde ind under type I. Dette har dog ikke indflydelse på opdelingen af løbene i type I og II. Det 8. løb er på distancen ca. 201 meter, og D_c er her beregnet til ca. 204 meter.

Forsøg 4

Her har vi fittet nye parametre til et datasæt, hvor rekorderne er sat af kvindelige løbere. Vi kan sammenstille dem med parametrene fra forsøg 3, hvor rekorderne er sat af mænd. I tabel 3.3 ses, at der er forskel i parametrene. Eksempelvis er F fittet større end Kellers, selvom tiderne er langsommere end hans, men mindre for de mandlige løbere, som vi også ville forvente. τ er mindre, hvilket betyder en større modstand. Vi har forventet det omvendte, idet de kvindelige løbere generelt er mindre end de mandlige, hvilket ville betyde mindre luftmodstand. Det anvendte udstyr i sko og tøj er stort set ens kønnene imellem. Ilttilførslen er større end hos Kellers mandlige løbere, men mindre end ilttilførslen for de nyeste mandlige løbere. Dette skyldes måske, at de kvindelige løbere idag er i bedre form end deres mandlige forgængere. E_0 er fittet som hos Keller og er som forventet stadigvæk mindre end E_0 hos de nyeste mandlige løbere. Vedrørende D_c og T_c ses samme tendens som i forsøg 3, uden at det dog har betydning for opdelingen.

Ser man på fejlprocenterne i figur 3.5 kan det ses, at de fittede parametre har bevirket større udsving på helt op til over 8 %. Den ringere overensstemmelse mellem model og data fremgår ligeledes af figur 3.8. Årsagen hertil skal sandsynligvis findes i den afbrydelse, vi har foretaget. Fitningen af især E_0 og σ er standset tidligere end i de øvrige forsøg. Med en bedre fitning kunne vi forvente et bedre resultat.

Metode

I 70'erne gik man bort fra at anvende håndtider til at benytte elektroniske tider. Dette har bevirket, at der er forskel på tiderne alt efter, om de er målt elektronisk eller i hånden. Håndtiderne er en smule hurtigere end de elektroniske tider ca. 24/100 sek. Når der arbejdes med både nye og gamle tider, er man i følge Erik Laursen nødt til at tage højde for denne forskel. Vi har ikke korrigeret tiderne for de længere løb, idet

fejlen da er så lille, at den ikke her har stor betydning. Dette betyder imidlertid, at de datasæt, vi arbejder med, er en blanding af håndtider og elektroniske tider. Generelt viser vores grafer ikke markante udsving i de procentvise afvigelser, så det er rimeligt at behandle tiderne på den måde, vi har gjort.

Det er sandsynligt, at de metoder, vi har anvendt til beregninger, er anderledes end Kellers. Vi kender ikke Kellers valg af metoder til f.eks. at finde rødder eller til at bestemme hjælpeparametrene. Den overordnede metode, må vi dog forvente, stemmer overens med Kellers. Dette kan ses på resultaterne i forsøg 1 og forsøg 2. I konstruktionen af graferne for den gennemsnitlige hastighed har vi svært ved at vurdere, hvordan han har tegnet grafen i figur 2.5, idet vi skal gætte konstruktivt på t_1 , t_2 og λ for nogle distancer, vi ikke kender. Løsningen med at fitte et polynomium igennem de beregnede punkter har vi fundet til at være en god måde at få tegnet grafen på.

Løsningen af det koblede ligningssystem er sket med Levenberg og Marquardt-metoden [6]. Den giver gode resultater, hvis den får et godt startgæt tæt på løsningen. Det vil sige, at metoden er følsom overfor startværdien. Det har voldt lidt problemer at gætte systematisk og godt på en gang, og det er typisk det, der har været årsagen til, at vi har afbrudt algoritmen ved fitningen af E_0 og σ .

T_{cal} er beregnet på baggrund af de ikke afrundede værdier for parametrene, og i resultatmatricen er værdierne opgivet i 8 betydende cifre. Vi antager således, at der ikke er sket afrundinger af betydning.

Inden udførslen af beregningerne har vi ikke kendt værdien af D_c . Alligevel har vi valgt, ligesom Keller har gjort, at dele løbene op sådan, at løb nr. 1 til 8 er sprint og 9 til 22 mellemdistancer. De forskellige bud på D_c og T_c har ikke ændret ved dette. Hvis flere løb faldt ind under type I eller type II, ville det have påvirket fitningen af parametrene og derfor også D_c og T_c . Kellers opdelinger i type I og II svarer ikke til de officielle opdelinger i sprint og mellemdistancer².

Det er nødvendigt at forholde sig kritisk til vores afprøvninger. Fitningsprocesserne er stoppet, hvor E_Σ er relativ lille, (typisk mindre end 0.01, hvilket kan ses på tabel 3.3). Men der er ikke fundet et egentlig minimum. Simplexmetoden, der er anvendt, giver ingen garanti for et absolut minimum. Det er en risiko at falde i et lokalt minimum, og det er muligvis også sket.

²Sprint : 0 til 400 m. Mellemdistance : 400 m til 3000 m. Langdistance : 3000 m til marathon.

Følgende er, hvad der kunne gøres anderledes:

Vi kunne debugge alle vores programmer, og dermed have set efter fejl, som kunne være opstået undervejs.

Derudover kunne vi have konstrueret 3-D grafer af (F, τ, E_Σ) og for (E_0, σ, E_Σ) . Derved kunne vi have gættet mere konstruktivt på løsningen og set, om vi ville risikere at falde i et lokalt minimum.

Vi kunne selv have skrevet alle algoritmerne og undgået MatLabs funktioner. På den måde ville vi have mere kontrol over, hvad der skete.

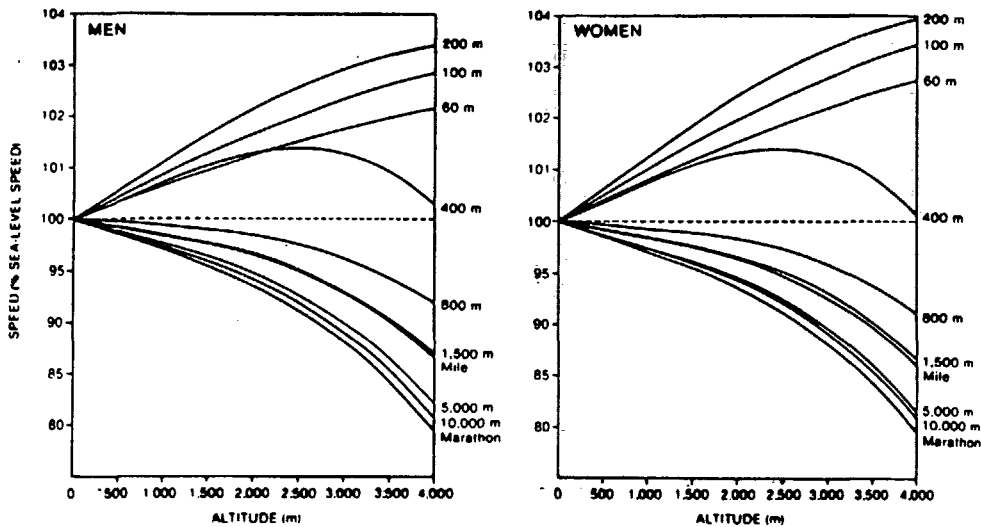
Generelt er vi tilfredse med MatLab, men vi kunne have valgt en anden programpakke til at foretage de numeriske beregninger med. Et alternativ kunne være Mathematica.

Kellers formål og metode

Vi mener ikke, at Keller helt kan leve op til sit formål med at bestemme den optimale løbestrategi for konkurrenceløb. Vores vurdering er, at de psykologiske faktorer er af stor betydning, når det gælder om at vinde et løb. Vi ved dog ikke, hvor stor betydningen er. Den psykologiske faktor kan være til fordel for løberen på den måde, at man, når man får modstand af andre løbere, presser sig hårdere, end man ellers ville have gjort. Det kan samtidig medføre, at løberen glemmer at tænke sig om med hensyn til at spare på kræfterne, så denne ikke kan gennemføre løbet optimalt. Det vil derfor være svært at følge Kellers strategi til fulde i et konkurrenceløb. Det vil kræve, at løberen kan ignorere det psykologiske pres, der følger med omstændigheden at løbe konkurrenceløb. De fleste løbere lægger en spurt ind i slutningen af et løb, hvilket begrundes denne konklusion. Derimod mener vi godt, at Kellers strategi kan ligge til grund for en mere personlig træning, hvor der alene løbes for at slå en personlig rekord.

Keller fitter sine parametre udfra et datasæt sammensat af verdensrekorder, der er sat af forskellige løbere. Parametrene er således udtryk for gennemsnitlige menneskelige fysiologiske størrelser hos topidrætsfolk. Hvis man ønsker at lægge en strategi for en enkelt løber og forvente at kunne bestemme nogle konkrete værdier for hastigheden, bør modellen tilpasses den enkelte løber. Det vil sige, at man på baggrund af de personlige rekorder, som løberen har sat, fitter et sæt parametre, der således gælder for denne.

Keller vælger at fitte sine parametre ad to omgange. Det er en praktisk løsning af dele problemet op i to mindre delproblemer, og matematisk set er det oplagt. F og τ indgår i ligning (2.14) for de korte løb, og han vælger således at fitte dem ud fra disse løb. Det er kun i de korte



Figur 5.1: Forandringer i gennemsnitshastigheden ved forskellige distancer overfor ændringer i højden. Bemærk, at skalaen er forskellig over og under 100 % hastighed ved havoverfladeniveauet. [3]

løb, at der løbes maksimalt frem, og $\frac{1}{\tau}$ har mest betydning, når der acceleres hele tiden i disse løb.

Tilsvarende vælger Keller at fitte σ og E_0 på de længere løb. Parametrene her indgår i ligning (2.27), for disse løb. Fysiologisk set lyder det rimeligt, da det i følge JWH er her, at σ er konstant. Iltten er som forbrændingskilde først vigtig dér (aerobe processer). Men E_0 er mere ulogisk. Mængden af ilt tilstede i musklerne, ville vi forvente, blev brugt op i løbet af de første sekunder og derfor have mest betydning i de korte løb. Den er så placeret her for at fordele antallet af parametre, der skal fittes.

5.2 Perspektivering

For at sætte vores problemstilling i perspektiv har vi undersøgt hvilke undersøgelser, der fandtes om emnet – modellering af konkurrenceløb.

Der er bl.a. foretaget en undersøgelse af højders indflydelse på en løbers præstation [3]. Ud fra graferne i figur 5.1 kan vi se, at for de korte løb har højden en positiv virkning for hastigheden. Dette skyldes, at energien næsten udelukkende stammer fra anaerobe processer. Det vil

sige, at der ikke er stor brug for ilt, og da luften er tyndere (jo højere niveau over havoverfladen man kommer, des mindre ilt, er der tilstede i luften), er luftmodstanden mindre. Men for de længere løb, hvor energien stammer fra aerobe processer - forbrænding af ilt, giver det en negativ virkning, i og med der er mindre ilt tilstede i luften.

Vi har også stiftet bekendskab med undersøgelser, der handlede om at forudsige fremtidige rekorder. Der er en væsentlig prestige i at nå under en bestemt tid på visse distancer. Eksempelvis taler man om den såkaldte drømmemile. Inden 1954, hvor den blev løbet på 3.59 minutter af Roger Bannister [19], var drømmen at løbe en mile på under 4 min. I dag gør man sig overvejelser om, hvornår i fremtiden man vil kunne løbe en mile på under 3 min. Der er opstillet forskellige modeller, der forsøger at forudsige dette. Forfatterne til artiklen [2] har det bud, at rekorden vil blive slået i år 2172. Det vil dog kræve så stor ændring i de fysiologiske parametre, der indgår i deres model, at de ikke finder det realistisk nogensinde for mennesker at udføre.

Et videre arbejde med Kellers model kunne indbefatte, som Keller foreslår i sin artikel, at modellen regnes igennem med kontrolteori. Vi har arbejdet med, at en distance opdeles i tre intervaller, hvor modellen for $0 \leq t \leq t_1$ og for $t_2 \leq t \leq T$ er givet ved fysiske overvejelser og i $t_1 \leq t \leq t_2$ bestemt ved hjælp af variationsregning. Hvis vi havde arbejdet med kontrolteori, ville vi have opnået et arbitrært antal intervaller. En fordel ved at benytte kontrolteori er, at vi kunne være sikre på at finde minimum, mens vi ved hjælp af variationsregning kun er sikre på en stationær værdi. Ligeledes kunne man undgå af inddrage nogle fysiske overvejelser for at løse problemet [11].

Vi kunne også foreslå en udvidelse af modellen, så man tog højde for nogle af modellens begrænsninger. Keller har i sin artikel [10] gjort opmærksom på, at han mener, at teorien bag hans model er for simpel. Modellen tager ikke højde for benenes op- og nedbevægelse under et løb, ligesom der ikke skelnes mellem indre og ydre modstand. Der bliver ikke inddraget affaldsprodukternes betydning og den energi, det tager at fjerne dem. Ligeledes, som vi nævner i kapitel 4, bør der i energibalanceligningen $\frac{dE}{dt} = \sigma - fv$ tages højde for den anaerobe proces.

Modellen kan ved videre arbejde udvides til at tage højde for disse faktorer. Det kunne ligeledes være spændende at undersøge, om modellen kan anvendes på andre sportsgrene f.eks. banecykling (sprint), hurtigløb på skøjter eller svømning - altså sportsgrene, hvor det gælder om at komme hurtigst til en bestemt distance. Vi har mulighed for at

sammenligne disse sportsgrene, idet omstændighederne ved udførelsen er relativt ens.

Det kunne også være spændende at udvide modellen til at gælde for længere løb som marathon. Kellers model gælder kun for løb op til 10.000 m. Keller mener, at det vil kræve ændring af teorien bag modellen og udvidelse med flere fysiologiske parametre. Keller foreslår ligeledes, at der kunne undersøges bjerge og dales indflydelse på den optimale hastighed på længere distancer. Han har en formodning om, at det kun vil kræve få modifikationer [10].

5.3 Konklusion

Det er lykket os at fitte de samme parametre, som Keller præsenterer i sin artikel [10]. Der er en fortegnstfejl i Kellers artikel [11] svarende til ligning 2.27 i kapitel 3. Fejlen må således være en typografisk fejl og ikke en fejl, der indgår i modellen. Vi har ligeledes fået gode resultater med at fitte nye parametre til forskellige datasæt.

I forsøg 1B er Kellers parametre afprøvet på et nyt sæt af data. I følge dette forsøg kan vi se, at Kellers parametre ikke er så dårlige, at de ikke kan anvendes på det nye sæt af data (kun 5 % udsving i den procentvise afvigelse mellem modellens tider og de faktiske rekorder). Men i forsøg 3, hvor vi selv har fittet parametrene til det samme nye sæt af data, er udsvingene nede på 3 %, hvilket er en forbedring.

Ud fra de antagelser og begrænsninger, der er gjort i modellen, er den ikke velegnet til konkurrenceløb, men måske mere for løb mod tid alene. Dette mener vi, fordi de psykologiske faktorer må have betydning under et konkurrenceløb. På figurerne 3.6, 3.7 og 3.8 kan man se, at modellens resultater stemmer godt overens med de målte data, der stammer fra konkurrenceløb. Dette taler for, at modellen godt kan anvendes.

Med anvendelse af variationsregning til udledning af modellen er vi kun sikre på en stationær løsning. Men den fine overenstemmelse mellem model og data tyder på, at denne stationære løsning også er et minimum.

Keller er selv inde på, at teorien bag hans model er for simpel. Vi mener således, at den væsentligste mangel ved Kellers model er, at den ikke tager højde for den anaerobe proces i ligning (2.5) for energibalancen. Netop denne fysiologiske størrelse vil blive relevant, hvis modellen skal udvides til at gælde for længere distancer som f.eks. marathon.

Appendiks A

Fysiologi

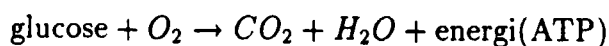
Dette appendiks beskriver henholdsvis den aerobe og anaerobe energidannelse ved forbrænding. Derudover vil vi diskutere sammenhængen mellem disse.

A.1 Iltoptagelse i hvile

Mennesket indånder ilt og udånder kuldioxid. For at få ilt ind i kroppen, og kuldioxiden ud, findes et sted, hvor luften kan komme i så nær kontakt med blodet, at der sker en udveksling af ilt og kuldioxid. Dette sted er lungerne, nærmere bestemt alveolerne. Ilt diffunderer herfra til lungekapillærerne, hvor det optages af hæmoglobinen i de røde blodlegemer. Dernæst bliver det via venstre hjertekammer transporteret rundt i kroppen og derved ud til musklerne [13].

I musklerne bliver ilt overført fra hæmoglobinen til myoglobin (et lignende stof). Dette har evnen til let at binde ilt, og når det er nødvendigt, afgives det også let, f.eks. når musklerne har en lav iltkoncentration [8].

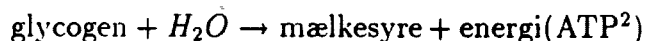
Muskelarbejdet kræver som alt andet arbejde energi. Musklerne kan få energi på to forskellige måder afhængigt af, om der er ilt tilstede eller ikke. Hvis nedbrydningen af næringsstoffer sker under tilstedeværelse af ilt, kaldes processen en aerob proces eller forbrænding [8]:



Herved dannes et antal molekyler ATP¹ [4]. Kuldioxid og vand bliver via blodet transporteret til det højre hjertekammer, hvorfra det overføres til lungerne. Der diffunderer det til alveolerne for til sidst at blive udåndet [13].

A.2 Iltoptagelse under arbejde

Ved hårdt arbejde kan koncentrationen af ilt blive så lav, at det ikke er muligt at forsyne musklerne med tilstrækkelig energi. I disse situationer frembringes det krævede energi ved spaltning af energirige stoffer i musklerne til mindre energirige, hvorved der frigives energi. Dette kaldes en anaerob proces [8]:



Den energimængde, der frigives ved spaltning af glycogen anaerobt, er betydeligt mindre end den, der frigives ved aerob forbrænding. [8] Så den mest optimale måde at få energi på er ved aerob forbrænding [4].

Med udgangspunkt i figur A.1 vil vi beskrive iltoptagelsen under et arbejde, der er inddelt i tre perioder:

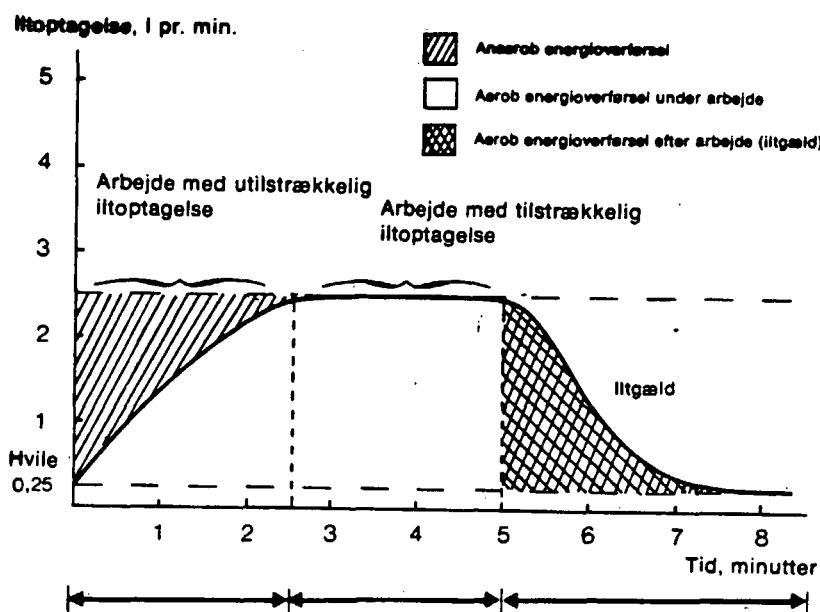
I begyndelsesperioden er iltoptagelsen mindre end musklernes iltbehov, derfor frigøres myoglobinen fra det bundne iltlager. Da kredsløbet ikke kan levere ilt så hurtigt, som behovet opstår, vil koncentrationen af ilt blive for lav i forhold til behovet. Derfor dækkes det resterende energibehov via anaerobe processer, som resulterer i dannelse af en vis mængde mælkesyre [8].

I den stationære periode er kredsløbet blevet i stand til at levere den mængde ilt, der er nødvendig. Ved hårdt arbejde vil der imidlertid også i denne periode dannes mælkesyre, men den vil ved en energikrævende proces igen omdannes til glycogen [15].

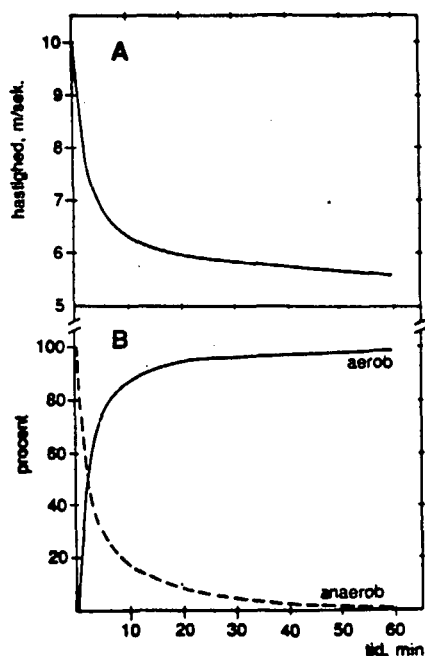
I restitutionperioden, det vil sige, når arbejdet er udført, daler iltoptagelsen ikke straks til hvileniveauet. I stedet skal den iltgæld, som opstod i begyndelsesperioden først betales tilbage. Derfor er iltoptagelsen større end behovet. Blodet, som nu strømmer gennem musklerne, omdanner mælkesyren tilbage til glycogen, så man bliver parat til et nyt stykke arbejde [15].

Sammenhængen mellem de aerobe og anaerobe processer ved løb kan illustreres på figur A.2:

¹Adenosintriphosphat.



Figur A.1: Iltoptagelsen i l/min. under og efter et moderat hårdt arbejde af 5 min. varighed (1 liter ilt svarer til 20 kJ). Den nederste stiplede vandrette linie angiver iltoptagelsen i hvile. Den fede kurve angiver den aktuelle iltoptagelse under og efter forsøget. [14]



Figur A.2: Figur A viser sammenhæng mellem løbetid og løbehastighed baseret på verdensrekorder. Figur B viser den procentvise fordeling af aerob og anaerob energifrigørelse ved maksimale arbejdsintensiteter fra 10 sek. til 60 min. varighed (Fra Menneskets Fysiologi, FADL)

Som det ses på de to figurer får musklerne ved løb på under 2,5 minut (sprint) dele af energien fra de anaerobe processer. Mælkesyren vil derfor ophobes i de arbejdende muskler, som begynder at blive stive og gøre ondt. Efter et sådant arbejde er løberen meget forpustet, og hjertet slår hurtigt for at pumpe ilten rundt.

Løb over 2,5 minut kræver stor udholdenhed. Det er derfor vigtigt, at energitilførslen foregår ved aerobe processer, hvilket, som tidligere nævnt, giver den største mængde energi. Som det ses på figurerne A.1 og A.2, er dette også tilfældet.

For at kunne gennemføre arbejdet er det nødvendigt, at kroppen kan føre tilstrækkelig meget ilt frem til de arbejdende muskler. Denne evne kan opøves ved træning, hvorfor sportsudøvere er hurtigere og bedre til at optage ilt end mennesker, der ikke dyrker sport.

Ved træning højt over havoverfladen øges effektiviteten af de transport-systemer, som skal bringe ilten fra lungerne ud til kroppens celler. De røde blodlegemer er vigtige for denne transport, og det er netop mængden af de røde blodlegemer, der forøges, når der trænes i højderne. Dette medfører en bedre iltoptagelse [9].

Appendiks B

Grundlæggende variationsregning

Vi vil her beskrive de grundlæggende begreber indenfor variationsregning, der er nødvendige at kende for at forstå de enkelte udregninger i modellen. Det følgende er skrevet udfra [7].

B.1 Simple variationsproblemer

Hvis man har to punkter, som skal forbindes, kan det være interessant at finde den funktion, som gør afstanden mellem dem størst eller mindst mulig. Hvis det antages, at der findes en mængde af funktioner, som alle kan forbinde de to punkter, går variationsregning ud på at finde den funktion, der minimerer eller maksimerer funktionalen¹

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (\text{B.1})$$

hvor a og b er faste tal, $y = y(x)$ er den afhængige variabel og x den uafhængige variabel. I forbindelse med variationsproblemer er der ofte givet nogle randbetingelser. Dette kan f.eks. være, at funktionerne $y = y(x)$ skal antage bestemte værdier i $x = a$ og i $x = b$.

De funktioner, der tilfredsstiller randbetingelserne, kaldes tilladte funktioner.

¹Ved en reel funktional I med definitions-mængde D_I forstå en afbildning $I : f \mapsto I\{f\}, f \in D\{I\}, I\{f\} \in \mathbb{R}$

B.1.1 Eulers ligning

Vi betragter funktionalen fra før med definitionsområdet $C^1[a, b]$, hvor der i intervalendepunkterne gælder randbetingelserne $y(a) = y_a$ og $y(b) = y_b$. Vi ønsker nu at finde den funktion, der indsat i funktionalen, giver den mindste eller største værdi.

I analysen er en nødvendig betingelse for ekstremum for en funktion f , at $f'(x) = 0$. Vi skal nu finde en tilsvarende betingelse for en funktion, $\bar{y}$, blandt de tilladte funktioner, der indsat i ligning (B.1) minimerer eller maksimerer funktionalen. I det følgende vil blive gennemgået, hvorledes der findes en funktion, der maksimerer funktionalen i (B.1). Et tilsvarende argument kan udledes for at finde minimum.

Betragt funktionerne $\bar{y}$ og $\bar{y} + \delta y$. Idet de begge er tilladte funktioner gælder $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. δy er en tilladt variation, idet der er tale om differencen mellem to tilladte funktioner.

Vi betragter nu variationer, som funktioner af formen $\delta y = \epsilon \eta = \epsilon \eta(x)$, hvor ϵ er en lille konstant og η er en fastholdt, men vilkårlig funktion, som tilhører mængden af tilladte funktioner. Heraf kan vi konkludere, at $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Dette indsættes i ligning (B.1). Vi får da et integral som funktion af ϵ :

$$J(\epsilon) = I\{\bar{y} + \epsilon \eta\} = \int_a^b F(x, \bar{y} + \epsilon \eta, \bar{y}' + \epsilon \eta') dx$$

Da $\bar{y}$ maksimerer integralet vil $J(0) \geq J(\epsilon)$. Idet F antages at være differentiabel, differentieres ved hjælp af kædereglen² med hensyn til ϵ

$$J'(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon \eta\} = \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b F(x, \bar{y} + \epsilon \eta, \bar{y}' + \epsilon \eta') dx \quad (\text{B.2})$$

Det første led forsvinder, idet x ikke afhænger af ϵ , og derved fås:

$$\int_a^b (F'_y \eta + F'_{y'} \eta') dx$$

Ved hjælp af partiel integration³ kan dette omskrives til

$$\int_a^b F'_y \eta dx + \int_a^b F'_{y'} \eta' = \int_a^b F'_y \eta dx + [F'_{y'} \eta]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F'_{y'} \eta dx$$

² $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon}$

³ $\int f g' = f g - \int f' g$ hvor $g = \eta'$ og $f = F'_{y'}$

idet $\eta(a) = \eta(b) = 0$ er $[F'_{y'}, \eta]_a^b = 0$. Altså fås:

$$\int_a^b F'_{y'} \eta dx - \int_a^b \frac{d}{dx} F'_{y'} \eta dx = \int_a^b \left[F'_{y'} - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right] \eta dx = 0 \quad (\text{B.3})$$

Ifølge variationsregningens fundamentallemma (se afsnit B.1.2) skal indholdet af de kantede parenteser være nul. Dette kan også ses, da ligning (B.3) skal gælde for alle funktioner η blot $\epsilon\eta$ er en tilladt variation. Vi har nu en nødvendig betingelse for ekstremum.

En nødvendig betingelse for at funktionalen

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

antager sin største værdi, når funktionen $\bar{y}$ indsættes er, at $\bar{y}$ opfylder ligningen - kaldet Eulers ligning:

$$F'_{y'} - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

Løsninger til Eulers ligning kaldes ekstremaler for det forelagte variationsproblem.

B.1.2 Variationsregningens fundamentallemma

Sætning

Variationsregningens fundamentallemma lyder:

Hvis $f \in C^0[a, b]$ og

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0 \quad (\text{B.4})$$

for enhver funktion $\eta \in C^1(a, b)$, for hvilken $\eta(a) = \eta(b) = 0$, så er $f(x) = 0$ for alle $x \in [a, b]$.

Bevis

Sætningen vises ved hjælp af en modstrid. Vi antager, at $f(x_0) \neq 0$ for et $x_0 \in]a, b[$. Idet f er kontinuert er $f(x) \neq 0$ for alle x i et vist delinterval $]c, d[$ af $]a, b[$. Hvis f.eks. η sættes til

$$\eta_0(x) = \begin{cases} (x-c)^2(x-d)^2, & \text{for } c \leq x \leq d; \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

bliver integralet

$$\int_a^b f(x)\eta_0(x)dx = \int_c^d f(x)\eta_0(x)dx \neq 0$$

Dette strider mod ligning (B.4), altså må $f(x) = 0$ for alle $x \in]a, b[$. Af kontinuitets grunde er $f(a) = f(b) = 0$

B.1.3 Variation af en funktional

Igen betragtes et simpelt variationsproblem med funktionalen:

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

med randbetingelserne $y(a) = y_a$ og $y(b) = y_b$ har $\bar{y}$ og $\bar{y} + \delta y$ som tilladte funktioner. Vi indsætter $\delta y = \epsilon\eta$, hvor ϵ er en konstant, derved bliver $I\{\bar{y} + \delta y\}$ en funktion af ϵ . F forudsættes tilstrækkeligt ofte differentiabel. Ved rækkeudvikling fås:

$$J\{\epsilon\} = I\{\bar{y} + \delta y\} = I\{\bar{y}\} + \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon\eta\} \right]_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2)$$

Definition

Ved variationen af en funktional I omkring den tilladte variation forstås størrelsen

$$\delta I\{\bar{y}\} = \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon\eta\} \right]_{\epsilon=0}$$

Forskellen ΔI mellem $I\{\bar{y} + \delta y\}$ og $I\{\bar{y}\}$ kan udtrykkes som

$$\Delta I = \delta I\{\bar{y}\} + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.5})$$

Variationen $\delta y = \epsilon\eta$ er proportional med ϵ . Af ligning (B.5) ses det, at hvis $\delta I\{\bar{y}\} \neq 0$, og $\epsilon \ll 1$ er ΔI næsten proportional med ϵ . Hvis $\delta I\{\bar{y}\} = 0$ er $\Delta I = O(\epsilon^2)$. Dette kan udtrykkes ved:

Hvis $\delta I\{\bar{y}\} = 0$ for enhver tilladt variation af den tilladte funktion $\bar{y}$, siges funktionalen I at være stationær for små variationer omkring $\bar{y}$, og $I\{\bar{y}\}$ kaldes en stationær værdi af funktionalen.

Ved at indsætte $\epsilon\eta = \delta y$ og $\epsilon\eta' = \delta y'$ i ligning (B.2) fås

$$\delta I\{\bar{y}\} = \int_a^b [F'_y(x, y, y')\delta y + F'_{y'}(x, y, y')\delta y']dx \quad (\text{B.6})$$

Ved partial integration fås:

$$\delta I\{\bar{y}\} = \int_a^b \left[F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') \right] \delta y dx \quad (\text{B.7})$$

Sammen med fundamentallemmet og ligning (B.7) fås at hvis funktionalen I er stationær for små værdier omkring $\bar{y}$, så tilfredsstiller $\bar{y}$ Eulers ligning.

Opsamling: Ved at indsætte for y funktionen $\{\bar{y} + \delta y\}$ i funktionalen for derefter at rækkeudvikle, δy og $\delta y'$ behandles som små størrelser, fås variationen af funktionalen. Den udgøres af de led, der er lineære i δy og $\delta y'$.

B.2 Isoperimetriske problemer

Vi skal betragte problemet - at finde en kurve, der minimerer en given funktional, samtidig med at den opfylder en betingelse beskrevet ved en anden funktional, som er lig en konstant.

Med andre ord, vi skal finde funktioner ($y = y(x)$), der giver funktionalen

$$I\{y\} = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

en stationær værdi. Det forlanges, at y opfylder randbetingelserne $y(a) = y_a$ og $y(b) = y_b$ samt en bibetingelse af formen

$$J\{y\} = \int_a^b G(x, y, y') dx = c$$

hvor c er en given konstant.

For at løse et isoperimetrisk problem kan man ved hjælp af Lagrange multiplikatorer reducere problemet til et simpelt variationsproblem.

Hvis vi antager, at funktionalen I er stationær for små variationer omkring den tilladte funktion $\bar{y}$, må der ifølge (B.6) gælde:

$$\delta I\{\bar{y}\} = \int_a^b [F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y'] dx = 0 \quad (\text{B.8})$$

Idet både $\bar{y}$ og $\bar{y} + \delta y$ er tilladte funktioner, vil bibetingelsen i $J\{y\} = J\{\bar{y} + \delta y\} = c$. Altså gælder der for enhver variation δy :

$$\delta J\{\bar{y}\} = \int_a^b [G'_y \delta y + G'_{y'} \delta y'] dx = 0 \quad (\text{B.9})$$

Vi betragter nu funktionerne $\eta_1(x)$ og $\eta_2(x)$. Vi forudsætter, at de tilhører $C^1[a, b]$ og er nul for $x = a$ og $x = b$. $\epsilon\eta_1$ og $\epsilon\eta_2$ og enhver linearkombination af de to funktioner er tilladte variationer, hvis ϵ er en lille konstant, og hvis $J\{\bar{y} + \epsilon\eta_1\} = J\{\bar{y} + \epsilon\eta_2\} = c$. Da den sidste betingelse imidlertid ikke forudsættes opfyldt vil de værdier af $\epsilon\alpha_1$ og $\epsilon\alpha_2$, som integralet i (B.9) antager, når δy erstattes af henholdsvis $\epsilon\eta_1$ og $\epsilon\eta_2$, være forskellig fra nul.

$$\begin{aligned} \epsilon\alpha_1 &= \epsilon \int_a^b [G'_y \eta_1 + G'_{y'} \eta'_1] dx \text{ og} \\ \epsilon\alpha_2 &= \epsilon \int_a^b [G'_y \eta_2 + G'_{y'} \eta'_2] dx \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Ved indsættelse af $\epsilon(\alpha_2\eta_1 - \alpha_1\eta_2)$ i (B.9) fås:

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_a^b [G'_y (\alpha_2\eta_1 - \alpha_1\eta_2) + G'_{y'} (\alpha_2\eta'_1 - \alpha_1\eta'_2)] dx \\ &= \epsilon\alpha_2\alpha_1 - \epsilon\alpha_1\alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Denne linearkombination er altså en tilladt funktion. Ved derfor at indsætte $\epsilon(\alpha_2\eta_1 - \alpha_1\eta_2)$ i (B.8), som er gældende for alle tilladte variationer, fås således ligningen:

$$\alpha_2 \int_a^b [F'_y \eta_1 + F'_{y'} \eta'_1] dx - \alpha_1 \int_a^b [F'_y \eta_2 + F'_{y'} \eta'_2] dx = 0 \quad (\text{B.12})$$

Omskrives ligning (B.11) og forkortes ϵ væk, fremkommer den tilsvarende ligning:

$$\alpha_2 \int_a^b [G'_y \eta_1 + G'_{y'} \eta'_1] dx - \alpha_1 \int_a^b [G'_y \eta_2 + G'_{y'} \eta'_2] dx = 0 \quad (\text{B.13})$$

Idet det homogene ligningssystem, som (B.12) og (B.13) danner, tilfredsstilles af talsættet $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ er determinanten 0. Vi har derfor, at rækkevektorerne i koefficientmatricen er lineært afhængige.

Det vil altså sige, at der eksisterer et λ , så

$$\int_a^b [F'_y \eta + F'_{y'} \eta'] dx = \lambda \int_a^b [G'_y \eta + G'_{y'} \eta'] dx \quad (\text{B.14})$$

for $\eta = \eta_1 = \eta_2$.

Ligning (B.14) kan ved hjælp af partiel integration omformes til

$$\int_a^b \left[F'_y - \lambda G'_y - \frac{d}{dx} (F'_{y'} - \lambda G'_{y'}) \right] \eta dx = 0$$

herudaf slttes ved hjælp af fundamentallemmet, at Eulers ligning gælder for størrelsen $F - \lambda G$, hvor funktionen $\bar{y}$ er indsat.

Appendiks C

Kildetekster og resultattabeller

Første del af dette appendiks indeholder udskrifter af de programmer, vi har konstrueret i MatLab . Det er dog kun et udvalg af kildeteksterne, idet de fleste filer i stor grad ligner hinanden. Der er f.eks. lavet forskellige filer for hvert forsøg 2 til 4, også selvom den eneste forskel på forsøgene er fra hvilken datafil, der hentes data. Vi har derfor valgt kun at vise en fil i de tilfælde, hvor der eksisterer filer, der i det store hele ligner hinanden. Bemærk at al tekst, som står efter et procenttegn % er kommentar, der ignoreres af MatLab. Anden del af dette appendiks indeholder en tabel fra hvert af de forsøg, der er blevet udført og er gennemgået i kapitel 3.

C.1 Kildetekster til MatLab

Filnavn: forsogl.m

```
% Forsøg 1. Data : Kellers. Parametre: Kellers:
% Denne scriptfil dækker forsøgene 1 og 1B. Filen er sat op til forsøg 1,
% men kan let tilpasses forsøg 1B ved at erstatte Keldata med Nydata. I
% dette forsøg beregnes Tcal for alle løb 1 til 22, samt den procentvise
% afvigelse mellem Tcal og Trec. I den forbindelse anvendes subrutinerne
%lign2142.m, lign2272.m og hjlppar.m .
```

```
F      = 12.2;                %Parametre beregnet af Keller.
tau    = 0.892;
sigma  = 9.93 * 4.187;
EO     = 575 * 4.187;

global F tau sigma EO;      %Erklæring af de globale variable.
```



```

global D T lambda t1 t2;

load Keldata.m;           %Fil med Kellers resultater.
%load Nydata.m           %Fil for forsøg 1B.

Res = zeros(22,7);        %Oprettelse af resultatmatrix.

options = foptions;       %Standard optionsvektor og
options(14) = 2000;       %Max antal iterationer
options(5) = 1;           %Levenberg-Marquardt metode;
options(2) = 1e-8;        %specificering af betydende cifre på x
options(3) = 1e-8;        %og på hjlp(p)

for i = 1:8                %Beregning af Tcal for de korte løb
    D = Keldata(i,1);
    Tcal = fzero('lign2142', Keldata(i,2));
    Ep = ((Tcal - Keldata(i,2)) / Tcal) * 100;
    %Beregning af den procentvise afvigelse.
    Res(i,1) = D;          %Resultaterne lægges i resultatmatricen.
    Res(i,2) = Keldata(i,2);
    Res(i,3) = Tcal;
    Res(i,4) = Ep;
end;

for i = 9:22              %Mellemdistance løb :
    T = Keldata(i,2);     %T-record.
    t1 = Keldata(i,3) + 0.5; %t1 gættes lidt for stor i forhold til Keller.
    t2 = floor(T);        %t2 gættes nedad afrundet værdi af Trec.
    if (t2 - T) == 0       %t2 SKAL gættes for lille ellers opstår der
        t2 = T - 1       %fejl i algoritmen.
    end;
    lambda = 0.3;         %Fast gat.

    x = fsolve('hjlp(p)', [t1 t2 lambda], options)
    %Det koblede ligningssystem løses for t1, t2 og
    %lambda.

    t1 = x(1); t2 = x(2); lambda = x(3);
    D = Keldata(i,1);
    Tcal = fzero('lign2272', T);
    %Beregning af Tcal;
    Ep = ((Tcal - T) / Tcal) * 100;
    %Beregning af den procentvise afvigelse;
    %Resultatmatricen fyldes;
    Res(i,1) = D;
    Res(i,2) = T;
    Res(i,3) = Tcal;
    Res(i,4) = Ep;
    Res(i,5) = t1;
    Res(i,6) = t2;
    Res(i,7) = lambda;
end;
save Fires.m Res -ascii; %Gemmer resultatmatrix som fil.

```

Filnavn : forsog2.m

% Forsøg 2 Data: Kellers, Parameter : fittes .
 % Denne scriptfil dækker forsøgene 2 til 4. Filen er sat op til forsøg 2,
 % men kan let tilpasses de andre forsøg ved at erstatte Keldata med
 % Nydata.m i forsøg 3 eller Qdata.m. i forsøg 4. I dette forsøg fittes

```
% først F og tau udfra de korte løb (1 til 8) og sigma og EO udfra mellemdistance
% løbene (9 til 22) . Undervejs beregnes Tcal for alle løb 1 til 22,
% samt den procentvise afvigelse mellem Tcal og Trec. Se endvidere
% filerne fitpar1.m og fitpar2.m, hvor fejlfunktionerne er specificeret,
% og lign313.m.
```

```
load Keldata.m;
%load Nydatab.m
%load Qdata.m
```

```
global Keldata;           %Erklæring af de globale variable;
%global Nydatab Qdata;
global F tau sigma EO Res; %Parametre.
global t1 t2 lambda;      %Hjælpeparametre.
```

```
F      = 12.2;           %Som udgangspunkt gættes på Kellers parametre.
tau     = 0.892;
sigma  = 9.93 * 4.187;
EO     = 575 * 4.187;
```

```
Res = zeros(22,7);      %Oprettelse af resultatmatrix. I forsøg 4 som
                        % (20,7)
x = fmins('fitpar1', [F tau])
                        %Fitter parametrene F og tau. Resultatet lægges
                        %i vektoren x.
F = x(1);               %Parametrene tildeles de nyfittede værdier.
tau = x(2);
```

```
Tc = fzero('lign213', 27) %Tc beregnes med 27 som begyndelsesgæt.
Dc = F * tau^2 * (Tc/tau + exp(-Tc/tau) - 1 )
                        %Dc beregnes fra lign. 3.3.
```

```
y = fmins('fitpar2', [sigma EO])
                        %Sigma og EO fittes analogt.
```

```
sigma = y(1)           %Parametrene tildeles de nyfittede værdier.
EO = y(2)
```

```
for i = 1:22
    Res(i,4) = (( Res(i,3) - Res(i,2) ) / Res(i,3) ) * 100;
                        %Den procentvise afvigelse beregnes.
end;
```

```
save F2res.m Res -ascii; %Resultatmatricen gemmes som fil.
```

Filnavn : fitpar1.m

```
function y = fitpar1(X);
% Denne funktion anvendes i scriptfilerne forsog2.m., forsog3.m
% og forsog4.m. (Her er filen sat op til forsog2.m ). Fitpar1 beregner
% fejlsommen af løbene 1 til 8. Argumentet er en vektor indeholdende
% parametrene F og tau. Undervejs udregnes Tcal for de 8 løb, der
% anvendes i fejlsommens udregning. Når vi minimerer denne funktion
% (ved brug af MatLab-kommandoen 'fmins') svarer det til at benytte mindste
% kvadraters metode. Funktionen anvender filen : lign 2142.m.
```

```
global F tau D Res;      %Erklæring af de globale variable.
%global Nydatab;
%global Qdata Kelguess;
```

```

F = X(1);           %F og tau sættes til X's værdier.
tau = X(2);
s = 0;              %Summen initialiseres til nul.

for j = 1:8          %For hvert af de korte løb (1 til 8) gøres:
    D = Keldata(j,1);
    Trec = Keldata(j,2);
    Tcal = fsolve('lign2142',Trec);
    %Tcal findes som rod i lign 2.14.
    s = s + (Trec - Tcal)^2 / Trec^2;
    %Fejlsummen summeres.

    Res(j,1) = D;     %Resultaterne placeres i resultatmatricen.
    Res(j,2) = Trec;
    Res(j,3) = Tcal;
end;

y = s               %Funktionens værdi sættes til fejlsummen.

```

Filnavn : fitpar2.m

```

function y = fitpar2(X)
% Denne funktion anvendes i filen forsog2.m., forsog3.m og forsog4.m.
% (Her er filen sat op til forsog2.m ). Fitpar2 er en funktion, der beregner
% fejlsummen af løbene 9 til 22. Argumentet er en vektor indeholdende
% parametrene sigma og EO. Undervejs udregnes Tcal for de 14 løb, der alle
% anvendes i beregning af fejlsummen. Her svarer minimeringen af denne funktion
% (ved brug af MatLab-kommandoen 'fmins') til at benytte mindste kvadraters
% metode. Funktionen anvender filerne : lign 2272.m og hjlppar.m.

%variable:
global F tau D sigma EO;   %F og tau skal kendes, D anvendes i hjlppar
                           %funktion;
global t1 t2 lambda;       %hjelpeparameter;
global Res;

%filer:
global Keldata;             %De filer, der ikke anvendes, kommenteres væk.
%global Hydata;
%global Qdata Kelguess;     %Kelguess : Fil, der kun indeholder 20 af Kellers data;

%initialisering;
sigma = X(1);               %Sigma og EO hentes i vektoren X;
EO = X(2);
s = 0;                      %Summen s initialiseres til nul.

options = foptions;         %Standard optionsvektor.
options(14) = 2000;         %Max antal iterationer.
options(5) = 1;             %Levenberg-Marquardt metode.
options(2) = 1e-8;          %specificering af nøjagtighed på x
options(3) = 1e-8;          %og på hjlppar(p)

for i = 9:22                %For mellemdistance løb (9 til 20 i forsøg 4) :
    %Først findes hjelpeparametrene;
    D = Keldata(i,1);
    T = Keldata(i,2);

```

```

t1 = Keldata(i,3) + 0.3; %t1 gættes lidt for stor.
t2 = floor(T);          %t2 gættes til T afrundet nedad til nærmeste heltal.
if (t2 - T) == 0         %Hvis T er et heltal, gættes et mindre.
    t2 = t2 - 1;
end;

lambda = 0.09;           %lambda gættes til 0.09;
if i > 18                 %På de sidste løb gættes på 0.15;
    lambda = 0.15;
end;

z = fsolve('hjlppar', [t1 t2 lambda], options);
%Det koblede ligningssystem løses, og
%hjelpeparametrene bestemmes;

t1 = z(1);
t2 = z(2);
lambda = z(3);

Tcal = fzero('lign2272', T);
%Tcal beregnes ud fra ligning (2.27);
s = s + (T - Tcal)^2 / T^2;
%Fejlsummen summeres;

Res(i,1) = D;            %Resultaterne fyldes i resultatmatricen;
Res(i,2) = T;
Res(i,3) = Tcal;
Res(i,5) = t1;
Res(i,6) = t2;
Res(i,7) = lambda;
end;

y = s;                   %Funktionens værdi sættes til fejlsummen;

%***** slut på fitpar2.m*****;

```

Filnavn : hjlppar.m

```

function q = hjlppar(p)
% Denne funktion løser det koblede ligningssystem bestående af
% ligningerne (2.22), (2.23) og (2.24), hvor venstresiderne er sat til
% nul. De variable er hjelpeparametrene t1, t2 og lambda, hvis værdier
% overføres via vektoren p. De øvrige parametre F, tau, sigma, EO samt T
% (Trec for det løb, der skal beregnes Tcal for) forventes alle at være erklæret
% som globale. Filen hjlppar.m anvendes i forsogi.m og fitpar2.m.

global EO F tau sigma T;

t1 = p(1);               %De variable hentes fra vektoren p;
t2 = p(2);
lambda = p(3);

q = zeros(3,1);          %Vektoren q oprettes som en nulvektor svarende til
                          %venstresiderne;

q(1) = EO + sigma*t2 - tau^2/(2*lambda^2) - F^2*tau ...
        *((-3*tau)/2 + t1 + 2*tau*exp(-t1/tau) - ...
        (tau/2)*exp((-2*t1)/tau)) - ...
        (tau/lambda^2)*(t2 - t1);
%Ligning (2.22)
q(2) = - lambda + 2 * (sigma - tau/lambda^2)^(-1) * (sqrt(sigma*tau + ...

```

```

        (tau^2/lambda^2 - sigma*tau)* ...
        exp(2*(t2 - T)/tau) ) - tau/ lambda);
                                %Ligning (2.23)
q(3) = F*(1 - exp(-t1/tau)) - 1/lambda;
                                %Ligning (2.24)

```

Filnavn : lign2272.m

```

function Y = lign2272(T)
% Det rette navn for denne funktion er ligning (2.27), version 2, hvilket
% betyder, at ligningen har nul isoleret på venstre siden. Funktionen
% beregner distancen D udfra ligning (2.27), til tiden T (for T <= Tc).
% Parametre F, tau, sigma og EO samt D og hjælpeparametrene t1, t2
% og lambda forventes globalt erklæret. Lign2272.m anvendes i filerne
% forsog1.m og fitpar2.m.

global lambda t1 t2          %De globale variable.
global tau sigma F EO D

                                %Specificering af første og andet led i ligningen.
D1 = F*tau^2*(t1/tau + exp(-t1/tau) - 1);
D2 = (tau*(t2-t1))/lambda;

                                %Sidst led deles op i yderligere 4 led
L1 = -sqrt(tau/sigma)/lambda; %Ledet fra artiklen
L2 = sqrt(tau/sigma)/lambda;  %VORES RETTELSE
L3 = -sqrt(1 + (tau/(lambda^2*sigma)-1) * exp(-2*(T - t2)/tau));
L4 = -atanh(sqrt(tau/sigma)/lambda);
L4 = atanh(1 + (tau/(lambda^2*sigma)-1) * exp(-2*(T - t2)/tau));

                                %Det tredje led samles.
D3 = tau*sqrt(tau*sigma)*(L1+L2+L3+L4);

Y = D1 + D2 + D3 - D;          %Funktionens værdi bliver de tre led
                                %fratrullet distance D, da funktionen skal løses for
                                %nulpunkt.

```

Filnavn : lign2142.m

```

function y = lign2142(t)
% Det rette navn for denne funktion er ligning (2.14), version 2, hvilket
% betyder, at ligningen har nul isoleret på venstre side. Funktionen
% beregner distancen D udfra ligning (2.14), til tiden T (for T >= Tc).
% Parametre F, tau, med samt D forventes globalt erklæret.
% Lign2142.m anvendes i filerne forsog1.m og fitpar1.m.

global F tau D;

y = - D + F*tau^2 * ( t/tau + exp(-t/tau) - 1 );

```

Filnavn : lign213.m

```

function y = lign213(t)
% Denne funktion svarer til ligning (2.13). Løses funktionen med hensyn
% til nulpunktet findes Tc. Parametrene F, tau, sigma og EO forventes
% globalt erklæret. Lign213.m anvendes i filen forsog2.m, forsog3.m og

```

```
% forsøg4.m.
```

```
global E0 sigma tau F;      %Parametre.
```

```
y = E0 + sigma*t - F^2*tau^2*(t/tau + exp(-t/tau) - 1 );
```

Filnavn : eplot.m

```
%Den scriptfil plotter den absolutte værdi af den procentvis afvigelse
% (Ep, for hvert løb) hentet fra resultatfilerne. Her er filen sat op til
% forsøg 1, hvor resultatfilen hedder Fires.m. I forsøg 1 og forsøg 2 har
% vi ønsket at vise Kellers resultater på samme graf for at kunne
% sammenligne udsvingene.
```

```
load Fires.m                %Filerne, der anvendes;
%load Fibres.m
%load F2res.m
%load F3res.m
%load F4res.m;
load Keldata.m
```

```
x = abs(Fires(:,4));        %De absolutte værdier hentes fra den 4. søjle
                             %i resultatfilen.
%y = abs(Keldata(:,5));      %Kellers fejlprocenter hentes fra den 5.
                             %søjle i datafilen.
race = 1:22;                %Løb numrene.
%race = 1:20;                %1:20 i forsøg 4.
```

```
%plot(race, x, '-');        %Resultaterne plottes og forbindes med en linie.
plot(race, x, '-', race, y, ':'); %forbindes med en stilet linie.
                                %Som før, men inkluderer Kellers resultater, der
                                %forbindes med en stilet linie.
title(' Forsøg 1');          %Titel på grafen;
xlabel('Løb nr. ');           %X-aksen navngives.
ylabel('Procentvis afvigelse'); %Y-aksen navngives.
```

Filnavn : mplot2.m

```
% Dette er en script-fil, der tegner grafer for den gennemsnitlige
% hastighed til en given distance, svarende til den Keller viser
% i sine artikler. Dels vises de data, der er fittet som '+' og dels de
% modelberegnete resultater (vist som en kurve, hvor punkterne er markeret
% med 'o'). Modelplot af denne type er kun anvendt i forsøgene 2
% til 4. Mplot2.m er kun gældende for forsøg 2. Mplot3.m og mplot4.m
% er for de øvrige forsøg. Modelkurven er tegnet ud fra beregninger af Tcal
% ved hjælp af ligning (2.14) (se fil : lign214.m) for D <= Dc. For distancer
% Dc til 2000 meter, fittes et 4. grads polynomium gennem modelpunkterne
% (o).
```

```
global F tau sigma E0;      %De globale variable.
```

```
load F2res.m                %Resultattabellen for forsøg 2.
```

```
distance = F2res(:,1);      %Distancerne hentes fra søjle 1.
record = F2res(:,2);        %Alle trec værdierne hentes i søjle 2.
```

```

calculated = F2res(:,3);    %Alle Tcal værdierne hentes i søjle 3.

F = 12.204;                %Parametrene udregnet i forsøg 2.
tau = 0.89296;
sigma = 41.5769;
EO = 2648.3;

Dc = 291.4187;             %Resultatet af Dc og Tc udregnet i forsøg 2.
Tc = 27.6343;

t = 0:0.1:Tc;              %Interval fra 0 til Tc;
d = feval('lign214',t);    %Vektor med modelpunkter beregnet ved ligning (2.14).
%*****kurve fitte*****;
vel = 1:9;                 %Vektor til gennemsnitshastighederne.
x = 1:9;                   %Vektor til distancerne.
vel(1) = Dc/Tc;            %Første punkt, der skal fittes er det
x(1) = Dc;                 %beregnet punkt udtrykt ved Dc og Tc.

for i = 9:16               %De øvrige gennemsnittpunkter beregnes.
    vel(i - 7) = distance(i) / calculated(i);
    x(i - 7) = distance(i);
end;
p = polyfit(x,vel,4)       %Der fittes et 4. gradspolynomium til
                           %modelpunkterne. Vektoren p indeholde
                           %koefficienterne i polynomiet.

dd = Dc:10:2000;          %Afstandsvektor med interval Dc til 2000.
                           %Skridtlængden er sat til 10.
f = polyval(p,dd);        %Polynomiet evalueres og resultatet samles i vektoren f.
%*****;

%*****kurven plottes*****;
hold on                   %Der skal flere grafer på samme figur.
plot(d,d./t,'-');        %Modelpunkterne for den gennemsnitlige
                           %hastighed plottes og forbindes med en linie.
plot(distance(1:16), distance(1:16)./record(1:16),'+');
                           %De målte gennemsnitstider plottes som '+'.
plot(dd,f,'-');          %Den fittede kurve plottes.
plot(x(1:9),vel(1:9),'o'); %Punkterne, der er fittet efter plottes (o).
title('Forsøg 2');       %Titel på figur.
xlabel('D, Distance');   %X-aksen navngives.
ylabel('D/T , Gennemsnitlig hastighed'); %Y-aksen navngives
hold off                 %Ikke flere grafer på figuren.
%*****;

```

Filerne `mplot3.m` og `mplot4.m` er ikke vist her, da de stort set stemmer overens med filen `mplot2.m`. Ligeledes er filen `lign214.m` ikke medtaget, da den på tilsvarende vis ligner filen `lign2142.m`.

C.2 Resultattabeller

Herefter følger de 5 resultattabeller fra forsøgene i kapitel 3.

Filnavn: F1res.m

D	Trec	Tcal	Ep	t1	t2	lambda
4.5720000e+001	5.1000000e+000	5.0903143e+000	-1.9027800e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.0000000e+001	5.5000000e+000	5.4846692e+000	-2.7952011e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.4860000e+001	5.9000000e+000	5.9320134e+000	5.3967171e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
6.0000000e+001	6.5000000e+000	6.4048105e+000	-1.4862196e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
9.1440000e+001	9.1000000e+000	9.2945316e+000	2.0929688e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
1.0000000e+002	9.9000000e+000	1.0081138e+001	1.7968053e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0000000e+002	1.9500000e+001	1.9270299e+001	-1.1919955e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0117000e+002	1.9500000e+001	1.9377812e+001	-6.3055647e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
4.0000000e+002	4.4500000e+001	4.3645139e+001	-1.9586628e+000	1.7395800e+000	4.3634407e+001	9.5560209e-002
4.0234000e+002	4.4900000e+001	4.2370057e+001	-5.9710629e+000	-6.1516362e-001	2.5644521e+001	-8.2544221e-002
8.0000000e+002	1.0430000e+002	1.0625578e+002	1.8406384e+000	1.0730315e+000	1.0322647e+002	1.1714739e-001
8.0467000e+002	1.0490000e+002	1.0700773e+002	1.9696997e+000	1.0708620e+000	1.0382481e+002	1.1726995e-001
1.0000000e+003	1.3620000e+002	1.3846186e+002	1.6335594e+000	9.8675917e-001	1.3504579e+002	1.2248592e-001
1.5000000e+003	2.1310000e+002	2.1973577e+002	3.0198870e+000	8.9072566e-001	2.1179608e+002	1.2977820e-001
1.6093000e+003	2.3110000e+002	2.3756135e+002	2.7198670e+000	8.7788354e-001	2.2976726e+002	1.3088528e-001
2.0000000e+003	2.9620000e+002	3.0138904e+002	1.7217095e+000	8.4486563e-001	2.9477626e+002	1.3389866e-001
3.0000000e+003	4.5960000e+002	4.6516009e+002	1.1953060e+000	8.0393670e-001	4.5800646e+002	1.3800400e-001
3.2186000e+003	4.9980000e+002	5.0099002e+002	2.3753392e-001	7.9803212e-001	4.9817300e+002	1.3863345e-001
4.8279000e+003	7.7040000e+002	7.6636392e+002	-5.2665286e-001	7.7446869e-001	7.6859616e+002	1.4124734e-001
5.0000000e+003	7.9660000e+002	7.9347121e+002	-3.9431727e-001	7.7304461e-001	7.9478224e+002	1.4141074e-001
9.6558000e+003	1.6070000e+003	1.5998761e+003	-4.4528003e-001	7.5202097e-001	1.6048843e+003	1.4389957e-001
1.0000000e+004	1.6594000e+003	1.6523311e+003	-4.2781281e-001	7.5137114e-001	1.6572705e+003	1.4397885e-001

Figur C.1: Resultatmatrix for forsog 1

Filnavn: Fibres.m

D	Trec	Tcal	Ep	t1	t2	lambda
4.572000e+001	4.980000e+000	5.090314e+000	2.167140e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
5.000000e+001	5.370000e+000	5.484692e+000	2.090723e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
5.486000e+001	5.760000e+000	5.932013e+000	2.899747e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
6.000000e+001	6.170000e+000	6.404810e+000	3.666157e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
9.144000e+001	8.970000e+000	9.294531e+000	3.491640e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
1.000000e+002	9.620000e+000	1.008113e+001	4.574269e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
2.000000e+002	1.948000e+001	1.927029e+001	-1.088208e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
2.011700e+002	1.966000e+001	1.937781e+001	-1.456243e+000	0.000000e+000	0.000000e+000	0.000000e+000
4.000000e+002	4.329000e+001	4.354236e+001	5.795859e+001	1.785827e+000	4.242984e+001	9.476617e-002
4.023400e+002	4.450000e+001	4.392653e+001	-1.305501e+000	1.739580e+000	4.363440e+001	9.556020e-002
8.000000e+002	1.017300e+002	1.063209e+002	4.317968e+000	1.082654e+000	1.006636e+002	1.166103e-001
8.046700e+002	1.041000e+002	1.070274e+002	2.735269e+000	1.073761e+000	1.030270e+002	1.171063e-001
1.000000e+003	1.321800e+002	1.385275e+002	4.582162e+000	9.951176e+001	1.310351e+002	1.219238e-001
1.500000e+003	2.088600e+002	2.197672e+002	4.963084e+000	8.940875e+001	2.075631e+002	1.294940e-001
1.609300e+003	2.263200e+002	2.375917e+002	4.744173e+000	8.810863e+001	2.249947e+002	1.306059e-001
2.000000e+003	2.908100e+002	3.014110e+002	3.517138e+000	8.470212e+001	2.893931e+002	1.336942e-001
3.000000e+003	4.489600e+002	4.628485e+002	3.000658e+000	8.056793e+001	4.473757e+002	1.378201e-001
3.218600e+003	4.934500e+002	5.009968e+002	1.506923e+000	7.988998e+001	4.918281e+002	1.385403e-001
4.827900e+003	7.678000e+002	7.650942e+002	-3.536453e-001	7.746153e+001	7.659975e+002	1.412305e-001
5.000000e+003	7.783900e+002	7.918085e+002	1.694665e+000	7.740241e+001	7.765818e+002	1.412982e-001
9.655800e+003	1.596800e+003	1.589902e+003	-4.338291e-001	7.521524e+001	1.594687e+003	1.438835e-001
1.000000e+004	1.618380e+003	1.614395e+003	-2.467939e-001	7.518762e+001	1.616261e+003	1.439172e-001

Figur C.2: Resultatmatrix for forsøg 1B

Filnavn : F2res.m

D	Trec	Tcal	Ep	t1	t2	lambda
4.5720000e+001	5.1000000e+000	5.0903143e+000	-1.9027705e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.0000000e+001	5.5000000e+000	5.4846692e+000	-2.7952096e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.4860000e+001	5.9000000e+000	5.9320134e+000	5.3967174e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
8.8589136e+000	6.5000000e+000	6.4048105e+000	-1.4862188e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
9.1440000e+001	9.1000000e+000	9.2945316e+000	2.0929683e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
1.0000000e+002	9.9000000e+000	1.0081138e+001	1.7968011e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0000000e+002	1.9500000e+001	1.9270299e+001	-1.1919950e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0117000e+002	1.9500000e+001	1.9377812e+001	-6.3055623e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
4.0000000e+002	4.4500000e+001	4.2315404e+001	-1.7542535e+000	2.4906414e+000	4.4026734e+001	8.7307167e-002
4.0234000e+002	4.4900000e+001	4.2361570e+001	-2.1102498e+000	2.4905967e+000	4.4027213e+001	8.7307453e-002
8.0000000e+002	1.0430000e+002	1.0162554e+002	1.7588949e+000	1.2936671e+000	1.0399939e+002	1.0709280e-001
8.0467000e+002	1.0490000e+002	1.0466332e+002	1.9012014e+000	1.1071571e+000	1.0399692e+002	1.1531489e-001
1.0000000e+003	1.3620000e+002	1.3603982e+002	1.5607132e+000	1.0114642e+000	1.3599781e+002	1.2088436e-001
1.5000000e+003	2.1310000e+002	2.1704155e+002	2.9577706e+000	9.0581816e-001	2.1299883e+002	1.2855810e-001
1.6093000e+003	2.3110000e+002	2.3483608e+002	2.6586920e+000	8.9174323e-001	2.3099918e+002	1.2973067e-001
2.0000000e+003	2.9620000e+002	2.9857120e+002	1.6626737e+000	8.5561277e-001	2.9599940e+002	1.3293199e-001
3.0000000e+003	4.5960000e+002	4.6217336e+002	1.1387575e+000	8.1082633e-001	4.5899965e+002	1.3732750e-001
3.2186000e+003	4.9980000e+002	4.9813960e+002	1.8088071e-001	8.0437384e-001	4.9899967e+002	1.3800400e-001
4.8279000e+003	7.7040000e+002	7.6696740e+002	-3.9901131e-001	7.7846832e-001	7.7000000e+002	1.4084053e-001
5.0000000e+003	7.9660000e+002	7.9326268e+002	-3.4229652e-001	7.7691767e-001	7.9600000e+002	1.4101670e-001
9.6558000e+003	1.6070000e+003	1.6019315e+003	-3.1639805e-001	7.5178107e-001	1.6070000e+003	1.4398031e-001
1.0000000e+004	1.6594000e+003	1.6540024e+003	-3.2633491e-001	7.5113816e-001	1.6590000e+003	1.4405887e-001

Figur C.3: Resultatmatrix for forsøg 2

Filnavn : F3res.m

D	Trec	Tcal	Ep	t1	t2	lambda
4.5720000e+001	4.9800000e+000	4.9105573e+000	-1.4141511e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.0000000e+001	5.3700000e+000	5.3062273e+000	-1.2018464e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.4860000e+001	5.7600000e+000	5.7553933e+000	-8.0041446e-002	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
6.0000000e+001	6.1700000e+000	6.2303618e+000	9.6883298e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
9.1440000e+001	8.9700000e+000	9.1352124e+000	1.8085228e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
1.0000000e+002	9.6200000e+000	9.9260800e+000	3.0835939e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0000000e+002	1.9480000e+001	1.9165179e+001	-1.6426718e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0117000e+002	1.9660000e+001	1.9273276e+001	-2.0065297e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
4.0000000e+002	4.3290000e+001	4.2569931e+001	-1.6914968e+000	1.4723420e+000	4.2974167e+001	7.1904431e-002
4.0234000e+002	4.4500000e+001	4.3294061e+001	-2.7854606e+000	1.4382266e+000	4.3974791e+001	7.2394150e-002
8.0000000e+002	1.0173000e+002	1.0363598e+002	1.8391103e+000	8.7482843e-001	1.0099742e+002	8.8139301e-002
8.0467000e+002	1.0410000e+002	1.0494553e+002	2.3530476e-001	8.6550574e-001	1.0399755e+002	8.8609821e-002
1.0000000e+003	1.3218000e+002	1.3520121e+002	2.2346028e+000	8.0110623e-001	1.3199758e+002	9.2198470e-002
1.5000000e+003	2.0886000e+002	2.1486899e+002	2.7965832e+000	7.1883276e-001	2.0799864e+002	9.7831829e-002
1.6093000e+003	2.2632000e+002	2.3234412e+002	2.5927577e+000	7.0783613e-001	2.2599876e+002	9.8693933e-002
2.0000000e+003	2.9081000e+002	2.9492893e+002	1.3965839e+000	6.8015240e-001	2.8999907e+002	1.0099862e-001
3.0000000e+003	4.4896000e+002	4.552953e+002	1.4421743e+000	6.4632423e-001	4.4799943e+002	1.0410535e-001
3.2186000e+003	4.9345000e+002	4.9152499e+002	-3.9164031e-001	6.4071999e-001	4.9299948e+002	1.0465414e-001
4.8279000e+003	7.6780000e+002	7.6390785e+002	-5.0950517e-001	6.2092078e-001	7.6699997e+002	1.0667801e-001
5.0000000e+003	7.7839000e+002	7.7732728e+002	-1.3671462e-001	6.2041966e-001	7.7799997e+002	1.0673102e-001
9.6558000e+003	1.5968000e+003	1.5916986e+003	-3.2050038e-001	6.0258796e-001	1.5960001e+003	1.0867880e-001
1.0000000e+004	1.6183800e+003	1.6141533e+003	-2.6185245e-001	6.0235830e-001	1.6180001e+003	1.0870469e-001

Figur C.4: Resultatmatrix for forsøg 3

Filnavn : F4res.m

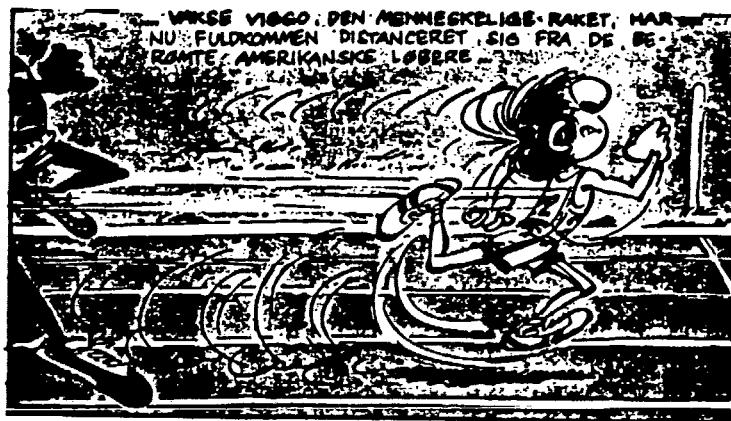
D	Trec	Tcal	Ep	t1	t2	lambda
4.5720000e+001	5.5000000e+000	5.3248470e+000	-3.2893527e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.0000000e+001	5.7600000e+000	5.7618373e+000	3.1887398e-002	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
5.4860000e+001	6.3000000e+000	6.2579898e+000	-6.7130503e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
6.0000000e+001	6.6800000e+000	6.7826959e+000	1.5140868e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
9.1440000e+001	9.8600000e+000	9.9920404e+000	1.3214558e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
1.0000000e+002	1.0250000e+001	1.0865826e+001	5.6675489e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0000000e+002	2.1100000e+001	2.1073595e+001	-1.2529898e-001	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
2.0117000e+002	2.2460000e+001	2.1193026e+001	-5.9782591e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000	0.0000000e+000
4.0000000e+002	4.7600000e+001	5.1955476e+001	8.3830932e+000	1.1201709e+000	4.6959451e+001	8.2147849e-002
4.0234000e+002	5.1710000e+001	5.2115392e+001	7.7787384e-001	1.0598357e+000	5.0963344e+001	8.3944692e-002
8.0000000e+002	1.1328000e+002	1.2247640e+002	7.5087119e+000	7.4630162e-001	1.1299465e+002	9.9036184e-002
8.0467000e+002	1.2030000e+002	1.2320517e+002	2.3579936e+000	7.3343855e-001	1.1999503e+002	9.9972201e-002
1.0000000e+003	1.5060000e+002	1.5839764e+002	4.9228259e+000	6.9279312e-001	1.4999650e+002	1.0318201e-001
1.5000000e+003	2.3247000e+002	2.4359844e+002	4.5683544e+000	6.3731664e-001	2.3199809e+002	1.0828766e-001
1.6093000e+003	2.5561000e+002	2.6656749e+002	4.1105875e+000	6.2835454e-001	2.5499829e+002	1.0920415e-001
2.0000000e+003	3.2869000e+002	3.3948503e+002	3.1798250e+000	6.0840589e-001	3.2799875e+002	1.1134845e-001
3.0000000e+003	5.0262000e+002	5.1334538e+002	2.0893107e+000	5.8453901e-001	5.0199923e+002	1.1412021e-001
3.2186000e+003	5.7844000e+002	5.7510143e+002	-5.8051847e-001	5.7866704e-001	5.7799933e+002	1.1483957e-001
5.0000000e+003	8.7733000e+002	8.8591264e+002	9.6879078e-001	5.6550112e-001	8.7700015e+002	1.1651027e-001
1.0000000e+004	1.8137400e+003	1.8097714e+003	-2.1928736e-001	5.5243462e-001	1.8130001e+003	1.1825199e-001

Figur C.5: Resultatmatrix for forsøg 4

Litteratur

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus*, volume II. Wiley International Edition, 1969.
- [2] François Péronnet og Guy Thibault. Mathematical analysis of running performance and world running records. *Journal of Applied Physiology*, 67(1):453-465, 1989.
- [3] François Péronnet og Guy Thibault og Daniel-Luc Cousineau. A theoretical analysis of the effect of altitude on running performance. *Journal of Applied Physiology*, 70(1):399-404, 1991.
- [4] Bent Christensen et. al. *Biologisk Forskning - Fysiologi, B3*. Gyldendal, 1985.
- [5] Linda Kyndlev et. al. *Brovedligeholdelse - bevar mig vel*. IMFUFA, 1993.
- [6] Andrew Grace. *Optimization Toolbox*. The Math Works, Inc., 1992.
- [7] Erik Hansen. *Variationsregning*. Polyteknisk Forlag, 1969.
- [8] Rune Hedman. *Idrætsfysiologi*. Nyt Nordisk Forlag ved Arnold Busck, 1988.
- [9] Finn Johannsen. *Alt om løb*. Elkjærs forlag, Årstal er ikke opgivet.
- [10] Joseph B. Keller. A theory of competitive running. *Physics Today*, september:43-51, 1973.
- [11] Joseph B. Keller. Optimal Velocity in a Race. *The American Mathematical Monthly*, 81:474-480, 1974.
- [12] B. B. Lloyd. The energetics of running: An analysis of world records. *Advancement of Science*, January:515-530, 1966.

- [13] Oluf Nielsen og Anni Springborg. *Fingeren på pulsen*. Gyldendal, 1992.
- [14] Henrik Falkenberg og Jørn Grønvold. *Idræt - muskelstyrke, kondition, doping og idrætsskader*. Nucleus-foreningen af Danske Biologers Forlag, 1983.
- [15] Erling Asmussen og Marius Nielsen. *Lærebog i menneskets fysiologi*. Bogtrykkeriets Forum, 1971.
- [16] Kirsten Hermann og Mogens Niss. *Beskæftigelsesmodellen i SMEC II*. Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, 1982.
- [17] E. R. Pinch. *Optimal Control and the calculus of variations*. Oxford University Press, 1993.
- [18] red. Peter Matheus og Henrik Ægidius et. al. *Guinness Rekordbog 1994*. Forlag Aschehoug Fakta, 1993.
- [19] Hans Peter Rolfsen. Legenden fra Ifley Road. *Politiken, Kroniken* 1. maj, 1994.
- [20] Inc. The Math Works. *MATLAB Reference Guide*. The Math Works, Inc., 1992.
- [21] Inc. The Math Works. *MATLAB User's Guide*. The Math Works, Inc., 1993.



- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for
den matematiske udvikling
af: Claus Dråby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for
optimering af broreparationer
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma
Tulinus, Ivar Zeck
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN
Et 1.modul fysikprojekt
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorte Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse
i CT-scanning
Projektrapport
af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og Christine Iversen
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b
/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske
halvledere
Specialerapport
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske
Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CON-
DUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY
DISORDERED NON-METALS
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH
BOUNDARY
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the
Jahresbericht Addendum to Schappacher,
Scholz, et al.
by: B. Booss-Bavnbek
With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors,
J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner,
J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch,
J.Radkau and T.Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET
VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelser,
Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreassen
and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Belmgård
Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk
Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Bass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning
Teori og model
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse
Materiale til et statistikkursus
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED
af: Peter Barremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent
Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-
electric Spherical Shell (Preprint)
by: T. Christensen and N.B.Olsen
- 257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske
keramikker
af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen,
Christina Specht, Mikko Østergård
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra og analyse"
af: Mogens Brun Heefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW
TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN
DIMENSIONS 2, 3, AND 4
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

Liste over tidligere udkomne tekster
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan
ske til IMFUFA's sekretariat
tlf. 46 76 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and
Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional
Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT

by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT
LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent
en-krystallinsk silicium

af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild
og Thomas Hougaard

Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY
CONVERSION"

by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M. Hansen, Steffen Holm,
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,
Pernille Postgaard, Thomas B. Schrøder,
Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,
Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"

En diskussion af informationsteorien
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og
en skitse til et alternativ baseret
på andenordens kybernetik og semiotik.

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk
problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse
af energiens bevarelse og isærdeles om
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz
udførte arbejder"

af: L. Arleth, G.I. Dybkjær, M.T. Østergård
Vejleder: Dorthé Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host
mortality on the dynamics of an endemic
disease and
Instability in an SIR-model with age-
dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL
BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS

- Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

- 261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93
- 262/93 Separability and the Jones
Polynomial
by: Lars Kadison
- 263/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra
og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt
- 264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen
-
- 265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED
SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his
sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert
and Gestur Olafsson
- 266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i
laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen,
Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik
Lindelof, Peder Voetmann Christiansen
- 267/94 Kom til kort med matematik på
Eksperimentarium - Et forslag til en
opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via
en model for strømning i kloaker
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson,
Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 269/94 Dimensionsanalyse en introduktion
metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen,
Ken Andersen, Nikolaj Hermann,
Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA
AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen
- 271/94 Matematikken i Fysikken.
Oddet eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

