

TEKST NR 250

1993

**EULER OG BOLZANO
– MATEMATISK ANALYSE
SET I ET VIDENSKABS-
TEORETISK PERSPEKTIV**

Projektrapport af

Anja Juul

Lone Michelsen

Tomas Højgård Jensen

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde.

EULER OG BOLZANO - Matematisk analyse set i et videnskabs
teoretisk perspektiv

Projektrapport 1. modul, af:

Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen og Anja Juul

Vejleder: Stig Andur Pedersen

IMFUFA tekst nr. 250/93

130 sider

ISSN 0106-6242

Abstract

Projektet er en beskrivelse af to matematiske forskningstraditioner, samt det traditionsskifte de repræsenterer. Først eksemplificeres de to traditioner ved to originaltekster fra 1748 og 1817. De valgte tekster er af henholdsvis Leonhard Euler og Bernard Bolzano. Disse tekster supleret med andenhåndslitteratur danner grundlaget for en karakteristik og sammenligning af de to perioder. Herefter gennemgås Teun Koetsiers modifikation af Imre Lakatos teori for videnskabelig udvikling og Thomas S. Kuhns teori for samme. De to videnskabsteorier sammenholdes, og forskelle og ligheder rides op.

Endeligt beskrives den udvikling, der kommer til udtryk, ved sammenligning af de to traditioner ved hjælp af det videnskabsteoretiske begrebsapparat. Herunder søges en forklaring på hvorfor Bolzano var præmatur i forhold til den tradition han tilhører.

Euler og Bolzano - Matematisk analyse set i et videnskabsteoretisk perspektiv



*“En sten kan ikke flyve.
Morlille kan ikke flyve.
Ergo er Morlille en sten!”*

Erasmus Montanus

Projektrapport
IMFUFA - Matematik, 1. modul
Vejleder: Stig Andur Pedersen
Studerende: Lone Michelsen,
Anja Juul og Tomas Højgård Jensen

Roskilde UniversitetsCenter
Juni, 1993

Indhold

1	Indledning	5
1.1	Argumentation for emnevalg	5
1.2	Argumentation for afgrænsning	7
1.3	Præsentation af relevante begreber	8
1.4	Formål	9
1.5	Problemformulering og teser	9
1.5.1	Problemformulering	9
1.5.2	Teser	10
2	Matematikken omkring 1750	11
2.1	Indledning	11
2.1.1	Matematikken i midten af 1700-tallet	11
2.1.2	Matematikkens problemer i 1700-tallet	13
2.2	Leonhard Euler som eksempel på matematikken i 1700-tallet	14
2.2.1	Hvorfor Euler?	14
2.2.2	Hvorfor "Introductio"?	15
2.2.3	Indledning til gennemgang af udvalgte originaltekster	15
2.3	Algebraens fundamentalsætning og middelværdisætningen	16

2.3.1	Gennemgang	16
2.3.2	Kommentarer	18
2.4	Eulers manipulering med uendelige rækker	19
2.4.1	Gennemgang	20
2.4.2	Kommentarer	24
2.5	Eulers manipulering med uendelige størrelser	27
2.5.1	Gennemgang	27
2.5.2	Kommentarer	31
2.6	Diskussion	32
2.6.1	Matematikens standpunkt	32
2.6.2	Den formalistiske traditions metode	32
2.7	Delkonklusion	36
3	Matematikken i første halvdel af 1800-tallet	39
3.1	Generelt om matematikken i første halvdel af 1800 tallet	40
3.2	Bolzano som eksempel på matematikken i første halvdel af 1800-tallet	44
3.2.1	Bernard Bolzano	44
3.3	Bolzos kritisk af 1700-tallets bevismetoder.	46
3.3.1	Gennemgang af artiklens første del	46
3.3.2	Kommentarer	50
3.4	Bolzos bevis	50
3.4.1	Uendelige rækker	51
3.4.2	Teorem 1: Fundamentalfølger konvergerer	55
3.4.3	Tilbage i sporet	64
3.4.4	Teorem 2: Eksistensen af supremum for en begrænset mængde	65

3.4.5	Middelværdisætningen, kontinuitet og Bolzanos sætning	69
3.5	Diskussion	72
3.5.1	Begreber	73
3.5.2	Bolzano i den konceptuelle tradition	74
3.6	Delkonklusion	76
4	Teorier om videnskabens udvikling	79
4.1	Indledning	80
4.2	Koetsiers videnskabsteoretiske forståelse med baggrund i Lakatos	88
4.2.1	(MP&R) Bevis og gendrivelse	90
4.2.2	(MSRP) Videnskabelig Forskningsprogram-metodologi	91
4.2.3	Koetsiers modifikation af Lakatos MP&R og MSRP	94
4.3	Kuhns videnskabssyn	101
4.3.1	Thomas S. Kuhn	102
4.3.2	Kuhns teori i hovedtræk	102
4.4	Forskelle og ligheder på et overordnet plan	110
5	Opsummering, diskussion og konklusion	117
5.1	Opsummering	117
5.2	Diskussion	119
5.2.1	Karakteristik af den formalistiske og den konceptuelle forskningstradition	120
5.2.2	Skiftet fra den formalistiske til den konceptuelle tradition	123
5.3	Konklusion	126

Kapitel 1

Indledning

Dette er et 1.moduls matematikprojekt. Det behandler som sådan matematikkens natur og indretning som videnskabsfag, på en sådan måde, at den videnskabsteoretiske status og historiske udvikling belyses.¹

Vores projekt går ud på at give et billede af udviklingen inden for den matematiske analyse ud fra sammenligning af to historiske perioder. Perioderne beskrives først generelt ved hjælp af matematik-historisk andenhåndslitteratur, hvorefter karakteristikken underbygges ved gennemgang af to konkrete historiske tekster. De tekster, vi har valgt, er brudstykker af Leonhard Eulers "Introductio" (1748) og Bernard Bolzanos "Rein analytischer Beveis" (1817). Herefter gennemgås to forskellige teorier for videnskabens udvikling: Teun Koetsiers "Lakatos's Philosophy of Mathematics" og Thomas S. Kuhns "Videnskabens revolutioner". De to videnskabsteorier sammenholdes, og forskelle og ligheder rides op. Endelig beskrives den udvikling, der kommer til udtryk ved sammenligning af de to traditioner, ved hjælp af det videnskabsteoretiske begrebsapparat.

1.1 Argumentation for emnevalg

Det overordnede emne har vi valgt dels ud fra modulbindinger og dels af interesse. Udover at de valgte perioder repræsenterer et markant

¹Studieordningen for matematik, RUC 1991

spring i den matematiske udvikling, er de også interessante i sig selv. 1700-tallet er måske den mest produktive periode i matematikkens historie. Der kom langt flere matematikere, og det matematiske emneområde blev markant udvidet. Funktionsbegrebet og integral- og differentialregningen opstod, og geometrien blev forkastet som grundlag for matematikken til fordel for algebraen. At vi har ladet Euler repræsentere denne periode, kræver ikke mange argumenter. Han er uomtvisteligt den tids mest markante og betydningsfulde matematiker. Han havde en fantastisk matematisk produktion, og en altdominerende indflydelse på den matematiske samtid og eftertid. Er man i tvivl herom, kan man slå op i den nærmeste formelsamling, og tælle hvor mange formler, der er opkaldt efter Euler. "Introductio" har vi valgt, fordi det er et af Eulers hovedværker, og fordi det omhandler funktionsbegrebet, som havde vores oprindelige interesse.

I den anden periode vi har valgt, forsøgte man at "rydde op" efter den voldsomme aktivitet, der havde været i 1700-tallet. Da var alting gået så hurtigt, at man ikke altid havde fået grundlaget i orden. Dette gjorde at der opstod fejl eller "paradokser", man ikke kunne forklare. Disse problemer søgte man i starten af 1800-tallet at komme til livs, ved at benytte en langt strengere metode, samt nye og mere præcist definerede begreber. Man koncentrerede sig i høj grad om at give stringente beviser for gammelkendte sætninger, der før havde stået ubeviste eller med mangelfuld bevisførelse. Man søgte at gøre matematikken konsistent, og skabte med de nye begreber grundlaget for den moderne analyse. Som repræsentant for denne periode har vi valgt Bolzano. Dette har vi gjort velvidende, at han faktisk er en smule for tidligt placeret i forhold til perioden, som man almindeligvis regner for at starte med Cauchys "Course d'Analyse" fra 1821. At vi alligevel har valgt Bolzano frem for Cauchy, skyldes at vi finder ham mere interessant. Dels fordi han, bolt med "Rein analytischer Beveis" fra 1817, giver det første succesfulde forsøg på at skabe strenghed i analysen, og på den måde var tidligere ude end Cauchy med samme budskab, og dels fordi han er mindre kendt og beskrevet end Cauchy. Herudover synes vi, det er interessant hvorfor det blev Cauchy og ikke Bolzano, der blev manden bag denne periode. Vi vil altså gennem Euler og Bolzano karakterisere to perioder i historien, der hver for sig repræsenterer en vigtig side af matematikkens udvikling; at søge nye resultater samt at skabe konsistens og et holdbart grundlag for matematikken.

Overgangen fra den ene periode til den anden, samt Bolzanos lidt skæve

placering i udviklingsforløbet, vil vi søge en forklaring på i de videnskabsteorier, vi vil gennemgå. At vi ikke blot har valgt en enkelt teori, skyldes ønsket om at få et bredere indblik i de mange forskelligartede synsvinkler. Hermed undgår vi fra start at lægge os fast på én model, men får derimod mulighed for at vælge de begreber og forklaringer, der passer bedst til den udvikling vi, beskriver.

Valget af de specifikke teorier skal afspejle det ontologiske modsætningsforhold, der i videnskabsteorien er mellem Karl Poppers falsifikationisme og Kuhns sociopsykologiske teori. Under omtalen af Kuhns teori om naturvidenskabens udvikling, har vi ofte hentet hjælp i Herbert Mehrtens artikel "T. S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the "new Historiography" of Mathematics", hvor han forsøger at tilpasse Kuhns teori specielt til matematikken. Koetsiers teori er en videreudvikling af Imre Lakatos ideer, hvis teori igen udspringer af Poppers falsifikationisme. Koetsiers videreudvikling består blandt andet i en tilpasning til matematikken.

Hvor Mehrtens blot foretager en tilpasning af Kuhns teori, har Koetsier en selvstændig overbygning på Lakatos teori. Derfor vil vi i vores arbejde referere til henholdsvis Kuhn og Koetsier, med mindre vi vil fremdrage pointer, specielt omhandlende Lakatos eller Mehrtens.

Det videnskabsteoretiske afsnit har en relativ stor vægt i projektet. Dette selvfølgelig fordi vi bruger det i beskrivelsen af vores udviklingsforløb, men i høj grad også fordi vi har haft en selvstændig interesse i, at få indblik i videnskabsteoretiske holdninger i almindelighed, og til matematik i særdeleshed.

Slutteligt vil vi give en sammenligning af de to teorier med hensyn til forskelle og ligheder, og benytte de mest anvendelige begreber, til beskrivelse af overgangen mellem de to perioder.

1.2 Argumentation for afgrænsning

Det udviklingsforløb vi interesserer os for, har vi valgt at beskrive ud fra to perioder, hver repræsenteret ved én person, som igen beskrives ud fra ét værk. Det er klart, at dette betyder en voldsom afgrænsning i forhold til ideen om, at beskrive et udviklingsforløb. Denne metode — et stationært evolutionsperspektiv med to fix-punkter — har vi valgt, dels ud fra realistiske overvejelser om, hvad vi kunne nå, og dels ud fra den betragtning, at det netop er forskellen mellem de to punkter, der har vores interesse, og således ikke hele den mellemliggende kronologi.

Vi stræber således heller ikke mod at skabe fuldstændige billeder af matematikken i de to perioder. Det interessante er for os at sammenligne de to punkter, og diskutere årsagen til den udvikling, de repræsenterer. Da det dog ikke giver mening, at betragte de to fix-punkter fuldstændigt isoleret, vil vi ud over Eulers og Bolzanos tekster også inddrage nogle mere generelle matematik-historiske værker, og gennem dem give beskrivelser af perioderne i et bredere perspektiv.

Som sekundær litteratur har vi hovedsageligt benyttet os af Morris Klines "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times". Vel vidende at vi ved brugen af sekundær litteratur uundgåeligt vil komme ud i at drage konklusioner ud fra andres konklusioner, har vi alligevel anset det for nødvendigt. Dette fordi Kline giver et overordnet billede af de to perioder, og en bred beskrivelse af overgangen og dens årsager, som vi af tidsmæssige årsager umuligt ville kunne foretage på egen hånd.

Et andet problem i vores valg af litteratur er, at vi grundet manglende sprogkundskaber udi latin og tysk, ikke har læst de historiske tekster på originalsprogene. Dette skaber selvfølgelig usikkerhed med hensyn til oversættelserne. Dette problem har vi dog for Bolzanos vedkommende søgt at minimere, ved at konferere den tyske tekst ved gengivelse af vigtige enkeltord. I tvivlstilfælde har vi bibeholdt de tyske termer i efterfølgende parenteser.

Med hensyn til spørgsmålene i vores problemformulering, som præsenteres i det nedenstående, har vi selvfølgelig også foretaget en del afgrænsninger. Der er masser af andre relevante og interessante problemstillinger i det emne, vi har valgt, men afgrænsningen er gjort ud fra hvad vi umiddelbart fandt mest spændende, og hvad vi fandt realistisk opnåeligt at svare på.

1.3 Præsentation af relevante begreber

De to konkrete eksempler, som vores projekt er bygget over, er ikke tilfældigt valgt. De repræsenterer som sagt to væsentlige sider af den matematiske udvikling, og det skel vi har sat, er en normal matematik-historisk opdeling. Da vi gennem hele projektet refererer til disse to perioder, og da det mere er den indholdsmæssig end den tidsmæssige forskel, vi vil beskæftige os med, har vi allerede fra start valgt, at inddrage Koetsiers betegnelser for disse perioder. Han anvender betegnelsen "forskningstradition", som dækker over en tidsmæssigt af-

grænset periode, karakteriseret ved et bestemt matematisk grundlag, emneområde og metoder og normer for bevisførelse.

De to eksempler, vi gennemgår, tilhører i Koetsiers termer "den formalistiske tradition" for den første periodes vedkommende, og "den konceptuelle tradition" for den anden. Disse to betegnelser vil vi straks adoptere.

Traditionerne er tidsmæssigt forbundet med perioden omkring Euler og perioden efter Cauchys "Course d'Analyse Algebrique".

1.4 Formål

Formålet med projektet er, at karakterisere den formalistiske og den konceptuelle tradition, specielt med henblik på analysen, samt at se på traditionsskiftet ved hjælp af Kuhn og Koetsiers teorier for videnskabens udvikling. Dette gjort både generent og ved hjælp af Eulers "Introductio" og Bolzanos "Rein analytischer Beveis"

Herudover har vi en selvstændig interesse i, at beskæftige os med videnskabsteri specielt rettet mod matematikken. Alt dette for at opnå større indsigt, i hvordan matematiske begreber opstår og skifter karakter.

1.5 Problemformulering og teser

1.5.1 Problemformulering

1. Hvad karakteriserede den formalistiske tradition?
2. Hvad karakteriserede den konceptuelle tradition?
3. Hvorfor er Bolzano præmatur i forhold til den konceptuelle tradition?
4. Kan Koetsiers og/eller Kuhns videnskabsteori
 - (a) bidrage til besvarelsen af spørgsmål 1 - 3?
 - (b) give brugbare forklaringsmodeller for traditionsskiftet?

1.5.2 Teser

Efter den første gennemlæsning af sekundær litteratur, gjorde vi os selvfølgelig nogle tanker omkring spørgsmålene. Disse tanker og formodede svar har vi formuleret i nedenstående teser. Tesserne afspejler selvfølgelig spørgsmålene, men skal ikke ses som dækkende for dem.

1. Den formalistiske tradition bar præg af manglende strenghed i metoden og af et pragmatisk syn på matematikken.
2. Den konceptuelle tradition var karakteriseret ved nye begreber og ved en mere stringent metode.
3. Koetsiers modificerede udgave af Lakatos' teori giver en god forklaringsmodel for udviklingen.

Kapitel 2

Matematikken omkring 1750

Formålet med dette kapitel er at beskrive den første af de to perioder, vi vil beskæftige os med. Dette for at belyse spørgsmålet om, hvad der karakteriserer den formalistiske tradition.

Belysningen starter med en bred beskrivelse af matematikkens ståsted i midten af 1700-tallet. Herefter trækkes Leonhard Euler frem som repræsentant for perioden. Som tidligere nævnt er Euler en meget central person i perioden. Repræsentative afsnit af Eulers "Introductio in analysin infinitorum" vil blive gennemgået som diskussionsgrundlag for belysning af vores spørgsmål. Det er således ikke vores hensigt at give et fuldstændigt billede af matematikken i midten af 1700-tallet, men snarere at skabe en ramme, som Euler kan relateres til.

2.1 Indledning

2.1.1 Matematikken i midten af 1700-tallet

I perioden fra midt i 1500-tallet til slutningen af 1600-tallet gennemgik matematikken som videnskab en rivende udvikling, der på en række områder har været bestemmende, for dens status i dag. For at forstå den videre udvikling, er det vigtigt at se 1700-tallets matematik som et forsøg på i første omgang at "fordøje" denne nytænkning, og dernæst — om muligt — videreudvikle teorierne.

Udbredelsen af matematikken, og det antal mennesker, der beskæftigede sig med matematik, steg markant op gennem 1600-tallet. Dels

som følge af det generelt stigende uddannelsesniveau, der bl.a. førte til oprettelsen af en række forskningsakademier i datidens ledende europæiske lande (Italien, Frankrig, England, nuværende Tyskland, Rusland, m.fl.), og dels genereret af muligheden for at delagtiggøre flere i sine tanker og ideer v.h.a. bogtrykkerkunstens fremskridt.

Matematikkens beskæftigelsesområde blev udvidet ganske voldsomt. Den tidligere meget ensidige fokusering på Euklidisk geometri, blev gradvist afløst af en bred interesse for nye felter, f.eks. projektiv og analytisk geometri, sandsynlighedsregning, og på det mere generelle plan funktionsbegrebet, introduceret af John Bernoulli i 1718. Den bredere fokusering medførte en fundamental ombytning af geometriens og algebraens rolle i matematikken. Mens geometrien tidligere var det bærende fundament i al matematisk tænkning, overtog algebraen nu denne position, og henviste geometriens rolle til blot at være konfirmering af algebraens resultater. Dels var (og er) algebraen langt mere bredt anvendelig, dels viste den sig også geometrien overlegen i løsning af geometriske problemer.

Den hastige udvikling medførte også, at en række nye begreber kom til at dominere den matematiske verden. Det gammelkendte talbegreb, der kun omfattede de positive, rationale tal, blev udvidet til også at omfatte de negative og de irrationale tal, og med de komplekse tals fremkomst var talbegrebet helt ændret. Udover talbegrebets ændrede betydning, gennemtvang fremkomsten af integral- og differentialregningen i denne periode en renæssance for en meget ømtålelig matematisk disciplin; regning med uendelig små og uendelig store størrelser; infinitesimaler.

Det langt fra intuitivt klare indhold i mange af de nye begreber antyder den nok vigtigste ændring, matematikken undergik: *Udgangspunktet* for matematisk virksomhed skiftede karakter. Tidligere havde al matematik været forsøg på, at regne med og systematisere "virkeligheden", og havde derfor altid en reel, intuitivt klar forbindelse med virkelige forhold. Mange af de nye begreber umuliggjorde en fastholdelse af dette fundament, som det eneste acceptable. Betegnelsen imaginære tal om den tilføjelse til de reelle tal, der er indholdet i det komplekse talbegreb, siger direkte, at der er tale om noget ikke-virkeligt, konstrueret matematik. Og hvad er den umiddelbare betydning af integralregningens sum af uendelig mange uendelig små arealstykker? Uendelig stort, fordi der er uendelig mange stykker? Eller uendelig småt, fordi alle stykkerne er uendelig små? Brug af matematik omkring år 1700 lå på et abstraktionsniveau, der var milevidt fra udgangspunktet blot 150 år forinden.

2.1.2 Matematikkens problemer i 1700-tallet

Så vidt, så godt. Man havde gradvist accepteret brugen af de nye begreber, først modstræbende og senere passivt. På trods af deres manglende intuitive indhold viste de sig uhyre anvendelige, efterhånden som man blev fortrolig med at regne med dem. Desuden var den gammelkendte teoriforståelse inkorporeret som en delmængde af den nye, og der var således snarere tale om en udvidelse, end om en erstatning. Men de nye begreber gav også anledning til en lang række diskussioner om problemerne ved at verificere påstandene og anvende resultaterne.

Teoriudviklingen var afgørende ændret. Idealet fra de gamle grækere var en deduktiv bevisførelse, hvor man ud fra en række ubeviste grundantagelser og klart definerede begreber, udleder lovmæssigheder gældende i mere specielle tilfælde. Grundantagelserne er sande, fordi alle intuitivt kan se, at "sådan er det". Idealet var stadig det samme, men praksis var afgørende ændret. Man gennemregnede en masse eksempler, og gav de fornuftige resultater, inducerede man sig frem til generelt gyldige lovmæssigheder. Denne induktive metode var en naturlig konsekvens af de mange intuitivt uforståelige nyskabelser, hvorom det var vanskeligt at vise tilbage til nogle selvindlysende grundantagelser.

[...]når de introducerede begreber, der ikke længere idealiserede umiddelbar erfaring, som de irrationelle, negative og komplekse tal og differentialer og integraler, manglede de at indse, at disse begreber var af anderledes karakter, og de erkendte derfor heller ikke, at den aksiomatiske udvikling krævede et andet grundlag end selvindlysende sandheder.¹

Men også de mange tydeligt anvendelige resultater var med til, om ikke at skabe, så i det mindste at legitimere den induktive metode. Så længe matematikken var produktiv og resultaterne brugbare, var der intet incitament til at beskæftige sig med grundlagsproblemerne.

¹Kline, s. 393-94

2.2 Leonhard Euler som eksempel på matematikken i 1700-tallet

I dette afsnit gennemgås og kommenteres udvalgte kapitler af Eulers "Introduction to analysis of the infinite" (her kaldet "Introductio"). Men først skal Leonhard Euler og hans værk præsenteres, hvilket vi har valgt at gøre ved hjælp af Klines fremstilling.²

2.2.1 Hvorfor Euler?

Hvis man vil beskrive matematikken i midten af 1700-tallet er Leonhard Euler (1707 - 83) svær at komme uden om. Han var uden tvivl det århundredes mest fremtrædende og produktive matematiker. Han blev født nær Basel, og afsluttede sin uddannelse på universitetet i denne by i en alder af kun femten år. Allerede som attenårig begyndte han at publicere, og vandt en pris fra det franske naturvidenskabelige akademi. Senere blev han professor ved St. Petersborgs akademi og arbejdede desuden i Berlin fra 1741-66, hvor han blandt andet udgav "Introductio". Han gav forelæsninger, samt arbejdede med mere praktiske problemstillinger som f.eks. sikring og design af kanaler og vandværker.

I 1766 vendte han tilbage til Rusland, hvor hans allerede meget svækkede syn forsvandt helt. De sidste sytten år af hans liv var han fuldstændig blind. Hans gode hukommelse gjorde det dog muligt for ham at fortsætte sit arbejde.

Euler opdagede ikke nogle nye områder af matematikken, men kom med bemærkelsesværdig mange nye resultater indenfor de givne rammer.

Hovedværker³:

"Introductio in Analysin Infinitorum"(1748)

"Institutiones Calculi Differentialis"(1755)

"Institutiones Calculi Integralis"(1768 - 70)

²Ibid. s. 401-403

³Ibid. s. 402

2.2.2 Hvorfor "Introductio"?

Vi har valgt "Introductio" som repræsentant for Euler, og dermed som repræsentant for perioden. Værket er interessant fordi det gav grundlaget for analysen, herunder en række metoder, begreber og symboler, som hurtigt blev accepteret og optaget af samtiden, og hvoraf mange stadig benyttes i vor tid. Før Euler havde matematikken stort set to retninger: den geometriske og den algebraiske, men efter "Introductio" kan man tale om en selvstændig analytisk retning. Denne frigørelse havde bla. konsekvenser for infinitesimal- og funktionsbegrebet, da disse indtil da havde været formuleret og fortolket geometrisk. Om værket kan yderligere siges, at det er en lærebog i to bind hvori funktionsbegrebet er det helt centrale. Første bind starter med en definition af funktionsbegrebet. Herefter gives en grundig gennemgang af, hvorledes funktioner kan transformeres, og til sidst behandles uendelige rækker, herunder rækkeudvikling af trigonometriske funktioner. Andet bind omhandler kurver, og giver en meget omfattende analyse af disse. Eulers formål med værket er, som det fremgår af hans indledning, at give de studerende en større forståelse for analysens grundlag. Herunder især discipliner, der involverer de uendeligt små og store størrelser, da de studerende ifølge Euler

[...]entertain strange ideas about the concept of the infinite, which they must try to use. ⁴

2.2.3 Indledning til gennemgang af udvalgte originaltekster

De kapitler fra "Introductio" som i det følgende skal gennemgås, er udvalgt ud fra ønsket om at beskrive Eulers matematiske metode, hvilket vi vil gøre på følgende måde:

Som indledning beskrives med få ord hvad det pågældende kapitel indeholder, samt hvad der i forhold til problemstillingen er interessant. Herefter følger en gennemgang af teksten, og endeligt vil de interessante afsnit blive analyseret og kommenteret.

De afsnit, der således skal analyseres og kommenteres, vil blive prioriteret højt i gennemgangen, og denne må derfor ikke overalt opfattes som

⁴Euler, bind 1, indledning s. V

et billede på Eulers prioritering. I de tilfælde, hvor hans prioriteringer netop er det interessante, vil vi tillade os at analysere under henvisning til originalteksten.

Analysen vil bestå i "oversættelser" til moderne notation med henblik på at klargøre, hvor det henholdsvis går godt og skidt uden det moderne begrebsapparat. Desuden vil der være tale om at fremhæve manglen på begreber og beviser, samt hvorledes disse influerer på resultaterne. Kommentarerne vil gives med et mere overordnet perspektiv, for at finde et udtryk for Eulers videnskabssyn, hvilket vi mener at kunne aflæse af hans prioriteringer.

2.3 Algebraens fundamentalsætning og middelværdisætningen

I kapitlet "Om Transformation af Funktioner" ⁵, der i det følgende skal gennemgås og kommenteres, beskriver Euler forskellige metoder til omformning af funktioner. Herunder argumenterer han sig frem til algebraens fundamentalsætning ved hjælp af middelværdisætningen. Dette benytter han som grundlag for en gennemgang af reglerne for stambrøksdekomponering.

Kapitlet er specielt valgt ud, fordi fremlægningsstilen kan sammenlignes med Bolzanos bevis for samme sætninger.

2.3.1 Gennemgang

Indledende pointerer Euler fordelene i at kunne transformere en funktion alt efter hvad der er mest praktisk i den givne situation. Omskrivning og substitution nævnes som de to mulige metoder.

Herefter går han nærmere ind i faktorisering af polynomier.

Efter at have konstateret, at et andengradspolynomium har to lineære faktorer og et tredjegradspolynomium tre lineære faktorer generaliserer han til, at et n 'te gradspolynomium må have n lineære faktorer. Han oplyser, at disse findes ved at finde rødder, der enten kan være reelle eller komplekse. Hvis der er komplekse rødder, er antallet af disse lige.

⁵Euler, bind 1, kap. 2.

Det vises nu, at et konjugeret par af komplekse lineære faktorer kan skrives som et reelt andengradpolynomium. Beviset består i et gennemregnet eksempel, hvor det ses, at et polynomium med fire komplekse rødder kan skrives som et produkt af to reelle kvadratiske faktorer. Efter dette generaliseres:

Lige meget hvor mange komplekse lineære faktorer et polynomie Z af z har, kan de altid parres på en sådan måde, at produktet af parrene er reelt.

Da antallet af komplekse rødder altid er lige — lad det være $2n$ — er det klart, at produktet af alle disse faktorer er reelt. Hvis der kun er to komplekse rødder, er produktet selvfølgelig reelt, og hvis der er fire komplekse faktorer kan produktet af alle fire, som vi har set, udtrykkes som et produkt af to reelle kvadratiske faktorer af formen $fz^2 + gz + h$. Dog er den samme bevismetode ikke holdbar for højere potenser. Ikke desto mindre er der ingen tvivl om, at den samme egenskab gælder for ethvert antal af komplekse faktorer; således kan n reelle kvadratiske faktorer introduceres, istedet for $2n$ komplekse lineære faktorer. Hermed kan enhver polynomiell funktion af z udtrykkes som et produkt af reelle faktorer, enten lineære eller kvadratiske. Det indrømmes at dette ikke er blevet bevist med komplet strengthed. Dog vil sandheden i påstanden blive bestyrket [corroborated] i det følgende, hvor funktioner af formen:

$$a + bz^n, a + bz^n + cz^{2n}, a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} \text{ osv.}$$

faktisk vil blive opløst i sådanne reelle kvadratiske faktorer.

6

Da han således konstaterer, at han ikke uden videre kan generalisere ud fra det ovenstående, benytter han i det efterfølgende middelværdisætningen, der fremsættes som følger:

Hvis den polynomielle funktion Z tager værdien A når $z = a$ og tager værdien B når $z = b$, så er der en værdi af z mellem

⁶Ibid. s. 21

a og b, for hvilken funktionen Z tager en vilkårlig bestemt værdi mellem A og B .

Da Z er en enkeltværdifunktion af z , er der for enhver reel værdi af z en reel værdi af Z . Så i det første tilfælde hvor $z = a$, har Z værdien A , og i det andet tilfælde hvor $z = b$ har Z værdien B ; men funktionen kan ikke gå fra A til B uden at antage alle de mellemliggende værdier. Hvis ligningen $Z - A = 0$ har en reel rod, og der også koresponderer en reel rod til $Z - B = 0$, så har ligningen $Z - C = 0$ også en reel rod forudsat at C ligger mellem A og B . Hvis derfor udtrykket $Z - A$ og $Z - B$ hver har en reel lineær faktor, så har ethvert udtryk $Z - C$ også en reel lineær faktor når C ligger mellem A og B .⁷

Med middelværdisætningen til hjælp kan Euler nu vise, at en funktion med en ulige eksponent altid vil have mindst en reel lineær faktor: En funktion af formen

$$Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \dots$$

vil, når $z = \infty$ og $z = -\infty$, give funktionsværdierne $Z = \infty^{2n+1} = \infty$ og $Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$, da kun det første led vil have betydning.

Da således $Z - \infty$ og $Z + \infty$ har reelle lineære rødder, vil $Z - C$ også have en reel lineær rod forudsat at $-\infty < C < \infty$. Derfor vil Z mindst have en reel lineær faktor $z - c$.

Herefter viser Euler, at Z kan have tre, fem eller et hvilket som helst ulige antal lineære faktorer, hvilket fører ham direkte til det resultat, at antallet af komplekse rødder altid vil være lige. Endelig benytter Euler dette til systematisk at gennemgå reglerne for stambrøksdekomponering i alle tænkelige tilfælde.

2.3.2 Kommentarer

Det første der slog os med hensyn til denne tekst var selve det emne den tager sit udgangspunkt i, nemlig omformning af funktioner. Dette

⁷Ibid. s. 21-22

udgangspunkt er i overensstemmelse med den centrale placering matematikkens praktiske aspekter havde i almindelighed. Det er derfor ikke mærkeligt, at også lærebøger sætter anvendelsen i centrum. Hvis man sammenligner med nutiden, er et sådant pragmatisk orienteret udgangspunkt for et kapitel i en analysebog utænkelig. Her ville beviset spille den centrale rolle, og det praktiske være henlagt til erfaringer ved opgaveregningen.

Som det fremgår af teksten lykkes det ikke for Euler, at vise algebraens fundamentalsætning, hvilket han også selv opmærksom på. I stedet vil han bestyrke den gennem middelværdisætningen, som han mener at kunne vise. Det er imidlertid en forudsætning for at vise middelværdisætningen, at man har den moderne talforståelse til sin rådighed. Euler har ikke dette begreb og hans bevis bygger derfor på datidens intuitive-geometriske forståelse.

Euler sikrer sig at funktionen Z er en polynomiell enkeltværdifunktion af z . Hermed har han, at der for enhver reel værdi af z findes en reel værdi Z . Udfra disse krav slutter han sig til middelværdisætningen. Kravet om at Z skal være polynomiell sættes formentlig fordi Euler ved, at den til Z svarende kurve da vil være sammenhængende. Herved har han sikret sig kontinuitet gennem geometriske overvejelser. Hvad han mangler er derfor dels at vise, at polynomielle funktioner er kontinuerlige, og dels at vise middelværdisætningen.

En anden interessant ting at bemærke er, at Euler regner med uendelige størrelser, som var det endelige tal. Dette ses i udtrykkene $Z \pm \infty$, der er ukorekte set fra en moderne synsvinkel. I en moderne formulering af samme påstand, ville man benytte sig af grænseværdibegrebet:

Hvis Z er kontinuert og $Z \rightarrow \pm\infty$ for $z \rightarrow \pm\infty$, da antager Z alle værdier mellem $\pm\infty$, og har hermed mindst en rod.

2.4 Eulers manipulering med uendelige rækker

I dette afsnit gennemgås: "Eksponentiel- og logaritmefunktioner udtrykt gennem rækker".⁸

Euler vil i dette afsnit komme frem til rækker for henholdsvis b^z ,

⁸Euler, bind 1, kap. 7

$\log(1+x)$ og specialtilfældet e^x , med henblik på approksimation. Gennemgangen af dette kapitel skal illustrere Eulers ufuldstændige konvergensbegreb, og hans, på trods af dette, gode resultater. Desuden vil hans brug af uendeligt små og store størrelser blive fremhævet.

2.4.1 Gennemgang

Som grundlag for de videre overvejelser fastslår Euler først, at hvis ω er en uendelig lille størrelse, så gælder:

$$a^\omega = 1 + k\omega \quad (2.1)$$

Og hvis a er basis for logaritmen ($\log$) så:

$$\omega = \log(1 + k\omega) \quad (2.2)$$

Disse udtryk fremkommer gennem følgende overvejelser omkring uendeligt små størrelser:

Da $a^0 = 1$, vokser selve værdien når eksponenten vokser, forudsat at a er større end 1. Det følger, at hvis eksponenten er uendelig lille og positiv, så vil værdien også overstige 1 med en uendelig lille størrelse. Lad ω være et uendeligt lille tal, eller en brøk så lille, at selvom den ikke er lig med 0, vil det stadig gælde, at $a^\omega = 1 + \psi$, hvor ψ også er et uendeligt lille tal. Fra det foregående kapitel ved vi, at hvis ψ ikke var uendelig lille så ville ω heller ikke være det. Det følger, at $\psi = \omega$, eller $\psi > \omega$, eller $\psi < \omega$. Hvilken af disse der er sand, afhænger af værdien af a , som vi endnu ikke kender, så vi sætter $\psi = k\omega$. Så har vi $\omega = 1 + k\omega$, og med a som basis for logaritmen, har vi $\omega = \log(1 + k\omega)$.⁹

Herefter benytter Euler (2.2) samt tidligere bestemte værdier til at bestemme k , for $a = 10$. Værdien bliver 2.30258, hvilket senere benyttes til at tjekke rækken for $\log(1+x)$.

Nu findes rækken for eksponentialfunktionen b^x :

⁹Euler, bind 1, s. 92

Ved at opløfte ligning (2.1) til j 'te potens, fås udtrykket $a^{j\omega} = (1 + k\omega)^j$, der ved hjælp af binomialformlen omskrives til:

$$a^z = (1 + \frac{kz}{j})^j = \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} (\frac{kz}{j})^n = \quad (2.3)$$

$$1 + \sum_{n=1}^j \frac{j(j-1)(j-2)\dots(j-n+1)}{n!} (\frac{kz}{j})^n$$

$$1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(j-1)}{1 \cdot 2j}k^2z^2 +$$

$$\frac{1(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2j \cdot 3j}k^3z^3 + \frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1 \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j}k^4z^4 + \dots$$

hvor $z = j\omega$ er et endeligt tal hvilket medfører at j er uendelig stor, da $j = \frac{z}{\omega}$.

Herefter forkortes udtryk (2.3) til følgende:

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (2.4)$$

Dette gøres ud fra overvejelserne:

Da j er uendelig stor, $\frac{j-1}{j} = 1$, og jo større tal der substitueres for j , jo tættere kommer værdien af brøken $\frac{j-1}{j}$ til 1. Derfor, hvis j er et tal større end ethvert tænkeligt tal, så er $\frac{j-1}{j}$ ligmed 1. Af samme grund er $\frac{j-2}{j} = 1$, $\frac{j-3}{j} = 1$, osv. Det følger at $\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}$, $\frac{j-2}{3j} = \frac{1}{3}$, $\frac{j-3}{4j} = \frac{1}{4}$ osv.¹⁰

Ved nu at substituere $b^z = a^{nz}$ i (2.3), hvor a er basis for logaritmen så $\log b = n$, fås:

$$b^z = 1 + \frac{kz}{1}\log b + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2}(\log b)^2 + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(\log b)^3 + \frac{k^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(\log b)^4 + \dots$$

Nu findes rækken for $\log(1 + x)$:

Først gøres antagelsen:

$$(1 + k\omega)^j = 1 + x \quad (2.5)$$

¹⁰Ibid. s. 93-94

og fra ligning (2.2) fås $j\omega = \log(1 + k\omega)^j$. Dette giver tilsammen $\log(1 + x) = j\omega$, hvor $j\omega = z$ er endelig.

Ved passende omskrivninger opnås udtrykket:

$$\log(1 + x) = \frac{j}{k}(1 + x)^{\frac{1}{j}} - \frac{j}{k}$$

Og ved hjælp af binomialformlen:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{\frac{1}{j}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\frac{1}{j}!}{n!(\frac{1}{j} - n)!} k^n z^n = \\ &1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1(j-1)(2j-1)\dots(nj-1)}{j^n n!} k^n z^n = \\ &1 + \frac{1}{j}x - \frac{1(j-1)}{j \cdot 2j}x^2 + \\ &\frac{1(j-1)(2j-1)}{j \cdot 2j \cdot 3j}x^3 - \frac{1(j-1)(2j-2)(3j-1)}{j \cdot 2j \cdot 3j \cdot 4j}x^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Da j er uendelig stor, forkortes dette efter samme overvejelser som til ligning (2.4). Herefter ganges med j og vi har:

$$j(1 + x)^{\frac{1}{j}} = j + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (2.7)$$

Ved nu at indsætte (2.7) i (2.6) opnås det ønskede resultat:

$$\log(1 + x) = \frac{1}{k} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \quad (2.8)$$

Ved at sætte $1 + x = a$ og $\log a = 1$ fås følgende udtryk for k :

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \dots$$

Euler undersøger nu resultatet fra (2.8) vha. den tidligere fundne værdi; $k = 2.30258$, når $a = 10$.

Ved indsættelse har vi:

$$k = 2.30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \dots \quad (2.9)$$

Til dette resultat bemærker Euler:

[...]det er vanskeligt at se hvordan dette kan lade sig gøre, da leddene i denne række er stadigt voksende, og summen af adskillige led ikke synes at nærme sig nogen grænse. Vi vil snart have et svar på dette paradoks.¹¹

Euler "løser" paradokset på følgende måde:

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$$

Han sætter nu:

$$\frac{1+x}{1-x} = a \text{ dvs. } x = \frac{a-1}{a+1} \quad (2.10)$$

Nu kan k udtrykkes som:

$$k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \dots\right)$$

og for $a = 10$ har vi:

$$k = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + \dots\right)$$

Med dette resultat er Euler tilfreds. Han skriver:

... leddene i denne række aftager på fornuftig vis, således at en tilfredsstillende approksimation for k hurtigt kan opnås.

¹²

Endeligt behandler Euler tilfældet $k = 1 \Leftrightarrow a = e$, og viser ved hjælp af eksempler, at han nu kan approksimere logaritmen til naturlige tal.

¹¹Ibid. s. 96

¹²Ibid. s. 96

2.4.2 Kommentarer

For at tydeliggøre hvor Euler mangler begreber, samt hvor dette er af betydning for resultatet, vil vi i det følgende så vidt det er muligt give moderne argumenter for Eulers udregninger.

Euler benytter indirekte grænseværdibegrebet, når han i det første afsnit regner med uendeligt små størrelser, og han når da også til nogle korrekte udtryk som udgangspunkt for kapitlet. Set ud fra et moderne synspunkt, kan han dog ikke give et tilfredsstillende argument for holdbarheden af sin approksimation $a^\omega = 1 + k\omega$, hvor ω er en uendelig lille størrelse. En moderne begrundelse for, at denne approximation er fornuftig, kunne se ud som følger:

$$\begin{aligned} a^z &= e^{z \ln(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \ln(a))^n}{n!} = 1 + \frac{z \ln(a)}{1!} + \frac{(z \ln(a))^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + z(\ln(a)) + \left(\frac{z(\ln(a))^2}{2!} + \frac{z^2(\ln(a))^3}{3!} + \dots \right) \\ &= 1 + z(\ln(a)) + O(z^2) \end{aligned}$$

Dvs. $a^z = 1 + z(\ln(a))$ for $z \rightarrow 0$. Sættes $k = \ln(a)$ har vi approksimationen $a^z = 1 + kz$ for $z \rightarrow 0$.

Dette svarer til Eulers formel (2.1) hvor ω er uendeligt lille, og da $z(\ln(a))$ bliver uendelig lille når z er uendelig lille, er $a^\omega = 1 + \psi$ ligeledes retfærdiggjort.

Det næste punkt, der kræver en kommentar er selve manipuleringen med de uendelige rækker. Det første der bemærkes her er, at Euler ikke skelner mellem endelige og uendelige rækker. Han benytter således den endelige binomialformel i formel 2.3, blot med j som et uendeligt stort tal. Dette er helt analogt til hvad vi i forgående kommentar bemærkede; at Euler regner med uendelige tal som om de var endelige.

Det næste, der skal tages op til overvejelse, er Eulers indirekte konvergensovervejelser. Moderne sagt ønsker han at vise, at (2.3) konvergerer mod (2.4) altså i moderne notation:

$$a^z = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} \frac{(kz)^n}{j^n} =$$

$$1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Vi ser nu på det fjerde led:

$$\binom{j}{3} \frac{(kz)^3}{j^3} = \frac{(j-2)(j-1)}{3j \cdot 2j} (kz)^3$$

og finder grænseværdien for $j \rightarrow \infty$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(j-2)(j-1)}{3j \cdot 2j} (kz)^3$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{2}{j})(1 - \frac{1}{j})}{3!} (kz)^3 = \frac{1}{3!} (kz)^3$$

— som er fjerde led i (2.4). Det samme kan vises om de andre led.

Euler kommer til samme resultat ved at gøre sig nogle overvejelser omkring uendeligt store størrelses dominans i forhold til endelige tal. Han argumenterer således:

$$\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}$$

når j er uendelig stor, hvor vi ville sige:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j-1}{2j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{j}}{2} = \frac{1}{2}$$

Således kan man påstå, at Euler har nogle indirekte konvergensovervejelser, hvilket i dette tilfælde er tilstrækkeligt til at opnå et resultat. Efter således at have vist at leddene i rækken (2.3) konvergerer mod leddene i rækken (2.4) når j går mod uendelig, og da (2.4) konvergerer, mener Euler at have bevis nok for, at rækken (2.3) konvergerer. Imidlertid er det ingen garanti for konvergens at de enkelte led i rækken konvergerer. Vi må vise, at leddene hver for sig domineres af leddene i

den konvergente række (2.4), dvs. ved majorantkriteriet: Det n 'te led i rækken (2.3) er mindre end n 'te led i rækken (2.4), dvs:

$$\frac{1(1 - \frac{1}{j})(1 - \frac{2}{j})\dots(1 - \frac{n-1}{j})}{n!} < \frac{1}{n!}$$

hvilket gælder, da j er positiv.

For Euler opstår "paradokset", da han efterprøver udtrykket (2.8):

$$\log(1+x) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} =$$

$$\frac{1}{k} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

med værdien $x = 9$, der ligger udenfor rækkens konvergensinterval nemlig $-1 < x \leq 1$ (se nedenfor). Euler får således en divergent række som udtryk for $\log(10)$. At Euler kalder denne fejl for et paradoks, viser tydeligt, at han ikke har et fuldstændigt konvergensbegreb. Han fastholder i overensstemmelse med datidens ukritiske brug af uendelige rækker, at rækken skal give mening.

Euler mener at få løst paradokset, når han efterfølgende manipulerer med udtrykket således at x automatisk vil ligge indenfor konvergensintervallet (2.10). Han får således indirekte skabt et konvergensinterval, hvilket vi ikke vil kalde en løsning på paradokset, idet han ikke benytter det fundne til at forklare ovenstående uoverensstemmelse.

Rækkens (2.8) begrænsede konvergensinterval opstår da Euler i (2.6) rækkeudvikler udtrykket $(1+x)^{\frac{1}{j}}$ ved hjælp af binomialrækken. Vi finder konvergensradius:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+2} 1(j-1)(2j-1)\dots((n+1)j-1)j^n n! x^n + 1}{(-1)^{n+1} 1(j-1)(2j-1)\dots(nj-1)j^{n+1}(n+1)!} \right| =$$

$$\left| \frac{((n+1)j-1)x}{jn} \right| = \left| \frac{(n+1 - \frac{1}{j})x}{n} \right| \rightarrow |x|, \text{ for } n \rightarrow \infty$$

Det vil sige at konvergensradius er $|x| < 1$. Dette kunne Euler af gode grunde ikke uden et grænseværdi- og konvergensbegreb.

En helt anden ting man må undres over, er Eulers generelt manglende argumentation for korrektheden i hans metode. Her er ikke nødvendigvis tale om deciderede fejl, men tages det i betragtning, at her er tale

om en lærebog, virker denne mangel påfaldende. Det i denne kommentar først fremtrukne, er et eksempel på dette.

Et andet eksempel er hvor Euler sætter $(1 + k\omega)^j$ lig med $1 + x$ i ligning (2.5), under forudsætning af, at $z = j\omega$ er endelig uden, at argumentere for, hvorfor dette er korrekt. En moderne argumentation er som følger:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (1 + k\omega)^j = \lim_{j \rightarrow \infty} (1 + \frac{kz}{j})^j = e^{(kz)} = a^z$$

hvor a^z kan rækkeudvikles:

$$a^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kz)^n}{n!} = 1 + \frac{kz}{1!} + \frac{(kz)^2}{2!} + \dots = 1 + x$$

hvor:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kz)^n}{n!}$$

og hvis z er endelig, da konvergerer summen, og giver således et endeligt x .

2.5 Eulers manipulering med uendelige størrelser

I dette afsnit vil vi give en kort gennemgang af: "Om undersøgelser af grene der går mod uendelig".¹³ Eulers hensigt er at give et overblik over algebraiske¹⁴ udtryks opførsel i det uendelige. Afsnittet skal specielt illustrere Eulers korrekte manipulering med uendelige størrelser, hvilket gør det muligt for ham at overskue funktioners opførsel i det uendelige, på trods af det manglende grænseværdibegreb.

2.5.1 Gennemgang

Som basis for kapitlet, giver Euler en beskrivelse af den egenskab, han vil undersøge, nemlig at en gren går mod uendelig.

¹³Euler, bind 2, kap. 7

¹⁴Euler, bind 1, kap.1

Herefter afgrænser Euler sit virkefelt til udelukkende at være algebraiske udtryk af to variable x og y i grad n . For overskuelighedens skyld opskriver Euler udtrykket som:

$$P + Q + R + S + T + \dots = 0 \quad (2.11)$$

hvor P er alle led af grad n , Q er alle led af grad $n - 1$, osv. Euler betragter nu P , der har formen:

$$\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \delta y^{n-3}x^3 + \dots \xi x^n$$

For at kunne analysere sådanne udtryk konstaterer han i første omgang, at de kan omskrives vha. algebraens fundamentalsætning, hvilket vil sige n lineære faktorer af formen $(Ay + Bx)$, som enten er reelle eller komplekse.

P -delen af det samlede udtryk (2.11) kan udtrykkes som produktet af ovenstående lineære faktorer. Hvis der er komplekse rødder, optræder de i konjugerede par, og kan skrives på formen:

$$A^2y^2 - 2ABxy \cos \phi + B^2x^2$$

Herefter gør Euler sig følgende overvejelser:

Enhver faktor af denne form er lig ∞^2 når x og y sættes lig ∞ , da $2AB \cos \phi$ altid er mindre end summen af de to andre $A^2y^2 + B^2x^2$, fordi A og B ikke er nul. Det følger heraf, at faktoren $A^2y^2 - 2ABxy \cos \phi + B^2x^2$ ikke kan være lig nul, eller et endeligt tal eller en uendelig størrelse, siden, når x eller y eller begge sættes lig med uendelig er faktoren lig med ∞^2 , som er uendeligt større end ∞ .¹⁵

Euler deler nu op i følgende tilfælde:

- (1) De tilfælde, hvor der udelukkende er komplekse rødder.
- (2) De tilfælde, hvor der findes reelle rødder.

(1) Kun komplekse rødder:

I dette tilfælde kan udtrykket P skrives som et produkt af $\frac{n}{2}$ af de førnævnte faktorer $A^2y^2 - 2ABxy \cos \phi + B^2x^2$

¹⁵Euler, bind 2, kap. 7, s. 104-105

Udtrykket bliver da lig ∞^n , når x og y bliver uendelige, og det kan ikke være lig en endelig størrelse, eller endda ∞^m hvor $m < n$. De andre dele af ligningen, i hvilke de variable x og y har lavere grad, kan ikke være lig med det første udtryk. Heraf følger det, at ligningen ikke holder, hvis x eller y eller dem begge bliver uendelige.¹⁶

Med ligningen mener Euler udtrykket (2.11), og med holde mener han at (2.11) aldrig kan opveje P , dvs. få samme uendelighedsgrad hvis x , y eller begge går mod uendeligt. Ud fra disse overvejelser konkluderer Euler, at enhver kurve hvis lignings højstegradsled ingen reelle rødder har, heller ikke vil have nogle grene der går mod uendelig, og det følger heraf, at kurverne er begrænsede, f.eks. cirkel eller ellipse, hvis vi betragter et andengradspolynomium.

(2) Der findes reelle rødder

I dette tilfælde betragter Euler fire undertilfælde:

- a) der er en reel rod
- b) der er to reelle rødder
- c) der er tre reelle rødder
- d) der er fire reelle rødder, hvorved metoden for de følgende situationer også er skitseret.

a) Hvis det højeste led P har en reel rod:

I dette tilfælde kan P omskrives til: $P = (ay - bx)M$, hvor M er en funktion af grad $n - 1$, som ikke har nogle lineære faktorer. Hvis x , y eller begge bliver uendelige, da bliver $M = \infty^{n-1}$ og Q ligeledes ∞^{n-1} , medens $R, S, \dots$ bliver uendelig i en mindre grad.

Det konkluderes, at udtrykket (2.11) holder, forudsat $ay - bx$ er lig en endelig størrelse eller forsvinder, således at kurven kan gå mod uendelig.

Euler antager nu, at $ay - bx = p$ er en endelig størrelse, og i det følgende undersøges dette tilfælde for x og y gående mod uendelig.

$$pM + Q + R + \dots = 0 \Leftrightarrow p = \frac{-Q - R - S \dots}{M}$$

Herefter ræsonnerer han:

Alle leddene R/M , S/M osv. forsvinder, når x og y bliver uendelige, så

¹⁶Ibid. s. 105

$p = -Q/M$, som er en funktion af grad nul, altså en konstant.

Den del af kurven, der går mod uendelig ($p = ax + by$), hvilket er ligningen for en ret linie, som hvis der fortsættes mod uendelig, falder sammen med kurven [altså en asymptote].

Idet kurven fortsættes i begge retninger, har den to grene der går mod uendelig, der falder sammen med asymptoten i begge retninger.

b) Hvis P har to reelle rødder:

I dette tilfælde kan P omskrives til $P = (ay - bx)(cy - dx)M$, hvor M er en homogen funktion i $(n - 2)$ 'grad.

Herunder er to muligheder:

— Første mulighed er, at rødderne er forskellige.

I dette tilfælde viser Euler, at vi har situationen fra a), blot med den forskel, at kurven har to forskellige asymptoter — dvs. fire grene der går mod uendelig. Eksempelvis giver andengradsligningen en hyperbel.

— Den anden mulighed er, at rødderne er ens.

Er dette tilfældet, kan P omskrives således: $P = (ay - bx)^2 M$

I dette tilfælde forsvinder leddene S/M , T/M osv. på samme måde som i tilfældet a). Det er altså leddene Q/M og R/M , der har betydning for kurvens opførsel, når x og y går mod uendeligt. Euler kommer efter passende omskrivninger frem til fire mulige situationer.

— polynomiets kurve har to grene, der går mod uendelig, og dens asymptoter er ikke rette linier, men parabler.

— kurven har to parallelle rette linier som asymptoter, dvs. fire grene, der går mod uendelig.

— kurven har ingen grene, der går mod uendelig.

— de første led Q/M og R/M er begge nul, og man må derfor overveje hvorledes de lavere led vil opføre sig. Under dette punkt er igen en række undertilfælde.

c) Hvis P har tre reelle rødder:

Her er der tre mulige situationer med forskellige konsekvenser for kurverne:

— alle tre rødder er forskellige. Dette giver tre gange den situation, hvor der kun var én reel rod (situation a)), og hermed seks grene der går mod uendelig.

— to af rødderne er ens. Dette er det samme som én gang situationen a) og én gang situationen b). Af dette fås to grene med rette linier som asymptoter, kombineret med en af mulighederne fra b).

— de tre rødder er ens. Dette tilfælde undersøges efter samme metode, som tilfældt med de to ens reelle rødder.

d) Hvis P har fire reelle rødder:

De fleste undertilfælde er kombinationer af nogle af de ovenstående tilfælde:

- tre ens og en forskellig fås ved kombination af a) og c).
- to ens fås ved at kombinere b) og to gange a).
- to gange to ens fås ved at kombinere b) med sig selv.

Det eneste nye tilfælde, der skal undersøges, er når de alle fire er ens.

Euler stopper den systematiske gennemgang efter de fire ens reelle rødder. Han afrunder med en bemærkning om, at metoden til fortsættelse nu må være tydeliggjort. Euler har hermed fuldført sin oversigt over, hvorledes objektet opfører sig i de givne situationer.

2.5.2 Kommentarer

Teksten er karakteristisk ved, at Euler tager et konkret objekt (polynomier i to variable af grad n) og en egenskab (grene der går mod uendelig), for derefter systematisk at gennemgå alle de tilfælde, der kan forekomme (ingen reelle rødder, en reell rod, to reelle rødder - ens og forskellige, tre...osv.). Således skabes et overblik over hvornår polynomiets kurve har grene, der går mod uendeligt, hvor mange der er, og hvilken form de har.

Som studerende i det 20. århundrede mangler vi hele den formelle opbygning, som vi er vant til, hvor man starter med en række definitioner, hvorfra man kan slutte sig frem til sætninger. Hvor det nu er sætningerne der er målet, er det for Euler tydeligvis de konkrete resultater der stiles mod.

Hvis man ser bort fra det manglende grænseværdibegreb, kan Euler ikke i dette afsnit klandres for at være ukorrekt. Selv om hans notation er forskellig fra den moderne, er det i praksis den samme argumentation, vi benytter os af idag.

Når Euler gør sig overvejelser omkring de reelle kvadratiske faktorerers udvikling i det uendelige, siger han eksempelvis at ∞^2 er uendeligt større end ∞ , hvilket fører til samme konklusion, som når vi idag siger $O(x^2) > O(x)$. Med andre ord; x^2 går hurtigere mod uendelig end x . Det samme gør sig gældende i afsnittet efter, hvor Euler argumenterer for at x^n dominerer x^m hvis $n > m$. Pga. det manglende grænseværdibegreb bruger han udtrykket lig med uendelig, hvor vi i dag siger går i mod. Dette medfører dog ikke nogle fejl.

Selvom Eulers *metode* og *begreber* set med nutidens øjne er mangelfulde er hans *resultater* altså ganske korrekte, og han får skabt et smukt overblik over polynomiers opførsel.

2.6 Diskussion

Vi har nu forsøgt at give et indblik i matematikkens ståsted i midten af 1700-tallet. Først generelt ved den brede historiske beskrivelse. Derefter specifikt ved gennemgangen af tre uddrag af Eulers "Introductio". Vi vil i dette afsnit ud fra det nuværende materiale give en karakteristik af den formalistiske tradition.

2.6.1 Matematikkens standpunkt

Eulers produktion var fantastisk, og han skabte masser af nye resultater. Hans værker spænder over store dele af den klassiske analyse, og som sagt har hans metode, begreber og notation mange paralleller til den moderne matematik. Eksempelvis med hensyn til infinitesimalregningen kan de overvejelser, han gør sig omkring funktioners udvikling i det uendelige, oversættes direkte til O -notation. Generelt kunne man rent håndværksmæssigt utroligt meget, og med det meget svage begrebsapparat til rådighed, er det imponerende, at de ikke begik flere fejl end tilfældet var. De gode resultater kan antyde, at de havde en intuitiv forståelse for endnu ikke definerede begreber som grænseværdi og kontinuitet. Med hensyn til Euler må dog tages det forbehold, at eventuelt mislykkede regninger sandsynligvis ikke vil optræde i hans lærebøger. En anden årsag til at det gik så godt er, at man som regel beskæftigede sig med meget fysikorienterede problemstillinger, hvilket medførte generelt "pæne" udtryk. Et eksempel på at de manglende grundlæggende begreber skaber problemer findes dog hvor han opfatter den divergent række på side 22 som et paradoks.

2.6.2 Den formalistiske traditions metode

Som vi beskrev i indledningen til dette kapitel, bærer denne tradition præg af den rivende udvikling med mange nye områder og begreber,

der var inden for matematikken. Traditionen har derfor nok i høj grad været kendetegnet ved en mangel på en generel metode, og alment anerkendte regler for udøvelse af matematikken. Vi vil dog alligevel her prøve at trække nogle af de fælles karaktertræk frem, der trods alt var i perioden. Dette vil vi gøre generelt for perioden med støtte fra forskellige historiske beskrivelser, og specielt for Euler ud fra ovenstående gennemgang.

Traditionens metode bærer i høj grad præg af, at datidens matematikere ikke var rene matematikere. De var som oftest samtidig fysikere eller en slags ingeniører. Eller sagt på en anden måde; matematikken producerede de som regel med henblik på at løse praktiske problemer med relation til konkrete opgaver. På den måde var kriterierne for "god matematik" eller målet for de matematiske arbejder givet som matematik, der kunne anvendes og fungerede i praksis. Man havde altså et pragmatiske syn på matematikken.

De to hovedproblemfelter i den formalistiske traditions metode var:

- 1) Manglende begreber og for løse definitioner på de eksisterende.
- 2) Manglende stringens i beviserne, eller direkte udeladelse af bevisførelse.

1) Begreber

Et væsentligt begreb udviklet i 1700-tallet er funktionsbegrebet. De første spæde tiltag til et funktionsbegreb var tæt knyttet til geometrien. Man beskæftigede sig med analytiske udtryk, og de kurver de dannede i et koordinatsystem. I starten af 1700-tallet opfattede man x og y som repræsenterende variable på de to akser i koordinatsystemet. Som tidligere nævnt optræder ordet funktion for første gang i denne sammenhæng hos Bernoulli i 1718. På den tid var en funktion uformelt defineret som et analytisk udtryk, indeholdende størrelser og konstanter, og havende en tilsvarende kurve. Der var altså stadig tale om en geometrisk fortolkning af begrebet. Det lå i den stadig uformelle og vage definition af begrebet, at funktionerne var "pæne". Hermed menes, at de var kontinuerte, integrable og vilkårligt ofte differentiable. Dette forklarer også, at man på daværende tidspunkt ikke anså det for nødvendigt at definere disse begreber selvstændigt. De grundlæggende begreber i analysen var algebraiske udtryk, kurver samt variable og konstante størrelser.

I modsætning til tidligere matematik, er funktionsbegrebet helt centralt i Eulers "Introductio", og det er her funktionen for første gang

får en præcis og selvstændig definition løst fra geometrien. I første kapitel af "Introductio" definer Euler en funktion således:

En funktion af en variabel størrelse er et analytisk udtryk komponeret på en hvilken som helst måde af denne variable størrelse og af tal eller konstante størrelser. ¹⁷

Med et analytisk udtryk mener Euler først og fremmest udtryk kombineret af operationerne: addition, subtraktion, multiplikation, division, potenser og rødder. Hertil kommer de transcendente funktioner: exponentialer, logaritmer, sinus og cosinus. ¹⁸ Udtrykket en variabel størrelse definerer han således:

En variabel størrelse er en, som er ubestemt eller universiel, og som kan antage enhver værdi.

Eulers funktionsbegreb omfatter i det væsentlige samme funktioner som det tidligere begreb. Hvad der gør det anderledes er, at det nu er løst fra kurvebegrebet, og at begrebet nu er blevet grundlæggende for analysen.

Men Eulers funktionsbegreb var dog stadig ufuldstændigt. Eksempelvis definerer han alle kurver som kan skrives i ét analytisk udtryk som kontinuerte, og troen på de generelt gyldige pæne egenskaber, som differentabilitet og integrabilitet for alle funktioner, samt at alle funktioner skulle kunne rækkeudvikles skabte naturligvis problemer.

Et andet nyt begreb var infinitesimalerne. Med hensyn til disse afspejler det pragmatiske matematiksyn sig tydeligt. Man definerede begreberne på en måde, så det var hensigtsmæssigt for problemløsningen. Som sagt var periodens metode kendetegnet ved en tro på algebraens generalitet. Med hensyn til infinitesimalerne, gav det sig udslag i ukritisk manipulation med uendelige rækker, og i det hele taget brugte infinitesimalerne som var de endelige størrelser. Fundamentet for infinitesimalregningen var mildt sagt skrøbeligt, og definitionerne var upræcise og forskelligartede. På trods heraf lærte man sig at regne med disse uendeligt store og små størrelser, og man nåede en lang række vigtige resultater: For eksempel fandt man meget præcise værdier for vigtige naturkonstanter

¹⁷Euler, bind 1, s. 3

¹⁸Lützen, s. 7

som π , e m.fl., og man fik tabellagt en lang række vigtige funktioner. Euler er et strålende eksempel på den pragmatiske anvendelse af infinitesimalerne. Som vi har set i vores gennemgang, opererer Euler med uendeligt store og små tal på en — for moderne matematikere — noget suspekt måde. Han opfatter infinitesimalerne som eksisterende i en absolut forstand, og han regner med disse som med reelle størrelser i de situationer, hvor man nu ville benytte grænseværdibegrebet. Euler definerer de uendeligt store tal som reelt eksisterende og større end alle angivelige tal, og de uendeligt små som værende (numerisk) mindre end alle positive tal. Men på trods af den suspekte metode får Euler eksempelvis udledt rækker for a^x og $\log(1 + x)$.

2) Manglende strengthed

Ikke kun eftertiden, men også samtiden, her iblandt Berkeley¹⁹, kritiserede den manglende strengthed i analysen. Berkeley kritiserede matematikerne for at være induktive frem for deduktive i deres metode. Herpå er Eulers "Om transformation af funktioner" og "Om undersøgelse af grene der går mod uendelig" skoleeksempler. Faktisk er hele opbygningen af "Introductio" induktiv: I modsætning til en moderne lærebog med det formelle skelet bygget op af definitioner, sætninger og beviser, tager Euler fat på konkrete objekter, og lader begreber og beviser være implicit.

Et andet kritikpunkt fra Berkeleys side var den manglende logik i — eller anden begrundelse for — de enkelte skridt i bevisførelsen. Især i Eulers "Eksponentiel og logaritmefunktioner udtrykt gennem rækker" optræder mange mystiske påhit, som måske er holdbare, men umiddelbart virker som grebet ud af den blå luft og i hvert fald for os kræver en yderligere argumentation. Under dette kritikpunkt hører også, at det var normalt accepteret, at benytte sig af adhoc-løsninger. Eulers måde at komme uden om sin "paradoksale" divergente række, er et eksempel herpå. At han efter denne adhoc-løsning, som består i at indføre passende bånd på x , ikke går tilbage og undersøger den inkonsistens, der tydeligvis er i hans teori, illustrerer tydeligt den manglende stringens i metoden. Det viser tydeligt at det var resultaterne og ikke metoden, han interesserede sig for.

¹⁹I 1734 udtaler Biskop Georg Berkeley, at den moderne analyses objekter, principper og slutninger ikke er mere bestemt fastlagt eller indlysende deduceret, end religiøse mysterier og trosspørgsmål. (Kline, s. 427)

Som et forsvar for datidens matematikere kunne man fremhæve, at matematikkens tætte tilknytning til de praktiske problemstillinger gjorde, at de matematiske objekter som regel var simple algebraiske udtryk så som polynomier og rationelle funktioner. De funktioner man arbejdede med "opførte sig pænt", hvilket i realiteten gav en afgrænsning af funktionsbegrebet. Man kom således i praksis sjældent ud i de problemer Berkeley, med sine krav om streng notation og bevisførelse, søgte at gardere sig mod.

2.7 Delkonklusion

Med ovenstående kapitel mener vi at have grundlag for, at give et svar på spørgsmålet om, hvad der karakteriserede den formalistiske tradition:

Vi kan konkludere, at den formalistiske tradition tydeligvis bar præg af manglende stringens i metoden og af et pragmatisk syn på det matematiske videnskabelige arbejde.

Den manglende strenghed i forhold til moderne metodologi bestod i grundtræk i manglende eller løst definerede begreber, og i manglende eller induktiv argumentation og bevisførelse.

Denne manglende stringens kan forklares ud fra følgende tre forhold:

- 1) Udviklingen og tilpasningen af begreber kunne ikke følge med den rivende strøm af ny matematik.
- 2) De intuitivt uforståelige nyskabelser gjorde det vanskeligt at fastholde idealet om, at kunne føre beviserne tilbage til selvindlysende sandheder.
- 3) Den pragmatiske holdning gjorde, at der med de mange nye og tydeligt anvendelige resultater, ikke var noget incitament til at bekymre sig om metodens stringens.

Den pragmatiske holdning gav sig udslag i en resultat-fikseret udøvelse af matematikken, og ofte i manglende interesse for teorierne bag resultaterne, når først disse var opnået. Et eksempel er Eulers ad hoc-løsning. Denne pragmatisme kan forklares ved følgende to forhold: 1) Matematikerne var ofte også fysikere eller ingeniører, og havde som sådan en masse praktiske problemstillinger at anvende matematikken på. Matematikken var altså mere et redskabsfag og mindre en selvstændig disciplin, end tilfældet er idag. Derfor var det resultaterne, og

ikke teorierne, der var i centrum. 2) Som vi har nævnt et par gange, skete der i denne periode store fremskridt inden for matematikken. Den nye teknik gav bestandigt nye resultater. Selvom man vidste at der var grundlæggende problemer, var det vanskeligt — om ikke dumt — ikke at være pragmatiker, men argumentere for at metoden var forkert og burde ændres, og herved bremse resultatstrømmen.

De kritiske røster, der var (blandt andet fra Berkeley), fik svar på tiltale, og nedenstående citat mener vi giver et godt billede, af den generelle holdning i perioden:

Det er ikke overraskende, at Euklid tager besværet med at bevise, at to cirkler der skærer hinanden, ikke har samme centrum og at summen af siderne i en trekant, der er indeholdt i en anden trekant, er mindre end den samme sum i den yderste af trekanten. Denne geometer [Euklid] var nødt til at overbevise de obsternasige sofister, der glorificerede enhver fornægtelse af de mest indlysende sandheder. Geometrien måtte derfor, ligesom logikken, hvile på formel ræsonneren for at kunne tilbagevise ordkløverne [...] Men situationen har ændret sig: alle overvejelser om, hvor langt man kan komme med sund fornuft, tjener kun til at skjule sandheden og bekymre læseren. Disse overvejelser ser man derfor bort fra nu om dage.²⁰

Denne holdning kan vi som moderne matematikere selvfølgelig ikke erklære os enige i, men på daværende tidspunkt var den både forståelig og rigtig. Havde Euler ikke taget skyklapperne på og arbejdet videre trods inkonsistenser og fejl, kan man sætte spørgsmålstegn ved om der overhoved, havde været en analyse for eftertiden at skabe strength i. Men problemer var der, og strength skulle der til for at løse dem. Denne proces vil vi beskrive i det næste kapitel.

²⁰Citat af Clairaut (1741), Christensen, s. 136

Kapitel 3

Matematikken i første halvdel af 1800-tallet

Vi har i vores projektrapport valgt først at fokusere på to forskellige perioder repræsenterende, to forskellige traditioner i den matematiske historie, for derefter at beskrive den udvikling, disse perioder udtrykker. Den første periode beskrev vi i kapitel 2 med Euler som en meget karakteristisk repræsentant. Den anden periode har vi valgt at beskrive gennem Bernard Bolzano (1781- 1848). Men i modsætning til Euler er Bolzano ikke et typisk eksempel fra den periode han repræsenterer. Dette er, som vi senere skal komme ind på, fordi han tidsmæssigt er placeret i brydningstiden mellem de to perioder, dvs. for tidligt i forhold til den tradition, han egentlig tilhører. For at kunne give et godt billede af den nye tradition løsreven fra den gamle, træder vi derfor et skridt forbi Bolzano i tidsregningen. Dette for at beskrive traditionen ud fra dens tyngdepunkt, og ved hjælp af nogle tidstypiske eksempler. Det er altså formålet med første del af dette kapitel, at give en generel karakteristisk af den nye tradition, så vi har et udviklingsniveau at forholde Bolzano til.

I anden del af kapitlet vil vi — efter en kort biografisk præsentation — gå over til, kun at beskæftige os med Bolzano. Dette vil vi gøre gennem hans artikel: "Rein analytischer Beveis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der gleichung liege." (1817), hvis lange titel vi for fremtiden vil referere til som "Rein analytischer Beveis".

Bolzos formål er at give et, efter egne kriterier, korrekt bevis for den

sætning, der giver navn til artiklen. Sætningen siger at enhver kontinuert kurve, med først positive og derefter negative ordinater (eller omvendt), nødvendigvis må skære x-aksen på et punkt mellem disse ordinater. Denne sætning vil vi kalde "Bolzanos sætning".¹ Gennemgangen af artiklen falder i to dele. Denne opdeling er en direkte følge af Bolzanos egen opdeling af teksten i et forord og det egentlige bevis. I forordet udtrykker Bolzano sin utilfredshed med samtidens bevismetoder, og nævner specielt to sætninger, som mangler fuldstændigt korrekte beviser. Den ene er Bolzanos sætning og den anden er:

*[...]at enhver algebraisk rational integralfunktion af een variabel størrelse, kan opdeles i reelle faktorer af første eller anden grad.*²

Denne sætning (algebraens fundamentalsætning) bygger på Bolzanos sætning, og kræver derfor denne bevist, før et strengt korrekt bevis kan gennemføres.

Bolzano giver en gennemgang og kritik af tidligere forsøg på at vise hans sætning. Han viser bevismetodernes uholdbarhed, og argumenterer for en ny videnskabelig metode, hvorunder nødvendigheden af mere strenghed i bevisførelsen, er det centrale. Efter således at have givet en række forskrifter for den gode bevismetode, går Bolzano, igang med at give sit eget bevis. En gennemgang og analyse af dette bevis vil være målet for tredje del af dette kapitel, der munder ud i en diskussion af Bolzanos metode, videnskabssyn og matematiske ståsted. Men nu først en beskrivelse af perioden generelt.

3.1 Generelt om matematikken i første halvdel af 1800 tallet

Som omtalt i foregående kapitel, var den ellers meget produktive matematik i 1700-tallet løbet ind i nogle problemer.

Funktionsbegrebet, som det blev formuleret af Euler, var godt nok korrekt i sin ordlyd, men indeholdt nogle underdefinitioner, der gav problemer. Her tænkes på, at man tillagde en variabel størrelse den

¹Inspireret af Apostol

²Bolzano, s. 159

egenskab, at den *skulle* kunne antage alle værdier³. Herved opstod der selvfølgelig problemer, når man talte om funktioner udenfor deres definitionsområde. Herudover tillagde man som nævnt funktioner alle mulige pæne egenskaber. Man antog f.eks., at alle funktioner kunne rækkeudvikles i potensrækker, uden at tage hensyn til konvergensintervallet, idet man opretholdt ovenfor nævnte krav til den variable størrelse. Herved opstod der, som vi har set i kapitel 2, paradokser og fejl i forbindelse med brugen af divergente rækker. Funktioner blev også automatisk tillagt egenskaberne differentabilitet og integrabilitet, hvilket selvsagt skabte problemer, ved benyttelse af funktioner uden disse egenskaber. Endeligt var det ganske simpelt uklart, hvad man egentlig mente med kontinuitet, differentierbarhed, integrabilitet mv.

Første halvdel af 1800-tallet er karakteristisk ved, at matematikerne udtrykker utilfredshed med den matematiske metode og analysens manglende grundlag. De prøver at løse ovennævnte problemer, ved at indføre nye begreber og definitioner, og ved at benytte sig af en langt strengere metode end i 1700 tallet.

Udover at få præciseret funktionsbegrebet, var det især grænseværdibegrebet, der manglede, for at løse datidens grundlæggende problemer. Introduktionen af grænseværdibegrebet smitter af på snart sagt alle områder af analysen. Med denne forståelse er der ikke langt til et moderne konvergensbegreb, der gør det muligt, at overskue brugen af uendelige rækker. Muligheden for en mere streng behandling af infinitesimaler åbnes, hvorved der dels kan gives et fundament for differential- og integralregningen, og dels en præcis formulering af kontinuitet.

De personer, der i 1800 tallet stod i centrum mht. indførsel af strenghed og nye definitioner af begreber, var Bolzano, Cauchy, Abel og Dirichlet. Senere blev deres ideer videreført af Weierstrass. Som Euler var det i 1700-tallet, må Cauchy siges at være den centrale skikkelse i denne periode. Vi vil derfor i det nedenstående koncentrere os om Cauchys begreber og definitioner, primært hentet fra "Cours d'Analyse algébrique" (1821).

I forbindelse med funktionsbegrebet, er den første gennemgribende ændring, at man går bort fra kravet om, at en funktion skal være givet ved et analytisk udtryk, og at en variabel skal kunne antage alle tænkelige værdier. Cauchy giver i "Cours d'Analyse" følgende definitioner af en variabel størrelse:

³Lützen, s. 9

Man kalder en størrelse, som man betragter som havende mange efter hinanden forskelligt antagede værdier, en variabel. ⁴

Cauchy giver herefter følgende definition på en funktion:

Når variable størrelser er sådan sammenknyttede, at man kan slutte sig til værdien af alle de andre, når værdien af en af dem er givet, da opfatter man sædvanligvis disse forskellige størrelser udtrykt ved hjælp af en af dem, som så kaldes den uafhængige variable, og de andre størrelser, der udtrykkes ved hjælp af den uafhængige variabel, kalder man funktioner af denne variabel. ⁵

Grænseværdibegrebet bliver således defineret af Cauchy:

Når værdierne, der successivt tilskrives en bestemt variabel, ubegrænset nærmer sig en bestemt værdi, så de til sidst kun afviger fra den bestemte værdi med så lidt, som man ønsker, så kaldes den bestemte værdi for grænsen af alle de andre.
6

Som beskrevet er grænseværdibegrebet en vital del af det nye begrebsapparat. Ovennævnte definition gjorde, at det ikke længere var nødvendigt, at opfatte infinitesimalerne som absolutte størrelser, som Euler gjorde. Cauchy giver ud fra grænseværdibegrebet følgende definition, der ikke tager stilling, til om der faktisk eksisterer uendelige små størrelser:

[...]en variabel størrelse bliver uendelig lille, når dens numeriske værdi aftager ubegrænset så den konvergerer mod grænsen nul. ⁷

⁴Cauchy i Kline s.950

⁵Ibid.

⁶Cauchy i Christensen, s. 168

⁷Ibid, s. 169

Videre benytter Cauchy sit grænseværdibegreb til at definere konvergens og divergens af uendelige rækker. En følge af størrelser (som også kan være funktioner)

$$u_0, u_1, u_2, \dots$$

kaldes ifølge Cauchy konvergent, hvis summen

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

nærmer sig en bestemt grænse. Hvis ikke, kaldes den divergent. Dette svarer helt til den moderne formulering af, at en uendelig række konvergerer, hvis den n 'te partialsum er konvergent.

Da Cauchy som en del af kravet om strenghed i analysen ikke tillader brugen af de divergente rækker, bliver grænseværdibegrebet gennem definitionen af kontinuitet betydende for hvilke matematiske objekter, der tillades. I forhold til Eulers tid, hvor de matematiske objekter blot var funktioner, der altid kunne rækkeudvikles, er der her sket en væsentlig indskrænkning.

Til slut vil vi præsentere Cauchys kontinuitetsbegreb, som også indirekte hviler på grænseværdibegrebet.

*Funktionen $f(x)$ vil være kontinuert med hensyn til x mellem de givne grænser, hvis der mellem disse grænser gælder, at en uendelig lille tilvækst i den variable altid medfører en uendelig lille tilvækst i funktionen selv. Vi siger også at en funktion $f(x)$ er en kontinuert funktion af x i omegnen af en bestemt værdi af x , så længe den [funktionen] er kontinuert mellem de to grænser af x , der indeslutter den givne værdi, lige meget hvor tæt de kommer til hinanden.*⁸

Euler og hans samtids intuitive opfattelse af kontinuitet som en sammenhængende kurve, blev således af Cauchy erstattet af en langt mere præcis analytisk definition. Således fik Cauchy med indførslen af grænseværdibegrebet strammet op på en lang række begreber.

Selvfølgelig er der ikke tale om, at der på en gang bliver skabt et fundament for matematisk analyse, som vi kender det idag. Snarere er der tale om en gradvis formning, således at de første beskrivelser af de nye begreber blot består i upræcise verbale formuleringer, set i forhold til moderne standard. Eksempelvis bruger Cauchy udtryk som "nå uendelig", "så lille som man ønsker" og "en variabel når sin grænse". Men

⁸Cauchy i Kline s. 951

selv om Cauchys grænseværdibegreb er sprogligt formuleret, er det dog ganske præcist defineret, og ikke langt fra det, vi bruger idag. Weierstrass står for den sidste præcision, idet han indførte ϵ δ - notationen. Hvad der efter Cauchy stadig manglede, for at skabe den stringente analyse, var hovedsagligt fuldstændiggørelsen af talystemet med de reelle tal. Æren for dette kan igen tilskrives Weierstrass, der under forelæsninger i 1860'erne udledte en af flere nutidigt brugte definitioner af de reelle tal.⁹

3.2 Bolzano som eksempel på matematikken i første halvdel af 1800-tallet

Som sagt var Bolzano ikke typisk for den periode han repræsenterer. Han er interessant, fordi han tidligt kommer med nogle resultater, som bla. Cauchy senere bliver kendt for. Herudover finder vi ham spændende, fordi han ikke er så gennemlæst og bearbejdet, som andre af den tids matematikere (læs: Cauchy).

3.2.1 Bernard Bolzano

Biografi:¹⁰ Bernard Bolzano var født i Prag i 1781. Han tog studentereksamen i 1796, og blev samme år optaget på det filosofiske fakultet på Prags Universitet. Her studerede han filosofi, fysik og matematik. Hans interesse for matematik blev blandt andet inspireret af A. G. Kästner¹¹, som beskæftigede sig med at bevise sætninger, der almindeligvis blev anset for at være indlysende. Dette for at klargøre hvilke antagelser disse sætninger byggede på. Efter at have afsluttet sit studie på det filosofiske fakultet, begyndte Bolzano at studere teologi. Efter endt eksamen i 1804, modtog han et nyoprettet professorat i religionsfilosofi ved Prags Universitet. Her var han meget vellidt af de studerende, og respekteret af kollegerne. Imidlertid havde den tjekkiske kejser primært oprettet professorater, for at tækkes de gammelkatolske magthavere i et forsøg på, at beskytte sig mod oplysningstidens nye ideer. Dette skabte problemer for Bolzano, da han holdningsmæssigt

⁹Kline, s. 987

¹⁰Dictionary, s. 273-275

¹¹A. G. Kästner: "Anfangsgründe der Mathematik".

tilhørte oplysningstiden. I 1816 blev en anklage for kætteri ført imod ham i retten i Wien, hvilket medførte hans afskedigelse fra universitetet i 1819. Samtidig blev det ham forbudt at publicere, og han blev sat under politiovervågning. Dette varede ved indtil 1825. Delvist fra 1823, og permanent fra 1831, trak Bolzano sig tilbage, og boede hos nogle venner på et landsted i det sydlige Böhmen. I 1842 vendte han tilbage til Pragh, hvor han indtil sin død i 1848 fortsatte sine studier i matematik og filosofi. I sin karriere beskæftigede Bolzano sig hovedsagelig med sociale, etiske og relegiøse emner, men han havde en stor interesse for filosofi, videnskabens metodologi og især for matematik og logik. Et af det matematiske samfunds hovedproblemer i den tid var, at få skabt et solidt fundament for den matematiske analyse. Som før nævnt beskæftigede også Bolzano sig med dette emne: Hans filosofiske uddannelse gjorde det klart for ham, at det var nødvendigt at skabe klare begreber og logisk ræsonnering, ved at starte fra ikke-reducerbare antagelser, og ved kun at benytte egenskaber, som ligger i begrebernes definitioner. Denne metode, og hans filosofiske angrebsvinkel, hjalp ham til at få vist utilstrækkelige funderinger og ukorrekte antagelser i gammelkendte beviser. Bolzano udgav i perioden 1816-17 sine tre væsentligste tekster på dette område, nemlig: "Der binomische Lehrsatz" ¹², "Die drey Probleme der Rectification" ¹³, og til sidst "Rein analytischer Beweis", som vi har valgt, at beskæftige os med.

Selv om Bolzano præsenterede flere banebrydende resultater, og selv om hans metode var radikalt anderledes end hans samtids, tiltrak han sig som nævnt ikke større opmærksomhed fra den matematiske omverden, og han havde ingen direkte indflydelse på udviklingen af matematikken.

Et lille kuriosum

Hvorvidt Bolzanos værker var så ukendte, som det almindeligvis antages, betvivles af Gerd Schubring i en artikel i "Historia Mathematica".¹⁴

¹²"Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomischer und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen." Pragh: Enders (1816)

¹³"Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des Unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst; zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft, allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt." Leipzig: Kummer (1817)

¹⁴Schubring

Dette begrundes han med, at han har fundet Bolzanos tre nøgleværker fra 1816/1817 anmeldt i et ledende tysk tidsskrift (JALZ) fra 1823. Anmeldelsen, der er indleveret til redaktionen allerede i 1821, og signeret med et " Δ ", er sandsynligvis skrevet af den indflydelsesrige professor i matematik i Aschaffenburg; Johan Josef Ignaz von Hoffmann. Hoffmann beskriver Bolzano som en sandhedssøger og en streng tænker. Om værkerne skriver han, at de er ualmindelige, baseret på rigide begreber, viser konsistent tankegang, og at de omhandler de mest betydningsfulde matematiske teorier. Hoffmann er klar over, at Bolzanos publikationer ikke har fået vid udbredelse, og han forsøger at skabe opmærksomhed omkring dem. Samtidig opfordrer han Bolzano til at fortsætte sin forskning i matematikkens grundlag. Schubring fremsætter den hypotese, at nogen har tilskyndet Hoffmann til at skrive anmeldelsen, i et forsøg på at forbedre Bolzanos personlige situation. Ud over i Hoffmanns artikel, er Bolzano nævnt af N. H. Abel (1802-29), der i sin dagbog fra Berlin (1825-26) noterer, at have læst nogle af Bolzanos publikationer og fremhæver i denne forbindelse at, "Bolzano er en klog mand".

3.3 Bolzanos kritik af 1700-tallets bevismetoder.

Som sagt starter Bolzano sin artikel med en kritisk gennemgang af de tidligere forsøg på at bevise det vi kalder "Bolzanos sætning". Vi vil i dette afsnit gengive nogle af hans eksempler, hvorefter vi vil opsummere hans kritikpunkter. Disse kritikpunkter afspejler igen Bolzanos egen holdning til, hvad der er den korrekte matematiske metode.

3.3.1 Gennemgang af artiklens første del

Bolzano giver sin kritik af datidens bevismetoder gennem en række eksempler: Den mest almindelige bevismetode er ifølge Bolzano, at referere til den geometriske sandhed.

Denne argumentation kritiserer Bolzano som følger:

[...]det er åbenbart, at det er et utåleligt anstød imod den gode metode, at ville udlede sandheder om den rene (eller generelle) matematik (dvs. aritmetik, algebra og analyse), fra betragtninger tilhørende en alene anvendt (eller speciel) del, nemlig geometrien.

Hvis man mener, at videnskabens beviser ikke kun skal give sikkerhed [Gewibmachung], men nærmere en begrundelse, dvs. præsentationer af den objektive grund til den aktuelle sandhed, så er det indlysende, at det strengt videnskabelige bevis, eller den objektive begrundelse for en sandhed, som gælder lige for alle størrelser, om de eksisterer i rummet eller ej, umuligt kan ligge i en sandhed, som kun holder for størrelser, som er i rummet.¹⁵

Bolzano mener, at et geometrisk bevis både i dette og i de fleste andre tilfælde faktisk er cirkulært. For her benytter man en geometrisk sandhed til at bevise en generel sandhed, som faktisk skulle benyttes til at udlede den geometriske.

Den gode metode med hensyn til matematisk bevisførelse, er altså for Bolzano den deduktive bevisførelse. Man bør slutte fra det generelle til det specielle, og ikke, som i et geometrisk bevis, fra et enkelttilfælde til en almen lov.

En anden fejlagtig bevismetode er at bygge et bevis på et kontinuitetsbegreb, der indeholder begreberne tid og bevægelse.

Bolzano giver eksemplet:

Hvis to funktioner f_x og ϕ_x , [...] ændres ifølge loven om kontinuitet, og hvis for $x = \alpha$, $f_\alpha < \phi_\alpha$, men for $x = \beta$, $f_\beta > \phi_\beta$, så må der være en værdi u mellem α og β for hvilken $f_u = \phi_u$. For hvis man forestiller sig, at den variable størrelse x i begge funktioner gradvist tager alle værdier mellem α og β , og at de begge tager samme værdi til samme tid, så vil $f_x < \phi_x$ i begyndelsen af denne kontinuerle ændring i x , og $f_x > \phi_x$ til slut. Men da begge funktioner, i kraft af deres kontinuitet, først må gå gennem alle mellemliggende værdier, før de kan nå en højere værdi,

¹⁵Bolzano, s. 161

*må der være et mellemliggende tidspunkt, til hvilket de er ens.*¹⁶

Men, argumenterer Bolzano, begreberne tid og rum er lige så fremmede for generel matematik som rumbegrebet, og er således heller ikke acceptable i bevisførelsen. Disse begreber har deres berettigelse i illustrerende eksempler, men eksemplerne må aldrig blive sat i stedet for beviset, og det væsentlige i en deduktion må ikke baseres på den rene metaforiske brug af fraser eller deres relaterede ideer. Til sammenligning med det ukorrekte kontinuitetsbegreb i det ovenstående bevis, giver Bolzano sin egen definition:

*[...]at en funktion $f x$ ændres i henhold til loven om kontinuitet for alle værdier af x [...] betyder blot: hvis x er en sådan værdi, kan forskellen $f(x + \omega) - f x$ gøres mindre end enhver given størrelse, forudsat at ω kan vælges så lille, som vi ønsker.*¹⁷

Bolzano omskriver den ukorrekte definition af kontinuitet med sin egen notation, og viser herved, at definitionen i realiteten blot er et specialtilfælde af den sætning der skal vises. For:

*[...]en kontinuert funktion er en, der ikke når en højere værdi uden først at gå gennem alle lavere værdier*¹⁸

kan omskrives til:

*[...] $f(x + n\Delta x)$ kan tage enhver værdi mellem $f x$ og $f(x + \Delta x)$ når n tager en vilkårlig værdi mellem 0 og 1,*¹⁹

¹⁶Ibid. s. 161

¹⁷Ibid. s. 162

¹⁸Ibid.

¹⁹Ibid.

-og hvis M er en størrelse mellem $f(x)$ og $f(x + \Delta x)$, så er påstanden; at der er en værdi af n mellem 0 og 1 for hvilken $f(x + \Delta x) = M$, kun et specialtilfælde af den sætning, der skal vises, hvor den ene funktion har den konstante værdi M . Som sådan kan denne definition af kontinuitet ikke bruges i bevisførelsen, men skal derimod udledes af den generelle sætning. Det vildledende i hele beviset skyldes ifølge Bolzano hovedsagligt inddragelsen af tidsbegrebet. For hvis det var udeladt, ville det straks kunne ses, at beviset intet andet er end en omskrivning af den sætning, der skal vises.

Med dette eksempel pointerer Bolzano vigtigheden af, at benytte generelle og veldefinerede begreber i bevisførelsen. Ved at benytte begreber som rum, tid og bevægelse, risikerer man nemt, enten at havne i en induktiv bevisførelse, som i første eksempel, eller som her, blot at få omformuleret og gentaget den lov man vil vise.

Det sidste af Bolzanos eksempler på mislykkede beviser vi har valgt at tage med, er at udlede Bolzanos sætning fra algebraens fundamentalsætning.

Det er klart, skriver Bolzano, at er algebraens fundamentalsætning accepteret, kan Bolzanos sætning sluttet derfra. Men da fundamentalsætningen er udtryk for en meget mere kompleks sandhed end Bolzanos sætning, er det ikke en streng videnskabelig metode, at føre beviserne i denne rækkefølge. Derimod bør man basere algebraens fundamentalsætning på Bolzanos sætning.

Efter al denne meget generelle kritik af samtidens bevismetoder, slutter Bolzano sin indledning med følgende:

Således er alle tidligere beviser for den sætning, som giver navnet til denne afhandling, mangelfulde. Nærværende, som jeg her forelægger til bedømmelse af de lærde, indeholder, smigrer jeg mig, ikke blot en sikkerførelse [Gewissmachung], men også den objektive begrundelse for den sandhed, der skal bevises, dvs. det er korrekt videnskabeligt.

20

²⁰Ibid. s. 165-166

3.3.2 Kommentarer

Opsummerende kan siges at Bolzanos kritik af datidens bevisførelse omhandler tre hovedpunkter:

1. Cirkulær bevisførelse. Man benyttede det, der skulle bevises, i bevisførelsen.
2. Induktiv bevisførelse. Man byggede et generelt bevis på argumentation ud fra specialtilfælde.
3. Mangel på generelle og veldefinerede begreber i bevisførelsen.

Det vil altså sige, at Bolzano plæderer for den ubetinget deduktive bevismetode, hvor de grundlæggende begreber er klart og entydigt definerede.

Nu vil vi gennemgå beviset for Bolzanos sætning. Med dette vi se, om Bolzano selv formår at leve op til de — i forhold til samtiden — radikalt anderledes og meget restræktive krav til den matematiske metode.

3.4 Bolzanos bevis

Som en naturlig konsekvens af hans kritik af de hidtidigt gennemførte forsøg på et bevis for middelværdisætningen, er Bolzanos eget bevis bygget meget grundigt op. Mest interessant er præciseringen i matematiske termer af tidligere korrekte, men sprogligt løst formulerede påstande. Men også hvad angår den rent formmæssige udvælgelse af stoffet, er opbygningen logisk og meget grundig, nogen steder ligefrem omstændelig.

Bevisdelen af Bolzanos artikel består af 18 nummererede afsnit. Med den førmtalte definition af kontinuitet i mende, starter han med en kort diskussion af uendelige rækker. Dette leder op til formuleringen af et konvergenskriterie (teorem 1), der bruges i beviset for artiklens to næste teoremer: Teorem 2, der postulerer eksistensen af mindste overtal for en begrænset mængde, og teorem 3; middelværdisætningen. Til slut — i det 4. og 5. teorem — viser Bolzano, at polynomier er kontinuerte funktioner, samt den "skrabe" udgave af algebraens fundamentalsætning; Bolzanos sætning, anvendt på polynomier.

Vores gennemgang vil, med afsnit 7 som en undtagelse, være et forsøg

på at illustrere dels den øgede strengthed og erkendelse af grundlagsproblemerne i matematikken set i forhold til midt i 1700-tallet, dels Bolzanos fremsynethed, set i forhold til hans samtidige. Afsnit 7 er det afsnit, vi tillægger størst betydning, da der her er en fejl i Bolzanos bevisførelse — artiklens eneste med betydning videre frem i teksten. Da vi mener, at fejlen er meget illustrerende for datidens manglende forståelse af de reelle tal, har vi valgt at følge gennemgangen af Bolzanos bevis for teorem 1 op med en redegørelse for de antagelser om tallenes opbygning, der ligger til grund for et moderne bevis, efterfulgt af et sådant bevis.

3.4.1 Uendelige rækker

Afsnit 1 omhandler summen af en række, der betegner den successive sum af leddene i en talfølge. Den simple pointe, der her anføres, er at en sådan række både afhænger af antallet af led i sekvensen, og af værdien af de enkelte led. Beskrivelsen af en sådan række skal derfor både indeholde oplysning om værdien af den variable størrelse, og antallet af led i summationen. Bolzano bruger derfor notationen $F_r x$ om en række med r led, der alle afhænger af værdien af den variable størrelse x . Moderne betegnes dette den n 'te partialsum:

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x)$$

Afsnit 2 nævner de muligheder, der er for ændringen af en række ved tilføjelse af et endeligt antal led. Denne ændring kan være

[...] en konstant størrelse (nemlig hvis leddene i rækken alle er ens), men kan også være variabel. I det sidste tilfælde kan ændringen være en størrelse, der vokser i en periode og falder i en periode, eller en der vokser eller falder konstant.
21

Med moderne sprogbrug kan størrelsen af de enkelte led i sekvensen altså være konstant, alternerende, eller monotont voksende eller aftagende. Som eksempel nævner Bolzano den geometriske række

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots \quad (3.1)$$

²¹Bolzano, s. 169

hvilken han udnævner til at være voksende i tilvækst (svarende til hvad vi kalder numerisk voksende) hvis $e > \pm 1$, og aftagende i tilvækst hvis $e < \pm 1$. Med nutidig sprogbrug formuleres de tilsvarende krav $|e| > 1$ h.h.v. $|e| < 1$.

Bolzanos notation adskiller sig på dette punkt ikke fra datidens standarder. Det var normalt kun at bruge ulighedstegn, om forholdet mellem størrelsen af flere værdier uden hensyntagen til fortegnet, og ikke som nu om placeringen på en tallinie. Så når Bolzano og hans samtidige skriver $x > -1$, ville vi nutildags udtrykke samme forhold $x < -1$.²²

Afsnit 3 starter med i almindelige vendinger at postulere, at konstante eller monotont voksende led i en sekvens, summeret vil blive "større end enhver given størrelse hvis der fortsættes længe nok"²³[med at summere]. Altså en sproglig formulering af divergens, der også var velkendt af Bolzanos samtidige. Det interessante er derfor også, at Bolzano efterfølgende giver et matematisk bevis for påstanden²⁴:

Antag at en række vokser med en størrelse (større eller lig) d for hver n led, og at det kræves at rækken gøres større end en given værdi D . Man behøver så blot tage et helt antal r der er (større eller lig) $\frac{D}{d}$ og udvide rækken med $r \cdot n$ led. Herved opnås en stigning, der er

$$\geq (r \cdot d \geq \frac{D}{d} \cdot d = D)$$

Eller med moderne notation:

$$\forall D \exists r : F_r(x) \geq D.$$

Her er altså første eksempel på den øgede strenghed, Bolzano kræver bibragt den matematiske bevisførelse.

Afsnit 4 er blot en konstatering af, at der også er rækker, der er opadtil begrænsede, uanset hvor langt de fortsættes. Som eksempel nævnes den alternerende række med konstante led

$$a - a + a - a + \dots \quad (3.2)$$

²²Note 4 til Steve Russ' oversættelse af Bolzanos artikel til engelsk. Russ [1], s. 183

²³Bolzano, s. 169-70

²⁴Ibid., s. 170

der påstås opadtil begrænset af a . Dette forudsætter imidlertid at leddenes rækkefølge ikke ændres, hvilket Bolzano og hans samtidige tilsyneladende overser. Eksempelvis kunne vi vælge at skrive de tre første positive led op først. Hvis vi herefter tager skiftevis et negativt og et positivt led, gør fortsættelsen i det uendelige, at vi stadig får alle led med. Hvis vi lader fodtegnet betegne det enkelte leds nummer i den oprindelige række (3.2), får vi

$$a_1 + a_3 + (a_5 - a_2) + (a_7 - a_4) + \dots = 2a$$

Det antal led med samme fortegn vi starter med, afgør altså værdien af rækken (3.2). Hvis vi tillader, at leddenes rækkefølge ændres, er denne række altså divergent!

Da fejlslutningen ikke bruges i den videre bevisgang, er den uden betydning for resten af artiklen. Men det viser tydeligt, at man (endnu) ikke havde fuldt overblik over de specielle regneregler, der gælder for regning med uendelige rækker.

I afsnit 5 og 6 introducerer Bolzano hvad han selv kalder en "specielt interessant" klasse af rækker. Sprogligt karakteriseres disse rækker i afsnit 5 ved, at de udover den — i foregående afsnit — introducerede (opadtil) begrænsethed har den egenskab at

[...] ændringen i værdi (voksende eller faldende) forårsaget af enhver videre fortsættelse af led altid forbliver mindre end en bestemt størrelse, der selv kan vælges så lille som ønsket. forudsat rækken har været fortsat langt nok inden.²⁵

Dette er en i moderne forstand meget løs karakteristik af fundamentalfølger (se senere). Ikke desto mindre antyder den systematiske tilgang til rækker, og den "specielle interesse" omkring dem, der "klemmer sammen", at Bolzano, på trods af det manglende fuldstændige overblik, afsnit 4 tydeliggør, var kommet langt videre end 1700-tallets brug af uendelige rækker i nær sagt alle sammenhænge og varianter. Som resten af artiklen er et godt eksempel på, indskrænkes brugen nu til uendelige rækker med bestemte karakteristika; i første omgang altså begrænsethed og "sammenklemning af halen".

²⁵Ibid., s. 170

Resten af afsnit 5 er et vel gennemført bevis for, at den geometriske række (afsnit 2) med aftagende led har disse egenskaber. Selve bevisgangen var velkendt allerede før denne artikel (Bolzano henviser selv til hans egen "Der bionomische Lehrsatz"). Herudover er det interessant at konstatere, at afsnittet afsluttes med følgende sproglige argumentationen:

[...] Dette [evnen til at "klemme halen sammen"] må gælde endnu kraftigere for rækker, hvis led aftager hurtigere end leddene i en aftagende geometrisk udvikling.²⁶

Altså en tidlig udgave af sammenligningskriteriet for konvergens!

Afsnit 6 er den forventelige matematiske præcisering af, hvad der forstås ved at "klemme halen sammen". Med notationen $F_n x$ fra afsnit 1 om summen af de første n led i en følge, introducerer Bolzano hvad han selv kalder "rækker af summer af de tidligere rækker":

$$F_1 x, F_2 x, F_3 x, \dots, F_n x, \dots, F_{n+r} x, \dots$$

Med moderne sprogbrug er der tale om en følge af partialsummer. Om en sådan sekvens skriver Bolzano:

Her har vi antaget den specielle egenskab, at forskellen mellem det n 'te led $F_n x$ og ethvert senere led $F_{n+r} x$ (uanset hvor langt fra det n 'te led) forbliver mindre end enhver given størrelse, hvis n tages stor nok i første omgang.²⁷

Denne karakteristik af hvad vi kalder en fundamentalfølge (ff) eller — som et eksempel på Bolzanos upåagtethed — Cauchy-følge, er helt i overensstemmelse med moderne forståelse. Men hvad angår klarhed i udtryksformen, mangler der stadig noget i forhold til den moderne formulering, der involverer en — på Bolzanos tid — ukendt brug af ϵ - "gymnastik":

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall r \in N_+ \forall n > N_\epsilon \Rightarrow |F_{n+r}(x) - F_n(x)| < \epsilon \quad (3.3)$$

²⁶Bolzano, s. 171

²⁷Ibid., s. 171

Denne yderligere præcisering viser imidlertid "blot", at udviklingen — som omtalt i indledningen — er fortsat efter Bolzano. Med vores perspektiv, er det mere interessant at sammenholde formuleringen i afsnit 6 med 1700-tallets "matematiske sprogbrug". Set i dette lys, er alene Bolzanos langt hen ad vejen vellykkede forsøg på at formulere sine påstande og beviser i matematiske termer, en markant videreudvikling af matematikken. Euler og hans samtidige ville sikkert have stillet sig tilfreds med den rent sproglige formulering i afsnit 5.

Med en naturlige tendens til at huske de fejl, vi med vores nutidige matematikforståelse mener, der er i teksten, er det vigtigt at have denne tilbageskuende tilgang i baghovedet, når vi nu i gennemgangen af næste afsnit kritiserer Bolzanos bevisførelse.

3.4.2 Teorem 1: Fundamentalfølger konvergerer

Teorem 1 i afsnit 7 siger i al sin enkelthed, at de ovenfor definerede fundamentalfølger altid konvergerer mod en og kun en konstant værdi.

Bolzanos bevis

Bolzanos bevis falder i to dele:

1. Enhver ff konvergerer mod en konstant størrelse X .
2. Et sådant X er unikt.

Påstand 1 bevises som følger:

Det er klart fra afsnit 6, at en serie som den beskrevet i teoremet er mulig. Ydermere er der bestemt ikke noget umuligt i at antage eksistensen af størrelsen X som leddene i rækken nærmer sig vilkårligt tæt, forudsat størrelsen ikke antages at være unik og invariabel. For hvis det er en variabel størrelse kan den, selvfølgelig, altid vælges så den er tilfredsstillende nær, eller endda præcis det samme som, leddet $F_n x$ med hvilken den sammenlignes. Men antagelsen

om en invariabel størrelse med denne egenskab af nærhed til leddene i vores serie er ikke umulig, fordi med denne antagelse er det muligt at bestemme størrelsen så nøjagtigt som ønsket. For antag det er krævet, at X bestemmes så nøjagtigt, at forskellen fra den sande værdi af X [limes-værdien] ikke overstiger en lille given størrelse d . Da ser man blot i den givne række efter et led $F_n x$ med den egenskab, at ethvert efterfølgende led $F_{n+r} x$ afviger med mindre end $\pm d$. Der må være et sådant $F_n x$ efter antagelse. Jeg siger nu, at værdien af $F_n x$ højest afviger fra den sande værdi af X med $\pm d$. For hvis r øges vilkårligt, med det samme n , kan forskellen $X - F_{n+r} x = \pm \omega$ gøres så lille som ønsket. Men forskellen $F_n x - F_{n+r} x$ forbliver altid $< \pm d$, uanset hvor stor r vælges. Derfor må forskellen

$$X - F_n x = (X - F_{n+r} x) - (F_n x - F_{n+r} x) \quad (3.4)$$

altid være $< \pm(d + \omega)$. Men siden dette for det samme n er en konstant størrelse, og ω kan gøres så lille som ønsket ved at øge r , må $X - F_n x$ være $\leq \pm d$. For hvis den [forskellen] var større og, for eksempel, lig $\pm(d + \epsilon)$, ville det være umuligt for relationen $d + \epsilon < d + \omega$, det vil sige $[\Leftrightarrow] \epsilon < \omega$, at holde hvis ω reduceres yderligere.

Derfor afviger den sande værdi af X højest d fra værdien af leddet $F_n x$, og kan derfor bestemmes så nøjagtigt som krævet, siden d kan gøres vilkårligt lille. Der er, derfor, en reel størrelse hvilken leddene i rækken, hvis den fortsættes længe nok, nærmer sig så tæt som ønsket. ²⁸

Kommentarerne til denne bevisførelse skal vi snart komme tilbage til.

Påstand nr. 2; at konvergenspunktet er unikt, bevises ved modstrid: Antages det, at der er to forskellige konvergenspunkter, X og Y , skal forskellene $X - F_{n+r} x = \omega$ og $Y - F_{n+r} x = \omega_1$ begge kunne gøres vilkårligt små ved at øge r . Det samme skal derfor gælde for differencen $X - Y = \omega - \omega_1$, hvilket er i modstrid med at $X \neq Y$. Det er derfor nødvendigt at antage at $X = Y$.

Dette er et vel gennemført modstridsbevis helt i overensstemmelse med moderne bevistechnik.

²⁸Ibid., s. 172

Kommentarer og manglende forudsætninger

Med moderne sprogbrug bygger beviset for påstand 1 på to grænseværdibetragtninger:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [F_n x - F_{n+r} x] = 0 \quad (3.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [X - F_{n+r} x] = 0 \quad (3.6)$$

Grænseværdibetragtningen i (3.5) svarer til Bolzanos "d-betragtning", og bygger på en antagelse om, at vi har med den i afsnit 6 definerede fundamentalfølge at gøre, hvad Bolzano også udtrykkeligt gør opmærksom på. Altså ingen problemer her.

Vanskelighederne kommer i argumentationen for grænseværdien i (3.6); "ω-betragtningen", og går i to retninger:

— Den første vanskelighed er en åbenlys bevisteknisk fejl, Bolzano laver: I forsøget på at bevise, at $X - F_n x$ kan gøres vilkårligt lille når $n \rightarrow \infty$, bruger han som en selvfølge — uden videre bevis eller argumentation — at det samme er tilfældet for differensen $X - F_{n+r} x$, nu med r som den gående parameter. I begge tilfælde er der imidlertid tale om differensen mellem det samme tal X og rækken $F(x)$, og i begge tilfælde betragtes rækken, når antallet af led er gående mod ∞ . Det er derfor uden betydning for rækken (og dermed afvigelsen fra det konstante X), om man adderer eller subtraherer et vilkårligt endeligt antal led før denne "vandring mod uendeligt" begyndes. Med andre ord:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [X - F_{n+r} x] = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [X - F_n x] = 0$$

Hvis man læser teksten ordret som den står skrevet, kan der således ikke være tvivl om, at Bolzano her falder i den "fælde", han i indledningen så rigtigt kritiserer sine kolleger for: Cirkulær bevisførelse!

— Den anden vanskelighed drejer sig om, hvad baggrunden er for, at en så rutineret matematiker som Bolzano skriver noget, der direkte læst så åbenlyst er i modstrid med hans egne grundprincipper for matematisk tankegang.

Her må der, som det oftest er tilfældet ved historisk baggrundsanalyse, blive tale om fortolkning. Vi kan ikke så skråsikkert som ovenfor konkludere direkte ud fra teksten. Men to forhold taler for, at en korrekt

beskrivelse af Bolzanos matematik-forståelse må tage udgangspunkt i, at der bag “ ω -betragtningen” ligger overvejelser, der ikke kommer til udtryk i det skrevne, hvorfor artiklen her ikke skal læses så ordret, som det er gjort ovenfor:

For det første virker det usandsynligt, at den ellers så form-stringente Bolzano ureflekteret skulle have lavet en sådan fejl. Han må have “tænkt noget mellem de skrevne linier”. Det “noget” har han så enten glemt at skrive ned, eller — nok mere sandsynligt — ikke haft tilstrækkeligt overblik over til at kunne formulere sig på skrift.

For det andet viser det sig, at “ ω -betragtningen” også er en del af et moderne bevis, blot med en helt essentiel præcisering af, hvornår der er tale om reelle tal, og hvornår vi begrænser os til at se på det rationale tallegeme.

Dette forhold; at moderne teori understøtter påstanden om, at Bolzano havde en dybere forståelse end det skrevne viser, mener vi gælder hele gangen i beviset for teorem 1. For at kunne argumentere videre for denne påstand, samt mere præcist vise hvor Bolzano “falder igennem”, vil vi nu give et moderne bevis for, at reelle ff konvergerer mod et reelt tal, tillempet formmæssigt for at lette en efterfølgende sammenligning med Bolzanos bevis.

Et moderne bevis

Vi ser på en fundamentalfølge af *reelle* tal; (a_n) .

Alle disse reelle tal repræsenteres — per definition — af ækvivalensklasser af *rationale* fundamentalfølger, og alle sådanne ækvivalensklasser repræsenterer et reelt tal. Vi vil dog, for at tækkes Bolzano, nøjes med at se på en enkelt *rational* ff (se figur). Det vil sige:

$$a_n \simeq (t_{n,k})_k, \quad t_{n,k} \in \mathbb{Q} \quad (3.7)$$

$(t_{n,k})_k$ er en ff, der konvergerer mod a_n . Der gælder altså:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \forall k \geq N_\epsilon : |a_n - t_{n,k}| < \epsilon \quad (3.8)$$

Hvis vi vælger at lade $(t_{n,k})_k$ repræsentere a_n betyder (3.8):

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \forall k \geq N_\epsilon \exists N_{\epsilon,k} \forall l \geq N_{\epsilon,k} : |t_{n,l} - t_{n,k}| < \epsilon \quad (3.9)$$

a_1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	$\cdots$	$t_{1,k}$	$\cdots$	t_{1,k_1}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_2	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	$\cdots$	$t_{2,k}$	$\cdots$	$\cdots$	t_{2,k_2}	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
a_n	$t_{n,1}$	$t_{n,2}$	$\cdots$	$t_{n,k}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	t_{n,k_n}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
a_{n+r}	$t_{n+r,1}$	$t_{n+r,2}$	$\cdots$	$t_{n+r,k}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$t_{n+r,k_{n+r}}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$	

Figur 3.1: Reelle tal a_n repræsenteret af fundamentalfølger af rationale tal $(t_{n,k})_k$

Nu defineres det naturlige tal k_n så

$$|a_n - t_{n,k_n}| < 2^{-n} \quad (3.10)$$

For et givet n er k_n altså nummeret på det led i ff $(t_{n,k})_k$ efter hvilket at regne "halen" er mindre end 2^{-n} (se figur). Et sådant k_n findes ifølge (3.8). Funktionen 2^{-n} er valgt vilkårligt så den har lutter positive funktionsværdier, og aftager monotont mod 0 for voksende n .

Betragtes nu talfølgen (s_n) , defineret ved

$$s_n = t_{n,k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Får vi i det endelige bevis brug for at vide, at (s_n) bestemmer et reelt tal. Pr. definition skal vi derfor vise at

(s_n) er en fundamentalfølge på $\mathbb{Q}$

Bevis:

Idet r repræsenterer en endelig tilvækst i parameterværdien, sættes i det følgende $r \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned} |s_n - s_{n+r}| &= |t_{n,k_n} - t_{n+r,k_{n+r}}| \\ &= |t_{n,k_n} - a_n + a_n - a_{n+r} + a_{n+r} - t_{n+r,k_{n+r}}| \\ &\leq |t_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_{n+r}| + |a_{n+r} - t_{n+r,k_{n+r}}| \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vælg et N så for n og $(n+r) \geq N$ gælder

$$|t_{n,k_n} - a_n| < \epsilon/3 \quad (3.12)$$

$$|a_n - a_{n+r}| < \epsilon/3 \quad (3.13)$$

$$|a_{n+r} - t_{n+r,k_{n+r}}| < \epsilon/3 \quad (3.14)$$

(3.12) og (3.14) er mulige ifølge (3.10), blot N vælges så $2^{-N} < \epsilon/3$ (og dermed $2^{-(N+r)} < \epsilon/3$). (3.13) er mulig fordi (a_n) er en ff.

Hermed er det bevist, at (s_n) er en ff på $\mathbb{Q}$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \forall n \geq N_\epsilon : |s_n - s_{n+r}| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, \text{ qed.}$$

Med denne viden om s_n kan vi nu definere *det reelle tal* $a \simeq (s_n)$.

D.v.s. a er lig det reelle tal, som fundamentalfølgen s_n bestemmer.

Hermed er vi klar til at bevise den oprindelige påstand:

Den reelle fundamentalfølge a_n konvergerer mod det reelle tal a

Mere præcist formuleret skal vi altså vise, at

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \forall n \geq N_\epsilon : |a - a_n| < \epsilon$$

Bevis:

$$\begin{aligned} |a - a_n| &= |a - s_{n+r} + s_{n+r} - a_n| \\ &\leq |a - s_{n+r}| + |s_{n+r} - a_n| \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vælg et N så for $n, (n+r) \geq N$ gælder

$$|a - s_{n+r}| < \epsilon/2 \quad (3.16)$$

$$|s_{n+r} - a_n| < \epsilon/2 \quad (3.17)$$

(3.16) muliggøres umiddelbart af, at a er defineret som det reelle tal den rationale ff (s_n) bestemmer.

(3.17) følger af (3.10) ved indsættelse af definitionen på s_n ; $s_n = t_{n,k_n}$, samt at vi har vist at s_n er en ff. Blot skal vi her analogt til argumentationen omkring (3.12) og (3.13) vælge et N så $2^{-N} < \epsilon/2$.

I begge tilfælde kommer det foranstående hjælpe-bevis altså i spil.

Hermed har vi vist hvad vi skulle:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \forall n \geq N_\epsilon : |a - a_n| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \text{ qed.}$$

Sammenlignende kommentarer

I hvor høj grad Bolzano havde en — set med moderne øjne — korrekt forståelse af tallenes opbygning, har i de senere år været diskuteret meget blandt historisk interesserede matematikere. I en artikel om Bolzano, og det nytænkende i hans matematikforståelse, gør forfatteren, Steve Russ, opmærksom på, at mange af disse kommentatorer er enige om, at der selvfølgelig er en logisk fejl i Bolzanos bevis, men at han kom så langt det var muligt uden den nødvendige definition af de reelle tal. Selv argumenterer Steve Russ for, at det ligevel kunne forholde sig som nævnt tidligere; at Bolzano havde den korrekte forståelse, blot uden at kunne formulere den på skrift. Russ skriver:

Snarere end at begå en logisk fejl, Bolzano både argumenterede for og påberåbte sig en dyb indsigt i tallenes natur, nemlig, at "en korrekt opfattelse" af tal er en, efter hvilken enhver B-følge [Russ' navn for fundamentalfølger] har en grænseværdi. At bruge en sådan opfattelse som en essentiel del af et bevis, tåler både sammenligning med at tage eksistensen af en sådan grænse til sig som et aksiom, og med at introducere en definition gennem specielle uendelige rækker (snit eller ækvivalens-klasser). Fordi vi ikke kan håbe på at kunne give formelle beviser for konsistensen af sådanne aksiomer eller definitioner, er konsistensen i deres introduktion en overbevisning, grundet i den almindelige intuition, eller indsigt, som de indeholder. Dette er, selvfølgelig, ikke for at fornægte nødvendigheden af en definitorisk, eller aksiomatisk, indfaldsvinkel til reelle tal, men for at pointere, at de kun er det formelle sidestykke til afgørende intuition omkring tal, hvilket også må have været erfaret af blandt andre Dedekind og Cantor meget senere i århundredet. Bolzanos "bevis" er nyttigt, præcis fordi det lykkes på et uformelt plan, og derigennem overbevisende peger på egenskaberne krævet af et formelt tal-begreb. ²⁹

At vi i hvert tilfælde delvist er enige med Steve Russ i hans fremstilling af Bolzanos "dybe indsigt og intuition", er allerede fremgået tidligere. Det virker dog temmelig overdrevet, når Russ fremfører, at Bolzano

²⁹Russ (1992), s. 50-51

“både argumenterede for og påberåbte sig en dyb indsigt i tallenes natur”. Russ ophøjer for et øjeblik sin egen overbevisning til at være en logisk konklusion ved gennemlæsning af Bolzanos tekst, og glemmer herved, at der, som nævnt tidligere, udelukkende er tale om fortolkning i sager som denne.

Lad os for at præcisere vores standpunkt i denne diskussion, tage udgangspunkt i, hvad der er præmisserne for det moderne bevis, og så vurdere, i hvilken grad vi ved positiv læsning af Bolzano's bevis kan se disse præmisser træde frem på eller mellem linierne.

Det er ikke nogen tilfældighed, at det i det moderne bevis er fremhævet, hvorvidt der er tale om rationale eller reelle tal. Hele pointen i dette bevis er, at vi omformulerer spørgsmål vedrørende de reelle tal til tilsvarende spørgsmål vedrørende ff af rationale tal. Dette tallegemes egenskaber er så forudsat bekendt, hvorfor vi kan konkludere her, og så føre konklusionerne tilbage til det reelle tallegeme.

Mere konkret bygger det moderne bevis på tre antagelser, der alle er nødvendige for at kunne gennemføre et korrekt bevis:

1. Vi har en fundamentalfølge af *reelle* tal a_n .
2. Alle *reelle* tal kan fremstilles som fundamentalfølger af *rationale* tal.
3. Alle fundamentalfølger af *rationale* tal bestemmer et *reelt* tal.

1. antagelse gør Bolzano udtrykkeligt opmærksom på, bortset fra at han ikke præciserer, hvilken talmængde han betragter.

2. og 3. antagelse har Bolzano *ikke*. De udtrykker med moderne talforståelse selveste *definitionen* af de reelle tal (den mest brugte af mange ækvivalente udlægninger), første gang fremført af Cantor i 1883:

Jeg kommer nu til den tredie definitionsform af de reelle tal [...]. Jeg fordrer, efter angivelse af et vilkårligt lille rationalt tal ϵ , at man kan udelukke et endeligt antal led fra mængden [d.v.s. en talfølge], så de tiloversblivende led parvis har en forskel, hvis absolutte størrelse er mindre end ϵ .

Enhver sådan mængde, som også kan karakteriseres ved kravet

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{\nu+\mu} - a_{\nu}) = 0 \text{ (for vilkårligt } \mu)$$

kalder jeg en fundamentalfølge, og tilordner den et — ved den defineret — tal b , for hvilket man sågar hensigtsmæssigt kan bruge selve tegnet (a_{ν}) [...].³⁰

En så klart artikuleret talforståelse, kan vi umuligt tillægge Bolzano. Så var han aldrig havnet i den tidligere omtalte cirkulære bevisførelse (se side 57). Det interessante er imidlertid, at det har kunnet lade sig gøre at udforme et moderne bevis, der på de væsentlige punkter kun adskiller sig fra Bolzanos bevis ved præciseringen af hvilket tallegeme, der arbejdes i.

For eksempel bliver Bolzanos intetsigende indledning til afsnittet om variable grænseværdier (se side 55) til en vigtig pointe, hvis det tilføjes, at den variable størrelse, vi altid kan betragte som grænseværdien, er et led i en *rational* talfølge, og derfor selv *rational*, hvorimod Bolzano's "konstante størrelse" — grænseværdien — er reel.

Et vigtigt sted, hvor det samme gør sig gældende, er Bolzano's konstatering; "hvis r øges vilkårligt, med det samme n , kan forskellen $X - F_{n+r}x = \omega$ gøres så lille som ønsket" (sekvens fra citatet side 55). Det er Bolzanos grundlæggende antagelse før hans egentlige bevis. Det samme er imidlertid tilfældet i det moderne bevis, blot med den tilføjelse, at $F_{n+r}x$ er en ff af *rationale* tal, og udgangspunktet er at bevise, at også ff af *reelle* tal konvergerer mod et reelt tal.

Med dette udgangspunkt bliver Bolzanos hovedligning (vores ligning 3.4)

$$X - F_n x = (X - F_{n+r} x) - (F_n x - F_{n+r} x)$$

helt analog til vores ligning 3.15

$$|a - a_n| = |a - s_{n+r} + s_{n+r} - a_n|$$

idet $F_{n+r}x$ så er en *rational* ff, $F_n x$ en reel ff, og X et reelt tal.

Det indikerer efter vores mening kraftigt, at Bolzano forstod mere end han kunne skrive ned, når han — som antydnet ovenfor — tydeligvis ville have været i stand til at gennemføre et moderne bevis, blot han havde haft den moderne aksiomatiske talforståelse at støtte sig til.

³⁰Cantor, s. 186

Han kunne have taget et andet (og forkert) udgangspunkt for sit bevis, hvilket ville have fjernet enhver tanke om fremsynethed. Men når han undlader dette, kan man næsten høre ham tilføje: "Her mangler et eksplisit formuleret udgangspunkt. Jeg ved det. Det må komme senere, når overblikket tillader det. Men beviset *skal* have denne form!"

Han ville derfor sikkert give Cantor ret, når sidstnævnte i samme artikel, hvor han præsenterer den citerede definition af de reelle tal, gør opmærksom på, at irrationelle grænseværdier for $\mathbb{R}$ — d.v.s. hele $\mathbb{R}$ som "værdimængde" — først eksisterer logisk med en sådan definition;³¹ man må definere sine begreber, før man arbejder med dem!

3.4.3 Tilbage i sporet

Ovenstående har vi argumenteret for, at Bolzano i beviset for teorem 1 ryger ind i nogle fundamentale problemer. Hvis han — som vi mener det er tilfældet — har haft en korrekt fornemmelse for sammenhængen mellem de forskellige tallegemer, er det mildest talt meget tåget artikulert. Det fører ham uvægerligt til for en stund at falde af det "spor", han har anvist sig selv og sine kolleger som vejen frem; *strengthed i analysen*.

Det må imidlertid ikke fjerne det helhedsindtryk, man får ved at læse hele teksten i sammenhæng: Set tilbageskuende, har Bolzano selv bi-bragt analysen en væsentlig øget strengthed, hvad både de seks første afsnit, og den resterende del af teksten viser.

Afsnit 8 omhandler de tal, Bolzano karakteriserer som de nøjagtigt bestemmelige; de rationale tal. Han gør så opmærksom på, at også fundamentalfølger ($\mathbb{R}$) med et uendeligt antal led forskelligt fra nul kan være rationale. Som eksempel nævnes den geometriske række

$$10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots = \frac{1}{9}$$

Moderne ville pointen lyde, at de rationale tal ikke er begrænset til de endelige, men til de periodiske decimalbrøker.

³¹Kline, s. 983

Afsnit 9 er blot en opsummering af det foregående: Den i afsnit 6 definerede fundamentalfølge har, som vist i afsnit 7 (?), en og kun en konstant grænseværdi.

Afsnit 10 er en pointering af, at den egenskab, der i afsnit 5 og 6 definerede ff; de "klemmer halen sammen", ikke kan erstattes af et betydeligt mindre restriktivt krav, om blot at have aftagende led. Det skyldes, at aftagende led i en talfølge ikke medfører konvergens af den tilsvarende række. Som et eksempel på dette, nævner Bolzano den harmoniske række

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \left[= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right]$$

der også før Bolzanos artikel var kendt divergent.

Med moderne talforståelse kan det virke overflødigt, at komme med denne pointe. I 1700-tallet var fortroligheden med infinitesimaler imidlertid så ringe, at mange prominente matematikere fortsatte med at sætte biimplikation mellem aftagende led og konvergens. Dette på trods af, at det var blevet modbevist allerede i 1300-tallet, og igen taget op sidst i 1600-tallet af Bernoulli-brødrene.³² Bolzano har derfor sikkert følt et behov for at markere, at han tilhørte "strammerne" hvad angår brugen af uendelige rækker.

3.4.4 Teorem 2: Eksistensen af supremum for en begrænset mængde

Efter disse kommentarer, skal Bolzano nu til at bruge resultatet fra afsnit 7: At alle fundamentalfølger af reelle tal konvergerer. Når dette sker, vil det mangelfulde bevis for teorem 1 vise sig igen. Men da konsekvenserne heraf allerede er diskuteret grundigt igennem, vil vi videre frem i bevisgangen blot antage, at den variable størrelse (x) er et reelt tal, og at teorem 1 er bevist for dette tallegeme.

Med dette udgangspunkt, er det efterfølgende bevis en paradeopvisning fra Bolzanos side i smuk, stringent matematisk bevisførelse.

³²Kline, s. 437-43

Efter i afsnit 11 at have argumenteret for, at det er løsningen på et reelt forekommende problem, der følger, indleder Bolzano afsnit 12 med en sproglig formulering af teorem 2:

Hvis en egenskab M ikke gælder for alle værdier af en variabel x , men dog gælder for alle værdier, der er mindre end et givet u , så er der altid en størrelse U , der er den største for hvilken det kan hævdes, at alle mindre x har egenskaben M .³³

Teoremet siger, at alle opadtil begrænsede mængder af formen $x \in] - \infty, U[$ har et mindste overtal — et *supremum*. Formuleret med moderne matematisk sprogbrug, kunne det for eksempel se således ud:

Teorem 2

Hvis M er en egenskab ved reelle tal, $\mathbb{R}$, som opfylder:

1. $\exists x \in \mathbb{R} \neg M(x)$
2. $\exists u \forall x : x \in] - \infty, u[\Rightarrow M(x)$

Da gælder:

- A. $\exists U \forall x : x \in] - \infty, U[\Rightarrow M(x)$
- B. $\forall V : (V \geq U \wedge \forall x : x \in] - \infty, V[\Rightarrow M(x)) \Rightarrow V = U$

Bolzanos bevis forløber helt som et moderne bevis vil gøre det. Vi kan derfor blot læne os tilbage i stolen og nyde det. Det eneste, der adskiller vores gennemgang fra Bolzanos er, at Bolzano forklarer sig endnu grundigere, end vi i en moderne gennemgang finder det nødvendigt. Vi tillader os at antage visse vendinger og procedurer, der nutildags er standarder, for velkendte, og vil derfor af pladshensyn sammenfatte Bolzanos argumentation, selvfølgelig uden at ændre på hverken princippet eller notationen. Herudover følger vi Bolzanos disposition med

³³Bolzano, s. 174

fem underpunkter.

Bevis:

Af forudsætningerne 1 og 2 følger, at der må eksistere et tal $u + D$; $D > 0$, for hvilket M ikke gælder for alle $x < u + D$. Vi leder nu efter U på intervallet $[u; u + D]$ [v.h.a. succesiv bisektion:

1. Ved bisektion fås delepunkterne $u + D/2^k$; $k = 1, 2, 3, \dots$. For hvert af disse delepunkter undersøges nu, hvorvidt M gælder for alle $x < u + D/2^k$. Svares benægtende på alle disse spørgsmål, vil alle løsningsforslag $U = u + d$; $d > 0$ blive mødt af en modstrid, idet $u + D/2^m < u + d$ blot m vælges tilstrækkelig stor. Hermed er det givet at $u = U$ — mindste overtal.
2. Hvis u ikke er mindste overtal, fås ved et passende antal bisektioner en ny "kandidat"; $u + D/2^m$, idet det nu må gælde, at $x = u + D/2^{m-1}$ opfylder forudsætning 1, og u erstattet af $u + D/2^m$ opfylder forudsætning 2. Ved ny bisektion undersøges nu intervallet $[u + D/2^m; u + D/2^{m-1}]$ [ved at se på delepunkterne $u + D/2^m + D/2^{m+n}$; $n = 1, 2, 3, \dots$. Hvis ingen af disse delepunkter opfylder at M gælder for alle x ; $u + D/2^m + D/2^{m+n}$, er det med argumenter analoge til ovenstående givet at $u + D/2^m = U$.
3. Er $u + D/2^m$ heller ikke mindste overtal må en ny "kandidat" være fundet: $u + D/2^m + D/2^{m+n}$, hvor n betegner et passende antal bisektioner af intervallet $[u + D/2^m; u + D/2^{m-1}]$.
4. Fortsættes på denne måde sker et af to:
 - (a) En værdi $u + D/2^m + D/2^{m+n} + \dots + D/2^{m+n+\dots+r}$ viser sig at være mindste overtal.
 - (b) Det er muligt at gentage processen et vilkårligt stort antal gange uden at finde en værdi for U .
5. I tilfælde (a) er teoremet allerede bevist. I tilfælde (b) benyttes, at $u + D/2^m + D/2^{m+n} + \dots + D/2^{m+n+\dots+r} + \dots$ tilhører klassen af rækker beskrevet i afsnit 5 [fundamentalfølger], der, som vist i afsnit 7 [?!], har en og kun en størrelse, til hvilken rækken kan komme vilkårligt tæt [konvergenspunkt].
At denne størrelse er U vises ved modstrid: Både en antagelse

om et mindre største overtal, $U - \delta$, og et større, $U + \epsilon$, kommer i modstrid med forudsætningen (b) om, at fortsat bisektion af h.h.v. $[U - \delta; U]$ og $[U; U + \epsilon]$ er mulig, og vil bringe os vilkårligt tæt på U .

Hermed er det vist, at alle opadtil begrænsede mængder har et mindste overtal, qed.

Kommentarer

Vores kommentarer går på den sproglige grundighed i beviset. Det er tydeligt, at Bolzano savner en bredt accepteret terminologi for det, han godt ved beviset står og falder med; *konvergensbegrebet*. Han klarer sig som nævnt flot igennem uden, men argumenterne bliver flere steder så omstændelige, at det næsten slører tankegangen.

Udover det ufuldstændige begrebsapparat, kan omstændeligheden også skyldes Bolzanos oppositionelle position. Han vil for enhver pris undgå beskyldninger om bevisførelse v.h.a. intuition, hvilket gør, at han gentager selv de mest letforståelige pointer, frem for at henvise tilbage i teksten eller blot forudsætte det bekendt.

Bolzanos kommentarer er indeholdt i afsnit 13 og 14, og går på fejlagtige fortolkninger af teoremet.

Afsnit 13 taler om den ofte forekommende misfortolkning; at begrænsede mængder altid har en størsteværdi. Dette ville vi moderne udtrykke som, at supremum altid er lig maximum. Det vil svare til, at bisektionen altid fører til situationen i 4(a). Som et eksempel på, at dette ikke er tilfældet, altså at 4(b) er reelt forekommende, nævner Bolzano asymptotisk tilnærmelse.

Afsnit 14 er et af de steder i beviset, hvor Bolzano direkte eksemplificerer tekstens indledende beskyldninger om mangelfulde beviser hos hans samtidige. Man kunne betragte teorem 2 som trivielt ud fra følgende betragtning: "Hvis U ikke eksisterede, ville u kunne vælges større og større, og dermed ville mængden M være ubegrænset." Dette vil imidlertid ifølge Bolzano være baseret på en skjult antagelse om, at en størrelse, der altid kan vælges større, kan blive vilkårlig stor. Han

modbeviser hurtigt ideen, ved at komme med en konvergent geometrisk række som modeksempel, hvorefter han afslutter med følgende kommentar:

Vi ville end ikke nævne en så let skelnelig fejl, hvis ikke matematikere gjorde sig skyldige i den fra tid til anden.³⁴

3.4.5 Middelværdisætningen, kontinuitet og Bolzanos sætning

Nu skal Bolzano til at bringe "loven om kontinuitet" (se side 48) i spil. Den er det bærende element resten af vejen op til artiklens endelige mål; beviset for udgave af algebraens fundamentalsætning, vi har kaldt Bolzanossætning, anvendt på polynomier (se side 40). Først bruges kontinuitetsegenskaben til at bevise middelværdisætningen, så bevises det, at polynomier er kontinuerte, og slutteligt giver en kombination af disse to resultater uden meget yderligere arbejde det ønskede bevis.

Da kommentarerne til de resterende afsnit vil være omtrent de samme, som dem der blev knyttet til teorem 2, har vi valgt ikke at gennemgå teksten linie for linie. Dette må ikke forstås som, at det er mindre interessant matematik der præsenteres. Argumentationen er blot så stringent og lige til, at det ikke giver anledning til mange bemærkninger, hverken fra os eller fra Bolzano selv. Vi vil i stedet koncentrere os om, at forklare strukturen i — og tankegangen bag de resterende beviser.

Teorem 3: Middelværdisætningen

Afsnit 15 er fremsættelse af og bevis for *middelværdisætningen*:

Hvis to funktioner af x , $f(x)$ og $\phi(x)$, varierer ifølge loven om kontinuitet enten for alle værdier af x eller kun for dem, der ligger mellem α og β , og hvis $f(\alpha) < \phi(\alpha)$ og $f(\beta) > \phi(\beta)$, så er der altid en bestemt værdi af x mellem α og β , for hvilken $f(x) = \phi(x)$.³⁵

³⁴Bolzano, s. 177

³⁵Ibid., s. 177

Bolzano deler sit bevis op i fire dele alt efter fortegnene på α og β . Først antages både α og β positive. Bolzano ser på den tilvækst ω , det er muligt at lægge til α under bibeholdelse af egenskaben $f(\alpha + \omega) < \phi(\alpha + \omega)$. P.g.a. kontinuiteten af både f og ϕ , må der være et interval omkring α , hvor ω har denne egenskab; $M(\omega)$. Af $f(\beta) > \phi(\beta)$ følger imidlertid, at der også eksisterer et ω hvor M ikke gælder. Af teorem 2 følger derfor, at M har et mindste overtal U .

Nu ser Bolzano på værdien $x = \alpha + U$ — $f(\alpha + U) < \phi(\alpha + U)$ umuliggøres af, at U er *det mindste* overtal, da kontinuiteten af f og ϕ i så fald ville muliggøre et større U . Tilsvarende umuliggør kontinuiteten at $f(\alpha + U) > \phi(\alpha + U)$, da det ville muliggøre en x -værdi mellem α og $\alpha + U$ hvor M ikke gælder, hvilket er i strid med, at U er et overtal for M . Eneste tilbageværende mulighed er $f(\alpha + U) = \phi(\alpha + U)$. Hermed har Bolzano vist, at $x = \alpha + U$ medfører $f(x) = \phi(x)$.

Til sidst omtaler Bolzano tilfældene α og β begge negative (II), enten α eller β er nul (III) og α og β med modsat fortegn (IV). At han finder dette nødvendigt skyldes, at ulighedstegnene i teoremet som omtalt under afsnit 2 omhandler den numeriske værdi af henholdsvis f_x og ϕ_x . Herved bliver relationerne mellem f_x og ϕ_x regnet med fortegn, "spejlet" omkring ordinat-aksen, hvorfor Bolzano redegør for, hvilke fortegnændringer af ω , U , m.v. der skal til, for at argumentationen også holder i de sidste tre tilfælde.

Afsnit 16 er en understregning af, at teorem 3 ikke påstår, der kun er en enkelt x -værdi for hvilken $f(x) = \phi(x)$. Tværtimod følger det, at der vil være *mindst* en sådan x -værdi. også i et e.v.t. efterfølgende interval $[\beta; \chi]$ hvor $f(\chi) < \phi(\chi)$.

Teorem 4: Polynomiers kontinuitet

Bolzano formulerer teoremet således:

Enhver funktion af formen $a + bx^m + cx^n + \dots + px^r$, i hvilken $m, n, \dots, r$ betegner hele positive eksponenter, er en

størrelse, der varierer ifølge loven om kontinuitet for alle værdier af x . ³⁶

Et moderne bevis for, at en funktion er kontinuert, tager udgangspunkt i ændringen i funktionsværdi ved en lille ændring af argumentet i forhold til et givet udgangspunkt. Da den definition af kontinuitet, Bolzano bruger (se side 48), kun adskiller sig fra en moderne definition ved dens fremstilling i delvist sproglige termer, er det derfor knap så overraskende, at han gør det samme:

Bolzano lader argumentet ændre sig fra x til $x+\omega$ [svarende til, hvad vi nutildags benævner δ ; radius i intervallet omkring x]. Herved ændres funktionsværdien med

$$b[(x+\omega)^m - x^m] + c[(x+\omega)^n - x^n] + \dots + p[(x+\omega)^r - x^r] \quad (3.18)$$

Ved hjælp af binomialformlen ganger Bolzano nu dette udtryk ud, og får en lang række led, der alle indeholder ω i mindst 1. potens. Bolzano kan derfor sætte ω udenfor parentes. For fastholdt x og ω får summen af leddene i parentesens numeriske værdi en endelig positiv værdi, S , der naturligt vil være overtal for summen af leddene regnet med fortegn.

For alle tænkelige værdier af x vil S være en aftagende funktion af ω . Hvis det kræves, at ændringen i funktionsværdi (3.18) gøres mindre end D [svarende til hvad vi nutildags benævner ϵ ; radius i intervallet omkring $f(x)$], kan vi derfor blot vælge et $\omega < D/S$. Hermed har vi sikret os, at $\omega \cdot S < D$, hvilket så også må gælde for den faktiske ændring, der jo blev vurderet opad ved $\omega \cdot S$.

Teorem 5: Bolzanos sætning

Efter således at have vist middelværdisætningen og polynomiers kontinuitet, er arbejdet med et rent analytisk bevis for Bolzanos sætning reelt tilendebragt. Selve sætningen;

hvis en funktion af formen

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q, \quad (3.19)$$

³⁶Ibid., s. 180

i hvilken n betegner et helt positivt tal, er positiv for $x = \alpha$ og negativ for $x = \beta$, så har ligningen

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + px + q = 0$$

mindst en reel rod liggende mellem α og β .³⁷

er blot et specialtilfælde af middelværdisætningen hvor $f(x)$ er nulfunktionen (x -aksen) og $\phi(x)$ er polynomiet (3.19).

Bolzanos bevis i afsnit 18 er — for at slutte i karakteristisk stil — en anelse mere omstændeligt, men korrekt og velargumenteret. Han ser på de positive og de negative led i polynomiet adskilt. Ved nu at lade polynomiet med lutter positive led spille rollen af f og polynomiet med lutter negative led agere ϕ , har Bolzano fået tilpasset det oprindelige polynomium (3.19) til middelværdisætningen:

$$(3.19) < 0 \Leftrightarrow f(x) < \phi(x)$$

og

$$(3.19) > 0 \Leftrightarrow f(x) > \phi(x)$$

Efter til slut igen omhyggeligt at have redegjort for konsekvenserne af α og β 's fortegnsskift, slutter Bolzano sin gennemgang.

3.5 Diskussion

Den spredte kritik, der allerede i midten af 1700-tallet var af den formalistiske tradition, var i starten af 1800-tallet blevet langt mere almindelig. Man kritiserede den matematiske metode og analysens manglende grundlag. Kritikken udmyntede sig i en række nye begreber og revisioner af de gammelkendte, hvilket var en forudsætning for den langt strengere metode man ønskede. De nye begreber og den nye metode er hovedkernen i den nye tradition, hvilket navnet "den konceptuelle tradition" også antyder. Formålet med dette kapitel var at give en karakteristisk af den konceptuelle tradition. Dette har vi først gjort ud fra dens (især Cauchys) begreber. Derefter har vi, med Bolzanos "Rein

³⁷Ibid., s. 181

analytischer Beveis" som et konkret eksempel, forsøgt at beskrive traditionens metode.

Dette skulle give os grundlag for at kunne besvare det andet spørgsmål i problemformuleringen om, hvad der karakteriserede den konceptuelle tradition. Med gennemgangen af Bolzanos tekst, har vi det ekstra formål, at argumentere for hans tilhørsforhold til den nye tradition.

3.5.1 Begreber

Den stigende utilfredshed med den matematiske metode og analysens manglende grundlag, resulterede som sagt i en række nye begreber og mere præcise definitioner af de gamle. De to væsentligste begreber vi har beskrevet er Cauchys funktionsbegreb og grænseværdibegreb.

Funktionsbegrebet, som det er defineret hos Cauchy, er et eksempel på et begreb, hvis definition er blevet strammet op i forhold til Eulers definition (side 34). Definitionen indeholder ikke længere upræcise vendinger som *komponeret på en hvilken som helst måde*, eller udefinerede underbegreber som *et analytisk udtryk*.

Ud over at gå bort fra at definere en funktion som et analytisk udtryk frafalder Cauchy også kravet om, at en variabel skal kunne tage alle værdier.

Grænseværdibegrebet er et eksempel på et nyt begreb, der opstår i forsøget på at skabe strenghed. Begrebet (se side 42) defineres af Cauchy. Dette begreb åbner blandt andet muligheden for en mere streng behandling af infinitesimalerne, hvormed Eulers intetsigende definition (side 35) erstattes af Cauchys (side 42). Grænseværdibegrebet (eller — for Bolzanos vedkommende — den udtalte idé om grænser) muliggjorde også den præcise definition af kontinuitet. Cauchys definition (side 43) og Bolzanos (side 48), står i skarp kontrast til Eulers definition af kontinuitet, som gældende for alle funktioner blot de kan beskrives ved ét analytisk udtryk.

Disse nye definitioner var helt nødvendige for at kunne skabe den strenghed, man ønskede.

3.5.2 Bolzano i den konceptuelle tradition

Bolzos umiddelbare formål med "Rein analytischer Beveis" er at give et strengt analytisk bevis for "Bolzos sætning", hvilket er et nødvendigt skridt på vejen til beviset for algebras fundamentalsætning. Af indledningen fremgår det tydeligt, at Bolzos formål på et mere overordnet plan er, at agitere for en strengere metode i almindelighed. Dette provokeret af de mange "paradokser" og fejl, der var på grund af tidens metode.

Altså allerede hensigten med artiklen placerer tydeligvis Bolzano i den nye tradition. Men heller ikke den faktiske tekst efterlader nogen tvivl herom:

I indledningen til artiklen kommer Bolzano med en lang række eksempler på fejlagtige og mangelfulde beviser for "Bolzos sætning". De væsentligste fejl er: den cirkulære bevisførelse, den induktive bevisførelse og manglen på generelle og veldefinerede begreber.

Disse fejl kommer Bolzano i det store hele uden om i sit eget bevis. Dog er der en undtagelse i afsnit 7, hvor han giver sit bevis for at fundamentalfølger konvergerer. Her er det, hvis man læser teksten ordret, at Bolzano begår sin berømte fejl, der består i en cirkulær bevisførelse. For at redde Bolzano forsøgte vi os i stedet med en positiv fortolkning af bevisførelsen. Det viste sig, at vi kunne opstille et moderne bevis helt analogt med Bolzos, blot med den (essentielle) forskel, at vi eksplicit skelnede mellem brugen af reelle og rationale tal. Havde han haft den moderne aksiomatiske forståelse af reelle tal som fundamentalfølger af rationale tal, havde han ubetvivleligt kunnet gennemføre det korrekte bevis. Dette faktum, samt vor utilbøjelighed til at tilskrive Bolzano en så åbenlys fejl, er hvad der underbygger vor tro på, at Bolzano havde en korrekt forståelse af sammenhængen mellem de rationale og reelle tal. Vi indrømmer dog, at dette er en tro, der hviler på en ret velvillig fortolkning, og at Bolzano i givet fald på dette punkt har formuleret sig meget utydeligt.

Bolzos metode

Ud over de ændrede begreber, består den nye tradition som sagt i en langt mere streng metode end man så i 1700-tallet. Dette har vi eksemplificeret ved Bolzos bevis.

Bolzos lange indledning illustrerer med al ønskelig tydelighed, at han

bekymrede sig om metoden. Bolzanos opfattelse af den korrekte matematiske metode har vi beskrevet som den strengt deduktive, hvor man slutter fra generelle sætninger til de mere specielle, og hvor de begreber, der deduceres ud af, er klart definerede. Som første konsekvens af denne holdning, giver Bolzano i sin indledning en definition på kontinuitet, hvilket er en nødvendig forudsætning for gennemførelsen af hans bevis. Dette er den første — i moderne forstand — korrekte definition, hvilket viser, hvor radikalt nytænkende Bolzanos metode var.

Metoden i selve bevisførelsen lever fint op til hans idealer. Beviset er logisk og meget omhyggeligt opbygget. Han starter med en definition af rækker og deres summer, og fortsætter med en omhyggelig beskrivelse af forskellige egenskaber ved sådanne rækker. Som et eksempel på den øgede strength i forhold til 1700-tallet, trækker vi frem, at Bolzano finder det nødvendigt at bevise at rækker med konstante eller monotont voksende led vil divergere. Dette bevis ville Euler sandsynligvis ikke tænke på at føre.

Bolzano karakteriserer i afsnit 6 hvad vi nu forstår som fundamentalfølger, og i afsnit 7 giver han sit bevis for, at disse konvergerer. Her opstår så den velkendte fejl, men resten af beviset glider smertefrit for Bolzano, og han demonstrerer smukke stringente beviser for middelværdisætningen og for "Bolzanos sætning".

Bolzanos grundlag og metode i forhold til Eulers

Lad os prøve at tydeliggøre Euler og Bolzanos meget forskellige grundlag og metode, ved at se på en konkret sag. de begge beskæftiger sig med: Beviset for middelværdisætningen.

Det fremgår af kommentaren til Eulers bevis for middelværdisætningen, at han ikke kan vise denne, på samme måde som Bolzano.

Han er henstillet til at bygge sit bevis på intuitive geometriske overvejelser. Han indskrænker sig til at betragte polynomielle funktioner, og mener dermed at have sikkerhed for "kontinuitet" og hermed middelværdisætningen.

Med sin formulering af kontinuitet i moderne forstand, er Bolzano langt bedre stillet. Han kan gå generelt til værks, og vise middelværdisætningen for alle kontinuerte funktioner, for derefter at indskrænke sig til de polynomielle og blot vise, at disse er kontinuerte. Det interessante i forhold til deres metode, er ikke så meget den forskellige betydning,

ordet kontinuitet havde, men snarere at Bolzano *beviser* polynomiers kontinuitet, mens Euler blot *konstaterer* dette som en selvfølgelig ting.

3.6 Delkonklusion

Vores svar på spørgsmålet om, hvad der karakteriserer den konceptuelle tradition, kan opsummeres i to punkter. Den konceptuelle tradition kan beskrives ud fra:

1. de nye begreber og mere præcise definitioner på de gamle samt
2. den mere stringente metode, som de nye definitioner gav mulighed for.

Til spørgsmålet om, hvad der fremprovokerede denne udvikling fra den gamle til den nye tradition, kan siges:

De begreber og den metode, som udgør kernen i den konceptuelle tradition, opstod i et forsøg på at efterkomme den voksende kritik. Kritikken bundede i de fejl og den inkonsistens, der tydeligvis var i 1700 tallets analyse. Det var altså disse fejl og kritikken, som udsprang heraf, der fremprovokerede udviklingen.

Men inkonsistens og fejl, samt kritik heraf, var der også tidligere i den formalistiske tradition. Derfor efterlader dette svar blot et nyt åbent spørgsmål: Hvorfor sker der denne forskydning i prioriteringen fra resultaterne til strengheden, som overgangen fra den formalistiske til den konceptuelle tradition kan karakteriseres ved? Dette vil vi prøve at svare på, ved hjælp af det begrebsapparat vi opstiller i kapitel 4.

Ud over at få svar på ovenstående helt konkrete spørgsmål, håber vi samtidig ved hjælp af de videnskabsteoretiske termer, at kunne give en mere præcis karakteristik af de to traditioner.

Et andet formål med dette kapitel var at argumentere for, at Bolzano tilhører den konceptuelle tradition. Argumenterne herfor kan vi opsummere til, at:

— Bolzanos matematiske sprogbrug, hvor det igennem det meste af beviset, lykkes ham at formulere sine sætninger og beviser i matematiske termer,

— hans veldefinerede begreber, her bla. definitionen af kontinuitet,

— og hans metode, den strengt deduktive og meget moderne,

alle er markante videreudviklinger af matematikken fra 1700 - tallet.

Med dette kan der ikke være nogen tvivl om, at Bolzano trods tidspunktet for hans vigtigste artikler klart tilhører den konceptuelle tradition.

Denne konstatering leder naturligt hen til spørgsmålet om, hvorfor Bolzano ligger skævt placeret i forhold til en tradition, han så tydeligt tilhører? Eller sagt med andre ord; hvorfor startede den konceptuelle tradition ikke med Bolzano men først med Cauchy?

Også dette spørgsmål vil vi søge at finde svar på ved hjælp af videnskabsteoriene.

Kapitel 4

Teorier om videnskabens udvikling

Som grundlag for diskussion af vores eksempler, og den udvikling hvori de indgår, vil vi i dette kapitel gennemgå to teorier, der giver forklaringer på videnskabens udvikling. Der er her tale om Teun Koetsiers og Thomas Kuhns teorier.

Koetsier modificerer Lakatos teori specielt med henblik på matematik i bogen "Lakatos Philosophy of Mathematics: A historical Approach". Gennemgangen af denne modifikation vil tage sit udgangspunkt i Lakatos teori, så at det fremgår hvilke tilføjelser og ændringer Koetsier giver. I forbindelse med Kuhn, er der ikke tale om egentlige ændringer i Herbert Mehrtens artikel "T.S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the "new historiography" of mathematics". Men artiklen indeholder en anvendelse af Kuhn specielt på matematik, og den kan derfor hjælpe os på vej i det diskuterende afsnit, og vil først blive inddraget der.

Alt i alt vil dette kapitel indeholde; først nogle indledende bemærkninger vedrørende matematisk videnskabsfilosofi, for at plasere Lakatos og Kuhn i en større sammenhæng; herefter en gennemgang af Lakatos teori og Koetsiers modifikation, dette efterfulgt af Kuhns teori. Endeligt tages de to teorier op i forhold til hinanden, med den hensigt at fremhæve de filosofiske holdningsforskelle. Dette punkt har ikke en direkte relevans for den efterfølgende brug af begreberne. Alligevel har vi valgt at tage det med, dels af umiddelbar interesse, og dels for at klargøre, hvordan og hvorfor teorierne ser ud, som de gør. Dette for at det i sidste ende står klart, hvilke videnskabsteoretiske overvejelser.

der ligger bag vores beskrivelse og konklusion.

4.1 Indledning

Når man ønsker at forklare, hvordan videnskaben eller specielt matematikken udvikler sig, er det nødvendigt at have en holdning til, hvad videnskab/matematik er, herunder hvilke mål, der styrer udviklingen. For at holde rede på alle de spørgsmål, man kunne tænke sig at stille, opdeles de sædvanligvis i ontologiske, epistemologiske og metodologiske spørgsmål. Ontologien vedrører den opfattelse, den givne teori har om verdens beskaffenhed. Det vil f.eks. sige en holdning til, hvorvidt der eksisterer en objektiv virkelighed uafhængigt af mennesket. I umiddelbar følge heraf, må vi spørge os selv, hvordan den givne teori opfatter menneskets muligheder for at opnå sikker viden. De spørgsmål, dette store emne indeholder, behandles i epistemologien, hvor den givne teori, så at sige, opstiller kriteriet for videnskabelighed. Endeligt vil der være en metode der benyttes i praksis, og nogle argumenter for, at denne er i overensstemmelse med kriterierne for videnskabelighed. Disse regler, og argumenter herfor, er den givne teoris metodologi.

Disse termer vil blive benyttet i det følgende, hvor vi bla. vil se, hvorledes nogle moderne matematisk-videnskabsfilosofiske retninger adskiller sig i deres holdninger. Vi har valgt tre hovedretninger, der tilsammen giver et nogenlunde billede af de forskellige måder, man kan opfatte matematikken på. De benævnes her realisme, formalisme og quasi-empirisme.

En teori for matematikkens udvikling må have en holdning til, hvad matematisk sandhed er, og til hvori et matematisk objekt består. I forhold til dette grundlæggende ontologiske spørgsmål, er realisterne af den holdning, at matematiske objekter eksisterer uafhængigt af mennesket. De mener således, at en matematisk sætning er sand, hvis den beskriver virkelige matematiske objekter.

Som eksempel på en realist kan nævnes Kurt Gödel (1906-1978). Han er af den opfattelse, at der findes virkelige mængdeteoretiske objekter, og at det er muligt at finde matematiske aksiomer, som giver en sand beskrivelse af disse. Denne aksiomering af mængdeteori, skal ifølge Gödel baseres på iterativ fremstilling af mængder.

Nøglen til de virkelige mængdeteoretiske objekter findes, ifølge Gödel, i matematisk intuition, således at vores fundamentale matematiske formodninger, dvs. aksiomerne, ofte "tvinger sig ind på os som værende sande"¹. Blandt andet siger han:

[...] de gennerelle matematiske objekter må bare være tilstrækkeligt klare for os, til at vi kan genkende deres pålydende, og sandheden af aksiomerne, som de angår [...]
2

Gödel fortsætter, og siger om intuitionen at den

... er tilstrækkelig klar til at producere mængdeteoretiske aksiomer og en åben mængde af udvidelser af dem"³

Endeligt mener Gödel, at disse mængdeteoretiske aksiomer er tilstrækkeligt til at bevise alle de sætninger, man har fundet på indtil nu.

De ontologiske og epistemologiske holdninger, der kommer til udtryk her, leder til den slutning, at realisternes metode må betegnes som deduktiv. Udfra nogle få selv-evidente og hermed sande aksiomer, kan de matematiske sætninger bevises ved deduktion. Disse sætninger giver således — i kraft af deres oprindelse — sikker viden om virkeligheden.

Formalisternes metode er ligeledes deduktiv, idet den består i opstilling af aksiomer, og beviser af sætninger udfra disse. Imidlertid adskiller de sig på helt afgørende vis fra realisterne, med hensyn til det ontologiske spørgsmål. De mener, at sande matematiske sætninger er dem, der kan vises udfra aksiomerne, men de tager afstand fra aksiomernes forbindelse med virkeligheden. I overensstemmelse med afvisningen af det ontologiske spørgsmål, er de moderne formalister af den holdning, at de matematiske termer ikke betegner noget bestemt. Formler er blot inskriptioner af tegn på papir, og omhandler ikke noget bestemt træk ved virkeligheden. Matematikken kan benyttes til at beskrive virkeligheden, men kan også godt betragtes som adskilt herfra.

¹Maddy s.1133

²Gödel i Maddy s.1133

³Ibid s.1133

David Hilbert (1862-1943) er formalismens grundlægger. Hans opfattelse af, hvad det matematiske videnskabskriterie skal bestå i, kan opdeles i to punkter. For det første skal et matematisk system være konsistent, dvs. fri for logisk modstrid, og for det andet skal de aksiomer, der opstilles, vælges således at systemet er anvendeligt. Denne anvendelighed kan enten forstås som et indre matematisk anliggende, eller i forhold til andre fag. Hvis disse to forudsætninger er opfyldt, er der altså ifølge Hilbert tale om god, matematisk videnskabelighed.

Som følge af det førstnævnte punkt i Hilberts program, var det hans ambition at vise med finitte metoder, at det matematiske system indeholdende infinitte procedurer er konsistent. Hvis han således havde kunne vise, at det matematisk system er sandt i sig selv, ville det legetimere formalismens afstandtagen fra spørgsmål vedrørende matematiske objekters forbindelse med virkeligheden.

Denne ambition måtte imidlertid opgives, da Gödel i 1931 viste umuligheden heraf.

Gödels ufuldstændighedssætninger kan formuleres intuitivt som følger:

Hvis T er en formaliseret teori, som er konsistent, og som er stærk nok til at tillade Gödel-nummerering

1. Da findes der i T intuitivt sande sætninger, som hverken kan bevises eller modbevises.
2. Da findes en formel i T ($konst_T$), som udtrykker T 's konsistens. Men $konst_T$ kan hverken bevises eller modbevises.

Det vil med andre ord sige, at det er umuligt indenfor en konsistent teori af en vis kompleksitet, at vise denne teoris konsistens. Hvis konsistensen skal vises, kræver det en stærkere teori, og man er således lige vidt.

Alt i alt kan det siges, at både realister og formalister tror på den deduktive metode, og eksistensen af erkendelsesteoretisk sikker matematisk viden, selvom deres begrundelser herfor er vidt forskellige.

Der er formuleringer i Bolzanos tekst, der tyder på, at han — ligesom realisterne og formalisterne — tror på sikker matematisk viden. Han taler om, at den korrekte matematiske metode giver en objektiv begrundelse for en matematisk sætning eller teori (jvf citat side 49). Når

Bolzano således hævder, at der findes en objektiv begrundelse, kan det tolkes som en realistisk holdning.

Quasi-empiristerne, til hvilke både Lakatos og Koetsier hører, adskiller sig netop på dette punkt. De mener, at matematikken er fejlbarlig, idet de opfatter matematik som en empirisk videnskab på linje med de klassiske naturvidenskaber. Lakatos afstandtagen fra den deduktive metode, fremgår af følgende citat af Koetsier:

*Formodninger og beviser er efter Lakatos mening gæt og spekulationer. Et bevis består ikke i deduktion fra endegyldigt sande aksiomer, men er en opløsning af formodninger til delformodninger. Derfor må beviser underkastes strenge prøvelser.*⁴

Hvis matematikken indeholder empiriske elementer giver disse mulighed for verifikation og falsifikation. Ved hjælp af disse mekanismer kan gives et kriterie for videnskabelighed, uden at tage stilling til det ontologiske problem, hvilket er karakteristisk for Lakatos (og Popper). Problemet for quasi-empiristerne består nu i at forklare, hvori matematikkens empiri består. Er det en empiri matematikken har i sig selv? eller er det qua sin egenskab som redskabsfag? - eller skal der tænkes i intuitive baner, bare med en anden vinkel end Gödels?

Udover de ovenfor nævnte repræsentanter, skal kort nævnes Nicolas D. Goodman. Dette blot for at tydeliggøre en quasi-empiriske holdning. Goodman står for tankegangen i en meget radikal form. Han siger direkte, at matematik er en naturvidenskab af stor generalitet og argumenterer for, at matematisk analyse fører til sikker viden, ved at sammenligne med fysik:

*Centrale dele af matematisk analyse er blandt de mest testede, og mest fuldkomment udviklede dele af naturvidenskab. Vi skal prøve at vise, at matematik er lige så godt underbygget som de mest sikre dele af fysikken, ikke at den er bedre underbygget.*⁵

⁴Koetsier s.24

⁵Goodman s.185

Goodman beskriver matematiske objekter som former af f.eks fysiske systemer. Disse former er karakteristiske ved deres abstraktionsniveau og generalitet, hvilket ifølge Goodman kan sammenlignes med den abstraktion og generalisation, der gøres indenfor fysikken selv. Eksempelvis siger han:

Fysikere, der studerer systemer, der følger Laplaces ligning, må tale om felter og kræfter og potentialer. Matematikere der studerer systemer, der opfylder Laplaces ligninger, må tale om funktioner og vektorer og tal [...] Forskellen findes ikke i emnet, men i generalitetsniveauet.⁶

Hvis matematikkens og fysikkens emne således er det samme, må det sluttes, at matematikkens empiri skal findes gennem dens egenskab som redskabsfag, dvs. i de andre naturvidenskaber. Matematik er en generel del af de andre naturvidenskaber, og retfærdiggøres gennem dens evne til at skabe resultater indenfor disse:

Matematisk analyse opstod for at imødekomme behovene indenfor geometri og fysik, og den er stadig stærkt bundet til disse fag. Den arbejder med matematiske former af bevægelse i tid og rum. Den bliver dagligt anvendt i næsten alle de seriøse videnskaber, vi har, lige fra højenergi-fysik og populations-biologi til økonomi. Resultaterne, der er opnået gennem dens midler, er indeholdt i den teknologi, vi bruger dagligt, fra skyskrabere, broer og biler til computere og lasere. Vi har ingen anden teori, som ikke bare er en del af folkløse eller almindelig fornuft, der er så bredt eller så dybt testet. Matematisk analyse er vores mest pålidelige og højest udviklede teori om mysteriet i den ydre virkelighed, i hvilken vi befinder os.⁷

Goodman ender således med et pragmatisk synspunkt.

Med konklusionen på kapitel 2 in mende, bemærkes det, at Euler og hans samtidige må have haft en opfattelse af matematikken, som i høj

⁶Ibid s 191

⁷Goodman s.192

grad minder om Goodmans pragmatisme.

Goodmans pragmatiske holdning er, som vi skal se, ikke generel for quasi-empiristerne. Men idet vi vender tilbage til en mere detaljeret beskrivelse af opfattelsen, som den fremstår hos Lakatos og Koetsier, skal dette ikke foregribes. I stedet bevæger vi os nu væk fra den strengt matematiske videnskabsfilosofi, og over i naturvidenskabsfilosofien. Dette for kort at se på det videnskabskriterie, som Lakatos første metodologi tager sit udgangspunkt i; falsifikationismen.

Den falsifikationistiske opfattelse af naturvidenskaben blev især fremført af Popper som modsætning til verifikationismen, hvilken han mener at kunne tilbagevise. Kriteriet for videnskabelighed er ifølge falsifikationismen, at kun de teorier, der kan være i strid med empiriske data, vil være falsificerbare og må derfor accepteres og gives status som videnskabelige.

Kriteriet bygger på den opfattelse, at al viden er af hypotetisk og korrigerbar natur, og at den videnskabelige udvikling består i en uendelig række af revisioner, hvor en teori udskiftes med en anden mindre dårlig teori. Der er med andre ord tale om en søgen efter fejl gennem gisninger og gendrivelsers, hvor kun de bedst egnede teorier vil overleve. En sådan metodologi skulle ifølge Popper kunne sikre, at videnskabelige teorier bliver en stadig bedre tilnærmelse til sandheden. Han fremhæver, i overensstemmelse med sin afvisning af ontologien, at dette synspunkt ikke er videnskabeligt, og at endegyldigt sande teorier aldrig vil kunne opnås. Det vil med andre ord sige, at tilnærmelsen er en uendelig proces.

Popper mener, som udløb af disse tanker, at jo flere falsifikatorer en teori indeholder og hermed overlever, jo bedre er den. Herudover kan der argumenteres for, at selv om teorien skulle blive forkastet, vil den derigennem bidrage til vores viden, og således alligevel have større informationsværdi end en teori med få falsifikatorer. Sidstnævnte kan jo tænkes blot at bestå på grund af de få falsifikatorer. Poppers falsifikationisme indeholder altså det synspunkt, at dynamikken er uundværlig for den videnskabelige udvikling og tilnærmelse til sandheden.⁸

Det er som modsætning til Popper, at Thomas S. Kuhn træder ind i sammenhængen. Modsætningsforholdet opstår på trods af, at Poppers og Kuhns udgangspunkter på visse punkter er ens. Her tænkes specielt på, at begge teorier er opgør med positivismens beskrivelse af

⁸Andersen s. 99-108

videnskabelig udvikling som en kummulativ proces. Kuhns bog "Videnskabelige revolutioner" er således ikke skrevet direkte i opposition til Popper, men hovedsagelig som et opgør med positivismens opfattelse af videnskaben. Alligevel kom falsifikationisterne i vanskeligheder som følge af Kuhns udtalelser. Det er derfor naturligt for os at se, hvorledes de to teorier evt. kan supplere hinanden i en belysning af overgangen fra den formalistiske til den konceptuelle tradition.

Som det fremgår af ovenstående, tager Kuhn med sin socio-psykologiske teori afstand fra både falsifikation og verifikation, som centrale elementer til forståelse af videnskabelig udvikling.

Poppers falsifikationsteori er ifølge Kuhn i strid med, hvad historien viser. For det første viser historien, at falsifikation ikke altid medfører mere information. For det andet er det sket, at teorier er blevet udskiftet uden først at være blevet testede. Det vil altså sige, at falsifikation ifølge Kuhn ikke er en nødvendig forudsætning for hverken videnskabelighed eller videnskabelig udvikling.

Der hvor falsifikation spiller en rolle, er i den enkelte forskers arbejde og specielt i normalevidenskabelige perioder. Det er et af de største kritikpunkter Kuhn fremsætter, at Popper tilsyneladende generaliserer udfra mekanismer, der kun er at finde i ovenstående sammenhæng, til hele den videnskabelige udvikling.

*Popper har fejlet ved at overføre udvalgte karakteristika ved hverdagsforskning til de lejlighedsvis forekommende revolutionære perioder, i hvilke videnskabelig udvikling er mest indlysende, og ved derefter at ignorere hverdagsforetagenets fuldstændigt. Han har specielt søgt at løse problemet vedrørende valg af teori i en revolutionær periode, gennem et logisk kriterie, som kun er fuldt anvendeligt, når en teori allerede kan forudsættes.*⁹

Under gennemgangen af hovedtrækkene i Kuhns teori senere i dette kapitel, vil Kuhns egne bud på, hvorledes videnskaben udvikler sig, fremgå. Men nu hvor det nok største stridspunkt er ridset op, er det interessant at bemærke, at Kuhn selv fremhæver de mange ligheder, der også er mellem ham og Popper. Begge beskæftiger sig med videnskaben som en dynamisk proces, og gør det ved at studere historien. Begge afviser de, at videnskaben udvikler sig ved tilvækst, og fremhæver den

⁹Kuhn [3] s.19

revolutionære proces, hvor en teori udskiftes med en anden kompartibel teori. Som bremseklods i processen, fremhæver de begge gamle teories manglende evne til at tage udfordringen op. Herudover står de begge i opposition til nogle af positivismens grundlæggende teser. De mener herunder begge, at positiverne forveksler videnskabelige observationer med videnskabelige teorier, og afviser troen på et neutralt observationssprog, samt at videnskabens mål er at forklare observerede fænomener i termer af virkelige objekter.¹⁰

Af disse ligheder fremgår det, at udgangspunktet for henholdsvis Kuhns og Poppers teorier har en række fællesnævner, der gør det endnu mere interessant at sidestille de to. Det kunne i denne forbindelse hævdes, at de to teorier på nogle punkter kan ses som forskellige tolkninger af de samme historiske data. Kuhn siger selv i denne forbindelse:

[...] vores intentioner er ofte helt forskellige, når vi siger de samme ting. Selv om vores fremgangsmåder [lines] er de samme, er de fremstillinger, der kommer ud af det, ikke ens. Det er derfor jeg snarere vil kalde det, der adskiller os, et gestalt skift end en uenighed, og det er også derfor jeg er rådvild og forvirret [intrigued] over, hvordan jeg bedst forklarer det, der adskiller os.¹¹

Kuhn gør i det ovenstående opmærksom på, at videnskabsteoretikere er underlagt den subjektivitet, der er forbundet med tolkning af historien. Den forsigtighed, der kan komme ud af denne bevidsthed, er karakteristisk for Kuhn. Ikke at forstå således, at det er en bremse, men blot på en sådan måde, at han gør opmærksom på, at det nødvendigvis er en subjektiv sandhed, han fremstiller.

Kuhn er også interessant specifikt i forhold til Lakatos, idet sidstnævnte modificerer sin første teori til noget, der i høj grad tager hensyn til ovenstående kritik fra Kuhns side.

Da vi nu har fået placeret henholdsvis Lakatos, Koetsier og Kuhn i et større perspektiv, vil vi gå videre til den egentlige gennemgang af teorierne.

¹⁰Ibid s. 1-2

¹¹Ibid s.3

4.2 Koetsiers videnskabsteoretiske forståelse med baggrund i Lakatos

I det følgende gennemgås Lakatos teori for videnskabens udvikling, efterfulgt af Koetsiers modifikation. Fremstillingen af Lakatos bygger på Koetsiers beskrivelse.

Imre Lakatos

Lakatos, Imre (1922-1974) Professor i logik ved London School of Economics fra 1969, men først og fremmest matematisk og naturvidenskabelig videnskabsfilosof.

Han blev født i Ungarn og havde jødiske rødder. På grund af sin jødiske herkomst, måtte han leve skjult i besættelsestiden under anden verdenskrig, og bla. skifte navn. Senere blev han arresteret af stalinstyret, og måtte tilbringe fire år i fængsel. Efter dette fængselsophold begyndte hans akademiske karriere, idet han fik et job som oversætter af vigtige matematiske skrifter til ungarnsk ved Mathematical Research Institute of the Hungarian Academy of Science. Her stiftede han bekendtskab med værker, der kom til at spille en stor rolle for hans senere arbejde. Specielt kan nævnes Gyorgy Polyas "How to Solve it". Polya skriver i forordet til denne bog:

Matematik, som den bliver præsenteret ved den Euklidiske forståelse, fremstår som en systematisk, deduktiv videnskab; men i praksis er matematikken en eksperimentel, induktiv videnskab.¹²

Det er også i denne periode Lakatos støder på den teori, der kom til at påvirke hans eget arbejde mest, nemlig Poppers teori om falsifikationisme. Lakatos mødte begge disse personer efter han ankom til Vesten, og inspirationen styrkedes herved.

Lakatos er udvalgt som delgrundlag for vores diskussion, fordi han var den første, der beskrev matematik som quasi-empirisk videnskab.

¹²International s.399

Lakatos har udviklet to teorier for videnskabens udvikling: Først "The Methodology of Proofs and Refutations" (MP&R) (1963-64) og senere "The Methodology of Scientific Research Programmes" (MSRP) (1970). MP&R er et forsøg fra Lakatos side på at tilpasse Poppers falsifikationisme til matematikken. MSRP er en teori for videnskabens udvikling som hele, og indeholder falsifikationisme i en svagere grad. MSRP udformede sig efter en diskussion på Berdford College i London i 1965, hvor blandt andre Kuhn var til stede. MSRP er den mest interessante, idet Lakatos med denne teori tager højde for berettiget kritik fra Kuhns side. Med andre ord; MSRP er den mest gennearbejdede af teorierne. Det var Lakatos hensigt at tilpasse sin nye teori til matematik, men han nåede det ikke før sin død. Det er denne tilpasning Koetsier tager op i "Lakatos' Philosophy of Mathematics", og som vi skal stifte bekendtskab med.

Hovedtrækkene i Lakatos videnskabsteori kan ifølge Koetsier opdeles i en *falsifikationstese* og en *rationalitetstese*, der henholdsvis giver holdningen til matematiske teories status og til den matematiske metode: Falsifikationstesen siger, i overensstemmelse med Popper, at alle videnskabelige teorier er af hypotetisk karakter, og at de derved kan væltes. Rationalitetstesen går ud på, at udviklingen på trods heraf ikke er tilfældig, men følger visse metodiske rationalitetsnormer.

Lakatos argumenter fremkommer gennem studier af, hvad han kalder *rationelle rekonstruktioner*. Dette begreb dækker over en beskrivelse (rekonstruktion) af en række matematiske handlinger, der har fundet sted, og som eksplicit er baseret på en metode (et rationelt regelsæt). Det vil sige, at Lakatos søger at vise sine teser ved at rekonstruere historiske forløb, således at de stemmer overens med disse. En fremgangsmåde han er blevet kritiseret for på grund af den meget subjektive karakter. Han koncentrerer sig imidlertid om at skabe sin udviklingsteori, ikke om at diskutere, hvad den objektive historie kan fortælle, og hvorvidt vi har tilgang til denne. Hans metode er i overensstemmelse med falsifikationismen, der jo lægger vægt på udviklingens dynamik. Den dynamik, der skabes gennem dristige hypoteser, kritik afvisninger osv., skaber vejen mod sandheden. Lakatos afviser således de ontologiske spørgsmål som meningsløse.

4.2.1 (MP&R) Bevis og gendrivelse

Lakatos hovedformål i denne periode er, at overføre Poppers falsifikationisme på matematik gennem studiet af rationelle rekonstruktioner. Hans hovedpointe er, at matematik er en quasi-empirisk videnskab, og han skriver om en sådan videnskabs metode:

Det begynder med problemer fulgt af dristige løsninger, så prøvelser og forkastning. Fremgangen er dristig spekulation, kritik, kontroverser mellem rivaliserende teorier, problemskift. Opmærksomheden er altid rettet mod de uklare grænser. Sloganet er udvikling og permanent revolution, ikke fundament og ophobning af ubestridelige sandheder.¹³

Som det fremgår af ovenstående, står Lakatos i opposition til den før omtalte positivistiske opfattelse, idet han fremhæver, at videnskaben ikke udvikler sig kumulativt. Lakatos pointerer af falsificerbarhed, som en forudsætning for udviklingen, er ligeledes i overensstemmelse med Popper. Det er en forudsætning fordi, udviklingen fremkommer ved fremstilling af dristige hypoteser, der prøves af og eventuelt forkastes. Ligesom Popper mener Lakatos altså, at en teori er bedre, jo flere falsifikatorer den har, idet han lægger vægt på, at spekulatøren må være dristig. Udover påvirkningen fra Popper, der er dominerende og tydelig, indeholder Lakatos teori det før omtalte rationelle element. Dette kommer til udtryk i nedenstående citat i hans vending "bevis og forkastelsens logik".

Dens [En rekonstruktions] mest ærbare mål, er at udvikle det synspunkt, at uformel quasi-empirisk matematik ikke udvikler sig gennem et monotont voksende antal af ubetvivleligt opstillede teorier, men gennem den uophørlige forbedring af gæt ved spekulation og kritik, gennem bevis og forkastelsens logik.¹⁴

Koetsier mener ikke, at de rationelle rekonstruktioner, stemmer overens med historien, fordi den kronologiske orden i udviklingsfølget er forkert¹⁵.

¹³Lakatos i Koetsier s.23

¹⁴Lakatos i Koetsier s.22

¹⁵Koetsier s.42

Desuden kritiserer Koetsier den stærke fallibilisme. Hvis denne metodologi skal gennemføres, vil det formodentlig føre til, at alle teorier må forkastes. Og som blandt andre Koetsier selv fremhæver, er det meget sjældent forekommende, at en teori forkastes helt.

Vi bemærker her, at Koetsiers og Kuhns kritik er, om ikke ens, så i hvert tilfælde overlappende.

Lakatos vil sikkert være enig med Koetsier og Kuhn et langt stykke af vejen. Dette vil fremgå af det kommende afsnit, hvor Lakatos videreudviklede teori skal gennemgås.

4.2.2 (MSRP)

Videnskabelig Forskningsprogram-metodologi

Med MSRP ønsker Lakatos at omformulere sin teori, så den tager højde for Kuhns kritik. Denne kritik går, som nævnt indledningsvis, i hovedtræk ud på, at falsifikationismen er i uoverensstemmelse med videnskabshistorien. Der er ikke tale om en fuldstændig tilpasning til Kuhn, men man kan sige at Lakatos gør op med den naive falsifikationisme. I MSRP taler Lakatos ikke længere om teorier som de basale elementer, der skal bedømmes. I stedet indføres begrebet *forskningsprogrammer*, der resulterer i en mængde teorier i en tidsperiode. Med den svagere falsifikationisme og det nye begreb forskningsprogrammer, fjerner Lakatos sig fra Popper, men tilnærmer sig Kuhn.

Der skal endeligt mindes om, at MSRP primært er udviklet ud fra naturvidenskabernes, og ikke direkte for matematikken.

Vi vil nu gennemgå denne teori med kyndig hjælp fra Koetsier og Heine Andersen.

Et forskningsprogram består af en succesiv række af videnskabelige teorier. Disse teorier er bundet sammen af nogle fællesnævner, nogle fundamentale forudsætninger eller grundhypoteser, samt en metodologi. Grundlaget kalder Lakatos for *Hard Core*, -den hårde kerne.

Med den hårde kerne som grundlag, kan der udvikles en kæde af stadig mere komplicerede modeller af virkeligheden. Indenfor matematikken vil den hårde kerne bestå i det aksiomatiske grundlag et begrebsapparat, samt en given metode. I Lakatos termonologi tilhører henholdsvis Euler og Bolzano/Cauchy to forskellige forskningsprogrammer.

Den hårde kerne på Eulers tid indeholder eksempelvis den fundamentale forudsætning, at der ingen principiel forskel er på at regne med uendelige og endelige rækker, og i denne forbindelse at uendelige summer altid er meningsfulde. Desuden kan nævnes det Eulerske funktionsbegreb, som tillagde funktioner har alle mulige pæne egenskaber. Desuden indeholder kernen en metodologi, der er karakteristisk ved regning med infinitesimaler, som om det var endelige tal, samt en flittig brug af uendelige rækker uden hensyn til konvergensintervaller.

I tiden omkring Cauchy kan de fundamentale forudsætninger eksemplificeres ved grænseværdibegrebet og kontinuitetsbegrebet samt et funktionsbegreb, der ikke længere var knyttet til analytiske udtryk. Metoden kan betegnes som strengt deduktiv, Eksempelvis benyttes grænseværdiovervejelser, hvor man før benyttede "regning med infinitesimaler".

Omkring denne hårde kerne opstår — som en naturlig del af den videnskabelige proces — hvad Lakatos kalder et *Protective Belt*, -et beskyttende bælte, bestående af en række hjælpemhypoteser, der beskytter den hårde kerne mod falsificering. En af de beskyttende mekanismer, der træder i kraft, når der opstår problemer, er *monsterbarring*. Hvis der f.eks. gives et modeksempel til en given teori eller sætning, vil man ved monsterbarring forstå en justering af definitionen på det objekt, som sætningen eller teorien omhandler. Justeringen består i at gøre modeksemplet til et *monster*, der ikke hører med og som aldrig skulle høre med, til mængden af objekter, som den givne sætning eller teori henviser til.

Eulers "Introductio" indeholder et eksempel på den beskyttende effekt. Når han således støder ind i "paradokset" med den divergente række (side 22), resulterer det ikke i en undersøgelse af hans manipulationer og evt. forkastelse af disse. Han arbejder tværtimod videre med sine manipulationer, der jo er kendetegnende for hans metode, og når til et resultat, som retfærdigøres gennem afprøvning. Således efterlader han den divergente række som et monster, der ikke har relevans for resultatet.

På Bolzanos tid er det svært at tale om beskyttelsesbælte, idet den hårde kerne endnu ikke er færdigbygget.

Lakatos beskriver et succesfuldt forskningsprogram som et med mange arbejdsområder og mange spørgsmål, altså stor aktivitet i det beskyt-

tende bælte. Noget af denne aktivitet skabes af forskningsprogrammet selv, idet der opstår nye spørgsmål og nye arbejdsområder op under arbejdet i det beskyttende bælte. Denne selvdrevne kraft kan få programmet til at ændre kurs, så de emner og spørgsmål, der i starten var de vigtigste, bliver sekundære i forhold til nye og mere spændende områder.

Hvis man ender med at løse mere interessante problemer, end dem man startede med, kalder Lakatos det *et progressivt problemskifte*, og hvis tilfældet er omvendt et *degenererende problemskifte*. Med andre ord kan det siges, at forskningsprogrammet er progressivt så længe modifikationerne af det beskyttende bælte ikke er ad hoc, dvs. at de hypoteser, der opstilles, ikke skal have som mål kun at løse et bestemt problem uden at kunne afprøves på anden måde. Derimod skal de indeholde et stigende antal resultater i form af forudsigelser. Af disse forudsigelser må i det mindste nogle af dem modstå gentagende falsifikationsforsøg. Omvendt er et degenererende forskningsprogram et, hvor antallet af forudsigelser er faldende og der i højere grad opstilles ad hoc-hypoteser.

Eulers løsning på "paradokset", må siges at være ad hoc, da den kun har til formål at løse et konkret problem. Heri ligger desuden at løsningen ikke skaber ny erkendelse.

Det der styrer forandringen, er det heuristiske element i Lakatos teori. Han taler om henholdsvis *positiv og negativ heuristik*. Hermed menes altså nogle positive og negative anvisninger, for hvordan et forskningsprogram må modificeres og videreudvikles, så de nye empiriske emneområder kan behandles inden for dette.

Det er eksempelvis en negativ heuristisk regel, at man ikke forkaster den hårde kerne, i fald der skulle opstå inkonsistens i programmet, og en teori må falsificeres. I stedet må man modificere hypoteserne i beskyttelsesbæltet, så de er i overensstemmelse med empirien. Herom et citat af Lakatos:

Et forskningsprograms negative heuristik forbyder os at benytte modus tollens på den hårde kerne. I stedet må vi bruge vores opfindsomhed og snilde til at tydeliggøre eller endda opfinde hjælpe-hypoteser, som former et beskyttende bælte omkring kernen, og vi må omadressere modus tollens til disse. Det er dette beskyttelsesbælte af hjælpehypoteser, der skal modstå mængden af prøvelser og justeres, korrigeres eller måske endda helt erstattes, for at beskytte den på

*denne måde hærdede kerne.*¹⁶

Lakatos pointe er at give et bud på, hvornår det er rimeligt at holde fast ved en grundantagelse, man har defineret som "ikke-falsificerbar". Hans svar er, at hvis forskningsprogrammet er progressivt, bør man beholde den hårde kerne på trods af eventuelle problemer. Et forskningsprogram derimod degenererende er Lakatos mere tvivlende. Et sådant forskningsprogram vil, alligevel forsvinde og der må således foretages et valg. Valget vil afhænge af eventuelt konkurrerende forskningsprogrammer. Der foretages således en sammenligning mellem rivaliserende forskningsprogrammer, og det er denne vurdering, der indeholder det rationelle element, som sikrer den stadige bedring af teoriernes tilnærmelse til sandheden.

Også MSRP er blevet kritiseret pga. Lakatos metode, der stadig indeholder nogle problemer i forbindelse med forholdet mellem videnskabsteori og videnskabshistorie. Som tidligere nævnt bekymrer Lakatos sig ikke synderligt om forholdet mellem historisk materiale og fortolkning heraf. Imidlertid vil en tilfredsstillende fremstilling af problemerne ved den hermaneutiske cirkel give stof til et projekt for sig. Det skal derfor blot nævnes her, at Koetsier afslutter sin behandling af problemerne med at sige, at de kan minimeres, men aldrig helt løses. Derefter indrømmer han at antage en pragmatisk holdning til problemerne, og går derefter igang med at beskrive sin modifikation.

4.2.3 Koetsiers modifikation af Lakatos MP&R og MSRP

Koetsiers modifikation skal dels ses som en tilpasning til de specielle forhold, der gør sig gældende for matematik, dels som et forsøg på at indføre både MP&R og MSRP i en større sammenhængende teori.

Koetsier indfører dels nogle niveauer i det videnskabelige samfund, og dels nogle grader af falsifikation. Disse forskellige niveaudelinger skal ses i sammenhæng, og udspringer af Koetsiers kritik af Lakatos. Han fastslår som hovedsynspunkt at MP&R ikke kan forklare udviklingens

¹⁶ Andersen s.115

dynamik, hvis matematikken betragtes som helhed, idet den er for drastisk i sit forsøg på at overføre en falsifikationisme i "poppersk" forstand på matematikken. I MSRP, der primært er bygget op omkring naturvidenskaberne, får Lakatos ikke håndteret spørgsmålet, om hvorvidt matematikken er falsificerbar. Dette problem prøver Koetsier at løse ved at splitte Lakatos falsifikationstese op i to ¹⁷:

Stærk falsifikations tese: Udfra dette synspunkt er matematikken falsificerbar i "poppersk" forstand, eller i lige så høj grad som naturvidenskaberne. Dette på trods af den forskel der er i forholdet til empirien mellem naturvidenskab og matematik. En hel teori kan ifølge den stærke falibilisme i princippet forkastes fuldstændigt, eller vi kan med andre ord ikke være sikre på, at noget er sandt overhovedet.

Her føjer Koetsier til, at hvis matematikken er stærkt falibilistisk, må det betyde, at den kontinuitet og akkumulation af sandhed, som vi oplever, i princippet kan være fuldstændig tilfældig.

Svag falsifikations tese: Ifølge denne er matematiske teorier ikke afviselige som helheder. Ændring består i forfining eller modifikation, ikke i forkastelse af en teori frem for en anden. Fra den nye teoris synsvinkel ser den gamle uperfekt og ensidig ud, men aldrig forkert.

Ifølge den svage falsifikation er den kontinuitet og akkumulation af sandheder i matematikken, som faktisk opleves, ikke tilfældig. Den er i overensstemmelse med matematikkens natur.

Envidere har Koetsier en opdelingen af det videnskabelige samfund i et mikro- og et makro-niveau:

Mikroniveauet er det niveau, hvor den enkelte forsker arbejder. Overvejelserne på dette niveau er kortsigtede, og genstandsområdet er begrænset. Koetsier mener, at teorierne på mikroniveauet kan forkastes helt, og at der i denne forstand er tale om stærk falsifikation på dette niveau. Koetsier knytter således Lakatos MP&R til mikroniveauet.

Makroniveauet er niveauet for planer og strategier for det matematiske samfund som hele. Her er der tale om en svag falsifikation, og Lakatos MSRP kan knyttes til dette niveau, idet man her beskytter den hårde kerne.

Som argumentation for sin modifikation skriver Koetsier ¹⁸, at MSRP er skrevet næsten udelukkende med henblik på naturvidenskaben, og at det ikke er trivielt at overføre den direkte på matematikken. Dette vil ifølge Koetsier kræve, at begreberne *hård kerne*, *beskyttelsesbælte* og

¹⁷Koetsier s.45-46

¹⁸Koetsier s.69

positiv heuristik defineres specielt for matematikken. Samtidig må man kunne skelne mellem teoretisk og empirisk fremskridt, og give eksempler på konkurrerende forskningsprogrammer indenfor matematikken. Aksiomer, der anses for at være sande (en form for hård kerne), er der nok af. Problematisk bliver det dog at give eksempler på beskyttelsesbælter og heuristik. Og mere vanskeligt bliver det at identificere det empiriske fremskridt, da der ikke er nogen klar analog til empiri i matematikken. Der er også bemærkelsesværdigt få konkurrerende forskningsprogrammer. Således, konkluderer Koetsier, er det nødvendigt at modificere MSRP, hvis den skal bruges på matematikken.

(MMRT) Metodologi for matematisk forskningstradition

Koetsier modificerer Lakatos MSRP til MMRT: metodologi for matematisk forskningstradition. Han opdeler Lakatos *forskningsprogram* i to begreber¹⁹; *forskningstradition* og *forskningsprojekt*.

Et forskningsprojekt er en slags mikroniveau for forskningstraditionen. Matematikere arbejder på konkrete forskningsprojekter. De kan karakteriseres ved deres heuristiske enhed, og de kan som regel beskrives som hørende under bestemte forskningstraditioner. Forskningsprojekter styres af nogle forudkendte mål, og nogle ideer til løsninger. De væsentlige forskningsprojekter repræsenterer altid noget nyt og genialt, og det er disse, der udgør det dynamiske element i forskningstraditionen. Bolzanos tekst er et eksempel på et forskningsprojekt, hørende under den konceptuelle tradition. Det forudkendte mål er et strengt bevis for "Bolzanos sætning". Dette mål er i overensstemmelse med traditionen, men ikke dikteret af denne, idet Bolzano er før sin tid.

En *forskningstradition* er en gruppe forskningsaktiviteter i en tidsmæssig afgrænset periode. Den karakteriseres ved et bestemt matematisk grundlag (definitioner og aksiomer), bestemte emneområder og bestemte metoder og normer for bevisførelse. En matematisk forskningstradition kan identificeres ved at undersøge, hvilke matematiske objekter og hvilke aspekter ved disse objekter, der behandles, og hvilken metode, der benyttes.

De to perioder, vi beskæftiger os med, repræsenterer som antaget på forhånd to forskellige matematiske forskningstraditioner.

¹⁹Koetsier s.151-53

I MSRP skelner Lakatos ikke mellem hypoteser og teoremer. Inden for MMRT er der dog væsentlig forskel, da teoremerne er hypoteser, der er bevist inden for en bestemt tradition. Det vil sige, at teoremerne men ikke nødvendigvis hypoteserne vil ændre karakter ved skift fra en tradition til en anden. På den vis kan man beskrive en matematisk forskningstradition som en bestemt måde at se på, forklare og bruge hvad man anser som værende *matematiske facts*.

Algebraens fundamentalsætning og middelværdisætningen er eksempler på hypoteser, der ikke ændrede sig ved overgangen fra den formalistiske til den konceptuelle tradition. Derimod ændrede beviserne og dermed teoremerne sig.

Fremskridt og rationalitet ifølge MMRT

Som det også var tilfældet for Lakatos, er Koetsiers mål at beskrive rationaliteten i matematikkens udvikling. Her er der to spørgsmål, der gør sig gældende: Hvad skaber fremskridt i matematikken? og efter hvilke kriterier foretager et rationelt matematisk samfund valg mellem flere forskellige konkurrerende forskningsprojekter?

Fremskridt i en tradition består i produktionen af hypoteser og sætninger. For at udforme hypoteser og finde beviser, benyttes nogle traditions-uafhængige heuristiske regler. Der er eksempelvis reglerne beskrevet i MP&R; bevis og forkastelse, som det foregår på mikroniveau inden for de enkelte forskningsprojekter. Samtidig er der dog de regler, som afhænger af de grundlæggende antagelser og bevismetoder, som karakteriserer den pågældende tradition. Et eksempel herpå er, at man inden for den konceptuelle tradition benyttede grænseværdibegrebet, når der opereredes med uendelige størrelser, hvorimod man i den formalistiske tradition regnede med dem stort set som med endelige tal. Samspeilet mellem de traditionsafhængige og -uafhængige regler skaber hypoteser og beviser, og dermed fremskridt.

Forskningsprojekterne kan deles op i to kategorier: Dem, der passer fuldstændigt ind i en given tradition, og dem som — selv om de udspringer af en tradition — alligevel afviger.

Det er de sidstnævnte, der har betydning for udviklingen af forskningstraditioner. Inden for en tradition vil der altid være nogen, der beskæftiger sig med at gøre traditionens grundlag så solidt og strengt defineret som muligt. Det er primært sådanne grundlagsorienterede projekter, der — hvis de har succes — kan lede til modifikation af den tradition, de udspringer af. Hvis de adskiller sig meget, kan de føre

til nye og rivaliserende traditioner. Projekter der medfører indtroduktion af ny notation, kan også ændre traditionen eller resultere i en ny tradition. Dette eventuelt på trods af, at projektet ikke fra start var grundlagsorienteret, eller sigtede på at revidere traditionen. En matematisk forskningstradition er således ikke endegyldig, men kan ændres med tiden eller udkonkurreres af andre forskningstraditioner.

Som eksempler på grundlagsorienterede forskningsprojekter kan nævnes Bolzanos bevis og medfølgende definitioner, og Cauchys "Course d'Analyse Algébrique".

Eulers "introductio" kan også betegnes som værende grundlagsorienteret, set iforhold til den tradition han tilhører. Dette fremgår i hans indledning til værket, hvor han udtrykker ønske at skabe klarhed over disciplinen "regning med infinitesimaler".

Efter hvilken *rationalitet* vælges der så mellem konkurrerende forskningsprojekter og forskningstraditioner?

Ifølge Lakatos metodologi er det de mest progressive programmer, der foretrækkes. Begrebet progressive programmer splitter han op i to:

De teoretisk og de empirisk progressive, hvor førstnævnte er dem der, forudsiger nye sandheder, og sidstnævnte er dem, hvor sandhederne også bekræftes af erfaringerne.

Denne definition af progressivitet skaber imidlertid problemer, når den anvendes på matematikken, som jo ikke direkte har nogen empiri.

Løsningen på dette er ifølge Koetsier (og Lakatos) at matematikken er quasi-empirisk. Matematiske sætninger er udtryk for vores erfaringer (her snarere åndelige end fysiske erfaringer). Disse erfaringer bliver ikke accepteret uden videre; de bliver efterprøvet, når det findes påkrævet på samme måde som inden for "ægte" empiriske videnskaber.

Matematisk fremskridt inden for forskningsprojekter og -traditioner kan defineres ud fra *vægten* af de hypoteser og teorier, der produceres. Vægten er en bred betegnelse for kvalitet, vigtighed og des lige. For at afklare dette begreb nærmere, opstiller Koetsier en liste over faktorer, der har indflydelse på vægten²⁰: 1) *Ekstern succes*, dvs. hvis en sætning løser nogle problemer uden for projektets domæne. 2) Hvis en sætning løser problemer inden for projektets domæne, har det ligeledes en positiv indflydelse på vægten. 3) Hvis nogle sætninger i en given teori forøges i vægt, da vil de andre sætninger i teorien også vinde i vægt. 4) I konkurrencesituationer mellem to teorier eller traditioner, vil sætninger, der er bevist i sammenhæng med det ene projekt (eller en tradition) og ikke af den anden, vinde i vægt. 5) Hvis et gæt forventes

²⁰Koetsier s.170

at være nemt at bevise, men viser sig at være meget svært, vinder det i vægt. 6) Hvis andre i fortiden forgæves har prøvet at bevise et gæt, vinder det i vægt.

Derimod har det en negativ indflydelse, hvis et projekt eller en tradition er plaget af "meta-problemer".

Herudover nævnes faktorer som økonomi, simpelhed, elegance, harmoni, systematik osv.

Alle disse faktorer, (og formentlig flere til), har altså betydning for, hvorvidt et forskningsprogram eller en forskningstradition er progressivt eller ej. Hermed har alle disse faktorer indflydelse på hvilket valg, der tages i en situation med flere konkurrerende programmer eller traditioner.

Med alt dette in mente vil det være på sin plads, at fremhæve Koetsiers beskrivelse af matematisk rationalitet:

*Matematisk rationalitet er ikke en beregnelig rationalitet, men er mere som rettens rationalitet [the rationality of the court room], hvor der vejes for og imod*²¹

Afsluttende bemærkninger

Efter at have opstillet sin teori, tester Koetsier dens forklaringskraft på nogle rationelle rekonstruktioner af udviklingsforløb. Et af disse udviklingsforløb er netop overgangen fra den formalistiske til den konceptuelle tradition. Dette vil vi som før nævnt støtte os til i kapitel 5, hvor begrebernes forklaringskraft undersøges i forhold til den givne periode.

Efter at Koetsier har testet sin teori, konkluderer han, først på rationalitetstesen:

*Matematisk rationalitet består i MP&R på mikroniveauet og MMRT på makroniveauet [dvs. gennem vægtning], idet matematikkens udvikling kan rekonstrueres succesfuldt ved hjælp af disse metodologier.*²²

²¹Ibid.s.161

²²Koetsier s.277

Herefter konkluderer Koetsier på det andet punkt i Lakatos teori; falsifikations tesen. Det sker i første omgang med udgangspunkt i de rationelle rekonstruktioner. På makroniveauet er der ifølge Koetsier tale om *svag falsifikation* i den betydning, at den foregående tradition er inkorporeret i den nye, og således ikke forkastes fuldstændigt. Betragtes derimod mikroniveauet, er der tale om en stærkere falsifikation, hvor sætninger og beviser kan erstattes fuldstændigt. Dog siger han:

Falsifikation i matematik ser ud til at bestå i det faktum, at resultater er falsificerbare i den forstand, at efter en proces af begrebslig rafinering af den fundamentale notation, er holdbarhedsområdet for disse resultater måske afgrænset. Angående falsifikation gør det øjensynligt ingen væsentlig forskel, om en sætning erstattes af en bedre sætning ifølge MP&R, eller om den erstattes på grund af et traditionsskift ifølge MMRT.²³

Efter således at have konkluderet, går Koetsier ind i en diskussion af falsifikation i matematikken generelt, men med udgangspunkt i matematikken i 1900-tallet. Denne diskussion leder ham ud i tanker, hvor han tangerer såvel en pragmatisk som en realistisk holdning. Koetsier skriver:

Den hyppige forekomst af uafhængige opdagelser [af de samme ting], og den hyppige forekomst af ekstern succes (det er den uforudsete anvendelse af en teori udenfor dens domæne), kan efter min mening kun forstås som en bekræftigelse af det faktum, at vi i matematikken har at gøre med et genstandsområde, der indeholder et element af objektivt traditionsuafhængigt eksistens.²⁴

Koetsier udleder således en realistisk holdning af matematikkens anvendelsesorienterede aspekt og eksistensen af kumuleret matematisk viden. Herved er han kommet i problemer — han skriver:

²³Koetsier s.279

²⁴Koetsier s.285

Imidlertid bliver man straks stillet overfor svære spørgsmål, når man antager, at der eksisterer matematiske facts, der til en vis grad er traditionsuafhængige. Det er bemærkelsesværdigt, at vores undersøgelse af matematikkens rationalitet og falsifikation inspireret af Lakatos, bringer os tilbage til de klassiske problemer i matematisk videnskabsfilosofi. Hvordan skal vi karakterisere disse matematiske facts? Hvad er deres forbindelse med fysiske facts? Vi har adgang til fysiske facts gennem vores sanser. Hvorledes har vi adgang til matematiske facts? Disse er svære spørgsmål, og tilfredsstillende svar findes ikke.²⁵

Herved er Koetsier så at sige tilbage ved udgangspunktet. På trods heraf holder han fast ved, at matematik er quasi-empirisk, men han formulerer sig mere og mere svagt i disse afsluttende bemærkninger og det er svært at finde ud af, hvad han egentlig mener. Dette er selvfølgelig i overensstemmelse med, at han fremhæver mangelen på tilfredsstillende svar på de klassiske filosofiske problemer.

Alt i alt lykkes det ikke Koetsier at præcisere, hvori den svage falsifikation består. Koetsier efterlader det med andre ord som et åbent spørgsmål, hvori det empiriske består, hvis matematikken er quasi-empirisk.

4.3 Kuhns videnskabssyn

Nu forlader vi Lakatos og Koetsiers falsifikationistiske ideer om videnskaben, og springer til en gennemgang af Kuhns bog "Videnskabens revolutioner".

Som nævnt i indledningen til dette kapitel, kom falsifikationisterne i vanskeligheder på grund af Kuhns kritik. Denne kritiks hovedpointe er, at falsifikationismen er i uoverensstemmelse med videnskabshistorien. Derfor er det naturligt at vælge Kuhns fremstilling af videnskabens udvikling som alternativ til Koetsier. Dette med henblik på at opnå et så bredt favnende begrebsapparat som muligt, men også fordi det er spændende at sammenholde en vidererudviklet falsifikationisme som Koetsiers med Kuhns ligeledes videreudviklede teori.

²⁵Ibid s.285

4.3.1 Thomas S. Kuhn

Thomas S. Kuhn (født 1922) er oprindeligt uddannet fysiker fra Harvard University. Efter endt kandidateksamen i 1948 fortsatte han samme sted som Junior Fellow frem til 1951. I følge Kuhn selv, var det denne frihedsperiode, der gav ham mulighed for for første gang at gå i dybden med et aspekt af hans videnskabelige uddannelse, der længe havde interesseret ham som hobby; *videnskabshistorie*, i særdeleshed de filosofiske aspekter af dette emne.²⁶ Herefter forlod Kuhn den teoretiske fysik, og beskæftigede sig i årene frem til 1958 med at undervise i videnskabshistorie. Sideløbende hermed beskæftigede han sig med psykologi, sociologi, sprogpsykologi og andre områder uden direkte tilknytning til videnskabshistorien.

Denne emnemæssige mangfoldighed gjorde Kuhn opmærksom på det, der få år senere skulle blive hjørnestenen i hans fremførte alternative fremstilling af videnskabens udvikling: Den tætte sammenhæng mellem videnskaben og dens udøvere på den ene side, og det usynlige net af normer, standarder, metodologisk indoktrinering, social såvel som faglig opdragelse m.v. på den anden side.

Først i 1958 fik han imidlertid igen mulighed for fuldt og helt at beskæftige sig med disse tanker og ideer. Det skete efter en invitation til at tilbringe et år ved The Center for Advanced Studies in the Behavioral Sciences. Her fik Kuhn tid til at få så meget struktur på sine ideer, at han få år efter, i 1962, udgav "Videnskabens revolutioner", hvor hans teori om videnskabens udvikling første gang fremstilles samlet.

Bogen har i aller højeste grad været diskuteret lige siden dens udgivelse. Her kan eksempelvis nævnes bogen "Criticism and the Growth of Knowledge", hvori både Popper, Lakatos og Kuhn giver deres indlæg i den debat, der tager sit udgangspunkt i forskelle og ligheder mellem Popper og Kuhn. For vi kan tage del i denne debat, må vi imidlertid præsentere Kuhn og hans teori.

4.3.2 Kuhns teori i hovedtræk

Videnskabelige samfund

Kuhn skriver om opholdet på The Center for Advanced Studies in the Behavioral Sciences i forordet til sin bog. Først skriver han om den

²⁶Kuhn [1], s. 34-35 (forord)

nævnte mulighed for at koncentrere sig om videnskabsteorien. Herefter tilføjer han:

Endnu vigtigere var det dog, at jeg ved at tilbringe et år i en gruppe, som hovedsageligt bestod af samfundsforskere, blev stillet overfor uventede problemer med forskellene mellem sådanne grupper, og de grupper af naturvidenskabsmænd, jeg var blevet uddannet blandt. Især blev jeg slået af antallet og omfanget af meningsforskelle mellem samfundsvidenskabsmænd om karakteren af tilladelige videnskabelige problemer og metoder. Både historien og min erfaring fik mig til at tvivle på, om naturvidenskabens dyrkere har fastere eller mere konstante svar på den slags spørgsmål end deres kolleger i samfundsvidenskaberne. Men af en eller anden grund fremkalder arbejdet i astronomi, fysik, kemi eller biologi alligevel sjældent de diskussioner om grundlæggende ting, som idag ofte synes at være en speciel sygdom blandt psykologer og sociologer.²⁷

Denne oplevelse får naturligt Kuhn til at fundere over, hvilke forskelle på natur- og samfundsvidenskab, der ligger til grund for denne meget forskellige dyrkelse af metodologiske diskussioner.

Den gængse popperske forklaring kunne være som følger: Samfundsvidenskaben omhandler noget så foranderligt som samfundet og dets indbyggere, hvorfor både problemer og metoder naturligt må revideres løbende med disse størrelses forandring, og derfor meget bliver et spørgsmål om den enkelte videnskabsmands subjektive bedømmelse. Naturvidenskaben omhandler derimod den — set i dette teoretiske perspektiv — uforanderlige størrelse naturen, hvorfor de empiriske data, en given teori skal sammenlignes med, ikke giver anledning til synderlig diskussion. Naturvidenskabelige problemer og metoders tilladelighed er derfor alene karakteriseret ved, at de muliggør sammenligning med "den virkelige verden"; de skal være falsificerbare (se side 83).

En sådan metodologisk tese om, hvad man kunne kalde "naturvidenskabens uafhængighed", får naturligt denne til at fremstå som et isoleret og rent rationelt foretagende. Ifølge Kuhn er dette helt uden hold i virkeligheden. Det er fælles for al videnskab, også naturvidenskaben, at den kun fremstår rationel set i en videre sammenhæng bestående af

²⁷Ibid., s. 35

videnskabsmændenes psyke, sprog, vaner osv. Disse er i alt væsentligt bestemt af, at videnskabsmændene uddannes og lever blandt ligesindede, og altså er en del af en større eller mindre videnskabelig gruppe; et *videnskabeligt samfund*.²⁸

Paradigme, faglig matrix og normalvidenskab

Men hvad er det så for karakteristika ved naturvidenskab, der forårsager den ofte manglende diskussion af grundlæggende ting? Kuhn fører det selv tilbage til den epistemologiske tilgang, det enkelte videnskabelige samfund har til sit fagområde. Hvor samfundsvidenskaben er helt på det rene med, at den "sandhed", man søger, er et subjektivt spørgsmål, der nødvendigvis må skifte med tiden, er de enkelte naturvidenskabelige samfund oftest styret af et *paradigme*. Ved et paradigme forstår Kuhn i første omgang et tidligere anerkendt forskningsresultat, som har følgende to egenskaber: For det første har det ydet noget, som er tilstrækkeligt enestående til at trække en stabil gruppe af tilhængere væk fra konkurrerende videnskabelige aktiviteter. For det andet er det tilstrækkelig uafsluttet til at overlade løsningen af en lang række problemer til den nye gruppe udøvere.²⁹

Et sådant paradigme sætter efter Kuhns mening standarder for både problemer, metoder og mulige løsninger for den videnskabelige gruppe — det videnskabelige samfund — som paradigmet samler. I løbet af bogen kommer Kuhn mere og mere til at identificere et paradigme med disse standarder, hvilket giver en del sprogforvirring. For at præcisere sammenhængen, lader Kuhn derfor paradigme, i den egentlige betydning af "mønstereksempel", indgå som en del af et nyt begreb; en *faglig matrix*. Dette begreb præsenteres i bogens efterskrift fra 1969, efterfulgt af en gennemgang af de — efter Kuhns mening — fire vigtigste elementer:³⁰

- *Symbolske generalisationer*. Hermed tænker Kuhn på de elementer i den faglige matrix, som er formelle, eller som let kan formaliseres. For at forklare begrebet nærmere nævner Kuhn, at man relativt nemt kan lære dem udenad, men først forstår dem

²⁸Indledning af Knud Haakonsson i Kuhn [1], s. 7.

²⁹Kuhn [1], s. 48

³⁰Ibid., s. 188-93

rigtigt, når man kan bruge dem i praksis. Et eksempel fra "vores verden" er den sammenhæng mellem forskellige grupper af tal, der — omend forskellig over tid — udtrykkes med ideen om en funktionel afbildning.

Mehrtens erstatter de symbolske generalisationer i sin tilpasning af Kuhns teori til matematik, erstatter Mehrstens de symbolske generalisationer med begreber. Et eksempel på et begreb indenfor den formalistiske tradition er Eulers funktionsbegreb. For den konceptuelle traditions vedkommende er grænseværdibegrebet og kontinuitetsbegrebet vigtige eksempler.

- *Tro på bestemte modeller.* Kuhn bruger her modelbegrebet bredt, så det også omhandler brugen af analogier og metaforer, samt mere overordnede trosopfattelser lige fra heuristiske til ontologiske modeller.
Et eksempel herpå er Eulers tro på, at man kan benytte uendelige rækker på samme måde som endelige. For bolzanos vedkommende indsnævres dette til troen på brug af konvergente rækker. Desuden kan fremhæves Bolzanos mere overordnede tro på den deduktive metode.

- *Værdier.* Det være sig værdien af hele teorier, af forudsigelser, af præsentationen af videnskabelige emner, osv. Værdier skal forstås i betydningen *ideelle* fordringer, som videnskaben stræber efter at leve op til. Da der således ikke er tale om absolutte krav, kan der opstå situationer, hvor videnskaben ikke er i stand til at leve op til disse fordringer. Her tænkes på situationer, hvor der opstår problemer der ikke kan løses. Disse problemer kaldes *anomalier* og afviger altså fra de ideelle fordringer – værdierne.
Som et eksempel på en anomali på Eulers tid, kan nævnes divergente rækker. Som set side 22 kan Euler ikke forstå, hvori paradokset (den divergente række) består, og i den forstand løser han ikke sit problem, men efterlader det som en anomali.
Mange værdier er fælles for så godt som alle teorier; de skal være modsigelsesfrie og plausible, så vidt muligt enkle, og deres forudsigelser skal være nøjagtige. Sådanne værdier skaber fællesfølelse blandt alle grupper af videnskabsmænd. Der er imidlertid også en lang række af værdier, der er med til at konstituere det enkelte videnskabelige samfund. For eksempel var man i 1700-tallets matematik gået bort fra grundværdien om intuitivt forståelige te-

orier, og holdt sig nu til teoriernes praktiske anvendelighed som primært vurderingsgrundlag (se afsnit 2.1.1). I forbindelse med Eulers paradoks, kan det siges at værdien *anvendelighed* tæller højere end forklaring. Dette fremgår når han siger, at han løser paradokset gennem fortsat manipulation, og når det ønskede resultat, men uden at give en forklaring på problemet. Indenfor 1800-tallets matematik, hvor strenghed i analysen bliver en meget vigtig værdi, må man formode, at de havde reageret på et sådant paradoks ved at søge i grundlaget. Eksempelvis skelner allerede Bolzano mellem divergente og konvergente rækker.

- *Paradigmer*, her som nævnt brugt i betydningen “normdannende mønstereksempel”. Et eksempel fra Kuhn’s verden, fysikken. er Newton’s *Principia*. Et oplagt eksempel fra matematikkens verden er Euklids elementer eller — i forbindelse med dette projekt — Cauchys bog “Course d’Analyse Algébrique”.

Alle elementerne i den faglige matrix er med til at fastlægge retningslinier for det videnskabelige arbejde indenfor et givet videnskabeligt samfund. Det afgrænses hvilke typer af “gåder”, det er interessant at få svar på (værdier), at der højst sandsynligt findes svar på disse gåder (tro på fælles modeller), samt metoder hvormed man kan arbejde på at finde disse svar (paradigmet). Det videnskabelige arbejde består så i at løse disse gåder. Lykkes det ikke, vil det i første omgang blive tilskrevet mangel på tålmodighed eller intelligens hos de pågældende forskere. Mehrtens mener, at der bør tilføjes en faktor til Kuhns teori. Han fremhæver den eksterne sociale baggrund, dvs. udefrakommende politiske og sociale påvirkninger. Konkret i forhold til vores to traditioner mener han, at overgangens beliggenhed i perioden mellem Euler og Bolzano primært skyldes, at antallet af universiteter steg markant i denne periode. Herved blev det muligt, ja endda nødvendigt i relation til undervisning, at vende næsen indad, og som universitetsmatematiker ernære sig ved grundlagsorienteret beskæftigelse med matematik med stor vægt på strenghed i analysen.³¹

Forskning, som hviler fast på en given faglig matrix, kalder Kuhn *normalvidenskab*. Om sammenhængen her skriver han:

Mennesker, hvis forskning hviler på fælles paradigmer [faglig matrix], er forpligtet af de samme regler og normer for

³¹ Mehrtens., s. 314

videnskabeligt arbejde. Denne forpligtelse, og den tilsyneladende enighed den bevirker, er forudsætningen for normalvidenskaben, dvs. for skabelsen og fortsættelsen af en bestemt forskningstradition.³²

Normalvidenskaben fungerer altså, fordi det fælles grundlag gør det muligt ikke at skulle "starte med Adam og Eva" hver gang et forskningsprojekt indledes. Ved at have givet svarene på, hvad man måtte anse som væsentlige grundlagsproblemer, muliggør den faglige matrix en utrolig effektiv videre forskning (gådeløsning). Kuhn anser derfor heller ikke normalvidenskabens ofte manglende ontologiske, epistemologiske og metodologiske overvejelser som værende en svaghed. Tværtimod. Han anbefaler de arbejdende videnskabsmænd at holde sig til normalvidenskaben så vidt, det overhovedet er muligt. Hvis man har et velsmurt maskineri, der kan svare på de spørgsmål man kommer med, hvorfor så begynde at skille maskinen ad, med fare for ikke at kunne samle den igen?

Det bemærkes her, at Eulers måde at løse sit paradoks på er helt i overensstemmelse med Kuhns anbefalinger.

Nye teories fremkomst; krise og revolution

Hermed nærmer vi os et punkt, der afgørende skiller Kuhn fra Lakatos; det ontologiske grundsyn. Falsifikationisterne lægger som tidligere omtalt hovedvægten på gendrivelsen af allerede eksisterende påstande/beviser, idet denne proces fører videnskaben videre ad "den uendelige vej mod den sande opfattelse af verdens indretning". Dette må nødvendigvis forkastes af Kuhn. En vurdering af, hvilken opfattelse, der er den sande, kræver et neutralt iagttagelsessprog. Det er i sig selv en umulighed, idet også dette sprog må hvile på en række grundantagelser – en faglig matrix, hvorved neutraliteten forsvinder.³³

Kuhn fornægter altså, at man kan få adgang til sand viden. Herved mangler vi stadig at få forklaret to vigtige spørgsmål, før vi kan sige vi har en sammenhængende teori: Hvorledes opstår en faglig matrix? og hvordan foregår overgangen fra en faglig matrix til en anden?

³²Kuhn [1], s49

³³Ibid., s. 209

Her er paradigme (i betydningen "mønstereksempel") det afgørende begreb. Ifølge Knud Haakonssen³⁴ mener Kuhn, at også perioden før en faglig matrix dannes ofte vil indeholde elementer af fælles værdier, sprog og opfattelsesmåder mellem flere rivaliserende skoler af filosofisk tilsnit. Altså nogle af de vigtigste elementer i den faglige matrix. Men de mangler et paradigme, som kan samle alle de rivaliserende parter til et sammenhængende videnskabeligt samfund.

Det samme gør sig gældende ved overgangen mellem to faglige matricer når der opstår anomalier, dvs. når et videnskabeligt samfund møder problemer, det ikke kan løse. Da vil anomalierne i første omgang blot blive lagt hen i bunken af "gåder", og altså blive accepteret som et hidtil uløst problem. Men situationen kan skifte karakter, hvis det samme problem viser sig igen gang på gang, hvis problemet angår centrale led i den faglige matrix, der konstituerer det videnskabelige samfund, eller evt. hvis problemet fremføres af særligt prominente medlemmer af det videnskabelige samfund. I så fald kan man risikere, at en del af medlemmerne af det videnskabelige samfund holder op med at tro på paradigmet som mønstereksempel. Disse forskere vil så få følgeskab af flere, efterhånden som paradigmets utilstrækkelighed tydeliggøres yderligere, og efterhånden som det socialt, politisk og evt. religiøst bliver mere og mere legitimt at være tvivlende. Hermed er den faglige matrix brudt sammen, og Kuhn snakker om, at det videnskabelige samfund er i *krise*. Med andre ord; når elementerne i den faglige matrix har en dårlig konstellation, er det videnskabelige samfund i *krise*.

Et sammenbrud er som regel en langstrakt proces. Det tager først fart, når der viser sig et nyt og alternativt videnskabeligt resultat, som formår at få i det mindste nogle få forskere til at tro på det som et paradigme. Herefter følger så en periode med rivaliserende grupper af tilhængere af de to paradigmer. En sådan rivalisering kalder Kuhn en *videnskabelig revolution*.

Rationalitet og relativisme

Revolutionsperioden afsluttes ved, at et af de nye paradigmer viser sig i stand til at trække videnskabsmændene bort fra rivaliserende skoler, således at der dannes et nyt sammenhængende videnskabeligt samfund.

³⁴Ibid., s. 16-17

Mange af det gamle paradigmes repræsentanter lader sig dog aldrig overbevise. Det er primært de ældre videnskabsmænd, for hvem det gamle paradigmes standarder er blevet en livsform. For dem bliver det et spørgsmål om, at "deres" paradigme dør med dem. Men de yngre videnskabsmænd, der har en klarere bevidsthed om, at det gamle paradigme er ved at bryde sammen – Hvad styrer deres overbevisning? Her er Kuhn blevet mødt med voldsom kritik. Mange af kritikerne mener, at hans teori om den manglende tilgang til "sand" viden fører til en påstand om, at al videnskabelig udvikling er irrationel, og at enhver vurdering af eventuelle fremskridt er relativistisk. En sådan holdning er i uoverensstemmelse med den akkumulation af viden, som historien viser os er faktisk forekommende. Kuhn imødegår denne kritik i sit efterskrift til "videnskabens revolutioner", hvor han bl.a. skriver:

Lad os forestille os et udviklingstræ, der fremstiller udviklingen af de moderne specialvidenskaber fra deres fælles oprindelse i f.eks. primitiv naturfilosofi og teknik. En linje trukket op gennem dette træ uden nogen sving bagud lige fra stammen til spidsen af en eller anden gren, ville spore en rækkefølge af teorier, som var forbundet ved oprindelse. Hvis vi betragter to tilfældige teorier af denne art, som er valgt ved punkter, der ikke er for nær deres oprindelse, så skulle det være let at opstille en række kriterier, som ville sætte en uafhængig iagttagelse i stand til at skelne den tidligere fra den senere teori igen og igen. Blandt de nyttigste ville være: nøjagtighed i forudsigelse, især med kvantitative forudsigelser; forholdet mellem specialiserede og dagligdags emner; antallet af forskellige problemer, der er løst. Sådanne værdier som enkelthed, omfang og forenelighed med andre specialområder ville være mindre nyttige til dette formål, om end de også er vigtige bestemmelser ved det videnskabelige liv. Disse lister er endnu ikke alt, hvad der er påkrævet, men jeg er ikke i tvivl om, at de kan fyldes ud. Hvis de kan det, så er videnskabelig udvikling ligesom den biologiske en ensrettet og irreversibel proces. Senere videnskabelige teorier er bedre end tidligere til at løse gåder i de ofte helt forskellige situationer, de anvendes på. Dette er ikke en relativists synspunkt, og det viser, i hvilken forstand jeg med overbevisning tror på videnskabeligt fremskridt.³⁵

³⁵Ibid., s. 208-9.

Essensen af hans imødegåelse er følgende: Kuhn holder (selvfølgelig) fast ved sit ontologiske grundsyn, og ved sin teori om, at en lang række faktorer udenfor den egentlige videnskabelige verden påvirker udviklingen. Men det betyder ikke, at videnskaben ikke kan have noget rationelt vurderingsgrundlag. Blot at det ikke er flest muligt modstående falsifikatorer, der styrer rationaliteten.

4.4 Forskelle og ligheder på et overordnet plan

Efter nu at have gennemgået de tre videnskabsteorier, vil det være på sin plads at tage tråden op fra indledningen, for at få mulighed for at diskutere af teorierne i forhold til hinanden. Dette skal ses i sammenhæng med, at vi i det følgende vil benytte teorierne, uden hensyntagen til de videnskabsteoretiske diskussionsspørgsmål, der ligger bag. Derfor tages denne diskussion nu, så den videnskabsteoretiske baggrund for vores beskrivelse kommer til at fremstå klart, inden beskrivelsen påbegyndes.

Som sagt har modsætningsforholdet, mellem på den ene side Poppers falsifikationisme-teori og på den anden side Kuhns teori, givet anledning til mange diskussioner. Af disse har bla. Lakatos ladet sig inspirere og på nogle punkter overbevise, hvilket vi allerede har gjort opmærksom på. Hvad der måske fremgår mindre tydeligt er, at Kuhn også har afpudset sit standpunkt. Og hvad med Koetsier; hvilke forskelle og ligheder i forhold til Kuhn efterlader hans teori? Det er disse tilpasninger, og de diskussionspunkter de stadig efterlader, der er emnet for dette afsnit.

I indledningen til dette kapitel blev det fremhævet, at Poppers og Kuhns udgangspunkter på mange måder er ens, men at falsifikationisterne på trods heraf kom i vanskeligheder på grund af Kuhns kritik. Denne kritik skal kort ridses op igen, da den har betydning for den tilpasning der finder sted.

Ifølge Kuhn viser videnskabshistorien, at falsifikation ikke er en nødvendig forudsætning for videnskabelighed og videnskabelig udvikling. Han mener derimod, at den falsifikationistiske metode er et logisk kriterie,

der er knyttet til den enkelte videnskabsmands arbejde i de normalvidenskabelige perioder. Dette fordi et logisk kriterie kræver et "fælles sprog", eller for at benytte Kuhns eget begreb, en fælles faglig matrix, der ikke er til stede i revolutionære perioder. Som følge af denne opfattelse mener Kuhn, at Popper begår en fejl, ved at fremhæve denne metode som det styrende element for videnskabelig udvikling i kriseperioder. Popper overfører altså ifølge Kuhn karakteristika ved normalvidenskabelige perioder til de revolutionære perioder, for derefter at glemme de normalvidenskabelige perioders betydning.

Popper indrømmer i forhold til denne kritik, at normalvidenskaben eksisterer, men hans reaktion er idealistisk. Han mener ikke at man bør tilstræbe normalvidenskab, da han forbinder denne med en fuldstændig ukritisk holdning til det videnskabelige arbejde. En holdning der nødvendigvis er negativ udfra et falsifikationistisk synspunkt. Popper beskriver Kuhns teori som en *historisk realisme*³⁶ og fremhæver, at forskellen mellem de to ligger i, at han ikke er relativist, men tror på en "absolut" eller "objektiv" sandhed³⁷.

Popper reagerer altså på Kuhns teori, som var den en videnskabelig metodelære. Dette skal ses i sammenhæng med, at Poppers ontologiske holdning gør det muligt at stille nogle krav til, hvad videnskaben bør, der ikke nødvendigvis er i overensstemmelse med hvad videnskaben er. Kuhn mener i denne sammenhæng, at man ikke skal skelne mellem "bør" og "er", og prøver at integrere begge i sin teori. Kuhns argumentation for denne skelnen er dog ikke helt holdbar, og Popper har således ramt Kuhn på et ømt punkt.³⁸

Ved at skelne mellem "er" og "bør", kommer Popper så at sige uden om Kuhns kritik vedrørende falsifikationismens uoverensstemmelse med virkeligheden. Popper ændrer således heller ikke holdning som følge af de mange diskussioner med udgangspunkt i modsætningen Popper — Kuhn.

Dette er imidlertid tilfældet for Lakatos, hvis første teori, er helt i overensstemmelse med Poppers falsifikationisme. MP&R er således en beskrivelse af matematikken hvori det fremhæves, at fremskridt udspringer af falsifikation. Med MSRP tilnærmer Lakatos sig Kuhn på en lang række afgørende punkter. Ved at indføre begrebet hård kerne (side 91) som fællesnævner for en række teorier i en tidsperiode, tager han dele af Kuhns faglige matrix til sig. Begge taler de nu om et fælles grundlag og metode, der er karakteristiske for en række teorier i

³⁶Popper s.55

³⁷Ibid s.56

³⁸Haakonsen i indledningen til Kuhn [1] s.21

en tidsperiode. I lighed med Kuhn fremhæver Lakatos, at denne hårde kerne beskyttes mod falsifikation. Hermed har Lakatos taget et skridt væk fra den stærke falsifikationisme, idet man ifølge MSRP ikke skal afvise teorier fuldstændigt, når der eventuelt viser sig at være problemer. Den afgørende forskel mellem Lakatos og Kuhn kommer bedst til udtryk i deres beskrivelse af overgangen fra et forskningsprogram eller paradigme til et andet. Lakatos mener at udvælgelsen sker gennem en rationel proces, der sikrer at videnskaben er en stadig bedre tilnærmelse til den "absolutte sandhed". På dette punkt fastholder Lakatos altså falsifikationismens ontologiske grundholdning. I den første udgivelse af "Videnskabens revolutioner" afviser Kuhn fuldstændigt, at diskussionen mellem to paradigmer kan være rationel. "Kampen" og dens afgørelse kan umuligt være et spørgsmål om logik, da.

To paradigmer er nemlig ikke alene to forskellige teorier, men to forskellige sprog, to forskellige måder at se verden på, og dermed to forskellige verdener. Der gives derfor ikke nogen objektiv og fælles målestok til at sammenligne dem udfra; specielt findes ikke et iagttagelsessprog, som er neutralt og uafhængigt af paradigmer. Dette betyder for Kuhn, at diskussion mellem to paradigmer aldrig kan blive en rationel diskussion, og valget imellem dem for så vidt må være et irrationelt spring.³⁹

Kuhn har som nævnt modtaget meget kritik i forbindelse med ovennævnte punkt. Hvis valg af paradigmer er en irrationel proces, kan Kuhn ikke argumentere for de fremskridt og den kumulation af viden, som faktisk har fundet sted.

Dette kritikpunkt tager Kuhn højde for i efterskriftet til den senere udgivelse af hans bog, hvilket fremgår af gennemgangen side 109. Han indrømmer her, at der findes et grundlag for en rationel diskussion, der gør det muligt at vælge en teori, der i højere grad er i stand til at løse gåder. Han afviser i samme åndedrag, at rationaliteten består i en afvejning af få eller mange falsifikatorer. Istedet nævner han ting som større nøjagtighed i forudsigelse, forholdet mellem specialiserede og dagligdags emner, antallet af forskellige problemer, der er løst, enkelhed osv..

Kuhn har altså tilnærmet sig i den forstand, at videnskabelig udvikling er en kumulativ proces i det omfang, at fremskridtet kan beskrives

³⁹Ibid. s. 17

udfra nogle værdier. Disse værdier er imidlertid ikke objektive, og der er derfor ikke tale om en stadig tilnærmelse til en "absolut sandhed", men om en voksende evne til at løse gåder. Kuhn holder altså, fast ved sit ontologiske grundsynspunkt. Hermed kan rationalitet og fremskridt udelukkende ses i forhold til værdier, som vi selv har skabt.

Idet vi nu mangler at se på forskelle og ligheder mellem Koetsier og Kuhn, er det oplagt at sammenligne ovenstående med hvad Koetsier kalder vægtning. Som nævnt i gennemgangen side 98, beskriver Koetsier matematisk rationalitet som en diskussion i en retssag. De forskellige teorier og sætninger bedømmes i denne retssag ud fra vægten. Den matematiske rationalitet er ifølge Koetsier med til at skabe fremskridt, når en forskningstradition skal vælges frem for en anden. Denne tilsyneladende enighed mellem Koetsier og Kuhn om hvilke faktorer der sikrer, at man kan tale om fremskridt, er ikke tilsigtet. Kuhn beskriver naturvidenskaberne med udgangspunkt i en ontologisk holdning, der tager afstand fra at rationalitet og fremskridt kan forholdes til en "objektiv virkelighed". Derfor fremhæver han faktorer der er subjektivt værdiladede. Koetsier kommer til samme resultat fordi han er tvunget ud i at se bort fra "virkeligheden", idet matematikken ikke har nogen empiri.

Koetsier og Kuhn kommer altså til det samme resultat ud fra vidt forskellige udgangspunkter. Der er derfor heller ikke tale om en tilsigtet tilnærmelse fra Koetsiers side, og han er formentlig ikke selv klar over ligheden. At han ikke er opmærksom på, at hans beskrivelse minder om Kuhns, kan bestyrkes i hans afvisning af Kuhns teori⁴⁰.

En vigtig pointe i forbindelse med ligheden mellem Koetsier og Kuhn er, at den kun fremkommer, hvis Koetsier betragtes udfra sin rationalitetstese. Sammenholdes derimod hans falsifikationstese med Kuhns fremstilling af fremskridt, er de uenige. Imidlertid er det netop i forbindelse med falsifikationstesen, at Koetsier kommer i problemer. Dette idet han, som vi har set, ikke får defineret hvori den svage falsifikation består, eller den matematiske empiri, om man vil. I denne forbindelse kan man spørge sig selv, hvorledes Koetsier kan adskille den rationalitet, udfra hvilken den bedste teori vælges, fra det svage falsifikationskriterie, der jo netop anviser hvornår en given teori skal forkastes til fordel

⁴⁰Koetsier s.200-203

for en anden. Eller med andre ord; hvis der foretages en rationel udvælgelse mellem konkurrerende forskningsprogrammer, hvornår falsificeres der da? — er det ikke netop hvis en teori vælges ud fra vægten at en anden kastes bort (falsificeres "svagt")? Løsningen på Koetsiers problemer kan således findes i hans egen teori. Hvis han havde undladt den skarpe adskillelse af rationalitet og falsifikation og istedet havde sagt, at den svage falsifikation er styret af vægten af de forskellige teorier, var han ikke endt i de grundlæggende ontologiske spørgsmål, om hvilke han skriver, at der ikke findes nogle tilfredsstillende svar.

Et andet punkt hvor Koetsier tilnærmer sig Kuhn, er hans opdeling af det videnskabelige samfund i niveauer. Hos Koetsier er niveauerne beskrevet direkte, som et mikroniveau og et makroniveauet, hvor der stærke falsifikation kun forekommer på mikroniveauet. Denne opdeling kan tages som udtryk for en tilnærmelse til Kuhn, hvis den ses i sammenhæng med et af Kuhns kritikpunkter i forbindelse med Popper. Kuhn mener som nævnt, at Popper overfører karakteristika ved hverdagsforskningen hos den enkelte videnskabsmand (stærk falsifikation på mikroniveauet) i den normalvidenskabelige periode, til videnskabelige revolutioner, der angår hele den faglige matrix (makroniveauet). Koetsiers niveauer, der er en videreførsel af Lakatos henvisning af falsifikation til det beskyttende bælte, tager højde for dele af denne kritik. Tilbage bliver Kuhns distinktion mellem normalvidenskabelige perioder og krise/revolutionære perioder. Her tilnærmer Lakatos og Koetsier sig ikke. De fastholder et mere kontinuert udviklingsbillede, der i overensstemmelse med Poppers beskrivelse af videnskaben, som en lang diskussion.

Alt i alt kan det siges, at Koetsier og Kuhn trods tilnærmelser stadig er uenige om de ontologiske spørgsmål. Hvis holdningerne sættes på spidsen, er Kuhns holdning at videnskabelig viden og udvikling er og bliver noget relativt i og med at den er knyttet til den faglige matrix, og der kan derfor kun tales om fremskridt i betydningen løsning af flere gåder. Koetsier fastholder, i modsætning hertil, at der findes et kriterie, der kan pejle videnskaben hen mod en "absolut" sandhed.

Som sagt vil vi i det følgende benytte Koetsiers og Kuhns teorier og begreber uden at diskutere de underliggende filosofiske uenigheder, der

kommer til udtryk i ovenstående.

Kapitel 5

Opsummering, diskussion og konklusion

5.1 Opsummering

Kapitel 2 var et forsøg på at karakterisere den formalistiske tradition, dels ud fra sekundære kilder og dels ved at tage udvalgte tekststykker af Leonhard Euler som illustrative eksempler.

Det blev, ved hjælp af sekundære kilder, beskrevet, at Euler var spændt ud af to karakteristiske træk ved den tids matematik: For det første idealet fra de gamle grækere om en deduktiv bevisførelse. For det andet den pragmatiske holdning, der udsprang af den store succes matematikken havde som redskabsfag for en lang række tekniske discipliner. Udover gode og mange resultater gav fokuseringen på anvendelse imidlertid også problemer. Der blev arbejdet videre med nye områder, før de gamle var ordentlig grundfæstet. Og de nødvendige begreber var ofte ikke defineret, og i hvert tilfælde aldrig enslydende hos alle matematikere. Dette spændingsfelt førte til en lang række ad hoc-løsninger og efterfølgende induktive "Erasmus Montanus-argumenter". Selv om man uden tvivl var klar over, at der var grundlæggende problemer, var disse et mindre onde set i lyset af de mange nye resultater.

Dette pragmatiske syn på matematikken kom ligeledes til udtryk i de udvalgte dele af Eulers "Introduktio". Blandt andet fremhævede vi det sted, hvor Euler "løser paradokset" gennem fortsat resultatorienterede manipulationer. Desuden er det overordnede indtryk af teksten også, at den er resultatorienteret. Dog skal det tilføjes, at Euler for så vidt

stræber efter strenghed og præcision. Her tænkes f.eks. på hans definition af en funktion, en variabel størrelse osv.. Eulers "Introduktion" afspejlede altså i høj grad tidens "spændingsfelt".

Alt i alt konkluderede vi, at den formalistiske tradition i høj grad var karakteriseret af manglende strenghed i metoden og af et pragmatisk syn på matematikken.

Kapitel 3 omhandlede den første del af 1800-tallet. Her beskrev vi ved hjælp af sekundære kilder, hvordan den matematiske metode radikalt havde ændret sig. En voksende utilfredshed med de problemer, der var opstået som følge af det utilstrækkelige grundlag, medførte at en stor del af arbejdet koncentreredes om, at skabe mulighed for en strengere tilgang til analysen. Dette arbejde bestod primært i at indføre en række nye begreber og definitioner, og stramme op om dem, der allerede var kendt, men formuleret på for løst et grundlag. Cauchys definitioner af h.h.v. funktions- og grænseværdibegrebet blev trukket frem som klassiske eksempler på periodens nye definitioner. *Klassiske* skal forstås i den betydning, at eftertiden betragter Cauchy "Cours d'analyse Algébrique" som mønstereksemplet for det kommende arbejde indenfor matematikken. Dette i overensstemmelse med samtidens reaktion på Cauchys arbejde.

I den efterfølgende gennemgang af et eksempel på periodens metode, tog vi imidlertid fat i en artikel af Bernard Bolzano, der tidsmæssigt er placeret før Cauchy. Denne artikel viste sig at stemme fint overens med den generelle beskrivelse af den nye tradition. For det første fremgår det tydeligt i Bolzanos kritik af tidligere beviser, at han lagde vægt på en opstramning af den matematiske metode. For det andet lykkedes det ham gennem det meste af beviset, at formulere sine definitioner og sætninger klart i matematiske termer. For det tredje er hans metode strengt deduktiv. Herudfra konkluderede vi, at Bolzano tilhører den konceptuelle tradition, og hermed at han var prematur i forhold til traditionen, der først anses for at starte efter ham.

Alt i alt kunne vi give følgende svar på spørgsmålet om, hvad der karakteriserede den konceptuelle tradition: Traditionen er karakteriseret ved en række nye begreber, mere præcise definitioner på de gamle, og ved en mere stringent metode. På spørgsmålet om hvad der fremprovokerede denne udvikling, svarede vi, at det gjorde den stigende kritik af problemerne og det heraf følgende krav om strenghed.

Tilbage stod så det åbne spørgsmål om, hvad det var der gjorde, at problemerne nu vejede tungere end kravet om resultater. Dette, samt spørgsmålet om *hvorfor* Bolzano var prematur i forhold til den koncept-

uelle tradition, ledte os naturligt over i kapitlet om videnskabsteoretiske forklaringsmodeller for videnskabens udvikling.

I **kapitel 4** konstaterede vi, at der var mange ligheder mellem Koetsiers og Kuhns teorier for videnskabelig udvikling. Mange af deres begreber i forbindelse med en stationær beskrivelse af videnskaben dækker over de samme ting. Det blev desuden pointeret, at disse ligheder er fremkommet ved en gradvis indsnævring af gabet mellem Poppers falsifikationisme og Kuhns tidlige socio-psykologiske teori.

I spørgsmålet om videnskabelige fremskridt endte Koetsier og Kuhn med både at være enige og uenige. Hvis Koetsier betragtes ud fra sin rationalitetstese, er de enige et langt stykke af vejen. Dette i forbindelse med beskrivelsen af de faktorer, en rationel udvælgelse sker på baggrund af. Kuhn fastholder imidlertid distinktionen mellem normalvidenskabelige og revolutionære perioder, og knytter fremdrift til den normalvidenskabelige periode. Koetsier knytter derimod fremdriften til de progressive forskningsprogrammer og fastholder sin falsifikations-tese.

Alt i alt efterlod diskussionen nogle forskelle på det ontologiske plan. Kuhn fastholder at videnskabelig viden og udvikling er relativ, i og med at den er knyttet til den faglige matrix og at der kun kan tales om fremskridt i betydningen løsning af flere gåder. Som modsætning hertil tror Koetsier, at der findes et kriterie, der kan pejle videnskaben hen mod en "absolut" sandhed. Han fastholder derfor også, at matematikken er quasi-empirisk, selv om det ikke lykkes ham at præcisere, hvori det empiriske består.

5.2 Diskussion

De generelle beskrivelser af henholdsvis den formalistiske og den konceptuelle tradition, viste sig alt i alt at stemme fint overens med de udvalgte eksempler. Tilbage står nu at benytte det videnskabsteoretiske begrebsapparat til en forfinelse af karakteristikken af de to perioder. Herved vil begrebsapparatet blive sat i gang således at en diskussion af overgangen kan tages. De diskussionsspørgsmål, der har relevans i forhold til det billede, vi allerede har tegnet, er dels en forklaring på hvad der gjorde, at problemerne begyndte at veje højere end resultaterne og dels hvorfor Bolzano var præmatur i forhold til den tradition

han tilhører.

5.2.1 Karakteristik af den formalistiske og den conceptuelle forskningstradition

I det følgende vil vi benytte og diskutere de begreber, der har relevans i forbindelse med en forfinelse af karakteristikken af de to forskningstraditioner.

Forskningstradition og videnskabeligt samfund

Disse begreber er overlappende i den forstand, at både forskningstraditioner og videnskabelige samfund beskrives som overordnede bevægelige størrelser, der er påvirket af såvel indre som ydre faktorer. Herudover dækker begge begreber over en fælles overbevisning hos alle de videnskabsmænd, der er medlemmer af det/den.

Denne fælles overbevisning beskrives i de to teorier som henholdsvis den hårde kerne og den faglige matrix.

Hård kerne + beskyttende bælte/faglig matrix

At begreberne hård kerne og faglig matrix har mange lighedspunkter, er allerede antydnet med de fælles eksempler, der blev nævnt under gennemgangen i forrige kapitel. Hvor Lakatos/Koetsier nævner fundamentale forudsætninger og metodologi som elementer af den hårde kerne, nævner Kuhn symbolske generellisationer, tro på bestemte modeller, værdier og paradigme som kardinalpunkter i den faglige matrix. Begreberne er dog stadig forskellige, idet Kuhns faglige matrix implicit indeholder hans relativistiske syn på videnskaben, idet han taler om "tro" på modeller og "værdier".

Den generelle beskrivelse af den hårde kerne/faglige matrix er helt i overensstemmelse med vores tidligere konklusioner vedrørende h.h.v. Euler og Bolzanos arbejde. Blot kan begreberne give en forfinet formulering:

Både Koetsier (Lakatos) og Kuhn har ideen om, at videnskabsmænd oftest vil beskytte deres hårde kerne/faglige matrix. Dette fænomen er hos Lakatos knyttet til "det beskyttende bælte". Eulers løsning på sit "paradoks" er tidligere trukket frem som illustration af, at denne karakteristik i høj grad gælder ham. For at eksemplificere at vi også mener det gælder Bolzano, må vi tage udgangspunkt i teorien om, at han havde en intuitiv korrekt forståelse af de reelle tal. I så tilfælde er han klar over, at der mangler noget, for at beviset kan siges at være helt igennem strengt. Den manglende omtale af det problem, han har, kan ses som beskyttelse af hans fordring om klarhed i bevisførelsen.

Symbolske generalisationer og begrebsapparat

Når Kuhn taler om symbolske generalisationer og Koetsier om akso-matisk grundlag eller begrebsapparat kan det opfattes som det samme karakteristika. Forskellen ligger i, at Koetsier udelukkende betragter matematik. I denne forbindelse kan det nævnes, at Mehrtens, i sin tilpasning af Kuhns teori til matematik, netop beskriver begreber som afløser for symbolske generalisationer, .

At Euler og Bolzano havde hver deres begrebsapparat, er uden for diskussion. Opfattelsen af, hvad en funktion er og mere specifikt kontinu-itetsbegrebet ændrede sig. Herudover havde den konceptuelle tradition begreber, som den formalistiske ikke havde — grænseværdibegrebet er her et vigtigt eksempel.

Tro på bestemte modeller

Under gennemgangen fremgik det, at Kuhn her bruger modelbegrebet meget bredt. Som et eksempel på en meget generel model nævnte vi Bolzanos tro på den deduktive opbygning af matematikken, og som et eksempel på en mere håndfast heuristisk model, har vi netop igen omtalt Eulers uforbeholdne manipulering med uendelige rækker. Som parallel hertil kan nævnes Bolzanos tro på at det er nødvendigt, at be-grænse sig til de *konvergente* rækker.

Tro på bestemte modeller er altså også i vores tilfælde et karakteristika ved de to forskningstraditioner. (Koetsiers metodologi kan ses som en variant af eller indeholdt i dette begreb).

Ud fra disse elementer i den faglige matrix / hårde kerne kan vi bekræfte, at der er tale om to forskellige forskningstraditioner. De har forskelligt begrebsapparat, forskellige metoder, og tror på forskellige modeller.

Hertil kunne tilføjes Mehrtens pointering af forskellen i de eksterne forhold. I forhold til vores eksempler og den øvrige belysning af vores case, har vi ikke grundlag for at bedømme denne faktors indvirkning. Vi kan blot konstatere, at det umiddelbart lyder fornuftigt, og at det et punkt der kunne være interessant at undersøge nærmere.

Fremdrift — Normalvidenskab, rationalitet og falsifikation på microniveauet

Kuhns begreb *normalvidenskab* er et generelt udtryk for, at videnskabsmænd, der tilhører et videnskabeligt samfund, er koncentreret om at løse "gåder". Det gælder også i matematik, omend "gåderne" her er af en lidt anden karakter, end gåderne i empiriske videnskaber som fysik, kemi m.v. I relation til dette er forskningsprojekter blot en beskrivelse af arbejdet med sådanne gåder under påvirkning af den givne forskningstradition / det givne videnskabelige samfund.

Kuhns omtale af normalvidenskaben som det mest progressive stade i udviklingsprocessen, forklarer fint 1700-tallets mange nye resultater. Det er tydeligt, at den brede enighed om nytten af at manipulere med uendelige rækker, og accepten af adhoc-løsninger som videnskabeligt holdbare, var en forudsætning for Eulers tro på sine resultater, og hans umiddelbare fremstilling af dem. Uden disse faktorer, havde "paradokset" med stor sandsynlighed afstedkommet en forkastelse af teorien. I forhold til dette, må det afvises at der er tale om stærk falsifikation som vejen til fremskridt på mikroniveauet.

Det er allerede tidligere konkluderet, at generalitet og anvendelighed var afgørende fordringer i den formalistiske tradition, og strenghed i bevisførelsen var det i den konceptuelle.

At dette er ofte forekommende værdier, pointerer Koetsier ved at nævne dem blandt sine mål for vægten af sætninger og beviser. På dette punkt, der angår hvad Kuhn generelt ville kalde udvælgelsen af interessante gåder, opnår Koetsier en væsentlig fordel ved at koncentrere sig om udvælgelseskriterierne på ét fagområde. Pointeringen af, at tidligere mislykkede forsøg øger vægten af et bevis når det endelig accepteres som

vellykket¹, er således uhyre relevant i vores tilfælde. Når Bolzano i sin indledning nævner tidligere mislykkede beviser af "Bolzos sætning" som en væsentlig grund til sit eget emnevalg, og vi ved, at Euler også forgæves har forsøgt sig, kan det således ikke skyldes manglende interesse for selve beviset, at artiklen ikke fik mere opmærksomhed.

Bolzos bevis skulle således ifølge Koetsier vægte til fordel for den konceptuelle tradition i en rationel udvælgelsesprocess.

5.2.2 Skiftet fra den formalistiske til den konceptuelle tradition

Overgangen

Beskrivelserne i kapitel 2 og 3 førte til den konklusion, at problemerne i den formalistiske tradition virker som en afgørende faktor ved overgangen fra den formalistiske til den konceptuelle tradition.

Af diskussionen i afsnit 4.4 fremgår det, at Koetsier fastholder falsifikation i en svag form som baggrunden for forkastelse af teorier. Dette på trods af sin rationalitetstese. Herved kommer han i problemer. Falsifikationstesen afkræver ham en redegørelse for den matematiske empiri, der falsificeres i forhold til, hvilket han indrømmer ikke at kunne give. Dette problem slipper Kuhn uden om med sit anomali-begreb. Den "virkelighed", der her skaber problemer, er indeholdt i den faglige matrix. Så længe de løste gåder langt overstiger anomalierne, vil det beskyttende bælte kunne opsluge dem, som tilfældet var, da Euler udgav "Introductio" i 1748. Overgangen til den konceptuelle tradition sker, fordi anomalierne når op på et uacceptabelt højt antal, og begynder at vedrøre grundlæggende ting i den faglige matrix. Efter vores mening har Kuhns teori her et væsentligt fortrin, i og med den i modsætning til Koetsiers rummer en *mulig* forklaring på overgangen.

Eulers ad-hoc løsning viser os, at anomali-begrebet faktisk eksisterer i den forstand, at Euler ikke løser det grundlæggende problem bag "paradokset", men så at sige efterlader det som et tankevækkende faktum. Herudover kan der ikke være nogen tvivl om, at anomalien føre til vanskeligheder i den faglige matrix. Her tænkes specielt på den tro, at uendelige summer altid giver mening, hvilket igen falder tilbage på funktionsbegrebet. Det er således nemt at forestille sig processen når

¹Koetsier, s. 170

først den er i gang. Mere vanskeligt er det imidlertid stadig at bedømme, hvor mange anomalier der skal til, eller hvor grundlæggende de ting, anfægter skal være.

Som et eksempel på en reaktion på problemerne har vi Bolzano. Han kritiserer tidligere bevismetoder, eller med andre ord; han angriber vigtige dele af tidligere faglige matricer. Denne boren i grundlaget kan ses som et ønske om at komme anomalier til livs.

Vores materiale er desværre for snævert til at vi kan argumentere for, hvorvidt der er tale om en revolution i Kuhnsk forstand, eller en uendelig "diskussion" i overensstemmelse med Koetsiers falsifikations- og rationalitetstese.

I en diskussion af, hvorfor Bolzano var præmatur, kommer begreber og paradigmer som elementer i den faglige matrix os til stor hjælp:

Paradigmer

I karakteristikken af paradigme-begrebets snævre betydning af mønster-eksempel, fremhæver Kuhn dets særstatus i forhold til de øvrige elementer i matricen. Hovedparten af de øvrige elementer vil ifølge Kuhn også være til stede, før et videnskabeligt samfund/en forskningstradition konstitueres. Dette sker først med fremkomsten af et forskningsværk, der får rollen af mønstereksempel. Denne beskrivelse er helt i overensstemmelse med situationen omkring Bolzano. Han havde både værdier og faste arbejdsmodeller, der svarede til de senere udnævnte karakteristika ved den konceptuelle tradition. Men først med fremkomsten af Cauchys bog "Course d'Analyse Algèbrique" i 1821, fik man et værk, der kunne samle traditionen.

Bolzano var altså præmatur, fordi han havde de "rigtige" ideer, men ikke skabte værk, der fik status af paradigme!

Begreber

Til et fyldestgørende svar hører nu at forklare, hvorfor "Course d'Analyse Algèbrique", og ikke noget Bolzano skrev, blev det nye paradigme. Her vil vi fremdrage forhold:

For det første, fremstillingen af de nye tanker og ideer. I forhold til Bolzano og Cauchy, er det ikke så meget den forståelse, der ligger bag det

enkelte begreb, der er det afgørende. De havde begge to en glimrende og enslydende forståelse for grænseværdier og funktioner, og de kun fire år, der var mellem udgivelsen af "Rein Analytischer Beweis" (1817) og "Course d'Analyse Algèbrique" (1821), usandsynliggør tidsfaktoren som det afgørende. Det afgørende er den klare og præcise fremstilling Cauchy giver af f.eks. grænseværdibegrebet. Hermed gjorde han det nemt for sine samtidige at optage hans anskuelse af tingene. En sådan "letlæselighed" kan man dårligt tillægge Bolzano. For hans vedkommende skulle man, selv med vores moderne bagklogskab til rådighed, af og til nærlæse hans fremstilling så det grænser til overfortolkning, for at vride den samme information ud af ham. I den forbindelse kan man forestille sig, at hans samtidige må have haft meget store problemer med at forstå hans ideer.

For det andet var omfanget og "pr-arbejdet" bag de to udgivelser vidt forskellig. Cauchys fremstilling var en samlet beskrivelse af hele analysen i en stor bog, mens Bolzano kun behandlede dele af analysen, der blev offentliggjort i mindre artikler. Opmærksomheden om hver enkelt af Bolzanos udgivelser, har derfor haft svært ved at måle sig med Cauchys. Dette nok i første omgang på grund af forskellen i omfang. Bolzano fik således ret i sine bange anelser, når han i slutningen af indledningen til "Rein Analytischer Beweis" skriver om sine små publikationer:

Hvis jeg skulle fortsætte på denne vis, hvilket for mig virker som det bedste, er den eneste tjeneste, jeg må bede offentligheden om, at denne ene artikel ikke bliver oversat på grund af dens ringe omfang, men snarere undersøgt med al mulig strenghed, og at resultatet af denne undersøgelse gøres offentlig kendt. På denne måde kan eventuelle uklarheder forklares tydeligt, og hvad der er helt forkert vil blive trukket tilbage. Jo før sandhed og korrekthed opnår generel accept, jo bedre.²

Havde vi været en del af Bolzanos offentlighed, skulle vi gerne bruge endog særdeles god tid på at diskutere talforståelse med ham, for blot at få styret lidt af vores nysgerrighed!

²Bolzano, s. 168

5.3 Konklusion

Spørgsmål 1: *Hvad karakteriserede den formalistiske tradition?*

Den generelle beskrivelse og den konkrete gennemgang af dele af Eulers "Introductio" bekræfter hinanden i, at traditionen kan karakteriseres ved en kolossal produktion af nye teorier, resultater og konkret anvendelige matematiske redskaber, samt et manglende fundament for den bagvedliggende analyse:

Væsentlige *begreber* som funktion og kontinuitet var mangelfuldt definerede, og definitionerne var ofte baseret på geometrisk intuitive forståelser. Grænseværdibegrebet var slet ikke defineret.

Metoden bestod i høj grad i algebraisk manipulation med uendelige rækker. Man troede på, at alle funktioner kunne rækkeudvikles i potensrækker, og man overvejede ikke konvergens-intervaller. Herudover regnede man ubegrænset med infinitesimalerne som om de var endelige størrelser. På trods af, at man tilstræbte strenghed var metoden ofte induktiv eller bundede i geometriske argumentationer. Man accepterede sandsynliggjorte teorier hvor egentlige beviser ikke kunne gennemføres. Traditionens *værdier* lå i en tro på algebraens generalitet. Hertil kommer, at anvendeligheden af teorierne, og de konkrete resultater almindeligvis blev vægtet højere end stringente beviser.

Ovenstående bekræfter vores første tese om, at den formalistiske tradition bar præg af manglende strenghed i metoden og af et pragmatisk syn på matematikken. Samtidig har det videnskabsteoretiske begrebsapparat muliggjort en mere systematisk fremstilling af den indledende, lidt løse forestilling.

Spørgsmål 2: *Hvad karakteriserede den konceptuelle tradition?*

Den konceptuelle tradition er karakteriseret ved ønsket om at skabe strenghed i analysen. Dette ønske gav sig udslag i mange nye og mere præcist definerede begreber, der muliggjorde indfrielsen af dette ønske. *Begreberne* funktion og kontinuitet fik strenge, generelle definitioner, og grænseværdibegrebet blev eksplicit defineret.

Traditionens *metode* var strengt aksiomatisk deduktiv. Hvor man før regnede ukritisk med uendelige rækker, indskrænkede man nu brugen til de konvergente, og man brugte grænseværdisovervejelser frem for at regne med infinitesimaler.

Værdierne var præget af ønsket om strenghed i analysen. Stringente beviser blev sat i højsædet, og arbejdet med at skabe konsistens i analysen havde høj prioritet.

Den sekundære tekst og Bolzanos "Rein analytischer Beveis" understøtter hinanden på ovenstående punkter, hvilket bekræfter vores anden tese om, at den konceptuelle tradition var karakteriseret ved nye begreber, og ved en mere streng metode. Igen har videnskabsteorien systematiseret denne inledende tro.

Spørgsmål 3: *Hvorfor var Bolzano præmatur i forhold til den konceptuelle tradition?*

At Bolzano tilhører den konceptuelle tradition, konkluderer vi på baggrund af artiklens udtrykte ønske om, at skabe en strengere metode, samt ud fra artiklens præcise definitioner af tidligere vagt formulerede begreber. I forhold til traditionens begyndelse med Cauchy i 1821, er Bolzano derfor præmatur med artiklens udgivelse i 1817. *Hvorfor Bolzano var præmatur, eller hvorfor traditionen først skiftede med Cauchy, krævede en nærmere videnskabsteoretisk analyse.* Her kan Kuhns paradigmebegreb give en forklaring. Traditionen skiftede ikke med Bolzano, fordi hans produktion ikke blev betragtet som det mønstereksempel, der skal til for at samle en ny tradition. Dette gjorde derimod Cauchys værk "Course d'Analyse Algebrique".

Som årsag til, at Cauchys og ikke Bolzanos produktion blev betragtet som et paradigme, nævner vi to forhold:

— På trods af den ensartede forståelse, fremstår begreberne direkte formuleret, systematisk og let tilgængelige i Cauchys fremstilling, hvorimod flere af Bolzanos begreber kun fremstår implicit.

— "Course d'Analyse Algebrique" er en samlet generel fremstilling af forståelsen af analysen, hvorimod "Rein analytischer Beweis" var en ud af flere korte artikler, som tilsammen kun dækkede dele af analysen. Cauchys udgivelse krævede derfor større opmærksomhed af det matematiske samfund end Bolzanos.

Spørgsmål 4: *Kan Koetsier og/eller Kuhns videnskabsteori*

(a) *bidrage til besvarelsen af spørgsmål 1 - 3?*

(b) *give brugbare forklaringsmodeller for traditionsskiftet?*

ad a

I besvarelsen af spørgsmål 1 og 2 kan videnskabsteorien ikke bidrage direkte til den konkrete karakteristik af de to traditioner. Derimod giver den et begrebsapparat til generel beskrivelse af traditioner, og dermed

hjælp til en systematiseret karakteristik. En udbygning af vores karakteristik af den formalistiske tradition, kunne være at lede efter det paradigme, der startede traditionen, hvilket imidlertid ville kræve et tidligere udgangspunkt end vores.

Den formalistiske og den konceptuelle traditions begreber, metoder og værdier var væsentligt forskellige. Da dette er grundelementer i teoriernes fælles beskrivelse af en tradition, kan vi derfor bekræfte vores antagelse om, at vi har beskæftiget os med to forskellige traditioner.

Af svaret på spørgsmål 3 fremgår det, at videnskabsteorierne her var det afgørende element.

ad b

Både Koetsier og Kuhn giver forklaringsmodeller for udviklingen mellem to traditioner. Som en konsekvens af vores stationære evolutionsperspektiv, er vores materiale dog ikke bredt nok til at vi kan give en vurdering af, hvorvidt den fortløbende udvikling sker ifølge en af disse teorier. Eksemplet Bolzano bekræfter dog Kuhns påstand om, at selve gennembruddet for den nye tradition sker som følge af et paradigmes fremkomst.

Litteraturliste

Andersen, Heine (red.): *Videnskabsteori og metodelære*, bind 1.
Samfundslitteratur, 1990.

Apostol, Tom M. (1969): *Calculus*, vol. 1 & 2.
John Wiley & Sons, 1969.

Bolzano, Bernhard (1817): *Purely analytic Proof of the Theorem that between any two Values which give Results of opposite Sign there lies at least one real root of the Equation.*

Oversat fra tysk i Russ [1] (se denne) efter *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichen liege.*
Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, no. 153, Leipzig 1905.

Cantor, Georg: *Gesammelte Abhandlungen.*
Georg Ohm's Verlagsbuchhandlung, 1966.

Christensen, Asger Spangsberg & Thomsen, Klaus (1983): *Matematik i Tyskland i det 19. århundrede.*
Specialeopgave i videnskabshistorie, Århus Universitet 1983.

Dictionary of Scientific Biography.
Schribners, 1970.

Euler, Leonhard (1748): *Introduction to Analysis of the Infinite*, bind 1 & 2.
Springer-Verlag, 1988.
Oversat fra latin efter *Introductio in analysin infinitorum.*

Goodman, Nicolas D. (1990): *Mathematics as Natural Science.*

The Journal of Symbolic Logic, vol. 55, nr. 1, 1990.

International Encyclopedia of the Social Sciences — Biographical Supplement.

The Free Press, 1979.

Kline, Morris (1972): *Mathematical Thought from Ancient to modern times.*

Oxford University press, 1972.

Koetsier, Teun (1991): *Lakatos's Philosophy of Mathematics: A historical Approach.*

North-Holland, 1991.

Kuhn [1], Thomas S. (1962): *Videnskabens revolutioner.*

Fremad, 1973.

Oversat fra amerikansk af Knud Haakonssen efter *The Structure of Scientific Revolutions.*

The university of Chicago, 2. udg., 1970.

Kuhn [2], Thomas S. (1970): *Logic of Discovery or Psychology of Research ?.*

I Lakatos [1] (se denne), side 231-78.

Kuhn [3], Thomas S. (1970): *Reflections on my Critics.*

I Lakatos [1] (se denne), side 1-22.

Lakatos [1], Imre & Musgrave, A. (eds.): *Criticism and the Growth of Knowledge.*

Cambridge University Press, 1970

Lützen, Jesper (1978): *Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet.*

Nordisk Matematisk Tidsskrift, nr. 25-26, 1978, side 5-32.

Maddy, Penelope (1989): *The Roots of Contemporary Platonism.*

The Journal of Symbolic Logic, vol. 54, nr. 4, 1989.

Mehrtens, Herbert (1976): *Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the "new Historiography" of Mathematics.*

Historia Mathematica 3, 1976.

Pedersen, Stig Andur & Kragh, Helge (1981): *Naturvidenskabsteori*.
Nyt Nordisk forlag, 1981.

Popper, Karl R. (1970): *Normal Science and its Dangers*.
I Lakatos [1] (se denne), side 51-58.

Russ [1], Steve (1980): *A Translation of Bolzano's Paper on The Intermediate Value Theorem*.
Historia Mathematica 7, 1980.

Russ [2], Steve (1992): *Bolzano's Analytic Programme*.
The Mathematical Intelligencer, vol. 14, nr. 3, 1992.

Schubring, Gert (1993): *Bernard Bolzano - Not an unknown to his contemporaries as is commonly believed ?*.
Historia Mathematica 20, 1993.

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsermuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarium".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen,
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KREFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978.
Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality".
Af: Helge Kragh.
-
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.C'ERE".
a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodul/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS".
Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DILEMTRISK RELAXATION" - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiaalligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MØSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. 1.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.
-
- 38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
-
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNISKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejledere: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PICERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Bernhelm Booss og Jens Høyrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEAR PROGRAMMERING?".
Projektrapport af: Lone Billmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i l.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glorup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S. Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.
-
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wenneberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialrapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
- 90/84 "ENERGI I L.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.
-
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lillethorup.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSDEREN".
Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØRS FODEROPSTÆLSEL OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

- 103/85 "ØDSE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jøger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT OF THE GLASS REANSTITUTION".
Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTINGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Arne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENAISSANCEN".
Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen
- 120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, DMFA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "DVBY, 6 - systemet - en effektiv fotometrisk spektral-klassifikation af B-, A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie-projekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNEELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15.
Af: Bent Sørensen.
-
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM".
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MATEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af: Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"
By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"
Projektrapport af Finn C. Physant
Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"
af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987
By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.
Fysikspeciale af Jan Vedde
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Višćor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"
af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"
by: Petr Višćor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"
by: Petr Višćor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"
Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal
Vejleder: Mogens Niss
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski
- 153/87 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale
Af: Hans Hedal
Vejleder: Ib Thiersen
- 154/87 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"
By: Jeppe Dyre
- 155/87 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"
by: Michael Pedersen
- 156/87 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 157/87 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."
by: Michael Pedersen
- 158/87 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"
by: Jeppe Dyre
- 159/87 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"
by: Bent Sørensen
- 160/87 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"
by: Jens Gravesen
- 161/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"
by: Michael Pedersen
- 162/87 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"
AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich, Mette Vedelsby
- 163/87 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"
Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen
Vejleder: Jesper Larsen
- 164/87 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen
- 165/87 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"
by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynlighedsregningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"

Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mossbauerspektroskopi.

Fysikspecialle af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christiansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden
1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og
Peder Voetmann Christiansen

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 "GRAFISK FREMSTILLING AF
FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 "AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME
DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY
SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION"

af: Michael Pedersen

176/89 "A MAXIMUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR
RESPONSE THEORY"

af: Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström,
Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia
Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen
Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESSEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen,
Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen

179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb
om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

179b/89 "ELEVHEFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om
kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved
torsions- og dobbeltpendul".

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE
SHEAR VISCOELASTICITY"

by: Jeppe Dyre

183/89 "MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS
AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and
issues in mathematics instruction

by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og
MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)

184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige
varmefylde af en underafkølet væske ved glasovergangen.

af: Tage Emil Christensen

185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"

Et matematisk projekt

af: Steen Grode og Thomas Jessen

Vejleder: Jacob Jacobsen

186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"
redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen

187/90 "RSA - et kryptografisk system"

af: Annette Sofie Olufsen, Lars Frellesen
og Ole Møller Nielsen

Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk

188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"

by: Jeppe Dyre

189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ
GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER

af: Finn Langberg

- 190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"
by: Jeppe Dyre
- 191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C^* -ALGEBRAS"
by: Iain Raeburn and Dana P. Williams
- 192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases and SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"
by: Viggo Andreassen
- 193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"
by: Stig Andur Pedersen
- 194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Projektrapport af: Frank Olsen
- 194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport
Projektrapport af: Frank Olsen
- 195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.
Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:
Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"
- en projektrapport om kaos' paradigmatiske status i fysikken.
af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL"
af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"
Speciale
af: Frank Olsen
- 199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling
af: Jens Højgaard Jensen
- 200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"
Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.
af: Mogens Niss
- 201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraktion"
af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen
Vejledere: Petr Višćor, Ole Bakander
- 202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.
af: Peder Voetmann Christiansen
- 203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990
afleser tekst 170/88
- 204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"
et Breddemodul Fysik Projekt
af: Thomas Jessen
Vejleder: Petr Višćor
- 205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"
by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)
- 206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A-GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"
Eksperimentelt Fysikspeciale
af: Jeanne Linda Mortensen og Annette Post Nielsen
Vejleder: Petr Višćor
- 207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 209/91 "LORENZ GUIDE". Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz. 1829-91.
af: Helge Kragh
- 210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Separable Subalgebras with Unitality Condition."
by: Lars Kadison
- 211/91 "I SANDHEDENS TJENESTE"
- historien bag teorier for de komplekse tal.
af: Lise Arleth, Charlotte Skovhøj, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Karina Tullinæs.
Vejledere: Jesper Larsen og Bernhild Boose-Baumbek
- 212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"
by: Lars Kadison
- 213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host"
by: Viggo Andreassen and Freddy B. Christiansen

- 214/91 "Hølløj i æteren" - om elektromagnetisme. Oplæg til undervisningsmateriale i gymnasiet.
Af: Nils Kruse, Peter Gastrup, Kristian Hoppe, Jeppe Guldager
Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal
- 215/91 "Physics and Technology of Metal-Insulator-Metal thin film structures used as planar electron emitters
by: A. Delong, M. Drstić, K. Hladil, V. Kolarik, F. Olsen, P. Pavelka and Petr Viscor.
- 216/91 "Kvantemekanik på PC'eren"
af: Thomas Jessen
-
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen
- 227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M. Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B. Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Højrup, Ib Thiersen, Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L. Arleth, G.I. Dybkjær, M.T. Østergård
Vejleder: Dorte Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreassen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS - Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen
-

- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for
den matematiske udvikling
af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsee Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for
optimering af broreparationer
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma
Tulinius, Ivar Zeck
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN
Et 1.modul fysikprojekt
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorte Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse
i CT-scanning
Projektrapport
af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og Christine Iversen
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b
/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske
halvledere
Specialerapport
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske
Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CON-
DUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY
DISORDERED NON-METALS
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH
BOUNDARY
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the
Jahresbericht Addendum to Schappacher,
Scholz, et al.
by: B. Booss-Bavnbek
With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors,
J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner,
J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch,
J.Radkau and T.Söderqvist