

# Stor matematik mellem Prado og Escorial

Personlige indtryk fra ICM 2006, Madrid



Af: Bernhelm Booss-Bavnbek  
Roskilde Universitet Center  
email: booss@ruc.dk

**Matematikkongresser er mærkelige.** Den Internationale Matematikerkongres (International Congress of Mathematicians - ICM) løber af stablen hvert 4. år og i august 2006 var det Madrids tur. Jeg har været med til næsten alle ICM i min matematiske levetid, men matematisk set var ICM 2006 for mig den største begivenhed af dem alle. Hvorfor denne superlativ? Det skal jeg nok forklare.

Men en smule mærkelige var alle disse ICMs: de er jo små kongresser med 3-4.000 deltagere. Lægekongresser, som Diabeteskongressen i København i september 2006, samler let det tredobbelte. Og de matematiske seminarer, workshops og fagkonferencer jeg ellers deltager i, ligger i Oberwolfach-størrelsen og samler således sjældent mere end 20, 30, 40 eller maks. 100 deltagere, ofte koncentreret på en weekend eller 5 dage og normalt med et overpakket program i hæsblæsende tempo.

ICMs er anderledes: de går over 10 dage. Der er to, højst tre 60-minutters plenarforedrag om formiddagen, hvor alle møder alle, og alle får en fælles referenceramme og en chance for at lære noget nyt eller at se eget arbejde i et nyt lys. Om eftermiddagen fortsættes der så måske med et enkelt plenarforedrag plus to til tre indbudte 45-minutters forelæsninger parallelt med et gedemarked af 20-minutters pligtpræsentationer for 5-10 venner, tilfældige forbigående - og som dokumentation over for bevilligende myndigheder. Nogle af dagene bliver afrundet med rundbordssamtaler og æresforelæsninger (her en aften med en pudsig selvbeskuende Mandelbrot). Alt går langsomt. Enormt afslappet. Man møder de samme venner igen og igen og snakker med dem i pauserne eller om aftenen, når man går ud at spise.

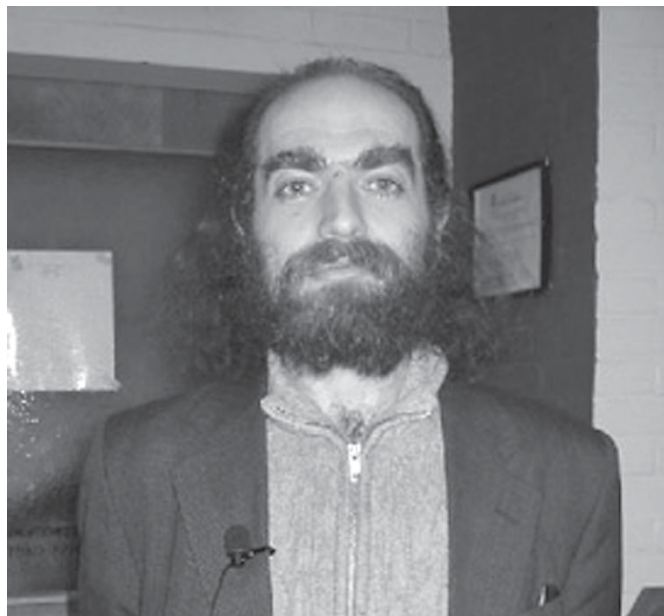
Mest mærkeligt er det indbyggede ranglistesystem med priser og fremhævelser gennem indbydelse til foredrag.

Vi ved i København, hvor meget Hardy og vores Bohr morede sig med at rangliste andre matematikere og deres resultater. Det var matematik-politisk ikke korrekt. Men selvfølgelig gør vi det alle. Der er andre felter af menneskelig virksomhed hvor man råder over eksplicitte skæler over præstationernes hierarki: valgresultater i politik, salgsresultater og aktiekurser i økonomi, atleternes ydelser og klubbernes tabelplacering i sporten. Men det spændende i matematik-hierarkisering er normalt dens ikke-eksplicitte karakter: ikke nødvendigvis antallet af publikationer, citationer, PhD-studerende. Men vi ved om to matematikere, hvem der har rykket mere; og vi kan se det i kropssproget når de to sidder alene sammen eller med andre ved kaffebordet. Intet andet fag er så autoritetsfikseret som matematik - med nødvendighed, fordi en stor tanke, artikel, bog af en anden matematiker kan have forandret vores liv og styret det for årtier eller have givet vores eget arbejde større mening og perspektiv. Men at diskutere det ganske åbent, det gør vi kun ved ICMs uddeling af Fieldsmedaljer og foredragsindbydelser.

**Hvad rangerer højst i 2006?** Den spanske konge, som kom til kongresåbningen fra sin sommerresidens i Escorial og i øvrigt læste mange ganske fornuftige ord om matematik, kultur og samfund op fra sin ghostwriters manuskript, uddelte fire Fieldsmedaljer (uddelt siden 1936 og givet til personer der ikke var fyldt 40 ved årets begyndelse), Nevanlinnaprisen og den nystiftede Gausspris. Der gives altid mindst to Fieldsmedaljer, nemlig, som hvasse tunger siger, en *Hermann-Weyl-medalje* for matematikken som enhed med stærke tværforbindelser mellem partielle differentialligninger, talteori, geometri, algebra og matematisk fysik; og en *fransk medalje* for en frankofon eller stærkt fransk inspireret matematiker, lige meget på hvilket felt.



Andrei Okounkov



Grigori Perelman

I Madrid blev det til fire Fieldsmedaljer. I alfabetisk rækkefølge: (1) russeren *Andrei Okounkov*, p.t. Princeton og ikke ukendt i Danmark p.g.a. sit samarbejde med vores nye Niels-Bohr professor Nicolai Reshetikhin i Aarhus om probabilistiske repræsentationer i algebraisk geometri, f. eks. tilfældige flader som partikkelmodeller i strengteori; nummerering af supersymmetriske gauge teorier i fire dimensioner; og geometriske og kombinatoriske aspekter ved smeltning af kubiske krystaller.

Hvor rig Okounkovs matematiske verden er, kunne man se, da han efter modtagelsen af Fieldsmedaljen formåede at ændre titlen for sin egen præsentation fra det vilde Random partitions and instanton countings (annonceret i det oprindelige program blandt de tekniske foredrag i sektionen "Probability and Statistics") til det populære Enumerative geometry of curves in threefolds med holdpunkter for enhver i det store auditorium: efter at han mindede os om, at kubiske kurver i planen er givet ved ni parametre, således at dem der møder otte givne punkter danner en 1-parameter familie  $F_1(x, y) + tF_2(x, y) = 0$  med kendte konsekvenser for polynomial interpolation. Så spurgte han generaliserende: hvor mange kompleks-1-dimensionale kurver af given grad og slægt ("Geschlecht = genus") findes f.eks. i en boks  $X$ , når kurverne alle går gennem et system af givne lukkede kurver  $\{\gamma_j\}$ . Pointen er at han ikke vil tælle i et enkelt tilfælde, men beskrive den overraskende rige struktur i helheden af sådanne kurver.

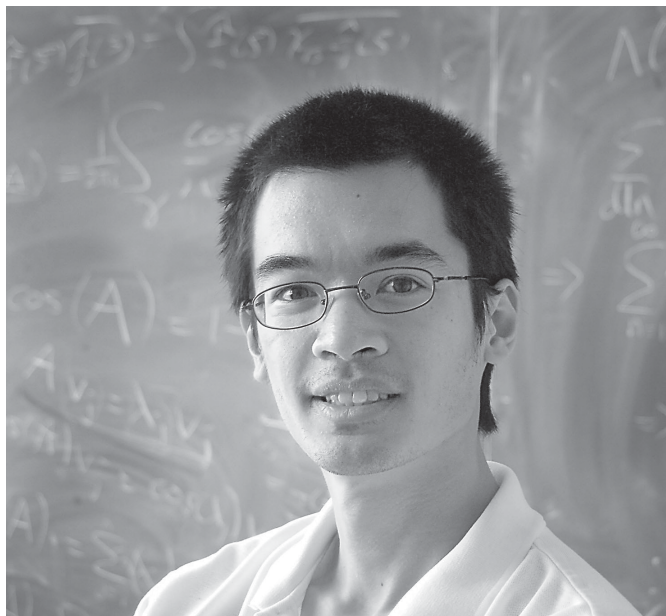
Simpelt spørgsmål - forholdsvis simpelt svar for  $\dim X > 3$ , nemlig at antallet vokser med slægten, og selvfølgelig for  $\dim X < 3$  at antallet falder med slægten, mens  $\dim X = 3$  er kritisk og kræver ganske nye metoder, bl. a. virtuos omgang med stokastiske matricer, fordi antallet viser sig at være uafhængigt af slægten. Det var didaktikeren og teknikeren Okounkov. Men så kom filosofen med sine visioner, nemlig de to kendte betragtningsmåder på kurver, enten parametriseret, dvs. som afbildning, eller som ligning, dvs. som ideal med tilsvarende dualitet mellem plot og implicitplot komman-

dos i computerpakken; tilsvarende dualitet mellem strenge og gaugefelter i kvantum-graviteten; Gromov-Witten og Donaldson-Thomas invarianter i differentialgeometri og to grundlæggende forskellige betragtningsmåder ved degenererede kurver. Gennem Okounkovs mikroskop kan alt på den ene side betragtes organiseret i modulum af stabile afbildninger, og på den anden side som idealer af polynomer og tredimensionale partitioner med indbyldelse til hans formodning om en variabeltransformation som giver en eksakt korrespondance mellem de to tilgange.

Fieldsmedalje (2) skulle gå til en anden russer, *Grigori Perelman* i St. Petersburg for hans bevis af Poincarés Formodning om at alle enkeltsammenhængende kompakte tredimensionale topologiske mangfoldigheder er homeomorfe med sfæren  $S^3$ . Som man også kunne læse i danske dagblade hentede Perelman ikke "sine" 15.000 canadiske dollar. Matematisk og mediemæssigt stod Perelman alligevel i centrum under hele kongressen. Der var en kort brillant introduktion ved John Lott og to store plenarforedrag om hans arbejde, først en temmelig tør sag ved Richard Hamilton, som sammen med S.-T. Yau havde udviklet hvad der under Perelman blev en succesrig løsningsstrategi, byggende på Ricci flow; den anden ved den gudbenådede topologiformidler John Morgan: meget underholdende og sådan at man næsten kunne tro man havde forstået alt. Her den korte version: topologi i tre dimensioner er for svært. Den duer bedst når der er mange frihedsgrader. Vanskelige problemer kræver differentiale midler. Og det var netop Hamilton og Yaus ide at introducere en ekstra variabel, kald den tid, og lade et ikke-lineært parabolisk system af partielle differentiaalligninger virke som varmeledningsligning, nemlig sprede krumningen ligeligt over hele mangfoldigheden.

Genialt og simpelt. Men det virkede ikke, fordi der ved spredningsprocessen (skiftevis oppustning og sammentrækning) kan opstå singulariteter og ballonen sprænges før man havde tid til at checke at den var en ballon.





Terence Tao



Wendelin Werner

F. eks. måtte man frygte at glatningsprocessen kunne føre til *cigarsingulariteter*, som vokser til uendelig cigarlængde under deformationen. Men så viste Perelman i 2002 og 2003 med sine tre legendariske ikke-peer-reviewed ultrakorte artikler lagt ud på arXiv og kun for eksperter på højeste niveau, hvordan problemet med glatning af singulariteter kan løses. Fantastisk, men ærgerligt for mig, som troede mere på Heegård-diagrammer og kirurgi (klippe-klistre-metoden) i tre og fire dimensioner og den tilsvarende Floer-Witten-Seiberg-teori (også med en ekstra differentierbar parameter og Dirac-type differentiaalligninger) som hovedingrediens til at forstå tremangfoldigheder.

I mellemtiden har vi nu fire udarbejdelser af Perelmans bevis for almindelige topologer, differentialgeometere, pdefolk, numerikere, gravitationsfysikere, PhD-studerende og - forhåbentlig også danske andendels studerende, hver på mellem 192 og 473 sider: H.-D. Cao og X.-P. Zhu i *Asian J. Math.*; J. W. Morgan og G. Tian (kommer som bog, men er tilgængelig på arXiv); B. Kleiner og J. Lott (også på arXiv); og G. Besson (henvisning på <http://www.claymath.org/> med mange spændende links). En hadefuld smædeartikel imod S.-T. Yau i *The New Yorker* gav indtryk af at der er prioritetsproblemer, som Hamilton, Yau og begge hans tidligere studerende Cao og Zhu har tilbagevist, dog uden at tidsskriftet vil trykke rettelsen. Hvem der har bevist en stor sætning står altid på skulderen af andre: Atiyah-Singer Indeksteoremet gik tilbage til en formodning af Gelfand og fulgte eksakt Hirzebruchs og Thoms kobordismeide. Det blev først forståeligt for en bredere skare af matematikere, da seminarerne med tilsvarende noter blev afholdt i Bonn, Boston, Moskva, Paris og Princeton. Men beviset var Singers og Atiyahs til trods for kortheden af deres første artikel med beviset. Seminarerne fyldte ikke huller i det oprindelige bevis, men hver gang et spørgsmål dukkede op viste det sig, at Singer og Atiyah allerede havde tænkt over det og kendte løsningen. Indtil nu går det

med Perelman fuldstændigt den samme vej. Det er utroligt hvor mange kort han tilsyneladende har i ærmet - og hvor svært det alligevel er for tilsyneladende alle andre.

En af gisningerne om, hvorfor Perelman havde afvist Fieldsmedaljen, tror jeg, jeg kan afvise: en matematiker med så overlegent kendskab til alle aspekter af problemet og med sit klart afgørende endelige bidrag til løsningen kan ikke irriteres med smålige prioritets spørgsmål. Det er en journalistkonstruktion. Det kan ikke være grunden. Til Sir Ball, præsidenten for den Internationale Matematikerunion, der opsøgte Perelman i St. Petersburg og havde to meget behagelige dage sammen med ham, skal Perelman have sagt noget i retning af, at han ikke bryder sig om den måde, den matematiske forskningsverden fungerer på, og slet ikke om prisernes rolle som styreinstrument for unge menneskers liv. Det lyder som om han har tænkt meget, ikke alene over Ricci flow men også om matematikken og dens mening, om offentlighedsdannelsen og livet.

Fieldsmedalje (3) gik til australieren *Terence Tao*, nu UCLA, der med sine 31 år og mange artikler og bøger, spændende over partielle differentiaalligninger, kombinatorik, harmonisk analyse og additiv talteori allerede er en både virtuos tekniker og en dybt filosofisk ånd på samme måde som Okounkov og Perelman. Ifølge det oprindelige program skulle han tale om *Long arithmetic progressions in the primes*. Og det gjorde han også. Men han ændrede titlen og hele bølgelængden til *The dichotomy between structure and randomness*. Et vidunderligt foredrag hvor enhver i salen måtte spørge sig selv om det samme som Charles Fefferman i sin laudatio for Tao: "What amazing technical progress? What a grand synthesis? How could anyone not have seen this before? Where do his ideas come from?" Tao skriver næsten så hurtigt som han tænker. Så der er ingen grund til at gengive nogle af hans geniale ideer her. Men ingen har været i tvivl om at mødet med denne beskedne unge mand, enhver svigermors drøm, var mødet med et geni. Sikke en oplevelse!

Fieldsmedalje (4) gik til *Wendelin Werner*, Paris, for hans bidrag til stokastisk Loewner udvikling, geometrien af todimensionale Brownske bevægelser og konforme feltteori. Nu er jeg ikke særlig interesseret i metoder som kun virker i to dimensioner og mangler potentiale til at blive generaliseret til tre dimensioner, især når vi snakker Isingmodeller og perkolation. Men hans (og Oded Schramms) resultater vedrørende tilfældige løkker i planen er ganske fantastiske, må jeg indrømme. Altså, f. eks. at en tilfældig opførelse af fysiske systemer ved faseovergangen kan puttes i ganske bestemte bokse, disse *Stochastic Loewner Evolutions*, og andet kan ikke ske! Imponerende, men efterhånden hørt før ved flere lejligheder.

**Stokastik er kommet hjem.** Et særdeles vigtigt perspektiv ved alle Fieldsmedaljer (undtagen Perelmans) var anerkendelsen af stokastikken som et matematisk kerneområde. Set fra RUC, Aarhus og Aalborg er der ikke noget omvæltende i det. Men for andre miljøer rundt om må det være ganske nyt og befriende hvad der skete i Madrid efter årtiers udgrænsning eller i hvert fald nedtoning af statistik og sandsynlighedsteori på tidligere ICMs og i matematikken som helhed. Den nystiftede tyskfinansierede Gausspris for "skabelsen af ny matematik som har vist sig af særlig betydning i anvendelser" gik også til stokastik, til *Kiyoshi Itô*, emeritus i Kyoto. Da et foto af Itô i 1942 blev vist, hviskede en fransk ven en smule spidst til mig: aksepris! Nuvel. Ingen fortalte hvad Itô virkelig lavede under krigen. Og måske har den lethed hvormed den potentielt destabiliserende optionshandel har udbredt sig i finansverdenen (efter at være blevet gjort håndterlig ved at bygge på nogle af Itôs ideer) en mere ødelæggende indflydelse på menneskeheden end hans abstrakte tanker havde for det japanske militærmaskineri under krigen.

Stokastik er tilsyneladende også et vigtigt element i Nevanlinna-pristageren *Jon Kleinbergs* (Cornell) arbejde med netværksproblemer som smart strukturering, klassificering og vægtning af hjemmesider for søgemaskiner.

*The power and weakness of randomness* nytitulerede Avi Wigderson sit plenarforedrag, og andre foredrag fulgte op på hans ideer om et nyt syn på beregningernes kompleksitet, pålidelighed og anvendelighed.

Jo, jeg kunne blive ved at fortælle om de fantastiske matematiske oplevelser vi fik serveret i Madrid. Men jeg ved godt, at det kan være lige så fjernt og uvedkommende for en læser som hvis jeg beskrev alle de fine små tapas og store spanske måltider gastronomien bød på. Jeg må hellere samle op.

**Forholdet mellem ren og anvendt matematik.** Per definition har de mest matematiserede fagområder som meteorologi, geodæsi, optik, kryptering, kompression, ingeniørfagene, økonometri og genetik, deres egne kongresser og holder sig for det meste langt væk fra ICMs. Orienteringen om nye virkelige anvendelser af kendt matematik og nye matematiske ideer der har været inspireret af virkelige anvendelsesområder har derfor været nedtonet ved tidligere ICMs. Det blev meget anderledes i Madrid: jeg fik en klar fornemmelse af at alle medaljepræmierede, mange af plenarforelæsere og ganske mange indbudte foredragsholdere havde et omfattende kendskab til mate-

matisk fysik (mest i forhold til *Quantum Gravity*), materialevidenskaberne (*kritiske fænomener, perkolation, energidrevet mønsterdannelse*), avancerede teknologiske processer (f. eks. *Molecular Beam Epitaxy*) og biologisk-medicinske problemer (fra *hjerter-kar-matematik* over fascinerende nyere matematisk arbejde om kapaciteten og begrænsningerne ved *Molecular Dynamics*, til statistisk analyse af *Hot Spots* ved genetisk nykombination i sædceller og æggene for at forstå arvelige sygdomme - i mangel af lange genetiske anerække-data).

Som C. M. Newman (fra Courant Institute) rammende sagde i sin laudatio for Wendelin Werner og med gyldighed for hele kongressen og måske langt ud i matematikken som den er nu: "vandskellet for sammenstrømning af matematik og fysik er blevet fjernet mange steder; og der hvor før kun stringente beviser gjaldt for noget, har vi taget værdien af ganske nye ideer og forklaringer til os.-Jo vist, men det er nu heller ikke ganske uproblematisk at følge f. eks. en rapport af den unge fysiker Marcos Mariño om *Gromov-Witten invariants and topological strings*, med dens fyrværkeri af ideer og hypoteser - i et matematisk ørkenlandskab, hvor de fleste begreber mangler klare definitioner og næsten ingen hypoteser er bevist eller eksperimentelt bekræftet.

Kongressen sluttede med en velbesøgt rundbordssamtale med nogle af matematikkens klogeste hoveder (Lennart Carleson, Ronald Coifman, Yuri Manin, Helmut Neunzert og Peter Sarnak) om *Are pure and applied mathematics drifting apart?* Mange kloge ord, som da den gamle Carleson viste sit hjerte og sin forståelse for unge mennesker og forsvarede deres krav på meningsfuld undervisning, hvor introduktion til nye matematiske ideer skal gå hånd i hånd med nye anvendelser, en smule à la RUC.

Nogle ord var mindre gennemtænkte, f. eks. da Neunzert, en rejsende i universiteternes industriorientering, proklamerede den gyldne "Second world of mathematics": *We should all be happy that mathematics has become technology. It helps everybody.* Og: "Industri tilbyder dialog, tilføjer penge og tiltrækker studerende.-Rigtig set, men alt for nærsynet. Eller når Sarnak gentog den gamle travet om at alt driver fra hinanden - i en kongres hvor vi alle lige havde set hvordan tværtimod båndene mellem ganske forskellige grene af matematikken er blevet tættere og solidere. Han overdrev måske bevidst kulturforskelle mellem "os-og "anvendelser", med vores hellige gral af beviser - jo længere desto mere værdifulde - imod fysikernes hyldest til enkelthed. Jo, og dog: Faktisk har jeg brugt adskillige teoremer som er indlysende for mig og hvor jeg ved at der eksisterer et bevis uden at jeg først tjekkede beviset - og for det mest anvendte teorem i de sidste 60 år, Cramérs sætning om  $\chi^2$ -fordeling ved  $f$  frihedsgrader, findes mig bekendt kun et bevis i tryk, nemlig Cramérs originale, som ingen lærebogsforfatter nogensinde havde lyst og tid til at gengive til sine studerende og læsere for  $f > 1$ . Eller Sarnaks rammende karakterisering af vores levetid som en guldalder for ren matematik: det passer, fra afklaring af Kontinuumhypotesen i 1964 over Firefarveproblemet i 1976 og Den Store Fermat i 1993 til Poincarés Formodning i 2003. Og at mange af de bedste nye matematiske ideer har hentet inspiration fra andre fag, det er også rigtigt. Men kan det give grund til også



nu at forvente en begyndende guldalder for anvendelser af matematikken, som mange matematikpolitikere gerne postulerer, når de føler at matematikken er i en legitimitetskrisse eller har vanskeligheder ved at tiltrække studerende i de for selvfinansieringen nødvendige mængder og kvaliteter?

*Manins* billede var mørkere. Han skelnede mellem tre kendte anvendelsessituationer efter deres status som erkendelsesmæssige værktøjer: (i) *ad-hoc model* (empirisk underbygget black box som Ptolemaios' over 2000 år gamle epicykler og den moderne partikelfysiks standard-model), (ii) *teori* (de sjældne, noble, aristokratiske modeller, som består af få ligninger der er fuldt ud overbevisende og forklarer en masse observationer) og (iii) *metafor* (når et komplekst område af fænomener menes at være sammenligneligt med en simpel matematisk struktur - kun godt til at skære forkerte antagelser ud).

Manin delte Sarnaks beskrivelse af vores matematiske guldalder, men så intet grundlag for at den konsoliderende kraft indenfor de sidste 50 års matematik skulle genopstå i anvendelserne med deres vilde og vildtvoksende fænomenerverden. Med variation af et berømt Hardy-citat sluttede Manin aftenen med sin definition: "An applied mathematician is a person who is doing very well on things which never should have been done."

Jean-Pierre *Bourguignon* var ikke tilfreds med diskussionens struktur. Han efterlyste en adskillelse af samfundsniveauet med sigte på samfundsendringer, matematikkens rolle og etiske spørgsmål; professionsniveau med sigte på fremtidige jobs for vore studerende; og det egentlige genstandsområde hvor ren og anvendt slet ikke driver bort fra hinanden. Tja, Jean-Pierre, hvis diskussionerne altid kunne skilles så rent fra hinanden...

**Historie og didaktik.** Matematikhistorikere og matematikdidaktikere har deres egne kongresser. I Madrid var det venstrehåndsarbejde, men ikke uinteressant. *Historikerne* koncentrerede sig om iberisk og sydamerikansk matematikhistorie, dog uden at tematisere nogle matematikeres rolle i forsvaret af den spanske republik i 1930'erne, emigrationen og nybegyndelsen efter Francoregimet - og uden kontroverser omkring rollen af Francos trofaste blandt matematikerne.

*Didaktikerne* havde også nogle interessante diskussioner, navnlig om kontroversielle emner i den K-12 (dvs. gymnasiale) matematikundervisning med pikant polemik især fra US-amerikanske deltagere. Men ellers var didaktikdiskussionen desværre gennemsyret af reklamesnak à la Neunzert om hvor lykkelig samfundet og vi alle bliver, bare matematikken bliver mere synlig og udbredt. Det frydede mig at jeg fik støtte af Bjørn Engquist der også var bekymret over tendenser til at oversælge matematikkens samfundsmæssige betydning.

### Dansk synlighed - storhed eller begyndende senilitet?

Det var flot at Mikael Rørdam var en af de indbudte foredragsholdere og Ib Madsen plenarforedragsholder. Hvor var hans foredrag smukt: en stille strøm af fuldstændig naturlige definitioner hvorfra hans nye resultater (med Søren Galatius, Ulrike Tillmann og Michael Weiss - *The Gang of Four*) om topologisk omskrivning af modulirum af komplekse strukturer tilsyneladende fulgte som børneleg med bevis af lange åbne formodninger af Mumford og meget vidtrækkende sideaspekter for Segals konforme feltteori. Komplex analyse, algebraisk geometri, geometrisk partikelfysik og gruppeteori smeltede sammen på en måde, så at alle i salen troede de kunne følge med. OK. Det kunne jeg nu ikke i alle detaljer, da jeg senere om aftenen gennemgik mine noter i hotellet. Men den tryllekunst, Ib udførte for os, hører nu med til de store matematiske oplevelser.

Så, der var stor dansk synlighed - ikke mindst i lyset af at også den forrige kongres i Beijing 2002 havde en plenartaler fra Danmark (Uffe Haagerup), mens f.eks., tyskerne hverken i Madrid eller i Beijing kunne fremvise en plenartaler.

Men Madrid viste også den rapide aldring i dansk matematik med en gennemsnitsalder på omkring 63 blandt de danske deltagere, dvs. med udløbsdato senest om 7 år. Ingen unge folk fra Danmark til forskel fra de mange unge man ellers kunne se. Men det passer godt til mit generelle indtryk, at ligesom i andre offentlige sektorer har de sidste 10-15 års økonomiske opsving i Danmark forbigået de matematiske institutter. Der har ikke været en lind regn af nye positioner for vore unge, men snarere fortsat fastfrysning og nedskæringer.

