# ÅRSBERETNING
# 2011


ROSKILDE UNIVERSITET

**Korallen i RUC's segl**

Roskilde Universitet bærer i sit segl en koral. Dermed hentydes til følgende træk ved korallers liv og død:

Koraller kan kun trives i meget rent og saltholdigt vand, som er i stadig bevægelse. Derfor dør korallerne på læsiden af rev, men på vindsiden, hvor bølgeslaget og strømmen er stærkest, vokser de og udvikler sig i store og smukke kolonier. Det er dog de ældre, men mere forkalkede dele af revet, som giver det styrke og kraft til at modstå bølgeslaget gennem århundreder. Den latinske tekst kan på dansk gengives således:

"I STILHEDEN DØDEN, I STRØMMEN LIVET"

**Årsberetning 2011**
Årsberetningen udgives af Roskilde Universitet
ISSN 0900-2588

Redaktion
Per Knudsen (Ansvh.)

Produktion & layout
Hanne Koch, Designkonsortiet

Tryk
Omslag:
Prinfo Paritas, RUC
Oplag:
200 eksemplarer
Foto:
Tuala Hjarnø
Per Knudsen

Eksemplarer af beretningen kan rekvireres ved henvendelse til:

HR og Kommunikation
Postboks 260
4000 Roskilde
Telefon: 4674 2081
E-mail:plk@ruc.dk
www.ruc.dk

SPOT PÅ FORSKNINGEN

# OM AT KLIPPE OG KLISTRE BØLGELÆNGDER

*Af Bernhelm Booß-Bavnbek, matematiker, NSM*

Alle kender noget til frekvenser og bølgelængder fra radio og anden telekommunikation. Faktisk kan meget af vores omverden beskrives ved bølgelængder, hvad vi ser og hører og hvad vore instrumenter måler. Vores hjerne har en fantastisk selektionsevne. Ud af larmen på hovedbanegården i myldretid eller ved en koncert med popmusik kan vi høre forskel mellem lydene fra et barn og en hund, fra en saxofon og en guitar, selv når deres lyde er udsendt på samme frekvens. Det kan vi, fordi vi ikke alene opfanger den udsendte bølgelængde men samtidig over- og undersvingningerne. De er ganske karakteristiske for det legeme, der producerer lyden og kaldes spektrum. Vores hjerne formår (ofte, ikke altid) at danne sig et billede af afsenderen af lyden. Vi kalder det at lave en *spektral syntese*. Hjernen er god til at overhøre overflødige frekvenser, bølgelængder eller egenværdier, som vi siger i matematikken, for derved at skabe et klart sanseindtryk. Og det gør også kompressionsalgoritmer til en effektiv elektronisk opbevaring og fremsendelse af optisk eller akustisk information.

Men hvad kan vi sanse ud af to løsrevne stumper information, to små detaljer af en helhed? I moderne frembringelse af billeder, f.eks. ved Magnetisk spin-Resonans Imaging (MRI-scanning) i sygehusvæsenet eller ved Syntetic Aperture Radar (SAR satellitgeografi) drejer det sig om at frembringe skarpe billeder ved at sammenklistre og overlejre uskarpe billeder med hinanden. Det er også en form for spektral syntese, nemlig at beregne det samlede spektrum ud fra observationer af spektra af nogle dele. Det fungerer i praksis, men er teoretisk ikke godt nok forstået til at optimere syntesen: derfor tager det f.eks. fortsat op til 30 minutter at generere et skarpt knæ-MRI billede efter en sportsskade. Målet skulle være at udnytte apparaturet bedre og forkorte måletiden.

Rundt om i verden arbejder mange matematikere på det overordnede problem, hvordan vi kan beskrive og analysere en større geometrisk enhed ud fra informationer om enkeltdelene. Den matematiske standardmodel for situationen er en flade eller mangfoldighed $M$, der er opdelt i to dele $M^-$ og $M^+$ langs en hyperflade $N$, se figur 1, og et sæt af differentialligninger med egenværdier der repræsenterer informationen. Sammen med en polsk-amerikansk matematiker, Krzysztof Wojciechowski, fandt jeg for 20 år siden en sammenhæng mellem antallet af grundegenværdier for en såkaldt elliptisk operator $A$ over $M$ og overskæringer af bestemte løsninger for ligningen $Au=0$ over $N$ kommende fra begge sider af fladen. Hvilket svarer til sammenklistring af information i beskrivelsen ovenfor, dog kun af grundtonerne. Siden da har jeg i samarbejde med andre matematikere (i en firkant RUC-Bonn-Tianjin-Tokyo) forsøgt at udvide resultatet til også at omfatte egenværdier i nærheden af nul. Vi opnåede en række delresultater, som vi fik publiceret i gode matematiske tidsskrifter, men først i det forløbne år 2011 kom et vist gennembrud.

Vi vidste hele tiden hvad vi var ude efter: Informationen om egenværdier tæt ved nul kodes i noget der kaldes *spektralflod*. Overskæringen af løsningsmængder $Au=0$ fra begge halvsider beskrives ved noget der kaldes *Maslovindeks*. Begge begreber forudsætter, at vi varierer operatoren $A$. Men så kom et teknisk problem: Kan vi være sikre på, at de en-sidede løsningsmængder kun varieres en lille smule når operatoren $A$ varieres en lille smule? Sådan forholder det sig i mange gængse situationer (mere præcist når $A$ er symmetrisk og inducerer en symmetrisk operator $B$ langs $N$ og perturbationen er, som vi siger, af 0-te orden). Men vi vil hverken begrænse os til symmetriske $B$ eller variationer af 0-te orden. Det lykkedes os at isolere problemet til et rent funktional-ana-

$$M = M^{-} \cup_{N} M^{+}$$

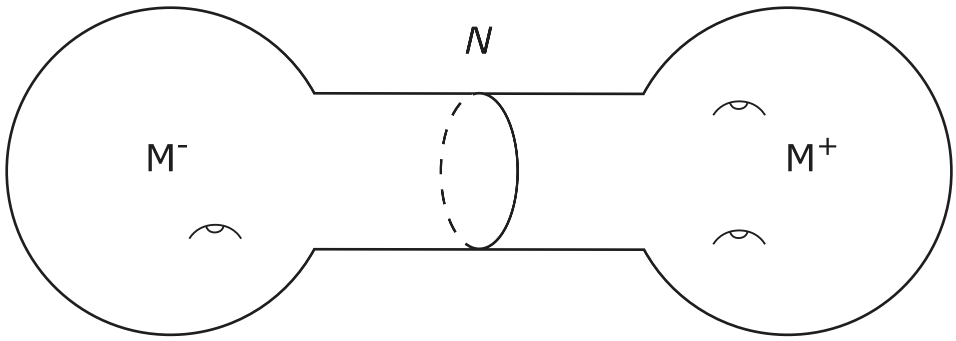


Fig. 1 Kan vi rekonstruere lyden af hele porcelænsfiguren $M$ fra lyden af dens dele $M^{-}$ og $M^{+}$ ?

lytisk problem, hvor opkomsten af elliptiske differentialligninger ikke længere spillede ind. Men vi kunne alligevel ikke bevise hvad vi formodede og fandt, desværre, efter nogle måneders arbejde et modeksempel, nemlig at vores formodning i den valgte alt for abstrakte generelle form simpelthen var forkert.

Vi måtte således inddrage den konkrete kontekst i problemet. Vi prøvede med såkaldt symbolsk kalkule for pseudodifferentiale operatorer. Den er ikke så generel, som vores nytteløse første tilløb, men en smule mere konkret. Tricket er at regne med matricer i stedet for operatorer. Dermed bliver beregninger mere overkommelige. Men jeg tvivlede lige til det sidste på, om vi kunne komme igennem med den symbolske simplificerende kalkule. I bagklogskabens lys må jeg nok indrømme, at det udelukkende var den ungdommelige og uhæmmede optimisme af mine to meget yngre kinesiske kolleger, der holdt os på sporet. Og det lykkedes at bevise en sammenhæng, skønt den bibeholder lidt af sit hemmelighedsfulde præg: Hvordan kunne vi komme igennem med den egentligt alt for grovkornede symbolske kalkule? Og hvad ligger der i vor nye formel, der beregner nogle egenværdier, der typisk hører hjemme i kvantemekanikken vha. overskæringer af nogle løsninger som typisk hører hjemme i klassisk mekanik? Det er fortsat nok så mystisk, selv om vi *har* bevist korrektheden.