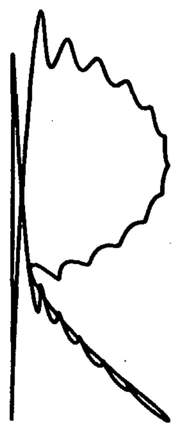
TEKST NR 99 1985

Der er langt fra

Q til R



Projektrapport af

Niels Jørgensen
Mikael Klintorp

Vejleder

Stig Andur Petersen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

DER ER LANGT FRA Q TIL R.

af Niels Jørgensen og Mikael Klintorp
Vejleder: Stig Andur Pedersen

IMFUFA tekst nr. 99/85 95 sider ISSN 0106-6242

Sammendrag:

Hvorfor blev de reelle tals egenskaber præciseret i 1870-erne? Var det en følge af kravet om stringens og matematisk renhed ? Eller var det snarere forhold indenfor den anvendelsesorienterede del af matematikken, der spillede ind ?

Svaret er et både-og. I projektet har vi især beskæftiget os med faktorer indenfor anvendt matematik: Bølgeligningen og varmeledningsligningen fra fysikken samt teorien om Fourierrækker. Emner som synes fjernt fra Cantors fundamentalfølger, men faktisk er vigtige i de reelle tals forhistorie.

Projektet handler også om nogle af de spørgsmålstegn, der siden er blevet sat ved Cantors opfattelse af de reelle tal. Logikerne har sat spørgsmålstegn ved selve konsistensen af talsystemerne. De har også ophævet de reelle tals monopol på at udgøre grundlaget for differential- og integralregningen.

Vi diskuterer, om disse ting kan betyde noget for undervisningen i gymnasiet og HF, hvor det jo er den klassiske konstruktion a la Cantor, læreren har i baghovedet.

Indholdsfortegnelse.

Del 1. Indledning.

1. Præsentation af problemstillingen.

Dette projekt handler om konstruktionen af den reelle talmængde **R** ud fra den rationale talmængde **Q**. Her i del 1 ser vi på, hvorledes talmængderne præsenteres i gymnasiet, og på den teori, der ligger bag: Den klassiske konstruktion af de reelle tal ved hjælp af rationale fundamentalfølger. Derefter præciserer vi projektets problemstilling.

Efter dette ser vi på baggrunden for, at Cantor i 1870'erne "opfandt" denne konstruktionsmetode (del 2), på selve Cantors indførelse af metoden (del 3), og endelig refererer vi nogle senere resultater fra logikken - resultater, der modsiger Cantor på det grundlagsmæssige område (del 4).

Formålet hermed er:

(1) at forsøge at karakterisere de forhold, der fremprovokerede Cantors stringente indførelse af **R**, og

(2) at belyse nogle af de valg, som lærere og elever (og bekendtgørelser) må træffe i forbindelse med undervisningen i talsystemerne på gymnasiets matematiske linie (hvor "dybt" vil/kan man nå, med videre).

Men hvad er - sådan løst sagt - de reelle tal for nogle størrelser? Mange gymnasieelever vil formentlig svare, at de reelle tal består af rationale tal plus π, $\sqrt{2}$ og bestemte andre tal. Nogle vil måske også kunne påpege et andet og mere grundlæggende forhold: At eksistensen af supremum for opadtil begrænsede mængder er sikret inden for **R**. Dette benyttes eksplicit i beviserne - i hvert fald på den fysiske gren - for at sikre eksistensen af de grænseværdier, der optræder i forbindelse med differential- og integralregningen. Det benyttes også i beviserne for visse sætninger om kontinuerte funktioner; blandt andet sætningen om, at en funktion, der er kontinuert over et begrænset, lukket interval, afbilder dette på et begrænset, lukket interval.

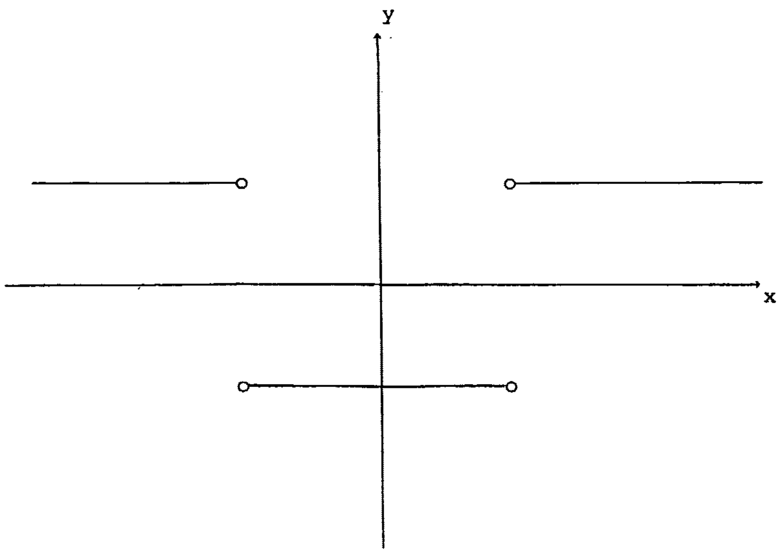
Et tredie - og også meget grundlæggende - forhold er der sandsynligvis ingen, der vil nævne. Det drejer sig om, at $\mathbb{R}$ sikrer, at de funktioner, der ønskes karakteriseret som *kontinuerte*, lige netop er dem, der opfylder kontinuitets-definitionen:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ er kontinuert i } x_0$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x: x \in]x_0-\delta;x_0+\delta[\Rightarrow f(x) \in]f(x_0)-\varepsilon;f(x_0)+\varepsilon[$$

Dette vil ikke være tilfældet med de rationale tal som grundlag. Her vil for eksempel funktionen $g: \mathbb{Q} \to \{-1,1\}$, hvor

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q} \text{ og } x^2>2 \\ -1 & \text{for } x \in \mathbb{Q} \text{ og } x^2<2 \end{cases}$$

tilfredsstille kontinuitets-definitionen. Men denne funktion kan ikke med rimelighed kaldes kontinuert:



Grunden til at g vil være kontinuert er, at $\mathbb{Q}$ ikke indeholder $\sqrt{2}$. Ved hjælp af sætningen om, at en opadtil begrænset delmængde altid har et reelt supremum, kan det vises, at der ikke er sådanne "huller" i $\mathbb{R}$. Konkret kan vi sige, at $\sup\{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$, det vil sige $\sqrt{2}$, tilhører $\mathbb{R}$.

Hvis meningen med den reelle talmængde er, at den skal udgøre et grundlag for den matematiske analyse, så er det interessant, at der findes talmængder, hvor supremum af opadtil begrænsede delmængder ikke altid eksisterer, men hvor kontinuitetsbegrebet alligevel har den ønskede mening, og hvor der i det hele taget kan bygges en del matematisk analyse ovenpå. Dette er et af de moderne logiske resultater, som kan belyse den måde, hvorpå $\mathbb{R}$ præsenteres i gymnasiet.

Men først må vi uddybe, hvad der egentligt kræves af denne præsentation.

Bekendtgørelseskravene.

Bekendtgørelsen (vejledning og retningslinier ..., 1978) er yderst kortfattet, hvad angår undervisningen i talsystemerne. På den fysiske gren skal undervisningen omfatte: *"De naturlige tal. Induktionsaksiomet. Primtal. Største fælles divisor. Restklasser. Rationale og reelle tal (regneregler); de reelle tals ordning. Øvre og nedre grænse. Absolut (numerisk) værdi."* (s.17). Undervisningensvejledningen uddyber - for de naturlige tal - at der bør lægges vægt på induktionsaksiomet (stadig den fysiske gren), men uddyber ikke med hensyn til undervisningen i de reelle tal (s.68-69).

Der må således siges at være stort spillerum for lærere og elever: Om hovedvægten skal lægges på de og de egenskaber, der så anvendes i det øvrige stof, eller der skal gøres mere ud af talsystemerne - eventuelt som valgfrit emne - og lægges vægt på at *"indplacere problemstillingen i den aksiomatiske opbygning, således at* *den logiske sammenhæng er respekteret"*, som undervisningsvejledningen (s. 67) fremhæver muligheden af, når det drejer sig om et rent matematisk emne.

I den nye, alternative bekendtgørelse (bekendtgørelse om undervisningen ..., 1981) har talbegrebet en mere fremtrædende plads. *"Undervisningen skal uddybe elevernes forståelse af talbegrebet, .."* (s.2, alle grene). Dette må dog formodes også at være et formål, der er indeholdt i den gamle bekendtgørelse, men under alle omstændigheder er der med den nye bekendtgørelse lagt yderligere vægt på mulighederne i at fordybe sig i særlige emner, og belyse dem ud fra forskellige aspekter. Bekendtgørelsen fremhæver, at der skal tilgodeses et datalogisk, et historisk-filosofisk, et model- og et erkendelses-aspekt.

Et eksempel på en fortolkning.

Som et eksempel på en fortolkning af bekendtgørelseskravene har vi set på Kristensen og Rindungs serie: Matematik 1, Matematik 2.1 og Matematik 2.2. Disse bøger har nu en knap så dominerende rolle i gymnasiets matematik-undervisning som tidligere, men de er for os at se interessante i denne sammenhæng, fordi valget i forbindelse med de reelle tal går i retning af en *summarisk præsentation*, til forskel fra at gå dybere i sammenhængen med de øvrige talsystemer - selv om Kristensen og Rindung ofte er blevet kritiseret for at præsentere stoffet alt for grundlagsorienteret og stringent. Stringensen opretholdes dog ved at bevare den velkendte aksiom/deduktion-stil.

De reelle tal præsenteres i to omgange. Dels i starten af bind 1 (1.g.) og dels i starten af bind 2.2, der **kun** er beregnet for den matematisk-fysiske gren. Præsentationen i bind 1 har eksplicit karakter af at være en opremsning af egenskaber - *"en kort oversigt over de vigtigste grundegenskaber ved de reelle tal."* (s.27).

Det drejer sig om regneregler, fortegnsregler, uligheder, **R** som model for den rette linie, at ligningen

$$x^n = a, \text{ hvor } a > 0$$

altid kan løses inden for **R**, og endelig nævnes muligheden for at tilnærme reelle tal med decimaltal (vigtigt på grund af lommeregnerne).

Hvilke af disse egenskaber, som de rationale tal også/ikke har, nævnes ikke med et ord. Det eneste, der meddeles om forskellen mellem den rationale og den reelle talmængde, handler om irrationale tal. Det foregår helt fremme i starten af kapitel 1, der drejer sig om mængder og udsagn. Her fortælles det, at **R** består af alle de rationale tal sammen med alle de tal, der ikke er rationale; altså de irrationale. Derpå gives der et par eksempler på rationale og irrationale tal.

Ud over de her nævnte områder, er det kun mat-fys'erne, der bliver nærmere indviet i de reelle tal. Det sker i bind 2.2, der indledes med et kapitel om de reelle tal og de kontinuitetssætninger, der i bind 2.1 (differential- og integralregning) fremsættes uden bevis. Der gøres her rede for den essentielle forskel mellem **Q** og **R**, nemlig fuldstændigheden af **R**, og denne indføres aksiomatisk. Det fremgår klart, at dette sker af nød: (Konstruktionen af **R** ud fra **Q**)... *"er noget vidtløftig, ... og det vil føre for vidt at medtage den i en bog som denne."* (bind 2.2, s.3).

Således bliver et udtømmende sæt aksiomer for de reelle tal opstillet uden intentioner om at gå bag disse aksiomer ved hjælp af en konstruktion. Den egentlige forskel mellem **R** og **Q** åbenbares endog kun for mat-fys'erne - og det sker først **efter** differential- og integralregningen i bind 2.1.

R's egenskaber tages for givne.

Men hvilken forskel gør det overhovedet, om **R**'s egenskaber i så vidt omfang som muligt udledes, eller om egenskaberne blot tages for givne?

Den universitetslærebog i matematisk analyse, som vi især har konsulteret i forbindelse med projektet, *Apostol: Mathematical Analysis* indledes med et kapitel om talsystemerne. Også her indføres **R** blot som en mængde, der opfylder et antal aksiomer, hvis forhold til de mere grundlæggende aksiomer vedrørende **N** med videre ikke berøres. Dette begrundes ikke - som i Kristensen og Rindung - med vidtløftigheden af konstruktionen af **R** ud fra **Q**, men derimod med, at *"in most phases of analysis it is only the properties of the real numbers that concern us, rather than the methods used to construct them."* (s.1).

Det synes således som om, at man ofte - både på gymnasie- og universitetsniveau - kan tage **R**'s egenskaber for givne. Konstruktionen af **R** er en historie for sig, og analysen fungerer ligegodt, hvadend den historie fortælles eller ej.

Med dette i baghovedet vil vi nu kort ridse de gængse konstruktioner $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ op, og efter ridset kan vi præcisere problemstillingen.

2. Den klassiske konstruktion af **R**.

I moderne matematik er teorien om den reelle talmængde **R** og dens forhold til andre talmængder formuleret i en algebraisk ramme med generelle begreber som ækvivalensklasser, komposition, isomorfi med videre.

N, mængden af de naturlige tal, kan her karakteriseres ved ($\mathbf{N}$,+,•,0,1,>). Nærmere bestemt:

- ved dens elementer 0, 1, 2, ... ; normalt regnes nul ikke med, men det gør vi her, fordi vi senere kommer ind på konstruktionen af **N** ud fra mængdelæren, og der regnes nul sædvanligvis med.
- ved definitionerne på kompositionerne + og •, der er afbildninger af $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ ind i **N**, hvor ($\mathbf{N}$,+) og ($\mathbf{N}$,•) er kommutative halvgrupper, altså hvor kompositionerne er kommutative med et neutralt element hver (henholdsvis 0 og 1), men hvor eksistensen af inverse elementer ikke er sikret.
- ved at kompositionen • er distributiv med hensyn til kompositionen +; og endelig
- ved definitionen på ordningsrelationen > og de fundamentale egenskaber ved denne - herunder at den er archimedisk. Archimedisk ordning betyder, at der ikke er indeholdt uendeligt små eller store tal i mængden. Dette uddybes senere, især i forbindelse med ikke-standard analyse: Del 4, afsnit 3.

På basis heraf kan mængderne **Z**, **Q** og **R** karakteriseres ved at tilføje yderligere elementer og egenskaber.

Z, mængden af de hele tal, kan således karakteriseres ved, at $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$ og at ($\mathbf{Z}$,+) er en kommutativ gruppe, hvor eksistensen af inverse elementer med hensyn til kompositionen + altså er sikret. Øvrige definitioner forbliver uændrede, bortset fra at den naturlige måde at udvide ordningsrelationens definitionsområde til den nye mængde indebærer, at ordningen ikke længere er en velordning. Det vil sige, at ikke alle delmængder af **Z** har et mindste element med hensyn til denne ordningsrelation.

Q, mængden af de rationale tal, kan karakteriseres ved, at $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ og at $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ er en kommutativ gruppe. Hvad angår ordningensrelationen, er der nu tale om en ordning, der stadig er archimedisk, men som også er tæt (mellem to vilkårlige elementer ligger altid et tredie). Dermed er opadtil/nedadtil begrænsede delmængder ikke længere er sikret et største/mindste element. En sådan mængde kaldes et archimedisk ordnet, kommutativt legeme.

R, mængden af reelle tal, kan slutteligen karakteriseres ved, at $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ og at **R** er et fuldstændigt, archimedisk ordnet, kommutativt legeme. Fuldstændigheden betyder, at enhver opadtil/nedadtil begrænset delmængde har et supremum/infimum, der dog ikke behøver at tilhøre delmængden.

Det centrale er herefter, hvordan de mere righoldige mængder kan *konstrueres* ud fra de mindre. Heri ligger, at **givet** eksistensen af **N** med diverse specificeringer, så ønskes eksistensen af **Z**, **Q** og **R** **påvist**. Dette er til forskel fra, som for eksempel i Apostol, at tage de reelle tals egenskaber for givne. Der gælder, at de ti aksiomer, Apostol opridser som kendetegnende for **R**, svarer til at pakke betegnelsen "et fuldstændigt, archimedisk ordnet, kommutativt legeme" ud og så gå tilbage til definitioner og egenskaber vedrørende **Q**, **Z** og **N**.

Sigtet er således at etablere en logisk-aksiomatisk opbygning, hvor spørgsmålet om konsistensen af de aksiomer, der er grundlaget for **R**, kan føres tilbage til spørgsmålet om konsistensen af de mere fundamentale aksiomer, der er grundlaget for **N**.

Visse forskelle i konstruktionskæden.

Af de tre konstruktioner i kæden $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, er konstruktionerne af $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ de enkleste. Dette skyldes, at "manglerne" ved $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$ kan benyttes direkte i konstruktionen af den efterfølgende mængde. Betragtes for eksempel konstruktionen af $\mathbb{Z}$, så gælder, at de manglende inverse elementer med hensyn til + i $\mathbb{N}$ skal konstrueres. Det vil sige, at i den nye mængde skal ligningen: $a + x = b$ altid kunne løses, og det er den direkte ledetråd i de konstruktioner af nye mængder, der skal til for at danne $\mathbb{Z}$. Endvidere er konstruktionerne forholdsvis overskuelige.

Konstruktionen af $\mathbb{R}$ er væsentlig mere kompliceret, da det karakteristiske ved $\mathbb{R}$, nemlig fuldstændigheden, er en meget mere kompliceret egenskab end de egenskaber, der bygger på forskellige typer ligningers løselighed. Det, som mange gymnasieelever opfatter som karakteristisk for $\mathbb{R}$, nemlig at π, $\sqrt{2}$ og i det hele taget løsninger til ligningen: $x^n = a$ $(a>0)$ er omfattet af $\mathbb{R}$, giver kun anledning til en tælleligt uendelig mængde, hvilket blot er en forsvindende lille del af $\mathbb{R}$.

Ledetråden i den mest almindelige måde at konstruere $\mathbb{R}$ på er, at alle fundamentalfølger skal kunne tilskrives en grænseværdi i den søgte mængde. Dette peger på en væsentlig forskel i forhold til de to andre mængdekonstruktioner. Det betyder nemlig, at konstruktionen af $\mathbb{R}$ kræver en overgang til at betragte mængder med større mægtighed end $\mathbb{N}$; her er det mængden af rationale talfølger.

Med hensyn til udgangspunktet for konstruktionerne, kan de til grund for $\mathbb{N}$ liggende aksiomer naturligvis også gøres til genstand for nærmere undersøgelse. Her drejer det sig om overhovedet at indføre kompositionerne + og $\cdot$ samt ordningsrelationen. Dermed drejer det sig også om, hvilke mængde-teoretiske og logiske forudsætninger, der nødvendigvis må fastlægges for at sikre eksistensen af en uendelig mængde, hvori ovennævnte indførelser kan foretages og anvendes.

Om konstruktionen af **Z**.

I konstruktionen af **Z** ud fra **N** benyttes først det kartesiske produkt **N**×**N** og derefter kvotientmængden **N**×**N**/≈, hvor ≈ er en ækvivalensrelation, som identificerer forskellige talpar i **N**×**N**.

Meningen med at betragte **N**×**N** er, at talpar som for eksempel (2,5) og (5,2) skal svare til det, der normalt betegnes med henholdsvis -3 og 3 i **Z**. Meningen med ækvivalensrelationen er at identificere alle talpar med samme differens, såsom (2,5) og (6,9), der jo begge svarer lige godt til tallet -3. Kvotientmængden bliver derved en mængde af klasser af talpar med samme differens. Efter at de ønskede egenskaber er vist, indføres de velkendte symboler, for eksempel:

$-3 \in \mathbf{Z}$ i stedet for $[(2,5)] = \{(a_1,a_2): (a_1,a_2) \approx (2,5)\} \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}/\approx$.

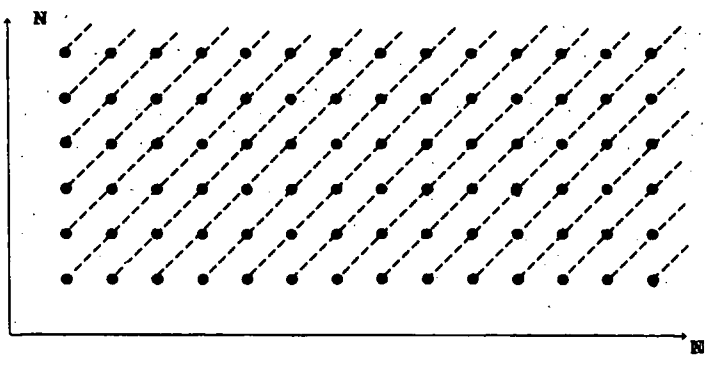
Addition i **N**×**N**/≈ indføres via en indførelse af addition i **N**×**N**, hvor addition af to talpar defineres som den koordinatvise addition. Herved benyttes den allerede definerede addition af to elementer i **N**. Derefter vises at additionen af talpar harmonerer med ækvivalensrelationen. Det vil sige, at addition af to klasser af talpar i **N**×**N**/≈ giver netop en klasse som resultat, når den klassevise addition defineres på en naturlig måde: Addition af klassen, der indeholder (a_1,a_2), med klassen, der indeholder (b_1,b_2), skal give klassen, der indeholder (a_1+b_1,a_2+b_2). Her skal der så være sikkerhed for, at valget af andre repræsentanter for de to klasser, for eksempel $(a_1',a_2') \approx (a_1,a_2)$ og $(b_1',b_2') \approx (b_1,b_2)$, ikke får indflydelse på resultatet. Det vil sige, at klassen, der indeholder (a_1+b_1,a_2+b_2) skal *være lig* med klassen, der indeholder $(a_1'+b_1', a_2'+b_2')$.

Indføres addition af klasser på denne måde, så opnås det ønskede resultat, at $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\approx,+)$ bliver en gruppe, svarende til afhjælpelsen af den konstaterede mangel ved $\mathbb{N}$: At ligningen $a+x=b$ ikke altid kunne løses.

Denne ligning kan i den nye mængde skrives således (i den enkleste form): $[(a,0)]+[(x_1,x_2)]=[(b,0)]$. Det naturlige tal b er her udtrykt ved klassen af talpar med differensen b. Det, vi søger, er klassen af talpar, der opfylder ligningen, det vil sige en klasse af talpar, der har samme differens som repræsentanten (x_1,x_2). En sådan repræsentant er (b,a), altså - ikke overraskende - et talpar med differensen b-a. Løsningen til ligningen er derfor $[(x_1,x_2)] = [(b,a)]$.

Pointen er, at dette resultat er opnået uden, at der er gjort nye antagelser. Således sikrer de mængdeteoretiske antagelser sammen med eksistensen af $\mathbb{N}$, at $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eksisterer, og at definitionsmængden $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ for den parvise addition eksisterer. At det ikke er nødvendigt at gøre nye antagelser, kan illustreres ved, hvordan begrebet differens kan omgås. Ovenfor er nævnt, at to talpar er ækvivalente, hvis de har samme differens. Følgende definition omgår dette: $(a,b)\approx(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$, da kun den allerede etablerede addition inden for $\mathbb{N}$ benyttes.

Ækvivalensklasserne i $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kan illustreres således:



To andre vigtige aspekter ved konstruktionen af $\mathbb{Z}$, er spørgsmålene om $\mathbb{N}$'s indlejring i $\mathbb{Z}$ og om $\mathbb{Z}$'s entydighed. Til grund herfor ligger et princip, der søges gennemført - også ved konstruktionen af $\mathbb{N}$. Der søges en sådan afrunding af teorien, at alle de mængder (med tilhørende kompositioner med videre), der besidder de opstillede karakteristika, er ens i den forstand, at de er isomorfe.

En isomorfi mellem to mængder A og B er en en-entydig afbildning $f: A \rightarrow B$, som gør kompositionerne i de to mængder overensstemmede. Symboliseres for eksempel addition i A ved $\boxplus$ og i B ved $\oplus$, så skal der gælde, at $f(a_1 \boxplus a_2) = f(a_1) \oplus f(a_2)$, hvor $a_1, a_2 \in A$. Det kan så være ligegyldigt, hvilke af mængderne, man adderer i, for ved hjælp af f og f^{-1} kan der bare "oversættes" fra den ene mængde til den anden. Mere generelt er der tale om komposition i stedet for addition, og en isomorfi hænger således altid sammen med en eller flere kompositioner. Når det overhovedet er muligt at etablere en isomorfi mellem to mængder, kaldes disse isomorfe.

Et eksempel på ikke-isomorfe mængder er følgende: Ved et bestemt valg af logiske og mængdeteoretiske forudsætninger, hvor induktionsaksiomet er givet i en første-ordens udgave, kan der findes både archimedisk og ikke-archimedisk ordnede mængder, der opfylder Peano-aksiomerne for de naturlige tal. Her sikres isomorfien først, når der aksiomatisk kræves archimedisk ordning, eller når der antages stærkere forudsætninger. En ikke-archimedisk ordnet mængde vil ikke kunne opfylde Peano-aksiomerne, når induktionsaksiomet er formuleret i den stærkere, anden-ordens logiske udgave (vi ser lidt nærmere på Peano-aksiomerne med videre i del 4, afsnit 1).

I forlængelse heraf vil vi formulere kravene til $\mathbb{Z}$ mere korrekt end før (s. 9).

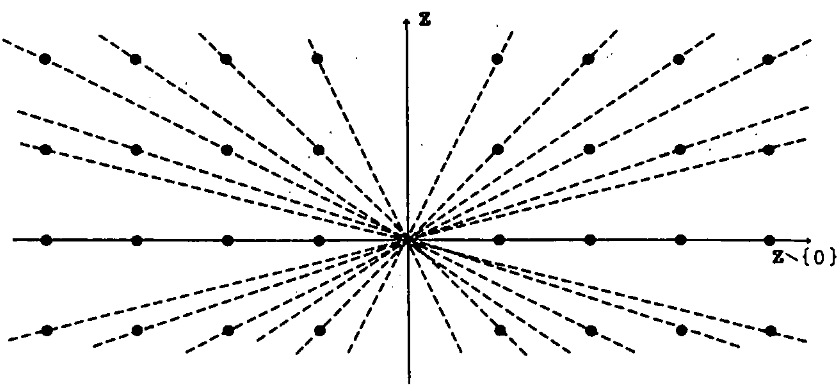
For det første skal der i stedet for kravet om, at $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, formuleres et krav om, at den nye mængde skal have en delmængde, der er isomorf med $\mathbb{N}$. En sådan delmængde af $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\approx$ udgøres af mængden af alle klasser, hvis repræsentanter har første-koordinat større end eller lig med anden-koordinaten.

For det andet må det søges vist, at alle de mængder, der opfylder de således opstillede krav, er isomorfe. Et bevis herfor kræver en stramning af kravene til $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ skal være den mindste udvidelse af $\mathbb{N}$, der opfylder de øvrige krav. Beviset for isomorfien kan benytte, at to mængder $\mathbb{Z}'$ og $\mathbb{Z}''$, der begge opfylder de strammede krav til $\mathbb{Z}$, hver især vil have en delmængde $\mathbb{N}'$ og $\mathbb{N}''$, der begge er isomorfe med $\mathbb{N}$. Disse to delmængder må være indbyrdes isomorfe, og det videre bevis går ud på at udvide isomorfien til at gælde mellem $\mathbb{Z}'$ og $\mathbb{Z}''$.

Konstruktionen af $\mathbb{Q}$.

Denne konstruktion foregår efter samme hovedlinier som ovenstående. Udgangspunktet er her $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, hvor det er meningen, at talparret (a,b) skal svare til a/b. Her er det begrebet "kvotienten mellem" to tal, der skal omgås ved en etableret operation, når talparrene skal inddeles i klasser. Her benyttes så $(a,b)\approx(c,d) \Leftrightarrow ad=cb$ som definition på ækvivalens mellem to talpar (læs: Lighed mellem to brøker).

Ækvivalensklasserne i $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ kan illustreres således:



Bemærk, at anden-aksen er vandret, mens første-aksen er lodret; derved får en ækvivalensklasse intuitivt mening som hældningen af den linie, der "binder" dens repræsentanter sammen.

Inden for den dannede mængde $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})/\approx$ kan $+$, $\cdot$ og $>$ så defineres med udgangspunkt i definitionerne inden for $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$. Det kan så vises, at $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})/\approx$ - fra nu af kaldet $\mathbb{Q}$ - har en delmængde, der er isomorf med $\mathbb{Z}$, at $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ er en kommutativ gruppe, og endelig at $\mathbb{Q}$ er entydigt bestemt. Det vil sige, at alle mængder, der opfylder de stillede krav, er isomorfe. Det sidste kræver dog - som ved $\mathbb{Z}$ - den yderligere betingelse, at mængden ikke indeholder *overflødige mængder i forhold til de basale krav*; i modsat fald ville for eksempel de algebraiske tal opfylde alle de krav, der stilles til $\mathbb{Q}$.

Mængden $\mathbb{A}$ af de algebraiske tal udgøres af tal, der fremkommer som nulpunkter i endelige polynomier med heltalskoefficienter:

$$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \ldots + k_2 x^2 + k_1 x + k_0, \quad k_n \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Alle rationale tal er således algebraiske, men der findes algebraiske tal, der ikke er rationale, for eksempel $\sqrt{2}$. $\mathbb{A}$ er dog ikke nær omfattende nok til at indeholde alle irrationale tal; π er et eksempel på et sådant transcendent (altså ikke-algebraisk) reelt tal. Der gælder $\mathbb{Q}\subset\mathbb{A}\subset\mathbb{R}$.

Om konstruktionen af $\mathbb{R}$.

Som nævnt er ledetråden i konstruktionen her, at i den nye mængde skal alle fundamentalfølger kunne tilskrives en grænseværdi. Hertil betragtes mængden F af alle rationale fundamentalfølger, der er en delmængde af $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\ldots$ ($\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ er mængden af funktioner fra $\mathbb{N}$ ind i $\mathbb{Q}$). Meningen er her at sikre eksistensen af grænseværdierne ved at lade $\mathbb{R}$ bestå af klasser af fundamentalfølger, hvor to fundamentalfølger er ækvivalente - i samme klasse - hvis og kun hvis den koordinatvise differens giver en følge, der konvergerer mod nul. Enhver fundamentalfølge vil således "dumpe" ned i en klasse, der så siges at være dens grænseværdi.

Ligesom konstruktionen af **Z** ud fra **N** ikke direkte kunne involvere begrebet "differens", så skal brugen af begrebet "grænseværdi" undgås ved konstruktionen af **R**. Det er grunden til formuleringen af ovennævnte ækvivalensrelation frem for at sige, at to fundamentalfølger er ækvivalente, når og kun når de har samme grænseværdi. Problemet bliver således vendt til at handle om en velkendt klasse af rationale fundamentalfølger: De, der konvergerer mod et særdeles velkendt (og velvalgt) rationalt tal.

Herefter kan der indføres definitioner på +, · og >, som ligger i naturlig forlængelse af de tidligere definitioner. Det kan også - som ved de tidligere udvidelser - vises, at $F/\approx$ (NB! $\approx$ er blevet brugt som symbol for forskellige ækvivalensrelationer, selvom det formelt set havde været rigtigst at anvende forskellige symboler. Det samme forhold gør sig gældende ved symbolerne +, · og >) indeholder en delmængde, der er isomorf med startmængden, her **Q**. Den med **Q** isomorfe delmængde er "blot" mængden af alle de klasser, der indeholder en konstant følge. For eksempel vil det rationale tal q svare til $[\{q,q,q,\ldots\}]$.

Det er nu forholdsvis oplagt, at fundamentalfølger af klasser fra den med **Q** isomorfe delmængde har en grænseværdi, der ligger i $F/\approx$. En sådan følge af denne type klasser kan for eksempel skrives: $\left\{[\{q_1,q_1,q_1,\ldots\}],[\{q_2,q_2,q_2,\ldots\}],\ldots\right\}$. Grænseklassen bliver naturligvis $[\{q_1,q_2,q_3,\ldots\}]$.

Kravet om fuldstændighed omfatter yderligere, at *vilkårlige* fundamentalfølger af klasser fra $F/\approx$ skal have en grænseværdi i $F/\approx$. Centralt står derfor beviset for, at dette er tilfældet.

Endelig kan det vises, at der gælder isomorfi mellem alle sådanne udvidelser (der giver fuldstændighed) af en med $\mathbb{Q}$ isomorf mængde. Denne isomorfi gælder ydermere, hvor der som udgangspunkt bruges en mere righoldig mængde, for eksempel mængden af de algebraske tal, blot der er tale om et archimedisk ordnet, kommutativt legeme.

Den dannede mængdes egenskab af at indeholde grænseværdier af alle fundamentalfølger kan herefter benyttes til at eftervise, at mængden opfylder de krav, der stilles til $\mathbb{R}$. Således har det jo længe været kendt og anvendt, at π, kvadratrødder med videre kan udtrykkes ved rationale fundamentalfølger. At disse tal er omfattet af mængden er nu umiddelbart givet. Egenskaben er endvidere så stærk, at den kan bruges til at bevise eksistensen af supremum og infimum for begrænsede delmængde. Givet en vilkårlig opadtil/nedadtil begrænset delmængde, er det nemlig muligt at konstruere en fundamentalfølge, hvis grænseværdi netop er supremum/infimum for delmængden.

Til brug for analysen kan flere andre vigtige egenskaber bevises at være opfyldt. Blandt andre Heine-Borell-egenskaben (ethvert begrænset og lukket interval er kompakt) og Bolzano-Weierstrass-egenskaben (enhver følge, hvoraf der i et begrænset interval ligger uendeligt mange punkter, har mindst et fortætningspunkt).

Eksistensen af grænseværdier af fundamentalfølger, eksistensen af sup. og inf. samt de to ovennævnte egenskaber er fire ækvivalente egenskaber i den forstand, at givet et vilkårligt archimedisk ordnet, kommutativt legeme vil tilføjelsen af en af de fire egenskaber som aksiom give en mængde, der er isomorf med $\mathbb{R}$.

Den her beskrevne metode til opnåelse af et fuldstændigt, archimedisk ordnet, kommutativt legeme har den fordel frem for en rent aksiomatisk indførelse, at det ved konstruktionsprocessen bliver tydeligere, hvilke logiske og mængdeteoretiske forudsætninger, der antages.

3. Præcisering af problemstillingen.

Man kan roligt slå fast, at det er en spændende og omfattende teori, der gås udenom, når **R**'s egenskaber blot tages for givne.

Hoved-ideen i den fremstillede konstruktion af **R** indførtes af Cantor så sent som i 1872. Det vil sige på et tidspunkt, da den matematiske analyse var meget udviklet, både med hensyn til anvendelserne - for eksempel ved løsning af differentialligninger fra den matematiske fysik, og med hensyn til afklaringen af fundamentale begreber som kontinuitet og integrabilitet.

Til præcisering af punkt 2 i problemstillingen (s.3) vil vi derfor være specielt interesserede i, hvad en historisk gennemgang kan sige om stringensen eller "niveauet" af forskellige dele af matematikken, således som den så ud, før Cantor (og andre) leverede deres bidrag om grundlaget: De reelle tal. Det har overrasket os, hvor meget matematikerne var i stand til uden en afklaring om **R** - og vi finder, at det er med til at underbygge det rimelige i - som normalt i gymnasiet - blot at tage **R**'s egenskaber for givne.

Det sene tidspunkt for **R**-indførelsen viser, at matematikken så langt fra er bygget op fra neden, startende med en afklaring af de basale talteoretiske eller logiske aksiomer og så videre. Afklaringen af de fundamentale begreber foregik over en lang periode, og den var for en stor del knyttet sammen med diskussioner i forbindelse med matematikkens anvendelse.

Således fandt Cantors indførelse af de reelle tal sted i snæver sammenhæng med en undersøgelse af, hvorledes en Fourier-række opfører sig. En Fourier-række er en uendelig sum af sinus og cosinus-funktioner, som benyttes inden for for eksempel fysikken til at approksimere vilkårlige funktioner med.
En vilkårlig Fourier-række har formen

$$\tfrac{1}{2}a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots$$

Hvis rækken konvergerer punktvis mod f(x) overalt i intervallet

$[-\pi;\pi]$, så har vi altså

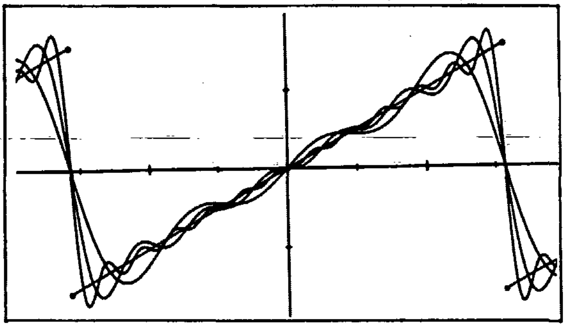
$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad x \in [-\pi;\pi].$$

Her som i resten af projektet betragter vi kun definitionsintervallerne $[-\pi;\pi]$ og $[0;\pi]$. Sætninger med videre kan uden problemer generaliseres til at gælde i intervallerne $[-\ell;\ell]$ og $[0;\ell]$.

Som eksempel på en Fourier-række kan følgende bruges:

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \tfrac{1}{5}\sin 5x - \ldots, \quad x \in [-\pi;\pi]$$

Tegningen viser afsnitssummer med de 3, 6 og 12 første sinus-led.



Rækken konvergerer punktvis mod

$$f(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}x & \text{for } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{for } x = \pm\pi \end{cases}$$

som ligeledes er indtegnet. Bemærk, at f er diskontinuert!

Fysisk set giver Fourier-rækkerne mening som et udtryk for overlejring af harmoniske (rene) svingninger.

Vi har fundet det nødvendigt at se på forhistorien til de problemstillinger omkring Fourier-rækker, som Cantor tog udgangspunkt i. Den artikel, hvori Cantor indfører **R**: *"Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen"* bygger i mangt og meget på et arbejde af Riemann: *"Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe"*, som er vores anden historiske kilde. Den tredie kilde er en artikel, hvor Dedekind redegør for en alternativ konstruktionsmåde for de reelle tal: *"Continuity and Irrational Numbers" (Originaltitel: "Stetigkeit und irrationale Zahlen")*.

Til præcisering af punkt 1 i problemstillingen vil vi specielt være interesserede i ud fra disse kilder at skelne mellem interne, logiske stringens-krav som faktorer, der førte til **R**-præciseringen, og faktorer inden for den mere anvendelsesorienterede del af matematikken.

Del 2. Den historiske baggrund for Cantors indførelse af de reelle tal.

1. Riemanns "Habilitationsschrift".

Cantors indførelse af de reelle tal i 1872 var som nævnt et led i behandlingen af trigonometriske rækker, hvor Cantor byggede direkte på en afhandling af Riemann: *"Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe"* (1854).

Riemanns afhandling, der havde form af et "Habilitationsschrift" (en nødvendighed for opnåelse af forelæsningsret ved universitetet), er i dag først og fremmest kendt, fordi det er heri, Riemann formulerer sine integrabilitetsbetingelser. Han opstiller i afhandlingen de *nødvendige* og *tilstrækkelige* betingelser for at en begrænset funktion er integrabel, og han leverer derved et væsentligt bidrag til den præcisering og afrunding af den matematiske analyse, som fandt sted i sidste århundrede.

Det er dog især Riemanns resultater med hensyn til de trigonometriske rækker, som Cantor bygger videre på. Også Riemann selv betragtede disse som det centrale i afhandlingen. Således fremtræder afsnittet om integrabilitetsbetingelserne nærmest som et lille, men nødvendigt sidespring. Allerede her ser vi et eksempel på, at det, der i dag ses tilbage på som teoretiske landvindinger, dengang fremtrådte som udviklingen af visse hjælpemidler uden større principiel betydning.

Den historiske baggrund for de Fourier-række-problemer, som Riemann og Cantor behandlede, fremgår af det indledende afsnit i Riemanns afhandling. Her gennemgår han i korte træk, hvorledes Fourier-rækkerne kom ind i den matematiske diskussion i forbindelse med løsningen af visse fysisk relevante differentialligninger. Ligeledes beskriver han, hvordan matematikerne senere forsøgte at afklare spørgsmålene omkring

Fourier-rækkerne. Vi lader en fremstilling af hovedpunkterne i Riemanns historiske afsnit danne udgangspunktet for opstillingen af nogle spørgsmål, der forekommer os relevante for belysning af, hvad der historisk set fremprovokerede Cantors indførelse af **R**.

Riemanns historiske beskrivelse.

Det historiske rids i Riemanns afhandling starter, hvor de trigonometriske rækker for alvor begyndte at spøge, nemlig omkring 1750.

Det skete i forbindelse med spørgsmålet om den svingende streng, og kernen i diskussionen om denne var løsningen af den partielle differentialligning:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

den såkaldte bølgeligning. Løsninger til denne ligning skal være funktioner af to variable: $y = f(x,t)$. Ved den svingende streng er der visse grænse-betingelser og begyndelsesværdier, og en af de første, der kom med et bud på en løsning var d'Alembert. Han nåede det elegante resultat, at enhver funktion, der beskrev den svingende strengs forløb, kunne skrives på den enkle form:

$$(2) \quad y = \tfrac{1}{2}\Big(f(at+x) - f(at-x)\Big), \text{ hvor:}$$

I) $f(x)$ er strengens begyndelseskurve.

II) f er ulige, det vil sige $f(x) = -f(-x)$.

III) f er periodisk med perioden to gange strengens længde.

IV) f er to gange differentiabel med hensyn til både x og t.

d'Alembert mente, at funktionen skulle være givet ved et analytisk udtryk, men her mente Euler, at der kunne tillades funktioner, der var givet ved helt vilkårlige (det vil sige "frihåndstegnede" og i vores forstand kontinuerte) kurver. De to blev aldrig enige på dette punkt, men i 1753 fremkom Daniel Bernoulli med et synspunkt, de begge kunne enes om at være uenige i.

Bernoulli havde arbejdet med den svingende streng ud fra en anden angrebsvinkel, og som løsning fik han funktionen

$$(3) \qquad y = f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \cos ant, \quad \text{hvor } a_n \in \mathbb{R}, \ x \in [0;\pi]$$

hvor koefficienterne a_n fastlægges ud fra begyndelseskurven.

Det ser unægteligt noget anderledes ud end d'Alemberts løsning. Både d'Alembert og Euler tilbageviste den med begrundelsen, at løsningen ikke var nær generel nok.

Tilbagevisningen skyldtes følgende. For $t = 0$ fås et udtryk for strengens begyndelseskurve, nemlig

$$(4) \qquad f(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \text{hvor } a_n \in \mathbb{R}, \ x \in [0;\pi]$$

hvilket er en uendelig sum af sinus-funktioner med forskellige amplituder a_n. d'Alembert og Euler kritiserede Bernoulli ud fra, at en generel løsning skulle beskrive strengens forløb ud fra *vilkårlige* begyndelseskurver; og det kan dårligt siges at fremgå helt tydeligt af (4), hvorledes dette udtryk kunne omfatte alle mulige begyndelseskurver for strengen.

Bernoulli havde imidlertid ret. De mulige begyndelseskurver er tilstrækkeligt pæne til, at den tilsvarende funktion har en Fourier-række, der overalt konvergerer mod funktionen, endda - som Bernoullis formel angiver - en række af udelukkende sinus-funktioner.

Der kom til at gå knap halvtres år, før nye problemer og nye metoder kastede lys over "Bernoullis problem".

Det fysiske problem var her varmeledning, der også gav anledning til en partiel differentialligning, og det var Fourier, der i starten af sidste århundrede, søgte at løse denne. Igennem dette arbejde blev han klar over, hvor utroligt stærkt et værktøj udtryk af formen (4) er, og han leverede herved en solid støtte til anvendeligheden og generaliteten af Bernoullis løsning af bølgeligningen.

Fourier-rækkerne blev herefter ofte anvendt i den matematiske fysik til fremstilling af funktioner, og i de enkelte tilfælde var det let at overbevise sig om, at Fourier-rækken virkeligt konvergerede mod funktionsværdierne.

Det varede dog længe, før en generel sætning herom blev bevist. Før Dirichlet gjorde dette, havde blandt andre Cauchy forsøgt sig med et bevis, der imidlertid var utilstrækkeligt.

Dirichlet beviste, at når en funktion opfylder de følgende betingelser, så konvergerer Fourier-rækken punktvis i hele intervallet mod funktionsværdierne.

I) f er integrabel i intervallet.

II) f har et endeligt antal lokale maxima og minima.

III) Funktionsværdien i et diskontinuitetspunkt a skal være lig med middelværdien af $\lim_{x\to a_-} f(x)$ og $\lim_{x\to a_+} f(x)$. Dette gælder naturligvis i alle kontinuitetspunkter.

Dirichlet havde, skriver Riemann, med denne sætning afgjort spørgsmålet om konvergensen af Fourier-rækkerne for alle de funktioner, der forekommer i fysikken *(die Natur)*. Formålet med den yderligere afklaring af konvergens-problemet, som Riemann arbejdede på, betegner han derfor som værende af intern matematisk karakter.

Spørgsmål til Fourier-rækkernes historie.

Da de Fourier-rækker, som Cantor beskæftigede sig med, er kommet ind i den matematiske diskussion i forbindelse med løsning af bølgeligningen og varmeledningsligningen, vil vi i det følgende se nærmere på disse emner fra den matematiske fysik.

Bølgeligningen: Hvad var det nye ved bølgeligningen i forhold til tidligere problemer inden for den matematiske fysik? Hvad kan grundene være til, at selv om Bernoulli havde "ideen" til de trigonometriske rækkers betydning, så fik matematikerne ikke udviklet denne idé til en egentlig forståelse af problemet?

Varmeledningsligningen: Hvad var til gengæld det ved varmeledningsligningen, der bevirkede, at erkendelsen om trigonometrisk række-udvikling af funktioner kunne slå igennem - 50 år efter ideen først var blevet fremsat?

2. Den svingende streng. Bølgeligningen.

Den svingende streng var et fysisk problem af en ny type. Hidtil havde problemerne i mekanikken hovedsageligtdrejet sig om *stive* legemers bevægelse (planeter, kanonkugler med mere).

Et stift legeme kan ofte i fysikken reduceres til et enkelt punkt, hvori hele massen er koncentreret (eventuelt kommer der et drejningsmoment ind i billedet). En sådan reduktion af den svingende streng vil være meningsløs, da det er *hele* strengens udseende (med dens uendeligt mange punkter) gennem et tidsforløb, der har interesse.

Et tidsmæssigt forløb af en sådan streng kan beskrives ved en funktion af to variable. Løsningen af de differentialligninger, der opstilledes for at beskrive bevægelsen - partielle differentialligninger - krævede nye metoder.

Den svingende streng var det først behandlede problem af denne mere komplicerede type, og problemet var endvidere særdeles matematisk interessant, fordi det havde en smuk og enkel løsning, og dermed demonstrerede de matematiske metoders anvendelighed.

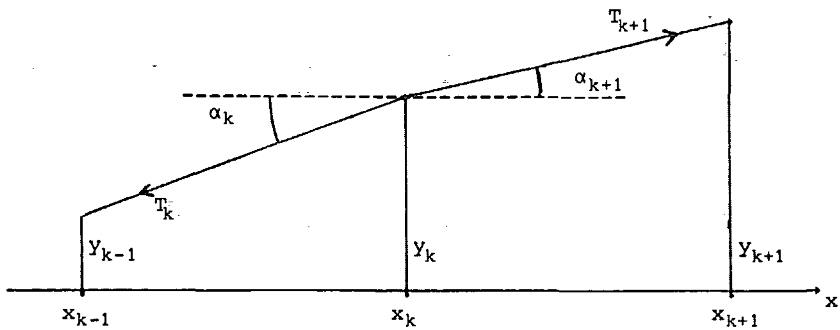
I det følgende ser vi på, hvorledes d'Alembert og Daniel Bernoulli ved to forskellige metoder nåede frem til hver sin beskrivelse af den svingende streng. d'Alemberts løsning var den smukkeste og umiddelbart mest anvendelige, men Bernoullis løsning indeholdt ideen om de trigonometriske rækkers betydning. En vis del af overvejelserne var de enige om, og denne del vil vi kort gennemgå, før vi ser på uenigheden.

De tager begge udgangspunkt i en masseløs, elastisk streng med et endeligt antal massepunkter jævnt fordelt på strengen. Forskellen i de to metoder drejer sig om, hvorledes den kontinuerte strengs opførsel udledes fra opførslen af den masseløse streng med det endelige antal massepunkter, det vil sige, hvorledes antallet af massepunkter føres mod uendelig.

Det er for øvrigt interessant, at de herved opstiller og løser bølgeligningen ved hjælp af grænseovergangsbetragtninger, hvorved infinitesimalerne kun indgår indirekte, nemlig i selve deres begreb om grænseværdi. Faktisk benyttes infinitesimaler *direkte* til opstilling af bølgeligningen (og meget mere) i nogle moderne fysikbøger (for eksempel Alonso-Finn II, s. 670f.) - hundrede år efter, at dette "småkryb" af Cantor, Weierstrass med flere var blevet udelukket fra den matematiske analyse.

Den diskrete model: Så langt rakte enigheden.

Et lille udsnit af en masseløs , elastisk streng med n jævnt fordelte massepunkter kan se således ud:



For nemheds skyld idealiseres problemet yderligere, idet der gøres følgende forudsætninger:

I) Ingen friktion.

II) Stram opspænding af strengen, så jordens tiltrækning af partiklerne er uden betydning.

III) Der sker ingen bevægelse af partiklerne i x-retningen.

Fremover benyttes følgende størrelser:

Strengens længde: π

Strengens spænding: T

Antal partikler: n

Partiklernes samlede masse: M

Først benyttes Hookes lov (elasticitets-loven), der siger, at kraft er proportional med længde, og det er den del af strengen mellem x_{k-1} og x_k, vi betragter:

I hvile: Længde $= \frac{\pi}{n}$, kraft $= T$, d.v.s. $\frac{\pi}{n} \approx T$

På tegning: Længde $= \frac{\pi}{n \cos \alpha_k}$, kraft $= T_k$, d.v.s. $\frac{\pi}{n \cos \alpha_k} \approx T_k$

Dette giver alt i alt

(1) $\quad T = T_k \cos\alpha_k \qquad k=1,2,3,\ldots,(n-1)$

Med Newtons anden lov kan den kraft, der påvirker den k'te partikel, skrives

(2) $\quad \frac{M}{n}\cdot\frac{d^2y_k}{dt^2} = F_k$ $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right.$ er jo netop accelerationen i den eneste retning, partiklen bevæger sig$\left.\right)$

Fra tegningen fås for denne kraft, at

$$F_k = T_{k+1}\sin\alpha_{k+1} - T_k\sin\alpha_k \qquad \text{(vinklerne regnes med fortegn)}$$

Indsættes imidlertid udtryk for T_k og T_{k+1} givet ved (1), er

$$F_k = T(\tan\alpha_{k+1} - \tan\alpha_k)$$

Tangens til de respektive vinkler er lig med hældningen af de tilsvarende liniestykker, og disse hældninger kan udtrykkes ved koordinaterne, således

$$F_k = T\left(\frac{(y_{k+1}-y_k) - (y_k-y_{k-1})}{(\pi/n)}\right) = \frac{\pi T}{n}\left(\frac{(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})}{(\pi/n)^2}\right)$$

Sammen med (2) giver dette, at

(3) $$\frac{d^2y_k}{dt^2} = \frac{\pi T}{M}\left(\frac{(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})}{(\pi/n)^2}\right) = a^2\left(\frac{(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1})}{(\pi/n)^2}\right),\quad a^2 = \frac{\pi T}{M}$$

Så vidt har der tilsyneladende været enighed. (Langer, 1947).

Den kontinuerte model. Uenighed om grænse-overgangen.

d'Alembert og Euler lader i udtrykket (3) n gå mod uendelig (egentlig sætter de $\Delta x = \pi/n$ og lader Δx gå mod 0) og opnår herved bølgeligningen for et kontinuert 1-dim. medium:

(4) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

hvor y er en funktion af både x og t. I (3) ligger y's afhængighed af x "skjult" i index på y.

Ved et lineært koordinatskift $\begin{pmatrix}x'\\t'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a\\-1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}$ og rimeligt simple udregninger, lykkedes det d'Alembert at vise, at enhver løsning til (4) kan skrives på formen

(5) $y(x,t) = \Psi(at+x) + \Phi(at-x)$

Ψ og Φ fastlægges ved grænsebetingelser og begyndelsesværdier, og for den svingende streng giver dette

(6) $y(x,t) = f(at+x)-f(at-x)$, hvor

I) $f(x)$ for $x \in [0;\pi]$ er strengens begyndelseskurve.

II) f er periodisk med perioden 2π.

III) f er ulige, det vil sige, at $f(x) = -f(-x)$.

Her holdt Euler og d'Alemberts enighed op, men det er mindre væsentligt her. Den her relevante uenighed dukker op i forbindelse med Bernoullis metode, der giver et resultat af et noget anderledes udseende end (6).

Bernoulli tog fat på (3), der er et system af ordinære differentialligninger. Han søgte at løse den k'te ligning, det vil sige, at finde funktioner $y_k(t)$, der opfylder (3). For $k=0$ og for $k=\pi$ skal løsningen være den konstante funktion 0, da endepunkterne ligger stille.

De simplest beskrivelige svingninger, den diskrete streng kan opretholde, er *synkrone* svingninger. Her vil alle partiklerne være i hver sin yderstilling *samtidig*, de vil alle passere nul-stillingen *samtidig* og så fremdeles. I så tilfælde findes der nemlig konstanter $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ og én funktion f, der tilsammen opfylder

(7) $y_k(t) = u_k f(t)$ for alle $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Om konstanterne kan umiddelbart siges, at $u_0 = u_n = 0$, da endepunkterne ligger stille. Om f kan siges, at $f'(0) = 0$, det vil sige at strengen er i en af yderstillingerne til $t=0$.

Indsættes (7) i (3) fremkommer følgende

$$u_k f''(t) = \left(\frac{na}{\pi}\right)^2 (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) f(t)$$

En mindre omskrivning og en forkortelse giver .

(8) $$f''(t) = -c^2 f(t), \text{ hvor } u_{k+1} + \left(\left(\frac{c\pi}{na}\right)^2 - 2\right) u_k + u_{k-1} = 0$$

Ved at søge nogle specielle løsninger, er problemet således omskrevet til en ordinær anden-ordens differentialligning og et ligningssystem med n+1 ligninger i n+1 ubekendte. Systemet har kun ikke-triviel løsning, når konstanten c er af formen

$$c_\nu = \nu a \frac{\sin(\nu\pi/2n)}{(\nu\pi/2n)}, \text{ hvor } 1 \leq \nu \leq n-1.$$

For et givet ν er løsningen

$$u_k = A_\nu \sin\frac{k\nu\pi}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n, \; A_\nu \in \mathbb{R}.$$

Sammen med løsningen til den ordinære differentialligning i (8)

$$f(t) = \cos(ct) \qquad \text{(idet } f'(0) \text{ skal være nul)}$$

kan det foregående ved hjælp af den oprindelige antagelse (7) sammendrages til dette:

$$y(t,x) = A_\nu \sin \nu x \cos\left[\nu a t \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2n}\right)}{\left(\frac{\nu\pi}{2n}\right)}\right], \text{ hvor } x = k\frac{\pi}{n}, \; 1 \leq \nu \leq n-1, \; A_\nu \in \mathbb{R}.$$

Alle funktioner af denne form er løsninger til (3), og det er i dette udtryk, Bernoulli lader n og k gå mod uendelig. I argumentet til cos genkendes et udtryk af formen $\frac{\sin v}{v}$, og når man lader n gå mod uendelig, mens $\frac{k\pi}{n}$ går mod x, bliver grænseværdien

(9) $$y(t,x) = A_\nu \sin \nu x \cos \nu a t, \text{ hvor } x \in [0;\pi], \; \nu \in \mathbb{N} \text{ og } A_\nu \in \mathbb{R}.$$

Funktioner af denne form tilfredsstiller den af d'Alembert opstillede bølgeligning for den kontinuerte streng, så disse funktioner er altså specielle løsninger til beskrivelse af strengens svingning.

Bernoulli tolkede nu (9) som en ren svingning, hvor ν bestemmer frekvensen. Han forlod sig så på, at strenge ved forsøg kun afgav svingninger, der var summer af grundtone ($\nu = 1$) og af overtoner ($\nu > 1$). I udtrykket (9) er der uendelig mange frekvenser at tage af, og han konkluderede, at *alle* svingninger, som en kontinuert streng kan afgive, lader sig beskrive ved

$$(10) \quad y(t,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \sin \nu x \cos \nu at, \text{ hvor } A_\nu \in \mathbb{R}.$$

Daniel Bernoulli hævdede altså, at (10) var den generelle løsning til bølgeligningen. Den ser jo unægtelig noget anderledes ud end (6), men den kommer til at ligne lidt bedre, hvis man benytter ligheden

$$\sin \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\beta+\alpha) - \sin(\beta-\alpha)).$$

Da kan (10) nemlig omformes til

$$(11) \quad y(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tfrac{1}{2} A_\nu (\sin(\nu(at+x)) - \sin(\nu(at-x))).$$

Kritikken af Bernoullis løsning.

Euler og d'Alembert mente ikke, at Bernoullis løsning var en generel løsning. Det skyldtes som nævnt, at strengens begyndelseskurve, der fås af (10) ved at sætte $t = 0$, vil se således ud:

$$(12) \quad y(x,0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \sin \nu x.$$

Hævdes det så - som Bernoulli var overbevist om - at løsningen er generel, det vil sige, at den kan beskrive strengens bevægelser ud fra vilkårlige startbetingelser, så må det også hævdes, at (12) omfatter alle mulige begyndelses-kurver.

Denne påstand, der var en foregribelse af Fouriers synspunkter, var det umiddelbart svært at fremføre overbevisende. Bernoulli kunne argumentere ud fra fysiske overvejelser om den svingende streng, hvor han påpegede, at bevægelsen altid kunne opfattes som en overlejring af harmoniske svingninger. Han argumenterede også med, at når strengens position var givet i n punkter, kunne der beregnes en sinus-række med n led, hvis kurve gik gennem alle n punkter (de n koefficienter kan teoretisk set findes ved løsning af n ligninger i n ubekendte). Med uendelig mange koefficienter måtte der så være "nok" til en kontinuert streng.

Men Bernoulli kunne ikke angive nogen metode til beregning af koefficienterne i det kontinuerte tilfælde, og der var åbenbart ikke nogen omstændigheder, der kunne drive andre matematikere til at afklare problemet. Euler og d'Alembert holdt fast ved d'Alemberts løsningsmetode, og spørgsmålet var genstand for en pæn strid, hvor ingen af parterne nogensinde gav sig.

Striden blev ikke afgjort, før der dukkede et andet problem af samme karakter (partiel differentialligning) op. Det drejede sig om varmeledning.

3. Varmeledningsligningen.

Det arbejde fra 1807, hvori Fourier fremsatte sine banebrydende ideer om trigonometrisk fremstilling af funktioner, er et værk om opstilling og løsning af varmeledningsligningen.

Vi gennemgår i det følgende, hvordan Fourier *i princippet* løste denne partielle differentialligning (idet vi kun har set metoden i moderne udgave - jf. Braun, 1983). Der søges en funktion, som udtrykker hvorledes temperaturen afhænger af sted (i én dimension) og tid. Derefter ser vi på Fouriers *tolkning* af de matematiske forhold omkring løsningen.

Løsningen af varmeledningsligningen.

I en dimension ser varmeledningsligningen således ud:

(1) $\frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, hvor a er en konstant, der blandt andet udtrykker varmeledningsevne.

d'Alemberts smarte metode med koordinatskifte faldt ikke lige for ved denne type differentialligning. Til gengæld viste seperation af de variable sig at være et uhyre stærkt værktøj.

For at få en entydig løsning må der sættes visse grænsebetingelser. For eksempel giver en isoleret, varmeledende stang af længden π, der i endepunkterne ($x=0$ og $x=\pi$) har samme, fastholdte temperatur (der ved passende temperaturskala er lig nul), og som har en bestemt start-temperatur-fordeling $f(x)$, følgende grænseværdier og startbetingelse:

(2) $y(0,t) = y(\pi,t) = 0.$

(3) $y(x,0) = f(x)$, hvor $x \in]0;\pi[$.

En måde at få hul på dette problem er at splitte $y(x,t)$ op ved at antage, at $y(x,t)$ kan omskrives således

(4) $\quad y(x,t) = \Psi(x)\Phi(t)$

hvilket er en såkaldt seperation af de variable.
Under denne antagelse bliver (1) til

$$a^2\frac{\partial^2(\Psi(x)\Phi(t))}{\partial x^2} = \frac{\partial(\Psi(x)\Phi(t))}{\partial t}$$
$$\Updownarrow$$

(5) $\quad a^2\Psi''(x)\Phi(t) = \Psi(x)\Phi'(t)$

Af betingelse (2) fås

$$\Psi(0)\Phi(t) = 0 \text{ og } \Psi(\pi)\Phi(t) = 0$$

og hvis ikke $\Phi(t)$ - og dermed $y(x,t)$ - skal være konstant 0, så er

(6) $\quad \Psi(0) = \Psi(\pi) = 0.$

Endelig giver (3), at

(7) $\quad \Psi(x)\Phi(0) = f(x) \qquad x \in]0;\pi[$

Nu er problemet under antagelsen (4) blevet formuleret, så det er muligt at omforme den partielle differentialligning til to ordinære differentialligninger. Dette gøres ved at dividere begge sider i (5) med $a^2\Psi(x)\Phi(t)$. Her bør der retteligen tages højde for singulariteter, men det går vi med tyngede hjerter forbi i tavshed, hvorved vi opnår

$$\frac{\Psi''(x)}{\Psi(x)} = \frac{\Phi'(t)}{a^2\Phi(t)}$$

Her står, at en funktion af x er lig en funktion af t. Ligheden skal så også gælde ved for eksempel $x=x_0$. Det implicerer, at funktionen af t er lig en konstant funktion. Det må funktionen af x følgelig også være - tilmed den samme konstante funktion. Altså

$$\frac{\Psi''(x)}{\Psi(x)} = \frac{\Phi'(t)}{a^2\Phi(t)} = -k, \quad \text{hvor } k \in \mathbf{R},$$

og herved er den ønskede opsplitning lykkedes, nemlig

(8) $\Psi''(x) + k\Psi(x) = 0$

(9) $\Phi'(t) + a^2 k\Phi(t) = 0$

Voilà, to ordinære differentialligninger, der nu kan løses ved en standard-metode (jvf. Braun, 1983). Ved at gange løsningerne sammen opnås en løsning til den partielle differentialligning.

Den første (8) har med grænseværdierne (6) kun ikke-trivielle løsninger, når k er af formen

$k_n = n^2$, hvor n=1, 2, 3, ...

(det ser måske lidt for simpelt ud, men det skyldes, at vi har sat stangens længde til π).
Løsningerne er da

$\Psi_n(x) = a_n \sin nx$, hvor n=1, 2, 3, ... og $a \in \mathbf{R}$

De bånd, der er på k'erne føres over til løsninger af (9):

$\Phi_n(t) = b_n \exp(-a^2 n^2 t)$, hvor n=1, 2, ... og $b \in \mathbf{R}$

Sættes $c_n = a_n b_n$, fås ud fra den oprindelige antagelse (4), at funktionerne

(10) $y_n(x,t) = c_n \sin nx \exp(-a^2 n^2 t)$, hvor n=1, 2, 3, ...

er løsninger til (1) under grænseværdierne (2).

Hvordan skal det nu kunne lade sig gøre at få betingelsen (3) opfyldt? Det er ikke helt så svært som det kunne se ud til, for (1) er lineær, det vil sige, at summen af to løsninger selv er en løsning. Samtidigt vil summen opfylde (2), når de to løsninger, der adderes, hver især opfylder (2).

For at få (3) opfyldt kan vi altså uden at ødelægge noget prøve at summe "passende" løsninger fra (10).

$$(11)\quad y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin nx \exp(-a^2 n^2 t) \qquad x \in]0;\pi[$$

Begyndelses-temperaturfordelingen (t=0) bliver for (11)

$$(12)\quad y(x,0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin nx \qquad x \in]0;\pi[$$

Her var Fourier - som normalt for sin tid - uden videre parat til at foretage en uendelig summation. Hensigten var at (12) skulle omfatte så mange begyndelses-temperaturfordelinger som muligt, altså at løsningen skulle være så generel som antagelsen (4) overhovedet muliggjorde:

$$(13)\quad y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \qquad x \in]0;\pi[$$

4. Fouriers tolkning og hans beregning af koefficienterne.

Fouriers problem minder nu om Bernoullis: Er løsningen tilstrækkelig generel til at omfatte samtlige mulige begyndelsesværdier?

Hvad der ikke lykkedes for Bernoulli med hensyn til at overbevise matematikerne og fysikerne om funktioners trigonometriske udvikling, lykkedes for Fourier. Han var i stand til at beregne koefficienterne i det trigonometriske udtryk. Dels gjorde dette løsningen anvendelig, og dels var det et stærkt argument for hans generelle påstand om funktioner udviklelighed gennem uendelige rækker af sinus- og cosinus-funktioner.

Fourier hævdede, at en *vilkårlig* funktion $f(x)$, $x \in [-\pi;\pi]$ kunne skrives på formen

$$(1) \quad f(x) = \tfrac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\text{, hvor}$$

$$\tfrac{1}{2}a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Faktisk var Fourier ikke den første, der havde beregnet koefficienterne. Selveste Euler havde så tidligt som i 1777 fået samme resultat; først ved en meget besværlig metode, men med resultatet for hånden var en langt nemmere metode faldet ham ind. Fourier kan næppe have kendt Eulers udledning, så havde han sikkert benyttet den. Fourier brugte oprindelig en meget kompliceret og noget tvivlsom metode med løsning af uendelig mange ligninger i uendelig mange ubekendte. Men også han fandt den metode, der bygger på en ganske bestemt egenskab ved de trigonometriske funktioner, nemlig

$$(2)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m \neq n \\ 2 & \text{hvis } m = n = 0 \\ 1 & \text{hvis } m = n \text{ (og ikke nul)} \end{cases}$$

$$(3)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{hvis } m \neq n \text{ (eller en af dem nul)} \\ 1 & \text{hvis } m = n \text{ (og ikke nul)} \end{cases}$$

$$(4)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0$$

Denne sammenhæng kaldes i dag ortogonalitet/vinkelrethed af funktionssystemet, hvilket kommer sig af, at $\int f(x)g(x)dx$ kan tolkes - og opfører sig som - et indre produkt i et lineært vektorrum, hvor vektorerne altså er funktioner. De trigonometriske funktioner udgør da en ortogonal basis, og når koefficienterne er bestemt som i (1) er de funktionens koordinater i denne basis. Nok om den moderne fortolkning.

Koefficienterne udregnes på følgende måde: Multiplicer (1) igennem med $\cos mx$ og integrer over $[-\pi;\pi]$ på begge sider.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2} a_0 \cos mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos mx \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] \right) dx$$

Hvis man ikke er pivet, så ganger man ind og bytter om på integrationen og den uendelige summation, hvorved det af (2) og (4) vil fremgå, at der kun bliver et eneste led tilbage på højresiden, nemlig πa_m, og derfor

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx$$

Samme metode bruges naturligvis til at bestemme b_m'erne.

Metoden er dog ikke helt problemfri. Senere viste Weierstrass, at ombytningen af integrationen og den uendelige summation forudsatte, at visse nærmere betingelser skulle være opfyldt.

Fouriers store force var her tolkningen af resultatet. Euler, der som nævnt selv havde udledt ovennævnte formler, behandlede kun funktioner, der i forvejen var periodiske, og han tillagde i øvrigt ikke resultatet nogen større betydning.

Fourier opdagede på en eller anden måde, at funktionen og dens række ikke behøvede at stemme overens uden for intervallet. Inden i intervallet behøvede funktionen ikke en gang at bestå af et enkelt analytisk udtryk. Den kunne være stykket sammen af flere udtryk, eller måske endog være helt "vilkårlig". Før vi kommer nærmere ind på hvad, der ligger i begrebet "vilkårlig funktion", kommer der et eksempel på Fourier-række-udvikling.

Blandt mange eksempler (se også s.20) gav han selv følgende:

$$f(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{4}\pi & \text{for } x \in\,]-\tfrac{1}{2}\pi;\tfrac{1}{2}\pi[\\ 0 & \text{for } x = \pm\tfrac{1}{2}\pi \\ -\tfrac{1}{4}\pi & \text{for } x \in\,]-\pi;-\tfrac{1}{2}\pi[\ \cup\ ]\tfrac{1}{2}\pi;\pi[\end{cases}$$

Med formlerne i (1) regnes koefficienterne nemt ud.

$$\tfrac{1}{2}a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} -\tfrac{1}{4}\pi\cos nx\, dx + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{4}\pi\cos nx\, dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} -\tfrac{1}{4}\pi\cos nx\, dx\right)$$

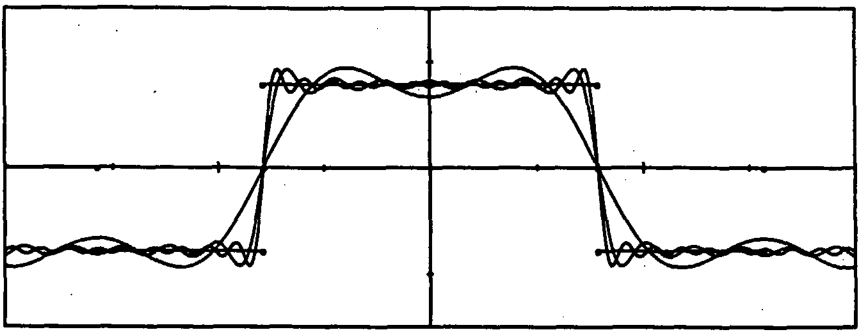
$$= \tfrac{1}{2}\left[-\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} + \tfrac{1}{2}\left[-\frac{\sin nx}{n}\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} = \frac{\sin \frac{1}{2}n\pi}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0 \quad \text{(da } f(x) \text{ er lige og } \sin nx \text{ er ulige).}$$

Alt i alt giver det denne smukke række

$$f(x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots, \qquad x \in [-\pi;\pi]$$

Nedenstående tegning viser funktionen f samt tre tilnærmelser med de henholdsvis to, syv og tolv første cosinus-led.



Om årsagerne til at forståelsen af trigonometrisk rækkeudvikling vandt udbredelse.

Ved hjælp af et væld af eksempler af samme type som ovenfor var Fourier i stand til at underbygge sin påstand. Med formlerne for koefficienterne viste det sig oven i købet at være nemt og effektivt at tilnærme funktioner ved Fourier-rækker, og det fandt hurtigt en udbredt anvendelse.

I forbindelse med varmeledningsligningen kan man endvidere tale om nødvendighed med hensyn til at acceptere den trigonometriske udvikling af - næsten - vilkårlige funktioner. Anvendeligheden af løsningsmetoden med seperation af de variable står og falder med, at en vilkårlig begyndelses-temperatur-fordeling kan udtrykkes ved en trigonometrisk række, og der var ikke nogen anden løsningsmetode til det foreliggende problem.

5. Dirichlet og Riemann.

Fra og med Fouriers arbejde har FOurierrækkerne haft en central placering i matematikken. Som vi skal se, var de en del af udgangspunktet for Cantors undersøgelse af de reelle tal

Derudover tog Cantor naturligvis udgangspunkt i den øgede stringens og afklaring indenfor matematikken på hans tid. Forhistorien hertil skal vi ikke komme ind på. Men vi kan nævne, at afklaringen af generelle begreber såsom kontinuitetsbegrebet, funktionsbegrebet og integralbegrebet absolut ikke var uafhængig af diskussionen af Fourierrækkerne.

Fourierrækkerne leverede eksempler på besynderlige fænomener, såsom at en (uendelig) sum af kontinuerte funktioner kunne give en diskontinuert funktion. Tidligere havde man især anvendt potensrækker $(a_o+a_1x+..+a_nx^n+..)$ til at fremstille funktioner med, og disse førte ikke til diskontinuerte funktioner. Det var med til at stille spørgsmålet om, hvad kontinuitet egentlig var.

Selve karakteren af Fouriers påstand - at en vilkårlig funktion kunne fremstilles som en trigonometrisk sum - lagde også op til at man stillede sig spørgsmålet: hvad forstås ved en vilkårlig funktion? Hos Fourier kan man finde formuleringer, der svarer til det moderne funktionsbegreb.
I praksis var han dog præget af datidens almindelige opfattelse, hvor en "funktion" som oftest betød det, man i dag betegner som en kontinuert eller stykkevis kontinuert funktion. Fouriers påstand er jo også forekrt, hvis man antager den moderne definition på en funktion.

Også integralbegrebet påkaldte sig interesse, når man beskæftigede sig med Fourierrækkerne. En funktion kunne kun Fourierrække-udvikles, hvis det gav mening at tale om funktionens integrale (integralet indgår i bestemmelsen af koefficienterne).

Vi fortsætter nu den historiske gennemgang med et par store skridt, hvor vi går helt frem til Dirichlet og derefter Riemann. To matematikere, som illustrerer ovennævnte sammenhæng mellem arbejdet med Fourierrækkerne og afklaringen af diverse fundamentale begreber. Dirichlet, der behandlede Fourierrækkernes konvergensforhold på en måde, hvor det var afgørende at han havde forladt det gamle funktionsbegreb. Og Riemann, der for at komme endnu længere med de trigonometriske rækker, så sig nødsaget til at opstille et helt generelt kriterie for hvornår en vilkårlig, begrænset funktion var integrabel.

Dirichlets betingelser for at en Fourierrække konvergerer.

Konvergensen af Fourier-rækkerne var og er stadig et meget kompliceret problem. Fourier havde i sine fremstillinger givet beviser for specielle tilfælde, men han gennemførte aldrig et generelt bevis. Det forsøgte blandt andre Poisson og Cauchy, men deres beviser var ikke helt pletfri.

Ydermere havde nogle af beviserne den svaghed, at de "fore-gav" at dække alle funktioner. Grunden hertil var nok blandt andet, at det gamle funktionsbegreb stadig spøgte, således at implicitte forudsætninger om funktionernes "pænhed" gjorde bevisførelsen lettere.

Her fandt Dirichlet i 1829 en frugtbar vej, idet han havde indset det nyttige i det helt generelle funktionsbegreb: Uden implicitte forudsætninger om de funktioner, hvis Fourier-rækker skal undersøges for konvergensforhold, kunne et bevis påbegyndes. Ved nu kun at indføre de for beviset allermest nødvendige indskrænkninger findes tilstrækkelige betingelser i den forstand, at alle de funktioner, der opfylder betingelserne, har en Fourier-række, der punktvis konvergerer mod funktionsværdierne. Det kan så meget vel være, at betingelserne er for stramme; men ved at undgå implicitte forudsætninger og ved at søge så få og så generelle betingelser som muligt sikres bevisets gyldighed for en rimelig stor - og hvad vigtigere er - en veldefineret klasse af funktioner.

Denne strategi gav bonus. Som det ses på side 24, fandt Dirichlet nogle tilstrækkelige betingelser, der var meget generelle. Det er de to første betingelser (integrabilitet og et endeligt antal max. og min.), der er de vigtigste, for er det kun den tredie ("normerede" funktionsværdier i diskontinuitetspunkterne), der ikke er opfyldt, vil det kun være i diskontinuiteterne, at Fourier-række og funktion ikke stemmer overens.

Den anden betingelse var nødvendig i Dirichlets bevis, fordi han ved en grænseovergang under et integrationstegn var nødt til at kunne dele intervallet op i et endeligt antal monotoni-intervaller.

Omfanget af betingelse et (integrabilitet) var ikke helt klart. Dirichlet var sikker på, at en funktion kunne integreres, når den højst havde et endeligt antal diskontinuiteter, men han mente - uden at føre bevis - at betingelserne kunne slækkes, så der kunne tillades uendeligt mange diskontinuitetspunkter, blot de ikke lå tæt i intervallet.

Alt i alt forekommer en slækkelse af Dirichlets betingelser at kræve større kendskab til integralbegrebet, og det var blandt andet på dette punkt Riemann kom ind i billedet.

Riemanns afklaring af integralbegrebet.

Integralbegrebet afklares hos Riemann, idet han opstiller nødvendige og tilstrækkelige betingelser for integrabilitet af en given begrænset funktion over et interval [a;b].

Denne udredning er et væsentligt skridt i afklaringen af den matematiske analyse, men ønsket om generel afklaring var ikke Riemanns primære motiv. Riemann var derimod interesseret i at videreføre blandt andre Dirichlets undersøgelser af Fourier-rækkernes konvergensforhold.

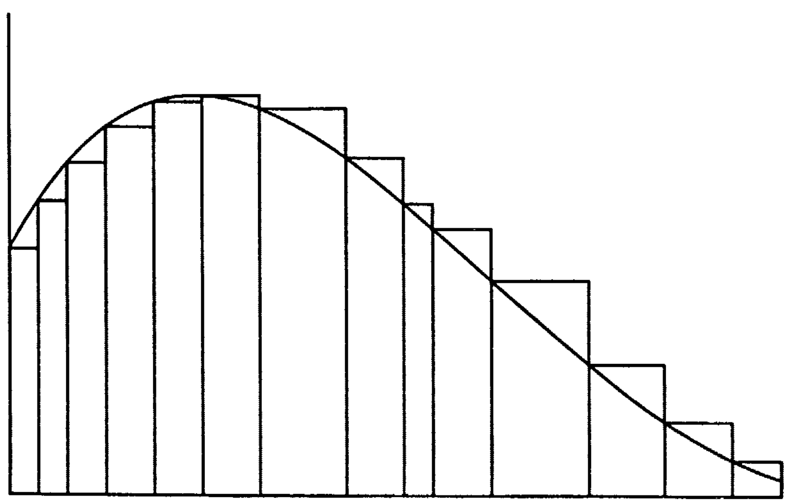
Riemann tager udgangspunkt i Cauchys definition af et bestemt integral:

(1) Hvis summen

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \text{ hvor } a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

har en grænseværdi for n gående mod uendelig, så kaldes denne grænseværdi for funktionens bestemte integral over intervallet [a;b].

Den endelige sum s_n kan illustreres ved nedenstående figur, idet s_n er lig med rektanglernes samlede areal.



At summen s_n har grænseværdien S kan defineres således:

(2) Med $s(P_n)$ betegnes den i (1) definerede sum svarende til intervalinddelingen $P_n = \{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, hvor $a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.
Med en intervalinddeling, der er finere end P_n, menes en endelig punktmængde P, der opfylder de to krav: $P_n \subset P$ og $x \in P \Rightarrow a \leq x \leq b$.
Summen $s(P_n)$ har grænseværdien S for n gående mod uendelig, hvis og kun hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer en intervalinddeling P_N $(N \in \mathbb{N})$, så alle finere intervalinddelinger P giver $|S - s(P)| < \varepsilon$.

Riemann formulerer summen i (1) lidt anderledes:

(3) $$s_n = \sum_{i=1}^{n} f\Big(x_i - \varepsilon_i (x_i - x_{i-1})\Big)(x_i - x_{i-1}), \text{ hvor } \varepsilon_i \in [0;1].$$

Det ser lidt uoverskueligt ud, men det drejer sig blot om at kunne vælge funktionsværdien i et vilkårligt punkt i intervallet $[x_{i-1}; x_i]$ i stedet for at bruge funktionsværdien i venstre delinterval-endepunkt. Riemann betragter nemlig funktionens udsving (Schwankung) i delintervallerne, og han har derfor brug for frit valg.

De to definitioner er - set med moderne øjne - ikke væsensforskellige, men det er baggrunden for dem til gengæld. Cauchy giver nemlig **kun** sin definition med henblik på kontinuerte funktioner, mens Riemann lægger op til en langt bredere klasse af funktioner: Begrænsede funktioner, som er defineret på et lukket interval [a;b]. I resten af dette afsnit refererer "funktioner" til denne type.

Ideen med at betragte udsvinget i delintervallerne kan anskueliggøres ved først at kigge på en kontinuert funktion. Uanset hvor lille et tal $\delta > 0$ du vælger, så kan du gøre din intervalinddeling fin nok til, at udsvingene δ_i i ethvert af delintervallerne bliver mindre end δ, altså $\delta_i < \delta$. Det skal bemærkes, at dette kun er muligt, fordi funktionen er **ligelig** kontinuert. At dette er tilfældet skyldes, at funktionen er kontinuert over et **lukket** interval. Den tilhører således den klasse af funktioner, som Cauchy havde bevist integrabiliteten af. Han benyttede nemlig tilsyneladende ligelig kontinuitet i sit bevis.

Med et enkelt diskontinuitetspunkt i intervallet [a;b] vil der opstå en mindre ubehagelighed. Uanset hvor fin du gør intervalinddelingen, så vil der være et delinterval, hvori udsvinget vil være større end eller lig med diskontinuitetens højde. Udsvinget kan altså ikke gøres vilkårligt lille i alle delintervallerne. Ikke desto mindre eksisterer grænseværdien for Riemann-summen (3). Det hænger sammen med, at "fejlbidraget", det vil sige delintervallængden ganget med udsvinget, også ved diskontinuiteten kan gøres vilkårligt lille. Dette gøres selvfølgelig ved at snævre delintervallerne tilstrækkeligt ind.

Med et endeligt antal diskontinuiteter i intervallet er ubehagelighederne heller ikke svære at overkomme: Den samlede længde af de delintervaller, der indeholder diskontinuiteter, kan gøres vilkårligt lille. Hermed vil "fejlbidraget", der hidrører fra diskontinuiteterne, der jo alle er endelige, kunne gøres vilkårligt lille. Der opstår først for alvor problemer, hvis funktionen har uendelig mange diskontinuiteter i det begrænsede interval!

Her fandt Riemann, at hvis grænseværdien for (3) eksisterer, så opfører funktionen sig nødvendigvis så "pænt", at den samlede længde af de delintervaller, hvori udsvinget er større end et vilkårligt $\delta>0$, kan gøres vilkårligt lille.

For at belyse betingelsen, der kan forekomme noget snørklet, kan vi nævne et kendt eksempel på en funktion, der ikke opfylder betingelsen.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \text{ er rational} \\ 0 & \text{når } x \text{ er irrational} \end{cases}$$

Uanset hvor fin intervalinddelingen gøres, så vil udsvinget i ethvert delinterval være lig med 1, idet alle delintervallerne vil indeholde både rationale og irrationale tal. For alle $\delta<1$ vil den samlede længde af "ubehagelige" delintervaller være lig med b-a, der jo er et fast tal større end nul.

Riemann viste så også betingelsens **tilstrækkelighed** for ekstistensen af grænseværdien af summen (3). Det vil sige, at hvis Riemanns betingelse er opfyldt, så er f integrabel over intervallet [a;b]. Summa summarum:

(4) f opfylder Riemann-betingelsen $\Leftrightarrow$ f er integrabel over [a;b]

Som nævnt kan betingelsen forekomme snørklet og uhåndterlig. For at belyse operationaliteten af betingelsen og generaliteten af integralbegrebet konstruerede Riemann derfor en særdeles besynderlig funktion, der ikke desto mindre takket være (4) kunne bevises at være integrabel.

Konstruktionsmetoden, der senere ofte anvendtes af blandt andre Weierstrass, går ud på at lave en følge af funktioner med et stigende antal "ubehageligheder" (knæk, diskontinuiteter med videre). Med et vågent øje til konvergensen lægges derpå alle funktionerne i den uendelige følge sammen, hvorved ubehagelighederne ophobes. I Riemanns således konstruerede funktion bestod disse af diskontinuiteter. Hans funktion har faktisk en diskontinuitet i ethvert punkt af formen $\frac{p}{2n}$, hvor p og 2n er indbyrdes primiske. Disse punkter udgør en tæt delmængde af $\mathbf{R}$, men som nævnt er funktionen integrabel.

Det skyldes, at springet i et sådant punkt har størrelsen $\frac{\pi^2}{8n^2}$, så i et begrænset interval skal springværdierne findes blandt størrelserne $\frac{\pi^2}{8n^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ I et begrænset interval vil samme springværdi højst forekomme endeligt mange gange. For eksempel vil springværdien $\frac{\pi^2}{8}$ ($n=1$) kun forekomme i punkter af formen $\frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, idet p skal være indbyrdes primisk med $2n = 2$, så p skal være ulige. Det medfører, at der i et begrænset interval kun vil forekomme et endeligt antal diskontinuiteter, hvis spring er større end δ ($\delta>0$). Et endeligt antal punkter kan ved en tilpas fin intervalinddeling bringes til at ligge i delintervaller, hvis samlede længde er mindre end et vilkårligt lille σ ($\sigma>0$). Dermed er betingelsen opfyldt.

Det må således medgives, at Riemann udvidede forståelsen af integralbegrebet ganske gevaldigt. Dels betragtede han en større klasse af funktioner end de kontinuerte, og dels stillede han et skarpt og operationelt skel op mellem integrable og ikke-integrable begrænsede funktioner.

Selve formuleringen af Riemann-betingelsen har nogle videre perspektiver, idet der lægges op til, at der ved integration kan ses bort fra en vis del af definitions-intervallet. Rent faktisk udvikledes senere - omkring århundredskiftet - den såkaldte målteori, der blandt andet beskæftiger sig med sådanne "ubetydelige" mængder - nulmængder.

For at en mængde kan få benævnelsen "Lebesgue-nulmængde" skal dens elementer kunne indeholdes i foreningen af tælleligt mange (altså ikke nødvendigvis endeligt mange) åbne intervaller, hvis samlede længde kan gøres vilkårlig lille.

Riemanns betingelse om, at totallængden af en vis mængde intervaller skal kunne gøres vilkårlig lille, minder om betingelsen for at der er tale om en nulmængde. Der er dog den væsentlige forskel, at Riemann forudsætter, at det kun drejer sig om endeligt mange intervaller.

Med begrebet om nulmængder kan der opstilles en endnu mere håndterlig nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at Riemann-summen (3) har en grænseværdi: En begrænset funktion er Riemann-integrabel, hvis og kun hvis den er kontinuert, pånær eventuelt på en nulmængde. (Blandt andet er enhver tællelig mængde en nulmængde).

To af Riemanns resultater vedrørende Fourier-rækkerne.

Det ovenfor beskrevne drejer sig som nævnt blot om en lille del af Riemanns afhandling, og det var først i den sidste del, at han rigtigt foldede sig ud med sit egentlige emne: Fourier-rækkerne. Riemann viser her en stribe sætninger; herunder to, som Cantor senere gjorde brug af. Som eneste forudsætning for disse to sætninger havde han, at rækken

$$\tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

punktvis konvergerer mod en funktion f.

Begge sætninger gælder funktionen

$$F(x) = C + C_1 x + \tfrac{1}{2}c_o x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(c_n \cos nx + d_n \sin nx) \quad .$$

Først viser Riemann, at grænseværdien for den "anden differenskvotient" (ikke at forveksle med den anden afledede) af F er lig med f, det vil sige

$$(1) \qquad \lim_{h \to o} \left(\frac{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x)-F(x-h)}{h}}{h} \right) = f(x)$$

Bemærk, at hvis ledvis integration (henholdsvis differentiation) to gange af f (henholdsvis F) uden videre lod sig gøre, så ville der gælde, at

$$\int \left(\int f(x)\,dx \right) dx = F(x), \text{ og}$$

$$F''(x) = f(x)$$

Under de forudsætninger er sætningen triviel, men Riemann etablerede netop sætningen uden andre forudsætninger end konvergensen af (6).

Under netop denne betingelse viser Riemann også, at

$$(2) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x)-F(x-h)}{h} = 0$$

hvilket medfører, at hvis F er differentiabel fra en retning i x_o, så er der også differentiabilitet fra den anden retning, og der er den samme differentialkvotient.

Disse to sætninger gjorde Cantor senere brug af i et par mindre artikler om den entydige bestemmelse af Fourier-koefficienterne, og det var i den forbindelse, han kom ind på en præcisering af de reelle tals forhold til de rationale.

Del 3. Cantors indførelse af $\mathbf{R}$.

1. Cantors mængdehierarki.

Cantors arbejde om tal og mængdelære er omfattende; det spænder over undersøgelser af det konkrete matematiske problem om Fourier-række-udviklingens entydighed, en konstruktion af de reelle tal og en række bidrag og diskussionsoplæg om de reelle tals egenskaber: Ikke-tælleligheden, kontinuumshypotesen med videre. Han grundlagde en teori om transfinitte tal, samtidig med at han konsekvent udelukkede uendelige tal fra den reelle talmængde.

Cantors indførelse af $\mathbf{R}$ er i princippet den samme, som vi har skitseret i del 1. Hans arbejde om de transfinitte tal er også grundlaget for den moderne opfattelse heraf. Den moderne formulering af $\mathbf{N}$ og de øvrige talmængder på mængdeteoretisk grundlag, hvor $\mathbf{N}$'s (og $\mathbf{R}$'s) eksistens er en konsekvens af visse mængdeteoretiske aksiomer, skyldes derimod ikke direkte Cantor, selv om hans arbejde pegede i den retning. Han var naturligvis på det rene med blandt andre Dedekinds stringente indførelse af $\mathbf{N}$ med videre, men den mængdeteoretiske formulering er først grundlagt senere

Cantors nyskabende indførelse af $\mathbf{R}$ - den først offentliggjorte konstruktion af $\mathbf{R}$ ud fra $\mathbf{Q}$ - fremkom i forbindelse med hans arbejde med Fourier-rækkernes entydighed: Når to Fourier-rækker konvergerer mod samme funktion, har de to rækker da nødvendigvis ens koefficienter?

Hvis Fouriers metode til udregning af koefficienterne godtages, følger entydigheden uden videre. Her er det karakteristisk for Cantor, at han er på højde med opfattelsen af den matematiske analyse hos Weierstrass, hos hvem han havde fulgt forelæsninger. Weierstrass havde blandt meget andet påpeget forskellen mellem ligelig konvergens og almindelig, punktvis konvergens (om Cantors inspiration fra Weierstrass med hensyn til selve taludvidelsen, se s.60) . Cantor var således opmærksom på, at den fra Fourier stammende metode ikke var tilstrækkelig, idet rækkernes konvergens ikke nødvendigvis er ligelig, hvorved ombytning af summation og integration ikke automatisk er en tilladelig operation.

I artiklen *"Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt"* (1870) leverede Cantor et ud fra moderne synspunkt fuldt gyldigt bevis for entydigheden. I *"Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen"* (1872) udvidede han sætningens gyldighedsområde, og det var i denne anden artikel, han leverede den stringente konstruktion af $\mathbb{R}$.

Beviset for entydighedssætningen (fra *"Beweis, dass eine ..."*).

Cantor beviste i artiklen fra 1870, at når en funktion i et interval I er givet ved en Fourier-række, så findes der ikke andre trigonometriske rækker, der konvergerer mod funktionen i alle intervallets punkter. Dette kan udtrykkes således, idet I for overskuelighedens skyld er sat til $[-\pi;\pi]$:

$$\forall x \in I: \left(\tfrac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \tfrac{1}{2}a'_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx)\right)$$
$$\Downarrow$$
$$a_o = a'_o \wedge a_1 = a'_1 \wedge b_1 = b'_1 \wedge a_2 = a'_2 \wedge b_2 = b'_2 \wedge \ldots$$

hvilket Cantor (uden kvantor-symbolikken) også angav ved

$$\forall x \in I: \tfrac{1}{2}c_o + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$c_o = c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = c_3 = d_3 = \ldots = 0$$

Når Cantor overhovedet anser det for nødvendigt med et bevis, skyldes det som nævnt, at han måtte afvise Fouriers metode til beregning af koefficienterne som tilstrækkeligt bevis for entydigheden. Fourier mente, at "vilkårlige" funktioner kunne fremstilles ved hjælp af en uendelig sum af trigonometriske funktioner. De formler, han angav for koefficienterne, bestemmer ét eneste koefficient-sæt. Men undervejs er der "smuglet" et par forudsætninger ind.

Cantor påpeger, at den ledvise integration af de uendeligt mange led på højresiden af ligningen

$$f(x)\cos mx = \tfrac{1}{2}c_0\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx)\cos mx$$

ikke kan tillades, når rækken af sinus- og cosinusfunktioner kun vides at være *punktvis* konvergent. Han havde ganske vist påvist, at koefficienterne c_n og d_n går mod nul for n gående mod uendelig, når blot den trigonometriske række konvergerer i et (vilkårligt) lille interval (Cantors lemma). Det sikrer dog hverken ligelig konvergens eller ligelig begrænsethed, og Fouriers beregning af koefficienterne kan således ikke bruges direkte til entydighedsbeviset. Desuden forudsætter beregningen, at den funktion, der søges fremstillet ved rækken, er integrabel; også det undgår Cantor at forudsætte.

Cantors bevis går ud på at studere en *anden* trigonometrisk række, hvor størrelserne c_n og d_n *indgår* i koefficienterne, men hvor konvergensen er pænere - der er ligelig konvergens. Det giver mulighed for et snuptag mage til det, der blev brugt ved beregningen af koefficienterne (se s.39), nu blot med formaliteterne i orden.

Inspireret af Riemann studerede Cantor funktionen

$$F(x) = c_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(c_n\cos nx + d_n\sin nx),$$

hvor det er givet, at

(1) $\frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0$

Den funktion Riemann studerede (se s.52), indeholdt to ekstra led, nemlig

$$C_2 + C_1 x.$$

Det gør ingen væsentlig forskel, men det er lettest at udelade disse led. De enkelte led i $F(x)$ svarer til leddet

$$c_n \cos nx + d_n \sin nx$$

to gange integreret, og det er muligvis derfor, Riemann anser det for rimeligt at medtage et konstant led for hver integration. Men det må understreges, at der ikke er tale om at integrere ligning (1); F er en funktion, Cantor *definerede* med det formål at søge oplysninger om c_n og d_n ud fra forudsætningen (1). Det kan nemlig bevises, at funktionsfølgen

$$F_k(x) = c_0 x^2 - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

er ligelig konvergent, og at F er kontinuert.

Cantor benyttede ikke den knappe plads til at bevise det, men det kan indses ved følgende ræsonnement. Rækken skal opfylde

(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall k,m \in \mathbb{N} \; \forall x \in I: \; k > m > N \Rightarrow \left| F_k(x) - F_m(x) \right| < \varepsilon$

for at være ligelig konvergent. Først ses det, at

$$\forall x \in I: \; \left| F_k(x) - F_m(x) \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n^2} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) \right|$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n^2} \left| c_n + d_n \right|$$

Da c_n og d_n begge går mod nul for n gående mod uendelig, kan vi finde et tilstrækkeligt stort $N_1 \in \mathbb{N}$, så $n > N_1 \Rightarrow |c_n + d_n| < 1$. At

(3) $\exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall k,m \in \mathbb{N}\ \forall x \in I: k>m>N_1 \Rightarrow \left|F_k(x) - F_m(x)\right| < \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n^2}$

vil derfor gælde. Følgen, hvis k'te element er $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$, er konvergent (med grænseværdi $\frac{\pi^2}{6}$), og der er således tale om en fundamentalfølge, det vil sige en følge med hale-indsnævring:

(4) $\forall \varepsilon>0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall k,m \in \mathbb{N}: k>m>N_2 \Rightarrow \sum_{n=m+1}^{k} \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

Både (3) og (4) vil være opfyldt, hvis N_1 hhv. N_2 erstattes med $N = \max\{N_1, N_2\}$, og heraf følger (2), den ligelige konvergens af F.

Kontinuiteten af F er hermed let at bevise, idet den ligelige konvergens overfører kontinuiteten af de enkelte led i rækken til grænsefunktionen. Udover disse egenskaber ved F benyttede Cantor Riemanns resultat om grænsen for den anden differenskvotient. Ved indsættelse af (1) fra foregående side i Riemanns formel som gengivet side 52, fås at grænsen for den anden differenskvotient er nul. Herefter ville Cantor bevise, at F er lineær.

Havde det været den anden afledede, der var nul, ville sagen være klar; men oplysningen om, at grænsen for den anden differenskvotient er nul, er imidlertid noget svagere. Kontinuiteten af F gjorde det dog muligt for Cantor at vise lineariteten. Det var en matematiker ved navn Schwarz, der havde fundet på beviset, hvori der behændigt opereres med diverse grænseovergange, behandlet efter de stringente metoder, Weierstrass netop havde lagt grunden til (jvf. Cantor: *Beweis, dass eine ...*, s. 82, eller Schwarz: *Beweis eines für die ...*, s. 342).

Med lineariteten i hus kan det benyttes, at der findes to konstanter k_1 og k, så

$$F(x) = k_1 x + k$$

Med udtrykket for F(x) og lidt rykken rundt kan dette skrives

$$c_0x^2 - k_1x - k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

Højresiden er periodisk med en periode på maksimalt 2π. Her i projektet har vi holdt os til intervallet $[-\pi;\pi]$, men Riemanns ligning og alle de følgende betragtninger gælder for alle x. Heraf følger, at venstresiden er konstant, det vil sige

$$c_0 = k_1 = 0$$

Tilbage er kun ligningen

$$k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0$$

og hvad Fourier tillod sig over for ligningen (se s.39-40)

$$\tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0$$

tillader Cantor sig nu over for førstnævnte. Den ledvise integration er her "tilladt" som følge af den ligelige konvergens, og simpel udregning viser umiddelbart, at alle koefficienterne

$$\frac{c_n}{n^2} \quad \text{og} \quad \frac{d_n}{n^2}$$

er lig med nul, og dermed er c_n og d_n selv nul.

Den udvidede sætning. Indførelsen af $\mathbb{R}$.

Det er ovennævnte sætning, Cantor udvider, således at slutningen vedrørende koefficienterne kan foretages, selvom præmissen er afsvækket til kun at gælde for alle $x \in I \setminus P$, hvor mængden P er af en bestemt type, der meget vel kan bestå af *uendelig* mange elementer.

Det centrale i Cantors bevis er påvisningen af, at der uanset afsvækkelsen af præmissen gælder, at F er lineær i hele intervallet - inklusiv den punktmængde P, hvor præmissen ikke gælder. Når man først er nået så langt, følger konklusionen af argumentationen for den oprindelige sætning.

Cantor benytter Riemanns resultat (2) på side 52, der siger, at hvis F er differentiabel i x_o fra venstre, så er F også differentiabel i x_o fra højre, og der er samme differentialkvotient.

Cantor begynder med at konstatere, at inden for ethvert delinterval af I, der ikke indeholder punkter fra P, vil F være lineær. Det vil sige, at der i et sådant interval findes to konstanter k_1 og k_2, så

$$F(x) = k_1 x + k_2.$$

Det følger af argumentationen for den allerede viste sætning. Derefter søger han at vise, at konstant-parret (k_1, k_2) er det samme i alle de pågældende delintervaller.

Sålænge P kun indeholder endeligt mange elementer, er denne slutning ikke så svær at foretage. Den følger af kontinuiteten og af egenskaben med hensyn til differentiabilitet fra højre og venstre. I de tilfælde, hvor P har uendelig mange elementer, er sagen straks vanskeligere, og her benytter Cantor et induktionsbevis, der muliggøres af den særlige måde, P er konstrueret på. Vi vil i det følgende se på konstruktionen af P og den dermed forbundne konstruktion af **R**.

Mængden P må kun have uendeligt mange punkter omkring visse *fortætningspunkter*. Det er studiet af disse fortætningspunkter, der er bindeleddet til indførelsen af **R**, idet Cantor blandt andet studerer fortætningspunkter, der fremkommer som grænsepunkter for rationale fundamentalfølger.

Cantor definerer, at en rational følge $\{a_n\}$ har en grænse b, når følgen er en fundamentalfølge. Han understreger, at der ikke må gøres forudsætninger om b, men at grænse-begrebet skal defineres udelukkende ud fra et kriterium vedrørende følgens opførsel, nemlig haleindsnævringen.

Han definerer herefter en ordning på mængden B af grænser, og dette foregår - ligesom hans indførelse af addition og multiplikation - på principielt samme stringente måde som i moderne matematik: Definitionen baseres på ordningen af $\mathbb{Q}$, således at grænsen af fundamentalfølgen $\{a_n\}$ er større end grænsen af fundamentalfølgen $\{b_n\}$, når og kun når a_n-b_n er større end et fast, positivt rationalt tal for alle n større end et givet N. På denne måde er det muligt at bevise sætninger om $\mathbb{R}$'s ordning.

I et senere arbejde (Cantor, 1883) fremhæver han det logisk set afgørende i *intet* at forudsætte om grænsen b, og i stedet at udlede de relevante egenskaber ud fra de kendte egenskaber ved de rationale tal, som fundamentalfølgerne består af.

I samme artikel henviser han til Weierstrass, der som den første havde gennemført en $\mathbb{R}$-konstruktion i overensstemmelse med dette logiske princip. Weierstrass' metode minder om Cantors, eller rettere omvendt, for Cantor kendte Weierstrass' metode fra dennes forelæsninger.

Weierstrass konstruerede de positive reelle tal som rækker af positive rationale tal. Et reelt tal b defineres ud fra en følge $\{a_n\}$, hvor

$$\exists q \in \mathbb{Q} \ \forall N \in \mathbb{N}: \ \sum_{n=1}^{N} a_n < q$$

Pointen er så, at ordningen af $\mathbb{R}$ baseres på en sammenligning af endelige (rationale) afsnitssummer af rækker til forskel fra at jonglere med grænsesummerne - summer, hvis eksistens netop ikke må tages for givet.

Denne metode giver naturligvis kun $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, så der skal lidt flere armbevægelser til, før man har hele $\mathbb{R}$. Sammenlignet med Weierstrass' metode - og Dedekinds, se s. 68 - er Cantors noget enklere, og der er en mere direkte parallel til den måde, hvorpå reelle tal i praksis approximeres. Det kan være rart også at have fundamentalfølger, som ikke er monotont voksende, direkte puttet ind i definitionen af $\mathbb{R}$. For eksempel er potensrækken, der bestemmer sinus til en given værdi, en række med skiftende fortegn; det gør dog reelt set ingen forskel. Når Cantor benytter vilkårlige fundamentalfølger, er det da også på grund af hans interesse for vilkårlige fortætningspunkter i forbindelse med hans Fourierrækkeproblem.

<u>Cantors mængdehierarki A, B, C, ...</u>

Selv om Cantors fremstilling i hovedlinier svarer til den moderne, er der blandt andet følgende to forskelle:

- $\mathbb{Q}$'s indlejring i $\mathbb{R}$ behandles ikke ved at påpege, at det rationale tal q kan identificeres med en klasse af fundamentalfølger, nemlig klassen, der indeholder den konstante følge $\{q, q, q, \ldots\}$, hvoraf det må konkluderes, at $q \in \mathbb{R}$. I stedet viser Cantor, der benytter symbolerne A og B for henholdsvis mængden af de rationale og mængden af de reelle tal, at der på mængden $A \cup B$ kan indføres en ordning, således at når $a \in A$ og $b \in B$ defineres:

$$b > a \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: n > N \Rightarrow b_n - a > \varepsilon)$$

Der er ikke noget logisk væsensforskelligt ved denne metode, men den hænger sammen med den anden - og vigtigere - forskel:

- Cantor ønsker i den færdige konstruktion at fastholde det særlige ved B, at den er opbygget af følger fra A; han vil nemlig undersøge en større hierarkisk struktur af mængder A, B, C, D, ... (stopper IKKE ved Z).

Mængden C defineres som bestående af grænser for følger i B, mængden D som bestående af grænser for følger i C og så videre.

Nu er det jo velkendt, at fundamentalfølger af reelle tal har en reel grænseværdi, så det falder umiddelbart for at slutte, at B = C = D = ... Dette forhold var Cantor udmærket klar over, og han sagde, at der gælder "B = C på en vis måde" (*Über die Ausdehnung eines Satzes ...*, s.95), men i hans struktur er grænsen b karakteriseret såvel ved selve den reelle grænseværdi af en fundamentalfølge som ved mængden af elementer i følgen.

Det vil sige B = C for så vidt, at til ethvert **c** i C svarer et **b** i B med den samme grænseværdi og omvendt, men B ≠ C for så vidt, at **c** i C er karakteriseret ved de indgående reelle tal i følgen $\{b_n\}$ (hvor hvert b_n igen er karakteriseret ved en rational følge), og **c** er derved et tal af en anden type end **b**. I ovenstående terminologi ville Cantor skrive **b** = **c**, men det betyder altså blot, at **b** og **c** er identiske med hensyn til en vis ækvivalensrelation, ikke at **b** og **c** er identiske i enhver henseende.

For eksempel kan der inden for mængden B forekomme to elementer **b** og **b'**, hvor der gælder **b** = **b'**, men at **b** og **b'** ikke er identiske i enhver henseende, jævnfør at to forskellige rationale fundamentalfølger kan have samme grænseværdi.

Det er således strengt taget forkert, når Joseph Dauben skriver, at A ⊂ B (i Grattan-Guiness, s.183). **Ingen** af A's elementer tilhører B, fordi A's elementer er rationale tal, mens B's elementer er fundamentalfølger af rationale tal. Derimod findes der naturligvis for ethvert a i A et **b** i B, hvor a = **b** med hensyn til den af Cantor definerede identitet.

Et tal ℓ i L, hvor L fremkommer ved et endeligt antal mængdekonstruktioner ud fra A, er således karakteriseret ved en reel grænseværdi **og** - idet man skridtvis går tilbage til A - ved en omfattende mængde af rationale tal. Disse har et uendeligt antal fortætningspunkter b_1, b_2, ... i B, disse fortætningspunkter har så igen et uendeligt antal fortætningspunkter i C og så fremdeles, indtil der i mængden umiddelbart før L er et uendeligt antal punkter, der er sådan fordelt, at deres grænseværdi er lig med værdien af ℓ i L.

Denne konstruktion oversætter Cantor så til den rette linie, hvor det intuitivt bliver klarere, hvad ideen er med at skelne mellem B, C, D og så videre.

Han etablerer en bijektion mellem talværdierne i B og liniens punkter, idet han først argumenterer for, at der til ethvert punkt på linien svarer talværdien af en grænse i B, og dernæst kræver han aksiomatisk en sådan geometrisk struktur af linien, at der til talværdien af ethvert $\mathbf{b}$ i B svarer et punkt på linien.

En grænse $\mathbf{b}$ i B modsvares herefter på tallinien af en punktmængde P, der består af uendelig mange punkter med et fortætningspunkt P', der svarer til talværdien af $\mathbf{b}$. P' kan være element i punktmængden P, men behøver ikke at være det.

Et element ℓ i L svarer da til en langt mere omfattende punktmængde. Cantor betegner en punktmængde P som værende af den λ-te type, når P efter λ grænseprocesser er reduceret til en punktmængde med et endeligt antal punkter.

Eksempel på en punktmængde P af anden type.

Konstruktionen af en sådan mængde kan starte med punktet 0 i mængden D. Så kan der findes en fundamentalfølge i C, hvis elementers talværdier konvergerer mod 0. Elementerne i denne følge kan for eksempel have talværdierne 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... Til enhver af disse talværdier svarer nu en reel fundamentalfølge i B. Disse følger kan for eksempel se ud, som det fremgår af skemaet på næste side.

$$\left\{c_{1_n}\right\} = \left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots\right\} \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{c_{1_n}\right\} = 1$$

$$\left\{c_{2_n}\right\} = \left\{\frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12}, \ldots\right\} \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{c_{2_n}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{c_{3_n}\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{6}{15}, \frac{7}{18}, \ldots\right\} \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{c_{3_n}\right\} = \frac{1}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{c_{m_n}\right\}\right\} = 0$$

Mængden P er således mængden af alle de punkter, der svarer til talværdierne i skemaet. P **kan** også indeholde grænsepunkterne i højre kolonne, og P **kan** også indeholde punktet svarende til grænseværdien af grænseværdierne nederst i højre hjørne. Hovedsagen er, at P efter to grænseprocesser kun består af et endeligt antal punkter; i dette tilfælde kun af punktet, der svarer til talværdien nul.

2. Cantors anvendelse af mængdehierarkiet.

Cantors udvidede sætning består som nævnt i at svække præmissen i entydighedssætningen for Fourier-rækkens koefficienter, så funktionen og dens Fourier-række ikke behøver at stemme overens overalt i intervallet, men godt kan have forskellige værdier, når dette kun sker i en mængde af den λ-te type ($\lambda \in \mathbb{N}$).

Den oprindelige sætning:

$$(1) \quad \left(\forall x \in I: \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0\right) \Rightarrow c_0 = c_1 = d_1 = c_2 = \ldots = 0$$

Den udvidede sætning:

$$(2) \quad \left(\forall x \in I \setminus P: \tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0\right) \Rightarrow c_0 = c_1 = d_1 = c_2 = \ldots = 0$$

Når P består af et endeligt antal punkter, er slutningen som nævnt let at foretage (s.59). I det følgende leverer vi - lettere omskrevet - Cantors argumenter for de mere komplicerede tilfælde.

Det enkleste tilfælde, hvor P har uendelig mange elementer, er når disse ligger omkring et enkelt fortætningspunkt b, således at P' består af netop dette punkt. I så fald kan slutningen foretages på følgende måde:

Intervallet I inddeles i tre intervaller. Et lille interval I_ε, der dækker b og går længden $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ud til hver side, samt et interval på hver side af I_ε. Vi kan da umiddelbart tillade os at gå ud fra, at F er lineær i hvert af disse to intervaller. Det gælder, uanset hvor lille ε vælges, da der stadig kun vil være endeligt mange elementer fra P i de to yder-intervaller.

Som følge af kontinuiteten af F kan vi opstille følgende ligninger (F er kontinuert overalt, også for $x \in P$):

$$F(b) = \lim_{h \to 0_+} F(b-h) \quad \text{og} \quad F(b) = \lim_{h \to 0_+} F(b+h)$$

F er lineær i det venstre yder-interval med koefficientsættet (k_1, k_2), og F er lineær i det højre yder-interval med koefficientsættet (κ_1, κ_2). For et vilkårligt $h \in \mathbb{R}_+$ kan vi vælge et ε, så $0 < \varepsilon < h$, hvor F er lineær i intervallerne på hver side af I_ε. Heraf kan vi slutte, at

$$F(b) = \lim_{h \to 0_+} \left(k_1(b-h)+k_2\right) = k_1 b + k_2$$

$$F(b) = \lim_{h \to 0_+} \left(\kappa_1(b+h)+\kappa_2\right) = \kappa_1 b + \kappa_2 .$$

Vi har da, at

(3) $\quad k_1 b + k_2 = \kappa_1 b + \kappa_2 .$

Samtidig er F differentiabel fra begge sider i b. For eksempel fremgår differentiabiliteten fra venstre i b af, at

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{F(b)-F(b-h)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{k_1 h}{h} = k_1$$

Heraf følger så det ønskede resultat, at $k_1 = \kappa_1$, som sammen med (3) giver $k_2 = \kappa_2$, og alt i alt at F er lineær i hele intervallet.

Så vidt beviset for sætningen (2), når P er af en sådan type, at P' består af et enkelt punkt.

Som et mere kompliceret tilfælde, vil vi se på beviset, når P er så stor, at der er uendelig mange elementer i P', dog samlet om kun et fortætningspunkt. Det vil sige, at P" kun indeholder et element. Også her inddeles I i tre intervaller: Ét omkring fortætningspunktet for P' samt de to, der ligger på hver side af dette. Disse to yder-intervaller indeholder kun endelig mange elementer fra P', og som en følge af foregående bevis vil F være lineær dér. Hvad angår situationen omkring fortætningspuntet for P', kan der argumenteres helt som i det før gennemgåede tilfælde.

Sætningens helt generelle tilfælde var, at P blot vides at være en punktmængde, hvor der findes et $\lambda \in \mathbb{N}$, så den λ-te afledede af P, $P^{(\lambda)}$, ikke har uendeligt mange elementer. Hertil mangler vi nu kun et induktions-argument. Vi har vist, at sætningen gælder for $\lambda = 1$, og ved en passende opdeling af I i del-intervaller, er det let at vise, at **hvis** sætningen gælder for $\lambda = n$, så gælder den også for $\lambda = n+1$.

Sådan (i store træk) anvendte Cantor mængdehierarkiet til udvidelse af den trigonometriske entydighedssætning (1). At han ved anvendelse af samme mængdehierarki har leveret en konstruktion af $\mathbb{R}$, var han tilsyneladende ikke videre interesseret i på daværende tidspunkt. Han nævner ikke ét sted i artiklen, at der her er tale om en nyskabelse inden for tal-teorien.

Han omtaler først senere artiklen som indeholdende en $\mathbb{R}$-konstruktion. Det er på et tidspunkt, hvor hans hovedinteresse er skiftet til selve det transfinitte mængdehierarki, som er en videreudvikling af de punktmængder, Cantor konstruerede i artiklen om Fourier-rækker.

3. Sammenligning med Dedekinds konstruktion af R.

Selv om Cantors konstruktion blev den fremherskende, er det ikke den eneste interessante, og det er da heller ikke den eneste, der har "overlevet". I moderne lærebøger er det faktisk muligt at støde ind i en anden og logisk set lige så god konstruktionsmetode, nemlig Dedekinds. Weierstrass' metode ser man derimod ingen steder. Den er mere besværlig end Cantors, og har ingen fordele frem for denne.

Det har Dedekinds til gengæld. Hans metode er væsensforskellig fra Cantors, hvilket blandt andet hænger sa-men med deres forskellige motiver med konstruktionen. Mens Cantor, som vi har set, hvade brug for konstruktionen i forbindelse med afklaringen af et specifikt matematisk problem, så var Dedekinds motiver snarere ønsket om en generel afklaring af analysens grundlag.

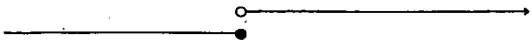
Dedekinds metode er derfor præget af de intuitive krav, der stilles til et kontinuert medium: Der må ikke være et eneste hul. Tallegemet skal have den rette linies egenskaber, men det skal formuleres aritmetisk, ikke geometrisk. Hans nøgleord er kontinuitet (stetigkeit), hvis indhold han for den rette linie mener at kunne udtrykke i dette princip:

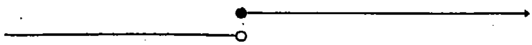
> *Hvis alle punkter på den rette linie falder i to klasser, således at ethvert punkt i den første klasse ligger til venstre for ethvert punkt i den anden klasse, så eksisterer der ét og kun ét punkt, der fremstiller denne deling af alle punkter, denne adskillelse af den rette linie i to dele.*

Han undskylder, at han fremsætter så banalt et udsagn, men til gengæld glæder han sig over banaliteten, for han er nødt til at give princippet status af et aksiom, der giver linien dens kontinuitet.

Han overfører så princippet i aksiomet til tal, hvor en tilsvarende deling kan opnås ved at bruge "mindre end" i stedet for til "venstre for". En tvedeling af de rationale tal kalder Dedekind et snit.

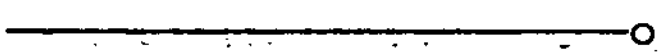
Hvert enkelt rationale tal giver anledning til to snit:

1) 

2) 

Snittene er dog ikke væsensforskellige, for ligegyldigt hvilket af de to, der betragtes, vil det kunne føres tilbage til samme rationale tal.

Her er det i moderne fremstillinger normalt kun at betragte nedre halvdel af snittet og kræve, at det ikke har noget største element, altså



og så meget naturligt kalde det er nedre snit. Dette letter de videre operationer en del, men Dedekind selv venter med dette, til han har introduceret de irrationale tal.

Som eksempler herpå bruger han kvadratrødder af hele tal D, der ikke er kvadrattal. D opfylder altså

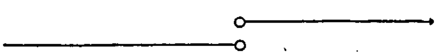
$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2 \qquad \lambda \in \mathbb{N}$$

Han viser, at der ikke findes rationale tal, hvis kvadrat er lig med et sådant D. Tages der så et D til denne konstruktion:

A_1 omfatter alle rationale tal x, hvor $x<0$ eller $x^2<D$

A_2 omfatter alle rationale tal x, hvor $x>0$ og $x^2>D$

så vil (A_1, A_2) være et snit i de rationale tal:



Til snittet svarer følgelig ikke noget rationalt tal, og netop dette at der eksisterer snit af denne art, er essensen af de rationale tals diskontinuitet.

Måden at reparere diskontinuiteten på ligger nu lige for, idet Dedekind til ethvert bestemt ikke-rationalt snit lader svare et nyt, irrationalt tal.

Mængden af de reelle tal er så mængden af de rationale tal forenet med mængden af de tal, der kan kreeres på ovennævnte måde - de irrationale tal. (Dedekind,s.12). Også her adskiller de moderne fremstillinger sig fra Dedekinds oprindelige konstruktion. I de moderne fremstillinger kaldes selve de nedre snit reelle tal, og mængden af de reelle tal er derfor mængden af nedre snit i de rationale tal (Mendelson, s.336 og Rudin, s.9).

De rationale tals indlejring i de reelle er derfor ikke ens hos Dedekind og i de moderne fremstillinger. Dedekind har simpelthen de rationale tal som en delmængde af de reelle tal, mens for eksempel Rudin og Mendelson i de reelle tal har en delmængde, der er isomorf med mængde af de rationale tal. En tilsvarende forskel så vi hos Cantor (s.61).

Uanset de her nævnte forskelle nås målet: Der er konstrueret et fuldstændigt, archimedisk ordnet kommutativt legeme, og det er sket på logisk forsvarlig vis.

Del 4. Cantors indførelse af R i moderne belysning.

Mens Cantors konstruktion af de reelle tal ved hjælp af rationale fundamentalfølger er den gængse idag, er der efterhånden blevet pillet alvorligt ved Cantors grundlagsmæssige opfattelser. Vi vil referere 3 resultater på dette område.

For det første var det Cantors opfattelse, at ikke alene var udledningen af **R** ud fra de foregående talmængder nu etableret på passende stringent vis; han anså også de til grund liggende antagelser vedrørende **N** for at være konsistente. Dette er der blevet vendt op og ned på med Gödels ufuldstændighedssætninger. Disse indebærer bl.a., at givet konsistensen af de aksiomer, der er nødvendige for at konstruere **N**, så er den sætning, der hævder at disse aksiomer *er* konsistente, en uafgørlig sætning.

For det andet har man siden Cantor fået hevet udvalgsaksiomet frem i lyset, som en forudsætning der må gøres eksplicit i form af et aksiom.

For det tredje udelukkede Cantor enhver forestilling om uendeligt store og uendeligt små tal i den reelle talmængde. Cantors afvisning hang sammen med, at han anså den af ham selv indførte transfinitte mængdelære for at være den eneste mulige ramme, hvori der kunne gives en korrekt matematisk indførelse af uendelige størrelser (og de transfinitte talmængder er forskellige fra **R**, bl.a. derved at de er velordnede). I 1960-erne er der konstrueret talmængder, der kan bruges som grundlag for matematisk analyse, og som indeholder uendeligt store og små tal.

Udover at disse områder indenfor matematisk logik forekommer os interessante i sig selv, så kaster de et yderligere lys over den reelle talmængdes status.

Mens matematikhistorien frem til Cantor peger på, at konstruktionen af den reelle talmængde ikke primært er blevet fremprovokeret af ønsket om en logisk konsistent opbygning af talsystemerne, så viser matematikkens senere udvikling ovenikøbet, at denne konsistens er et tvivlsomt spørgsmål. Gymnasieeleverne opfatter formentlig den reelle talmængde som konsistent (eller "matematisk korrekt" i en eller anden forstand), og ser den formentlig også som det eneste mulige grundlag for de videre armbevægelser, men begge dele kan i allerhøjeste grad diskuteres.

1. Konsistens af talsystemer.

Ved at behandle talsystemerne i en form for mængteteoretisk ramme, mente Cantor at kunne hævde eksistensen af tallene, som konsekvenser af det matematisk forsvarlige i at definere de og de mængder. Cantor mente endvidere at der fandtes uendelige mængder - eller samlinger af objekter - i den virkelige verden, og betragtede de matematiske begreber om uendelighed som en afspejling heraf. På Cantors tid antoges de naturlige tals teori for at være konsistent, og Cantors sammenknytning med en form for mængdelære ligger indenfor denne opfattelse.

Således hævdede Cantor på det bestemteste eksistensen af (aktuelt) uendelige tal indenfor hans system af transfinitte tal.

Eksistensen af det første uendelige tal, ω, er her givet ved, at det kan defineres som mængden af alle de endelige tal. Tilsvarende er eksistensen af de følgende uendelige tal, $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots, \omega+\omega, \ldots$, givet, når der kan opstilles en præcis matematisk definition af dem.

Nu mente Cantor ikke, matematikerne bare skulle slynge om sig med definitioner, og han var overbevist om, at matematiske systemer, der ikke kunne demonstrere en anvendelighed, ville lide en krank skæbne. Sit eget system af transfinitte tal anså Cantor for velegnet bl.a. til at studere spørgsmålet om forskellige grader af uendelighed, dvs. med den betegnelse Cantor indførte: forskellige mægtigheder. To mængder har samme mægtighed, hvis der findes en bijektion mellem dem. Cantor viste, at $\mathbf{N}$ og $\mathbf{Q}$ har samme mægtighed (dvs. at $\mathbf{Q}$ er tællelig), men at $\mathbf{R}$ har højere mægtighed end $\mathbf{Q}$ (ikke-tælleligheden af $\mathbf{R}$). Videre viste Cantor, at givet en mængde A, så har mængden af alle delmængder af A, potensmængden P(A), større mægtighed end A. Dette giver anledning til en kæde af mængder med stigende mægtighed: ω, $P(\omega)$, $P(P(\omega))$, $P(P(P(\omega)))$,..., hvor det er karakteristisk for Cantor, at han tog eksistensen af disse mængder for givet, som følge af den præcise definition af potensmængde.

Russells paradox.

Den videre udvikling af mængdelæren har vist, at man så langt fra er sikret eksistensen af en mængde, blot man har en præcis definition af den.

Dette blev bl.a. påpeget med Russells paradox. Russell betragtede mængden af alle mængder, og konstaterede at denne mængde er element i sig selv. Andre mængder (de fleste) er ikke element i sig selv. Russell betragtede mængden af disse, dvs. M = mængden af mængder, der ikke er element i sig selv. Herefter fører udsagnet "M er element i sig selv" til en logisk modstrid. Antagelsen, at udsagnet er sandt, fører til at det må være falskt (og omvendt).

Herved var Russell med til at sætte fokus på nødvendigheden af at aksiomatisere mængdelæren (sammen med bl.a. striden om udvalgsaksiomet). I en aksiomatisering af mængdelæren tillades kun de mængder, som er dannet i overensstemmelse med aksiomerne. Da vil det være udelukket f.eks. at danne mængden af alle mængder, fordi aksiomerne ikke sikrer eksistensen af en sådan mængde. Russells paradox viser samtidig det farlige i selv-referencer indenfor mængde-konstruktionerne (mængder der tilhører sig selv, udsagn der handler om sig selv, f.eks. udsagnet "dette udsagn er falsk")

Zermelo-Fraenkel-aksiomatiseringen.

En aksiomatisering af mængdelæren er Zermelo-Fraenkels mængdelære. Her baserer man sig på 7 aksiomer, der løst formuleret lyder:

1.Der findes en tom mængde.

2.Givet en mængde af mængder, så eksisterer foreningsmængden af mængderne.

3.Givet en mængde, så eksisterer mængdens potensmængde.

4.To mængder er identiske, hvis og kun hvis de har netop de samme elementer.

5.Udskiftningsaksiomet.

6.Enhver mængde har et minimalt element mht. tilhører-relationen.

7.Der eksisterer en uendelig mængde.

Cantors sammenknytning af talsystemerne med en form for mængdelære kan på dette grundlag realiseres fuldt ud. Ovenstående aksiomssystem, ZF, er nemlig stærkt nok til at konstruere de naturlige tal, dvs. de naturlige tal kan konstrueres udelukkende ved at danne mængder, hvis eksistens er sikret af aksiomerne. Følgelig er de naturlige tals teori konsistent, hvis ovennævnte - og tilsyneladende harmløse - aksiomssystem er konsistent.

ZF-aksiomerne sikrer eksistensen af en mængde, der opfylder Peano-aksiomerne, der sædvanligvis er grundlaget for **N**-konstruktionen. Peano-aksiomerne siger i én formulering:

Der findes en mængde **N** med en efterfølger-relation $S: x \to S(x)$, (dvs. en afbildning af **N** ind i **N**), som opfylder:

(1) **N** indeholder ét element, der ikke er en efterfølger.

(2) Afbildningen S er injektiv (men ifølge (1) ikke surjektiv).

(3) For enhver egenskab, p(x), der kan formuleres inden for systemet uden kvantorer over prædikater, gælder:

$$(p(0) \wedge (\forall x: p(x) \Rightarrow p(S(x))) \Rightarrow \forall x: p(x)$$

(1) og (2) svarer til, at **N** er en passende uendelig mængde, og kan vises ud fra uendelighedsaksiomet og regularitets-aksiomet.

(3) angiver, at der kan foretages induktion over mængden **N**. Induktionsaksiomet er her formuleret første-ordens logisk, og kan i denne formulering bevises inden for ZF (når ZF, som normalt, er givet i en første-ordens udgave).

ZF tillader endvidere dannelsen af kartesisk produkt (kryds-produkt) mellem to mængder, således som dette blandt andet er nødvendigt ved konstruktionen af **Z**. ZF-systemet tillader ligeledes at danne mængden af funktioner fra en givet mængde til en anden, og hermed blandt andet dannelsen af mængden af alle rationale følger, der er en afbildning af **N** ind i **Q**, hvilket benyttes ved konstruktionen af **R**. Både dannelsen af for eksempel $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ og $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ er muliggjort af det stærke potensmængdeaksiom, som også Cantor flittigt benyttede.

Alt i alt kan det vises, at givet ZF-aksiomerne, findes der en mængde **N**, der opfylder Peano-aksiomerne (1), (2) og (3), og på denne mængde kan der indføres +, · og <, således at den opfylder de egenskaber, vi kræver af **N**; og talsystemet kan herefter udvides til for eksempel **Z**, **Q** og **R**.

Gödel.

Imidlertid er konsistensen af selve ZF-aksiomerne et vanskeligt problem, som det fremgår af Gödel-sætningerne.

Den ene Gödel-sætning siger, at der i ethvert (tilstrækkeligt righoldigt) system kan formuleres sætninger, som er principielt uafgørlige - hvis systemet er konsistent. (ZF er tilstrækkeligt righoldigt i denne forbindelse).

Dette kan synes underordnet hvis de uafgørlige sætninger er af den idiotiske, selv-refererende slags. Men man har siden fundet uafgørlige sætninger med et rimeligt konkret og kontant indhold. Dette gælder bl.a. den "udvidede, endelige Ramsey-sætning". Dette er en kombinatorisk sætning, der kan formuleres i et system med Peano-aksiomernes styrke. Sætningen, som man umiddelbart synes må kunne enten bevises eller modbevises, er imidlertid uafgørlig indenfor rammen af Peano-aksiomerne. Man kan bevise, at den hverken kan bevises eller modbevises ud fra disse aksiomer. (Derimod kan den bevises ved antagelse af hele ZF-aksiomssystemet). Sætningen er beskrevet i "Byggesten" nr.37, 1983.

Den anden Gödel-sætning betyder, at hvis ZF er konsistent, så er udsagnet "ZF er konsistent" selv en sådan uafgørlig sætning. (Dette gælder også ethvert andet aksiomssystem, der er stærkt nok til at konstruere $\mathbb{N}$).

Hermed hævdes det principielt umulige i at levere et formelt bevis for konsistensen af talsystemerne. Man kan eventuelt bevise ét systems konsistens, givet konsistensen af et andet (tilstrækkeligt righoldigt) system, men man kan ikke afgøre, om dét så er konsistent. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ kan udledes af ZF-systemet. Men ZF-systemets konsistens kan ikke bevises i den formelle ramme.

2. Udvalgsaksiomet og kontinuitet af funktioner.

Et andet senere logisk resultat, som modsiger Cantor, vedrører udvalgsaksiomet. Ligesom tilfældet er med talsystemernes konsistens, er der dog tale om et problem, hvis videre afklaring i høj grad har været inspireret af Cantors arbejde. Cantor hævdede, at enhver mængde kunne velordnes, dvs., at der fandtes en bijektion mellem mængden og en velordnet mængde. En velordnet mængde er en mængde, hvori enhver delmængde har et mindste element.

De hele, rationale og reelle tal er ikke velordnede. Men som følge af tælleligheden af **Z** og **Q**, er det umiddelbart klart, at disse mængder kan bringes i en én til én-korrespondance med en velordnet mængde, nemlig **N**. Det er derimod langt fra indlysende at **R** kan bringes i en sådan korrespondance med en velordnet mængde. Som følge af ikke-tælleligheden af **R**, kan **N** ikke udgøre den søgte mængde. Men Cantor hævdede, at man ved at gå længere op i hans system af transfinitte talmængder (der alle er velordnede) kunne finde en passende mængde; og Cantor hævdede generelt, at en sådan bijektion på en mængde i det transfinitte mængdehierarki fandtes for en vilkårlig mængde.

Cantor karakteriserede denne sætning som en "Denk-gesetz", en tankens lovmæssighed. Det lykkedes dog ikke for Cantor at bevise sætningen - trods talrige forsøg. Siden er det blevet klart, at sætningen forudsætter, at der bliver tilføjet et ekstra aksiom, udvalgsaksiomet.

Én formulering af udvalgsaksiomet (AC, for "Axiom of Choice) er:

For enhver familie af ikke-tomme mængder $\{a_i: i \in I\}$, findes en funktion f, som til hver mængde a_i tilordner et element i a_i (dvs. $f(a_i) \in a_i$).

Udvalgsaksiomet sikrer, at det *valg* af en mængde, man ofte har brug for at foretage, bestående af netop ét element fra hver af mængderne i en given samling af mængder, vitterlig er muligt at foretage.

Der var en meget omfattende diskussion i begyndelsen af århundredet af om det overhovedet var nødvendigt at etablere dette som et selvstændigt aksiom, men nødvendigheden heraf blev efterhånden accepteret. Senere beviste Gödel, at givet konsistensen af ZF, så kunne man - som man ofte var interesseret i indenfor matematikken - føje udvalgsaksiomet til, uden at risikere en inkonsistens. Dvs. hvis ZF er konsistent, så er også ZF kombineret med udvalgsaksiomet konsistent (men ZFs konsistens er stadig problematisk). Endelig viste P.Cohen så sent som i 1963, at givet ZF's konsistens, så er også ZF kombineret med negationen af udvalgsaksiomet konsistent. (Moore, 1982).

Betydningen for hvilke funktioner, der er kontinuerte.

Der er matematiske sætninger fra meget forskellige områder, som kræver udvalgsaksiomet. Én af disse sætninger, som har en oplagt relevans i forhold til $\mathbf{R}$'s hensigtsmæssighed som grundlaget for studiet af kontinuerte funktioner, er følgende:

"De to definitioner på, at $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ er kontinuert i x_o,

(1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ |x-x_o|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$

og

(2) $\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=x_o \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{f(x_n)\}=f(x_o)$

er ækvivalente."

I beviset for, at hvis f opfylder betingelse (2), så opfylder f også betingelse (1), kan man ikke undgå at benytte udvalgsaksiomet. (2)$\Rightarrow$(1) søgtes af bl.a. Cantor bevist ved at bevise, at $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$. Han mente at negationen af (1) gjorde det muligt at bestemme en talfølge $\{x_n\}$, hvorom galdt, at $\{x_n\}$ havde grænseværdien x_o, mens $\{f(x_n)\}$ ikke havde grænseværdien $f(x_o)$. Men eksistensen af denne talfølge $\{x_n\}$ kræver, at man uendeligt mange gange foretager en udvælgelse af et x_i indenfor et vist interval, en udvælgelse, som der ikke er givet en tilstrækkelig præcisering af hvorledes skal foregå.

Ved negationen af (1) fås:

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0: \neg(\forall x: (|x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_o)| < \varepsilon))$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x_\delta: |x_\delta - x_o| < \delta \wedge |f(x_\delta)-f(x_o)| > \varepsilon$$

Man fastholder nu x_o og lader δ være mindre og mindre, f.eks. $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \frac{1}{2}$, $\delta_3 = \frac{1}{3}, \ldots, \delta_n = \frac{1}{n}, \ldots$ Den tilsvarende følge $x_{\delta_1}, x_{\delta_2}, x_{\delta_3}, \ldots$, hvor $|x_o - x_{\delta_i}| < \delta_i$, vil da konvergere mod x_o, mens følgen af funktionsværdierne ikke vil konvergere mod $f(x_o)$.

Det synes overmåde mærkeligt, at man ikke uden videre er sikret eksistensen af følgen $x_{\delta_1}, x_{\delta_2}, x_{\delta_3}, \ldots$. Men forholdet er altså det, at gennemførligheden af udvælgelsen af de uendeligt mange x_{δ_i}'er forudsætter udvalgsaksiomet.

Konsekvensen af dette er bl.a., at der pilles ved den entydige bestemmelse af **R**. ZF med, hhv. uden, udvalgsaksiomet giver to udgaver af de reelle tal, som er væsensforskellige.
-Vi har nævnt, at logikerne er nået frem til, at hvis ZF er konsistent, så er også ZF kombineret med negationen af udvalgsaksiomet konsistent. Det er også lykkedes at finde en reel funktion, som givet ZF og negationen af udvalgsaksiomet er følge-kontinuert, men ikke almindelig kontinuert (Moore, 1982).

En funktion som, tør man formode, ikke optræder i det normale gymnasie-pensum, men hvis eksistens alligevel understreger, at man ikke skal tage **R** i den almindelige udgave for den eneste mulige.

3. Uendeligt små og store tal. Ikke-standard analyse.

Ydermere er det i 1960-erne blevet vist, at der findes talsystemer, der indeholder infinitesimaler, og som kan anvendes som grundlag for dele af den matematiske analyse. Det vil sige talsystemer, som på mere radikal måde adskiller sig fra den gængse udgave af **R**, end den udgave, hvor visse helt specielle funktioner er følge-kontinuerte men ikke almindelig kontinuerte.

Enhver forestilling om, at noget sådant var muligt, blev blankt afvist af Cantor, der som nævnt mente, at uendelige tal kun kunne gives mening inden for hans system af transfinitte mængder, og ikke som elementer i **R**.

En mængde med endelige og uendelige tal er karakteriseret ved ikke at opfylde den archimediske ordning. Sætningen om, at $\mathbb{R}_+$ er archimedisk ordnet, kan formuleres således:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ \exists n \in \mathbb{N}: an > b$$

hvor **N** er standard-udgaven af de naturlige tal.

Det kan altså ikke lade sig gøre at vælge a så lille og b så stor, at a ikke kan ganges op til at blive større end b. Et uendeligt lille tal vil her være et tal a $(a \neq 0)$, som ikke kan ganges op til at blive større end et vilkårligt endeligt tal. Et uendeligt stort tal vil være et tal, der ikke kan "nås" af produktet af to endelige tal.

Det afgørende er om der kan konstrueres en sådan ikke-archimedisk ordnet mængde jævnfør konstruktionerne af **Z**, **Q** og **R**. Her har logikerne bevist, at givet konsistensen af ZF $\wedge$ AC, så eksisterer der en sådan mængde.

Vi vil her angive nogle træk af en mængde $*Q$, som er en udvidelse af $\mathbb{Q}$, hvor $*Q$ indeholder uendeligt små og store elementer. $\mathbb{R}$ kan udvides på tilsvarende vis, og $*R$ er egentlig mere interessant som alternativt analyse-grundlag. Vi har valgt at holde os til $*Q$, hvis konstruktion er fremstillet på rimelig enkel vis i Stroyan og Luxemburg, 1976, og det er denne fremstilling, vi i det følgende bygger på.

Konstruktionen af $*Q$.

Denne konstruktion foregår på grundlag af $\mathbb{Q}$, og ligesom ved konstruktionen af $\mathbb{R}$, dannes først en meget omfattende struktur, hvorefter der foretages en reduktion ved hjælp af en ækvivalensrelation.

Først betragtes mængden af **alle** rationale følger $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (til forskel fra at "nøjes" med mængden af alle fundamentalfølger $F \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$). På $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ indføres + og $\cdot$ koordinatvis ud fra de tilsvarende kompositioner i $\mathbb{Q}$, det vil sige

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} + \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots\}$$

Der skal nu påføres $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ en ækvivalensrelation, der opfylder følgende løst formulerede betingelser:

I) $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\approx$ skal indeholde elementer, der kan siges at være uendeligt store. $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\approx$ skal altså være en forholdsvis righoldig struktur.

II) $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\approx$ skal være et legeme. Det vil sige, at $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\approx$ på den anden side ikke skal være så righoldig, at den for eksempel indeholder nul-divisorer. Hvis $\approx$ blot er den koordinatvise identitet, vil der være nul-divisorer, idet $\{0_1\} = \{0,1,0,1,0,1,0,\ldots\}$ og $\{0_2\} = \{1,0,1,0,1,0,1,\ldots\}$ begge er forskellige fra $\{0,0,0,0,0,\ldots\}$, men ved koordinatvis multiplikation bliver produktet mellem $\{0_1\}$ og $\{0_2\}$ jo netop denne nul-følge.

Endvidere vil en sådan struktur ikke være ordnet. Således vil der med hensyn til ovennævnte nul-divisorer $\{0_1\}$ og $\{0_2\}$ hverken gælde, at de var lig hinanden, eller at en af dem kan siges at være størst.

Dernæst defineres $\approx$ ved at

$$\{a_n\} \approx \{b_n\} \Leftrightarrow a_n = b_n \text{ for "næsten alle n"},$$

Med en passende præcisering af dette udtryk, så får mængden $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\approx$ de ønskede egenskaber, og betegnes herefter med $^*\mathbb{Q}$.

Præciseringen består i konstruktionen af en mængde U af delmængder af $\mathbb{N}$, det vil sige $U \subset P(\mathbb{N})$. Med en sådan mængde U kan ækvivalensrelationen skrives

$$\{a_n\} \approx \{b_n\} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N}: a_n = b_n\} \in U$$

U er en mængde af uendelige delmængder af $\mathbb{N}$, som hver for sig er så store, at de i den ønskede forstand dækker "næsten hele $\mathbb{N}$".

Mængden $U \subset P(\mathbb{N})$ kaldes et frit ultra-filter, og er karakteriseret ved følgende aksiomer:

I) $\emptyset \notin U$

II) $A, B \in U \Rightarrow A \cap B \in U$

III) $A \in U \wedge B \subseteq \mathbb{N} \wedge A \subseteq B \Rightarrow B \in U$

IV) $B \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow B \in U \vee \mathbb{N} \setminus B \in U$

V) B endelig $\Rightarrow B \notin U$

Herefter siger man, at givet udvalgsaksiomet kan et sådant filter konstrueres - og at det i øvrigt ikke drejer sig om udseendet af et konkret filter U, men om at benytte egenskaberne I-V til at bevise egenskaber ved *Q.

Beviset for at den på $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ indførte addition harmonerer med ækvivalensrelationen $\approx$, foregår således på følgende måde:

Vi forudsætter: $\{a_n\} \approx \{a_n'\}$ og $\{b_n\} \approx \{b_n'\}$,

og skal vise: $\{a_n + b_n\} \approx \{a_n' + b_n'\}$

Per definition gælder

$\{a_n\} \approx \{a_n'\} \Leftrightarrow M_1 = \{n \in \mathbf{N}:\ a_n = b_n\} \in U$

$\{b_n\} \approx \{b_n'\} \Leftrightarrow M_2 = \{n \in \mathbf{N}:\ a_n' = b_n'\} \in U$

$\{a_n + b_n\} \approx \{a_n' + b_n'\} \Leftrightarrow M_3 = \{n \in \mathbf{N}:\ a_n + b_n = a_n' + b_n'\} \in U$

Da $(a_n = a_n') \wedge (b_n = b_n') \Rightarrow (a_n + b_n = a_n' + b_n')$

gælder $M_1 \cap M_2 \subset M_3$

Ifølge aksiom II) gælder $M_1, M_2 \in U \Rightarrow M_1 \cap M_2 \in U$

Og ifølge III) gælder $M_1 \cap M_2 \in U \wedge M_1 \cap M_2 \subset M_3 \Rightarrow M_3 \in U$

Det vil sige $\{a_n + b_n\} \approx \{a_n' + b_n'\}$.

Indenfor *Q vil endvidere enten $\{0_1\}$ eller $\{0_2\}$ (nul-divisorer-ne fra forrige side) tilhøre samme klasse som $\{0,0,0,0,\ldots\}$. $\{0_1\}, \{0_2\}$ kan skrives hhv. $\{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n)\}$ og $\{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n)\}$, og Iflg. IV), II) og I) gælder <u>enten</u> $\{n \in \mathbf{N}:\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n = 0\} \in U$ <u>eller</u>

$\{n \in \mathbf{N}:\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n = 0\} \in U$, og der er derfor ikke længere tale om nul-divisorer.

*Q er da en mængde af klasser af ækvivalente følger. Det gælder, at der kan multipliceres og adderes med de enkelte elementer (klasserne), ganske som ved almindelige rationale tal, og at der findes en delmængde af *Q, som er isomorf med **Q**, nemlig mængden af alle de klasser, der kan repræsenteres ved følger med konstante rationale led.

Det interessante er så, at det ekstra, som *Q indeholder, for eksempel er en klasse, der kan repræsenteres ved følgen $\{\omega_n\} = \{1,2,3,\dots\}$. Denne klasse er større end enhver klasse, der kan repræsenteres ved en konstant følge $\{k_n\}=\{k,k,k,\dots\}$, fordi $\{n \in \mathbf{N}: k_n > \omega_n\}$ er endelig, uanset hvor stort et rationalt tal k, der vælges.

Tilsvarende gælder, at $[\{0,0,0,\dots\}] < [\{\frac{1}{\omega_n}\}] < [\{k_n\}]$ uanset hvor lille et rationalt tal k, der vælges. Det vil sige, at $[\{\frac{1}{\omega_n}\}]$ er uendelig lille.

Berettigelsen i betegnelserne uendelig stor/lille bekræftes endvidere af (jævnfør bemærkningerne i forbindelse med formuleringen af Archimedes' aksiom), at $[\{\frac{1}{\omega_n}\}]$ ikke kan ganges op til et endeligt tal. En følge $\{a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \dots\}$ vil altid kun overstige følgen $\{b, b, b, \dots\}$ på et endeligt antal pladser, uanset hvor stor a vælges, og hvor lille b vælges ($a, b \in \mathbf{Q}_+$)

Anvendelsen i analysen.

Med *Q er der skabt en begrebsramme, hvori den gamle fremstilling af differentialregning ved hjælp af infinitesimaler kan formuleres på ny.

Vi kan for eksempel forsøge med følgende definition på kontinuitet:

f: *Q→ *Q er kontinuert i x_o
⇕
en uendelig lille tilvækst i x_o giver en uendelig lille tilvækst i $f(x_o)$.

I det følgende betyder $a \approx b$, at $a-b$ er uendelig lille, og definitionen ovenfor kan da skrives

f: *Q→ *Q er kontinuert i x_o
⇕
$a \approx x_o \Rightarrow f(a) \approx f(x_o)$

Vi undersøger nu funktionen

$$f:\ {}^*Q \to {}^*Q, \text{ hvor } f(x) = x^2$$

og får da for et vilkårligt endeligt tal a og en vilkårlig infinitesimal ε ($a, \varepsilon \in {}^*Q$), at

$$f(a+\varepsilon) = (a+\varepsilon)^2 = a^2+\varepsilon(2a+\varepsilon) \approx a^2 = f(a)$$

Det vil sige, at f er kontinuert ifølge definitionen.

Vi kan endvidere definere differentialkvotienten i et endeligt punkt a på basis af følgende brøk

$$\frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \frac{a^2+\varepsilon(2a+\varepsilon)-a^2}{\varepsilon} = 2a+\varepsilon \approx 2a,$$

idet vi kan definere f'(a) som den "normale" (standard) del af brøken

$$\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$$

Ovenstående kunne vel forventes af at talsystem, der er et legeme og som indeholder infinitesimaler. Mere sigende er det, at ovenstående kontinuitets-definition også *udelukker* visse funktioner.

Ser vi på funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x>0 \wedge x^2>2 \\ -1 & \text{for } x<0 \vee x^2<2 \end{cases}$$

så vil g, hvis den er defineret på $\mathbb{Q}$, være overalt kontinuert ifølge den gængse definition (se s.4). Hvis g er definerer på *Q, er forholdet det, at selv om *Q heller ikke indeholder $\sqrt{2}$, så er g *ikke* overalt kontinuert i *Q.

At *Q ikke indeholder $\sqrt{2}$, følger af at $\sqrt{2}$ er irrational. Det vil sige, hvis $a = [\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}]$ var rod i ligningen $a^2 = 2$, skulle det gælde, at $M = \{n \in \mathbf{N}: a_n^2=2\} \in U$, men $M = \emptyset$.

Der gælder, at de fundamentalfølger $\{a_n\}$, der inden for $\mathbb{R}$ bestemmer $\sqrt{2}$, vil have den egenskab, at de bestemmer klasser inden for $^*Q$, hvorom gælder, at

$$[\{a_n\}]^2 \neq 2, \text{ med derimod } [\{a_n\}]^2 \approx 2$$

At g ikke er overalt kontinuert vises ved at betragte en sådan følge $\{a_n\}$. $\{a_n\}$ vælges så den endvidere opfylder

$$[\{a_n\}] > 0 \quad \text{og} \quad [\{a_n\}]^2 < 2$$

Da gælder, at $f([\{a_n\}]) = -1$ (1),
og vi er derfor interesseret i at finde en følge $\{\varepsilon_n\}$, således at $[\{\varepsilon_n\}]$ er infinitesimal, og hvor

$$([\{a_n\}]+[\{\varepsilon_n\}])^2 > 2$$

Da gælder nemlig, at $f([\{a_n\}]+[\{\varepsilon_n\}]) = 1$ (2),
og (1) i forbindelse med (2) vil betyde, at g ikke er kontinuert i $[\{a_n\}]$.

En følge $\{\varepsilon_n\}$, der sammen med $\{a_n\}$ gør (2) sand kan bestemmes på følgende måde:
$\{\varepsilon_n\}$ skal opfylde to betingelser, nemlig

$$\lim_{n\to\infty}\{\varepsilon_n\} = 0 \quad \text{og} \quad M = \{n \in \mathbb{N}: (a_n+\varepsilon_n)^2 > 2\} \in U$$

Dette gøres med udgangspunkt i, at inden for $\mathbb{R}$ gælder

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = \sqrt{2}$$

og at de reelle følger

$$\{(\sqrt{2}-a_n)\} \text{ og } \{2(\sqrt{2}-a_n)\}$$

er nulfølger. Da $\mathbb{Q}$ ligger tæt i $\mathbb{R}$ kan der bestemmes en rational følge $\{\varepsilon_n\}$, hvor alle elementerne opfylder

$$(\sqrt{2}-a_n) < \varepsilon_n < 2(\sqrt{2}-a_n)$$
$$\sqrt{2} < \varepsilon_n + a_n < 2\sqrt{2}-a_n$$

$\{\varepsilon_n\}$ opfylder de stillede krav, da den er en nulfølge, og da $M = \mathbb{N}$ gælder ifølge aksiomerne I) og IV), at $M \in U$.

Ovenstående analyse-grundlag, *Q, forudsatte som nævnt udvalgsaksiomet. Men givet konsistensen af ZF (som er nødvendigt for den almindelige analyse), så er ZF ∧ AC konsistent. Hvis **Q** og **R** er konsistente og udvalgsaksiomet accepteres, så er *Q også konsistent.

Om betydningen af og fremtidsmulighederne for sådanne ikke-standard udgaver af analysen har Gödel sagt:

> *... Der er gode grunde til at tro, at ikke-standard analyse, i den ene eller anden udgave, vil blive fremtidens analyse.*
>
> (citeret efter Bell & Machover, 1977)

Men denne ændring er ikke slået igennem, og Bell & Machover anfører som argument for, at det heller ikke vil ske fremover, at udvidelsen fra **R** til et fuldstændigt legeme er entydig, mens udvidelsen fra **R** til *R er flertydig.

Heri ligger, at forskellige filtre U_1 og U_2 kan give talmængder $*R_1$ og $*R_2$, der ikke er isomorfe. Henvisningen til dette har dog for os at se den svaghed, at det er et rent internt-matematisk argument. Bell og Machover diskuterer ikke hvilken pædagogisk værdi det kan have, at en række beviser og sætninger bliver enklere. Det ville være vigtigt f. eks. i forhold til arbejdet med differentialregningen i gymnasiet.

Om *Q og *R gælder i øvrigt, at de ikke er fuldstændige. Mængden af de positive uendeligt store tal har ikke noget inf., selv om den er nedadtil begrænset. Antages at infimum er et uendeligt tal a, fås den modstrid, at a-1 er positiv og uendelig, men mindre end infimum. Antages at infimum er et endeligt tal b, fås den modstrid, at b+1 er endelig - og dermed en nedre grænse - men større end infimum.

Cantor har derfor ret i, at $\mathbb{R}$ må være archimedisk ordnet, for så vidt som det forudsættes, at $\mathbb{R}$ skal have den egenskab, at der ikke må eksistere sådanne huller - at supremum og infimum for begrænsede mængder skal eksistere.

Del 5. Konklusion.

Det anvendelsesorienterede matematiske felt - Fourier-rækkerne - har tilsyneladende spillet en stor rolle for Cantors indførelse af de reelle tal. Dels direkte, som et område, Cantor studerede, og som krævede udviklingen af visse redskaber og hjælpesætninger, hvilket førte ham til præciseringen af de reelle tal. Dels indirekte, i den forstand, at studiet af Fourier-rækkerne i matematik-historiens løb har spillet en stor rolle for afklaringen af begreber som kontinuitet og integrabilitet, og dermed for det grundlag, Cantor kunne bygge på, da han opstillede sit Fourier-række-problem.

Det er interessant at se, at et vigtigt område som Fourier-rækkerne lå så længe og ventede på at blive taget op. Daniel Bernoulli havde fået ideen - og agiteret for den - længe før Fourier vandt gehør for metoden. Det lykkedes først, da de trigonometriske rækker var nødvendige i en fysisk sammenhæng - ved løsningen af varmeledningsligningen.

Vi nages dog af en vis tvivl mht. om Cantor har spillet datidens matematikpublikum et lille puds. Hvem ved, om Cantor i virkeligheden betragtede afsnittet om de reelle tal som det mest interessante i hans artikel (uanset at R-præciseringen fremtræder alene som et redskab i forbindelse med Fourier-række-problemet). Men hvis denne formodning er rigtig, så siger det på den anden side noget om, at man dengang i matematikverdenen ikke anså sådanne præciseringer for særlig væsentlige.

Dedekinds indførelse af en konstruktionsmetode havde derimod i højere grad sin baggrund i et ønske om intern matematisk afklaring af grundlaget for analysen. I samme retning peger det, at da Riemann og Cantor tager Fourier-rækkerne op, har man allerede afklaret Fourier-rækkernes konvergensforhold for de fysisk relevante funktioner; Riemann og Cantor søger derudover en *afrunding af den matematiske teori* for rækkerne.

Fourier-rækkernes betydning for indførelsen af R sættes i relief af, at matematikerne historisk har beskæftiget sig med uendelige rækker på dybtgående vis - uden at stille det som et problem, hvilke egenskaber der krævedes af talmængden, for at de rækker, man normalt opfattede som konvergente, faktisk havde en grænseværdi. Således har man systematisk behandlet spørgsmål om konvergenskriterier for rækker, arbejdet med spørgsmål om brugen af rækker til at fremstille visse irrationale tal - f.eks. π og kvadratrødder - og mange andre problemer. Dette gælder også Cauchy, som både systematiserede rækketeorien og udvikledede den yderligere bl.a. ved at indføre begrebet fundamentalfølge (Cauchy-følge). Med denne løsrivelse af konvergenskriteriet fra betragtningen af en given grænseværdi, som følgen konvergerer imod, er man kommet nærmere at stille spørgsmålet, hvad der er forudsætningen for, at denne grænseværdi eksisterer - men spørgsmålet *blev* ikke stillet.

I den periode af matematikhistorien, hvor $\mathbb{R}$'s konstruktion ud fra $\mathbb{Q}$ ikke var blevet præciseret, og matematikerne simpelthen gik ud fra, at fundamentalfølgerne havde grænseværdier i $\mathbb{R}$, at der ikke var "huller" i $\mathbb{R}$, som ødelagde betragtningerne over kontinuitet, osv., nåede man særdeles langt med den matematiske teori. Partielle differentialligninger blev løst, kontinuitets-og integralbegreberne blev præciseret - og mange andre ting, vi ikke har været inde på. Skal man drage en parallel til gymnasiet- kan man sige, at disse begreber blev behandlet langt mere dybtgående, end man har mulighed for i gymnasiet - og at man for så vidt roligt kan springe op og falde ned på raffinementerne i $\mathbb{R}$'s konstruktion ud fra $\mathbb{Q}$.

I forbindelse med gymnasie-undervisningen mener vi endvidere det må være relevant at tage højde for nogle af de logiske resultater, vi har refereret. Resultaterne om, at der er andre mængder end den normale udgave af $\mathbb{R}$, der kan udgøre et analysegrundlag, er givetvis alt for komplicerede til, at der kan undervises i dem. Men de taler for, at $\mathbb{R}$ præsenteres mere diskuterende, - mere som et valg og som en velegnet mængde - end som noget selvfølgeligt, noget der én gang er blevet afgjort af matematikerne.

Litteraturliste.

Alonso-Finn.: Fundamental University Physics II
Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

Apostol, T.: Mathematical Analysis. 2.edition.
Addison-Wesley Publishing Company 1982.

Bell, J., Machover, M.: A Course in Mathematical Logic.
North-Holland Publishing Company 1977.

Bohr,H., Andersen, A.F., Petersen, R.: Lærebog i matematisk analyse III. Jul. Gjellerups Forlag 1962.

Braun, M.: Differential Equations and Their Applications.
Springer-Verlag 1982.

Byggesten nr.37. Matematikfonden, København 1983.

Cantor, G.: Über die Audsehnüng eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen. 1972.

Cantor, G.: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. 1883.
(Begge Cantors tekster findes i "Gesammelte Abhandlungen.")

Christensen, A.S.,Thomsen, K.: Matematik i Tyskland i det 19. århundrede. Århus Universitet 1983.

Dedekind, R.: Continuity and Irrational Numbers.
Findes i: Essays on the Theory of Numbers. Dover 1963.

Grattan-Guiness (red.): From the Calculus to Set Theory 163o-191o. London 198o.

Karrebæk, J., Lange, T.:Videnskabsteoretiske problemer ved undervisningssystemer baseret på mængdelære.
IMFUFA-tekst nr. 31. RUC 198o.

Langer, R.E.: Fourier Series. The Genesis and Evolution of a Theory. American Mathematical Monthly. Vol. 54, nr.7. 1947 (supplement).

Mejlbo, L.C.: Nogle fundamentale sætninger om reelle tal og deres historie. Nordisk matematisk Tidsskrift, bind 25/26, hæfte 2, 1978.

Mejlbo, L.C.: Uendelige rækker. En historisk fremstilling. Århus Universitet 1983.

Mendelsson, E.: Number Systems and the Foundation of Analysis. Academic Press, 1973.

Moore, G.H.: Zermelo´s Aciom of Choice. Springer-Verlag 1982.

Riemann, B.: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihe. 1854.

Stroyan, K.D., Luxemburg, W.A.: Introduction to the Theory Infinitesimals. Academic Press 1976.

Rudin,W.: Principles of Mahtematical Analysis. McGrawl-Hill Book Company, 1976.

Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet,..., Undervisningsministeriets bek.gør. nr.312, 12.6.81.

Vejledning og retningslinier for undervisningen i gymnasiet, Direktoratet for gymnasieskolerne og HF, 1978.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og Peter H. Lassen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. — Nr. 3 er a jour ført i marts 1984
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. — Nr. 4 er p.t. udgået.
Mogens Niss.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". — Nr. 5 er p.t. udgået.
Helge Kragh.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". — Nr. 7 er udgået.
B.V. Gnedenko.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PA MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's:"Nova Stereometria Doliorum Vinarioum".
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jorgen Larsen

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". — Nr. 12 er udgået
Mogens Brun Heefelt

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography". Nr. 14 er p.t. udgået.

Else Høyrup.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".

Specialeopgave af Leif S. Striegler.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".

Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".

Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.

Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".

Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.

Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".

Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".

Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.

Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of realitivity".

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE". Nr. 24 a+b er p.t. udgået.
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.

Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.

Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.

Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".

Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".

Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kreinøe.

Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".

Projektrapport af Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".

Oluf Danielsen.

Nr. 30 er udgået.

Udkommer medio 1982 på Fysik-, Matematik- og Kemilærernes forlag.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PA MÆNGDELÆRE".

Projektrapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk.

Vejleder: Stig Andur Pedersen.

Nr. 31 er p.t. udgået

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMALINGER OG MÖSSBAUEREFFEKTMALINGER".

Projektrapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og Preben Jensen.

Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK-NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".

Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".

ENERGY SERIES NO.1.

Bent Sørensen.

Nr. 34 er udgået.

Publ. i "Renewable Sources of Energy and the Environment", Tycooli International Press, Dublin, 1981.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".

Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN ?".

Fire artikler.

Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".

ENERGY SERIES NO.2.

Bent Sorensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".

Projektrapport af Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.

Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.

Nr. 38 er p.t. udgået

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTOKONOMIEN".

Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".

Projektrapport af Arne Jorgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.

Vejleder: Per Nørgaard.

Nr. 40 er p.t. udgået

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".

ENERGY SERIES NO.3.

Bent Sorensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".

Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".

2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".

ENERGY SERIES NO.4.

Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISK UNDERSØGELSE AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".

Projektrapport af Niels Thor Nielsen.

Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82

46/82 I+II "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE - ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".

Projektrapport af Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.

Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".

ENERGY SERIES NO.5.

Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".

Projektrapport af Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn, Isac Showiki.

Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".

Projektrapport af Preben Nørregaard.

Vejledere: Jørgen Larsen & Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY". ENERGY SERIES NO.6.

Rapport af Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?"

Projektrapport af Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS"

Bernhelm Booss & Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".

Arne Jakobsen & Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.

Stig Andur Pedersen & Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En bibliografi.
Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82:
Se også tekst 62/83.

56/82 "ÉN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af Per Hammershøj Jensen & Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.
Projektrapport af Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION", som et eksempel på en naturvidenskab - historisk set.
Projektrapport af Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En bibliografi. 2. rev. udgave
Else Høyrup

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8
David Crossley & Bent Sørensen

64/83 "VON MATHEMATIK UND KRIEG".
Bernhelm Booss og Jens Høyrup

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen, Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss & Klaus Grünbaum

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen

67/83 "ELIPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"

Projektrapport af Lone Biilmann og Lars Boye

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.

Projektrapport af Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid, Frank Mølgård Olsen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK" - en test i 1.g med kommentarer

Albert Chr. Paulsen

70/83 "INDLÆRINGS- OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU"

Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Age Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.

Vejleder: Klaus Grünbaum & Anders H. Madsen

71/83 "PIGER OG FYSIK" - et problem og en udfordring for skolen?

Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich & Mette Vedelsby

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S. Peirce.

Peder Voetmann Christiansen

73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG" - økologisk contra traditionelt

ENERGY SERIES No. 9

Specialeopgave i fysik af Bent Hove Jensen

Vejleder: Bent Sørensen

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik

Projektrapport af Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.

Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM" - Case: Lineær programmering

Projektrapport af Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl, Frank Mølgaard Olsen

Vejledere: Mogens Brun Heefelt & Jens Bjørneboe

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.

ENERGY SERIES No. 10

Af Niels Boye Olsen og Bent Sørensen

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?" Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller

Projektrapport af Svend Age Houmann, Keld Nielsen, Susanne Stender

Vejledere: Jørgen Larsen & Jens Bjørneboe

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM"

Specialerapport af Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant

Vejleder: Niels Boye Olsen

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE"

Projektrapport af Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.

Vejleder: Bernhelm Booss

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B"

Mogens Brun Heefelt

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM"

Specialerapport af Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen

Vejleder: Niels Boye Olsen

82/84 "MATEMATIK- OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND"

Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983

Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY" nr. 83 er p.t. udgået

PEACE RESEARCH SERIES NO. 1

af Bent Sørensen

84/84 " NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".

Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK"

Specialerapport af Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE"

PEACE RESEARCH SERIES NO. 2

af Bent Sørensen

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS"

af Jeppe C. Dyre

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS"

af Detlef Laugwitz

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING"

af Bjarne Lillethorup & Jacob Mørch Pedersen

90/84 "ENERGI I 1.G- en teori for tilrettelæggelse"

af Albert Chr. Paulsen

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET"
1. Lærervejledning

Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson

Vejleder: Torsten Meyer

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET
2. Materiale

Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson

Vejleder: Torsten Meyer

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM-NON-LOCALITY"
af Peder Voetmann Christiansen

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden"

Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen

Vejleder: Mogens Niss

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE"

Peace research series no. 3

af Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING"
af Bjarne Lillethorup

Vejleder: Bent Sørensen

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY"

Jeppe C. Dyre

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN"
af Bent Sørensen