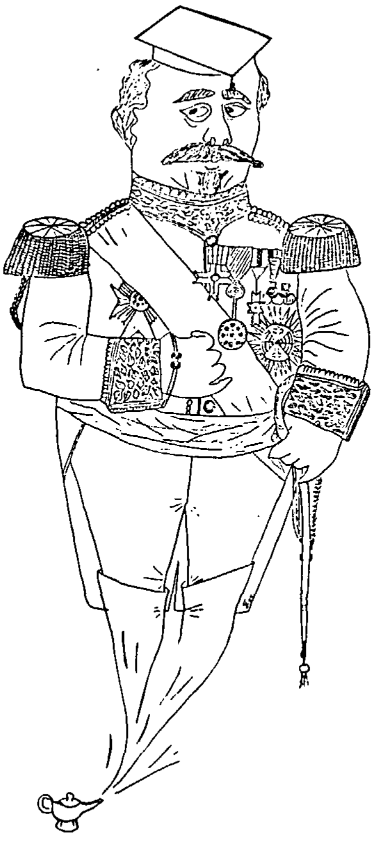
TEKST NR 94 1985

TREENIGHEDEN BOURBAKI

- generalen, matematikeren & ånden



af:
morten blomhøj
klavs frisdahl
frank mølgaard olsen
vejleder
mogens niss

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

TREENIGHEDEN BOURBAKI
- generalen, matematikeren & ånden

Projektrapport af Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen
Vejleder: Mogens Niss

IMFUFA tekst nr. 94/85, RUC. 113 sider. ISSN 0106-6242

ABSTRACT

Denne tekst er en 3. moduls projektrapport fra matematikoverbygningen. Projektet er en historisk præsentation af matematikergruppen Bourbaki, værket Éléments de Mathématique og af den strukturalistiske matematikopfattelse, som Bourbaki er en fremtrædende repræsentant for.

Vi belyser grundlagsholdningen, strukturalismen, aksiomatisering og formidling, som det kommer til udtryk i Bourbakis egne udgivelser og ved hjælp af en række om-artikler.

Det nye i projektet er ikke at se Bourbakis produktion isoleret, men at vurdere den historisk og i forhold til bourbakisternes øvrige aktiviteter. Til sidst opstiller vi herudfra "det bourbakistiske paradigme", og vurderer den forskningspraksis, som det giver anledning til.

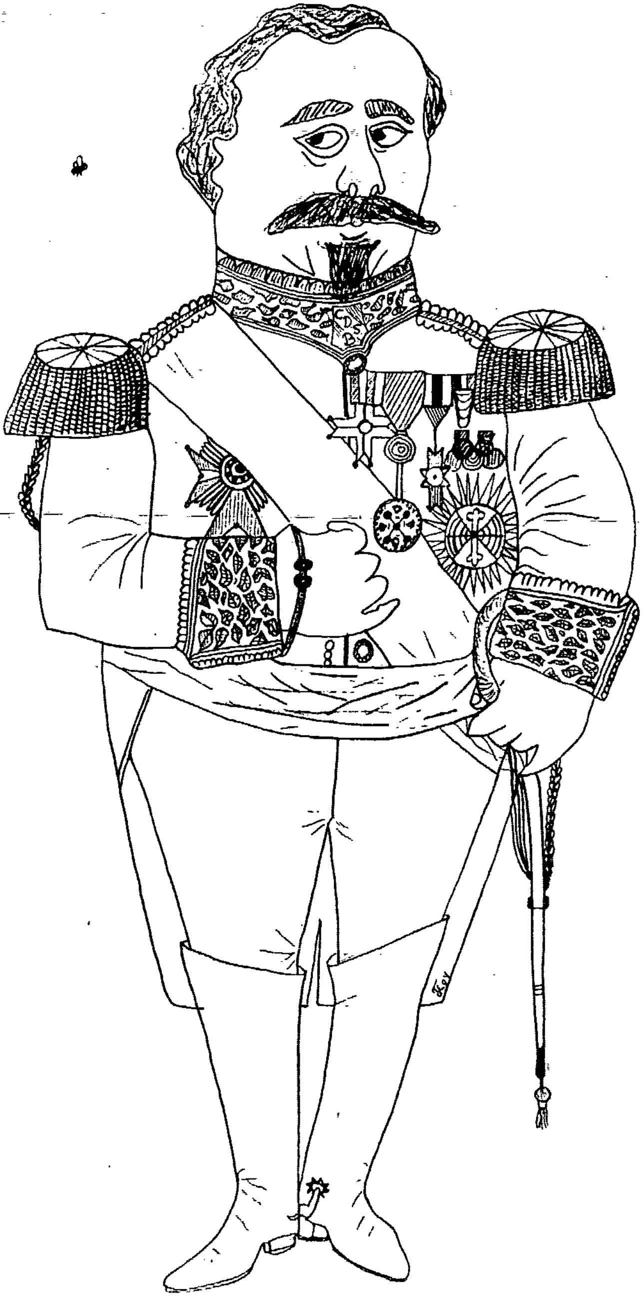
TREENIGHEDEN BOURBAKI

– GENERALEN,
MATEMATIKEREN
OG ÅNDEN

TIL GERDA

MORTEN BLOMHØJ
FRANK M. OLSEN
KLAVS FRISDAHL
IMFUFA RUC '84

INDHOLDSFORTEGNELSE.


Fey

FORORD

Denne rapport er udarbejdet under det 3. modul: "Det erkendelsesteoretiske/videnskabsteoretiske modul" på den matematiske overbygning. Modulet stiller bl.a. krav om at "belyse matematikkens erkendelsesteoretiske status ... I denne forbindelse belyses den rolle, fagets aksiomatisk-deduktive karakter spiller for dets erkendelsesteoretiske status". (Studieordningen, 1983). Desuden nævnes der kravet om at se fagets formidling.

Vi mener ikke, at erkendelsesteori/videnskabsteori kan ses isoleret fra den historie - specielt videnskabshistorie - som de forskellige teorier er en konsekvens af. Vi har derfor valgt at lade projektet være et historisk casestudy af Bourbaki - og af hans værk Éléments de Mathématique. Det erkendelsesteoretiske og videnskabsteoretiske er således integreret i handling af Bourbaki.

Endelig vil vi gerne sige tak til Hans Tornehave (Matematisk Institut, KU), Anders H. Madsen (RUC), Else Høyrup (RUB) og vores vejleder Mogens Niss for ideer, rettelser og vejledning i projektforløbet.

Morten Blomhøj Klavs Frisdahl Frank Mølgaard Olsen

Efterårssemesteret 1984

INDLEDNING

Vort mål med det foreliggende projekt er at præsentere og problematisere et konkret eksempel på, hvordan udviklingen i dette århundredes rene matematik kan fortolkes. Udgangspunktet er Nicolas Bourbakis arbejde, der nok må siges at være dette århundredes mest omfattende forsøg på at præsentere moderniseringen af den rene matematik. Nicolas Bourbaki er et pseudonym for en gruppe af matematikere, der i fællesskab bl.a. har produceret værket Eléments de Mathématique.

For Bourbaki er "ren" matematik den matematik, der dyrkes uafhængigt af eksterne behov og ikke umiddelbart finder anvendelse uden for matematikken selv. I modsætning hertil står den "anvendte" matematik, hvor matematik benyttes/udvikles for at løse problemer inden for andre fagområder. Her er de matematiske begreber udstukket af de eksterne relationer og teorierne anvendes til opstilling og analysering af "modeller" for eksterne problemer.

Motivationen til projektet har bl.a. været at lukke et "hul" i de kundskaber, vi hidtil har opnået i vore studieforløb. Vi har beskæftiget os med anvendt matematik i tidligere projekter f.eks. differentialligningsmodeller, stokastiske modeller og lineære programmeringsmodeller. Og på kurserne har vi fortrinsvis beskæftiget os med ren matematik, der tidsmæssigt er fra begyndelsen af dette århundrede eller ældre. Alt i alt har vi følt behov for at vide noget mere om, hvad der er sket i den rene matematik i dette århundrede. For at tilfredsstille dette behov har vi valgt at lade projektet tage udgangspunkt i Nicolas Bourbakis arbejde.

For at få mere at vide om den generelle forskningsmæssige udvikling har vi desuden set nærmere på, hvad nogle af stifterne af Bourbaki mener om denne udvikling. Disse har ofte været kendte matematikere, der har leveret mange forskningsresultater, og derfor har fulgt udviklingen på nærmeste hold.

Nicolas Bourbaki og dennes stiftere repræsenterer således en omfattende produktion, hvori der mere eller mindre eksplicit foreligger bestemte holdninger til og fortolkninger af den rene matematiks nyere udvikling. Det er disse vi vil forsøge at beskrive og forholde os til i dette projekt.

Der er flere grunde til, at specielt Bourbaki er aktuel for studiet af tendenser i den moderne matematik. For det første er værket Éléments de Mathématique den største samlede fremstilling af moderne grundlæggende matematiske discipliner. Fremstillingen er konsekvent og målrettet. Den er et resultat af en bestemt matematikopfattelse og det er et oplæg til at føre matematikken videre i det spor, som værket udstikker. Det er derfor aktuelt at beskrive dette spor. De niveauer som Éléments de Mathématique og Bourbaki-gruppens indflydelse i øvrigt skal måles på, er i forhold til undervisning og i forhold til forskning.

Med hensyn til undervisning, så er det i flere sammenhænge beskrevet, hvordan der er en parallel mellem matematisk begrebsdannelse og de strukturer, som Bourbaki finder væsentlige og fundamentale for matematikken.

Bourbaki som inspiration til "the new math" eller "60'er matematikken" er ikke et nyt problem (se f.eks. Skovsmose, 1980, 1981 a og 1981 b). Dette har vi ikke fulgt væsentligt op.

Det interessante i en mere videnskabsteoretisk sammenhæng bliver derfor at vurdere på hvilken måde Éléments de Mathématique og Bourbakis øvrige arbejde har været med til at skabe et matematisk paradigme for den moderne matematikforskning. Dette giver anledning til følgende <u>problemformulering</u>:

1) Hvilke principper og områder finder Nicolas Bourbaki og dennes stiftere er væsentlige i udviklingen i dette århundredes rene matematik? Kan man videre ud fra den-

ne matematikopfattelse beskrive den forskning, der bestemmes af disse rammer.

2) Hvordan harmonerer dette med vores eget syn på matematik og hvilke konsekvenser ser vi af denne matematikopfattelse?

Punkt 2 er udelukkende henlagt til konklusionen på projektet og kan opfattes som opsummeringen og vurderingen af undersøgelserne under punkt 1.

Når vi i punkt 1 taler om principper og områder, mener vi principper for matematikkens opbygning og forskning - herunder grundlagets stilling - samt hvilke områder, der er væsentlige i forskningen og formidlingen af denne.

Som der er lagt op til i den foregående motivation handler det om at uddestillere de bourbakistiske ideer, som de primært kommer til udtryk i Elements de Mathématique. Dette har affødt følgende strukturering af projektet, der skal afstikke Bourbakis matematikopfattelse.

Kapitel 1. Dette kapitel er ikke direkte relateret til problemformuleringen, men derimod en beskrivelse af den historiske baggrund for Bourbakis arbejde samt en præsentation af "personen" Bourbaki og dennes produktion.

Kapitel 2. Er en karakteristik af Bourbakis forhold til <u>matematikkens grundlag</u> - herunder grundlagskrisen i starten af dette århundrede. Vi giver desuden en beskrivelse af de væsentligste inspirationskilder for Bourbaki.

Kapitel 3. Her gives en redegørelse for de principper, som Bourbaki benytter i sin opbygning af matematikken i Eléments de Mathématique. Dette er samtidig en definition af hvilke <u>elementer</u> i matematikken, der er væsentlige at belyse og herunder den matematiske <u>metode</u> i dette arbejde.

Kapitel 4. Her præsenterer vi det indhold, der <u>formidles</u> og nogle konsekvenser af denne formidling. Desuden gennemgår vi et konkret eksempel på Bourbakis matematikformidling. Og endelig resumerer vi kort den kritik, der har været rejst mod denne fremstilling.

Kapitel 5. Her vil vi karakterisere det <u>genstandsområde</u>, som afstikkes i bourbakisternes arbejde, ved at se hvordan de generelt vurderer den forskningsmæssige udvikling og hvordan de selv har deltaget aktivt i denne.

Kapitel 6. Vi forsøger at skitsere den normalvidenskabelige fase, der må følge efter det paradigme, som defineres af Bourbaki. Det er en beskrivelse af moderne matematik, hvis Bourbaki skulle bestemme, og vi kommer med vores eget bud på, hvordan dette må påvirke den matematiske forskning.

<u>Litteratur</u>

Kildematerialet er fortrinsvis tilvejebragt ved en manuel systematisk litteratursøgning i Mathematical Reviews fra 1940-1983 på Jean Dieudonné, Claude Chevalley, André Weil, Henri Cartan, Samuel Eilenberg, Jean Delsarte og så naturligvis Nicolas Bourbaki. Resultatet blev 379 artikler og 57 bøger af de 6 bourbakister. Bourbakis produktion beløber sig til knap 40 bind (førstegangsudgivelser) af Eléments de Mathématique og to artikler.

Herudover har vi koncentreret os om artikler og bøger af metafaglig karakter. Den faglige substans i projektet stammer fortrinsvis fra enkelte bind af Eléments de Mathématique. På grund af denne opdeling er det nødvendigt at skelne mellem Bourbaki og bourbakisterne, der er de forfattere, som har medvirket ved udarbejdelsen af dette værk. Som enkeltpersoner optræder de som bourbakister og samlet som Bourbaki.

Materialet kan da groft deles ind i flg. 4 kategorier: 1) Materiale udgivet under pseudonymet Bourbaki, 2) Artikler om Bourbaki af dennes stiftere, 3) Materiale om den generelle forskningsmæssige udvikling af Bourbakis stiftere og 4) Andet materiale om Bourbaki.

Læsevejledning

Projektet er skrevet til læsere med forudsætninger, der svarer til vores egne. Hvor vi har anvendt begreber (o.lign.), som vi ikke har forklaret, har vi bestræbt os på at referere til en behandling af disse andetsteds.

Af praktiske grunde har vi primært valgt at henvise til Davis (m.fl., 1981) fremfor at referere til ethundredesytten forskellige, muligvis bedre gennemgange af det aktuelle emne.

I projektet har vi anvendt almindelige matematiske symboler som $\leqq$, Q, Ø, $^{\circ}$ osv. for som sædvanlig (mindre end eller lig, de rationale tal, den tomme mængde, funktionssammensætning osv.). Enkelte steder nævner vi eksempler i form af matematiske discipliner f.eks. ergodisk teori. Det betyder ikke nødvendigvis, at vi eller læseren behøver at kende til ergodeteori, men eksemplet er medtaget af hensyn til læsere, der (tilfældigvis) kender disciplinen.

Referencer er omhyggeligt foretaget enten i teksten eller ved citater. Vi henviser til litteraturoversigten bag i projektet. Da projektet er historisk har vi valgt at lade det fremgå af referencerne, hvornår teksten udkom første gang f.eks. (Bourbaki 1948/50, p. 227). Artiklen udkom første gang i 1948 på fransk, men vi citerer fra side 227 i den engelske oversættelse fra 1950. Undtagelserne i referencerne er til værket Eléments de Mathématique, som vi refererer ved (EM, II, 3, p. x). Dette er en henvisning til bog II, kapitel 3, side x. I appendix findes en oversigt over samtlige førsteudgaver i serien, og af litteraturlisten fremgår, hvilke udgaver, vi refererer til.

Endelig skal det nævnes, at vi har samlet de matematikere o.a., som vi nævner i en liste bag i projektet. Af denne fremgår disses leveår samt nationalitet. (Det må dog bemærkes, at disse flytter en del rundt, så den må siges at være vejledende!)

1. EN PERSONSKILDRING AF NICOLAS BOURBAKI

Inden vi starter beskrivelsen af Bourbakis "person" i dette kapitel, må vi hellere slå fast, hvilken "videnskabshistorisk" status dette kapitel har. Skildringen af Bourbaki, den historiske situation i begyndelsen af hans arbejdsperiode samt intentionerne bag hans værk, bygger først og fremmest på anden- og trediehånds kilder, idet Bourbaki selv kun har udgivet et par programartikler om dette arbejde. Til gengæld har en del af de folk, der stod/står ham meget nær, bidraget med flere artikler bl.a. om Bourbakis arbejde.

Vi kan slå fast, at der sandsynligvis aldrig har eksisteret en matematiker ved navn Nicolas Bourbaki. I hvert fald er der ingen matematikere af dette navn, der haft så stor indflydelse på det 20. århundredes matematik, at det vil være på sin plads at lave et projekt om ham.

Baggrunden for denne - umiddelbart paradoksale - bemærkning er, at forfatteren til serien Éléments de Mathématique ikke er én, men mange. Nicolas Bourbaki er et pseudonym for en gruppe af hovedsageligt franske, men også amerikanske o.a. matematikere, der siden 1930'erne har arbejdet med at udgive ovennævnte værk; foruden at de alle er eller har været betydningsfulde, aktive matematikere inden for en eller flere discipliner.

Grunden, til at værket er udgivet under pseudonym, er ikke åbenlys, men som det vil fremgå af de senere kapitler, vil værket aldrig blive færdigt, hvis det skal opfylde de intentioner, som initiativtagerne havde med det. (Se afsnit 1.2.)

Af denne grund er det praktisk at udgive under et udødeligt navn, så kun forfatterne, men ikke pseudonymet udskiftes.

Endnu mere mørkelagt er gruppens valg af netop navnet Bourbaki. Der er flere forskellige forsøg på at forklare, hvorfor valget er faldet på Nicolas Bourbaki, og hvorfra dette navn stammer.

Medlemmerne af Bourbaki-gruppen er gennemgående kendetegnet af en barok humor, der mest har bidraget til forvirring omkring gruppen frem for afklaring af spørgsmålet (se f.eks. Fang, 1970, p. 25 og Halmos, 1957, p. 91). Henri Cartan, der selv var en af mændene bag pseudonymet, gav i et foredrag i 1958 sit bud på, hvor familienavnet på den matematiker, som "kun få havde mødt", stammede fra (Cartan, 1958/1979, p. 175):

Cartan hævder at have sine oplysninger om familienavnet Bourbaki fra en græsk ven af ham. Han fortæller historien således: I det 17. århundrede kæmpede grækerne - under ledelse af 2 brødre, Emanuel og Nicolaus Skordylis - mod tyrkerne. Deres heroiske indsats rygtedes til den tyrkiske lejr, hvor de fik tilnavnet "Vourbachi". Emanuel og Nicolaus overtog tilnavnet og videreførte det som slægtsnavn, idet de dog helleniserede navnet, så V blev til B og ch til K. Mere end et århundrede senere var det Soter Bourbaki - et tipoldebarn til Emanuel - der var et stort navn på den militære arena. Mens General Bonaparte var i Egypten, sendte Jérôme (Napoleons bror) Soter Bourbaki til Egypten med besked om, at han skulle vende hjem til Frankrig, for tiden var inden til et statskup. Efter magtovertagelsen i Frankrig påtog Napoleon sig i taknemmelighed til Soter at opdrage hans tre børn. Den ene af disse blev senere far til en berømt general i den franske hær ved navn Charles Soter Bourbaki. Dennes søster giftede sig med en efterkommer af Nicolas Vourbachi, og fra denne forening af de to grene af familien stammer ifølge Cartans bekendte den berømte franske matematiker, Nicolas Bourbaki.

Denne forkortede udgave findes i andre versioner; bl.a. hævdes det, at generalen Bourbaki på et tidspunkt fik tilbudt det græske kongerige, og på et andet forsøgte at begå selvmord. Og legenden om Bourbaki lever videre i den franske historie.

Det er i hvert fald ikke medlemmerne af gruppen, der har gjort noget særligt for at aflive nogle af myterne om matematikeren Bourbaki.

Første gang det skriftligt er erkendt, at Bourbaki er et pseudonym, er, såvidt vi kan se, i Mathematical Review, 1942, side 55 i en anmeldelse af Samuel Eilenberg af det første bind af Éléments de Mathématique. Dette er dog ikke almindeligt anerkendt, og joken fortsættes langt op i 40'erne og måske ind i 50'erne.

Det er umuligt - for os - at få et overblik over hvem og hvor mange forfattere, der har medvirket til udarbejdelsen af de mange bind i Éléments de Mathématique. I de fleste artikler nævnes ofte nogle tilfældige fremtrædende navne, men en samlet oversigt eller gæt på det samlede antal findes vist ikke. Vi har dog samlet de navne, som vi er stødt på, i nedenstående liste:

M.E. Brelot, H. Cartan. C. Chevallier, C. Chevalley, C.G. Chabauty, R. de Possel, G.W. de Rham, J. Delsarte, J. Dieudonné, J. Diximier, C. Ehresmann, S. Eilenberg, R. Godement, A. Grothendieck, J.L. Koszul, S. Lang, S. Mac Lane, P. Samuel, L. Schwartz, J.P. Serre, J.T. Tate, R. Thom, A. Weil.
Navnene er samlet fra følgende: Dieudonné, 1970, p. 134; Fang, 1970, pp. 29, 32, 42; Halmos, 1957, p. 93; Kramer, 1970, p. 701; Lam, 1978, p. 18; Vidal Abascal, 1964, p. 58.

1.1. Den historiske baggrund for Nicolas Bourbakis arbejde

Den historiske ramme før opstarten af Bourbaki projektet har mange angrebsvinkler eller niveauer. Vi har valgt at skitsere den ved specielt at se historien fra 3 sider. For det første den internationale samfundshistorie, specielt forholdet mellem Frankrig og Tyskland, som udover det rent økonomiske har haft en indflydelse på det matematiske miljø i 30'erne. For det andet de institutionelle rammer i hvilke den matematiske undervisning og forskning foregår. Her vil vi også nævne situationen, som den så ud i Frankrig og i Tyskland, da de to nationer greb situationen væsentligt forskelligt an. Og endelig for det tredie vil vi kort skitsere den heftige internationale matematiske grundlagsdiskussion.

1.1.1. Samfundshistoriske konsekvenser for den franske matematik.

Projektet blev startet i vintersemesteret 1934-35 af en gruppe franske matematikere fra Paris. Baggrunden for det arbejde, som de påtænkte, skal søges i den bredere historiske ramme omkring 1. Verdenskrig.

De franske og tyske matematiske miljøer hørte til de betydeligste på den tid. På det politiske plan var klimaet mellem Frankrig og Tyskland meget køligt, hvilket muligvis kan have haft betydelig indflydelse på de videnskabelige udveksling. Og Frankrig blev som et af de første lande inddraget i det pludselige krigsudbrug fra Tysklands side - krigserklæringen kom d. 3.8.1914. Frankrig blev angrebet bl.a. gennem Belgien på den front, der senere skulle blive til Vestfronten.

Rent strategisk greb den franske og den tyske regering krigen an på 2 væsentligt forskellige måder. I Frankrig satsede man på at holde Vestfronten ved den næsten traditionelle skyttegravskrig, mens man i Tyskland gjorde de første skridt i retning af "den totale krig". Dette medførte, at videnskabsfolk ikke som i Frankrig blev sendt til fronten, men blev inddraget i krigen gennem det videnskabelige arbejde. Dette resulterede bl.a. i, at tyskerne som de første i april 1915 kunne anvende krigsgas, og både fly og ubåde fandt for første gang anvendelse i krigssammenhæng.

Den begyndende videnskabeliggørelse af krigen, som fandt sted i Tyskland, styrkede de videnskabelige miljøer frem for at stille dem på "stand by", som det skete i krigens begyndelse i Frankrig. De store tab, som Frankrig havde, ramte naturligvis også den generation af franske matematikere, der skulle føre arbejdet videre efter Picard, Montel, Borel, Hadamard, Denjoy, Lebesque osv. (Dieudonné, 1968/70, p. 135) - Der kom således et brud i den vidensakbelige udvikling, da den nye generation under krigen blev reduceret til ca. en trediedel.

Situationen for det matematiske miljø i Frankrig var, at der ikke var folk, der var up-to-date med de nye ideer rundt omkring bl.a. i Tyskland. Miljøerne blev ledet og præget af den ældre generation, der - i Kuhn'sk forstand - ikke var fulgt med de nye strømninger og derfor var 20-30 år bagud. (Om Kuhn kan man læse f.eks. Kragh m.fl., 1981, p. 165 eller Christensen m.fl. 1983, p. 20 -.)

Dieudonné (1968/70, p. 135) skildrer situationen således:

> "So we had excellent professors to teach us the mathematics of let us say up to 1900, but we did not know very much about the mathematics of 1920. As I said before, the Germans went about things in a different way, so that the German mathematics school in the years following the war had a brilliance which was altogether exceptional. .... Not only this, but we also knew nothing of the rapidly developing Russian school, the brilliant Polish school, which had just been born, and many others. .... We had been closed in on ourselves and, in our world, the theory of functions reigned supreme."

Der var to måder at komme ud af denne isolation på. Den første var gennem de årlige seminarer afholdt under ledelse af Hadamard. Formålet med disse seminarer var at give et indblik i det løbende matematiske arbejde. Seminarerne fortsatte i flere år og udviklede sig efterhånden til en international begivenhed, der tiltrak matematikere fra mange steder. Efter Hadamard trak sig tilbage i 1934, fortsatte seminarerne under ledelse af G. Julia, men det var ikke tilstrækkeligt til at tilfredsstille de unge matematikeres nysgerrighed, så derfor benyttede flere af dem bl.a. A. Weil, C. Chevalley og J. Dieudonné sig af muligheden for at komme til udlandet for også der at få indblik i de nye ideer, der voksede frem i mellemkrigsårene.

Den franske matematik i samme periode var, på trods af seminarerne, ikke særlig åben for nye impulser. Den eneste disciplin, hvor franskmændene var med blandt de førende, var ifølge Dieudonné (1968/70, p. 136) funktionsteori.

Han siger videre:

> "... if we continued in this direction, France was sure to arrive at a dead end ... This would break a two-hundred-year-old tradition in France, because from Fermat to Poincaré the greatest of the French mathematicians had always had the reputation of being universal mathematicians, as capable in arithemetic as in algebra, or in analysis, or in geometry."

Sådan så situationen ud for denne gruppe af unge matematikere, der så det som deres "opgave" at samle matematikken i Frankrig, og at føre traditionen om universalitet videre i den franske matematik.

Situationen i perioden efter 1. Verdenskrig var imidlertid præget af spredt fægtning og udvikling i utallige områder af matematikken.

> "Around 1930, it had become obvious to most research mathematicians that it was imperative to take stock and put some order in the giant strides which had occurred since 1890 in almost all parts of mathematics." (Dieudonné, 1982 a, p. 618)

Man kan være "universalist" på to måder. Enten ved at være polyhistor, som naturvidenskabsmændene i Antikken eller i Renaissancen, eller ved - som det var tvingende nødvendigt i Bourbaki projektet - at dyrke de tværgående fundamentale træk i matematikken.

> "Bourbaki's refusal to consider mathematics as a series of isolated compartments was from the beginning one of his fundamental tendencies." (Dieudonné, 1982 a, p. 618)

Ideen med at samle den forgrenede videnskab omkring fundamentale træk er ikke ny. Forsøgene i attenhundredetallet med funktioner som samlende struktur eller Bertrand Russell og Alfred Whiteheads forsøg i værket Principia Mathematica (1910-1913) på at reducere matematik til logik er eksempler på dette.

Hvordan dette i Bourbakis version mere præcist kom til udtryk, vil vi vende tilbage til i kapitel 3.

1.1.2. Institutionshistorien i Frankrig og Tyskland

Op gennem det 18. og 19. århundrede var der både i Frankrig og i Tyskland sket en betydelig institutionalisering af den matematiske aktivitet - både i undervisning og i forskning. Forskellige ideologier har dog præget udviklingen i de to lande, hvilket har betydet, at de videnskabelige miljøer er opbygget omkring forskellige traditioner.

Industrialiseringen affødte et behov for uddannede folk med bestemte kundskabeer til industrien, til militæret og især til offentlig administration, og dermed også et behov for lærere, der kunne uddanne disse folk. Dermed blev kravene til de højere læreanstalter mere præcise, end de havde været tidligere, og resultatet blev, at undervisning og forskning blev lagt i faste rammer.

I Tyskland prægede ny-humanismen udviklingen og resultatet blev, at den rene abstrakte matematik fik grobund i en voksende forskning på de tyske universiteter. Matematikpensum blev udvidet og der blev lagt vægt på selvstændigt arbejde af de studerende. (Christensen m.fl., 1983, p. 98) På de tyske tekniske skoler var slagsmålet mellem fortalere for den rene matematik og fortalere for anvendt matematik større, og resultatet blev en undertoning af den rene matematik på disse skoler, men dette påvirkede ikke de store fremskridt på universiteterne.

I Frankrig derimod havde de tekniske skoler med Ecolé Polytechnique i spidsen en langt større andel i den matematiske udvikling i forhold til universiteterne. Det franske universitet i Paris havde de sidste godt 500 år dannet forbillede for univeristeter i Europa, man på det naturvidenskabelige område var de tekniske skoler og militærakademierne også indflydelsesrige. Der foregik således også forskning i "ren" matematik på de tekniske skoler og på akademierne.

Det var således et led i aktiviteterne på Ecole Polytechnique, at der blev skrevet lærebøger i f.eks. analyse, hvori der præsenteredes nye forskningsresultater. Men samtidig var disse bøger jo lærebøger, og derfor forsøgte de at bygge analysen op på et stadig mere solidt grundlag. (Christensen m.fl., 1983, p. 158-)

Aktiviteterne i Frankrig rækker således langt ud over det tekniske, men tilknytningerne til anvendelserne lå i institutionen og i traditionen. Denne forskel i prioritering betød ifølge Christensen m.fl., 1983, p. 99, at de tyske universiteter omkring 1870 havde overhalet de franske matematiske institutioner, både hvad forskningsresultater og anseelse angik.

1.1.3. De internationale grundlagsdiskussioner

I perioden op til 1934, hvor Bourbaki gruppen startede, havde den matematiske verden været udsat for et par alvorlige oplevelser. I kraft af udviklingen, som vi netop har beskrevet i det foregående afsnit, var der for alvor kommet gang i den ren matematik, og dette medførte samtidig en fokusering på matematikkens grundlag. Arbejdet med denne fundering af matematikken på f.eks. G. Cantors naive mængdelære eller G. Freges logicistiske program med at reducere aritmetik (og dermed matematik) til logik afklarede ikke grundlagsproblemerne. Derimod afsløredes en række paradokser ("anomalier" eller "kontradiktioner") inden for disse fundamentale systemers rammer.

Tidligere havde arbejdet med at belyse parallelaksiomets rolle i Euklids geometri ført til, at forskellige udgaver af ikke-Euklidsk geometri var udviklet. Disse viste sig at være lige så konsistente systemer som Euklids. Herefter er det så til diskussion hvilket af disse konsistente systemer, der er det "rigtige" beskrivelse af virkeligheden.

Disse to udviklinger medførte to diskussioner, der var kendetegnende for perioden indtil 2. Verdenskrig. For det første: på hvilket konsistent grundlag skal matematik opbygges - og er det overhovedet muligt? og for det andet: hvilken status har den matematiske erkendelse som erkendelse om verden?

Diskussionerne har det fælles udgangspunkt i aksiomerne. Aksiomerne kan enten være "selvindlysende sandheder" (i forhold til virkeligheden) eller de kan blot være vilkårlige udgangspunkter, hvis indbyrdes konsistens så måtte undersøges. Situationen medførte, at der udkrystaliseredes forskellige "skoler" for bud på problemernes løsning, og ofte blev de to spørgsmål forsøgt besvaret under et. Vi vil ikke her gå i dybden, men henviser igen til Davis m.fl., 1981, p. 317-344.

David Hilbert var en fortaler for dette sidste synspunkt, og det er denne "formalistiske" synsvinkel, der delvist er overtaget af Bourbaki. Dette vil vi vende tilbage til i kapitel 2.

Nu har vi beskrevet forskellige niveauer i den historiske situation op til perioden efter 1. Verdenskrig, hvor Bourbaki gruppen fik deres grundlæggende påvirkninger og dannelse. Hvordan dette kom til udtryk, vil vi se på i næste afsnit.

1.2. Intentionerne bag Éléments de Mathématique

Udgangspunktet for Bourbaki gruppen var således klart: den universalitet, der tidligere havde eksisteret i fransk matematik, skulle genrejses. Det var dette, der samlede gruppen, og det var målet med deres fælles arbejde. Det stod klart, at det ikke alene var nok at videreføre Hadamard-seminarerne (afsnit 1.1.1.), da disse i sig selv kun var en rodet gennemgang af nye tendenser i matematikken. Seminarformen syntes for ustruktureret og for usammenhængende. Alternativet var derfor at skrive en bog.

> "This consisted of studying in a more systematic manner the great new ideas which were comming in from all directions. This is when the idea of drawing up an overall work which, no longer in the shape of a seminar, but in book form, would encompass the principal ideas of modern mathematics. From this was born the Bourbaki treatise." (Dieudonné, 1968/1970, p. 136)

Det konkrete initiativ udspringer ifølge Halmos (1957, p. 93) af en diskussion mellem André Weil og Jean Delsarte om, hvordan man bør undervise i matematisk analyse. Det førte til, at en gruppe på ca. 10 unge franske matematikere - næsten alle tidligere studerende på École Normale Supérieure i Paris - i vinteren 1934-35 samledes for sammen at skrive en lærebog i analyse (Cartan, 1958/1979, p. 176).

Dette projekt ligger klart i forlængelse af den tradition fra École Polytechnique, hvor der blev udført et stort arbejde netop med at give en grundlæggende fremstilling i lærebøgerne af den matematiske analyse (jfr. afsnit 1.1.2.).

Dette udgangspunkt har på et par punkter præget værket Éléments de Mathématique. For det første er gennemgangen suppleret med øvelser af varierende sværhedsgrad, og bøgerne har da også været anvendt til undervisning forskellige steder. Desuden har den første del af serien overskriften "Les structures fondamentales de l'analyse", men det er analyse i meget bred forstand.

Det blev imidlertid hurtigt klart, at projektet rakte videre end til analysen og det voksede i retning af at samle al matematik i et velordnet hierarki:

> "My efforts during the last fifteen years .... have been directed wholly towards a unified exposition of all the basic branches of mathematics, resting on as solid foundation as I could hope to provide." (Bourbaki, 1949, p. 1)

Dette er smukt foreneligt med ideen om universalisme i den franske matematiktradition. Den eksplosive vækst i den moderne abstrakte matematik (som beskrevet i afsnit 1.1.1.) måtte systematiseres og bringes ind som en integreret del i den franske matematikverden. Dette kunne ske enten på lærebogsplan - dvs. ved at ændre forskeruddannelsen eller ved at ændre forskningspraksis hen imod de generelle fundamentale grene af matematikken.

Konkret betyder det, at ideen om at udforme Éléments de Mathématique som et gennemarbejdet didaktisk værk forskydes i retning af at se værket som en håndbog eller en værktøjskasse for aktive matematikere.

Herefter blev det et spørgsmål om selektion af discipliner og teoremer, men efter hvilke kriterier?

Med udgangspunkt i den historiske situation i mellemkrigsårene, som vi har beskrevet i de 3 afsnit under 1.1., var der forskellige valg, der måtte træffes ved udarbejdelsen af dette værk. Det var først og fremmest spørgsmålet om at lade sig inspirere af, hvordan udviklingen var gået i andre lande, og at bringe de nye generelle og abstrakte begreber ind i den franske matematik. Dette uddyber vi i kapitel 3. Herunder er der forholdet mellem den rene og den anvendte matematik. Dernæst er der spørgsmålet om en konstruktiv stillingtagen i debatten om grundlagsproblemerne og til hvordan forholdet matematik/virkelighed skal opfattes. Bourbakis bud på dette ser vi på i kapitel 2.

Resultatet bliver en fortløbende statusopgørelse over væsentlige dele af matematikken. I en bibemærkning skal nævnes, at en af projektets funktioner dermed bliver, at opdage (og eventuelt at lukke) eventuelle oversete "huller" i de de discipliner, som Bourbaki vælger at tage op. (Tornehave samtale 1984).

Begrundelsen for, hvorfor gruppen entydigt valgte at beskæftige sig med ren matematik, er ikke klar . Dieudonné hævder (1982,a, p. 618), at det alene skyldtes manglende interesse og kompetence fra deltagerne, at de ikke beskæftigede sig med anvendelsesaspekterne.

Vi ser dog også den mulighed, at de har set resultaterne specielt i Tyskland af de forskningsmiljøer, der var opbygget på universiteterne. Det var således klart, at det var de "isolerede" miljøer på universiteterne, der skulle styrkes frem for miljøerne på de polytekniske skoler; hvis Frankrig skulle genskabe sin position som international matematiknation.

1.3. Bourbaki gruppens arbejdsform og disciplin

Gruppen startede som nævnt i vinteren 1934-35 på initiativ af André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chevallier og Henri Cartan (Halmos, 1957, p. 94), men voksede hurtigt til ca. 10 "medlemmer" (Cartan, 1958/1979, p. 176). Udvidelsen sker alene ved at unge "lovende" matematikere inviteres med til møderne, men hvis de ikke gør sig bemærket ved konstruktive forslag, så der det ud af klappen. Antallet af medlemmer synes at variere mellem 10 og 20 - overvejende franskmænd og amerikanere - men det er ikke til at få overblik over. (Halmos, 1957, p. 94).

For at sikre nyskabelser og kontakt til de nyeste udviklinger har man i gruppen en regel om, at man ved sit 50. år "pensioneres" fra gruppen. På denne måde sikres dels progression, dels undgås en hæmmende respekt for senile og distingverede matematikere.

Hvis vi regner med et gennemsnit på 15 mand i gruppen og med en gennemsnitstid i gruppen på 25 år (fra det 25. til det 50. år - det er meget højt sat), svarer det til, at mindst 30 matematikere har været fast knyttet til Bourbaki.

I den nyeste artikel, vi har (Dieudonné, 1982 a, p. 623), fremgår det, at der stadig er liv i Bourbaki - selv om de nuværende ældste medlemmer må være født efter det år, hvor de første medlemmer af gruppen startede det endeløse arbejde.

Arbejdet i forfatterkollektivet er rigtigt gruppearbejde. Styrken ligger i, at de forskellige synsvinkler på et emne kan syntetiseres til et gennemarbejdet værk, men uden kanter og prestigepræg.

Følgende beskrivelse af gruppens arbejdsform bygger primært på (Cartan, 1958/1979, p. 176; Dieudonné, 1968/1970, pp. 141-142).

For at udnytte gruppearbejdets fordele må alle deltagerne være med ved behandlingen af alle afsnit. Gruppen mødes 3-4 gange om året (i starten op til hver måned) for at diskutere kommende aktiviteter. På disse kongresser planlægges de næste udgivelser og revisioner af tidligere værker. Enkelte påtager sig at skrive første udkast til et nyt kapitel og dette oplæg distribueres, når det er færdigt til de øvrigt. På den følgende kongres læses udkastet højt og samtlige beviser gennemgås. Det fremgår af beskrivelserne, at dette ikke går stille af, men foregår højlydt og heftigt.

Herefter er der en ny, der påtager sig at omredigere oplægget efter de nye retningslinier og sådan fortsætter processen, til man efterhånden er trætte af at se på den del af bogen, og værket ryger til trykning. Det tager i gennemsnit 8-12 år for et kapitel at nå igennem denne proces.

Det er et princip for dette arbejde, at alle, der deltager i redigeringen af de nye kapitler, har absolut vetoret, og intet bliver derfor godkendt, før alle på kongressen har accepteret netop den fremstilling af kapitlet.

Det bliver derfor et krav til alle i gruppen, at de for en tid sætter sig ud over det område, hvor de er eksperter for at kunne deltage i bearbejdningen. De må starte fra bunden på den aktuelle disciplin for at få et fundamentalt kendskab til de nye begreber og metoder inden for dette område.

På denne langsommelige og trættende måde er adskillige hyldecentimeter efterhånden blevet fyldt med værket Éléments de Mathématique.

1.4. Bourbakis arbejder

Som tidligere skitseret, kan Bourbakis arbejde deles i 3 kategorier:

i) Éléments de Mathématique
ii) (Om-) artikler
iii) Bourbaki-seminarerne

ad i) Det væsentligste af Bourbakis arbejde er selvfølgelig selve Éléments de Mathématique. Værket er opdelt i 2 dele, der hver er opdelt i bøger. Første del bærer overskriften: "Les structures fondamentales de l'analyse", mens der ikke er en fælles overskrift for bøgerne i anden del.

Første del er opdelt i 6 "bøger" med almindelig kapitelopdeling. Hvert kapitel er så igen opdelt i sektioner. En bog kan ofte udkomme i flere bind - vel mest afhængig af ydre omstændigheder.

Oversigten bag i projektet er primært lavet ud fra opslag i Mathematical Review (1940-1984). Af oversigten fremgår det, hvornår de forskellige udgaver er udkommet. Det fremgår tydeligt, at bøgerne ikke er udkommet i den "deduktive" rækkefølge, som nummereringen antyder. Det første bind, der udkom, var således Éléments de Mathematique III, 1,2.

Nogle af bøgerne falder lidt udenfor. Det er de såkaldte "Fascicule de résultats", der snarere er en slags encyklopædi. Desuden udkom i 1960 Éléments d'historique des mathématiques.

ad ii) Bourbaki har kun undtagelsesvis deltaget i debatten om matematik, hvilket er noget i modsætning til, hvad man kan sige om enkelte medlemmer af gruppen.

> "Bourbaki has never engaged under his name, in polemics with the "outside world" ... I think this refusal of all discussion or controversy stems from the belief that a mathematical text has to stand

> or fall on its own merits, and should not need any advertising - an attitude which can be summarised as "take it or leave it." (Dieudonné, 1982 a, p. 620)

Bourbaki har udgivet 2 væsentlige "programartikler" (1949) og (1948/'50). I den første præsenterer Bourbaki sit pragmatiske forhold til matematikkens grundlag (jfr. kapitel 2) og i den anden gør Bourbaki rede for sin strukturelle opfattelse af matematikkens arkitektur (jfr. kapitel 3).

<u>ad iii)</u> Endelig har Bourbaki-gruppen stået som arrangør af en række seminarer under navnet "Seminaire Bourbaki", der har kørt tre gange om året siden 1948. Bourbaki-seminarerne er - i modsætning til kongressen - åbne for alle. Seminarerne er en videreførsel af den tradition Hadamard startede for at præsentere den (mest) moderne matematik for franske matematikere. Ved hvert seminar er der normalt 6 forelæsninger, med detaljerede gennemgange af de nyeste arbejder - udvalgt af Bourbaki-gruppen.

Papirer fra seminarerne bliver en gang om året udgivet som notesamlinger, men da seminarrækken må have rundet de 600 oplæg, er dette blot en uoverskuelig samling af papirer. Indholdet i seminarerne repræsenterer i udstrakt grad - "The Bourbaki Choice", som vi skal gennemgå det i kapitel 5 (Dieudonné, 1979, p. 28).

2. GRUNDLAGSHOLDNINGEN

For at kunne gennemføre Bourbakis program og rekonstruere det matematiske bygningsværk blev det nødvendigt for Bourbaki at eksplicitere, hvad grundlaget skulle være. Bourbaki har omhyggeligt beskrevet det grundlag, som Éléments de Mathématique hviler på. En fremstilling af dette grundlag findes naturligt nok i de to første kapitler af Éléments de Mathématique (EM I, 1 og 2).

Derudover har Bourbaki som et indlæg i debatten om matematikkens grundlag skrevet en artikel i "Foundation of Mathematics for the Working Mathematician" (Bourbaki, 1949). Af disse to kilder fremgår det, hvad Bourbaki anser for det nødvendige og tilstrækkelige grundlag for opbygning af de væsentligste dele af den eksisterende matematik.

Inden vi til sidst i dette kapitel nærmere beskriver, hvad grundlaget består af og på hvilken måde, det kan danne basis for opbygningen af Éléments de Mathématique, vil vi indledningsvis behandle den historiske baggrund for Bourbakis grundlagsholdning

2.1. Den formalistiske reaktion på grundlagskrisen

I slutningen af det 19. århundrede så det ud til, at den elementære mængdeteori eller Cantorianske mængdeteori efter G. Cantor kunne udgøre grundlaget for hele matematikken (dvs. hovedsagelig det vi nu kalder aritmetik og analyse (Davis 1981, p. 224)). Men det viste sig bl.a. da Frege forsøgte at opbygge aritmetikken på grundlag af mængdelære og logik, at Cantors mængdebegreb ("An ability collection of distinct objects") gav anledning til selvmodsigelser (kontradiktioner). Det bedst kendte eksempel, der påviser, at den Cantorianske mængdeteori er inkonsistent (dvs. ikke modsigelsesfri), er Russells paradoks efter Bertrand Russell (Davis m.fl., 1981, p. 332).

Men der dukkede i det hele taget en lang række paradokser op omkring århundredeskiftet. Nogle af de vigtigste var Cantors kardinalitetsparadoks og Skolem's paradoks (Fraenkel m.fl., 1973, p. 303). Det var disse kontradiktioner, der i Kuhn'sk forstand kan betragtes som anomalier i grundlagsforskningen, som gav anledning til matematikkens grundlagskrise i den første trediedel af dette århundrede.

Tidligt i denne grundlagskrise opstod den formalistiske skole - en skole af unge matematikere ledet af David Hilbert. Denne skole havde bl.a. konsistensproblemet på programmet. Den formalistiske skole var kun ét blandt mange forsøg på at angribe grundlagsproblemet. Vi beskriver netop denne skole, fordi den har leveret et væsentligt udgangspunkt for Bourbaki.

Grundlagskrisen vedrørte naturligvis først og fremmest "the context of justification" (bevisførelse). Uden et fælles accepteret fundament, hvorpå al matematisk bevisførelse skal bygge, er det nemlig til stadighed til diskussion, om et givent teorem er bevist eller ej. For at løse dette problem og sikre matematikkens videnskabsstatus var det nødvendigt at etablere et konsistent fundament for matematikken, der hviler på ikke-kontroversielle forudsætninger; således at en matematisk tekst har samme mening, uanset hvem der læser den, og således at det er muligt med objektive metoder at afgøre, om teksten er korrekt.

Fremkomsten af de ikke-Euklidiske geometrier (for en kort præsentation af disse se Davis m.fl.,1981, pp. 217-223) i sidste halvdel af det 19. århundrede med førte to problemer. For det første var der problemet med at acceptere relevansen af at studere systemer, der ikke umiddelbart havde en parallel i en fysisk fortolkning. Og for det andet problemet omkring disse systemers konsistens - når aksiomerne ikke var verificerbare ved en konfrontation med den fysiske verden.

> "Avec l'apparition au XIX^{e} siecle de théories mathematiques sans relation avec l'expérience sensible .... s'était posé le probléme de savoir si les axiomes d'une telle théorie ne risquaient pas conduire a une contradiction." (Dieudonné, 1977, p. 226)

Formalisternes fundamentale ide til løsning af grundlagsproblemet var stærkt inspireret af det relative konsistensbevis for ikke-Euklidisk geometri af Beltrami i 1868 (Fraenkel m.fl., 1973, p. 276), hvor aksiomerne frigøres fra enhver intuitiv interpretation. For Hilbert var aksiomerne ikke idealiserede beskrivelser af virkeligheden, men udelukkende ubeviste antagelser, der skulle tjene som byggesten i beviserne for matematiske teoremer.

Formalismen indebærer dermed, at de symboler og begreber, der indgår i matematiske argumenter, er fri for enhver ontologisk mening (men selvfølgelig ikke uden matematisk indhold). Diedonné beskriver (1971, p. 261) matematikken efter den konsekvente gennemførelse af denne opfattelse af aksiomerne:

> "... mathematics becomes a game, whose pieces are graphic symbols distinguished from each other by their forms; with these symbols we make groupings which will be called relationships or terms according to their form. By virtue of certain rules, certain relationships are discribed as true; other rules permit the construction of true relationships either from any relationships whatsoever or from other true relationships. The essential point is that these rules are of such a nature that in order to verify that they are being observed, it is sufficient to examine the form of the groupings which come into play."

Med dette bestyrkes behovet for at vise disse formelle systemers konsistens. Dette bliver derfor Hilberts program. Målet for Hilbert var - som han formulerede det i 1917:

> "... it must be shown that the standard mathematical proof procedures are strong enough to derive all of classical mathematics - including all of Cantor's set theory - from suitable axioms but not so strong as to derive a contradiction." (Fraenkel m.fl. 1973, p. 276)

Hilberts program består faktisk af tre dele, nemlig

1. En formel definition af et "matematisk bevis"

2. En fastlæggelse af et passende grundlæggende aksiomsystem, "suitable axioms"

3. Et konsistens-bevis for aksiomsystemet, dvs. et bevis for, at der ved korrekt bevisførelse (i henhold til pkt. 1) med anvendelse af aksiomerne fra pkt. 2 ikke opstår selvmodsigelser.

Det væsentlige for Hilbert var at undersøge matematikkens konsistens. Det aksiomatisk deduktive program i punkt 1 og 2 er kun en forudsætning for konsistensundersøgelsen.

Ad 1. Hvad skal man forstå ved et matematisk bevis? For at kunne præcisere dette er det nødvendigt at beskrive en række forhold og begreber, f.eks. hvad er en matematisk påstand? Hvad udtaler matematiske påstande sig om? Hvordan slutter man fra en påstand til en anden? Hvad vil det sige, at en påstand er sand? osv.

For at kunne svare på alle disse spørgsmål mener Hilbert, at det er nødvendigt at definere et formelt sprog, der kan udtale matematiske påstande, hvilket igen kræver, at man har logisk hold på, hvad et formelt sprog egentlig er. Som vi skal referere senere i dette kapitel, kan et sådant formelt sprog konstrueres.

I beskrivelsen af denne formelle definition af et matematisk bevis - her givet af Herbrand, en erklæret fransk hilbertianer - fremgår det,at formalisterne kun tillader endelige argumenter:

> "We understand by an intuitionistic (i.e. finitary) argument an argument that fulfills the following conditions: one always deals with a finite and determined number of objects and functions only; these are well defined, their definition allowing the univocal calculation of their values; one never affirms the existence of an object without indicating how to construct it; one never deals with the set of all the objects x of an infinite totality; and when one says that an argument (or a theorem) holds for all these x, this means that for every particular x it is possible to repeat the general argument in question which should then be treated as only a prototype of these particular arguments." (Fraenkel m.fl., 1973, p. 278)

Ad 2. Her er der nærmest tale om at skabe en fælles konsensus blandt matematikere om, hvilket grundlæggende aksiomsystem, der giver det mest hensigtsmassige redskab for udviklingen af matematiske teorier. Det er siden Zermelo-Fraenkels (ZF) aksiomsystem for mængdeteorien i forskellige varianter, der er blevet alment accepteret som mængdeteoriens aksiomatiske grundlag.

Ad 3. Det lykkedes aldrig for Hilbert at etablere et konsistensbevis for matematikken. Vi ved nu som en konsekvens af Kurt Gödel's berømte ufuldstændighedsteorem fra 1931, at det er umuligt at bevise konsistensen af matematikken. (Fraenkel m.fl. p. 310)

Enhver formel teori T, der er righoldig nok til at indeholde påstande om sig selv (f.eks. mængdelæren) vil rumme uafgørelige sætninger f.eks. sætningen "T er konsistent" (inden for mængdelæren er konsinuumshypotesen et andet eksempel på en uafgørelig sætning). Det er derfor muligt inden for f.eks. mængdelæren at formulere sætninger, der hverken kan bevises eller modbevises. Gödels teorem siger videre, at hvis man forsøger at fuldstændiggøre systemet, vil det blive inkonsistent. Hilberts ide med at bevise det formelle systems konsistens er dermed dømt til at mislykkes.

Dette kan illustreres således:

Klassen af sætninger i T

Mængden af beviselige sætninger	"T er konsistent"	Mængden af modbeviselige sætninger

Figur 2A.

2.2. Formalismen som inspiration til Bourbaki

I det foregående afsnit har vi kun lagt vægt på at præsentere formalismens modtræk over for grundlagsproblemerne. Der er imidlertid mange andre "skoler", der bidrager med fortolkninger af, hvilke konsekvenser man bør drage af grundlagsproblemerne. Men deltagerne i Bourbaki-projektet nævner ofte selv Hilbert som en foregangsmand for deres matematikopfattelse. Og formalismen rummer da også visse fælles elementer med det, som vi senere skal se som den bourbakistiske strukturalisme.

Vi kan skarpt skelne mellem områder, hvor Hilbert har været en inspiration for Bourbaki, og andre områder hvor der kommer afgørende forskellige opfattelser til udtryk.

Det første punkt, hvor Hilbert har bidraget til grundlæggelsen af en tradition, som følges op af Bourbaki, er den aksiomatiske deduktive forms betydning i matematiske tekster. Bourbaki overtager og viderefører denne praksis fra Hilbert.

> "This conception, called formalist, is essentially due to Hilbert ... Hilberts essential thesis, which, as we have said above, is ours, too, states that clear thinking can exist only with reference to determinate objects of finite and experimental number." (Dieudonné, 1971, p. 259)

Ovenstående citat er imidlertid en fordrejning af Hilberts program. For Hilbert var den aksiomatisk deduktive form en nødvendig forudsætning for det væsentlige; nemlig at undersøge konsistensen af det matematiske system.

Det er på dette punkt, at der er et afgørende brud mellem Hilbert og Bourbaki. Hilbert mente, at etableringen af matematikkens konsistens var en forudsætning for, at matematikken fortsat kunne bevare sin status som eksakt videnskab. Bourbaki har på dette punkt en helt igennem pragmatisk holdning, der tydeligt kommer til udtryk i næste afsnit.

For Bourbaki betyder risikoen for at kontradiktioner kan opstå intet. Hvis de skulle fremkomme, kan aksiomerne blot reformuleres, så kontradiktionen undgås. Problemerne med grundlaget for matematikken er derfor ikke interessante for bourbakisterne, men blot en forudsætning for arbejdet i de komplekse abstrakte matematiske discipliner. Dette kommer tydeligt til udtryk i:

> "... Bourbaki's attitude towards the problem of "foundations": it can best be described as total indifference." (Dieudonné, 1982 a, p. 618)

Tilbage er blot at vise, hvordan Bourbaki faktisk viderefører den aksiomatiske del af formalismen og forener denne med den pragmatiske grundholdning.

2.3. Pragmatik og formalisme

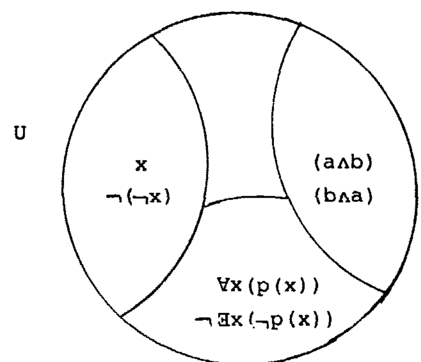
For Hilbert var det aksiomatisk-deduktive program en forudsætning for konsistensundersøgelsen. For Bourbaki er det aksiomatisk-deduktive program en forudsætning for den pragmatiske grundlagsholdning, som Bourbaki har. For at kunne gennemføre Bourbaki-programmet er det altså nødvendigt først at konstruere et formelt sprog, hvori matematikken kan formuleres. Et sådant formelt sprog kan konkretiseres ved at præcisere, hvilke objekter (tegn og symboler), sproget indeholder, hvilke sammensætninger af disse objekter, der er lovlige (sprogsyntaks) og endelig hvilken betydning man vil tillægge forskellige lovlige kombinationer af sprogets objekter (sprogsemantik).

Vi vil ikke gennemgå dette formelle sprogs opbygning i detaljer, men skitsere den form, som denne opbygning har dels i Eléments de Mathématique (I, 1 og 2) dels i programartiklen "Foundations of Mathematics for the Working Mathematician" (Bourbaki, 1949).

i) For det første fastlægges betydningen af en række symboler og objekter, der skal være sprogets "ord". Dette omfatter variable, symboler for de matematiske grundrelationer: =, $\in$; logiske konnektiver: negation, konjunktion, disjunktion implikation og biimplikation, (hhv. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$); paranteser og funktionssymboler for forskellig operationer.

ii) Dernæst skal det beskrives, hvorledes disse ord kan sammensættes til at danne lovlige sætninger/udsagn. Man kan herefter afgøre, om en tekst er syntaktisk korrekt. Man kan danne udsagn ved f.eks. at sætte variable på hver side af tegnene = eller $\in$; eller ved at kvantificere frie variable. Desuden kan udsagn dannes ved sammensætning af andre udsagn. Eksempler på udsagn er f.eks. $(x = b)$, $(\forall_x : (x = b))$, $(x = b \Rightarrow x > 7)$ osv.

iii) Herefter defineres en relation x syn y mellem to udsagn x og y fra mængden af lovlige udsagn U i sproget. Denne skal være en ækvivalensrelation, hvorved udsagnene i U klassedeles. Alle udsagn i en klasse har samme sandhedsværdi.



Figur 2B.

Relationen syn fastlægges gennem en række "regneregler", som bestemmer, hvilke sammensætninger af udsagn der er synonyme. Et par eksempler:

$$\neg(x \wedge y) \text{ syn } \neg x \vee \neg y$$
$$(x \wedge y) \wedge z \text{ syn } x \wedge (y \wedge z)$$

iv) Endelig opskrives en række regler, der angiver hvordan man ud fra sande sætnniger kan deducere nye sætninger.

Eksempler på sådanne regler er:

$(x \vee \neg x)$ er sand (tertium non datur)

$(x$ er sand og x syn $y) \Rightarrow y$ er sand
(syn overfører sandhed)

$(x$ er sand$) \Rightarrow (x \vee y)$ er sand

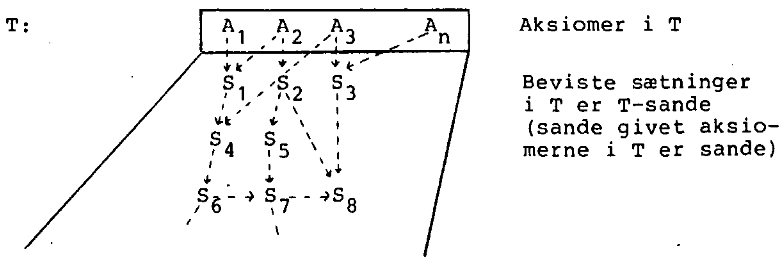
Bourbaki har hermed fastlagt et formelt matematisk sprog, i hvilket han kan udtrykke påstande om de matematiske strukturer. For at kunne anvende dette sprog fastlægger Bourbaki, hvad han vil forstå ved begreberne aksiomer, bevis og teori.

> "By a proof, I understand a section of a mathematical text, beginning with some relations and schemes of relations, which are called the hypotheses of the proof." (Bourbaki, 1949, p. 6)

Et matematisk bevis er derfor aldrig absolut. At en sætning er bevist, betyder i realiteten, at alle sandhedstilskrivninger, der gør forudsætningerne i beviset sande, også gør sætningen sand. Hvis P er et bevis for en relation R i denne forstand, siges R at være P-sand. En matematisk teori defineres herefter ved:

> "A theory is a section of a mathematical text, consisting of a number of proofs which are grouped together for convenience, e.g. because they all have some hypotheses in common; the latter are called the axioms of the theory." (Bourbaki, 1949, p. 7)

En teori T med sætninger S_i og aksiomer A_j kan illustreres således:



Figur 2C.

Hvis T er en teori, er T-sandhed relativt til sandhed af aksiomerne i teorien T på helt samme måde som P-sandhed er relativt til sandheden af forudsætninger i beviset P.

En teori T^+ siges at være en ekstention af T, hvis T^+ indeholder alle T's aksiomer plus nogle flere. Heraf følger, at T^+ sandhed er relativ til T sandhed og til sandhed af de til T tilføjede aksiomer.

For Bourbaki er det grundlæggende aksiomsystem det mængdeteoretiske. Systemet er grundlæggende, fordi de begreber og objekter, der defineres i mængdeteorien, skal være gennemgående i enhver overbygning i den matematiske teori (jfr. figur 3N). Som det fremgår af figur 2C, må der for enhver matematisk teori forudsættes en række aksiomer, som det formelle sprog kan udtale sig om.

Bourbaki har baseret mængdeteorien på en lettere modificeret udgave af Zermelo-Fraenkels (ZF) system. Den er beskrevet ud fra fem specielle aksiomer og et aksiomsskema, der indeholder både et foreningsmængde- og et udskiftningsaksiom.

De fem aksiomer er et ekstentionalitetsaksiom,

$$(\forall_x)(\forall_y)((x \subset y \text{ og } y \subset x) \Rightarrow (x = y))$$

et aksiom for ordnede par

$$(\forall_x)(\forall_{x'})(\forall_y)(\forall_{y'})(((x, y) = (x', y') \Rightarrow (x = x' \text{ og } y = y'))$$

og et aksiom for mængder af uordnede par, et aksiom for potensmængdedannelse og et for erklæringen af eksistensen af en uendelig mængde.

Dette er det aksiomatisk-deduktive grundlag, som det er præsenteret af Bourbaki. Tilbage er så at vise, at matematikken kan realiseres ud fra disse givne formelle rammer, hvilket kun lader sig gøre ved rent faktisk at gennemføre en formel opbygning af matematikken.

> "On these foundations, I state that I can build up the whole of the mathematics of the present day; and, if there is anything original in my procedure, it lies solely in the fact that, instead of being content with such a statement, I proceed to prove it in the same way as Diogenes proved the existence of motion; and my proof will become more and more complete as my treatise grows." (Bourbaki, 1979, p. 8)

Det skitserede grundlag i Bourbakis formulering er et kraftigt værktøj. Givet dette grundlag, og hvis det aksiomatisk deduktive program følges, er problemet omkring kontradiktioner uinteressant for Bourbaki. Hvis problemet skulle opstå, at det vil være muligt at vise en inkonsistens i teorien, vil det umiddelbart være muligt at omformulere det aksiomatiske grundlag, så denne inkonsistens fjernes. Som Dieudonné og Weil siger det:

> "One may add that if some day it is shown that mathematics is contradictory, it is probable that we shall know which rule to attribute the result to, and that the contradiction will be avoided by leaving this rule out or modifying it suitably." (Dieudonné, 1971, p. 264)

> "We have learned to trace our entire science back to a single source, constituted by a few signs and by a few rules for their use; this is unquestionably an unassailable stronghold, inside which we could scarcely confine ourselves without risk of famine, but to which we are always free to retire in case of uncertainty or of external danger." (Weil, 1948/50, p. 297)

På denne måde går Bourbaki udenom det faktum, at uafgørlige sætninger eksisterer i sådanne formelle systemer - og nægter i hvert fald selv at medvirke til at efterspore dem. Dette resulteret i følgende udsagn om matematiske logikere:

> "What are they doing? On the one hand, they are exploring other logical systems ... The trouble is that it may be very interesting for them but no mathemati-

> cian as far as I know has ever found any use for these systems at all." (Dieudonné, 1979, p. 32)

(Dette betyder ikke ifølge Dieudonné, at der ikke er løst væsentlige problemer inden for disse nye systemer. Uafhængigheden mellem udvalgsaksiomet og kontinuumshypotesen - der er uafgørelig i ZF-systemet - er f.eks. vist ved hjælp af disse stærkere logiske systemer).

For Bourbaki som for Hilbert er det aksiomatisk-deduktive program blot en nødvendighed for at udføre det egentlige arbejde. Men dette består for Bourbaki i at arbejde med de fundamentale strukturer, der fremtræder på basis af dette aksiomatiske grundlag.

Bourbaki vælger derfor sit udgangspunkt (grundlaget) med dette for øje, hvilket resulterer i, at det kan få et tilfældighedspræg over sig, som det ses i denne kommentar af Halmos i anmeldelsen af Éléments de Mathématique (EM, I, 1-2) i Mathematical Rewiew 1955:

> "An important virtue of the work is that it exists. It is the first book, in any language, whose aim is to give a systematic development of axiomatic set theory, and, as such, it takes an appreciable step toward filling a deplorable gap in the literature ... the treatment exhibits an unusual compromise between frugality and extravagance with respect to symbols and axioms. For these reasons, the reviewer's (admittedly subjective) impression is that the work has a somewhat "ad hoc" character."

I begge de ovenstående to citater af Dieudonné og af Halmos fremgår det, at Bourbakis opfattelse af grundlaget blot er, at det er en nødvendighed for at kunne beskæftige sig med det interessante i matematikken. Dette kommer til udtryk i endnu en kendsgerning. Bourbaki anvender i udstrakt grad det naturlige sprog i den matematiske fremstilling. På den ene side er det aksiomatiske-deduktive program accepteret, men i praksis giver dette en ubrugelig og ulæselig fremstilling og derfor anvender Bourbaki f.eks. et aksiom som

"Il existe un ensemble infini"
(Éléments de Mathématique, I, 3, p. 45)

Dette bliver endnu tydeligere i de næste bøger af Éléments de Mathématique. (Se næste kapitel.) Det formelle sprog er imidlertid udviklet som en reaktion mod de tvetydigheder, der kan være i det naturlige sprog. Det er derfor tvivlsomt, om Bourbaki følger sit erklærede program og om det således vil være muligt så enkelt at korrigere for inkonsistenser, som Dieudonné (1971, p. 264) og Weil (1948/50, p. 297) siger i de ovenstående 2 citater.

3. STRUKTURALISME OG AKSIOMATISERING

Bourbaki anses for at være en af de mest indflydelsesrige repræsentanter for den strukturalistiske matematikopfattelse.

Det viser sig, at visse relationer mellem matematiske objekter går igen, selv om disse objekter udskiftes med andre objekter. Herved mister objekterne selv deres betydning, hvorimod det bliver det indbyrdes forhold mellem dem - relationerne - der bliver det essentielle, og det er netop det strukturalistiske synspunkt. For at opnå en overskuelig og sammenhængende fremstilling formulerer Bourbaki de fundamentale strukturer, som skal være de grundlæggende begreber i enhver matematisk disciplin.

Bourbaki giver selv en formel definition af begrebet "struktur" eller "arter af strukturer" (Éléments de Mathématique, I, 4), men vi vil her præsentere en enklere formulering af Bell (m.fl., 1977, p. 12).

Definition: En matematisk struktur

En struktur skal have følgende egenskaber:

(S_1). Der skal være en ikke tom klasse, der udgør strukturens domæne. Medlemmerne i denne klasse er strukturens individer.

(S_2). Der kan være forskellige operationer på domænet.

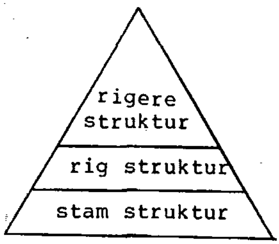
(S_3). Der skal præciseres grundlæggende relationer for denne struktur.

Eksempel:

1) Domænet kan være de naturlige tal, og nogle operationer (kompositioner) er f.eks. addition og multiplikation. En grundlæggende relation på dette område er f.eks. identiteten.

En struktur danner grundlaget for en disciplin. Hvis strukturen opfylder flere aksiomer, siges strukturen at være rigere.

En grundlæggende struktur (stamstruktur), der opfylder få aksiomer, giver anledning til en generel teori, mens en struktur, der er rigere, giver anledning til en mere specialiseret teori. Dette hierarki vil vi illustrere i det følgende ved følgende figur:



Figur 3A.

For Bourbaki er det centrale i den matematiske udvikling at syntetisere de mest grundlæggende generelle strukturer. Dette er et spørgsmål om valg mellem forskellige alternativer. På et andet niveau vedrører det valg mellem forskellige metoder til at bevise teoremer og opbygge eller definere objekter.

Opbygningen af matematikken på disse gennemgående strukturer medfører en opbygning fra det generelle til det specielle. Som Bourbaki selv skriver:

> "2. Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procede le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé." (EM, I, Mode d'emploi de ce traité)

De grundlæggende strukturer - der ifølge Bourbaki kan danne basis for de øvrige matematiske discipliner - kaldes for <u>moderstrukturer</u>, og opdeles i tre typer:

1) Ordningsstrukturer
2) Algebraiske strukturer
3) Topologiske strukturer.

Vi vil nu give en kort beskrivelse af disse tre strukturer efter følgende retningslinier.

Selve opbygningen er gennemgået med det formål at belyse strukturernes mest grundlæggende træk, samt at illustrere hvordan de kan gøres rigere ved at udbygge stamstrukturerne med yderligere aksiomer. Gennemgangen er derfor ikke et referat af de bind eller kapitler af Éléments de Mathématique, hvor disse strukturer præsenteres. Aksiomer og definitioner er heller ikke direkte oversættelser fra Éléments de Mathématique. Undertiden har vi også indskudt forklaringen i definitionerne, men vi henviser til, hvor i Éléments de Mathématique Bourbaki giver tilsvarende formuleringer.

3.1. Ordningsstrukturer

Én type af grundlæggende strukturer er ordningsstrukturerne. Her er der tale om en relation mellem to elementer x og y i en mængde X, som skal beskrive udsagn som "x er mindre end eller lig y" eller "x er større end eller lig y". Formelt bliver der tale om, at en relation er en delmængde af X x X. Det bemærkes, at ordningsrelationer o(x, y) ikke fastlægger det andet element entydigt - givet det første. Den enkleste ordning, der kaldes for præ-ordning, er en relation o(x, y) mellem de to elementer x og y i en mængde E, der opfylder aksiomerne (TRANS) og (REF).

Definition: Transitiv relation.

En relation o(x,y) kaldes transitiv, hvis den opfylder: $o(x, y) \wedge o(y, z) \Rightarrow o(x, z)$ (TRANS)
(EM, I, ER 25)

Definition: Refleksiv relation

relationen o(x, y) siges at være refleksiv, hvis o(x, x) er det Bourbaki kalder en identitet, dvs. at o(x, x) er sand uafhængig af x (REF).
(EM, I, ER 22 og 2)

Eksempler:

2) I de rationale tal er identiteten = en refleksiv og transitiv relation.

3) $(N, \uparrow)$, hvor $\uparrow$ betegner relationen "x går op i y", er også både transitiv og refleksiv.

Yderligere defineres en ny struktur ved følgende aksiomer.

Definition: Partiel ordning

Vi kalder en relation $o(x, y)$ mellem to elementer i en mængde E for en partiel ordningsrelation, hvis den opfylder følgende to aksiomer:

OR_a: relationen er transitiv

OR_b: relationen $o(x, y)$ og $o(y, x)$ er ækvivalent med $x = y$. Dette kaldes antisymmetri (ASYM). (EM, I, ER 25)

Hvis vi betragter en bestemt partiel ordningsrelation på en mængde E, siger vi, at E er ordnet ved denne relation og at relationen definerer en ordningsrelation på E.

Af OR_b følger at $o(x, y)$ er refleksiv, og partiel ordning er derfor en rigere struktur end præ-ordning, da den partielle ordning indeholder kravet om antisymmetri foruden præ-ordningen.

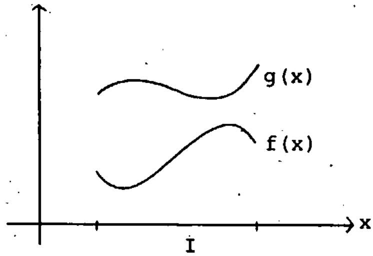
Eksempler:

4) $(Q, \geqq)$ og $(z, \geqq)$ kan vises at være partielle ordningsstrukturer.

5) Er x og y elementer i potensmængden P af en mængde, er $\subseteq$ en partiel ordning af P.

6) Eksempel 3 $(N, \uparrow)$ er også en partiel ordningsrelation.

7) Mængden af kontinuerte funktioner F på et interval I af R kan ordnes ved relationen $\leqq$. For to funktioner f og g i F skal $f \leqq g$ betyde, at det for alle x i I gælder, at $f(x) \leqq g(x)$. (Bourbaki, 1948/50, pp. 226-227). Se figur 3B.



Figur 3B.

Parallelt med at definere partiel ordning ved i realiteten at tilføje antisymmetri til præ-ordning definerer Bourbaki også en relation ved at tilføje et andet (komplementært - dvs. modsat) aksiom til præ-ordning.

Definition: Ækvivalens relation

En relation o(x, y) siges at være en ækvivalens relation, hvis o(x, y) er refleksiv, transitiv og opfylder:

SYM: o(x, y) og o(y, x) er ækvivalente (symmetri).

(ASYM er komplementært til SYM) (EM, I, II, 39-40)

Eksempler:

8) (Q, =) fra eksempel 1 opfylder helt klart også symmetriaksiomet og er således en ækvivalensrelation.

9) (U, syn), hvor U er mængden af udsagn i et formelt sprog og syn betyder "har samme sandhedsværdi som" er som nævnt i kapitel 2 en ækvivalensrelation.

Ækvivalensrelationen og den partielle ordning er dermed begge rigere strukturer end præ-ordningen. Men da ækvivalensrelationen og den partielle ordning indeholder komplementære aksiomer, er de sideordnede i hierarkiet.

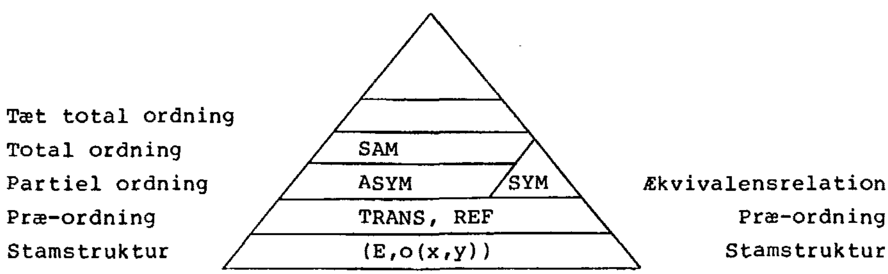
I definitionen af ordning er det ikke forudsat, at de to elementer x og y er sammenlignelige. Dette virker umiddelbart overraskende, men f.eks. er elementerne i eksemplerne 5, 6 og 7 ikke altid sammenlignelige. Dette betyder, at det ikke altid gælder at enten o(x,y) eller o(y,x).

Hvis vi forudsætter dette, må vi tilføje det som endnu et aksiom til vores stamstruktur.

Definition: Total ordning

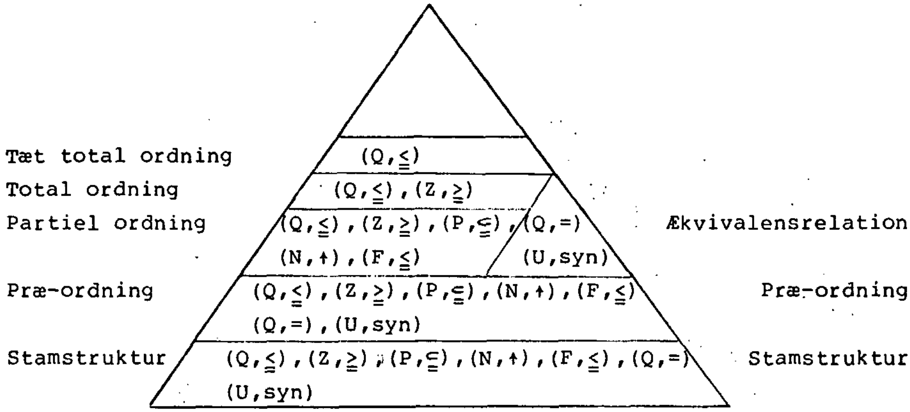
En partielt ordnet mængde X med o(x,y) siges at være totalt ordnet, hvis det for vilk. $x \in X$ og $y \in X$ gælder, at enten o(x,y) eller o(y,x) (denne egenskab kaldes ofte sammenhængende -- SAM). (EM, I. ER. 26-27)

Det bemærkes, at totalordning kun er en udvidelse af partielordning, men ikke af ækvivalensrelationen. Af eksemplerne 4-7 på partiel ordning er det kun eksemplerne i 4, der kan vises at være totalt ordnede strukturer. Man kan tilføje flere aksiomer og få endnu mere komplekse ordningsstrukturer. F.eks. tæt total ordning. Vi vil samle gennemgangen op i følgende figurer:



Figur 3C.

I figuren er nævnt de aksiomer en struktur skal opfylde på et givent niveau; udover dem der står nedenunder i hierakiet.



Figur 3D.

Eksemplerne 2-9 er her opført i hierakiet 3C som eksempler på de pågældende niveauer. Bemærk hvordan de mere grove strukturer sies fra på vej mod toppen

3.2. Algebraiske strukturer

En algebraisk struktur på en mængde af matematiske objekter E tager udgangspunkt i en relation mellem tre elementer, hvor det tredie element bestemmes entydigt af de to første. Man udfører en algebraisk operation på to elementer i E ved at forbinde dette elementpar med et element i E. Der er altså tale om en funktion, der til et element i E x E knytter netop et element i E. Formelt bliver en funktion altså en delmængde af (E x E) x E.

Definition: Regel for komposition

Givet en mængde E. Vi kalder en afbildning f af E x E i E for en kompositionsregel. f(x,y) er værdien af denne komposition for (x,y) $\in$ E x E. (EM. II. 1.1)

Denne komposition kan også skrives som $f(x,y) = x£y$. Vi kalder parret $(E,£)$ for en organiseret mængde og siger, at kompositionen £ er stabil inden for E. For sådanne kompositioner kan der gælde forskellige af de følgende love. Jo flere love eller aksiomer en komposition opfylder desto rigere en struktur bestemmer den.

Eksempler:

10) Er E et talrum er multiplikation og addition kompositionsregler, der til to tal $(x,y) \in E \times E$ tildeler hhv. tallene $x \cdot y$ og $x + y$ i E.

11) Afbildningerne $(x,y) \to x \cup y$ og $(x,y) \to x \cap y$ er to kompositionsregler på potensmængden af E, der kaldes hhv. foreningsmængde og fællesmængde.

12) + er en kompositionsregel på et vektorrum $(V,+)$

13) $\circ$ er en kompositionsregel på et funktionsrum F, der f.eks. består af mængden af bijektive funktioner, defineret på et givent interval $(F,\circ)$

Det afgørende her er ikke, om elementerne er tal, vektorer eller funktioner, heller ikke om der er tale om multiplikation, addition eller funktionssammensætning; det afgørende er, at komponering af to elementer i E altid giver ét element i E. Heraf udspringer det, at E får en bestemt struktur, for at dette kan lade sig gøre.

Den grundlæggende algebraiske struktur er altså blot en mængde E, hvorpå der er fastlagt en komposition £. Dette er stamstrukturen $(E,£)$, der normalt betegnes organiseret mængde; Bourbaki kalder dog denne stamstruktur for en magma. Denne simple struktur er ikke interessant i sig selv, men den udvides hurtigt til en magma unifere, der er en komposition med neutralt element i E.

Definition: Neutralt element.

Et element e i en mængde E, hvorpå der er givet en kompositionen £, siges at være neutralt, hvis alle x i E opfylder aksiomet: e£x = x£e = x(NEU). (EM. II. 1.12)

En magma kan være associativ og/eller kommutativ ved at opfylde følgende to aksiomer:

Definition: Den associative lov.

En kompositionslov x£y af elementer fra en mængde E siges at være associativ, hvis den - givet x,y og z i E - opfylder:
(x£y)£z = x£(y£z)(ASS). (EM.II. 1.4)

Definition: Den kommutative lov.

Givet en mængde E med en komposition £ er £ kommutativ på E, hvis alle elementer i E opfylder:
x£y = y£x(KOM). (EM. II. 1.7)

ASS, KOM og NEU er sideordnede aksiomer i hierarkiet, mens en monoïde, der er en associativ magma unifere bestemmer en rigere struktur, da det er en sammensætning af 2 sideordnede strukturer, nemlig en associativ magma og en magma unifere.

Den væsentligste udvidelse sker dog med følgende

Definition: Inverst element.

Givet en mængde E med neutralt element e, en komposition £ og to elementer x og x' i E. Vi siger, at x' er det inverse element til x, hvis
x'£x = x£x' = e (EM, II, 1.15)

De nævnte love giver anledning til forskellige algebraiske strukturer. Den vigtigste af disse er en algebraisk gruppe, der finder anvendelse i utallige sammenhænge.

Definition: Gruppe.

En monoide, hvor alle elementer er invertible, kaldes en gruppe. (EM, II, 1.15).

Vi betegner med INV(£), at alle elementer i en given mængde er invertible mht. kompositionen £. Gruppestrukturen kan ligeledes gøres rigere ved at tilføje flere aksiomer som forudsætninger. En gruppe, hvor kompositionen er kommutativ, kaldes f.eks. for en kommutativ gruppe eller en Abelsk gruppe.

Eksempler:

14) Mængden af rationale tal Q med addition og neutralt element 0 er en kommutativ gruppe.

15) Et funktionsrum F af bijektive funktioner af et interval - på det samme interval, med den identiske afbildning som neutralt element og funktionssammensætning som komposition er en gruppe.

Vi kan yderligere forfine disse algebraiske strukturer ved at definere endnu en komposition på en organiseret mængde.

Definition: Ring.

En dobbelt organiseret mængde (E,£,$) kaldes en ring, $ er ASS og (E,£,$) tillige opfylder distributiviteten:
givet x,y,z i E, x$(y£z) = (x$y)£(x$z) og
(y£z)$x = (y$x)£(z$x) (DIS)

En ringstruktur er stadig generel nok til at have mange forskellige interpretationer.

Eksempler:

16) (Z,+,·) De hele tal med kompositionerne addition og multiplikation er en ring.

17) (F,+,·) Mængden af kontinuerte funktioner med nulfunktionen som neutralt element mht. + er også en ring.

18) (Q,+,·) er en ring med 0 som neutralt element mht. +.

Man kan nu gøre strukturen endnu rigere ved at stille flere betingelser til den anden komposition i en ringstruktur. Kræver man f.eks. at $ skal være kommutativ, får man naturligt nok en kommutativ ring. Eksemplerne 16-18 er således alle kommutative ringe.

Nu kan vi definere den rigeste algebraiske struktur og dermed også den mest specialiserede struktur, der kan fortolkes i aritmetikken, nemlig et legeme.

<u>Definition</u>: Legeme.

Et legeme er en kommutativ ring (E,£,$), hvor $ tillige opfylder aksiomerne NEU, INV' (det neutrale element mht. £ skal ikke være invertibelt mht. $) og KOM.

<u>Eksempler</u>:

19) $(Q,+,\cdot)$ er et legeme med 0 som +neutralt element og 1 som ·neutralt element.

20) $(R,+,\cdot)$ er et legeme.

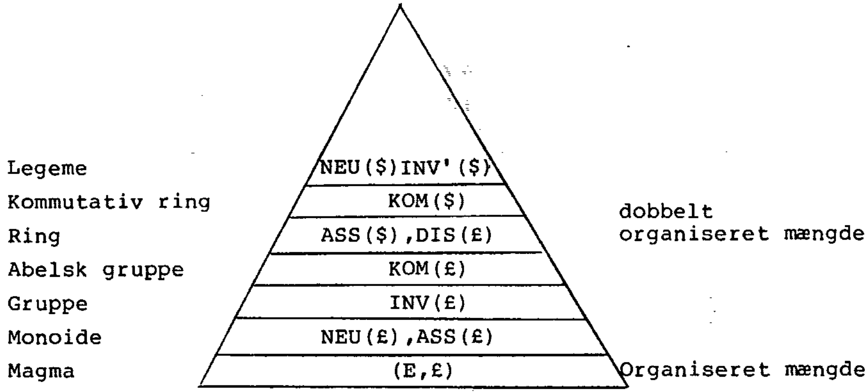
21) $(R^2,\hat{+},\hat{\cdot})$, mængden R x R af talpar med kompositionerne $\hat{+}$ defineret ved: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)$. og $\hat{\cdot}$ defineret ved:

$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = ((a_1b_1-a_2b_2),(a_1b_2+a_2b_1))$

kan vises at være et legeme. Man kalder mængde R^2 organiseret på denne måde for de komplekse tal C. Dvs. $(C,\hat{+},\hat{\cdot})$ er et legeme.

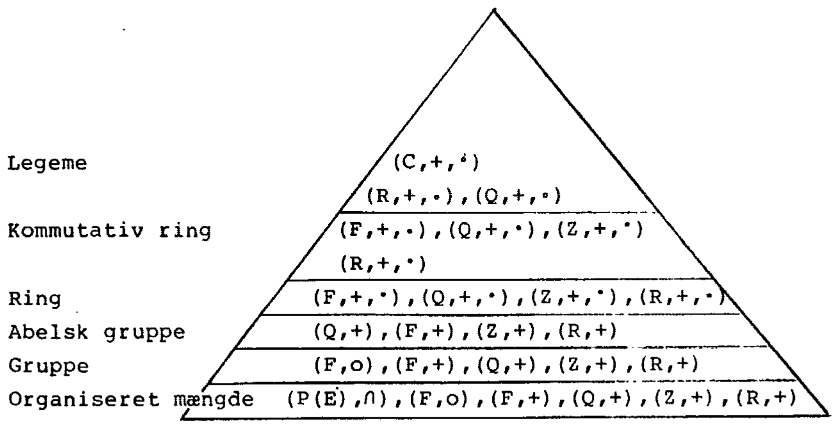
Legemestrukturen er således også generel nok til at have flere forskellige fortolkninger. F.eks. kan man sige, at legemestrukturen i en talmængde sikrer, at de aritmetiske operationer er rimeligt mulige.

De algebraiske strukturers hierarki kan opsummeres i følgende figurer.



Figur 3E.

~~Figuren viser hvordan de algebraiske strukturer~~ bliver rigere og rigere, ved at kompositionerne opfylder flere og flere af de gennemgåede aksiomer. Bemærk at man naturligvis kan studere strukturer, der opfylder andre kombinationer af aksiomerne end de her navngivne.



Figur 3F.

Dette eksempelhieraki illustrerer hvordan de algebraiske strukturer bliver mere og mere specielle; hvorfor eksemplerne bliver færre og færre op i gennem pyramiden.

3.3. Topologiske strukturer

Af de grundlæggende moderstrukturer var den topologiske struktur den første, som Bourbaki beskrev i første udgave af Topologie Générale (1940). Udgaven er senere ændret, men de fundamentale træk ved de topologiske strukturer er naturligvis uforandrede.

Denne moderstruktur giver en matematisk formalisering af begreberne omegn, naboskab, grænse og kontinuitet, som danner grundlaget for vores intuitive opfattelse af indbyrdes beliggenhed - omegn i en meget abstrakt/generel form.

Bourbaki definerer (som det iøvrigt er almindeligt udbredt) en topologisk struktur ved følgende to aksiomer.

Definition: En topologisk struktur.

En topologisk struktur er en mængde X, hvori der er fastlagt en mængde O af delmængder af X($O \in \mathcal{P}(X)$), der opfylder:

(O_I) Alle foreninger af mængder fra O giver en mængde i O.

(O_{II}) Alle endelige fællesmængdedannelser af mængder fra O giver en mængde i O.

Vi kalder mængde O for en topologi på X. Mængderne i O kaldes de åbne mængder i den topologiske struktur defineret af O på X. (EM, III, 1, p. 1)

O_I betyder, at enhver familie $\{O_j | j \in J\}$ hvor $O_j \in O$ opfylder

$\bigcup_{j \in J} O_j \in O$ Forening over en tom indeksmængde vedtages at give Ø.

O_{II} betyder, at for O_j; $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$, hvor $O_j \in O$ gælder

$\bigcap_{j=1}^{n} O_j \in O$ Fællesmængdedannelse når J=Ø vedtages at give X.

Af O_I og O_{II} har vi at hhv. Ø og X tilhører O.

Jo flere åbne mængder en topologi omfatter, jo stærkere siges topologien at være. Men analogien til ordningsstrukturers og algebraiske strukturers rigdom er topologiens organisation. Dvs. en topologisk struktur siges at være rigere, jo finere strukturen i topologien er. Igen vil vi beskrive rigere og rigere strukturer ved at kræve, at topologien skal opfylde flere og flere aksiomer.

Først giver vi et par eksempler på simple topologiske strukturer:

Eksempler:

22) Den trivielle topologi.
Givet en vilkårlig mængde X er O = {∅,X} en topologi på X, da O opfylder O_I og O_{II}. Denne topologi er den svageste, da alle topologier på X kan vises at indeholde både X og ∅.

23) De åbne symmetriske intervaller om nul på Q forenet med ∅ og Q er en topologi på Q.

24) Diskret rum.
Lad X være en ikke tom mængde og lad O være mængden af alle delmængder af X; dermed er O = P(X), hvor P(X) er potensmængden af X. P(X) opfylder klart (O_I) og (O_{II}), og er derfor en topologi på X. P(X) kaldes den diskrete topologi på X og strukturen (X,P(X)) et diskret rum.

Inden vi indfører flere aksiomer for at adskille og karakterisere forskellige topologier, er det praktisk at nævne nogle andre fundamentale begreber i topologien.

Definition: Omegn.

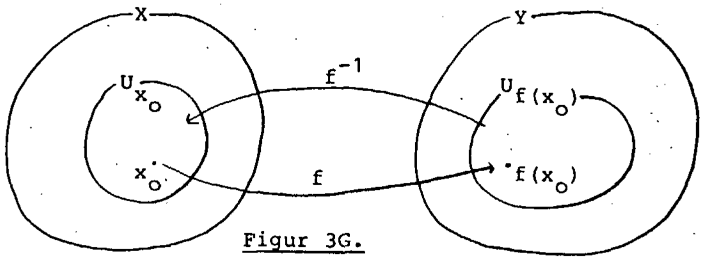
I et topologisk rum X kalder vi en mængde, der indeholder en åben mængde (det være sig et interval, en cirkelskive, en kugle, eller en klat) om et punkt A i X for en omegn til A. Mængden af omegne til X betegnes V(X). (EM, III, 1, p. 2)

Omegnstrukturen er fundamental i anvendelsen af topologien. F.eks. kan man formulere kontinuitetsbetingelsen for en afbildning på følgende måde:

Definition: Kontinuitet.

En afbildning $f : X \to Y$, hvor X og Y er topologiske rum siges at være kontinuert i $x_o \in X$, hvis det inverse billede ved f af enhver omegn i Y om $f(x_o)$ er en omegn om x i X.

$f: X \to Y$



Figur 3G.

En afbildning er altså kontinuert hvis originalmængden ved f til enhver omegn $U_{f(x_o)}$ af $f(x_o)$ er en omegn U_{x_o} af x_o.

Definition: Omegnsbasis.

I et topologisk rum X kalder vi en mængde G af omegne til et punkt x for en omegnsbasis, hvis der for alle omegne U(x) eksisterer en omegn $W \in G$ så $W \subset U$. (EM, III, 1, p. 4)

Eller sagt i ord: en mængde af omegne til et punkt kaldes en omegnsbasis, hvis den er struktureret således, at enhver omegn om punktet indeholder en omegn fra omegnsbasen.

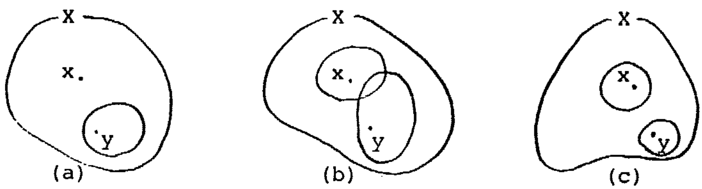
Eksempel 25): På den rationale tallinie Q er mængden af åbne intervaller, der indeholder et punkt x, en omegnsbasis for mængden af omegne til x. F.eks. er de symmetriske intervaller]-a,a[om nul, hvor a ∈ Q, en omegnsbasis til nul.

Topologiske strukturer er som tidligere antydet også hierarkisk ordnet. En topologi på en mængde kan nemlig karakteriseres ved, hvor godt de åbne mængder fra topologien adskiller punkterne i mængden. Jo bedre topologien adskiller punkterne, jo finere siges topologien at være.

Dette hierarki formaliseres ved adskillelsesaksiomer. Vi vil her (ligesom Bourbaki) kun beskrive det vigtigste af disse aksiomer, nemlig Hausdorff aksiomet.

Definition: Hausdorff rum.

Et topologisk rum X er et Hausdorff rum, hvis topologien O på X gør det muligt at lægge disjunkte omegne om ethvert par af punkter (x,y) i X.
(EM, III, 1, p. 52)



Figur 3H.

3H c) illustrerer en mængde, hvor Hausdorff aksiomet er opfyldt. I 3H b) gælder et andet adskillelsesaksiom, hvor omegnen om y ikke må indeholde punktet x og vice versa, men det kræves ikke at omegnene er disjunkte.

Og i 3H a) skal det til to vilkårlige punkter x og y i X gælde, at der kan lægges en omegn om det ene punkt, der ikke indeholder det andet punkt.

Hausdorff aksiomet formuleres i fem andre ækvivalente udgaver i Éléments de Mathematique; med fællesmængder af lukkede omegne, diagonaler af produktmængder af topologiske rum og med filtre. Dette kan tages som et udtryk for anvendeligheden af Hausdorff rum i mange andre sammenhænge end inden for topologien selv.

<u>Eksempel 26)</u>: Den rationale tallinie Q er et Hausdorff topologisk rum; givet to punkter i Q så $x < y$, så findes der et tal $z \in Q$ f.eks. $(x+y)/2$, så $x < z < y$, hvilket medfører, at intervallerne $]-\infty,z[$ og $]z,\infty[$ er disjunkte omegne om henholdsvis x og y. Dette resultat skal bruges ved opbygningen af de reelle tal (se afsnit 4.2)

Den abstrakte generelle topologi kan som de øvrige moderstrukturer konkretiseres yderligere ved her at tilføje aksiomer om regularitet (EM, III, 1, p. 56), kompakthed, lokal-kompakthed (p. 59), sammenhængende rum (p. 80) og metriserbare topologiske rum.

Af hensyn til gennemgangen af Bourbakis opbygning af de reelle tal i afsnit 4.2 vil vi følge et parallelspor til den her skitserede specialisering af den topologiske moderstruktur. Udgangspunktet herfor er en generalisering af den føromtalte omegnsstruktur.

<u>Definition</u>: Filter.

Ved et filter på en mængde X forstås en mængde $F (F \in PP(X))$ af delmængder af X med følgende egenskaber:

(F_1) Enhver delmængde af X som omfatter en mængde fra F tilhører filtret.

(F_2) Enhver endelig fællesmængdedannelse af filtermængder giver en filtermængde.

(F_3) $\emptyset \notin F$, den tomme mængde er ikke en filtermængde.

Eksempel 27): Mængden V(x) af omegne til et punkt er et filter nemlig det såkaldte omegnsfilter.

Helt analogt til omegnsbasis defineres filterbasis som en delmængde B af filtret, der har den egenskab at enhver filtermængde indeholder en mængde fra filterbasen B. En filterbasis giver således umiddelbart anledning til et filter, nemlig det filter, hvis mængder indeholder en filterbasismængde.

Eksempel 28): Mængden af de symmetriske åbne intervaller $]-a,a[$ om nul på den rationale linie er klart en filterbasis, nemlig den filterbasis, der giver anledning til omegnsfiltret på Q om nul.

Et filter er en struktur i ethvert topologisk rum. Hvis man har givet et filter på en mængde X, definerer dette nemlig umiddelbart en topologi. Lad nemlig topologien bestå af filtermængderne tilføjet X og $\emptyset$, da vil denne mængde opfylde O_I og O_{II}: O_{II} følger direkte af F_2; O_I, enhver foreningsmængde af filtermængder vil selv være en filtermængde og således også tilhøre den konstruerede topologi.

Vi indfører nu uniforme strukturer for at kunne strukturere vores topologi endnu mere.

Definition: Uniforme strukturer.

Ved en uniform struktur (en uniformitet) på en ikke tom mængde X forstås et filter U på X x X med flg. egenskaber

U_I Enhver mængde, som tilhører uniformiteten U, indeholder diagonalen Δ. (Diagonalen er den

delmængde af X^2, hvor x=y dvs.
$\Delta = \{(x,y) \in X^2 | x=y\}$ (EM, I, 2, p. 80)

U_{II} Hvis v tilhører U, gør v^{-1} det også.
(v er en graf, dvs. en mængde af ordnede par (x,y); hvis $(x,y) \in v$ så $(y,x) \in v^{-1}$, v^{-1} kaldes den inverse til v. (EM, I, 2, p. 78)

U_{III} For ethvert $v \in U$ eksisterer $w \in U$ så $w \circ w \subset v$
($w \circ w$ er bestemt ved
$\{(x,z) \in X^2 | \exists y \in X: (x,y) \in W \wedge (y,z) \in W\}$
(EM, I, 2, p. 78)

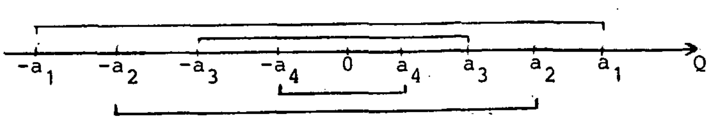
Mængderne i U kaldes <u>entourager</u> eller nabolag af uniformiteten defineret på X af U. En mængde udstyret med en uniformitet kaldes et uniformt rum. (EM, III, 2, § 1.1)

Enhver uniform struktur har en basis bestående af de symmetriske nabolag af uniformiteten (et nabolag v er symmetrisk hvis $v=v^{-1}$). En filterbasis B på X x X er nu basis for en uniform struktur, hvis B opfylder U_I og U_{II} og flg. omformulering af U_{II}:

U'_{II}: Hvis v tilhører filterbasen, så findes der en filterbasismængde, som er en delmængde af v^{-1}.

Man kan vise, at en metrik (et afstandsmål, der opfylder visse aksiomer) giver anledning til en uniform struktur. Dette kan eksemplificeres med følgende:

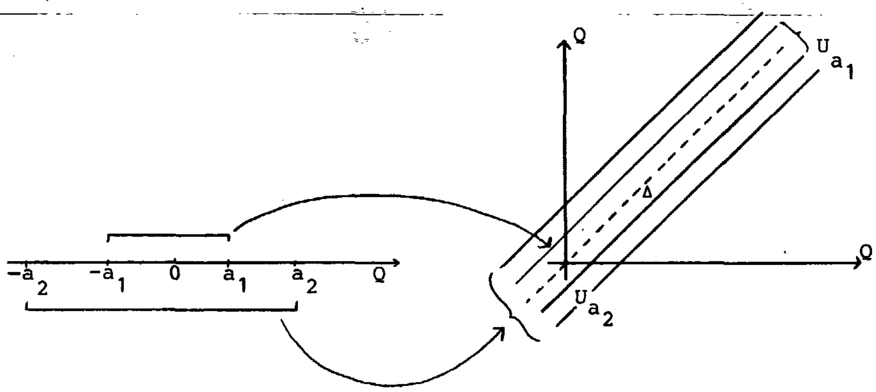
<u>Eksempel 29</u>: Lad der i de rationale tal Q være givet en metrik, nemlig numerisk værdi, og en topologi defineret ved en omegnsbasis til nul bestående af de symmetriske åbne intervaller]-a,a[fra eksempel 25 tilføjet Ø og Q. Jvf. eksempel 28 udgør omegnsbasen en filterbasis.



Denne delmængde af åbne delmængder af Q er klart nok en topologi på Q.

Til hver af disse symmetriske intervaller lader vi svare mængden af de punkter i Q x Q, hvis afstand mellem koordinaterne er mindre end a.
Dvs. $U_a = \{(x,y) \in Q^2 \mid |x-y| < a\}$

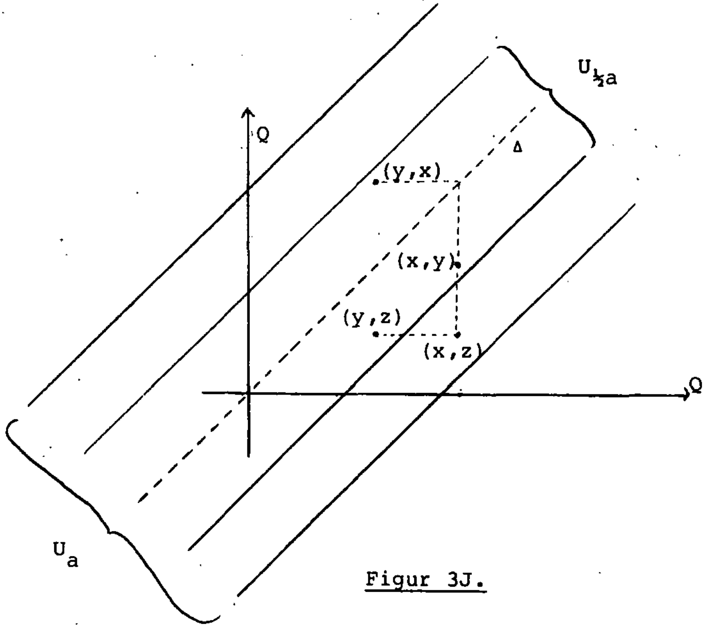
Afbildningen fra P(Q) ind i $P^2(Q)$ af de symmetriske intervaller om nul ind i U_a kan illustreres på flg. måde:



Figur 3I.

Hver af omegnene fra filterbasen på Q afbildes over i et nabolag U_a symmetrisk om diagonalen Δ: x=y. Mængden af U_a nabolag udgør en filterbasis B på Q^2.

Da B klart opfylder U_I, U'_{II} og U_{III} (se figur 3J) er B tillige basis for en uniform struktur.

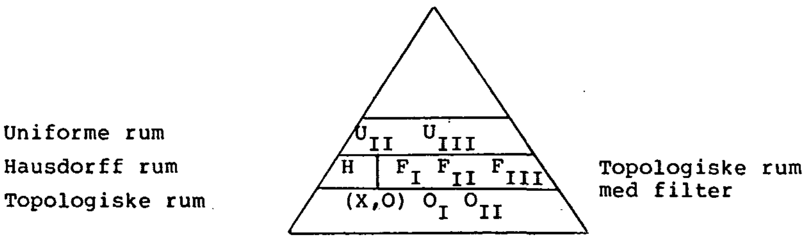


Figur 3J.

Det ses umiddelbart at diagonalen Δ er indeholdt i alle U_a nabolag for a>0. Basisnabolagene er per definition symmetriske hvilket betyder at $v=v^{-1}$, og dermed er U'_{II} opfyldt. Enhver sammensætning af punkter i $U_{\frac{1}{2}a}$ nabolaget vil være indeholdt i U_a nabolaget, hvormed U_{III} er opfyldt.

Vi har nu, at mængden af U_a-nabolag er basis for en uniform struktur, hvilket giver anledning til en uniform struktur på Q. Dvs. vi har vist, at den rationale linie udstyret med en numerisk værdi som metrik er et uniformt rum. (Dette resultat skal vi bruge i opbygningen af de reelle tal i afsnit 4.2)

Afslutningsvis kan vi konstatere, at både en uniformitet og en metrik giver anledning til en topologi med en fin struktur. Det kan naturligvis vises, at dersom uniformiteten er afledt af metrikken, giver den anledning til den samme topologi.



Figur 3K.

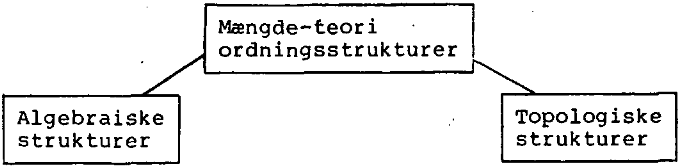
Denne figur viser et blandt mange mulige hierakier af topologiske strukturer. I figuren er kun medtaget strukturer, der er gennemgået i det foregående.

3.4. Sammensatte strukturer

Som vi har set, betegner en moderstruktur ikke én bestemt struktur, men en hel række strukturer af samme type. Jo flere aksiomer, stamstrukturen opfylder, jo rigere siges moderstrukturen at være.

Som tidligere beskrevet kan de 3 moderstrukturer føres tilbage til mængdelæren. Ordningsstrukturen er beskrevet i et afsnit af Théorie des Ensembles (EM, I), mens den algebraiske struktur og den topologiske struktur har givet anledning til egne behandlinger i hhv. Algèbre (EM, II) og Topologie Générale (EM, III).

Bourbakis hierarki begynder således:



Figur 3L.

Ud fra disse 3 strukturer opbygger Bourbaki sin matematik. Ved at tilføre nye aksiomer til en af moderstrukturerne får man mere specielle mængder med flere egenskaber, men mindre generelle resultater. Ved at blande strukturer fra de 3 kasser får man sammensatte strukturer, der kan danne udgangspunkt for nye matematiske discipliner.

Blandingen af to eller flere strukturer kaldes <u>multiple strukturer</u>.

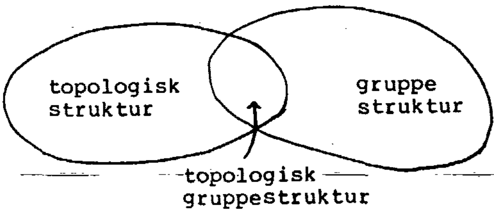
Den elementære aritmetik består af en sammensætning af en algebraisk struktur udstyret med kompositionslovene addition og multiplikation og en ordningsstruktur, der definerer begrebet "a går op i b" samt "a større end eller lig b". Den topologiske gruppeteori består af en (algebraisk) gruppestruktur, som sammensættes med en topologisk struktur, der harmonerer med gruppekompositionen.

<u>Definition</u>: En topologisk gruppe er en mængde, der har en gruppestruktur og en topologi, som tilfredsstiller følgende to aksiomer. (EM, III, 2, § 1.1)

(GT_I) Gruppe-komposition $(x,y) \to x\pounds y$ af $E \times E$ ind i E er kontinuert.

(GT_{II}) Afbildningen $x \to x^{-1}$ af E ind i E (symmetrien af gruppen) er kontinuert.

Eksempel 30): Den rationale linie er en topologisk gruppe bestående af mængde Q med en additiv gruppetopologi, for hvilken de symmetriske åbne intervaller (fra eksempel 25) er en omegnsbasis om nul. Denne topologiske gruppe Q kaldes den additive gruppe på den rationale linie. (EM, III, 4, § 1.2)



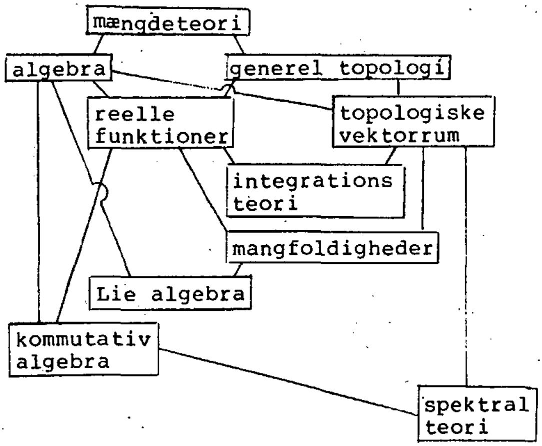
Figur 3M.

De reelle tal er en multipel struktur, hvor alle moderstrukturerne forekommer. Det vil vi illustrere i afsnit 4.2. Andre multiple strukturer er algebraisk topologi, topologisk algebra, differentialgeometri og differentialalgebra (jfr. kap. 5). (Choquet, 1962)

I toppen af dette strukturhierarki findes blandingsstrukturerne, der fremkommer ved at sammensætte talrige strukturer; hertil hører f.eks. potentialteorien.

Dette strukturbegreb er udviklet i Eléments de Mathématique og afspejles i et hierarki mellem de forskellige bøger. Moderstrukturerne danner som skitseret i figur 3L udgangspunkt for de 3 første bøger i værket.

På samme måde som de enkelte teoremer kan sættes i et hierarki (se figur 2C), kan de forskellige discipliner - her repræsenteret ved bøger - i princippet sættes i et tilsvarende hierarki. De væsentlige metoder og resultater kan skematiseres f.eks. som af B. Booss (1982, p. 103) i følgende figur:



Figur 3N.

Den bourbakistiske ide går netop ud på, at man ved at videreføre en struktur - eller at sammensætte flere strukturer - kan videreføre metode/teori-apparatet fra tidligere behandlede strukturer. Dermed sikres matematikkens integritet. De blandede/sammensatte strukturer kan dermed umiddelbart anvende generelle resultater for de enkelte strukturer, der indgår i den specielle teori.

3.5. Aksiomatisering

Bourbakis aksiomatisering adskiller sig fra den traditionelle på 2 måder. Det er ikke alene Bourbaki, der kan tillægges disse 2 synsvinkler, men de kommer markant til udtryk i hans formulering. Den første er fortolkningen af begrebet "aksiom". Den formalistiske synsvinkel er bl.a. et opgør med den klassiske opfattelse af aksiomer som selvindlysende sandheder. Som en reaktion på fremkomsten af de ikke-Fuklidiske geometrier bruger formalisterne - og Bourbaki implicit - den radikale (anderledes) fortolkning, at et aksiom er et udsagn, der danner grundlag for en efterfølgende logisk argumentation.

Det andet standpunkt, som Bourbaki ikke deler med formalister generelt, er det, at aksiomsystemer primært bør være ikke-kategoriske eller generelle. Dvs. at de ikke er rettede mod bestemte matematiske objekters egenskaber, men drejer sig om det indbyrdes forhold mellem matematiske objekter. Denne aksiomatiseringsform arves naturligvis fra strukturtanken, hvor det er relationerne mellem objekterne, der tæller, og ikke objekterne selv. Modsætningsvis udgør Hilberts aksiomatisering af den Euklidiske geometri et kategorisk aksiomsystem, hvor aksiomerne fremstår som udsagn om nogle bestemte matematiske objekters egenskaber, f.eks. linier og punkter.

De ikke-kategoriske aksiomsystemer stiller væsentligt højere krav til abstraktionsevnen, men det væsentlige for Bourbaki er, at de - sammen med den øgede præcision, der generelt opnås ved aksiomatisering - danner grundlaget for en økonomisering i matematikken, hvilket vi nu vil illustrere med et eksempel fra Bourbaki (1948/50).

Eksempel 31): Ikke-kategorisk aksiomsystem.

Ifølge definitionen i afsnit 3.2 på en algebraisk gruppe er det givet, at i en gruppestruktur på mængden E vil kompositionen £ opfylde den associative lov, loven om neutralt element, og at ethvert element i E er invertibelt.

Med disse forudsætninger vil vi nu vise noget generelt/ikke-kategorisk, der gælder for enhver gruppe. Vi forudsætter at

$$x £ y = x £ z$$

da x er invertibel, er det ensbetydende med

$$x' £ (x £ y) = x' £ (x £ z)$$

af associativiteten får vi at

$$(x' \pounds x) \pounds y = (x' \pounds x) \pounds z$$

og dermed at

$$e \pounds y = e \pounds z$$

der ifølge definitionen på det neutrale element e giver at

$$y = z$$

Eksemplerne 14 og 15, der er eksempler på grupper, har derfor denne egenskab, og det gælder for alle andre eksempler på mængder med en komposition, der kan vises at være en gruppe. Det er deri det ikke-kategoriske består.

Ud over at være en økonomisering af matematikken giver aksiomsystemerne mulighed for manipulation med enkelte af aksiomerne i systemet. Dette kan være en hjælp (en metode) i forskningsprocessens bevisfase.

Det er netop den formalistiske fortolkning af begrebet aksiom, der retfærdiggør denne manipulation med aksiomerne. Choquet (1961/1962, p. 10-12) nævner forskellige former for manipulation med aksiomer, der anvendes i forskningspraksis.

<u>Svækkelse</u>. Givet en kompliceret struktur S med talrige aksiomer involveret og et udsagn U, der er formuleret inden for rammerne af S. Antag, at vi ikke kan bevise U. Vi kan da danne S^-, der består af færre aksiomer end S, og dermed er en svagere struktur. Hvis vi kan bevise U inden for S^-, er U også S-sand, da S blot er en ekstension af S^{-1}.

En udvidelse af denne metode er den Choquet kalder "Studium von benachbarten Strukturen", som man kan få, hvis man tilføjer nogle andre aksiomer til S^-, så man får en nærliggende struktur S^o, der gør det lettere at bevise U. Her er det blot vigtigt at bemærke, at S ikke er en ekstention af den udvidede S^o og U er derfor ikke umiddelbart beviselig i S.

Skærpelse. Ved at tilføje flere aksiomer til strukturen S får man en rigere struktur S^+. Dette er et kraftigere værktøj, der kan give uventede resultater. Disse resultater kan så forsøges vist i S.

Det er ikke umiddelbart, hvor meget man skal lægge i denne overordnede skitsering af formalistisk forskningspraksis. Flere steder gør Bourbaki (1948/50, p. 227) eller enkeltpersonerne opmærksom på intuitionens betydning for forskningspraksis. Det er ikke alene nok blot rent maskinelt at manipulere sig gennem forskellige kombinationer af tilfældige aksiomer.

Aksiomatiseringen er i lige så høj grad en proces efter forskningen. Efter analysen (forskningen) følger syntesen (formidlingen). Aksiomatiseringen i denne mere brede forstand udgør en afpudsning af det matematiske værktøj, der skal give de bedste betingelser for at nå frem til nye forskningsresultater.

4. MATEMATIKFORMIDLING I BOURBAKIPERSPEKTIV.

I dette kapitel vil vi se nærmere på den formidling af matematikken , Bourbaki præsenterer i Éléments de Mathématique. I første afsnit beskriver vi værkets indhold og stil, i det næste afsnit eksemplificerer vi med Bourbakis konstruktion af de reelle tal og sammenligner denne med gængse fremstillingsformer. Herefter ser vi på værkets indflydelse på matematikverdenen, og til sidst beskriver vi noget af den kritik, der har været rejst mod Bourbaki.

4.1. Valg af indhold, symbolik og terminologi.

Eléments de Mathématique har aldrig været ment som et encyklopædi, hvor man skulle kunne finde et vilkårligt teorem og dets bevis. Det ville i det hele taget være umuligt at lave et sådant, f.eks. ud fra den betragtning at der jvf. (Davis m.fl, 1981) produceres ca. 200000 nye teoremer om året.

Det primære formål med Éléments de Mathématique har derimod været at opstille de vigtigste resultater for den matematiske forsker.

> "The idea which soon became dominant is that the work had to be primarily a tool."
> (Dieudonné, 1968/1970, p. 138)

> "...Bourbakis treatise was planned as a bag of tools, a tool kit for the working mathematician,...".
> (Dieudonné, 1982 a, p. 620)

Cartan (1958/1979, p. 180) udtrykker samme synspunkt:

> "If Bourbaki members considered it their duty to work out everything from the ground up, they did so with the hope of placing in the hands of future mathematicians an instrument that would make their work easier and enable them to advance further".

Det betyder, at Éléments de Mathématique kan ses som en rationaliseret rekonstruktion af matematikken, der skal danne grundlag for en forskningspraksis (denne forskningspraksis beskriver vi nærmere i kapitel 5). Selve rekonstruktionstanken har paralleller til Euklids forsøg på at bestemme de væsentligste elementer i geometrien og sætte disse ind i en aksiomatisk-deduktiv ramme, hvilket også titlen"Eléments de Mathématique" delvist antyder.

Bourbaki forsøger at uddestillere de væsentligste elementer i den eksisterende matematik - disse bliver kaldt matematikkens moderstrukturer - herfra skal resten af matematikken udvikles. Og i realisationen af dette program koncentrerer Bourbaki sig desuden om de mest centrale og tidsuafhængige definitioner, teoremer og matematiske ideer. Desuden medtages ikke resultater fra områder af matematikken, hvor de underliggende strukturer endnu ikke er klarlagt, og heller ikke fra områder, hvor der foregår så hurtig udvikling, at en eventuel fremstilling hurtigt ville blive forældet (Dieudonné, 1968/1970), (Dieudonné, 1982 a).

Selve behandlingen af matematikken rationaliseres også ved at aksiomatisere og fremstille resultaterne i en så generel ramme som muligt. Denne generalisationstendens skal dog ikke ses som et mål i sig selv, men snarere som et middel til at opnå en økonomisering af matematikken, der skal give studie- og forskningsmæssige gevinster. Cartan (1958/1970, p. 180) skriver:

> "For Bourbaki, a general concept is useful only if it is applicable to a number of more special problems and really saves time and effort. Such savings have become a necessity today".

Eksempelvis kan de reelle tal indføres på en meget enkel måde, fordi de tre moderstrukturer indføres,behandles og blandes først (se næste afsnit).

Stilen i Eléments de Mathématique må siges at være præget af, at værket er kommet til verden ved en meget omhyggelig og langsommelig arbejdsproces. Dette har bl.a. betydet, at de enkelte bind og sammenhængen mellem disse er gennemarbejdet til mindste detalje. Alle teoremer er beviste, symbolik og ordvalg er udvalgt meget omhyggeligt, vanskelige passager er markeret med et Z. Intet bliver gentaget - der refereres hele tiden bagud.Desuden findes der efter hvert kapitel et væld af øvelser, og i hver bog er der en historisk oversigt over emnets udvikling samt en oversigt over de vigtigste definitioner, resultater og terminologier.

4.2 Gennemgang af Bourbakiš opbygning af de reelle tal.
For at give indtryk af, hvordan Bourbakiš matematiksyn konkret får indflydelse på opbygningen af et matematisk objekt og af Bourbakiš stil, vil vi gennemgå et afsnit af Éléments de Mathématique. Til denne lejlighed har vi valgt konstruktionen af de reelle tal. Der er flere gode grunde til dette valg. Først og fremmest er de reelle tal centralt placeret i den matematiske teori, dernæst er de reelle tal en multipel struktur, hvor der både indgår ordnings -, algebraiske - og topologiske strukturer. Dvs. Bourbaki har her mulighed for at demonstrere effekten af sin generelle strukturide. Endelig kender de fleste læsere til en anden opbygning af de reelle tal, så der er på dette område et sammenligningsgrundlag.

Traditionelt har man to muligheder at vælge mellem, når man skal opbygge de reelle tal:

1) Man kan vælge at "snitte" i den rationale linie. Ethvert snit, der kan formuleres matematisk f.eks. $\{ x \in Q | x^2 < a\}$, hvor a er rational, deler Q i intervaller og halvlinier. Hvis man tilføjer alle endepunkter af sådanne intervaller og halvlinier til Q får man en udgave af de reelle tal.

2)Man kan vælge at bringe alle fundamentalfølger i Q til at konvergere. Den mængde, der gør alle fundametalfølger i Q konvergente, er en udgave af de reelle tal. Denne metode, der nok er den mest almindelige, skyldes i det væsentlige Cantors arbejde med fundamentalfølger.

I det efterfølgende vil vi sammenligne denne sidste metode med Bourbakis generaliserede konstruktion, hvor der benyttes Cauchy-filtre og uniforme rum.

I Éléments de Mathématique indføres de reelle tal først efter ca 500 sider algebra og 300 sider generel topologi. Dette i sig selv viser, at Bourbaki inden konstruktionen af de reelle tal har udviklet et meget kraftigt værktøj. Selve opbygningen af de reelle tal fylder da også kun 2½ side i Éléments de Mathématique. Disse 2½ side beskæftiger sig i hovedsagen med at vise, at (Q,+) med en omegnsbasis om nul er en Hausdorff topologisk gruppe jf. eksempel 25 i afsnit 3.3 og eksempel 30 i afsnit 3.4. Derudover indføres numerisk værdi på Q. Dette er alt sammen forberedelser for at kunne anvende et generelt teorem om fuldstændiggørelse af Hausdorff topologiske grupper.

Bourbaki kan herefter indføre de reelle tal ved:

Definition. De Reelle tal

> R er den topologiske gruppe som er fuldstændiggørelsen af den additive gruppe på den rationale linie. Elementerne i R kaldes de reelle tal, som topologisk rum kaldes R den reelle linie, som topologisk gruppe kaldes R den additive gruppe på den reelle linie. (EM,III,4,§1.3)

Det påstås i denne definition af de reelle tal, at den additive gruppe på den rationale linie kan fuldstændiggøres; her udnytter Bourbaki et generelt resultat om, at bestemte topologiske grupper kan fuldstændiggøres. Dette resultat er formuleret som et teorem i (EM,III,3,§3.4).

Teorem 1 En Hausdorff topologisk gruppe G er isomorf med en tæt undergruppe af en fuldstændig gruppe $\hat{G}$, hvis og kun hvis billedet (under symmetrien $x \to x^{-1}$) af et Cauchy filter mht. højereuniformitet af G er et Cauchy filter mht. samme uniformitet. Den fuldstændige gruppe $\hat{G}$ (fuldstændiggørelsen af G) er da entydig optil isomorfi.
(Højreuniformiteten af G betegnes med G_d)

I stedet for at gennemføre den traditionelle udvidelse af de rationale tal, vha. ækvivalensklasser af fundamentalfølger, har Bourbaki altså generelt bevist, at hvis en Hausdorff topologisk gruppe opfylder betingelserne efter"hvis og kun hvis" i teorem 1 kan den fuldstændiggøres.

Vi vil nu gennemgå beviset for dette teorem, for at vise i hvor høj grad gangen i dette bevis svarer til gangen i den traditionelle opbygning af R ved fuldstændiggørelsen af Q. Beviset for den generelle sætning er en parallel til denne konstruktion blot med mere generelle begreber.

Lad G være den Hausdorff topologiske gruppe, der skal fuldstændiggøres. (I det konkrete tilfælde er G den additive gruppe på den rationale linie (eks. 30 afsnit 3.4)). Det uniforme rum G_d (i vores tilfælde,det uniforme rum på den rationale linie (eks.29 afsnit 3.3)) kan betragtes som et tæt underrum af G_d´s fuldstændiggørelse $\hat{G}_d$. Vi skal nu undersøge om vi også kan betragte G som en tæt undergruppe af en fuldstændig Hausdorff topologisk gruppe G'. Hvis det er muligt må det betyde, at den uniformitet G'_d som giver topologien på G' er isomorf med $\hat{G}_d$.

Dvs. Bourbaki udnytter, at de tidligere har vist at et uniformt rum kan fuldstændiggøres(EM,III,2,§3,7), til at kræve at den uniformitet G'_d som giver den fuldstændiggjorte topologiske gruppe G' stemmer overens med det fuldstændiggjorte uniforme rum $\hat{G}_d$. Heraf følger at en Hausdorff topologisk gruppe kan fuldständiggøres, hvis det er muligt at definere en topologisk gruppe struktur på det fuldstændiggjorte Hausdorff uniforme rum $\hat{G}_d$.

$$
\begin{tikzcd}
G_d \arrow[rr, "\text{Fuldstændiggørelse af uniforme rum}"] \arrow[dd, leftrightarrow] & & \hat{G}_d \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{isomorfe uniforme rum}"] & \\
& & & G'_d \arrow[dl] \\
G \arrow[rr, "?", "\text{Fuldstændiggørelse af topologisk gruppe}"'] & & G' &
\end{tikzcd}
$$

Figur 4 A

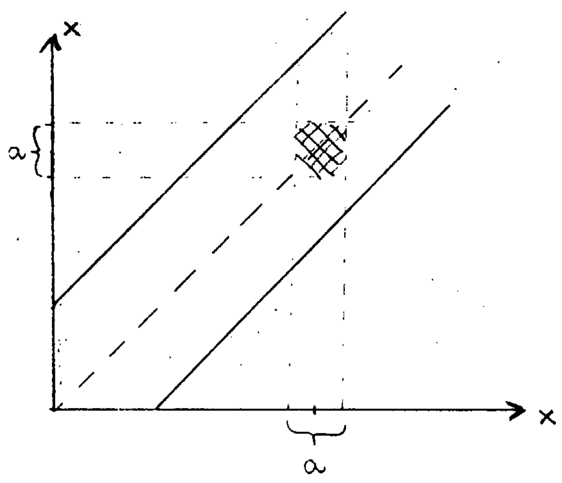
G er den Hausdorff topologiske gruppe, der skal fuldstændiggøres. G_d er det uniforme rum, der giver anledning til topologien på G. $\hat{G}_d$ er det fuldstændige Hausdorff uniforme rum, som er fuldstændiggørelsen af G_d, jfr. (EM, III, 2 § 3.7). G' er fuldstændiggørelsen af G. G'_d er det uniforme underrum, der er isomorf med $\hat{G}_d$ og som giver anledning til G. Heraf følger, at G kan fuldstændiggøres hvis og kun hvis der kan defineres en topologisk gruppestruktur på det fuldstændige Hausdorff uniforme rum $\hat{G}_d$.

For at bevise teorem 1 skal vi altså eftervise, at vi faktisk kan konstruere en gruppestruktur på $\hat{G}_d$, jfr. definitionen af en topologisk gruppe afsnit 3.4, skal vi vise:

1) At gruppekompositionen fra $G_d \times G_d \rightarrow G_d$ kan udvides til at virke på $\hat{G}_d \times \hat{G}_d$. Konkret skulle man have vist, at $(x,y) \rightarrow x + y$ på Q^2 kan udvides til R^2. I den traditionelle opbygning af R gøres dette ved at definere + operation på ækvivalens-klasser af fundamentalfølger. Bourbaki anvender en generalisation af fundamentalfølger, nemlig Cauchyfiltre.

<u>Definition</u>: Cauchyfilter.

Et filter T på et uniformt rum X er et cauchyfilter, hvis der for hver entourage v af X findes en delmængde af X, som er v-lille og tilhører T.



<u>Figur 4 B</u>

En mængde a på x er v-lille, hvis a x a er indeholdt i v.

Bourbaki har tidligere bevist en sætning (EM, III, 2, § 3.6), der giver os, at en funktion kan udvides ved kontinuitet fra et tæt underrum G_d til et fuldstændigt uniformt rum $\hat{G}_d$, hvis funktionen afbilder T x F, hvor T og F er cauchyfiltre på det uniforme rum G_d, over i en cauchyfilter-base på G_d. Det kan nu vises generelt, at gruppekomposition på Hausdorff topologisk gruppe kan udvides ved kontinuitet til en fuldstændig topologisk gruppe. (EM, III, 3, § 3.4)

1.a) At symmetrien $x \to x^{-1}$ fra $G_d \to G_d$ kan udvides ved kontinuitet til $\hat{G}_d$. Jfr. ovenstående kan dette lade sig gøre, hvis billedet af et cauchyfilter på G_d igen er et cauchyfilter på G_d. Dette gælder ikke i almindelighed for Hausforff topologiske grupper, derfor indgår denne betingelse i teorem 1 efter "hvis og kun hvis".

2) At den udvidede gruppekomposition på $\hat{G}_d$ opfylder gruppeaksiomerne ASS, NEU og INV(£). Se afsnit 3.2.

ASS: Vi har $(x£y)£z = x£(y£z)$ på G_d^3, da vi ved, at G_d^3 er et tæt underrum af $\hat{G}_d^3$, må funktionerne $(x£y)£z$ og $x£(y£z)$ også være identiske på $\hat{G}_d^3$.

Af samme grund er funktionerne x, $x£e$, $e£x$ identiske på $\hat{G}_d$, hvilket giver eksistens af neutralelement i $\hat{G}_d$.

Tilsvarende for funktionerne e, $x£x^{-1}$, $x^{-1}£x$ på $\hat{G}_d$, hvilket sikrer, at alle elementer er invertible i $\hat{G}_d$.

I den traditionelle konstruktion af R viser man at + og · operationerne defineret på ækvivalensklasser af fundamentalfølger udgør et legeme. Men eftersom teorem 1 "kun" fuldstændiggør topologiske grupper, er det kun nødvendigt at eftervise gruppestrukturen på $\hat{G}_d$. Multiplikation må så senere overføres til R ved hjælp af fuldstændiggørelsen af et topologisk legeme.

3) At den topologiske gruppe $\hat{G}_d$ faktisk er fuldstændig. Man skal godtgøre, at alle cauchyfiltre er konvergente på $\hat{G}_d$. Enhver cauchyfilter-base på den topologiske gruppe G er en cauchyfilter-base både med hensyn til uniformiteten U givet af G

og med hensyn til den fuldstændige uniformitet U_d, da uniformiteterne U og U_d giver anledning til samme topologi på G. Heraf følger, at eftersom enhver cauchyfilter-base på G konvergerer med hensyn til U_d (da alle cauchyfiltre er konvergente på et fuldstændigt uniformt rum) vil ethvert cauchyfilter på $\hat{G}_d$ også konvergere i $\hat{G}_d$. Dette er helt analogt til den sædvanlige kontruktion af R, her skal man også vise, at legemet (Q^*, +, ·) er fuldstændigt, hvor Q^* er ækvivalensklasser af fundamentalfølger.

4) At fuldstændiggørelsen G' er entydig op til isomorfi. Her udnytter Bourbaki igen en tidligere bevist sætning (EM, III, 3, § 3.3), der siger, at der for to fuldstændig Hausdorff topologiske grupper G_1 og G_2, hvor der er givet en isomorfi mellem to tætte undergrupper H_1 og H_2 af henholdsvis G_1 og G_2, også findes en isomorfi fra G_1 ind i G_2.

Eftersom G altid vil være en tæt undergruppe af en fuldstændiggjort gruppe G', vil G' være entydig op til isomorfi.

Entydighed af de reelle tal etableres efter ækvivalensklassekonstruktion ved at vise, at de reelle tals legeme er ordenstro isomorf med ethvert fuldstændigt arkimedisk ordnet legeme. Ligesom ved den traditionelle udvidelse af Q til R må Bourbaki efter konstruktion af R vise, at ordningen på Q kan overføres til R.

Som det fremgår af denne skitsering af beviset for teorem 1, hviler dette teorem tungt på et endnu mere generelt resultat om entydig fuldstændiggørelse af uniforme rum.

I dette resultat (EM, III, 2 § 3,7) ligger der en generalisation af ækvivalensklassekonstruktionen af fundamentalfølger. Dette generelle resultat sikrer, at man også kan fuldstændiggøre uniforme rum som ikke er separable, dvs. har en ikke-tællelig basis.

Hvad angår selve beviset er der som påpeget under gennemgangen en lang række paralleller til konstruktionen af R ved hjælp af ækvivalensklasser af fundamentalfølger.

Fordelen ved Bourbakis generelle resultat om fuldstændiggørelsen af Hausdorff topologiske gruppe ligger således ikke i en lettere konstruktion af de reelle tal, men derimod i erkendelsen af under hvilke betingelser en vilkårlig Hausdorff topologisk gruppe kan fuldstændiggøres. F.eks. kan man ved hjælp af teorem 1 indføre de komplekse tal C uden først at have de reelle tal ved at fuldstændiggøre den topologiske gruppe $(Q^2,\hat{+})$ på det rationale plan. (se eks. 21 afsnit 3.2.)

Opbygningen af de reelle tal i Éléments de Mathématique er et eksempel på, hvordan Bourbaki til enhver lejlighed vælger den bredest mulige ramme til at bevise resultaterne i. Som tidligere nævnt hævder Bourbaki, at han på denne måde opnår den mest økonomiske fremstilling af teorien.

I tilfældet med teorem 1 er det svært umiddelbart at vurdere, om det kan betale sig rent bevismæssigt - det afhænger jo af, hvor mange gange dette teorem senere finder anvendelse; men i forhold til opbygningen af de reelle tal er det i hvert tilfælde ikke særlig økonomisk. Til gengæld er den generelle ramme i høj grad medvirkende til en øget strukturering af den matematiske erkendelse, der under alle omstændigheder er i spil ved konstruktionen af de reelle tal.

4.3. Indflydelse på matematikverdenen

Med hensyn til indholdet er spørgsmålet, om Éléments de Mathématique slog igennem som en brugbar værktøjskasse for den arbejdende matematiker?

Dieudonné (1982, p. 622-623) nævner, at Topologie Generale var den første bog, der behandlede filtre, uniforme rum, topologiske grupper og funktionsrum. Han fremhæver også andre bind, der enten var de første bøger om et bestemt emne, eller var de første, der gav en generel og anvendelig fremstilling af visse emner. Det skal hertil bemærkes, at han ikke dermed påstår, at disse emner blev behandlet her for første gang i det hele taget.

> "Bourbaki does not attempt to innovate mathematics, and if a theorem is in Bourbaki, it was proved 2, 20 or 200 years ago. What Bourbaki has done is to define and generalize an idea which already was widespread for a long time."
> (Dieudonné, 1970, p. 138)

Han mener altså, at Bourbaki var den første med en syntese - en begrebsafklaring og begrebspræcision - af visse "rodede" forskningsresultater. Det er klart, at netop dette forhold kan have haft en vis indflydelse, fordi det gjorde Éléments de Mathématique attraktiv i universitetsundervisningen, f.eks. som inspiration til noter og bøger.

Enkelte bind af Éléments de Mathématique kan også have haft indflydelse ved at være debatskabende. Bourbakis måde at formidle matematik på har ofte været kontroversiel p.g.a. at fremstillingerne har været anderledes end de gængse fremstillingsformer. Tornehave (samtale 1984) nævner Bourbakis fremstilling af mål- og integralteorien som eksempel.

Det omhyggelige valg af symboler og terminologi hos Bourbaki har også opnået en vis udbredelse. Nogle af de velkendte symboler fra mængdelæren (N, ∪, ∅, C) stammer fra Bourbaki, hvilket også gælder om ordene surjektivitet, bijektivitet mm. I denne forbindelse kan det være interessant at nævne Choquet (1962, p. 17-18), der ud fra en stikprøve i Mathematical Reviews når frem til en liste på 12 discipliner fra analysen og dens grænseområder, hvorom han skriver:

> "Diese in voller Aktivität befindlichen Disziplinen entwickeln sich nach den selben Prinzipien wie bei Bourbaki; die Sprache ist dieselbe."

Til sidst skal det nævnes, at Bourbaki har været fremhævet som inspirationskilde til "60'er matematikken" eller "den ny matematik", hvor f.eks. mængdelære finder vej helt ned til de laveste klassetrin.

Dieudonné (1982, p. 623) påpeger dog, at Bourbaki ikke selv har været fortaler for denne udvikling:

> "There is not the slightest trace of opinions expressed by Bourbaki as to the feasibility or advisability of introducing the concepts described in his treatise at a lower level, and certainly not in primary or secondary schools;"

Vi er enige i, at der ikke under pseudonymet Bourbaki foreligger betragtninger om undervisning på lavere klassetrin, men må samtidig fremhæve, at Dieudonné selv har været dybt engageret i debatten om den ny matematik og har plæderet for indførsel af strukturalistiske navne i undervisningen. På Royaumont-seminaret i 1959, der var en forløber til matematikreformerne, sagde han f.eks. om læseplanen for op til 14-årige:

> "Finally, in all these "experimental" mathematics, the language and notations now universally in use should be introduced as soon as possible: there is nothing mysterious or forbidding in abbreviating "belong to" by $\in$, or "implies" by $\Rightarrow$, or in speaking of "subset" instead of "geometrical locus". And calling some object by its proper name - like "group" or "equivalence relation" whenever such an object is naturally observed in some algebraic or geometric setting - does not at all imply that one has necessarily to develop in advance the abstract theory of groups or of equivalence relations." (OECD, 1961, p. 41)

Han mener desuden, at både deduktion og induktion på basis af enkle aksiomer bør præsenteres meget tidligt. Da Dieudonné selv er "en del" af Bourbaki, kan man sige, at Bourbakis tanker og begreber indirekte har fundet vej til læseplansdiskussionerne.

Efter Royaumont-seminaret blev der udarbejdet konkrete pensumforslag. Om disse skriver Skovsmose (1981 a, p. 36):

> "Begreber, der er nødvendige for at beskrive og analysere matematiske strukturer, placeres centralt. I den forstand kan man tale om, at reformen bliver præget af et strukturalistisk syn på matematikken."

Matematikreformen i Danmark bliver også kraftigt inspireret af denne udvikling og det nye begrebsapparatur finder vej helt ned til de første klassetrin (En detaljeret beskrivelse kan f.eks. ses i (Skovsmose, 1981).

4.4. Kritikken af Bourbaki

Rene Thom, der i (Fang, 1970) hævdes at have været med i Bourbakigruppen, har på visse punkter taget afstand fra indholdet i den ny matematik.

For det første mener han ikke, at det nødvendigvis er hensigtsmæssigt at introducere matematikkens nyere begreber i undervisningen, blot fordi disse har vist sig at være hensigtsmæssige i forskningspraksis. I (Thom, 1971, p. 695) skriver han:

> "Contemporary mathematicians, steeped in the ideas of Bourbaki, have had the natural tendency to introduce into secondary and university courses the algebraic theories and structures that have been so useful in their own work and that are uppermost in the mathematical thought of today. Yet one can ask with reason if the needs of specialists and their lated findings should be introduced into the school curriculum."

Eksempelvis finder han, at tendensen til at erstatte geometri med algebra er forkert, fordi geometrien har de klareste referencer til virkeligheden, og problemerne i geometrien kan gradueres i vanskelighed, hvorimod algebra-problemer har en tendens til at ende i symbolmanipulation og have meget trivielle løsninger, eller også er de så teoretiske, at de bliver for vanskelige.

I samme artikel tager han også afstand fra det formalistiske synspunkt, hvor matematikken ikke tillægges nogen ontologisk mening og snarere er en slags spil efter på forhånd fastlagte regler. Et af hans argumenter er, at formalisterne får store vanskeligheder med at forklare, hvorfor matematikken har så stor succes som beskrivelsesmiddel af virkeligheden. Om Bourbakis formalisme skriver han:

> "The old hope of Bourbaki, to see mathematical structures arise naturally from a hierarchy of sets, from their subsets, and from their combination, is, doubtless, only an illusion. No one can reasonably escape the impression that the most important mathematical structures (algebraic structures, topological structures) appear as fundamental data improved by the exterior world, and that their irrational diversity finds its only justification in reality."

Thom går altså på visse punkter direkte i opposition til Bourbaki. En lidt anderledes indgangsvinkel til kritikken af Bourbaki finder man i (Brieskorn, 1974) Her forsøger E. Brieskorn at vise, hvordan Bourbaki giver et forvrænget og ensidigt billede af matematikken og dens udvikling og slet ikke beskriver dialektikken i matematikken:

> "Das Bild, das der Mathematiker Bourbaki entwirft, enthölt sozusage eine angenähert richtige Vorstellung von ihrer Kinematik, aber nicht von ihrer Dynamik. Austatt in der Entwicklung der Mathematik das Wechselspiel von Analyse und Syntese, von Deduktion und Induktion, von axiomatische Methode und Konstruktion zu sehen, betont Bourbaki einseitig jeweils nur die eine der beiden Tendenzen."

5. DEN NYERE UDVIKLING I MATEMATIKKEN

Det er normalt at anse H. Poincaré og D. Hilbert for at være de sidste matematikere, der havde et rimeligt overblik over samtlige dele af matematikken. Allerede i 1940'erne anslog J. von Neumann at en professionel matematiker havde kendskab til langt under halvdelen af al matematik (von Neumann, 1947/74, p. 44).
Udviklingen er foregået såvel bredde- som dybdemæssigt. Matematikken indeholder i dag langt flere hoved- og underkategorier end for 100 år siden. Samtidig er kompleksiteten af forskningen i de enkelte områder blevet større. Dette har medført, at den typiske matematiker af i dag i høj grad specialiserer sig.
I dette kapitel ser vi på, hvad bourbakisterne finder er de væsentlige drivkræfter bag denne udvikling, samt hvad de mener er væsentligst at satse på i udviklingen.

5.1 Drivkræfter i den dybdemæssige udvikling

Ser vi først på drivkræfterne bag den dybdemæssige udvikling, må bourbakisternes holdning siges at være ret personcentreret. De ser forskningsmæssige fremskridt som produkter af enkeltpersoners intellekt. I (Bourbaki,1948/50, p. 227) står der f.eks. om matematikeren :

> "We cannot overemphasize the fundamental role played in his research by a special intuition .."

Eller i (Weil,1974/50, p. 304) :

> "Perhaps it is more true in mathematics than in any other branch of knowledge that the idea comes forth in full armor from the brain of the creator."

Dieudonné (1964,p. 239) mener at kunne skelne mellem taktikere og strateger blandt forskerne. Taktikerne løser problemer v.h.a. gamle og velafprøvede redskaber ofte dog anvendt på en utraditionel måde. Hvorimod strategerne analyserer de i et problem involverede begreber og deres indbyrdes sammenhænge indtil løsningen på problemet nærmest fremkommer triviel. Hertil kræves ofte lange udledninger af meget generelle teorier, der kan forekomme uden sammenhæng med det oprindelige problem. Han finder begge fremgangsmåder vigtige og siger desuden :

> "In the better man the two tendencies fortunately blend into a fruitful combination, of which Hilbert is perhaps the perfect example." (Diedonné, 1964, p. 240)

5.2 Vejen gennem den breddemæssige udvikling.

På det breddemæssige område anser bourbakisterne hovedsageligt udviklingen for at være et videnskabsinternt anliggende. I (Weil 1948/50, p. 296) skrives der :

> "...few men of our times are as completely free as the mathematician in the exercise of their intellectual activity."

Eller som Dieudonné (1982b, p. 330) skriver :

> "Le progres des mathématique est donc essentiellement d'origine interne."

Weil (1967/79, p. 468-9) finder dog - inspireret af "des conditions anarchiques" i Bourbaki-gruppens arbejdsform - at :

> "...ce sont des circonstances favorables á la naissance d'un organisme sain, mais toute tentative d'organisation, autant que je puisse voir, en mathématique, non seulement n'est pas de nature á favoriser la naissance de tels organismes, mais serait plutôt de nature á empêcher cette naissance. C'est pourquoi, en mathématique, je suis complétement en faveur de la désorganisation."

Dette skal opfattes som et indlæg mod forsøg på styring og

bureaukratisering af universitetsmiljøerne, hvilket viser, at han tillægger politiske/sociologiske forhold en vis betydning for udviklingen. Der er for Weil kun tale om, at de ydre rammer bestemmer den hastighed, hvormed matematikken udvikles. Der er ikke tale om, at matematikkens indhold styres eksternt.
For den individuelle matematiker er det dog stadig de store matematiske problemer - og ikke eksempelvis sociologiske forhold og problemer indenfor andre fagområder - der anses for at være den altafgørende faktor for matematikkens evolution. Weil (1947/50, p. 297) skriver om matematikeren :

> "..; the great problems furnish the daily bread on which he thrives."

Eller (Dieudonné,1979, p. 29) :

> "Because what happens in mathematics is, as Hilbert emphasized strongly, the life of mathematics are problems. You must have problems to solve."

Nu findes der jo et enormt antal uløste problemer i matematikken, og det næste spørgsmål bliver så, hvilke problemer bourbakisterne finder er de vigtigste. Dette spørgsmål har Dieudonné beskæftiget sig en hel del med. I bogen "Panorama des mathématiques pures"(1977) med undertitlen "Le choix bourbachique" forklarer han sin personlige opfattelse af, hvilke problemer bourbakisterne har anset for at være de væsentligste.

5.2.1 Træk af "Panorama des mathématiques pures"

Bogen er et forsøg på at afdække nogle karakteristika for indholdet af de såkaldte Bourbakiseminarer. Siden 1948 har Bourbakigruppen organiseret disse seminarer. Der har været ca. 18 forelæsninger fordelt på 3 seminarer årligt, dvs. over 500 forelæsninger i perioden 1948-1977. I indledningen præsenterer Dieudonné, hvad han forstår ved "Bourbakisk" matematik :

> "Par 'mathématiques bourbachiques' j'etends, á trés peu de choses prés, l'ensemble des questions qui ont été exposées dans les séances du Séminaire Bourbaki. Les collaborateurs de N. Bourbaki ont eu, dés le début de leur travail collectif, une certaine conception des mathématiques, se rattachant á la tradition de H. Poincaré et E. Cartan en France, de Dedekind et Hilbert et Allemagne. Les 'Eléments de Mathématique' ont été écrits pour donner á ce type de recherches des fondements solides et d'accés commode, sous une forme assez générale pour étre utilisables dans le plus grand nombre possible de contextes."

Bemærk, at Dieudonné her beskriver "Eléments de Mathématiques" som et vigtigt led i den til seminarerne relaterede forskningspraksis.
Han opridser så 6 forskellige problemkategorier i matematikken. De fire af dem, som man stort set <u>ikke</u> har beskæftiget sig med på seminarerne, er :

1. Problemer der sandsynligvis ikke kan løses ("Les problémes mort-nés").

2. Problemer hvis løsning ikke giver inspiration til løsning af andre problemer ("Les problemes sans postérité").

3. Specielle og isolerede problemer i teorier ("Les théories en voie d'etoilement"), hvor de største og vigtigste problemer er blevet løst.

4. Problemer i teorier ("Les théories en voie de délayage"), der er udsat for ufrugtbar aksiommanipulation.

Dieudonné markerer endog med sit ordvalg, at disse problemer ikke anses for at være særligt interessante. Det gør derimod de to sidste problemtyper, der har været behandlet hyppigt på Bourbakiseminarerne :

5. Problemer, der giver anledning til en rig og levende generel teori.
   Studiet af disse problemer kan afdække ukendte, underliggende strukturer, der ikke blot belyser de stillede pro-

blemer, men også danner grundlaget for et generelt og kraftigt værktøj, som kan belyse problemer indenfor andre områder.
Produkter af sådanne problemer er f.eks. teorien for Lie-grupper og algebraisk topologi.

6. Problemer, der giver anledning til en metode.
Disse problemer løses v.h.a. en teknik, som viser sig at kunne anvendes på lignende eller vanskeligere problemer.
Eksempler findes indenfor f.eks. analytisk talteori og teorien for endelige grupper.

Ifølge Dieudonné koncentrerer Bourbakiseminarerne sig mest om problemkategori 5.
Han arrangerer emnerne på Bourbakiseminarerne i en tavle med fire niveauer A,B,C og D. Emnerne i niveau A har været de mest almindelige på seminarerne - herefter aftager hyppigheden. Emnerne i niveau D har slet ikke været oppe på seminarerne, fordi de udgør færdige, konstituerede teorier. Men de danner dog grundlaget for de andre teorier og optræder i Eléments de Mathématique, hvor man jo kun beskæftiger sig med teorier af denne karakter.
Derefter beskrives emnerne i niveauerne A,B og C med angivelse af nogle af de vigtigste resultater, om teorierne finder anvendelse i naturvidenskaben og hvilke matematikere, der har givet de betydeligste bidrag til teorien.
På næste side har vi opført den niveaudelte tavle og tilføjet en ultrakort beskrivelse af nogle af emnerne.
I to opfølgende artikler (Dieudonné 1978,1979) til "Panorama des mathématiques pures" kalder Dieudonné Bourbakis udvalg af område for matematikkens "hovedstrøm" ("mainstream"). En teori i hovedstrømmen er således karakteriseret ved :

1) Den indeholder tilstrækkeligt mange og store uløste problemer.

2) Der benyttes ikke udelukkende ad hoc metoder til løsning af et enkelt problem ad gangen. Der udklækkes metoder og teorier, som dækker mange af problemerne på en gang og

Niveau	Emner	Beskrivelse
A	Algebraisk topologi	En del af topologien, der kendetegnes ved brugen af algebraiske begreber. Et af problemerne består i at klassificere topologiske rum ved hjælp af algebraiske karakteristika.
	Differentialtopologi	Studiet af de egenskaber ved differentiable mangfoldigheder, der er invariante under diffeomorfier.
	Ergodeteori	Studiet af målbare transformationer, specielt transformationer med invariant mål.
	Analytisk geometri	I dag studiet af analytiske funktioner af flere komplekse variable
	Algebraisk geometri	Behandler algebraiske mangfoldigheder dvs. punktmængder defineret at flere algebraiske ligninger i et rum af vilkårlig dimension.
	Øvrige emner: Differentiable mangfoldigheder, differentialgeometri, ordinære differentialligninger, ikke-kommutativ analyse, partielle differentialligninger, automorfe former, talteori.	
B	Homologisk algebra	Behandler matematiske objekters funktionale struktur (vha. kategorier og funktorer) i modsætning til deres indre struktur og benytter dette til at behandle problemklasser i algebraen i modsætning til at behandle dem hver for sig.
	Øvrige emner er: Liegrupper, abstrakte grupper, kommutativ harmonisk analyse, von Neumann algebraer, matematisk logik, sandsynlighedsregning.	
C	Kategorier og funktorer	Kategorier benyttes til at klassificere matematiske objekter med samme struktur. Funktorerne klassificerer kategorierne.
	Øvrige emner er: Kommutativ algebra og spektralteori	
D	På dette niveau optræder: Mængdelære, generel algebra generel topologi, klassisk analyse, topologiske vektorrum, integration. Bemærk at disse svarer fuldstændigt til overskrifterne på de 6 bøger i første del af Élémements de Mathématique.	

Tabel 5A.

måske kan benyttes på helt andre problemer end de oprindelige.

3) Teorier i hovedstrømmen inspirerer og påvirker hele tiden hinanden på forskellige måder.

Dieudonné formulerer eksplicit hovedstrømstanken, men Weil udtrykte ca. 30 år tidligere (Weil 1947/50,p. 304) et lignende synspunkt :

> "We believe to have shown, not only that there are large numbers of problems, but also that there are very few really important problems which are not intimately related to others which, at first sight, seem to be far removed from them. When a branch of mathematics ceases to interest any but the specialist, it is very near to its death, or at any rate dangerously close to a paralysis, from which it can be rescued only by being plunged back into the vivifying sources of the science."

I dette citat finder man desuden - implicit - en konsekvens af hovedstrømstanken, nemlig at matematikerne i hovedstrømme ikke bør specialisere sig for kraftigt, da dette vil modvirke evnen til at overskue sammenhænge mellem forskelligartede matematiske problemer og teorier. Dette udtrykkes mere præcist i (Weil,1961/79, p. 465) :

> "Les mathématiciens qui se spécialisent etroitement se condamnent á une vue incompléte de la mathématique contemporaine; l'essentiel est que chacun, méme dans sa spécialité, ait une connaissance suffisante de l'ensemble des mathématiques."
> tiques."

Hovedstrømstanken kan også benyttes som en teori til at forklare forskellige teoriers karakterskifte. Hos Dieudonné (1977,1978,1979) benyttes den, så vidt vi kan se, til at forklare 3 former for "teoribevægelse" :

1. En teori kan forlade hovedstrømmen, fordi den løber tør for store problemer. Her er der f.eks. tale om områderne i niveau D i skemaet s. 90. Teorien kan have uløste pro-

blemer stadig, men de er for specielle til at kunne knytte teorien til hovedstrømmen.

2. En teori kan forlade hovedstrømmen et stykke tid og så vende tilbage igen. Et eksempel er invarians-teori, som er vendt tilbage i en moderne udgave i teorien for kategorier og funktorer.

3. En teori kan aspirere til at komme ind i hovedstrømmen, men mangler endnu nogle metoder, som kan finde anvendelse i en bredere sammenhæng. Talteorien nævnes som et eksempel, fordi der her stadig kun findes ad hoc metoder. Man kan undre sig over, hvorfor talteorien hører til blandt de hyppigst forekommende emner på Bourbakiseminarerne, når den ikke tilhører hovedstrømmen.

Af den systematiske litteratursøgning (jvf. indledningen) kan vi se noget om, hvilke områder nogle af Bourbakis stiftere har beskæftiget sig med op gennem dette århundrede. Vi har set på om deres arbejde harmonerer med nogle af forholdene i hovedstrømsteorien.

5.2.2 Bourbakisternes produktion.

Vi har opgjort den samlede produktion fra litteratursøgningen i tabel 5B.
Disciplinoverskrifterne er hentet fra rubrikkerne i Mathematical Review. Disse ændres naturligvis i takt med den udvikling, der er i matematikken, og tabellen er derfor en meget enkelt beskrivelse af inddelingen i Review.
Herefter har vi set på artikelproduktionen i hver af disciplinerne for at se den tidslige udvikling, som er i kategorierne, og sammenlignet disse med udgivelserne af bøgerne i Éléments de Mathématique.

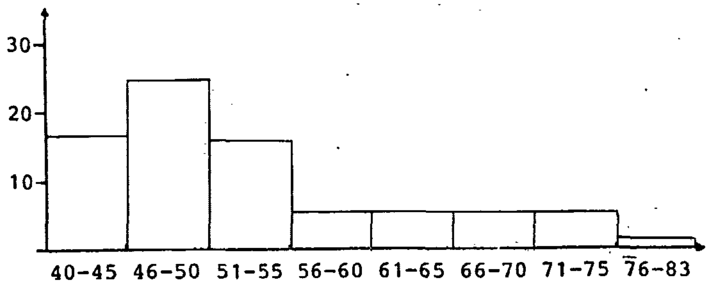
	Talteori	Algebra	Gruppeteori	Geometri	Topologi	Analyse	Grundlag	Diverse	I alt
André Weil	18+3b	6	6	15+8b	3	1	1	7+1b	57+12b
Jean Delsarte	2	1	0	0	0	6+2b	0	1b	9+ 3b
Claude Chevalley	2+1b	14+1b	14+5b	6+2b	3	1	1	0	41+ 9b
Henri Cartan	0	9	3	5	11+6b	18+4b	1	8+3b	55+13b
Samuel Eilenberg	0	18+1b	8	0	42	6	1+1b	6+1b	75+ 3b
Jean Dieudonné	1	36+2b	28+3b	6	17	36+4b	5+1b	13+7b	142+17b
I alt	23+4b	84+4b	59+8b	32+10b	76+6b	62+10b	9+2b	34+13b	379+57b

Tabel 5B

Antal artikler og bøger (b) som er registreret og anmeldt i Mathematical Review i perioden 1940 til 1983.

Vi ser her, at bourbakisterne må siges at leve op til deres egne krav om alsidighed - ikke bare den samlede produktion, men også de enkelte personer må siges at have en "bred" produktion. Produktionen er pænt fordelt på alle områder - dog mindst i grundlag, hvilket passer med deres "pragmatiske" forhold til grundlagsproblemer og grundlaget.
Produktionen er størst i de fundamentale matematiske discipliner (algebra og topologi), og analysen er også godt med, hvilket passer fint med fransk tradition.

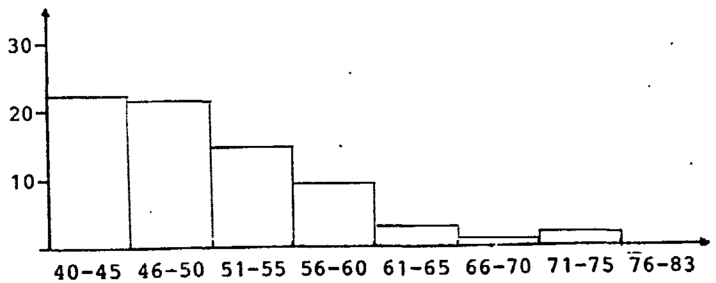
Algebra. i alt 84 artikler :



Figur 5C Algebra.

Den betydeligste produktion i algebra ligger i den første trediedel af perioden. I begyndelsen er det kun rubriceret som generel algebra, men fra '51 er der desuden ringe og legemer, topologisk algebra, Lie-algebra og lineær algebra. Fra '56 kommer der desuden artikler om homologisk algebra. Sammenligner vi dette med udgivelserne om algebra af Bourbaki (bog II) ser vi at hovedparten af bindene udkommer omkring '50. Der er således et sammenfald mellem de mange artikler i begyndelsen og udgivelse af bog II. Undtagelsen er bind 6 om homologisk algebra, der først udkommer i '80 efter en periode, hvor Bourbakisterne iøvrigt også har publiceret under denne disciplin. Bog 7 om Lie-algebra udkommer fra '60, men der er kun få artikler om denne disciplin.

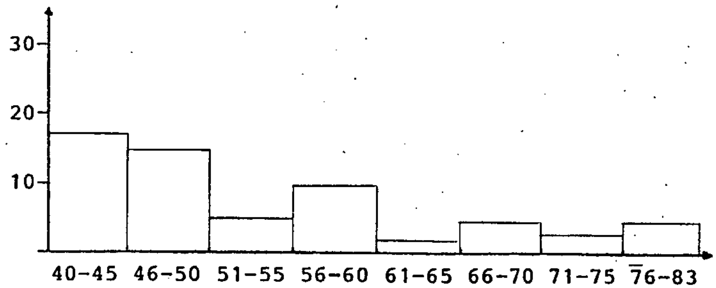
Topologi, i alt 76 artikler :



Figur 5D, Topologi.

Produktionen er jævnt faldende - fra over 20 artikler til ingen i '76. Generel topologi og algebraisk topologi er klart dominerende - og kun '56-'60 er der andre overskrifter nemlig differentialgeometri. Bog III om generel topologi udkom i '40erne og altså samtidig med den væsentligste produktion i denne kategori.

Analyse, i alt 62 artikler.

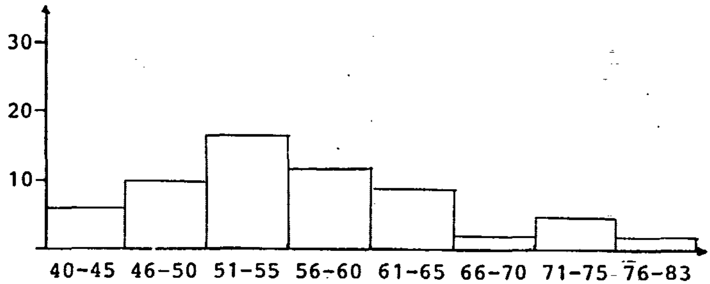


Figur 5E, Analyse.

Antallet af artikler er også her størst i begyndelsen med over 15 artikler og falder jævnt til under 5 artikler i perioderne efter '61. Allerede i første periode er der fem opdelinger af artiklerne i analyse. Disciplinerne analyse, funktional analyse, potentialteori og funktioner af komplekse variable er at finde gennem hele forløbet, mens ergodeteori kun er med i de 3 første perioder, målteori kun '61-'65 samt differentialligninger og specielle funktioner kun sidst i forløbet.

Sammenligningen med bøgerne i Éléments de Mathématique er på grund af de mange opdelinger ikke særlig sigende, og omfatter alle bøgerne IV, V og VI.

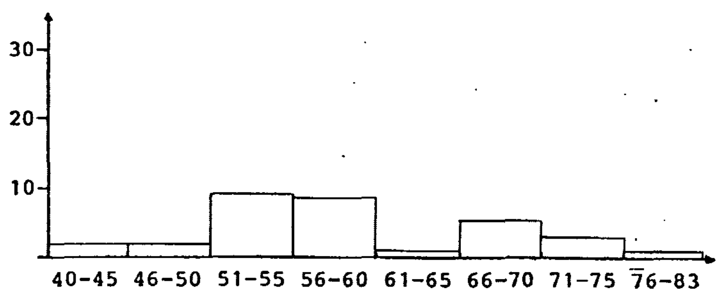
Gruppeteori, ialt 59 artikler :



Figur 5F, Gruppeteori.

Modsat de tre foregående kategorier topper gruppeteorien først i den tredie periode med sytten artikler. Produktionen er ellers jævnt fordelt før og efter.
Gruppeteori generelt dækker hele perioden, mens ringe og legemer kun er med i '51-'55 og homologisk gruppeteori kun i '61-'65. Lie-grupper er repræsenteret omkring hvor gruppeteorien iøvrigt topper. En sammenligning med bog 7 viser, at artiklerne i det væsentlige kommer før bogen om Lie-grupper.

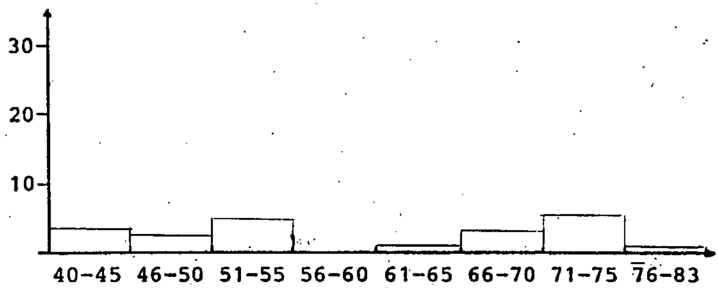
Geometri, i alt 32 artikler :



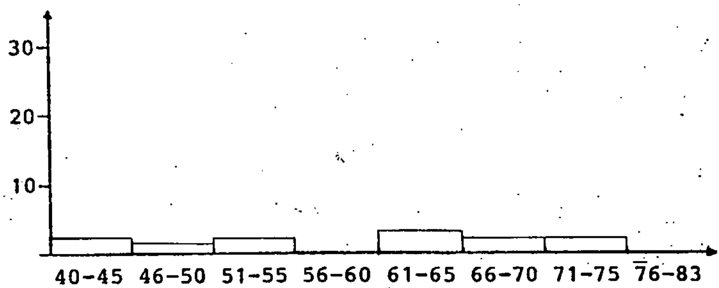
Figur 5G, Geometri.

Kategorien topper i '51-'60, men er ikke nogen stor gruppe, og der er derfor ikke nogen klar tendens. Kategorien indeholder generel, algebraisk - og diffrentialgeometri jævnt fordelt over hele perioden. Der er ikke nogen direkte parallel til bøger af Bourbaki.

Talteori, ialt 23 artikler, Grundlag, ialt 9 artikler :



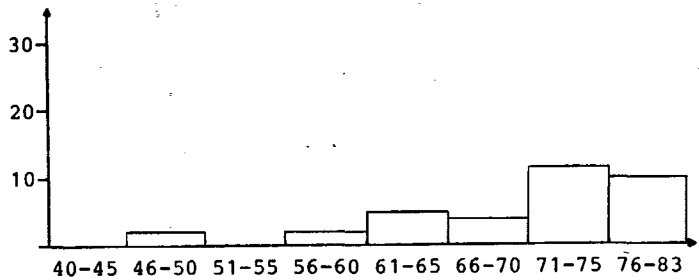
Figur 5H, Talteori.



Figur 5I, Grundlag.

Talteori og grundlag er begge meget små discipliner. De er kendetegnet ved ikke at være opdelt i underkategorier, og desuden ved at produktionen er jævnt fordelt over hele forløbet.

Diverse, ialt 34 artikler :

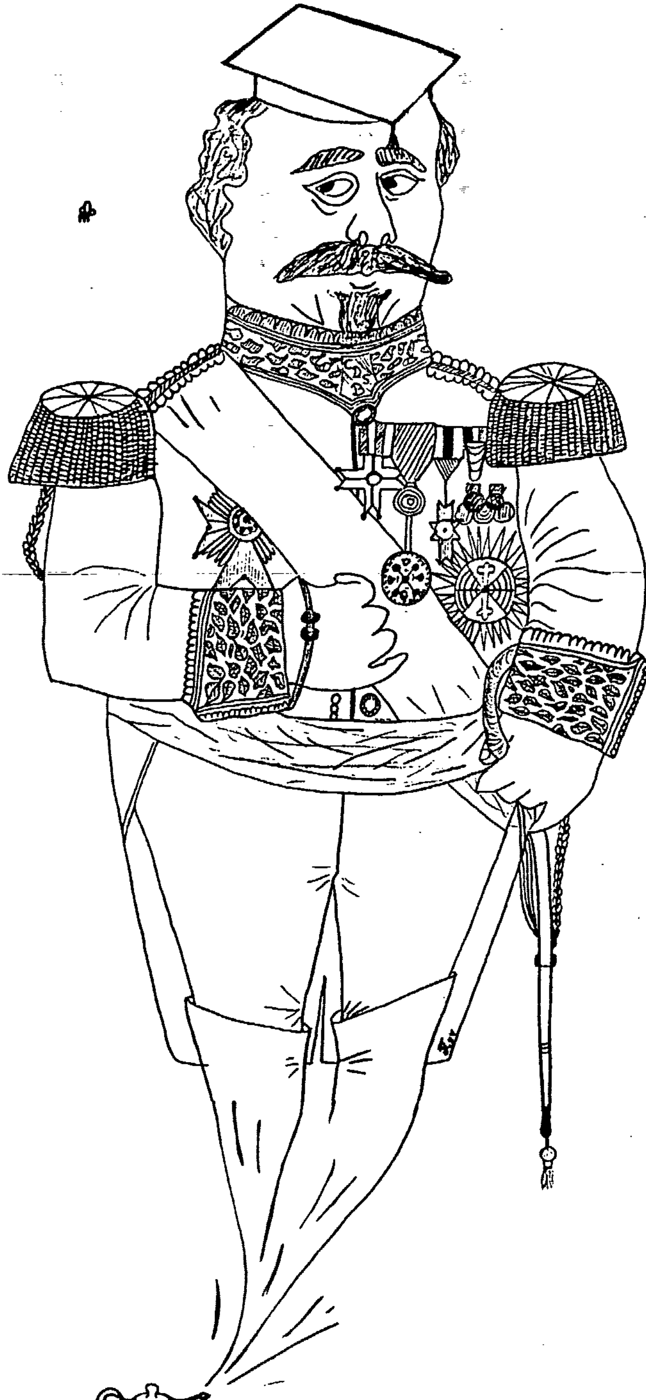


Figur 5J, Diverse.

Produktionen i denne kategori siger mere om videnskabsfolk generelt end den siger noget om bourbakisterne. Antallet af artikler af mere metafaglig og generel karakter stiger op gennem forløbet og topper i perioderne hvor forfatterne er over 60 år.

Umiddelbart kan vi konstatere to ting af det ovenstående : For det første falder produktionen sammenlagt meget i perioden fra 1960. Dette hænger naturligvis sammen med bemærkningen under diverse. For det andet ses der i de første perioder en tydelig sammenhæng mellem aktiviteten i de generelle dele af algebra og topologi og udgivelserne af Bourbaki. Dette ændres i takt med at algebra og topologi specialiseres, forskellige blandingsformer af disse udforskes og andre discipliner vinder indpas.
Det andet punkt afspejler en bevægelse i hovedstrømmen i forhold til starten af århundredet, hvor de generelle dele af algebra og topologi stadig var i hovedstrømmen. I perioden efter 1950 bliver det discipliner som algebraisk geometri, differentialgeometri, Lie-algebra, homologisk algebra, algebraisk topologi, differentialtopologi og andre, der netop er at finde i hovedstrømmen (i kategori B og A i tabel 5B).

Det er tydeligt at algebra og topologi - og forskellige underdiscipliner i høj grad dominerer de seks bourbakisters forskning. Af den samlede produktion udgør algebra, topologi og gruppeteori ca. 60% af artiklerne, og herudover kommer at begreberne også anvendes f.eks. i dele af geometri osv. Dette svarer tydeligt til struktur-ideen hvor netop de algebraiske og topologiske strukturer er de bærende, og dermed de universelle redskaber i matematikken.



6. DET BOURBAKISTISKE PARADIGME - INDHOLD OG KONSEKVENSER.

De rammer, der er udgangspunktet for en bestemt gruppe forskeres arbejde i en periode, kalder vi denne forsknings paradigme. Bourbakisterne har skabt deres eget paradigme og det har rødder i nogle bestemte historiske udviklinger i starten af dette århundrede.
En del af det bourbakististiske paradigme er et forsøg på at realisere matematikken udenom de anomalier (paradokser), der optrådte i matematikken omkring århundredeskiftet. Det er kendetegnet af et aksiomatisk-deduktive program, som er inspireret af det tilsvarende i Hilberts formalisme. Med hensyn til konsistensproblemerne udvikler bourbakisternes deres pragmatiske holdning for uforstyrret at kunne dyrke den rene matematik. I perioden var der desuden en væsentlig aktivitet med det mål at skabe ét fælles grundlag for matematikken - en fælles begrebsramme. Som den anden del af paradigmet bliver dette væsentligt for Bourbaki blandt anden på grund af den franske tradition for universalitet. Og Zermelo-Fraenkel systemet accepteres som et tilstrækkeligt kraftigt udgangspunkt. Samtidig ser vi af bourbakisternes produktion (afsnit 5.2.2), at det er generel topologi og algebra, der i starten udgør størstedelen af bourbakisternes arbejde. Hermed har vi skitseret de rammer, der betstemmer det bourbakistiske paradigme.

Den aktivitet, der foregår under et bestemt paradigme, kalder vi normalvidenskab, og består dels af den forskning, der foregår indenfor paradigmet og dels af en form for rengøring af de ofte meget rodede forskningsresultater.

Den forskning, der foregår i det bourbakistiske paradigme, karakteriseres af Dieudonnés hovedstrømsteori (afsnit 5.2.1). Hovedstrømsteorien beskriver jo først og fremmest bourbakisternes eget arbejde. Det er tvivlsomt, om den beskriver udviklingen i matematikken generelt. Vi mener snarere, den viser, hvordan bourbakisterne udforsker deres eget paradigme ud fra en meget kritisk holdning til, hvad der er værd at beskæftige sig med.

I den anden del af den normalvidenskabelige fase, der som nævnt består af at systematisere forskningsresultaterne, bliver Bourbaki til. Bourbaki repræsenterer jo forskningens syntesefase, hvor de opnåede forskningsresultater behandles og demonstreres for dem der skal videreføre paradigmet. Moderstrukturene og mængdeteorien er byggestene, der kan sammensættes på utallige måder og fremstille de væsentligste forskningsresultater opnået indenfor paradigmet. Fremstillingen rationaliseres ved at generalisere og aksiomatisere.

Det næste,vi vil forsøge at vurdere, er, hvilken betydning det bourbakiske paradigme har haft for den generelle forskningsmæssige udvikling i dette århundrede.

Der er flere ting,der peger på, at Eléments de Mathématique har været attraktiv for en del etablerede og kommende forskere, fordi det på en række områder har skabt orden i nogle rodede forskningsresultater. Præcisionen i det sprog og de metoder Bourbaki benytter har været med til at afklare indholdet og rækkevidden af disse resultater. Med strukturerne kan man desuden opdele et problem i nogle elementer, der kan analyseres hver for sig (se f.eks. opbygningen af de reelle tal), hvilket giver en vis begrebsafklaring.

Det er derimod vanskeligere at vurdere, om Bourbakis arbejde helt konkret har været en hjælp i forskningen, dvs. været afgørende for om nogle givne problemer har kunnet løses. Vi har ikke undersøgt dette, men vi kan sige noget om, hvilket forskningspraksis Bourbaki inviterer til.

Der må blive tale om en praksis, hvor paradigmet udforskes ved at studere forskellige kombinationer af moderstrukturer (multiple strukturer og blandingsstrukturer). I dette studium bliver der vide rammer for, hvordan aksiomerne kan benyttes (svækkelse og skærpelse af aksiomssystemer).

Et problem i denne forbindelse er, at Bourbaki ikke selv afstikker grænser for, hvilke områder indenfor paradigmet, der er de væsentligste. Bourbakisterne har selv en klar mening om, hvad der er vigtigst, men dette finder vi ikke træder klart frem hos Bourbaki, der næsten pr. definition er ligeglad med, hvordan hans arbejde bliver brugt.

Et andet problem er, at vilkårlig struktursammensætning og aksiommanipulation de facto ikke forhindrer forskerne i hurtigt at specialisere sig og inviterer til at "mekanisere" forskningsprocessen. Her bliver der igen en modsætning til Bourbakisternes ønske om universalitet hos forskerne og betoning af intuitionens væsentlige rolle.

Til sidst vil vi fremhæve, at vi finder, at det bourbakistiske paradigme har et alvorligt begrundelsesproblem. Bourbakisternes videnskabsopfattelse er udpræget internalistisk, det vil sige de mener, at matematik er en autonom enhed, der bliver styret/bør styres af forhold indenfor matematikken. Derfor får de vanskeligheder med at begrunde, hvorfor det er så nødvendigt at udforske netop deres paradigme. Internalismen sammen med formalismen er med til at isolere matematikken fra omverdenen. Begrundelsen for at dyrke den rene matematik må derfor søges i matematikken selv, men dette afstår bourbakisterne fra at gøre - ikke mindst i Eléments de Mathématique. Lad os derfor slutte med et citat af John von Neumann (1947/1974, p. 30), der illustrerer en mere virkelighedsnær matematikopfattelse:

> "Das wesentlichste Merkmal der Mathematik ist meiner Ansicht nach ihre ganz besondere Beziehung zu den Naturwissenschaften oder, allgemeiner ausgedrückt, zu jeder Wissenschaft, die die Erfahrung auf einer höheren Ebene als der rein beschreibenden interpretiert".

OVERSIGT OVER MATEMATIKERE M.F., DER ER NÆVNT I PROJEKTET.

Navn		Periode	Nation
Eugenio	Beltrami	1835 - 1899	Italien
Emile	Borel	1871 - 1856	Frankrig
Marcel Emile	Brelot	1903 -	Frankrig
Egbert	Brieskorn	Nutidig	Tyskland
Georg	Cantor	1845 - 1918	Rusland/Tyskland
Elie	Cartan	1869 - 1961	Frankrig
Henri	Cartan	1906 -	Frankrig
C.G.	Chabauty	Nutidig	Frankrig
Claude	Chevalley	1909 - 1984	Frankrig
Claude	Chevallier	Nutidig	Frankrig (?)
René	de Possel	1905 -	Frankrig
George-William	de Rham	1903 -	
Richard	Dedekind	1831 - 1916	Tyskland
Jean	Delsarte	Nutidig	Frankrig
	Denjoy	1884 -	
Jean	Dieudonné	1906 -	Frankrig
	Diogenes	-÷323	Grækenland
Jaques	Diximier	1924 -	Frankrig
Charles	Ehresmann	Nutidig	
Samuel	Eilenberg	1913 -	Polen/USA
	Euklid	ca.÷295	Alexandria
Pierre De	Fermat	1601 - 1665	Frankrig
Adolf Abraham	Fraenkel	1891 - 1965	Tyskland
Friedrich Gottlob	Frege	1848 - 1925	Tyskland
Roger	Godement	1921 -	
Alexandre	Grothendieck	Nutidig	Holland
Jacques	Hadamard	1865 - 1963	Frankrig
Paul Richard	Halmos	1916 -	Ungarn/USA
Felix	Hausdorff	1868 - 1942	Tyskland
Jaques	Herbrand	1908 - 1931	Frankrig
David	Hilbert	1862 - 1943	Tyskland
G.	Julia	Nutidig	Frankrig
Jean Louis	Koszul	1921 -	
Thomas	Kuhn	1922 -	USA
Serge	Lang	1927 -	USA
Henri Léon	Lebesque	1875 - 1941	Frankrig
Marius Sophus	Lie	1842 - 1899	Norge/Tyskland
Saunders	Mac Lane	Nutidig	USA
	Montel	1876 -	
Charles Emile	Picard	1856 - 1941	Frankrig
Jules Henri	Poincaré	1854 - 1912	Frankrig
Lord A.B.	Russell	1872 - 1970	England
Pierre	Samuel	1921 -	Frankrig
Laurent	Schwartz	1915 -	Frankrig
Jean-Pierre	Serre	1926 -	Frankrig
Albert Thoralf	Skolem	1887 - 1963	Norge
John Torrence	Tate	1925 -	USA
René	Thom	1923 -	Frankrig
Johann	von Neumann	1903 - 1957	Ungarn/USA
André	Weil	1906 -	Frankrig
Alfred North	Whitehead	1861 - 1947	England
E.F.F.	Zermelo	1871 - 1953	Tyskland

ELEMENTS DE MATHEMATIQUE, 1. del.

Les Structures Fondamentales de l'Analyse.

BOG	BIND	KAPITEL	FØRSTE UDGAVE	TITEL	UDKOM SOM NR.
I				THEORIE DES ENSEMBLES	
	1	1	1954	Description de la mathématique formelle	17
		2		Théorie des ensembles	
	2	3	1956	Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers	20
	3	4	1957	Structures	22
II				ALGEBRE	
	1	1	1942	Structures algébriques	4
	2	2	1948	Algèbre linéaire	6
	3	3	1948	Algebrestensorielles, extérieures et symétriques	7
	4	4	1950	Polynômes et fractions rationelles	11
		5		Corps commutatifs	
	5	6	1952	Groupes et corps ordonnés	14
		7		Modules sur les anneaux principaux	
	6	8	1958	Modules et anneaux semi-simples	23
	7	9	1959	Formes sesquilinéaires et formes quadratues	24
	6	10	1980	Algèbre homologique	39
III				TOPOLOGIE GENERALE	
	1	1	1940	Structures topologiques	2
		2		Structures uniformes	
	2	3	1942	Groupes topologiques	3
		4		Nombres réels	
	3	5	1947	Groupes à un paramètre	5
		6		Espaces numèriques et espaces projectifs	
		7		Les groupes additifs R^n	
		8		Nombres complexes	
	4	9	1948	Utilisation des nombres réels en topologie générale	8
	5	10	1949	Espaces fonctionels	10

1. del fortsat.

BOG	BIND	KAPITEL	FØRSTE UDGAVE	TITEL	UDKOM SOM NR.
IV				FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE	
	1	1	1949	Dérivées	9
		2		Primitives et intégrales	
		3		Fonctions élémentaires	
	2	4	1951	Équations différentielles	12
		5		Étude locale des fonctions	
		6		Développements tayloriens généralises. Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin	
		7		La fonction gamma	
V				ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES	
	1	1	1953	Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué	15
		2		Ensembles convexes et espaces localement convexes	
	2	3	1955	Espaces d'applications linéaires continues	18
		4		La dualité dans les espaces vectoriels topologiques	
		5		Espaces hilbertiens	
VI				INTEGRATION	
	1	1	1952	Inégalités de convexité	13
		2		Espaces de Riesz	
		3		Mesures sur les espaces localement compacts	
		4		Prolongement d'une mesure espaces Lp	
	2	5	1956	Intégration des mesures	21
	3	6	1959	Intégration vectorielle	25
	4	7	1963	Mesure de Haar	29
		8		Convolution et représentations	
	5	9	1969	Intégration sur les espaces topologiques séparés	35

ELEMENTS DE MATHEMATIQUE, 2. del.

BOG	BIND	KAPITEL	FØRSTE UDGAVE	TITEL	UDKOM SOM NR.
7				GROUPES ET ALGEBRES DE LIE	
	1	1	1960	Algèbres de Lie	26
	2	2	1972	Algèbres de Lie libres	37
		3		Groupes de Lie	
	3	4	1968	Groupes de Coxeter et systèmes de Tits	34
		5		Groupes engendrés par des réflexions	
		6		Systèmes de racines	
	4	7	1975	Sous- algèbres de Cartan, éléments réguliers	38
		8		Algèbres de Lie semi-simples déployées	
8				ALGEBRES COMMUTATIVE	
	1	1	1961	Modules plats	27
		2		Localisation	
	2	3	1961	Graduations, filtrations, et topologies	28
		4		Idéaux premiers associés et décomposition primaire	
	3	5	1964	Entiers	30
		6		Valuations	
	4	7	1965	Diviseurs	31
9				THEORIES SPECTRALES	
	1	1	1967	Algèbres normées	32
		2		Groupes localement compacts commutatifs	

ELEMENTS DE MATHEMATIQUE, Fascicule de résultats

1	1	§ 1-8	1939	THEORIE DES ENSEMBLES	1
2	1	§ 1-13	1953	TOPOLOGIE GENERALE	16
3	1	§ 1-7	1955	ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES	19
4	1	§ 1-7	1967	VARIETES	33
	2	§ 8-15	1971	VARIETES	36
1	1		1960	ELEMENTS D'HISTORIQUE DES MATHEMATIQUES	

Christensen, Asger Spangsberg og Klaus Thomsen; 1983.
Matematik i Tyskland i det 19. århundrede
Specialeopgave i videnskabshistorie
Aarhus Universitet.

Davis, Philip J. og Reuben Hersh; 1981.
The Mathematical Experience
Penguin Books, London.

Dieudonné, Jean; 1961/62.
Moderne Mathematik und Unterricht auf der Höcheren Schule
Mathematisch-Physikalische Semesterberichte
Vol. 8, 1962, pp. 166-178.

Dieudonné, Jean; 1964.
Recent Developements in Mathematics
The American Mathematical Monthly
Vol 71, pp. 239-248.

Dieudonné, Jean; 1968/70.
The Work of Nicolas Bourbaki
The American Mathematical Monthly
Vol. 77, 1970, pp. 134-145.

Dieudonné, Jean; 1939/71.
Modern Axiomatic Methods and the Foundations of Mathematics
i Lionnis (ed.) 1971.

Dieudonné, Jean; 1977.
Panorama des Mathématiques Pures, Le choix bourbachique
Gauthier-Villars
Bordas, Paris 1977.

Dieudonné, Jean; 1978.
Present trends in pure mathematics
Advances in Mathematics
27 (1978), No 3. pp. 235-255.

Dieudonné, Jean 1979.
The Bourbaki Choice
Mathematical Medley, Singapore 7, pp. 28-37, 1979.

LITTERATURLISTE.

Bell, J. L. og M. Machover; 1977.
A Course in Mathematical Logic
North-Holland Publishing Company, Oxford

Booss, Bernhelm; 1982.
i Ralf Schaper; 1982.

Bourbaki, Nicolas; 1949.
Foundations of Mathematics for the Working Mathematician
The Journal of Symbolic Logic
Vol. 14, No. 1, March 1949, pp 1-8.

Bourbaki, Nicolas; 1948/50.
The Architecture of Mathematics
The American Mathematical Monthly
Vol. 57, 1950, pp. 221-232.

Brieskorn, E.; 1974.
Uber die Dialektik in der Mathematik
Originalbidrag i Otte, 1974.

Cartan, Henri; 1943.
Sur le fondement logique des mathèmatiques
Revue Scientifique, LXXXI, 1943, pp. 3-11.

Cartan, Henri; 1958.
Nicolas Bourbaki und die Heutige Mathematik
Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 76.
8/1 - 1958 Düsseldorf.

Cartan, Henri; 1958/79.
Nicolas Bourbaki and Contemporary Mathematics
The Mathematical Intelligencer, vol. 2, No. 1
Springer-Verlag.

Choquet, Gustave; 1961/62.
Die Analysis und Bourbaki.
Semesterberichte (Göttingen)
9,1-21, 1963

Dieudonné, Jean; 1982 a.
The work of Bourbaki during the last thirty years
American Mathematical Society pp. 618-623.

Dieudonné, Jean; 1982 b.
Les grandes lignes de l'evolution des mathématiques
pp. 329-338. Artikel i Themistockles m. fl. 1982.

EM I ; 1970.
Nicolas Bourbaki
Éléments de Mathématique, Théorie des ensembles,Livre I,
Hermann, Paris, 1970.

EM II ; 1970.
Nicolas Bourbaki
Éléments de Mathématique, Algèbre, Chapitres 1 à 3,Livre II
Hermann, Paris, 1970.

EM III ;1966.
Nicolas Bourbaki
Elements of Mathematics, General Topology, Part 1
Hermann, Paris, 1966.

Fang, J. ; 1970.
"Bourbaki" : Towards a Philosophy of Modern Mathematic I.
Paideia Press, New York, 1970.

Fraenkel, A.a., Yehoshua Bar-Hillel, Azriel Levy ; 1973.
Foundations of Set Theory, 2. udgave.
North-Holland Publishing Company, Amsterdam·London.

Halmos, Paul R. ; 1957.
"Nicolas Bourbaki"
Scientific American, vol. 196, nr. 5, 1957, pp. 88-99.

Kragh, Helge og Stig Andur Pedersen ; 1981.
Naturvidenskabsteori.
Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck. København.

Lam, Liew Hai ; 1980.
"Nicolas Bourbaki" - a non-existent mathematician.
Menemui matematik = Discovering mathematics.
Kuala Lumpur, 1980, vol. 2(1) : 16-29.

Lionnis, F.le (ed.) ; 1971.
Great Currents of mathematical thought, vol. 2, pp. 251-266.
New York, 1971.

Mathematical Review ; 1940 - 1984.
Anvendt til litteratursøgning på
Nicolas Bourbaki, H. Cartan, C. Chevalleier, J. Delsarte,
J. Dieudonné, S. Eilenberg, A. Weil.

OECD ; 1961.
New Thinking in School Mathematics.
Rapport fra Royaumont Seminaret 23/11 - 4/12 1959.
The Directorate for Scientific Affairs, OECD. France.

Otte, Michael (ed.) ; 1974.
"Mathematiker über die Mathematik".
Springer-Verlag. Berlin·Heidelberg·New York, 1974.

Perez, Jesus Fortea ; 1976.
Bourbaki as a manneristic cultural phenomenon.
Fra "Langage et Pensée Mathematiques". Achtes de colloque international organisme au centre Universitaire de Luxembourg les 9., 10. et 11. Juin 1976, pp. 411-38.

Schaper, Ralf ; 1982.
Hochschuldidaktik der Mathematik, Tagung an der Gesamthochschule Kassel 9-11/10, 1980.
Hochschuldidaktische materialen 84 (1982).

Skovsmose, Ole ; 1980.
Forandringer i matematikundervisningen.
Didaktiske arbejdspapirer/Gyldendals Mathematikbibliotek.
København.

Skovsmose, Ole ; 1981a.
Matematikundervisning og kritisk pædagogik.
Didaktiske arbejdspapirer/Gyldendals Mathematikbibliotek.
København.

Skovsmose, Ole ; 1981b.
Alternativer i matematik undervisningen.
Didaktiske arbejdspapirer/Gyldendals Mathematikbibliotek.
København.

Tamotsu, Murata ; 1975.
Quelques remarques sur les "Éléments d'Histoire des Mathématiques" de M. Bourbaki.
Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli, 24, pp. 169-187, 1976.

Themistocles, M. og George M. Rossias ; 1982.
Selected studies : physics-astrophysics, Mathematics, history of Science.
North Holland·Amsterdam·New York, 1982.

Thom, René ; 1971.
"Modern" Mathematics : An Educational and Philosophic Error.
American Scientist, 1971, vol. 59, nov-dec, pp. 695-699.

Vidal, Abascal E. ; 1964.
Nota sobre el grupo de matemáticos "Nicolás Bourbaki"
¿Un nuevo Euclides?
Acta Cientifica Compostelana. Santiago de Compostela, 1964, vol. 1, p. 55-60.

von Neumann, J. ; 1947.
"The mathematician", Tysk oversættelse i (Otte,1974,p.29).

Weil, André ; 1948/1950.
The Future of Mathematics.
The American Mathematical Monthly, vol. 57,1950,pp.295-306.
(oversat fra fransk).

Weil, André ; 1979.
Oevres scientifiques, Collected papers.
vol. I 1926-51
vol. II 1951-64
vol. III 1964-78.
Springer-Verlag, New York Inc.
Heri citeret :
1961 "Organisation et desorganisation en mathématique."

TEKSTER fra IMFUFA Roskilde universitetscenter.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinoe og Peter H. Lassen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. — Nr. 3 er a jour ført i marts 1984
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. — Nr. 4 er p.t. udgået.
Mogens Niss.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". — Nr. 5 er p.t. udgået.
Helge Kragh.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". — Nr. 7 er udgået.
B.V. Gnedenko.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PA MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's:"Nova Stereometria Doliorum Vinarioum".
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". — Nr. 12 er udgået
Mogens Brun Heefelt

13/79 "CAVENDISH'S FORSOG I GYMNASIET".
Projektrapport af Gert Kreinoe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".
Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of realitivity".

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.
Nr. 24 a+b er p.t. udgået.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".

Projektrapport af Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".

Oluf Danielsen.

Nr. 30 er udgået.

Udkommer medio 1982 på Fysik-, Matematik- og Kemilærernes forlag.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".

Projektrapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk.

Vejleder: Stig Andur Pedersen.

Nr. 31 er p.t. udgået

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMALINGER OG MOSSBAUEREFFEKTMALINGER".

Projektrapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og Preben Jensen.

Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK-NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".

Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".

ENERGY SERIES NO.1.

Bent Sørensen.

Nr. 34 er udgået.

Publ. i "Renewable Sources of Energy and the Environment", Tycooli International Press, Dublin, 1981.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".

Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN ?".

Fire artikler.

Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".

ENERGY SERIES NO.2.

Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".

Projektrapport af Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.

Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.

Nr. 38 er p.t. udgået

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".

Jens Hojgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".

Projektrapport af Arne Jorgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.

Vejleder: Per Nørgaard.

Nr. 40 er p.t. udgået

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".

ENERGY SERIES NO.3.

Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".

Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".

2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".

ENERGY SERIES NO.4.

Bent Sørensen.

44/81. "HISTORISK UNDERSOGELSE AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".

Projektrapport af Niels Thor Nielsen.

Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82

46/82 I+II "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE - ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".

Projektrapport af Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.

Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".

ENERGY SERIES NO.5.

Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSOGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PA ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".

Projektrapport af Lis Eilertzen, Jorgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Norregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn, Isac Showiki.

Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".

Projektrapport af Preben Nørregaard.

Vejledere: Jørgen Larsen & Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY". ENERGY SERIES NO.6.

Rapport af Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GORES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?"

Projektrapport af Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS"

Bernhelm Booss & Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".

Arne Jakobsen & Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.

Stig Andur Pedersen & Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En bibliografi.
Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82:
Se også tekst 62/83.

56/82 "ÉN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af Per Hammershøj Jensen & Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.
Projektrapport af Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION", som et eksempel på en naturvidenskab - historisk set.
Projektrapport af Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En bibliografi. 2. rev. udgave
Else Høyrup

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8
David Crossley & Bent Sørensen

64/83 "VON MATHEMATIK UND KRIEG".
Bernhelm Booss og Jens Høyrup

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen, Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss & Klaus Grünbaum

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen

67/83 "ELIPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"

Projektrapport af Lone Biilmann og Lars Boye

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.

Projektrapport af Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid, Frank Mølgård Olsen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK" - en test i 1.g med kommentarer

Albert Chr. Paulsen

70/83 "INDLÆRINGS- OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU"

Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.

Vejleder: Klaus Grünbaum & Anders H. Madsen

71/83 "PIGER OG FYSIK" - et problem og en udfordring for skolen?

Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich & Mette Vedelsby

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S. Peirce.

Peder Voetmann Christiansen

73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG" - økologisk contra traditionelt

ENERGY SERIES No. 9

Specialeopgave i fysik af Bent Hove Jensen

Vejleder: Bent Sørensen

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik

Projektrapport af Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.

Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM" - Case: Lineær programmering

Projektrapport af Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl, Frank Mølgaard Olsen

Vejledere: Mogens Brun Heefelt & Jens Björneboe

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.

ENERGY SERIES No. 10

Af Niels Boye Olsen og Bent Sørensen

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?" Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller

Projektrapport af Svend Åge Houmann, Keld Nielsen, Susanne Stender

Vejledere: Jørgen Larsen & Jens Bjørneboe

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM"

Specialerapport af Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant

Vejleder: Niels Boye Olsen

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE"

Projektrapport af Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.

Vejleder: Bernhelm Booss

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B"

Mogens Brun Heefelt

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM"

Specialerapport af Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen

Vejleder: Niels Boye Olsen

82/84 "MATEMATIK- OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND"

Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983

Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY"

PEACE RESEARCH SERIES NO. 1

af Bent Sørensen

84/84 " NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".

Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK"

Specialerapport af Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE"

PEACE RESEARCH SERIES NO. 2

af Bent Sørensen

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS"

af Jeppe C. Dyre

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS"

af Detlef Laugwitz

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING"

af Bjarne Lillethorup & Jacob Mørch Pedersen

90/84 "ENERGI I 1.G- en teori for tilrettelæggelse"

af Albert Chr. Paulsen

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET"
1. Lærervejledning

Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson

Vejleder: Torsten Meyer

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET
2. Materiale

Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson

Vejleder: Torsten Meyer

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM-NON-LOCALITY"
af Peder Voetmann Christiansen