TEKST NR 9 1978

LASSE RASMUSSEN

OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING

Motiver til Kepler's:
"Nova Stereometria Doliorum Vinarioum"

Projektrapport
Vejleder : Anders Madsen

TEKSTER
fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

TEKSTER
fra
IMFUFA Roskilde universitetscenter.

I denne tekstrække er tidligere udkommet:

1. "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
   Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolaj Lomholt. Vejleder: Anders Hede Madsen.

2. "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund - Projektrapport.
   Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe, Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss.

3. "Opgavesamling", bredde-kursus i fysik.
   Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4. "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalisme.

5. "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE."
   Helge Kragh.

6. "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret."
   Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.

7. "Matematikkens forhold til samfundsøkonomien"
   B.V.Gnedenko.

8. "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
   Peder Voetmann Christiansen.

F O R O R D

Projektarbejdet påbegyndtes foråret 1978 og strakte sig, sideløbende med andet studiearbejde, igennem sommerferien frem til sidste halvdel af december 1978.

Projektet afløser i forbindelse med emnekredsstudier 3. modul i centrets matematiklæreruddannelse.

INDHOLDSFORTEGNELSE

FORTEGNELSE OVER APPENDICER

I PRÆSENTATION AF PROBLEMSTILLINGEN.

Historikere mener, at med metoderne i "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum" ("NSDV", 1615) blev der taget afgørende skridt i infinitesimalregningens historie. Det er en udbredt opfattelse, at årsagen til, at Kepler skrev "NSDV", var den praktiske problemstilling, som bestod i at undersøge påliđeligheden af den såkaldte målestangsmetode (Visierrute Verfahren), som anvendtes ved rumfangsbestemmelser af vinfade.

For eksempel i "Einfluss der Praxis auf die Entwicklung der Mathematik vom 17. bis zum 19. Jahrhundert" - hvor Ivo Schneider har sat sig for at undersøge, hvilke former for indflydelse praksis har haft på matematikhistorien - fastslåes:

"Eine weitere wichtige Wurzel für den Infinitesimalkalkül war die der Flächenbestimmungen. Obwohl sich diese Methoden meistens an die griechischen Methoden, inbesondere an die von ARCHIMEDES verwendeten anschlossen, wofür z. B. die Indivisibelnmethode von CAVALIERI stehen mag, bietet doch das sehr konkrete Problem der Inhaltsbestimmung von Weinfässern mit den sogenannten Visierruten den Ausgangspunkt für KEPLERs Untersuchung, die auch den Titel "Stereometria doliorum", d.h. Inhaltsbestimmung von Fässern, trägt."

P 200 i 1).

I "The history of the calculus and its conceptual development" skriver Carl B. Boyer:

"The task of writing a complete treatise on volumetric determinations seems to have been suggested to Kepler by the prosaic problem of determining the best proportions for a wine cask".

P 107 i 2).

Margaret E. Baron synes at have et mere nuanceret forhold til "NSDV"'tilblivelseshistorie:

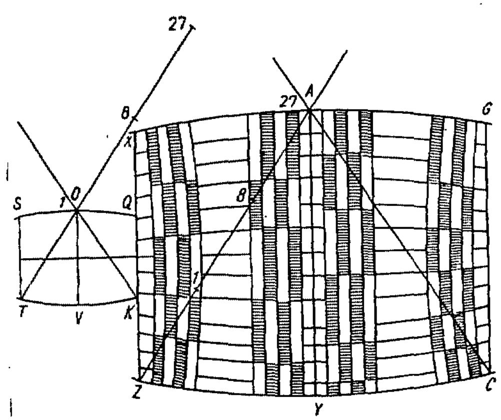
"The Nova stereometria, published in 1615, contained a fascinating collection of infinitesimal methods for estimating the volumes of solids of revolution. Like Stevin, Kepler had practical reasons for preferring a simplified presentation, for the book was written as a handbook to enable wine gaugers to estimate more efficiently the volumes of wine casks."

P 110 3)

"And whereas the ostensible purpose of the work justified the use of plausible arguments and a departure from Archimedean proof structure the mathematical content so far exceeded the practical needs of wine gaugers that there can be no question that Kepler intended to make a serious contribution to mathematics."

P 114 3)

For at fjerne eventuel forvirring skal målestangsmetoden præsenteres. Efter den metode fastsættes rumfanget udfra afstanden målt fra spunshullet midt på fadets væg til det dybeste sted ved en af fadets bunde. (Se figus 1). Afstanden måles med en såkaldt "Visierrute", som er kalibreret, så rumfanget umiddelbart kan aflæses.



Figur 1. (Taget fra 4))

I "NSDV" tænker Kepler sig et fad sammensat af to halvfade. På grund af stavenes ubetydelige krumning går han ud fra, at et halvfad tilnærmelsesvis kan have cylinderform eller form som en keglestub. Han undersøger rumfangsforholdene hos cylindre med ligestore diagonaler i aksetværsnittet og dermed samme værdi efter målestangsmetoden, og viser, at det maksimale rumfang opnåes, når højden forholder sig som $\sqrt{2}:1$ til radius i grundfladen.
Inspireret af opmålinger af vinfade fra forskellige egne benævner Kepler denne type cylindre for østrigske cylindre.
Hos fade tilvirket af østrigske bødkere viser det sig nemlig, at dette forhold er opfyldt mellem stavlængden og diameteren i bunden, mens forholdet mellem stavlængde og diameter antager signifikant andre forhold hos fade fra andre geografiske områder.
Tilsvarende betegnes keglestubbe for østrigske, når sidelinien divideret med radius i den mindste cirkel - cirkelen i "bunden" - er $\sqrt{2}$.
Østrigske fade er derfor sammensat af to østrigske cylindre eller østrigske keglestubbe.

Kepler viser, at for vinfade med samme målestangsværdi sammensat af østrigske halvfade, er variationen i rumfanget relativ ubetydelig i nærheden af den østrigske cylinder. Vinfade tilvirket andre steder vil derimod ikke besidde denne egenskab. I Østrig er forholdet mellem længden af et fads staver og diameteren i bunden altså gunstigst for målestangsmetodens anvendelse.

Da udviklingen af infinitesimalregningen vurderes at have haft stor effekt på den øvrige del af matematikken er det interessant at vide, om det er dækkende konkluderet, at en praktisk problemstilling har været en væsentlig rod i infinitesimalregningens opkomst. ærindet for nærværende rapport er derfor at undersøge, hvorvidt denne konklusion savner modifikation.

II OM MATEMATIKKENS UDVIKLING.

II. 1. Indledning.

Bedømmelsen af interne og eksterne faktorers status i videnskabernes udvikling danner en af fronterne imellem videnskabshistoriske opfattelser. Imellem matematikhistoriske synsmåder tegnes en af skillelinierne i diskussionen, da også af vurderingen af, hvilke af de to forhold, der har spillet den dominante respektive recessive rolle i udviklingen af det betragtede matematiske felt i den givne periode.

Sigtet med nærværende arbejde har imidlertid ikke i første række været at indtage en position i forhold til denne front, men mere snævert at opspore interne forhold, som potentielt har influeret på "NSDV"s historiske opkomst.

I den hensigt at kvalificere dette udgangspunkt har jeg ladet mig inspirere af mere detaljerede redegørelser for karakteren af de interne drivkræfter i matematikken. Raymond L. Wilders kategori "hereditary stress" indtager her en fremtrædende plads.

II. 2. Kræfter i matematikkens udvikling.

Raymond L. Wilder opsummerer i sin bog "Evolution of mathematicals concepts" 5) de hovedkræfter han kan se

råder i udviklingen af matematikken. For at antyde den ramme kategorien "hereditary stress" indgår i hos Wilder, anføres denne opsummering nedenfor:

1. Omgivelsernes tryk.
   (a) Fysiske.
   (b) Kulturelle
2. (Hereditary stress) arvelige eller indre påvirkninger/tryk.
3. Symbolisering.
4. Diffusion.
5. Abstraktion.
6. Generalisation.
7. Konsolidering.
8. Diversifikation.
9. Kulturel forsinkelse (isolation).
10. Kulturel modstand.
11. Selektion.

Ved en senere lejlighed har Wilder tilføjet et punkt 12.: Specialisering. 6).

"Hereditary stress" eller den indre kraft betegner en kulturel og ikke en psykologisk kraft. Kraften er intern til matematikken og ikke ekstern. Ifølge Wilder synes dens hovedkomponenter at være 7) :

A. (capacity) Kapacitet eller rummelighed:

Betydningen af og den indre interesse i de resultater, som den grundlæggende teori på det pågældende område er i stand til at yde.

B. (significance) Vigtighed (løfterig):

Hvor lovende *forventninger* er til områdets evne til at yde resultater af betydning for fremskridt indenfor matematikken eller andre områder.

C. (challenge) Udfordring:

Opkomsten indenfor feltet af problemer, hvis løsninger kræver et påfund og/eller en metode, der udskiller dem fra de problemer, hvis løsning er rutinemæssig.

D. (status) Status - anseelse:

Anseelsen, som området har blandt matematikere.

E. (conceptual stress) Begrebstryk:

Tryk skabt af behovet for nyt begrebsmateriale til at danne en logisk basis, som kan forklare fænomener.

F. (paradox) Paradoks:

Opkomsten af paradokser eller inkonsistenser.

Wilder betoner, at ikke alle komponenter nødvendigvis behøver at være operative eller effektive til ethvert tidspunkt. I en periode, hvor den basale teori på et givet område ikke er færdigdannet, hverken intuitivt eller nedfældet - en periode han kalder forløber perioden - vil komponent A stadig være på et begyndende stade.

I samme periode vil komponent F almindeligvis ikke være tilstede overhovedet.

Kort sagt, i forhold til et givet felt er styrken - af de enkelte komponenter den indre kraft er sammensat af - ikke konstant, men kan vokse og aftage med tiden.

III OM KEPLERS MATEMATIK OG BEHANDLINGEN AF VINFADS-PROBLEMET I SÆRDELESHED.

III. 1. Keplers matematiske effekt.

Fritz Kubach opgør, p 40 i 7) de områder indenfor matematikken Kepler bidrog til. Bedømmelsen af den faktiske skabende virkning lader F.K. tjene som målestok til organisering af områderne. Målt herefter træder to områder indenfor Keplers matematiske værk frem i forgrunden:

1. Teorien for regulære Polygoner og Polyedre. (Fremfor alt i "Mysterium Cosmographicum" (1596) og "Harmonices Mundi" (1619).

2. Forarbejder til udviklingen af infinitesimalregningen. (Væsentligst i "NSDV" (1615) og i "Nova astronomia" (1609).

Stadig ifølge F.K. kommer på andenpladsen yderligere tre områder, som Kepler har øvet indflydelse på - og først og fremmest hjulpet ved sin anvendelse af dem:

1. Logaritmeregningen. (I "Logarithmentafel" samt "Nachtrag" og "Rudolfinischen Tafeln".).

2. Teorien om Keglesnit. (Fremfor alt i "Nova Astronomia" og "Geometrische Optik.").

3. Teorien for ligninger (I visse afsnit i "Nova Astronomia" og"Harmonices Mundi .").

Til slut nævner F.K. et område af særlig egenart, men som alligevel i sin målsætning er karakteristisk for Keplers arbejde:

Tilvejebringelse af matematiske fagord, specielt tyske betegnelser.

III. 2. Om "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum."

III. 2. 1. Tilblivelseshistorie 4) 8) 9) 10) 11)

I 1615 udgav Kepler i Linz - hvor han i 1612 havde tiltrådt stillingen som de storøstrigske stænders landskabsmatematiker - bogen "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum." (Findes bl.a. i 4)). Et par år i forvejen, efteråret

1613, havde Kepler giftet sig for anden gang, og som god husfader henlagt enkelte mindre fade af årets rige vinhøst. Det skildrer han lunefuldt i værkets dedikation, "Epistola dedicatoria", P 9 i 4):

"Det var forrige november (1613).
Jeg havde netop ført en ny hustru i hus, da Østrig, efter en ligeså rig som god vinhøst, sendte talrige lastskibe opad Donau for at dele sin rigdom med os i Nori +), og hele Linz var som opbygget af vinfade, der kunne købes til antagelige priser. Da følte jeg mig som ægtemand og god husfader forpligtet til at se mig om efter de nødvendige drikkevarer til mit hus. Jeg lod derfor nogle fade bringe til mit hus og lagde dem i kælderen. Fire dage senere ankom sælgeren med én målestang og målte et efter et fadenes indhold på samme måde uden hensyntagen til geometrisk form eller overvejelser og beregninger. Overbeviste sig om, at længden fra fadets bug til det dybeste sted var den samme i begge ender. Så fastslog han fadets indhold efter det tal, der var præget ved den opnåede længde. Udfra det tal blev prisen sat."

+) Nori ell. Noricum: Landskab mellem Donau og Alperne. Det omfatter størstedelen af det tidligere kejserdømme Østrig.

I Württemberg havde Kepler stiftet bekendtskab med den omstændeligere rhinske fadmålemetode, og det forekom ham slet ikke indlysende, hvordan denne østrigske fremgangsmåde, som følge af forskelligheder i fadenes former, skulle kunne give så meget som tilnærmelsesvis det rigtige indhold. Hans tvivl ville kun kunne fjernes af en stereometri, som satte ham istand til at beregne rumfang af fade med givne mål. Fra dette øjeblik indledte Kepler sit stereometriske arbejde.

Allerede den 17. december mente Kepler at have nået sit mål. Denne dag skrev han nemlig dedikationen til fyrst Maximilian von Liechtenstein og friherre Helmbard Jörger, som han tilegnede det knap 6 sider lange manuskript i nytårsgave.

Skønt det næppe havde udgjort mere end et par trykte sider, fandt han, trods store anstrengelser, ingen bogtrykker, der for egen risiko ville udgive hans korte latinske afhandling.

Muligvis var manuskriptet efterhånden forsvundet fra Keplers hukommelse, hvis det ikke lige var fordi han pludselig savnede et arbejde til en trykker

Dengang Kepler startede sin virksomhed i Linz, var byen uden trykker.

I foråret 1615 tilbød en bogtrykker byen Linz sin tjeneste. Ivrig efter at få en trykker til byen, anbefalede Kepler tilbuddet. Dermed pådrog Kepler sig forpligtelsen til at skaffe den ubemidlede trykker den første ordre.

I denne situation kom han i tanke om manuskriptet, der stadig lå hos forlæggeren i Augsburg.

Da Kepler efter stort besvær får sit manuskript tilbage, er han også selv skuffet over det. Rent bortset fra, at det forekom ham tarveligt, opdagede han i manuskriptet en så skæbnesvanger fejl, at den tvang ham til at ændre afhandlingens grundlag, skønt han var i tidnød. Derved vokser det, som i "NSDV" skal blive til "Arkimedes' stereometri" betragtelig udover udkastets omfang. Endvidere tilføjes "Supplement til Arkimedes'stereometri".

Ved samme lejlighed fremkommer også det, der skal blive til værkets 2. del med de maximumsbetragtninger, hvoraf betimeligheden af den østrigske målemetode kommer til at fremgå.

Sluttelig har det nye arbejde kun lige dedikationen til mæcenen til fælles med udkastet.

Den 15. juli var arbejdet gjort. I den utrolig korte tid af 6 uger.

Nær dette tidspunkt må enkelte bøger allerede være trykt, eftersom den færdige bog, "NSDV", kunne købes på Frankfurts efterårsmesse 1615. Se titelbladet fra 4) på hosstående side.

III. 2. 2. Oversigt over "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum".

Bogen består af tre dele. Første del er den længste og har to kapitler. Første kapitel bærer overskriften "Arkimedes' stereometri" og indeholder 17 sætninger, som omhandler regulære runde legemers rumfang og overfladeareal.

NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRImis Auſtriaci, figuræ omnium aptiſsimæ;

ET

USUS IN EO VIRGÆ CUBIcæ compendioſiſſimus & planc ſingularis.

Acceſſit

STEREOMETRIÆ ARCHIMEDeæ Supplementum.

Authore

Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I. ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum Mathematico.

Cum privilegio Cæſareo ad annos XV.

ANNO  M. DC. XV.

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

Mens Arkimedes begrænsede sig til studiet af rumfang og flader, der fremkommer ved rotation af keglesnit omkring principalakser, udvider Kepler sine undersøgelser til at omfatte rotation af keglesnit omkring linier i disses plan, som er parallele med eller skærende principalakserne.

På denne måde skelner Kepler mellem 93 rotationslegemer, af hvilke han opkalder flere efter navne på frugter: Æble, pære, citron, oliven, etc.

Værkets anden del bærer overskriften "De østrigske vinfades stereometri".

Efter et indledende kapitel om den bedste tilnærmelse til det østrigske vinfads form, tjener den dobbelte keglestub som model i det videre.

På grundlag af denne form gennemgåes i 29 fortløbende sætninger fadindholdets afhængighed - ved fast målestangs værdi - af to forhold.

For det første stavelængden i forhold til radius i fadets bund, og dernæst den store radius ved fadets bug i forhold til radius i bunden. Målet ved undersøgelserne er at vise det østrigske fads gunstige egenskaber.

Tredie del er den korteste og handler om målestangsmetodens anvendelse ved fadmåling. Heri besvares praktiske spørgsmål, der kan afgøres på basis af værkets forrige to dele. Endvidere gøres et mislykket forsøg på at beregne indholdet af delvis fyldte fade.

III. 2. 3. Kort gennemgang af udvalgte dele af "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum." 2) 4) 8) 9) 10).

I fortsættelse af ovenstående oversigt gives et mere detaljeret indtryk af udvalgte punkter i værkets to første dele.

I "Arkimedes' Stereometri" gennemgår Kepler resultaterne fra Arkimedes' rumfangsberegninger. Men ikke v.h.a. den græske bevisførelse og "udtømningsmetoden", fordi han mener at kunne tilvejebringe de samme resultater på en mindre kompliceret måde.

Hos Kepler benyttes ikke den indirekte vej, ad hvilken Arkimedes omhyggeligt viser, at alle rumfang forskellig fra det sande fører til en absurditet.

Kepler benytter den direkte metode, hvor tankegangen med uendelig små størrelser anvendes.

Forskellen mellem Arkimedes' og Keplers bevisførelse kan tydeliggøres ved nedenstående eksempel:

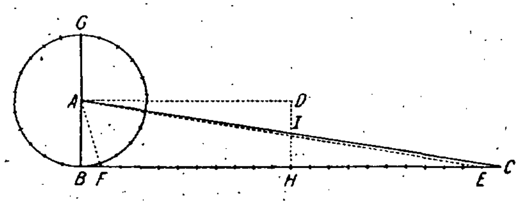
Arkimedes beviser sætningen

"Arealet af en vilkårlig cirkel er lig med en retvinklet trekants, hvor den ene katete er lig med cirklens radius og den anden lig med cirklens omkreds"

indirekte, idet han med udgangspunkt i en indskreven og omskreven polygon viser, at cirklen umulig kan være større eller mindre end den i sætningen omtalte trekant.

Arkimedes' bevis gennemgåes detaljeret i appendix A.

Imidlertid bemærker Kepler, at ånden i beviset synes ham at være følgende - se figur 2 :



Figur 2. (Taget fra 4) p. 15.

"Periferien af cirklen BG har lige så mange dele som punkter, nemlig uendelig mange.

Hver af disse dele betragtes som grundlinie i en ligebenet trekant med benet AB.

Det giver uendelig mange trekanter, med toppunkt i cirklens centrum A.

Antages hele cirklens omkreds udstrakt til en ret linie - således at BC... er lig cirklens omkreds - så er grundlinierne af førnævnte trekanter eller udsnit arrangeret, så de ligger helt op mod hinanden på en og samme rette linie BC.

Lad BF være en af disse vilkårlige små grundlinier og ligeså CE, og F, E, C være forbundet med A.

Da er der på linien BC lige så mange trekanter af ABF's og AEC's slags som udsnit i cirkelfladen. Og da deres grundlinier, ligesom det er tilfældet for grundlinierne BF, EC, er lig med udsnittenes, og de alle har fælles højden AB fælles med udsnittene, så re trekanterne ABF og AEC hver især lig et af cirkeludsnittene.

Summen af førnævnte trekanter med grundlinie på den rette linie BC, d.v.s. trekanten ABC, bliver lig summen bestående af alle førnævnte cirkeludsnit, d.v.s. cirkelfladen".

I denne fremstilling lader Kepler en egentlig infinitesimalregning træde frem. Han forestiller sig cirkelperiferien sammensat af uendelig mange liniestykker ("punkter") og betragter disse som grundlinier fra uendelig mange ligebenede trekanter med toppunkt i centrum. Summen af alle trekanter giver så cirklens areal.

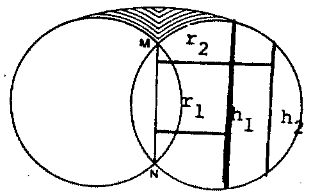
På analog vis går Kepler frem, når det gælder legemer, idet han forestiller sig keglen sammensat af uendelig mange pyramider og cylinderen af uendelig mange prismer.

I forlængelsen af den gennemgåede sætning om sammenhængen mellem en cirkel og en retviklet trekant, viser Kepler , at cylinderen med radius r i grundfladen og med højden h har samme rumfang som et ret prisme med samme højde, hvis endeflader er den retvinklede trekant med kateterne.

Når Kepler i "Supplement til Arkimedes" beregner rumfanget af sine nye rotationslegemer, bygger hans integrationsmetode på denne forvandling af cylinderen til et rumfangslige prisme.

Rumfanget mellem to koaksiale cylindre, kan nemlig nu tænkes overført i den polygon med samme rumfang, der frem kommer som difference mellem de til cylindrene svarende prismer.

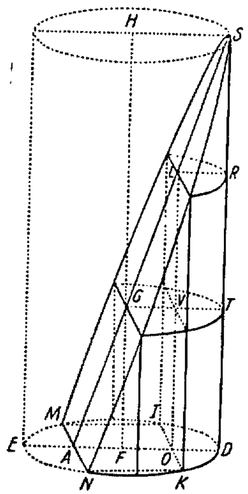
Kepler indlægger en følge af koaksiale cylindre om rotationslegemets omdrejningsakse. Imellem de koaksiale cylinderflader indesluttes tynde rørskaller med konstant tykkelse, men med variabel højde. På figur 3, er en sådan rørskal skraveret på et tværsnit af æblelegemet.



Figur 3. (Bearbejdelse af fig. 4 . 6 p. 113 i 3))

Omformes samtlige rørskaller i deres rumfangslige polygoner, så danner summen et rumfangsudsnit af en cylinder.

Æblelegemets cylinderudsnit er vist på figur 4.



Figur 4 (Hentet i 4) p. 50).

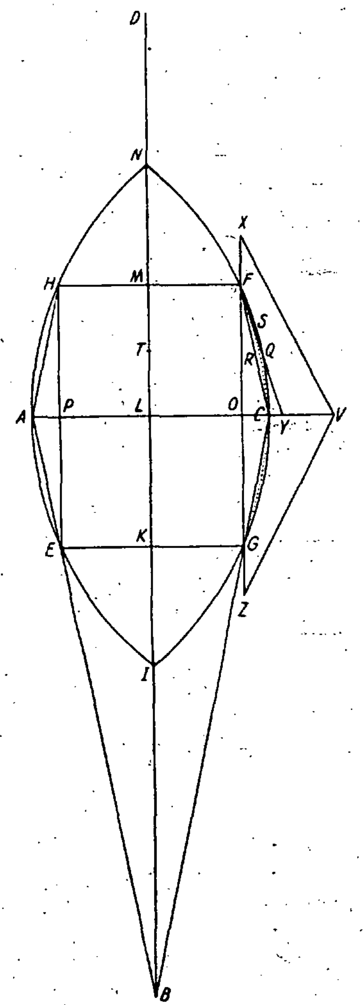
Rumfangene af andre legemer kan umiddelbart aflæses på

samme figur. F. eks.:

Rumfanget af et citronlegeme (IDK drejet om IK) = Rumfangsudsnittet SLR.

I sin videre strategi opdeler Kepler det til rotationslegemet hørende cylinderudsnit i mindre udsnit, der hver især repræsenterer mere trivielle legemer, hvis rumfang han allerede kender eller forholdsvis let kan beregne.

For vinfadsproblematikken er det væsentligste udbytte af "Supplement til Arkimedes", at Kepler regnemæssigt behersker citronstubben som tilnærmelse til den østrigske fadform. Se figur 5.



Figur 5. (Er vist i 4) p. 73.)

"NSDV"'s anden del bruger under overskriften: "De østrigske vinfades stereometri", det foranstående til undersøgelse af målestangsmetodens anvendelighed ved fadmåling.

Anden del indledes med gentagelse af, at det østrigske fad tilnærmelsesvis begrænses af en citronstub, der igen tilnærmelsesvis kan erstattes af en dobbelt keglestub eller en cylinder, da krumningen er meget lille.

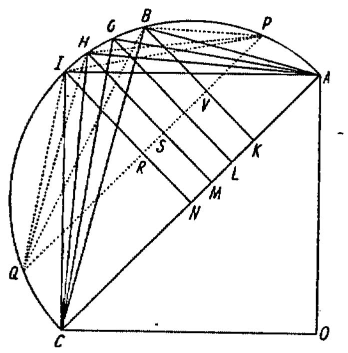
Derfor beskæftiger han sig i anden del udelukkende med cylindre og keglestubbe med samme diagonal - d.v.s. samme målestangsværdi - i deres tværsnit. Se figur 5.

Delens første sætning handler om rektangler - som cylindersnit - med samme diagonal.

Sætningen siger, at det rektangel, hvis højde er lig grundlinien, er størst - altså kvadratet.

Kepler beviser sætningen ved et geometrisk ræsonnement udfra figur 6, hvor AC repræsenterer rektanglernes fælles diagonal.

Den retvinklede trekant AIC med højden IN, over AC, er naturligvis større end alle øvrige trekanter ABC, der ganske vist har samme grundlinie, men mindre højde BK.



Figur 6. (P 74 i 4)).

Sætningen, som siger, at rumfangene henholdsvis arealerne af ligedannede legemer og flader forholder sig som tredie potens respektiv kvadratet på deres sider, ledte oprindelig Kepler til en fejlslutning.

I analogi med sætningen blev sluttet, at for cylindre og keglestubbe må gælde: Til det største aksesnit hører det største legeme.

Han blev dog hurtigt klar over, at dette var en fejlslutning. Og i sætning 3 fortælles, at rumfangene af cylindre, med samme diagonal i aksesnittet, ikke står i samme forhold som arealerne af aksesnittene. Samt at det største aksesnit ikke tilhører det største legeme.

Ved et raffineret geometrisk ræsonnement findes den cylinder med given diagonal, som har størst rumfang. Denne cylinder er karakteriseret ved, at diagonalen i grundfladen forholder sig til højden som $\sqrt{2}:1$. (D.v.s.: Højden forholder sig som $\sqrt{2}:1$ til radius.)

Altitudo	Hoc pacto si fuerit Basis diameter	Erit corpus columnae
1	20 —	399
2	20 —	792
3	20 —	1173
4	20 —	1536
5	19 +	1875
6	19 +	2184
7	19 —	2457
8	18 +	2688
9	18 —	2871
10	17 +	3000
11	17 —	3069
Subsemi-	dupla	3080
12	16.	3072
13	15 +	3003
14	14 +	2856
Aequa-	les	2828
15	13 +	2625
16	12	2304
17	11 —	1887
18	8 +	1368
19	6 +	741
20	0.	0

Tabel 1. (Hentet i 4) p. 78).

Nu kommer vi til den så ofte citerede bemærkning, som af mange vurderes at have været grundlæggende for udviklingen af infinitesimalregningen.

Kepler fortæller, at når en cylinder kun afviger en smule fra maximalcylinderen, så er rumfangsformindskelsen forsvindende, thi:

"Circa maximum verò utrinque circumstantes decrementa habent initio insensilia." (P 85 i 4)).

("Omkring maksimum, sandelig på begge sider, det omkringstående synes i begyndelsen at aftage umærkeligt.")

Nærliggende lå det for at antage, at den samme gunstige egenskab indtræder hos keglestubbe, når forholdet mellem sidelinie og radius har samme forhold $\sqrt{2}$:1.

Ihvertfald mente Kepler det forholdt sig sådan, dengang han lavede sit udkast.

Først 1½ år senere, da manuskriptet blev sendt tilbage fra forlæggeren, blev han opmærksom på, at dette er forkert.

Som nævnt tidligere fører behovet for at korrigere den falske argumentation Kepler frem til i løbet af ganske kort tid at formulere værkets resterende teori, hvor man finder svarene på vinfadsspørgsmålet.

Efter sætning 22, er Kepler istand til at konkludere, at den ene måling, som foretages ved målestangsmetoden, er fuldt tilstrækkelig til at bestemme rumfanget af et østrigsk fad.

Senere viser han også, at blot der er aflæst samme værdi på målestangen, kan man tilnærmelsesvis gå ud fra, at rumfanget af fadets to halvdele er ens, selvom deres form ikke er nøjagtig ens.

Det komplicerede geometriske ræsonnement underbygges af "numerisk induktion".

Der udgåes fra en diagonal på 20 og rumfangene svarende til højderne 1, 2, 3, ..., 20 beregnes. Se tabel 1.

Rumfanget antager så sin største værdi, når højden ligger mellem 11 og 12.

Med den givne diagonal kommer basisdiameteren da til at ligge mellem 17 og 16.

Det giver forholdet $\sqrt{2}$:1 mellem basisdiameter og højde.

Og det var netop det forhold, Kepler havde iagttaget hos de østrigske fade.

III. 3. Om "Messekunst Archimedes". 4)

Keplers arbejdsgivere, de storøstrigske stænder, så ikke med sympati på hans beskæftigelse med fadmålingen.

Man lod ham forstå, at stænderne meget hellere havde set:

"dergleichen Arbaitt einstellen, vnd die wüchtigere Sachen, darauff er fürnemlich bestellt seye, als die Tabulas Rudolphinas vnd die Landmappan zu völligem Werckh nichten." 11).

Alligevel lagde han ikke dette tema tilside, men begyndte en omarbejdelse af sit værk m. h. p. læsere, som hverken magtede latin eller matematiske overvejelser.

Fem måneder efter, omkring julen 1615, er den tyske udgave "Messekunst Archimedes" færdig, og kan købes på forårsmessen i Frankfurt.

Titelbladet er vist på hosstående side. (Hentet p. 137 i 4)).

Også denne gang måtte Kepler bære den økonomiske risiko ved udgivelsen.

Opbygningen af "Messekunst" forløber parallelt med "NSDV".

"Messekunst har også tre dele, som med få undtagelser behandler temaer fra tilsvarende dele af "NSDV".

Redegørelsen for den østrigske fadforms gunstige egenskaber fremstilles udfra to "vidunderlige egenskaber ved det østrigske fad".

Außzug auß der Vralten

Messe Kunst Archimedis

Vnd deroselben newlich in Latein außgangener Ergentzung / betreffend

Rechnung der Cörperlichen Figuren / holen Gefessen vnd Weinfässer / sonderlich deß Oesterreichischen / so vnder allen anderen den artigisten Schick hat.

Erklärung vnnd bestättigung der

Oesterreichischen Weinvisier Ruthen / vnd deroselben sonderbaren gantz leichten vnd behenden Gebrauchs an den Landfässern: Erweitterung dessen auff die außländische / so auch auff das Geschütz vnnd Kugeln.

Sampt einem sehr nutzlichen

Anhang

Von vergleichung deß Landtgebräuchigen Gewichts / Elen / Klaffter / Schuch / Wein vnd Traid Maaß / vnder einander / vnd mit andern außländischen / auch Alt Römischen.

Allen vnnd jeden Obrigkeiten / Beampteten / Kriegs Obristen / Handelsleuten / Büren: Müntz: Baw: vnd Rechen Meistern / Wein Visierern / Haußwürthen / vnd meniglichen in vnd ausser Lands / fast dienstlich: sonderlich aber dem Kunst: vnnd Antiquitetliebenden Lesern annämlich.

Gestelt durch

Johann Kepplern / der Röm. Kays. Mt. vnd Dero getrewer Löbl. Landschafft deß Ertzhörtzogthumbs Oesterreich Ob der Enß Mathematicum.

Prov. XVI.

Rechte Waag vnd Gewicht ist vom Herren / vnd alle pfunde im Sack sind seine Wercke

Vom Authore verlegt / vnnd gedruckt zu Lintz durch Hansen Blancken.

ANNO

M. DC. XVI.

Mit Kays. Freyheit auff XV. Jahr nicht nachzudrucken.

Det godtgøres, at målestangsmetoden er tilstrækkelig nøjagtig, selv når bødkeren ikke præcist har ramt det tilstræbte forhold mellem stavenes længde og diagonalen i bunden. Eftersom rumfanget af en variabel cylinder er stationært ved fastholdt måleværdi i nærheden af den østrigske cylinder, fordi den østrigske cylinder har det største rumfang.

> Sihest also / das die Oesterreichische Fässer / sie gerahten gleich lenger oder kürtzer / nur das dessen nicht gar zuvil werde / allwegen beynahe ihre Visier halten / vnd ihnen baider orten ein kleines abgehe / so nicht zuschätzen ist.'

P 212 4).

Dette er "Erste wunderbarliche Aigenschafft eines oesterreiches Fasses".

Men også når man ved fastholdt måleværdi overgår fra en østrigsk cylinder til en østrigsk keglestub, vedbliver målestangsmetoden med at være brugbar. Idet rumfanget er stationært ved ændringer af den østrigske keglestub omkring den østrigske cylinder, hvilket følger af, at den østrigske cylinders rumfang er maximum for de beslægtede østrigske keglestubbe:

> Helt also ein Oesterreichisches Faß allezeit seine Visier / es hab einen solchen Bauch oder hab keinen / vnd diß ist die andere wunderbarliche aigenschafft eines Oesterreichischen Fasses vor allen anderen: darumb dann die Oesterreichische behende weise zu Visieren sonst inn keinem Land / da anderley Sorten Fässer im brauch seind / gebraucht werden mag.'

P 216 4).

I virkeligheden er den østrigske form endnu gunstigere for målestangsmetoden end det fremgår af de to nævnte egenskaber - påpeger E. A. Weiss i 14). Det fremgår af appendix B, hvor det østrigske fad analyseres i komprimeret form.

IV. S A M M E N F A T N I N G.

IV. 1. D i s k u s s i o n.

Afsnit II. 2. præsenterede de drivkræfter Wilder kan indkredse i matematikkens historie.

I den hensigt at perspektivere rapportens problemstilling redegøres i det følgende for de drivkræfter jeg har kunnet spore, har spillet ind på Keplers "NSDV".

Wilders nævner omgivelsernes tryk som en af kræfterne i matematikkens udvikling.

Talrige undersøgelser har kundgjort, at videnskabernes udvikling ikke kun sker uafhængigt af omgivelserne:

Samfundets organisering, ideer, konflikter og resourcer.

Keplers videnskabelige arbejde udgør ingen undtagelse omend, det kan være vanskeligt at dechiffrere denne indflydelse på personniveau.

Såvel Keplers astronomi som matematik lader sig forbinde med de politisk-økonomiske forhold omkring 1600.

Hans store interesse for astronomi - en beskæftigelse, der ledte ham frem til en teori for solsystemet - forekommer således ikke overraskende i lyset af de generelle rammer for datidens ideologi, hvor uenighed om kosmologiske begreber præger samfundets konflikter. Det samme kan siges om grundlaget for Keplers teori - Thyco Brahes nøjagtige observationer.

Ganske på samme måde forholder det sig med Keplers matematik. Det vil være fejlagtigt blot at forholde de forskellige dele til adskilte emner eller spørgsmål.
Nøglen til forståelse af hans matematiske arbejde er ligeledes en stræben mod dannelse af et billede af universet. Han ser på virkeligheden og dens problemer med en typisk bevidsthed for denne tid, hvor antikkens pythagoræiske og platoniske tænkemåder brydes med samtidens lutheranske og katolske. Nedenstående sætning fra "Harmonices mundi", 1619, som afspejler antik filosofi og Keplers religiøsitet, kan være en vigtig nøgle til forståelse af hans matematiske arbejde:

"Geometrien eksisterede før skabelsen, er evigt samhørende med den guddommelige tanke, er Gud selv (hvad findes i Gud, som ikke er Gud selv ?); geometrien gav Gud en model for skabelsen og blev indpodet i mennesket sammen med ligheden med Gud selv - og ikke blot bibragt menneskets tanke gennem øjne". (P 27 i 15)).

Keplers opfattelse af matematikken er da også fortrinsvis ontologisk. For ham eksisterer de matematiske figurer som originaler i Guds ånd herfra til evigheden. Og da Gud har skabt mennesket i sit eget billede, formår mennesket at finde de geometriske urbilleder, hvorefter Gud har skabt naturen. Hvor underligt Keplers møjsommelige arbejde i "NSDV" med at skelne de mange legemer - fjernt fra vinformen - fra hinanden kan forekomme i lyset af den praktiske problemstilling, lige så motiveret kan man nu forstå denne beskæftigelse. Og ligeså opfatte det som en bevidst handling, når han opkalder flere af dem efter frugtnavne.

Forestillingen om, at de matematiske ting er sammenkædet med den ydre virkelighed medfører, at Kepler ligesom grækerne tænker i geometriske størrelser og ikke i tal. Han driver kun matematik, såfremt den er afbildet i virkeligheden. Således har han sagt:

"Jeg har ikke fyldt min ånd med synspunkter over den abstrakte matematik, d.v.s. billeder af eksisterende og ikke eksisterende ting, med hvilke de berømteste matematikere nutildags tilbringer deres tid. Jeg har tværtimod v.h.a. himmellegemer udforsket geometrien, i hvilken jeg med yderste anstrengelse har fulgt skaberens spor".
P 22 i 16).

Tydeligvis er Keplers interesse i matematikken ikke begrænset til en hjælperedskabsfunktion i forhold til problemer udenfor matematikken. Men i hvilken udstrækning præger denne mere metafysiske interesse i matematikken et enkelt værk som "NSDV" ?

Hvor afgørende for "NSDV"'s tilblivelse har denne interesse været i forhold til vinfadsproblematikken ?

Jeg har kunnet finde to passager i "NSDV", hvor Kepler formulerer nogle mere brede formål for sit arbejde med værket. Den første passage optræder i forordet kort efter beskrivelsen af oplevelsen i vinkælderen. For forståelsen skal mindes om to forhold: Kepler var nygift, og han måtte selv afholde de ikke ubetydelige omkostninger ved værkets udgivelse:

"Det synes ikke upassende for en ny ægtemand, i den udstrækning familieformuen formår, at udforske den nye matematiks oprindelse, fastslå dens omfang, og udforske grundlagene for de geometriske love og for så vidt som de er der, bære dem frem i lyset". 4) p. 10 +)

Oversættelsen mangler formentlig nogle sproglige nuancer, men mere latinkyndige har bekræftet, at hovedindholdet er udtrykt.

For det andet udtrykker indledningen til "Supplement til Arkimedes Stereometri" helt klart formål, som overskrider vinfadsproblematikken:

"Hertil kom Arkimedes og de gamle geometrikere i udforskningen af regulære retlinede og krumme figurers væsen og mål, hvilket for ganske nylig er bragt et skridt videre. Efterhånden som fadformen fjernede sig længere og længere fra de regulære figurer, mente jeg at kunne yde et lønsomt arbejde, ved at blotlægge fadformens og beslægtede figurers oprindelse såvel som graden af slægtsskab med de regulære figurer - så at sige sammenflette en eneste stamtavle - i den hensigt at gøre efterfølgende beviser mere gennemskuelige. Og yderligere i den hensigt at: Anspore nutidens geometrikeres ivrighed, støde døren ind til et umådeligt udstrakt geometrisk område og offentliggøre, hvad der her er at forfine og hvad som resterer at opspore". P. 37 i 4) ++)

Men hvilke forhold i Keplers Matematik har kunnet orientere ham mod "NSDV"'s problemstillinger og emner ?

Ifølge Max Caspar:"Kepler und die Infinitesimalrechnung" 17) havde Kepler allerede inden "NSDV" stillet spørgsmål, hvis løsning måtte føre til integralregning, nemlig i "Nova Astronomia" 1609. Med nutidens notation havde han sat sig for at udregne:

++) Denne passage var ret vanskelig at oversætte. For det første indeholder den en meget lang sætning. For det andet er Keplers (middelalder) latin svært forståelig. Mere latinkyndige har bekræftet, at hovedindholdet er udtrykt i oversættelsen.

$$\int_0^{\alpha} r \, d\theta \, , \quad r = \sqrt{(1+2r\cos\theta+e^2)} .$$

Han opdeler π i 180 dele, han burde have "uendelig mange", men det er ikke gennemførligt. Og når han adderer samtlige 180 - trigonometrisk beregnede - bidrag, udregner han ganske enkelt en approksimation til det elliptiske integrale. Skridt for skridt kan Max Caspar fastslå overensstemmelsen mellem Keplers tankegang og Leibniz' formelregning. Caspar konkluderer, at tanken er der - blot manglede det rette udtryksmiddel.

Kepler råber i denne forbindelse alle samtidens matematikere an, og beder dem hjælpe ham. Men man var ikke istand til at løse den fuldkommen nye opgave Kepler stillede, sålænge man endnu ikke kendte en eneste rækkeudvikling.

Ved denne lejlighed kan jeg se en kombination af to komponenter i Wilders indre kraft blive udløst: B. Vigtighed (løfterig) og C. Udfordring

Inden hændelsen i vinkælderen forelå altså en situation i Keplers "integralregning" karakteriseret ved at være lovende. Men anvendelsen af infinitesimalmetoden, på netop det problem Kepler arbejdede med, forudsatte matematiske teknikker han ikke kendte. Derved blev han for et øjeblik bremset i at udvikle denne metode. Og den måtte forblive uudviklet sålænge han manglede et område af den ydre virkelighed, der besad den egenskab, at uvedkommende matematiske forhold ikke forhindrede ham i at videreføre sin tankegang.

Hermed aktualiseres en diskussion af rimeligheden i antagelsen om, at spørgsmålet om den østrigske målemetodes pålidelighed skulle have haft så stor betydning for Kepler, at det kunne tilskynde ham til det ret store arbejde som ligger bag "NSDV". Bedømmelsen heraf kan ske udfra omgivelsernes reaktion.

Tilsyneladende appellerede Keplers problemstilling ikke til hans samtidige:

- Ihvertfald havde stænderne som tidligere nævnt ingen forståelse for hans beskæftigelse.

- Ingen bogtrykkere var interesserede i at bære den økonomiske risiko ved udgivelsen af hans værk.

- Bogen blev salgsmæssigt en fiasko.
En af Keplers gode venner, Peter Crüger, som hjalp ham med at afsætte bogen, måtte melde tilbage, at udover de to matematikere i Danzig og Königsberg, Königsberg bibliotek og en lærd adelsmand, var ingen i hele Preussen interesseret i at købe den.

Endvidere må det understreges, at Kepler ikke var bestilt til at undersøge målemetoden af *vinhandlerne*, som trods alt har den største kommercielle interesse i dens pålidelighed.

På den anden side har hele problemkomplekset naturligvis ikke været helt ligegyldigt for datiden. Således var målekunsten "Visierkunst" en disciplin af den anvendte matematik. Og det kan fastslåes, at målestangsmetoden var blevet grafisk bearbejdet allerede godt hundrede år inden "NSDV". 18).

IV. 2. Konklusion.

Alene titlen "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum" gør, at det ikke kan udelukkes, at oplevelsen i vinkælderen har inspireret Kepler. Værkets opbygning og indholdet i centrale afsnit peger også i denne retning.

Imidlertid fremførtes i foranstående *diskussion forhold*, som svækker dette synspunkt og snarere taler for, at kræfter i Keplers matematik og mere brede formål har motiveret ham til at igangsætte sit stereometriske arbejde.

Styrken mellem henholdsvis dette eksterne og interne aspekt mener jeg mig ikke istand til at afgøre på grundlag af foreliggende studium. Dog kan man pege på, at de to aspekter tilsyneladende har indgået i en art symbiose. Det fremgår f.eks. af den citerede indledning til "Supplement til Arkimedes Stereometri"

Afslutningsvis konkluderes, at det forekommer uberettiget at konkludere så snævert, som Schneider og Boyer gør, ved udelukkende at nævne "NSDV"'s praktiske problemstilling som motiverende faktor. Hvorimod Baron synes at give en mere dækkende beskrivelse ved at fremhæve både den praktiske problemstilling og Keplers brede interesse i matematikken. Endvidere finder jeg, at Baron indtager en klog position, når hun afholder sig fra at afveje effekterne af de to sider overfor hinanden.

A P P E N D I X A.

Et eksempel på Arkimedes' anvendelse af udtømnings- eller exhaustionsmetoden.

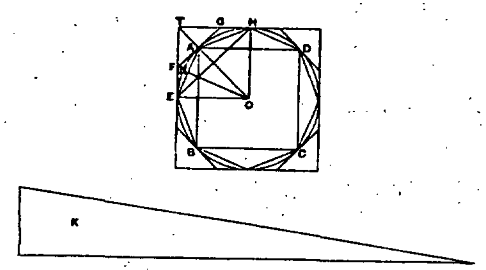
Eksemplet er hentet fra "The works of Archimedes with the methods of Archimedes" 12) p. 91-3.

Sætning:

Arealet af en vilkårlig cirkel er lig med en retvinklet trekants, hvor den ene af kateterne er lig med cirklens radius, og den anden lig med cirklens omkreds.

Lad ABCD være den givne cirkel og K den omtalte trekant.

Se figurerne fra 12) p. 91.



Såfremt cirklen ej er lig med K, må den enten være større eller mindre.

I. Hvis det er muligt, lad cirklen være større end K.

Indskriv et kvadrat ABCD, halver vinklerne AB, BC, CD, DA.

Hvis det er nødvendigt, halver de halve vinkler, o.s.v., indtil der imellem den indskrevne polygons vinkelspidser er afskåret områder, hvis sum er mindre end det areal, som cirklen er større end K.

Da er polygonens areal større end K.

Lad AE være en vilkårlig kant af den, og ON den vinkelrette fra AE til centrum O.

Så er ON mindre end cirklens radius og derfor mindre end den ene katete hos K.

Polygonens rand er også mindre end cirklens omkreds, d.v.s. mindre end den anden katete.

Derfor bliver polygonens areal mindre end K, hvilket er i modstrid med hypotesen.

Således er cirklens areal ikke større end K's.

II. Hvis det muligt, lad cirklen være mindre end K.

Omskriv et kvadrat, der berører cirklen i E og H, så to nabokanter mødes i T.

Halver vinklen mellem nærliggende berøringspunkter og tegn tangenten i det punkt vinkelhalveringslinien skærer cirklen.

Lad A være dette punkt og FAG tangenten i A.

Så er TAG en ret vinkel. Derfor gælder:

TG > GA
   > GH

Deraf følger, at trekanten FTG er større end det halve af arealet TEAH.

På samme måde følger, når vinklen AH halveres og tangenten i vinkelhalveringsliniens skæringspunkt tegnes, at mere end halvdelen af arealet GAH skæres bort.

Ved at fortsætte processen omskrices til sidst en polygon således, at mellemrummene, som afskæres mellem denne og cirklen tilsammen er mindre end det areal, som K har mere end cirklen.

Derfor bliver polygonernes areal mindre end K's.

Eftersom den vinkelrette afstand fra en vilkårlig kant af polygonen til 0 er lig med cirklens radius, mens polygonens rand er større end cirklens omkreds, følger, at polygonens areal er større end trekanten K. Hvilket er umuligt.

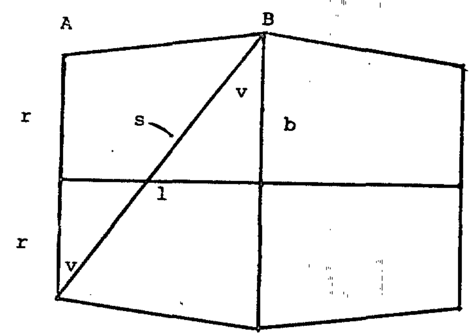
Derfor er cirklens areal ikke mindre end K's.

Da hverken cirklens areal er større eller mindre end K's, er den lig med.

Den græske udtømningsmetode eller exhaustionsmetode, som Arkimedes bruger, beskrives generelt i 13) p. 99 - 102.

A P P E N D I X B

U n d e r s ø g e l s e a f d e t ø s t r i g s k e f a d s k a r a k t e r i s t i s k e e g e n s k a b e r.



Figuren viser et fad sammensat af to keglestubbe. Med figurens betegnelser er

r : Radius i fadets bund.

l : Halvfadets højde (eller længde)

b : Radius i fadets bug.

s : Længden af den del af målestangen, der befinder sig i fadet (∂: måleværdien).

Ifølge Keplers forskrift gælder for en østrigsk cylinder eller keglestub: $\frac{AB}{r} = \sqrt{2}$.

Rumfanget af en keglestub med højden l og radierne r og b er givet ved:

$$\frac{\pi}{3} l \, (b^2 + br + r^2).$$

Vi vil undersøge størrelsen:

$l \, (b^2 + br + r^2)$ som funktion af l, b, r under bibetingelsen:

$$s = 1.$$

Bibetingelsen betyder, at problemet reduceres fra at handle om en funktion af 3 variable (l, b, r) til en funktion af to variable (r, v).

Vi indfører vinklen v som vist på figuren. Det giver:

$$b + r = \cos v \text{ og } l = \sin v.$$

Problemet er hermed reduceret til undersøgelse af funktionen F givet ved:

$$F(r, v) = \sin v(\cos^2 v - r\cos v + r^2)$$

F's partielle differentialkvotienter udregnes:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \sin v \, (2r - \cos v) \text{ og}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \cos^3 v - 2 \cos v \sin^2 v + r(\sin^2 v - \cos^2 v) + r^2 \cos v.$$

Sættes $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ er $\cos v = 2r$.

Heraf fåes:

(i) For fastholdt højde l (hvilket i forbindelse med bibetingelsen er ensbetydende med fastholdt v) er rumfanget af halvfadet stationært m.h.t. variationer i r, hvis $\cos v = 2r$ ∂: hvis r = b ∂: fadet er en cylinder.

Cylinderbetingelsen $\cos v = 2r$ indsættes i udtrykket for

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 3r \, (6r^2 - 1).$$

Bortses fra fade, som er dobbeltkegler (∂: r = 0) følger

for $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$:

$$r = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad l = \sin v = \sqrt{1 - (2r)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Og deraf

$\frac{l}{r} = \sqrt{2}$. Altså:

(ii) For fastholdt bundradius er rumfanget af den ved bundradius og bibetingelsen bestemte cylinder stationær overfor variationer i h, såfremt denne er en østrigsk cylinder.

Udgår vi fra en østrigsk cylinder, så gælder ligeledes:

$\frac{\partial F}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ og deraf følger:

(iii) Under bibetingelsen forbliver rumfanget stationært ved overgang fra en østrigsk cylinder til dens omgivende halvfade.

Til den østrigske cylinder svarer som udregnet ovenfor

$(r_0, v_0) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

For at undersøge funktionen F i en omegn af dette punkt bestemmes:

$$d^2F = (dr, dv) \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial v} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial v} & \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dr \\ dv \end{Bmatrix}$$

i punktet:

$$d^2F = (dr, dv) \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 12 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -17 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dr \\ dv \end{Bmatrix}$$

Fortegnene af matricens diagonalelementer er forskellige. Derfor er denne kvadratiske form indifinit. (Bergendahl och Brinck, L.A.,p 235 ex 24, studentlitteratur). Hvoraf sluttes, at der hverken er lokalt maximum eller minimum i punktet:

(iv) I omegnen af den østrigske cylinder danner grafen for rumfanget en saddel.

Dermed eksisterer kurver gennem dette punkt, langs med hvilke den østrigske cylinder er maximum, og kurver langs med hvilken den er minimum.

To kurver af den første type omfattes af Keplers betragtninger:

- Kurven bestående af alle cylindre med samme måleværdi er givet ved cosv = 2r. Deraf følger - sinv dv = 2dr og for den østrigske cylinder: $dv = -2\sqrt{3}$ dr. Ved indsættelse i udtrykket for d^2F ses at: $d^2F < 0$.

-For kurven bestående af alle østrigske halvfade med samme måleværdi gælder ifølge cosinusrelationen:

$AB^2 = 2r^2 = 4r^2+1 - 4r \cos v$ og dermed

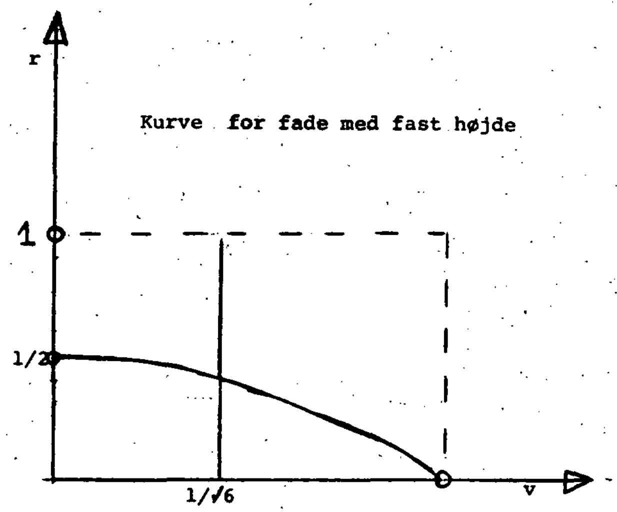
$\frac{2r^2-1}{4r^2}\, dr = -\sin v\, dv$.

For den østrigske cylinder er da: $dv = \sqrt{3}$ dr og dermed ses ved indsættelse i d^2F: $d^2F < 0$.

-En kurve af den anden slags - hvor den østrigske cylinder er maximum - er den under (i) betragtede kurve bestående af samtlige halvfade med samme højde, hvilket i kombination med bibetingelsen er enslydende med fastholdt v. For den kurve er dv = 0. Følgelig bliver $d^2F > 0$.

En repræsentant for hver kurvetype er vist på efterfølgende figur.

Cylinderkurven



REFERENCER.

1. Schneider, Ivo: Einfluss der Praxis auf die Entwicklung der Mathematik vom 17. bis zum 19. Jahrhundert. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1977/4

2. Boyer, Carl B.: The history of the calculus - and its conceptual development, Dover 1949.

3. Baron, Margaret E.: The origins of the infinitesimal calculus, Pergamon press 1969.

4. Hammer, Franz (Bearb.): Johannes Kepler: Mathematische Schriften (Gesammelte Werke nr. 9.) München 1960.

5. Wilder, Raymond L.: Evolution of mathematical concepts, John Wiley and Sons Inc. 1968.

6. Koppelman, Elaine: Progress in mathematics. Historica Mathematica, p. 457 - 63/74.

7. Wilder, R. L.: Hereditary stress as a culturel force in mathematics. Historica Mathematica, p. 29 - 46/74.

8. Kubach, Fritz: Kepler als Mathematiker, veröffent-

lichungen der Badischen Sternwarte zu Heidelberg. Karlsruhe 1935. Ausg. v. Heinrich Vogt.

9. Wieleitner, Heinrich: Keplers"Archimedische Stereometrie". Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 1930, 36: No 6, 176 - 85.

10. Wieleitner, Heinrich: Über Keplers neue Stereometrie der Fässer. Fra festskriftet:
Stöckl, Karl, ed: Johannes Kepler, der kaiserliche Mathematiker. Zur Erinnerung an seinen Todestag vor 300 Jahren.
(Ber. Naturwiss. Ver., Regensburg, 1928 - 30, No. 19)
Regensburg: Schiele, 1930.

11. Caspar, Max: Johannes Kepler, Stuttgart: Kohlhammer 1948.

12. Heath, T. L., ed: The works of Archimedes with the method of Archimedes, Dover 1912

13. Pedersen, Olaf: Matematik og naturbeskrivelse i oldtiden, Akademisk forlag 1975.

14. Weiss, E. A.: Die kennzeichende Eigenschaft des österreichischen Fasses. Deutsche Math. 5, 262-65/1940.

15. Rørbech *m.* fl.: Fysik i idéhistorisk belysning. Skoleradioen 1978.

16. Caspar, Max: Johannes Keplers wissenschaftliche und filosofische Stellung. Schriften der Corona 1935.

17. Caspar, Max: Kepler und die Infinitesimalrechnung. Unterrichtsbl. Math. Naturwiss. 1932, 38: 227-9.

18. Kaunzner, Wolfgang: Gedanken zur praktischen und teoretischen Mathematik vor Kepler. Historischer Verein von Oberpfalz Regensburg. 1972, 112: 267-278.