

# TEKST NR 80

# 1984

Kursusmateriale  
til

MATEMATIK B

Mogens Brun Heefelt

## TEKSTER fra

# IMFUFA

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B

af Mogens Brun Heefelt

IMFUFA tekst nr. 80/84, RUC.      90 sider.      ISSN 0106-6242.

---

Abstract

Dette materiale er tænkt anvendt i Matematik B på den naturvidenskabelige basisuddannelse. Materialet er kun lidt omarbejdet i forhold til det, der blev brugt i 1983, men er for første gang siden 1973 udgivet i samlet form.

INDHOLDSFORTEGNELSE

<u>Forord</u> om den faglige og studiemæssige ramme kurset indgår i	s. 1
<u>Præsentation</u> af MAT B	s. 3
<u>Læsevejledning</u> til MAT B	s. 7
<u>Problemstilling 1:</u> Præsentation af matematiske modeller	s. 11
<u>Problemstilling 2:</u> Opstilling af modeller	s. 35
<u>Problemstilling 3:</u> Simulering af matematiske modeller	s. 51
<u>Problemstilling 4:</u> Generaliserede vækstmodeller	s. 57
<u>Problemstilling 5:</u> Smittespredning (rygte- spredning)	s. 63
<u>Problemstilling 6:</u> Fiskerimodeller	s. 65
<u>Problemstilling 7:</u> Lineære ligningssystemer	s. 71
<u>Problemstilling 8:</u> Stabilitet	s. 75
<u>Problemstilling 9:</u> Insulin/blodsukker balancen	s. 87



## Forord

Specielt af hensyn til læsere uden for RUC skal her kort beskrives den studiemæssige ramme, som dette kursusmateriale skal indgå i.

Matematik B (eller Matematik A - et kursus i statistik og sandsynlighedsregning) skal være gennemført af samtlige studerende på den naturvidenskabelige basisuddannelse (NAT-BAS) i det første studieår. Kurset er derfor tilrettelagt således, at (næsten) alle har forudsætninger for at starte, og i læsevejledningen er tillige anført litteratur, som kan benyttes, hvis man har utilpassede forudsætninger, eller hvis man ønsker at genopfriske gammelt stof.

Da dette kursus' form og indhold ikke kan være uafhængigt af, hvordan der ellers bliver arbejdet i NAT-BAS, er det rimeligt her kort at nævne de grundlæggende idéer for NAT-BAS.

Igennem de to år i NAT-BAS skal de studerende have arbejdstiden fordelt ligeligt på kursus- og projektaktiviteter. Det er her meningen, at den mere systematiserede faglige indlæring primært tilegnes i et kursusforløb, mens den problemorienterede, ofte tværfaglige behandling af et emne bedst behandles som et gruppearbejde, der munder ud i et afsluttende projekt.

Det er den studerende selv - der inden for brede rammer - tilrettelægger sit toårige studieforløb blandt det kursusudbud, som studienævnet tilvejebringer, og ud fra diskussioner med vejledere og medstuderende om projektemner. Igennem et sådant toårigt studium skal den studerende have gennemført ialt otte kurser og fire projekter.

Da de studerende således i projektarbejdet er trænet i at arbejde tværfagligt og i grupper, er der også valgt dette udgangspunkt på kurset. Dette har selvsagt betydning for valg af kursusmateriale og for den tilrettelæggelse, der er sket af materialet. Det er blevet et hovedsynspunkt, at de studerende skal arbejde kreativt (?) med matematik. Først i modelopstillingsfasen, hvor gruppen selv skal opstille matematiske modeller for forelagte ikke matematiske problemstillinger (dvs. matematificere), og dernæst i modelanalysefasen. Under modelopstillingen kan den enkelte benytte gruppen til at afprøve sine idéer til modelafgrænsning, hvorefter gruppen - med eller bedst uden vejlederens hjælp - kan nå frem til en velargumenteret model. Under den matematiske behandling af modellen, hvor de studerende har forskellig fortrolighed med matematik, må man forvente, at de studerende i nogen udstrækning kan undervise hinanden, hvorved undervisningen bliver mindre vejlederintensiv.

Erfaringerne med denne - i matematisk henseende - utraditionelle arbejdsform har været gode, men hvis den over for især de matematisk interesserede studerende skal give fuldt udbytte, skal kurset følges op af et eller flere kurser i 3.-4. semester, hvor der kan arbejdes videre med matematiske problemstillinger. Dette har imidlertid sjældent været muligt at realisere af ressourcemæssige grunde.

## PRESENTATION AF MAT B/83

### 1. Kursets mål

En beskrivelse af de mål, der har styret emnevalget for og tilrettelæggelsen af dette kursus, kan opdeles i to: de faglige mål i bred forstand (dvs. ud over det snævert faglige indhold også forskellige former for daglig adfærd) og de mere svævende holdningsmål.

Skønt det ved den senere evaluering især er de faglige mål, der evalueres i forhold til, er det rimeligt her at redegøre for de holdningsmål, vejlederen har søgt at forfølge. Det må så ved evalueringen være op til jer at afgøre, om og da i hvilket omfang disse holdningsmål er blevet realiseret samt at overveje, om resultatet har været påvirket af den holdning, I selv havde til matematik, da I startede.

#### a. Holdningsmål

Det er et hovedsynspunkt, at I skal have muligheder for at få et uautoritært forhold til matematik. Derfor skal I selv være med til at producere matematiske modeller og deres (eventuelle) løsning. Et uautoritært forhold til matematik kan ikke skabes hos mennesker, der blot er brugere af færdigpakkede formler og metoder, hvis oprindelse fortaber sig i det dunkle. Det er nødvendigt selv at forstå mekanismerne og de sammenhænge, de indgår i.

Da ingen bruger af matematik kan gøre sig håb om at "samle" al den matematiske "bagage", som før eller siden bliver nødvendig, er det vigtigt at stimulere evnen til at agere udogmatisk, fleksibelt og med opfindsomhed i ukendte situationer, dvs. at arbejde kreativt med matematik.

#### b. Faglige mål

I snæver forbindelse med de holdningsmæssige mål vil der blive arbejdet ud fra følgende faglige mål

- M1: at opøve evnen til at opstille matematiske modeller for givne problemstillinger, herunder
- M2: at opøve evnen til at fremdrage væsentlige træk af en given problemstilling,
- M3: at opnå nogen fortrolighed med teorien for differentialligninger af første og anden orden samt
- M4: at opnå færdighed i at beskrive de væsentlige træk ved løsningerne til sådanne differentialligninger.

## 2. Kursets materialer og arbejdsformer

Kursusforløbet er planlagt således, at der hver uge arbejdes med én problemstilling, som på nogle sider strukturerer ugens arbejde.

Kurset er tilrettelagt således, at den væsentligste arbejdsform er gruppearbejde, hvor 5-6 studerende sammen gennemarbejder de enkelte problemstillinger; en af kursusråderne kommer med mellemrum forbi - eller kan hentes - for at hjælpe med opståede problemer. Hver gruppe skal i løbet af kurset lave fire skriftlige besvarelser.

Der kan med mellemrum også blive afholdt forelæsning hvis der under kursusforløbet skønnes behov herfor.

## 3. Evalueringskriterier

Disse består af to dele. For det første skal hver gruppe aflevere en skriftlig besvarelse af problemstillingerne 4, 5, 8 og 9 til gruppens vejleder. Når disse fire besvarelser er godkendt, har gruppen fået godkendt kurset som bestået. For det andet skal der ved en evaluering (samtale) i gruppen, hvor vejlederen deltager, tages stilling til, om gruppens medlemmer alle er omfattet af den ovenfor nævnte godkendelse.



#### 4. Forudsætninger

Kurset bygger på, at man ved, hvad en differentialkvotient er, samt hvad det betyder at integrere.

Dette svarer til, at man har gået på en af matematiklinierne i gymnasiet, har haft HF med tilvalg i matematik eller har tilsvarende baggrund.

Har man ikke disse forudsætninger, kan man godt følge kurset, men man må være forberedt på et ikke uvæsentligt ekstraarbejde.

IMFUFA, 1.9.83

Mogens Brun Heefelt.

### Læsevejledning til MAT B

Da gruppearbejde for mange er uvant - især i matematik - skal det heri belyses, hvilke funktioner den enkelte gruppe har i kursussammenhængen, og hvilke aktiviteter der kunne være fornuftige i forbindelse med arbejdet med de enkelte problemstillinger. Som det vil fremgå, er det af afgørende betydning for et godt udbytte af kurset, at den gruppe, man sidder i, fungerer godt. Derfor vil der også blive givet nogle idéer til hensigtsmæssig gruppedannelse samt nogle autentiske eksempler på, hvordan bl. a. gruppesammensætningen kan have betydning for gruppens udbytte og samarbejde. Til slut i læsevejledningen vil I finde to (ikke udtømmende) litteraturlister - én der kan benyttes, hvis man vil supplere utilpassede forudsætninger eller genopfriske glemt gymnasie/HF-stof, samt én hvor man kan få perspektiveret arbejdet med den enkelte problemstilling.

### Gruppens funktion og sammensætning

Som det er fremgået af kursuspræsentationen, vil den alt overvejende arbejdsform i kurset være gruppearbejde. Bl.a. er problemstillingerne udformet således, at de kan danne udgangspunkt for diskussion i gruppen om, hvilke modelmæssige begrænsninger, der er rimelige at foretage i et beskrevet system. Situationen er derved søgt gjort (pseudo-)autentisk, idet stadig flere matematikanvendelser vil ske som et samarbejde mellem personer med forskellig faglig baggrund. Også i gruppesammenhængen kan man delvis tage højde for denne forskellige "faglige" baggrund. Således er det en erfaring fra tidligere kursusforløb, at de grupper, hvor der var en dispensat, en HF'er uden tilvalg i matematik eller en sproglig student sammen med mat/nat- og mat/fys-studenter, fungerede langt bedre end f.eks. grupper

med kun mat/fys'er. Det er klart, at det interne matematiske arbejde i de "rene" mat/fys-grupper gik hurtigere end i grupper af den første type, men arbejdet foregik til gengæld meget perspektivforsnævret. Det er evident, at de studerende, som ikke var skolet i matematiske tankegange og resonnementer, havde meget lettere ved de indledende dele af modelleringsprocessen. De fik så omvendt i den matematiske behandling af modellerne nogle faglige problemer. På dette tidspunkt vil de imidlertid være langt mere motiveret for at sætte sig ind i/at få forklaret de matematiske redskaber. Her kan så de matematisk orienterede studerende "undervise" deres medstuderende. Dette giver tilmed en pædagogisk udfordring, da det er svært at forklare matematisk stof til ikke matematisk orienterede personer, bl. a. lader de sig ikke bare spise af med en vilkårlig søforklaring.

Men tilbage til arbejdet med problemstillingerne. Som en praktisk forberedelse før hver uge bør hvert gruppemedlem gennemlæse ugens problemstilling med bilag grundigt for derved at have en idé om, hvad der er de væsentlige punkter i teksten, samt om eventuelle uklarheder i teksten. Gruppen starter så arbejdet med at afklare sådanne uklarheder - om nødvendigt ved hjælp af vejlederen - og derefter går man igang med selve problemstillingen. Der findes et utal af måder at strukturere arbejdet i gruppen på - bl.a. afhængigt af hvor tilbageholdende/snakkende gruppens medlemmer er. Det er klogt at benytte de første uger også til at finde en arbejdsform, der passer til gruppen. Det hindrer frustration senere i kurset, når der opstår tidspres.

#### Litteraturliste 1 (der kan bibringe kursusforudsætninger)

Andersen, Bülow & Christoffersen:

Matematik 1 (Gyldendal), side 245-269 og

Matematik 2 A (Gyldendal), side 52-92

Steen Bentzen: Matematik for HF-tilvalg, mN og mS (Munksgaard), side 7-65 og 236-287

Hans Fich: Gymnasiematematik 2 (Forum), side 9-128

Hirsberg, Schultz og Sloth: Matematik 2 (Munksgaard), side 58-104 og 117-122

Steffen Jensen & Karin Sørensen: Differentialregning, teori og redskab (Chr. Ejlers), side 75-154, 193-204 og 221-249

Kristensen & Rindung: Matematik 2.1 (G.E.C. Gad), side 1-74 og 128-177

Litteraturliste 2 (der supplerer arbejdet med problemstillingerne)

Arrowsmith & Place: Ordinary Differential Equations (Chapman and Hall, 1982)

kap. 1 omhandler løsningskurver og fasebilleder (jfr. problemstilling 4, 7 og 8)

kap. 2 giver en uddybende beskrivelse af løsningskurver til lineære ligningssystemer (jfr. problemstilling 7)

kap. 3 omhandler linearisering af ikke-lineære ligningssystemer (jfr. problemstilling 8)

kap. 4 er eksempler

kap. 5 beskriver mere avancerede teknikker inden for bl.a. bifurkationsteori (kort nævnt i problemstilling 8)

Mogens Brun Heefelt: Differentialligningsmodeller (Gyldendal, 1980)

kap. 2 & 3 omhandler løsning af første ordens differentialligninger (jfr. problemstilling 3-5)

kap. 1 & 8 er eksempler

kap. 10 omhandler numeriske metoder til løsning af differentialligninger (jfr. problemstilling 5 og 9)

Martin Braun: Differential Equations and Their Applications (Springer Verlag, 1978)

kap. 1 omhandler første ordens differentialligninger med analytiske og numeriske løsninger samt eksempler (jfr. problemstilling 3-6)

kap. 3 omhandler lineære ligningssystemer og deres løsning ved brug af matricer (jfr. problemstilling 7)

kap. 4 omhandler stabilitetsteori og fasebilleder med eksempler (jfr. problemstilling 8 og 9)

MAT B/83 - uge 40

Problemstilling 1

Præsentation af matematiske modeller.

Dette kursus skal som nævnt i præsentationen beskæftige sig (dvs. jer) med matematiske modeller, især sådanne som kan tage form af differentiaalligninger.

En første indgang til emnet er naturligvis at afgrænse, hvad matematiske modeller kan være, og hvordan man når frem til disse modeller. I bilag 1 er der forsøgt med et bud på dette. Dette bilag er et indledende kapitel af projektrapporten "ODIN" skrevet af Tommy Andersen, Per Larsen og Peter Lassen på matematikoverbygningen. Projektrapporten er udkommet som IMFUFA-tekst nr. 29.

Når en model for et delområde af virkeligheden bringes på matematisk form, er mange tilbøjelig til at tillægge modellen større autoritet - matematikken er jo objektiv og "rigtig"! Man glemmer blot at spørge om, hvad var forresten de forudsætninger de opstillede modellen ud fra? Men matematikken har jo været meget succesfuld som modelredskab inden for fysik, så derfor er det nærliggende at formode, at den også vil være det inden for andre områder, som er langt mindre teoribundet end fysik. Disse aspekter vil blive belyst i bilag 2, som er de første sider af en længere artikel "Matematiske modeller er væsensforskellige, selv om de ser ens ud". Artiklen er skrevet af Jens Højgaard Jensen, lektor i fysik ved IMFUFA, RUC, og den er udkommet som en del af IMFUFA-tekst nr. 26.

I bilag 3 er så præsenteret et meget simpelt eksempel på en matematisk model - modellen for radioaktivt henfald.

Der er videre vist, hvordan denne model teoretisk og praktisk kan udbygges til kulstof-14 metoden, der er en dateringsmetode for arkæologisk materiale.

Det væsentlige arbejde på de to kursusgange i denne uge skal koncentreres om bilag 3, idet bilag 1 og 2 er forudsat gennemlæst inden.

# BILAG 1

## 2 MODELBEGREBET.

### 2.1 Introduktion af modelbegrebet.

Allerede flere hundrede år tilbage i tiden kan man finde eksempler på anvendelse af modeller. F.eks. kan det nævnes, at man, efter at Newton havde opstillet sine love for massetiltrækning, kunne formulere en "model" af solsystemet og ved hjælp af denne forudsige planeten Neptuns eksistens.

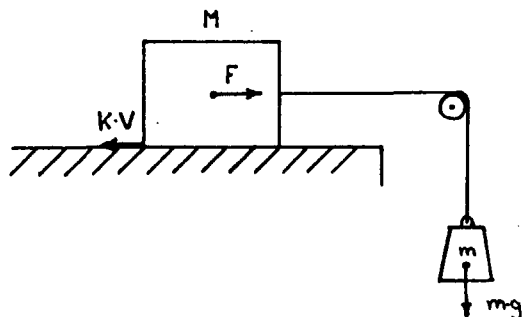
Igennem de seneste årtier er kendskabet til og anvendelsen af modeller øget voldsomt. Dette skyldes utvivlsomt, at en stigende del af de problemer, som findes i vor hverdag, har en karakter, som lettest og mest effektivt kan overskues ved hjælp af modeller. I dag er det f.eks. en selvfølge, at man i skibsindustrien laver modeller af nye skibstyper for at kunne afprøve dem i bassiner og derved kunne forudsige skibets sødygtighed og stabilitet i forskellige vind og vejrforhold.

Man kan naturligvis nævne en række andre eksempler på problemer, hvor modeller anvendes for at gøre løsningen mere overskuelig. F.eks. indenfor forurening, transport og produktion. Fælles for sådanne problemer er, at man ønsker at kende konsekvenserne af et påtænkt indgreb eller en forudset hændelse, inden de kan konstateres i virkeligheden. Et nærliggende eksempel er ønsket om at kende konsekvenserne af et uheld på et atomkraftværk. Man kan naturligvis ikke fremprovokere alle tænkelige uheld for at studere konsekvenserne, men må konstruere en model, som man så kan eksperimentere med.

Som det vil fremgå, er modeller et vigtigt værktøj ved løsning af mange af vore dages problemer. Imidlertid er det at lave modeller ikke altid en lige simpel opgave. Vi vil i dette og de efterfølgende afsnit gøre rede for, hvordan man opstiller og anvender modeller, ligesom vi vil præcisere de begreber, som indgår i dette arbejde.

### 2.2 Hvad er en model ?.

Vi vil forsøge at anskueliggøre begrebet med et eksempel og ser derfor på et mekanisk system, som vi kender fra fysikkens verden, se fig.2.1.



figur 2.1



Vi kan som bekendt opskrive kraftpåvirkningen på kassen i fig.2.1 som:

$$M\dot{V} = F = -kV + mg$$

som svarer til differentiaalligningen:

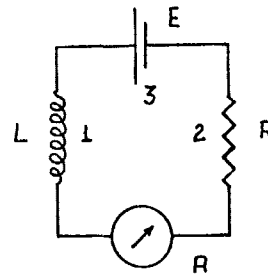
$$a\dot{f}(t) = -bf(t) + c \quad , \quad \text{hvor } f(t)=V(t), \quad a=M, \quad b=k, \quad c=mg \quad .$$

Lad os nu tænke os, at vi af en eller anden grund ikke kan opstille systemet, vi mangler nogle dele, eller massen af kassen er så stor, at den ikke kan være i laboratoriet. Hvis vi ønsker at undersøge eksperimentelt, hvorledes kassens hastighed ændres med tiden, må vi derfor lave en model af systemet og foretage eventuelle eksperimenter med den i stedet.

Modellen kan vi f.eks. lave af nogle elektriske komponenter, se fig.2.2

figur 2.2

1. en spole på L Henry.
2. en modstand på R Ohm.
3. et element på E volt.



Vi ved (eller tro blot på det) at :

$$E = RI + L\dot{I} \Rightarrow L\dot{I} = -RI + E$$

Vi kan altså ved at vælge  $L=M$ ,  $R=k$ ,  $E=mg$  opnå, at det elektriske system bliver en model af det mekaniske. Ved et forsøg med modellen vil amperemetret A vise en strømstyrke  $I$ , der svarer til hastigheden  $V$ , hvis vi havde lavet forsøget med vores mekaniske system.

Vi har altså fået opbygget en elektrisk model af det mekaniske system og kan nu foretage eksperimenter uden at opstille det virkelige system. Men da vi jo beskrev systemet fuldstændigt med en differentiaalligning:

$$a\dot{f}(t) = -bf(t) + c \quad , \quad \text{hvor } a=M, \quad b=k, \quad c=mg \quad ,$$

er denne ligning jo også en model af systemet. Denne form for matematisk model kalder man en differentiaalligningsmodel.

Lad os nu præcisere, hvad man skal forstå ved begrebet "en model". Hvis man ser i Gyldendals fremmedordbog, finder man, at en model er en "kopi af eksisterende ting i lille målestok".

Denne tolkning af begrebet er da også brugbar i mange af dagligdagens situationer, tænk f.eks. på modelflyvere og modeljernbaner. Men til vores brug er den ikke præcis nok. F.eks. vil en model af et molekyle jo være i "stor" målestok. Vi må derfor opstille en mere præcis definition.

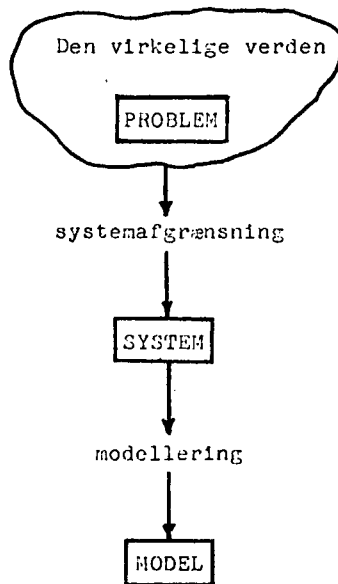
- En model er en til et ganske bestemt formål beskrevet simplificeret sammenhangsbeskrivelse af en del af et virkeligt system.
- Med et system menes her den del af den virkelige verden, som er genstand for vores interesse.

### 2.3 Hvordan opstilles en model?

Vi vil her beskrive den proces, hvor man opstiller en model til hjælp ved løsning af et givet problem. Vi vil i det følgende kalde denne proces for modelleringsprocessen.

Lad os beskrive modelleringsprocessen ved først at opstille et diagram over den og ud fra dette diskutere de begreber og handlinger, som indgår.

Den første del af modelleringsprocessen kan skitseres som følger:



#### Den virkelige verden med problemer:

Den virkelige verden er selvfølgelig den verden, som omgiver os. Det er her de problemer, som har vores interesse, findes. De kan være af videnskabelig art, - hvordan er et DNA-molekyle opbygget ? -, af miljømæssig art, - hvordan undgår vi en forurening i en given sø ? -, eller det kan være et produktionsproblem, - hvordan bygger vi et skib, som bruger mindst mulig brændstof for at transportere en given last ? -.

Der findes selvfølgelig en række problemer, hvor det ikke nødvendigvis er en hjælp at anvende modeller. Behandlingen af disse har vi fundet uinteressant i denne sammenhæng. At vi i det følgende udelukkende beskæftiger os med problemer, hvor modeller er en oplagt hjælp, skal således ikke tages som udtryk for, at alle problemer kan løses med brug af modeller.

#### Systemafgrænsning.

Denne del af modelleringsprocessen har naturligvis som mål at beskrive et system, som kan være udgangspunkt for vores model. Det er imidlertid yderst vanskeligt at give generelle retningslinier for denne afgrænsning, fordi det ofte ikke er en særlig veldefineret proces, og fordi det ofte blot er en proces, som foregår i modellørens hoved. Vi har derfor valgt at beskrive systemafgrænsningen ved at præcisere dens formål.

Formålet er at "indse", hvilke sammenhænge vores problem findes i. Sagt på en anden måde, vores system skal afgrænses sådan, at det består af alle de ting og faktorer, som har indflydelse på vores problem. Systemafgrænsningen er altså den proces, hvor man indser hvilke dele af den virkelige verden, der bør indgå i vores system.

#### System.

Vi har tidligere defineret begrebet "system"; men lad os forsøge at uddybe det en smule.

Vores system er, som det er fremgået, den del af den virkelige verden, som har indflydelse på vores problem. Sandsynligvis kender vi ikke den fuldstændige sammenhæng i systemet; men vi har indset, at de ting og faktorer, som systemet består af, har indflydelse på vores problem og dets løsning.

#### Modellering og model.

Lad os begynde med at definere nogle begreber:

- Modellering er den proces, hvor vi skaber vores model. Det kan f.eks. være at opstille nogle differentiaalligninger, eller det kan være at snitte et skib i et stykke træ til senere afprøvning i et vandbassin.
- Model er den genstand, vi har frembragt ved modelleringen, og som vi senere skal gøre eksperimenter med. (Vi har tidligere givet en præcis definition side 7 øverst.)
- Struktur og adfærd.  
Når vi taler om modellens eller systemets struktur, mener vi de sammenhænge, som findes mellem de enkelte faktorer. Adfærden er den måde, systemet eller modellen opfører sig på, det man kan se og måle. (en forurening, skibet gynger etc.).

Vi er nu kommet så vidt i modelleringsprocessen, at vi skal til at opstille (modellere) en model af vores system.

Det er oplagt, at udformningen af vores model afhænger af det problem, som vi ønsker at løse. Skal vi finde frem til en form på et skibsskrog, som er stabilt i søgang, kan vi f.eks. konstruere et modelskib, hvor vi kan ændre skrogets form fra eksperiment til eksperiment. Man kan således normalt ikke forvente, at en model konstrueret til et formål med held kan anvendes i andre problemløsningsituationer.

Hvad vi må gøre er at analysere vores system, således at vi kan opstille en model, som i videst muligt omfang opfylder følgende 3 krav:

- Modellen afspejler den struktur, som findes i systemet.
- Modellen har tilnærmelsesvis samme adfærd som systemet.
- Modellen er udformet således, at man kan drage nogle konklusioner fra den, der kan bruges til løsning af problemet.

Det er imidlertid også klart, at modellen skal være en simplifikation af systemet, hvorfor uvæsentlige detaljer må søges udeladt (modelskibet behøver f.eks. ikke at være malet eller have små vinduer).

Vores analyse af systemet må derfor munde ud i en opdeling af systemets faktorer i tre grupper:

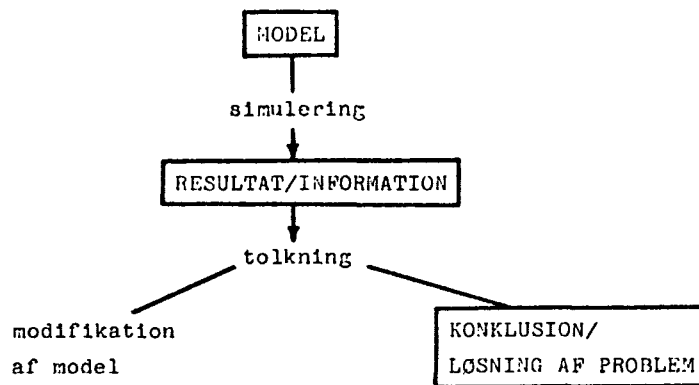
- 1.- ting, hvis effekt modelløren finder er ubetydelige, og som kan udelades i modellen.  
Vi har tidligere givet eksempler på sådanne faktorer, f.eks. vinduer i modelskibet.
- 2.- ting, som har interesse, og som modellen er designet til at studere.  
Denne type faktorer kaldes endogene variable (endogen = indre), output-variable eller afhængige variable. Karakteristika for sådanne variable er, at de væsentlig påvirker vores problem, men at mennesket af den ene eller anden grund ikke kan regulere på dem, selv om det måske ville løse vores problem.  
Som eksempel på sådanne endogene variable kan fra vores skibseksempel nævnes skibets rulning, som vi netop ønsker mindsket.
- 3.- ting, som påvirker systemet, og som skal med i modellen, men hvis adfærd modellen ikke er designet til at studere.  
Denne type faktorer kaldes i reglen exogene variable (exogen = ydre), uafhængige variable eller parametre. Karakteristika for denne type variable er, at vi kan regulere dem og derved finde en løsning på vores problem.  
Hvis vores problem f.eks. igen er at finde frem til et skib, der er stabilt, kan eksempler på exogene variable være skibets højde, vægt, form o.s.v., alle faktorer vi kan ændre på. Ideen er jo netop at blive ved med at regulere modellens exogene variable og observere de endogene variable, indtil vi har fundet en tilfredsstillende løsning på vores problem.

Når denne opdeling har fundet sted, skal sammenhængen mellem de forskellige variable klarlægges. (hvordan gynger et skib med en given sejlretning, som funktion af vindretningen). Man skal være opmærksom på, at problemet, man ønsker at løse, netop kan være at finde frem til en sammenhæng mellem nogle variable.

Selve valget af hvilken type model, man ønsker at arbejde med (træmodel, elektrisk kredsløb, differentiallyigningsmodel), må man træffe sideløbende med, at man afgrænser systemet og finder ud af hvilke typer faktorer, der er væsentlige i modellen.

#### 2.4 Hvordan anvendes en model ?.

Vi vil på lignende måde som i foregående afsnit skitsere et diagram og udfra dette forsøge at beskrive den del af modelleringsprocessen og de begreber, som optræder ved arbejdet med modeller.



#### Simulering og resultat.

Hensigten med at opstille en model er naturligvis at kunne udføre eksperimenter med den. Disse eksperimenter kan opfattes som simuleringer af hændelser i det virkelige system, hvorfor vi fremover vil kalde et eksperiment med en model for en simulering.

En simulering har naturligvis kun interesse, hvis man får et resultat ud af den. Et resultat kan formidles på mange måder. Det kan f.eks. i vores skibseksempel blot være en iagttagelse af, om modelskibet vælter eller ej, når vi sætter det ned i et vandbassin med bølger, eller resultatet kan være i form af udslag på nogle måleinstrumenter. Det er klart, at den form, resultatet skal fremtræde i, skal vælges allerede ved opstillingen af modellen. I det indledende eksempel, hvor vi opstillede et elektrisk kredsløb, hvor strømmen  $I$  skulle repræsentere hastigheden  $V$  i det mekaniske system, vidste vi, allerede inden vi opstillede modellen, at vi skulle benytte et amperemeter til at

"se" resultatet af simuleringen. Til simulering af differenttalligninger anvendes ofte datamaskiner, hvorfor det er naturligt at få resultatet af en simulering udskrevet på et stykke papir, f.eks. i form af kurver eller tabeller. Vi vil i de følgende kapitler komme nærmere ind på dette.

Det er imidlertid ikke nok at beslutte, på hvilken form resultatet skal fremtræde. Man må naturligvis også tage stilling til, hvad det er for information, man ønsker at få ud af en simulering. Det, vi ønsker, er selvfølgelig information, som gør os i stand til at løse vores oprindelige problem. Lidt mere præcist kan vi sige, at den søgte information i reglen deler sig i to kategorier:

1.- Adfærdsinformation.

Information, som kan benyttes til at forudsige systemets udvikling frem i tiden.

2.- Strukturinformation.

Information, som kan benyttes til at forstå nogle sammenhænge i systemet.

Vi kan af de to kategorier se, at resultaterne af en simulering ikke altid skal give information om modellens adfærd, men også om modellens struktur (de kausale sammenhænge). Vi må derfor, allerede når vi opstiller vores model, designe resultaternes form således, at vi får den nødvendige information til løsning af vores problem.

Tolkning af resultat.

Når vi har udført en simulering og fået et resultat, må vi overveje dets brugbarhed og dets troværdighed. Med andre ord, hvordan kan vi være sikre på, at det resultat, vi har fået ved simuleringen, faktisk kan bruges til løsning af vores problem. Var modellen en nøjagtig kopi af systemet, ville resultatet naturligvis være rigtigt, såfremt simuleringen var præcis; men modellen er jo en simplifikation af systemet. Så hvordan kan vi, på trods af denne simplifikation, tro på resultatet?

Hvad vi kan gøre er, at vurdere modellens evne til at producere brugbare resultater, eller sagt på en anden måde, vurdere hvor god en efterligning modellen er. Finder vi, at modellen har en rimelig god validitet, vil vi tro på resultatet. Ellers må vi ændre på modellen. (modelmodifikation).

Denne modelmodifikation vil bestå i en mere eller mindre gennemgribende ændring af nogle af de præmisser, der ligger til grund for den aktuelle simulering. Der kan være tale om tildeling af nogle andre startværdier for de exogene variable, altså om andre parameterværdier, eller der kan være tale om en ændring af selve modellen, f.eks. at gøre en simplifikation mindre grel. Endelig kan der være brug for at tage systemafgrænsningen op til revision, idet man måske har udelukket en faktor med signifikant betydning.

En vurdering af en models validitet kan foretages ved at rubricere den i følgende validitetskategorier:

1.- Forventningsvaliditet.

Modellens adfærd er i rimelig overensstemmelse med, hvad der er forventet (af modellen eller af systemet).

2.- Reproduktionsvaliditet.

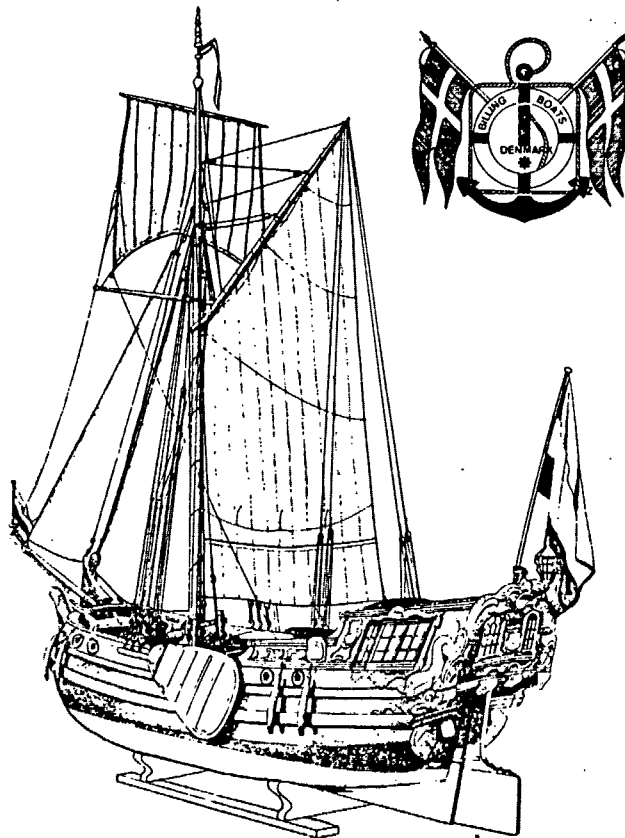
Modellen kan reproducere data, som er kendt fra systemet (data er kendt ved opstilling af modellen).

3.- Forudsigelsesvaliditet.

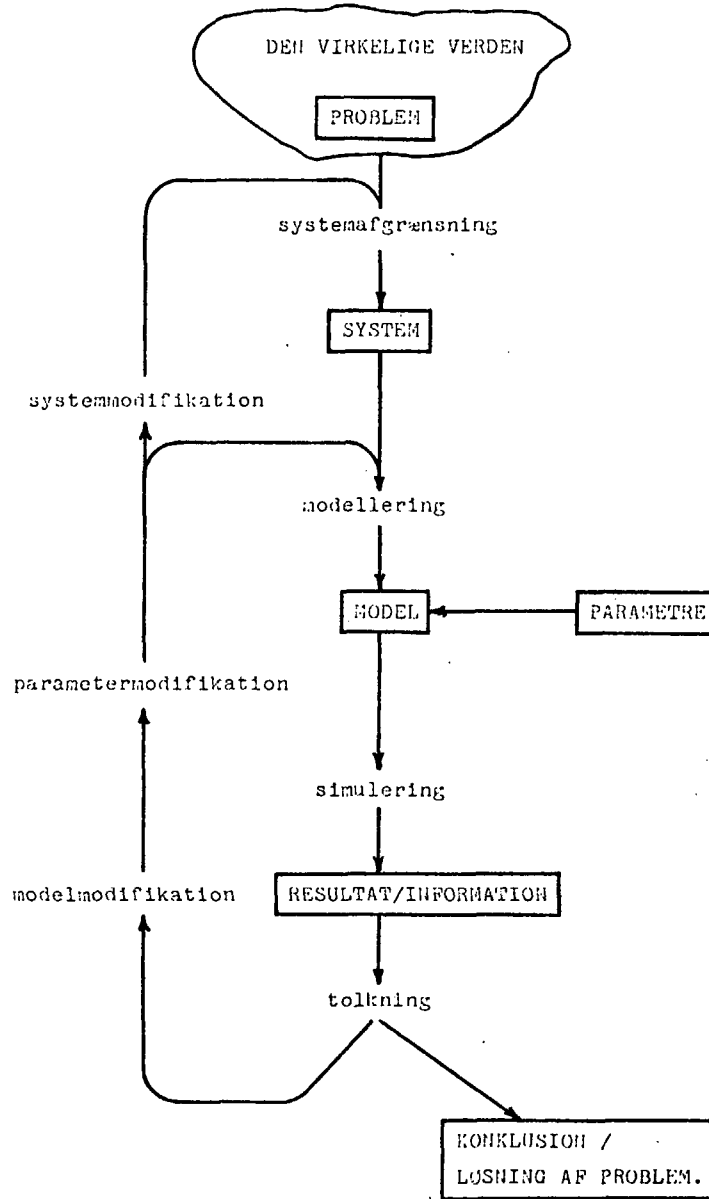
Modellen opfylder 1. og 2. og kan forudsige data, som kan findes i systemet. (Modellen er opbygget uden kendskab eller uden udnyttelse af kendskabet til disse data).

4.- Strukturvaliditet.

Udover at opfylde 1., 2. og 3. er modellens struktur en afspejling af systemets struktur.



Vi kan nu opstille det fuldstændige diagram over modellingsprocessen:





## BILAG 2

### MATEMATISKE MODELLER ER VÆSENSFØRSKELLIGE, SELVOM DE SER ENS UD.

Af Jens Højgaard Jensen.\*)

Matematiske modeller anvendes i stadig større dele af samfundet. Det er vigtigt at have øje for hvilke interesser, der skjuler sig bag. Men det er også vigtigt at kunne gennemskue deres forskelligartede karakter. De kan være teoretisk mere eller mindre velbegrundede, selvom de umiddelbart virker som et fedt. Og den tilsyneladende lighed gør, at tvivlsomme modeller låner autoritet hos mere troværdige. Det søges i artiklen først og fremmest illustreret ved en konkret sammenligning af en simpel fiskeribiologisk model med en simpel klassisk mekanisk model.

Matematiske modeller anvendes i fysik, kemi, biologi, medicin, økonomi mm. De anvendes af ingeniører og administratorer til både tekniske og organisatoriske formål.

Efter sigende<sup>1</sup> blev Vietnam-krigen bl.a. retfærdiggjort af Pentagon ved hjælp af en matematisk optimeringsmodel. Det økonomiske råd benytter en matematisk model som forudsætning for dets udtalelser om den danske nationaløkonomi<sup>2</sup>. Og OECD har forsøgt sig med at lancere en matematisk model til brug for planlægningen af uddannelsessystemerne i medlemslandene<sup>3</sup>.

Effekten af små doser kræftfremkaldende stoffer diskuteres ud fra matematiske modeller<sup>4</sup>, og det samme gør sandsynligheden for uheld på A-kraftværker<sup>5&6</sup>.

Men mest omfattende er selvfølgelig den traditionelle brug af matematiske modeller til beregning af elektriske kredsløb, bygningskonstruktioner, møllevingeprofiler osv.

I alle tilfældene medfører brugen af matematik, at den udenforstående stilles svagt i forhold til de, der har udarbejdet modellerne. I alle de nævnte tilfælde kræver det forskellige former for ekspertise at kigge modelbyggerne over skulderen.

En bedre matematisk uddannelse af befolkningen vil - alt andet lige - selvfølgelig forbedre mulighederne for folkelig indsigt og kontrol. Men at modvirke umyndiggørelsen, som den stigende brug af matematiske modeller medfører, af denne vej alene er udsigtsløs. Ekspertterne er specialiserede i brugen af matematik på økonomiske problemer, på medicinske problemer, på bygningskonstruktionsproblemer osv. og i forskellige dele af matematikken. Og den stigende brug af matematik i fremtiden vil ske via øget specialisering. Medens det menigmand har brug for, er overblik. Kontrol med specialisterne gennem direkte matematisk indsigt ville kræve, at menigmand var bedre matematisk uddannet end specialisterne tilsammen.

En form for overblik almindelige mennesker kan betjene sig af for at væge sig mod det matematiske uhyre, er politisk og samfundsmæssigt overblik. Hvilke interesser skjuler sig bag Rasmussen-rapporten? Hvem udpeger det økonomiske rådets formandskab? Hvem har økonomisk udbytte af hvilken type møllevinge, der anvendes i en given sammenhæng? Et sådant overblik tjener til at skærpe årvågenheden og giver mod til at stille kritiske spørgsmål på trods af den matematiske afmagt.

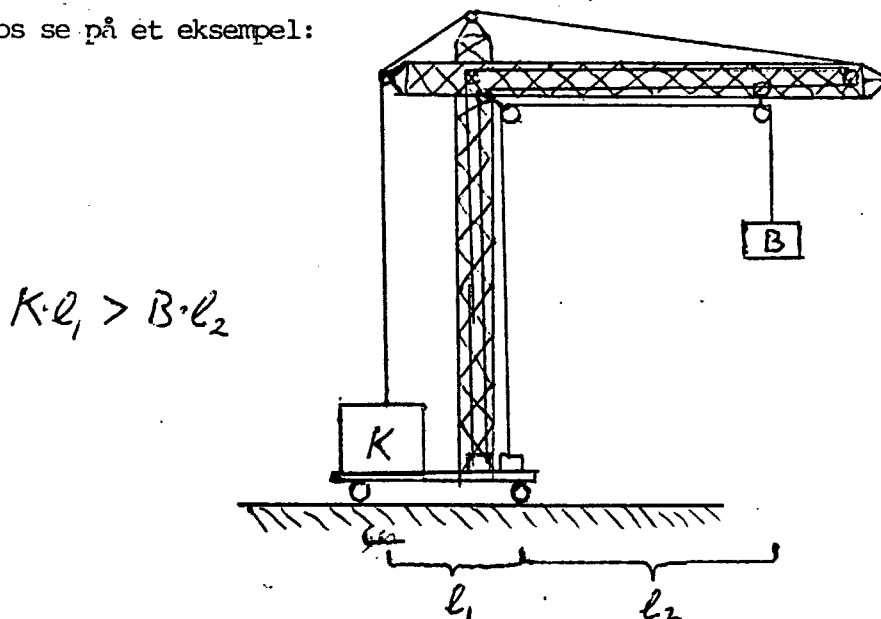
Nogle vil mene, at det politiske overblik er tilstrækkeligt. Det matematiske uhyre er ikke noget uhyre. Det er en neutral ting, der kan bruges på godt og ondt. Til syvende og sidst er det alene et spørgsmål om hvem der bruger det. I de rigtige hænder kan det kun være et gode, som må udvikles så meget, det lader sig gøre<sup>7</sup>. Synspunktet forudsætter opfattelsen af et nuværende eller snarligt kommende samfund som klasseløst. I et klassesamfund vil naturligvis først og fremmest den herskende klasse nemlig have mulighed for at benytte sig af de manipulationsmuligheder matematiske modellers uigennemskuelighed giver.

Andre vil mene, at selve brugen af matematiske tænke måder og anvendelsen af en teknisk-naturvidenskabelig rationalitet er et dominerende træk ved undertrykkelsen i det moderne samfund<sup>8</sup>. Det er naturligvis ikke således, at f.eks. matematiske modeller blot er fup og svindel. Selv modellen for krigsførelsen i Vietnam har formodentlig en kerne af instrumentel rationalitet i sig. Uden et rationelt indhold kunne modellerne ikke bruges undertrykkende ved at virke overbevisende. Det afgørende er, at

netop f.eks. matematiske modellers delrationalitet forfører til en fælles form for rationalitet menneskene imellem, der på grund af dens indskrænkethed fører til en helt irrationel samfundsmæssig udvikling. For at sande dette kræves filosofisk overblik.

Jeg mener, at det er blindt, at regne matematiske modeller for politisk neutrale, forstået på den måde, at de ikke i sig selv har en politisk funktion, men alene gives politisk indhold afhængigt af, hvem der bruger dem. På den anden side er en forkastelse af dem som først og fremmest ideologisk form også urealistisk.

Lad os se på et eksempel:



Figuren er en principskitse af en byggekran. Hvornår vælter kranen? Ifølge den klassiske mekanik vil kranen vippe omkring det forreste hjul, når belastningen, B, gange afstanden fra B til hjulet,  $l_2$ , er større end kontravægten, K, gange afstanden fra K til hjulet,  $l_1$ . Som sikkerhedsforskrift må man derfor kræve, at

$$K \cdot l_1 > B \cdot l_2$$

eller at den tilladte maksimalbelastning er mindre end den

kritiske værdi for belastningen:  $B_{kr} = K \cdot l_1 / l_2$  .

Ikke ret mange, der kan gennemføre denne beregning vil betvivle dens objektive udsagnskraft og nægte at lade sig vejlede af den på forhånd ved fastsættelse af maksimalbelastningen for en kran, forud for at den tages i brug. Beregningen er idealiseret, idet vægten af krankonstruktionen er antaget ikke at spille nogen rolle i forhold til B og K. Men den kan uden vanskeligheder udvides til at tage hensyn til vægten af krankonstruktionen.

Alle mennesker - uanset om de kan udføre beregninger af denne art eller ej - tror jeg, har en erfaringsbaseret fornemmelse af, at der findes en belastningsgrænse for konstruktioner som en kran. Og jeg tror de fleste - med god ret - vil fæste mere lid til påstanden, at den kan beregnes, end at den ikke kan det.

Beregningen er ikke neutral. F.eks. kan den aflede opmærksomheden fra, at kranen kan havarere af andre grunde end at B er for stor i forhold til  $K \cdot l_1 / l_2$ . Men den er objektiv. Og den kan have praktisk værdi for både entreprenøren og bygningsarbejderen.

Med eksemplet har jeg villet illustrere, at det politiske problem, som den om sig gribende brug af matematiske modeller er, ikke kan imødegås ved en generel mistæneliggørelse af modellerne, f.eks. gennem filosofisk begrundede påstande om umuligheden af at etablere objektive sandheder. Praksis viser, at f.eks. fysikkens matematiske modeller anvendt i tekniske sammenhænge leverer stribevis af troværdige forudsigelser. Og det ved de fleste.

Men de fleste "ved" også, at matematisk formuleret videnskab er troværdig langt ud over de grænser, hvor det er tilfældet, på grund af en fejlagtig generalisering ud fra netop bl.a. erfaringerne med dele af den matematisk formulerede fysik. Matematikkens utilnærmelighed for de fleste gør det muligt at spille på en forveksling af ensartet form med ensartet indhold:

Lad os se på et eksempel: Sandsynlighedsberegningerne for uheld på A-kraftværker i den såkaldte Rasmussen-rapport<sup>6</sup>. Og lad os sammenligne eksemplet med kraneksemplet.

I Rasmussen-rapporten regnes på sandsynlighederne for at forskellige hændelser indtræffer i A-kraftværker. Hændelserne kan opstå på forskellige måder. Sandsynligheden for at hændelsen  $x$  indtræffer,  $P_x$ , er da summen af sandsynlighederne for de forskellige måder,  $P_{x_i}, i = 1, \dots, n$ , hændelsen kan indtræffe på:

$$P_x = P_{x_1} + P_{x_2} + \dots + P_{x_n}.$$

De forskellige forløb af omstændigheder, der kan føre frem til hændelsen, er hver for sig sammensat af en række delhændelser. For at et bestemt uheldsforløb skal indtræffe, skal både det, det, det, og det ske. Sandsynlighederne  $P_{x_i}$  fremkommer derfor som produkter af sandsynligheder for delhændelserne:

f.eks.  $P_{x_1} = P_{x_{11}} \cdot P_{x_{12}} \cdot P_{x_{13}} \cdot \dots \cdot P_{x_{1m}}$

, hvor  $P_{x_{11}}$  f.eks. kan være sandsynligheden for at en ventil er i stykker på et givet tidspunkt.

Rasmussen-rapporten med bilag er på flere tusinde sider, men dette er groft taget gangen i den.

Hvorfor er Rasmussen-rapporten under al kritik? Den slags regnestykker kan vel være meget rimelige. Ja, det er vel direkte uansvarligt ikke at arbejde så langt som muligt med dem, når vi nu har A-kraftværker spredt rundt omkring i verden. Der er vel behov for at få vurderet risikoen forbundet med dem, som der er behov for at kunne forudsige under hvilke omstændigheder kranen vælter.

I det væsentlige er Rasmussen-rapporten blevet kritiseret for at være et bestillingsarbejde for A-kraftinteresser. Med de enorme økonomiske interesser, der er involveret i sagen, er den bestilt til at fremkomme med beroligende små sandsynligheder for alvorlige A-kraftværkssammenbrud. Den politiske sammenhæng

gør det nærliggende at være mistænksom. Men der er også grund til at være mistænksom over for entreprenørinteresserne bag krankonstruktioner. Alligevel er der ikke grund til at nære samme mistro til de to matematiske modeller. Udover forskellen i omfang af de to problemsæt, adskiller de sig af hvad man kunne kalde videnskabsteoretiske grunde.

Den vigtigste måde Rasmussen-rapporten har været imødegået på, har været ved modregnestykker, der gav helt andre sandsynligheder. Kranregnestykket kan ikke på samme måde problematiseres. Hvoraf forskellen?

A-kraft risiko beregningerne er idealiserede. Dels er delhændelsen  $x_{11}$  antaget at indtræffe uafhængigt af delhændelsen  $x_{12}$ , fordi sandsynligheden for at de indtræffer samtidigt derved matematisk simpelt kan udregnes som produktet af sandsynlighederne for hændelserne hver for sig. Men det kan være, at sandsynligheden for samtidige hændelser er større end beregnet, fordi den ene hændelse påvirker chancen for den anden. F.eks. kan fejlaflæsning af instrument 1 forvirre operatøren, så sandsynligheden for fejlaflæsning af instrument 2 øges ved det. Dels er der ved beregningen af sandsynligheden for hændelsen  $x$  kun medtaget de  $n$  forløb, man har kunnet komme på, der fører til  $x$ . Men der kan være andre forløb, som der altså ikke er taget højde for.

Idealiseringen som sådan er imidlertid ikke fældende for beregningerne. Ved opstilling af enhver matematisk model foretages idealiseringer. I kraneksemplet så vi f.eks. bort fra massen af krankonstruktionen. Rasmussen-rapportens forfattere er selvfølgelig også klar over, at der kan være problemer med de nævnte idealiseringer og har forsøgt at tage højde derfor. Den afgørende forskel er, at det i kraneksemplet er muligt at vurdere størrelsen af de fejl, der begås ved idealiseringerne, medens dette ikke er tilfældet ved risikoberegningerne. Det skyldes, at kranproblemet kan placeres indenfor en teoretisk ramme - den klassiske mekanik -, medens der ikke findes en tilsvarende teoretisk ramme for vurdering af risikoproblemet ved A-kraft værker.

Den matematiske model til vurdering af kranens maksimumsbelastning er en teoretisk model, medens Rasmussen-rapporten er en simulationsmodel.

I det følgende vil jeg forsøge at illustrere forskellen mellem teoretiske modeller og simulationsmodeller nøjere ved hjælp af et eksempel på hver. Og jeg vil ud fra de to eksempler forsøge at vise, hvordan verifikationsproblemet er forskelligt for teoretiske modeller og simulationsmodeller.

Jeg håber, at jeg har fået antydning af betydningen af den skelnen eksemplerne skal illustrere: Rasmussen-rapporten har kunnet kritiseres for at være et bestillingsarbejde. Men det er der så meget, der er, uden at det alene af den grund kan afvises. Rasmussen-rapporten har kunnet kritiseres for at være baseret på forsimplede og idealiserede forudsætninger. Men det er tilfældet for enhver operationel model. Det afgørende ved Rasmussen-rapporten er, at der ikke findes nogen måde at vurdere berettigelsen af de grundlæggende idealiseringer klart på, og der herved bliver rige muligheder for at dens konklusioner kan bruges i overensstemmelse med ønskerne hos dem, der har bestilt den. I forhold til den offentlige meningsdannelse om rapporten er dette indirekte blevet demonstreret gennem modregnestykker. Så langt så godt. Men det kan pointeres direkte ud fra karakteren af modellen. Og det har betydning i alle de tilfælde, hvor det ikke er overkommeligt, at mobilisere modregnestykker.

Efter gennemgangen af de to eksempler på henholdsvis en teoretisk model og en simulationsmodel, vil jeg kort vende tilbage til Rasmussen-rapporten.

BILAG 3: Radioaktivt henfald.

Denne models fremkomst kan føres tilbage til begyndelsen af dette århundrede, hvor den engelske fysiker Rutherford og hans medarbejdere påviste, at atomer af visse grundstoffer var ustabile. Dette betyder, at i et givet tidsrum omdannes et bestemt antal atomer spontant til atomer af et andet grundstof. Det er dette fænomen, som kaldes radioaktivt henfald, og de nævnte atomer kaldes radioaktive.

Da radioaktivitet således er en egenskab ved selve atomet, kunne Rutherford videre konkludere, at et stofs radioaktivitet måtte være direkte proportionalt med antallet af radioaktive atomer i stoffet. Hvis vi derfor benævner antallet af radioaktive atomer til tiden  $t$  med  $x(t)$ , så vil den hastighed, hvormed antallet ændres, være  $x'(t)$ , og derfor vil  $x'(t)$  være proportional med  $x(t)$ , dvs

$$(1) \quad \underline{x'(t) = -\lambda x(t)} \quad \lambda > 0.$$

Konstanten  $\lambda$  benævnes henfaldskonstanten, og minustegnet beskriver, at der forsvinder atomer.

Benævner vi  $x(0) = x_0$ , dvs antallet af atomer til tiden 0, kan man vise, at

$$(2) \quad \underline{x(t) = x_0 e^{-\lambda t}}$$

Tro indtil videre på det - i problemstilling 3 vil I se, at påstanden er korrekt. I kan dog også efterprøve, om påstanden er korrekt ved at indsætte ligning (2) i ligning (1).

I stedet for at beskrive et stofs radioaktivitet ved henfaldskonstanten  $\lambda$  benyttes ofte stoffets halveringstid  $T$ , dvs den tid, der går, for at antallet af radioaktive atomer  $x(t)$  - halveres. Formelt kan dette udtrykkes

$$(3) \quad x(t+T) = \frac{1}{2}x(t).$$



Øvelse 1: Fastlæg udfra (2) og (3) en sammenhæng mellem halveringstiden  $T$  og henfaldskonstanten  $\lambda$ .

Øvelse 2: I nedennævnte tabel er angivet en række sammenhænge mellem halveringstid ( $T$ ) og henfaldskonstant ( $\lambda$ ) for et stof. Hvilke af disse sammenhænge er korrekte?

Stof	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T$	1.0000	0.6931	2.57	0.8326	0.026	10	6.93	0.450	0.054
$\lambda$	0.6931	1.0000	2.70	0.8326	0.083	0.0693	10	1.540	6.415

Øvelse 3: Et eksempel på et sådant radioaktivt henfald er ændringen af bly-214 ( $^{214}\text{Pb}$ ) til bismuth -214 ( $^{214}\text{Bi}$ ). Halveringstiden for  $^{214}\text{Pb}$  er 27 minutter. Bestem henfaldskonstanten for  $^{214}\text{Pb}$  og skitsér antallet af  $^{214}\text{Pb}$ -atomer ( $x$ ) som funktion af tiden.

Den beskrevne egenskab ved radioaktive atomer benyttes i praksis bl.a. i kulstof-14 metoden, der benyttes som dateringsmetode for arkæologisk materiale. Det radioaktive kulstof-14 ( $^{14}\text{C}$ ) er naturligt forekommende og dannes ved kosmisk stråling af kvælstof-14 ( $^{14}\text{N}$ ). Til gengæld nedbrydes  $^{14}\text{C}$  så igen med en halveringstid på 5730 år.

Lader vi  $x$  betegne antallet af  $^{14}\text{C}$ -atomer i biosfæren, så vil  $x'$  betegne ændringen i antal  $^{14}\text{C}$ -atomer. Er  $M$  summen af  $^{14}\text{C}$ - og  $^{14}\text{N}$ -atomer, vil  $M-x$  betegne antallet af  $^{14}\text{N}$ -atomer, og vi kan da opstille følgende model for radioaktivt kulstof

$$(4) \quad x' = k(M-x) - \lambda x$$

hvor  $k$  beskriver dannelsesraten ved konstant kosmisk stråling. (Prøv selv at begrunde denne model!). Denne ligning kan, som vi skal se i problemstilling 3, løses. Imidlertid kan vi også resonnerer lidt på fænomenet. Hvis der har været konstant kosmisk stråling siden jordens skabelse, må det system, som styrer dannelsen af  $^{14}\text{C}$ , være kommet i ligevægt - dvs  $x'=0$ . Af (4) kan vi altså slutte, at det konstante antal  $^{14}\text{C}$ -atomer i biosfæren er

$$x = \frac{kM}{k+\lambda},$$

dvs at koncentrationen af  $^{14}\text{C}$  i luften og i levende organismer er konstant til enhver tid.

Når en organisme dør, fx. når et træ bliver fældet, stopper træets assimilation af  $\text{C}_2\text{O}$  (med en vis mængde  $^{14}\text{C}$ ), og kun henfaldet af træets  $^{14}\text{C}$  fortsætter. Dvs, hvis man kan måle, hvor meget (eller hvor lidt)  $^{14}\text{C}$ , der er tilbage i en træstump i en udgravning, så kan man, i forhold til  $^{14}\text{C}$ 's halveringstid, udregne, hvor længe det er siden, træet er blevet fældet.

Lader vi nu  $y(t)$  betegne mængden af  $^{14}\text{C}$  i en organisme (fx. et stykke træ) til tidspunktet  $t$  efter organismens død, og er  $y(0) = y_0$ , da vil  $y$  opfylde ligningen (jfr. (2))

$$(5) \quad y(t) = y_0 e^{-\lambda t}.$$

Har vi nu et stykke trækul fra en udgravning, vil man måle, hvor mange radioaktive henfald der sker fra trækullet (per minut og gram stof). Dette tal, som vi kunne kalde  $r$ , vil naturligvis være proportionalt med den mængde  $^{14}\text{C}$ , der aktuelt er tilbage i stoffet, dvs

$$r = \lambda y(t).$$

Betegner  $r_0$  tilsvarende antallet af radioaktive henfald (per minut og gram) for frisk træ, får man

$$r_0 = \lambda y_0.$$

Da bliver jfr. (5)

$$\frac{r_0}{r} = \frac{\lambda y_0}{\lambda y_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}$$

eller

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_0}{r} .$$

Indføres halveringstiden, fås

$$t = T \frac{\ln r_0 - \ln r}{\ln 2}$$

der fastlægger fx. trækulletts alder.

Øvelse 4: I forbindelse med fundene af hulemalerierne i Lascaushulerne i Frankrig i 1950 fandt man også en del trækul. Målinger på dette materiale gav i gennemsnit 0.97 henfald per minut og gram. For frisk træ er det tilsvarende tal 6.68. Giv på denne baggrund en sandsynlig alder på hulemalerierne.

Øvelse 5: Atomkernen  $^{160}\text{Dy}$  (Dysprosium - 160) har en anslået tilstand med energi på 87 keV. Atomkerner, som befinder sig i denne tilstand, vil hurtigt henfalde til grundtilstanden i  $^{160}\text{Dy}$  gennem udsendelse af  $\gamma$ -stråling.

I tabellen er angivet det antal henfald  $\Delta N$ , der fra en given mængde  $^{160}\text{Dy}$  (i sin anslåede tilstand) iagttages til forskellige tidspunkter  $t$ . Tidsenheden er ns (nanosekund) =  $10^{-9}$  s.

t (ns)	$\Delta N$	t (ns)	$\Delta N$
0,0	-	7,5	922
0,5	8641	8,0	795
1,0	7217	8,5	670
1,5	6229	9,0	577
2,0	5318	9,5	505
2,5	4552	10,0	423
3,0	3853	10,5	358
3,5	3311	11,0	302
4,0	2791	11,5	253
4,5	2405	12,0	214
5,0	2040	12,5	190
5,5	1744	13,0	161
6,0	1494	13,5	152
6,5	1281	14,0	108
7,0	1097	14,5	92

Opstil en differentiaalligningsmodel, som modellerer denne situation, og fastlæg de parametre, som indgår i modellen.

MAT B/83 - uge 41

Problemstilling 2

Opstilling af modeller.

I første problemstilling fik I en generel præsentation af, hvordan man kunne opstille modeller, og tillige stiftede I bekendtskab med en meget simpel model af typen "vækst proportional med størrelse". I denne problemstilling er det tanken, at I selv skal til at opstille modeller.

Som en opvarmning kan I fra problemstilling 1, bilag 1 tage figur 2.1, som påstås at give anledning til modellen

$$MV' = -kV + mg.$$

Et sådant mekanisk system er undergivet Newtons 2.lov - "summen af de kræfter, der påvirker klodsen, er lig klodsens masse gange dens acceleration" ( $K = MA$ )<sup>\*)</sup>. Beskriv nu de kræfter, som påvirker klodsen, når den bevæger sig hen ad pladen, og afgør, hvilke af disse kræfter, der optræder i den endelige model, samt hvorfor nogle af dem er udeladt.

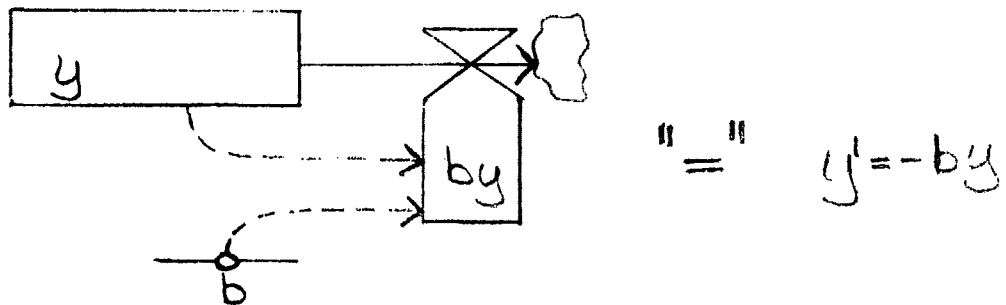
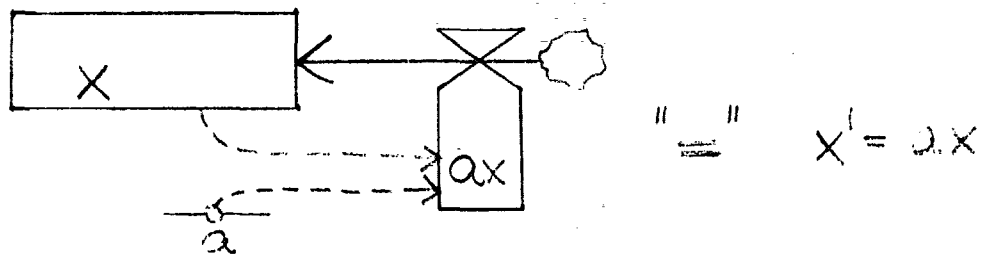
Når den virkelighed, man skal modellere, bliver mere indviklet, kan det tit være en fordel at have en eller anden diagramteknik, så man med kasser og pile - især for sig selv - kan klarificere, hvilke ting i "virkeligheden" man finder væsentlige, og hvilke sammenhænge man ser mellem disse ting. Et forslag til en sådan diagramteknik er beskrevet i vedlagte bilag.

Grunden til, at vi har valgt netop system dynamics (kaldet SD) til det følgende, er, at denne diagramteknik - selv om den har sine mangler - har vundet en stor udbredelse som diagramværktøj.

---

\*) Det forudsættes bekendt, at  $A = V'$ .

Det er sikkert fremgået af bilaget, at feed-back sløjferne udgør en central plads i disse modeller. Der er to væsens forskellige sløjfer, dem med positiv og dem med negativ feed-back, nemlig (bemærk pilens retning)



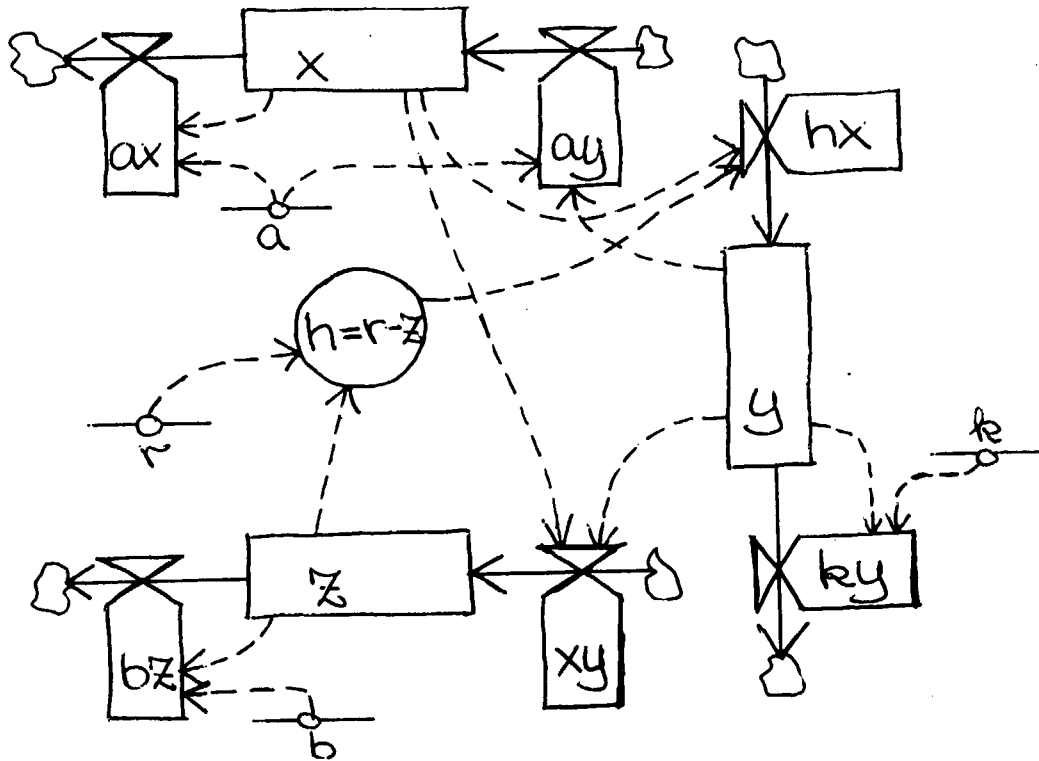
De "rene" feed-back sløjfer er altså analoge modeller for "vækst proportional med størrelse".

Prøv nu at "oversætte" modellen for antallet af  $^{14}\text{C}$ -atomer i biosfæren, dvs differentialligningen

$$x' = k(M-x) - \lambda x$$

fra problemstilling 1, bilag 3 til et SD-diagram.

Fremover er det meningen, at I skal oversætte den modsatte vej! Derfor kan I arbejde med at oversætte følgende SD-diagram til et sæt af differentialligninger (en ligning for hver tilstandsvariabel). Diagrammet er model for et faktisk system, men af hensyn til oversættelsesprocessen kan det være en fordel at glemme det bagved liggende system her.



I skulle herefter være i stand til med (eller uden) brug af SD-diagramteknikken at opstille en model for hver af følgende fire systemer.

Øvelse 1: En partikel med masse  $M$  synker lodret ned gennem en væske, og vi ønsker at beskrive partiklens afstand til væskeoverfladen som funktion af tiden  $t$ . Glem ikke, at partiklens vægt ændres, når den er i væsken. Det kan anbefales at benytte ideen fra det indledende eksempel i denne problemstilling.

Øvelse 2: Et stof  $C$  dannes ved en kemisk reaktion mellem stofferne  $A$  og  $B$ . Ved reaktionen dannes  $1$  gram af  $C$  ved en kombination af  $p$  gram af  $A$  og  $q = 1-p$  gram af  $B$ . Den hastighed, hvormed  $C$  dannes, er til enhver tid lig produktet af de resterende mængder af  $A$  og  $B$ . Reaktionen starter med  $a$  gram af stof  $A$  og  $b$  gram af stof  $B$ . Opstil nu en model for, hvor meget der er af stoffet  $C$  på et givet tidspunkt. Antag, at  $a/p > b/q$ . Hvad er den maksimale mængde, der kan dannes af stoffet  $C$  ved den beskrevne reaktion.

Øvelse 3: Som nævnt i problemstilling 1 var stoffet bly-214 ( $^{214}\text{Pb}$ ) radioaktivt, og det henfaldt med en halveringstid på 27 minutter til bismuth-214 ( $^{214}\text{Bi}$ ). Imidlertid er også  $^{214}\text{Bi}$  radioaktivt, og det henfalder til  $^{210}\text{Pb}$  med en halveringstid på 20 minutter. Opstil et SD-diagram og derpå en differenttialligningsmodel, som modellerer det beskrevne system. (Helt korrekt henfalder  $^{214}\text{Bi}$  til Polonium-214 ( $^{214}\text{Po}$ ) med en halveringstid på få mikrosekunder, hvorefter  $^{214}\text{Po}$  henfalder til  $^{210}\text{Pb}$ , men  $^{214}\text{Po}$  vil vi udelade af modellen).

Øvelse 4: Den menneskelige organisme har til stadighed behov for at optage jod. Optagelsen af jod sker som salte gennem mave/tarmkanalen eller i luftform gennem lungerne, hvorefter jodforbindelserne fordeler sig i blodet. Joden opmagasineres herefter i skjoldbruskkirtlen, hvorfra den udskilles med en biologisk halveringstid på 128 døgn. Organismens daglige behov for jod er 2 mg. Hvor stor en mængde jod vil der så til stadighed være bundet i organismen?

Nu findes forskellige jod-isotoper. Der er dels grundstoffet jod-127 ( $^{127}\text{J}$ ) og dels de to radioaktive isotoper jod-131 ( $^{131}\text{J}$ ) og jod-129 ( $^{129}\text{J}$ ), der udsender  $\beta$ - og  $\gamma$ -stråling, og som har halveringstider på 8.05 døgn henholdsvis  $1.6 \cdot 10^7$  år. Henfaldet sker til Xenon-131 ( $^{131}\text{Xe}$ ) og Xenon-129 ( $^{129}\text{Xe}$ ). Disse to jod-isotoper forekommer normalt i så små mængder, at de kan negligeres. Men ved fx. et radioaktivt udslip fra et A-kraftværk kommer store mængder af radioaktive jod-isotoper i biosfæren. (Dog benyttes radioaktivt jod også som sporstof ved medicinske undersøgelser.)



I en vis afstand fra A-kraftværket konstateres det, at 40% af joden er som radioaktive isotoper. Opstil på baggrund af disse oplysninger en model, som beskriver, hvordan mængden af hver af de tre jod-isotoper vil variere i organismen.

## BILAG. Dynamisk systemteori.

Når man har afgrænset og klarificeret sin begrebsmodel for et forelagt system, kommer den næste fase - opstillingen af en matematisk model. I denne fase kan det ofte være af stor betydning, at man har en klar diagramteknik - også gerne en selvkomponeret - til sin rådighed. Derved får man dels fastlagt sine "transport"- og "informations"-veje og dels differentieret de indgående parametre og deres indbyrdes sammenhænge på en mere overskuelig måde, end når man foretager en verbal beskrivelse af sin begrebsmodel. En anvendelig diagramteknik blandt de mere autoriserede skal her kort beskrives. Den benævnes dynamisk systemteori (eng.: system dynamics - i det følgende forkortet SD) og er udviklet på MIT (Massachusetts Institute of Technology), hvor den bl.a. er brugt i forbindelse med opstilling af en verdensmodel (detailleret beskrevet i Jay W. Forrester, "World Dynamics"). Teknikken er oprindelig udviklet af Forrester, der er professor of management ved MIT, med henblik på en bedre styring af industri- og erhvervsvirksomheder.

### Nogle definitioner.

Formålet med diagramteknikken er, at det via den skal blive lettere at arbejde sig fra begrebsmodellen for et forelagt system og frem til at opstille en matematisk model for systemet. Skal diagramteknikken imidlertid være et led i dannelsen af en matematisk model, er det nødvendigt at stille det krav til den, at alle i et diagram indgående størrelser skal kunne kvantificeres, d.v.s. udtrykkes i tal. Når så det indledende arbejde, som består i at fastlægge, hvilke af begrebsmodellens parametre der - i den givne sammenhæng - er væsentlige og kvantificerbare, er afsluttet, fremstår det næste trin, som består i at karakterisere de valgte systemparametre og deres indbyrdes relationer. Dertil findes i SD følgende symboler og nomenklatur:

L

tilstandsvariabel (level) beskriver - eventuelt sammen med andre tilstandsvariable - et systems tilstand til ethvert tidspunkt. En tilstandsvariabel kan kun ændres via en eller flere strømvariable (se denne), og den kan således ikke påvirkes direkte af en anden tilstandsvariabel.

R

strømvariabel (rate) styrer - eventuelt sammen med andre strømvariable - forbindelsen mellem tilstandsvariable. Den angiver ændring pr. tidsenhed, eller en del af denne ændring, i en tilstandsvariabel. En strømvariabel kan ikke direkte påvirke en anden strømvariabel, men påvirkningen må gå via en tilstandsvariabel - og eventuelt også en eller flere hjælpevariable (se denne). Den eneste påvirkning til strømvariable kommer gennem informationspile (se denne).

A

hjelpevariabel (auxiliary) er en slags afhængig tilstandsvariabel. Den kan enten udtrykkes direkte som funktion af tiden, og den beskriver da udviklingen i visse ydre forhold, som påvirker systemet, eller udtrykkes som en funktion af en eller flere tilstandsvariable, og den benyttes her som mellemregning i det ofte komplicerede regnestykke, der udgør strømvariablenes afhængighed af tilstandsvariablene.

dræn/kilde (sink/source) angiver ydre forhold, som ikke har interesse for vores model.

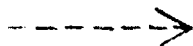
C

konstant (constant) er et modelement, som

ikke ændrer værdi i det tidsrum, modellen kører.

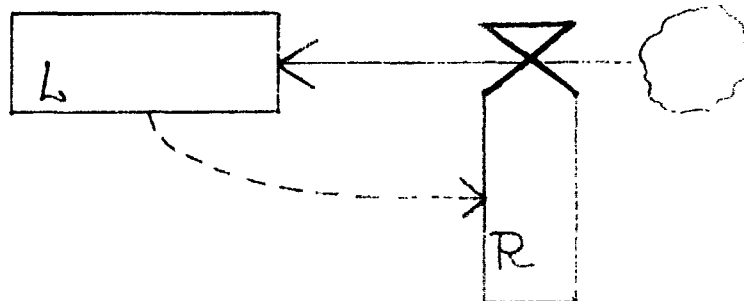


strømpil (physical arrow) illustrerer en faktisk transport af størrelser, som skal bevares.



informationsspil (information arrow) angiver en funktionel afhængighed eller en transport af information, der ikke nødvendigvis skal bevares.

Blandt disse symboler udgør følgende kombination af en tilstandsvariabel og en strømvariabel:



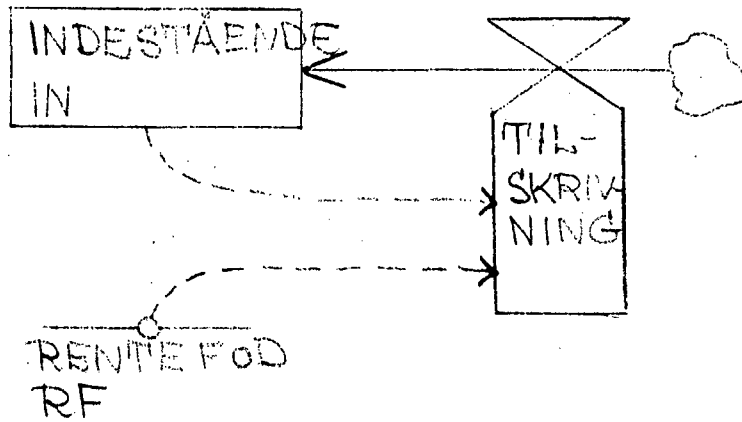
den rene feed-back sløjfe (loop). Sådanne sløjfer er de basale elementer i enhver model inden for dynamisk systemteori.

#### Eksempel 1.

Betragter man systemet en bankbog, og man er interesseret i at beskrive variationerne på det indestående beløb, vil den enkleste model være den, hvor der ingen ind- og udbetaling sker (f.ex. når et forældrepar sætter kr. 500,- på en bankbog den dag, deres datter bliver døbt), og hvor der er en konstant rentefod.

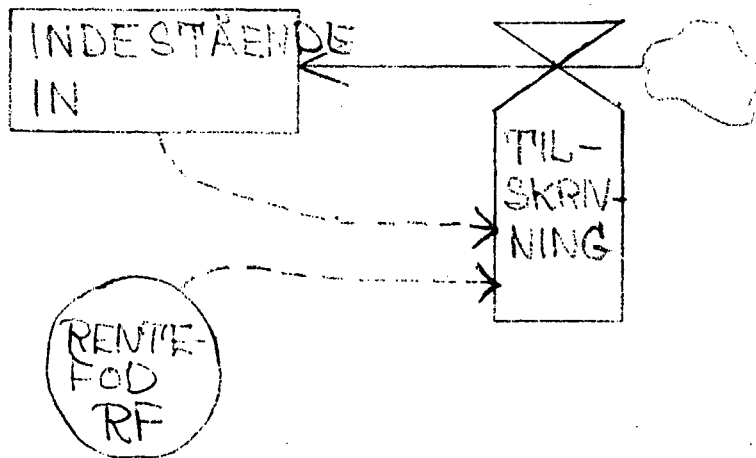
Lader man det indestående beløb IN være en tilstandsvariabel, rentefoden RF være en konstant og rentetilskrivning TIL være en strømvariabel, får man følgende SD-diagram

som model for det forelagte system:



Eksempel 2.

Den i eksempel 1 beskrevne model må imidlertid i de fleste situationer anses for alt for forenklet, således vil som bekendt diskontoen - og derfor også indlånsrenten - variere. Dette får følgende indflydelse på det til systemet svarende SD-diagram:

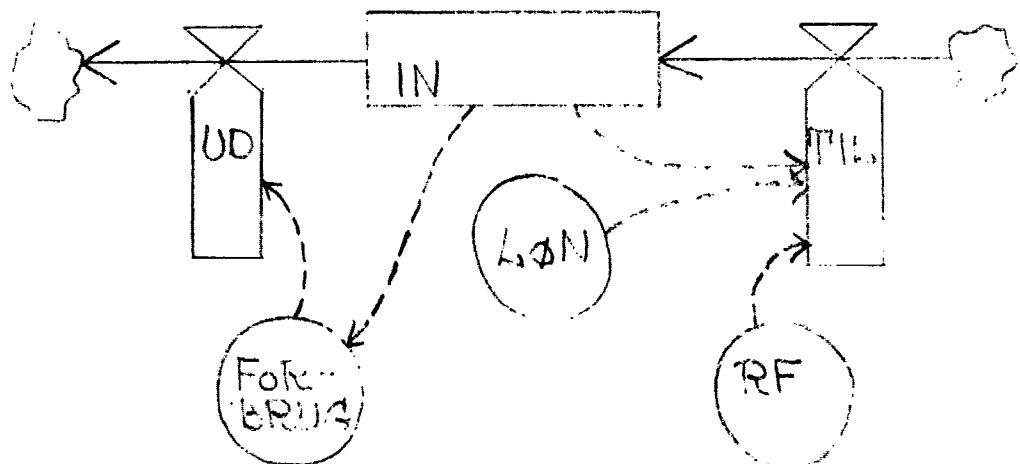


hvor rentefoden RF nu skal opfattes som en hjælpevariabel, der afhænger af tiden.

Det er her meget væsentligt, at man er opmærksom på, at der ved overgang fra eksempel 1 til eksempel 2 overhovedet ingen ændring sker i systemet - det er stadig bankbogen. Det, man ændrer, er modellen, d.v.s. at man vælger at tage hensyn til flere af systemets parametre. Derved får modellen et lavere abstraktionsniveau, til gengæld vinder den i evnen til at udsige noget meningsfuldt om systemets udvikling.

### Eksempel 3.

Situationen i eksempel 2 vil også i de fleste sammenhænge være alt for simpel en model for systemet en bankbog. Man ved fra sig selv, at der med mellemrum står ret lidt på bankkontoen, og man afventer en lønindbetaling. Dette betyder, at ind- og udbetaling på kontoen skal inddrages i modellen. Her vil den eneste væsentlige indbetaling i almindelighed hidrøre fra lønoverførslen, hvorimod forbruget (udbetalingen) kan være meget forskelligt, men forbruget FB vil i alt fald være mindre end det til enhver tid indestående, d.v.s. afhænge af IN. Disse specifikationer resulterer i følgende mere komplicerede SD-diagram:



hvor såvel lønnen LØN som rentefoden RF skal opfattes som hjælpevariable, der afhænger af tiden, og tilskrivning TIL og udbetaling UD er strømvariable.

#### Eksempel 4 - En økologisk model.

De foregående eksempler har alle været meget simple, både hvad angår systemets kompleksitetsgrad og modellernes omfang. I mange praktiske opgaver vil systemet imidlertid være mere komplekst, og af samme grund vil de dynamiske modeller, man vil kunne opstille, forekomme så abstrakte, at de ikke synes at udsige noget meningsfuldt om systemets udvikling. Det er derfor meget vigtigt, at man i modelopstillingsfasen meget klart redegør for, hvilke generalisationer og underforståede antagelser man gør for at simplificere modellen. Det er herunder væsentligt at præcisere, hvilke indbyrdes relationer man antager mellem systemets under-systemer, og hvorfor man vil undlade visse andre relationer. Ydermere skal man indgående begrunde, hvorfor hver enkelt relation netop er af den valgte form. Man skal endelig argumentere for, hvordan modellen til trods for sin generelle karakter giver væsentlige træk af systemets udvikling.

For at skitsere den beskrevne mekanisme vil den blive anvendt i forsøget på at opstille en matematisk model for, hvordan et nærmere beskrevet økologisk system vil udvikle sig.

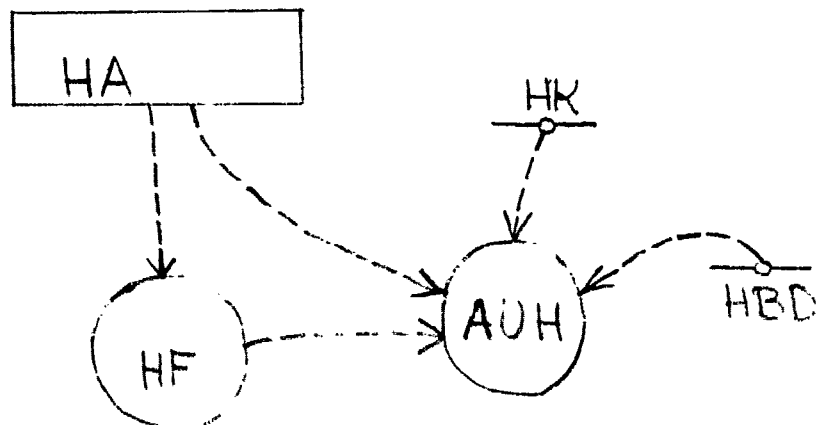
Problemet er kommet op på følgende måde. På en ø i det danske øhav, hvor der ingen rovdyr lever, er hovedparten af alle harer angrebet af en sygdom. Man beslutter at bortskyde restbestanden, herved viser der sig en storartet mulighed for at undersøge, hvordan en nyetableret biotop vil udvikle sig. Man beslutter sig derfor til at udsætte en ny harebestand og en rævebestand (begge bestående af lige mange han- og hundyr) og undersøge, hvordan de to dyreracer udvikler sig. Man vil dog først lave en modelmæssig simulering af forsøget.

Man laver følgende modelmæssige indskrænkninger:

- der regnes til stadighed med lige mange han- og hundyr,
- begge dyreracer har en konstant procentuel, naturlig dødelighed,
- begge dyreracer har en konstant kuld størrelse,

mens resten af indskrænkningerne vil fremgå af beskrivelsen af de modelmæssige relationer.

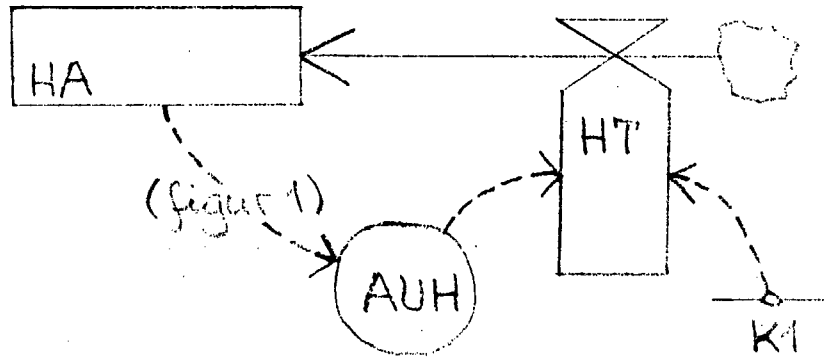
Vi betragter først harernes fødselskredsløb, hvor antallet af voksne harer, HA, defineres som tilstandsvariabel. Betragtes nu antallet af hareunger, AUH, må den givet være en hjælpevariabel, der er proportional med HA. Denne proportionalitetsfaktor indeholder harernes kuld størrelse HK, hareungernes overlevelsessandsynlighed, HBD, og hunharernes fertilitet, HF. Her er HK og HBD antaget at være konstanter, uagtet at begge størrelser vil falde, når koncentrationen af harer vokser over en vis grænse, men da den samme afhængighed af populationens størrelse gælder for HF, har man valgt at indregne hele denne afhængighed i HF, hvorved HF klart bliver en hjælpevariabel, der afhænger af HA. En for tæt koncentration af harer vil betyde en kraftig afgræsning af øen, og det er denne afgræsning, der forårsager nedgang i HF som følge af fødeknaphed. Men det antages implicit i modellen, at denne kraftige afgræsning ikke forårsager varig skade på græsset. Der kan nu opstilles følgende del af SD-diagrammet for harernes fødselskredsløb:



Figur 1



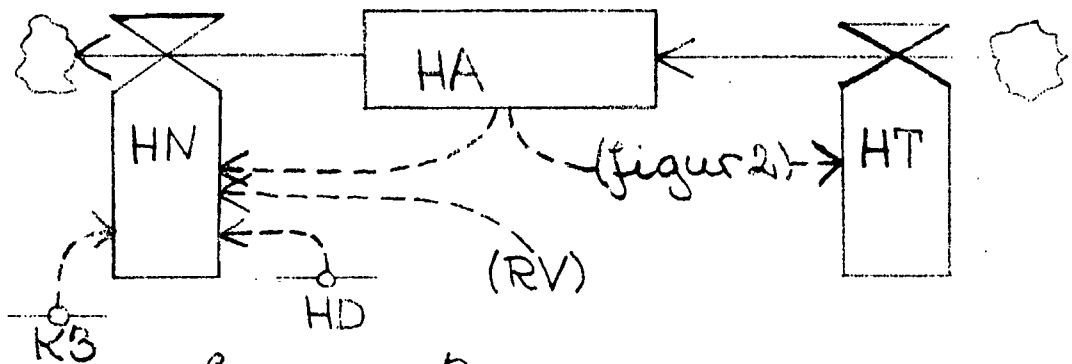
Fra det tidspunkt, hvor en hunhare er befrugtet og til tidspunktet, hvor den deraf kommende hare er kønsmoden, går en vis tid,  $K_1$ , hvilket modellen må tage hensyn til. Det vil indgå i SD-diagrammet på følgende måde:



figur 2

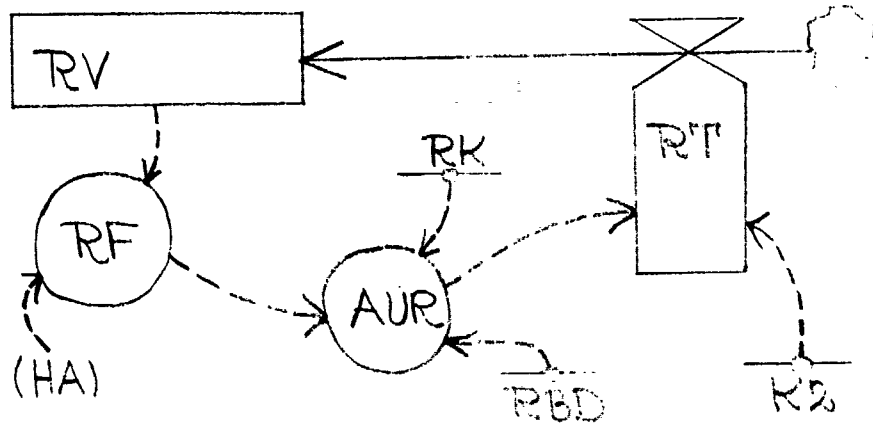
hvor  $HT = AUH/K_1$  er den strømvariabel, der forøger antallet af harer.

Går vi nu over og betragter harenes døds kredsløb, bliver den strømvariabel,  $HN$ , som regulerer nedgangen i harepopulationen, proportional med den aktuelle bestand af harer. Denne proportionalitetsfaktor er sum af to led - et led med den naturlige dødsrate,  $HD$ , og et led, som vokser proportionalt med antallet af ræve, der er til at jage og dræbe harer. Denne sidste proportionalitetsfaktor,  $K_3$ , angiver den risiko, en given hare har for at blive dræbt af en given ræv. I SD-diagram bliver nu resten af harekredsløbet:



figur 3

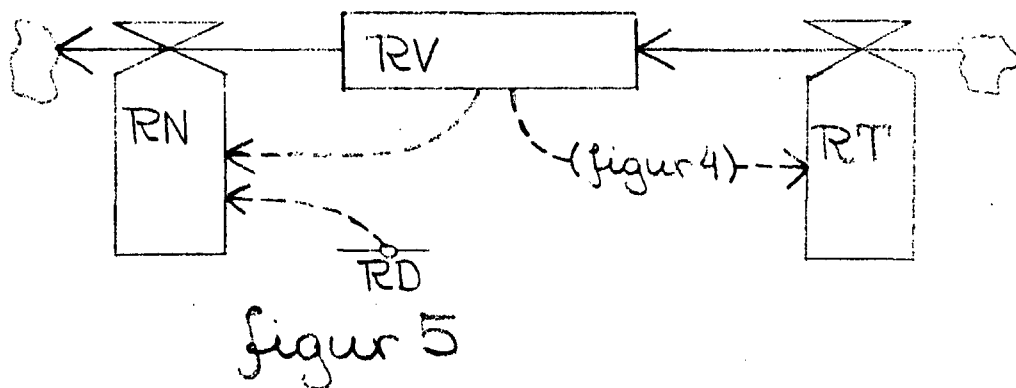
Går vi videre til at betragte rævenes fødselskredsløb med antallet af voksne ræve,  $RV$ , som tilstandsvariabel, så vil hele argumentationen være den samme som for harerne - med undtagelse af rævenes fertilitet,  $RF$ , som vi vender tilbage til. SD-diagrammet for rævenes fødselskredsløb bliver derfor:



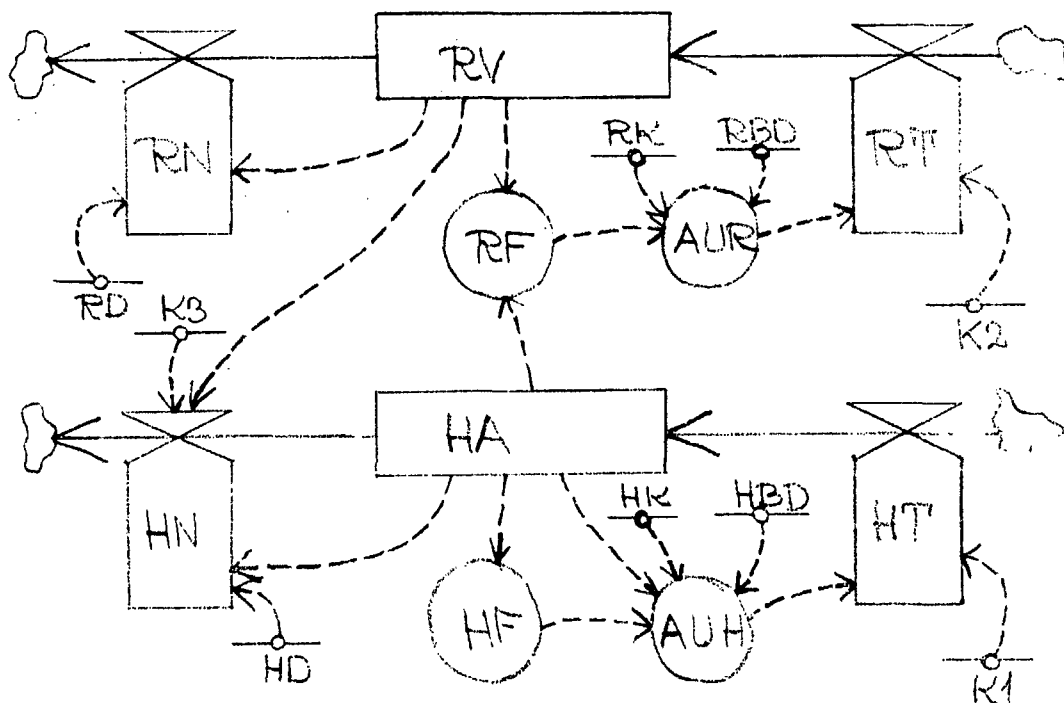
figur 4

hvor der for rævene er regnet med en sum af længderne af dræftigheds- og kønsmodningsperiode,  $K2$ , på syv måneder, rævekuldens størrelse,  $RK$ , og overlevelsessandsynligheden  $RBD$ , er som for harerne konstante. Begrundelsen for  $RF$  er, at de optimale livsbetingelser for ræve indtræder, når de får nok at spise, mens fertiliteten falder, når denne optimale betingelse ikke er opfyldt.

Endelig med hensyn til rævenes døds kredsløb bliver der ikke meget at sige, idet den modelmæssige antagelse er, at nedgangen i rævebestand,  $RN$ , er proportional med bestandens størrelse, hvorfor hele rævekredsløbet kan fuldendes med følgende del af SD-diagrammet:



Denne sidste modelmæssige forenkling er dog noget af en tilsnigelse, da en kraftig nedgang i harebestand utvivlsomt vil resultere i, at også voksne ræve dør udover den naturlige dødsrate, RD. Men modelmæssigt er der ikke forskel på at lade dette forhold indgå direkte i RD eller via en formindskning af RF, hvorfor den sidste metode er valgt. Herefter er det endelig SD-diagram.



Det er vigtigt at præcisere, at denne model er en blandt mange mulige, hvilket også gerne skulle fremgå af redegørelsen for de modelmæssige overvejelser. Men denne model vender vi tilbage til senere.

MAT B/83 - uge 42

Problemstilling 3

Simulering af matematiske modeller.

Når det er lykkedes at opstille en differentiaalligningsmodel for et forelagt system, står det problem tilbage, at man gerne vil simulere systemets udvikling i tiden. Det enkleste ville være, at der fandtes en løsningsformel, så man direkte kunne opskrive løsningen til differentiaalligningen/-rne.

Dette kan lade sig gøre i visse simple tilfælde, som vi skal se eksempler på i denne og senere problemstillinger, men oftest må modelsimuleringen eller modelanalysen klares på anden vis. Det mest nærliggende vil være at sætte en datamaskine til at løse model numerisk, hvilket vi vil berøre ganske lidt i den sidste problemstilling.

Men tit skal denne anbrebsvinkel suppleres med en analyse af modellens strukturelle træk. Det vil ganske enkelt være for dyrt og for tidskrævende at udtegne/udregne så mange løsningskurver, at man får et overblik over, hvordan løsningerne afhænger af startpunktet og modellens parametre.

Denne stabilitetsanalyse af modellen vil udtale sig om, hvordan modellens løsninger i store træk vil forløbe, fx. når modellens parametre ændres. Denne analysemetode vil blive introduceret i problemstilling 4 og blive videreudviklet i problemstilling 8.

Men nu til indholdet i denne problemstilling - nemlig, hvordan får vi en analytisk løsning til en differentialligning?

A. Som vi så i problemstilling 1, var den vel nok simpleste differentiaalligning af formen

$$(1) \quad x'(t) = ax(t)$$

hvor  $a$  er en reel konstant (fx. ved radioaktivt henfald  $a = -\lambda$  og  $\lambda > 0$ ). Vi skal nu give et bud på en løsning til denne ligning. Omskriver vi den lidt, fås

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a$$

(hvis  $x(t) \neq 0$  for alle  $t$ ); men da nu

$$(\ln x(t))' = \frac{1}{x(t)} x'(t)$$

ændres ligningen yderligere til

$$(\ln(x(t)))' = a$$

der ved integration giver

$$\begin{aligned} \ln x(t) &= at \\ \text{eller} \quad x(t) &= e^{at}. \end{aligned}$$

Imidlertid kan man ved at indsætte i (1) se, at

$$(2) \quad \underline{x(t) = ce^{at}}$$

vil tilfredsstille (1) for alle (reelle) værdier af  $c$ . Det vil som et specialtilfælde af pkt.B nedenfor vise sig, at ligningen (2) beskriver samtlige løsninger til differentiallyigningen (1).

Havde vi i (1) ladet  $a$  være en reel funktion af tiden, dvs

$$a = a(t),$$

hvilket i mange tilfælde kan være en rimelig modeludvidelse, så vil det påvirke løsningsformen lidt. Fra det sted, hvor

$$(\ln(x(t)))' = a(t)$$

fås, at

$$\ln(x(t)) = \int a(t) dt = A(t)$$

(dvs  $A'(t) = a(t)$ )

og derfor bliver

$$x(t) = e^{A(t)} .$$

Tilsvarende som før bliver så samtlige løsninger

$$(2') \quad \underline{x(t) = ce^{A(t)}}$$

idet  $A'(t) = a(t)$  og  $c$  er et vilkårligt reelt tal.

B. Som man vil huske fra de forrige problemstillinger, arbejdede vi med differentialligningen

$$MV' = -kV + mg$$

eller da massen  $M > 0$  er

$$V' = -\frac{k}{M}V + \frac{m}{M}g .$$

Denne ligning er af en lidt anden type end før, da leddet  $mg/M$  ikke indeholder den ubekendte funktion  $V$ . Den er et eksempel på ligningstypen

$$(3) \quad y' - ay = b .$$

I mange simple eksempler er  $a$  og  $b$  konstante, men for at gøre løsningsmetoden generel, kan vi antage, at  $a$  og  $b$  er kontinuerte funktioner.

Da nu  $e^{-A(t)} > 0$  (hvis  $a(t)$  er kontinuert), kan vi gange i ligning (3) med  $e^{-A(t)}$ , der således bliver til

$$y'(t)e^{-A(t)} - a(t)y(t)e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)}$$

eller

$$(y(t)e^{-A(t)})' = b(t)e^{-A(t)}$$

(ja, prøv selv!)

Ved integration fås nu, at

$$y(t)e^{-A(t)} = \int b(t)e^{-A(t)} dt + c$$

eller

$$(4) \underline{y(t) = e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)} dt + ce^{A(t)}}$$

hvor  $c$  er en vilkårlig reel konstant.

Hvis  $b$  er nulfunktionen (dvs  $b(t) = 0$  for alle  $t$ ) får man umiddelbart ligning (2').

Øvelse 1: Opskriv løsningen til differentialligningen

$$MV' = -kv + mg.$$

Øvelse 2: I problemstilling 1, bilag 3 blev i (4) introduceret ligningen

$$x' = k(M-x) - \lambda x.$$

Omskriv den til formen (3) og opskriv dens løsningsformel. Hvordan kan vi fra denne formel bekræfte hypotesen om, at man nu har

$$x(t) = \frac{kM}{k+\lambda} \quad ?$$

Øvelse 3: I problemstilling 2, øvelse 1 opstillede I en model for den hastighed, hvormed en partikel sank i en væske. Opskriv løsningen til dette problem, således at partiklen starter i væskeoverfladen med hastigheden 0.

Øvelse 4: I problemstilling 2, øvelse 3 opstillede I en model for dobbelt radioaktivt henfald ud fra et konkret eksempel. Løs nu dette sæt af differentialligninger; og overvej specielt, hvad der vil ske med løsningerne til ligningssystemet, hvis de to stoffer havde samme halveringstid.

C. Hvis I har mere tid, kan det være en fordel at arbejde lidt med det følgende, da det vil dukke op i senere problemstillinger. Vi skal her arbejde med at bestemme løsninger til differentialligningen

$$(5) \quad y' = ay - aby^2,$$

hvor  $a$  og  $b$  kan være reelle funktioner eller reelle konstanter. Der er (mindst) to måder at angribe dette problem på.

Disse er skitseret i følgende to øvelser, og hvis tiden tillader det, kan det anbefales at arbejde med begge øvelser (dog ikke samtidig) og se, at man (naturligvis) vil få samme løsningsformel.

Øvelse 5: Eftersis, at funktionen  $1/\varphi(t)$  er løsning til differentialligningen

$$y' = ay - aby^2,$$

netop når funktionen  $\varphi(t)$  er løsning til differentialligningen

$$z' = ab - az.$$

Benyt dette til at bestemme samtlige løsninger til differentialligningen

$$y' = ay - aby^2.$$

Øvelse 6: Vis, at relationen

$$\frac{1}{y(1-by)} = \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by}$$

gælder for alle positive  $y$  ( $\neq 1/b$ ). Benyt dette samt en omskrivning som under pkt. A til at bestemme samtlige løsninger til differentialligningen

$$y' = ay - aby^2.$$



MAT B/8.3 - uge 44

Problemstilling 4

Generaliserede vækstmodeller.

I er nu fortrolige(!) med vækstmodeller beskrevet ved differentialligningen

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad (1)$$

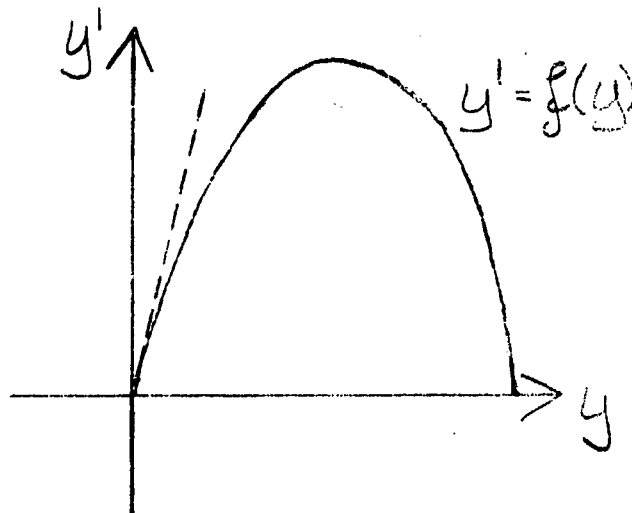
hvor  $\lambda$  er en konstant. Er  $\lambda < 0$  vil  $y \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$ . Dette kan i mange tilfælde være en acceptabel modelopførsel (jfr. modellen for radioaktivt henfald). Er  $\lambda > 0$  vil  $y \rightarrow \infty$  for  $t \rightarrow \infty$ , hvilket I kan overbevise jer om ved at undersøge den fuldstændige løsning til ligning (1). I en bakteriekultur, som har rigelig næring og gode livsbetingelser, vil antallet af bakterier fordobles i en fast periode, d.v.s. antallet af bakterier er beskrevet af ovenstående ligning med  $\lambda > 0$ . Sund fornuft siger os imidlertid, at antallet af individer ikke bliver uendeligt stort! Men hvad er der galt i vores betragtninger?

Det, vi gør galt, er, at vi foretager en lokal analyse. Den lokale model vil beskrive den betragtede del af virkeligheden med tilstrækkelig nøjagtighed i et begrænset tidsrum, men den vil uundgåeligt før eller siden bryde sammen. Vi kan også sige, at vores model-forudsætninger ikke holder evigt. Vi må i stedet foretage en global analyse.

Vi belyser forholdene med den mere generelle vækstmodel

$$y' = f(y) \quad (2)$$

Denne model kan illustreres i nedenstående figur



En lokal analyse består i at se på små variationer i  $y$  omkring en given værdi fx  $y=0$ . Er  $y$  lille, kan det være rimeligt at erstatte  $f(y)$  med den i figuren viste rette linie, således at ligningen (2) erstattes af

$$y' = f'(0)y$$

Af figuren ser man klart den lokale models begrænsninger.

Lad os nu prøve at fortolke dette resultat ved brug af bakteriekulturen. For små værdier af  $y$  (d.v.s. antallet af bakterier) er det rimeligt at antage, at de enkelte individer i populationen lever frit. Vi må derfor, sålænge  $y$  er lille, forvente en eksponentiel vækst. Med denne vækst forbliver  $y$  imidlertid ikke lille, og vækstraten må derfor aftage for til sidst helt at ophøre, når bakteriekulturen når en vis størrelse - denne størrelse kaldes bakteriekulturens bærekapacitet.

A. Til belysning af det ovenstående følger en tabel over antal individer af det encellede dyr Paramecium aurelia i et  $0.5 \text{ cm}^3$  næringssubstrat over en periode på 15 dage.

Dag efter start	Antal
0	2
1	5
2	11
3	25
4	48
5	92
6	149
7	198
9	246
11	265
13	268
15	270

Udregn nu  $y'$  og afbild derpå  $y'$  som funktion af  $y$ . Prøv så at bestemme denne kurves skæringer med  $y$ -aksen, d.v.s.

de punkter, hvor  $y'=0$ . Disse punkter kaldes ligevægtpunkter. Hvis systemet er i et af disse punkter, vil det forblive der. Vi har set, at er  $y$  lille, men forskellig fra nul, sker en eksponentiel vækst, så  $y$  fjerner sig fra ligevægtpunktet i nul; punktet kaldes derfor ustabilt. Forbliver løsningskurven derimod i nærheden af ligevægtpunktet, når ligevægten forstyrres, kaldes ligevægten stabil.

Foretag nu en lineær stabilitetsanalyse af de øvrige ligevægtpunkter. Forsøg dernæst at give en formel definition af, hvornår et ligevægtpunkt for (2) vil være stabilt henholdsvis ustabilt.

B. En yndet model for populationsvækst er den logistiske ligning

$$y' = ay(1-by) \quad (3)$$

hvor  $a$  og  $b$  er positive konstanter. Denne model er beskrevet i bilaget.

Estimer modellens parametre (d.v.s.  $a$  og  $b$ ) og indtegn funktionen (3) i jeres  $y'$ - $y$  diagram.

C. Øvelse 1: I problemstilling 2, øvelse 2 opstillede I en model for en kemisk reaktion. Find de relevante ligevægtpunkter for modellen, og foretag en lineær stabilitetsanalyse.

Øvelse 2: Fastlæg ligevægtpunkterne for differentiaalligningen

$$y' = y(\alpha-y)(\beta-y), \quad \alpha < \alpha < \beta,$$

og foretag en lineær stabilitetsanalyse af ligningen. Hvordan bliver stabilitetsforholdene, hvis  $\alpha=\beta$ ?

PS: Der skal laves en udførlig besvarelse af pkt. A, B og C i denne problemstilling fra hver gruppe. Besvarelsen afleveres til vejlederen for jeres gruppe.

BILAG: Logistisk vækst

I problemstillingen så vi, at modellen

$$y' = \lambda y, \quad \lambda > 0$$

var en dårlig model for væksten af en population udfra den betragtning, at antallet af individer aldrig vil blive uendeligt stort. Der vil i populationen opstå fødeknaphed, miljøforurening samt stress; altsammen forhold som vil tiltage, når populationen vokser. En modelmæssig rimeligere antagelse vil derfor være, at vækstraten,  $\lambda$  vil aftage med voksende individantal,  $y$ , da dødeligheden vil stige, og fertiliteten vil aftage. Ud fra disse antagelser ændres modellen således til

$$y' = \lambda(y)y$$

hvor  $\lambda'(y) < 0$  for  $y > 0$  samt  $\lambda(1/b) = 0$ . Her står  $1/b$  for populationens bærekapacitet.

Der er imidlertid ikke hermed sagt noget om, hvordan denne funktionelle sammenhæng ser ud. Der findes faktisk uendelig mange funktioner, som vil opfylde de nævnte bånd på  $\lambda$ .

Her skal blot nævnes et par enkelte eksempler

$$\lambda_1(y) = a(1-by)$$

$$\lambda_2(y) = a(1-by)^2$$

$$\lambda_3(y) = a(1-(by)^2)$$

$$\lambda_4(y) = a \cos(\pi by/2)$$

$$\lambda_5(y) = a(1+\cos(\pi by))/2$$

hvor  $a$  og  $b$  er positive konstanter.

Inden for populationsdynamik har man imidlertid valgt at benytte  $\lambda_1$ , således at den endelige model for en populations vækst er

$$y' = ay(1-by)$$

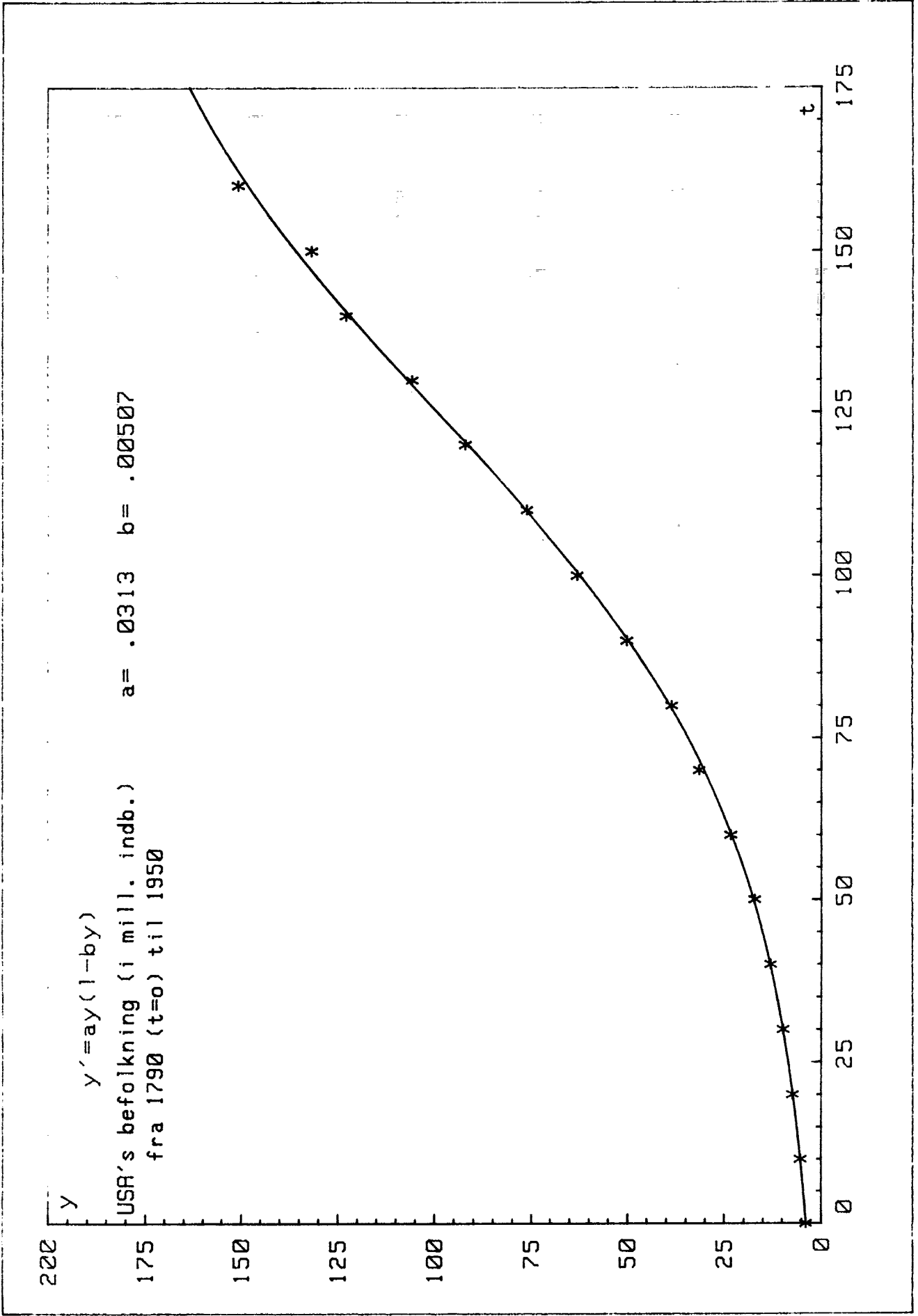
hvor  $a$  og  $b$  er positive konstanter. Valget af denne model er nok sket, dels fordi det er den mest simple sammenhæng, og dels fordi differentiaalligningen med dette valg vil have en analytisk løsning. Fra problemstilling 3, punkt C vil man få den analytiske løsning

$$y(t) = \frac{1}{b+ce^{-at}}$$

hvor  $c$  er en vilkårlig reel konstant.

Modellen har naturligvis sine begrænsninger, men populationer af mange encellede organismer giver faktisk empiriske data, som passer godt med denne model. Modellen har også været anvendt på landes befolkningstal - med skiftende held. I figuren er en teoretisk løsning af differentiaalligningen vist sammen med USA's befolkningstal fra 1790 til 1950. Man må indrømme, at overensstemmelsen er bemærkelsesværdig, især da modellen ikke tager hensyn til, at der har været en stor indvandring til USA, og at USA har deltaget i fem krige i den periode, som tabellen dækker.

Det skal dog straks indrømmes, at denne models anvendelse til beskrivelse af befolkningsudvikling også kan slå fejl. Således estimerede man i forrige århundrede bærekapaciteten for Belgiens befolkning til 6.600.000 indbyggere, men allerede i 1930 var Belgiens befolkning på 8.092.000 indbyggere. Man har forklaret denne fejl med den senere kraftige industrialisering af Belgien samt med Belgiens "erhvervelse" af Congo som koloni. Begge forhold tilførte landet stor rigdom, som skabte betingelser for en større befolkning.



MAT B/83 - uge 45

Problemstilling 5

Smittespredning (rygtespredning)

Vi betragter et samfund bestående af ialt  $N$  individer. På et tidspunkt bliver en person syg, og I skal i denne problemstilling forsøge at opstille en model, som beskriver, hvor mange syge personer der er til ethvert tidspunkt. Hvis I hellere vil det, kan I lade personen sætte et rygte igang og derefter opstille en model for rygtespredningen. Opstil på denne baggrund en liste over størrelser, som kan have betydning for smittespredningen (rygtespredningen) - antal raske ("uberygtede") personer er nok en af dem.

Optegn nu ud fra denne liste et SD-diagram, dvs. I skal afgøre, hvilke af størrelserne der skal være tilstandsvariable, hjælpevariable osv. samt hvilke sammenhænge, der skal være imellem dem. I får det lille vink, at det ikke er smart at opfatte antallet af raske ("uberygtede") individer som tilstandsvariabel, da det jo kan beregnes på grundlag af antallet af smittede ("berygtede") individer, og derfor blot kan optræde som hjælpevariabel.

Som et sidste skridt i præciseringen af modellen skal I nu opskrive en differentiaalligningsmodel ud fra SD-diagrammet, og I kan tillige foretage en stabilitetsanalyse af den model, I har fået opstillet.

Hvis I nu er kommet frem til en differentiaalligning, som I allerede har fundet en løsning for, kan I opskrive jeres løsning af problemet samt skitsere løsningskurvens forløb - hvad var nu startbetingelsen?

Hvis I derimod har opstillet en ligning, som I ikke synes, I kan løse analytisk, hvilket er meget sandsynligt - skal I

forsøge at løse den numerisk samt skitsere løsningskurvens forløb. Den metode, I skal bruge, hedder Eulers metode, og det er langt den simpleste af de metoder, som findes. Den er faktisk så simpel, at I selv kan udvikle den, hvis I blot går frem i de skridt, som er anført i det følgende.

Antag at det vides, at der til tidspunktet  $t_0$  er ialt  $x_0$  individer smittet.

Hvordan kan man herudfra bedømme "smittehastigheden" til tidspunktet  $t_0$ ?

Hvilket skøn er det på dette grundlag rimeligt at angive for antallet af smittede til et tidspunkt, der ligger ikke alt for længe senere end  $t_0$ ? Angiv en formel der udtrykker dette forventede antal ved hjælp af  $t_0$ ,  $x_0$  og  $\Delta t$  (det lille tidsrum, som går efter  $t_0$ ).

Hvordan kan denne formel bruges til at beregne antallet af smittede til et meget senere tidspunkt  $t$ ?

Hvordan kan man eventuelt bedømme usikkerheden på dette skøn, og hvad kan man gøre for at nedsætte den?

PS: Der skal laves en udførlig skriftlig besvarelse af denne problemstilling fra hver gruppe. Besvarelsen afleveres til vejlederen for jeres gruppe.



MAT B/83 - uge 46

Problemstilling 6

Fiskerimodeller

I denne problemstilling skal vi arbejde med modeller inden for fiskeribiologi, bl.a. vil der blive præsenteret en flerartsmodel (kaldet Nordsømodellen), som er udviklet på Danmarks Fiskeri- og Havundersøgelser. I denne model søger man at beskrive, hvordan den enkelte fiske- (og plankton-) art udvikler sig og samspiller med de øvrige arter. Man inddeler endog hver fiskeart i aldersklasser (indtil 6 klasser for visse fiskearter) og opstiller en model for hver aldersklasse. Et af formålene med modellen er at lade den danne grundlag for fastsættelse af kvoter for, hvor meget den enkelte art må befiskes samtidig med, at arten bevares på et levedygtigt niveau.

I Nordsømodellen arbejdes med en lang række ligninger, men de centrale ligninger kan placeres på tre niveauer:

1. Individniveau. Svarende til hver art (eller aldersklasse) beskriver van Bertalanffys ligning, j.fr. bilaget

$$(1) \quad w' = hw^{2/3} - kw,$$

hvordan den enkelte fisks vægt (biomasse) ændres som funktion af fiskens alder. Parametrene  $h$  og  $k$  er specifikke for hver enkelt art/aldersklasse.

2. Arts/klasseniveau. Her beskrives de mekanismer, som ændrer antallet af individer i den enkelte art/klasse. Således står

$$(2) \quad N' = -M_1N$$

og

$$(3) \quad N' = -M_2N$$

for det antal individer, som forsvinder ved naturlig død ( $M_1$  er den naturlige døderate) og ved at blive ædt af andre fisk ( $M_2$  er den totale æderate).

Endelig beskriver

$$(4) \quad N' = -FN$$

det antal individer, som forsvinder ved fiskeri (F er befiskningsgraden). Tilgangen af individer i den enkelte aldersklasse sker i klasse 1 ved nyudklækket yngel og i de øvrige ved oprykning fra den forrige aldersklasse.

Her er igen parametrene  $M_1$ ,  $M_2$  og F specifikke for hver enkelt art/aldersklasse.

3. Fangstniveau. Her opregnes den totalt opfiskede biomasse Y af den enkelte art/aldersklasse beskrevet ved ligningen

$$(5) \quad Y' = FNw$$

Dvs man her sammenstiller de to andre niveauer.

Bemærk iøvrigt, at parametrene h i (1) og  $M_2$  i (3) vil afhænge af, hvilke andre arter der lever i området.

For blot at få et lille indblik i nogle af de faktorer, som er i spil i denne model, skal I forsøge at modellere et meget simpelt system.

I et ørreddambrug udsættes ørredyngel (individvægt  $\approx 0$  gram). Der udsættes ialt  $N_0$  individer, som ikke formodes at yngle. Man ønsker at bestemme den samlede biomasse i dambruget som funktion af tiden (siden udsættelsen). Vi ønsker at maksimere den samlede biomasse i dambruget, dvs at bestemme det tidspunkt, hvor man skal opfiske alle ørreder samtidigt, hvis man vil have den størst mulige biomasse.

Foretages derimod en stadig opfiskning af ørreder med en konstant opfiskningsrate F, skal man bestemme den totalt opfiskede biomasse.

BILAG: En fisks biomasse.

I forbindelse med biomassebestemmelse af fisk i såvel dambrug som havet benytter man en differentiallyigningsmodel, som i sin grundform hidrører fra systemteoretikeren Ludwig v. Bertalanffy. Denne model er senere videreudviklet; herhjemme ved Danmarks Fiskeri- og Havundersøgelser, hvor bl.a. Erik Ursin har arbejdet med bestemmelse af modellens parametre. Modellen er i sin opbygning en enkelt-individ model - i modsætning til de fleste modeller, som beskriver en hel population.

Modellen i sin grundform beskriver vægtændringen af fisken,  $w'(t)$ , som forskellen mellem den stofmængde, der tilføres, og den, som forsvinder. Da det, der tilføres fiskens vægt, består af den føde, fisken optager, og da denne føde udelukkende optages gennem tarmoverfladen, er det nærliggende at antage fiskens opbygning (assimilation) sker proportionalt med tarmoverfladens størrelse  $s(t)$ , dvs.

$$hs(t).$$

Der sker på den anden side en stadig nedbrydning af fiskens væv (dissimilation), som er proportional med den samlede mængde væv, dvs. proportional med fiskens vægt  $w(t)$ , dvs.

$$-kw(t).$$

Dermed bliver modellen for fiskens vægtforøgelse

$$w'(t) = hs(t) - kw(t),$$

hvor  $h, k \in \mathbb{R}_+$ . Antager vi videre, at en fisk vokser isometrisk (dvs. lige hurtigt på alle leder), vil vægten kunne opfattes som et rumfang, mens tarmoverfladen kan opfattes som et areal. Vi kan under denne antagelse altså erstatte  $s(t)$  med  $(w(t))^{2/3}$ , og modellen bliver herefter

$$(1) \quad w' = hw^{2/3} - kw,$$

Denne kaldes Bertalanffy's ligning.

Skal man foretage en stabilitetsanalyse af (1), ser vi, at ligevægtpunkterne bliver

$$w = 0 \quad \text{og} \quad w = \left(\frac{h}{k}\right)^3 .$$

Differentierer vi tillige funktionen

$$f(w) = hw^{\frac{2}{3}} - kw$$

bliver

$$f'(w) = \frac{2}{3}hw^{-\frac{1}{3}} - k .$$

Da er

$$\lim_{w \rightarrow 0} f'(w) = +\infty$$

og

$$f'\left(\left(\frac{h}{k}\right)^3\right) = -\frac{1}{3}k$$

hvilket viser, at  $w = 0$  er ustabil, mens

$$w = \left(\frac{h}{k}\right)^3$$

er et stabilt ligevægtspunkt - nemlig den maksimale vægt for den pågældende fiskeart.

Øvelse: Man kan faktisk løse Bertalanffys ligning analytisk ved fx. at gennemarbejde følgende punkter

- (a) Sæt  $w = z^3$  og opstil en differentialligning for  $z$ .
- (b) Bestem samtlige løsninger til denne ligning.
- (c) Fastlæg den løsning, som vil svare til  $w(t_0) \approx 0$ .
- (d) Bestem til slut løsningen til den oprindelige ligning - dvs. en løsning for  $w$ .

På sidste side er vist en løsningskurve til (1) med startværdien  $w(0) = 1$  og med  $h = 4$  og  $k = 1$ , således at den maksimale vægt bliver  $w = 64$ .

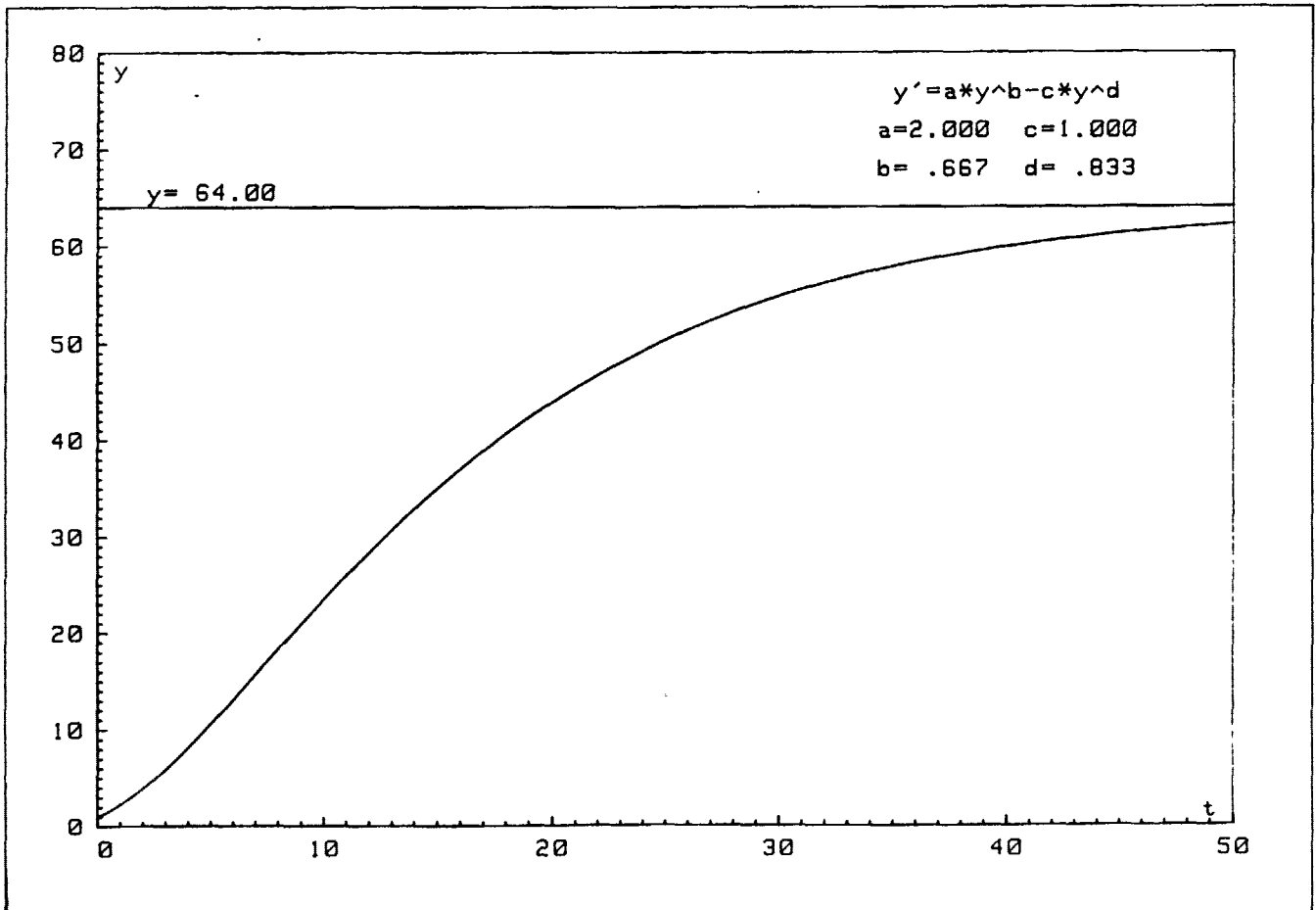
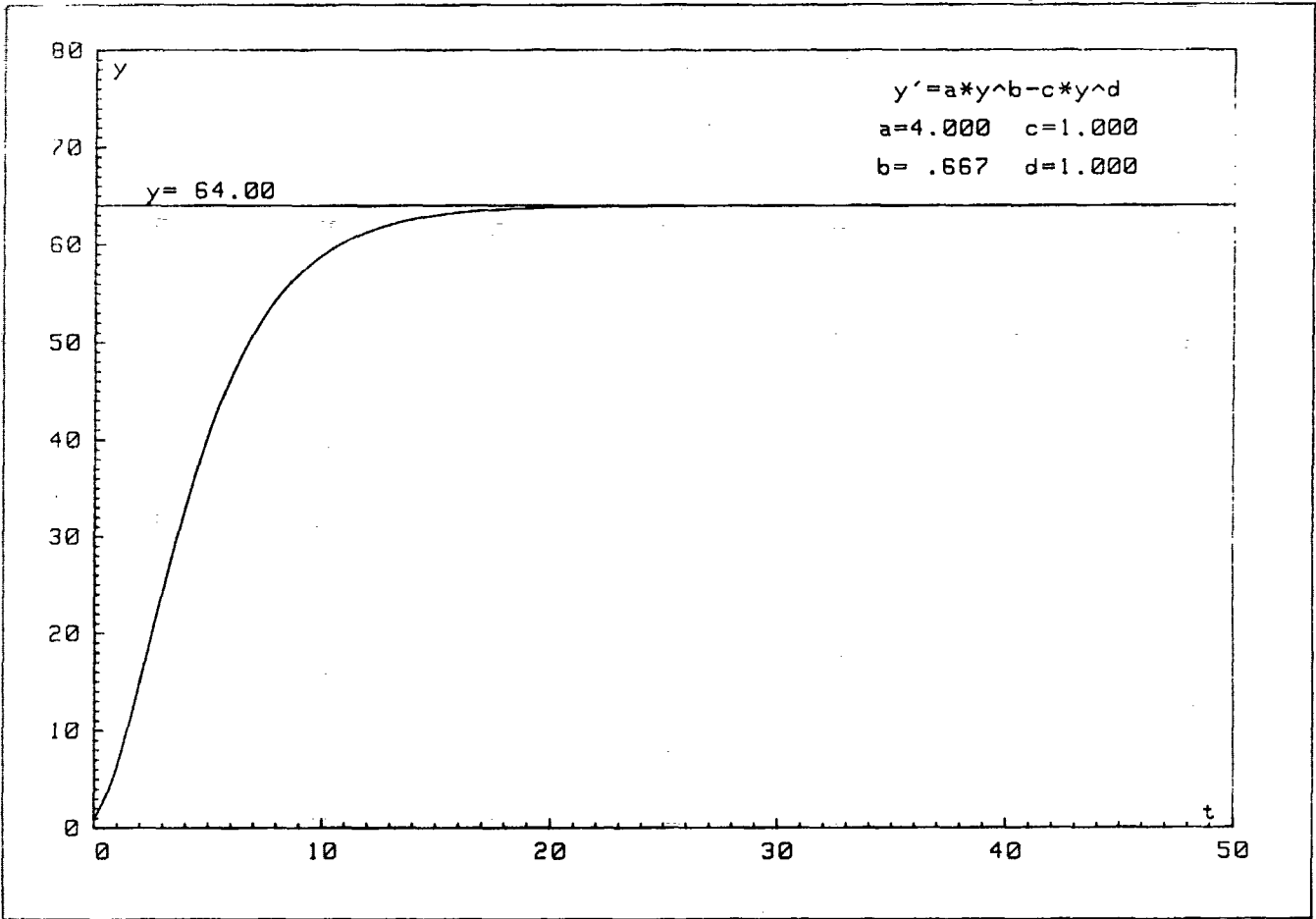
Løsningskurverne til (1) stemmer som regel dårligt med måledata. Man har derfor som nævnt i indledningen til bilaget bl.a. på Danmarks Fiskeri- og Havundersøgelser arbejdet med at justere modellen, således at der kan bringes en bedre overensstemmelse med måledata. Dette er resultatet i modellen

$$(2) \quad \underline{w' = hw^\alpha - kw^\beta},$$

hvor  $0 < \alpha < \beta \leq 1$ . For langt de fleste dyrearter (fisk, pattedyr og krybdyr) viser det sig, at  $\beta \approx \frac{5}{6}$ , mens der for insekter gælder  $\beta \approx 1$ . Når det gælder fastlæggelsen af  $\alpha$ , er man mere usikker, men  $\alpha \approx \frac{2}{3}$  synes i langt de fleste tilfælde at give god tilpasning til måledata. Dog afviger enkelte arter helt fra dette billede, således har visse laksearter  $\alpha \approx \beta \approx 1$  - dvs. eksponentiel vækst - her sker reguleringen til gengæld ved, at gydningen tager så hårdt på laksen, at den kun overlever få gydninger.

Denne ligning kan ikke løses analytisk, men det kan som øvelse anbefales at foretage en stabilitetsanalyse. Denne vil vise, at (2) har i princippet samme stabilitetsegenskaber som (1).

På sidste side er vist en løsningskurve til (2), hvor parametrene er valgt således, at den maksimale vægt igen bliver  $w = 64$ , og startværdien igen er  $w(0) = 1$ .



MAT B/83 - uge 47

Problemstilling 7

Lineære ligningssystemer.

I denne og de resterende problemstillinger skal vi arbejde med systemer, som giver anledning til differentiaalligningsmodeller, der ikke umiddelbart kan "løses" ved succesiv brug af en løsning til en enkelt differentiaalligning - fx. som modellen for dobbelt radioaktivt henfald. I denne problemstilling skal vi behandle den meget simple model

$$\begin{aligned} (1) \quad & x' = \alpha x + \beta y \\ (2) \quad & y' = \gamma x + \delta y \end{aligned}$$

hvor  $\alpha, \beta, \gamma$  og  $\delta$  er reelle konstanter. Den består blot af to koblede, lineære differentiaalligninger (af første orden), og det er nærliggende at antage, at løsningerne igen er noget med  $x = e^{\lambda t}$  og  $y = e^{\mu t}$ . Men lad os nu se!

Omskriver vi (1) lidt, kan man få

$$(1') \quad y = \frac{1}{\beta}(x' - \alpha x)$$

og ved differentiation (mht  $t$ )

$$(1'') \quad y' = \frac{1}{\beta}(x'' - \alpha x')$$

Da nu (2) har formen

$$y' = \gamma x + \delta y$$

er højresiderne i (1'') og (2) identiske (da de begge er lig  $y'$ ), dvs

$$x'' - \alpha x' = \beta(\gamma x + \delta y).$$

Benyttes ny  $y$  fra (1'), bliver det en ligning kun i den ubekendte funktion  $x$ , dvs.

$$x'' - \alpha x' = \beta\gamma x + \delta x' - \alpha\delta x$$

eller

$$(3) \quad \underline{x'' - (\alpha + \delta)x' + (\alpha\delta - \beta\gamma)x = 0}$$

Nu var formodningen jo, at  $e^{\lambda t}$  nok måtte være en løsning for  $x$ , så lad os indsætte  $x = e^{\lambda t}$  i (3). Da  $x' = \lambda e^{\lambda t}$  og  $x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$  fås

$$(\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma))e^{\lambda t} = 0$$

og dette er kun opfyldt, når

$$(4) \quad \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

der jo blot kræver, at  $\lambda$  skal være en (reel) rod i en anden gradsligning.

De talstørrelser, der således er afgørende, er

$$s = \alpha + \delta$$

kaldet sporet, og

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma$$

kaldet determinanten for matricen

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Men uheldigvis har (4) jo ikke altid reelle rødder; hvis tallet  $s^2 - 4D < 0$  har ligningen ingen reelle rødder. I det følgende vil vi undersøge disse forhold nærmere.

A. Vi betragter først ligningsmodellen

$$x' = \lambda x$$

$$y' = \mu y$$

hvor  $\lambda$  og  $\mu$  er reelle tal. I skulle let kunne opskrive den løsning, som går gennem punktet  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ . Skitsér derpå denne løsning i et  $xy$ -koordinatsystem i hvert af følgende fem tilfælde

1.  $\lambda = 2\mu < 0$ ,    2.  $\lambda = \mu < 0$ ,    3.  $\lambda = -\mu < 0$
4.  $0 < \lambda = \mu$  og    5.  $0 < \mu = 2\lambda$

B. Dernæst skal vi arbejde med ligningsmodellen

$$x' = \lambda x + y$$

$$y' = \lambda y$$



hvor  $\lambda$  er et reelt tal, hvilket ej heller skulle være umuligt at løse, således at punktet  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  tilhører løsningen.

Også i denne situation skulle I kunne skitsere løsningen i et  $xy$ -koordinatsystem i følgende to tilfælde

1.  $\lambda < 0$  og
2.  $\lambda > 0$ .

C. Endelig skal vi have ligningsmodellen

$$x' = ax - by$$

$$y' = bx + ay$$

hvor  $a$  og  $b$  er reelle konstanter. Ved at udregne  $s = 2a$  og  $D = a^2 + b^2$  kan vi af  $s^2 - 4D = -4b^2 < 0$  se, at vi her er i det tilfælde, hvor ligning (4) ikke havde reelle rødder. Men opgiv ikke!

Vis til gengæld, at

$$(x(t), y(t)) = e^{at}(\cos bt, \sin bt)$$

vil være et løsningssæt til ligningerne. Godtgør tillige, at netop funktionssættet

$$(x(t), y(t)) = e^{at}(x_0 \cos bt - y_0 \sin bt, y_0 \cos bt + x_0 \sin bt)$$

vil være løsningen til modellen gennem punktet  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ . Skitsér til slut løsningen gennem fx. punktet  $(1, 0)$  i et  $xy$ -koordinatsystem i hvert af følgende tre tilfælde

1.  $a < 0$ ,
2.  $a = 0$  og
3.  $a > 0$ .

Overvej iøvrigt også, hvordan fortegnet for  $b$  påvirker løsningens forløb.

D. Vi skal nu opsummere lidt. Fastlæg lige udtrykket for  $s$  og  $D$  svarende til de tre ligningsmodeller (under A, B og C), og prøv nu at placere jeres tegninger svarende til de forskellige tilfælde A1 - A5, B1, B2, C1, C2 og C3 ind i følgende tilfælde

1.  $D < 0$
2.  $0 < D < s^2/4$
3.  $D = s^2/4$
4.  $D > s^2/4$

I skulle nu for hvert tilfælde kunne afgøre, hvornår løsningen vil gå ind imod  $(0,0)$  for  $t \rightarrow +\infty$  - dvs. for hvilke værdier af  $s$  og  $D$  dette vil ske. I denne situation kaldes  $(0,0)$  et stabilt ligevægtspunkt for differentiaalligningsmodellen (1)+(2).

I tilfælde 1. kaldes  $(0,0)$  for et saddelpunkt - prøv at forklare, hvorfor man mon benytter dette navn. Punktet  $(0,0)$  kaldes i et af tilfældene neutralt stabilt. Hvilken af situationerne ville I betegne som sådan?

Er I nu forresten sikre på, at vi ikke har glemt nogle interessante tilfælde?

Afgør for hvert af følgende differentiaalligningssystemer om punktet  $(0,0)$  vil være stabilt, neutralt stabilt, saddelpunkt eller ingen af delene:

1.  $x' = x+3y$   
 $y' = x-2y$
2.  $x' = x-y$   
 $y' = 2x-y$
3.  $x' = 2x+3y$   
 $y' = -x-2y$
4.  $x' = -x+3y$   
 $y' = -x+2y$
5.  $x' = -2x+4y$   
 $y' = x-2y$
6.  $x' = -7x+10y$   
 $y' = 3x-4y$
7.  $x' = -7x+9y$   
 $y' = 3x-4y$
8.  $x' = 7x-9y$   
 $y' = 3x-4y$

MAT B/83 - uge 48

Problemstilling 8

Stabilitet.

Som I allerede så i problemstilling 4, kunne en undersøgelse af ligevægtpunkterne udsige en del om løsningskurvernes forløb. Vi så bl.a., at et ligevægtpunkt er stabilt, hvis løsningskurven bliver i nærheden af punktet, når ligevægten bliver forstyrret. Dette kunne vi også udtrykke på en mere formel måde. Er  $y_0$  et ligevægtpunkt for

$$(1) \quad y' = f(y)$$

vil ligningen

$$(2) \quad y' = f'(y_0)(y - y_0)$$

være en god tilnærmelse til (1) i "nærheden" af  $y_0$ . Ligning (2) kaldes en linearisering af (1) omkring  $y_0$ . Vi så også, at vi ud fra (2) kan slutte, at  $y_0$  er stabilt, netop hvis

$$f'(y_0) < 0.$$

Er nemlig  $y = y(t)$  en løsningskurve til (1), kan vi ved hjælp af (2) se, at

$$y < y_0 \Rightarrow y' > 0$$

og 
$$y > y_0 \Rightarrow y' < 0$$

dvs at 
$$y(t) \rightarrow y_0 \text{ når } t \rightarrow \infty,$$

dvs at løsningen nærmer sig til  $y_0$ .

Den beskrevne metode har I allerede set anvendt bl.a. på ligningerne

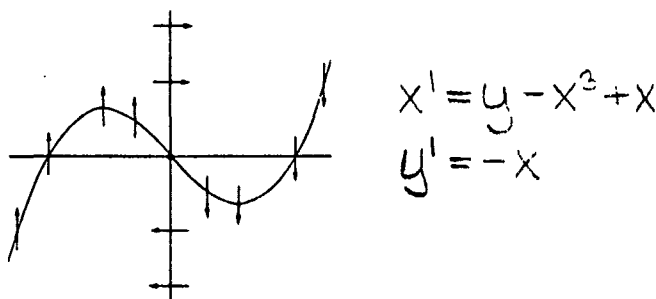
$$y' = ay(1 - by)$$

$$y' = ay^{2/3} - by.$$

De her skitserede betragtninger vil vi nu forsøge at benytte på modellen

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

af to sammenhørende differentiaalligninger. Man kan til en start danne sig et overblik over løsningernes forløb i et  $xy$ -koordinatsystem (kaldet faseplanen) ved at indtegne de kurver, hvor  $x'=0$  og  $y'=0$ . Dette er eksempelvis gjort i nedenstående figur



Der, hvor kurverne skærer hinanden, ligger så modellens ligevægtspunkter, og pilene angiver, hvordan løsningskurverne vil forløbe i nærheden af de optegnede kurver. - Begrund pilenes retning!

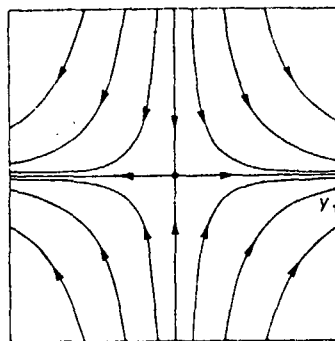
Vi går nu over til at undersøge, hvornår et ligevægtspunkt  $(x_0, y_0)$  til (3) vil være stabilt.

Som vi så i (2), består lineariseringen af (1) i at udregne  $f'(y_0)$ . Da såvel  $f(x,y)$  som  $g(x,y)$  i (3) er funktioner af to variable, bliver udtrykket for den første afledede for modellen væsentligt mere kompliceret. Man indfører talskemaet (kaldet funktionalmatricen)

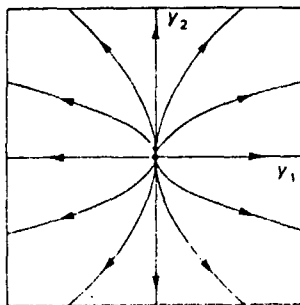
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

hvor  $\frac{\partial f}{\partial x}$  betyder den partielle afledede af  $f$  med hensyn til  $x$  - for fast  $y$ , dvs  $y$  opfattes som en konstant, når der differentieres mht  $x$ . Det til (3) hørende lineariserede system omkring

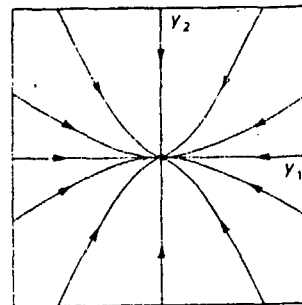
1.  $D < 0$   
(saddelpunkt)



2.  $0 < D < \frac{1}{4}\delta^2$

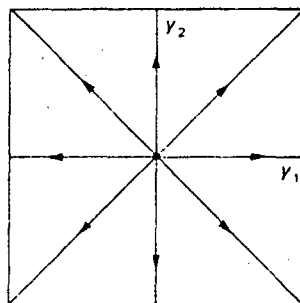


$\delta > 0$

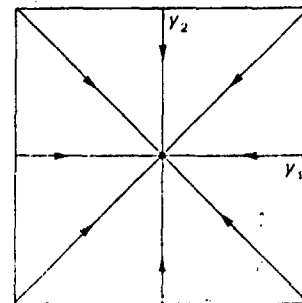


$\delta < 0$

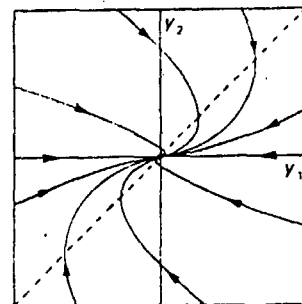
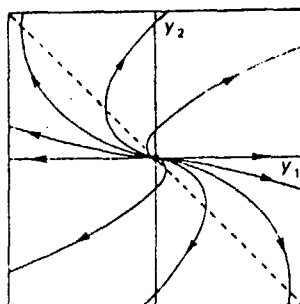
3.  $D = \frac{1}{4}\delta^2$



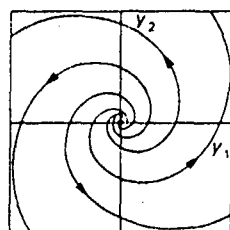
$\delta > 0$



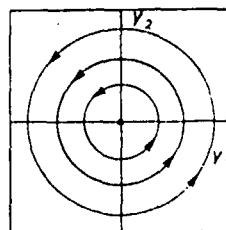
$\delta < 0$



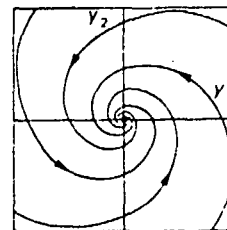
4.  $D > \frac{1}{4}\delta^2$



$\delta > 0$



$\delta = 0$



$\delta < 0$

BILAG: To-artsmodeller

Vi vender nu tilbage til bilaget om dynamisk systemteori fra problemstilling 2. I eksempel 4 blev opstillet en model for, hvordan to dyrearter på samme biotop vil udvikle sig. Denne model vil vi videreudvikle matematisk. Med de antagelser, der blev gjort i eksemplet, kan man oversætte til følgende sæt af differentiaalligninger

$$(1a) \quad HA' = HT - HN$$

$$(1b) \quad RV' = RT - RN$$

hvor

$$HT = HK \cdot HBD \cdot HA \cdot f(HA) / K1$$

$$HN = (HD + K3 \cdot RV) \cdot HA$$

$$RT = RK \cdot RBD \cdot g(HA, RV) / K2$$

$$RN = RD \cdot RV.$$

I modelopstillingen blev der argumenteret for, at  $f$  måtte være en aftagende funktion af antallet af harer,  $HA$ . Til en begyndelse kan vi imidlertid antage, at  $f$  er konstant. Indfører vi tillige for kortheds skyld de nye konstanter

$$a = HK \cdot HBD \cdot f(HA) / K1 - HD$$

og  $b = K3$

kan ligning (1a) erstattes af

$$(2a) \quad HA' = a \cdot HA - b \cdot HA \cdot RV.$$

Funktionen  $g(HA, RV)$  skulle beskrive, hvordan det aktuelle antal ræve og harer påvirker rævenes fertilitet. En meget simpel antagelse er, at

$$g(HA, RV) = k \cdot HA \cdot RV$$

dvs. proportional med antallet af møder mellem en ræv og en have.

Indføres igen for kortheds skyld konstanterne

$(x_0, y_0)$  bliver da

$$(4) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} .$$

Men modellen (4) er jo identisk med dem, vi behandlede i problemstilling 7. Så derfor kan vi nu benytte det begrebsapparat, som vi fremstillede her. I problemstilling 7 fandt vi (forhåbentligt) følgende sammenhænge (se tillige side 3) mellem stabilitet og fortegnene for  $s$  og  $D$ :

"Et ligevægtpunkt  $(x_0, y_0)$  er stabilt, netop hvis  $D > 0$  og  $s < 0$  (eventuelt også  $s = 0$ )".

B. Men lad os illustrere metoden med et simpelt eksempel. I bilaget er bl.a. beskrevet Lotka-Volterra modellen

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \end{aligned}$$

hvor  $a, b, c$  og  $d$  er positive konstanter. Vi vil nu undersøge stabilitetsforholdene for denne model.

Af  $x'=0$  fås  $x = 0$  v  $y = a/b$  og  
af  $y'=0$  fås  $y = 0$  v  $x = c/d$ .

Lad os først undersøge punktet

$$(x_0, y_0) = (c/d, a/b)$$

Da nu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a-by \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -bx$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = dy \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -c+dx$$

bliver

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{pmatrix}$$

og

$$s=0, \quad D = ac > 0$$

dvs Lotka-Volterra modellen vil have  $(c/d, a/b)$  som neutralt stabilt ligevægtspunkt.

For det andet ligevægtspunkt  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  får vi tilsvarende

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

og  $s = a - c$ ,  $D = -ac < 0$ . Dvs,  $(0, 0)$  er et saddelpunkt, hvilket i denne situation giver en god modelopførsel, idet man forbliver i 1. kvadrant ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ), hvis man er startet der. (Dette er jo heldigt - for hvordan ser en negativ ræv eller hare ud?)

I bilaget er også nævnt andre modeller for, hvordan to arter på samme biotop vil samspille. Undersøg stabilitetsforholdene for følgende to modeller

$$1. \quad x' = x(1 - bx) - xy$$

$$y' = y(1 - \frac{y}{ax})$$

$$2. \quad x' = \frac{x}{10}(10 - x) - \frac{xy}{x+1}$$

$$y' = y(1 - \frac{5y}{3x})$$

Man skal imidlertid ikke tro, at en linearisering af en differentiallyigningsmodel altid vil give et positivt svar om modellens stabilitetsforhold, hvilket nedenstående eksempel skulle vise.

Vil vi således undersøge stabiliteten af modellen

$$x' = -x^3 ; \quad y' = -y^3,$$

er  $(0, 0)$  ligevægtspunkt, men da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -3y^2$$

bliver



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og derfor er  $s = D = 0$ . Dette giver os derfor ingen ide om, hvorvidt  $(0,0)$  er stabilt.

Der er imidlertid udviklet andre metoder til at undersøge modellers stabilitets forhold. Disse metoder vil dog ikke blive behandlet her.

Derimod skal I vende tilbage til jeres model for smittespredning i problemstilling 5. Modellen skal dog - hvis det ikke er sket - udbygges, således at en person, som har været syg, bliver immun i en periode, inden vedkommende igen kan smittes. Herved får vi en model med de to systemvariable - antal syge og antal immune personer. I skal nu foretage en stabilitetsanalyse af denne udvidede model.

C. Ud over de her beskrevne stabilitetsforhold kan man for modeller af to koblede differentiaalligninger finde yderligere et stabilitetsfænomen, som vi skal belyse med et eksempel. Man skal undersøge differentiaalligningsmodellen

$$(5) \quad \begin{aligned} x' &= \mu x - y - x(x^2+y^2) \\ y' &= x + \mu y - y(x^2+y^2) \end{aligned}$$

hvor  $\mu$  er en reel konstant.

Inden vi fortsætter, skal vi lige se lidt på polære koordinater. Udtrykker vi punktet  $(x,y)$  ved dets afstand  $r$  fra  $(0,0)$  og ved den vinkel  $\theta$  som denne linie (fra  $(0,0)$  til  $(x,y)$ ) danner med  $x$ -aksen, kan vi skrive koordinaterne som

$$x = r \cos \theta \quad \text{og} \quad y = r \sin \theta$$

(prøv selv at lave en lille tegning). Er punktet  $(x,y)$  en funktion af tiden  $t$ , vil  $r$  og  $\theta$  ligeledes være det. Vi kan nu omvendt udtrykke  $r$  og  $\theta$  ved  $x$  og  $y$  som

$$(6) \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad \text{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

(prøv selv). Alt dette skal bruges til at erstatte ligningerne i (5) med to differentiaalligninger i  $r$  og  $\theta$ .

Til dette formål skal vi finde ud af, hvordan man differentierer en funktion  $V$  af to variable  $x$  og  $y$ , hvor  $x$  og  $y$  begge afhænger af  $t$ . Der gælder ganske enkelt, at

$$\frac{d}{dt} V(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot y'(t) .$$

Prøv nu at differentiere funktionerne  $r(x,y)$  og  $\theta(x,y)$  i (6) ved hjælp af denne regel og dernæst at indsætte udtrykket for  $x'$  og  $y'$  fra (5). Man skulle da gerne få, at

$$(7) \quad r' = r(\mu - r^2) \quad \text{og} \quad \theta' = 1 .$$

I skal så ud fra (7) skitsere forløbet af løsningskurver i hvert af følgende tre tilfælde

1.  $\mu < 0$  ,
2.  $\mu = 0$  og
3.  $\mu > 0$  .

Af eksemplet er forhåbentlig fremgået, at der for  $\mu > 0$  optræder det fænomen, at alle løsningskurver søger ind (eller ud) mod cirklen med radius  $\sqrt{\mu}$  . Når en model udviser denne opførsel, siger man, at modellen har en stabil grænsecykel. En sådan grænsecykel er ikke nødvendigvis en cirkel som her, men kan være en vilkårlig lukket kurve.

Videre så I formentlig, at punktet  $(0,0)$  for alle valg af  $\mu$  var et ligevægtspunkt, men at punktets stabilitetsforhold blev ændret fra stabilt til ustabil, når  $\mu$  passerede 0. Dette fænomen kaldes, at modellen bifurkerer, når parameteren  $\mu$  passerer den kritiske værdi  $\mu_0$  (her er altså  $\mu_0 = 0$ ) .

I dette eksempel bifurkerede modellen til et ustabil ligevægtspunkt omgivet af en stabil grænsecykel, men dette vil ikke altid være tilfældet. Rent faktisk skal følgende betingelser gælde for den kritiske værdi  $\mu_0$ .

1.  $s^2 - 4D < 0$ , når  $\mu = \mu_0$
2.  $\frac{ds}{d\mu} > 0$  for  $\mu = \mu_0$
3. modellen har stabilt ligevægtspunkt i  $(0,0)$ ,  
når  $\mu = \mu_0$

Her vil punkt 3 ofte være vanskelig at afgøre og som regel umulig med det værktøj, vi har til rådighed i dette kursus.

Godtgør udfra punkt 1-3, at modellen (5) vil bifurkerte til en stabil grænsecykel.

PS: Der skal laves en udførlig skriftlig besvarelse af opgaverne under afsnit B i denne problemstilling - én besvarelse per gruppe. Besvarelsen afleveres til vejlederen for jeres gruppe.

Afsnit C skal I kun arbejde med, hvis der bliver tid til det.

$$\begin{aligned} c &= RD \\ \text{og} \quad d &= RK \cdot RBD \cdot k/K2 \end{aligned}$$

kan ligning (1b) erstattes af

$$(2b) \quad RV' = -c \cdot RV + d \cdot HA \cdot RV.$$

Ligninger (2a) og (2b) udgør tilsammen et eksempel på Lotka-Volterra modellen

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy \end{aligned}$$

hvor  $a, b, c, d$  er positive konstanter. Denne model blev første gang opstillet og begrundet af den amerikanske biolog Alfred Lotka (1925) og den italienske matematiker Vito Volterra (1926) uafhængigt af hinanden.

Som nævnt i starten var antagelsen, at  $f$  var en aftagende funktion af  $HA$ ; og som allerede nævnt i bilaget til problemstilling 4 er den simpleste funktion med denne egenskab

$$f(HA) = 1 - \alpha \cdot HA,$$

hvor altså  $1/\alpha$  er harepopulationens bærekapacitet. Derved kan vi i stedet for ligning (2a) få den lidt mere realistiske sammenhæng

$$(3a) \quad HA' = a(1 - \alpha \cdot HA) \cdot HA - b \cdot HA \cdot RV.$$

Det vil også være nærliggende at antage, at rævepopulationen vil have en bærekapacitet  $1/p$ . Man må imidlertid rimeligvis formode, at bærekapacitetens størrelse må afhænge af harepopulationens størrelse - jo mindre harebestand jo lavere bærekapacitet, dvs.  $1/p$  må være proportional med  $HA$ , altså er

$$1/p = \beta \cdot HA$$

eller

$$p = \frac{1}{\beta \cdot HA}$$

Herved kan man opskrive følgende ligning for rævepopulationen

$$(3b) \quad RV' = c \left(1 - \frac{RV}{\beta \cdot HA}\right) \cdot RV$$

til erstatning for (2b).

Vi indførte for funktionen  $g$  udtrykket

$$g(HA, RV) = k \cdot HA \cdot RV,$$

men som vi allerede da anførte, var denne modelantagelse måske for simpel. Et faktum er det imidlertid, at en ræv kun gider jage harer, hvis den er sulten. Er der således mange harer i forhold til antallet af ræve, vil  $HA \cdot RV$  være et dårligt udtryk for, hvor mange harer der bliver dræbt. Derfor er et rimeligere udtryk for  $g$ , at

$$g(HA, RV) = h(HA) \cdot RV$$

hvor  $h$  nok er en voksende funktion af  $HA$ , men når  $HA$  bliver stor, må den ikke overstige "mæthedsgrænsen"  $d$  for en ræv, dvs.  $d$  er det største antal af harer, som en ræv gider æde (fx.) per måned.

Der findes i den populationsdynamiske litteratur flere bud på funktionen  $h$ . Et udtryk, som tilskrives Holling, har formen

$$h(x) = \frac{dx}{x+\delta}$$

Prøv at skitsere funktionen  $h$  og sammenlign den dernæst med funktionen  $x \sim dx$ . Med denne modeludvidelse kan ligning (3a) erstattes af (4a)

$$(4a) \quad HA' = a(1-\alpha \cdot HA)HA - b \frac{HA}{HA+\delta} \cdot RV.$$

Tilsammen bliver (4a) og (3b) et eksempel på Holling-Tanner modellen

$$x' = a(1-\alpha x)x - b \frac{x}{x+\delta} y$$

$$y' = c \left(1 - \frac{y}{\beta x}\right) y$$

MAT B/82 - uge 49

Problemstilling 9

Insulin/blodsukker balancen.

I skal nu selv til at opstille en simpel model. Denne model skal modellere organismens naturlige afbalancering af blodsukkerkoncentrationen, dvs en model som afdækker de mekanismer, der styrer produktionen af insulin og nedbrydningen af sukker i blodet.

A. Selve blodsukker/insulin balancen er meget kompliceret, men den kan med enkle midler modelleres, således at man rammer væsentlige træk af mekanismen.

I organismen indstiller der sig et naturligt niveau på 100 blodsukkerenheder, der modsvarer 0 insulinenheder, og så længe blodsukkerkoncentrationen  $x$  holder sig på eller under dette niveau, produceres ikke insulin. Når blodsukkeret stiger over dette niveau, udskilles der insulin  $y$  fra bugspytkirtlen med en hastighed, som er proportional med blodsukker mængden over niveauet. Den udskilte insulin nedbrydes af bio-kemiske processer, således at mængden af "fri" insulin halveres på 10-25 minutter.

Insulinets funktion i processen er at katalysere nedbrydningen af sukkeret, og nedbrydningens hastighed afhænger derfor af såvel blodsukker - som insulinkoncentrationen, således at en høj koncentration af en af delene vil forstærke nedbrydningens hastighed. Kommer blodsukkerkoncentrationen imidlertid under niveauet på de 100 enheder - hvilket kan ske ved fysisk krævende arbejde - vil leveren producere extra blodsukker, således at koncentrationen kan bringes tilbage mod det normale niveau.

Det forhold, som afgørende bringer blodsukkerkoncentrationen væk fra det normale niveau, er sukkerindholdet i den mad, der spises. Tilskudet af sukker stiger kraftigt, lige når vi har spist, og falder derefter. Modelmæssigt lader dette sig bedst illustrere ved en funktion af formen

$$z(t) = Q e^{-K(t-t_0)} \quad , \quad t > t_0$$

hvor  $t_0$  er et tidspunkt, hvor der spises, og  $Q$  er det maksimale sukkerindtag ved det pågældende måltid.

Opstil nu en differentiallyigningsmodel, som modellerer disse forhold og foretag en stabilitetsanalyse af modellen.

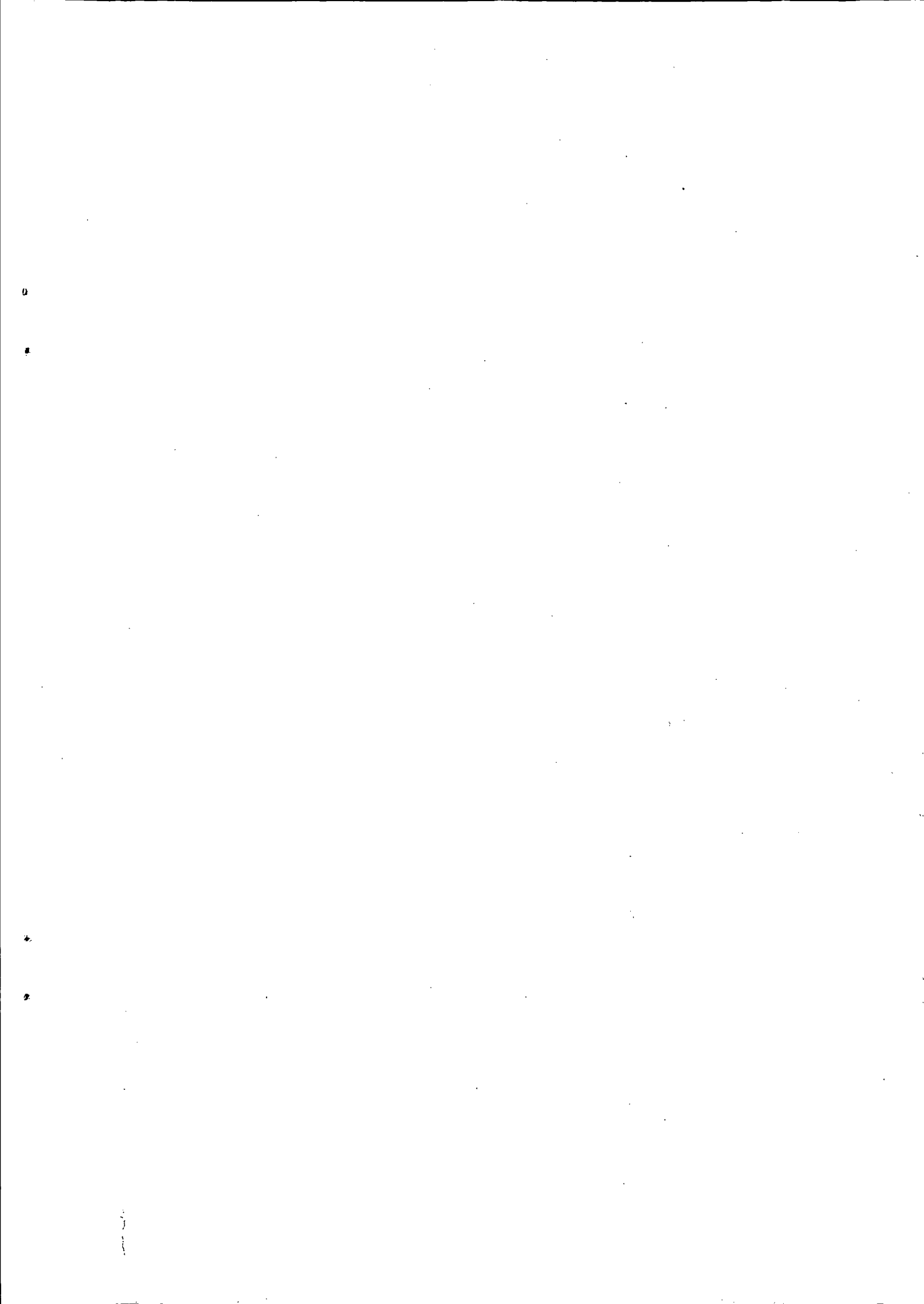
B. I skal nu fastlægge eller om muligt estimere modellens parametre. Derefter skal I bestemme tidspunktet for tre daglige måltider samt det maksimale sukkerindtag ved hvert måltid. I skulle nu kunne lave en simulation af modellen på datamaskine. Selvfølgelig er der skrevet et program for, men I skal indlæse værdien af jeres parametre m.v., dette skal ske på datakort i følgende rækkefølge:

- 1.kort:  $a_1$              $a_2$              $a_3$
- 2.kort:  $b_1$              $b_2$              $b_3$
- 3.kort:  $p_1$              $p_2$
- 4.kort: antal måltider
- 5.kort:  $t_1$              $Q_1$
- 6.kort:  $t_2$              $Q_2$
- 7.kort:  $t_3$              $Q_3$
- 8.kort: antal injektioner
- 9.kort:  $t_1$              $W_1$
- 10.kort:  $t_2$              $W_2$

Bemærk, at kort 3 og 8 skal skrives, men i dette tilfælde er værdierne 0. I bilaget er vist et eksempel på en kortstak - tallene har dog intet med modellen at gøre.

I skal nu have udleveret nogle styrekort af jeres vejleder.

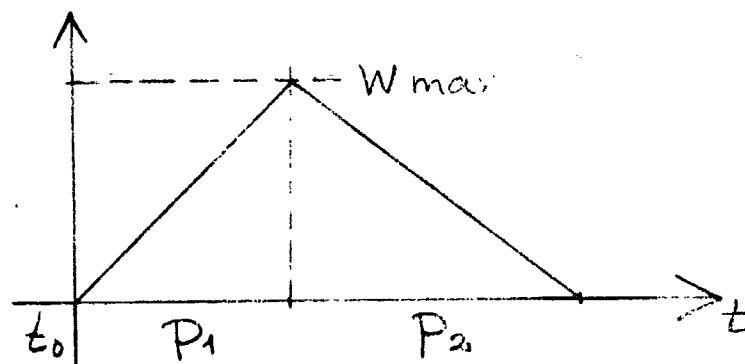
C. Når I har fået et rimeligt(?) resultat af jeres kørsel, skal I ændre i modellen, således at den modellerer en diabetiker (dvs en person som lider af sukkersyge). Den sygdom viser sig ved, at nedbrydningen af blodsukkeret sker for langsomt eller slet ikke. Årsagen hertil er enten, at bugspytkirtlen ikke indeholder insulin, eller at den mekanisme, som styrer insulinproduktionen, er delvis defekt.





Overvej, hvilke af modellens parametre man skal ændre for at beskrive dette sygdomsbillede, og undersøg på denne baggrund modellens stabilitetsforhold.

I sværere tilfælde af diabetes (sukkersyge) kan man ikke klare sig med at reducere sukkerindholdet i kosten, hvilket kunne være en konklusion af stabilitetsanalysen. Man giver derfor to insulininjektioner dagligt. Overvej, hvordan man skal placere disse to injektioner på dagen, således at effekten af dem bedst muligt dækker de tre måltider - til oplysning kan det siges, at effektkurven ved en insulininjektion omtrent følger nedenstående kurve



Her er  $t_0$  tidspunktet for en injektion. Der går ca. tre timer, før den maksimale effekt opnås.

D. I skal til slut simulere modellen for en diabetiker, når det tillige antages, at den maksimale effekt ved injektionerne er 20 henholdsvis 15 insulinenheder, og at sukkerindholdet i kosten reduceres til det halve.

PS: Der skal laves en udførlig skriftlig besvarelse af denne problemstilling fra hver gruppe. Besvarelsen afleveres til vejlederen for jeres gruppe.



- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.  
Projektrapport af Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.  
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og Peter H. Lassen.  
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Nr. 3 er a jour ført i marts 1984  
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Nr. 4 er p.t. udgået.  
Mogens Niss.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MORDERNE FYSIKS HISTORIE". Nr. 5 er p.t. udgået.  
Helge Kragh.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".  
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Nr. 7 er udgået.  
B.V. Gnedenko.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bound-graph formalismen.  
Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum".  
Projektrapport af Lasse Rasmussen.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".  
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen.  
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER"  
red. Jørgen Larsen
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Nr. 12 er udgået  
Mogens Brun Heefelt
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".  
Projektrapport af Gert Kreinøe.  
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography". Nr. 14 er p.t. udgæet.  
Else Høyrup.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".  
Specialeopgave af Leif S. Striegler.  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".  
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".  
Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.  
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".  
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".  
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".  
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".  
1-port lineært response og støj i fysikken.  
Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality".
- 
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE". Nr. 24 a+b er p.t. udgæet.  
a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale.  
Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".  
En projektrapport og to artikler.  
Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS".  
Helge Kragh.
- 28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".  
Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kreinøe.  
Vejleder: Niels Boye Olsen.

- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".  
 Projekt rapport af Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.  
 Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".  
 Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.  
 Udkommer medio 1982 på Fysik-, Matematik- og Kemilærernes forlag.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".  
 Projekt rapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk. Nr. 31 er p.t. udgået  
 Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER OG MOSSBAUER-EFFEKTMÅLINGER".  
 Projekt rapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og Preben Jensen.  
 Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK-NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".  
 Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".  
 ENERGY SERIES NO.1. Nr. 34 er udgået.  
 Bent Sørensen. Publ. i "Renewable Sources of Energy and the Environment", Tycooli International Press, Dublin, 1981.
- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".  
 Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN ?".  
 Fire artikler.  
 Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".  
 ENERGY SERIES NO.2.  
 Bent Sørensen.
- 
- 38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".  
 Projekt rapport af Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant. Nr. 38 er p.t. udgået  
 Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".  
 Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".  
 Projekt rapport af Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde. Nr. 40 er p.t. udgået  
 Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".  
 ENERGY SERIES NO.3.  
 Bent Sørensen.

- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".  
Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".  
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".  
ENERGY SERIES NO.4.  
Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISK UNDERSØGELSE AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".  
Projektrapport af Niels Thor Nielsen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 
- 45/82
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE - I+II ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".  
Projektrapport af Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.  
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSEBACK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".  
ENERGY SERIES NO.5.  
Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".  
Projektrapport af Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn, Isac Showiki.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".  
Projektrapport af Preben Nørregaard.  
Vejledere: Jørgen Larsen & Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY". ENERGY SERIES NO.6.  
Rapport af Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.  
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?"  
Projektrapport af Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS"  
Bernhelm Booss & Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".  
Arne Jakobsen & Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.  
Stig Andur Pedersen & Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde  
Universitetsbibliotek.

En bibliografi.

Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82:  
Se også tekst 62/83.

56/82 "ÉN - TO - MANGE" -  
En undersøgelse af matematisk økologi.

Projektrapport af Troels Lange.

Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -  
Skjulte variable i kvantemekanikken?

Projektrapport af Tom Juul Andersen.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger  
over spredning af dyr mellem småbiotoper i  
agerlandet.

Projektrapport af Per Hammershøj Jensen &  
Lene Vagn Rasmussen.

Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".

ENERGY SERIES NO. 7.

Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.

Projektrapport af Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og  
Preben Nørregaard.

Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION", som et eksempel på  
en naturvidenskab - historisk set.

Projektrapport af Annette Post Nielsen.

Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og  
Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde  
Universitetsbibliotek.

En bibliografi. 2. rev. udgave

Else Høyrup

63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO  
ENERGY PLANNING".

ENERGY SERIES No. 8

David Crossley & Bent Sørensen

64/83 "VON MATHEMATIK UND KRIEG".

Bernhelm Booss og Jens Høyrup

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".

Projektrapport af Per Hedegård Andersen, Kirsten  
Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos,  
Else Marie Pedersen, Erling Møller Pedersen.

Vejledere: Bernhelm Booss & Klaus Grünbaum

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I  
ESCHERICHIA COLI".

Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Ole  
Richard Jensen og Klavs Frisdahl.

Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Héde Madsen

- 67/83 "ELIPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"  
Projektrapport af Lone Billmann og Lars Boye  
Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"  
- til kritikken af teoriladede modeller.  
Projektrapport af Lise Ogdgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid, Frank Mølgård Olsen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"  
- en test i l.g med kommentarer  
Albert Chr. Paulsen
- 70/83 "INDLÆRINGS- OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSEUNDERVISNINGSNIVEAU"  
Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Age Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.  
Vejleder: Klaus Grünbaum & Anders H. Madsen
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"  
- et problem og en udfordring for skolen?  
Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich & Mette Vedelsby
- 72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S. Peirce.  
Peder Voetmann Christiansen
- 73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"  
- økologisk contra traditionelt  
ENERGY SERIES No. 9  
Specialeopgave i fysik af Bent Hove Jensen  
Vejleder: Bent Sørensen
- 
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik  
Projektrapport af Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.  
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"  
- Case: Lineær programmering  
Projektrapport af Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl, Frank Mølgård Olsen  
Vejledere: Mogens Brun Heefelt & Jens Bjørneboe
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.  
ENERGY SERIES No. 10  
Af Niels Boye Olsen og Bent Sørensen
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"  
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller  
Projektrapport af Svend Age Houmann, Keld Nielsen, Susanne Stender  
Vejledere: Jørgen Larsen & Jens Bjørneboe



78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I  
AMORFT GERMANIUM"

Specialerapport af Hans Hedal, Frank C. Lud-  
vigsen og Finn C. Physant

Vejleder: Niels Boye Olsen

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE"

Projektrapport af Henrik Coster, Mikael Wenner-  
berg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm  
og Morten Overgaard Nielsen.

Vejleder: Bernhelm Booss

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B"

Mogens Brun Heefelt