# TEKST NR 7 1978

B.V.GNEDENKO

MATEMATIKKENS
FORHOLD

til

SAMFUNDS-
ØKONOMIEN

**TEKSTER**
**fra**

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

TEKSTER

fra

IMFUFA Roskilde universitetscenter.

---

I denne tekstrække er tidligere udkommet:

1. "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
   Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolaj Lomholt. Vejleder: Anders Hede Madsen.

2. "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund - Projektrapport.
   Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe, Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss.

3. "Opgavesamling", bredde-kursus i fysik.
   Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4. "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalisme.

5. "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE."
   Helge Kragh.

6. "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret."
   Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.

# F O R O R D

I forbindelse med forberedelsesarbejdet til den internationale workshop "Mathematics and the real world", som blev afholdt ved IMFUFA i august i år, fik vi af professor, akademimedlem Boris V. Gnedenko stillet den artikel til rådighed, evt. med henblik på ikke-kommerciel offentliggørelse, der aftrykkes som hovedbidraget til dette hæfte. Artiklen er i Sovjetunionen udkommet som hæfte (nr. lo) i serien "Matematik og kybernik" på forlaget "Znanie" i Moskva. Med udsendelsen i IMFUFA's tekstserie foreligger artiklen for første gang på dansk under oversættelse fra russisk af stud.mag. Poul Andersen. Den anden artikel i nærværende hæfte, der også er oversat af Poul Andersen, blev offentliggjort i dagbladet "Pravda" den 4. januar 1978.

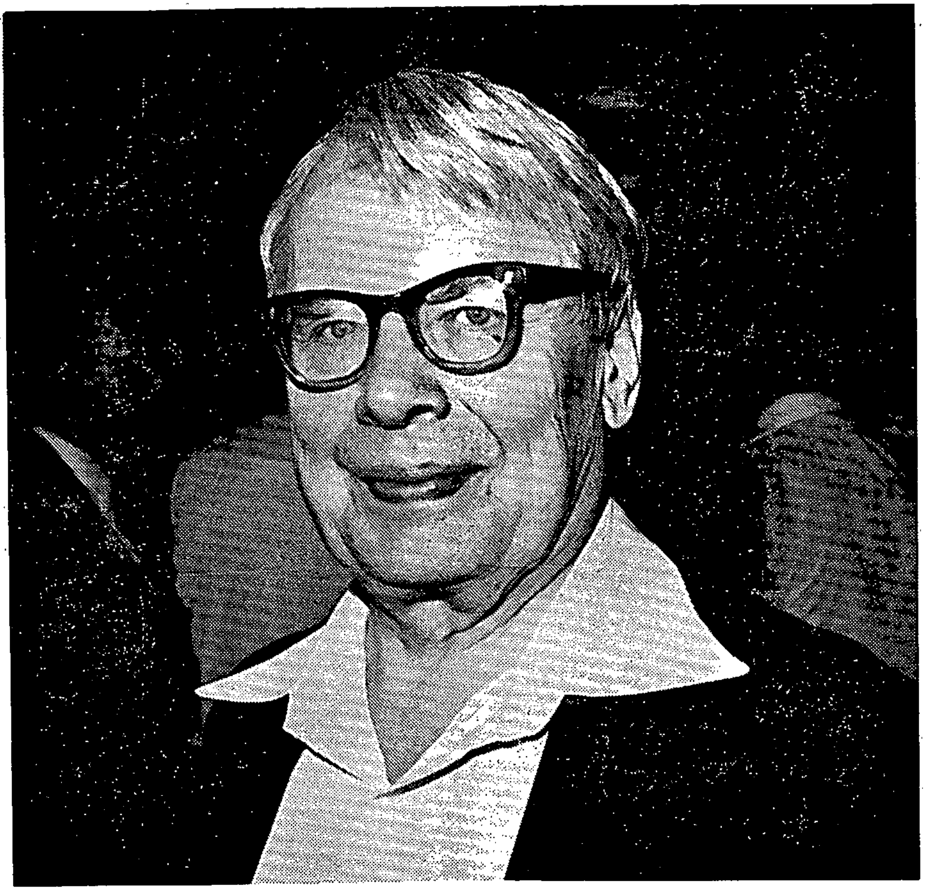
Det faktum, at Boris Gnedenko dels er en stærkt fremtrædende bidragyder til sandsynlighedsregningens udvikling i det sidste halve århundrede og dels er centralt placeret i Sovjetunionens matematikmiljø, både hvad angår undervisning, forskning og anvendelse, går det i sig selv nærliggende at offentliggøre hans bidrag. Men også i kraft af deres indhold har bidragene interesse, fordi Boris Gnedenko er optaget af de samme problemstillinger vedrørende matematikkens karakter, placering og funktion som er i centrum for IMFUFA's matematiske virksomhed, og hvad mere er, hans betragtninger svarer på adskillige punkter til overvejelser, vi selv har gjort os.

Vi har af disse grunde fundet det værdifuldt at offentliggøre de i dette hæfte indeholdte artikler i IMFUFA's uformelle række af tekster.

Bernhelm Booss            Mogens Niss

November 1978

I N D H O L D



B.V. Gnedenko

Russ. Math. Surveys 27 (1972),
No. 2, 173-179 (1973)

Oversættelse fra
Uspekhi Mat. Nauk 27, No. 2 (164)
197-202 (1972).

# BORIS VLADIMIROVICH GNEDENKO

(on his sixtieth birthday)

On January 1, 1972 Boris Vladimirovich Gnedenko, Professor at the Moscow State University, member of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, and one of the leading Soviet scholars in the field of probability theory and its applications, celebrated his sixtieth birthday.

Boris Vladimirovich Gnedenko was born in Ul'yanovsk, the son of a land surveyor. At the age of fifteen he entered the University of Saratov, graduating when he was eighteen. While still a student, Gnedenko took an active part in the campaign against illiteracy. After graduating from the University of Saratov he taught at the Ivanovo Textile Institute. Even in his earliest works [3]–[5][1] Gnedenko revealed his interest in applications of mathematics.

From 1934 to 1937 Gnedenko was at the University of Moscow as a graduate student, under the supervision of A. Ya. Khinchin. During these years the central trend in probability theory was the study of the limiting behaviour of sums of independent random variables. Gnedenko obtained a number of first-rate results in this field, which made a considerable contribution to probability theory.

Until the '30s, probability theory was principally concerned with the study of conditions of the convergence of sums of mutually independent random variables to the normal law. At the beginning of the '30s a formulation for processes with independent increments was obtained in papers by B. de Finetti, A. N. Kolmogorov and Paul Lévy. R. M. Babli and A. Ya. Khinchin showed that the class of infinitely divisible distributions so obtained is limiting for sums of independent infinitely small random variables. In the cycle of papers [11]–[16] Gnedenko found necessary and sufficient conditions for the convergence of the laws of distributions of sums of independent random variables to one infinitely divisible distribution or another. He proposed a new method, based on the introduction of associated infinitely divisible distributions.

---

[1] References [1]–[120] refer to the bibliography published in Uspekhi Mat. Nauk 17: 4 (1962), 195–200. The present bibliography of Gnedenko's published papers is a continuation.

In subsequent papers [14], [17], [21] Gnedenko gave necessary and sufficient conditions for the convergence of sums of independent equally distributed summands to a stable distribution with exponent $p < 2$. The outcome of this research into the theory of summation of independent random variables was the fundamental monograph of Gnedenko and Kolmogorov, "Limiting distributions for sums of independent random variables" (1949), which was awarded a Chebyshev prize.

In 1938 Gnedenko became a lecturer in the Department of Probability Theory in the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University. During the difficult war years Gnedenko played an active part in the community life of the university. During these years, as well as continuing his research on summation theory of independent random variables [21]-[24], he turned his attention to applications of probability theory and mathematical statistics. We may note his article [18] on Geiger–Müller counters, and his works [19], [20] in which he studies the limiting distribution of the maximum term of a variational series.

In 1945 Gnedenko moved to the Ukraine, where from 1945 to 1950 he worked in L'vov and from 1950 onwards at the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR and at the University of Kiev (he was Head of the Department of Mathematical Analysis of the Kiev State University, and Head of the Probability Theory Section and Chairman of the Bureau of the Department of Physical and Mathematical Sciences of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR). In 1945 Gnedenko was elected a Corresponding Member and in 1948 a full member of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. During these years he continued his research on summation theory, obtaining a number of limiting theorems for sums of lattice random variables [40], [41], [43], [45], [52].

To the Ukrainian period belong Gnedenko's works on mathematical statistics [56], [58]-[60], [67], [74]. These works continue the research of Kolmogorov and Smirnov on the asymptotic behaviour of the maximum deviation of an empirical distribution function from the theoretical and the maximum of the difference of two empirical distribution functions. Gnedenko found simple methods for obtaining exact distributions of these quantities for the case of finite samples. Using these methods he obtained a more precise representation of the asymptotic behaviour of the maximum deviation. To the same period there belong his first works on the history of mathematics. Of his numerous works in this field [28], [48], [54], [55], [62], [68], [103], [129], [137], [143] we may note, in particular, his popular "Essays on the history of mathematics in Russia" (1946) and the papers devoted to the life and work of M. V. Ostrogradskii.

In 1960 Gnedenko moved to Moscow, where he became a Professor in the Department of Probability Theory in the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University. In 1966 he became Head of al Department. From the very beginning of his activity in Moscow Gnedenko was actively concerned with problems of applied probability theory and mathematical statistics. While he was still in Kiev, he had drawn the attention of a number of young mathematicians to the solution of problems in queuing theory. He proposed a number of new problems and gave lecture courses on queuing theory [92], [99], [100], [110], [112]. In Moscow Gnedenko gathered around him a group of mathematicians concerned with queuing theory the mathematical theory of reliability, and mathematical statistics. Of his articles we note [131], [132], [148], in which he studies the reliability of systems with a restorable stand-by. This problem was developed further in the work of mathematicians in Moscow and Kiev. During these years he published two monographs, "Mathematical methods in the theory of reliability" in 1965 (in collaboration with Yu. K. Belyaev and A. D. Solov'ev) and "Elements of queuing theory" in 1966 (in collaboration with I. N. Kovalenko). His works on the theory of summation of a random number of random summands [142], [144], [149] - [152], [157], [159], [160] deserve special attention. The methods he proposes here have found an effective application in asymptotic problems of queuing and reliability theory.

Gnedenko devoted a great deal of his efforts and energy to propaganda work on the mathematical training of engineers and to organizational activity in the sphere of applied mathematics. A course of lectures for engineers was organized in the Polytechnic Museum on his initiative. The lecture courses and seminars which Gnedenko organizes attract, in addition to mathematicians, a wide circle of engineers interested in applications of mathematics. He is principal editor of the section of queuing and reliability theory for the journal *Tekhnicheskaya kibernetika*, of the section of statistical methods of the journal *Zavodskaya Laboratoriya* and also takes an active part in publishing the journal *Kontrol' kachestva i nadezhnosti* of the Committee of Standards.

Gnedenko's pedagogical work has been fruitful. He made an especially great contribution to the creation of a school of probability theory in the Ukraine. Under his direction scientific groups were formed, which have done successful work on probability theory, random processes, and mathematical statistics at the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR and the University of Kiev. His D.Sc. students include I. N. Kovalenko, V. S. Korolyuk, V. S. Mikhalevich, A. V. Skorokhod, Yu. P. Studnev, E. L. Yushenko and his Ph.D. students S. M. Brodi, B. N. Gartshtein, I. D. Kvit, T. P. Mar'yanovich and N. V. Yarovitskii. Gnedenko pays great attention to the training of the young scientists of the Soviet Republics. During the last few years his pupils B. I. Grigelionis and M. A. Shneps-Shneppe have defended their D.Sc. theses and N. Mukhitdinova, T. Nasirova and A. Shakhbazov their Ph.D. theses. The following of his pupils have successfully completed a research course and defended their theses: B. Fraier (DDR), I. Tomko and D. Szász (Hungary), B. Dimitrov (Bulgaria), Y. Nasr, A. Omar, H. Zakhel, F. Hussein (Egypt).

During his trips to East Germany, Poland and Bulgaria Gnedenko has lectured on probability theory and its applications and this, undoubtedly, has helped the development of research into probability theory. His lectures in East Germany in 1953–54 should be specially noted. During his trips to Socialist and other foreign countries (Australia, England, Denmark, New Zealand, France, etc.), where he is frequently invited to deliver lectures and papers, Gnedenko is an unwearying propagandist of the achievements of Soviet science.

Gnedenko devotes much time and effort to the development of scientific methodological work and the elaboration of philosophical problems of mathematics. In his papers and lectures he appears as an active supporter of the mathematization of science, is a fervent propagandist of progressive methods of training, and deals with the philosophical problems of the natural sciences from a Marxist point of view.

All of Gnedenko's pupils and colleagues know him as a kindly, sympathetic, tactful and highly-principled person, always ready to help by word and deed. No one–mathematician, engineer or teacher–who turns to him for help or advice is ever refused.

At present Gnedenko is as young as ever, full of strength and creative ideas. We wish him good health and further creative successes in his many-sided activities in mathematics and its applications.

*Yu. K. Belyaev, A. N. Kolmogorov, A. D. Solov'ev.*

## BIBLIOGRAPHY OF GNEDENKO'S PUBLISHED WORKS

**1962**

[121] Mathematics around us. Nauka i chelovechestvo 1, 106–117.

[122] Application of mathematical methods in processing the results of biological observations. In: *Biologicheskie aspekti kibernetiki* (Biological aspects of cybernetics) Izdat. Akad. Nauk SSSR, 103–111 (in collaboration with S. V. Fomin and Ya. I. Khurgin).

[123] Principal trends of research in queuing theory. *Trudy VI Vsesoyuznogo soveshchaniya po teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistike* (Proc. Sixth All-Union Conf. on probability theory and math. statistics), Vilna, 341–355 (in collaboration with Yu. K. Belyaev and I. N. Kovalenko).

[124] Asymptotic expansions in probability theory. *Proc. Fourth Berkeley Symp. math. statistics and probability* vol. 2, 153–170 (in collaboration with V. Korolyuk and A. Skorokhod) (in English).

1963

[125] Kolmogorov as a pedagogue. Uspekhi Mat. Nauk 18: 5, 115–120 (in collaboration with P. S. Aleksandrov).

[126] Of the works of A. N. Kolmogorov on probability theory, Uspekhi Mat. Nauk 18 : 5, 5–11.

1964

[127] The science of chance. *Detskaya entsiklopediya* (Children's encyclopaedia), 2nd ed., 452–461.

[128] Mathematical methods of the theory of reliability. *Detskaya entsiklopediya* (Children's encyclopaedia), 2nd ed. 461–465.

[129] The role of mathematics in the development of the natural sciences today. In: *Dialektika v naukakh o nezhivoi prirode* (Dialectics in the sciences of inanimate nature), Izdat. Mysl', 45–85.

[130] Criteria of signs. Dokl. Bolg. Akad. Nauk 17, 793–796.

[131] Cold stand-by. Izv. Akad. Nauk SSSR Tekhn. Kibernet. No. 4, 3–12.

1965

[132] Stand-by with restoration. Izv. Akad. Nauk SSSR Tekhn. Kibernet. No. 5, 111–118.

[133] Prospects of mathematical education. Mat. v shkole 6, 2–11.

[134] *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* (Mathematical methods in reliability theory), Izdat. Nauka, Moscow, 1–524 (in collaboration with Yu. K. Belyaev and A. D. Solov'ev).

[135] Meine Idealvorstellung vom Mathematiklehrer, In: *Probl. d. Math. Unterrichts*, 88–104.

1966

[136] *Elementy teorii massovogo obsluzhivaniya* (The elements of queuing theory), Izdat. Nauka, Moscow, 1–301 (in collaboration with I. N. Kovalenko).

[137] The role of the history of the physico-mathematical science in the development of modern science. In: *Istoriya i metodologiya estestvennykh nauk* (History and methodology of the natural sciences) Izdat. Moskov. Gos. Univ. No. 5, 5–14.

[138] Mathematical models in pedagogics. Vestnik vyssh. shkoly No. 9, 11–18.

[139] Mathematical models of the theory of reliability. *Itogi nauki* (Results of science) Izdat. VINITI, 7–53 (in collaboration with Yu. K. Belyaev and I. N. Kovalenko).

[140] Effectiveness of stand-by restoration. In: *Predel'nye teoremy i statisticheskie vyvody* (Limit theorems and statistical deductions), Tashkent, 44–59.

1967

[141] Standardization and mathematics. Standarty i kachestvo No. 6, 86–92.

[142] Some problems of queuing theory. Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekhn. Kibernet. No. 5, 88–100 (in collaboration with I. N. Kovalenko).

[143] Development of probability theory in the University of Moscow. Vestnik Moskov. Gos. Univ. No. 6, 30–51.

[144] Connection of the theory of summation of independent random variables with problems of queuing and reliability theory, Revue Roumaine Math. Pures. Appl. 12, 1243–1253.

[145] On some stochastic problems of reliability theory. Proc. Fifth Berkeley symp. math. statistics and probability 3, 259–270 (in collaboration with Yu. Belyaev and A. Solov'ev) (in English).

[146] Some theorems on stand-bys. Proc. Fifth Berkeley symp. math. statistics and probability 3, 285–291 (in English).

**1968**

[147] Modern mathematics and the future engineer. Vestnik vyssh. shkoly No. 1, 45–53.

[148] Cold stand-by with restoration. Avtomat. i telemekh. No. 7, 105–111 (in collaboration with Y. Nasr).

**1969**

[149] Statistical methods in reliability theory. In: *Osnovye voprosy nadezhnosti i dolgovechnosti mashin* (Fundamental questions of reliability and lifetime of machines). Izdat. MATI, Moscow, 22–42.

[150] Fundamental trends of mathematical research in reliability theory. *Trudy soveshchaniya po matematicheskoi teorii nadezhnosti* (Proc. Conf. math. theory of reliability), Izdat. Akad. Nauk UzSSR, Tashkent, 3–18 (in collaboration with Yu. K. Belyaev).

[151] Statistical problems of reliability theory. *Trudy soveshchaniya po matematicheskoi teorii nadezhnosti* (Proc. Conf. math. theory of reliability), Izdat. Akad. Nauk UzSSR, Tashkent, 19–25.

[152] The role and place of reliability theory in the process of creating complex systems. In: *Teoriya nadezhnosti i massovoe obsluzhivanie* (Reliability and queuing theory). Izdat. Nauka, Moscow, 14–32 (in collaboration with I. A. Ushakov and B. A. Kozlov).

[153] On a transfer theorem. Dokl. Akad. Nauk SSSR 187, 15–17 (in collaboration with H. Fahim).
= Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 769–772.

**1970**

[154] Lenin and methodological questions of mathematics. Uspekhi Mat. Nauk 25:2, 5–14.

[155] Some notes on a theorem of I. N. Kovalenko. Litovsk. Mat. Sb. 9, 463–470 (in collaboration with B. Fraier).

[156] Problems of the mathematization of the natural sciences today. In: *Dialektika i sovremennoe estestvoznanie* (Dialectics and the natural siences today), Izdat. Nauka, Moscow, 82–102.

[157] Some unsolved problems of the theory of queues. *Trudy VI Mezhdunarodnogo kongressa po teletraffiku* (Proc. Sixth Internat. Cong. Tele-traffic), Munich, 9–15, IX, 227, 18.

**1971**

[158] Engels on philosophical problems of mathematics. Vestnik Moskov. Gos. Univ., (filosofiya) No. 2, 20–27.

[159] *Primenenie teorii massovogo obsluzhivaniya k zadacham bol'shikh sistem. Bol'shie sistemy, teoriya, metodologiya, modelirovaniya* (Application of queuing theory to problems of large systems. Large systems, theory, methodology, simulation) Izdat. Nauka, Moscow, 105–122 (in collaboration with I. N. Kovalenko).

[160] Limit theorems for sums of a random number of independent non-negative summands. *Trudy VI berkleevskogo simpoziuma po teorii veroyatnostei* (Proc. Sixth Berkeley symp. probability), 1--20.

Translated by V. Rich.

B. V. G N E D E N K O

# M A T E M A T I K K E N S   F O R H O L D   T I L S A M F U N D S Ø K O N O M I E N

Udgivet på forlaget 'Znanie' (='Viden'), Moskva, 1977.
(='Nyt i livet, videnskaben og teknikken'. Serie 'Matematik og kybernetik', 10.)

Referat bag på titelblad, s.2:

Denne brochures forfatter, medlem af Ukraines Videnskabsakademi B.V.Gnedenko fortæller interessant og lettilgængeligt om de vigtigste videnskabelige problemer, som den økonomiske udvikling har rejst, og som det er lykkedes at løse med bistand fra matematikken. Om køteori, teori for optimal planlægning, forskning og aktion og andre vigtige anvendelser af matematikken. Brochuren beskæftiger sig meget med teoretiske og metodologiske spørgsmål.

Brochuren henvender sig til en bred kreds af læsere.

# I N D L E D N I N G

Samfundsøkonomien udgør i vore dage et meget kompliceret system, der ikke blot omfatter et lands industri, transportvæsen og landbrug, men også dets handel, byggeri, finansvæsen, energiforsyning, minedrift, naturfredning, uddannelse, videnskab, sundhedsvæsen, kultur samt dets forsvar. For at udvikle samfundsøkonomien er det nødvendigt at tage hensyn til det enorme antal relationer såvel mellem dens forskellige områder som inden for hvert af dem.

Matematikkens rolle ved løsningen af praktiske og samfundsøkonomiske problemer har ikke altid været den samme, men altid betydelig. I Oldtiden var kendskab til aritmetik og geometri tilstrækkeligt til i praksis at løse enhver opgave, der måtte dukke op. For at lave beregninger over den tids meget enkle maskiner - blok, kile, løftestang og spil - behøvede man kun elementer fra algebra og trigonometri. Men Nyere Tids begyndelse, der ikke blot var kendetegnet ved en ændring i de sociale forhold og ved skydevåbnets og fabriksproduktionens indtrængen i menneskehedens liv, men også blev begyndelsen på de store geografiske opdagelser, gjorde det påkrævet at skabe den matematiske analyse, der åbnede uudtømmelige muligheder for at forudberegne mekaniske systemers tilstand.

Det så ud som om, man endelig havde fundet en matematisk metode, der var i stand til at løse ethvert naturvidenskabeligt eller praktisk problem. Dette var imidlertid ikke tilfældet. Videnskabens og industriproduktionens centrale problemer stillede matematikken nye opgaver, der ikke længere kunne indpasses i den matematiske analyses strengt deterministiske skema. Teorien for luftarters kinematik og senere konstruktionen af den kvantitative teori for materiens molekylære opbygning gjorde udarbejdelsen af nye matematiske metoder påkrævet, først og fremmest sandsynlighedsregning.

Med andre ord er matematikkens rolle ved løsningen af praktiske og samfundsøkonomiske problemer hele tiden vokset. Det 20. århundrede, især under Anden Verdenskrig og i efterkrigstiden, har på den ene side vist matematikkens enorme styrke ved løsningen af samfundsøkonomiske problemer og på den anden side utilstrækkeligheden i opgaveformulering og i de udarbejdede metoder, når det gælder stadig mere komplicerede og egenartede problemer. I forbindelse med nødvendigheden af at nedskære uproduktive udgifter til transport af færdigvarer fra fabrik til forbruger og af råstoffer fra oprindelsessted til produktionssted opstod der problemer med at optimere lokaliseringen af produktionsvirksomheder ved deres projektering og minimere transportudgifterne ved leveringen af den færdige produktion. Men transportopgaver repræsenterer kun specielle aspekter af et generelt problem, - at spare midler, materialer, maskintid og arbejdstid. Specielle opgaver har ført til fremkomsten af en række matematiske discipliner, - lineær programmering, spilteori, teorien for massebetjening (=køteori, o.a.) osv., - mens generelle problemer har ført til udarbejdelsen af en anvendt matematisk disciplin, som kaldes operationsanalyse. Det er en sammensat disciplin, der udnytter alle de lige nævnte grene af anvendt matematik.

Nødvendigheden af en sammensat metode ved løsningen af samfundsøkonomiske problemer blev klar for forfatteren på følgende vis. I 50erne, da lineære programmeringsmetoder først begyndte at finde udbredt anvendelse, kunne man i vore centrale aviser læse, at omorganiseringen af grusforsyningen til Moskvas byggepladser ved at knytte dem til anløbskajer og grusgrave tillod en nedskæring på 20.000 rubler i de daglige transportudgifter. På denne måde lykkedes det virkelig at opnå en minimal samlet transportstrækning og følgelig et minimalt brændstofforbrug. Men allerede nogle år senere fik jeg øje på en mindre artikel fra avisen 'Trud' (='Arbejde', fagforeningernes organ, o.a.), hvor det meddeltes, at manglende hensyntagen til grusgravenes kapacitet og mangel på tilkørselsveje og læsseanordninger førte til enorme ventetider for lastbilerne dér, hvor sandet blev læsset på. Således ser vi, at det ikke er tilstrækkeligt kun at optimere benzinforbruget. Operationen i sin helhed kræver en minimering.

De problemer, der er forbundet med en forhøjelse af produktkvalitet, var nok vigtige i forrige århundrede, men har i vore dage fået en enestående betydning. De kræver den største opmærksomhed, og samtidig må man tage nye matematiske spørgsmål op og skabe nye matematiske teorier. Jeg vil her tillade mig at minde om to tankeretninger i spørgsmål om at sikre kvalitet. Først og fremmest er man blevet klar over, at kvalitet er et for generelt begreb, der også omfatter relativt sekundære egenskaber, der er uden indflydelse på et produkts funktionsdygtighed, men som nedsætter vurderingen af det. Samtidig findes der egenskaber, der er afgørende. Til dem hører reliabilitet, dvs. et produkts evne til i det nødvendige tidsrum at udføre de pålagte opgaver. Udforskningen af produktreliabilitet og udarbejdelsen af reliabilitetsteoriens kvantitative aspekter har stillet matematikken en række nye spændende opgaver, heriblandt udarbejdelsen af metoder til at vurdere reliabilitet på grundlag af forsøgsresultater.

Det andet problem er styring af produktionskvalitet i fremstillingsprocessen. Hvordan skal man blande sig i den teknologiske proces for at sikre en god produktionskvalitet? Hvornår skal man foretage en omstilling af udstyret eller en ændring af temperaturmæssige, vibrationsmæssige og andre forhold, hvorunder en proces foregår, for at udstyret kan arbejde optimalt, materialeforbruget holdes inden for de normerede mængder og kvaliteten af den færdige produktion blive maksimalt høj? Formuleringen af dette problem førte til dannelsen af en ny retning inden for sandsynlighedsregningen - kontrolteori for stokastiske processer.

Der opstår store opgaver i forbindelse med organiseringen af reparation af udstyr. Hvordan skal man organisere gennemførelsen af reparationer og opbevaringen af de nødvendige reservedele? I hvor stor mængde skal man opbevare reservedele, der er nødvendige til reparationsarbejder? Dette er kun en lille del af de problemer, der opstår for organisatoren af reparationsproduktion og for forskeren. Disse problemer er af enestående betydning for vort land, eftersom der hvert år gives mange hundrede millioner rubler ud på reparation af landbrugsudstyr. Og de samme opgaver opstår jo i forbindelse med vedligeholdelse af bil- og flyparken, værksteder, skibe etc. En vellykket arbejdsfordeling kan betyde en enorm besparelse af vort lands midler, mens et dårligt planlagt skema for reservedelsproduktionen kan give afbræk i yderst vigtige opgaver såsom forårssåning, høst, virksomhedernes råstofforsyning etc. Matematiske metoder er ved at blive et uundværligt beregningsinstrument i bogstavelig talt alle de vigtigste processer i samfundsøkonomien.

For matematikere, ingeniører og økonomer rejser der sig meget ansvarsfulde opgaver med forhåndsberegninger, prognoser for udstyrs udnyttelsesgrad, produktionsskift osv. I alle disse opgaver spiller matematikken en enorm rolle, eftersom det er bedre på forhånd at gennemregne flere handlingsvarianter og vælge den bedste af dem end på lykke og fromme at tage den første den bedste og bagefter gøre tabene op.

Det er meget vigtigt at mærke sig, at en ændring i arbejdsvilkårene kan medføre en uundgåelig ændring af det matematiske undersøgelsesapparat, der anvendes. Hvis der således kun er et fartøj, der sejler i rutefart mellem to havne A og B, så opstår der ingen problemer med kødannelse blandt fartøjerne ved lastning og losning. Men hvis der er mange af disse fartøjer, så rejser problemet med køer og det mest rationelle antal kajpladser i havnen sig med fuld styrke. Til dets løsning er aritmetiske midler ikke længer tilstrækkelige, og det er nødvendigt at anvende teorien for massebetjening.

Denne brochure er fortrinsvis helliget udviklingshistorien og generelle metodologiske spørgsmål vedrørende anvendt matematik, der nu finder forskelligartet og yderst vigtig anvendelse på alle områder af vort lands samfundsøkonomi.

## M A T E M A T I K K E N   I   S Y S T E M E T   A F K U N D S K A B E R

Menneskeheden har i den tid, den har eksisteret, gennemgået en uhyre vej fra uvidenhed til viden og fra ufuldstændig viden til mere fuldstændig. Og skønt denne vej har ført os til opdagelsen af mange naturlove og til opbygningen af et fængslende interessant verdensbillede, så bringer hver dag nye opdagelser, en ny fremtrængen ind i områder af naturen, der var utilstrækkeligt udforskede og undertiden helt ukendte for menneskeheden. Men for at trænge ind i det ukendte, for at stille nye naturkræfter i menneskehedens tjeneste, skal videnskaben modigt begive sig ind på de kundskabsområder, som den interesserede sig for lidt for, eller som forekom at være utilgængelige for vores erkendelse på grund af deres indre kompleksitet.

For øjnene af min generation har menneskeheden foretaget et enormt skridt i udforskningen af processerne i naturen og i den praktiske udnyttelse af den erhvervede viden. Vi kan blot tænke på de første skridt i erobringen af verdensrummet og udforskningen af intraatomare fænomener, såvel som de første hjerteoperationer. Det, der for så kort tid siden endnu var utilgængeligt for mennesker, og som befandt sig uden for deres forestillinger og muligheder, det er nu blevet tilvant og er gledet ind i vores daglige tilværelse. Takket være videnskabens, kirurgiens og den medicinske tekniks resultater er i hundredvis af mennesker, hvis dage var talte, atter vendt tilbage til deres familie og arbejde og har atter fået ret til et fuldgyldigt liv.

I efteråret 1945 blev menneskeheden rystet over mange titusinder japaneres død ved atombombninger. Kernevåbnet var blevet ført ud i livet. Den menneskelige forstands mægtigste frembringelser, knyttet til navne som Pierre Curie, Marie Sklodowska-Curie, Ernest Rutherford, Niels Bohr, Louis de Broglie, Enrico Fermi og mange andre, var stillet i ødelæggelsens og dødens tjeneste. Mange blev grebet af mismod, og der begyndte endog at lyde røster for et forbud mod videnskabelig forskning, for nødvendigheden af at afstå fra videnskabeligt fremskridt i menneskelivets navn. Men det er umuligt at standse videnskabeligt fremskridt, eftersom dette er uadskilleligt knyttet sammen med social udvikling. Man skal ikke tale om forbud mod videnskabelig forskning, men om at holde op med at anvende den til skade for det menneskelige samfund.

Meget snart, 27. juni 1954, lærte folk i hele verden, at atomet kan tjene ikke blot ødelæggelse, men også skabelse, - tæt ved den lille by Obninsk i nærheden af Moskva var verdens første atomkraftværk blevet bygget og begyndte at levere strøm. Siden er der bygget snesevis langt større atomkraftværker, der leverer en mærkbar del af den elektriske energi, men mindet om denne betydningsfulde dag i mennneskehedens liv kan ikke slettes af vores erindring. Nu, hvor energikrisen truende har banket på mange kapitalistiske landes dør, bliver det klart for enhver af os, hvor vigtigt det er, at menneskeheden har udforsket intraatomare fænomener og tæmmet deres voldsomme kraft. Om ikke ret lang tid vil en stor del af den energi, der produceres på kraftværker, stamme fra atomets spaltning. Derved vil vi ikke blot spare organisk brændstof, men også bevare det som værdifuldt råstof til fremstilling af produkter, der er nødvendige i samfundet.

Menneskeheden har bevaret mindet om stolte drømme om flyvninger ud i verdensrummet. Legenderne om Gilgamesh, Daidalos og Ikaros, og eventyr hos næsten alle Jordens folkeslag har løftet menneskers tanke til Månen, Solen og stjernerne. Men for at drømmene kunne blive til virkelighed, krævedes en lang vej med videnskabelig søgen, hypoteser, konstruktion af kvantitative teorier og ingeniøropfindelser. Den første matematiske teori for en flyvning ud i verdensrummet blev fremlagt af en beskeden gymnasielærer i Kaluga Konstantin Tsiolkovskij allerede i slutningen af det 19. århundrede. Hans tanke skabte en fast basis og førte til mange ideer, uden hvilke en flyvning ud i verdensrummet simpelt hen ville have været umulig. Men for at nå frem til 4. oktober 1957 - dagen for opsendelsen af Jordens første kunstige sputnik - krævedes endnu mere end 50 års søgen og videnskabelig og teknisk skabende aktivitet.

Det første menneske hævede sig op i verdensrummet 12. april 1961, og hele verden fulgte med ængstelse, ophidselse og henrykkelse Jurij Gagarins flyvning. Særdeles mange mennesker følte hin uforglemmelige dag, at de ikke blot var borgere i deres eget land, men også 'jordboere', og at ethvert folks succes samtidig var deres succes. Denne følelse voksede, da vi alle i de lange dage 16.-24. juli 1969 med bankende hjerte fulgte de dristige kosmonauter Neil Armstrong, Edwin Aldrin og Michael Collins, der steg ud på overfladen af vor evige sputnik Månen. Hvem af os gennemlevede da ikke en ængstelse for deres skæbne og ønskede dem ikke en vellykket hjemkomst.

For at gøre flyvninger ud i verdensrummet, beherskelse af atomets energi og mange tusinde andre ting til virkelighed, kræves der et kolossalt tankearbejde i forskellige retninger, heriblandt på matematikkens område. Fra at have været et hjælpemiddel ved beregninger har matematikken forvandlet sig til en absolut uundværlig hjælper i alle de største forskningsopgaver i vor tid og er sammen med eksperimentet blevet erkendelsens mægtigste værktøj. Det har tilmed vist sig, at på bestemte etaper i udviklingen af vor viden er matematikken det eneste erkendelsesmiddel, og ligesom kirurgens skalpel gør den det muligt at trænge ind i tingenes indre egenskaber.

Matematikken spiller virkelig en fremtrædende rolle i moderne naturvidenskab og begynder at få stadig større betydning inden for økonomi, produktionsplanlægning og andre samfundsvidenskaber. Hvad der er årsag til dette, og hvad der giver matematikken så stor styrke, vil vi diskutere senere, og vi vil kunne overbevise os om, at der ikke er nogen mystik i dette, men at det er et resultat af tankens stadige og dybe arbejde, rettet mod et bestemt mål.

Matematikkens position i vor tid er langtfra den samme som ikke blot for hundrede, men selv for kun fyrre år siden. Den har forvandlet sig til et dagligdags forskningsinstrument i fysik, astronomi, biologi, ingeniørvæsen, produktionsplanlægning. Mange læger, økonomer og specialister inden for samfundsvidenskaberne mener, at yderligere fremskridt inden for deres discipliner uundgåeligt må føre til en bredere anvendelse af matematiske metoder, end man har set hidtil. Dér, hvor der selv for kort tid siden herskede én rent kvalitativ angrebsmåde ved udforskningen af fænomener, anvender man nu matematiske metoder og studerer de kvantitative lovmæssigheder, der er karakteristiske for disse fænomener. Resultatet af dette er blevet en dyberegående og mere alsidig indtrængen i de processer i naturen, økonomien og teknikken, der udforskes, og i sociale fænomener. Og jo mere storslåede erkendelsens forehavender er, hvad enten de angår mikro- eller makroverdenen, naturfænomener eller udviklingsprocesser i samfundsøkonomien, jo mere betydningsfuld bliver matematikkens rolle. Dette har allerede V.I.Lenin klart skildret, da han i 1909 i sit filosofiske værk 'Materialisme og Empiriokriticisme' beskrev tilnærmelsen 'til sådanne ensartede og enkle elementer i materien, hvis bevægelseslove tillader en matematisk behandling' som værende naturvidenskabens største resultat.

Nu er vi nået langt i udforskningen af mikroverdenen i sammenligning med begyndelsen af vort århundrede, og vi kan konstatere, at matematikkens betydning for erkendelsen af dennes særlige lovmæssigheder er vokset kraftigt. Det har tilmed vist sig, at mange af disse blev fundet på rent matematisk vis og ikke kunne opdages ved umiddelbare iagttagelser. Men for at matematikken kunne blive i stand til at spille sin rolle i udforskningen af processer i mikroverdenen, måtte den udvikle sine metoder og udvide sit arsenal af grundlæggende begreber.

Hvor store den videnskabelige erkendelses resultater end er på alle virkefelter, så kan vi dog bemærke en mængde problemer, der endnu ikke er tilstrækkeligt udforskede, og som kræver yderligere anstrengelser, til tider meget betydelige og langvarige. Det er tilstrækkeligt at nævne sådanne opgaver som en fuldkommengørelse af styringsprocesserne i økonomiske og teknologiske processer, optimal anvendelse af råstoffer ved fremstilling af industriproduktion, formindskelse af industriens skadelige indflydelse på naturmiljøet, udforskning af tankeprocesser, styring af undervisning, for at overbevise sig om, at menneskeheden har mere end nok at tage fat på. Vi begynder nu for hver dag, der går, klarere at forstå, hvor vigtige alle disse problemer er for menneskeheden.

Hvis vi tilstrækkeligt godt vidste, hvordan man skal anvende produktionsaffald, så ville vi ikke forurene naturen i den grad, som det sker nu, og samtidig ville vi forbruge produktionsmaterialer mere økonomisk. Allerede nu er det muligt at opnå en ganske væsentlig besparelse, hvis man anvender godt gennemarbejdede metoder til optimal materialeudnyttelse, til arbejdsfordeling mellem fabrikker og værksteder og til transportplanlægning. Det bør her bemærkes, at uden anvendelse af matematikken og dens metoder kan man hverken formulere eller løse opgaver i forbindelse med at finde frem til en optimal handlingsplan.

For samfundsøkonomien er det yderst vigtigt at nå til en mere fuldstændig forståelse af den mekanisme, der ligger til grund for tankeprocessen. I første række er det nødvendigt for at lette, fremskynde og hæve effektiviteten i undervisningsprocessen såvel hos børn som hos voksne og maksimalt at fremme opdagelsen af skabende evner hos et menneske. For det andet ville det åbne nye veje for helbredelsen af psykiske og somatiske sygdomme og ligeledes for deres forebyggelse. Men disse problemer er så komplicerede, at håbet om at finde en løsning rent eksperimentelt ifølge fremtrædende specialister er yderst ringe. Her må man også gå andre veje, i særdeleshed ved at lave matematiske modeller af disse processer og siden udlede logiske konsekvenser, der er tilgængelige for umiddelbar iagttagelse. Denne metode har vist sin berettigelse på mange videnskabelige felter - i fysik, astronomi og ingeniørvæsen. Der er ingen tvivl om, at den også vil vise sin berettigelse ved udforskningen af mere komplicerede processer i økonomi, produktionsplanlægning og samfundsøkonomi, processer i det højere nervesystem og lignende, så meget desto mere som den allerede har givet bemærkelsesværdige resultater i mange tilfælde.

Moderne videnskab kan ikke klare sig med kvalitative konklusioner, den har også brug for kvantitative lovmæssigheder, regler, udfra hvilke det ville være muligt at prognosticere processers forløb. Ikke mindre nødvendig end i videnskaben er en sådan præcis prognosticering på alle områder af samfundsøkonomien, eftersom det ellers hverken er muligt at forudse eller at beregne eller at styre optimalt (selve bestemmelsen af den optimale styring er umulig uden kvantitative metoder). Det er nu blevet tilstrækkeligt klart, at matematikken indtager en fremtrædende plads på alle niveauer i løsningen af samfundsøkonomiske spørgsmål, også selv om den ikke selv frembringer materielle værdier, men gør det muligt at opnå betydelige besparelser af arbejdskraft, driftstid for udstyret, produktionsmaterialer og transportudgifter.

# PRODUKTIONSPLANLÆGNING OG MATEMATIK

Et lands samfundsøkonomi udgør, som allerede nævnt, i vore dage et kompliceret system af indbyrdes forbundne områder. Således gør vækst i industriproduktionen det nødvendigt at forøge landbrugets vareproduktion. Dette stiller så igen nye krav til industrien om produktion af kunstgødning og landbrugsmaskineri, om transport og byggeri, blandt andet af lagerplads til landbrugsproduktionen. Samtidig bliver der også stillet krav til videnskaben, deriblandt til matematikken. Der melder sig spørgsmål om at finde frem til den optimale såningstæthed, de optimale normer for tilførsel af kunstgødning, fremavl af nye plantesorter, der har bedre egenskaber end andre. Men hvordan kan man finde ud af, at en ny sort for eksempel giver større udbytte end tidligere fremavlede? Til dette kræves en omhyggelig statistisk undersøgelse, der tager hensyn til mulige forskelle i markernes jordbundsforhold og ligeledes til klimatiske ændringer. I vor tid er der inden for matematisk statistik udarbejdet grundige metoder, der gør det muligt at give et objektivt svar på den slags spørgsmål.

Der opstår yderst interessante problemer af matematisk karakter i forbindelse med projektering og udnyttelse af landbrugsmaskineri. Sagen er den, at landbrugsmaskiner arbejder under vanskelige vilkår, og at sikre deres pålidelighed er en påtrængende opgave. Dette skal gøres uden at gøre konstruktionen for tung. Den anden opgave er at beregne de nødvendige reservedelslagre og værksteder for at sikre, at landbrugsmaskinparken kan fungere uden afbræk. Denne opgave vedrører i øvrigt ikke kun landbrugsmaskineriet, men også alle andre store økonomiske foretagender - bilparker, underafdelinger af den civile luftfart etc. Disse problemer er endnu ikke løst tilfredsstillende, og vort land lider enorme tab såvel ved overproduktion af reservedele som ved mangel på dem. Men opgaven kompliceres yderligere ved, at der kan blive produceret et tilstrækkeligt antal reservedele, men deres fordeling på regioner og enkelte brug kan være utilfredsstillende, og man møder ligeledes ofte det fænomen, at de enkelte brug af frygt for at være uden reservedele indkøber langt flere, end de har brug for. Dette afspejler sig uundgåeligt på markedets tilstand, og der opstår en kronisk mangel.

Ukomplicerede beregninger viser, at ved følgende aritmetiske optælling, som ustandseligt anvendes i praksis, vil halvdelen af behovet for reservedele ikke blive imødekommet rettidigt. Lad os antage, at vi har N maskiner, og at en bestemt del i løbet af et år i gennemsnit skal udskiftes k gange. Så skal industrien sørge for en produktion på kN eksemplarer af den pågældende reservedel i løbet af et år. I virkeligheden er denne fremgangsmåde utilfredsstillende, eftersom den ikke tager hensyn til den tilfældige fordeling af de tidspunkter, hvor den pågældende del går i stykker. Her skal anvendes helt andre metoder, der tager hensyn til specifikke træk ved produktionen og ved opståelsen af behov for reservedele.

Produktionsplanlægning stiller en mængde krav til matematikken. I vor tid er der udarbejdet en række effektive matematiske metoder til at tilfredsstille disse krav. Vi vil opregne nogle af de opgaver, der typisk opstår.

Først og fremmest opstår nødvendigheden af at sikre maksimal effektivitet i udnyttelsen af produktionsudstyr og arbejdskraft, at mindske transport mellem forskellige værksteder og at nedskære den arbejdscyklus, som produktet gennemgår. Endvidere bør manuelt arbejde begrænses mest muligt, og arbejderne bør sikres sådanne arbejdsvilkår, at sundhedsfarlig påvirkning er udelukket. Arbejdet skal være således organiseret, at tab af produktionsmaterialer udelukkes, og at produktkvaliteten er høj.

Hver af de nævnte retninger inden for produktionsplanlægning nyder stor opmærksomhed, og der er udarbejdet matematiske forskningsangrebsmåder for dem. Der er opstået en speciel disciplin 'fartplansteori', der studerer spørgsmålet om arbejdsfordeling blandt produktionsudstyret. I 1939 udkom de første arbejder, der beskæftigede sig med løsningen af problemet med optimal materialeudnyttelse, og de førte til dannelsen af en ny matematisk teori - 'lineær og ikke-lineær programmering'. En undersøgelse af arbejdsvilkårenes indflydelse på personalets sundhed kræver en seriøs anvendelse af metoder fra matematisk statistik. På denne måde har man fastslået de skadelige påvirkninger fra konstant støj, vibrationer, forurenet luft, benzindampe etc. De herved opnåede konklusioner er af stor værdi ved vedtagelsen af produktionsmæssige beslutninger om udarbejdelse af nye konstruktioner, der forårsager mindre vibrations- eller støjmæssig påvirkning af det personale, der betjener dem, og om flytning af visse produktionstyper (farmaceutiske, lak og maling etc.) bort fra boligområder.

Vi vil nu standse op for at behandle et yderst vigtigt problem lidt mere udførligt, - sikring af en høj kvalitet i den færdige produktion. Dette problem er til stadighed genstand for parti- og regeringsledernes opmærksomhed, eftersom en produktion af dårlig kvalitet foruden materielle tab er til ubodelig skade for det pågældende varemærke ved at ødelægge dets konkurrencedygtighed på det indre og det ydre marked.

Matematikken har nu udarbejdet effektive metoder såvel til kvalitetskontrol af færdige produktpartier som til styring af produktkvaliteten i produktionsprocessen. Metoderne til kvalitetskontrol af den færdige produktion har fået det fælles navn metoder i modtagelseskontrol. Både den ene og den anden type metoder har fundet anvendelse på en række områder af vor industri, specielt inden for radioelektronik og bilindustri, og har gjort det muligt for vort land at spare mange milliarder rubler, maskintid, arbejde, materialer, elektricitet og transportressourcer.

I en række produktionsgrene er det ikke muligt at foretage kvalitetskontrol af hver enkelt fremstillet genstand, enten fordi der fremstilles for mange genstande, og en fuldstændig kontrol ville kræve en hel hær af kontrollører, eller fordi kontrol påfører genstandens kvalitet uoprettelig skade (f.eks. kvalitetskontrol af tændsatser). Som følge heraf må man nøjes med kvalitetskontrol af en del af produkterne. En sådan kontrol kaldes stikprøvekontrol eller statistisk kontrol. Naturligvis ligger den teoretiske basis for alle stikprøve-kvalitetskontrollens regler i principper og resultater fra sandsynlighedsregning og matematisk statistik.

Styring af produktkvaliteten i produktionsprocessen kræver anvendelse af mere forskelligartede matematiske metoder end kvalitetskontrol af den færdige produktion. I første række er det nødvendigt at udarbejde et system af parametre, ud fra hvilke man kan vurdere, om tiden er inde til at udløse en styreimpuls i den teknologiske proces. Denne impuls skal udløses på et tidspunkt, hvor produktionen stadig har en tilstrækkelig høj kvalitet, men der er ved at opstå en tendens til dens forringelse. Desuden må styreimpulserne ikke være for hyppige for ikke at bremse produktionsprocessen og ikke unødigt fordyre produktionen.

Det er selvindlysende, at automatisk styring af produktkvalitet forudsætter konstruktion af automater, der kontrollerer den i henseende til de parametre, der øver størst indflydelse på kvaliteten.

Udarbejdelsen af systemer til styring af produktkvalitet førte til formuleringen af en række nye matematiske spørgsmål og var en af bevæggrundene til udarbejdelsen af en ny disciplin: kontrolteori for stokastiske processer.

Min personlige erfaring fra arbejdet på fabrikker med spørgsmål vedrørende kvalitetskontrol og styring af kvaliteten i fremstillingsprocessen har overbevist mig om, at man ikke på noget trin i den teknologiske proces må tillade en svækkelse i fremstillingskvaliteten. Som regel vil følgerne af fejl, som man har ladet passere i én operation, kun forstærkes i følgende operationer.

# TEORETISK OG ANVENDT MATEMATIK

Hvis man gennemgår skolernes læseplan i matematik, ender man med at mene, at matematikken med dens ubevægelige begreber ikke er i stand til at rumme den evigt vekslende natur i al dens mangfoldighed. Den forudgående fremstilling viser til en vis grad fejlagtigheden i sådanne forestillinger og løfter en flig af det slør, der for langt de fleste mennesker skjuler den matematiske erkendelses overflod af metoder, en mangfoldighed af videnskabelige undersøgelser, de rigeste muligheder for at udforske processer, dvs. ændring af fænomeners karakteristika i tid. Men man må indrømme, at den fremstillingsform, matematikken anvender, - hvor abstrakte begreber ikke fyldes med livsnært indhold, og konklusioner ikke finder anvendelse i konkrete opgaver fra det praktiske liv i hele dets mangfoldighed, - uundgåeligt fremmer udviklingen af det nævnte synspunkt og styrker deres position, som i matematikken snarere ser en intellektuel leg end løsningen af spørgsmål, der er yderst nødvendige for livet og videnskaben og det menneskelige samfunds fremskridt. Denne holdning fremmes også af visse matematikere, der hævder, at de ikke udforsker selve virkeligheden, men blot matematiske strukturer, uden samtidig at forklare, hvilket forhold disse strukturer står i til processer i den verden vi lever i. Man kan tilmed ofte høre højtstående videnskabsmænd udtale, at matematiske begreber og problemer opstår uafhængigt af det praktiske livs behov, og at det kun skyldes en absolut uforståelig forudbestemmelse, at matematikkens konklusioner overraskende godt svarer til lovmæssigheder i den virkelige verden, der omgiver os.

I virkeligheden støder vi på matematikere fra to væsensforskellige retninger - teoretikere, der udforsker matematiske lovmæssigheder i sig selv, uden forbindelse med praktiske spørgsmål, - og anvendte matematikere. Sidstnævntes interesser bestemmes i første række af det praktiske livs spørgsmål. De udnytter arsenalet af matematiske ideer og resultater til at opnå indholdsrige konklusioner om bestemte fænomener, hvad enten de opstår inden for økonomien, produktionen eller den menneskelige psyke. Selvfølgelig er det langtfra altid, at matematikken råder over de begreber og ideer, der skal bruges til en sådan undersøgelse. I så fald må matematikeren fra den anvendte retning søge efter de nødvendige metoder og om nødvendigt selv udarbejde nye matematiske ideer, nye grene af den matematiske videnskab.

Der findes selvfølgelig også en tredje type matematikere, der beskæftiger sig med såvel rent teoretiske som anvendte problemer. Netop denne type omfatter så store videnskabsmænd som Archimedes, Isaac Newton, L. Euler og A.-L.Cauchy, Henri Poincaré og P.L.Tjebysjov. Men også her kan man iagttage to klart forskellige tendenser, idet nogle matematikere har nogle matematiske metoder på lager, som de søger anvendelse for, mens andre, der har et bestemt stort problem fra naturvidenskaben eller fra hverdagens praksis for øje, søger den matematiske beskrivelsesmetode, som mest nøjagtigt gengiver det virkelige problems væsen, dets natur. Til den første type matematikere kan man måske henregne A.-L. Cauchy, der har gjort meget for elasticitetsteorien. Til den anden ville jeg derimod henregne Isaac Newton, L. Euler og P.L. Tjebysjov. Selvfølgelig er også denne underinddeling ret vilkårlig, eftersom det tit sker, at en matematiker i nogle tilfælde opfører sig som repræsentant for den ene psykologiske type, i andre tilfælde - for den anden.

Til matematikere på et rent teoretisk plan, for hvem kun den matematiske opgave er væsentlig, og som slet ikke interesserer sig for dens mulige forbindelser med øvrige områder af videnskaben eller praksis, ville jeg henregne K. Weierstrass og N. Bourbaki (en gruppe franske matematikere, der har gjort meget for en modernisering af matematikken). Antallet af repræsentanter for den rent teoretiske retning er i vor tid meget stort, og det er meget let at nævne et tocifret antal navne på fremtrædende repræsentanter for matematikken i vor tid, som overhovedet ikke interesserer sig for spørgsmål om anvendelsesmuligheder.

Det er min faste overbevisning, at for videnskabens udvikling, for vore kundskabers fremskridt er det vigtigt, at der findes repræsentanter for skabende talenter af enhver retning og for videnskabsmænd af alle psykologiske typer. Men det er altid på sin plads at spørge, hvordan det procentuelle forhold skal være mellem abstrakt-teoretiske og anvendte matematikere. Efter min mening må vi ikke lade være med at vise vores ungdom, hvor spændende en matematisk udforskning af anvendte problemer er, og mangfoldigheden og dybden af de rent teoretiske problemer, som de fører med sig. I vor tid er det særligt vigtigt at lede en betydelig del af de matematiske studenter i retning af anvendte studier. Det er vigtigt for samfundet, men det er også vigtigt for de unge mennesker selv, eftersom der sker en udvidelse for dem af kredsen af spørgsmål, som de kan beskæftige sig med, ikke blot for at hæve deres kulturelle niveau, men også for at anvende deres skabende kræfter og evner i samfundsøkonomien.

Man siger tit ikke blot om matematikere, at én er teoretiker, og en anden er anvendt matematiker, men også om matematikken selv, at nogle af dens grene er rent teoretiske, og andre er anvendte. I virkeligheden er forholdet mere kompliceret, og forestillingerne om forskellige matematiske grenes anvendelsesmuligheder er ikke konstante, men er underkastet betydelige forandringer i tidens løb. Indtil begyndelsen af det 18. århundrede kunne hele den anvendte matematiks inventar reduceres til aritmetikkens enkleste regler og geometriens basis. Hvad krævedes der dengang? At man kunne udføre mellemregninger i handelsoperationer, meget tilnærmelsesvis opgøre de nødvendige forråd til en hærs forsyning, beregne arealer, rumfang og længder. Til navigationsspørgsmål behøvedes også elementer fra sfærisk geometri, som ligeledes udnyttedes i ret vidt omfang i astronomien. Vi har dermed opregnet nogenlunde alle behovene i den tids samfundsliv. Vi gør opmærksom på, at også matematikken selv egentlig begrænsedes alene til disse kundskabsområder. Talteori, der var blevet betydeligt udviklet allerede i Oldtidens Grækenland hos Diofant, var det samme som aritmetik, men studerede væsentlige egenskaber ved hele positive tal. Sandsynlighedsregning, matematisk analyse og analytisk geometri befandt sig dengang på fosterstadiet.

Det 18. århundrede bragte en voldsom udvidelse af anvendt matematiks inventar af midler, da grunden til differential- og integralregning blev lagt gennem Newtons og Leibniz' arbejder og ligeledes gennem deres forgængeres arbejder - Cavalieri, de Fermat, Barrow og andre. Stimulerende på deres fremkomst virkede formuleringen af vigtige opgaver i forbindelse med studiet af bevægelse, specielt nødvendigheden af at give en præcis definition af begrebet et punkts hastighed på et givet tidspunkt. Matematisk analyse, der på den tid inkluderede differential- og integralregning og den første begyndelse til en teori for differentialligninger, indgik i inventaret af anvendt matematiks aktuelle midler. En nødvendig betingelse for udviklingen af den matematiske analyse var analytisk geometri, skabt af René Descartes, og hvis forfædre var de ukendte mennesker, der byggede de ægyptiske pyramider, og som i vidt omfang udnyttede retvinklede koordinater eller, som man nu siger, cartesiske koordinater. Hele det 18. århundrede gik med at fuldkommengøre de nye matematiske begreber, ideer og tankeretninger, og ligeledes med at udvide området for anvendelse af den matematiske analyse. I første række blev mekanikken udviklet, for hvilken Newtons og Leibniz' matematiske analyse var en længe ventet metode. Astronomien, der fortrinsvis studerede planetbevægelser, fik på den tid strålende muligheder for fremgang og udnyttede dem fremragende. Forsøg på med matematiske metoder at studere hydrodynamiske fænomener (Daniel Bernoulli og Leonhard Euler), varmeudbredelse (J.-B.-J. Fourier, Simeon Poisson og andre) og faste legemers elasticitet (A.-L. Cauchy, Louis Navier og Georg Stokes) førte i løbet af det 18. og første halvdel af det 19. århundrede til, at teorien for partielle differentialligninger blev føjet til mængden af anvendte matematiske midler. Det bør her tilføjes, at denne teori selv udviklede sig i nær tilknytning til opgaver inden for mekanik og matematisk fysik.

Vort århundrede har ført til en kraftig forøgelse af de områder af matematikken, der har fået anvendt betydning. Først og fremmest viste det sig, at udviklingen af vore forestillinger om rum og tid betød, at man blev nødt til at gå bort fra overbevisningen om, at der kun er én geometri i verden. Lobatjovskijs og Riemanns geometrier, der hidtil havde været rent teoretiske konstruktioner, fik stor anvendt betydning. Videre viste det sig, at fysikkens udvikling behøvede nye matematiske, specielt geometriske, forestillinger. Dette stimulerede yderligere forskninger i denne retning. For at konstruere anskuelige modeller af fænomener i forbindelse med molekylesystemers udvikling blev det nødvendigt at anvende flerdimensionale rum og siden også rum af uendelig dimension. Yderligere blev det nødvendigt at konstruere en matematisk analyse for rum af uendelig dimension - funktionalanalyse.

Teorien for operatorer, dvs. teorien for afbildninger af et rum ind i et andet, har vist sig at være et meget effektivt instrument i moderne fysik.

Opgaver inden for elektroteknik, aerodynamik og elasticitetsteori har fra deres side bevirket, at teorien for komplekse funktioner er blevet en anvendt disciplin.

Allerede i forrige århundrede fandt sandsynlighedsregning anvendelse i teorien for målefejl, ballistik, teorien for luftarters kinematik, biologi. Nu er sandsynlighedsregning et af de grundlæggende matematiske forskningsredskaber i langt de fleste opgaver inden for biologi, telekommunikationsteori, fysik, produktionsplanlægning, økonomi, sociale processer.

Endelig bemærker vi, at matematisk logik, der oprindelig udvikledes som et middel til at begrunde matematikken, nu har fået mangfoldige yderst vigtige anvendelsesfelter. Vi kan blot minde om den udbredte udnyttelse af matematisk logik ved programmering af opgaver for edb-maskiner. Vi kan også nævne udarbejdelsen af programmer til automatisk styring af processer.

Det her sagte kan opsummeres således: i vor tid er det svært at pege på nogen gren af matematikken, som ikke finder anvendelse i det praktiske livs enorme mangfoldighed af problemer. Tilsyneladende har opdelingen i teoretisk matematik og anvendt matematik ikke længere nogen mening. Man må sikkert sige, at det ikke er matematikken, men matematikerne, der kan opdeles efter deres interesser og skabende retning i teoretikere og anvendte matematikere. Blandt teoretiske matematikere er der nogle, der betragter løsningen af vanskelige opgaver, som tidligere generationer har efterladt uløste, som målet for deres videnskabelige liv. Disse opgaver interesserer dem i sig selv, uden forbindelse ikke blot med praktiske opgaver, men også med udviklingen af matematikken i sin helhed. Vi vil gerne bemærke, at der er brug for matematikere af denne type ikke blot i forbindelse med, at de er nødt til at overvinde enorme vanskeligheder, men også i forbindelse med nødvendigheden af at søge helt nye forskningsmetoder, der kan udnyttes ved løsningen af en mængde andre problemer.

Vi vil gerne sige, at der kræves særdeles meget af den anvendte matematiker: han skal begribe selve den anvendte opgaves væsen, kunne udvælge eller på ny udarbejde det matematiske apparat, der bedst afspejler fænomenets natur, konstruere en matematisk model af den proces, der skal udforskes, udlede nødvendige konsekvenser og finde frem til deres virkelige fortolkning, og endelig skal han kunne efterprøve graden af overensstemmelse mellem det virkelige fænomen og hans konstruerede model og have mod til at afstå fra sin model, hvis den ikke svarer til tingenes natur.
Af enestående vigtighed for videnskabens fremskridt er den type matematisk skaben, som stræber efter med matematiske midler at erkende fænomeners natur, som kan finde den nødvendige metode hertil, og som kun betragter en praktisk opgave som et udgangspunkt for almentmatematiske konstruktioner, der er i stand til at løse ikke blot den givne opgave, men også et stort antal andre.
Netop en sådan holdning udvider videnskabens grænser og gør det muligt for mennesket at fuldføre sin sejrsgang fra uvidenhed til viden.

## MATEMATISERINGEN AF VIDENSKABERNE

Astronomer og fysikere kom tidligere end repræsentanter for andre videnskaber til den overbevisning, at de havde ikke blot til udregninger brug for matematiske metoder, men også som et af de grundlæggende instrumenter til at trænge ind til det væsentlige i de lovmæssigheder, de studerede. Ingeniørvæsen anvendte også i vid udstrækning matematiske metoder. I en gammel lærebog i artilleri står der, at det første instrument som artilleristen får brug for, er en passer. Skibsbygning støttede sig igennem årtusinder kun på erfaringen og århundredgamle traditioner. I 1696 kunne den engelske skibsbygger Anthony Deany ved bygningen af skibet 'Rupert' opgøre vægten og lastens fordeling inden bygningen, udregne deplacementet og på dette grundlag forudsige skibets dybgående inden søsætningen. Tilmed lod han udskære porte (åbninger i skibssiden til skydning med artillerivåben) allerede på stabelen, idet han benyttede sig af de foretagne beregninger. Udførelsen af arbejder efter beregninger, og ikke efter kontrol af skibets position i vandet, fremkaldte på den tid almindelig forundring. Senere er sådanne beregninger gledet ind i hverdagsbrug; de har forenklet bygningsteknologien og fremskyndet og billiggjort bygningsprocessen.

I vor tid fuldfører matematiseringen af videnskaberne en særegen sejrsmarch. Mange videnskabelige og praktiske områder, der lige til den seneste tid har befundet sig langt fra en anvendelse af matematiske forskningsredskaber, bestræber sig nu ihærdigt på at indhente det forsømte. Årsagen til dette er selvfølgelig ikke en forbigående modestrømning, men den omstændighed, at et rent kvalitativt studium af naturfænomener, økonomi, medicin, produktionsplanlægning og styring ofte viser sig utilstrækkeligt. Hvordan kan man automatisere ståludsmeltnings- eller olieraffineringsprocessen uden at kende disse processers præcise kvantitative lovmæssigheder? Hvordan kan man få et telekommunikationssystem til at fungere rationelt uden at kende hverken de kvantitative lovmæssigheder for indgangen af opkald fra abonnenterne eller varigheden af betjeningen af disse opkald? Dette er grunden til, at automatisering af teknologiske processer uundgåeligt gør det nødvendigt at udnytte matematikken og omvendt tvinger matematikken til at være opmærksom på løsningen af nye spørgsmål og på udarbejdelsen af nye metoder.

Det er velkendt, at vor viden ikke blot udvider sig i bredden, men også i dybden og bliver mere præcis. Meget, der tidligere er blevet studeret og forekom at være godt udforsket for sin tid, kræver i vor tid nye anstrengelser for at bringe vores forestillinger om emnet i overensstemmelse med det praktiske livs og vores utilstrækkeligt tilfredsstillede nysgerrigheds fordringer. Der stilles især større krav om, at man skal finde frem til kvantitative forbindelser mellem fænomener, og at man skal finde lovmæssigheder for fænomener, som er udtrykt i en præcis kvantitativ form. Dette gør selve livet og vor daglige praktiske virksomhed til en nødvendighed.

Omhyggelige iagttagelser viser, at med den fart, som teknologiske processer nu forløber med, er den menneskelige psyke ikke længere i stand til rettidigt at træffe beslutning om deres videre forløb og på grundlag af modtagen information foretage den nødvendige styring. Som følge heraf kommer styringen med forsinkelse. En sådan forsinkelse fører enorme materielle tab med sig, eftersom udstyrets produktivitet formindskes og den færdige produktions kvalitet forringes. Det har vist sig, at ved manuel styring af papirproduktion er et menneske kun i stand til at holde produktionen i nærheden af det ønskede niveau ca. 10% af tiden. Med fuld styrke opstår den påtrængende nødvendighed af at overdrage styringen af produktionsprocessen til en hurtigtvirkende automat. Men et automatisk anlæg er ikke selv i stand til at løse logiske opgaver og ud fra oplysninger om produktionsprocessens tilstand at drage slutninger om dennes forløb, om ændringer i temperaturforholdene, den kemiske sammensætning, hastigheden osv. En automat 'forstår ikke' ordrer, der har kvalitativ karakter, som f.eks. 'gør det bedre', 'vær mere nøjagtig i forarbejdningen'; den kræver strenge kvantitative ordrer som f.eks.: hvis processens temperatur er sådan og den kemiske sammensætning af råstoffet sådan, så skal processens hastighed ligge mellem $\upsilon$ og $\upsilon+L$, og hvis temperaturen overstiger $t^0$, så skal opvarmningen af blandingen straks dæmpes. Men for at kunne sige alt dette er det nødvendigt at udarbejde en kvantitativ teori for den proces, der skal styres, og ud fra denne lave et handlingsprogram for den styrende automat. Således gør fremskridt inden for teknikken det nødvendigt at inddrage matematikken til løsning af væsentlige tekniske opgaver.

Der opstår en mængde af den slags opgaver - fra styring af kemiske processer og valseværker til styring af elektronisk teknologi og udsmeltning af superrene metaller. Men dette er langtfra alt. Det er vigtigt også at lære at overdrage styringen af flyvemaskiner og andre objekter, der bevæger sig, til automater. Denne opgave opstod allerede i 30rne, og i vor tid kan man end ikke forestille sig virkeliggørelsen af langdistanceflyvninger fra et kontinent til et andet uden en tilfredsstillende løsning af denne opgave.

Det er imidlertid ikke rationelt at konstruere en teori for styringen af hver enkelt proces for sig, eftersom de alle har meget til fælles. Spørgsmålet opstod naturligvis, hvordan man kunne skabe en generel styringsteori, som det ville være muligt senere at udnytte i hundredvis af enkelte tilfælde, kun med tilføjelse af de nødvendige præciseringer, der er en følge af en given proces' særlige egenskaber. En sådan matematisk opgave opstod med fuld styrke i midten af vort århundrede og tiltrak mange matematikeres opmærksomhed i alle udviklede lande. De første positive resultater blev opnået af R. Bellman og hans medarbejdere og ligeledes af L.S. Pontrjagin og hans elever. Deres ideer og resultater dannede grundlag for styring af mange processer af kolossal betydning. Således stillede teknikkens fremskridt krav om skabelsen og udviklingen af en matematisk teori, der igen fremskyndede teknikkens egen fremgang.

Det er i praksis umuligt at give en fuldstændig beskrivelse af matematikkens rolle i udviklingen af andre videnskaber og på områder for praktisk virksomhed. Ikke blot ændrer de spørgsmål sig, som kræver en omgående løsning, men også karakteren af de opgaver, der skal løses, ændrer sig. Når vi laver en model af en virkelig proces, så forenkler vi den uundgåeligt og studerer et tilnærmet skema. Efterhånden som vor viden bliver mere præcis, og vi finder ud af, hvilken rolle tidligere upåagtede faktorer spiller, lykkes det at gøre den matematiske beskrivelse af processen mere fuldstændig. Man kan ikke sætte grænser for præciseringsproceduren, ligesom man ikke kan sætte grænser for selve kundskabens udvikling. Matematiseringen af videnskaben består ikke i at udelukke iagttagelse og eksperiment fra erkendelsesprocessen. De er uundværlige bestanddele af et fuldgyldigt og alsidigt studium af fænomener i verden omkring os. Meningen med matematiseringen af videnskaberne er at udlede konsekvenser, der er tilgængelige for umiddelbar iagttagelse, af præcist formulerede præmisser; at gøre komplicerede og indviklede virkelige processer overskuelige. Ved hjælp af et matematisk apparat er det muligt ikke blot at beskrive fastslåede kendsgerninger, men også at forudsige nye lovmæssigheder, at opstille prognoser for fænomeners forløb og dermed få mulighed for at styre dem. Hvis disse forudsigelser går i opfyldelse, så styrker teorien sin position og fortsætter med at levere nye konklusioner.

Men eftersom en matematisk teori for et eller andet virkeligt fænomen altid er en tilnærmelse, vil der under alle omstændigheder før eller senere indtræde et tidspunkt, hvor en given konsekvens af teorien ikke bekræftes af praksis eller ved et eksperiment, eller der sker det, at en given kendsgerning ikke finder forklaring i teorien. I så fald er det nødvendigt at foretage en revision af teoriens udgangspræmisser og en ændring af teser, der tidligere forekom urokkelige. En sådan revision fører til en ny teori, der er i stand til både i bredden og i dybden at trænge bedre ind i de studerede fænomeners struktur.

Matematiseringen af videnskaberne består ikke blot og ikke så meget i anvendelsen af færdige matematiske metoder og resultater, som i at man begynder en søgen efter det specifikke matematiske apparat, der tillader en så fuldstændig og præcis beskrivelse som muligt af den kreds af fænomener, der interesserer os, og desuden gør det muligt at udlede nye konsekvenser af denne beskrivelse for også at udnytte dem i praktisk virksomhed. Dette var, hvad der skete i den periode, da studiet af bevægelse blev en påtrængende nødvendighed. Netop da skabte Newton og Leibniz grundlaget for matematisk analyse, som indtil i dag er anvendt matematiks vigtigste instrument.

Der ligger en lang proces forud for, at en praktisk opgave kan blive objekt for en matematisk undersøgelse. Til dette brug behøves en formulering af, hvad det egentlig er, forskeren ønsker at opnå. Vi vil prøve at konkretisere dette krav med et eksempel. De seneste år har en række lærere tit fremsat den tanke, at undervisningsprocessen skal opbygges sådan, at læreren styrer den bedst mulig. Hvad betyder dette? Hvilken mening skal man lægge i dette ønske? For man kan jo tilstræbe, at de bedste elever i en klasse gik hurtigere frem i indlæringen af et fag. Men man kan også kræve noget andet, nemlig at de bedste elever ikke blot tilegnede sig læseplanens materiale hurtigere, men at de også kom til at forstå de præmisser, ved hvis hjælp det er lykkedes hele menneskeheden at udforske den pågældende kreds af fænomener. Vi kan også tilstræbe, at alle elever tilegnede sig det pågældende fag på den foreskrevne tid, selv om også det skulle gå ud over hensynet til et lille antal særlig gode elevers interesser. Hvilken retning skal man vælge at styre i og anse for den bedste?

Man kommer til stadighed ud for denne type vanskeligheder, og man må alt efter det opstillede mål anse styring i den ene eller den anden betydning for optimal. Således kan vi ved opsendelsen af en rumstation til Mars f.eks. forfølge disse mål: 1) at nå Mars hurtigst muligt, 2) med minimalt brændselsforbrug. Disse to mål fører principielt til forskellige løsninger.

Man kan foreslå særdeles mange varianter for styringen af en proces. Men vi skal i en bestemt forstand finde den bedste eller, som man nu siger, den optimale styring. Hvordan gør man det? Ved på forhånd at afprøve alle varianterne, den ene efter den anden? Dette fører åbenbart ikke til målet, eftersom en sådan fremgangsmåde tager for lang tid og ikke giver sikkerhed for, at det er lykkedes os at finde den optimale løsning. Der er kun en eneste mulighed, - at konstruere en matematisk teori og søge efter den ønskede løsning ved at udnytte den tilsvarende matematiske formalisme. Når den matematiske side af sagen er udarbejdet, opstår spørgsmålet om en kontrol af teoriens overensstemmelse med virkelige fænomener. Det er klart, at en teori, der ikke fører til en god overensstemmelse mellem resultater af iagttagelser, og en prognose, der er opnået på basis af teorien, trænger til at blive revideret. Det vil vi tale om senere, i afsnittet 'Matematiske modeller', eftersom dette spørgsmål selv har principiel betydning for videnskabens udvikling.

For at styre må man støtte sig til en bestemt mængde oplysninger om processens forløb og om de parametres tilstand, der bestemmer den, på det tidspunkt, der interesserer os. Men hvilken og hvor megen information skal man indsamle, og hvordan udnytter man den rationelt? Desuden, hvad vil informationsmængde sige? Når vi spørger 'hvor megen', så er det jo ensbetydende med mængde. Alle disse spørgsmål er virkelig opstået i videnskaben og har dannet grundlag for skabelsen af en stor og indholdsrig teori, der kaldes informationsteori. Som altid udvikler en teori sig ikke pludseligt, på én gang, men har brug for en lang periode til sin fremkomst og opvækst. Det var også tilfældet med informationsteori. Nødvendigheden af at videregive oplysninger opstod for meget længe siden for menneskeheden, og allerede i en fjern fortid udtænkte man - foruden talesprog - talrige metoder, heriblandt lys- og lydsignaler, skrift og senere bogtrykning. Men alt dette gjorde det endnu ikke nødvendigt at skabe en speciel teori. Dette skete først, da nogle tiårs brug af telegraf- og telefonsystemer førte til forsøg på en maksimal udnyttelse af systemernes net og dermed til, at man undersøgte, hvor megen information en eller anden meddelelse bærer, og hvilke elementer der er overflødige. Et betydeligt skridt fremad i konstruktionen af et system af grundlæggende begreber og opnåelsen af de første fundamentale resultater blev gjort i begyndelsen af 40rne af den fremragende amerikanske videnskabsmand Claude Shannon. Siden har denne teori gennemgået en betydelig udvikling såvel på et matematisk plan som med hensyn til seriøs anvendelse i mange videnskabsgrene.

Det bør her nævnes, at begrebet informationsmængde og måder at måle den på var bogstavelig talt en åbenbaring for mange forskningsretninger. Det viste sig, at med indførelsen af dette begreb lykkedes det for Claude Shannon at foretage det skridt, som både den tekniske udvikling og videnskaben selv i den grad havde brug for. Det blev muligt at foretage en kvantitativ sammenligning af forskellige måder at kode den information på, der skulle videregives, og at udvælge den metode, der var bedst i en eller anden forstand.

Således fandt man ud af, at man til en vis grad kunne forbedre de metoder til kodning af alfabetets bogstaver i form af en følge af streger og prikker, som anvendes i telegrafien, hvis man blot tog hensyn til sprogets statistiske egenskaber og anvendelsesfrekvensen i sproget af forskellige bogstaver. Det lykkedes at sammenligne de forskellige sanseorganers muligheder med hensyn til perceptionshastighed.

Informationsteori, der er et resultat af vor tids videnskabelige og tekniske fremskridt, giver selv dette fremskridt et yderligere skub, idet den afslører nødvendigheden af at gøre vor viden mere fuldkommen og anviser muligheder for dette. Det viste sig, at matematikken selv, endog i dens klassiske dele, også modtog nye udviklingsimpulser fra informationsteori.

Studiet af, hvordan telefonnettet fungerede i begyndelsen af vort århundrede, stillede en medarbejder ved Københavns telefonselskab, A.K. Erlang, over for en række særegne opgaver, der ikke tidligere var dukket op i videnskaben. Det drejede sig om at lære på forhånd at beregne telefonnettenes kapacitet, når der ikke måtte være risiko for udbredte forsinkelser af en abonnents forbindelse med det ønskede nummer. De vanskeligheder, der opstår i denne forbindelse er velkendte, - anmodninger fra abonnenter om forbindelse indløber på tilfældige tidspunkter, varigheden af en påbegyndt samtale er ukendt og kan variere inden for særdeles vide grænser. Forsøg på at tælle abonnenterne, idet man gik ud fra den gennemsnitlige længde af tidsrummet mellem på hinanden følgende opkald, førte ikke til tilfredsstillende resultater. Indflydelsen fra den tilfældige spredning af disse størrelser viste sig at være den afgørende faktor. Det er umuligt at finde en fornuftig løsning, hvis man ikke tager hensyn til denne så at sige dobbelte tilfældighed. Den første dette lykkedes for, var A.K. Erlang. Dermed blev han grundlægger af nye videnskabelige forskningsretninger såvel inden for telekommunikationsteori som inden for matematikken, hvor hans arbejder kom til at danne grundlag for et nyt kapitel i anvendt sandsynlighedsregning - teorien for ventetider (køteori - på engelsk, teorien for massebetjening - på russisk). Desuden blev A.K.Erlangs opgaver en af kilderne til en generel teori for stokastiske processer.

Der gik nogle få år, og det viste sig, at nye problemer - hverdagsproblemer, ingeniørproblemer, problemer inden for produktionsplanlægning og naturvidenskab - førte til beslægtede opgaver. Dermed var det påvist, at det var lykkedes Erlang at komme ind på spørgsmål, der ikke var af speciel, men af meget generel betydning. Og i vore dage er der virkelig et stort antal matematikere, der beskæftiger sig med disse problemer, mens de opretholder en meget tæt kontakt med repræsentanter for anvendte tankeretninger. Herved opnår man en næsten øjeblikkelig korrigering af formuleringen af opgaver af matematisk karakter og af anvendte anbefalinger med henblik på løsningen af umiddelbart praktiske behov.

Lad os standse op ved nogle af de opgaver, der vender tilbage. I forbindelse med fremkomsten af automatiserede maskiner og mekanismer i 30rne fik man mulighed for at pålægge en arbejder at betjene mere end én maskine. Dette gjorde det muligt at udnytte arbejdstiden mere rationelt, men samtidig skabte det en forudsætning for maskineriets stilstand. Mens arbejderen bragte et aggregat i arbejdsklar stand, kunne et andet gå i stå. Her befandt forskeren sig igen i en situation, hvor det var nødvendigt at tage hensyn til den kendsgerning, at de tidspunkter, hvor maskineriet kræver arbejderens opmærksomhed, er tilfældige, ligesom også varigheden af arbejdet med at bringe maskineriet i arbejdsklar stand igen.

I begyndelsen af 40rne opstod der lignende opgaver inden for kernefysikken i forbindelse med studiet af geigertælleres fejlvisninger og ved studiet af radioaktive spaltningsfænomener. Senere forøgedes mængden af anvendelsesområder for den teori, der startede med Erlangs undersøgelser, som en snebold, - den fandt anvendelse i produktionsplanlægning og handelsnet, ved driften af datamater, kollektiv transport, lufthavne og havne osv.

I næste afsnit vil vi betragte et af disse eksempler lidt mere indgående. Foreløbig kan vi bemærke, at matematiseringen af vor viden og vort virke i betydelig grad hænger sammen med, at livet selv tvinger os til at søge efter kvantitative (matematiske) modeller af de fænomener, vi studerer, og på basis af dem drage vigtige videnskabelige og praktiske konklusioner.

## K Ø S Y S T E M E R I V I R K E L I G H E D E N O G I T E O R I E N

Det moderne liv er nært forbundet med nødvendigheden af at regne med tidsspilde ved venten i forskellige slags køer. Vi venter, når vi skal over gaden ved en lyskurv, når vi tager imod venner i en lufthavn, når vi tilkalder lægevagten osv. Vi skal vente i tandlægens venteværelse og ved busstoppestedet, vente på, at en telefonsamtale går igennem, og at en artikel, der er indleveret til et tidsskrift, bliver trykt.

Men vi kommer også ud for køproblemer i langt de fleste problemer i videnskabelig og praktisk virksomhed. Når flodfartøjer sejler gennem sluser, danner der sig faktisk uundgåeligt køer såvel i nederste som i øverste slusekammer. På samme måde må man i en havn, der anløbes af fragtskibe i langfart, regne med, at der måske ikke er ledig kajplads i havnen, når et bestemt fartøj ankommer, så at det bliver nødt til at vente, til der bliver kajplads ledig, som det kan anvende til lastning eller losning. I store lufthavne er man hele tiden ude for, at der ankommer flere fly næsten samtidigt, og det er derfor nødvendigt at organisere en kø for at undgå sammenstød ved landing eller start. På et væveri får en væverske i vore dage pålagt opsyn med flere vævestole. Væversken skal sørge for, at hver enkelt arbejder rigtigt og, om nødvendigt, afhjælpe fejl. Men det kan ske (og det sker i virkeligheden), at mens væversken er beskæftiget ved en vævestol, går en anden (eller andre) i stå. Som følge heraf må den senest standsede vævestol vente på, at det bliver dens tur til at blive betjent. Den slags situationer opstår også i moderne regne-, informations- og styreaggregater. For eksempel, mens en maskine er ved at modtage en information, kan der opstå behov for, at den også skal modtage andre informationer. Som allerede sagt, en lignende situation kom man for første gang ud for i opgaver i forbindelse med organiseringen af telefonsystemet og bestræbelsen på en rationel udnyttelse af de til rådighed stående forbindelseslinier og omstillingsudstyr.

Men en lignende situation kommer man også ud for i videnskabelig praksis - i kernefysik ved beregning af halveringstider, i kosmisk strålingsfysik, i biologi ved undersøgelsen af overførsel af nerveimpulser osv. Det er ualmindeligt forskelligartede spørgsmål, der opstår i denne forbindelse: Hvor lang er ventetiden, inden betjeningen påbegyndes? Hvor mange enheder, der skal betjenes, befinder der sig i køen? Hvor tit bliver den betjenende enhed optaget? Hvordan kan man organisere betjeningen mere rationelt?

Vi vil nu diskutere lægevagtens arbejde i en eller anden bydel ud fra de synsvinkler, der interesserer os. Lægevagten modtager opkald fra syge, der har brug for omgående lægehjælp. Til at betjene de syge på grundlag af disse opkald er der lægehold og biler. I tilfælde af at blot ét lægehold er ledigt, tager det omgående afsted til den opgivne adresse, og hjælpen kommer hurtigt. Men hvis alle lægehold er optagne, så bliver den syge nødt til at vente på hjælpen. Hertil kommer, at det ikke er muligt at angive præcist, hvor lang denne ventetid vil være, eftersom man ikke kan forudsige, hvor længe lægen er nødt til at blive hos den syge, som han begyndte at betjene tidligere. Desuden kan vi bemærke, at opkald fra syge ikke indløber på faste tidspunkter, men fuldstændigt tilfældigt.

Indretningen af et lægevagtcenter skal altså udføres under vilkår, der rummer adskillige tilfældighedsfaktorer, da vi hverken kender antallet af opkald fra syge, eller tidspunkterne for disse opkald, eller betjeningens varighed, dvs. den tid, som lægen anvender på at lindre den syges tilstand. Og under vilkår, præget af en sådan ubestemthed, skal vi på forhånd fastsætte det antal læger, hjælpepersonale og lægebiler, der er nødvendigt, for at de syge kan få hjælp i rette tid, og for at lange ventetider kun skal forekomme sjældent. For i ethvert sådant tilfælde kan forsinkelse af lægehjælpen jo få alvorlige og til tider uoprettelige følger.

Det er velkendt, at man i moderne naturvidenskab og på en række vigtige anvendte områder i vid udstrækning anvender et instrument, der kaldes en geigertæller, til vurdering af intensiteten af kernestråling. En af ejendommelighederne ved den måde, dette instrument fungerer på, består i, at en partikel, der er havnet i tælleren og blevet registreret, fremkalder et spændingsfald i den, der en vis tid lukker instrumentet af og ikke gør det muligt at registrere andre partikler, der måtte havne i tælleren. Denne 'døde tid' afhænger i det hele taget af karakteren af den registrerede partikel (især af størrelsen af dens spænding), men ofte nøjes man i kernefysikken med at antage, at denne tid er konstant. Vi ser således, at en geigertællers udslag ikke giver en sand forestilling om en strøm af partikler, eftersom nogle af dem overhovedet ikke registreres. Spørgsmålet melder sig naturligt, hvilke rettelser det er nødvendigt at indføre i måleresultaterne for at korrigere tællerens misvisning. Vi gør opmærksom på, at selve partikelstrømmen er uregelmæssig, og at tidsrummene mellem på hinanden følgende partikelforekomster er uafhængige tilfældige størrelser. Vi befinder os på ny i den situation, der blev skildret i det foregående eksempel.

Det er ikke vanskeligt at anføre en mængde andre eksempler, hentet fra de forskelligste virkefelter. Man kan beskrive opgaver i forbindelse med skibe, der ligger stille ved sluser, biler ved lyskurve, kunder i butikker ved kasser og diske osv. Det er velkendt, at køer er blevet en virkelig plage i den moderne tilværelse, og at folk bruger en følelig del af deres liv på dem. I alle verdens lande gøres studiet af kødannelsens lovmæssigheder nu til genstand for alvorlig opmærksomhed. Vi kan allerede tale om dannelsen af en matematisk køteori, der har fundet vid anvendelse i telekommunikationsteori, ved løsningen af transportopgaver, organisering af virksomheders arbejde, i informationssystemer osv.

På matematisk forskningsniveau må man først og fremmest pege på konstruktionen af modeller for en indgående strøm af krav. Det er særlig vigtigt ligeledes at pege på modeller, der i generelle træk gengiver ejendommeligheder ved den virkelige dannelse af strømme godt. For eksempel kommer man i mange tilfælde ud for en situation, hvor strømmen af krav, der indtræder i betjeningssystemet, dannes af et enormt antal enkelte strømme, der er indbyrdes uafhængige. Netop således opstår strømmen af fragtskibe, der anløber en bestemt havn. Den består af strømmene af skibe, der ankommer fra andre havne. Strømmen af opkald til lægevagten dannes af strømmene af opkald fra enkelte syge. Strømmen af opkald fra abonnenter, der indløber til en telefoncentrals omstillingsbord, dannes af opkald, der indløber fra de enkelte abonnenter osv.

I vor tid har man bevist den almene sætning, at under meget generelle vilkår (et meget stort antal enkeltstrømme, der er indbyrdes uafhængige, og som hver for sig bringer et meget lille bidrag i forhold til det samlede omfang) nærmer en summeret strøm sig til en Poissonproces. Med andre ord kommer denne summerede strøm tæt på en strøm, der besidder følgende to egenskaber: 1) Sandsynligheden for, at der i løbet af et tidsrum t foregår n begivenheder, er lig

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

(her kan n antage værdierne 0, 1, 2, 3..., og t kan antage en vilkårlig ikke-negativ værdi); 2) Inden for tidsrum, der ikke falder helt eller delvist sammen, er de tal, der angiver indtræden af begivenheder, uafhængige tilfældigt varierende størrelser.

Jeg har selv skullet behandle statistiske data for havneanløb af fragtskibe i langfart, indløb af opkald fra alvorligt syge til lægevagten, for registrering af kosmiske partikler, der havner på et bestemt stykke jordoverflade. I alle tilfælde gav Poissonprocessen en fortræffelig overensstemmelse med de faktiske data. Den beskrevne model for dannelsen af en indgående strøm af krav er ikke den eneste, men den er vellykket.

Allerede i de første arbejder om telefonbetjeningssystemer begyndte man at betragte to typer krav, der indløber i et system. I systemer af den første type vil et krav, der indløber til betjening og finder alle betjeningspladser optagne, stille sig i kø og vente så længe det er nødvendigt. Sådanne systemer kaldes ventetidssystemer. Skibe i en havn danner netop et ventetidssystem. I systemer af den anden type vil et krav, der finder alle pladser allerede optagne, omgående forlade systemet og ikke vende tilbage til betjening. Denne type systemer kaldes afvisningssystemer. Herindunder hører geigertællerens funktionsmåde. De to nævnte systemer adskiller sig ikke blot fra hinanden ved tekniske detaljer, men også ved karakteren af de opgaver, der opstår ved studiet af dem. Faktisk er den gennemsnitlige ventetid før betjeningens påbegyndelse særlig væsentlig for at vurdere betjeningens kvalitet i et ventetidssystem, men for afviklingssystemer har denne størrelse ikke den mindste betydning. Her er det vigtigt at angive en anden størrelse - sandsynligheden for, at et nyindløbet krav går tabt i betjeningssystemet.

I de seneste år kommer man ud for stadig mere forskelligartede situationer, hvilket hænger sammen med, at der er sket en udvidelse af den kreds af praktiske opgaver, til hvis løsning man er begyndt at udnytte den matematiske køteori. Det har vist sig, at systemer med tab og med ventetider blot udgør en del af andre, ikke mindre interessante betjeningssystemer, - systemer med begrænset ventetid, med begrænset opholdstid, systemer med begrænset antal ventepladser osv. Mange nye spørgsmål er opstået i forbindelse med studiet af de situationer, der opstår ved projekteringen af informationssystemer og ligeledes ved samtidig løsning af flere opgaver på én datamat.

Opgaver i forbindelse med projektering og udnyttelse af betjeningssystemer indgår som en vigtig del i en ny matematisk disciplin på et anvendt plan - operationsanalyse.

## MATEMATISKE MODELLER

Førend man kan gøre et eller andet naturfænomen eller en økonomisk eller teknisk - i det hele taget en hvilken som helst - proces til genstand for matematisk behandling, er det nødvendigt at forenkle det, dvs. af den samlede mangfoldighed af egenskaber, der er typiske for fænomenet, kun at udvælge dem, hvis indflydelse skal studeres; at fremsætte visse antagelser om de forbindelser, der virker i det, og om dets vekselvirkning med andre fænomener.

Selvfølgelig kan man foreslå mange modeller for et og samme fænomen. Videnskabens historie har overleveret os et uhyre antal eksempler på dette. Hvis vi tager optikken som eksempel, så har man her beskæftiget sig med flere modeller for lys, - den korpuskulære teori, bølgeteorien, den elektromagnetiske teori. For disse er der blevet udledt talrige lovmæssigheder af kvantitativ art. Hver af disse modeller krævede sin egen matematiske metode og tilsvarende matematiske midler. Den korpuskulære optik udnyttede midler fra euklidisk geometri og nåede frem til at udlede lovene for lysets spejling og brydning. Bølgemodellen inden for lysteori krævede nye matematiske ideer såvel for at komme frem til allerede kendte resultater som for udledelsen af nye. Udelukkende gennem beregninger opdagede man nogle resultater, der angår lysets diffraktion og interferens, som tidligere ikke var blevet iagttaget gennem eksperimenter. Geometrisk optik, der hører sammen med den korpuskulære model, viste sig magtesløs her. Således fik man yderligere argumenter til fordel for bølgeteorien.

En model for et fænomen er ikke identisk med fænomenet selv, men giver kun en slags tilnærmet forståelse af det. En sådan model kan forekomme meget grov, men ikke desto mindre kan den give en fuldt tilfredsstillende tilnærmelse til virkeligheden. Vi kan tænke på, at celest-mekanikken fra Laplaces tid er gået ud fra en model for solsystemets indretning, hvor planeterne og solen udgør materielle punkter med tilsvarende masser, og hvor der mellem dem hersker gravitationskræfter ifølge loven

$$F_{1,2} = f \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ,$$

hvor $F_{1,2}$ er gravitationskraften mellem himmellegemerne I og II med masserne $m_1$ og $m_2$ og en indbyrdes afstand lig r; f er den konstante gravitation. De materielle punkter, der modellerer planeterne, er anbragt i deres tyngdepunkter.

Hvor grov en sådan model end er ved første blik, så beskriver den dog fuldt tilfredsstillende planeternes bevægelser og giver mulighed for at forudsige deres indbyrdes position på himmelhvælvet. Yderligere har den i de sidste hundrede år to gange gjort det muligt gennem beregninger at forudsige tilstedeværelsen af ukendte planeter, der hidtil ikke var blevet iagttaget af astronomerne. Med udgangspunkt i uregelmæssigheder i bevægelserne af de yderste planeter i solsystemet fremsatte man den antagelse, at de var fremkaldt af tilstedeværelsen af endnu en planet. Ved at sammenholde de faktiske afvigelser med dem, der fremkom, hvis man antog eksistensen af endnu en planet, lykkedes det at beregne den ukendte masse, afstanden til solen og positionen på himmelhvælvet på et bestemt tidspunkt. Således blev planeten Neptun opdaget i 1846 som resultat af beregninger, udført uafhængigt af hinanden og samtidigt af Le Verrier og John Adams. Tilsvarende beregninger, udført af Bernard Lowell, førte til opdagelsen af solsystemets niende planet, der fik navnet Uranus.

Denne model tjener fortsat vor erkendelse fortræffeligt også nu, da udforskningen af verdensrummet er ved at begynde. Men heraf følger ingenlunde, at den vil være tilstrækkelig i alle situationer, der vil opstå for videnskaben. Uden tvivl findes der allerede nu opgaver, hvor denne oprindelige model for celest-mekanikken er utilstrækkelig og enten kræver modernisering eller fuldstændig revision. Således kunne den newtonske model for solsystemets opbygning allerede i begyndelsen af vort århundrede ikke forklare uregelmæssigheder i planeten Merkurs bevægelser. Det var Albert Einsteins dengang nye specielle relativitetsteori, der gjorde det muligt at finde forklaringerne herpå.

Det kan meget vel ske, at flere modeller med forskellige udgangspunkter kan beskrive et fænomen lige tilfredsstillende. Sædvanligvis er dette kun tilfældet indtil visse grænser, hvorfra den ene af dem viser sig at måtte foretrækkes. Indtil dette punkt er der ikke grundlag for at foretrække den ene model fremfor den anden (medmindre der er et klart fortrin af fysisk karakter ved den ene model fremfor de andre). De har alle lige eksistensberettigelse. Men fra det øjeblik, da et nyt fænomen fra samme område ikke falder tilstrækkelig godt sammen med modellernes forudsigelser, må man opgive dem og erstatte dem med nye, der bedre afspejler tingenes natur. Samtidig behøver de gamle modeller endda ikke at blive fuldstændigt forkastet, men de kan beholdes i videnskaben til begrænsede formål inden for de grænser, hvor de gør det muligt at opnå tilfredsstillende resultater.

Skabelsen af en matematisk model er et vigtigt skridt i erkendelsen, eftersom den gør det muligt at formulere vores forestillinger præcist om, hvordan det fænomen, der interesserer os, forløber, og hvilke forbindelser, der virker i det. Vi opregner de antagelser, vi tager som udgangspunkt, og under eksperimentel kontrol eller ved at sammenligne processens virkelige forløb med det forudberegnede ifølge en teori, der baserer sig på den konstruerede model, får vi mulighed for at undersøge indflydelsen fra hver af vore tilgrundliggende antagelser.

Jeg vil her standse op ved et illustrativt eksempel i forbindelse med løsningen af en ukompliceret ingeniøropgave. I forbindelse med den betydningsfulde rolle tekniske systemer spiller i samfundslivet, tillægger man en forøgelse af tekniske produkters pålidelighed stadig større betydning. Dette opnår man på mange måder, - en af dem er reservesystemer. I et system indføres der ekstraelementer, uden hvilke det kunne klare sig, med et eneste formål - at de træder i funktion i det øjeblik, da systemets grundlæggende element svigter. En bils reservehjul er netop et sådant reserveelement. Hvis elementet, der svigtede, yderligere sendes til reparation og efter reparationen vender tilbage som reserve, så kaldes systemet et reservesystem med genoprettelse. Man siger, at et reservesystem med genoprettelse svigter, hvis det grundlæggende element og alle reserveelementer er i ikke-funktionsdygtig stand. Den opgave, der opstod i denne forbindelse, bestod i følgende: Hvor meget forøger et reservesystem med genoprettelse det tidsrum, *et system fungerer uden at svigte?*

Det er klart, at en opgave, der er formuleret således, er det endnu ikke muligt at løse, eftersom vi egentlig endnu ikke ved noget. Vi har endnu ikke en basis, hvorpå vi kan bygge logiske overvejelser og udlede formler til brug for ingeniørmæssige beregninger. Det er klart, at en model ikke skal være grebet ud af luften. Dens grundlag skal være iagttagelser og ingeniørmæssig intuition. Som resultat af langvarige diskussioner har man nu vedtaget *denne* model: 1) Det tidsrum, et element i systemet fungerer uden at svigte, er en tilfældigt varierende størrelse med en vis sandsynlighedsfordeling; 2) De tidsrum, elementer fungerer, der bliver koblet ind efter hinanden, er uafhængige tilfældigt varierende størrelser; 3) Det opdages omgående, når et element svigter; 4) Et element, der svigter, bliver omgående sendt til reparation; 5) Reparationens varighed er en tilfældigt varierende størrelse med en vis sandsynlighedsfordeling; 6) Hvis der findes blot ét funktionsdygtigt element, finder der en omgående udskiftning sted af det svigtende element med det funktionsdygtige; 7) Et repareret element indgår omgående i reserven; 8) Reparationens varighed afhænger ikke af, hvor længe elementets funktionsdygtige periode strakte sig; 9) Reparationen genopretter elementets egenskaber fuldtud.

Den netop beskrevne model kan tjene som udgangspunkt for at opnå de nødvendige konklusioner. Nogle af dens punkter vil kunne fremkalde utilfredshed og et ønske om at erstatte dem med mere realistiske. Men dette tager vi op lidt senere, her vil vi blot anføre en simpel konsekvens, udledt af den anførte model. Hvis vores system består af et virksomt element og et reserveelement, der befinder sig i kold (ubelastet) reserve, så hænger det gennemsnitlige tidsrum T, som et system fungerer uden at svigte, sammen med det gennemsnitlige tidsrum a, et enkelt element fungerer uden at svigte, efter følgende formel*

$$T = a\left(1+\frac{1}{1-\gamma}\right), \text{ hvor } \gamma = \int_0^\infty G(x)\,dF(x).$$

* se note side 71, af Jørgen Larsen.

Størrelsen $\gamma$'s virkelige betydning er simpelt hen sandsynligheden for, at varigheden af genoprettelsen viser sig at være mindre end det tidsrum, et element fungerer uden at svigte. Jo mere $\gamma$ nærmer sig 1, jo større bliver T. Dette kan man opnå på to måder, enten ved at forøge det gennemsnitlige tidsrum, et element fungerer uden at svigte, eller ved at formindske reparationens varighed.

I den af os anførte model kan punkterne 4, 7 og 9 fremkalde særlig stor utilfredshed. Vi ved jo faktisk, at hver udskiftning af et defekt element med et funktionsdygtigt kræver nogen tid til reparationen, og at et element aldrig genvinder sine egenskaber fuldtud. Det er velkendt, at det gennemsnitlige tidsrum en repareret bil fungerer uden at svigte kun udgør ca. 60% af det tidsrum en ny bil fungerer uden at svigte. Man kan ændre disse punkter i modellen og dermed gøre modellen og de resultater, der kan opnås på grundlag af den, noget mere komplicerede. Men i mange tilfælde beskriver også den model, vi har beskrevet, fuldt tilfredsstillende den virkelige situation og giver mulighed for at udlede formler, der er nyttige i praksis.

I vor tid benytter man sig i vid udstrækning af matematisk modelbygning, når det er yderst lidt, der er kendt om et fænomens fysiske struktur. I så fald bygger man en hypotetisk model, og på grundlag af den udleder man konsekvenser, der er tilgængelige for iagttagelse. Det er klart, at sådanne hypotetiske modeller ofte viser sig ikke at svare til erfaringerne. I så fald lever de ikke længe, men dør hurtigt bort til fordel for andre modeller, der tillader en mere præcis erkendelse af tingenes natur.

Værdien af hypotetiske modeller er uomtvistelig, - de aktiviserer tankens arbejde, leder eksperimentatorer til nye eksperimenter, tillader en fremtrængen i erkendelsen af verden omkring os. Videnskabens historie viser, hvor stor en rolle videnskabelige hypoteser og matematiske modeller af fænomener, konstrueret på grundlag heraf, har spillet. Vi kan blot tænke på Kopernikus' hypotese om solsystemets opbygning. Vi kan desuden tænke på den model af atomets opbygning, der blev foreslået af Rutherford. Denne model gik ud fra den tanke, at et atom er opbygget omtrent på samme måde som solsystemet, - rundt om atomets kærne kredser elektroner.

Selve modellen viste sig utilstrækkelig, og videnskabens videre udvikling har fejet den bort, men den fremkaldte mange videnskabelige undersøgelser, der har ført frem til moderne atomfysik og til de første skridt på vejen til erobringen af den energi, der ligger gemt i atomets indre.

I vor tid er det blevet påtrængende nødvendigt at rette særlig opmærksomhed mod konstruktionen af matematiske modeller for biologiske og sociale fænomener. De er særdeles komplicerede, og til studiet af dem har man brug for alle mulige metoder, der er udarbejdet i videnskaben. Sådanne problemer som studiet af tanke- og hukommelsesprocesser kræver ikke blot iagttagelser, men også konstruktion af matematiske modeller for på grundlag af dem gennem logiske konklusioner at udlede konsekvenser, med hvis hjælp man kan dømme om en teoris kvantitative sammenfald med eller afvigelse fra erfaringerne.

## MATEMATIKKEN - VIDENSKABENS SPROG

Tilsyneladende blev der første gang talt tydeligt og klart om matematikken som videnskabens sprog for næsten 400 år siden af fortidens store naturvidenskabsmand Galileo Galilei. Filosofien er skrevet i en storslået bog - naturen, - skrev han, - som altid er åben for alle og enhver. Men forstå den kan kun den, der har lært at forstå dens sprog og de tegn, den er skrevet med. Den er skrevet på matematikkens sprog, og dens tegn er matematiske formler. Uden tvivl har videnskaben siden da opnået enorme resultater, og matematikkens rolle er vokset umådeligt. Mange resultater inden for teknik, økonomi, naturvidenskab og produktionsplanlægning ville simpelt hen have været umulige uden en udstrakt udnyttelse af matematikken og dens metoder. En af nutidens største fysikere, Werner Heisenberg, har karakteriseret matematikkens plads inden for moderne teoretisk fysik således: 'Det første sprog, som man udarbejder under den videnskabelige tilegnelse af fakta, er inden for teoretisk fysik normalt matematikkens sprog, nemlig et matematisk skema, der gør det muligt for fysikerne at forudsige resultaterne af kommende eksperimenter.'

Til kommunikation og til at udtrykke deres tanker har menneskene skabt et storartet middel - det levende dagligsprog og dettes skriftlige modstykke. Sprog forbliver ikke uændret gennem tiderne, men tilpasser sig til livsvilkårene, gør ordforrådet rigere, udarbejder nye midler til at udtrykke de fineste nuancer i tanker og menneskelige følelser. Og ikke desto mindre, til trods for hele dets fleksibilitet og alsidighed, viser det sig i en række tilfælde at være et utilstrækkeligt og tilmed et utilfredsstillende kommunikationsmiddel. Forskellige virkefelter udarbejder så at sige deres egne sprog, der er specielt egnede til at give præcist og kortfattet udtryk for tanker, handlingsmønstre, regler for opførsel, der er typiske for bestemte former for menneskelig aktivitet. Jeg vil anføre et mindre eksempel.

Ved udleveringen af en arbejdsopgave på fremstillingen af en eller anden genstand begrænser teknikere sig aldrig til en beskrivelse udelukkende i ord. Til præcisering af mål, former og andre særlige forhold ved genstanden er først og fremmest en arbejdstegning uundværlig. Til en vis grad er en arbejdstegning det særlige sprog, der er egnet til videregivelse af information fra konstruktør til udøver. Den tillader ikke forskellige fortolkninger, og den gør det muligt i anskuelig form at videregive en stor mængde oplysninger, der er uundværlige for arbejdets vellykkede udførelse. Denne form for kommunikation er langt mere praktisk og økonomisk end den sædvanlige sproglige, eftersom en sproglig beskrivelse af en blot lidt kompliceret konstruktionsopgave ville være i den grad omstændelig, at forfatteren selv kunne løbe sur i den. En arbejdstegning har endnu et afgjort fortrin, - enhver specialist kan læse den uden vanskeligheder, selv hvis han ikke behersker konstruktørens modersmål.

I videnskab er klarhed og præcision i en tankes udtryk særlig vigtigt. Videnskabens sprog må ikke skabe yderligere vanskeligheder ved modtagelsen af den meddelte information, men det skal overbringe ideer og fakta i en entydig form, der ikke tillader forskellige fortolkninger. Uden dette krav kan der ikke være nogen videnskab som et system af kundskaber, og der kan ikke være nogen sikkerhed for, at en bestemt påstand eller antagelse ikke er blevet forvansket ved formidlingen af en meddelelse eller under en diskussion. Det er ligeledes nødvendigt at forudse alle mulige udfald og ikke tillade andre muligheder end dem, der behandles. En videnskabelig fremstilling skal være kort og helt bestemt. Netop derfor er videnskaben forpligtet til at udarbejde sit eget sprog, der er i stand til med maksimal præcision at videregive dens typiske ejendommeligheder. Vi kan tænke på, hvor klart og lakonisk kemiske formlers sprog er. Det gør det muligt for kemikere ikke blot at nedskrive kemiske processers forløb, men også at forudse mulige forbindelser. Imidlertid udbreder dette sprog sig ikke, trods al sin vigtighed, til andre kundskabsområder. I denne henseende er matematikkens sprog i besiddelse af større universalitet. Louis de Broglie har givet glimrende udtryk for dette: '...hvor det er muligt at anvende en matematisk angrebsmåde på problemerne, er videnskaben tvunget til at benytte sig af et særligt sprog, et symbolsk sprog, en slags stenografi af den abstrakte tanke, hvis formler, når de er skrevet korrekt ned, tilsyneladende hverken giver plads for nogen ubestemthed eller for nogen upræcis fortolkning.'

Vi bemærker, at matematisk symbolik ikke blot ikke giver plads for upræcise udtryk for tanker og en udflydende fortolkning af det skrevne, men den gør det tilmed muligt at automatisere gennemførelsen af de handlinger, der er nødvendige for at nå frem til konklusioner. Lad os betragte følgende enkle eksempel. Ved mange vigtige spørgsmål inden for geodæsi, bygningsmekanik, fysik og økonomi fører deres matematiske formulering til nødvendigheden af at løse systemer af lineære algebraiske ligninger med et tilsvarende antal ukendte. Ved hjælp af tilvant algebraisk symbolik udføres de nødvendige handlinger efter bestemte regler, og hvis der ikke er mange ligninger, så frembyder løsningen af dem ikke nogen som helst vanskeligheder. Desuden er det ikke nødvendigt hver gang at udføre særlige ræsonnementer, - de er udført en gang for alle for alle lignende systemer. Anvendelsen af et sæt standardregler gør det muligt at gennemføre løsningen af enhver sådan opgave uden principielle vanskeligheder.

Vi kan nu forestille os, at vi ikke har det matematiske symbolsprog, og at vi kun har almindeligt dagligsprog til vores rådighed. I denne situation befinder alle de sig, der for eksempel skal løse algebraiske opgaver med aritmetiske midler. Herved opstår der omgående unødvendige komplikationer. Hver opgave bliver til et særligt problem, for hvilket det er nødvendigt at udarbejde et specielt system ræsonnementer. Det allerenkleste spørgsmål kræver allerede en betydelig intellektuel anspændelse. Vi kan tænke på, hvor enkelt det er at løse komplicerede aritmetiske opgaver, når man udnytter den simpleste algebraiske symbolik til løsningen, og hvor kompliceret det er at løse dem på rent aritmetisk vis. Og vi har jo kun betragtet en af de enkleste opgaver, som man til stadighed kommer ud for både i teori og i praksis.

Matematisk symbolik gør det muligt at sammenpresse information, når den skrives ned, at gøre den let overskuelig og bekvem til viderebehandling. Dette vedrører hele matematikken på alle dens områder. For eksempel kan omfattende statistiske oplysninger ved hjælp af tabeller og approksimerende fordelinger presses sammen i en linie eller en kort tabel.

I de seneste år er der fremkommet en ny retning i udviklingen af formelle sprog i forbindelse med edb-teknikken og udnyttelsen af edb-maskiner til styring af produktionsprocesser, informationssystemer og telekommunikationslinier, og ligeledes til løsning af økonomiske og organisatoriske opgaver. Det er nødvendigt at kommunikere med maskinen, det er nødvendigt at give den mulighed for hvert øjeblik selvstændigt at udvælge den rigtige handling under de givne betingelser. Men maskinen forstår ikke almindelig menneskelig tale, det er nødvendigt at føre dialog med den på et sprog, den forstår. Dette sprog må ikke tillade forskellige fortolkninger, ubestemthed, utilstrækkelighed eller overdreven redundans i den meddelte information. I vor tid har man udarbejdet en række formelle sprog, ved hvis hjælp en maskine entydigt opfatter den meddelte information og handler under hensyn til den foreliggende situation. Det er klart, at selve styringsprocessen ikke blot udføres ved hjælp af de formelle sprog, men i første række på basis af en matematisk model, der er udarbejdet for selve fænomenet. Det er disse to faktorer, der gør edb-maskiner til et så fleksibelt middel ved udførelsen såvel af meget komplicerede beregninger som af rækker af logiske operationer.

Det er nu naturligt at stille sig selv følgende spørgsmål: Fører udnyttelsen af formaliserede sprog og videnskabernes matematisering ikke til en hendøen af det almindelige sprog i videnskabelige undersøgelser og i folks praktiske kommunikation. Svaret må blive negativt, eftersom såvel formelle sprog og med dem matematikkens symbolske sprog, som også vores daglige sprog, kun har begrænsede muligheder. Hvert af dem har sine stærke og svage sider. Som resultat er enhver videnskabsgren tvunget til at benytte både symbolsk og almindeligt sprog. For at følge samtalepartnerens tanke i alle enkeltheder er det ikke tilstrækkeligt blot at have et matematisk formelsprog, - det er også nødvendigt med forklaringer, fremført på almindeligt dagligsprog. Formelsprog er fortræffeligt egnet til at drage logiske konsekvenser af de præmisser, man starter med, men det kan ikke føre os ud over grænserne for allerede velfunderede begreber og forestillinger. På et matematisk sprog er det imidlertid umuligt at drage vidtgående analogier (det kan dog være nyttigt for at komme frem til dem) eller uventede induktive konklusioner. Således forvandler dets styrke sig til en vis grad til en svaghed. Også her får det hjælp fra det almindelige, uformaliserede sprog med dets uudtømmelige rigdom af nuancer og muligheder.

## K I L D E R N E   T I L   M A T E M A T I K K E N S   B E T Y D N I N G   F O R   E R K E N D E L S E N

Nu er det naturligt at spørge sig selv, hvori matematikkens betydning for erkendelsen består. Hvorfor udnyttes en videnskab, der ikke er umiddelbart forbundet med bestemte naturfænomener eller med tekniske processer, med stort udbytte af disse og går endog over til at blive en af de *grundlæggende forskningsmetoder*? Hvad skyldes det endelig, at matematiske metoder i forskellige historiske epoker har vist sig nyttige til i praksis fuldstændig forskellige opgaver, idet de bringer bestemthed og præcision ind i yderst uklare situationer?

Delvise svar på disse spørgsmål er allerede givet i det forudgående, men vi vil nu diskutere dem lidt mere indgående.

Først og fremmest vil vi bemærke, at matematikkens udvikling altid har været tæt forbundet med de praktiske behov, der i forskellige epoker optog samfundet. Ofte passede nye praktiske opgaver ikke ind i de allerede udarbejdede skemaer og løsningsmetoder. Til og med fandtes der endog undertiden ingen begreber i matematikken, ved hjælp af hvilke det ville være muligt at beskrive de studerede fænomener tilstrækkeligt tilfredsstillende. Og så var det kun nogle få momenter, der i første række interesserede matematikeren, - kvantitative ændringer, der har forbindelse med forløbet af det studerede fænomen; rumlige former; logiske forbindelser mellem fænomener eller mellem deres karakteristika.

Når en matematiker giver sig til at løse en eller anden bestemt opgave inden for naturvidenskab eller i forbindelse med hverdagslivet, er han tvunget til at abstrahere fra en mængde ejendommeligheder ved det givne fænomen og kun koncentrere sin opmærksomhed på nogle af dem. Ved studiet af planeternes bevægelse i solsystemet er det, der i første række interesserer os, at angive deres position på himmelhvælvet på et eller andet bestemt tidspunkt, de andre planeters og Solens indflydelse på karakteren af den givne planets bevægelse osv. Vi bygger en model for solsystemets bevægelse, og i denne model studerer vi de spørgsmål, der interesserer os. Men enhver model medfører en uundgåelig abstraktion fra det sande billede af fænomenet og en ombytning af studiet af det med studiet af modellen. Tilsvarende skabes også matematiske begreber ud fra bestemte modeller for virkelige fænomener.

Sidenhen viser det sig, at et indført begreb er nyttigt ikke blot i den givne enkelte opgave, men ligeledes i en række andre, der måske rent fysisk adskiller sig skarpt fra den oprindelige. Dette begreb får stor betydning, og man begynder at tildele det øget opmærksomhed. Ligningsbegrebet dukkede op for meget længe siden. I hvert fald i Oldtidens Babylon kunne man konstruere og løse systemer af to eller tre førstegradsligninger med to eller tre ubekendte. Der skulle gå mange århundreder, førend man blev opmærksom på, at løsning af ligninger var vigtigt for en mængde forskellige opgaver, og at det var nødvendigt at skabe en teori for løsningen af dem og dermed gøre sig fri af den trættende gentagelse af de samme ræsonnementer i forskellige anledninger.

Her bør følgende bemærkes. Menneskeheden går gradvist frem i sin erkendelse af verden omkring sig og føjer portion efter portion til sine allerede erhvervede kundskaber. Ethvert fænomen erkendes ikke i hele dets kompleksitet. Erkendelsen bevæger sig i enkelte trin og enkelte etaper, og hver generation har noget at tilføje til det, der allerede er kendt, og kan præcisere tidligere erhvervede kundskaber. Denne omstændighed fører til, at matematiske metoder og forestillinger, der var fuldt tilstrækkelige på en bestemt etape i erkendelsen af et fænomen, kan vise sig - og som regel viser sig - utilstrækkelige på en ny etape i denne.

Vi vil illustrere det sagte med følgende eksempel. I slutningen af forrige århundrede opfandt man flyvemaskinen, og der opstod den opgave at studere dens bevægelse i flugten. Hvilke kræfter virker på en flyvemaskine i flugten, hvorfra kommer dens kraft til at stige til vejrs, og hvordan kan man beregne den, hvorledes afhænger flyvehastigheden af vingernes og stellets form? Disse og hundredvis af andre spørgsmål dukkede op allerede, da flyvemaskinebygningen var i sin spæde begyndelse. De hang ikke sammen med menneskets rendyrkede passion efter at lære det ukendte at kende, men med en daglig nødvendighed. I fuldt omfang meldte opgaven sig at skabe en teori for flyvning med apparater, der er tungere end luften,

- vel at mærke en teori, der ville gøre det muligt at forudberegne deres opførsel under flyvning på forhånd, inden den pågældende flyvemaskine blev bygget.

De tilvante metoder til løsning af mekaniske opgaver, udarbejdede af fortidens store videnskabsmænd - Newton, Lagrange, Laplace og andre, var utilstrækkelige, og det var nødvendigt at søge nye veje og nye angrebsmåder. Dette problem greb mange forskere, bl.a. N.E. Zjukovskij. Meget snart fremkom der en række resultater, der gik ud fra den antagelse, at luft er en ideal væske. Erfaringen viste, at denne antagelse var fuldt tilfredsstillende for de hastigheder, man havde nået dengang. Således blev grunden lagt til den nye videnskab aerodynamik. Det er indlysende, at forskerne gjorde sig ganske klart, at luft langtfra er nogen ideal væske og især at den er komprimerbar. Men specielt organiserede eksperimenter og iagttagelser viste, at ved flyvehastigheder inden for 200-300 km i timen var luftens kompressibilitet uvæsentlig, og den kunne lades ude af betragtning. Men efterhånden som flyvehastigheden voksede, ophørte hypotesen om den ideale væske at tilfredsstille praksis længere, og den gamle teori førte til alvorlige afvigelser fra den virkelige situation. Som resultat blev det nødvendigt at gå bort fra de gamle præmisser og opbygge en ny aerodynamik, hvor det skulle være muligt at gå bort fra hypotesen om den ideale væske og betragte luft som en virkelig, komprimerbar væske. Naturligvis måtte man samtidig forny det benyttede matematiske apparat væsentligt.

Aerodynamikkens fremskridt er ikke standset her, og fartens overskridelse af den såkaldte lydmur krævede en ny fuldkommengørelse af teorien og nye matematiske forskningsmidler. Herved har alle parter vundet - flyvemaskinebygningens praksis, aerodynamikken og matematikken. De metoder, der nu er udarbejdet inden for aerodynamik og matematik, gør det muligt på forhånd at gennemregne mange konstruktionsvarianter og forud for noget eksperiment og for bygningen af en flyvemaskine og endog af en model af den, og dermed også forud for prøveflyvningen, at forkaste en mængde mulige konstruktioner. Således har flyvemaskinebygningens praksis vundet. Aerodynamikken, der er blevet voksen gennem sine ansvarsfulde opgaver, er kommet i besiddelse af sådanne effektive metoder, der tillader løsningen af en mængde opgaver såvel inden for flyvemaskinebygning som på andre praktiske områder. I særdeleshed har man fået mulighed for at foretage beregninger for rumraketter og for at styre deres flugt. Matematikken blev ført til at formulere en række spørgsmål, der ikke ville være dukket op uden indflydelsen fra aerodynamikken. Søgen efter svar på disse spørgsmål førte til udarbejdelsen af en række nye kapitler inden for matematikken.

Vi er nu i stand til at gøre delvis status og at svare på de spørgsmål, der står foran os. Hvori ligger da årsagen til matematikkens betydning for erkendelsen? Hvad skyldes det, at matematikken, efterhånden som den udvikler sig, og efterhånden som den bliver mere abstrakt og generel, kommer i besiddelse af nye muligheder for at erkende verden omkring os?

Der er mange årsager til dette. Først og fremmest anser jeg det for nødvendigt at påpege, at matematisk abstraktion ikke foregår vilkårligt, men på basis af allerede erhvervede kundskaber og skabte begreber, på basis af de krav, som praksis stillede i fortiden. Nye, mere generelle begreber konstrueres således, at de gamle, der har vist deres berettigelse, kan indgå i dem som naturlige, meget enkle tilfælde, og således at de omfatter det, som de gamle begreber ikke var i stand til at inkludere. Samtidig med at de matematiske teorier bliver mere generelle, udelukker de dog på denne måde heller ikke de forskningsobjekter, som de studerede tidligere. Sådan var det tidligere. Vi kan tænke på ændringen i talbegrebets indhold, - hele tal inden for grænserne af nogle enheder, hele rækken af positive tal, rationale brøker, de enkleste irrationale tal, hele mængden af reelle tal, komplekse tal. I en sådan situation bliver matematikkens begreber mere fleksible og i stand til at omfatte en bredere kreds af objekter. Samtidig får matematiske teorier betydeligt større anvendelsesmuligheder, eftersom en større kreds af objekter falder ind under området for deres generaliserede reglers gyldighed.

Endvidere bør det bemærkes, at hver gang matematiske midler viser sig utilstrækkelige til studiet af de fænomener, der er af interesse i praksis, søger videnskaben og finder før eller senere nye midler, der er i stand til bedre, mere fuldstændigt og præcist at beskrive disse fænomeners egenskaber og ejendommeligheder. Som resultat bliver matematikken og dens forskningsmidler ikke stående på stedet, men er til stadighed underkastet en proces af fuldstændiggørelse, berigelse og fornyelse. Og i denne fornyelsesproces spiller praksis en betydelig, for ikke at sige afgørende rolle. Vi kan et øjeblik mindes den bemærkelsesværdige periode for grundlæggelsen af matematisk fysik, der begyndte i det 18. århundrede. Dengang lagde Daniel Bernoulli grunden til matematisk hydrodynamik og Leonhard Euler til teorien for faste legemers bevægelser. Senere grundlagde J.-B.-J. Fourier den matematiske varmeteori, og A.-L. Cauchy grundlagde elasticitetsteorien. De tilvante matematiske forskningsmidler viste sig utilstrækkelige, og denne forskning lagde selv grunden til en yderst hurtig udvikling af teorien for partielle differentialligninger af anden orden. Vor tid, med dens rivende fremskridt inden for fysikken, har ført til en dybtgående ændring af de matematiske midler, den anvender. Matematikken blev nødt til at udvikle helt nye grene for at tilfredsstille moderne fysiks behov. Vi kan tænke på teorien for operatorer, teorien for generaliserede funktioner og teorien for stokastiske processer, der blev fremkaldt først og fremmest af fysikkens krav.

Endelig skal vi bemærke, at også de grene af matematikken, der ikke er opstået som følge af praktiske krav, men i kraft af en indre trang i matematikken selv, heller ikke forbliver isoleret fra praksis. Allerede matematikkens gamle områder, der nu kræver en teoretisk revision, indeholder tidlige praktiske krav. Og de videnskabsmænd, der omformer en matematisk teori, afspejler i deres konstruktioner umærkeligt for sig selv deres tidsalders idealer, behovene i samfundslivets nyeste krav. Desuden taber de grene af matematikken og de matematiske tankeretninger, der slet ikke finder teoretisk eller praktisk anvendelse, som regel forskernes interesse og dør gradvist bort.

Som resultat kommer vi til den konklusion, at matematikkens anvendelsesmuligheder er ubegrænsede af den grund, at matematikken ikke står stille, men til stadighed ændrer tilstand, idet den optager nye begreber, ideer, metoder og forskningsobjekter i sig. I denne uophørlige ændring og fuldkommengørelse tager praksis i al sin forskelligartethed aktiv del.

Sammen med matematikkens vækst i bredden foregår der også en anden proces, - en dyberegående analyse af allerede erhvervede værdier. Dette er en indre ombygningsproces. Og det sker ikke sjældent, at nye matematikområder, der er opstået i en indre udviklingsproces, viser sig vigtige i praksis og finder betydelige anvendelsesmuligheder.

# KILDER TIL NYT I MATEMATIKKEN

Hvad vi her har sagt, viser, at praksis er en vigtig kilde til nye problemer og begreber i matematikken. Hyppigt stiller den matematikerne spørgsmål, der går ud over grænserne for de ideer, man tidligere havde, og dermed udfordrer dem til søgen efter nye metoder og angrebsmåder til beskrivelse og forskning. Det er naturligt at spørge: Ja, men dette er vel ikke den eneste kilde?

Jeg tror, at man må svare benægtende på dette spørgsmål. I matematikken udvikles ikke kun de forskningsområder, der omgående går over i praksis, men også sådanne (det sker ret ofte), hvis praktiske muligheder ikke er synlige endog i en overskuelig fremtid. Ikke desto mindre må vi ikke glemme den enkle kendsgerning, at matematikere ikke bor på en øde ø. Ligesom alle andre medlemmer af samfundet hører de om de problemer, der findes inden for teknik, landbrug, undervisning, medicin, økonomi og andre virkefelter. Nogle af disse problemer forvandles til kilder til konstant spekulation og fører til formuleringen af nye matematiske opgaver, og de øver - i det mindste underbevidst - indflydelse på det intellektuelle miljø, som matematikerne arbejder i. Mon ikke det var denne omstændighed, en af vort århundredes største matematikere, David Hilbert, havde i tankerne, da han sagde, at 'ethvert århundrede har sine problemer'.

Det er ligeledes nødvendigt at mærke sig, at selve forestillingen om matematikkens forbindelser med praksis har gennemgået alvorlige forandringer. Hyppigt er disse forbindelser ophørt med længere at være umiddelbare, og matematiske ideer, metoder og begreber viser sig ofte at være adskilt fra praksis ved flere abstraktionstrin. Praktiske krav indvirker hyppigst på teknikken, denne på sin side henvender sig til fysikken om hjælp, og først sidstnævnte stiller opgaven foran matematikken. Men hvor indviklet vejen fra praksis til matematikken end er, så bevares dens indflydelse på den matematiske videns fremskridt.

Jeg vil nu gerne sige et par ord om to forskningsområder, på hvilke de første skridt på den mest umiddelbare måde stod i forbindelse med praktiske opgaver. Det ene af dem - teorien for tilnærmelse af funktioner - opstod i begyndelsen af det 19. århundredes anden halvdel i den russiske matematiker, medlem af Paris' videnskabsakademi, P. Tjebysjovs arbejder. I 1856 skulle han afholde et kursus i praktisk mekanik for sine studenter, hvor han specielt skulle fortælle om de på den tid anvendte mekanismer og teorien for deres bevægelse. Hans opmærksomhed blev tiltrukket af det såkaldte Watt's parallellogram, der anvendtes inden for teknikken til at omforme en fremadgående bevægelse til en roterende og omvendt, i særdeleshed i dampmaskiner. I virkeligheden frembragte Watt's parallellogram ikke en præcis retliniet bevægelse. Denne omstændighed førte til hurtigt slid og tab af kraft. Tjebysjov besluttede at skabe en mekanisme, der ville give den mindst mulige fejl (afvigelse) for et givet afsnit af et punkts bevægelse. Som resultat blev formuleret en matematisk opgave, der inkluderede den givne opgave som et særtilfælde. Denne lød således: En given funktion $f(x)$ skal tilnærmes ved hjælp af en linear kombination af de givne funktioner $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)\ldots\phi_n(x)$ således, at forskellen $D_n(x) = f(x) - \{c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\ldots+c_n\phi_n(x)\}$ for alle værdier af $x$ i intervallet $a \leq x \leq b$ er den mindst mulige, dvs. koefficienterne $c_1, c_2,\ldots,c_n$ skal vælges således, at $\max_{a\leq x\leq b} |D_n(x)|$ bliver mindst mulig. Med andre ord skal maksimum af forskellen $D_n$'s absolutte værdi for alle værdier af $x$ fra $a$ til $b$ være minimal i forhold til et vilkårligt sæt koefficienter $c_1, c_2,\ldots,c_n$.

På et rent matematisk plan har denne opgave tiltrukket og tiltrækker stadig mange matematikeres opmærksomhed i hele verden. De resultater, der er nået i teorien for approksimation af funktioner, finder talrige anvendelsesmuligheder på forskellige videnskabelige områder.

Det andet eksempel er allerede fra vor tid. Efter at teorien for luftarters, væskers og faste legemers kinematik allerede havde frembragt overbevisende resultater i Maxwell's, Boltzmanns, Gibbs' og andres arbejder, kom en række forskere til den faste overbevisning, at de matematiske midler til studiet af naturfænomener ud fra materiens molekylære opbygning endnu ikke var tilstrækkelige. Allerede Poincaré havde lige i begyndelsen af vort århundrede givet udtryk for den tanke, at statistisk fysik havde behov for, at der blev udviklet et nyt kapitel i sandsynlighedsregningen, hvor man ikke blot skulle beskæftige sig med tilfældige størrelser, men også med størrelser, der ændrer sig i tiden. Uafhængigt af Henri Poincaré og på en helt anden foranledning, i forbindelse med opgaven at undersøge skift mellem vokaler og konsonanter i russisk, begyndte A. Markov at studere en lignende opgave. Han grundlagde teorien for, hvorledes tilfældige størrelser, der er indbyrdes forbundne på en særlig måde, følger efter hinanden, hvilket på Jacques Hadamard's forslag fik navnet Markovkæder. Disse tanker blev senere - i 30rne - udnyttet af Norbert Wiener, Andrej Kolmogorov og Aleksandr Khintjin til konstruktionen af teorien for stokastiske processer, dvs. teorien for tilfældige størrelser, der ændrer sig med tiden. Samtidig havde alle de nævnte ophavsmænd bestemte fysiske fænomener for øje som eksempler: Norbert Wiener - brownske bevægelser, Andrej Kolmogorov - diffusionsprocesser, Aleksandr Khintjin - generelle spørgsmål inden for statistisk fysik. Som resultat grundlagde Andrej Kolmogorov teorien for stokastiske processer, hvor fortiden ingen rolle spiller, også kaldet teorien for Markovprocesser; Norbert Wiener tog et særtilfælde af processer, hvor fortiden ingen rolle spiller, under behandling, nu kendt under navnet Wienerprocesser; Aleksandr Khintjin udviklede teorien for stationære stokastiske processer. I vor tid har teorien for stokastiske processer forvandlet sig til et grundlæggende kapitel i sandsynlighedsregningen og fundet talrige anvendelsesmuligheder inden for fysik, kemi, radioelektronik, geofysik, biologi og andre videnskabelige områder.

Hvor vigtig den stadige vekselvirkning mellem ideer og praksis end er for matematikken, - kun ved hjælp af den er det dog ikke muligt at forklare dens fremskridt. Der findes også en anden kilde, uden hvilken matematikken ville blive forvandlet til en samling recepter og ville miste en betydelig del af sin intellektuelle og erkendelsesmæssige værdi. Jeg tænker på matematikkens indre problemer, den naturlige stræben efter generalitet i resultaterne og efter disses afsluttethed uafhængigt af væsentlige anvendelsesmuligheder. Dette gør det muligt for matematikken at komme praktiske krav i forkøbet og have en betydelig selvstændighed i sin udvikling.

I den voldsomme strøm af forskningsresultater, som man kommer ud for i vore dage, da der blot inden for matematikken årligt publiceres mange tusinde arbejder og bevises titusinder af nye sætninger,og nye teorier og højeffektive forskningsmetoder bliver foreslået, er en generaliserende tankegang påkrævet som aldrig før. Ellers forvandles hele denne samling af erhvervede fakta og ideer til kaos. Løsrevne fakta og ideer og enkelte, isolerede konklusioner er med deres masse i stand til at knuse os, i hvert fald er det i praksis vanskeligt, ja undertiden umuligt, at udnytte dem. De bliver kun til et instrument for erkendelsen og vil kunne anvendes ikke blot i et eller andet enkelt tilfælde, men også i en mængde andre, når de enkelte resultater bliver maksimalt generaliserede. Det er derfor, et bestemt spørgsmål hele tiden melder sig for matematikerne: Er den fundne lovmæssighed et isoleret faktum, eller udgør den et led i en hel kæde? Afdækkelsen af en sådan indbyrdes sammenhæng i resultaterne gør det muligt at betragte tidligere opdagede fakta fra mere generelle positioner og bemærke elementer af orden dér, hvor der indtil da kun var en amorf masse af nyttige ideer, begreber og sætninger. Det er derfor, at nødvendigheden af at konstruere en generel matematisk teori altid rejser sig for matematikken i hele sin påtrængenhed. Jeg vil gerne have lov at illustrere denne tanke med et eksempel, der står mig nært.

Lige i begyndelsen af det 18. århundrede beviste Jakob Bernoulli et vigtig sætning om følger af ind yrdes uafhængige forsøg, siden hen kaldt de store tals lov efter Bernoulli. Der var tale om at bevise følgende intuitivt klare resultat. Vi antager, at en vis begivenhed A i hvert af nogle uafhængige forsøg kan forekomme med en sandsynlighed lig p. Hvis vi med m betegner antallet af forekomster af begivenheden A ved n forsøg, så kan differensen $|(m/n)-p|$ ved et tilstrækkeligt stort n som regel gøres mindre end en vilkårlig på forhånd given størrelse $\varepsilon>0$.

Godt 30 år senere opnåede Abraham de Moivre et mere dybtliggende resultat om Bernoullis model, der siden er blevet kaldt de Moivre-Laplace's grænseværdisætning. Der skulle gå omtrent 100 år endnu, før S. Poisson udvidede disse fakta til en model for uafhængige forsøg, men med sandsynligheder for forekomsten af begivenheden A, der afhænger af forsøgets nummer. Vi bemærker, at han kom frem til disse sætninger i forbindelse med studiet af ballistiske opgaver.

I midten af forrige århundrede opdagede A.-L. Cauchy, med udgangspunkt i teorien for målefejl, at ved summering af uafhængige tilfældigt varierende størrelser med samme spredning nærmer fordelingen af summerne sig ved en forøgelse af addendernes antal til en særlig fordelingstype, der siden har fået navnet normalfordelingen. Der havde fundet en ophobning af spredte fakta sted.

I 1867 blev P. Tjebysjov's berømte sætning publiceret, hvori de store tals lov blev bevist enestående enkelt i en enestående generel form. Bernoullis og Poissons sætninger var indeholdt i den som meget enkle særtilfælder. Naturvidenskaben fik en ny effektiv forskningsmetode, der gjorde det muligt at forudse resultatet forud for et eksperiment. 30 år senere fremkom et nyt arbejde af P. Tjebysjov, hvori der blev givet en dybtgående generalisering af de Moivre-Laplace's og Poissons sætninger, der vedrører en tilnærmelse af fordelingsfunktionerne for summer af uafhængige tilfældigt varierende størrelser til den såkaldte normalfordeling. P. Tjebysjov's resultater her vakte interesse hos en række andre forskere - A. Markov, A. Ljapunov og senere P. Lévy, Sergej Bernstein,

V. Feller, Aleksandr Khintjin, Andrej Kolmogorov og mange andre, der bragte studiet af dette område for matematisk tankegang væsentligt fremad. Samtidig med en rent teoretisk udvikling af de oprindelige spørgsmål udvikledes også udnyttelsen af den konstruerede teori inden for statistisk fysik, biologi og ingeniørvæsen. Fakta, der tidligere havde været isolerede, blev elementer af en stor og indholdsrig teori. Skabelsen af en teori førte til en fuldkommengørelse af bevismetoder, en forenkling af ræsonnementer og en mere dybtgående og klar forståelse af de vilkårs væsen, under hvilke det var lykkedes at opdage rigtigheden af disse eller hine lovmæssigheder. Siden er form og system i fremstillingerne blevet afpudset, hvilket giver mulighed for at fremlægge store grupper af spørgsmål, der tidligere syntes fjernt fra hinanden, ud fra ensartede positioner.

Den tredje kilde til nye problemer i matematikken hænger sammen med dens motivering, dvs. med en kritisk revision af dens udgangspositioner, grundlæggende begreber, forestillinger om bevisers fuldstændighed og strenghed, og med en fremdragen af den matematiske tankegangs centrale retninger. Dette er også absolut uundværligt, såvel for at bevare matematikkens enhed, som for at bringe det logiske fundament i overensstemmelse med dets indhold. En sådan revision blev foretaget i forrige århundrede og er knyttet til navne som A.-L. Cauchy, K. Weierstrass og en række andre fremragende videnskabsmænd. I begyndelsen af det 20. århundrede blev der igen gennemført en sådan revision på basis af mængdelæren, hvis grundlag var blevet skabt tidligere af Georg Cantor. Hver af disse etaper i matematikkens udvikling gav stødet til dens stormende fremskridt ved at fremdrage en mængde tidligere ubemærkede udviklingsmuligheder og dybtliggende forbindelser mellem forskningsområder. Matematikken har ændret sit ansigt, men er samtidig blevet mere fleksibel og homogen og har fået uforholdsmæssigt meget videre muligheder for at studere verden omkring os. Samtidig blev der skabt forudsætninger for udviklingen af nye produktive grene af matematikken - funktionalanalyse, teorien for stokastiske processer osv. Endelig blev der åbnet en vej for nye opfattelser i matematikken - ikke-konstruktive beviser og en vid udvikling af rene eksistensteoremer.

Selvfølgelig tages problemer i forbindelse med matematikkens motivering heller ikke af dagsordenen nu, eftersom matematikken er i rivende vækst, og der opstår nye begreber og nye forskningsområder inden for den. Et bredt arbejdsprogram på dette plan er i løbet af de sidste tiår blevet gennemført af en gruppe franske matematikere, kendt under navnet Nicolas Bourbaki. Deres opfattelser har vakt stor interesse i hele den matematiske verden.

## NOGET OM DEN MATEMATISKE DISCIPLINS HISTORIE

I løbet af de årtusinder, matematikken har eksisteret, har den gennemgået en lang og broget vej, og herunder har den mere end en gang ændret karakter, indhold og fremstillingsform. Fra den første forestilling om en ret linie som den korteste afstand mellem to punkter og fra den materielle opfattelse af hele tal er matematikken kommet frem til dannelsen af mange nye begreber og en række effektive metoder, der har forvandlet den til et magtfuldt redskab i udforskningen af naturen. Fra primitiv tællekunst ved hjælp af småsten, pinde eller indsnit har matematikken forvandlet sig til en omfattende videnskabelig disciplin med sin egen forskningsgenstand og specifikke, dybtgående metoder, og den har udarbejdet sit eget, meget økonomiske og præcise sprog, der har vist sig enestående effektivt ikke blot inden for matematikken, men også på dens talrige anvendelsesområder.

De første matematiske forestillinger var i brug hos mennesker på det menneskelige samfunds allertidligste udviklingsstadier. Sandsynligvis er forestillinger om afstandes og størrelsers ulighed opstået hos mennesker tidligere end forestillinger om genstandes antal. Dannelsen af et elementært regnebegreb inden for grænserne af enere fandt sted i den periode af menneskehedens historie, hvorfra der ikke er bevaret skriftlige vidnesbyrd. Dette er helt naturligt, eftersom tale, elementær regnekunst og den første erfaring i at tænke kan henføres til tidspunkter, der ligger langt forud for fremkomsten af selv det mest ufuldkomne skriftsprog. Man kan kun dømme om udviklingen af matematiske begreber på det menneskelige samfunds tidlige stadium på grundlag af indirekte data, - observationer af visse stammer, der endnu i det 14.-19. århundrede var vilde, og studier af ejendommeligheder i levende og døde sprog, der ikke blot er kommunikationsmidler, men også et meget værdifuldt mindesmærke over fortidens åndelige kultur.

Økonomiske behov gjorde det nødvendigt for mennesker at fuldkommengøre reglerne for regning og afstandsmåling og ligeledes at udvide omfanget af matematiske begreber. Men som tiden gik, fik de erhvervede kundskaber i betydelig grad karakter af opskrifter og opfattedes ikke som en selvstændig kundskabsgren. Det er interessant at bemærke, at på dette udviklingstrin er de matematiske kundskaber påfaldende ens i form og indhold hos forskellige folkeslag, der i praksis endog ikke havde samkvem med hinanden. De regler for udregning af rumfang og arealer, der anvendtes i Oldtidens Babylon og Oldtidens Ægypten, er identiske med tilsvarende regler i Oldtidens Kina. Den egenskab ved en retvinklet trekants sider, der er kendt under navnet Pythagoras' sætning, blev fundet for særlige trekanter med sider, der måles i hele tal, længe før Pythagoras i Oldtidens Babylon. Disse egenskaber var også kendt i Oldtidens Kina. Dette er der ikke noget mærkeligt i, eftersom alle folkeslag, der vender sig mod studiet af geometriske former eller af hele positive tal, faktisk går ud fra de samme praktiske opgaver. Folk kunne simpelt hen ikke lade være med at tælle genstande og at støde på rektangler, cirkler, cylindre, terninger. Økonomiske behov gjorde det gradvist og yderst langsomt nødvendigt at udarbejde regler for udregningen af arealer og rumfang af de enkleste flade figurer og rumlige legemer. Dette var påkrævet på grund af behovet for inddeling af jorder, for udregning af kornmagasiners rumfang, for forudberegning af jordarbejdernes omfang ved bygningen af forsvarsværker.

Således blev den moderne matematiks fundament lagt i løbet af årtusinder ved talrige ukendte menneskers forsøg og tanker. Gradvist lærte mennesker at udføre aritmetiske operationer med hele tal og siden med rationale brøker, og de lærte at beregne arealet af temmelig komplicerede figurer og rumfanget af de enkleste legemer korrekt. Allerede dengang opfandt menneskene hjælpemidler til forenkling af mellemregninger. Om også disse opfindelser var meget primitive, så blev skabelsen af dem dog et vigtigt element i menneskelig kultur, og hvis menneskeheden i dag ved uforholdsmæssigt mere og drømmer om løsningen af problemer, der for ganske kort tid siden virkede fantastiske, så er forudgående generationers fortjeneste ved dette stor, for det er deres erfaring, vi baserer vores kundskaber på.

I denne forbindelse kan jeg ikke lade være med at anføre, hvad en af vort århundredes store digtere, Vladimir Majakovskij, har sagt: 'En matematiker er et menneske, der bringer noget nyt ind i matematikken. Det menneske, der først formulerede, at "to og to er fire", er en stor matematiker, selv hvis han fandt frem til denne sandhed ved addition af to skod med to skod. Alle senere mennesker, om også de har adderet umådeligt meget større ting, f.eks. et lokomotiv med et lokomotiv, - alle disse mennesker er ikke matematikere.' Og det er jo rigtigt, at i denne periode, hvor matematikkens udvikling begyndte, opdagede man mange lovmæssigheder, der er blevet bevaret i videnskaben til vore dage.

Det primitive matematiske regne- og måleapparat, der fremstod som følge af fjerne tiders jægeres, kvægavleres, agerdyrkeres og krigeres behov, viste sig klart utilstrækkeligt, da astronomien begyndte at udvikle sig, og lange rejser krævede, at der blev udarbejdet metoder til orientering på et givet sted. Det praktiske liv, herunder også praksis i naturvidenskaberne, der var under udvikling, stimulerede matematikkens videre fremskridt. Og i Oldtidens Grækenland begyndte matematikken virkelig i løbet af ca. 200 år at antage form af en deduktiv videnskab. Fra at have været en samling opskrifter, som man skulle anvende i den ene eller anden hverdagssituation, forvandledes den til et logisk opbygget system af videnskabelige kundskaber. I menneskehedens kulturelle udvikling fandt der et spring sted, hvis lige det er svært at finde i løbet af hele videnskabens historie. Men det ville være forkert at mene, at praksis var den eneste årsag til dette imponerende spring i menneskehedens videnskabelige og kulturelle udvikling. Også andre faktorer, herunder sociale, spillede her en ikke mindre betydningsfuld rolle. For første gang i historien trådte demokrati i stedet for en despotisk styreform, selv om det kun var et begrænset demokrati for frie, men ikke for slaver. Men demokrati krævede begrundelse af meninger og ikke en uimodsagt udførelse af, hvad eneherskeren, despoten, befalede. Denne ændring i tankegangen førte utvivlsomt også i matematikken til en omfattende ændring af fremstillingsformen, - matematiske regler skulle ikke blot læres udenad, men man skulle vise, at de var rigtige, bevise dem.

Det er interessant at bemærke, at matematikkens enorme fremskridt i Oldtidens Grækenland ikke tøvede med også at give sig udslag i matematikundervisningen. I Oldtidens Babylon og Oldtidens Ægypten undervistes der kun i matematik som et system af praktiske færdigheder, der var yderst vigtige for en statsembedsmands fremtidige arbejde. I de bevarede 'elevhæfter' fra dengang er der end ikke antydninger af konklusioner eller af forklaringer til de studerede matematiske regler, - alt er baseret på indterpning af en bestemt handlingsrækkefølge. I Oldtidens Grækenland var situationen en anden. Dér var der ligeledes skoler, hvor vordende købmænd og håndværkere lærte sig matematiske kundskaber, der var nødvendige i deres forestående daglige virksomhed, eller, som Platon udtrykte det, til 'praktiske behov'. Men der fandtes også skoler, hvor matematikken blev fremstillet som et system af videnskabelige kundskaber, der logisk kan udledes af nogle primære præmisser. Denne holdning, som Platon skrev, var rettet mod en erkendelse af det 'egentlige' og ikke det 'praktiske'. Menneskeheden havde indset vigtigheden af matematisk erkendelse i sig selv uden hensyn til opgaver i konkret praksis. Uden tvivl opstod en sådan holdning ikke uden indflydelse fra den pythagoræiske skole, ifølge hvis lære naturlovene udtrykkes gennem tal. Vi kan i øvrigt bemærke, at inddelingen af matematikken i 'ren' (teoretisk) og 'anvendt' kan føres tilbage til Oldtidens Grækenland.

Der blev skabt forudsætninger for et nyt stormskridt og et efterfølgende stadig voksende fremskridt i de matematiske kundskaber med de store søresjsers epoke og fabriksproduktionens udvikling og desuden artilleriets udvikling. Bevægelsesproblemer og beregning af banekurver for et legeme, der bevæger sig under påvirkning af en given kraft, blev en central opgave i den epoke. Løsningen af denne opgave førte, sammen med løsningen af opgaven at trække en tangent til en given kurve, til skabelsen af differential- og integralregning. Isaac Newton og G. Leibniz havde talrige forgængere på dette punkt, - Cavalieri, de Fermat, Barrow og andre. I matematikken indførte man en ny regningsart - grænseovergang, som krævede mange tiår med fremragende matematikeres anspændte arbejde, langvarige diskussioner og indsamling af fakta, for at befri denne operation for et anstrøg af mystik og uklarhed.

For Newton var opfindelsen af den matematiske analyse og de grundlæggende operationer i forbindelse med denne - differentiering og integrering - kun et nødvendigt skridt på vejen til en løsning af dynamikkens problemer. De var det matematiske sprog, hvorpå man kunne tale med naturen og studere bevægelse i dens simpleste mekaniske form. I det 18. og 19. århundrede fulgte den ene opdagelse efter den anden som ud af et overflødighedshorn. I det 18. århundrede løstes de grundlæggende problemer ved et punkts og et fast legemes dynamik, og desuden blev grunden lagt til celest mekanik, og her blev gjort store fremskridt.

Matematikkens klassiske del - geometrien - fik en stærk forbundsfælle i analysen. Der dukkede en ny matematisk disciplin op - differentialgeometri, der var nært forbundet med mekanikken og dens opgaver. Leonhard Euler begyndte at udarbejde grundlaget for variationsregning, - en teori for en speciel slags opgaver, der er af meget stor betydning for mekanik og fysik. Netop fra variationsregning går der tråde til den moderne teori for optimal styring af processer. Til det 18. århundrede må man også henføre konstruktionen af begyndelsen til matematisk hydrodynamik (Daniel Bernoulli), teorien for komplekse funktioner (Leonhard Euler) og teorien for differentialligninger - et grundlæggende forskningsinstrument i al naturvidenskab.

På grænsen mellem det 18. og det 19. århundrede begyndte matematisk fysik og dens vigtigste beregningsapparat - teorien for partielle differentialligninger, i første række andengradsligninger - at udvikle sig fra forskellige positioner. A.-L. Cauchy, J.-B.-J. Fourier og P. Laplace ydede et uvurderligt bidrag til denne nye teori.

Et principielt omsving i matematisk tænkning er knyttet til navnene K. Gauss, N. Lobatjovskij og J. Bolyai. Deres ideer har ikke blot matematisk, men også en dyb filosofisk karakter.
Der er her tale om konstruktionen af såkaldte ikke-euklidiske geometrier. Fra Euklids tid havde alle videnskabsmænd været dybt overbeviste om, at den verden, vi lever i, geometrisk er indrettet således, som skolegeometrien lærer os. Denne overbevisning var så kraftig, at i Kants filosofi fremkom en lære om medfødte ideer,

og en af disse medfødte ideer var forestillingen om rummet. Euklids geometri var den eneste, og dens former var nedlagt i os inden fødslen. I 1826 publicerede N. Lobatjovskij sit første arbejde, hvori han konstruerede en geometri, der afvigede fra den euklidiske. Det eneste, der var ændret i den, var det berømte femte aksiom om parallelle linier, ifølge hvilket der igennem et vilkårligt punkt i en plan kan trækkes en og kun en ret linie, parallel med en given linie. Det lykkedes for Lobatjovskij at konstruere en geometri, i hvilken alle aksiomer var bevaret undtagen aksiomet om parallelle linier, og dette blev erstattet af et andet: Gennem ethvert punkt, der befinder sig i en plan uden for en given ret linie, kan man trække to forskellige parallelle rette linier. Heller ikke denne nye geometri indeholdt logiske modsigelser. Seks år senere publiceredes en artikel af J. Bolyai, hvori denne idé ligeledes blev udarbejdet. Og endelig fandt man i manuskriptnotater efter Gauss' død nogle resultater, dateret til begyndelsen af det 19. århundrede, hvori nogle grundlæggende resultater i Lobatjovskij's geometri var indeholdt.

Fremkomsten af i logisk henseende upåklagelige geometriske systemer, forskellige fra Euklids geometri, betegnede en ny etape i matematikkens udvikling, - den aksiomatiske metode fik fast fodfæste i den, og der åbnedes muligheder for konstruktionen i vort århundrede af relativitetsteorien, der hænger sammen med dybtgående ændringer i vore forestillinger om det virkelige rums opbygning. Egentlig blev ideen om geometriernes mangfoldighed i verdens opbygning allerede udkastet af Lobatjovskij, der sagde, at det er muligt, at 'visse kræfter i naturen følger én, andre - deres særlige geometri'.

Ideen om matematikkens aksiomatiske opbygning, der stammer helt tilbage fra Oldtidens Grækenland, har først fået sin bemærkelsesværdige udvikling i vore dage, og ikke blot til konstruktion af abstrakte teorier, men også til praktiske formål. I praksis er det enestående vigtigt at vide, under hvilke vilkår dette eller hint problem er løst, og hvornår det altså er muligt at udnytte den opnåede løsning. Endvidere er dette uundværligt for en eksperimentel kontrol af teorien og for fuldkommengørelsen af vor viden om de processer, der interesserer os.

Det 20. århundrede har bibragt matematikken en mængde nye ideer, der har ført til udviklingen såvel af nye grene af teoretisk matematik og nye begrundelser af den, som af nye anvendelsesmuligheder. Matematikken er blevet abstrakt og samtidig fleksibel, mere velegnet til studiet af verden omkring os og dens fænomener. Matematikerne er blevet mere modige til ikke blot at anvende et allerede færdigt logisk apparat, men også at udarbejde nye midler i deres bestræbelser på at gengive de studerede fænomeners ejendommeligheder mere præcist. Algebra har forvandlet sig til en generel teori for algebraiske operationer med objekter af vilkårlig art. Særlig betydning har en ny matematisk disciplin fået - mængdelære, der er blevet hele matematikkens fundament. Nærhedsbegrebet, der altid har spillet en betydelig rolle, er blevet udgangspunkt for konstruktionen af kvalitative angrebsmåder til en række matematiske problemer. På basis heraf påbegyndtes skabelsen af en ny matematisk disciplin - topologi. Rumbegrebet har fået en bred generalisering. Begreberne metrisk og topologisk rum har givet mulighed for en bredere introduktion af geometriske forestillinger og anskuelighed i den matematiske analyse. Under indflydelse fra fysikken begyndte funktionalanalysen at blive udviklet, og den har forvandlet sig til en af de grundlæggende retninger i vor tids matematik. Under indflydelse af fysikkens, teknikkens og biologiens behov opstod teorien for stokastiske processer. Den påtrængende nødvendighed inden for det praktiske liv og videnskaben af at udføre komplicerede beregninger førte til skabelsen af edb-maskiner. Edb-maskinerne fra deres side har udøvet og udøver stadig en afgørende indflydelse på udviklingen af hele matematikken og ikke kun af dens beregningsaspekter. Desuden har fremkomsten af edb-maskiner bevirket en voldsom stigning i anvendelsen af matematiske metoder på andre videnskabsområder.

## M O D E R N E   M A T E M A T I K   O G V I D E N S K A B E L I G   T Æ N K E G A N G

Vi vil nu standse op ved den kendsgerning, at matematikken har indflydelse på ændringer i selve formen for videnskabelig tænkning og på traditionelle måder at drage konklusioner på. Det er utvivlsomt af interesse at beskæftige sig med dette spørgsmål om ikke af andre grunde, så fordi det gør det muligt at trænge dybere ind i videnskabernes matematiseringsproces og at forstå årsagerne til, at dette fænomen er uundgåeligt.

Erkendelsen har flere udviklingstrin. Først iagttager mennesket fænomener og lægger mærke til visse af deres ejendommeligheder. Derpå går han over til at udføre eksperimenter, dvs. iagttagelser af de fænomener, der interesserer os, i strengt fastlagte betingelser, med henblik på at præcisere de erhvervede kundskaber. Samtidig finder der forsøg sted på at forklare de iagttagne fakta på basis af eksisterende almene forestillinger. Der skabes en teori for fænomenet. Af denne teori udledes konsekvenser. Ud fra disse konsekvensers sammenfald med fænomenets forløb dømmer man om teoriens overensstemmelse med den virkelige situation. Hvis teorien gør det muligt at opnå viden om fakta, der ikke er iagttaget tidligere, og det derpå lykkes at opdage dem i virkeligheden, så får teorien en vigtig bekræftelse. Men teorien kan være af rent kvalitativ karakter, selve muligheden af at drage kvantitative konklusioner er måske ikke forudset i den. Indtil den seneste tid var det netop teorier af denne type, medicinen til stadighed havde med at gøre. I betydelig udstrækning havde også økonomiens konklusioner netop kvalitativ karakter. Uforholdsmæssigt større muligheder er der i de teorier, der er i stand til også at redegøre for den kvantitative side af fænomeners udvikling. Sådanne teorier gør det muligt ikke blot at drage konklusioner som 'hvis ledningernes temperatur øges med f.eks. $10^{O}C$, så øges slitagen på isolationen', men de skal også kunne svare, hvor mange procent slitagen på isolationen herved fremskyndes, og hvor længe den forhøjede temperatur skal virke, for at den forøgede faktor for slitagen på isolationen begynder at virke. Kvantitativt formulerede teorier er som regel tegn på, at en videnskab er nået til modenhed, og at den er langt fremme på vejen til erkendelse af de studerede fænomeners ejendommeligheder.

Menneskeheden har for meget længe siden lagt mærke til vægtstangens virkning og benyttet sig af den i umindelige tider. Men kun den kvantitative teori for vægtstangen gjorde det muligt at foretage forhåndsberegninger og forudberegne de kræfter, der skal til for at opnå den nødvendige effekt. Men dette skridt i udviklingen af teorien for vægtstangen fandt sted på et meget højt stadium i den videnskabelige tankes fremskridt.

Vi har hidtil kun været opmærksomme på en side af sagen, nemlig inddragelsen af matematikken og dens metoder til løsning af naturvidenskabelige og praktiske opgaver. Denne proces er uundgåelig, eftersom kvalitative kundskaber alene ikke gør det muligt at give en kvantitativ vurdering af fænomener og at prognosticere deres forløb. For at løse denne opgave er det nødvendigt at inddrage matematiske metoder sammen med en klar formulering af præmisserne og en fuldstændig klassifikation af og strenghed i de logiske slutninger. Det er disse momenter, vi nu vil tale om.

I matematikken opregner man altid den samlede mængde præmisser, hvorunder en opgave løses. Derfor er det opnåede resultat generelt kun sandt, når disse præmisser er opfyldt. For eksempel er Pythagoras' sætning,som vi alle kender fra barndommen, generelt ikke sandt for enhver retvinklet trekant, liggende i en overflade, som ikke er en plan. En så pertentlig præcision i opregningen af betingelserne for sætningerne,der tog sin begyndelse i matematikken allerede under hellenismen, var i lang tid kun typisk for matematikken. I andre videnskabelige discipliner og ligeledes i praktisk virksomhed forholdt man sig længe skeptisk til denne skærpede strenghed.

Den aksiomatiske fremstillingsform, der er antaget i geometrien siden Oldtidens Grækenland, fik større udbredelse i det 19. århundrede. I italienske geometrikeres arbejder og siden i David Hilberts berømte arbejde 'Geometriens grundlag' blev selve aksiomerne i Euklids geometri omhyggeligt undersøgt. Det viste sig da, at de klassiske aksiomer langtfra var tilstrækkelige til en streng logisk konstruktion, og at vi under logiske ræsonnementer ved bevisførelsen for geometriske sætninger umærkeligt har grebet til nogle betragtninger af intuitiv karakter, som ikke var indeholdt i de formulerede aksiomer. Siden slog algebra, mekanik, sandsynlighedsregning og en række andre områder af matematikken ind på samme vej med en klar opregning af en teoris præmisser. Ved en sådan fremstillingsform ved man altid, hvad der er tale om, og der er ikke fare for, at et og samme begreb eller et og samme resultat skal blive opfattet i forskellige betydninger.

Denne enkle tanke - at undersøge veldefinerede begreber og drage konklusioner angående dem - er i vore dage almindelig brugt såvel i videnskaben som i praktisk virksomhed. En streng logisk analyse af en række grundlæggende grammatiske begreber har vist, at deres definitioner ikke er fuldstændige. Denne situation klares ved, at vi har for vane til daglig at anvende ord i en bestemt mening, og derfor spiller definitionernes ufuldkommenhed ikke nogen alvorlig rolle. Imidlertid fører ethvert forsøg på at overdrage en automat konstruktionen af sætninger efter bestemte regler eller oversættelse fra et sprog til et andet uundgåeligt til fejltagelser og til talrige muligheder for forkerte vendinger. Men mennesket fører i vore dage meget hyppigt en sådan form for kommunikation med maskiner, og vi må kunne være sikre på, at maskinerne vil opfatte anvisningerne korrekt og gøre netop det, som de får besked på.

I forbindelse med menneskehedens første skridt i erobringen af verdensrummet bliver problemet aktuelt, hvordan menneskeheden skal kommunikere med andre civilisationer, som vi kan komme i kontakt med. Herved vil der uundgåeligt opstå et kommunikationsproblem. På hvilket sprog vil kommunikationen finde sted? Det er klart, at fransk, engelsk eller russisk er utilstrækkeligt til dette formål. Foreløbig er det først og fremmest science-fiction forfattere, der beskæftiger sig med disse problemer. De foreslår en løsning, som måske ikke vil finde sted i virkeligheden, - andre civilisationers repræsentanter befinder sig på et så højt udviklingstrin, at de allerede har oversættelsesautomater, der selv indstiller sig på den tilrejsende kosmonauts sprog og samtaler med ham på hans modersmål. Imidlertid spekulerer alvorligt arbejdende videnskabsmænd også over dette, idet de går ud fra den antagelse, at hvis vi skulle komme i kontakt med repræsentanter for ikke-jordiske civilisationer, så vil de besidde grundlaget for formel logik og benytte geometriske forestillinger. De ræsonnerer, at eftersom verdens love er de samme, så vil logikkens love og de grundlæggende geometriske begreber også være ens hos jordboer og hos repræsentanter for ikke-jordiske civilisationer.

Men nødvendigheden af en matematisk holdning til definitioners strenghed og præcision angår ikke blot så foreløbig fjerne vedperspektiver, men også vore jordiske forhold, uanset om de vedrører lingvistik, jura, ingeniørvæsen eller økonomi. Gennem en årrække havde jeg ret nær forbindelse med læger, da jeg sammen med dem beskæftigede mig med problemer angående en objektivisering af diagnoser for hjertesygdomme. Jeg blev slået af tilstedeværelsen af en næsten matematisk tankegang hos den faste lægestab, der arbejdede ved et institut for hjertesygdomme. Analysen af hver patient blev gennemført med en slående logisk pertentlighed, der indtil for nylig kun har været typisk for matematisk forskning.

Den anden side af tænkningens matematisering består i bestræbelsen på at udlede logiske konsekvenser af strengt formulerede udgangspositioner og derpå underkaste disse konsekvenser umiddelbar iagttagelse. Herved får de teoretiske konstruktioner, som tillader anvendelse af et deduktivt matematisk apparat med henblik på at drage logiske slutninger, en særlig værdi. Denne omstændighed giver mulighed for at udnytte den uhyre mængde konklusioner, der allerede findes i matematikken. Dette har fysikken allerede længe benyttet sig af. Det er næsten to århundreder siden, at teoretisk fysik opstod, som på basis af grundprincipper, der er udledt af iagttagelser og eksperimenter, får omfattende resultater på matematisk vis. Således har geometrisk optik og bølgeoptik udviklet sig, og således er udviklingen af akustik og elektrodynamik foregået.

I endnu højere grad har denne vej vist sin berettigelse i moderne fysik, der beskæftiger sig med atomare og subatomare fænomener. Den matematiske teori førte til konklusioner, ifølge hvilke der skulle eksistere elementer i materien, der tidligere ikke var iagttaget. De integral-, differential- og integro-differentialligninger, som de fysiske opgaver kunne reduceres til, førte til vigtige konklusioner. Disse konklusioner blev sammenlignet med resultaterne af iagttagelser, og ud fra dem lykkedes det at finde en mængde interessante konsekvenser, - at beregne størrelsen af en partikels masse og spænding, dens relation til tidligere kendte partikler osv. Undertiden varede det flere år, før det lykkedes eksperimentelt at bekræfte den matematiske teoris konklusioner. Moderne fysik er fuld af sådanne matematiske forudberegninger af virkelige fænomener, om hvilke intet var kendt, og som siden blev opdaget ved hjælp af komplicerede eksperimenter, der var specielt udtænkt på grundlag af en matematisk teori.

Det er ikke vanskeligt at anføre talrige andre eksempler på, at matematisk tankegang har været til gavn på andre videnskabelige områder - biologi, økonomi, produktionsplanlægning. Vi kan for eksempel tænke på, at elektroteknik og radioteknik fremstilles som matematiske discipliner og udnytter et forskelligartet og samtidig yderst kompliceret matematisk apparat. Dette er fuldt ud berettiget, eftersom det gør det muligt at udføre nødvendige beregninger, at prognosticere processernes forløb og bringe sig selv i en situation, hvor man kan kontrollere processerne i stedet for at være underkastet dem.

Vi har talt om, at kvaliteten af enhver teori for virkelige fænomener kontrolleres gennem praksis og gennem udførelsen af eksperimenter, der er tilsvarende organiseret. Nu er matematikken også begyndt at blande sig i spørgsmål angående organiseringen af selve eksperimentet. Hvordan skal man organisere observationer, så at man kan uddrage den maksimale information med samme antal forsøg? Dette problem er enestående vigtigt, eftersom der nu ofres enorme midler og menneskelige kræfter på forsøg i industrien og på eksperimenter i videnskabelige laboratorier. Som følge heraf har man i vor tid skabt principperne i en matematisk teori for det optimale eksperiment, som tillader en væsentlig reduktion af antallet af nødvendige eksperimenter, deres pris og varighed for at opnå begrundede konklusioner. Til tider er denne gevinst meget stor. Den grundlæggende idé, der herved udnyttes, består i at tage resultatet af hvert forudgående forsøg i betragtning og udføre hvert følgende således, at det kan hjælpe til at præcisere allerede indhøstede kundskaber.

Fremkomsten af EDB (elektroniske regnemaskiner) fremkaldte et enormt spring i ændringen af menneskehedens forestillinger om matematikkens rolle i løsningen af livsvigtige problemer. Det har vist sig, at man kan overdrage maskiner ikke blot udførelsen af store beregningsarbejder, men også gennemførelsen af logiske konklusioner, og de kan ligeledes gennemspille modeller af processer - vejrforandringer, økonomiske operationer, oversættelsesprocesser fra et sprog til et andet, bankoperationer, informationsoverførsel, beslutningstagning osv. Men for at dette kan blive muligt, er det nødvendigt først at udforme en model af fænomenet eller processen, at fremdrage de relationer og kvantitative forhold, der findes heri. Med andre ord er det nødvendigt at underkaste den en forudgående matematisk og logisk analyse. Der har åbnet sig en ny, meget effektiv forskningsmetode for menneskeheden, som næsten omgående har fundet meget vide anvendelsesmuligheder på de mest forskelligartede videnskabsområder. Som følge heraf er en mængde personer, der tidligere forholdt sig skeptisk til matematikkens muligheder i studiet af processer i naturen eller i samfundslivet, entusiastisk begyndt at gå over til en matematisk tankegang. Desuden gør tilstedeværelsen af matematiske maskiner det muligt på fantastisk kort tid at udføre storstilede beregninger, der endnu for ganske kort tid siden var utilgængelige for tidligere tiders regnetekniske instrumenter.

Vanskeligheder ved beregninger er gået over til at dreje sig om spørgsmål i forbindelse med skabelsen af tilsvarende programmeringssprog, med udformningen af regneprogrammer, med skabelsen af metoder til automatisk udvælgelse af det nødvendige program af maskinen selv osv. Matematikken er blevet befriet for nødvendigheden af at udføre rent tekniske, elementære operationer. Men til gengæld stilles der krav om udførelse af uforholdsmæssigt mere kvalificeret arbejde i forbindelse med menneskets kommunikation med computeren, med selve udforskningsprocessen af virkelige fænomener. Matematikernes interesser er blevet væsentligt udvidet, og samtidig er problematikken i de fænomener, der interesserer dem, blevet beriget. Således har ændringen i videnskabelig tankegang i retning af dens matematisering fået matematikken selv til at gøre fremskridt og væsentligt udvide sit arsenal af midler til studiet af forskelligartede fænomener i verden omkring os.

Note om formlen side 37. Ved J.L.

Fordelingsfunktionen for hver af de to elementers funktionstid er F, og fordelingsfunktionen for reparationstiden er G. Da er sandsynligheden for, at man kan nå at reparere et defekt element, inden også det andet svigter, lig med

$$\gamma = \int_0^\infty G(x)\,dF(x).$$

Vi ønsker at finde et udtryk for middelfunktionstiden T for et system, som starter med et fungerende element og et brugbart reserveelement. Det (tilfældige) tidsrum Z, som systemet rent faktisk fungerer i, kan opfattes som en sum: $Z = Z_1 + Z_2$, hvor $Z_1$ er tidsrummet fra start til det første svigt, og $Z_2$ er den resterende funktionstid. Nu er $T = EZ = EZ_1 + EZ_2$.

$EZ_1$ er middelfunktionstiden a for et element,

$$EZ_1 = a = \int_0^\infty x\,dF(x).$$

$Z_2$ er funktionstiden for et to-element-system, som ved start har et element i funktion og et element til reparation. Med sandsynlighed $1-\gamma$ går det fungerende element i stykker inden reparationen er afsluttet, og i givet fald er systemets middelfunktionstid a. Med sandsynlighed $\gamma$ er reparationen afsluttet inden det fungerende element går i stykker, og i givet fald er systemets middelfunktionstid lig med middelfunktionstiden for det først studerede system, altså T.
Alt i alt er derfor

$$EZ_2 = (1-\gamma)a + \gamma T,$$

og dermed

$$\begin{aligned} T &= EZ_1 + EZ_2 \\ &= a + (1-\gamma)a + \gamma T, \end{aligned}$$

hvoraf

$$T = a\left(1 + \frac{1}{1-\gamma}\right).$$

# M A T E M A T I K K E N  I  H V E R D A G E N .

Til rækken af navne, som vort århundrede har gjort sig fortjent til, kan vi med fuld ret føje endnu et: Det 20. århundrede - matematikkens århundrede. Denne ældgamle videnskabs fremskridt giver genlyd både på jorden og i verdensrummet. Uden dens nuværende præstationer er det utænkeligt at forestille sig den hastige udvikling inden for de mest fremskudte videnskabsgrene og fremkomsten af de nyeste produktionsformer.

Området for anvendelsen af matematiske metoder udvides stadig. De gør det muligt at optimere planlægningsprincipperne og styringsprocesserne i økonomien betydeligt. Deres indflydelse føles også i humanistiske discipliner som psykologi og sprogvidenskab.

Dette afspejler sig selvfølgelig også i opfattelserne inden for moderne uddannelse. Nødvendigheden af at udarbejde perfekte undervisningsprogrammer på de ældste klassetrin og på universitetsniveau bestemmes i høj grad af den teknisk-videnskabelige revolutions nuværende etape, hvor der stilles forøgede krav til kvaliteten af de matematiske kundskaber både hos den arbejder, der skal lære at anvende en "elektronisk drevet" maskine, og hos den videnskabsmand, der søger at forstå materiens fineste strukturer.

Det er klart, at man ikke kan ændre undervisningen i et så vigtigt fag rent mekanisk: "Mere information er bedre information." Man må ikke glemme, at matematikken udvider sig både i dybden og i bredden. På dens træ fremkommer der hele tiden nye forgreninger. Et enkelt menneske er i praksis ikke længere i stand til at sætte sig ind i opbygningen af hvert enkelt blad på dette træ. Den, der træder ind under denne mægtige, udstrakte trækrone, står foran et uundgåeligt valg: Hvordan skal han, efter at have dannet sig et samlet billede af videnskabens udvikling, standse ved de konkrete retninger, der først og fremmest svarer til hans faglige interesser.

En sådan følelse er velkendt for vidt forskellige specialister, hvis arbejde i større eller mindre grad er forbundet med anvendelsen at matematik. Men det er et spørgsmål, i hvor høj grad den bekymrer de pædagoger, der uddanner dem til praktisk virksomhed.

Ganske vist får de matematiske undervisningsplaner mere indhold, men alligevel er det, trods forandringer til det bedre, endnu for tidligt at fastslå: fra nu af er de vigtigste metodologiske problemer taget af dagsordenen. Mens vi er nået et godt stykke frem med løsningen af én opgave - hvad skal vi i dag undervise i, har vi næsten ikke nærmet os en anden - hvordan skal vi undervise nu. På de fleste højere læreanstalter har man bevaret det gamle "ideal" at indføre studenterne i fagets væsen, hvilket medfører en isoleret fremstilling uden henvisninger til begrebernes oprindelse og en teoris praktiske anvendelsesmuligheder. En sådan fremgangsmåde begrundes normalt således: "Eftersom de situationer, som den vordende specialist vil støde på, er for forskelligartede, er en abstrakt formidling af undervisningsprogrammet det eneste rigtige, og man kan ikke på anden måde give det mest nødvendige i koncentreret form." Men dette er blot et forsøg på at retfærdiggøre den traditionelle undervisningsmetodik, mens dens revision trænger sig hårdt på i virkeligheden.

I de seneste år vokser for eksempel antallet af fakulteter, hvor arbejdere med højere uddannelse, sædvanligvis ingeniører, får et nyt diplom som specialist i anvendt matematik. Nå ja, man kan jo sige: læreanstalterne reagerer tilstrækkelig fleksibelt på erhvervslivets behov, på hvis forskellige områder edb-teknikkens effektive midler, automatiske styringssystemer osv. tages i anvendelse i stadig større målestok.

Her er imidlertid anledning også til en anden vurdering. Vidner selve eksistensen af specialiserede fakulteter ikke om alvorlige lakuner, der koster dyrt, i den faglige uddannelse? For her er jo ikke blot tale om efteruddannelse af dimittender kort tid efter afsluttet eksamen, men om at studere igen i årevis for at få et fundamentalt nyt syn på mulighederne af at anvende matematiske metoder på praktiske områder.

Jeg tror ikke at dette synspunkt er for yderliggående. Erfaringen fra sådanne læreanstalter som den fysisk-tekniske, den elektroniske og andre, viser: et højt teoretisk niveau i matematikundervisningen og orientering mod dens anvendelse på praktiske områder sikrer dimittenderne en høj faglig mobilitet, uden hvilken det er umuligt hurtigt at sætte sig ind i fremvoksende teknisk-videnskabelige retninger.

Men lad os kaste et blik i de matematiklærebøger, der henvender sig til vordende specialister på forskellige områder. Det er let at se, at forskellene her i det væsentlige kun angår omfanget og fremstillingens kvalitet. Som regel er der end ikke gjort forsøg på at vise, hvorfor det ene eller det andet afsnit er vigtigt for teknologer, økonomer, biologer osv. Jeg opfordrer overhovedet ikke til en snævert praktisk løsning af spørgsmålet: med henblik på tilegnelsen af praktisk rutine kunne man tænke sig, at hvert enkelt fakultet skulle fremlægge sin strengt fagrettede samling opgaver såsom opgaven om det berygtede bassin, hvor der strømmer vand ind ad nogle rør og ud ad andre. Tværtimod, undervisningen i lærestoffet skal foregå således, at studenternes forestillinger udvides om grænserne for anvendelsen af matematikken, om de uhyre muligheder for på basis af den at udvikle forbindelser mellem forskellige områder og forskellige discipliner. Selvfølgelig er det samtidig vigtigt at sikre en tilstrækkelig fundamental, sammenhængende basis i specialisternes uddannelse. Matematikkens sprog skal for dem være et instrument til kreativt samarbejde ved løsningen af problemer, der dukker op, når videnskab og produktionsforhold konfronteres med hinanden. Men ikke sjældent må man konstatere, at der ikke findes pålidelige "paroler" hos repræsentanterne for disse sfærer.

Som følge heraf opstår der netop situationer som den, den kendte sovjetiske videnskabsmand A.A. Ljapunov har fortalt om i en af sine artikler. Når unge matematikere begynder at arbejde i en virksomhed inden for en eller anden produktionsgren, kommer de under ledelse af folk uden matematisk uddannelse. Ikke sjældent opstår der kedelige misforståelser. Matematikeren kræver en klart formuleret matematisk opgave: "Giv mig en ligning, så skal jeg løse den." Industriarbejderen svarer: "Jeg har ingen ligninger, og jeg har ikke brug for nogen. Her har De en praktisk opgave = et produktionsaggregat, eller en forsøgsopstilling, eller et sæt produktionsprøver, opnåede under forskellige vilkår. Noget i dem er godt, og noget i dem fungerer ikke så godt. Find ud af, hvad der er i vejen, og hjælp med at få produktionsprocessen i sin helhed til at fungere. Se, så får vi brug for Deres matematik."

Bag sådanne konflikter anes væsentlige fejltagelser i organiseringen af den højere uddannelse. Ingeniøren er ikke indstillet på i konkrete produktionsforhold at anvende matematiske konstruktioner, der er fremragende og logisk fuldkomne, men som han har fået indpodet i abstrakt form under sit studium. Den "rene" matematiker er opdraget i den overbevisning, at hans domæne er en tilbundsgående beherskelse af teorier, mens deres anvendelse er et privilegium for specialister i anvendt videnskab.

Trods al forkærlighed for matematikken ville det selvfølgelig ikke være rigtigt at anse dens universalisme for grænseløs. I øvrigt er en anden form for fetichdyrkelse lige så skadelig: at denne videnskabs dybder kun skulle kunne nås af de indviede. Også her må kilderne til en sådan opfattelse søges i undervisningsmetodikken. Hvis et menneske fra barnsben får indpodet: "Det vigtigste er at kunne alle definitioner, teoremer og deres formelle beviser," så er det naturligvis svært for ham at komme til den faste overbevisning, at de formler, der er skrevet ned i hæftet, ikke blot afspejler abstrakte sammenhænge, mer er et middel til erkendelse, et værktøj til handling.

Det er en af pædagogikkens vigtige opgaver at fjerne et vist slør af hemmelighedsfuldhed fra matematikken, der i vore dage virkelig udmærker sig ved en kompliceret symbolik. Det er først og fremmest skolelæreren, der skal være rede til dette, for det er ham, der lægger grunden til en videnskabelig verdensanskuelse hos den unge generation.

Indholdet af matematikundervisningen i de ældste klasser er i de seneste år blevet væsentlig ændret. Dette betyder imidlertid ikke, at det nu vedtagne program er perfekt. Der er en række punkter, hvor det skal yderligere udvikles. Først og fremmest skal man huske: i livet er det ikke tilstrækkeligt at ræsonnere logisk, når man opererer med matematiske begreber, men man må, bortset fra alt andet, hurtigt kunne beregne og vurdere regnestykkets omtrentlige resultat og samtidig ikke miste evnen til at udføre identiske transformationer. Desuden bør vi allerede i tiårsskolen give eleverne i det mindste nogle almene forestillinger om, hvordan matematikken i vore dage studerer tilfældige fænomener. Sådanne kundskaber er uundværlige ikke blot for kommende forskere og ingeniører, biologer og agronomer, men også for repræsentanter for de brede masseres erhverv i deres daglige arbejde.

Desværre svarer matematiklærernes uddannelsesniveau ikke til dagens krav, og lærebøgerne, ved hvis hjælp de indfører børnene i tallenes komplicerede verden, trænger også til en forbedring.

Det er nok værd at lytte til de videnskabsmænd, der foreslår at skabe en serie bøger for dem, der giver eller modtager undervisning, hvori der skulle fortælles om, hvordan matematiske metoder hjælper videnskaben med at finde fodfæste som en produktiv kraft i samfundet.

Det er klart, at i dannelsen af den materialistiske, marxistisk-leninistiske verdensanskuelse spiller samfundsvidenskaberne den afgørende rolle. Men det er indiskutabelt, at de andre videnskaber heller ikke bør stå udenfor i denne forbindelse. Matematiklærere er kaldet til at yde deres bidrag til hos ungdommen at udvikle en stræben efter at anvende erhvervede kundskaber til fremme af høje samfundsmæssige mål.

Det, der er fremragende i dag, er i morgen kun godt, og i overmorgen må man til at søge efter noget mere fuldendt til erstatning, - det er i denne søgende ånd, ethvert ungt menneske bør gå ud i livet. Kreativitet i arbejdet er en almenmenneskelig kategori, men matematikken er ikke dens ringeste instrument. Det er skolens og de højere læreanstalters opgave at lære at beherske dette instrument effektivt i gamle og nye produktionssfærer og videnskabsgrene.

B. GNEDENKO.
Professor ved Moskvas Universitet.
Medlem af det ukrainske videnskabsakademi.