

TEKST NR 60

1983

MATEMATISK MODEKSPERTISE

- ET EKSEMPEL

PROJEKTRAPPORT AF

ERIK O. GADE

JØRGEN KARREBÆK

PREBEN NØRREGAARD

"VEJLEDER": ANDERS MADSEN

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

MATEMATISK MODEKSPERTISE - et eksempel

af Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard

Vejleder: Anders Madsen

IMFUFA tekst nr. 60/83, RUC. 107 sider. ISSN 0106-6242

ABSTRACT :

I projektet undersøges ud fra et eksempel, hvorledes matematiske modeller udvikles og anvendes inden for et fagområde, her økologi.

Matematiske modellers udsagn indgår i grundlaget for politiske beslutninger f.eks. vedrørende udnyttelse af naturressourcer eller ved forureningsproblemer.

Desuden vil vi undersøge, hvorledes en kritik af anvendelsen af matematiske modeller kan foregå.

FORORD

Projektet er skrevet til matematikuddannelsens 2. modul (modelbygningsmodulet) og 3. modul (det erkendelsesteoretiske/videnskabsteoretiske modul). Knudepunkterne i disse moduler omhandler matematisk modelopbygning og kritik af eksisterende modeller samt matematikkens erkendelsesteoretiske status. Det vil sige overvejelser om forholdet mellem model og virkelighed, hvorledes matematisk erkendelse frembringes gennem en vekselvirkning mellem matematikkens indre dynamik og dens modelfunktion samt hvordan matematikkens udvikling og processer i samfundet påvirker hinanden.

Rapporten henvender sig til matematiklærere og -studerende. Disse gruppers forskellige baggrund for at læse og forstå en fagmatematisk tekst er søgt afhjulpet ved forklarende tekst og mellemregninger ved gennemgangen af artiklen i rapportens kapitel III, samt ved en generel diskussion af artiklens væsentlige begreber, i kapitel I.

Uden Klaus Grunbaums tekniske bistand ved en del mellemregninger og Henrik Laus indsats på tangentterne var projektet ikke blevet færdigt til tiden.

RUC, januar 1983.

MATEMATISK MODEKSPERTISE - ET EKSEMPEL

Forord.....	1
Indhold.....	2
Kapitel 0: Indledning.....	3
Kapitel I: Matematiske modeller for populationsdynamiske systemer....	7
: Ricker-mekanismer.....	13
: Ligevægt.....	18
: Stabilitet.....	19
: Bifurkation.....	22
Kapitel II: Oversigt over miljøstriden ved Hudson floden samt referat af Levin's testimony...	31
: Testimony of Simon A. Levin.....	48
Kapitel III: Gennemgang af Levin og Goodyears artikel.....	54
: Afsnit I.....	54
: Afsnit II.....	56
: Afsnit III.....	59
: Afsnit IV.....	71
: Afsnit V.....	75
: Afsnit VI.....	85
Kapitel IV: Konklusion.....	103
Litteraturliste.....	106

KAPITEL 0: INDLEDNING.

Vi vil ud fra et eksempel undersøge hvorledes matematiske modeller udvikles og anvendes inden for et fagområde, her økologi.

Matematiske modellers udsagn indgår i grundlaget for politiske beslutninger f.eks. med hensyn til udnyttelse af naturressourcer eller ved forurening af et miljø.

Desuden vil vi undersøge hvorledes en kritik af anvendelsen af matematiske modeller kan foregå.

Projektets udgangspunkt er en artikel fra Journal of Mathematical Biology 9, 1980. Artiklen hedder: "Analysis of an Age-Structured Fishery Model" og er skrevet af Simon A. Levin og C. Phillip Goodyear. Levin er ansat ved Section of Ecology and Systematics, Cornell University, Ithaca, New York, USA. Goodyear er ansat ved National Power Plant Team, U.S. Fish and Wildlife Service, Ann Arbor, USA.

Artiklen er en del af en større sammenhæng, en 17 år lang miljøstrid i USA, som blev afgjort i 1980.

Miljøstriden drejede sig om hvorvidt myndighederne skulle kræve ændrede kølesystemer ved nogle kraftværker langs Hudson River, således at virkningerne på fiskebestanden ved værkernes vandindtag til køling mindskedes. I denne diskussion optrådte på den ene side kraftværkerne og deres konsulenter og på den anden stat, miljøstyrelse og deres konsulenter.

Begge parter opstillede matematiske modeller til at beskrive virkningerne af kraftværkernes vandindtag på fiskepopulationerne i floden. Der blev

bl.a. opstillet hydrodynamiske transportmodeller og modeller for udviklingen inden for en fiskepopulation. De sidstnævnte modeller kaldes life-cycle modeller. Begge parter konsulenter brugte væsentligt de samme indsamlingsmetoder og data, men fik ved deres analyser forskellige resultater, bl.a. fordi de brugte forskellige modeller og gjorde forskellige antagelser m.h.t. parametrene ved modelsimulationerne og estimationerne. Deres konklusioner var derfor også vidt forskellige. Konsulenterne i miljøstriden udfærdigede omfattende rapporter og testimonies (erklæringer) til brug ved den endelige høring i 1980.

Den ene af forfatterne, som har skrevet artiklen, der danner udgangspunkt for vores projekt, udarbejdede også et testimony (The Concept of compensatory mortality in relation to impacts of power plants on fish populations, 1979). I dette testimony kritiserer Levin både miljøstyrelsen (som han selv repræsenterede) og værkerne for 1) Kun at have undersøgt populationerne isoleret. 2) Forudsat man ser bort fra denne mangel, er det problemfyldt at definere begrebet ligevægt og relatere det til naturen. Endvidere er det tvivlsomt om den reproduktionskurve (Ricker-kurve) som man har valgt at anvende, er den bedst egnede. 3) Hvad dækker begrebet compensation over og hvorledes viser det sig? Hvad sker der med en evt. compensation, hvis dødeligheden forøges via kraftværkernes miljøforstyrrelser? 4) Værkerne og miljøinstanserne har anvendt oversimplificerede teorier og modeller i forbindelse med vurderingen af kraftværksvirkningerne på en mangeartet fiskepopulation. I stedet for at følge et enkelt afkom (aldersklasse) gennem tiden, bør man aldersopdele bestanden og derefter undersøge hele

bestandens udvikling. Begrebet aldersstruktur er derfor meget vigtigt ved undersøgelser af stabilitet og svingninger i en mangeartet yngelpopulation. Sådanne aldersstrukturerede undersøgelser har ingen af de involverede parter i miljøstriden foretaget. Men dette undersøger Levin og Goodyear i deres artikel.

Denne artikel indeholder seks afsnit. Først præsenteres Ricker-ligningen, som indgår i grundlaget for opstillingen af værkernes og miljøstyrelsens modeller indenfor området life-cycle modeller. Levin og Goodyear forfiner en model indenfor et snævert område, og gør også der brug af Ricker-mekanismer.

I afsnit to opstilles en aldersstruktureret model, som benyttes ved en række modelsimulationer i afsnit tre for at afdække parametrenes kvalitative indflydelse på modellen.

I resten af artiklen forsøger forfatterne algebraisk at bestemme de simulerede kvalitative træk ved modellen.

Vi har valgt først at etablere en forståelsesramme for de spørgsmål, som diskuteres og undersøges i Levin og Goodyears artikel. Derfor indledes projektet med et kapitel om matematiske modeller i økologi. Der vises en modeloversigt indeholdende fire grundmodeller. Det er især en af disse, en ikke-linear differensligningsmodel, der har vores interesse.

De fire grundmodeller kan udbygges med begreberne rumlig udbredelse, varierende miljø, tidsforsinkelse og aldersstruktur. Det sidstnævnte begreb er især relevant i denne sammenhæng. Endvidere diskuteres begreberne ligevægt, stabilitet og bifurkation, da disse emner er væsentlige elementer i artiklens undersøgelser.

Ricker-ligningen danner grundlag for modelopstillingen og derfor gennemgås egenskaber ved denne.

I rapportens kapitel II gives en oversigt over den samlede miljøsag. Desuden er der et referat af Levin's testimony.

Levins og Goodyears artikel fra Mathematical Biology gennemgås i kapitel III med tilføjelse af forklarende tekst og mellemregninger.

Vi vil med denne fremgangsmåde søge at få placeret artiklens emne i en større sammenhæng. Vi følger hvordan matematiske modeller opstilles og udvikles, og hvilke resultater, der udledes af modellerne. Vi ser eksempler på, hvordan kritik af anvendte modeller kan foregå, og får derved en ide m.h.t. om den måde kritikken føres på er rimelig og relevant i forhold til problemstillingen.

Kort sagt er det vi vil undersøge - ud fra et eksempel: "Hvordan er vilkårene for matematisk modekspertise?"

KAPITEL I. Matematiske modeller for populations- dynamiske systemer.

I dette afsnit vil vi give en oversigt over matematiske/økologiske modeltyper samt begreber som modellerne kan udbygges med. Herefter vil vi indplacere case-artiklens model i dette hierarki. Vi vil så diskutere begreberne ligevægtspunkt, stabilitet og bifurkation i lyset af en konkret model. Undervejs vil vi forsøge at knytte de matematiske objekter med deres **strukturer** til det økologiske systems objekter og strukturer. Inden gennemgangen vil vi kort præcisere nogle økologiske begreber i forhold til modelkonstruktion.

Ordet økologi anvendes ofte synonymt med "miljøproblemer". Miljøet er bestemmende for organismers livsvilkår. Et miljø bestemmes dels af de fysiske og kemiske forhold, som omgiver organismerne og dels af andre organismer.

Økologi betyder læren om biologiske systemer over individniveau, dvs. om egenskaberne hos populationer, samspillet mellem populationer, og herunder det man sædvanligvis kalder dyre- og plantesamfund, samt økologiske systemer, som foruden populationer omhandler deres abiotiske omgivelser (Fenchel 1972, p.7).

Økosystemet betegner det højeste biologiske organisationsniveau. Et økosystem udgøres af et større eller mindre (og ideelt set lukket, men ikke isoleret) system med dets biotiske og abiotiske komponenter og med en strøm af energi gennem det.

En Population er en samling af individer fra samme art inden for et begrænset område. Antal individer pr. areal eller rumenhed kaldes populationsstørrelse (individdtæthed).

Ved teoristudiet af populations ændringer m.h.t. størrelse og udbredelse benyttes ofte matematiske modeller. Man kalder det populationsdynamiske modeller, da man forsøger at forestille sig hvilke kræfter, der står bag udviklingen i løbet af en tidsperiode.

Biologien er traditionelt en deskriptiv videnskab og indenfor økologien har man derfor også benyttet sig af samme fremgangsmåde. Man har område for område beskrevet og kvantificeret dyr og planter, men ofte ikke analyseret væsentlige årsagssammenhænge. Ud over "problemet" med fagtraditioner er biologiske systemer, herunder populationer, meget komplicerede at overskue. Et middel til at skaffe sig et overblik over, indsigt i og dermed styringsmuligheder for populationsdynamiske processer, kunne være opstilling af en matematisk model. (Fenchel 1972, p 12-13)

Ved en matematisk model for et givet virkelighedsområde forstås en samling matematiske objekter forsynet med nogle matematiske strukturer sådan, at hver af modellens objekter repræsenterer et objekt fra virkelighedsområdet (i økologien er objekter typisk populationer fra et økosystem.) og sådan, at strukturerne på modellens objekter svarer til strukturerne på virkelighedens objekter. Ved hjælp af modeller kan man skaffe sig overblik, men dette sker ofte ved forenkling og deraf følgende informationstab. Ved modelkonstruktioner gør man sig visse antagelser om virkelighedsområdets beskaffenhed. Overvejelserne får betydning for afgrænsning af området og valg af objekter. Antagelserne kan være funderet i teoretiske overvejelser eller bygge på mere ad hoc prægede hypoteser. Sådanne antagelser gør sig også gældende ved valg af strukturer i den matematiske model. Det foregående viser, at forholdet mellem model og virkelighed er kompliceret. Det er så-

ledes ikke ligetil at fortolke de udsagn, der udledes i modellen som udsagn om virkeligheden. Modellerne som opstilles kan have forklarende eller beskrivende hensigter. Om modellen har en forklarings-effekt afhænger af om den repræsenterer årsagssammenhænge eller blot systematiserer overfladefænomener. En matematisk model kan benyttes til prognoseformål, altså til at forudsige et systems (Økologiske) tilstand til et senere tidspunkt. (Birkmose *et al.* 1975 p 9-10)

Forudsigelser fra en model med ringe forklarings-effekt må behandles mere varsomt end forudsigelser, der stammer fra en model, hvis mekanismer er fundet i teorier. I matematisk økologi skelnes (ifølge May 1973 p. 10 f) mellem strategiske og taktiske modeller. Strategiske modeller forsøger at belyse generelle økologiske lovmæssigheder og sammenfatte ideer om økologiske forhold. Disse modeller interesserer sig for øko-systemers kvalitative egenskaber fremfor numeriske løsninger og værdier. Modellerne har således en forklarende hensigt.

Taktiske modeller søger gennem simulering af økosystemer kvantitativt at komme så tæt på virkeligheden som muligt. Denne type modeller benyttes som regel i forbindelse med ressource- og miljøproblemer. Taktiske modeller er således udelukkende beskrivende. Beskrivende modeller er ofte så store og matematisk komplicerede, at det er svært at foretage matematiske analyser af deres indre strukturer og egenskaber. Problemet i matematisk økologi, når man skal vælge modeltyper består i om man skal vælge kvalitative, strategiske og ofte simple modeller, som repræsenterer et meget forenklet økosystem, eller man skal vælge store, beskrivende og ofte komplicerede taktiske modeller med ringe forklaringsværdi.

I stedet for at gå nærmere ind på denne diskussion vil vi opstille en oversigt over modeltyper i matematisk økologi, samt omtale hvilke udbygningsbegreber disse modeller kan suppleres med.

Vi vil især diskutere generelle kvalitative træk for den modeltype og det udbygningsbegreb, der forekommer i artiklen. Endvidere vil vi behandle andre centrale begreber og teknikker, som benyttes i den omtalte artikel. Denne oversigt og generelle diskussion vil vi så senere benytte som forståelsesramme ved behandlingen af artiklens forskellige problemstillinger.

Modeltyper.

(Afsnittet er inspireret af Lange (1982) p.14-15 og 26-33 samt May (1981) p.5-30).

Inden opstillingen af modellen gøres visse **simplificerende** antagelser. D.v.s. modellerne er konstrueret under forudsætning af, at alle individer i populationen er ens m.h.t. reproduktion, død, fødevalg m.v., og at miljøet er konstant, at al information af betydning for systemets fremtid findes i dets nutidige tilstand samt, at individernes rumlige fordeling i miljøet er uden betydnings, f.eks. hvis tætheden for populationen er ens overalt i miljøet. Når man skal forsøge at få et overblik over typerne af matematiske modeller, kan man undersøge hvilke modeller, der er til rådighed for økologiske systemer, som er pålagt sådanne simplificerede antagelser. Der vil fremkomme fire grundmodeller, som de fleste andre modeller kan betragtes som modifikationer af.

De fire grundmodeller består af to deterministiske og to stokastiske. Forskellen indenfor hvert par af modeller består i, at i den ene regnes den uafhængige variabel, tiden, kontinuert, medens den er diskret i den anden. Denne forskel skyldes, at reproduktionen af nye individer kan ske løbende (kontinuert) eller til adskilte tidspunkter (diskret).

Skematisk ser modeloversigten således ud:

Afhængig variabel x

Uafhængig variabel t.	kont.	deterministisk differential lig.	Markov-kæde kont.param.	tilvækst kont.
	disk.	deterministisk differens lig.	Markov-kæde diskret param.	tilvækst diskret

Figur 1.1 (Lange 1982, p.24)

Grundmodellerne kan udbygges med begreberne: varierende miljø, tidsforsinkelse, rumlig udbredelse og aldersstruktur.

Varierende miljø.

I grundmodellerne blev det antaget, at omgivelserne var konstante, hvilket bevirker konstante fødsels- og dødsrater og -sandsynligheder og afkomsfordelinger. Men i det virkelige liv varierer omgivelserne enten årstidsafhængigt eller tilfældigt.

Rumlig udbredelse.

I de simplificerede modeller antages det, at populationens rumlige fordeling i miljøet ikke er afgørende for modellens mekanismer. Tætheden regnes ens for hele området. Men således forholder det sig sjældent i naturen.

Tidsforsinkelse.

Indtil nu har vi diskuteret modeller hvor kun systemets nuværende tilstand har haft betydning for systemets fremtidige tilstand. Men i naturen er situationen som regel en anden. Tæthedsreguleringsmekanismer arbejder ofte med en vis tidsudsættelse, der kan stamme fra en vegetations regenereringstid, miljømæssige effekter eller fra tidsrummet hvor

en generation der forløber forud for et fald i fødselsrater ved høje tætheder viser sig som et fald i den voksne population. (May 1981, p.13).

Tidsforsinkelsen i en 1.ordens differensligningsmodel er på 1 tidsenhed (ofte et år), og er afstanden mellem reproduktionstidspunkterne, altså en generatinstid.

Aldersstruktur.

Reproduktion og dødelighed er oplagt afhængige af populationens aldersstruktur. Det er derfor rimeligt at tage hensyn til dette forhold ved modelkonstruktionen. Det vil sige, at populationen ikke kun beskrives ved sin størrelse men også ved sin alderssammensætning. Dette begreb vil blive koblet til den konkrete model. Hvis man forudsætter at aldersklasserne er ikke-overlappende fører dette, i sin simpleste form, til en 1.ordens differensligningsmodel. Alle aldersklasser har altså samme længde f.eks. 1.år.

Ved opstilling af en model for én population, inddelt i aldersklasser, kan populationens størrelse karakteriseres ved en vektor $N=N(t,a)$, hvor t er tiden og a er alderen, d.v.s.

$$N_t = (N_{t,0}; N_{t,1}; N_{t,2}; \dots; N_{t,n})$$

hvor $n+1$ er antallet af aldersklasser, og n er maksimumsalderen.

Dynamikken i modellen er, at bestemme antallet af individer i de forskellige aldersklasser til tiden $t+1$, $t+2$ etc. Hvert individ i aldersklasse i bidrager med brøkdelen m_i individer til o 'te aldersklasse, hvor m_i er middelværdien af rekrutter fra et individ fra det i 'te år. Sandsynligheden

for at overleve fra i 'te til $(i+1)$ 'te aldersklasse er p_i , d.v.s. at det er brøkdelen p_i som overlever til næste aldersklasse. Dynamikken i modellen gives da ved følgende;

$$N_{t+1,0} = m_0 \cdot N_{t,0} + m_1 \cdot N_{t,1} + \dots + m_n \cdot N_{t,n}$$

$$N_{t+1,1} = p_0 \cdot N_{t,0}$$

$$N_{t+2,2} = p_1 \cdot N_{t,1}$$

.
.
.
.

$$N_{t+1,n} = p_{n-1} \cdot N_{t,n-1}$$

eller

$$\underline{N}_{t+1} = \underline{M} \cdot \underline{N}_t$$

Hvor \underline{M} er Lesliematrixen (se f.eks Williamson p.21ff) givet ved

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_n \\ p_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

Når biologer skal beskrive udviklingen i en bestand, er den ting de først og fremmest koncentrerer sig om, hvor mange nye rekrutter, der tilføjes bestanden hvert år, d.v.s. bestemme $(m_1, m_2, m_3 \dots m_n)$.

Ricker-mekanismen.

Indenfor fiskebiologien er der udviklet en række mekanismer til at beskrive dette forhold mellem

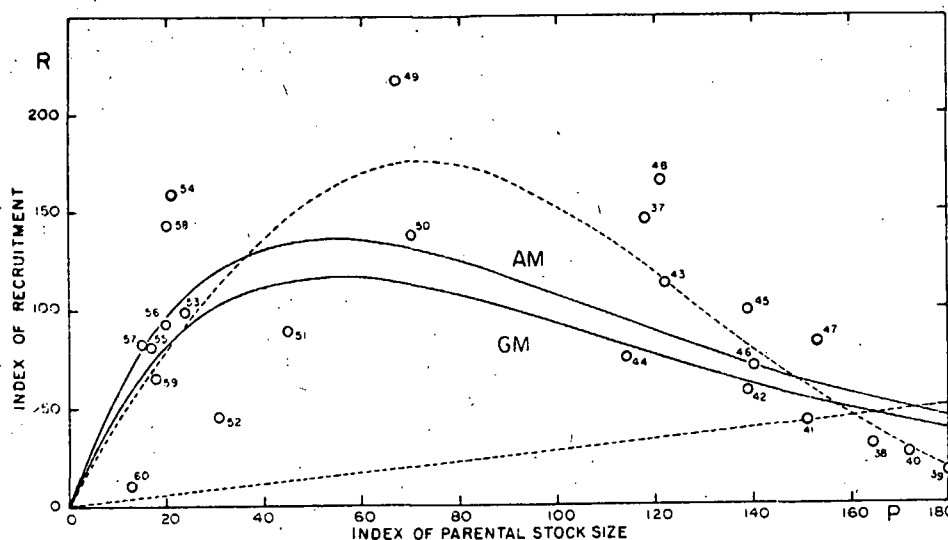
fiskebestanden og rekrutteringen. De to kendteste rekrutteringsmekanismer er fremstillet af Beverton and Holt (1957) og Ricker (1954). Vi vil her nærmere beskrive Ricker-mekanismen, der er udfærdiget af den canadiske havbiolog W.E.Ricker, da det er denne mekanisme der inddrages i casemodellen. Dette skyldes, at Ricker mekanismen er den mest anvendelige, når kannibalisme hos de voksne mod de yngre fisk er ret udbredt, og når tæthedsafhængig dødelighed har stor betydning. Den tæthedsafhængige dødelighed kan have mange årsager, f.eks.

- 1) æg der ikke bliver gydet p.g.a. gydepladserne er optaget.
- 2) Begrænsning af gode gydepladser, så flere æg bliver udsat for dårlige miljømæssige betingelse eller flere rovdyr end normalt.
- 3) **Konkurrence** om leverum for larver og småyngel, så nogle individer må leve i særligt udsatte situationer.
- 4) Sult eller mangelfuld føde hos de yngre stadier forårsaget af konkurrence om føden.
- 5) Så hård konkurrence om føden, at det hæmmer væksten af fiskene, og dermed gør dem mere udsatte som byttedyr.
- 6) Kannibalisme: destruktion af æg eller unge fisk af ældre individer af samme art.
- 7) Større kuld må være mere udsatte for makroskopiske parasitter eller mikroorganismer, da disse vil have større mulighed for at finde bolig for fuldendelsen af deres livscyklus.
- 8) Akkumulation af affaldsstoffer i begrænsede vandmæssige omgivelser.

(Ricker, 1954).

Det er ikke nødvendigvis alle ovennævnte årsager, der er lige vigtige, eller at behøver at komme i spil for den enkelte population.

For at få et billede af forholdet mellem en fiskebestand og dens rekruttering, kan man tegne en rekrutteringskurve, hvilket er en kurve, der afbilder antallet af rekrutter (R) i forhold til moderbestanden (P). Fra målinger på en fiskebestand, vil man få nogle punkter der ligger ret spredt på grund af miljømæssige årsager.



Graph of recruitment against parental stock for Arcto-Norwegian cod. Solid curves—Ricker reproduction curves for geometric and arithmetic mean values; the broken curve is drawn freehand. (Data from Garrod 1967.)

Figur 1.2 (Ricker 1975, p 287)

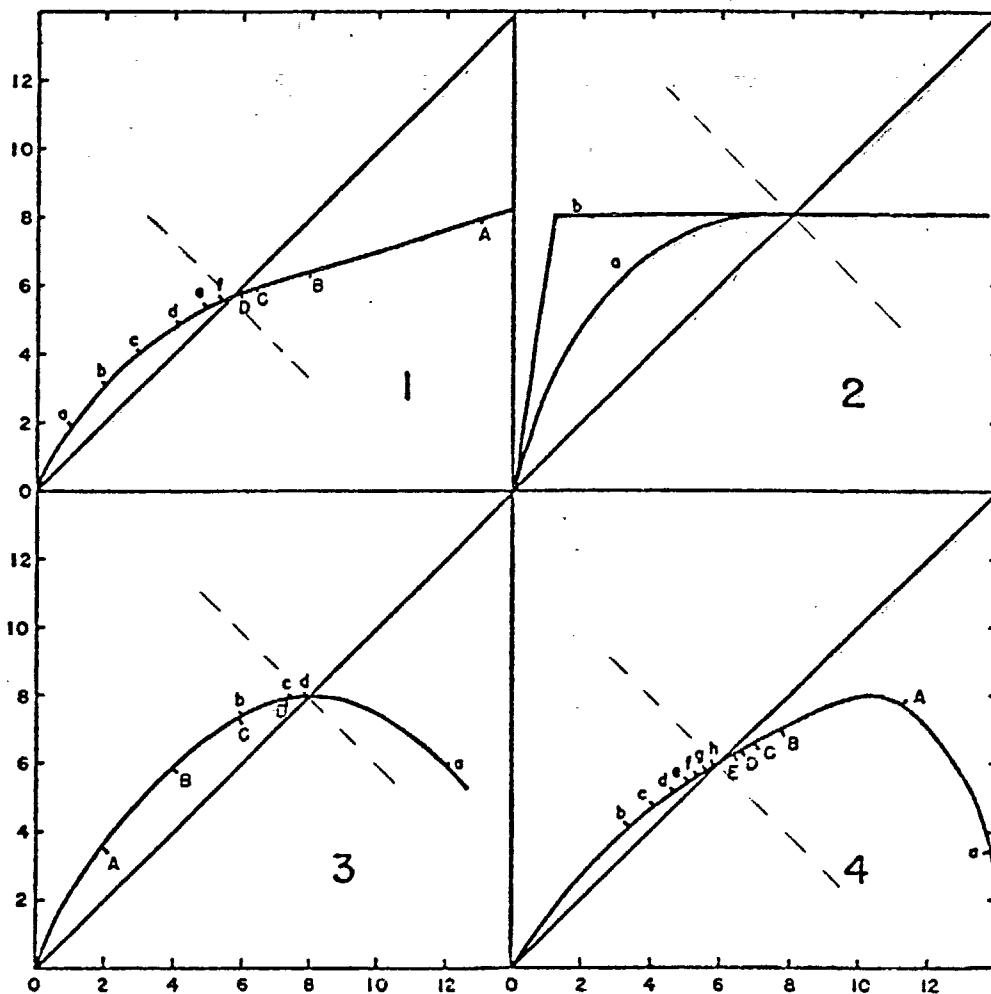
Problemet er at bestemme den kurve, som passer bedst til gennemsnitskurven for målingerne. Ricker fremhæver nogle kvalitative karakteristika, der er nødvendige for sådan en kurve;

- 1) Den skal gå gennem origo. Når der ikke er nogen voksen bestand, vil der heller ikke komme nogen rekrutter.
- 2) Den skal ikke gå ned til abscisse-aksen for store bestandstørrelser, så der ikke vil være noget punkt, hvor reproduktionen totalt elimineres for store tætheder. (Dette er ikke logisk nødvendigt, men det virker fornuftigt og stemmer overens med de observationer, man har haft til rådighed.)
- 3) Rekrutteringsraten (R/P) skal aftage kontinuert

ved voksende moderbestand (P).

4) Rekrutteringen må, for nogle værdier af moderbestanden P, overstige denne, (når de er angivet i samme enheder) ellers vil bestanden ikke kunne overleve. (Ricker 1975, p 281).

Figurerne 1 - 8 viser nogle forskellige typer af reproduktionskurver.



Stock-reproduction relationships characterized by a stable equilibrium. *Abscissa*— number of eggs produced by parent stock in a given year; *ordinate*—number of eggs produced by the progeny of that year.

Figur 1.3 (Ricker 1954. p.)

Familien af tæthedsafhængige vækstkurver, som Ricker viser kan beskrives matematisk ved følgende ligning;

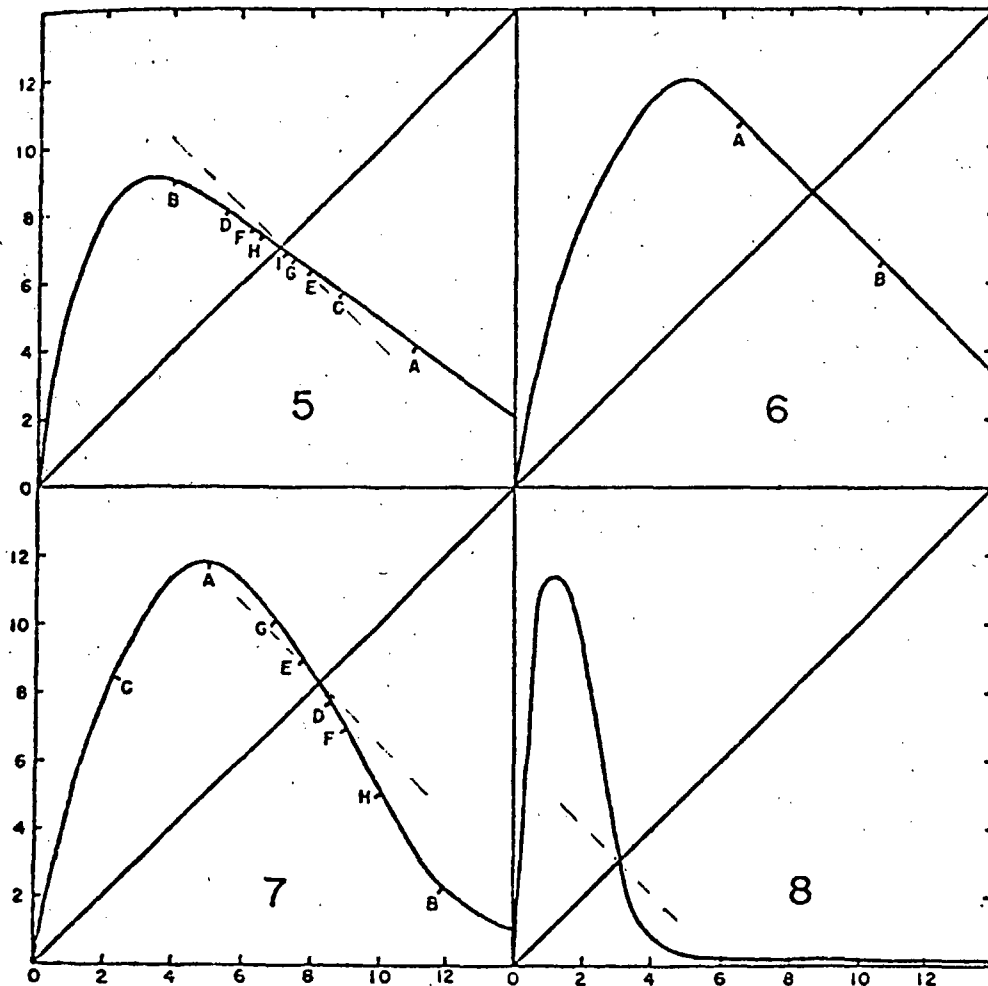
$$N_{t+1} = F(N_t)$$

hvor $F(N)$ er en ikke-lineær funktion af N (May 1981, p. 11f). En af de mest benyttede er;

$$R = \hat{\alpha} P \exp(-\beta P) \quad (1)$$

som angiver antallet af nye rekrutter (R) i et givet år ("næste år") som funktion af den moderlige ægproduktion P , hvor parameterne

$\hat{\alpha}$ = tætheds-uafhængig sandsynlighed for at æg overlever til alder 1, og



Stock-reproduction relationships in which there is an oscillating equilibrium, or (in 5) an oscillating approach to stable equilibrium. Axes as in Figures 1-4.

Figur 1.4. (Ricker 1954. p.)

β =koefficient for tæthedts-afhængig dødelighed.

De nye rekrutter i et givet år defineret ved (1) gy-
der en ny portion æg, kaldet P' , som er givet ved

$$P' = KR \quad (2)$$

hvor K er gennemsnitsantallet af æg pr. hun pr. år.

Ved at kombinere (1) og (2) og ved at definere $\alpha = \hat{a}K$
(gennemsnitlig antal rekrutter som et æg vil give
anledning til i næste generation) fås en rekursions-
sammenhæng

$$P' = \alpha P \exp(-\beta P) \quad (3)$$

Hvilket angiver, den moderlige ægproduktion fra re-
krutterne i et givet år, som en funktion af den nu-
værende moderlige ægproduktion P , og *anledning* til
en mekanisme for iteration. Det vil
sige, at hvis man kender antallet af æg i en bestand
et givet år, kan man beregne hvor mange levedygti-
ge æg de nye rekrutter vil hibringe bestanden, osv..

Ligevægt

På de otte figurer er indtegnet diagonalen,
som svarer til, at rekrutteringen er lig med moder-
bestanden. Punkterne hvori reproduktionskurven og
diagonalen skærer, kaldes ligevægtspunkter (\bar{P}). I
de tilfælde vi beskæftiger os med, vil det være et
ikke-trivielt ligevægtspunkt. Det vil altså sige,
at antallet af rekrutter og antallet i moderbestan-
den er lig hinanden i ligevægtspunktet; $P' = F(P) = P$,
så for $\bar{P} \neq 0$

$$\bar{P} = \alpha \bar{P} \exp(-\beta \bar{P}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln \bar{P} = \ln \alpha + \ln \bar{P} - \beta \bar{P} \quad \Leftrightarrow$$

$$\bar{P} = \ln \alpha / \beta$$

Differentialkvotienten med hensyn til P af (3).

$$F'(P) = \alpha \exp(-\beta P) + \alpha P(-\beta) \exp(-\beta P)$$

i ligevægtspunktet

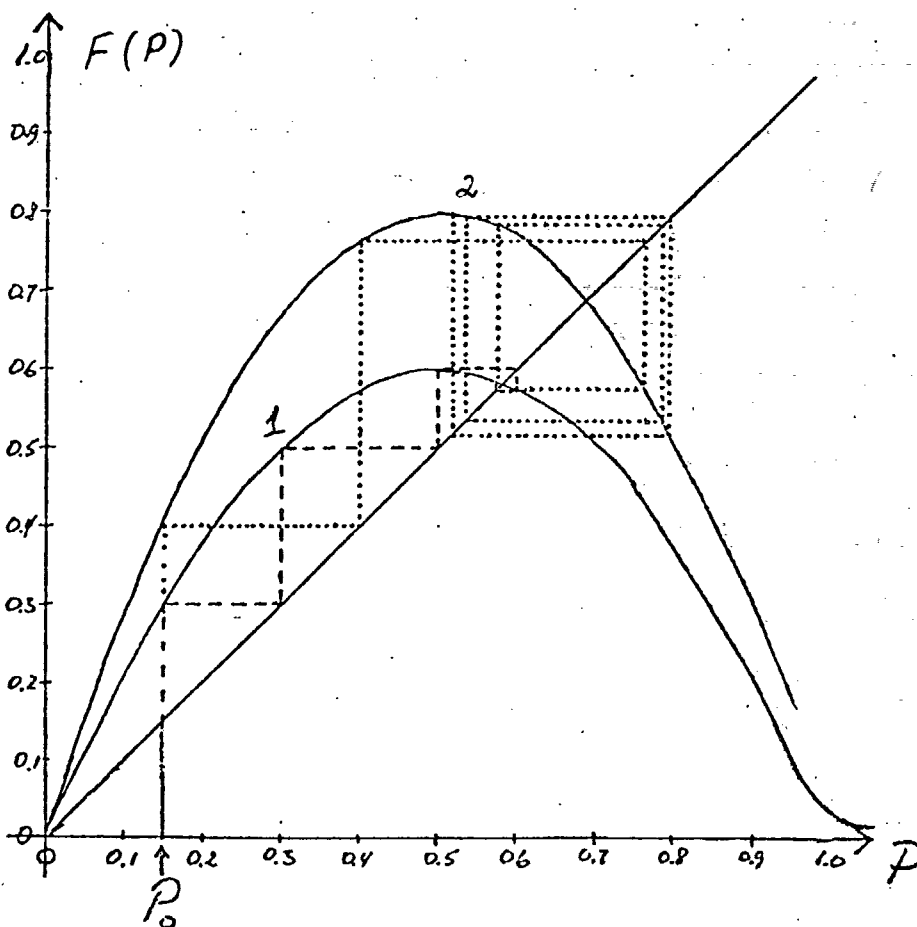
$$\begin{aligned} F'(\bar{P}) &= \alpha \exp\left(-\frac{\beta \ln \alpha}{\beta}\right) - \frac{\alpha \beta \ln \alpha}{\beta} \exp\left(-\frac{\beta \ln \alpha}{\beta}\right) \\ &= 1 - \ln \alpha \end{aligned}$$

som er tangenthældningen i ligevægtpunktet. I det følgende vil vi diskutere sammenhængene mellem tangenthældningen og systemets stabilitetsegenskaber.

Stabilitet.

Ved stabilitet forstås et økologisk systems evne til at vende tilbage til ligevægtpunktet efter en forstyrrelse. Der eksisterer tre former for stabilitet; Hvis systemet vender tilbage til ligevægtpunktet fra ethvert begyndelsespunkt (P_0), d. v. s. lige meget hvor kraftigt forstyrrelsen er, siges ligevægtpunktet at være globalt stabilt. Hvorimod lokalt stabilt vil sige, at ligevægtpunktet kun er stabilt for begyndelsespunkter i en omegn om \bar{P} - mindre forstyrrelser. Inden for økologiske systemer er der ofte tilfælde med flere ligevægtspunkter, hvor hvert ligevægtpunkt har sit eget tiltrækningsområde eller stabilitetsdomæne, som er det område hvor systemet vender tilbage til et ligevægtpunkt efter en forstyrrelse. Hvis systemet, efter en forstyrrelse fra ligevægtpunktet, divergerer fra ligevægtpunktet, siges ligevægtpunktet at være ustabil (lokalt). Et ustabil ligevægtpunkt (der er teoretisk beregnet) kan ikke fastholdes og vil ikke være til at observere i naturen, d. v. s. alle de i naturen observerede ligevægtspunkter er stabile.

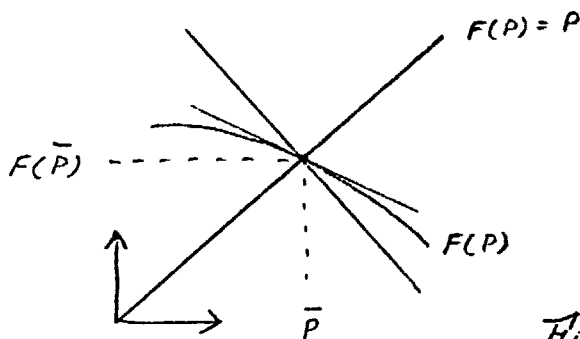
Vi vil følge forløbet grafisk (figur 1.6); Man starter ved værdien P_0 - forstyrrelse af ligevægtpunktet $\bar{P} \rightarrow P_0$ - går op til kurven, værdien på $F(P)$ -aksen er P_1 . Dernæst går man vandret ind til diagonalen, $F(P_0)=P_1$, går op til kurven, værdien på $F(P)$ -aksen er P_2 , etc.. Ved denne procedure fremkommer talfølgen; $P_0, P_1, P_2 \dots P_n \dots$. Hvis talfølgen for



Figur 1.5

alle begyndelsesværdier (P_0) (globalt/lokalt se om-
stående) konvergerer er ligevægtpunktet stabilt
(kurve 1), hvis talføgerne divergerer er ligevægts-
punktet ustabil (kurve 2).

Stabiliteten for ligevægtpunktet afhænger af
funktionens, $F(P)$, tangenthældning i punktet; $F'(P) =$
 $1 - \ln \alpha$, og dermed af parameteren α .



Figur 1.6.

Ved rækkeudvikling fås:

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \varepsilon(x-\bar{x})(x-\bar{x})$$

hvor $\varepsilon(x-\bar{x}) \rightarrow 0$ for $x \rightarrow \bar{x}$

\bar{x} er ligevægtspunkt og derfor er

$$f(x) - \bar{x} = f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \varepsilon(x-\bar{x})(x-\bar{x})$$

Hvis $|F'(P)| < 1$;

$$F(P) - F(\bar{P}) = F'(\bar{P})(P-\bar{P}) + \varepsilon(P-\bar{P})(P-\bar{P})$$

sæt $\delta = \frac{1 - |F'(\bar{P})|}{2}$, $\mathcal{L} = |F'(\bar{P})| + \delta$

vælg en omegn ω om \bar{P} :

$$\varepsilon(P-\bar{P}) < \delta \text{ så er } |F(P) - F(\bar{P})| \leq |F'(\bar{P})| |P-\bar{P}| + \delta |P-\bar{P}| = \mathcal{L} |P-\bar{P}|$$

$$P \in \omega : |F(P) - F(\bar{P})| \leq |F'(\bar{P})| |P-\bar{P}| + |\varepsilon(P-\bar{P})| |P-\bar{P}| \\ = (|F'(\bar{P})| + |\varepsilon(P-\bar{P})|) |P-\bar{P}| < \mathcal{L} |P-\bar{P}|$$

D.v.s. at afstanden numerisk mellem P og den efterfølgende årgang bliver mindre;

$$|P_{n+1} - \bar{P}| < |P_n - \bar{P}|$$

og $|P_{n+1} - \bar{P}| = K |P_n - \bar{P}| = K \cdot K |P_{n-1} - \bar{P}| = K^{n+1} |P_0 - \bar{P}|$

hvor $0 < K < 1$

Da $K^{n+1} |P_0 - \bar{P}| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$

er ligevægtspunktet stabilt i en omegn ω om P, når $|F'(\bar{P})| < 1 \Leftrightarrow 0 < \ln \alpha < 2$.

Se kurverne 1-5 s.16-17, hvor nogle mulige veje til ligevægtspunktet er indtegnet, ved bogstavfølger.

Hvis $|F'(\bar{P})| > 1$;

$$F(P) - F(\bar{P}) = F'(\bar{P})(P-\bar{P}) + \varepsilon(P-\bar{P})(P-\bar{P})$$

sæt $\delta = \frac{|F'(\bar{P})| - 1}{2}$, $\mathcal{L} = |F'(\bar{P})| - \delta$

Vælg en omegn ω af P:

$$|\varepsilon(P-\bar{P})| < \delta \text{ så er } |F(P) - F(\bar{P})| \geq |F'(\bar{P})| |P-\bar{P}| - \delta |P-\bar{P}| = \mathcal{L} |P-\bar{P}|$$

$$P \in \omega : |F(P) - F(\bar{P})| \geq |F'(\bar{P})| |P-\bar{P}| - |\varepsilon(P-\bar{P})| |P-\bar{P}| = \\ (|F'(\bar{P})| - |\varepsilon(P-\bar{P})|) |P-\bar{P}| > \mathcal{L} |P-\bar{P}|$$

D.v.s. at afstanden numerisk mellem P og den efter-

følgende ørgang bliver større:

$$|P_{n+1} - \bar{P}| > |P_n - \bar{P}|$$

og $|P_{n+1} - \bar{P}| = \frac{1}{K} |P_n - \bar{P}| = \frac{1}{K^{n+1}} |P_0 - \bar{P}|$

hvor $0 < K < 1$

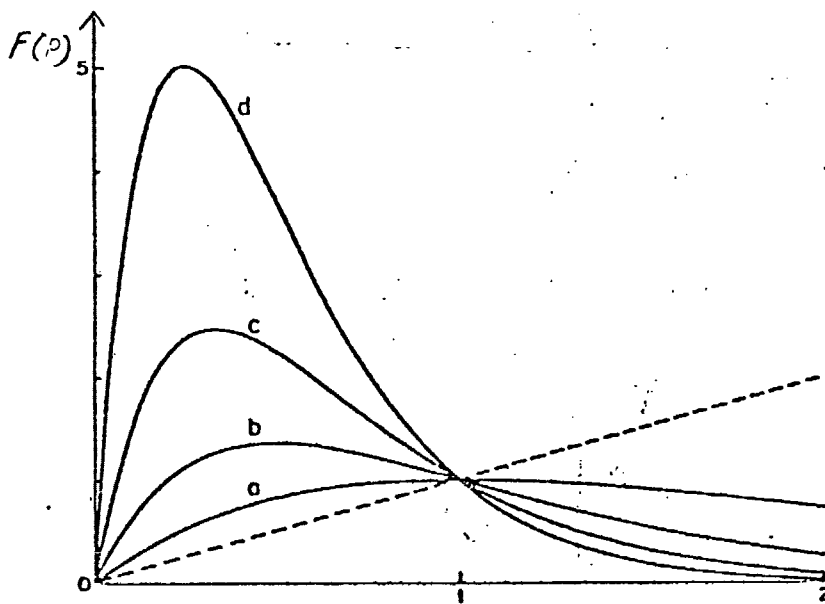
Da $\frac{1}{K^{n+1}} |P_0 - \bar{P}| \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$

er ligevægtpunktet ustabil i en omegn ω om P , når $|F'(\bar{P})| > 1 \Leftrightarrow \ln \alpha > 2$

Ligevægtpunktet er altså stabilt når $|F'(\bar{P})| < 1$ og ustabil når $|F'(\bar{P})| > 1$.

Når $|F'(P)| = 1$, dvs. i grænsetilfældet, har vi ikke medtaget vores undersøgelser af stabilitetsforholdene.

Figuren viser forskellige kurveforløb for forskellige værdier af $\ln \alpha$.



Figur 1.7 : a) $\ln \alpha = 1$, b) $\ln \alpha = 2$,
c) $\ln \alpha = 3$, d) $\ln \alpha = 4$.

(May & Oster 1976. p. 578)

Bifurkation.

Vi har vist at ligevægtpunktet ændrer karakter, når $\ln \alpha$ overskrider værdien 2, fra at være et stabilt til at blive et ustabil ligevægtpunkt. For at beskrive hvad der sker, når $\ln \alpha$ overskrider værdien 2, vil vi se på relationen mellem P og den anden itererede; $F^2(P) = P_{t+2}$. Sættes $g = F \circ F$, er differentialkvotienten for g lig

$$g' = F' \circ F \cdot F'$$

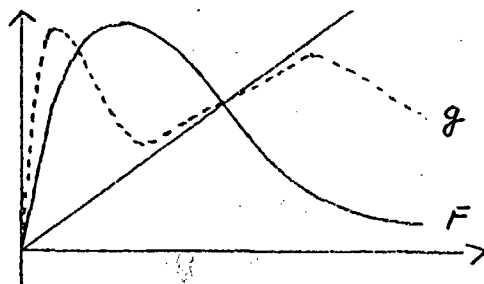
I ligevægtpunktet \bar{P} for F ($F(\bar{P}) = \bar{P}$) gælder

$$g(\bar{P}) = \bar{P}$$

$$g'(\bar{P}) = (F'(\bar{P}))^2$$

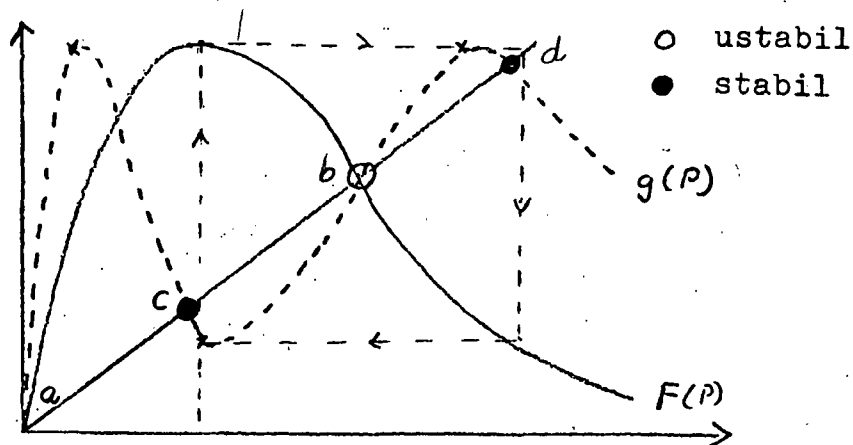
Er endvidere $F'(\bar{P}) = -1$ fås

$$g'(\bar{P}) = 1$$



Figur 1.8.

Når ligevægtpunktet bliver ustabil, hvilket sker når $F'(\bar{P})$ bliver mindre end -1 , vil $g'(\bar{P})$ blive større end 1 , hvilket så medfører at $g(P)$ skærer diagonalen i tre punkter (og $(0,0)$).

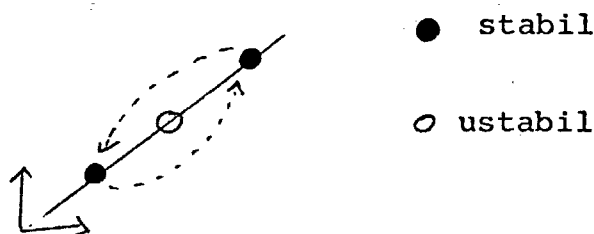


Figur 1.9

Der er dermed opstået to nye ligevægtpunkter. Disse ligevægtpunkter vil være invariable ved funktionen $g(p)$, d.v.s. hvis vi ser på forløbet for ligevægtpunktet \bar{P}_c (til eksempel) ved den oprindelige funktion;

$F(\bar{P})$:	\bar{P}_c		$F(\bar{P}_c)$		\bar{P}_c		$F(\bar{P}_c)$	
År	:	2		3		4		5	

må $F(\bar{P}_c)$ nødvendigvis også være et ligevægtpunkt for $g(P)$, d.v.s. at $F(\bar{P}_c) = \bar{P}_d$ og omvendt $F(\bar{P}_d) = \bar{P}_c$. Funktionen ligger hvert andet år i det ene ligevægtpunkt, og de andre år i det andet.



Figur 1.10

Denne proces, når det oprindelige ligevægtpunkt bliver ustabil, dvs. $\ln \alpha > 2$, og opsplittes i to nye ligevægtpunkter for den anden itererede kaldes for bifurkation til en periode 2-cyklus. Disse ligevægtpunkters stabilitet kan undersøges på sædvanlig måde, ved at se på tangenthældningens størrelse i punkterne. Tangenthældningen i ligevægtpunkterne;

$$\frac{\partial}{\partial P} F^2(P) = F'(F(P)) \cdot F'(P)$$

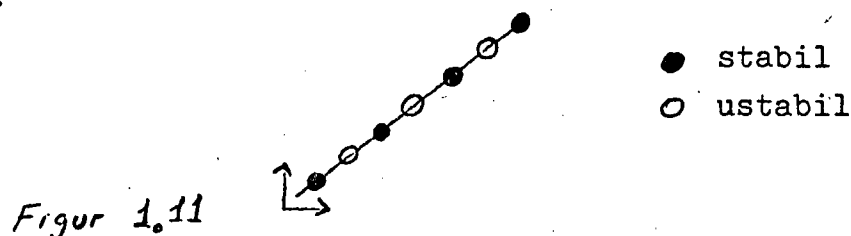
og

$$\frac{\partial}{\partial P} F^2(\bar{P}_c) = F'(F(\bar{P}_c)) \cdot F'(\bar{P}_c) = F'(\bar{P}_d) \cdot F'(\bar{P}_c)$$

$$\frac{\partial}{\partial P} F^2(\bar{P}_d) = F'(F(\bar{P}_d)) \cdot F'(\bar{P}_d) = F'(\bar{P}_c) \cdot F'(\bar{P}_d)$$

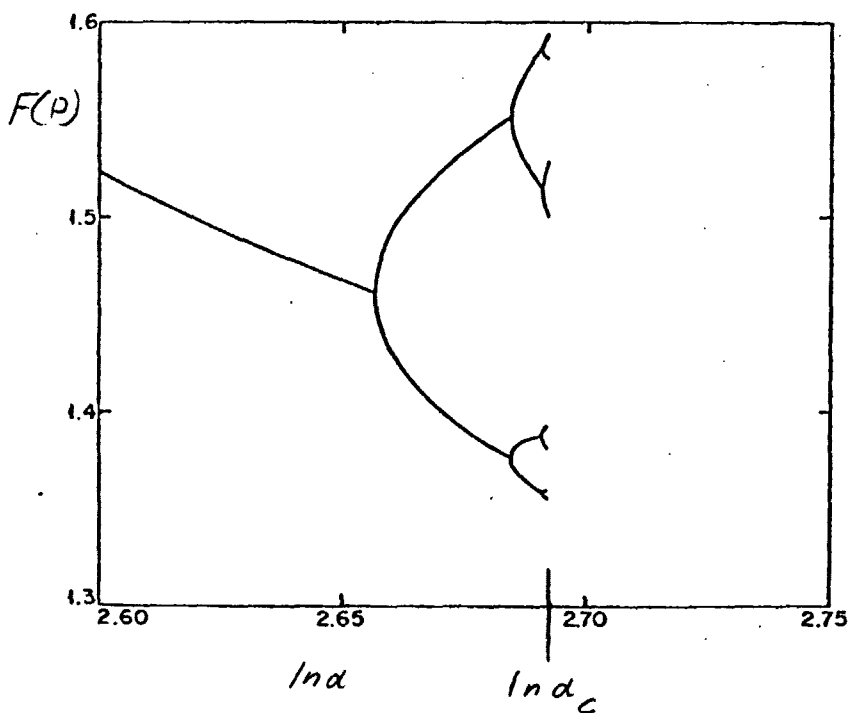
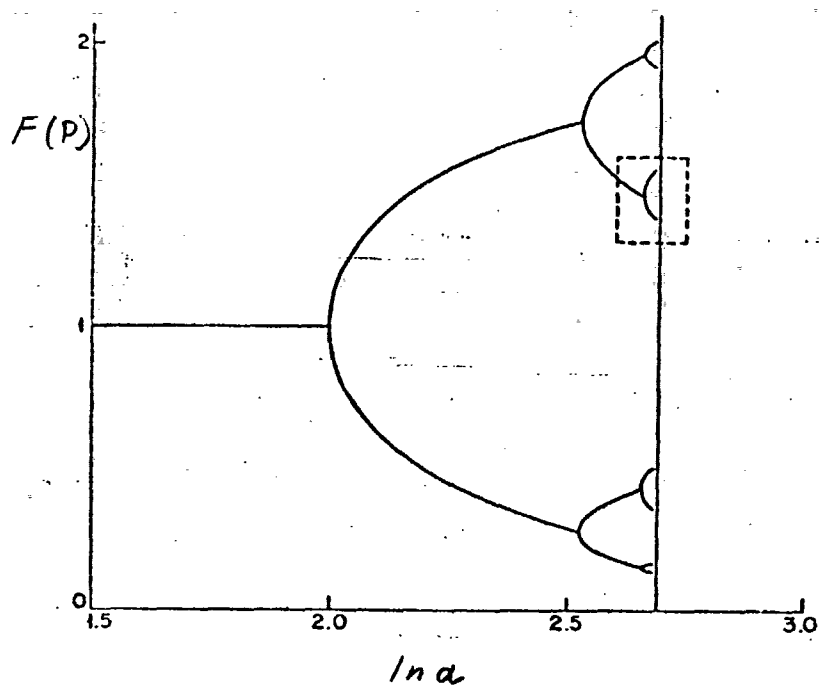
dvs. at tangenthældningerne i ligevægtpunkterne er ens. Tangenthældningen for $g'(P)$ i disse punk-

ter vil gå fra 1 til -1 , hvilket sker når $\ln\alpha$ øges, når tangenthældningen bliver mindre end -1 , bliver denne 2-cyklus ustabil og afløses af en stabil 4-cyklus, ved at begge ligevægtspunkter bifurkerer i to.



Denne afløses igen af en 8-cyklus, etc.. Bifurkationsprocessen kan fortsættes i det uendelige, hvorved der fremkommer et hierarki af ligevægtspunkter med perioderne $1, 2, 4, 8, 16, \dots (2^n)$, for voksende værdier af $\ln\alpha$, se figur 1,12. Det bemærkes at for voksende værdier af $\ln\alpha$, vil $\ln\alpha$ intervallet, hvori der opnås en stabil 2^n -cyklus bliver mindre og mindre, processen ophører ved en kritisk værdi af $\ln\alpha$, der kaldes $\ln\alpha_c$, hvor alle 2^n -cykler er tilstede men ustabile. I vores eksempel er $\ln\alpha_c = 2,6924$ (May & Oster 1976. p. 580).

Efter $\ln\alpha_c$ vil det for alle begyndelsespunkter (P_0) give et totalt aperiodisk forløb, dvs. at et mønster (stabil/ustabil) aldrig vil forekomme. Denne situation er døbt kaos. Konsekvensen af dette er, såfremt en population beskrives af en model af denne type med en parameterværdi svarende til kaos, at populationsstørrelsen vil udvise et forløb, der ikke kan skelnes fra en stokastisk proces.



Figur 1.12 (May & Oster 1976 p 581)

$$\underline{R^2 \rightarrow R^2} \quad (\underline{R^n \rightarrow R^n}).$$

Når begrebet aldersstruktur bliver koblet til Ricker-mekanismen, kan dynamikken i modellen beskrives ved Lesliematricen. (se side 13)

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & & m_n \\ p_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

som har ligevægtspunkt, når

$$\bar{P} = \ln \alpha / \rho$$

og

$$\bar{N}_i = l_i \bar{N}_i$$

hvor $l_i = p_1 p_2 \dots p_{i-1}$ (se kapitel 3)

Ved at linearisere afbildningen i en omegn omkring ligevægtspunktet, og derefter bestemme egenverdier for denne afbildning, fås et udtryk for stabiliteten i ligevægtspunktet. Hvis alle egenverdierne numerisk er mindre end 1, vil man have et stabilt ligevægtspunkt, da enhver forstyrrelse for hver iteration vil konvergere mod ligevægtspunktet fra alle retninger. Hvis derimod bare en af egenverdierne er numerisk større end 1, vil man for hver iteration divergere væk fra ligevægtspunktet i den angivne retning. Ligevægtspunktet vil da være ustabil.

Bifurkation for funktionen $F(P)$ kan klassificeres i to typer; a) bifurkation når den ene egenverdi går gennem -1, analogt med det en-dimensionale tilfælde, og b) Hopf-type-bifurkation, når egenverdierne, som er komplekse, passerer gennem enhedscirklen.

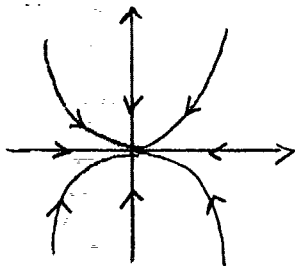
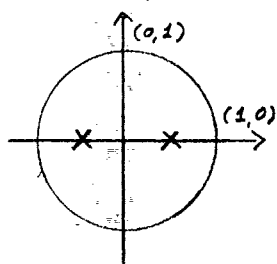
a): Vi vil også her se på funktionen for den anden itererede.

$$F^2(x,y) = g(x,y) = \begin{pmatrix} h(x,y) \\ k(x,y) \end{pmatrix}$$

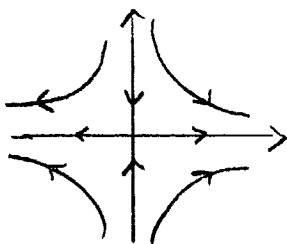
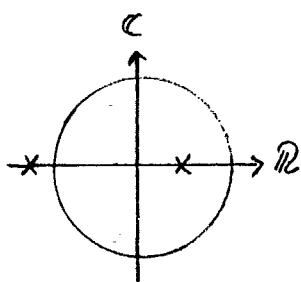
Egenverdier

faseportræt

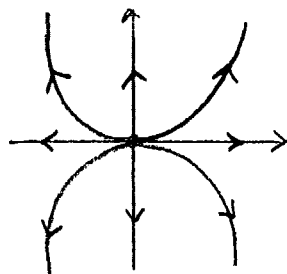
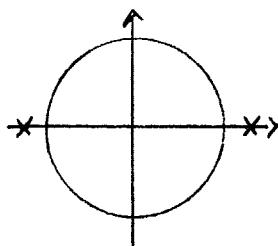
ligevægtspunkt



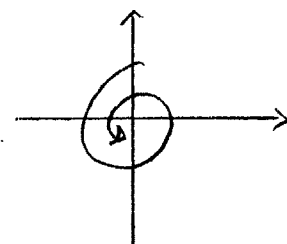
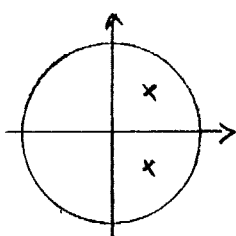
stabilt



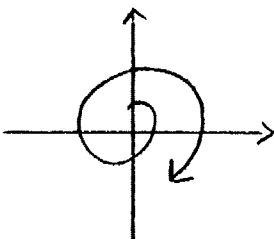
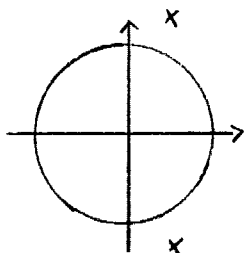
ustabilt



ustabilt



stabilt



ustabilt

Figur 1, 13

(x_α, y_α) er ligevægtpunkt for F og med -1 som egen-
værdi, når $\alpha = \alpha_0$. Da er 1 egenværdi for funktionen g ,
når $\alpha = \alpha_0$.

Vi antager nu, at $F'(x_\alpha, y_\alpha)$ har to reelle egenværdier
og lader λ_α være den mindste. Antag at

$$\lambda_\alpha > -1 \quad \text{for} \quad \alpha < \alpha_0$$

$$\lambda_\alpha < -1 \quad \text{for} \quad \alpha > \alpha_0$$

da vil $\mu_\alpha = \lambda_\alpha^2$ være egenværdi for g , og

$$\mu_\alpha < 1 \quad \text{for} \quad \alpha < \alpha_0$$

$$\mu_\alpha > 1 \quad \text{for} \quad \alpha > \alpha_0$$

Sættes nu $g = (h_\alpha, k_\alpha)$ så er (x, y) ligevægtpunkt for
 g_α netop hvis

$$(1) \quad h_\alpha(x, y) = x$$

$$(2) \quad k_\alpha(x, y) = y$$

(1) og (2) fremstiller hver en kurve H_α og K_α , der
begge inderholder punktet (x_α, y_α) .

Når $\alpha = \alpha_0$ har H_α og K_α fælles tangent i (x_α, y_α) , da

$$\text{normalen til } H_\alpha \text{ er } \left(\frac{dh_\alpha}{dx} - 1, \frac{dh_\alpha}{dy} \right)$$

$$\text{normalen til } K_\alpha \text{ er } \left(\frac{dk_\alpha}{dx}, \frac{dk_\alpha}{dy} - 1 \right)$$

$$D = \det \begin{pmatrix} \frac{dh_\alpha}{dx} - 1 & \frac{dh_\alpha}{dy} \\ \frac{dk_\alpha}{dx} & \frac{dk_\alpha}{dy} - 1 \end{pmatrix} = \det(g'_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) - 1 \cdot I) = 0$$

Vi vil vise at

$$D(\alpha) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x} - 1 & \frac{\partial h_\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial k_\alpha}{\partial x} & \frac{\partial k_\alpha}{\partial y} - 1 \end{pmatrix}$$

er

$$D(\alpha) > 0 \quad \text{for} \quad \alpha < \alpha_0$$

$$D(\alpha) < 0 \quad \text{for} \quad \alpha > \alpha_0$$

Vi indfører;

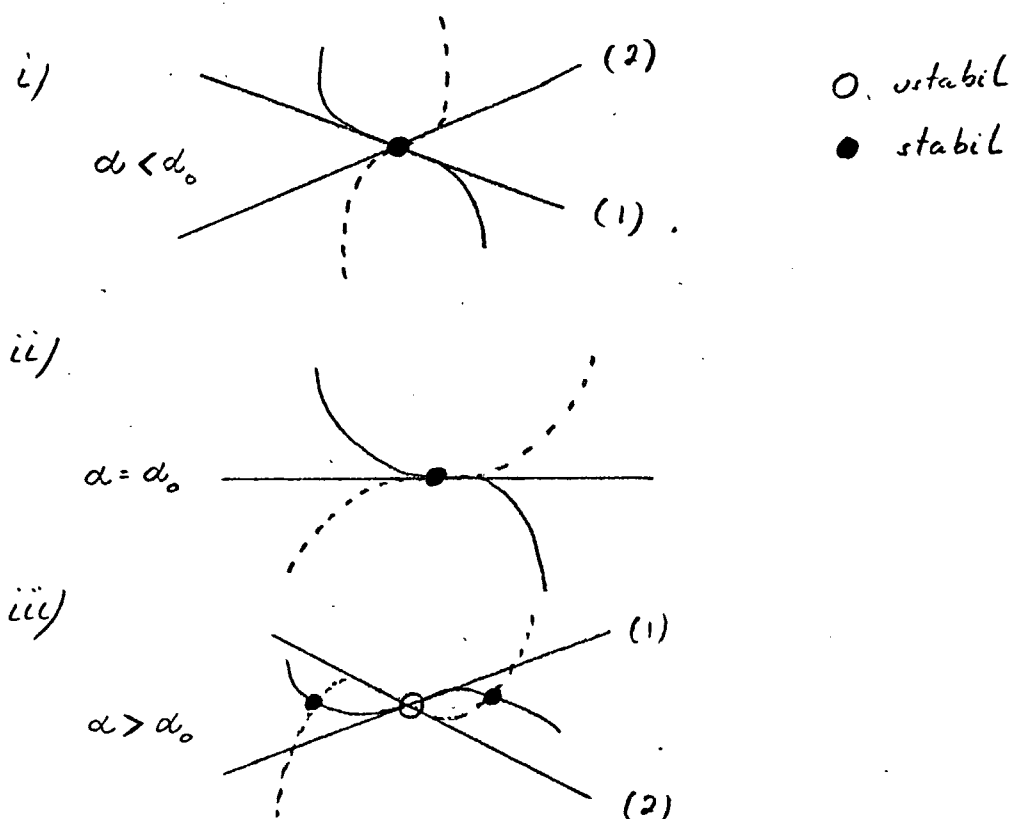
$$E_{\alpha}(\mu) = \det \begin{pmatrix} \frac{dh_{\alpha}}{dx} - \mu & \frac{dh_{\alpha}}{dy} \\ \frac{dk_{\alpha}}{dx} & \frac{dk_{\alpha}}{dy} - \mu \end{pmatrix}$$

der gælder: $\forall \alpha : E_{\alpha}(\mu_{\alpha}) = 0$ og $E_{\alpha}(1) = D(\alpha)$

Når $\alpha < \alpha_0$ ($0 < \ln \alpha < 2$) har E_{α} begge rødder i $] -1 : 1 [$, hviss $E_{\alpha}(1) > 0$ og $D(\alpha) > 0$.

Når $\alpha > \alpha_0$ ($\ln \alpha > 2$) har E_{α} en rod i $] -1 : 1 [$, og en rod i $] 1 : \infty [$, hviss $E_{\alpha}(1) < 0$ og $D(\alpha) < 0$.

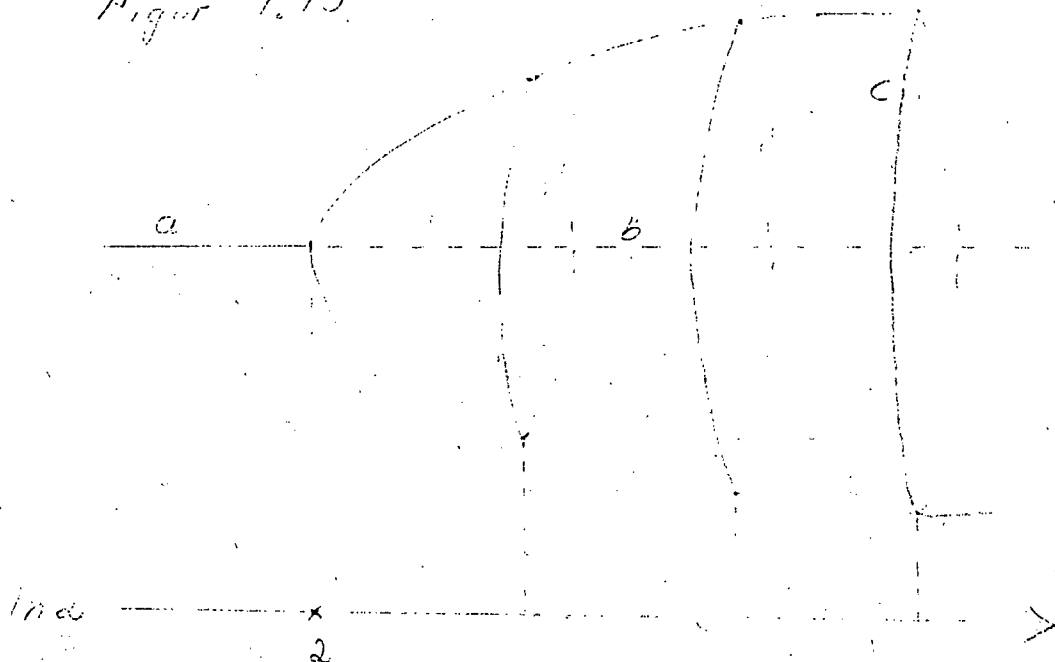
Dette medfører, at determinanten skifter fortegn, hvilket er ensbetydende med at tangenterne krydser. Et muligt forløb for bifurkation til en 2-cyklus kan se ud som følgende.



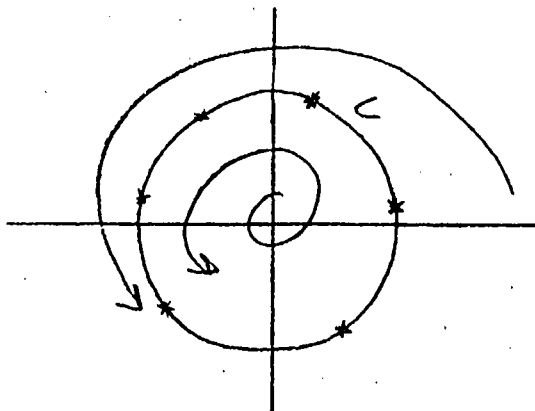
Figur 1.14

som afløses af en 4-cyklus, etc. (jvf side 23).

Figur 1.15



b): Ved Hopf-type-bifurkationen bliver det oprindelige stabile ligevægtspunkt (a) et ustabil ligevægtspunkt (b), når $\ln \alpha$ overstiger værdien 2 (se figur 1.15). Samtidig hermed opstår nogle lukkede kurver (c), som er stabile derved, at ethvert begyndelsespunkt uden for den lukkede kurve, vil blive trukket ind til kurven, og ethvert begyndelsespunkt inden for den lukkede kurve, vil blive trukket ud til kurven (se figur 1.16). På selve den lukkede kurve kan der opstå n-cykler.



Figur 1.16

KAPITEL II Oversigt over miljøstriden ved Hudson
floden samt referat af Levins testimony.

Miljøproblemer i forbindelse med Cornwall-værket.

Miljøstriden, som vi vil referere i det følgende, tog sit udgangspunkt i diskussionen om, hvorvidt der skulle bygges køletårne ved Hudson River's kraftværker eller ej, for at mindske virkningen på Hudson flodens fiskebestand i forbindelse med elproduktionen. Den 20 december 1980 refererede The New York Times om underskrivelsen af "Peace Treaty for the Hudson", en "out-of-court" afgørelse (forlig), som bilagde denne 17 år lange miljøstrid mellem U.S. Environmental Protection Agency (EPA) (den amerikanske miljøstyrelse), som afstod fra at kræve bygning af køletårne ved kraftværkerne Indian Point Unit 2 og 3, Bowline og Rosetown generating stations. På den anden side indvilligede kraftværkerne til gengæld i, at gennemføre en række mindre kostbare dæmpende foranstaltninger, der skulle reducere antallet af stribede aborrer og andre fisk, som blev dræbt i forbindelse med disse anlæg. Yderligere indvilligede Consolidated Edison Company of New York (Con Ed, konsulentfirma for kraftværkerne.) i, at opgive planerne for "Cornwall pumped storage facility" (pumpelagerfacilitet) som miljøgrupper havde kæmpet mod siden begyndelsen af 1960'erne.

Det som adskiller Hudson River Power Case fra mange andre miljø/teknologi konfrontationer, udover at den tidsmæssigt varede 17 år, var omfanget, dybden og opmærksomheden (koncentrationen) på videnskabelige forhold, som blev gennemført. Udviklingen af metoder, databaser m.v., som blev brugt ved behandlingen af problemet, tjener som et case-study på, hvordan videnskab influerer, og bliver influeret af

den komplekse styringsproces gennem hvilken, samfundet løser problemer omkring bevarelse og udnyttelse af naturressourcer.

Det nævnte miljøproblem opstod i 1960-erne p.g.a. Con Ed's planer om opførelsen af "Cornwall pumped storage facility" ved Cornwall-værket, (se fig.2.1.) Den stærke modstand mod dette projekt, som næsten opstod straks, betragtedes af nogen som repræsenterende starten på miljøbevægelsen i USA. Særlig opmærksom var man på Cornwall-værkets virkning på stribede aborrer, som var højt værdsat af sportsfiskerne. Det var effekten af entrainment (removal of eggs, larvae and young juveniles with the pumped water), dvs. fjernelse af æg, laver og små rekrutter, ved at de bliver suget med ind i kølesystemet. Effekten af impingement (trapping of older, larger fish on the screens used to remove debris from the pumped water) dvs. rekrutter, der har nået en sådan størrelse, at de ikke længere er udsat for entrainment effekten, men de bliver nu opfanget på vandindtagningsskærmene, hvorved de bliver beskadiget. Disse to forhold opfattes som de centrale biologiske problemer. Når først rekrutterne bliver større, ca. 1 år for de stribede aborrer, så de kan svømme væk, er der ikke længere nogen fare.

Miljøproblemer ved andre kraftværker.

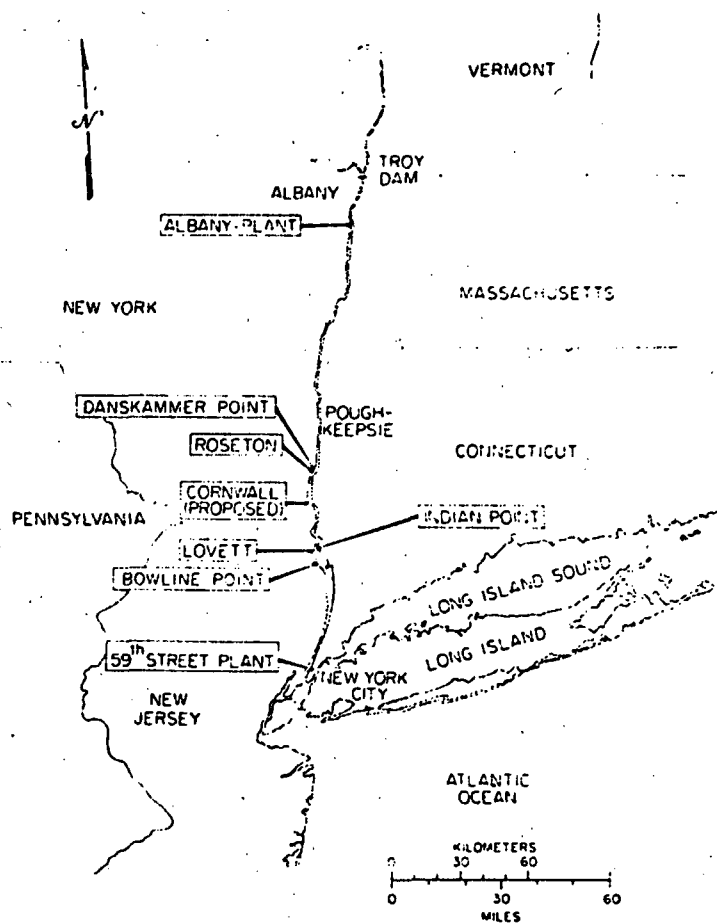
Parallelt med Cornwall-problemet, opstod der i begyndelsen af 1970-erne, miljøproblemer i forbindelse med Indian Point Unit 2, et stort kernekraft værk, der nærmede sig færdiggørelsen, da de miljømæssige virkninger fra værket blev fremsat i National Environmental Protection Act (NEPA), hvilken skulle danne grundlag for Atomic Energy Commission (AEC, hører under EPA) licens til værket.

Efter denne høring endte licensen til værket med et krav om, at Unit 2 skulle forsynes med et "closed-cycle cooling system" (køletårn). Et sådant system ville reducere mængden af vand, som fjernes fra floden med over 90%, og er dermed en stor reduktion af entrainment og impingement-effekten og desuden formindskes temperaturpåvirkningen af floden. I 1975 blev et krav om køletårne også nedskrevet i Nuclear Regulatory Commission's licens (NRC hører også under EPA) til Indian Point Unit 3. Con Ed fremsatte en række appeller, som forsinkede gennemførelsen af køletårnskravene. I 1975 krævede EPA køletårne ikke kun ved Indian Point Unit 2 & 3 (Unit 1, et mindre ældre værk var lukket.), Men også ved de olicdrevne Bowline Point og Rosetown Generation Stations, som blev drevet af Orange and Rockland Utilities and Central Hudson Gas and Electric Corporation. Dette krav udløste den endelige og afgørende høring, som fandt sted i december 1980.

Nye analyseobjekter samt udvikling og brug af nye analysemetoder.

Før Indian Point-sagen havde vægten i vandanalyserne været lagt på udledningsvirkningen af opvarmet og kemisk vand. Da så den ukontrollerbare dødelighed med entrainment og impingement blev opdaget blev effekten af disse indgreb på populationerne det essentielle problem. Analyserne til brug ved Indian Point Unit 2 høringen (1972) repræsenterer det første forsøg på, at bruge kvantitative metoder, modeller, ved forudsigelser af sådanne specielle virkninger. Siden er en udvikling og forfining af entrainment-, impingement- og life-cycle modeller foregået. Samtidigt hermed har der været gjort store anstrengelser for at samle data til modelbrug, og til at forbedre teknikken i forbindelse med

Map of the Hudson River estuary, showing the locations of existing power plants and the proposed Cornwall pumped-storage facility.



Figur 2.1. (Christensen 1981 p. 65)

dataindsamling. Prøveudtagnings- og modeltilgange-
ne, som blev udviklet med henblik på at vurdere en-
trainment- og impingement effekten viser hvorledes
biologisk teori, ledelse og styringsprincipper,
feltarbejde og modelbygningsteknik kan bringes til
anvendelse på et problem i økologien. Udviklingen
viser også hvordan forskellige grupper af videnskabs-
folk ved brug af de samme data kan fremkomme med al-
ternative analyser og nå frem til forskellige kon-
klusioner. Da Con Ed. og andre værker, som var in-
volveret, ikke ville bygge køltårne, og da de for-
skellige regeringsinstanser ikke ville give tillad-
else til ubegrænset brug af vandet fra Hudson River
opstod et dødvande, hvor værkernes konsulenter ind-
samlede nye data for at producere flere analyser,
samtidigt med at regeringsinstanser og deres kon-
sulenter, brugte essentielt de samme data, som ba-
sis for uafhængige og generelt anderledes analyser.
Matematiske modeller blev centrale i denne kontro-
vers omkring virkningen af kraftproduktionen på Hud-
son River's fisk.

Matematiske modeller for Hudson flodens fiskepopu- lationer.

Vi vil her give et rids af udviklingen af dis-
se matematiske modeller og deres brug på Hudson Ri-
ver's fisk. I 1965 begyndte Hudson River Policy Com-
mittee (HRPC) at undersøge virkningen af Cornwall-
værkets forventede vandindtag (ca. 6000 kubikfod
vand pr. sek.) på sribede aborrer. Arbejdet blev
finansieret af Con Ed, men kontrolleret af staten og
forskellige forbundsinstanser. Efter tre år, med
dataindsamling, blev der udgivet en rapport (HRPC,
1968) hvor det konkluderedes, at mindre end 1 % af
den årlige sribede aborre-æg-produktion, 3 % af
larverne og 6,2 % af rekrutterne ville blive truk-

ket med ind i værket. Der forventedes således ingen signifikante ugunstige effekter på stribede aborrer.

Der gik ca. tre år før det næste skridt i miljø sagen blev taget. Det blev forlangt at AEC i forbindelse med dets licensudstedelse til Indian Point Unit 2, skulle overveje de miljømæssige virkninger, i overensstemmelse med høringen i NEPA. Hertil søgte AEC hjælp hos de nationale laboratorier, og ansvaret for analyserne tilfaldt Oak Ridge National Laboratory (ORNL). Om dette problem havde Con Ed i en rapport (Con Ed 1971) konkluderet, at der ikke ville forekomme nogen effekt af entrainment på stribede aborrer ved Indian Point Unit 2:

"Baseret på de data som blev indsamlet, tror Con Ed ikke at operationerne ved Unit No 2 vil have en ugunstig effekt på Hudson River fiskeriet. Af de seks hovedfiskearter, som er udvalgt af Hudson River Policy Committee til at blive under søgt og brugt som økologiske indikatorer, gyder fire (alewife, blueback herring, striped bass and American shad) i den øverste del af floden væk fra Indian Point. Derfor er deres æg og laver ikke i farezonen m.h.t. vandindtag og termisk "plume" ved Indian Point."

(Vores oversættelse, Christensen et al.

1981, p. 67-68).

Modsat dette skulle C. Phillip Goodyear, økolog fra ORNL, ansat til dette specielle projekt, vurdere virkningerne af, at disse æg og laver var i farezonen, da de ville blive transporteret med strømmen til en omegn omkring Indian Point. ORNL begyndte at udvikle en entrainment model for stribede aborrer.

Samtidigt med modelarbejdet hos ORNL, udviklede Qurik, Lawler og Matusky Engineers (QLM), konsulenter for Con Ed, tilsvarende matematiske entrainments modeller og impingements modeller, da Con Ed erkendte manglerne ved deres tidligere entrainmentsanalyser.

Den første entrainment model fra QLM var en rumlig homogen model (Lawler 1972 a), som hurtigt blev erstattet med en mere kompleks endimensionel hydrodynamisk transportmodel (Lawler 1972 b). Modellerne blev knyttet til en life-cyklus model, som extrapolerede virkningerne på den ikke-voksne population i forhold til den voksne.

Som det kunne forventes havde ORNL's entrainments model og OLM's transportmodel visse træk til fælles. Hver model krævede data, om den rumlige fordeling af æg, for at etablere begyndelsesbetingelserne i modellen. Fordelingsdata for senere livsstadier (yolk-sac larvae, post yolk-sac larvae and young juveniles) var også nødvendigt for kalibreringsformål. Yderligere indeholdt begge modeller parametre, som kunne tage højde for følsomheden m. h.t. entrainment, d.v.s. koncentrationen af organismer i det indtagne vand, disse parametre kaldes W-factors. Der var uenighed om, hvordan disse parametre skulle beregnes. I QLM modellen blev W-factors beregnet på grundlag af den antagelse, at kun koncentrationen af organismer i vandoverfladen tættest på indtaget, ville karakterisere koncentrationen i det indtagne vand. ORNL antog det synspunkt, at siden indtaget udvides næsten til bunden af floden i den nærmeste omegn af indtaget, skulle koncentrationen af organismer på bunden af floden bruges ligestillet med overfladens koncentration. Et yderligere begreb, kaldet f-factors, specificerede

entrainment-dødelighedsfaktorer, d.v.s. sandsynligheden for at en levende organisme, der blev medrevet i kraftværket ville blive dræbt, havde modellerne til fælles. Dødeligheden ved at være suget ind i kraftværkets kølesystem skyldes, kombineret fysisk og kemisk stress og udsættelse for høje temperaturer. Baseret på tidligere prøvetagninger udført ved Indian Point Unit 1 af New York University (NYU), blev det i QLM modellen antaget, at alle medrevne æg og larver og 50 % af rekrutterne ville blive dræbt. ORNL antog en fuldstændig dødelighed for alle medrevne livsstadier. Sammen med fysiske data som beskriver kraftværkets lokalisering, vandtilløb og rumfanget af flodsegmenter, er ovenstående et minimum for, hvad der er nødvendigt for, at estimere den "direct entrainment impact", d.v.s. den fraktionelle reduktion, som skyldes entrainment-induceret dødelighed, i antallet af fisk som overlever. (Se fig. 2.2.)

En tilsvarende "Direct impingement impact" kan beregnes ud fra en række parametre der kan fastlægges ud fra tælling af rekrutter, der opfanges ved vandindtagningsskærmene. Disse estimer af entrainment- og impingement dødelighed kan kombineres, hvorved den fraktionelle reduktion blandt rekrutterne til en given alder kan estimeres. Efter denne alder er de ikke længere i farezonen i forhold til kraftværket.

Entrainment- og impingementvirkninger på den samlede bestand.

Det næste skridt i vurderingen af den direkte virkning af kraftproduktionen på fiskepopulationerne er, at vurdere denne årlige reduktion af rekrutter m.v. ved entrainment og impingement, i forhold

til populationen af voksne fisk, over en længere periode. OLM mente, at dette krævede inddragelse af de biologiske processer "Density-dependent-mechanisms" i modellen, som er med til at holde populationens antal i ligevægt.

Dette blev løst ved at anvende en kompensatorisk funktion, som varierede den øjeblikkelige dødelighedsrate blandt fisk som en funktion af populationstætheden. Derfor blev fald i populationstætheden, som følge af entrainment og impingement, i modellen kompenseret ved stigende overlevelse blandt de tilbageværende fisk. Resultaterne ved OLM-modellen udtrykt som en forudsigelse af den procentvise reduktion blandt Hudson flodens stribede aborre bestand efter ti års operation ved Indian Point Unit 1 and 2, var 3,5 % og 6 %. Baseret på disse resultater var Con Ed's standpunkt, at virkningerne af kraftværksoperationerne med "once-through" køling var små og acceptable. ORNL-modellen indeholdt ikke en kompensatorisk funktion, da man anså fiskeriet som den væsentligste faktor, der holdt populationen under mætningsværdien. ORNL's entrainment analyse konkluderede, at operation fra Unit 1 og 2 sandsynligvis ville dræbe 30 til 50 % af de stribede aborrelarver, som vandrede forbi Indian Point fra gydepladserne. Den kombinerede entrainment-impingement virkning blev betragtet som sandsynligvis at ville resultere i et lignende fald blandt rekrutterne i forhold til den voksende population af stribede aborrer. Det var på baggrund af denne vurdering, at AEC staben indtog det standpunkt, at køletårnene var nødvendigt ved Indian Point Unit 2, og som blev nedskrevet i licensen til værket. AEC krævede ydeligere, at operationer med "once-through" køling ophørte 1. maj 1978. Disse kvantitative forudsigelser af virkningen på populatinsniveauet i forhold til Indian Point, førte også til identifikationer

af fejlene i HRPC's analyse m.h.t. entrainment ved Cornwall. Opdagelsen af disse fejl udløste en genåbning af Cornwall kontroversen.

Forbedring af eksisterende modeller og udvikling af nye.

Efter disse første vurderinger, skete der en eksplosiv udvikling af dels nye modeller og dels forbedring af de nuværende modeller. ORNL laboratoriet besluttede, da de skulle forberede den endelige miljøudtalelse for Indian Point Unit 3, og som anbefalet af Atomic Safety and Licensing Appeal Board (ALAB), at forbedre deres analyse. En komplet ny matematisk model for entrainment og impingement (Eraslau et al. 1976), som indeholdt hydrodynamiske ligninger til at beskrive en endimensional transport m.h.t. de mest medrivningstruede livsstadier, blev udviklet. Metoden blev brugt til at vurdere de kombinerede virkninger fra alle kraftværkerne langs Hudson floden, og ikke kun for Indian Point værkerne. Datakørslerne blev foretaget både med og uden Cornwall-værket, siden man ikke vidste om det ville blive bygget eller ej.

Udvikling og forbedring af dataindsamlingsmetoder.

Nye data.

Det var ikke bare tale om en eksplosiv udvikling af matematiske modeller, men også om en udvikling og forbedring af dataindsamlingsmetoder. Nye og mere omfattende data angående fordelingen af de tidligere livsstadier blev opnået af Con Ed's Hudson River sampling program ledet af Texas Instruments, og som blev brugt ved kalibrering. En sammenligning af disse nye data med modelsimulationer viste, at den nedadgående (flodretning) bevægelse af æg og larver er langsommere end den forudsagte

bevægelse baseret på hydrodynamiske principper. Af denne grund blev "Convective transport defect flux" indarbejdet i ORNL modellen. OLM havde tidligere tilføjet tilsvarende "Transport avoidance factors" til deres model.

Med hensyn til beregning af W-factors var nye data blevet tilgængelige både fra QLM og NYU. Disse nye dataindsamlinger, som var foretaget i området omkring kraftværkerne og ved selve vandindtagnings-skærmene, var forbundet med en stor usikkerhed omkring prøveudtagningsudstyrets virkeevne. Ikke desto mindre blev en statistisk analyse foretaget på grundlag af disse data. Baseret på både analyserne og en betragtning af, at datamaterialet var begrænset og ensidigt, anså ORNL det for forhastet at vælge "best estimates" m.h.t. W-factors. I stedet blev der foretaget en simulation der brugte værdier på både 1,0 og 0,5 for disse faktorer. Modsat lå W- værdier som QLM havde beregnet fra de essentielt samme indsamlingsdata som ORNL anvendte, mellem 0,1 og 0,6, og med de fleste værdier under 0,5.

NYU havde ydeligere indsamlet nye data til at vurdere f-factors med. Disse netindsamlinger, ved Indian Point Unit 2, viste, at mængden af levende organismer fra udpumpningskanalerne ved kraftværkerne var større end tidligere antaget. Nogle stribe aborreæg, larver og rekrutter overlevede de øjeblikkelige stresspåvirkninger i forbindelse med entrainment, i det mindste når den termiske komponent ikke var for voldsom. ORNL antog derfor nu, at 20% af æggene, 39% af larverne og 28% af rekrutterne overlevede.

Modellsimulationer over langtidsvirkningerne af
kraftværksproduktion på fiskebestanden.

Med hensyn til kompensation blev der udviklet en ny "young of the year" tæthedsafhængig dødelighedsfunktion af ORNL og den blev inkorporeret i et mindre antal kørsler af transportmodellen. Trods dette bibeholdt ORNL dets tidligere standpunkt, at for sribede aborrer ville kompensation primært blive bragt i stand ved aktiviteter i forbindelse med fiskeri. Dette blev udtrykt i en seperat livscyklusmodel (Van Winkle et al. 1974, De Angel et al. 1978) hvori der var indarbejdet en tæthedsafhængig funktion til at beskrive komponenterne for sribede aborrer m.h.t. dødelighed, der skyldes fiskeri. Denne model blev brugt til at opnå langtids planlægning (op til 100 år) af kraftværkernes virkninger på den sribede aborrepopulation. I modellen forudsættes først fire til seks årtier med kraftværksproduktion, og derefter en 40 årig periode med genrejsning (recovery) af populationen.

Estimater af den direkte entrainmentvirkning fra ORNL's transportmodel (baseret på kørsler uden kompensation) lå fra 21 % til 32% for de tre enheder ved Indian Point og fra 31% til 50% i kørsler som inkluderede de fleste af de fossile kraftværker langs floden. Ved tilføjelse af Cornwall voksede maximum til 64 %. Denne analyse af ORNL, tilskrev således en meget mindre virkning ved alle tre Indian Point enhederne end de havde gjort ved de tidligere analyser. Dette kan tildels tilskrives brug af en anderledes model og delvis nye data. Den kombinerede virkning af alle kraftværkerne blev stadig betragtet potentielt alvorligt. En samtidig og tilsvarende analyse fra QLM (Lawler 1974) viste, at den direkte virkning lå fra 3 til 6 % for værkerne Cornwall, Indian Point, Bowline Point og Rosetown.

En sammenlignende analyse af disse modstridende vurderinger blev nedskrevet i en rapport af ORNL til "U.S. Corps of Engineers" i 1976/77. (Barntouse et al. 1977). I denne rapport benyttede ORNL Lawler, Matusky og Skelly Engineers (LMS) en en-dimensionel transport model (tidligere kaldt QLM modellen, men firmaet havde skiftet navn.) Der blev foretaget datakørsler uden kompensation og med kompensation. Lave og høje ORNL estimater for W-factors og f-factors blev brugt, såvel som LMS's bedste estimater m.h.t. disse faktorer blev brugt. Denne følsomhedsanalyse viste, at niveauerne af W-factors og f-factors, såvel som den funktionelle form af kompensationen var vigtig ved forklaringen af forskellene i virkningsestimater. Ydeligere indikerede resultaterne, at impingement var et vigtigere fænomen end man først havde antaget. ORNL's direkte virkningsestimater i sammenligning varierede fra 11 til 30% og med Cornwall-værket tilføjet voksende maximum til 38%.

Dette fald for den direkte virkning skyldes de ydeligere reduktioner i f-factors. Disse reduktioner afspejlede et stort fremskridt m.h.t. undersøgelsesprogrammet, hvilket skyldes brugen af en opfindelse, oprindeligt designet af LMS, kaldet et larvebord (larve table) udført af Ecological Analysts (et andet af værkernes konsulentfirmaer) (Mc Groddy and Wyman 1977). Larvebordet havde til hensigt at reducere den udstyrsinducerede dødelighed.

Inddragelse af biologiske teorier og undersøgelser af Hudson River's bidrag til Atlanterhavets aborrebestand.

Omtrent samtidigt fremlagde Texas Instruments (TI) en rapport (1975) hvori "direct entrainment impact" og "direct impingement impact" blev estimeret ved anvendelse af prøveudtagningsdata. Samme rapport tog et første skridt mod at anvende bestand-rekrut (Stock-recruit) teori, som var udviklet af fiskeri videnskabsfolk for år tilbage (Ricker 1954, Beverton and Holt 1957) omkring problemet med biologisk kompensation. Stimuleret heraf begyndte ORNL, at arbejde på en udvidelse af bestand-rekrut teorien til forhold som involverede kraftværkernes virkninger på den ikke voksne bestand

Hvad angår det kontroversielle spørgsmål omkring fordelingen af Hudson flodens sribede aborrer i forhold til atlantisk fiskeri lavede TI i 1975 en analyse som konkluderede, at Hudson floden leverer ca. 20% af de sribede aborrer til det atlantiske kystfiskeri. Senere blev dette estimeret reduceret til 7% (McFadden 1977). ORNL udførte en undersøgelse, der betragtede aldersstrukturen for bestanden, og det blev konkluderet (Kumar and Van Winkle 1978), at Hudson flodens fordeling af fisk i de forskellige aldersklasser varierede mellem næsten 0 og ca. 30%. Af grunde som vi ikke kender, blev dette spørgsmål ikke et emne i de videre høringer.

Kraftværkernes samlede afsluttende rapport og EPA's testimonies.

I begyndelsen af 1977 afleverede Con Ed en rapport (McFadden 1977), der opsummerede det meste af det arbejde, som Con Ed havde været sponsor for i Hudson-sagen siden 1972. Denne rapport dannede

kernen i værkerens vidneudsagn i maj/juni 1977. I rapporten blev data fra Con Ed's samplings-programmer brugt til at vurdere W-factors og f-factors, og både TI's empiriske metoder og LMS's to dimensionale, reel-tids-livscyklus model for Hudson flodens stribede aborrepopulation (LMS 1975) blev anvendt for at estimere den direkte virkning. I rapporten blev compensation klaret på en ny måde, ved to Ricker-stock-recruitment kurver blev "fittet" med data, afledt af den historiske statistik, svarende til den kommercielle fangst af stribede aborrer fra Hudson floden. Sådanne kurvefits blev betragtet for at kvantificere kompensationskapaciteten for stribede aborrer.

Advokater for EPA, assistenter af tekniske eksperter fra EPA-staben, adskillige universiteter, the U.S. Fish and Wildlife Services National Power Plant Team (NPPT) og ORNL krydseksaminerede værkerens konsulenter fra december 1977 til januar 1979. Det næste skridt i miljøsagen var, at disse og andre tekniske eksperter medvirkede eller fremsatte vidneudsagn for EPA, som blev indgivet i april/maj 1979. Et blandt de mange vidneudsagn for EPA, var "The concept of compensatory mortality in relation to impact of power plants on fish populations. Testimony of Simon A. Levin, Ph.D. Professor and Chairman section of Ecology and systematics Langmuir Laboratory Cornell University, Ithaca, New York 14850. Prepared for the United States Environmental Protection Agency, Region I April 1979."

Oversigt over forkortelser.

EPA = U.S. Environmental Protection Agency.
Con Ed = Consolidated Edison Company of New York.
NEPA = National Environmental Protection Act.
NCR = Nuclear Regulatory Commission.
HRPC = Hudson River Policy Committee.
ORNL = Oak Ridge National Laboratory.
QLM = Quirk, Lawler and Matusky.
NYU = New York University.
ALAB = Atomic Safety and Licening Appeal Board.
LMS = Lawler, Matusky and Skelly.
TI = Texas Instrument.
NPPT = U.S. Fish and Wildlife Services' National Power Plant Team.

Figur 2.3

Testimony of Simon A. Levin.

Vi vil her opsummere Levin's væsentligste kritik, af de mangler og svagheder i de matematiske modeller, som ligger til grund for virkningsanalysen. Kritikken (Testimony) er inddelt i fire afsnit; I) The inadequacy of focusing attention on isolated populations, II) Single populations, III) A critique of the arguments for compensation og IV) Extensions to multiple-age spawning populations.

I) Levin mener, at det er en alvorlig mangel ved virkningsanalyserne, at man ikke har taget højde for samspillet mellem de enkelte fiskepopulationer og arter- den såkaldte samfundseffekt. Den videnskabelige interesse har ^{ikke} været samlet omkring fiske-samfunds- strukturer. Selvom, som Levin antyder i testimony'et, at der eksisterer et stort område af teorier, som kunne have været anvendt. De offentlige rådgivere gjorde intet forsøg på noget sådant. Dette repræsenterer en alvorlig svaghed ved analyserne.

II) I det ovenstående antydede Levin ulemperne ved, at se på populationer, som om de var isolerede. Det næste spørgsmål er: "Hvis den indvendig var skubbet til side og enkelt populations analyse bliver gjort, er det så fyldestgørende?" Konklusion; "Nej".

Når man skal lave en matematisk model over populationer og deres reaktioner på forskellige påvirkninger, er standardmetoden den, at man laver en populationsmodel, og så udfører man forskellige manipulationer på modellen. Den første af sådanne manipulationer kan være beregningen af en teoretisk ligevægt for populationen. Levin hævder, at de

offentlige rådgivere udfører disse beregninger på en acceptabel måde, men de går ikke ud over disse beregninger, d.v.s. de ignorerer et antal af andre problemer;

i) Ligevægt, som balancepunkt, kan være irrelevant for den enkelte population, der måske som dens mønster har et svingende antal. For at bruge ligevægtsbegrebet, må man sørge for nogle empiriske vidnesbyrd herom.

ii) Et ligevægtpunkt som er teoretisk beregnet, beøver ikke at repræsentere et virkeligt ligevægtpunkt for arten, hvis man ikke har vist at ligevægtpunktet er stabilt. En ustabil ligevægt kan ikke fastholdes og vil ikke være til at observere under naturlige forhold. Sådanne beregninger af stabilitetskriterier ignorerer de offentlige rådgivere.

iii) Den anvendte Ricker-kurve i modellerne, er kun én ud af et antal mulige stock-recruitment-relationships. Der findes ingen teoretisk berettigelse til at antage den kan bruges. Erstatningen af Ricker kurven med en alternativ form vil medføre fundamentalt andre konsekvenser for populationsanalysen. De offentlige har ikke tilstrækkelig data, til at bevise hvorvidt en Ricker kurve er anvendelig eller ej. Levin mener, at disse ting er med til at sætte hele deres analyse i tvivl.

III) Hvad angår kompensation stiller Levin i Testimony'et følgende spørgsmål; a) "Er kompensation en essentiel ingrediens for fastholdelsen af (ligevægt) naturlige populationer?" b) "Kan man antage, fra den fortsatte eksistens af den stribe aborre eller en anden population, at kompensationsmekanismer er gyldige?" c) "Hvis kompensation dukker op, hvad er dens natur?" d) "Hvis kompensation er gyldigt ved et populationsniveau, hvad kan

der sluttet om dens funktion ved et lavere niveau?"

e) "Hvad er de sandsynligste effekter af forøget dødelighed af den type som ville blive påført af kraftværkerne?"

I testimony'et gives nogle delsvare på disse spørgsmål, som vi ikke vil komme nærmere ind på.

Det antages nu at en relativ stabil population, der som et resultat af entrainment og impingement ved et kraftværk, vil svinge omkring en ny og lavere ligevægt. Levin's spørgsmål er da, hvad er karakteristika ved denne nye ligevægt? Først, dets stabilitets karakteristika vil være anderledes. Det vil være sandsynligt, at populationen vil fremvise større variabilitet i rekrutment og i populationsstørrelse. Dernæst kvaliteten af den stressede population, d.v.s. at populationen har været udsat for entrainment og impingement, er væsentlig forskellig fra den ustressede population. For det tredje, det er vanskelig et forudsige, på lang sigt, hvordan de aldersstrukturelle forandringer vil være. En fiskerikoncentration på de unge individer vil ikke virke ligesom et konventionelt fiskeri på populationen. Først vil det have virkning i retning af en forskydning af aldersfordelingen henimod ældre individer - præcis det modsatte af normalt fiskeri. Efterhånden som de reducerede årgange når de ældre aldersklasser vil disse også blive reduceret i antal. Tilbage står stadig at estimere hele populationens størrelse i tilfælde af indgreb - i form af entrainment og impingement. Dette involverer ikke kun evnen til at forudsige niveauer, men også æstetiske og økologiske vurderinger med hensyn til hvad der konstituerer de berørte arter, herunder flere populære og vigtige fisk, der indgår i sportsfiskeri. Levin konkluderer: At selv om de æstetiske og økologiske problemer blev løst, ville man stadig mangle vigtig information for at

kunne komme med en tillidsvækkende forudsigelse af virkningerne af den planlagte kraftværksaktivitet.

IV) Kommentarene i dette afsnit referer til de offentlige rådgiveres forsøg på, at bruge Ricker analyser til en population af flergangsgydere. Levin mener, det ikke er utænkeligt, at stock-recruitment relationship kan blive udviklet på sådanne populationer. Men Levin er ikke overbevidst om, at denne udvikling er blevet korrekt udformet. 1) En sådan udvikling må nødvendigvis hvile på et antal oversimplificerede formodninger, primært vedrørende mekanismerne af tæthedsafhængighed, som ikke er blevet retfærdiggjort, og 2) selv hvis det er korrekt udviklet, vil informationerne indeholdt i en stock-recruitment relationship kun være en lille del af hvad der ville være nødvendigt for at fastslå populationens dynamik.

De offentlige rådgiveres model præsenterer en oversimplificeret teori af kraftværksvirkningerne på mangeartetet yngelpopulationer. I stedet for en stock-recruitment fit, som følge af et enkelt afkom (yngel) gennem tiden, er en mere sofistikeret model nødvendig, som holder sig á jour med antallet af individer i hver aldersklasse. I afsnittet vises hvordan en sådan model kan konstrueres. Betragtning af aldersstruktur er absolut nødvendigt, for at få en ordentlig forståelse af stabilitet og svingninger i en mangeartet yngelpopulation. En sådan behandlig kan og burde blive udformet for den pågældende fiskepopulation i Hudson River. Det er dette Levin gør til genstandsområde i artiklen.

Vi vil afslutte referatet af testimony'et,
ved at citere konklusionen:

"The evidence submitted by the utilities is clearly inadequate as a basis for deciding these issues. First, the utilities have focused on populations one at a time and have totally ignored interactions between them. Second, the entire development is based on the Ricker model, and no adequate demonstration is made that justifies this usage. The choice of model is not just a detail, but may fundamentally affect conclusions. Third the general arguments for the stabilizing effects of compensation are circular and are useless as even qualitative predictive tools. Finally, the attempt to apply Ricker analysis to multiple-age spawning populations is an unnecessarily oversimplified treatment which demonstrates an apparent lack of awareness of recent theoretical developments which emphasize the dangers of ignoring age structure. Although the theoretical papers are recent, the general methods necessary to deal with age structure are not new and indeed form a staple of the classical literature in demography and population biology. In the case of multiple-age spawning populations, the choice by the utilities of a model which ignored the age structure represented a fundamental error of judgment.

My opinion is that a decision to continue the present impact on the striped bass and other Hudson River populations would involve serious risks. The evidence submitted by the utilities in support of such a decision is

seriously flawed, and the sections which I have analyzed provide no support for the point of view that the striped bass possess the potential to compensate for power-plant induced mortality."

(Levin 1979. p. 20)

KAPITEL III Gennemgang af Levin og Goodyears
artikel.

I de første afsnit præsenteres Ricker-ligningen, som danner grundlag for forfatterens opstilling af en aldersstruktureret tæthedafhængig populationsmodel. Deres analyse vil hovedsagelig koncentrere sig om kvalitative træk ved Ricker-ligningen, som også gælder andre ikke-lineære modeller. Nedenfor vises forskellige typer af ikke-lineære tæthedafhængige modeller

$$N_{t+1} = F(N_t)$$

med følgende kvalitative træk;

- 1) $(0,0)$ er et ligevægtspunkt, således at hvis populationsstørrelsen N_t er uddød et år ($N_t=0$), så vil populationsstørrelsen være nul resten af tiden. D.v.s. $N_{t'}=0$ for alle $t' > t$.
- 2) Kurven for $F(N_t)$ vil have et kritisk punkt, hvor $\frac{dF}{dN} = 0$ for $N = N_0 > 0$
- 3) Modellerne indeholder parametre, der kan varieres, hvilket har indflydelse på formen af kurven for $F(N)$.
- 4) for nogle af modellerne gælder ydeligere, at de har mindst et ikke-trivielt ligevægtspunkt (fiks-punkt).

Label	Form for $F(N)$	Equilibrium point, N from eq. (2.8)
A	$N[1+r(1-N/K)]$	K
B	$N \exp [r(1-N/K)]$	K
C	$\lambda N(1+aN)^{-\beta}$	$(\lambda^{1/\beta} - 1)/a$
D	λN^{1-b} ; for $N > \epsilon$ λN ; for $N < \epsilon$	$\lambda^{1/b}$

Herefter opstilles Rickermekanismen i sin simpleste form

$$R = \hat{\alpha}P \exp(-\beta P) \quad (1)$$

(Man interesserer sig kun for hunner).

Ligningen (1) udtrykker antallet af rekrutter, som funktion af ægbestanden. (jvf. side 17 f.)

Ligning

$$P' = \alpha P \exp(-\beta P) \quad (3)$$

udtrykker ægproduktionen året efter som funktion af den nuværende ægproduktion. Denne iteration kan fortsættes. Herved forfølger man kun hvor mange æg et bestemt års ægproduktion ville give anledning til resten af tiden.

Videre i artiklen opremses en række egenskaber ved den konkrete model (3) m.h.t. ligevægtspunkt, stabilitet og bifurkation. Disse forhold har vi tidligere behandlet (se kap. I)

Fortatterne fremhæver, at deres hovederinde med artiklen er at undersøge, hvad der sker når simple modeller som (3) udbygges med begrebet aldersstruktur. I denne aldersstrukturerede model indgår en række parametre; K_i , p_i og α (se nedenfor). Fra tidligere simulationsresultater af modellen, hvor K 'erne holdes konstante, p (p_i 'erne sættes ens) og α varieres, tegnes et stabilitetsdiagram (figur 3.9) for parametrene p og α . Levin og Goodyear analyserer betingelserne for stabilitet i ligevægtspunktet algebraisk, og får et stabilitetsdiagram (figur 3.14) der kvalitativt stemmer overens med det simulerede.

Til slut i dette indledningsafsnit omtales to begreber, der er en mulig udbygning af modellen,

som forfatterne mener kan bruges til at forstå stabilitetsegenskaberne for stribede aborrer.

Det er begreberne reproductive delay (deferring re-
production, dvs. reproduktionsudsættelse til en se-
nere alder) og truncation delay (an eventual leve-
ling of fecundity in later age classes, the latter
results in an intermediate age of peak reproduction
 $l_i m_i$ (L&G, p 247), dvs. ophør med reproduktion efter
en vis alder og derfor er der en mellemliggende
alder med maksimumsreproduktion)

I afsnit to opstilles den udbyggede model,
der benytter sig af Ricker-ligningen. Den nye model
skal kunne tage hensyn til antallet af individer
i de enkelte aldersklasser ved beregningen af antal-
let af nye rekrutter et givet år. Derfor indføres
begrebet aldersstruktur.

Inden modeludtrykket opskrives (se kap.1 side 13)
defineres nogle udtryk og sammenhænge som benyttes
i modelopstillingen.

Antallet af æg gives ved

$$P = \sum_i N_i K_i \quad (6)$$

hvor tilstandsvariablen N_i er antallet af hunner i
den i 'te aldersklasse og parametrene K_i er gen-
nemsnittsantallet af æg pr. hun i aldersklasse i .
Hvis man benytter Ricker ligningen fås antallet af
rekrutter næste år som den nye værdi N_i dvs.

$$N_i' = \hat{\alpha} P \exp(-\beta P) \quad (7)$$

Den tæthedsuafhængige sandsynlighed for overle-
velse fra alder 0 til alder 1 kaldet $\hat{\alpha}$ indgår i sam-
menhængen

$$\hat{\alpha} = \alpha / \sqrt{S} \quad (8)$$

Hvor parameteren α stammer fra Ricker-ligningen i
kapitel I og betyder gennemsnitligt antal æg

som æggene fra en hun vil give anledning til i en generation.

V_s svarer til K i det en-dimensionale tilfælde. I den aldersstrukturerede model er bestandværdien af etårige rekrutter givet ved

$$V_s = \sum_i l_i K_i \quad (9)$$

hvor l_i er overlevelsessandsynligheden fra aldersklasse 1 til aldersklasse i . For l_i gælder

$$l_i = p_1 p_2 p_3 \dots p_{i-1} \quad (10)$$

(l_1 sættes til 1)

p betyder overlevelsessandsynligheden fra aldersklasse i til $i+1$.

I praksis kan p være tæthedsaafhængig, men her antages det, at tæthedsaafhængige virkninger kun optræder indenfor det første leveår. Derfor regnes p for tæthedsuafhængig.

Den aldersstrukturerede model får herefter følgende udseende

$$\begin{aligned} N_1 &= \hat{\alpha} P \exp(-\beta P) \quad , \quad P = \sum_{i=1}^n N_i K_i \\ N_2 &= p_1 N_1 \\ N_3 &= p_2 N_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hvor N_1, N_2, \dots er tilstandsvariable og α (givet ved (8)), p_1, p_2, \dots og K_1, K_2, \dots er parameterne.

Når N_1' opsplittes på de enkelte aldersklasser, er

$$N_1' = \hat{\alpha} K_1 \exp(-\beta P) N_1 + \hat{\alpha} K_2 \exp(-\beta P) N_2 + \dots$$

sættes

$$m_i = \hat{\alpha} K_i \exp(-\beta P) \quad (11)$$

fås

$$N'_1 = m_1 N_1 + m_2 N_2 + \dots$$

hvor m_i betegner antallet af æg næste år lagt af et gennemsnitsindivid i aldersklasse i . Ved at samle størrelserne m_i og p_i i en Lesliematrix, \underline{M} , og N_i i en anden matrix, \underline{N} , fås dynamikken ved

$$\underline{N}' = \underline{M} \underline{N} \quad (13)$$

hvor

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12)$$

og

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots \\ p_1 & 0 & \dots \\ 0 & p_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Systemet (13) har ligevægtspunkt når

$$\begin{aligned} N'_1 &= \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) = N_1 \\ N'_2 &= p_1 N_1 = N_2 \\ N'_3 &= p_2 N_2 = N_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

For $i \geq 2$ fås ved brug af (10) og succession

$$\begin{aligned} N'_2 &= N_2 = p_1 N_1 = \lambda_2 N_1 \\ N'_3 &= N_3 = p_1 p_2 N_1 = \lambda_3 N_1 \\ &\vdots \\ N'_i &= \lambda_i N_1 \end{aligned} \quad (15)$$

Ligevægt for N'_1 er

$$\begin{aligned} \text{ved (8)} \quad N'_1 &= \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) = N_1 & \Leftrightarrow \\ N_1 &= \frac{\hat{\alpha}}{\lambda_1} P \exp(-\rho P) & (=) \\ \text{ved (9)} \quad N_2 &= \frac{\hat{\alpha}}{\sum \lambda_i K_i} P \exp(-\rho P) & \Leftrightarrow \\ \sum \lambda_i K_i N_1 &= \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) & \Leftrightarrow \\ \text{ved (15)} \quad \sum K_i N_i &= \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) & (=) \\ \text{ved (6)} \quad \rho &= \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) & \Leftrightarrow \\ \ln P &= \ln \hat{\alpha} + \ln P - \rho P & \Leftrightarrow \\ \bar{\rho} &= \ln \hat{\alpha} / \beta & (14) \end{aligned}$$

Forfatterens interesse er at undersøge stabiliteten i ligevægtpunktet, og især hvorledes stabiliteten påvirkes af parameterne α og p_i .

Inden stabilitetsundersøgelserne i det generelle tilfælde foretages, vises nogle udskrifter fra modelsimulationer

I afsnit tre referer de udførte modelsimulationer til en tidligere artikel af Goodyears: "Oscillatory Behavior of a Striped Bass Population Model Controlled by a Ricker Function.", hvori disse simulationer er beskrevet. Goodyears hensigt med at foretage modelsimulationer er at undersøge populationsstrukturens indflydelse på de oscillatoriske bevægelser i den sribede aborremodel. Dvs. forstyrrelser i forhold til bestandligevægten og evnen til at vende tilbage til ligevægt.

I Goodyears artikel argumenteres for, hvorfor Ricker-ligningen bruges til at repræsentere sammenhænge mellem bestand og rekrutter. Ricker-ligningen vil tillade negative hældningskoefficienter i ligevægtpunktet, og den vil derfor tillade populationsoscillationer at optræde (forårsaget af tæthedsafhængige mekanismer), hvorimod logistiske eller Beverton og Holt modeller ikke ville.

Parametrene i modellen er K_i , p_i og α . K -værdierne er fastsat til bestemte værdier (se tabel 3,3). Disse reproduktionsparametre havde kraftværkernes konsulenter Mc Fadden og Lawler estimeret.

K -værdierne bliver 0 efter femten år. I modelsimulationen antages det, at den årlige dødelighedsrate $z = -\ln p$, over det første leve år, er uafhængig af aldersklassen, så $p_i = p$ for alle i .

Nedenfor vises Mc Fadden og Lawlers tabel over reproduktionsparametre:

Reproductive parameters for the
Hudson River stock of striped bass, adapted
from McFadden and Lawler (1977)

Age	Fraction of females that are mature	Eggs per mature female (thousands)	Fecundity $K_i \times 10^{-3}$
1	0.00	0	0
2	0.00	0	0
3	0.04	658	26
4	0.07	658	46
5	0.19	578	110
6	0.43	714	307
7	0.86	928	798
8	0.89	1310	1166
9	1.00	1570	1570
10	1.00	1760	1760
11	1.00	1980	1980
12	1.00	2090	2090
13	1.00	2130	2130
14	1.00	2190	2190
15	1.00	2590	2590

Figur 3.3 (Goodyear 1980, p. 512)
(Levin 1980, p. 249)

Kommentarer til begreberne livstabel, reproduktionsrate og generationstid.

Hvis man kender fødsels- og dødsraterne, kan man lave en livstabel, dvs. en tabel, hvor man starter med f.eks. 1000 nyfødte dyr og følger deres skæbne livet igennem. Tabellen nedenfor, jvf. figur 3.3, er en livstabel for ringhunsæler.

Alder x	Antal overlevende i år x l_x	Antal unger pr. hunsæl i alderen x $l_x \cdot f_x$	Antal unger født i alt i året x $l_x \cdot f_x$
0	1000	0	0
5	270	0	0
6	242	0,10	24
7	222	0,45	100
8	205	0,70	144
9	189	0,80	151
10	174	0,90	157
20	80	0,90	72
30	30	0,90	27
40	0	—	0
Antal unger født i alt			2100

Tabel 9-1. Livstabel for 1000 hunner i en jaget ringsælbestand.

Af hensyn til overskueligheden er tallene afrundede, og kun tal for årene nr. 0, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30 og 40 er taget med.

Hvis 50% af de 2100 unger er hunner, vil 1000 nyfødte sælhunner altså tilsammen føde 1050 nye hunsæler. Man siger så, at reproduktionsraten, R, er 1050/1000, altså 1,05.

Den faktor hvormed en dyrestand ændres fra en generation til den næste, er reproduktionsraten R. Den tid, denne ændring tager, defineres som generationstiden og kaldes T.

Generationstiden kan beregnes ud fra livstabellen, men det er nemmere at sætte T lig med den gennemsnitlige alder for mødrene til de nyfødte unger.

Hvis en bestand vokser eksponentielt, er vækstraten r altså

$$r = \frac{\ln R}{T}$$

Af dette udtryk ses, at hvis R ligger tæt ved 1, har R størst indflydelse på vækstraten. Men hvis R er stor (f.eks. 100) vil en realistisk forøgelse af vækstraten, bedst ske ved en nedsættelse af generationstiden. (fra Kåre Fog : Grundbog i økologi p. 169 ff)

For at starte modellen op blev antallet af hunner der overlevede til alder 5; sat til en million i ligevægtspunktet. Denne antagelse kræver, at beregningerne af antallet overlevende i de andre aldersklasser i ligevægtspunktet, bliver baseret på antallet i aldersklasse 5, og ligeledes overlevelssandsynlighederne. Antallet af æg lagt af ligevægtspopulationen blev beregnet ud fra ligningen

$$P = \sum_{i=1}^n N_i K_i$$

og værdien for ρ beregnes som forholdet mellem $\ln \alpha$ og æglægningen i ligevægtspunktet. Parameteren α er fastlagt (i Goodyears artikel) ved

$$\alpha = \hat{\alpha} F \sum_{i=1}^n M_i E_i \prod_{j=1}^{i-1} S_j$$

hvor

F = the fraction of eggs that are female, asumed herein to be 0,5:

M_i = the fraction of females of the age-class that are mature:

E_i = the average fecundity of mature females of the subscripted age;

and

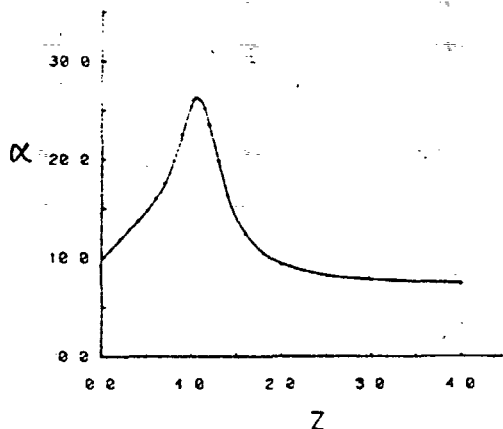
S_i = the probability of survival through the subscripted age-class.

De simulationer, hvor populationen ikke kunne vende tilbage til et stabilt ligevægtspunkt efter en forstyrrelse, klassificeredes som ustabile oscillatoriske, idet der var fastlagt et stabilitetskriterium. De oscillatoriske bevægelser i amplituden måtte ikke afvige med mere end $\pm 1\%$ fra populationens ligevægtsværdi. I simulationerne var forstyrrelserne en populationsreduktion på 2% i forhold til ligevægtspunktet. Ved at foretage simulationer for mange forskellige værdier af α til hver popula-

tionsstruktur, er det muligt tilnærmelsesvist at bestemme værdien af α omkring hvilken den enkelte populationsstruktur vil overgå fra stabile til ustabile oscillationer. Denne værdi for α kaldes α_s . Hædningskoefficienten for bestand-rekrutstammen i ligevægtpunktet er for enhver værdi af α_s lig med $1 - \ln \alpha_s$ (se kapitel I).

Når man vælger en α -værdi der er større end α_s vil der opstå langtidsoscillationer med en amplitude lig med eller større end 1% i forhold til ligevægtsværdien. Goodyear siger, at Ricker (1954) og at Allen and Basasibwaki (1974) har vist, at amplituden og frekvensen for oscillationerne påvirkes af tidsrummet fra et æg bliver lagt, og til det (som reproduktionsduelig) er i stand til at lægge æg. Den cykliske periode er ca. dobbelt så lang som generationstiden. Effekten på oscillationstendensen af varierende ægfordelinger i hver aldersklasse, undersøges ved at bestemme værdien af α for forskellige niveauer af p . Højere dødelighedsrate ($z = -\ln p$) reducerede middelgenerationstiden ved at mindske den reproduktive fordeling i de ældre aldersklasser.

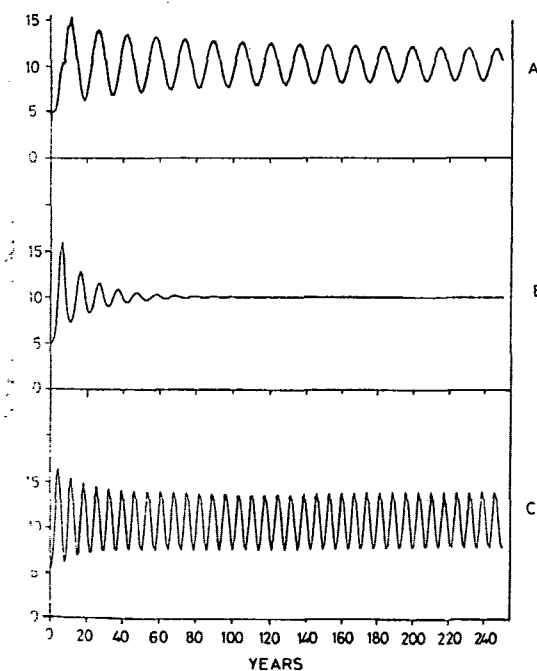
Sammenhængen mellem periodelængde og α_s blev nøjere undersøgt ved at ændre alderen på førstegangsreproducenter, mens man holdt reproduktionsfordelingen i de øvrige reproduktionsaldre konstant. Fordelingen af reproduktionsvariable fra tabel 3,3 blev fastholdt for de reproducerende aldre og den totale dødelighed blev sat til 1, dvs. $p = e^{-1} = 0,37$. Der var 13 reproducerende aldersklasser i alle simulationer, mens det totale antal af aldersklasser lå mellem 13 og 27. Resultatet af modelsimulationerne er et stabilitetsdiagram. Da parameteren K_i var fastsat, og da $p_i = p$ for alle p indgår der således kun to frie parametre i simulationerne. Derfor kan resultatet, som udskiller et stabilt og et ustabilt område illustreres grafisk.



—Effect of total mortality rate (Z) on α , the value of alpha in a Ricker equation above which a population trajectory will oscillate with an amplitude equal to or greater than 1% of the equilibrium population size, for striped bass females. The region below the curve represents parameter values that do not cause long-term oscillations.

Figur 3.4 (Goodyear 1980 p 514)

Nu følger en række dataudskrifter fra model-simulationerne. Figur 3.5 viser tre forløb, hvor A og C er ustabile og B stabilt. Bemærk at kun i B-forløbet, hvor den totale dødelighed z er lig med 1 (dvs. $p = 0.37$), er ligevægtpunktet stabilt. Den numeriske værdi af ligevægtsværdien er uden betydning, da den afhænger af valget af β .

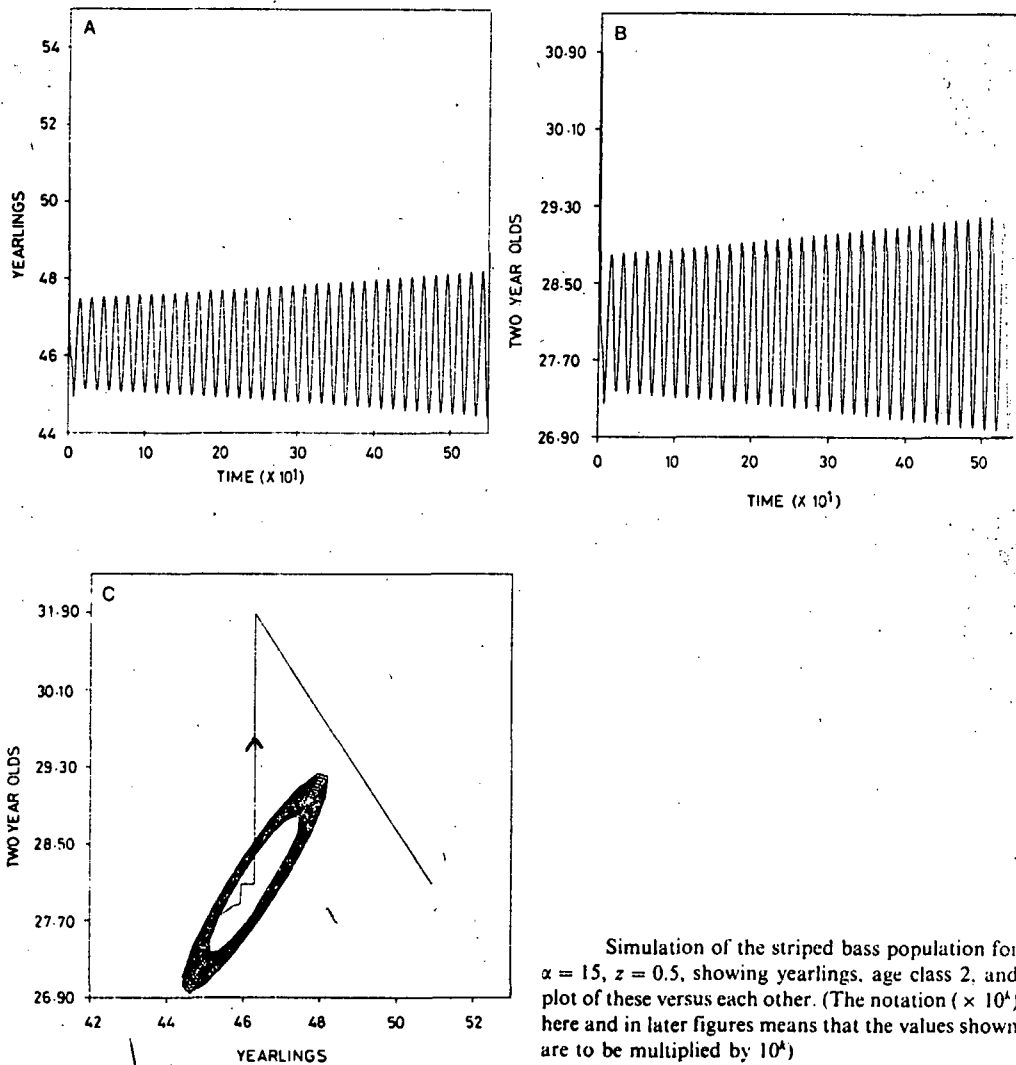


Figur 3.5

Three simulations of the striped bass population for $\alpha = 15$, and with $z = 0.5, 1.0, 1.5$ respectively. Vertical axis is number $\times 10^{-5}$ of individuals in age class 5.

(Goodyear 1980, p 513)

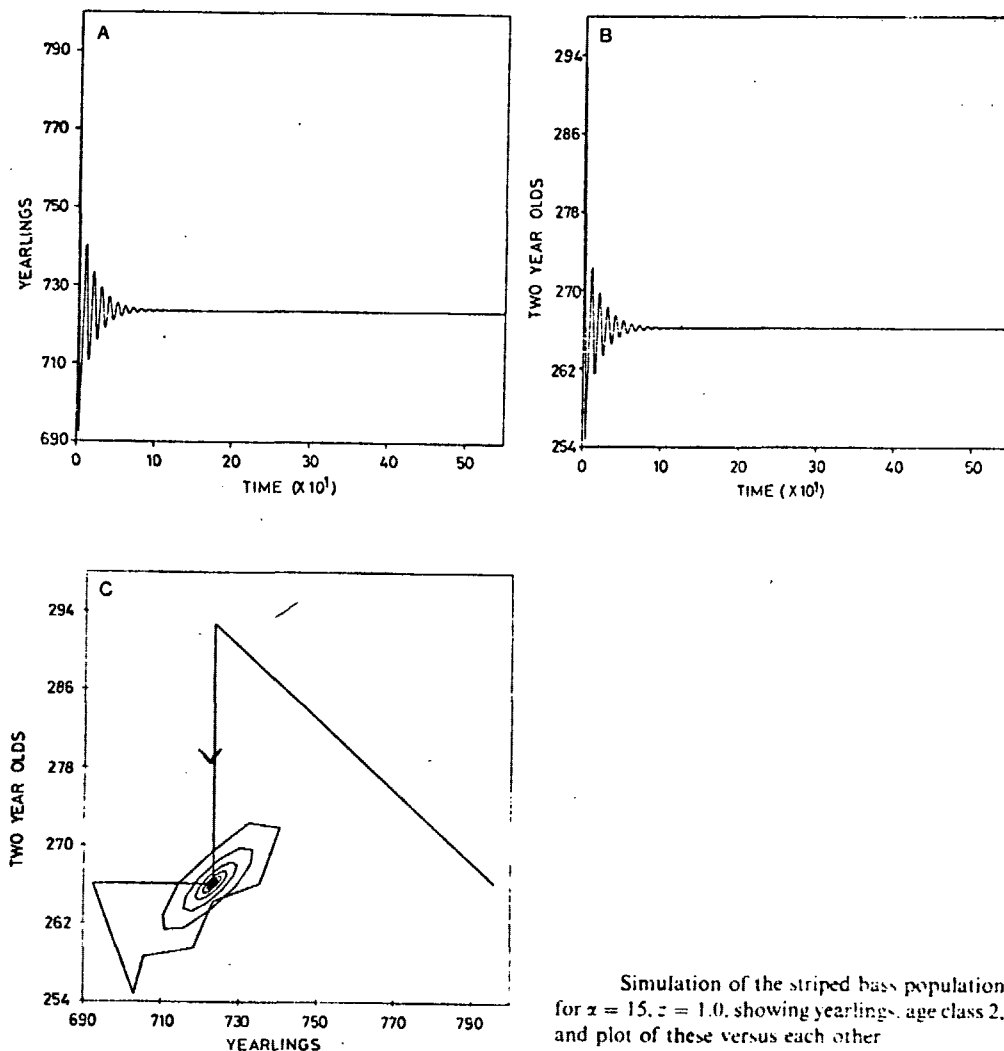
I figur 3.6 er A-forløbet ($z=0,5$) fra figur 3.5 undersøgt nærmere. I stedet for at undersøge udviklingen kun indenfor en enkelt aldersklasse, vises dynamikken for de to første aldersklasser i figur 3.6 a og b. Det ses at udsvingene bliver større og større. I figur 3.6 c, hvor forløbene er plottet mod hinanden, ses det, at aldersstrukturen også selv fluktuerer, og dermed er ligevægtspunktet ustabil.



Simulation of the striped bass population for $\alpha = 15$, $z = 0.5$, showing yearlings, age class 2, and plot of these versus each other. (The notation ($\times 10^4$) here and in later figures means that the values shown are to be multiplied by 10^4)

Figur 3.6 (Levin 1980 p 250)

Figur 3.7 illustrerer tilsvarende plot for $z=1$. Ligevægtpunktet er stabilt, men bevægelsen hen mod dette foregår oscillatorisk. Ifig.3.7 c ses det, at populationen hurtigt går i ligevægt, men straks efter bliver den skubbet væk igen. Først efter en tid vender systemet igen tilbage til sin ligevægt. Selvom de første to aldersklasser når deres ligevægtpunkt hurtigt (i denne simulation), sker det ikke for de øvrige aldersklasser. Dette skyldes bl.a. at ægproduktionen er under ligevægtsværdien, og derfor er antallet af rekrutter (yearlings) lavt og i det følgende år er antallet af to-årige reduceret. Derefter begynder systemet gradvist at blive mere stabilt og gå mod sit oprindelige ligevægtpunkt.

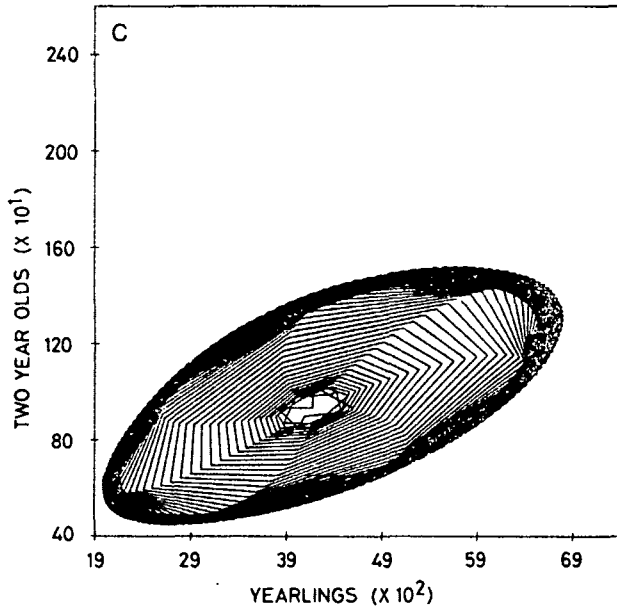
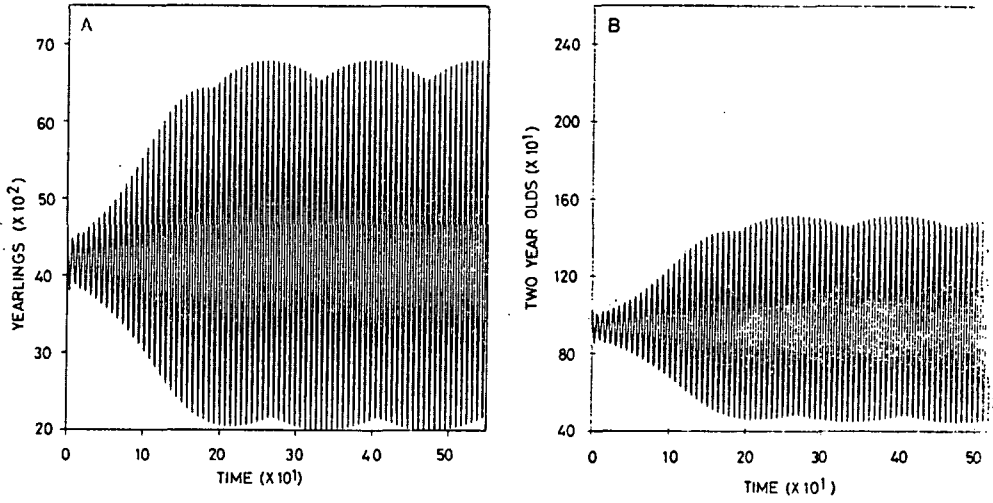


Simulation of the striped bass population for $x = 15, z = 1.0$, showing yearlings, age class 2, and plot of these versus each other

Figur 3.7 (Levin 1980, p. 251)

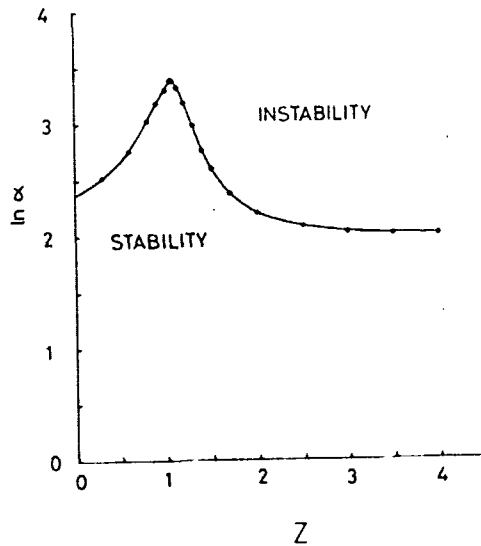
I figur 3.8 vises en tilsvarende simulation, men nu for $z=1,5$. Bevægelserne er ikke rigtigt periodiske. Selvom der tilsyneladende optræder en periode på omkring 150 år, vender bestanden kun tilnærmelsesvis tilbage til sin oprindelige værdi. En sådan periodicitet kaldes quasiperiodisk. Denne manglende evne til at udvise fuldstændige periodiske svingninger skyldes bl.a. at tiden er diskret. Bemærk at Goodyear's oprindelige simulation i figur 3.5.c synes at vise en meget kortere periode på omkring 7 år, men med de ydeligere forfininger i denne simulation, ses det at oven på disse basisperioder overlejres en anden oscillation med mindre amplitude. I fig.3.8 c ses denne anden oscillation ved variationen m.h.t. amplitude for den første oscillation. Det ses som den brede grænserand. Banerne udfører nærmest en cyklus i 7 trin. Herefter er der en faseforskydning og en ændring i amplitude.

Figur 3.6-3.8 viste resultaterne af model-simulationerne, hvor p blev varieret og α fastholdt. Resultatet af disse og lignende simulationer fører til nedenstående stabilitetsdiagram. Fig.3.9. Grænsen for stabilitet kan også beregnes, hvilket gøres i afsnit 5. Og det derved fremkomne stabilitetsdiagram udviser samme kvalitative træk som den simulerede på figur 3.9. Spidsen på kurven, som er typisk for bifurkationsgrænsen i situationer, hvor der indgår to parametre, optræder også i andre sammenhænge som undersøges senere. En biologisk forklaring på formen af stabilitetskurven behandles nærmere i afsnit seks.



Simulation of the striped bass population for $\alpha = 15$, $z = 1.5$, showing yearlings, age class 2, and plot of these versus each other

Figur 3.8 (Levin 1980 p 252)

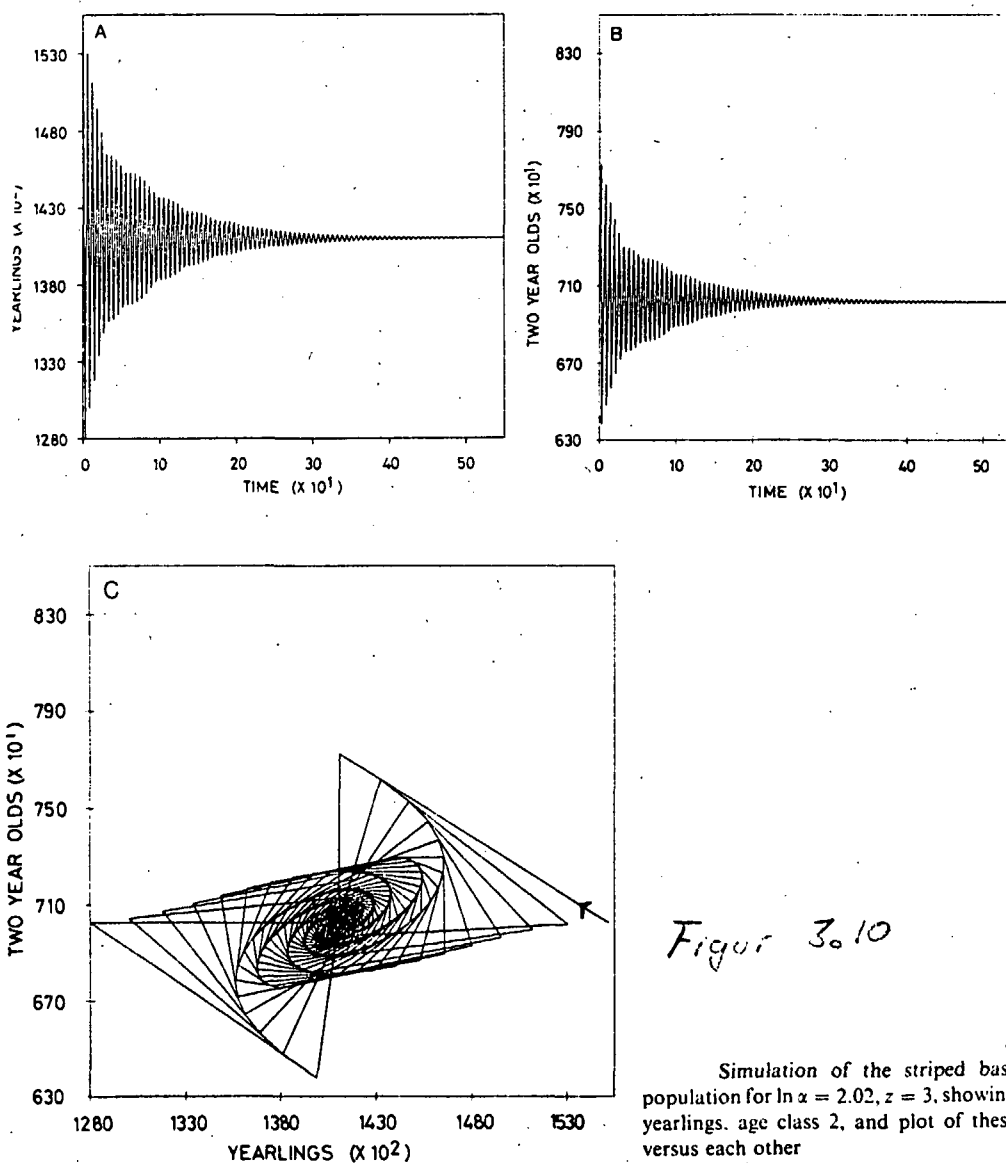


Figur 3.9.

Stability diagram for the striped bass model. Modified from Goodyear (1979)

(Levin 1980. p 253)

De oscillationer som optrådte i figur 3.6 er små og antydede muligvis, at den første bifurkation er ved at ske. Hvis man fortsætter sine undersøgelser længere ind i det ustabile område, forventes det, at udsvingene bliver større og der indtræder flere bifurkationer. Disse undersøgelser foretager forfatterne ikke. Figur 3.10, 3.11 og 3.12 giver en kvalitativ fornemmelse af bifurkationsprocessen. I disse figurer fastholdes dødelighedsraten z på værdier, $z = 3$ (dvs. $p = 0.05$) og $\ln \alpha$ vokser fra 2,02 (som er en værdi indenfor det stabile område) til 2.06 og til sidst er $\ln \alpha = 2.10$ udenfor men stadig tæt på stabilitetsgrænsen.

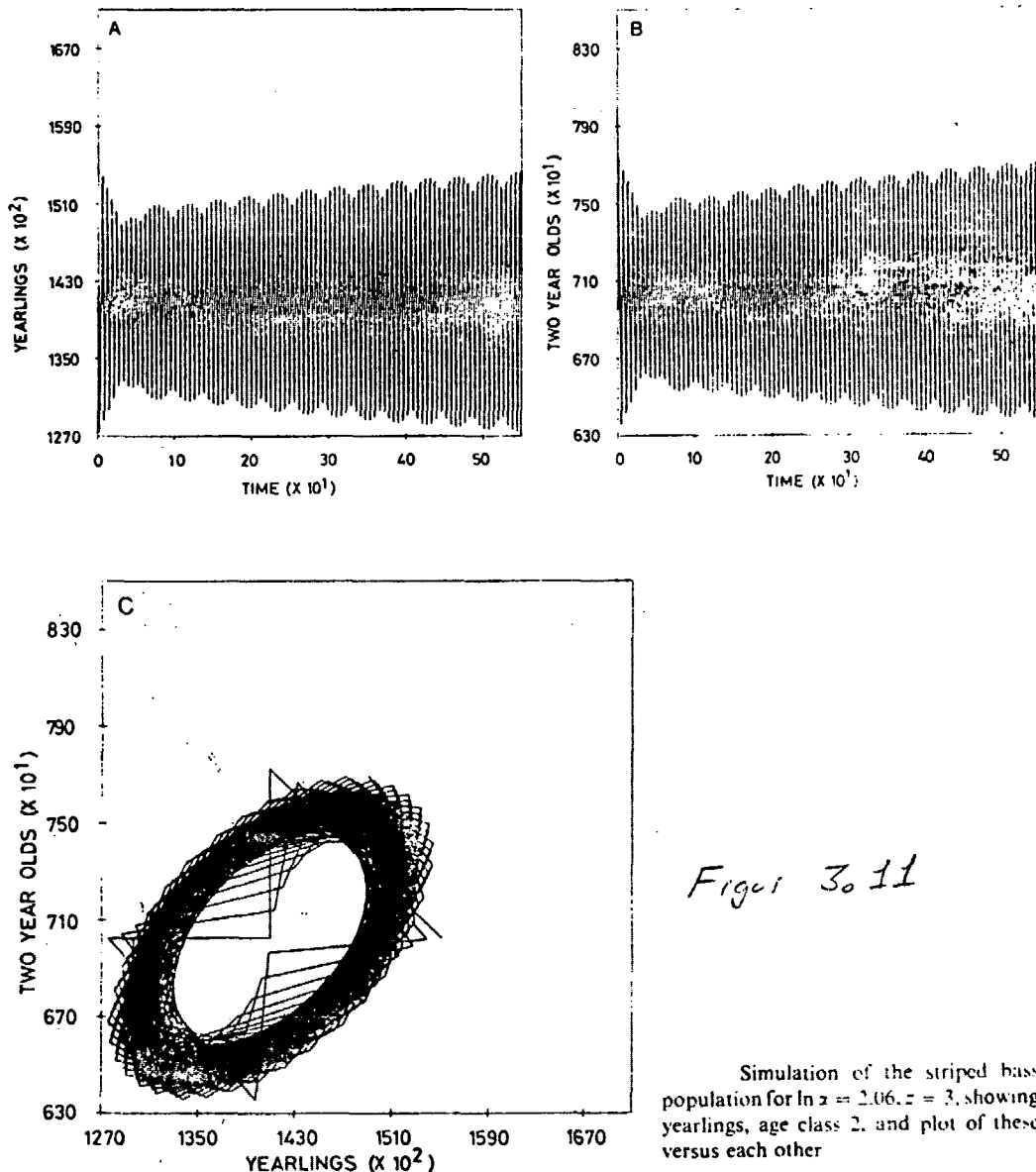


Figur 3.10

Simulation of the striped bass population for $\ln \alpha = 2.02$, $z = 3$, showing yearlings, age class 2, and plot of these versus each other

(Lev. 1980, p. 254)

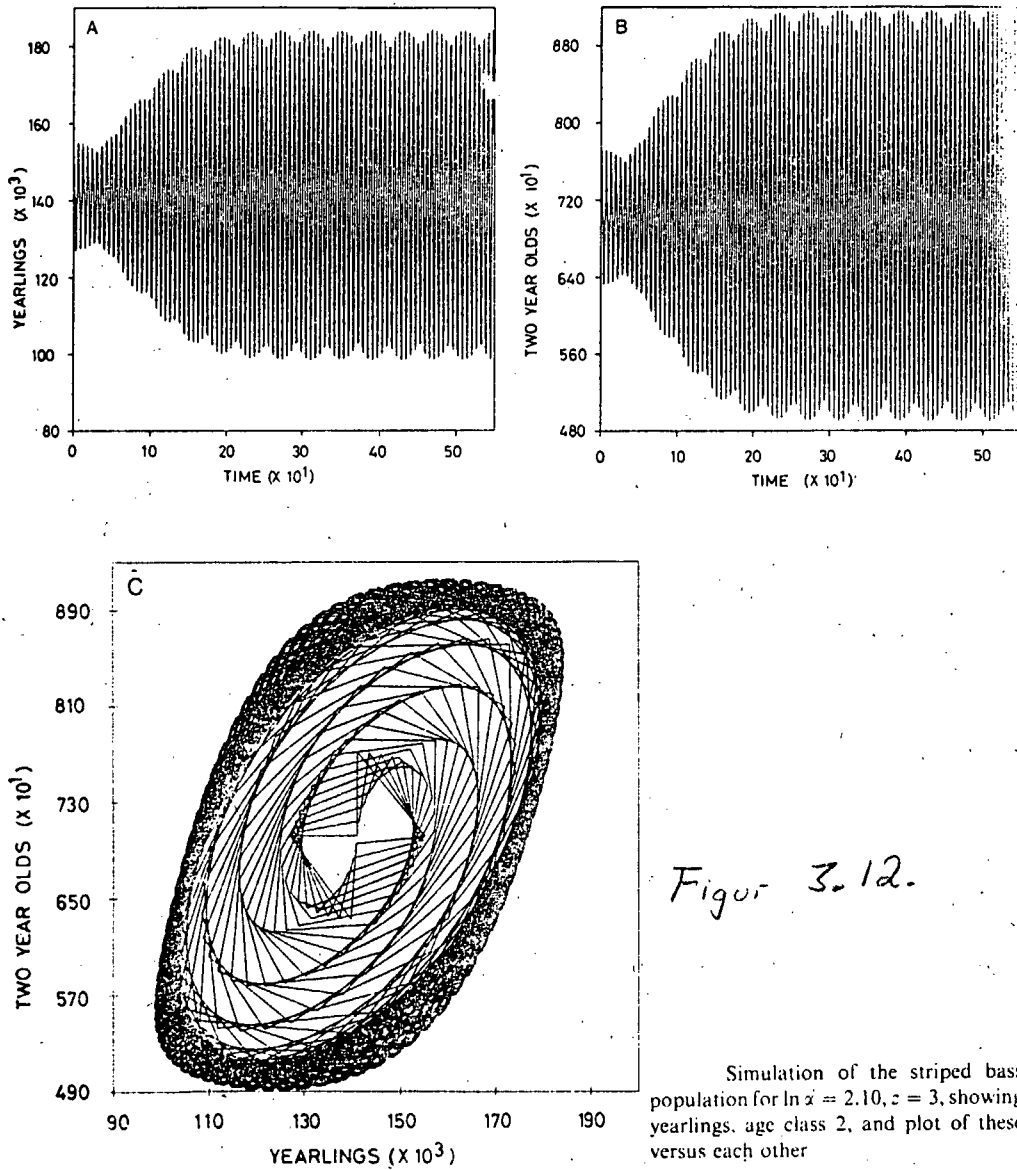
I det første tilfælde, figur 3.10, er oscillationen dæmpet, dvs. ligevægtspunktet er stabilt. Den anden situation, figur 3.11, ligger indenfor den ustabile region, og mønstret ligner det fra figur 3.8, bortset fra at perioden tenderer til en 6-cyklus. Til sidst ses i figur 3.12 en situation der antyder en mange-cyklus, hvor man har voksende amplitude for oscillationerne. Her er α -værdien længere inde i det ustabile område. Men trods disse grafiske illustrationer afsløres den komplicerede bifurkationsstruktur for modellen ikke.



Figur 3.11

Simulation of the striped bass population for $\ln z = 2.06, z = 3$, showing yearlings, age class 2, and plot of these versus each other

(Levin 1980. p 255)



Figur 3.12.

Simulation of the striped bass population for $\ln \alpha = 2.10$, $c = 3$, showing yearlings, age class 2, and plot of these versus each other

(Levin 1980. p 256)

Hermed afsluttes disse modelsimulationer.
I næste afsnit undersøges forholdet mellem stabilitet og aldersfordelingen m.h.t. reproduktion.

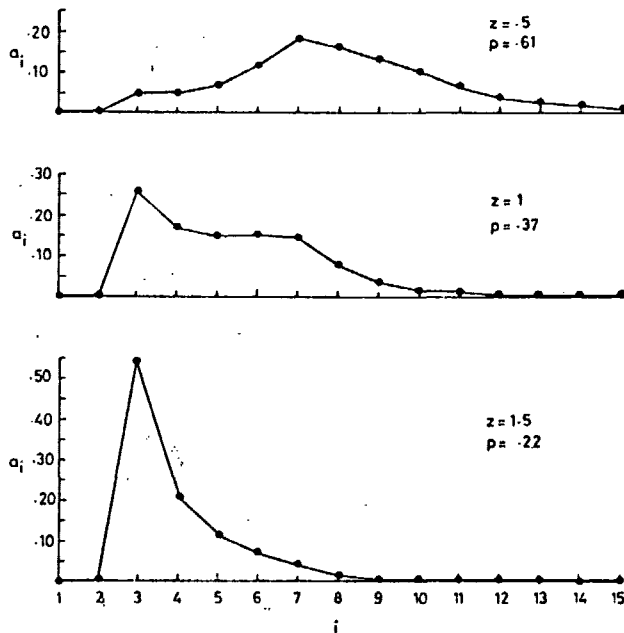
Afsnit fire indledes med at omtale begrebet livshistorie-strategi. Dette udtrykkes gennem fordelingen $a_i = l_i m_i$, (med hensyn til i). D.v.s. fordelingen for hvornår det enkelte individ reproducerer sig selv. Hvis et system befinder sig i ligevægt, vil ethvert individ netop i løbet af sit liv reproducere sig selv, derfor er summen $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1$. I denne model er a_i defineret ved

$$a_i = l_i m_i = \frac{l_i K_i}{\sum l_i K_i} \alpha \exp(-\beta p) \quad (16)$$

Da vi vil undersøge stabiliteten i ligevægtspunktet, hvor $\bar{p} = \ln \alpha / \beta$, svarer ligevægtsfordelingen til

$$a_i = \frac{l_i K_i}{\sum l_i K_i} \quad (17)$$

Fordelingen i ligevægtspunktet er uafhængig af parameteren α , men afhængig af parameteren p_i . Der vises udskrifter for fordelingen med tre forskellige værdier af p .



Frequency distribution of reproductive function $a_i = l_i m_i$, for striped bass population for $z = 0.5, 1, 1.5$

Figur 3.13. (Levin & Goodyear p. 257)

Det ses af figuren, hvis dødeligheden stiger skal individerne reproducere sig selv tidligere. Der gives ikke en kvalitativ karakteristik af den mest stabile a_i -fordeling. I stedet vendes tilbage til den generelle model, fra afsnit 2,

$$\underline{N}' = \underline{M} \cdot \underline{N}$$

Stabiliteten i ligevægtpunktet bestemmes af egenverdierne for den lineæriserede afbildning:

$$(M \cdot N)' = J = \begin{pmatrix} \frac{dN_1'}{dN_1} & \frac{dN_1'}{dN_2} & \dots \\ \frac{dN_2'}{dN_1} & \frac{dN_2'}{dN_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dN_1'}{dN_1} & \frac{dN_1'}{dN_2} & \frac{dN_1'}{dN_3} & \dots \\ P_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & P_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & P_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

og fra Lesliematrixen fås

$$\mu_i = \frac{dN_i'}{dN_i} = \frac{d}{dN_i} (m_1 N_1 + m_2 N_2 + \dots + m_i N_i + \dots + m_n N_n) \quad (11)$$

da $m_i = \hat{\alpha} K_i \exp(-\beta P)$

$$\mu_i = \frac{d}{dN_i} (\hat{\alpha} K_1 \exp(-\beta P) N_1 + \dots + \hat{\alpha} K_i \exp(-\beta P) N_i + \dots + \hat{\alpha} K_n \exp(-\beta P) N_n)$$

beregningerne er over n år, $k_i > 0$ for $i = 1, 2, \dots, n$
og $k_i = 0$ for $i > n$

herefter fås

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{d}{dN_i} \sum_{j=1}^n \hat{\alpha} \exp(-\beta P) K_j N_j \\ &= \frac{d}{dN_i} \hat{\alpha} \exp(-\beta P) \sum_{j=1}^n K_j N_j \\ &= \frac{d}{dN_i} \hat{\alpha} \exp(-\beta P) P \end{aligned}$$

da $P = \sum_i K_i N_i$ er μ_i en sammensat funktion, ved brug af kædereglen fås,

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{d}{dP} (\hat{\alpha} \exp(-\beta P) P) \frac{dP}{dN_i} \\ &= \frac{d}{dP} (\hat{\alpha} \exp(-\beta P) P) \frac{d}{dN_i} (K_1 N_1 + K_2 N_2 + \dots + K_n N_n) \\ &= \hat{\alpha} (\exp(-\beta P) + P \exp(-\beta P) (-\beta)) K_i \\ &= \hat{\alpha} K_i \exp(-\beta P) (1 - \beta P). \end{aligned}$$

Da undersøgelsen foretages i ligevægtspunktet,

$\bar{P} = \ln \alpha / \beta$, fås

$$\mu_i = \hat{\alpha} K_i \exp(-\beta \frac{\ln \alpha}{\beta}) (1 - \beta \cdot \frac{\ln \alpha}{\beta}) = \hat{\alpha} K_i e^{-\ln \alpha} (1 - \ln \alpha).$$

$$\mu_i = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} K_i (1 - \ln \alpha).$$

fra udtryk (8) og (9) fås $\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\sum_i l_i K_i}$ og indsættes dette

$$\mu_i = \frac{K_i (1 - \ln \alpha)}{\sum_i l_i K_i} \quad (20)$$

d.v.s.

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots \\ \rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Egenværdierne til J er rødderne i den karakteristiske ligning

$$\lambda^n - \mu_1 \lambda^{n-1} - \mu_2 \rho_1 \lambda^{n-2} - \mu_3 \rho_1 \rho_2 \lambda^{n-3} - \dots - \mu_n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1} = 0$$

Ved brug af (17) og (20) fås:

$$\alpha_i (1 - \ln \alpha) = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_{i-1} \mu_i$$

Indsættes dette i

$$\lambda^n - (1 - \ln \alpha) a_1 \lambda^{n-1} - (1 - \ln \alpha) a_2 \lambda^{n-2} \dots - (1 - \ln \alpha) a_n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{1 - \ln \alpha} \lambda^n \div a_1 \lambda^{n-1} \div a_2 \lambda^{n-2} \dots a_{n-1} \lambda \div a_n = 0 \quad (21)$$

Når $0 < \ln \alpha < 1$ gælder, ifølge Perron-Frobenius, at den dominerende egenværdi er reel, positiv og mindre end 1, og alle egenværdierne ligger indenfor enhedscirklen. I dette tilfælde er ligevægtspunktet således stabilt.

Når $\ln \alpha > 1$ har alle koefficienterne i ligning (21) samme fortegn og ved benyttelse af Decartes fortegnregel fås, at i denne situation findes ingen positive reelle rødder. Stabiliteten for ligevægtspunktet kendes derfor ikke; i resten af artiklen undersøges dette forhold nærmere. Hvis man skal løse (21) fuldstændigt, skal man finde det maksimale α , for hvilket alle rødderne ligger indenfor enhedscirklen, og dette skal gøres for alle mulige valg af a_i 'erne. Dette opgiver forfatterne også, men prøver derimod at se på en mere simpel approximation.

I afsnit 5 vælger forfatterne at undersøge stabilitetsforholdene algebraisk for den oprindelige ligning:

$$N' = M \cdot N \quad (13)$$

hvor de har delt populationen op i 2 aldersklasser:

$$N_1 = \text{rekrutter}$$

$$N_2 = \text{resten}$$

og hermed bliver værdierne året efter

$$N_1' = \hat{\alpha} P \cdot \exp(-\beta P)$$

$$N_2' = pN_1 + pN_2 \quad (22)$$

hvor antallet af æg, P , er givet ved

$$P = N_1 + KN_2$$

De sætter $K_1=1$ og $K_i=K > 1$ for $i > 1$. De går ud fra en middelværdi for K , da frugtbarheden stiger eksponentielt i de første år og falder igen mod 0 i de senere år.

Desuden antager de, at alle overlevelsessandsynligheder fra en aldersklasse til en anden er ens, dvs $p_i = p$ for alle i .

Under disse betingelser for p og K , og da

$$\hat{\alpha} = \alpha / V_s \Leftrightarrow \alpha = \hat{\alpha} \cdot V_s \quad (8)$$

$$V_s = \sum l_i K_i \quad (9)$$

$$l_i = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{i-1} \quad (10)$$

$$l_1 = 1$$

finder man:

$$\alpha = \hat{\alpha} \cdot V_s = \hat{\alpha} \cdot [l_1 K_1 + l_2 K_2 + \dots] =$$

$$\hat{\alpha} \cdot [K_1 + p_1 K_2 + p_1 \cdot p_2 K_3 + \dots] =$$

$$\hat{\alpha} \cdot [1 + K(p + p^2 + p^3 + \dots)] = \begin{cases} K_1 = 1 \\ K_i = K \text{ for } i > 1 \\ p_i = p \text{ for } i \geq 1 \end{cases}$$

$$\hat{\alpha} \cdot [1 + Kp/(1-p)] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{1 + Kp/(1-p)} \quad |$$

da $(p + p^2 + p^3 + \dots)$ er en kvotientrække, der kan skrives som $p/(1-p)$.

Ved differentiation af ligningssystemet (22) med hensyn til både N_1 og N_2 fås:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1'}{dN_1} &= \frac{d}{dN_1} (\hat{\alpha} \cdot (N_1 + KN_2)) \exp(-\beta(N_1 + KN_2)) = \\ & \hat{\alpha} \cdot [\exp(-\beta(N_1 + KN_2)) - \beta(N_1 + KN_2) \cdot \exp(-\beta(N_1 + KN_2))] = \\ & \hat{\alpha} \cdot [1 - \beta(N_1 + KN_2) \cdot \exp(-\beta(N_1 + KN_2))] = \\ & \hat{\alpha} \cdot [(1 - \beta P) \cdot \exp(-\beta P)] = \\ & \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \cdot (1 - \ln \alpha) \Big|_{P = \bar{P} = \frac{\ln \alpha}{\beta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_1'}{dN_2} &= \frac{d}{dN_2} (\hat{\alpha} \cdot (N_1 + KN_2) \cdot \exp(-\beta(N_1 + KN_2))) = \\ & \hat{\alpha} \cdot [K \cdot \exp(-\beta(N_1 + KN_2)) - \beta K(N_1 + KN_2) \exp(-\beta(N_1 + KN_2))] = \\ & \hat{\alpha} \cdot [K(1 - \beta(N_1 + KN_2)) \cdot \exp(-\beta(N_1 + KN_2))] = \\ & \hat{\alpha} \cdot [K(1 - \beta P) \cdot \exp(-\beta P)] = \\ & \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \cdot [K(1 - \ln \alpha)] \Big|_{P = \bar{P} = \frac{\ln \alpha}{\beta}} \end{aligned}$$

$$\frac{dN_2'}{dN_1} = \frac{d}{dN_1} (pN_1 + pN_2) = p$$

$$\frac{dN_2'}{dN_2} = \frac{d}{dN_2} (pN_1 + pN_2) = p$$

Stabilitetsforholdene i ligevægtpunktet bestemmes af egenverdierne for matricen

$$M = \begin{pmatrix} \frac{dN_1'}{dN_1} & \frac{dN_1'}{dN_2} \\ \frac{dN_2'}{dN_1} & \frac{dN_2'}{dN_2} \end{pmatrix} \quad \left| \quad p = \bar{p} = \frac{\ln \alpha}{\beta} \right.$$

Værdien for P i ligevægtpunktet indsættes og $\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}$ erstattes med $\frac{1}{1 + Kp/(1-p)}$.

Herefter fås, at stabilitetsforholdene i ligevægtpunktet bestemmes af egenverdierne til matricen

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1 - \ln \alpha}{1 + Kp/(1-p)} & K \cdot \frac{1 - \ln \alpha}{1 + Kp/(1-p)} \\ p & p \end{pmatrix}$$

For nemheds skyld sættes $\gamma = \frac{1 - \ln \alpha}{1 + Kp/(1-p)}$ og egen-

værdierne kan nu beregnes af

$$\begin{vmatrix} \gamma - \lambda & K\gamma \\ p & p - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\gamma - \lambda)(p - \lambda) - p(K\gamma) = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda^2 - (\gamma + p)\lambda + p\gamma(1 - K) = 0$$

I denne andengradsligning er $(\gamma + p)$ sporet og $p\gamma(1 - K)$ determinanten for matricen M .

I en andengradsligning $z^2 - az + b = 0$, $z \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, der har rødderne x og y , hvilket vil sige $a = x + y$ og $b = x \cdot y$, vil følgende to udsagn være ensbetydende

- 1) \Downarrow $|x| < 1 \wedge |y| < 1$
- 2) \Uparrow $|a| - 1 < b < 1$

Denne sammenhæng bevises i det følgende.

1^o : Først undersøges det tilfælde, hvor rødderne er reelle. Rødderne kan da skrives som :

$$x = \frac{1}{2} (a \pm \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Betingelsen om, at rødderne skal være reelle er ensbetydende med følgende :

$$a^2 > 4b \Leftrightarrow b < \frac{1}{4} a^2 \Leftrightarrow -2 < a < 2.$$

Da begge rødder opfylder, at $x \leq 1$ fås følgende opsplittning

$$3) \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 - 4b}) < 1, \text{ og}$$

$$4) -1 < \frac{1}{2} (a - \sqrt{a^2 - 4b}).$$

Ulighed 3) er ensbetydende med

$$(a + \sqrt{a^2 - 4b}) < 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4b} < 2 - a.$$

Da $|a| < 2$ er størrelsen $2 - a$ positiv. Herefter kvadreres på begge sider af ulighedstegnet og der fås

$$a^2 - 4b < a^2 - 4a + 4 \Leftrightarrow -4b < -4a + 4$$

$$\Leftrightarrow a - 1 < b.$$

Hvis man ganger udtryk 4) med -1 fås udtryk 3) bortset fra et fortegn, dvs. $-a$ i stedet for a . Derfor vil ovenstående ræsonnement gælde, hvis man i udtryk 1) ersatter a med $-a$, og dermed gælder det for $|a|$, at $|a| - 1 < b$ og da betingelsen $b < 1$ ifølge 1) er trivielt opfyldt, er det hermed bevist, at for reelle rødder x og y , hvor $a = x+y$ og $b = x \cdot y$ er udsagnene 1) og 2) ensbetydende.

2^o : Vi skal nu se på det tilfælde, hvor rødderne er komplekse og hinandens konjugerede. Rødderne kan skrives på formen

$$\updownarrow x = \frac{1}{2} (a \pm i \sqrt{4b - a^2}) \text{ hvor } (x, y) \in \mathbb{C}^2 - b > \frac{1}{4} a^2$$

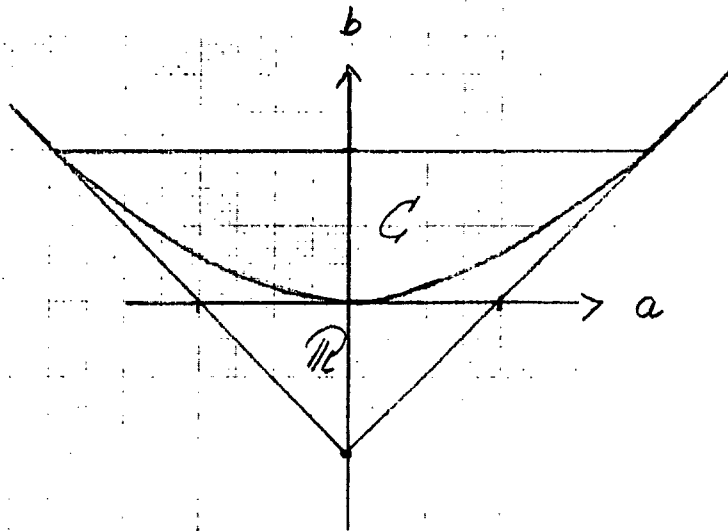
$$\updownarrow x = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b - a^2} = \sqrt{b} < 1 \Leftrightarrow b < 1.$$

For at vise, at $b > -1 + |a|$ benyttes betingelsen $b > \frac{1}{4} a^2$, idet det bevises at $\frac{1}{4} a^2 \geq |a| - 1$ og dermed $b > -1 + |a|$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} a^2 \geq -1 + |a| \\
 \Leftrightarrow & a^2 \geq 4|a| - 4 \\
 \Leftrightarrow & a^2 - 4|a| + 4 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} (a-2)^2 \geq 0 & ; a \geq 0 \\ (a+2)^2 \geq 0 & ; a \leq 0 \end{cases} \\
 \Downarrow & b > -1 + |a|
 \end{aligned}$$

Hermed er det bevist, at det for komplekse rødder x og y , $a=x+y$, $b=xy$ gælder, at udsagnene 1) og 2) er ensbetydende.

Ulighederne i 1) og 2) kan illustreres grafisk som det er vist herunder.



I ligningen der bestemmer egenværdierne:

$$\lambda^2 - (x+p)\lambda + px(1-k)$$

vil $a = x+p$ og $b = px(1-k)$

og sættes disse værdier ind i 2) gælder det, at rødderne (egenværdierne) begge numerisk er mindre end 1, hvilket garanterer stabilitet i ligevægtspunktet.

Idet $\gamma = \frac{1 - \ln \alpha}{1 + Kp/(1-p)}$ fås;

$a < 0 \wedge -a - 1 < b \Rightarrow$

$$-\frac{1 - \ln \alpha}{1 + Kp/(1-p)} - p - 1 < p(1-K) \frac{1 - \ln \alpha}{1 + Kp/(1-p)}$$

$$\frac{\ln \alpha - 1}{1 + Kp/(1-p)} [1 + p(1-K)] < 1 + p$$

$$\ln \alpha < \frac{(1+p)(1 + Kp/(1-p))}{1 + p(1-K)} + 1$$

Der har det forbehold at;

a) $1 + p(1-K) > 0 \Leftrightarrow p(1-K) > -1 \Leftrightarrow p < \frac{1}{K-1}$

b) $1 + Kp/(1-p) > 0$ altid opfyldt.

$$\ln \alpha < \frac{1 + p + (1+p)Kp/(1-p)}{1 + p(1-K)} + 1$$

$$\ln \alpha < \frac{1 + p + Kp/(1-p) + Kp^2/(1-p)}{1 + p(1-K)} + 1$$

$$\ln \alpha < \frac{(1+p)(1-p) + Kp(1+p)}{1-p(K-1)} \cdot \frac{1}{1-p} + 1$$

$$\ln \alpha < \frac{1 + (K-1)p}{1-p} \cdot \frac{1+p}{1-p(K-1)} + 1$$

(24)

$b < 1 \Rightarrow \gamma p(1-K) < 1 \Rightarrow$

$$\frac{1 - \ln \alpha}{1 + Kp/(1-p)} \cdot p(1-K) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \alpha - 1}{1 + Kp/(1-p)} \cdot p(K-1) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha < \frac{1 + Kp/(1-p)}{p(K-1)} + 1$$

da $p(K-1) > 0$ og $1 + Kp/(1-p) > 0$ altid er opfyldt

$$\ln \alpha < \frac{1-p + Kp}{p(K-1)} \cdot \frac{1}{1-p} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha < \frac{1 + (K-1)p}{p(K-1)} \cdot \frac{1}{1-p} + 1$$

(23)

$$a > 0 \wedge a - 1 < b \Rightarrow$$

$$\frac{1 - \ln a}{1 + Kp/(1-p)} + p - 1 < p(1-K) \frac{1 - \ln a}{1 + Kp/(1-p)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - \ln a}{1 + Kp/(1-p)} [1 - p(1-K)] < 1 - p \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln a - 1}{1 + Kp/(1-p)} [p(1-K) - 1] < 1 - p \Leftrightarrow$$

da $p(1-K) - 1 < 0$, fås

$$\ln a > \frac{(1-p)(1 + Kp/(1-p))}{p(1-K) - 1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln a > \frac{1-p + Kp}{p(1-K) - 1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln a > \frac{1 - p(K-1)}{-1 + p(1-K)} + 1 \Leftrightarrow$$

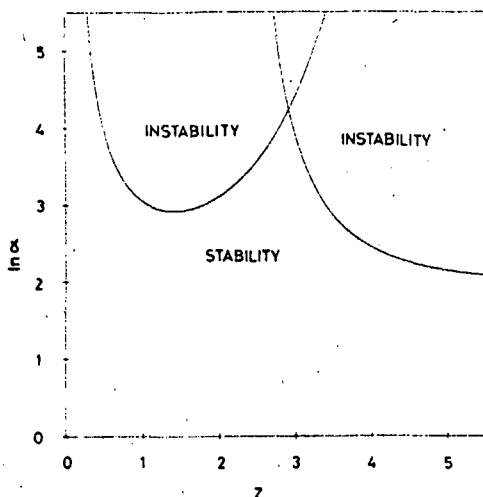
$$\ln a > \frac{-1(-1 + p(1-K))}{-1 + p(1-K)} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln a > 0$$

hvilket er trivielt opfyldt i det givne tilfælde.

Ulighederne der bruges til at opnå (23) og (24) træder i stedet for Jury testen, som er omtalt i artiklen, da vi ikke har kunnet nå at indarbejde denne. Ligning (24) garanterer, at ingen reelle rødder ligger uden for enhedscirklen, og ligning (23) gør det samme for komplekse rødder.

Man kan afbilde grafen for stabilitetsgrænsen svarende til lighedstegnet i (23) og (24), for et passende valgt K . Levin og Goodyear gør dette for $K=10$, og viser resultatet nedenfor i figur 3.14.



Figur 3.14

Stability diagram for model (22),
 $K_1 = 1, K_i = 10$ for $i > 1$

(Levin 1980. p. 260)

Hvis man sammenligner figuren med figur 3,9 ser man, at de to stabilitetsdiagrammer kvalitativt minder meget om hinanden. Årsagen til, at 2-aldersklassemodellens stabilitetsdiagram stiger så voldsomt for små z -værdier er, at i denne model kan fiskene leve evigt, hvorimod de blev afskåret efter 15 år i simulationerne. Begge stabilitetskurver har et toppunkt i form af en spids, og de nærmer sig begge asymptotisk fra oven til linien $\ln \alpha = 2$ for $p \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$). Alle tilfælde hvori $\ln \alpha < 2$ vil være stabile (se kap. 1). Stabilitetskurven i figur 3,14 består af 2 grene, hvori den højre svarer til reelle egenværdier, og den venstre gren svarer til komplekse egenværdier. Vi ved fra ligning (21) og Descartes fortegnregel, at der ikke vil være nogen positive reelle egenværdier, og derfor må det reelle grænsetilfælde, som svarer til den højre gren, have den dominerende egenværdi -1 .

Vi ved fra kapitel 1, at hvis man, for et givet p , bevæger sig fra det stabile område, gennem større værdier for $\ln \alpha$, gennem grænsetilfældet over i det ustabile område vil ligevægtspunktet blive ustabil og der vil opstå en 2-cyklus. Hvis man på samme måde overskrider den komplekse gren af

stabilitetskurven, vil der opstå den særlige type af bifurkationer, der kaldes Hopf-type-bifurkationer.

Levin og Goodyear definerer:

$$\begin{aligned} t_1 &= l_2 K_2 + l_3 K_3 + l_5 K_5 + \dots \\ &= 1 + p^2 K + p^4 K + \dots \\ &= 1 + K [p^2 + p^4 + p^6 + \dots] \\ &= 1 + \frac{K p^2}{1 - p^2} \end{aligned}$$

da parantesen kan omskrives til en kvotientrække

$$\begin{aligned} t_2 &= l_2 K_2 + l_4 K_4 + l_6 K_6 + \dots \\ &= p K + p^3 K + p^5 K + \dots \\ &= K [p + p^3 + p^5 + \dots] \\ &= \frac{K p}{1 - p^2} \end{aligned}$$

da parantesen her ligelides kan omskrives til en kvotientrække.

Opdelingen af V_s ($V_s = \sum l_i K_i = t_1 + t_2$) i t_1 og t_2 svarer til at se på æglægningen i ulige og lige år hver for sig. Dette kan blandt andet have nytte, når man ser på den anden itererede, idet man jo netop her kun ser på ægproduktionen hvert andet år.

Da $t_1 = 1 + \frac{K p^2}{1 - p^2}$ og $t_2 = \frac{K p}{1 - p^2}$

vil $t_1 + t_2 = \frac{1 - p^2 + K p^2 + K p}{1 - p^2} = \frac{(1 + p)(1 + p(K - 1))}{1 - p^2}$

og $t_1 - t_2 = \frac{1 - p^2 + K p^2 - K p}{1 - p^2} = \frac{(1 + p)(1 - p) - K p(1 - p)}{1 - p^2}$

$$= \frac{(1 - p)(1 - p(K - 1))}{1 - p^2}$$

fås

$$\frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} = \frac{\frac{(1 + p)(1 + p(K - 1))}{1 - p^2}}{\frac{(1 - p)(1 - p(K - 1))}{1 - p^2}} = \frac{1 + p}{1 - (K - 1)p} \cdot \frac{1 + (K - 1)p}{1 - p}$$

Det ses heraf og af ligning (24), at højre gren af stabilitetsdiagrammet kan beskrives ved

$$\ln \alpha = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} + 1 = \frac{t_1 + t_2 + t_1 - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{2t_1}{t_1 - t_2} = \frac{2}{1 - t_2/t_1} \quad (31)$$

De p-værdier der svarer til den højre gren svarer til at $t_1 > t_2$. Stabilitets forholdene kommer således til at afhænge af det relative forhold mellem lige og ulige år.

I afsnit 6 vil vi ikke gennemgå hele teksten i detaljer. Det har den enkle forklaring, at vi ikke på egen hånd har været i stand til at gennemføre vores oprindelige plan med udregninger og forklaringer til teksten. Tiden har heller ikke rakt.

I slutningen af afsnittet gennemgås artiklen kun oversigtsmæssigt bl.a. ud fra figurer, og forfatterens kommentarer. Til sidst vil vi gengive væsentlige dele af forfatterens konklusion.

Men inden dette vil vi kort resumere forløbet indtil nu.

Efter indledningen opstilledes i afsnit to den aldersstrukturerede n -dimensionale model.

I afsnit tre blev der foretaget en række modelsimulationer for at få en fornemmelse af, hvordan bestandstørrelsen udviklede sig for forskellige værdier af α og p . Disse modelsimulationer resulterede i et stabilitetsdiagram af α og p .

I begyndelsen af afsnit fire undersøgte kvantitativt forskellige stabile aldersfordelinger for reproduktionen. Senere i dette afsnit opstilledes de generelle betingelser for stabilitet i ligevægtpunktet.

I stedet for at beregne videre på det n -dimensionale tilfælde, undersøgte forfatterne i afsnit fem stabilitetsbetingelserne for en to-dimensional aldersstruktureret model.

Da stabilitetsområdet for den n -dimensionale model og den to-dimensionale model (se figur 3.9 og 3.14) har visse træk fælles, vil Goodyear og Levin undersøge om, man generelt kan udtale sig om stabilitetsegenskaberne i ligevægtpunktet.

Fra afsnit fire benyttes (21), som ved omskrivning giver

$$\frac{1}{1-bn\alpha} \lambda^m - a_1 \lambda^{m-1} - a_2 \lambda^{m-2} - \dots - a_m = 0 \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-bn\alpha} \lambda^m = a_1 \lambda^{m-1} + a_2 \lambda^{m-2} + \dots + a_m$$

$$(\lambda \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-bn\alpha} = a_1 \frac{\lambda^{m-1}}{\lambda^m} + a_2 \frac{\lambda^{m-2}}{\lambda^m} + \dots + a_m \frac{1}{\lambda^m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-bn\alpha} = a_1 \lambda^{-1} + a_2 \lambda^{-2} + \dots + a_m \lambda^{-m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-bn\alpha} = \sum_{j=1}^m a_j \lambda^{-j}$$

Forfatterne skriver, at de vil undgå spørgsmålet om en maksimumsalder m.h.t. reproduktion og lader derfor summationen gå til uendelig

$$\frac{1}{1-bn\alpha} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{-j} \quad (32)$$

Af udtryk (32) opstilles en nødvendig betingelse for stabilitet i ligevægtpunktet.

I det vi sætter

$$s(\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu^j - \frac{1}{1-bn\alpha}$$

er ligning (32) ensbetydende med

$$s\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0. \quad (32a)$$

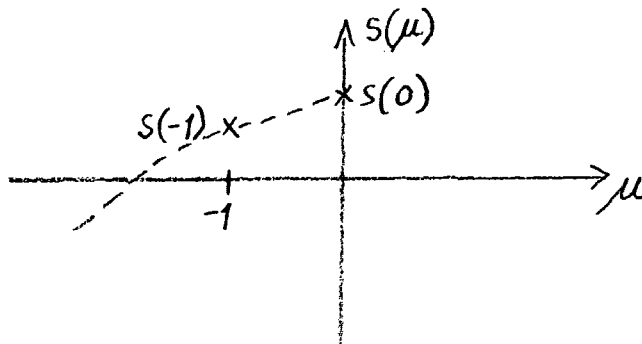
En nødvendig betingelse for stabilitet i ligevægtspunktet kan nu findes ved at undersøge værdien for $s(\mu)$ for bestemte værdier af μ .

Det antages stadig, at $\ln \alpha > 1$, og det ses herefter, at ingen positive reelle λ -værdier opfylder (32).

Hvis ligevægtspunktet skal være stabilt, skal egen-værdierne ligge inden for enhedscirklen, og her fås derfor, at λ skal ligge mellem -1 og 0. Dvs., at μ skal tilhøre intervallet fra $-\infty$ til -1 for at være løsning til (32a).

For $\mu = 0$ fås $s(0) = -\frac{1}{1-\ln \alpha} > 0$, da $\ln \alpha > 1$.

Resultatet kan illustreres grafisk



Funktionen er kontinuert og derfor skal værdien i punktet $\mu = -1$ være positiv. Hvis dette ikke gælder, vil grafen skære μ -aksen på $] -1; 0 [$ og med denne rod vil ligevægtspunktet ikke være stabilt, heraf

$$s(-1) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (-1)^j - \frac{1}{1-\ln \alpha} > 0$$

heraf fås

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j (-1)^j > \frac{1}{1-\ln \alpha} \quad (32b)$$

som altså er en nødvendig betingelse for stabilitet.

(Beviset er inddirekte : Hvis værdien i -1 var negativ, ville der også være en rod i $] -1; 0 [$; i modstrid med stabiliteten).

Venstresiden i udtryk (32b) kan omskrives ved benyttelse af

$$t_1 = 1 + \frac{Kp^2}{1-p^2} \quad \text{og} \quad t_2 = \frac{Kp}{1-p^2} \quad (30)$$

og

$$\ln \alpha < \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} + 1 \quad (31)$$

fås

$$\ln \alpha - 1 < \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}, \quad \text{da } \ln \alpha > 1 \quad \text{og} \quad t_1 > t_2$$

er

$$\frac{1}{\ln \alpha - 1} > \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}$$

⇕

$$\frac{1}{1 - \ln \alpha} < \frac{t_2 - t_1}{t_1 + t_2} \quad (33)$$

som udtrykker en nødvendig betingelse for stabilitet. Dette er en nødvendig overgangsbetingelse for bifurkation til en to-cyklus.

Hvis $t_2 \geq t_1$ ses det, at (33) er opfyldt, da $\ln \alpha > 1$. Hvis man benytter reproduktionsparametrene fra tabel 3.1, og antager $p_i = p$ for alle i , kan man beregne den øvre stabilitetsgrænse svarende til (33).

Når man sammenligner det derved fremkomne stabilitetsdiagram med figur 3.9, siger forfatterne, at stabilitetskurven ligger langt over den højre del af stabilitetskurven i figur 3.9. Det konkluderes, at bifurkation til en to-cyklus ikke er mulig.

De bifurkationer Goodyear observerede fandt sted ved komplekse egenverdier. Ved disse bifurkationer opstår en stabil invariant kurve (se kapitel I), altså en såkaldt Hopf-type bifurkation.

Nu indføres begrebet reproductive delay. Det betyder, at fiskene udskyder tidspunktet for første gangsgydning et vist antal år. Dette får betydning

for den aldersmæssige reproduktionsfordeling og dermed stabiliteten i ligevægtpunktet.

I betingelsen (33) indgik t_1 og t_2 , som var udtrykt ved henholdsvis de lige og ulige år.

Derfor har en reproduktionsudsættelse blandt "ligeårs" generationer ikke samme betydning for stabiliteten, som blandt et "ulige-års" generationer. Da forfatterne ikke umiddelbart kan overskue problemerne i forbindelse med en evt. udsættelse, vendes i stedet tilbage til den to-dimensionale model fra afsnit fem.

Reproduktionsparametrene K_1, K_2, K_3, \dots fastsættes i det følgende således, at reproduktionen udsættes :

$$\begin{aligned} K_1 &= 0 \text{ (en-generationsudsættelse)} \\ K_2 &= 1 \\ K_i &= K > 1 \text{ for } i \geq 3 \end{aligned} \quad (34)$$

Herefter fås for t_1 og t_2 , idet $l_i = p^{i-1}$

$$t_1 = \sum_{i=1}^{\infty} l_{2i-1} \cdot K_{2i-1} = \sum_{i=2}^{\infty} l_{2i-1} \cdot K = K \cdot \sum_{i=2}^{\infty} p^{2i-2} = \frac{Kp^2}{1-p^2} \quad (35)$$

$$t_2 = \sum_{i=1}^{\infty} l_{2i} \cdot K_{2i} = l_2 + K \cdot \sum_{i=2}^{\infty} p^{2i-1} = p \left(1 + \frac{Kp^2}{1-p^2} \right)$$

$$V_s = t_1 + t_2 = \frac{Kp^2}{1-p^2} + p \left(1 + \frac{Kp^2}{1-p^2} \right) = \frac{Kp^2 + p(1-p^2) + pKp^2}{1-p^2}$$

$$= \frac{p}{1-p} \frac{Kp + 1 - p^2 + Kp^2}{1+p} = \frac{p}{1-p} \frac{Kp(1+p) + (1+p)(1-p)}{1+p}$$

$$= \frac{p}{1-p} (Kp + 1 - p)$$

Idet $V_s = \sum l_i K_i$ og da $a_i = l_i m_i = \frac{l_i K_i}{\sum l_i K_i}$

i ligevægtpunktet fås (via (34))

$$a_i = \frac{1}{V_s} \cdot l_i K_i = \begin{cases} 0 & \text{for } i=1 \\ \frac{p}{V_s} & \text{for } i=2 \\ \frac{Kp^{i-2}}{V_s} & \text{for } i \geq 3 \end{cases}$$

Indsættes nu i (32)

$$\frac{1}{1-\ln a} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{-j}$$

∫ås

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{-j} &= \frac{p}{\sqrt{s}} z^{-2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{Kp^{j-1}}{\sqrt{s}} z^{-j} = \frac{p}{\sqrt{s}} z^{-2} + \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{p}{z^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Kp^j}{z^j} \\ &= \frac{p}{\sqrt{s}} z^{-2} \left(1 + K \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p}{z}\right)^j \right) = \frac{p}{\sqrt{s}} z^{-2} \left(1 + K \frac{\frac{p}{z}}{1 - \frac{p}{z}} \right) \\ &= \frac{p}{\sqrt{s}} z^{-2} \left(1 + \frac{Kp}{z-p} \right) \end{aligned}$$

fra omstøende er $\sqrt{s} = \frac{p}{1-p} (1-p+Kp)$, som indsættes

$$\begin{aligned} & z^{-2} \left(\frac{1-p}{1-p+Kp} \right) \left(1 + \frac{Kp}{z-p} \right) \\ &= z^{-2} \left(\frac{1}{1 + \frac{Kp}{1-p}} \right) \left(1 + \frac{Kp}{z-p} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

d.v.s. at

$$\frac{1}{1-\ln a} = z^{-2} \left(\frac{1}{1 + \frac{Kp}{1-p}} \right) \left(1 + \frac{Kp}{z-p} \right)$$

∫

$$\frac{z^2}{1-\ln a} = \frac{1}{1 + \frac{Kp}{1-p}} + \frac{Kp}{\left(1 + \frac{Kp}{1-p}\right)(z-p)}$$

∫

$$\frac{z^2(z-p)}{1-\ln a} = \frac{z-p}{1 + \frac{Kp}{1-p}} + \frac{Kp}{1 + \frac{Kp}{1-p}}$$

∫

$$z^3 - pz^2 = \frac{z(1-\ln a)}{1 + \frac{Kp}{1-p}} + \frac{p(K-1)(1-\ln a)}{1 + \frac{Kp}{1-p}}$$

∫

$$z^3 - pz^2 + \frac{\ln a - 1}{1 + \frac{Kp}{1-p}} z + \frac{\ln a - 1 p(K-1)}{1 + \frac{Kp}{1-p}} = 0$$

($\ln a > 1$)

Med

$$H_1 = -p, \quad H_2 = \frac{(\ln a - 1)(1-p)}{1 + (K-1)p}, \quad H_3 = \frac{(\ln a - 1)(K-1)(1-p)p}{1 + (K-1)p}$$

er (32) altså omskrevet til

$$Q(z) = z^3 + H_1 z^2 + H_2 z + H_3 = 0$$

En nødvendig betingelse for stabilitet er, at grafen for $Q(z)$ skærer x-aksen mellem punkterne $(0,0)$ og $(-1,0)$.

Ved hjælp af Jury criteria (Lewis 1977) fås ifølge forfatterne tre betingelser, hvoraf den sidste er den mest restriktive i den aktuelle situation. Der gælder inden Jury criteria anvendes, at $A_1 < 0$, $A_2 > 0$ og $A_3 > 0$. Herefter fås

$$1 - A_1 + A_2 - A_3 > 0 \quad (39a)$$

$$0 < A_3 < 1 \quad (39b)$$

$$1 - A_3^2 > |A_2 - A_1 A_3| \quad (39c)$$

Det antages stadig, at $\ln \alpha > 1$.

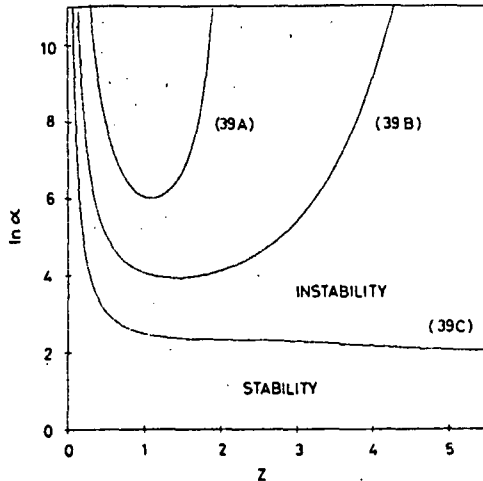
Betingelse (39a) svarer til betingelse (24) og er identisk med (33). Dobbeltuligheden i (39b) er identisk med (23). Men disse betingelser er uinteressante i forhold til definitionen på stabilitetsområdet.

Ovenstående påstande har vi ikke kunnet eftervise. Af (39c) følger direkte

$$A_3^2 + pA_3 < 1 - A_2 \quad (40)$$

som udtrykker den øvre grænse for stabilitet i ligevægtspunktet. Dvs., at hvis denne nødvendige betingelse er opfyldt, er betingelserne (39a) og (39b) også opfyldt.

Herefter følger i artiklen en figur, der viser kurven for model (34) med de tre stabilitetsbetingelser.



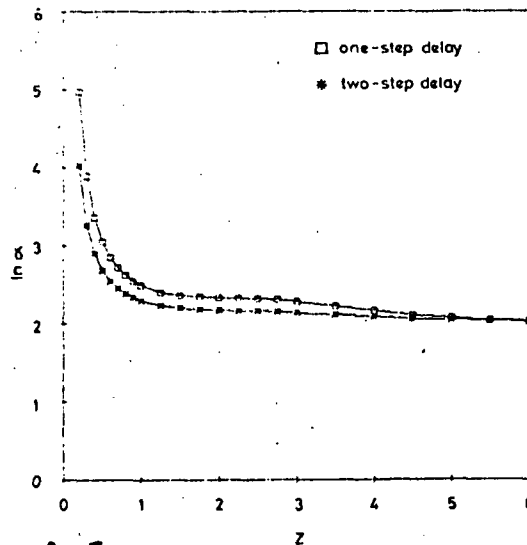
Figur 3.15

Stability diagram for model (34), $K_1 = 0$, $K_2 = 1$, $K_i = 10$ for $i \geq 3$, showing effect of reproductive delay. The three curves correspond to the three Jury criteria for stability, (39a) being the criterion for bifurcation to two-cycles. Only (39c) is relevant to the first bifurcation problem

(Levin 1980 p. 264)

Voksende p -værdier (dvs. at $z = -\ln p$ bliver mindre) viser stigende stabilitet. En sammenligning med figur 3.14 viser, at det nye stabilitetsområde ligger helt inden for det oprindelige.

Næste figur indeholder kurven for betingelse (40) i figur 3.14, som indbefatter en en-generationsudsættelse samt en kurve for betingelser for stabilitet, når der er tale om en to-generationsudsættelse.



Figur 3.16

Stability boundaries for the model (34), with a one-step delay in reproduction, and the corresponding model with a two-step delay (Levin 1980 p. 265)

Tilføjelse af reproduktionsudsættelse betyder for enhver p -værdi en reduktion i størrelsen af α i forhold til stabiliteten.

I følge Levin og Goodyear bestemmes stabiliteten af forskellige udsættelser.

I dette afsnit vendes tilbage til den to-dimensionale model (22) uden reproduktionsudsættelse for at forstå den højre halvdel af stabilitetskurven (figur 3.14).

Selvom der ikke er tale om umiddelbart ophør (truncation) i model (22) kan 'spids'-effekten på stabilitetskurven bedst forstås ved hjælp af begrebet truncation.

Frugtbarheder på 1, K, K, ... betyder et delvist ophør efter den tredje aldersklasse, fordi der ikke fortsættes med en eksponentiel vækst.

Fuldstændigt ophør, som indtræffer, når individerne er blevet over en vis alder, fremhæver denne udjævning/ophør på samme måde som en reproduktiv udsættelse fremhæver den hurtige begyndelsesstigning på stabilitetskurven.

For at undersøge truncation-effekten betragtes modellen med frugtbarheder 1, K, K², ... (dvs. ingen truncation, men eksponentiel stigning).

P er tilstrækkelig til at beskrive denne model.

$$P = N_1 + KN_2 + K^2N_3 + \dots + K^{j-1}N_j \quad \text{og}$$

$$\alpha = \hat{\alpha} \cdot V_s \quad \text{hvor} \quad V_s = \sum l_i K_i \quad \text{så}$$

$$\alpha = \hat{\alpha} (1 + K\rho + K^2\rho^2 + K^3\rho^3 + \dots) = \hat{\alpha} \frac{1}{1 - K\rho} \quad (42)$$

Værdien af P næste år er

$$P' = N_1' + KN_2' + K^2N_3' + \dots + K^{j-1}N_j'$$

$$= N_1' + \sum_{i=1}^{\infty} K^i N_{i+1}' = N_1' + \sum_{i=1}^{\infty} K^i \rho N_i = N_1' + \sum_{i=2}^{\infty} K^{i-1} \rho N_{i-1}$$

$$= \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) + \rho \sum_{i=2}^{\infty} K^{i-1} N_{i-1} = \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) + K\rho \sum_{i=2}^{\infty} K^{i-2} N_{i-1}$$

$$= \hat{\alpha} P \exp(-\rho P) + K\rho \sum_{i=0}^{\infty} K^i N_{i+1}$$

hvor $\sum_{i=0}^{\infty} K^i N_{i+1} = P$, så dvs.

$$P' = \hat{\alpha} P \exp(-\beta P) + p K P \quad (41)$$

P' er en differentiabel funktion af P .

$$\frac{\partial P'}{\partial P} = \hat{\alpha} (\exp(-\beta P) + P(-\beta) \exp(-\beta P)) + p K = \hat{\alpha} \exp(-\beta P) (1 - \beta P) + p K$$

i Ligevægtspunktet; $P = \bar{P} = \ln \alpha / \beta$

$$= \hat{\alpha} \frac{1}{\alpha} (1 - \ln \alpha) + p K$$

fra (42) $\alpha = \hat{\alpha} / (1 - Kp)$ sås

$$= \hat{\alpha} \frac{1 - Kp}{\hat{\alpha}} (1 - \ln \alpha) + p K = (1 - Kp) (1 - \ln \alpha) + p K$$

$$= 1 - \ln \alpha - Kp + Kp \ln \alpha + p K = 1 - \ln \alpha + Kp \ln \alpha$$

$$= 1 + \ln \alpha (Kp - 1) = 1 - \ln \alpha (1 - Kp)$$

d.v.s.

$$\left. \frac{\partial P'}{\partial P} \right|_{P=\bar{P}} = 1 - \ln \alpha (1 - Kp)$$

(pK er en tilvækstfaktor under 1; modsat denne antagelse ville $\alpha \rightarrow \infty$. Derfor gælder $p < \frac{1}{K}$).

Hvis ligevægtspunktet skal være stabilt skal egenverdierne ligge mellem -1 og 1. Det betyder, at højresiden i

$-1 < 1 - \ln \alpha (1 - pK) < 1$ automatisk er opfyldt da $\ln \alpha > 1$. Tilbage er

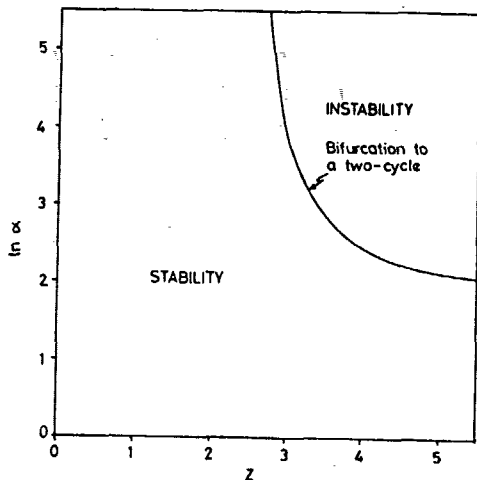
$$1 - \ln \alpha (1 - pK) > -1$$



$$\ln \alpha < \frac{2}{1 - pK}$$

(43)

På figur 3.17 vises stabilitetskurven for model (41). Der er ingen 'spids' og bifurkation er altid til en to-cyklus. Kurven ligner meget højre halvdel i figur 3.14.



Figur 3.17

Stability boundary for the model (41),
 $K_j = 10$ for all j

(Levin 1980 p. 266)

Nu ændres frugtbarhederne til $1, K, K^2, \dots, K^{j-1}, 0, 0, \dots$
 dvs. truncation efter j aldersklasser.
 $P(\tau)$ er værdien for P i generation τ .

$$P(\tau) = N_1(\tau) + K N_2(\tau) + K^2 N_3(\tau) + \dots + K^{j-1} N_j(\tau) + \dots$$

Herefter fås

$$P(\tau+1) = N_1(\tau+1) + K N_2(\tau+1) + K^2 N_3(\tau+1) + K^3 N_4(\tau+1) + \dots$$

$$= N_1(\tau+1) + \sum_{i=1}^{j-1} K^i N_{i+1}(\tau+1)$$

$$= N_1(\tau+1) + \sum_{i=1}^{j-1} K^i \rho N_i(\tau)$$

$$= N_1(\tau+1) + \rho K \sum_{i=1}^{j-1} K^{i-1} N_i(\tau)$$

$$= N_1(\tau+1) + \rho K (P(\tau) - K^{j-1} N_j(\tau))$$

$$= \hat{\alpha} P(\tau) \exp(-\beta P(\tau)) + \rho K P(\tau) - \rho K^j N_j(\tau)$$

da $N_j(\tau) = \rho^{j-1} N_1(\tau-j+1)$

$$= \hat{\alpha} P(\tau) \exp(-\beta P(\tau)) + \rho K P(\tau) - \rho^j K^j N_1(\tau-j+1)$$

$$\begin{aligned} \text{da } N_1(Y_{-j} + 1) &= \hat{\alpha} P(Y_{-j}) \exp(-\beta P(Y_{-j})) \\ &= \hat{\alpha} P(Y) \exp(-\beta P(Y)) + pK P(Y) - \\ &\quad p_j K^j \hat{\alpha} P(Y_{-j}) \exp(-\beta P(Y_{-j})) \end{aligned} \quad (44)$$

og

$$\alpha = \hat{\alpha} \sum_{i=0}^{j-1} (Kp)^i = \hat{\alpha} \frac{1 - (Kp)^j}{1 - Kp} \quad (45)$$

Ligning (44) har Ligevægt for $\bar{P} = \ln \alpha / \beta$.

Hvis man sætter

$$G(P) = \hat{\alpha} P \exp(-\beta P) \quad (46)$$

kan Ligning (44) omskrives til

$$P(Y+1) = pK P(Y) + G(P(Y)) - (pK)^j G(P(Y_{-j}))$$

For at undersøge den lineære stabilitet sættes

$$P(s) = \bar{P} + c \lambda^s \quad (48)$$

svarende til s iterationer ($f(P) = \bar{P} + \underbrace{f'(P)}_2 (P - \bar{P})$)

Ved indsættelse af (48) i (47) og udnyttelse af at \bar{P} er ligevægtpunkt i (47) fås

$$c \cdot \lambda^{s+1} = pK \cdot c \lambda^s + (G(\bar{P} + c \lambda^s) - G(\bar{P})) - (pK)^j (G(\bar{P} + c \lambda^{s-j}) - G(\bar{P}))$$

Ved rækkeudvikling fås

$$c \cdot \lambda^{s+1} = pK \cdot c \lambda^s + \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_{P=\bar{P}} \cdot c \lambda^s - (pK)^j \cdot \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_{P=\bar{P}} \cdot c \lambda^{s-j} + o(c \lambda^s)$$

Ved division med $c \cdot \lambda^s$ fås

$$\lambda = pK + \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_{P=\bar{P}} \cdot \left(1 - \left(\frac{pK}{\lambda} \right)^j \right) \quad \text{hvor} \quad (49)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_{P=\bar{P}} = \hat{\alpha} \exp(-\beta P)(1-\beta \bar{P}) = (1-\ln \alpha) \frac{\hat{\alpha}}{\alpha}$$

$$= (1-\ln \alpha) \frac{1-(pK)}{(1-(pK))^j} \quad (50)$$

$$\lambda = pK + (1-\ln \alpha) \cdot \frac{1-pK}{1-(pK)^j} \cdot \left(1 - \left(\frac{pK}{\lambda}\right)^j\right)$$

som videre giver

$$\frac{\lambda - pK}{1 - pK} = (1 - \ln \alpha) \cdot \frac{1 - \left(\frac{pK}{\lambda}\right)^j}{1 - (pK)^j} \quad (51)$$

som er betingelsen for stabilitet i ligevægtpunktet, forudsat at rødderne i ligningen (51) alle ligger inden for enhedscirklen.

Ved at sætte

$$r = (\ln \alpha - 1) (1 - pK) / (1 - (pK)^j) - pK \quad (52)$$

$$s = (1 - \ln \alpha) (pK)^j / (1 - (pK)^j) \quad (53)$$

så forsimples (51) til

$$\lambda^{j+1} + r\lambda^j + s = 0. \quad (54)$$

Alle fire kurver* har samme monotoniforhold med netop et maksimum. Det ses, at hvis $\ln \alpha$ ligger mellem 2.5 og 6 og ligevægtpunktet er stabilt, vil en lille ændring af p-værdier resultere i ustabilitet.

* i figur 3.18

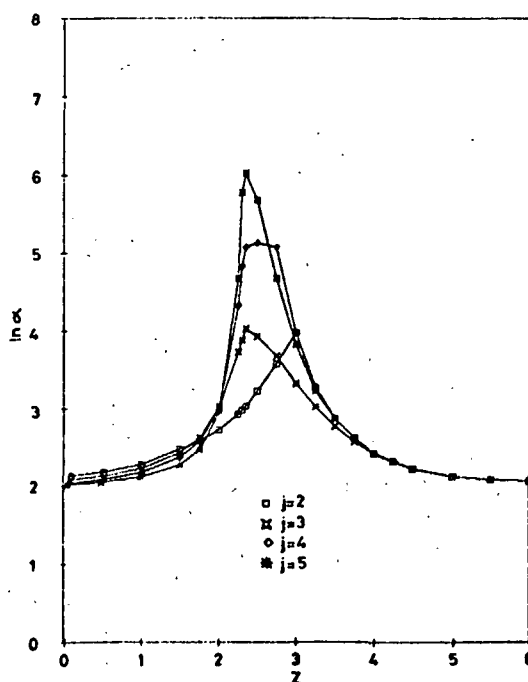


Figure 3.18

Stability boundary for the model (41) when truncated after $j=2, 3, 4, 5$. Key is $j=2(\square)$, $j=3(\times)$, $j=4(\diamond)$, $j=5(*)$

(Levin 1980 p. 267)

Man kan kombinere de to effekter reproductive delay og truncation delay.

Dvs., at man antager, der ikke er nogen reproduktion i m år. Disse følges nu af j år med frugtbarheder $1, K, K^2, K^3, \dots, K^{j-1}$ og reproduktionen hører op efter dette forløb.

Analogt til ligning (47) fås

$$P(\tau+1) = pK P(\tau) + p^m G(P(\tau-m)) - p^m (pK)^j G(P(\tau-j-m)) \quad (58)$$

hvor

$$P = N_{m+1} + KN_{m+2} + \dots + K^{j-1} N_{m+j} \quad (58a)$$

De to udsættelser kan ifølge forfatterne eksplicit findes af ligning (58a) og i den karakteristiske ligning

$$\frac{1}{1 - \lambda p K} = \lambda^{-(m+1)} \frac{1 - (pK/\lambda)^j}{1 - (pK)^j} \cdot \frac{1 - pK}{1 - (pK/\lambda)} \quad (59)$$

og man får for j lige

kurven $\lambda = -1$ når

$$\ln \alpha = \frac{2}{1-pK} \text{ hvis } m \text{ er lige} \quad (60)$$

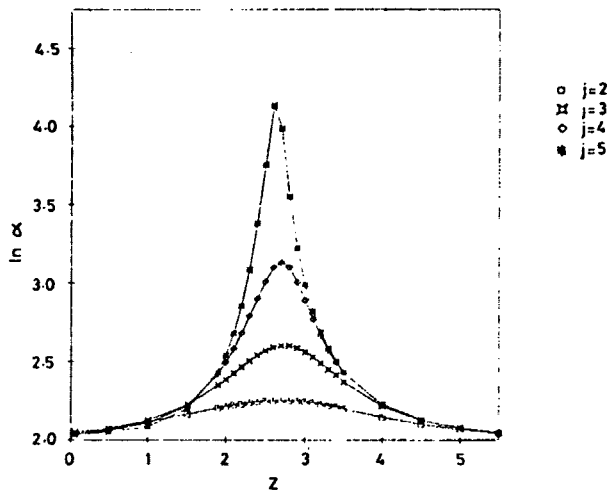
og

$$\ln \alpha = \frac{2pK}{pK-1} \text{ hvis } m \text{ er ulige} \quad (61)$$

Det siges, at ligning (60) og (61) begge ligger uden for stabilitetsområdet, og de er derfor irrelevante i forhold til stabilitetsgrænser.

I den næste figur 3.19 vises effekten af dels en en-generations udsættelse og dels truncation efter henholdsvis $j = 2, 3, 4$ og 5 .

Figur 3.19

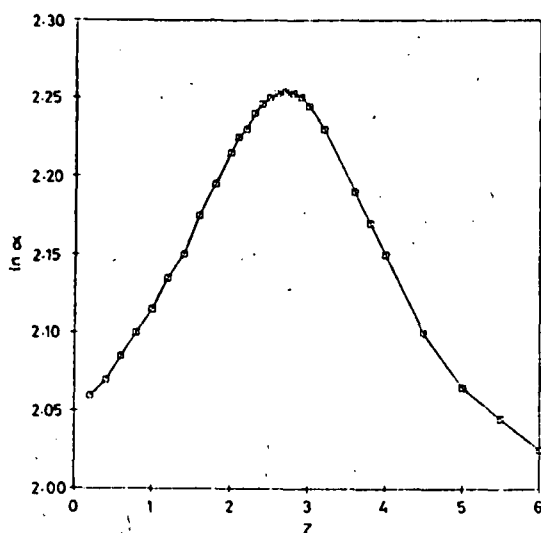


Stability boundary for the model (41) when modified by a one-step reproductive delay and truncation after $j = 2, 3, 4, 5$. Key is as in Fig. 14

(Levin 1980 p 270)

For at fremhæve udseendet af kurven omkring maksimumsværdien, er kurven for $j=2$ forstørret op i figur 3.20.

På figur 3.19 ses det, at for større og større j -værdier (dvs. truncation sent) bliver stabiliteten meget følsom over for ændringer af p -værdien.

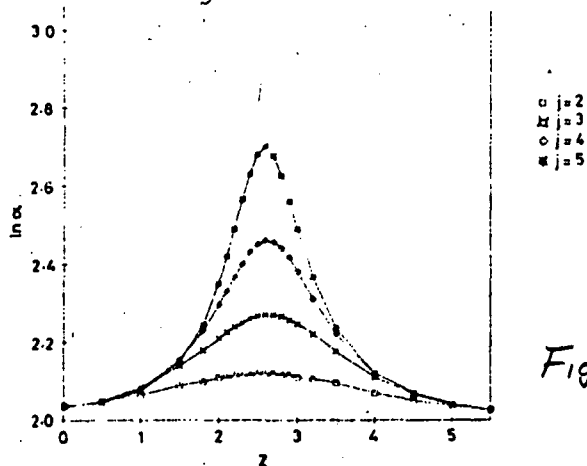


Figur 3.20

Stability boundary for the model (41) when modified by a one-step reproductive delay and truncated after $j = 2$; that is $K_1 = 0, K_2 = 1, K_3 = 10, K_j = 0$ for $j > 3$

(Levin 1980 p 270)

Herefter vises figur 3.21, hvor der er tale om en to-generationsudsættelse.



Figur 3.21

Stability boundary for the model (42) when modified by a two-step reproductive delay and truncated after $j = 2, 3, 4, 5$. Hence $K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 1, K_4 = 10, \dots, K_{j_0+2} = 10^{j_0-1}, K_j = 0$ for $j > j_0$. Key is as in Fig. 3.17

(Levin 1980 p 271)

Herefter konkluderer forfatterne følgende (vores oversættelse).

Den sribede aborremodel er baseret på et frugtbarhedsskema, der indeholder tre hovedelementer :

- 1) en begyndelsesperiode med ingen eller meget lille frugtbarhed
fulgt af
- 2) en mellemliggende periode, hvor frugtbarheden vokser eksponentielt med alderen
- 3) en aftagen og eventuelt ophør med reproduktion, når en maksimumsalder for reproduktion er nået.

Under disse forudsætninger vil stigende p-værdier (fra lave værdier) være stabiliserende, fordi det øger det effektive antal af reproduktive aldersklasser.

Over et vist punkt vil langtids-udsættelse, der skyldes truncation eller aftagen i reproduktionen være dominerende, og stigende p-værdier vil være destabiliserende.

'Spidsen' på stabilitetskurverne resulterer i en balance mellem effekten af de to udsættelser (reproductive delay og truncation delay), og vil ikke forekomme, hvis den reproduktive udsættelse er tilstrækkelig lang.

Til sidst opsummerer Levin og Goodyear artiklens problemstilling.

De konstaterer, at 'the Ricker stock-recruitment relationship' er en af de mest almindelige matematiske modeller inden for fiskerividenkab.

Trods dens begrænsninger, anvendes modellen meget i fiskerividenkab, og der er for nylig gjort forsøg på at anvende den i forbindelse med forudsigelse af virkningerne ved kraftværksproduktion på fiskepopulationer (McFadden and Lawler 1977) (miljøstriden som refereres i kapitel 2).

Modellen har ikke kun begrænsninger som et beskrivelsesmiddel for naturlige populationer. Dens komplicerede opførsel ligner andre tilsvarende ikke-lineære modeller, og kan være særdeles følsom over for parameterændringer; hvilket brugerne af modellen ikke altid er opmærksomme på (se f.eks. McFadden and Lawler 1977).

Når populationen som undersøges er en multiple-age spawning population (dvs. at individerne gyder i flere år og aldersspecifikt) bliver situationen endnu mere kompliceret.

Problemerne opstår generelt når frugtbarhedsraterne (maternity rates) gøres tæthedsafhængige.

Denne artikel undersøger i dybden yderligere komplikationer og deres fortolkninger.

Særligt er (som Goodyear påpegede) effekten på stabilitet ved stigende overlevelse flertydig, således at stabiliteten forøges når p er lille og modsat når p er stor.

Disse effekter undersøges og forklares i denne artikel, som beskæftiger sig med lineær stabilitet.

De ikke-lineære spørgsmål, som kun nævnes sporadisk, giver anledning til yderligere problemer og spørgsmål.

I artiklen undersøges kun en mulig sammenhæng (vores understregning) mellem bestand og rekruttering, hvor der er tale om multiple-age spawning.

Den komplicerede opførsel af selv denne simple model viser, at man skal være forsigtig ved brugen af disse modeller i andre sammenhænge.

Forfatterne mener, at hvis sådanne modeller skal anvendes, er det vigtigt gennem teoretiske analyser at forstå, hvordan løsningernes opførsel påvirkes ved parameterændringer. (oversættelse slut, p. 271-272)

KONKLUSION

Vi har gennem projektarbejdet fået en fornemmelse af vilkårene for matematisk modekspertise.

Hele det retslige forløb i miljø sagen var en indikator for udvikling af matematiske modeller til at bestemme konsekvenser ved kraftværksproduktion på Hudson flodens stribede aborrepopulation. Nogle af disse modeller var life-cycle modeller, som beskrev fiskepopulationens udvikling, og som byggede på Ricker-mekanismer. Det er disse modeller (eller dele af dem) som Levin og Goodyear tager op til vurdering.

I første omgang er det kun Levin, der i sit testimony kritiserer disse modeller for at være mangelfulde, da de ikke tager højde for nogle umiddelbare biologiske aspekter, som aldersstrukturen i en population. Han kritiserer også både kraftværkernes konsulenter og EPA (miljøstyrelsen som han selv repræsenterer) for ikke at have inddraget den teoretiske viden, man faktisk har om mere komplicerede modeller.

I artiklen udbygger Levin og Goodyear life-cycle modeller ved at tage hensyn til alderens indflydelse på rekrutteringen. De opstiller en lidt bedre model i den forstand, at deres inddragelse af begrebet aldersstruktur er i bedre overensstemmelse med det virkelighedsområde, der skal beskrives. Derved svækker de modpartens model. Men spørgsmålet er om den udbyggede model også kan give et bedre, sandere kvantitativt udsagn.

Levin's argumentation i miljø sagen bygger på de resultater, der beskrives i deres fælles artikel, afsnit 1-4. Det er især modelsimulationerne og det resulterende stabilitetsdiagram i afsnit tre, der udgør grundlaget i kritikken i testimony'et. Dette grundlag benyttes også i artiklen omend der foretages kvalitative algebraiske bestemmelser i sidste

halvdel af artiklen.

Men det er en svaghed i artiklen, at der fokuseres så meget på grænseområdet i stabilitetsdiagrammerne. Det undersøges for hvilke værdier (p, α) ligevægtpunktet vil være stabilt/ustabilt. Men det tages ikke på noget tidspunkt op til behandling, om denne problemstilling er relevant i forhold til den naturlige fiskepopulation. Hvis $\ln \alpha$ er mindre end 2 vil dette ikke indvirke på stabiliteten, selvom p ændres væsentligt.

Det behandles heller ikke i artiklen hvorvidt en stabil periodisk cyclus, kan være en mulig løsning for et system.

Men er det så en rimelig måde Levin og Goodyear udøver kritik på, og hvem kan kontrollere deres arbejder?

De påpeger mangler ved en simpel model og opstiller en avanceret model, der indholdsmæssigt svarer bedre til virkeligheden. Udfra nogle simulationer lægger de sig fast på nogle fortolkningsmuligheder. I slutningen af artiklen udføres nogle beregninger mht. stabilitetsegenskaber, der viser, at det er vanskeligt at forudsige systemets opførsel ved små ændringer af parameterverdierne.

De sidste teoretiske afsnit i artiklen kan medvirke til at skærpe opmærksomheden, når man opstiller, anvender og udleder konklusioner fra modeller. Men disse sidste afsnit kan også have en meriterende funktion.

Vi har vanskeligt ved at vurdere, hvem der kan kigge brugere af modeller og kritikere af disse efter i kortene. Men gennem arbejdet med dette projekt har vi fået en fornæmmelse af, at skaren af mulige modelkontrollanter er lille. Man skal kende noget til det virkelighedsområde som modellen foreskriver at beskrive. Desuden skal man kunne

en hel del matematik (svarende til mindst universitetslærerniveau) for at kunne kontrollere en mere kompliceret models udsagn.

Men tross det, at kun få personer har mulighed for at kontrollere matematiske modeller, er det vigtigt at disse eksperter, gør brug af deres viden. Herved kan de medvirke til, at f.eks. kraftværker eller andre instanser med samfundsmæssige interesser ukritisk anvender og udleder uholdbare udsagn fra matematiske modeller.

LITTERATURLISTE

- Birkmose, Marianne et al. : En undersøgelse af modellen SMEC II, RUC 1975.
- Christensen, Sigurd W. et al. : Science and the Law; Confluence and Conflict on the Hudson River, EIA Review, 1981.
- Fenchel, Tom : Almen økologi, Akademisk forlag 1972.
- Goodyear, C. Phillip : Oscillatory Behavior of a Striped Bass Population Model controlled by a Ricker Function, American Fisheries Society 109, 1980.
- Guckenheimer J., G. Oster and A. Ipaktchi : The Dynamics of Density Dependent Population Models, Journal of Mathematical Biology 4, Springer, 1977.
- Lange, Troels : En undersøgelse af matematisk økologi, RUC, 1982.
- Levin, Simon A. and C. Phillip Goodyear : Analysis of an Age-Structured Fishery Model, Journal of Mathematical, 1980.
- Levin, Simon A.: Testimony; The concept of compensatory mortality in relation to impacts of power plants on fish populations. Prepared for the United States Environmental Protection Agency, region II. April 1979.
- May, Robert : Stability and complexity in model ecosystems, Princeton 1973.
- May, Robert : Theoretical Ecology, second edition, Sinauer Associates, Sunderland, 1981.

May and Oster : Bifurcation and dynamic complexity in simple ecological models, *The American Naturalist*, Vol. 110, No. 974, 1976.

New York Times den 20-12-1980.

New York Daily News den 20-12-1980.

Ricker, W. E. : Stock and Recruitment, *J. of Fish. Res. Board. Can*, 11, 1954.

Ricker, W. E. : Computation and interpretation of Biological Statistics of Fish Populations, *Bull. Fish. Res. Board. Can* 191, 1975.

Williamson, Mark : *The Analysis of Biological Populations*, Arnold, 1972.

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og Peter H. Lassen.
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik. Nr. 3 er a jour ført i marts 1984
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen. Nr. 4 er p.t. udgået.
Mogens Niss.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE". Nr. 5 er p.t. udgået.
Helge Kragh.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN". Nr. 7 er udgået.
B.V. Gnedenko.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarium".
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER". Nr. 12 er udgået
Mogens Brun Heefelt
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".
Else Høyrup. Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMAL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of reality".
-
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE".
a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss. Nr. 24 a+b er p.t. udgået.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS".
Helge Kragh.
- 28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kretnøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
 Projekt rapport af Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
 Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
 Oluf Danielsen. Nr. 30 er udgået.
 Udkommer medio 1982 på Fysik-, Matematik- og Kemilærer-
 nes forlag.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYS-
 TEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE". Nr. 31 er p.t. udgået
 Projekt rapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
 Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST
 VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER OG MOSSBAUER-
 EFFEKTMÅLINGER".
 Projekt rapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og
 Preben Jensen.
 Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Chri-
 stiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK-NATURVIDENSKA-
 BELIGE UDDANNELSER. I-II".
 Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION".
 ENERGY SERIES NO.1. Nr. 34 er udgået.
 Bent Sørensen. Publ. i "Renewable Sources of Energy and the Environment",
 Tycooli International Press, Dublin, 1981.
- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
 Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN ?".
 Fire artikler.
 Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
 ENERGY SERIES NO.2.
 Bent Sørensen.
-
- 38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI
 OG SAMFUND". Nr. 38 er p.t. udgået
 Projekt rapport af Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau
 og Finn Physant.
 Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og
 Ib Thiersen.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
 Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknolo-
 givurdering". Nr. 40 er p.t. udgået
 Projekt rapport af Arne Jørgensen, Bruno Petersen og
 Jan Vedde.
 Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE
 INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY
 SUPPLY SYSTEMS".
 ENERGY SERIES NO.3.
 Bent Sørensen.

- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO.4.
Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISK UNDERSØGELSE AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
-
- 45/82
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE - I+II ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSEBACK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO.5.
Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn, Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen & Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY". ENERGY SERIES NO.6.
Rapport af Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?"
Projektrapport af Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS"
Bernhelm Booss & Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Arne Jakobsen & Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Stig Andur Pedersen & Johannes Witt-Hansen.

- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde
Universitetsbibliotek.
En bibliografi.
Else Høyrup.
- Vedr. tekst nr. 55/82:
Se også tekst 62/83.
- 56/82 "ÉN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- Nr. 57 er udgået.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger
over spredning af dyr mellem småbiotoper i
agerlandet.
Projektrapport af Per Hammershøj Jensen &
Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.
Projektrapport af Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og
Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION", som et eksempel på
en naturvidenskab - historisk set.
Projektrapport af Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og
Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde
Universitetsbibliotek.
En bibliografi. 2. rev. udgave
Else Høyrup
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO
ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8
David Crossley & Bent Sørensen
- 64/83 "VON MATHEMATIK UND KRIEG".
Bernhelm Booss og Jens Høyrup
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af Per Hedegård Andersen, Kirsten
Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos,
Else Marie Pedersen, Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss & Klaus Grünbaum
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I
ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Ole
Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen

- 67/83 "ELIPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af Lone Biilmann og Lars Boye
Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid, Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer
Albert Chr. Paulsen
- 70/83 "INDLÆRINGS- OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU"
Projektrapport af Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Age Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum & Anders H. Madsen
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich & Mette Vedelsby
- 72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S. Peirce.
Peder Voetmann Christiansen
- 73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt
ENERGY SERIES No. 9
Specialeopgave i fysik af Bent Hove Jensen
Vejleder: Bent Sørensen
-
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik
Projektrapport af Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering
Projektrapport af Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl, Frank Mølgård Olsen
Vejledere: Mogens Brun Heefelt & Jens Bjørneboe
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af Niels Boye Olsen og Bent Sørensen
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller
Projektrapport af Svend Age Houmann, Keld Nielsen, Susanne Stender
Vejledere: Jørgen Larsen & Jens Bjørneboe

- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM"
Specialerapport af Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant
Vejleder: Niels Boye Olsen
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE"
Projektrapport af Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B"
Mogens Brun Heefelt
- 81/84 "FREKVENSafhængig LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM"
Specialerapport af Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen
Vejleder: Niels Boye Olsen
- 82/84 "MATEMATIK- OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND"
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY"
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
af Bent Sørensen
- 84/84 " NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK"
Specialerapport af Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE"
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
af Bent Sørensen
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS"
af Jeppe C. Dyre
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS"
af Detlef Laugwitz
- 89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING"
af Bjarne Lillethorup & Jacob Mørch Pedersen
- 90/84 "ENERGI I I.G- en teori for tilrettelæggelse!"
af Albert Chr. Paulsen
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET"
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson
Vejleder: Torsten Meyer

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET
2. Materiale

Projektrapport af: Birger Lundgren, Henning
Sten Hansen og John Johansson

Vejleder: Torsten Meyer

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM-NON-LOCALITY"
af Peder Voetmann Christiansen

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren
og ånden"

Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl
og Frank M. Olsen

Vejleder: Mogens Niss

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE"

Peace research series no. 3

af Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING"
af Bjarne Lillethorup

Vejleder: Bent Sørensen

5

7

8

9

ISSN 0106-6242