IMFUFA tekst

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Historisk fremkomst og moderne anvendelse af Boolsk algebra - et matematikfilosofisk undervisningsforløb til gymnasiet

Uffe Thomas Jankvist

januar 2012

nr. 487 - 2012

Roskilde University,
Department of Science, Systems and Models, IMFUFA
P.O. Box 260, DK - 4000 Roskilde
Tel: 4674 2263   Fax: 4674 3020

Historisk fremkomst og moderne anvendelse af Boolsk algebra – et matematikfilosofisk undervisningsforløb til gymnasiet

Af: Uffe Thomas Jankvist

IMFUFA tekst nr. 487/ 2012 – 80 pages – ISSN: 0106-6242

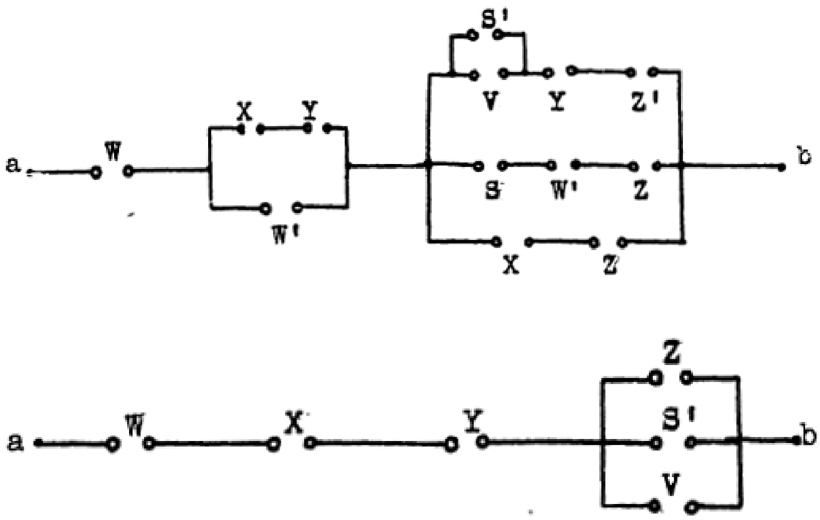
Den nuværende gymnasiale bekendtgørelse for matematik påpeger at elever skal tilegne sig viden om matematiske anvendelser, matematikkens historiske udvikling og i en vis grad også dens natur som fag. I KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002) omtales tre former for ’overblik og dømmekraft’ som i nogen grad modsvarer disse tre ’aspekter’ ved faget matematik: matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder; matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning; og matematikkens karakter som fagområde. Et af formålene ved nærværende undervisningsmateriale har været at forsøge at opstille en ramme for elevers udvikling af disse tre former for overblik og dømmekraft.
Måden hvorpå dette er søgt gjort er ved sammensætningen af tre originaltekster fra matematikken til et undervisningsmateriale – én tekst repræsenterende hver af de tre former for overblik og dømmekraft. Disse tekster præsenteres i dansk oversættelse (i de tilfælde hvor en oversættelse ikke allerede fandtes er de oversat af undertegnede) og suppleres undervejs med kommentarer og opgaver. Materialet (og forløbet) er designet således, at eleverne selv kan arbejde sig igennem det i grupper (evt. under rådføring med deres underviser), for således også at opfylde bekendtgørelsens krav om gruppearbejde.
Samtidig indeholder forløbet en skriftlig dimension, nemlig i forbindelse med den såkaldte afsluttende essay-opgave. Udover at opfylde bekendtgørelsens krav om større skriftlige produkter tjener denne opgave også som en ramme for elevernes udvikling af de tre former for overblik og dømmekraft, idet de tre originaltekster her skal relateres til hinanden såvel som til en række spørgsmål karakteristiske for KOM-rapportens overblik og dømmekraft.
Den første af de tre originaltekster i dette materiale er George Booles *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* fra 1854, hvori han udvikler hvad der i dag kendes under navnet Boolsk algebra. Den næste er den filosofiske tekst af Richard W. Hamming *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics* fra 1980. Og endelig den anvendelsesorienterede tekst af Claude E. Shannon *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits* fra 1938, hvori Shannon anvender Boolsk algebra til beskrivelse af elektriske kredsløb.

Nærværende forløb har været implementeret i en 3g-klasse på Ørestad gymnasium i efteråret 2011 som del af et forskningsprojekt finansieret af Det Frie Forskningsråd – Kultur og Kommunikation (FKK) under Forsknings- og Innovationsstyrelsen. Klassens egen matematikunderviser gennemførte forløbet, mens jeg observerede og videofilmede implementeringen. Specielt fulgte jeg én gruppe bestående af fem elever i forbindelse med deres opgaveregning og udarbejdelsen af deres essay-opgave. De didaktiske forskningsresultater af denne undersøgelse vil blive præsenteret i fremtidige artikler.

Uffe Thomas Jankvist, 2012

Historisk fremkomst og moderne anvendelse af Boolsk algebra

– et matematikfilosofisk undervisningsforløb til gymnasiet



Udformet af

Uffe Thomas Jankvist

September 2011 ◦ IMADA ◦ Syddansk Universitet

Forord

Dette undervisningsforløb er udviklet som del af et postdoc-projekt finansieret af *Det Frie Forskningsråd i Kultur og Kommunikation* under Forsknings- og Innovationsstyrelsen. Et af formålene med projektet er at afsøge mulighederne for samspillet mellem matematik, matematikkens historie samt matematikkens filosofi og videnskabsteori i den gymnasiale matematikundervisning – og på længere sigt tværfaglige kombinationer mellem matematik og humaniora i gymnasiets alment studieforberedende forløb (AT).

Bekendtgørelsen for matematik i gymnasiet stiller i dag krav om en belysning af faget matematiks 'samspil med andre fag':

> Når matematik A indgår i en studieretning, skal dele af det faglige stof vælges, så det giver mulighed for en styrkelse af det faglige samspil i studieretningen. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen. Der skal tilrettelægges sammenhængende undervisningsforløb med det hovedsigte at udvikle elevernes kendskab til matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. (Undervisningsministeriet; 2010, bilag 35, punkt 3.4)

Sådanne undervisningsforløb kan på naturlig vis placeres under inddragelsen af det såkaldte 'supplerende stof':

> Eleverne vil ikke kunne opfylde de faglige mål alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof i matematik A, herunder samspillet med andre fag, skal perspektivere og uddybe kernestoffet, udvide den faglige horisont og give plads til lokale ønsker og hensyn på den enkelte skole.
> For at eleverne kan leve op til alle de faglige mål, skal det supplerende stof, der udfylder ca. 75 timer, blandt andet omfatte sammenhængende forløb: [...] om matematik-historiske emner. (Undervisningsministeriet; 2010, bilag 35, punkt 2.3)

Udover det 'faglige mål' som matematikhistoriske forløb generelt retter sig mod (i) retter nærværende undervisningsforløb sig mod endnu et (ii):

> Eleverne skal kunne [...]:
>
> i. demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
>
> ii. demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling (Undervisningsministeriet; 2010, bilag 35, punkt 2.1, nummerering tilføjet)

For at skitsere nærværende forløb ganske kort er der tale om at I, eleverne, vil blive introduceret til en matematikhistorisk case, en konkret moderne anvendelse af matematikken i denne samt en videnskabsteoretisk/-filosofisk perspektivering af disse.

Tilrettelæggelsen af forløbet søger også at tage højde for de arbejdsformer som den gymnasiale matematikundervisning ifølge bekendtgørelsen (læreplanen) skal bygge på. Om disse hedder det:

> En betydelig del af undervisningen tilrettelægges som projektforløb eller større temaopgaver over forskellige dele af kernestoffet og det supplerende stof eller problemstillinger, der er genstand for fagsamarbejde. For hvert større forløb formuleres faglige mål, der tages stilling til arbejdsprocessen, og eleverne udarbejder et skriftligt produkt, som kan dokumentere de faglige resultater eller konklusioner vedrørende en tværfaglig problemstilling. [...]
> En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på at udvikle elevernes matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion.
> Der arbejdes bevidst med den mundtlige dimension, herunder selvstændig tilegnelse, bearbejdning og præsentation af forelagte matematiske tekster.
> I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde. Endvidere arbejdes der med større skriftlige produkter som resultat af arbejdet med projekter og emner. (Undervisningsministeriet; 2010, bilag 35, punkt 3.2)

En essentiel del af dette undervisningsforløb (og -materiale) er derfor også *måden*, hvorpå der arbejdes med stoffet. Ideen er at I, eleverne, i høj grad tilegner jer stoffet på egen hånd og i samarbejde med andre elever – altså bør forløbet kun omfatte et minimum af 'traditionel tavleundervisning' fra underviserens side, f.eks. i form af opsamlinger.

Det vil være hensigtsmæssigt at der allerede ved forløbets begyndelse bliver dannet et antal elev-grupper, således at man i en given gruppe arbejder sig igennem forløbet sammen og qua den indbyrdes faglige (og tværfaglige) diskussion og opgaveløsning opnår en fælles forståelse af stoffet. I den forstand skal gruppearbejdet tænkes på som værende mere end blot en arbejdsform, men også en form for 'metode' til tilegnelse af stoffet, til forståelse og til kompetenceudvikling.

Forløbet afsluttes med en større skriftlig opgave, en samling såkaldte *essay-opgaver*, som også skal udarbejdes i grupperne og som er **essentiel** for dækningen af de faglige mål (i og ii).

I forbindelsen med udarbejdelsen af dette undervisningsmateriale og forløb skal følgende personer takkes for deres faglige bidrag i form af diskussioner, forslag, erfaringsudveksling med mere: Bjarne Toft og Jessica Carter, Syddansk Universitet (SDU) i Odense; David Pengelley og Jerry Lodder, New Mexico State University (NMSU) i Las Cruces. Og en speciel tak til Janet Barnett, Colorado State University (CSU) i Pueblo, idet væsentlige elementer af fremstillingen i nærværende forløb bygger på hendes brug af samme tekster (Barnett, 2011a; Barnett, 2011b) såvel som diskussioner med hende. Ydermere bygger et udvalg af de matematiske opgaver i dette materiale på Barnetts for således at muliggøre en sammenligning af didaktiske forskningsresultater på tværs af landegrænser.

September, 2011
Uffe Thomas Jankvist
IMADA, Syddansk Universitet

Indhold

1 Introduktion **1**
1.1 Mogens Niss om matematikkens femfoldige natur 1
1.2 Overordnet om undervisningsmaterialet 3
1.3 Opbygning af kapitlerne 4

2 Boole om algebra og logik **5**
2.1 Kort biografi 5
2.2 Optakt til Booles værk 6
2.3 Booles værk om tankens love 6
2.4 Boolsk algebra og moderne mængdelære 28

3 Hamming om matematikkens 'urimelige' anvendelighed **31**
3.1 Kort biografi 31
3.2 Optakt til Hammings artikel 32
3.3 Hammings 1980-artikel 32

4 Shannons brug af Boolsk algebra **49**
4.1 Kort biografi 49
4.2 Optakt til Shannons artikel 50
4.3 Shannons 1938-artikel 52

5 Afsluttende skriftlig opgave **67**
5.1 Essay-opgave 1: Fra Booles 'tanke' til Shannons anvendelse 67
5.2 Essay-opgave 2: Matematikkens urimelige effektivitet 68
5.3 Essay-opgave 3: Matematikkens forskellige ansigter 69
5.4 Essay-opgave 4: Jeres mening 71

Litteratur **73**

1 Introduktion

Som nævnt i forordet er dette undervisningsmateriale møntet på et matematikfilosofisk/-historisk forløb til gymnasiet. En væsentlig del af forløbet består i at I, eleverne, skal læse, diskutere og arbejde med et mindre udvalg af originalkilder (i dansk oversættelse) fra matematikkens historie, matematikkens filosofi og matematikkens anvendelse.

For at lægge lidt mere 'blødt' ud begynder vi med at læse et uddrag fra indledningen til bogen *Matematikken og Verden* (Niss; 2001), hvori professor i matematik og matematikkens didaktik,[1] Mogens Niss, diskuterer matematikkens forskellige 'ansigter'. Når man taler om matematikken er det meget almindeligt at skelne imellem den 'rene' matematik og den 'anvendte' matematik, men som vi skal se er disse to 'ansigter' ikke de eneste som matematikken besidder.

1.1 Mogens Niss om matematikkens femfoldige natur

> Faktisk kan man sige, at matematikken har fem ret forskellige ansigter, eller – i mere højtidelige vendinger – at den har en femfoldig natur [...]. Fælles for de fem 'ansigter' eller 'naturer' er at de netop er sider af den samme genstand, nemlig matematikken, og at træk ved hver af dem er tæt forbundet med de øvrige fire. [...]
>
> Matematikkens første natur er at være en *grundvidenskab* (man kan også sige en 'ren' videnskab), der sigter mod at finde/skabe, beskrive og forstå objekter, fænomener, relationer, mekanismer, teorier, m.m. der hører hjemme i et særligt univers, som vi plejer at omtale som matematisk. Denne bestræbelse går med andre ord ud på at frembringe ny viden om og indsigt i dette univers og på at videreudvikle det. I sin egenskab af grundvidenskab formulerer matematikken principielt sine spørgsmål, søger dem besvaret, og søger svarene accepteret blandt fagfolk, uden hensyn til eksterne interesser eller nytteforestillinger. At forholdene i praksis kan være noget anderledes, først og fremmest derved at matematikken udøves af mennesker som er i samspil med hinanden og med omverdenen, og som lever i et samfund der måske ikke har meget sympati for grundforskning, ændrer ikke ved det principielle i sagen.
>
> Matematikkens anden natur er at være en *anvendt videnskab*. I den egenskab forsøger den at give sit bidrag til svar på spørgsmål som hører hjemme inden for andre fag- eller praksisområder, men hvor svarene enten slet ikke eller ikke helt så godt kan leveres uden hjælp fra matematik. For at vi her kan tale om anvendt *videnskab*, og ikke blot anvendelse af matematik, skal enten spørgsmålene eller svarene (eller begge dele) i en eller anden

[1] Matematikkens didaktik er den videnskab der omhandler hvordan man underviser i og lærer matematikfaget.

forstand være nye. Det er en aldeles respektabel anvendelse af matematik at konstatere, at når momsen på en vare er 25% udgør momsen 20% af varens udsalgspris, men anvendt videnskab er det ikke, for både spørgsmål og svar er velkendte (om end for nogle mere end for andre).

Den forsker der dyrker matematik som anvendt videnskab, kan i praksis være svær at skelne fra den som dyrker matematisk grundvidenskab. Deres gøremål kan ligne hinanden til forveksling. Den afgørende forskel er imidlertid, om de spørgsmål de arbejder på at besvare tjener til at skabe ny viden inden for det matematiske univers (i så fald har vi at gøre med grundvidenskab) eller til at skabe ny viden inden for et andet felt (hvor der så er tale om anvendt videnskab). Hvad enten der er tale om grundvidenskab eller anvendt videnskab, er det ultimative mål at skabe ny holdbar viden og indsigt. Matematikkens historie fremviser spektakulære eksempler på at dagens grundvidenskab er afgørende for morgendagens anvendte matematik, såvel som eksempler der viser det omvendte.

At være et *system af redskaber for praksis*, både i form af processer og produkter, til hjælp for beslutninger og handlinger inden for andre områder, er matematikkens tredje natur. (Dette skal ikke forstås sådan, at systemet er fikst og færdigt og statisk. Tværtimod udvikler det sig hele tiden.) Det ovennævnte momseksempel hører hjemme i denne sammenhæng. Eksemplerne på at matematikken bruges som redskab inden for en mangfoldighed af felter er legio, faktisk i en sådan grad at man kan sige, at brugen af matematiske redskaber gennemsyrer den samfundsmæssige praksis. Mere herom senere. En given brug af matematik som redskab for beslutninger eller handlinger kan meget vel være kommet i stand som resultat af tidligere landvindinger for matematik som grundvidenskab eller anvendt videnskab. Dagens praksis er ofte et resultat af gårsdagens videnskab, som f.eks. når tv-antenner udformes som paraboler, men når matematikken er nået til at blive et redskab for praksis har den forladt de videnskabelige studerekamre.

Udnyttelsen og videreudviklingen af matematik som grundvidenskab, anvendt videnskab og et system af redskaber for praksis kræver videregivelse og spredning til ny generationer. Eftersom dette har vist sig ikke at finde sted automatisk, må matematik læres gennem undervisning. Matematiks fjerde natur er at være et *undervisningsfag* på alle trin af ethvert lands uddannelsessystem. Matematik er verdens største undervisningsfag (vi skal jo ikke alle undervises i samme modersmål). Der er f.eks. lige så mange matematiklærere i Kina som der er voksne i Danmark. Matematik som undervisningsfag er nært forbundet med matematikkens øvrige naturer, men er ikke at betragte som en blot og bar afspejling af dem. I matematikundervisning og -tilegnelse mødes matematikken som fag med menneskers forestillinger, tanker, følelser, erfaringer m.m., hvilket skaber særlige problemstillinger som ikke forefindes på samme måde i forhold til matematikkens øvrige naturer.

Endelig er matematikkens femte natur at være et rum for en særlig slags *æstetiske oplevelser*. De fleste mennesker som har fået positive erfaringer af mødet med matematik, har fra tid til anden fået æstetiske oplevelser, oftest af 'aha-typen'. De har måske fået et pludseligt glimt af klarhed over og indsigt i et før uløseligt problem, 'ja, selvfølgelig, sådan må det være!', eller 'sådan kan det gøres, hvor smart!'. Eller de har set noget der før tog sig ud som et uldent rodsammen af enkeltstående brokker, pludselig falde på plads i et klart og overskueligt mønster, hvor elementerne nu træder frem i en klart forståelig sammenhæng, 'nå, det er sådan det hele hænger sammen; hvor er det smukt!'. Eller de har set et panorama af en matematisk teori med en basis som formuleres på bagsiden af et frimærke, folde sig ud i det mentale synsfelt, 'tænk at man kan komme så langt ved hjælp af så lidt!'. Eller de har set anvendelsen af en begrebsdannelse med logisk nødvendighed føre til fremkomsten af matematiske objekter med forbløffende træk, som de ikke i forvejen havde kunnet forestille sig muligheden af. Fælles for sådanne æstetiske oplevelser er en lettet eller ligefrem euforisk fornemmelse af indsigt, overblik, gennemskuelighed, klarhed og enkelhed. Men de ledsages gerne af en dragende fornemmelse af uanede mængder af endnu ikke udforskede eller forståede rum, der ansporer til videre udforskning, 'hvordan mon tingene hænger sammen dér?'.

Som sagt indfinder sådanne oplevelser sig kun hos folk der har haft et vist mål af succes i omgangen med matematik. Hos andre mødes de gerne med vantro eller afstandtagen, ikke mindst hvis de pågældende har været udsat for matematiklærere der, billedligt talt, har villet banke 'glæden ved matematikkens skønhed' ind i hovedet på elever, som ikke har orket den fornødne indsats, eller ikke har stillet sig tilfredse med retorik men har haft brug for evidens. (Niss; 2001, s. 12-15)

1.2 Overordnet om undervisningsmaterialet

Dette undervisningsmateriale består af i alt fire kapitler, udover nærværende introduktionskapitel, som hver især har sit fokus og sigte.

I det første kapitel skal vi se et historisk eksempel på udøvelsen af den såkaldte 'rene' matematik, altså matematik som grundvidenskab. Nærmere bestemt er der tale om den tekst, hvor ideen til den i dag såkaldte Boolske algebra stammer fra, hvilket er ideen om et logisk system og operationen med udelukkende to elementer, nemlig 0 og 1 (eller Falsk og Sand).

I andet kapitel skal vi læse en filosofisk tekst omhandlende 'matematikkens urimelige effektivitet', hvilket refererer til matematikkens særlige status både som en anvendt videnskab og et system af redskaber for praksis, samt det faktum at matematik i langt højere grad end så mange videnskaber synes at besidde denne 'effektivitet' eller brugbarhed. Ydermere berører denne tekst også elementer – på filosofisk vis – ved matematikkens andre 'ansigter'; grundvidenskaben, undervisningsfaget og dens æstetiske oplevelser.

I det tredje kapitel skal vi så stifte bekendtskab med en faktisk anvendelse af ideen om den Boolske repræsentation som vi så udviklet i den første tekst. Der er således tale om et konkret eksempel på anvendt matematik, nærmere bestemt matematik anvendt til løsningen af et historisk datalogisk problem – nemlig hvorledes man matematisk kan beskrive og analysere, og dermed effektivisere designet af, elektriske kredsløb til brug i computer-hardware.

Fjerde og sidste kapitel indeholder oplægget til forløbets afsluttende skriftlige gruppearbejde, hvor visse af de filosofiske betragtninger fra den anden tekst skal sammenholdes med de to konkrete eksempler fra de andre tekster.

1.3 Opbygning af kapitlerne

I hver af de tre følgende kapitler vil vi, som sagt, komme til at se og studere originalkilder fra matematikken, kilder som skal læses og forstås. Da dette ikke nødvendigvis altid vil være helt ligetil vil der undervejs være kommentarer, opklarende spørgsmål og opgaver, hvis formål det er at lette den videre forståelse og som derfor bør forsøges løst inden der læses videre. Disse spørgsmål og opgaver kan variere i såvel sværhedsgrad som omfang og nogle kan have karakter af deciderede bevis-opgaver.

For nemmere at kunne adskille hvad der er originalkilde fra hvad der er kommentarer, spørgsmål og opgaver anvendes der to forskellige skrifttyper: denne for originalkilder og denne for alt andet.

For yderligere at lette forståelsen af originalkilderne vil der undertiden optræde forklarende fodnoter, såfremt det ikke kan forventes at det vides hvad enten bestemte ord eller matematiske begreber, teorier eller problemer referer til. Fodnoterne kan også blot indeholde referencer til anden litteratur. Men fælles for alle disse indføjede fornoter er at de optræder i kantede parenteser som [disse] for at understrege at der ikke er tale om fodnoter i den originale tekst. Brugen af kantede parenteser på denne måde: [...], indikerer derimod at der er udeladt en del originalteksten på dette sted.

De tre originalkilder som vi skal læse (uddrag af) i dansk oversættelse er:

- George Boole, 1854: *En undersøgelse af tankens love på hvilke de matematiske teorier for logik og sandsynlighed er funderet.*
  Originaltitel: *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.*
- Richard W. Hamming, 1980: *Matematikkens urimelige effektivitet.*
  Originaltitel: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics.*
- Claude E. Shannon, 1938: *En symbolsk analyse af relæ- og kontakt-kredsløb.*
  Originaltitel: *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits.*

2 Boole om algebra og logik

George Boole (1815-1864)

2.1 Kort biografi

George Boole kom fra forholdsvis trange kår i Lincoln, England, og hans forældre var derfor ikke i stand til at give ham den uddannelse han kunne ønske sig. Derfor var Boole i høj grad selvlært. Efter at have modtaget undervisning i latin fra en lokal boghandler, lærte Boole sig selv græsk, hvilket han mestrede i en alder af 14 år, og derefter også fransk og tysk. I en alder af 16 år måtte Boole tage et job som skolelærer for at forsørge sine forældre og søskende, efter at faderens skomagerforretning måtte lukke. Boole fastholdt sin interesse for sprog men begyndte samtidig at studere matematik. I 1834, i en alder af 19 år, åbnede han sin egen skole i Lincoln.

I 1838 blev Boole leder af en kostskole i Waddington og han begyndte kort efter at udgive matematiske artikler og korrespondere med ledende matematikere, specielt matematikeren De Morgan. I november 1844 modtog Boole Royal Society's *Royal Medal* for et arbejde, hvori han anvendte algebraiske metoder til løsning af differentialligninger. I 1850 blev Boole den første professor i matematik ved Queen's College i Cork, Irland. I 1854 udgave sit værk i logik *The Laws of Thought...* og i 1857 blev han Fellow i Royal Society. Booles matematiske karriere, som begyndte sent, endte alt for tidligt da han i en alder af 49 år døde af sygdom.

2.2 Optakt til Booles værk

Omtrent samtidig i 1847 udgav George Boole og Augustus De Morgan (1806-1871) hver sit værk om logik: Booles var *The Mathematical Analysis of Logic* og De Morgnas *Formal Logic*, hvoraf den sidstnævnte begynder med følgende forklaring af hvad logik omhandler:

> Den første ide som en læser kan danne sig af logik sker ved at betragte det som undersøgelsen af den del af forstanden der afhænger af måden hvorpå følgeslutninger dannes, og undersøgelsen af generelle grundsætninger og regler for konstruktionen af argumenter, således at konklusionen ikke indeholder nogen unøjagtigheder der ikke allerede er taget højde for i præmisserne. Det har så vidt intet at gøre med sandheden af fakta, meninger eller formodninger fra hvilke en slutning kan udledes; men derimod at sørge for at en slutning faktisk er sand, hvis præmisserne er sande. [...] Hvorvidt præmisserne er sande eller falske er ikke et spørgsmål om logik, men om moral, filosofi, historie eller et hvilket som helst andet emneområde til hvilket de måtte høre: det logiske spørgsmål er, følger konklusionen rent faktisk, hvis præmisserne er sande? (De Morgan; 1847, s. 1, oversat til dansk)

Som De Morgan forsøgte Boole at strække grænserne for de traditionelle slutningsregler. Mere præcist gjorde han dette ved at udvikle en metode til repræsentation og manipulation af *alle* logisk gyldige følgeslutninger. I modsætning til De Morgan gjorde Boole dog dette ved en direkte adoption af *algebraiske* metoder. Som De Morgan senere selv formulerede det, så var "Hr. Booles generalisering af logikkens former langt den dristigste og mest originale..." (Merrill; 1990, s. 174, oversat til dansk).

En af de strukturer som Boole baserede sine senere studier på var den af en såkaldt 'symbolsk algebra'. De Morgan giver selv følgende eksempel: Givet symbolerne M, N, $+$, og en eneste kombinationsrelation, nemlig at $M + N$ er det samme som $N + M$ (De Morgan; 1849, s. 94). De Morgan giver dernæst en række eksempler til illustration af generaliteten af denne algebra. For eksempel kan M og N være tal og $+$ kan repræsentere addition på traditionel aritmetisk vis. Men symbolet $+$ kan også repræsentere multiplikation, da også denne operation opfylder det opstillede krav (også kendt som kommutativitet). Endelig kan M og N være nationer og $+$ repræsentere følgerne af at have udkæmpet et slag med hinanden.

I Booles *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* fra 1854 ser vi inspirationen fra disse ideer. Nedenfor er gengivet kapitel II og kapitel III fra dette værk, hvori Boole forklarer brugen af 'tegn' (bogstavsymboler) til at repræsentere 'klasser'; han definerer et system af symboler $(+, -, \times, 0, 1)$ til at repræsentere operationer på disse tegn; og han udleder basale love som disse operationer må følge. Oversættelsen til dansk er af Wolff (1967, s. 229-252).

2.3 Booles værk om tankens love

KAPITEL II

Om tegn i almindelighed og om logikkens tegn i særdeleshed; også om de love, som denne klasse af tegn er underkastet.

1. Det er en almindeligt indrømmet sandhed, at sproget er et instrument for den menneskelige fornuft og ikke blot et medium for tankens udtrykkelse. Det er i dette kapitel hensigten at undersøge, hvad det er, der gør sproget så tjenligt for denne vor vigtigste åndsevne. På de forskellige trin af denne undersøgelse føres vi til at betragte sprogets opbygning opfattet som et formålsbestemt system; at undersøge dets enkelte grundbestanddele; at gøre forsøg på at afgøre disses indbyrdes forbindelser og afhængighed; samt at undersøge på hvilken måde disse bidrager til opnåelsen af det mål, de som sideordnede dele af et system har tilknytning til.

For disse undersøgelser vil det ikke være nødvendigt at indgå på en diskussion af det berømte stridsspørgsmål om, hvorvidt sproget bør betragtes som et uundværligt redskab for vor ræsonneren, eller om det på den anden side er os muligt at ræsonnere uden dets hjælp. Jeg finder, at dette spørgsmål falder uden for denne afhandlings rammer af følgende grunde, nemlig, at det er videnskabens opgave at udforske lovmæssigheder, og at vi, hvad enten vi betragter tegn som repræsentanter for ting og deres indbyrdes relationer eller som repræsentanter for den menneskelige intelligens' begrebsdannelser og operationer, når vi studerer de love, der gælder for disse tegn, i virkeligheden studerer fornuftens manifeste love. Hvis der er nogen forskel mellem disse to undersøgelser, så er det en forskel, der ikke indvirker på de videnskabelige resultater i den formelle lov, der er genstanden for vor undersøgelse på nuværende trin af dette værk, men som kun har forbindelse til den måde, hvorpå disse resultater fremlægges for vort indre blik. For selv om det, a posteriori, i en undersøgelse af de love, der gælder for tegn, er sproget med de regler, hvorefter det bruges, der er det direkte studieobjekt, hvorimod vi i en undersøgelse, der ikke sigter mod et studium af tankens indre processer, mere direkte interesserer os for vor personlige bevidsthed, så vil man i begge tilfælde nå til resultater, der formelt er ækvivalente. Vi ville heller ikke have let ved at forestille os, at de utallige tungemål og dialekter, der findes på jorden, gennem forløbet af en så umådelig tid kunne have bevaret så meget, der er fælles og universelt, om vi ikke havde været af den overbevisning, at der dybt nede i selve tankens love fandtes et grundlag for deres fælles overensstemmelser.

Opgave 1

a. Hvad er ifølge Boole formålet med hans undersøgelse af 'tankens love'?
b. Diskuter hvorvidt I er enige i de argumenter han her ovenfor fremfører.

2. De grundelementer, hvoraf ethvert sprog består, er tegn eller symboler. Ord er tegn. Undertiden siges de at repræsentere ting, undertiden de operationer, hvormed tanken sammensætter de simple begreber til komplicerede begrebsdannelser; undertiden udtrykker de de handlingsmæssige, følelsesmæssige, eller rent egenskabsmæssige relationer, som vi erkender mellem genstandene for vor erfaring, undertiden den erkendende ånds følelser. Men ord er, selv om de i denne og andre henseender fungerer som tegn eller typiske symboler, ikke de eneste tegn, vi kan benytte. Arbitrære mærker,

der kun henvender sig til andre sanser, er af ganske samme natur som tegn, forudsat, at deres funktion er veldefineret og velkendt. I de matematiske videnskaber, benytter man som tegn enten bogstaver eller symboler som $+$, $-$, $=$ etc., skønt ordet »tegn« snarere anvendes om den sidstnævnte klasse af symboler, der repræsenterer operationer eller relationer, end om den førstnævnte, der repræsenterer tal- eller størrelses-elementer. Da et tegns virkelige betydning ikke afhænger af den særlige måde, hvorpå det udtrykkes, så gør de love, der fastlægger dets anvendelse, det heller ikke. I denne afhandling vil vi imidlertid kun beskæftige os med skrevne tegn, og det er udelukkende med henblik på disse, at vi vil anvende ordet »tegn«. De væsentlige egenskaber ved tegn opregnes i følgende definition:
Definition. – Et tegn er et arbitrært mærke, der har en fast betydning, og hvis kombination med andre tegn er underkastet faste love alt efter deres gensidige interpretation.

3. Lad os betragte enkelthederne i ovenstående definition hver for sig.

(1). For det første er et tegn et arbitrært mærke. Det er tydeligvis ligegyldigt, hvilket særligt ord eller tegn vi forbinder med en givet idé, forudsat at denne forbindelse, når den én gang er gjort, vedvarende forbliver den samme. Romerne udtrykte med »civitas« det samme, som vi betegner med ordet »stat«. Men både de og vi kunne ligeså godt have anvendt ethvert andet ord til at repræsentere det samme begreb; ja, der er intet i sprogets natur der forhindrer os i at bruge et enkelt bogstav i denne betydning. Gjorde vi det, da ville de love, hvorefter dette bogstav blev brugt, i al væsentlighed være de samme som de love, der styrer brugen af »civitas« i latin og brugen af »stat« i engelsk, i det mindste så vidt brugen af disse ord styres af generelle principper fælles for alle sprog.

(2). For det andet er det nødvendigt, at hvert enkelt tegn inden for rammerne af den samme samtale eller tankeproces har en fast betydning. Nødvendigheden af denne betingelse er åbenbar og synes at have sin årsag i selve emnets natur. Der er imidlertid uenighed om den nøjagtige funktion af ord eller symboler, når de bruges som betegnelser under vores ræsonneren. Nogle mener, at de alene repræsenterer tankemæssige begrebsdannelser, andre, at de repræsenterer ting. Spørgsmålet er ikke af større vigtighed i denne forbindelse, idet en afklaring deraf ikke vil berøre de love, hvorefter tegn anvendes. Jeg har imidlertid forstået, at det rette svar på dette og lignende spørgsmål er, at tegn i tankeprocesser erstatter og fungerer som tankemæssige begrebsdannelser og operationer, men da disse begrebsdannelser og operationer repræsenterer ting og forbindelser og relationer ting imellem, kan tegn siges at repræsentere ting og deres indbyrdes forbindelser og relationer, og sluttelig, da tegn træder i stedet for tankemæssige begrebsdannelser og operationer, er de underkastet de love, der gælder for disse begrebsdannelser og operationer. Dette spørgsmål vil blive nærmere belyst i næste kapitel, men her tjener det til forklaring af den tredie af de enkeltheder, der indgår i definitionen af et tegn, nemlig de faste kombinationslove, som det er underkastet alt efter naturen af dets betydning.

4. I den følgende sætning betragtes analysen og klassifikationen af de tegn, der bruges i vor ræsonneren:

SÆTNING I

Alle operationer i sproget betragtet som et instrument for vor ræsonneren kan udføres ved hjælp af et system af tegn, der består af følgende elementer:

1. Bogstavsymboler som x, y etc., der repræsenterer genstandene for vore begrebsdannelser.

2. Operationstegn som $+$, $-$, $\times$, der står for de tankemæssige operationer, ved hvis hjælp begreberne sammensættes eller opløses for at danne nye begreber ud fra de samme elementer.

3. Tegnet for identitet, $=$.

Og disse symboler er i deres anvendelse underkastet bestemte love, der dels stemmer overens med dels afviger fra de love, der gælder for de tilsvarende symboler i algebraen.

Som kriterium for de sande elementer i fornuftudveksling vil vi antage, at de skal kunne sammensættes i de simpleste former og efter de simpleste love og på denne måde frembringe alle kendte og tænkelige sprogdannelser; med dette princip som grundlag vil vi betragte den følgende klassifikation.

KLASSE I

5. *Appellative eller beskrivende tegn, der udtrykker enten navnet på en ting eller en egenskab eller en omstændighed, der knytter sig dertil.*

Til denne klasse kan vi åbenbart henføre substantivet – propriet eller appellativet – og adjektivet; thi disse adskiller sig kun i den henseende, at det første udtrykker den stoflige eksistens af den eller de enkelte ting, hvortil det kan henføres, mens det sidstnævnte underforstår denne eksistens. Knytter vi til adjektivet et bestandigt underforstået »væsen« eller »ting«, bliver det faktisk et substantiv, og det vil for ethvert væsentligt formål med vor ræsonneren kunne erstattes af substantivet. Uanset om det i alle detaljer for vor indre opfattelse er eller ikke er det samme at sige »vand er en flydende ting« som at sige »vand er flydende«, så er det i hvert fald ensbetydende for vor ræsonneren.

Det er ligeledes klart, at vi til ovennævnte klasse må henføre de tegn, der vedtægtsmæssigt udtrykker omstændigheder og relationer, hvis detaljerede fremlæggelse ville kræve mange tegn. Den poetiske stils adjektiver er ofte af denne art. De er i reglen sammensatte adjektiver, der fungerer som mange-ords-beskrivelser. Homers »dybt-hvirvlende hav« omfatter en virkelig beskrivelse med det ene ord $\beta\alpha\theta\upsilon\delta\iota\nu\eta\varsigma$. Vedtægtsmæssigt kan enhver anden beskrivelse, der enten henvender sig til fantasien eller til intelligensen, ligeledes repræsenteres af et enkelt tegn, hvis brug i al væsentlighed vil være underkastet de samme love som brugen af adjektivet »god« eller »stor«. I forbindelse med ordet »ting« bliver et sådant tegn virkelig et substantiv, og den samlede betydning af ting og egenskab vil kunne udtrykkes ved et enkelt substantiv.

6. Da vi nu har defineret et tegn som et arbitrært mærke, er det tilladeligt at erstatte alle tegn af den ovenfor beskrevne art med bogstaver. Lad os derfor vedtage at repræsentere klassen af elementer, hvortil der kan knyttes en bestemt betegnelse eller beskrivelse, med et enkelt bogstav, f.eks. x. Hvis betegnelsen således er »mennesker«, vil vi lade x repræsentere »alle mennesker« eller klassen af mennesker. Med en klasse menes der sædvanligvis en samling af elementer, hvortil der kan knyttes en bestemt

betegnelse eller beskrivelse, men i dette arbejde udvides betydningen af dette udtryk til også at omfatte det tilfælde, hvor der kun findes et eneste element, der passer til den forlangte betegnelse eller beskrivelse, samt de tilfælde, der angives med udtrykkene »Intet« og »Universet«, der som klasser skal opfattes som bestående henholdsvis af »ingen ting« og »alle ting«. Hvis et adjektiv som »god« anvendes som et beskrivende udtryk, vil vi ligeledes lade et enkelt bogstav, f.eks. y, repræsentere alle de ting, om hvilke man kan benytte beskrivelsen »god«, dvs. »alle gode ting« eller klassen af »gode ting«. Lad os endvidere vedtage, at kombinationen xy skal repræsentere klassen af ting, om hvilke man på samme tid kan anvende de betegnelser eller beskrivelser, der er repræsenteret af x og y. Hvis x således står for »hvide ting« og y for »får«, vil vi lade xy stå for »hvide får«. På samme måde vil vi, hvis z står for »ting med horn«, og x og y bibeholder deres foregående betydninger, lade zxy repræsentere »hvide får med horn«, dvs. den samling ting, på hvilke betegnelsen »får« og beskrivelserne »hvide« og »med horn« samtidigt passer.

Lad os nu betragte de love, som symbolerne x, y etc. i ovennævnte forstand er underkastet.

7. For det første er det ifølge ovennævnte måde at kombinere på klart, at den rækkefølge, hvori to symboler er skrevet, er ligegyldig. Udtrykkene xy og yx repræsenterer begge klassen af ting, på hvis enkelte elementer betegnelserne eller beskrivelserne x og y begge passer. Vi har altså:

$$xy = yx. \tag{2.1}$$

I det tilfælde, hvor x repræsenterer hvide ting, og y får, vil begge sider af denne ligning repræsentere klassen af »hvide får«. Der kan være forskel i den orden, hvori begrebsdannelsen udføres, men ingen i de enkelte ting, som den omfatter. På samme måde vil, dersom x repræsenterer »mundinger« og y »floder«, udtrykkene xy og yx repræsentere »mundinger, der er floder« og »floder, der er mundinger«, og kombinationen vil i dette tilfælde i det sædvanlige sprog være udtrykt ved to substantiver, i stedet for ved et substantiv og et adjektiv, som i foregående eksempel. Lad der være et tredie symbol, z, som repræsenterer klassen af ting, hvorom man kan bruge udtrykket sejlbar; ethvert af de følgende udtryk

$$zxy, zyx, xyz \text{ etc.}$$

vil da repræsentere klassen af »sejlbare flodmundinger«.

Loven $xy = yx$, som Boole beskriver, kendes også under navnet den *kommutative lov*, og gælder helt generelt for operationerne addition og multiplikation, når elementerne x og y repræsenterer tal (og eventuelt andre objekter).

Opgave 2
Giv jeres eget eksempel på klasser x og y, forskellige fra dem brugt af Boole, som illustrerer at loven $xy = yx$ holder for bogstavsymboler repræsenterende klasser.

En anden standard algebraisk lov for multiplikation er den *associative lov*, som siger

$$(xy)z = x(yz) \text{ for alle } x, y, z.$$

Opgave 3

a. Giv et eksempel på klasser x, y og z for at illustrere hvorfor denne lov også holder for bogstavsymboler repræsenterende klasser.
b. Forklar hvordan vi ved, at Boole antager associativitet for multiplikation i hans afsnit 6 i kapitel II, selvom han ikke eksplicit nævner denne lov.

Dersom et af de beskrivende udtryk har en underforstået forbindelse med et af de andre, skal man blot udtrykkeligt medtage denne forbindelse i formuleringen af dets betydning, for at de ovenstående bemærkninger skal bevare deres gyldighed. Hvis x således repræsenterer »klog« og y »rådgivere«, må vi definere, om x indebærer ubetinget klogskab eller blot klogskab til at give råd. Med en sådan definition bevarer loven $xy = yx$ sin gyldighed.

Vi har derfor lov til i stedet for substantiver, adjektiver og beskrivende sætninger at anvende symbolerne x, y etc. underkastet den fortolkningsregel, at ethvert udtryk, hvori flere af disse symboler er skrevet sammen, skal repræsentere alle de genstande eller elementer, hvorpå deres forskellige betydninger passer, samt den lov, at den orden, hvori symbolerne følger efter hinanden, er ligegyldig.

Da fortolkningsreglen er tilstrækkeligt eksemplificeret, vil jeg anse det for unødvendigt altid at bruge udtrykket »ting« i den definitionsmæssige fortolkning af et symbol for et adjektiv. Når jeg siger: lad x repræsentere »god«, skal dette forstås således, at x kun repræsenterer »god«, såfremt der forefindes en genstand i form af et andet symbol, hvortil denne egenskab er knyttet, og at dets betydning, dersom det bruges alene, altid vil være »gode ting«.

I følgende afsnit, afsnit 8, kommenterer Boole på analogien mellem den kommutative lov i symbolsk logik og den tilsvarende lov i algebra. Bemærk hans insisteren på at anskue kommutativitet som en formel, f.eks. symbolsk, lov som gælder i to forskellige systemer, f.eks. algebra og logik. I afsnit 9 trækker han derefter på denne analogi med algebra for at udlede endnu en formel logisk lov.

8. Til den ovenfor fastlagte lov kan vi føje følgende betragtninger, som alle mere eller mindre vil være af interesse i forbindelse med visse andre love, der senere udledes.

For det første bemærker jeg, at denne lov egentlig er en lov om tænkning og ikke en lov om ting. En forskel i rækkefølgen af en genstands egenskaber eller kendetegn er, når man helt ser bort fra ethvert spørgsmål om årsagsfølge, blot en forskel i begrebsdannelsen. Loven (1) [2.1] udtrykker som en generel sandhed, at den samme begrebsdannelse kan foregå på forskellige måder, og formulerer naturen af denne forskel; mere udsiger den ikke.

For det andet er den som en tankens lov udviklet i en lov for sproget, tankens frembringelse og instrument. Selv inden for prosaen, hvor ensartetheden er fremherskende, er rækkefølgen af adjektiver med bestemte betydninger og knyttet til samme genstand ligegyldig, og den poetiske stil skylder meget af sin rige afveksling til udvidelsen af den samme lovmæssige frihed også til substantivet.

Miltons sprog udmærker sig specielt ved sin brug af denne form for stilistisk variation. Ikke blot når substantivet ofte forud for de adjektiver, der karakteriserer det; det er lige så hyppigt anbragt midt i blandt dem. I de første linier af *Invocation to Light* støder vi på følgende eksempler:

»*Offspring of heaven first-born.*
The rising world of *waters dark and deep.*
Bright effluence of *bright essence increate.*«

Disse omvendte former skyldes ikke blot en poetisk frihed; det er naturlige udtryk for den frihed, der har sin begrundelse i tankens inderste love, en frihed, der af praktiske grunde ikke kommer til udtryk i den almindelige brug af sproget.

For det tredie kan den lov, der er udtrykt i (1) [2.1], karakteriseres ved at sige, at *bogstavsymbolerne x, y, z er kommutative ligesom algebraens symboler*. Hermed er det ikke sagt, at algebraens multiplikationsproces, hvis fundamentale lov kommer til udtryk i ligningen

$$xy = yx,$$

i sig selv har nogen analogi med den logiske kombinationsproces, men kun, at dersom den aritmetiske og logiske proces udtrykkes på samme måde, da vil deres symbolske udtryk være underkastet samme formelle lov. Grundlaget herfor er i de to tilfælde helt forskelligt.

9. Da kombinationen af to bogstavsymboler til formen xy udtrykker hele den klasse af genstande, hvorpå de betegnelser og egenskaber, der repræsenteres af x og y, samtidig passer, følger det, at hvis to symboler har nøjagtigt samme betydning, da vil deres kombination ikke udtrykke mere end ethvert af dem taget for sig. I et sådant tilfælde har vi altså:

$$xy = x.$$

Da y imidlertid blev antaget at have samme betydning som x, kan vi i ovenstående ligning erstatte det med x, og således får vi:

$$xx = x.$$

Nu betegnes kombinationen xx i den sædvanlige algebra med x^2. Lad os benytte det samme notationsprincip her; thi den måde, hvorpå en bestemt følge af tankeoperationer udføres, er lige så vilkårlig som den måde, hvorpå en enkelt idé eller operation udtrykkes (II 3). I overensstemmelse med denne notation tager ovenstående ligning formen:

$$x^2 = x, \tag{2.2}$$

og den er i virkeligheden udtryk for endnu en generel lov for de symboler, der benyttes til at repræsentere betegnelser, egenskaber eller beskrivelser.

Læseren bør huske, at selv om symbolerne x og y i de foregående eksempler havde hver sin betydning, så er der intet, der forhinder os i at tillægge dem nøjagtig samme betydning. Det er indlysende, at des mere deres virkelige betydninger nærmer sig til hinanden, des mere vil klassen af de ting, der er betegnet af kombinationen xy, nærme sig til at blive identisk med klassen, der betegnes af x alene, såvel som klassen, der betegnes af y

alene. Forudsætningen af udledelsen af ligningen (2) [2.2] er, at vi har den *fuldstændige* identitet i betydning. Den lov, som denne ligning udtrykker, findes i praksis eksemplificeret i sproget. At sige »god, god« om en eller anden genstand er, selv om det er en besværlig og unyttig pleonasme, det samme som at sige »god«. Således er »gode, gode« mænd ensbetydende med »gode« mænd. Denne form for ordgentagelse anvendes undertiden for at fremhæve en egenskab eller forstærke en bekræftelse; men denne virkning er blot en konvention, der kommer i anden række; den har intet grundlag i de naturlige relationer mellem sprog og tanke. De fleste af de operation vi iagttager i naturen eller selv udfører, er af en sådan art, at deres virkning forstærkes ved gentagelse, og denne omstændighed får os til at forvente det samme i sproget og endog til at bruge gentagelser, når vi i vor tale vil understrege visse ting; men hverken i streng ræsonneren eller i eksakt meningsudveksling er der noget grundlag for en sådan praksis.

Opgave 4

a. Anvend et specifikt eksempel af klassen x til at forklare hvorfor den symbol-logiske lov $x^2 = x$ giver mening for klasser i Booles definition af multiplikation. (Husk at xy repræsenterer klassen af ting som på samme tid besidder egenskaben x og egenskaben y.)

b. Holder den symbol-logiske lov $x^2 = x$ også i aritmetisk algebra? Forklar!

10. Vi går nu over til at betragte endnu en klasse af sprogsymboler og de love, der gælder for deres anvendelse.

KLASSE II

11. *Tegn for de tankemæssige operationer, ved hvis hjælp vi sammensætter dele til et hele og adskiller et hele i sine dele.*

Vi er ikke blot i stand til at nære forestillinger om genstande, således som de er karakteriseret ved betegnelser, egenskaber eller omstændigheder fælles for ethvert element i den betragtede gruppe, vi er tillige i stand til at danne os en helhedsforestilling om en gruppe af genstande bestående af enkelt-grupper, der hver for sig er betegnet og beskrevet. Hertil bruger vi konjunktionerne »og«, »eller« etc. »Træer og mineraler«, »golde bjerge eller frugtbare dale« er eksempler af denne slags. Når ordene »og«, »eller« indskydes mellem de udtryk, der beskriver to eller flere klasser af genstande, er det udtrykkeligt underforstået, at disse klasser er helt adskilte, således at intet element i en af dem findes i en anden. I denne og i alle andre henseender er ordene »og«, »eller« analoge med tegnet + i algebraen, og deres love er identiske. Således er udtrykket »mænd og kvinder«, når man ser bort fra konventioner, ensbetydende med udtrykket »kvinder og mænd«. Lad x repræsentere »mænd« og y »kvinder«, og lad + stå for »og« og »eller«; vi har da

$$x + y = y + x \tag{2.3}$$

som er en ligning, der også gælder, hvis x og y repræsenterer tal, og + er det aritmetiske additionstegn.

Bemærk at Boole indfører en restriktion på brugen af det additive symbol + i sit system ved at hævde, at ordene 'og' og 'eller', når indskudt imellem de beskrivende termer for to eller flere klasser af objekter, forudsætter at disse klasser er helt forskellige – altså at ingen medlemmer af den ene også kan findes i den anden.

Opgave 5
Diskuter hvorvidt I er enige i at denne restriktion af Boole er i overensstemmelse med almindelig sproglig brug. Betragt for eksempel følgende udsagn:

i. mænd og kvinder;

ii. dansere og sangere;

iii. løgner eller forvirret;

iv. besejrer af Gallien eller første kejser af Rom.

For hvilke af disse bruges 'og' og 'eller' i den restriktive version? Altså, er der i almindelig sprogbrug en implikation af at et omtalt specifikt individ højst vil tilhøre én af de nævnte klasser, men ikke begge klasser på samme tid?

Klasser (eller mængder) for hvilke det gælder, at de ikke har nogen fælles elementer kaldes også for *disjunkte* klasser (eller mængder).

Opgave 6
I almindelighed er addition for heltal n og m defineret ved at $n + m$ angiver det totale antal elementer i foreningen af en mængde indeholdende n elementer med en mængde indeholdende m elementer. Giv et mere specifikt eksempel som illustrerer hvorfor det er vigtigt at anvende to disjunkte mængder i denne definition.

> Lad symbolet z stå for adjektivet »europæisk«; vi har da, idet det jo er det samme at sige »europæiske mænd og kvinder« som at sige »europæiske mænd og europæiske kvinder«:
>
> $$z(x + y) = zx + zy, \qquad (2.4)$$
>
> og denne ligning ville ligeledes gælde, hvis x, y og z var symboler for tal, og hvis sammenstillingen af to bogstavsymboler betød deres algebraiske produkt, ligesom det i den tidligere givne logiske betydning repræsenterer klassen af genstande, til hvilken begge tillægsord i forening hører.

Den lov (2.4) som Boole her ovenfor bringer på banen er også kendt som den *distributive* lov.

Opgave 7
I hvor høj grad mener I, at Boole argumenterer fyldestgørende for den distributive lov?

I den følgende del af afsnit 11 introducerer Boole endnu en operation, angivet ved tegnet for subtraktion $-$, og han gør dette ved igen at bruge en analogi fra algebraen som motivation. I afsnit 12 diskuterer han brugen af lighedstegnet $=$ som repræsentation for verbet 'er'. Og i afsnit 13 udforsker han yderligere analogien mellem den symbolske logik og algebraen.

De ovenstående love er de love, der gælder for brugen af tegnet $+$, som her anvendes til at betegne den positive operation, der består i at samle dele til et hele. Men ideen om en operation, der udfører en positiv handling, synes at antyde en modsat rettet eller negativ operation, der ophæver virkningen af den førstnævnte. Vi kan således ikke betragte det som muligt at samle dele til et hele uden samtidig også at betragte det som muligt at adskille en del fra et hele. Denne operation udtrykker vi i dagligsproget med tegnet »undtagen« som i »alle mennesker undtagen asiater«, »alle stater, undtagen dem, der har monarki«. Det er her underforstået, at de ting, der undtages, er del af de ting, hvorfra de undtages. Da vi har udtrykt den samlende operation med tegnet $+$, kan vi udtrykke den ovenfor beskrevne operation med $-$ (minus). Repræsenterer x således »mennesker« og y »asiater«, dvs. »asiatiske mennesker«, så vil »alle mennesker undtagen asiater« være udtrykt ved $x - y$. Og lader vi x repræsentere »stater« og y den beskrivende egenskab »der har monarki«, så vil begrebsdannelsen »alle stater undtagen dem, der har monarki« være udtrykt ved $x - xy$.

Da det for de væsentlige formål med vor ræsonneren er ligegyldigt, om vi nævner undtagelserne først eller sidst, er det også ligegyldigt, i hvilken orden vi skriver en vilkårlig række led, hvoraf nogle er påvirket af tegnet $-$. Vi har altså som i den almindelige algebra,

$$x - y = -y + x. \tag{2.5}$$

Lad x fortsat repræsentere klassen »mennesker« og y »asiater«, og lad z repræsentere adjektivet »hvid«; at bruge adjektivet »hvid« på den samling af mennesker, der er angivet ved sætningen »mennesker undtagen asiater«, er det samme som at sige »hvide mennesker undtagen hvide asiater«. Vi har følgelig

$$z(x - y) = zx - zy. \tag{2.6}$$

Dette er også i overensstemmelse med den sædvanlige algebra. Ligningerne (4) [2.4] og (6) [2.6] kan betragtes som eksempler på en helt generel lov, som vi kan udtrykke ved at sige, at *bogstavsymbolerne x, y, z, etc. er distributive i deres operation*. Den almindelige kendsgerning, som er udtrykt i denne lov, er følgende: – Hvis en egenskab eller en omstændighed tilskrives alle elementer i en gruppe, der er dannet enten ved sammensætning eller udelukkelse af delgrupper, så er det resulterende begreb det samme som det, der fås ved først at tilskrive egenskaben eller omstændigheden til hvert element i delgrupperne og derefter udføre sammensætningen eller udelukkelsen. Det, der tilskrives elementerne i et hele, tilskrives elementerne i alle dets dele, hvorledes disse dele end er forbundet.

KLASSE III

12. *Tegn hvorved relationer udtrykkes, og ved hvis hjælp vi danner sætninger.*

Selv om alle verber med rimelighed kan henføres til denne klasse, er det for logikkens formål tilstrækkeligt at betragte den som bestående alene af verbet »er«, da ethvert andet verbum kan opløses i dette element og et af de tegn, der omfattes af Klasse I; thi da disse tegn bruges til at udtrykke egenskaber eller omstændigheder af enhver slags, kan de bruges til udtryk af verbets diatese til enten fortiden, nutiden eller fremtiden. Således kan sætningen »Cæsar besejrede gallerne« omskrives til »Cæsar er den, der besejrede gallerne«. Grundlaget for denne analyse er efter min mening følgende: Medmindre vi forstår, hvad der menes med at have besejret gallerne, dvs. med udtrykket »den, som besejrede gallerne«, kan vi ikke forstå den pågældende sætning. Det er derfor virkelig et element i denne sætning; et andet element er »Cæsar«, og der er brug for endnu et, det forbindende element »er«, til at knytte forbindelsen mellem disse to. Jeg vil imidlertid ikke hævde, at den relation, der er udtrykt i sætningen »Cæsar besejrede gallerne«, ikke kan opfattes på nogen anden måde end ovenstående; men kun, at den her givne analyse er korrekt ud fra det bestemte synspunkt, der er indtaget, og at dette er tilstrækkeligt for den logiske deduktions formål. Det kan nævnes, at de passive of futuriske participier i det græske sprog underforstår det netop fastslåede princip, nemlig: at tegnet *er* kan betragtes som et element af ethvert verbum.

13. Det ovennævnte tegn »er« kan udtrykkes ved symbolet $=$. De love, eller som vi sædvanligvis vil sige, de axiomer, som dette symbol giver anledning til, skal dernæst tages under overvejelse.

Lad os betragte sætningen – »Stjernerne er solene og planeterne« og lad os repræsentere stjernerne med x, solene med y og planeterne med z; vi har da

$$x = y + z. \tag{2.7}$$

Hvis det nu er sandt, at stjernerne er solene og planeterne, følger det, at stjernerne undtaget planeterne er solene. Dette vil føre til ligningen

$$x - z = y \tag{2.8}$$

som derfor må være en deduktion ud fra (7) [2.7]. Et led z er altså blevet flyttet fra den ene side af ligningen til den anden ved at skifte dets fortegn. Dette er i overenstemmelse med den algebraiske regel for flytning af led.

Men i stedet for at dvæle ved specialtilfælde vil vi straks fastslå de generelle axiomer:

1. Hvis ens ting lægges til ens ting, er helhederne ens.
2. Hvis ens ting tages fra ens ting, er resterne ens.

Det ses heraf, at vi kan addere eller subtrahere ligninger og anvende den ovenfor anførte regel for flytning af led ganske som i den sædvanlige algebra.

Opgave 8
Ihukom at Boole i afsnit 11 krævede at der for operationen subtraktion ($-$) gælder, at "de ting, der undtages, er en del af de ting, hvorfra de undtages."

Betragt udtrykket $p - v$, hvor p er klassen af alle pianister og v er klassen af alle violinister.

a. Forklar hvorfor Boole vil betragte udtrykket $p - v$ som værende meningsløst.

b. Hvis vi dropper Booles restriktion, hvad vil udtrykket $p - v$ da angive?

c. Baseret på jeres foreløbige læsning af Boole, kan denne klasse repræsenteres symbolsk på en anden måde i hans system? Forklar!

Opgave 9
Betragt Booles ligninger og ihukom hans tidligere restriktion om at $+$ kun kan anvendes på klasser som ikke har nogen fælles objekter. Antag nu, at vi dropper denne restriktion.

Lad da y være klassen af alle mænd, lad z være klassen af alle læger og lad $x = y + z$ være som i Booles ligning 2.7. Kan vi stadig udlede ligning 2.8 i dette tilfælde, altså er $x - z = y$? Forklar!

Endvidere: Hvis to klasser af ting x og y er identiske, dvs. hvis alle elementer i den ene er elementer i den anden og omvendt, da vil de elementer i den ene klasse, der har en givet egenskab z, være identiske med de elementer i den anden, der har den samme egenskab z. Har vi derfor følgende ligning

$$x = y$$

vil vi, uanset hvilken klasse eller egenskab z repræsenterer, også have:

$$zx = zy.$$

Dette er formelt den samme som den algebraiske lov: Hvis begge sider i en ligning multipliceres med samme størrelse, da er produkterne lige store.

14. Her ser det imidlertid ud til, at analogien mellem det foreliggende system og algebraen, som den i almindelighed fremstilles, hører op. Antager vi, at det for elementerne i en klasse x, som har en vis egenskab z, gælder, at de er identiske med elementerne i en klasse y som har den samme egenskab z, følger det i almindelighed ikke, at elementerne i klassen x er identiske med elementerne i klassen y. Ud fra ligningen

$$zx = zy$$

kan man altså ikke slutte, at ligningen

$$x = y$$

også er sand. Algebraikernes axiom om, at begge sider i en ligning kan divideres med samme størrelse, har med andre ord her ingen formel ækvivalent. Jeg siger ingen *formel ækvivalent*, fordi der i overenstemmelse med den ånd, hvori disse undersøgelser føres, slet ikke er gjort forsøg på at afgøre, om den tankemæssige operation, der er repræsenteret ved fjernelsen af et logisk symbol z fra en kombination zx, i sig selv er analog til operationen division i algebraen. Denne tanke-operation er jo identisk med den, der i almindelighed benævnes abstrahering, hvoraf det ses, at dens love må have forbindelse til de love, der allerede er udledt i dette kapitel. Hvad vi har vist, er, at der blandt disse love ikke findes en, der er analog med et almindeligt vedtaget axiom i algebraen.

Men en lille overvejelse vil vise, at dette axiom selv inden for den sædvanlige algebra ikke har den samme generalitet som de andre axiomer, vi har behandlet. Udledelsen af ligningen $x = y$ ud fra ligningen $zx = zy$ er kun gyldig, dersom det vides, at z ikke er lig med 0. Tillades værdien $z = 0$ i det algebraiske system, vil ovennævnte axiom ikke mere kunne anvendes, hvorved den tidligere eksemplificerede analogi i det mindste fortsat vil være ubrudt.

Opgave 10
Giv et specifikt eksempel på klasserne x, y og z, som illustrerer at Booles påstand i afsnit 14 ovenfor er korrekt, dvs. vis at det er muligt at have $zx = zy$ for $x \neq y$.

I afsnit 15 identificerer Boole nu en speciel 'algebra for tal', hvis egenskaber er stærkt analoge med dem der ovenfor er synliggjort for operationerne på klasser.

15. Det er imidlertid ikke med størrelsessymboler i almindelighed, at det er af betydning at opspore slægtskaber af denne art undtagen af rent spekulative grunde. Vi har set (II 9), at logikkens symboler er underkastet den specielle lov

$$x^2 = x.$$

Nu findes der kun to talsymboler, nemlig 0 og 1, der er underkastet den samme formelle lov. Vi ved, at $0^2 = 0$ og at $1^2 = 1$, og at ligningen $x^2 = x$ betragtet som algebraisk ligning ikke har andre rødder end 0 og 1. I stedet for alment at undersøge, hvor langt den formelle analogi mellem logikkens symboler og talsymbolerne kan føres, ligger det derfor umiddelbart nærmere at sammenligne dem med størrelsessymboler, der kun kan antage værdierne 0 og 1. Lad os da forestille os en algebra, hvor symbolerne x, y, z etc. kan antage værdierne 0 og 1 og kun disse værdier. Lovene, axiomerne og processerne i en sådan algebra vil i hele deres udstrækning være identiske med lovene, axiomerne og processerne i en logisk algebra. Kun i fortolkningen vil de adskille sig. Metoden for det følgende i dette arbejde hviler på dette princip.

Opgave 11
Ihukom at i termer af klasser vil udtrykket $1 + 1$ være meningsløst for Boole. (Hvorfor?)

a. Antag, at vi dropper Booles restriktion på brugen af $+$. Giver det mening at tildele en af værdierne 0 eller 1 til udtrykket $1 + 1$ som et udsagn om klasser? Forklar!
b. Betragt nu udtrykket $1 + 1$ som et *numerisk* udsagn inden for 'algebraen for tal' – giver det mening at tildele enten 0 eller 1 til summen $1 + 1$? Hvorfor eller hvorfor ikke?

16. Det resterer nu at vise, at de bestanddele af de almindelige sprog, der ikke er taget under overvejelse i de foregående afsnit af dette kapitel, enten kan opløses i de samme elementer som dem der er blevet behandlet, eller at de er underlagt disse elementer ved at bidrage til deres mere nøjagtige definition.

Substantivet, adjektivet og verbet samt småordene *og*, *undtagen* har vi allerede undersøgt. Pronomenet kan betragtes som en særlig form af substantivet eller adjektivet. Adverbiet modificerer betydningen af verbet uden at berøre dets natur. Præpositioner bruges når man vil udtrykke omstændigheder eller relationer, og de tjener således til at præcisere og uddybe betydningen af bogstavsymbolerne. Konjunktionerne *hvis, enten, eller* bruges hovedsageligt til at udtrykke relationer sætninger imellem, og det vil senere blive vist, at de samme relationer i et og alt kan udtrykkes ved hjælp af elementære symboler, der fortolkes på samme måde, har samme form og er underkastet de samme love som de symboler, hvis brug og betydning vi allerede har gjort rede for i dette kapitel. Hvad de resterende sprogelementer angår, så vil man ved nærmere undersøgelse opdage, at de enten bruges til en nærmere præcisering af udtrykkene i en meningsudveksling, og således indgår i fortolkningen af de allerede betragtede bogstavsymboler, eller til at udtrykke følelser i forbindelse med sætningsytringer og således bidrager til forståelsen, som er det eneste, vi her interesserer os for. De praktiske erfaringer vil vidne for tilstrækkeligheden af den her foretagne klassifikation.

I kapitel III udleder Boole yderligere en række love for symbolsk logik baseret på analogien med den ovenfor identificerede specielle 'aritmetiske algebra'. I vores læsning af dette kapitel vil vi specielt fokusere på tre sætninger, i hvilke Boole giver fortolkninger af symbolerne '0', '1' og '$1 - x$' og præsenterer den første formelle udledning af et logisk princip i matematisk form.

Til trods for at flere at disse betragtninger finder sted hen mod slutningen af kapitel III er der i fremstillingen valgt ikke at udelade dele af kapitlet for ikke at frarøve læseren muligheden for at følge Booles argumentation i sin fulde udfoldelse.

KAPITEL III

Udledelse af lovene for logikkens symboler ud fra lovene for den menneskelige forstands operationer.

1. Genstanden for egentlig videnskab er kendskabet til love og relationer. At kunne skelne det, der er væsentligt for dette formål, fra det, der blot tilfældigt er forbundet dermed, er en af de allervigtigste betingelser for videnskabelig fremgang. Jeg siger *skelne* mellem disse elementer, fordi en konsekvent opofrelse for videnskaben ikke kræver, at opmærksomheden helt drages bort fra andre spekulationer, – ofte af metafysisk art – som den ikke sjældent er forbundet med. Spørgsmål om ting som eksistensen af et understøttende grundlag af fænomener, årsagers realitet, berettigelsen af sproglige former, der implicerer, at de successive tings-tilstande er operationsmæssigt forbundne, og andre spørgsmål af lignende natur kan være af stor interesse og betydning for videnskaben uden egentligt at være videnskabelige. Det vil endog næppe være muligt at udtrykke naturvidenskabens konklusioner uden at benytte sig af den sprogbrug, der knytter sig til disse begreber. Der behøver heller ikke at være praktiske ulemper forbundet hermed. De, der tror, og de, der nægter at tro, at relationen fra årsag til virkning indebærer mere end den ufravigelige rækkefølge, er enige i deres fortolkning af astronomiens konklusioner; men de er kun enige, fordi de erkender et fælles element af videnskabelig sandhed, som er uafhængigt af deres særlige syn på kausalitet.

2. Hvis denne skelnen er vigtig i fysikken, hvor meget mere opmærksomhed fortjener den da ikke i den videnskab, der beskæftiger sig med åndsevnerne. Thi de problemer, som denne videnskab beskæftiger sig med, vil i deres formulering næsten af nødvendighed indeholde tanke- og sprogformer, der røber en metafysisk oprindelse. Idealisten giver lovene for vor ræsonneren én udtryksform, skeptikeren – tro mod sine principper – en anden. De, der betragter de fænomener, som vi i denne undersøgelse beskæftiger os

med, som de blotte successive *tilstande* af det tænkende individ uden nogen årsagssammenhæng, og de, der henfører dem til operationerne af en virksom intelligens, ville, hvis de var konsekvente, også afvige i deres udtryksmåde. En lignende forskel ville også være resultatet af en forskel i klassifikationen af åndsevnerne. Det princip, som jeg her vil forfægte som det, der yder os det eneste sikre og stabile grundlag blandt så megen tilsyneladende og virkelig forskellighed, er følgende, nemlig: – at hvis de pågældende love virkelig udledes på grundlag af iagttagelser, da besidder de en virkelig eksistens som love for den menneskelige forstand uafhængigt af enhver metafysisk teori, som tilsyneladende er indblandet i den form, hvori de fremstilles. De indeholder et grundelement af sandhed, som ingen senere kritik eller opdukkende modstrid vil kunne berøre væsentligt. Lad det endog være indrømmet, at forstanden blot er en succession af bevidsthedstilstande, en række flygtige indtryk uden indre og ydre tilskyndelser, der dukker op af intetheden og på ny vender tilbage til intetheden - det skeptiske intellekts sidste spidsfindighed – som love om disse successioner eller i det mindste forgangne successioner, vil de resultater, som iagttagelsen har ført til, stadig forblive sande. De ville kræve at blive tolket i et sprog, hvor alle udtryk som årsag og virkning, operation og subjekt, substans og attribut, var bandlyst, men de ville stadig være gyldige som videnskabelige sandheder.

Da enhver fremsættelse af tankens love ud fra virkelige iagttagelser således må indeholde videnskabelige elementer, der er uafhængige af metafysiske teorier om forstandens natur, så må den praktiske anvendelse af disse elementer i konstruktionen af et system eller en metode for vor ræsonneren også være uafhængig af metafysiske sondringer. For det er på de videnskabelige elementer, der har med lovenes fremsættelse at gøre, at enhver praktisk anvendelse må hvile; ligesom de praktiske konklusioner i astronomien er uafhængige af enhver teori om tyngdens årsag og alene bygger på kendskabet til dens fænomenologiske virkninger. Og derfor er vi, hvad angår såvel bestemmelsen af tankens love som den praktiske anvendelse deraf, når de først er fundet, ud fra ethvert videnskabeligt synspunkt ganske uinteresseret i sandheden eller falskheden af enhver metafysisk spekulation overhovedet.

3. Den fremgangsmåde, som jeg under disse omstændigheder finder det hensigtsmæssigt at benytte, går ud på så vidt som muligt at betjene mig af det almindelige talesprog uden hensyn til enhver teori om forstandens natur eller evner, som dette kunne tænkes at indebære. Det er for eksempel i overenstemmelse med almindelig brug at sige, at vi taler med hinanden under udveksling af ideer eller forestillinger, en udveksling, der formidles af ord, og at forstanden stillet overfor bestemte ideer og forestillinger er i besiddelse af visse kræfter eller evner, ved hvis hjælp den åndelige opmærksomhed bliver i stand til at fæstne sig ved visse ideer under udelukkelse af andre, eller ved hvis hjælp de givne begreber eller ideer på forskellig måde kan kombineres. Disse evner eller kræfter er blevet kaldt ved forskellige navne som opmærksomhed, opfattelse, forestillingsevne eller fantasi, abstrahering, etc., navne, der ikke blot er blevet benyttet som betegnelser for de forskellige grene af filosofien om den menneskelige forstand, men som tillige er gået over i menneskets dagligsprog. Når som helst der viser sig en lejlighed til at bruge disse udtryk, vil jeg derfor gøre det, uden at jeg af den grund accepterer, at forstanden besidder de og de kræfter eller

evner som bestanddele af dens aktivitet. Det er heller ikke nødvendigt at undersøge, om disse åndsevner har en selvstændig eksistens eller ikke. Vi kan indregne alle disse forskellige betegnelser under det ene fællesnavn, den menneskelige forstands *operationer*, definere disse operationer i den udstrækning, som det er nødvendigt for dette værk, og dernæst søge at udtrykke deres fundamentale love. Dette er den rækkefølge, jeg i almindelighed vil går frem efter, selv om der fra tid til anden vil blive hentydet til de navne, som skik og brug har knyttet til de af forstandens tilstande eller operationer, der falder ind under vor undersøgelse.

Det mest praktiske vil være, om vi samler hovedresultaterne af den følgende undersøgelse i særskilte sætninger.

SÆTNING I

4. *Om udledelsen af lovene for logikkens symboler ud fra en undersøgelse af de af forstandens operationer, som er underforstået i den strenge brug af sproget som et instrument for vor ræsonneren.*

I enhver samtale mellem forstanden of dens egne tanker, eller mellem det enkelte individ og andre, er der en underforstået eller udtrykkeligt formuleret grænse, inden for hvilken genstandene for dens operationer befinder sig. Den frieste samtale er den, hvori de ord, vi bruger, er ment i deres videst mulige anvendelighed, og for den er samtalegrænserne så vidtrækkende som selve universet. Men sædvanligvis indskrænker vi os til et mindre udstrakt område. Undertiden er det i en samtale om mennesker (uden at denne begrænsning udtrykkes) underforstået, at der er tale om mennesker under visse omstændigheder eller betingelser, som civiliserede mennesker eller mennesker i deres bedste alder eller om mennesker under endnu andre tilstande eller omstændigheder.

Uanset udstrækningen af det område, inden for hvilket vi finder genstandene for vor samtale, så kunne dette område passende kaldes for samtale-universet.

5. Yderligere er samtale-universet i strengeste forstand grundemnet for samtalen. Et navn eller beskrivende udtryk, som anvendes inden for de forudsatte begrænsninger, skal ikke i forstanden fremkalde forestillingen om alle de væsener eller genstande, hvorpå dette navn eller denne beskrivelse kan anvendes, men kun om dem, der findes inden for det underforståede samtale-univers. Hvis dette samtale-univers er det virkelige tingsunivers, hvad det altid er, når vore ord bruges i deres virkelige og bogstavelig betydning, så mener vi med mennesker *alle eksisterende mennesker*; men hvis samtale-universet er indskrænket ved en forudgående underforstået antagelse, så er det om mennesker i den således indførte begrænsede betydning, at vi taler. I begge tilfælde skal ordet *mennesker* udløse en vis operation af forstanden, ved hvis hjælp vi i det egentlige samtale-univers udvælger eller fæstner os ved betegnede elementer.

6. Den tankemæssige operation, der impliceres ved brugen af et adjektiv, er af nøjagtig samme slags. Lad samtale-universet eksempelvis være det virkelige univers. På samme måde som ordet *mennesker* fører os til tankemæssigt i universet at udvælge alle de væsener, hvorpå betegnelsen »menneske« kan anvendes, således vil adjektivet »god« i kombinationen »gode mennesker« føre os til i klassen af *mennesker* tankemæssigt at videreudvælge alle, der yderligere har egenskaben »god«, og satte man

endnu et adjektiv foran kombinationen »gode mennesker«, da ville dette føre til en videreoperation af samme natur med hensyn til den yderligere egenskab, som dette kunne vælges til at udtrykke.

Det er vigtigt omhyggeligt at bemærke sig den virkelige natur af den her beskrevne operation, thi man kan forestille sig, at den kunne have været anderledes, end den er. Dersom adjektivet i sin karakter kun var attributivt, da kunne det se ud, som det at sætte adjektivet »god« foran den bestemte mængde af væsener, der betegnes som »mennesker«, ville føre os i retning af rent tankemæssigt at knytte egenskaben »godhed« til alle disse væsener. Men dette er ikke adjektivets funktion. Den operation, vi i virkeligheden udfører, er en *udvælgelse i overenstemmelse med et foreskrevet princip eller idé*. Til hvilken åndsevne en sådan operation kan henføres i overenstemmelse med den foretagne klassifikation af forstandens evner, er det ikke af vigtighed at komme ind på her, men jeg vil antage, at den kunne betragtes som afhængig af forestillingsevnen eller fantasien og opmærksomheden. Til den ene af disse evner kunne dannelsen af den almindelige forestilling henføres; til den anden den tankemæssige udvælgelse af de elementer, der inden for det foreskrevne samtale-univers lystrer denne forestilling. Hvis imidlertid evnen til opmærksomhed, hvilket ikke forekommer usandsynligt, ikke er andet og mere end evnen til forsat udøvelse af de andre åndsevner, så kunne vi henføre hele den ovenfor beskrevne tankeproces til fantasien eller forestillingsevnen, og det første trin i denne proces ville da være dannelsen af en forestilling om selve universet, mens ethvert efterfølgende trin ville bestå i bestemte indskrænkninger i den således dannede forestilling. Ud fra denne synsmåde vil jeg betegne ethvert trin af denne art eller enhver bestemt kombination af trin af denne art som en bestemt *forestillings-akt*. Og brugen af dette udtryk vil jeg udstrække, så at det i sin betydning omfatter ikke blot forestillingen om klasser af genstande, der repræsenteres af særlige navne eller egenskabsbetegnelser, men tillige kombinationer af sådanne forestillinger, der i alle måder er i overenstemmelse med den menneskelige forstands kunnen og begrænsninger, ja, enhver intellektuel operation udover disse, der har betydning for strukturen af en sætning eller et udsagn. De almene love, som disse operationer af forstanden er underkastet, skal nu undersøges.

7. Det vil nu blive vist, at de love som i det foregående kapitel *a posteriori* er blevet bestemt ud fra sprogets opbygning, i virkeligheden er de love, der gælder for den bestemte tankemæssige operation, der netop er blevet beskrevet. Vi begynder vor samtale med en vis underforstået viden om grænserne for dens emne, dvs. om grænserne for dens univers. Ethvert navn, ethvert beskrivende udtryk, som vi anvender, fører den, til hvem vi henvender os, til at udføre en vis tankemæssig operation på dette emne. Og således meddeles tanker. Men da ethvert navn eller beskrivende udtryk efter denne synsmåde kun er repræsentant for en intellektuel operation, og da denne operation også kommer først i den naturlige rækkefølge, er det klart, at de love, der gælder for navnet eller symbolet, må være afledte love – ja, de må have deres oprindelse i de operationer, som de repræsenterer. At lovene for symbolet og lovene for tanke-processen i udtryk er identiske vil nu blive vist.

8. Lad os da antage, at universet for vor samtale er det virkelige univers, så at ordene bruges i deres fulde betydning, og lad os betragte de to

tankeoperationer, der impliceres af ordene »hvide« og »mennesker«. Ordet »mennesker« indebærer den operation i tanken ud af dens emne, universet, at udvælge alle mennesker, og den heraf resulterende forestilling »mennesker« bliver genstanden for den næste operation. Den operation der indebæres af ordet »hvide«, består i ud af dens genstand »mennesker« at udvælge alle i denne klasse, der er hvide. Den forestilling, der er det endelige resultat heraf, er »hvide mennesker«. Det er nu fuldstændig klart, at dersom de ovenfor beskrevne operationer var blevet udført i omvendt rækkefølge, da ville resultatet være det samme. Om vi begynder med at danne forestillingen »mennesker« og dernæst ved hjælp af endnu en intellektuel handling begrænser denne forestilling til »hvide mennesker«, eller om vi begynder med dannelsen af forestillingen »hvide genstande« og dernæst indskrænker denne til dem af denne klasse, der er »mennesker«, er fuldstændig ligegyldigt, hvad resultatet angår. Det er klart, at rækkefølgen af tanke-processerne heller ingen rolle spiller, hvis vi for ordene »hvide« og »mennesker« sætter et hvilket som helst andet beskrivende eller appellativt udtryk, forudsat, at dets betydning er fast og absolut. Og således er ligegyldigheden af rækkefølgen af to successive handlinger af forestillingsevnen, hvoraf den ene fremskaffer det emne, som den anden antages at operere på, en generel følge af den måde, hvorpå denne åndsevne udøves. Den er en forstandens lov, og den er den virkelige oprindelse til den lov om logikkens bogstavsymboler, som udgør dens formelle udtryk [(1) [2.1] Kapitel II].

9. Det er ligeledes klart, at den ovenfor beskrevne tanke-operation er af en sådan natur, at dens virkning ikke forandres ved gentagelse. Lad os antage, at opmærksomheden ved en bestemt forestillings-akt er blevet rettet mod mennesker, og at vi ved endnu en udøvelse af samme åndsevne begrænser den til dem af denne race, der er hvide. Enhver yderligere gentagelse af den sidstnævnte tankemæssige handling, vil ikke på nogen måde ændre den forestilling, man er nået frem til, nemlig forestillingen hvide mennesker. Dette er også et eksempel på en generel lov for forstanden, og den finder sig formelle udtryk i loven [(2) [2.2] Kapitel II] om bogstavsymboler.

10. Yderligere er det klart, at vi ud fra forestillingerne om to forskellige klasser af ting kan danne forestillingen om den klasse ting, som disse to klasser tilsammen udgør, og det er åbenbart ligegyldigt, i hvilken pladseller rang-orden disse klasser fremstilles for det indre blik, og udtrykket derfor findes i (3) [2.3] Kapitel II.

11. Det er ikke nødvendigt at forsætte undersøgelsen eller sammenligningen ad disse baner. Der er givet eksempler nok til at klargøre følgende to punkter:

For det første, at de af forstandens operationer, ved hvis hjælp der under udøvelse af sin fantasi eller forestillingsevne kombinerer og modificerer de simple begreber om ting eller egenskaber, ikke i mindre grad end de af fornuftens operationer, som udøves på sandheder og udsagn, er underkastet almene love.

For det andet, at disse love i deres form er matematiske, og at de i virkeligheden findes udviklet i de grundlæggende love for det menneskelige sprog. Lovene for logikkens symboler kan derfor udledes ud fra overvejelser om forstandens operationer under dens ræsonneren.

Efter ovenstående betragtninger vender Boole nu atter blikket mod udsagnet $x^2 = x$ i afsnit 12 og gør sig følgende en række betragtninger, som han nedfælder i tre særskilte sætninger. Vi vil først betragte sætning II og sætning III som fremført i afsnittene 13 og 14.

12. Resten af dette kapitel vil være optaget af spørgsmål, der knytter sig til den tankens lov, hvis udtryk er $x^2 = x$ (II 9), en lov, der som det er blevet antydet (II 15), udgør den karakteristiske forskel på de operationer, der udføres af forstanden under almindelig samtale og ræsonneren, og dens operationer, når den beskæftiger sig med den almene algebra for størrelser. En vigtig del af den følgende undersøgelse går ud på at vise, at symbolerne 0 og 1 blandt logikkens symboler indtager en særstilling og kan gøres til genstand for en særlig fortolkning; men først er det nødvendigt at vise, hvorledes bestemte symboler som ovennævnte hensigtsmæssigt og med fordel kan anvendes i fremstillingen af forskellige tankesystemer.

Denne hensigtsmæssighed består ikke i et fortolkningsfællesskab; thi i tankesystemer så vidt forskellige som logikken og aritmetikken (jeg bruger det sidste ord i dets videst mulige betydning som talvidenskab) er der egentlig talt ikke noget emnefællesskab. Den første af dem er fortrolig med selve opfattelsen af ting, den anden tager kun deres talmæssige forbindelse i betragtning. Men eftersom formerne og metoderne i ethvert system af fornuftsslutninger umiddelbart afhænger af de love, som symbolerne er underkastet, og kun indirekte gennem ovennævnte forbindelsesled af deres fortolkning, kan det være både hensigtsmæssigt og fordelagtigt at anvende de samme symboler i forskellige tankesystemer, forudsat at man kan tilskrive dem fortolkninger af en sådan art, at deres formelle love bliver identiske og brugen deraf konsekvent. Grundlaget for denne anvendelse bliver altså ikke et fortolkningsfællesskab, men et fællesskab om de formelle love, som de i deres respektive systemer er underkastet. Dette fællesskab om de formelle love kan ikke oprettes på noget andet grundlag end den omhyggelige observation og en sammenligning af de resultater, der opnås uafhængigt af fortolkningerne af de betragtede systemer.

Disse bemærkninger vil forklare den undersøgelsesmetode, der anvendes i den følgende sætning. Logikkens bogstavsymboler er alment underkastet den lov, der er udtrykt i $x^2 = x$. Af talsymboler er der kun to, 0 og 1, som tilfredsstiller denne lov. Men disse symboler er hver for sig underkastet sin særlige lov i systemet af numeriske størrelser, og dette antyder, hvilke fortolkninger man skal tillægge logikkens bogstavsymboler, for at de samme specielle og formelle love også skal kunne realiseres i det logiske system.

SÆTNING II

13. *Om bestemmelsen af den logiske værdi og betydning af symbolerne 0 og 1.*

Symbolet 0 tilfredsstiller, som det bruges i algebraen, følgende formelle lov:

$$0 \times y = 0 \text{ eller } 0y = 0$$

uanset hvilket *tal* y repræsenterer. For at denne lov kan opretholdes i logikken, må vi til symbolet 0 knytte en fortolkning af en sådan art, at den *klasse*, der repræsenteres af $0y$, er identisk med den klasse, der repræsenteres af 0, uanset hvilken klasse y er. En nærmere overvejelse vil vise, at denne betingelse er opfyldt, hvis symbolet 0 repræsenterer

Intet. I overensstemmelse med en tidligere definition kan vi kalde Intet en klasse. Intet og Universet er jo de to ydergrænser for klasser; thi de er grænserne for de mulige fortolkninger af navne i almindelighed, af hvilke ingen kan være knyttet til færre individer, end der omfattes af Intet, eller til flere, end der omfattes af Universet. Ligegyldigt hvilken klasse y er, så er de elementer, der er fælles for den og klassen Intet, identiske med de elementer, der omfattes af klassen Intet; thi der er ingen af dem. Og altså er, dersom vi til 0 knytter fortolkningen Intet, loven (1) [2.1] opfyldt, og på anden måde kan den ikke tilfredsstilles i overensstemmelse med den fuldstændig almene karakter af klassen y.

For det andet tilfredsstiller symbolet 1 i talsystemet følgende lov:

$$1 \times y = y \text{ eller } 1y = y,$$

uanset hvilket tal y repræsenterer. Og antages denne formelle ligning for lige så gyldig i dette værks system, hvor 1 og y repræsenterer klasser, skal symbolet 1 repræsentere en klasse af en sådan art, at alle de elementer, der findes i enhver forelagt klasse y, tillige er alle de elementer $1y$, som er fælles for denne klasse og klassen, der repræsenteres af 1. En nærmere overvejelse vil her vise, at klassen, der repræsenteres af 1, må være Universet, da dette er den eneste klasse, hvori man finder alle elementer, som findes i enhver klasse. Følgelig er de respektive fortolkninger af symbolerne 0 og 1 i logikken Intet og Universet.

14. Da forestillingen om en klasse som »mennesker« antyder forestillingen om en modsat klasse af væsener, der ikke er mennesker, og hele Universet udgøres af disse to klasser tilsammen, idet vi om ethvert element, som det omfatter, kan hævde, enten at det er et menneske, eller at det ikke er et menneske, bliver det af betydning at undersøge, hvorledes sådanne modsatte angivelser skal udtrykkes. Dette er emnet for den følgende sætning.

SÆTNING III

Hvis x repræsenterer en vilkårlig klasse af genstande, da vil $1-x$ repræsentere den modsatte eller supplerende klasse af genstande, dvs. den klasse, der indeholder alle de genstande, der ikke er omfattet af klassen x.

For den større begrebsklarheds skyld vil vi lade x repræsentere klassen »mennesker« og i overensstemmelse med den sidste sætning betegne Universet med 1; hvis vi nu fra forestillingen om Universet som bestående af »mennesker« og »ikke-mennesker« udelukker opfattelsen »mennesker«, så vil den resterende opfattelse være den modsatte klasse »ikke-mennesker«. Følgelig vil klassen »ikke-mennesker« være repræsenteret af $1 - x$. Og i almindelighed gælder, at ligegyldigt hvilken klasse der er repræsenteret af symbolet x, så vil den modsatte klasse udtrykkes ved $1 - x$.

Opgave 12
Lad atter x repræsentere klassen af mænd; y klassen af kvinder; p klassen af pianister; og v klassen af violinister. Antag igen, at vi ønsker at droppe Booles restriktion om at subtraktion, $-$, kun er meningsgivende, hvis "de ting, der undtages, er en del af de ting, hvorfra de undtages."

Ved at benytte notationen introduceret i sætningerne II og III, hvorledes kan da klasserne angivet ved udsagnene $p - v$ og $x - y$ repræsenteres symbolsk? Forklar kort!

15. Skønt den følgende sætning strengt taget hører til i et senere kapitel i dette værk, et kapitel om grundsætninger og nødvendige sandheder, så har vi alligevel, på grund af den store betydning af den tankens lov, hvortil den knytter sig, fundet det rigtigt at indføre den her.

SÆTNING IV

Det af metafysikernes axiomer, der kaldes for modsigelses-princippet, og som hævder, at det er umuligt for noget væsen at besidde en egenskab og samtidig ikke besidde den, er en konsekvens af den fundamentale tankens lov, hvis udtryk er $x^2 = x$.

Lad os skrive denne ligning på formen

$$x - x^2 = 0,$$

hvoraf vi får

$$x(1 - x) = 0, \tag{2.9}$$

idet begge disse transformationer er tilladt ifølge de axiomatiske love om kombination og omflytning (II 13). Lad os for simpelheds skyld give symbolet x den bestemte fortolkning »mennesker«: $1-x$ vil da repræsentere klassen af »ikke-mennesker« (Sætn. III). Nu repræsenterer det formelle produkt af udtrykkene for to klasser den klasse, der udgøres af de elementer, der er fælles for dem begge (II 6). Følgelig vil $x(1 - x)$ repræsentere den klasse, hvis elementer på én gang er »mennesker« og »ikke-mennesker«, og ligningen (1) [2.9] udtrykker derfor det princip, *at en klasse, hvis elementer på samme tid er mennesker og ikke-mennesker, ikke eksisterer; med andre ord, at det er umuligt for det samme individ på én gang at være et menneske og ikke et menneske*. Lad nu betydningen af symbolet x udstrækkes fra at repræsentere »mennesker« til at repræsentere en vilkårlig klasse af elementer karakteriseret ved en eller anden vilkårlig egenskab, og ligningen (1) [2.9] vil da udtrykke, at det er umuligt for et væsen på samme tid at besidde en egenskab og ikke besidde denne egenskab. Men dette er identisk med »modsigelsesprincippet« som Aristoteles har betegnet som det fundamental axiom for al filosofi. »Det er umuligt, at den samme egenskab både skulle tilhøre og ikke tilhøre samme ting . . . Dette er det visse af alle principper . . . Hvorfor de, der beviser, henviser til dette som en grundanskuelse. Thi det er af naturen udspringet for alle de andre axiomer.«

Ovenstående fortolkning er ikke indført på grund af dens umiddelbare værdi i det foreliggende system, men som en illustration af en betydningsfuld kendsgerning i filosofien om de intellektuelle evner, nemlig at det, der i almindelighed er blevet betragtet som metafysikkens fundamentale axiom, blot er en konsekvens af en tankens lov, matematisk i sin form. Jeg vil også gerne henlede opmærksomheden på den omstændighed, at ligningen (1) [2.9], som udtrykker denne fundamentale tankens lov, er en ligning af anden grad.* Uden overhovedet i dette kapitel at spekulere over spørgsmålet, om denne omstændighed er en nødvendighed af dens egen natur, kan vi driste os til at hævde, at om den ikke havde eksisteret, da ville hele vor måde at opfatte på have været en anden, end den er. Således er det en følge af den kendsgerning, at den fundamentale ligning for tænkning er af anden grad, at vor anlysering af klassifikation udføres ved en opdeling i modsatte par, eller, som det med et teknisk udtryk hedder, ved *dichotomi*. Havde den pågældende ligning været af tredie grad og stadig tilladt en fortolkning, da måtte den forstandsmæssige inddeling have været af en trefoldig karakter, og vi havde måttet gå frem ved en slags *trichotomi*, hvis virkelige natur vi med vores eksisterende evner ikke kan forestille os, men hvis love vi kunne have undersøgt som genstand for en rent intellektuel overvejelse.

Booles bevis for sætning IV kører groft sagt efter formen:

$$\begin{aligned} x &= x^2 \\ x - x^2 &= 0 \\ x(1-x) &= 0, \end{aligned}$$

hvor $x^2 = x$ er givet, og via to manipulationer ender han op med et udtryk der kan fortolkes i hans system – og som han tilmed kan tilskrive en sproglig og filosofisk mening, nemlig 'modsigelsesprincippet', at det er umuligt på samme tid at besidde én egenskab og ikke besidde denne egenskab. I matematik er dette princip kendt som *modstridsprincippet* og er et princip der ofte benyttes i matematisk bevisførelse.

Opgave 13
Diskuter hvorvidt I finder, at Booles formelle manipulation af loven $x^2 = x$ er overbevisende som argument for at 'modsigelsesprincippet' er "en konsekvens af en tankens lov, matematisk i sin form" i stedet for blot at være en axiomatisk lov.

16. Den tankens lov, der er udtrykt i ligning (1) [2.9], vil af grunde, som står klart ifølge ovenstående definition, fra tid til anden blive omtalt som »dualitetsloven«.

* Det bør her bemærkes, at eksistensen af ligningen $x^2 = x$ også medfører eksistensen af ligningen $x^3 = x$, som er af tredie grad, og man kunne da spørge, om denne ligning ikke angiver en form for trichotomi; svaret herpå er, at ligningen $x^3 = x$ ikke kan fortolkes i logikken; thi skrives den på en af formerne

$$\begin{aligned} x(1-x)(1+x) &= 0 \\ x(1-x)(-1-x) &= 0 \end{aligned}$$

ser vi, at dens fortolkning, om overhovedet mulig, måtte involvere en fortolkning af faktoren $1 + x$ eller faktoren $-1 - x$. Den første kan ikke fortolkes, fordi vi ikke kan forestille os en addition af en klasse til Universet 1; den sidste kan ikke fortolkes, fordi symbolet -1 ikke er underkastet loven $x(1 - x) = 0$, som alle klassesymboler er underlagt. Ligningen $x^3 = x$ tillader altså ikke en fortolkning på samme måde som ligningen $x^2 = x$. Var den førstnævnte ligning imidlertid sand uafhængigt af den sidstnævnte, dvs. var den forstandsmæssige handling, der er angivet af symbolet x, af en sådan art, at dens gentagelse på ny frembringer resultatet af en enkelt operation, men derimod ikke dens første og blotte gentagelse, er det rimeligt at mene, at vi ville være i stand til at forklare en af formerne (2), (3), hvad vi under de forhåndenværende omstændigheder ikke kan gøre. Der findes operationer, kendt af matematikeren, hvis lovmæssighed fyldestgørende ville være udtrykt ved ligningen $x^3 = x$; men de er af en natur, der er ganske fremmed for den almindelige ræsonneren.

Når jeg siger, at man kunne have forestillet sig, at tankens lov kunne have været anderledes, end den er, så mener jeg dermed blot, at vi kan danne en hypotese af denne art og studere dens konsekvenser. Muligheden for at bære sig således ad afhænger ikke af dogmer i retning af, at den virkelige lov for den menneskelige fornuft er en frembringelse enten af tilfældet eller af en arbitrær vilje.

Opgave 14
Kommenter på Booles betragtninger i hans ovenstående fodnote: Hvorfor er de to udtryk $1 + x$ og $-1 - x$ meningsløse i Booles system? Forklar!

Vi går ikke længere med vores uddrag af Booles *The Laws of Thought...* end de to kapitler præsenteret her ovenfor. På dette tidspunkt i Booles værk er hans symbolik hvad angår operationer med klasser praktisk taget fuldstændig. Det der imidlertid resterer at gøre, og som Boole også betragter i sine senere kapitler, er i hovedsagen to ting. For det første må fokus flyttes fra påstande om klasser til udsagn. Det vil sige i stedet for at opstille identiteter der blot har en klassedefinerede funktion (f.eks. stjernerne er alle solene og alle planeterne) må han gå videre til udsagn som f.eks. 'alle mennesker er dødelige'. For det andet må der opstilles en teori for regning med disse udsagn, altså der skal udledes en såkaldt udsagns- eller sætningskalkyle. For eksempel for at udlede 'alle mennesker er dødelige' udfra de to udsagn 'alle dyr er dødelige' og 'alle mennesker er dyr' er det nødvendigt med en sådan kalkyle bestående af visse regler der muliggør operationer førende til de ønskede resultat – vel at mærke i en matematisk symbolik, hvilket var Booles bidrag.

2.4 Boolsk algebra og moderne mængdelære

Mange af Booles definitioner og love som set i hans kapitel II og III her ovenfor er i dag at genfinde i den matematiske mængdelære. Booles ideer blev videreudviklet af senere matematikere som for eksempel John Venn (1834-1923) og Charles S. Peirce (1839-1914). Lad os for en kort bemærkning se på nogle af analogierne.

I Booles system repræsenterer udtrykket xy, eller $x \cdot y$, den klasse som består af de elementer som både er at finde i klassen x og i klassen y (afsnit 7, kapitel II). Dette modsvarer at bestemme fællesmængden mellem de to mængder X og Y, skrevet $X \cap Y$. Bemærk, at man i mængdelæren kalder mængderne ved store bogstaver og deres elementer ved små bogstaver, f.eks. skrives et element x tilhørende en mængde som $x \in X$. Og ligesom i Booles logik er også fællesmængdedannelse i mængdelæren en kommutativ operation, det vil sige ligesom $xy = yx$ er også $X \cap Y = Y \cap X$.

Også den i dag så velkendte foreningsmængde er at genfinde hos Boole. Foreningsmængden $X \cup Y$ i mængdelæren består af alle de elementer der enten tilhører X eller tilhører Y eller tilhører både X og Y. De eneste ting der ikke er med i foreningsmængden er de ting der hverken tilhører X eller Y. Faktisk fastlægger man sig her med brugen af ordet 'eller' på en ganske bestemt brug af dette, nemlig at hvis a enten er b eller c, så skal der heri være indeholdt den mulighed, at a *både* er b og c. Dette omtales også gerne som den 'svage' brug af ordet 'eller'. Den 'stærke' brug af ordet 'eller' vil sige at a *enten* er b eller c, men ikke på samme tid begge.

Opgave 15
Skitser de to mængder X og Y ved to cirkler. Illustrer med forskellige skraveringer på jeres skitse, hvorledes fællesmængden af de to mængder vil se ud og ligeledes for foreningsmængden, både ved brug af 'svagt eller' og 'stærkt eller'.

Almindeligvis i logikken benyttes ‘svagt eller’, men strengt taget er Booles brug af ‘eller’ i dets stærke betydning. For at illustrere den i dag konventionelle analogi mellem logikken og mængdelæren i forhold til foreningsmængde vil vi her fortolke Booles symbolik som anvendende ‘eller’ i dets svage betydning. Booles anvendte symbol her er $+$ og han bemærker at denne operation i logikken, altså $x+y=y+x$, er kommutativ ligesom i den aritmetiske algebra, og ligesom dens analoge foreningsmængdedannelse er det i mængdelæren. Kommutativiteten gælder i øvrigt hvad enten ‘eller’ anvendes i sin svage eller stærke betydning.

Boole bemærker dernæst i afsnit 11, kapitel II, distibutiviteten af sin operation $\cdot$ med hensyn til operationen $+$, altså $z(x+y)=zx+zy$. Mere mundret siger man gerne, at multiplikation er distributiv med hensyn til addition. Analogien i mængdelæren er, at fællesmængdedannelse er distributiv med hensyn til foreningsmængdedannelse. I både mængdelæren såvel som i Booles system gælder at det omvendte også er tilfældet, altså at foreningsmængdedannelse er distributiv med hensyn til fællesmængdedannelse.

Opgave 16
Lad z stå for ‘europæisk’, lad x stå for ‘asiatisk’ og lad y stå for ‘kvinder’. Betragt nu udtrykket $z+(xy)$. Dette betyder ‘alle europæiske ting eller alle asiatiske kvinder’. Da der gælder at addition er distributiv med hensyn til multiplikation, skal $z+(xy)$ altså være det samme som udtrykket $(z+x)(z+y)$. Argumenter for at dette er tilfældet.

Dette er imidlertid ikke sandt i den aritmetiske algebra, som er den Boole kontinuerligt sammenligner sit eget system med – altså almindeligvis er addition ikke distributiv med hensyn til multiplikation. Lad os se på et eksempel:

$$2\cdot(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4=6+8=14.$$

Antag nu, at vi har

$$2+(3\cdot 4)=14.$$

Hvis addition var distributiv med hensyn til multiplikation, så skulle

$$(2+3)(2+4)$$

også være lig 14, men det er selvfølgelig ikke tilfældet, da det er lig med 30. Som bemærket af Boole selv i afsnit 14, kapitel II, hører analogien mellem hans system og den aritmetiske algebra i nogen grad op med loven $x^2=x$, selvom den bliver opretholdt med restriktionen om at x kun kan antage værdierne 0 og 1. Men faktisk ophører den allerede med betragtningen ovenfor angående distributivitet.

I moderne matematik i dag defineres en *Boolsk algebra* helt generelt som en såkaldt seks-tupel $(S,+,\cdot,',0,1)$, som opfylder nedenstående otte axiomer, hvor S er en mængde; $+,\cdot$ er binære operatorer på S; $'$ er en unær operator på S; og $0,1$ er elementer i S. At en operator er binær vil sige at den opererer på to elementer ad gangen, hvor en unær operator kun opererer på ét.

1. komm. af add.	$\forall x, y \in S:$	$x + y = y + x,$
2. komm. af mult.	$\forall x, y \in S:$	$x \cdot y = y \cdot x,$
3. ass. af add.	$\forall x, y, z \in S:$	$(x + y) + z = x + (y + z),$
4. ass. af mult.	$\forall x, y, z \in S:$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$
5. dist. af add. mht. mult.	$\forall x, y, z \in S:$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$
6. dist. af mult. mht. add.	$\forall x, y, z \in S:$	$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z),$
7. identitet	$\forall x \in S:$	$x + 0 = x$ og $x \cdot 1 = x,$
8. komplementaritet	$\forall x \in S:$	$x + x' = 1$ og $x \cdot x' = 0.$

Forkortelserne 'komm.' dækker over kommutativitet; 'add.' over addition; 'ass.' over associativitet; 'dist.' over distributivitet; og 'mult.' over multiplikation. Tegnet $\forall$ betyder 'for alle', det vil sige udtrykket '$\forall x, y \in S:$' læses 'for alle elementer x og y tilhørende mængden S gælder'. Bemærk også at her ovenfor svarer notationen x' til Booles notation $1 - x$.

Opgave 17
Hvilke af ovenstående otte axiomer kan I genfinde i Booles beskrivelse af hans system i kapitlerne II og III af *The Laws of Thought...*?

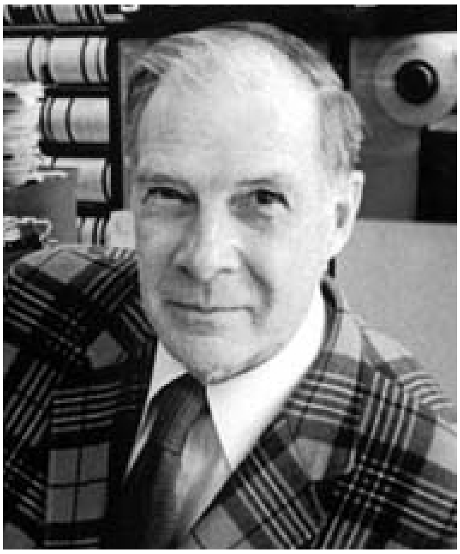
Den elementære mængdelære er i sig selv et specielt eksempel på en Boolsk algebra, hvilket fremgår af følgende oversættelse af de otte axiomer. Her er mængden S mængden bestående af alle delmængder af den universale mængde U. En sådan mængde kaldes også for potensmængden af U, og angives ved $\mathcal{P}(U)$. Hvis for eksempel $U = \{a, b, c\}$, så er $\mathcal{P}(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, hvor $\emptyset$ er den tomme mængde. Der gælder at antallet af elementer i $\mathcal{P}(U)$ er lig 2 opløftet til antallet af elementer i U (hvorfor?), i vores tilfælde altså $2^3 = 8$.

1. komm. for.mgd.	$\forall A, B \in S:$	$A \cup B = B \cup A,$
2. komm. fæl.mgd.	$\forall A, B \in S:$	$A \cap B = B \cap B,$
3. ass. for.mgd.	$\forall A, B, C \in S:$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
4. ass. fæl.mgd.	$\forall A, B, C \in S:$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
5. dist. fæl. mht. for.	$\forall A, B, C \in S:$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
6. dist. for. mht. fæl.	$\forall A, B, C \in S:$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
7. identitet	$\forall A \in S:$	$A \cup \emptyset = A$ og $A \cap U = A,$
8. komplementaritet	$\forall A \in S:$	$A \cup A' = U$ og $A \cap A' = \emptyset.$

Forkortelserne 'for.mgd.' og 'for.' dækker over foreningsmængde og 'fæl.mgd.' og 'fæl.' dækker over fællesmængde. De øvrige forkortelser er de samme som tidligere benyttet.

Den elementære mængdelære er kun ét eksempel på en Boolsk algebra. Netop fordi strukturen af en Boolsk algebra har til hensigt at være fuldstændig abstrakt, forstået på den vis at ingen speciel mening er tillagt symbolerne $+$ og $\cdot$, findes der adskillige specifikke eksempler på Boolske algebraer. Dette gør strukturen interessant set fra diverse teoretiske såvel som anvendelsesorienterede perspektiver, specielt inden for datalogi og ingeniørvidenskab. Dette skal vi se nærmere på i kapitel 4 efter at vi har behandlet matematikkens 'urimelige' anvendelighed fra et mere generelt standpunkt i kapitel 3.

3 Hamming om matematikkens 'urimelige' anvendelighed



Richard Wesley Hamming (1915-1998)

3.1 Kort biografi

Richard W. Hamming studerede matematik ved universiteterne i Chicago og Nebraska frem til 1939. I 1942 modtag han en ph.d. i matematik fra University of Illinois, og i 1945 blev han en del af Manhattan-projektet og tilknyttet Los Alamos. I 1946 begyndte Hamming at arbejde for Bell Telephone Laboratories (Bell Labs), sammen med blandt andet Claude Shannon. Herfra udgav han i 1950 sin berømte artikel om kodningsteori indeholdende de fejlkorrigerende koder, der senere blev kendt som Hamming-koder (se evt. Jankvist, 2008a).

I 1956 arbejdede Hamming på den tidlige 650 IBM-computer, og hans arbejde der førte blandt andet til udviklingen af høj-niveau programmeringssprog. I 1976 accepterede Hamming en stilling i datalogi ved Naval Postgraduate School i Monterey. Hamming modtag i sine sene leveår adskillige priser, ikke mindst for sit arbejde inden for kodningsteori. Ifølge en af hans kollegaer, matematikeren Philip J. Davis, var Hamming kendt for sine røde skotskternede blazere og sine vittigheder (Jankvist & Toldbod; 2005).

3.2 Optakt til Hammings artikel

I 1960 skrev den berømte Østrig-Ungarnske fysiker Eugene P. Wigner (1902-1995) en nu klassisk artikel om matematikkens og fysikkens filosofi: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* (Wigner; 1960). Wigner, der også modtog Nobel-prisen i 1963 for sit arbejde med symmetrier i kvantemekanikken, argumenterede i denne artikel for at biologi og kognition kunne udgøre ophavet til fysiske begreber, så som vi mennesker opfatter dem, og at den lykkelige tilfældighed at matematikken og fysikken passer så godt sammen forekommer at være en 'urimelig' og svært forklarelig omstændighed.

Hvor Wigners artikel fortrinsvist beskuer matematikkens 'urimelige' anvendelighed fra et fysikorienteret standpunkt, udvider Hamming dette i sin filosofiske artikel fra 1980 til også at omfatte en række betragtninger inden for ingeniørvidenskab og det som vi i dag vil kategorisere som værende datalogien.

3.3 Hammings 1980-artikel

MATEMATIKKENS URIMELIGE EFFEKTIVITET

R. W. HAMMING

Prolog. Det fremgår af titlen at dette er en filosofisk diskussion. Jeg skal ikke undskylde for filosofien, selvom jeg er klar over at de fleste naturvidensskabsfolk, ingeniører og matematikere har lidt tilovers herfor; i stedet skal jeg give denne lille korte prolog for at retfærdiggøre min tilgang.

Mennesket har, så vidt vi ved, altid undret sig over sig selv, verdenen omkring det og hvad livet går ud på. Vi har mange myter fra fortiden som fortæller hvordan eller hvorfor Gud, eller guderne, skabte mennesket og universet. Disse skal jeg kalde de *teologiske forklaringer*. De har en væsentlig karakteristik tilfælles – der er ikke meget mening i at spørge til hvorfor tingene er som de er, da vi stort set kun bliver udstyret med en beskrivelse af skabelsen som guderne valgte at gøre det.

Filosofi blev til da mennesket begyndte at undre sig over verden udenfor og dens teologiske ramme. Et tidligt eksempel er filosoffernes beskrivelse af verden som bestående af jord, ild, vand og luft. Der kan næppe være tvivl om at de dengang fik at vide at sådan lavede guderne nu engang tingene og iøvrigt blev bedt om at holde op med at bekymre sig derom.

Fra disse tidlige forsøg på at forklare ting opstod langsomt filosofi såvel som vores nutidige naturvidenskab. Ikke at naturvidenskaben forklarer »hvorfor« tingene er som de er – tyngdekraften forklarer ikke hvorfor ting falder – men naturvidenskaben giver os så mange detaljer om »hvordan«, at vi får en følelse af at forstå »hvorfor«. Lad os være på det rene hermed; at det er på grund af det hav af forbundne detaljer at naturvidenskaben synes at forklare »hvorfor« universet er som det er.

Vores primære redskab til at udføre de lange kæder af stram ræsonneren påkrævet af naturvidenskaben er matematikken. Matematikken kan i sandhed defineres som værende det mentale redskab der er designet til dette formål. Gennem tiderne har mange folk stillet det spørgsmål som jeg stiller i titlen, »Hvorfor er matematikken så urimeligt effektiv?« Ved at spørge til dette drejer vi i højere grad vores søgen ind på den mere logiske side, og i mindre grad den materielle side, af hvad universet er og hvordan det fungerer.

Matematikere som arbejder med matematikkens grundlæggende fundament interesserer sig hovedsageligt for selv-konsistensen og begrænsningerne af dette system. De synes derimod ikke at interessere sig for hvorfor verden angiveligt tillader logiske forklaringer. På sin vis er jeg i samme position som de tidlige græske filosoffer der undrede sig over den materielle side, og mine svar angående den logiske side er formentlig ikke meget bedre end deres var dengang. Men på et eller andet sted og tidspunkt må vi jo begynde på at forklare det fænomen at verden forekommer at være organiseret i et logisk mønster der svarer til meget af matematikken, at matematik er natur- og ingeniørvidenskabens sprog.

Da jeg først havde fået styr på hovedtrækkene [i denne artikel] begyndte jeg at overveje hvordan jeg bedst kunne kommunikere mine ideer og meninger til andre. Af erfaring ved jeg, at jeg ikke altid er lige succesfuld med dette. Endelig slog det mig, at den følgende forberedende bemærkning ville hjælpe.

I nogen henseender er denne diskussion rent teoretisk. Jeg bliver nødt til at nævne, i det mindste i forbifarten, diverse teorier inden for den generelle aktivitet der kaldes matematik såvel som berøre udvalgte dele af den. Ydermere findes der diverse teorier for anvendelser. Dermed fører dette til en vis grad til en teori af teorier. Hvad der måske vil overraske dig er at jeg skal tage eksperimentarikerens tilgang i diskussionen. Glem alt om hvad teorierne skal forestille at være, eller hvad du tror de bør være, eller endda hvad eksperterne på området antager dem for; lad os antage den videnskabelige holdning og se på hvad de er. I er udmærket klar over at meget af det jeg siger, i særdeleshed angående matematikkens natur, vil irritere mange matematikere. Min eksperimentelle tilgang er deres mentalitet og forudindtagede overbevisninger ganske fremmed. Men sådan må det være!

Inspirationen til denne artikel kom fra en lignende navngivet artikel, »Matematikkens urimelige effektivitet i naturvidenskaberne« [1], af E.P. Wigner. Det skal bemærkes at jeg har udeladt dele af titlen, og for de der allerede har læst denne artikel, at jeg ikke gengiver meget af hans materiale (jeg mener ikke jeg kan forbedre hans præsentation). På den anden side skal jeg bruge relativt mere tid på at forsøge at forklare det antydede spørgsmål i titlen. Men når alle mine forklaringer er ovre, vil det tilbageværende stadig være så omfangsrigt at det essentielt set lader spørgsmålet ubesvaret.

Opgave 18

a. Hvad er ifølge Hamming selv hans formål med at skrive denne artikel?
b. Hvad mener han med at naturvidenskaben kun beskriver ‘hvordan’ og ikke ‘hvorfor’?
c. Hvad er ifølge Hamming en af matematikkens roller i natur- og ingeniørvidenskaberne?

Matematikkens effektivitet. I sin artikel giver Wigner et større antal eksempler på matematikkens effektivitet inden for fysikken og dens relaterede videnskaber. Tillad mig derfor at trække på mine egne erfaringer der er tættere forbundet med ingeniørvidenskaben. Min første rigtige erfaring med at anvende matematik til at forudsige ting i den virkelige verden var i forbindelse med designet af atombomben under anden verdenskrig. Hvordan kan det være at de tal vi så tålmodigt beregnede på de primitive relæ-computere stemte så godt overens med hvad der skete ved den første prøvesprængning i Almagordo? Der var ikke, og kunne ikke foretages, nogen eksperimenter i lille målestok til at checke beregningerne direkte. Senere erfaringer med guidede missiler viste mig at dette ikke var et isoleret fænomen – til stadighed vil det vi forudsiger ved manipulation af matematiske symboler realisere sig selv i den virkelige verden. Selvfølgelig har jeg, grundet mit arbejde for Bell System, udført mange telefon-relaterede beregninger og andet matematisk arbejde på diverse ting som rør til at sende bølger igennem, udligning af TV-forbindelser, stabilitet af komplekse kommunikationssystemer, blokering af opkald gennem en telefoncentral, for blot at nævne nogle få. Af de mere prestigefyldte kan jeg nævne forskning i transistorer, rumflyvninger og design af computere, men næsten al natur- og ingeniørvidenskab har gjort brug af omfattende matematiske manipulationer med bemærkelsesværdig succes.

Mange af jer kender historien om Maxwells ligninger [1] og om hvordan han for at opretholde symmetrien indsatte et ekstra led, og hvordan denne teori med tiden blev vist sand med Hertzs opdagelse af radiobølger. Mange andre eksempler på at forudsige fysiske virkninger udfra matematiske formuleringer er velkendte og behøver derfor ikke blive gentaget her.

Wigner fremhæver den fundamentale rolle som *invarians* spiller. Det er basalt for meget matematik såvel som naturvidenskab. Det var manglen af *invarians* i Newtons ligninger (behovet for en absolut referenceramme for hastigheder) der drev Lorentz, Fitzgerald, Poincaré og Einstein frem mod den specielle relativitetsteori.

Wigner bemærker også at de *samme matematiske begreber* dukker op i fuldstændig uventede sammenhænge. Et eksempel er de trigonometriske funktioner som optræder i Ptolemæus' astronomi og som viser sig at være de funktioner der er invariante med hensyn til translation (tidsinvarians). Samtidig er de også de egnede funktioner for lineære systemer. Den enorme anvendelighed af de samme stykker matematik i vidt forskellige situationer har ingen rationel forklaring (endnu ihvertfald).

Ydermere har matematikkens *simplicitet* længe været anset som nøglen til anvendelser inden for fysikken. Einstein er den mest berømte eksponent for denne opfattelse. Men også i matematikken selv er simpliciteten bemærkelsesværdig, i det mindste for mig; de simpleste algebraiske ligninger, lineære eller kvadratiske, svarer til de simpleste geometriske entiteter, lige linier, cirkler og keglesnit. Dette gør analytisk geometri mulig på en praktisk vis. Hvorledes kan det være at simpel matematik, som trods alt er

[1] Maxwells ligninger, eller love, er fire ligninger som tilsammen danner basis for elektromagnetismen, dvs. de beskriver sammenhængen mellem elektriske og magnetiske felter, ladninger og elektrisk strøm. De har deres navn efter fysikeren James Clerk Maxwell (1831-1879).

et produkt af det menneskelige sind, kan være så bemærkelsesværdigt anvendeligt i så vidt forskellige situationer?

På grund af disse matematikkens succeser er der pt en stærk tendens mod at gøre hver og en af naturvidenskaberne matematiske. Det opfattes som regel som et mål der skal nås, hvis ikke i dag så i morgen. For nærværende publikum vil jeg holde mig til fysikken og astronomien for yderligere eksempler.

Pythagoras er det første menneske der på skrift klart har udtrykt at »Matematik er måden at forstå universet på.« Han sagde det både højt og tydeligt, »Med tal kan alle ting måles.«

Kepler er et andet kendt eksempel på én af denne opfattelse. Han troede inderligt på at Guds værk udelukkende kunne forstås gennem matematikken. Efter tyve års langtrukne beregninger fandt han sine tre berømte love for planeternes bevægelse – tre forholdsvist simple matematiske udtryk som beskriver planeternes umiddelbart komplekse bevægelser.

Det var Galileo som sagde, »Naturens love er skrevet i matematikkens sprog.« Newton brugte resultaterne af både Kepler og Galileo til at udlede de berømte Newtonske love for bevægelse, som tilsammen med loven om tyngdekraften måske er det mest berømte eksempel på matematikkens urimelige effektivitet i naturvidenskaben. De forudsagde ikke kun hvor de allerede kendte planeter ville befinde sig, men forudsagde også med succes positionerne af ukendte planeter, bevægelserne af fjerntliggende stjerner, tidevande og så videre.

Naturvidenskab består af love som oprindeligt var baseret på små omhyggeligt udvalgte observationssæt, som oprindeligt ikke blev målt med særlig stor nøjagtighed; men lovene har senere vist sig anvendelige over et meget større spektrum af observationer og tilmed meget mere nøjagtigt end de oprindelige data kan retfærdiggøre. Selvfølgelig er der undtagelser, men alligevel er det sket så ofte at der kræves en forklaring.

I løbet af mine tredive år som praktiserende matematiker inden for industrien har jeg ofte undret mig over de forudsigelse som jeg gjorde. På baggrund af den matematik som jeg lavede på mit kontor, forudsagde jeg med overbevisning (overfor andre i det mindste) fremtidige begivenheder – hvis man gør sådan og sådan, vil man se dette og hint – og i de fleste tilfælde havde jeg ret. Hvordan kunne fænomenet vide, hvad jeg havde forudsagt (baseret på menneskegjort matematik), således at det kunne bakke op om mine forudsigelser? Det er latterligt at forestille sig at det er sådan tingene foregår. Nej, matematikken leverer, på en eller anden vis, en pålidelig model for mange af de ting der sker i universet. Og siden jeg kun er i stand til at udføre forholdsvist simpel matematik, hvordan kan det så være at simpel matematik er tilstrækkeligt til at forudsige så meget?

Jeg kunne forsætte med at opremse eksempler til illustration af matematikkens urimelige effektivitet, men det ville bare blive kedeligt. Og tilmed forestiller jeg mig at mange af jer er bekendte med eksempler som jeg ikke er. Tillad mig derfor at antage, at I udstyrer mig med en lang liste af succesfulde eksempler, mange af dem ligeså spektakulære som forudsigelsen af en ny planet, af et nyt fysisk fænomen eller et nyt artefakt. Med begrænset tid til rådighed vil jeg bruge den jeg har tilbage i et forsøg på at gøre, hvad jeg mener at Wigner veg udenom – i det mindste at give nogle praktiske svar til det antydede spørgsmål i titlen.

Opgave 19
Forsøg selv at føje flere eksempler til listen over matematikkens 'urimelige effektivitet' end de som Hamming giver med udgangspunkt i fysikken? Overvej f.eks. brugen af matematik i nogle af de andre naturvidenskaber (biologi, kemi, etc.) eller videnskaber generelt (f.eks. økonomi). Brug gerne internettet til at finde inspiration og eksempler.

Hvad er matematik? Efter at have set på matematikkens effektivitet skal vi nu betragte spørgsmålet, »Hvad er matematik?« Dette er titlen på en berømt bog af Courant og Robbins [2]. I denne bog forsøger de ikke at give en formel definition, men stiller sig i stedet tilfreds med at give adskillige eksempler. På lignende vis skal jeg ikke give en omfattende definition. Men jeg skal komme tættere på end de gjorde ved at diskutere visse at matematikkens fremtrædende særpræg, sådan som jeg ser dem.

Måske er den bedste måde at tilgå spørgsmålet om hvad matematik er at begynde med begyndelsen. I den fjerne forhistoriske fortid, hvor vi må søge efter matematikkens begyndelse, var der allerede fire betydningsfulde 'ansigter' af matematikken. For det første var der evnen til at udføre *lange rækker af tæt ræsonneren*, hvilket til denne dag karakteriserer meget af matematikken. For det andet var der *geometri*, hvilket har ledt os via kontinuitetsbegrebet til topologien og videre. For det tredje var der *tal*, hvilke ledte os til aritmetikken, algebraen og videre. Og endelig var der *kunstnerisk smag*, hvilket spiller en så stor rolle i moderne matematik. Der er selvfølgelig mange forskellige former for skønhed i matematikken. I talteorien synes skønheden hovedsageligt at ligge i de næsten uendelige detaljer; i den abstrakte algebra findes skønheden hovedsageligt i generaliteten. Forskellige områder af matematikken har således forskellige standarder for æstetik.

Matematikkens tidligste historie må selvfølgelig bero på udelukkende spekulation, idet der ikke findes nogen former for overbevisende evidens, ikke nu og formentlig ej heller på et senere givet tidspunkt. Imidlertid synes der at være indbygget i selve fundamentet for primitivt liv, om ikke for andet så i overlevelsens øjemed, en forståelse af årsag og virkning. Når først dette træk bygger på mere end en enkelt observation af en følge af, »Hvis dette, så dette, og så følger det endvidere at...,« så er vi på vej til det første af de af matematikkens særpræg som jeg nævnte, lange rækker af tæt ræsonneren. Men det er svært for mig at se, hvorledes simpel Darwinistisk overlevelse af de stærkeste ville kunne udvælge dem med evnen til at udføre de lange rækker som matematik og naturvidenskab synes at kræve.

Geometri synes at have opstået ud af problemerne med at dekorere den menneskelige krop for diverse formål, såsom religiøse ritualer, sociale anliggender, og det at tiltrække det modsatte køn, såvel som problemerne med at dekorere vægge, potter, brugsgenstande og tøj. Dette indebærer også det fjerde aspekt som jeg nævnte, æstetisk smag, og det er en af de dybe fundamenter af matematikken. De fleste lærebøger gentager grækerne og siger at geometri opstod på grund af egypternes behov for at opmåle landet hver gang Nilen løb over sine bredder, men jeg tilskriver meget mere til æstetikken end de fleste matematikhistorikere gør og tilsvarende mindre til umiddelbar nytteværdi.

Det tredje aspekt af matematikken, tal, opstod fra det at tælle. Så fundamentale er tal, at en berømt matematiker engang sagde, »Gud skabte de naturlig tal, resten er menneskeskabt« [3]. De naturlige tal forekommer os så fundamentale at vi forventer at finde dem, hvorend vi måtte finde intelligent liv i universet. Jeg har forsøgt, med begrænset succes, at få nogle af mine venner til at forstå min forbløffelse over at de naturlige tals abstraheren for det at tælle er både mulig og anvendelig. Er det ikke bemærkelsesværdigt at 6 får plus 7 får giver 13 får; at 6 sten plus 7 sten giver 13 sten? Er det ikke et mirakel at universet er således konstrueret, at en sådan simpel abstraktion som et tal er muligt? For mig er dette et af de stærkeste eksempler på matematikkens urimelige effektivitet. Jeg finder det i sandhed både mærkværdigt og uforklarligt.

I tallenes udvikling kommer vi dernæst til det faktum at disse tælle-tal, de naturlige tal, med succes blev anvendt til at måle hvor mange gange en standardlængde kan bruges til at opbruge den ønskede længde som skulle måles. Men det må snart være forekommet, relativt set selvfølgelig, at et helt tal af enheder ikke passede nøjagtigt med den længde som skulle måles, og at opmålerne blev ledt til brøker – det tilovers værende stykke blev brugt til at måle standardlængden. Brøker er ikke tælle-tal, de er måle-tal. Grundet deres fælles brug til opmåling blev det snart fundet, ved en passende udvidelse af ideer, at brøkerne overholder de samme regler for manipulationer som de naturlige tal gjorde, med den tilføjede bonus at de gjorde division mulig i alle tilfælde (jeg er endnu ikke nået til tallet nul). Yderligere bekendtskab med brøkerne afslørede snart at man mellem to vilkårlige brøker kan placere lige så mange andre man ønsker og at tætheden af dem i en vis forstand er alle steder homogen. Men når vi udvider talbegrebet til også at omfatte brøker må vi opgive ideen om det næste tal.

Dette fører os igen til Pythagoras, der anses som den første der beviste at diagonalen af et kvadrat og siden af kvadratet ikke har noget fælles mål – at deres indbyrdes forhold er irrationalt [2]. Denne observation afødte tilsyneladende en omfattende omvæltning i den græske matematik. Frem til dette tidspunkt havde det diskrete talsystem og den kontinuerte geometri blomstret side om side uden nogen egentlig konflikt. Krisen omhandlende inkommensurabilitet blev begyndelsen til den Euklidiske tilgang til matematikken. Det er et besynderligt faktum at de tidlige grækere forsøgte at gøre matematikken stringent ved at udskifte tallenes usikkerheder med det de følte var en mere sikker geometri (skabt af Eudoxus). Dette var en vigtig begivenhed for Euklid og som et resultat heraf finder man i *Elementerne* [4] en hel del af hvad vi i dag betragter som talteori og algebra fremstillet som værende geometri. Modsat de tidlige grækere, der betvivlede eksistensen af det reelle talsystem, har vi besluttet at der skal være et tal der måler længden af diagonalen i et enhedskvadrat (selv om vi ikke havde behøvet det), og det er mere eller mindre på denne vis at vi udvidede det rationale talsystem til også at omfatte de algebraiske tal. Det var et simpelt ønske om at måle længder der var skyld heri. Hvordan kan nogen benægte at der findes et tal som kan måle længden af et vilkårligt lige liniestykke?

De algebraiske tal, som er rødder at polynomier med heltal, brøker, og som blev bevist senere, selv algebraiske tal som koefficienter, kom snart under kontrol ved simpelthen at udvide de samme operationer som blev benytter

[2] For eksempel tallet $\sqrt{2}$ som jo er længden af hypotenusen i en retvinklet trekant med kateter af længde 1.

på de simplere talsystemer. Men snart tvang beregningen af en cirkels omkreds med hensyn til dens diameter os til at betragte forholdstallet pi. Dette er ikke et algebraisk tal, da ingen lineære kombinationer af potenser af pi med heltalskoefficienter vil gå ud med hinanden. At den ene længde, omkredsen, er en kurve og den anden længde, diameteren, er en lige linie, gør eksistensen af forholdstallet mindre sikker end det mellem diagonalen i et kvadrat og dets to sider; men siden det forekommer os at der burde findes et sådant tal, blev de trancendente tal gradvist indført i talsystemet [3]. Ved yderligere passende udvidelse af de tidlige ideer om tal blev de trancencente tal dermed indføjet i talsystemet på konsistent vis, selvom kun få studerende overhovedet føler sig tilpas med det tekniske 'apparatur' vi konventionelt anvender til at vise konsistensen.

Videre roderi med talsystemet gav os både tallet nul og de negative tal. Denne gang påbød udvidelsen os at vi opgav division for det enkelte tal nul. Dette synes at afrunde det reelle talsystem for os (så længe vi begrænser os til processer som bestemmer hvad rækker af tal går mod og ikke tillader endnu yderligere operationer) – ikke at vi den dag i dag har et fast, logisk og simpelt fundament for dem; men man siger jo at fortrolighed fremavler foragt, og vi er alle mere eller mindre fortrolige med det reelle talsystem. Kun meget få af os vil i vores mere klare øjeblikke kunne tro på, at de specielle postulater som nogle logikere har fundet på ville kunne føre til tallene – nej, de fleste af os er af den overbevisning, at de reelle tal simpelthen blot findes og at det har været en interessant, underholdende og vigtig leg at prøve at finde et pænt sæt postulater til at redegøre for dem. Men lad os ikke forvirre os selv – Zenons paradoks står stadig, selv efter 2000 år, for klart i vores erindring til at vi kan føre os selv bag lyset med at vi forstår alt hvad vi kunne ønske os om forholdet mellem det diskrete talsystem og den kontinuerte linie som vi ønsker at modellere. Vi ved, om ikke fra andre steder så fra ikke-standard analysen, at logikerne kan opstille postulater som sætter endnu flere entiteter på den reelle tallinie, men kun meget få af os har ønsket at følge den vej. Det vil kun være retfærdigt at nævne at der er nogle matematikere som betvivler eksistensen af det konventionelle reelle talsystem. Få computerteoretikere vedkender sig kun eksistensen af »de beregnelige tal.«

Opgave 20

Hvad går Zenons paradoks ud på? (Hvis I ikke allerede ved det, så foretag en søgning på internettet og forsøg at forklare det for hinanden.)

Det næste skridt i diskussionen er det komplekse talsystem. Som jeg har læst historien var det Cardano der var den første til at forstå disse tal på en ordentlig vis. I hans *Ars Magna* [4] [5] siger han, »Rent bortset fra den mentale tortur der er involveret i at gange $5-\sqrt{-15}$ med $5-\sqrt{-15}$ for at få $25-(-15)$....« Dermed indså han klart at de samme formelle operationer på symbolerne for komplekse tal ville give meningsfulde resultater. På denne vis blev det reelle talsystem gradvist udvidet til det komplekse talsystem, bortset fra at udvidelsen denne gang krævede at vi opgav egenskaben for velordning af tallene – de komplekse tal kan ikke ordnes på sædvanlig vis.

3 Udover tallet π er et andet eksempel på et trancendent tal tallet e.

4 *Ars Magna* er latin for 'den store kunst', hvilket var titlen på en bog om algebra af Gerolamo Cardano (1501-1576) fra 1545. Blandt andet giver Cardano i denne bog de generelle løsningsformler for ligninger af grad 3 og 4.

Cauchy blev tilsyneladende ledt til teorien om komplekse variable af problemet med at integrere reelle funktioner langs den reelle linie. Han fandt at han ved at bøje integrationsstien ind i det komplekse plan kunne løse reelle integrationsproblemer.

For et par år siden havde jeg fornøjelsen af at undervise på et kursus i komplekse variable. Som det altid sker når jeg fordyber mig i dette emne, gik jeg igen derfra med følelsen af at »Gud skabte universet ud af komplekse tal.« Det er klart at de spiller en central rolle i kvantemekanikken. De er et naturligt redskab inden for mange andre anvendelser, så som elektriske kredsløb, elektriske felter, og så videre.

For at opsummere, fra det at tælle anvendende de Guds-givne naturlige tal foretog vi adskillige udvidelser af ideerne om tal og inkluderede flere elementer. Undertiden blev udvidelserne gjort af æstetiske årsager, og ofte måtte vi opgive nogle egenskaber fra det tidligere talsystem. Dermed endte vi med et talsystem som er urimeligt effektivt, selv inden for matematikken selv; bemærk for eksempel den måde hvorpå vi har løst adskillige talteoretiske problemer omhandlende det oprindelige og højst diskrete talsystem ved at anvende en kompleks variabel.

Fra det ovenstående ser vi altså at et af hovedtemaerne i matematikken er udvidelsen, generalisationen, abstraktionen – de er alle mere eller mindre den samme ting – af velkendte begreber til nye situationer. Men bemærk at i selve processen bliver definitionerne selv subtilt omformet. Af den grund, hvilket ikke er bredt anerkendt, kan gamle beviser for sætninger blive falske beviser. De gamle beviser er ikke længere dækkende for de nyligt definerede ting. Miraklet er at det næsten altid er tilfældet at sætninger forbliver sande; det er altså således et spørgsmål om at reparere beviserne. Det klassiske eksempel er reparationen af Euklids *Elementerne* [4]. Vi har fundet det nødvendigt at tilføje en hel del nye postulater (eller aksiomer, hvis du foretrækker, siden vi ikke længere går op i at skelne imellem dem) for at leve op til moderne standarder for beviser. Men stadig, hvordan kan det gå til at ingen sætning i samtlige tretten bøger nu er falsk? Ikke én sætning er blevet fundet falsk, selvom Euklids beviser nu ofte synes at være det. Og dette fænomen er ikke begrænset til fortiden. Det siges at en tidligere editor af *Mathematical Reviews* engang sagde, at over halvdelen af de nye sætninger der bliver publiceret nu om dage i alt væsentlighed er sande selv om de publicerede beviser er falske. Hvordan kan det forholde sig sådan, hvis matematikken er den rigoristiske deduktion af sætninger fra antagede postulater og tidligere resultater? Vel, det er åbenlyst for enhver som ikke er blændet af autoriteter, at matematik ikke er hvad vores skolelærere sagde det var. Det er tydeligvis noget andet.

Hvad er dette »andet«? Når først man kigger nærmere efter går det op for en, at hvis man var begrænset til aksiomerne og postulaterne så ville man kun kunne udlede meget lidt. Det første store skridt er at introducere nye begreber udledt fra antagelserne; begreber så som trekanter. Søgningen efter passende begreber og definitioner er et af de vigtigste elementer i udførelsen af stor matematik.

Mens vi er ved beviser, så begynder den klassiske geometri med sætningen og forsøger at finde et bevis. Angiveligt var det ikke før end i 1850erne eller deromkring, at det blev tydeligt anerkendt at den modsatte tilgang også var holdbar (omend den undertiden må være blevet anvendt tidligere).

Ofte er det beviset der genererer sætningen. Vi ser hvad vi kan bevise og så gransker vi beviset for at se hvad vi har bevist! Sådanne kaldes også gerne »bevis-genererende sætninger« [6]. Et klassisk eksempel er konceptet om uniform konvergens. Cauchy havde vist at en konvergent følge af led, som hver især var kontinuert, konvergerer til en kontinuert funktion. Men samtidig var det kendt at der fandtes Fourier-rækker af kontinuerte funktioner som konvergerede mod en diskontinuert grænse. Ved en omhyggelig granskning af Cauchys bevis blev fejlen fundet og korrigeret ved at ændre sætningens tese til at lyde »en uniform konvergent følge.«[5]

I nyere tid har vi haft et intenst studie af hvad der kaldes matematikkens fundament – hvilket efter min opfattelse skulle betragtes som matematikkens øverste brystværn og ikke dens fundament. Det er et interessant område, men matematikkens hovedresultater er upåvirkelige af hvad der findes her – vi er simpelthen ikke villige til at opgive særlig meget af matematikken, lige gyldigt hvor ulogisk det kommer til at fremstå på grund af forskningen i dens fundament.

Jeg håber, at jeg har fået illustreret at matematik ikke er hvad det ofte tages for at være, at matematik hele tiden ændrer sig og derfor selv hvis det skulle lykkedes mig at definere hvad det er i dag, så ville definitionen ikke være dækkende i morgen. På lignende vis er det med ideen om stringens – vores standard ændrer sig. Den fremherskende holdning inden for videnskab er at vi ikke er universets centrum, at vores placering ikke er enestående, etc., og på lignende vis er det svært for mig at tro på at vi nu skulle have nået det ultimative inden for stringens. Vi kan altså ikke være sikre på de nu gældende beviser for vores sætninger. I sandhed forekommer det mig, at:

Matematikkens postulater stod ikke
skrevet på de stentavler som Moses
bragte ned fra bjerget Sinai.

Det er nødvendigt at fremhæve dette. Vi begynder med et vagt begreb i vores hjerner, så konstruerer vi forskellige sæt af postulater, og gradvist lægger vi os fast på et bestemt sæt. I denne stringente postulerende tilgang bliver det oprindelige begreb nu udskiftet med det som postulaterne definerer. Dette gør at videre udvikling af begrebet bliver forholdsvist svært og som et resultat heraf tenderer at nedsætte hastigheden af matematikkens evolution. Det er ikke det at den postulerende tilgang er forkert, kun at dens vilkårlighed bør blive klart anerkendt, og at vi bør være forberedte på at ændre postulater når behovet melder sig.

Matematik er menneskeskabt og er derfor tilbøjelig til at blive ændret forholdsvist kontinuerligt af mennesker. Måske blev de oprindelige matematiske kilder påtvunget os, men som vist i det eksempel jeg har anvendt, ser vi at i udviklingen af så simple begreber som tal har vi foretaget valg for de udvidelser som kun var delvist kontrolleret af nødvendighed og i højere grad, forekommer det mig, af æstetik. Vi har forsøgt at gøre matematikken

[5] Der henvises her til et klassisk eksempel fra matematikkens historie på, at selv store matematikere kan begå 'fejl'. Men samtidig er det også, som Hamming påpeger, et eksempel på at der ikke er noget galt med beviset – det beviser blot noget andet end det først antagede.

konsistent og skøn, og ved at gøre det har vi opnået et utroligt antal af succesfulde anvendelse i den virkelige verden.

Ideen om at sætninger følger fra postulaterne er ikke noget der stemmer overens med simple observationer. Hvis vi fandt at Pythagoras sætning ikke fulgte af postulaterne, så ville vi igen forsøge at finde en måde hvorpå vi kunne ændre postulaterne indtil den blev sand. Euklids postulater kom fra Pythagoras sætning, ikke den anden vej rundt. I over tredive år har jeg gået og sagt, at hvis du kom ind på mit kontor og viste mig et bevis for at Cauchys sætning var falsk så ville jeg være meget interesseret, men jeg er overbevist om at vi i den endelige analyse ville ændre antagelserne indtil sætningen var sand. Derfor er der mange resultater i matematikken som er uafhængige af antagelserne og af beviset.

Hvordan bestemmer vi i en »krise« hvilke dele af matematikken vi skal beholde og hvilke vi skal opgive? Brugbarhed er et hovedkriterie, men ofte er det brugbarhed i termer af at skabe mere matematik frem for anvendelse i den virkelige verden! Så meget for min diskussion af matematik.

Opgave 21

a. Hvilke 'fire ansigter' (eller aspekter) tillægger Hamming matematikken?
b. Hvad dækker disse fire ansigter over?
c. Diskuter hvorvidt I finder, at Hamming redegør fyldestgørende for alle fire ansigter. Hvilke eksempler giver han på det fjerde ansigt?
d. Hvor har vi tidligere hørt om et sådant af matematikkens ansigter omhandlende æstetik?

I Hammings følgende redegørelser for matematikkens urimelige anvendelighed inddrager han og henviser løbende til en række matematiske begreber og teorier. Det forventes selvfølgelig ikke, at I er bekendte med disse – mange af dem tilhører traditionelt set universitetsniveau – eller at I til fulde forstår den matematiske baggrund (omend der undertiden vil være forklarende fodnoter). Det der imidlertid er vigtigt er at I ser, at der findes matematiske eksempler og at I derudover forsøger at følge Hammings argumentation i disse redegørelser.

Nogle delvise redegørelser. Jeg vil arrangere mine redegørelser af matematikkens urimelige effektivitet under fire overskrifter.

1. *Vi ser det vi kigger efter.* Ingen bliver overrasket over at verden bliver blålig, hvis vi tager briller på med blåt glas. Jeg foreslår at give nogle eksempler på i hvor høj grad dette også er sandt i moderne naturvidenskab. For at gøre det vil jeg igen krænke en masse udbredte og lidenskabeligt holdte overbevisninger. Men hav tålmodighed med mig.

Jeg udvalgte eksemplerne på videnskabsmænd i den tidligere del med god grund. Pythagoras er efter min overbevisning den første store fysiker. Det var ham der opdagede, at vi lever i det som matematikerne kalder L_2 [[6]] – summen af kvadratet af kateterne i en retvinklet trekant giver kvadratet af hypotenusen. Som jeg sagde tidligere, dette er ikke et resultat af geometriens postulater – det er et af de resultater der formede postulaterne.

[6] Der er tale om et bestemt og ofte anvendt topologisk rum i matematikken.

Lad os dernæst betragte Galileo. For ikke så længe siden forsøgte jeg at forestille mig selv i Galileos sted, som det var dengang, så jeg måske kunne få en ide om hvordan han kom til at opdage loven for faldende legemer. Jeg forsøger at gøre sådanne ting, så jeg kan lære at tænke på samme måde som de gamle mestre – jeg forsøger med vilje at tænke som de muligvis gjorde.

Nuvel, Galileo var en veluddannet mand og mester i skolastiske argumenter. Han vidste hvordan han skulle argumentere for antallet af vinkler på et knappenålshoved, hvordan han skulle argumentere for begge sider af en sag. Han var trænet i denne kunnen i langt højere grad end nogen af os er det i dag. Jeg forstiller mig ham siddende en dag med en let og en tung bold, en i hver hånd, kastende dem stille og roligt op i luften. Han siger så, vejende dem, »Det er klart for enhver, at tunge objekter falder hurtigere end lette – og i alle tilfælde er det også hvad Aristoteles siger.« »Men antag,« siger han til sig selv, værende i det humør, »at et legeme i frit fald gik i to stykker. Selvfølgelig ville de to stykkers fart aftage øjeblikkeligt indtil de faldt med rette hastighed. Men antag endvidere, at det ene stykker nu rører det andet. Ville de da igen være et stykke og så øge hastigheden? Antag, at jeg bandt de to stykker sammen. Hvor tæt må jeg binde dem for at gøre dem til et stykke? En tynd snor? Et reb? Hvornår er de to stykker et?«

Des mere han tænkte over det – og des mere man tænker over det – des mere urimeligt bliver spørgsmålet om hvornår de to legemer bliver et. Der er simpelthen ikke noget rimeligt svar til spørgsmålet om hvordan et legeme ved hvor tungt det er – om det er i et stykke, to, eller flere. I og med at faldende legemer gør noget, er den eneste mulige ting at de alle falder med samme hastighed – med mindre de påvirkes af andre kræfter. Der er intet andet de kan gøre. Han har måske senere udført nogle eksperimenter, men jeg mistænker stærkt at hvad jeg forestillede mig rent faktisk fandt sted. Senere fandt jeg en lignende fortælling i en bog af Pólya [7]. Galileo fandt ikke sin lov ved at eksperimentere, men ved simpel, ligefrem tankevirksomhed, ved skolastisk ræsonneren.

Jeg ved godt at lærebøgerne ofte præsenterer loven for faldende legemer som en eksperimentel observation; jeg hævder derimod at det er en logisk lov, en konsekvens af hvordan vi plejer at tænke.

Newton, som man læser i bøgerne, udledte den omvendte kvadratlov [7] fra Keplers love, selvom de ofte præsenterer det omvendt; fra den omvendte kvadratlov udleder lærebøgerne Keplers love. Men hvis man tror på noget sådant som energiens bevarelse og mener at vi lever i et tre-dimensionalt euklidisk rum, [8] på hvilken anden måde kunne et symmetrisk central-kraft legeme falde af? Målinger af eksponenten ved eksperimenter er i høj grad forsøg på at finde ud af om vi lever i et euklidisk rum, og ikke en test af den omvendte kvadratlov overhovedet.

---

[7] I fysik er en omvendt (eller invers) kvadratlov en vilkårlig fysisk lov sigende at en given fysisk størrelse eller kraft er omvendt proportional med kvadratet af afstanden fra kilden til den fysiske størrelse.

[8] Begrebet 'euklidisk rum' dækker over planen og rummet, som vi traditionelt tænker dette i den euklidiske geometri. Den ungarske matematiker János Bolyai (1802-1860) udviklede i første halvdel af 1800-tallet en absolut geometri, hvori nogle af axiomerne fra den klassise euklidiske geometri ikke nødvendigvis gælder, f.eks. parallelaxiomet. Sammen med andre samtidige arbejder markerer dette begyndelsen til den ikke-euklidiske geometri. Bolyais indsats blev dog først anerkendt omkring 1870.

Men hvis du ikke bryder dig om disse to eksempler, så lad mig rette opmærksomheden mod den mest højpriste lov i moderne tider, usikkerhedsprincippet [[9]]. For nylig skete det at jeg blev involveret i at skrive en bog om *Digitale Filtre* [8], på et tidspunkt hvor jeg kendte meget lidt til emnet. Som et resultat heraf stillede jeg tidligt spørgsmålet, »Hvorfor skal jeg foretage hele analysen i termer af Fourier-integraler? [[10]] Hvorfor er de det naturlige redskab for dette problem?« Jeg fandt snart ud af, som mange af jer allerede ved, at eigenfunktionerne af translationen er de komplekse eksponentialer [[11]]. Hvis man ønsker tidsinvarians, og det gør fysikere og ingeniører med sikkerhed (således at et eksperiment udført i dag eller i morgen vil give samme resultat), så bliver man ledt til disse funktioner. Ligeledes, hvis man tror på linearitet [[12]] så er de igen eigenfunktionerne. I kvantemekanikken er kvantestadierne absolut additive; de er ikke blot en bekvem lineær approximation. Derfor er de trigonometriske funktioner eigenfunktionerne som man har brug for både i teorien om digitale filtre og i kvantemekanikken, for blot at nævne to steder.

Når man nu ser disse eigenfunktioner ledes man på naturlig vis til at repræsentere adskillige funktioner, først som et tælleligt antal og dernæst som et ikke-tælleligt antal af dem – med andre ord Fourier-rækkerne og Fourier-integralet [[13]]. Det er en sætning i teorien om Fourier-integraler at variabiliteten af funktionen ganget med variabiliteten af dens transformation overskrider en fastlagt konstant, i en notation angivet som $1/2\pi$. Det fortæller mig, at man i ethvert lineært, tidsinvariant system nødvendigvis må finde et usikkerhedsprincip. Størrelsen af Plancks konstant [[14]] er et spørgsmål om den detaljerede identification af de variable med integraler, men uligheden skal optræde.

For et andet eksempel på noget som ofte har været opfattet som en opdagelse i fysikken, men som viser sig at være blevet placeret der af os selv, henleder jeg jeres opmærksomhed på det velkendte faktum at fordelingen af fysiske konstanter ikke er uniform; sandsynligheden for at en tilfældig fysisk konstant har det begyndende ciffer 1, 2 eller 3 er omkring 60%, og begyndende cifre 4, 5, 6, 7, 8 og 9 optræder selvfølgelig kun i 40% af tilfældene. Denne fordeling gør sig gældende for mange typer af tal, heriblandt fordelingen af koefficienterne i en potensrække [[15]]

[9] Heisenbergs usikkerhedsprincip udtaler sig om en fundamental grænse for nøjagtigheden med hvilken vi kan udtale os om par af fysiske egenskaber, som f.eks. position og bevægelse af en partikel: des mere nøjagtigt vi ønsker at bestemme dens bevægelse, des mere unøjagtig bliver vores måling af dens position og omvendt. Princippet er opkaldt efter fysikeren Werner Heisenberg (1901-1976).

[10] Der refereres her til en bestemt matematisk transformation opkaldt efter matematikeren Joseph Fourier (1768-1830).

[11] Begrebet 'eigenfunktionerne' refererer til en bestemt slags matematiske funktioner hentet fra den lineære algebra.

[12] Begrebet 'linearitet' dækker i matematikken over additivitet og proportionalitet. For eksempel siges en funktion $f(x)$ at være lineær, hvis den opfylder, at $f(x+y) = f(x) + f(y)$ og at $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ for alle tal α.

[13] Igen en reference til matematiske begreber opkaldt efter Joseph Fourier.

[14] I fysikken angiver 'Plancks konstant', også kaldet h, grænsen for hvornår den klassiske mekanik må erstattes af en kvantemekanisk naturbeskrivelse, hvilket den må når virkningen der knytter sig til et fænomen er af samme størrelsesorden som h eller mindre. Konstanten er opkaldt efter fysikeren Max Planck (1858-1947).

[15] Et eksempel på en simpel potensrække er: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$, hvor x er en variabel og a_i er koefficienter.

med udelukkende én singularitet på konvergenscirklen [16]. En nærmere undersøgelse af dette fænomen viser at det i hovedsagen er et produkt af den måde hvorpå vi bruger tal.

Efter at have givet fire vidt forskellige eksempler på ikke-trivielle situationer, hvor det viser sig at det oprindelige fænomen kommer af de matematiske redskaber vi benytter og ikke fra den virkelige verden, er jeg nu klar til eftertrykkeligt at foreslå at meget af det vi ser skyldes de briller vi tager på. Selvfølgelig strider dette imod meget af det som du er blevet lært, men betragt argumenterne nøje. Man kan sige at det var eksperimenterne der påtvang os modellen, men jeg antyder at des mere man tænker over de fire eksempler des mere ubekvem ved det kan man blive. Det er ikke vilkårlige teorier som jeg har udvalgt, men teorier som er centrale for fysikken.

De senere år var det Einstein der mest højrøstet proklamerede simpliciteten af fysikkens love, og som gjorde brug af matematik i en sådan grad at han populært blev kendt som en matematiker. Når man ser nærmere på hans artikel om den specielle relativitetsteori [9] får man fornemmelsen af, at man har at gøre med en skolastisk filosofs tilgang. Han vidste på forhånd hvordan hans teori skulle se ud, og han udforskede teorierne ved hjælp af matematiske redskaber, ikke faktiske eksperimenter. Han var så sikker på korrektheden af relativitetsteorierne, at når eksperimenter blev udført for at checke dem, så var han ikke synderligt interesseret i udfaldet og sagde, at udfaldet måtte bekræfte hans teorier og hvis ikke så var eksperimenterne forkerte. Og mange folk er da også af den opfattelse at de to relativitetsteorier baserer sig mere på et filosofisk fundament end på faktiske eksperimenter.

Dermed er mit første svar på det antydede spørgsmål om matematikkens urimelige effektivitet at vi tilgår situationerne med et intellektuelt apparatur, således at vi i mange tilfælde kun kan finde det som vi gør. Det er både så simpelt og så forfærdeligt. Hvad vi er blevet lært om at fundamentet for naturvidenskaben er eksperimenter i den virkelige verden er kun delvist sandt. Eddington gik videre end som så; han påstod at et tilstrækkeligt vist sind kunne udlede hele fysikken. Jeg antyder blot at en overraskende stor del udledes således. Eddington gav en storartet lignelse til at illustrere hans pointe. Han sagde, »Nogle mænd stod til havs med et net for at fiske, og efter at have undersøgt deres fangst konkluderede de at der fandtes en mindstestørrelse for fiskene i havet.«

Opgave 22
Hvordan skal Eddingtons lignelse forstås? Og hvad er det Hamming ønsker at illustrere med den?

2. *Vi udvælger arten af matematik vi bruger.* Matematik fungerer ikke altid. Da vi fandt at skalarer ikke fungerede for kræfter, opfandt vi en ny matematik, vektorer. Og hvis vi går videre, så opfandt vi tensorer. I en bog som jeg for nyligt har forfattet [10] anvendes konventionelle heltal som betegnelser, og reelle tal anvendes for sandsynligheder; men derudover følger al aritmetik og algebra som optræder i bogen, og der er meget af begge dele, den regel at

$$1 + 1 = 0.$$

[16] Et mål for den størrelse som en potensrække vil gå imod udtrykt i termer af en 'radius'.

Dermed er min anden forklaring, at vi udvælger den matematik som passer til situationen, og at det ganske enkelt ikke er sandt at den samme matematik fungerer alle steder.

3. *Relativt set besvarer videnskab kun få spørgsmål.* Vi har den illusion at naturvidenskaben ligger inde med svarene på de fleste af vores spørgsmål, men sådan forholder det sig ikke. Fra de tidligste tider må mennesket have grublet over hvad Sandhed, Skønhed og Retfærdighed er. Men så vidt jeg kan se har naturvidenskaben ikke bidraget med noget til svarene og ej heller forekommer det mig at den vil bidrage det store i den nærmeste fremtid. Så længe vi gør brug af en matematik i hvilken helet er summen af delene, synes det ikke sandsynligt at få matematikken til at spille en rolle i undersøgelsen af disse tre berømte spørgsmål.

Selvfølgelig, for at generalisere, falder næsten alle vores oplevelser i denne verden ikke under naturvidenskabens og matematikkens domæne. Ydermere ved vi (eller det tror vi i det mindste) fra Gödels sætning, at der er klare grænser for hvad ren logisk manipulation af symboler kan føre til, der er grænser for matematikkens domæne [[17]]. Det har således hvad angår naturvidenskabsfolkene været en tillidssag at verden kunne forklares i de simple termer som matematik kan håndtere. Når man tænker over hvor meget naturvidenskaben ikke har kunnet besvare indser man, at vores succeser ikke er så imponerende som de ellers kunne synes.

4. *Menneskets evolution gav anledning til modellen.* Jeg har allerede berørt spørgsmålet om menneskets evolution. Jeg bemærkede at i selv de tidligste livsformer må der have været frø af vores nuværende evne til at danne og følge lange rækker af tæt ræsonneren. Nogle folk [11] har yderligere påstået at den Darwinistiske evolution på naturlig vis ville udvælge de konkurrerende livsformer til overlevelse som besad de bedste mentale modeller for virkeligheden – »bedst« i forbindelse med overlevelse og formering. Der er ingen tvivl om at der er noget sandt i dette. For eksempel kan vi sagtens magte at tænke over verden når den i størrelse er at sammenligne med os selv og vores egne primitive sanser, men når vi skal betragte ting som enten er meget små eller meget store så er vores tankevirksomhed i store vanskeligheder. Det forekommer at vi ikke er i stand til at tænke på passende vis når det angår ekstremer udover normal størrelse.

Ligesom der er visse dufte hunde kan lugte som vi ikke kan, og lyde som hunde kan høre som vi ikke kan, således er der også bølgelængder af lys som vi ikke kan se og smage vores smagssans ikke kan registrere. Hvorfor er det så, givet at vores hjerner er forbundet på den måde de nu er, at bemærkningen, »Måske er der tanker vi ikke kan tænke« overrasker os? Evolutionen, indtil nu, kan have blokeret os fra at tænke i bestemte baner; der kunne findes utænkelige tanker.

Hvis du ihukommer at moderne naturvidenskab kun er omkring 400 år gammel, og at der har levet fra 3 til 5 generationer per århundrede, så har

[17] Gödels sætning siger, at der i et formelt system altid vil eksistere udsagn, propositioner P, for hvilke hverken P eller ¬P (ikke P) kan bevises. I og med at man i matematikken gerne er af den opfattelse, at der om et arbitrært udsagn P må gælde, at enten P eller ¬P er sand (lad os sige at det er P der er sand), må der således ifølge sætningen eksistere sande udsagn P, som ikke er beviselige sætninger indenfor systemet. Sætningen blev bevist af matematikeren Kurt Gödel (1906-1978) i 1930 ved en konference i Königsberg. For en kort diskussion af dette se evt. Jankvist (2011).

der højst været 20 generationer siden Newton og Galileo. Hvis du vælger 4.000 år til at være alderen på videnskab generelt, så får du en øvre grænse på 200 generationer. Hvis vi betragter de effekter af evolutionen som vi søger efter via udvælgelse af små tilfældige variationer, så forekommer det mig ikke at evolutionen kan forklare mere end bare en lille del af matematikkens urimelige effektivitet.

Opgave 23
Opsummer og diskuter Hammings fire delvise svar på matematikkens urimelige anvendelighed.

Konklusion. På baggrund af det ovenstående er jeg både tvunget til at konkludere at matematikken er urimeligt effektiv og til at konkludere, at alle mine redegøreser tilsammen simpelthen ikke er nok til at redegøre for det som jeg havde sat mig for. Jeg tror at vi – hvilket hovedsageligt vil sige dig – må fortsætte med at forsøge at forklare hvorfor den logiske side af videnskaben – hvilket hovedsageligt vil sige matematikken – er det passende redskab til udforskning af universet som vi pt forstår det. Jeg har en mistanke om, at mine redegørelser langt fra er lige så gode som de tidlige grækeres, der for den materielle side af spørgsmålet sagde at universets natur bestod af jord, ild, vand og luft. Den logiske side af universets natur kræver yderligere forklaring.

Referencer

1. E. P. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Comm. Pure Appl. Math., 13 (Feb. 1960).
2. R. Courant and H. Robbins, What Is Mathematics? Oxford University Press, 1941.
3. L. Kronecker, Item 1634, in On Mathematics and Mathematicians, by R. E. Moritz.
4. Euclid, Euclid's Elementer, T. L. Heath, Dover Publications, New York, 1956.
5. G. Cardano, The Great Art of Rules of Algebra, transl. by T. R. Witmer, MIT Press, 1968, pp. 219-220.´
6. Imre Lakatos, Proofs and Refutations, Cambridge University Press, 1976, p. 33.
7. G. Pólya, Mathematical Methods in Science, MAA, 1963, pp. 83-85.
8. R. W. Hamming, Digital Filters, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.
9. G. Holton, Thematic Origins of Scientific Thought, Kepler to Einstein, Harvard University Press, 1973.
10. R. W. Hamming, Coding and Information Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
11. H. Mohr, Structure and Significance of Science, Springer-Verlag, 1977.

I lyset af vores tidligere læsning af Booles *The Laws of Thought...* er der som minimum to ting vi kan bide mærke i ved vores læsning af Hammings artikel om matematikkens urimelige anvendelighed. For det første siger Hamming:

> Fra det ovenstående ser vi altså at et af hovedtemaerne i matematikken er udvidelsen, generalisationen, abstraktionen – de er alle mere eller mindre den samme ting – af velkendte begreber til nye situationer. (Hamming; 1980, s. 85, oversat til dansk)

Dette så vi jo i nogen grad et eksempel på i Booles tekst, hvor han udviklede sin logiske algebra baseret på inspiration fra standard aritmetisk algebra.

En anden ting som bør falde os i øjnene er Hammings eksempel i sin 2. delvise redegørelse (side 44), hvor han nævner reglen

$$1 + 1 = 0.$$

Dette er jo tæt på Booles regel – blot med en lille forskel (hvilken?). Den sammenhæng, som Hamming nævner denne regel i er i forbindelse med såkaldt matematisk kodningsteori, som han selv var grundlægger af, og matematisk informationsteori, som blev grundlagt af matematikeren Claude Shannon.[18]

Og netop Shannon er den person vi skal beskæftige os med i næste kapitel, hvor vi skal studere uddrag af et af hans tidligere arbejder – et arbejde hvor han i høj grad også gør brug af, og som han baserer på, ovennævnte regel af Boole.

[18] Kodningsteoriens tidlige historie og Hamming og Shannons roller heri er f.eks. beskrevet i Jankvist (2008a).

4 Shannons brug af Boolsk algebra

Claude Elwood Shannon (1916-2001)

4.1 Kort biografi

Claude E. Shannon modtog i 1940 sin ph.d.-grad i matematik ved Massachusetts Institute of Technology (MIT) for et arbejde omhandlende brugen af matematik i genetik. Inden da var han bachelor i matematik og elektroteknik fra University of Michigan.

Fra 1941-1972 var Shannon tilknyttet Bell Telephones Laboratories (Bell Labs) i New Jersey som forskningsmatematiker, og det var herfra han i 1948 udgav et af sine mest berømte arbejder og begyndelsen til en helt ny disciplin inden for matematikken, den såkaldte informationsteori, der beskæftiger sig med matematisk kommunikation og kodning. I 1958 blev han udnævnt til Donner Professor of Science ved MIT. Shannon beskæftigede sig også med kunstig intelligens, herunder specielt skakprogrammer, og udgav i 1956 en artikel om den såkaldte universelle Turing-maskine.

Shannon var kendt for at holde sig for sig selv, men blev efter sigende ofte set kørende rundt på sin ethjulede cykel på Bell Labs, undertiden samtidigt jonglerende, til stor gene for sine kollegaer. Shannon skulle efter eget udsagn have arbejdet på en motoriseret kængurustylte, hvilket han hævdede skulle afløse den af kollegaerne så frygtede ethjulede cykel.

4.2 Optakt til Shannons artikel

Før vi kaster os ud i at studere Shannons artikel fra 1938, så lad os lige rekapitulere et par af pointerne fra vores studier af Booles *The Laws of Thought…*.

Boole udviklede som vi så et system af symboler $(\times, +)$ repræsenterende operationer på klasser som blev symbolsk repræsenteret ved bogstaver $(x, y, z,$ etc.). Hvis vi betragter Booles klasser som matematiske mængder, så vi at hans logiske multiplikation (xy) svarer til fællesmængdedannelse og hans logiske addition $(x+y)$ svarer til foreningsmængdedannelse i vores moderne forståelse af disse to operationer. Anvendende disse definitioner var vi vidner til at Boole udviklede en række love for sin 'logiske algebra', hvoraf mange også er sande i standard aritmetisk algebra. Andre love derimod kunne ikke overføres til standard algebra, eller var kun sande under bestemte betingelser. En sådan var loven $x^2 = x$, også kaldet *idempotent loven*. Som bemærket af Boole holder denne lov kun i standard algebra når $x = 0$ eller $x = 1$. For en vilkårlig algebra knytter Boole følgende kommentar til sine betragtninger:

> Lad os da forestille os en algebra, hvor symbolerne x, y, z etc. kan antage værdierne 0 og 1 og kun disse værdier. Lovene, axiomerne og processerne i en sådan algebra vil i hele deres udstrækning være identiske med lovene, axiomerne og processerne i en logisk algebra. (Boole; 1854, s. 47, oversat til dansk)

Små halvtres år efter Booles publikation af *The Laws of Thought…* tog en anden matematiker, amerikaneren Edward V. Huntington (1874-1952) teten op efter Boole i sine studier af algebraisk logik og axiomatiseringen af denne (jf. tidligere givne otte axiomer for en Boolsk algebra, side 30). I en artikel fra 1904 definerede Huntington addition og multiplikation, hvilket han angav ved symbolerne $\oplus$ og $\odot$, for en to-værdi algebra på følgende vis (Huntington; 1904):[1]

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

For Huntington udgjorde disse tabeller et fuldstændig abstrakt og meningsløst system, hvorimod Boole anskuede dem som udsagn om klasser – eller mængder; f.eks. at $1 + 1 = 1$ udsiger at foreningen af den universale mængde forenet med sig selv giver den universale mængde. Og Huntington var ikke den eneste der betragtede Boolsk algebra som en abstraktion, i 1914 deklarerede den franske matematiker Louis Couturat (1868-1914) følgende:

[1] Dette modsvarer i nogen grad vore dages binære aritmetik, bortset fra den detalje at Huntington definerer $1 \oplus 1 = 1$, hvor man i den binære aritmetik har $1 \oplus 1 = 0$, da man regner modulus 2 (jf. også Hammings eksempel med $1 + 1 = 0$ i hans 2. delvise redegørelse). For en kort introduktion på dansk til binær aritmetik, se Jankvist (2008a).

> Den formelle værdi af denne kalkulus og interessen af den for matematikere er fuldstændig uafhængig den fortolkning den gives og af dens anvendelse til løsning af logiske problemer. Kort sagt, vi skal ikke diskutere den som logik, men som algebra. (Couturat; 1914, s. 1, oversat til dansk)

Imidlertid skulle man ikke mere end et par årtier længere ind i det tyvende århundrede før den Boolske algebra fandt sine anvendelser til løsning af problemer udenfor matematikken. Vi skal nu se nærmere på et af de allermest kendte eksempler på dette, nemlig Shannons anvendelse af Boolsk algebra til design og analyse af elektriske kredsløb.

Efter sin bachelor ved University of Michigan i 1936 begyndte Shannon ved MIT, hvorfra han i 1940 fik sin ph.d. I 1938 indleverede han her sit speciale (master's thesis): *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits* (Shannon; 1938a). Shannon fik ideen til dette arbejde qua en introduktion til symbolsk algebra, som han havde modtaget på et filosofikursus. Dekanen for ingeniørvidenskab på MIT, Vannever Bush (1890-1874), var tilstrækkeligt imponeret over Shannons speciale til at sponsorere dets publikation som en artikel i et ingeniør-tidsskrift (Shannon; 1938b). Om sit arbejde med og ide til dette arbejde udtalte Shannon i 1987 følgende i et interview med *Omni Magazine*:

> Det er ikke så meget det at en ting er 'åben' eller 'lukket', det 'ja' eller 'nej' som du nævner. Den virkelige pointe er at to ting i serie er beskrevet med ordet 'og' i logikken, så du ville sige dette 'og' dette, mens to ting i parallel er beskrevet ved ordet 'eller'. Ordet 'ikke' hører sammen med den bagerste kontakt i et relæ snarere end den forreste kontakt. Der er kontakter som lukker, når du betjener et relæ, og der er andre kontakter som åbner, så ordet 'ikke' er relateret til dette aspekt af relæer. Alle disse ting til sammen danner en mere kompleks forbindelse mellem Boolsk algebra, eller symbolsk logik, og relæ-kredsløb.
>
> De folk der havde arbejdet med relæ-kredsløb var selvfølgelig klar over, hvordan man lavede disse ting. Men de havde ikke den Boolske algebras matematiske begrebsapparat til at hjælpe dem og til at lave dem på effektiv vis. [...]
>
> De var alle udmærket klar over det simple faktum, at hvis du har to kontakter i serie skal begge være lukkede for at lave en forbindelse igennem. Eller hvis de er i parallel, så skabes der forbindelse hvis en hvilken som helst af de to er lukket. De vidste det på denne måde, men de nedskrev ikke ligninger med plus og gange, hvor plus er som en parallel forbindelse og gange er som en serie forbindelse. (Sloane & Wyner; 1993, s. xxxvi)

Og det var det der var Shannons væsentligste bidrag; en matematisk og logisk beskrivelse af kredsløbsdesign ved brug af Boolsk algebra. Netop derfor revolutionerede Shannons arbejde designet af de kontakter og relæer der i dag danner basis for den binære aritmetik anvendt i f.eks. moderne computer-hardware.

Opgave 24
Foretag en søgning på internettet og find ud af, hvad følgende begreber dækker over:

a. Relæ (på engelsk: relay).
b. Kontakt (på engelsk: switch).
c. Kredsløb (på engelsk: circuit).

d. Find også billeder af relæer, kontakter og kredsløb.

4.3 Shannons 1938-artikel

En symbolsk analyse af relæ- og kontakt-kredsløb

Claude E. Shannon

I. Introduktion

I komplekse elektriske systemers kontrol- og sikkerhedskredsløb er det ofte nødvendigt at lave indviklede sammenkoblinger af relæer og kontakter. Eksempler på sådanne kredsløb forekommer i automatiske telefonomstillinger, udstyr til industriel motorkontrol og i næsten enhver form for kredsløb designet til automatisk at foretage komplekse operationer. I denne artikel vil der blive foretaget en matematisk analyse af visse af egenskaberne ved sådanne netværk. Speciel opmærksomhed vil blive givet til problemet omhandlende netværkssyntese. Givet visse karakteristika skal der findes et kredsløb som inkorporerer samtlige af disse. Løsningen af denne type problem er ikke entydig og metoderne til bestemmelse af disse særlige kredsløb som kræver det mindste antal af relæer og kontakter vil blive studeret. Metoder til bestemmelse af et vilkårligt antal ækvivalente kredsløb til et givet kredsløb med hensyn til alle dets fungerede karakteristika vil også blive beskrevet. Det vil blive vist at adskillige af de velkendte teoremer omhandlende impedans-netværk har omtrent tilsvarende teoremer i relæ-kredsløb. [...]

Angrebsmetoden til disse problemer kan beskrives kort som følgende: ethvert kredsløb repræsenteres ved en mængde ligninger, hvor ligningernes led svarer til de enkelte kredsløbs relæer og kontakter. En calculus [[2]] udvikles til manipulation af disse ligninger ved brug af simple matematiske processer, de fleste af hvilke svarer til sædvanlige algebraiske algorismer. Det vises at denne calculus svarer præcis til den der bruges om propositioner [udsagn] i studiet af symbolsk logik. For syntese-problemet opskrives de ønskede karakteristika først som et system af ligninger, hvorefter ligningerne manipuleres på en form som repræsenterer det mest simple kredsløb. Kredsløbet kan derefter tegnes direkte på baggrund af ligningerne. Med denne metode er det altid muligt at finde det mest simple kredsløb kun indeholdende serie- og parallel-forbindelser, og i nogle tilfælde det mest simple kredsløb indeholdende enhver type af forbindelser.

Vores notation er hovedsageligt taget fra symbolsk logik. Af de mange systemer i almindelig brug har vi valgt det som synes mest simpelt og som leder tanken hen på vores fortolkninger. En del af vores fraseologi, så som knude, net, delta, Y-forbindelse, etc. er lånt fra almindelig netværksteori for simple begreber i kontakt kredsløb.

[2] Ordet 'calculus' bruges her i dets mest generelle betydning og referer til en metode eller et system til beregning. På engelsk benyttes ordet 'calculus' ofte også om den gren af matematikken som hedder 'infinitesimalregning' på dansk og som dækker over differential- og integralregning, men det er altså ikke den betydning ordet bruges i her.

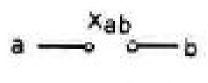
Opgave 25

a. Hvad er ifølge Shannon selv formålet med den undersøgelsen i hans artikel?
b. Hvad dækker ordet 'impedans' i fysikken over? (Foretag evt. en søgning på internettet.)
c. Matematisk 'netværksteori', som Shannon henviser til, bygger traditionelt set på matematisk *grafteori*. Find ud af hvad det grafteoretiske begreb 'en knude' (på engelsk: 'a node') dækker over. (Foretag evt. en søgning på internettet.)

I det følgende sætter Shannon scenen for sin behandling af elektriske kredsløb ved at indføre en matematisk notation for dette. Læg specielt mærke til hvordan de to operationer addition (+) og multiplikation (·) kommer i spil og fortolkes i termer af kredsløb (jf. figurerne 4.1, 4.2 og 4.3).

II. Serie-parallelle to-terminale kredsløb
Fundamentale definitioner og postulater

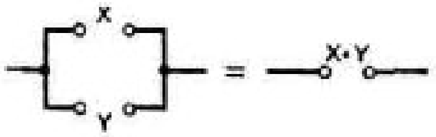
Vi skal begrænse vores behandling af kredsløb til at omfatte dem som kun indeholder relæer og kontakter, hvorfor kredsløbet til et vilkårligt givet tidspunkt må være enten åbent (uendelig impedans) eller lukket (nul impedans). Lad os associere et symbol X_{ab}, eller mere simpelt X, med terminalerne a og b. Denne variabel, en funktion af tiden, vil blive kaldt for hindringen af to-terminal kredsløbet $a - b$. Symbolet 0 (nul) vil blive brugt til at repræsentere hindringen af et lukket kredsløb og symbolet 1 (enhed) til at repræsentere hindringen af et åbent kredsløb. Således er $X_{ab} = 1$ når $a - b$ er åben og $X_{ab} = 0$ hvis lukket. To hindringer X_{ab} og X_{cd} siges at være lige hvis, når kredsløbet $a - b$ er åbent, også kredsløbet $c - d$ er åbent, og når $a - b$ er lukket, $c - d$ er lukket. Lad nu symbolet $+$ (plus) være defineret til at betyde serie-forbindelsen af det to-terminale kredsløb, hvis hindringer er adderet [lagt sammen]. Altså, $X_{ab} + X_{cd}$ er hindringen af kredsløbet $a - b$, når c og d er forbundet. Ligeledes vil produktet af de to hindringer $X_{ab} \cdot X_{cd}$, eller mere kompakt $X_{ab}X_{cd}$, være defineret til at betyde hindringen af kredsløbet dannet ved parallel-forbindelse af kredsløbene $a - b$ og $c - d$. Et relæ eller en kontakt vil blive repræsenteret i et kredsløb ved symbolet i Figur 1 [4.1], hvor bogstavet er den tilsvarende hindringsfunktion. Figur 2 [4.2] viser fortolkningen af plus-tegnet og Figur 3 [4.3] fortolkningen af gange-tegnet. Dette valg af symboler gør manipulation af hindringer meget lig den almindelige numeriske algebra.



Figur 4.1 Symbol for hindringsfunktionen.

En af Shannons hovedideer i anvendelsen af den symbolske Boolske algebra i relæ- og kontakt-kredsløb lå, som tidligere nævnt, i det faktum at der kun er to mulige stadier får sådanne kredsløb, åbent eller lukket – en situation netop kendetegnet ved Booles specielle algebra på to symboler, 0 og 1.

Figur 4.2 Fortolkning af addition.



Figur 4.3 Fortolkning af multiplikation.

Med udgangspunkt i de ovenstående definitioner er det klart at følgende postulater vil gælde:

Postulater

1.	*a.*	$0 \cdot 0 = 0$	Et lukket kredsløb i parallel med et lukket kredsløb er et lukket kredsløb.
	b.	$1 + 1 = 1$	Et åbent kredsløb i serie med et åbent kredsløb er et åbent kredsløb.
2.	*a.*	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	Et åbent kredsløb i serie med et lukket kredsløb i vilkårlig rækkefølge (dvs. hvad-enten det åbne kredsløb er til højre eller venstre for det lukkede kredsløb) er et åbent kredsløb.
	b.	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	Et lukket kredsløb i parallel med et åbent kredsløb i vilkårlig rækkefølge er et lukket kredsløb.
3.	*a.*	$0 + 0 = 0$	Et lukket kredsløb i serie med et lukket kredsløb er et lukket kredsløb.
	b.	$1 \cdot 1 = 1$	Et åbent kredsløb i parallel med et åbent kredsløb er et åbent kredsløb.

4. Til et vilkårligt givet tidspunkt er enten $X = 0$ eller $X = 1$.

Disse er tilstrækkelige til at frembringe alle de teoremer som vil blive brugt i forbindelse med kredsløb der kun indeholder serie- og parallel-forbindelser. Postulaterne er arrangeret i par for at understrege dualiteten i forholdet mellem additions- og multiplikationsoperationerne samt størrelser nul og én. Det vil sige, at hvis nullerne udskiftes med enere i nogle af a-postulaterne og multiplikationerne med additioner og vice versa, vil det resultere i de tilsvarende b-postulater. Dette faktum er af stor vigtighed. Det giver hvert teorem et dualt teorem, hvorfor det derfor kun er nødvendigt at bevise det ene for at etablere begge. Det eneste af disse postulater der adskiller sig fra den almindelige algebra er $1b$. Imidlertid muliggør det væsentlige simplifikationer i manipulationen af disse symboler.

Opgave 26

a. Overbevis jer om, at hvad Shannon siger om de duale teoremer er sandt – altså at b'erne kan fås fra a'erne ved at udskifte 0 med 1 og plus (+) med gange (·).
b. Redegør for at den aritmetiske version af Shannons postulater, som givet her ovenfor, rent faktisk er identisk med Huntingtons to-værdig model af Boolsk algebra (se side 50).

Shannon fortsætter nu med at give en række teoremer (et andet ord for matematiske sætninger), baseret på de ovenfor givne postulater.

Teoremer
I dette afsnit vil der blive givet et antal af teoremer styrende for kombinationen af hindringer. I og med at ethvert af teoremerne kan bevises ved en meget simpel metode vil beviserne ikke blive givet bortset fra et illustrativt eksempel. Bevismetoden er den såkaldte "perfekt induktion", dvs. verifikation af teoremet for alle mulige tilfælde. Da vi ifølge Postulat 4 har at de variable er begrænset til værdierne 0 og 1 er dette en simpel opgave. Nogle af teoremerne kan bevises mere elegant ved at benytte tidligere teoremer, men metoden med perfekt induktion er så universal at den formentlig er at foretrække.

(1a) $X + Y = Y + X$,
(1b) $XY = YX$,
(2a) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$,
(2b) $X(YZ) = (XY)Z$,
(3a) $X(Y + Z) = XY + XZ$,
(3b) $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$,
(4a) $1 \cdot X = X$,
(4b) $0 + X = X$,
(5a) $1 + X = 1$,
(5b) $0 \cdot X = 0$.

For eksempel at bevise Teorem 4a, bemærk at X enten er 0 eller 1. Hvis det er 0, vil teoremet følge af Postulat $2b$; hvis 1, vil det følge af Postulat $3b$. Teorem $4b$ følger nu af dualitetsprincippet ved at udskifte 1 med 0 og · med +.

En måde at gøre den 'perfekte induktion' mere overskuelig på er ved at opstille en såkaldt sandhedstabel, hvilket her er gjort for Teorem 3b:

X	Y	Z	YZ	$X+Y$	$X+Z$	$X+YZ$	$(X+Y)(X+Z)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Opgave 27
Bevis Teorem 3b ved at udfylde ovenstående sandhedstabel og verificere at kolonnerne under udtrykkene $X + YZ$ og $(X + Y)(X + Z)$ er identiske.

Opgave 28
Bevis de resterende af teoremerne ved brug af den såkaldte "perfekte induktion" og dualitetsprincippet. Det er selvfølgelig tilladt at benytte teoremerne, når man først har bevist dem, i efterfølgende beviser for andre teoremer:

a. 1a og 1b.

b. 2a og 2b.

c. 3a.

d. 4b.

e. 5a og 5b.

> Grundet de associative love (2a og 2b) kan paranteser nu undlades i en sum eller et produkt af flere led uden af føre til tvetydighed. [...]
>
> Den distributive lov (3a) gør det muligt at "gange ud" produkter og faktorisere summer. Den duale af dette teorem, (3b), er imidlertid ikke sand i numerisk algebra.
>
> Vi skal nu definere en ny operation, som vi skal kalde negation. Den negative [3] af hindringen X vil blive skrevet som X' og er defineret til at være en variabel, som er lig 1 når X er lig 0, og er lig 0 når X er lig 1. Hvis X er hindringen af tænd-kontakterne i et relæ, så er X' hindringen af sluk-kontakterne i samme relæ. Definitionen af den negative af en hindring giver de følgende teoremer:
>
> (6a) $X + X' = 1,$
> (6b) $XX' = 0,$
> (7a) $0' = 1,$
> (7b) $1' = 0,$
> (8) $(X')' = X.$

Opgave 29
Bevis de ovenstående teoremer (6a, 6b, 7a, 7b, 8).

Opgave 30
Hvilke af Shannons teoremer (1 til 8) kan vi genfinde hos Boole? Og hvor?

Bemærk, at Shannons kommentar for Teorem 3a og 3b er den sammen som vi allerede har behandlet i slutningen af kapitel 2 om Boole.

Shannon fortsætter nu med at diskutere analogien af ovenstående system med det som han kalder 'calculussen for propositioner'. Proposition betyder her 'udsagn' og det vil sige, som nævnt i slutningen af kapitel 2 i forbindelse med Booles system, at der er tale om en udsagns- eller sætningskalkyle. Mere præcist er der, som Shannon også selv nævner, tale om en som Huntington opstillede for symbolsk algebra.

[3] Det som Shannon her kalder den 'negative' kaldes ofte også for den 'negerede'.

Analogi med calculussen for propositioner
Vi er nu i en position, hvor vi kan demonstrere ækvivalensen af denne calculus med visse elementære dele af calculussen af propositioner. Logikkens algebra [referencer: 1-3], stammende fra George Boole, er en symbolsk metode til undersøgelse af logiske sammenhænge. Symbolerne fra Boolsk algebra tillader to logiske fortolkninger. Hvis fortolket i termer af klasser er variabelene ikke begrænset til de to mulige værdier 0 og 1. Denne fortolkning kendes som algebraen af klasser. Hvis imidlertid leddene tages som repræsentationer af propositioner har vi en calculus af propositioner i hvilken variablene er begrænset til værdierne 0 og 1,[4] og ligeså er hindringsfunktionen ovenfor. Som regel bliver de to emner udviklet samtidig, fra den samme mængde af postulater, bortset fra additionen i tilfældet med calculussen for propositioner, hvor et postulat er ækvivalent til Postulat 4 ovenfor. E. V. Huntington [reference: 4] giver den følgende mængde af postulater for symbolsk logik:

1. Klassen K indeholder mindst to forskellige elementer.
2. Hvis a og b er i klassen K, så er $a + b$ også i klassen K.
3. $a + b = b + a$.
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
5. $a + a = a$.
6. $ab + ab' = a$ hvor ab er defineret som $(a' + b')'$.

Hvis vi lader klassen K være klassen bestående af de to elementer 0 og 1, så følger disse postulater fra dem givet i det første afsnit. Postulaterne 1, 2 og 3 som blev givet der kan udledes fra Huntingtons postulater.

Shannons brug af 'perfekt induktion' holder kun i det specielle tilfælde, hvor vores klasse er begrænset til de to elementer 0 og 1, og det er han selvfølgelig udmærket klar over. Huntingtons postulater ovenfor udtaler sig imidlertid helt generelt om Boolske algebraer, hvilket kræver mere sofistikerede bevisteknikker, som f.eks. dem anvendt i hans artikel fra 1904 om axiomatiseringen af Boolske algebraer (Huntington; 1904). Når Shannons specielle to-værdi system defineret på baggrund af kredsløb således er et specialtilfælde af Huntingtons mere generelle system er det klart at Shannons postulater kan udledes fra Huntingtons.[5]

Opgave 31

a. Vis, at Huntingtons postulat 5 medfører Shannons postulater $3a$ og $1b$.

b. Vis, at Huntingtons postulat 3 og postulat 2 medfører Shannons postulat $2a$.

[4] Dette refererer kun til den klassiske teori med hensyn til calculussen for propositioner. For nylig er der blevet udført arbejde med logiske systemer i hvilke propositioner kan have mere end to "sandhedsværdier".

[5] Faktisk påpeger Shannon også, at i det tilfælde hvor K netop kun består 0 og 1, så er de to systemer ækvivalente, hvilket betyder at Huntingtons postulater også kan udledes fra Shannons.

Det lidt specielle ved calculussen for propositioner her ovenfor er definitionen af multiplikation ab som værende defineret ved $(a' + b')'$. Dette betyder, at hvis vi ser på udtrykket aa, så har vi:

$$aa = (a' + a')' = (b + b)' = (b)' = a,$$

anvendende at $b + b = b$ (postulat 5). Dette medfører umiddelbart postulaterne $1a$ og $3b$ i Shannons system, sigende henholdsvis at $0 \cdot 0 = 0$ og $1 \cdot 1 = 1$.

Ligeledes har vi i Huntingtons system, at

$$ab = (a' + b')' = (b' + a')' = ba,$$

anvendende at $a + b = b + a$ (postulat 3). Dette giver os første del af postulat $2b$ i Shannons system, altså $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0$. Når a og b er enten 0 eller 1 har vi endvidere:

$$ab = (a' + b')' \rightarrow (0' + 1')' = (1 + 0)' = (1)' = 0,$$

anvendende Postulat $2a$. På lignende vis følger at ba vil være 0 og dermed har vi udledt det fulde Postulat $2b$.

Det næste Shannon gør er at opstille en tabel over de to forskellige fortolkningerne af symbolerne i de to systemer.

> Ved at tilføje [Postulat] 4 og begrænse vores diskussion til calculussen for propositioner er det klart at der eksisterer en perfekt analogi mellem calculussen for kontakt-kredsløb og denne gren af symbolsk logik.[6] De to fortolkninger af symbolerne er vist i Tabel 1 [4.1].

Symbol	Fortolkning i relæ-kredsløb	Fortolkning i calc. for prop.
X	Kredsløbet X	Propositionen X
0	Kredsløbet er lukket	Propositionen er falsk
1	Kredsløbet er åbent	Propositionen er sand
$X + Y$	Serie-forbindelsen af kredsløb X og Y	Propositionen som er sand når enten X eller Y er sand
XY	Parallel-forbindelsen af kredsløb X og Y	Propositionen som er sand når både X og Y er sande
X'	Kredsløbet som er åbent når X er lukket og lukket når X er åben	Den modsatte af proposition X
$=$	Kredsløbene åbner og lukker samtidigt	Hver proposition medfører den anden

Tabel 4.1 Analogien mellem calculussen for propositioner og den symbolske relæ-analyse.

[6] Denne analogi kan også ses fra et lidt anderledes synspunkt. Istedet for at associere X_{ab} direkte med kredsløbet $a - b$, lad i stedet X_{ab} repræsentere *propositionen* sigende at kredsløbet $a - b$ er åbent. Så fortolkes alle symbolerne direkte som propositioner og additions- og multiplikationsoperationerne vil blive set som repræsenterende serie- og parallelforbindelser.

Grundet denne analogi er ethvert teorem fra calculussen for propositioner også et sandt teorem hvis det fortolkes i termer af relæ-kredsløb. De resterende teoremer i dette afsnit er taget direkte fra dette område.

De Morgans teorem:

(9a) $(X + Y + Z \ldots)' = X' \cdot Y' \cdot Z' \ldots,$

(9b) $(X \cdot Y \cdot Z \ldots)' = X' + Y' + Z' + \ldots.$

Dette teorem giver den negative af en sum eller et produkt i led af de negative af summanderne eller faktorerne. Dette kan nemt verificeres for to led ved at substituere alle mulige værdier og derefter udvide til et vilkårligt antal n af variable ved matematisk induktion [7].

Opgave 32

Vis ved brug af perfekt induktion at følgende udtryk er sande:

a. $(X + Y)' = X' \cdot Y'$.

b. $(X \cdot Y)' = X' + Y'$.

c. $(X_1 + X_2 + X_3)' = X_1' \cdot X_2' \cdot X_3'$.

d. $(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)' = X_1' + X_2' + X_3'$.

Vi skal ikke her gå i dybden med bevis ved matematisk induktion, men som Shannon selv påpeger går ideen for brug af denne teknik til bevis af De Morgans teorem ud på at vise at teoremet holder for to variable X_1 og X_2, som I har vist i opgave 32a og 32b, og derefter udvide dette til n variable.[8]

Det næste som Shannon gør er at introducere, hvad vi skal forstå ved en funktion f af n variable, $X_1, X_2, \ldots X_n$, i dette system af symbolsk logik og Boolsk algebra.

En funktion af visse variable $X_1, X_2, \ldots X_n$ er et hvilket som helst udtryk dannet fra variablene ved brug af operationerne addition, multiplikation og negation. Notationen $f(X_1, X_2, \ldots X_n)$ vil blive benyttet til at repræsentere en funktion. Altså, vi kan for eksempel have $f(X, Y, Z) = XY + X'(Y' + Z')$. I infinitesimalregning [9] er det vist, at enhver funktion (givet at den er kontinuert og at alle differentierede også er kontinuerte) kan udvikles i en Taylor-række [10]. En i nogen grad lignende udvikling er mulig i calculussen for propositioner. For at opskrive række-udviklingen af funktioner, bemærk først følgende ligninger:

[7] Der henvises her til en bestemt bevisteknik, som often bruges hvis man skal vise at en given sætning er sand for alle naturlige tal. Kort skitseret er ideen, at hvis noget gælder for $n = 1$, så antager man at det gælder for $n = k$ og kan man så vise at det også gælder for $n = k+1$, så må det gælde for alle n. Dette er *induktionsprincippet*. Tilfældet $n = 1$ kaldes for *induktionsbasis* og antagelsen $n = k$ kaldes for *induktionshypotesen*. Det er vigtigt, at pointere at selve induktionsprincippet ikke er noget man kan eftervise, deraf navnet 'princip'. I virkeligheden kan man tænke på det som en form for axiom, som indgår i grundlaget for de naturlige tal. Bemærk at den almindelige matematiske induktion her ikke er at forveksle med den af Shannon omtalte 'perfekte induktion'.

[8] En diskussion af matematisk induktion kan ses i Jankvist (2008b).

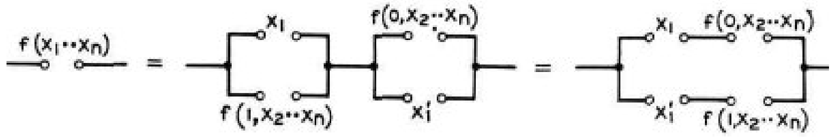
[9] Som tidligere nævnt er infinitesimalregning er et andet navn for differential- og integralregningen.

[10] En Taylor-række, eller et Taylor-polynomium, er en repræsentation af en funktion $f(x)$ som en uendelig sum af led som er udregnet fra værdierne af funktionens afledede $f'(x)$ i et enkelt punkt x_0. En generel formel for en Taylor-række kan opskrives som

$$(10a) \quad f(X_1, X_2 \dots X_n) = X_1 \cdot f(1, X_2 \dots X_n) + X_1' \cdot f(0, X_2 \dots X_n),$$
$$(10b) \quad f(X_1 \dots X_n) = [f(0, X_2 \dots X_n) + X_1] \cdot [f(1, X_2 \dots X_n) + X_1'].$$

Disse reduceres til identiteterne hvis vi lader X_1 være lig enten 0 eller 1. I disse ligninger siges funktionen f at være udviklet omkring X_1. [...]

Som en anvendelse af række-udviklingen bør det bemærkes at hvis vi ønsker at finde et kredsløb som repræsenterer en vilkårlig given funktion, så kan vi altid udvide funktionen ved brug af enten 10a eller 10b på en sådan måde at enhver given variabel højst optræder to gange, én gang som en tænd-kontakt og én gang som en sluk-kontakt. Dette er vist i figur 4 [4.4]. [...]



Figur 4.4 Udvikling omkring én variabel.

En generalisering af De Morgans teorem repræsenteres symbolsk på følgende ligning:

$$(13) \quad f(X_1, X_2 \dots X_n, +, \cdot)' = f(X_1', X_2' \dots X_n', \cdot, +).$$

Med dette mener vi at den negative af enhver funktion kan opnås ved at udskifte hver variabel med dets negative og ved at udbytte $+$ med $\cdot$ symboler. Eksplicitte og implicitte parenteser vil selvfølgelig forblive på de samme pladser. For eksempel vil den negative af $X + Y \cdot (Z + WX')$ blive $X'[Y' + Z'(W' + X)]$.

Opgave 33
Overbevis dig om at Shannons eksempel her lige ovenfor er i overenstemmelse med teorem 13.

Nogle andre teoremer som er brugbare i simplificeringen af udtryk er givet nedenfor:

følger:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n,$$

hvor P angiver at der er tale om et polynomium. Taylor-rækker er opkaldt efter den britiske matematiker Brook Taylor (1685-1731), som introducerede disse i 1715.

(14a) $X = X + X = X + X + X =$ etc.,
(14b) $X = X \cdot X = X \cdot X \cdot X =$ etc.,
(15a) $X + XY = X$,
(15b) $X(X + Y) = X$,
(16a) $XY + X'Z = XY + X'Z + YZ$,
(16b) $(X + Y)(X' + Z) = (X + Y)(X' + Z)(Y + Z)$,
(17a) $Xf(X, Y, Z, \ldots) = Xf(1, Y, Z, \ldots)$,
(17b) $X + f(X, Y, Z, \ldots) = X + f(0, Y, Z, \ldots)$,
(18a) $X'f(X, Y, Z, \ldots) = X'f(0, Y, Z, \ldots)$,
(18b) $X' + f(X, Y, Z, \ldots) = X' + f(1, Y, Z, \ldots)$.

Alle disse teoremer kan bevises ved brug af metoden med perfekt induktion.

Bemærk her at første del af Teorem 14b faktisk er Booles lov (idempotent loven) sigende at $x^2 = x$.

Opgave 34
Godtgør at følgende teoremer er hinandens duale:

a. Teorem 10a og 10b.
b. Teorem 14a og 14b.
c. Teorem 15a og 15b.
d. Teorem 16a og 16b.
e. Teorem 17a og 17b.
f. Teorem 18a og 18b.

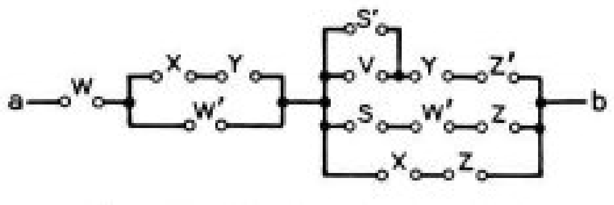
Opgave 35
Vis ved brug af perfekt induktion og dualitetsprincippet teoremerne:

a. 15a og 15b.
b. 16a og 16b.

I det følgende, som er den sidste del af Shannons artikel som vi skal beskæftige os med, giver Shannon et eksempel til illustration af hvor effektivt hans system – og dermed også brugen af Boolsk algebra - er.

Ethvert udtryk dannet ved operationerne addition, multiplikation og negation repræsenterer utvetydigt et kredsløb indeholdende udelukkende serie- og parallel-forbindelser. Et sådant kredsløb vil blive kaldt et serie-parallel kredsløb. Ethvert bogstav i et udtryk af denne art repræsenterer en tænd eller sluk relæ-kontakt. For at finde det kredsløb der kræver det mindste antal af kontakter er det derfor nødvendigt at manipulere udtrykket så det komme på en form i hvilken det færreste antal bogstaver forekommer. Teoremerne givet ovenfor er altid tilstrækkelige til at opnå dette. Lidt øvelse i manipulationen af disse symboler er alt hvad der behøves. Til al held er de fleste teoremer de samme som dem i numerisk algebra – de associative, commutative og distributive love gælder her. Forfatteren har fundet at teoremerne 3, 6, 9, 14, 15, 16a, 17 og 18 i særdeleshed er nyttige til simplifikation af komplekse udtryk.

Ofte kan en funktion skrives på flere måder, hver krævende det samme minimum af elementer. I så tilfælde kan valget af kredsløb foretages arbitrært imellem disse, eller på baggrund af andre betragtninger.



Figur 4.5 Kredsløb som skal simplificeres.

Som et eksempel på en simplifikation af udtryk, betragt kredsløbet vist i figur 5 [4.5]. Hindringsfunktionen X_{ab} for dette kredsløb vil være:

$$\begin{aligned} X_{ab} &= W + W'(X+Y) + (X+Z)(S+W'+Z)(Z'+Y+S'V) \\ &= W + X + Y + (X+Z)(S+1+Z)(Z'+Y+S'V) \\ &= W + X + Y + Z(Z'+S'V). \end{aligned}$$

Disse reduktioner blev foretaget med 17b, benyttende først W, så X og Y som vores "X" i 17b.

Opgave 36
Overbevis jer om at hindringsfunktionen X_{ab}, før den reduceres, rent faktisk er den matematiske repræsentation af kredsløbet på figur 4.5. (Vink: Anvend definitionerne givet på figur 4.2 og figur 4.3 til dette.)

Inden vi går videre, så lad os lige kigge på hvad det er der sker i ovenstående reduktioner af det givne udtryk og hvilke mellemregninger der ikke vises. Som Shannon påpeger, så anvender han først Teorem 17b på W, hvilket vil sige

$$W + f(W, X, Y, Z, S, V) = W + f(0, X, Y, Z, S, V).$$

Dette giver

$$\begin{aligned} X_{ab} &= W + W'(X+Y) + (X+Z)(S+W'+Z)(Z'+Y+S'V) \\ &= W + 0'(X+Y) + (X+Z)(S+0'+Z)(Z'+Y+S'V) \\ &= W + X + Y + (X+Z)(S+1+Z)(Z'+Y+S'V), \end{aligned}$$

da jo $0' = 1$. Det næste der sker er at vi nu anvender Teorem 17b på X, altså

$$X + f(X, Y, Z, S, V) = X + f(0, Y, Z, S, V),$$

hvilket giver os

$$\begin{aligned} X_{ab} &= [W+Y] + X + (X+Z)(S+1+Z)(Z'+Y+S'V) \\ &= [W+Y] + X + (0+Z)(S+1+Z)(Z'+Y+S'V) \\ &= [W+Y] + X + Z(S+1+Z)(Z'+Y+S'V). \end{aligned}$$

Nu skal vi så anvende Teorem 17b på Y, altså

$$Y + f(Y, Z, S, V) = X + f(0, Z, S, V).$$

$$\begin{aligned} X_{ab} &= [W + X] + Y + Z(S + 1 + Z)(Z' + Y + S'V) \\ &= [W + X] + Y + Z(S + 1 + Z)(Z' + 0 + S'V) \\ &= [W + X] + Y + Z(S + 1 + Z)(Z' + S'V). \end{aligned}$$

Det næste Shannon gør, men som han ikke nævner eksplicit, er at han forkorter udtrykket

$$Z(S + 1 + Z) = ZS + Z + ZZ,$$

ved først at observere at $ZS + Z$ ifølge Teorem 15a er det samme som Z alene og dernæst at ZZ ifølge Teorem 14b også er det samme som kun Z. Dette giver os $Z + Z$, men ifølge Teorem 14a er dette også lig Z, hvorfor vi har

$$Z(S + 1 + Z) = ZS + Z + ZZ = Z + Z = Z.$$

Og det er disse betragtninger der fører til den samlede reduktion

$$X_{ab} = W + X + Y + Z(Z' + S'V).$$

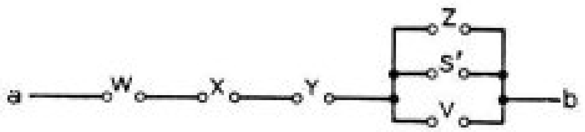
Shannon fortsætter derefter på følgende vis.

Nu ganger vi ud:

$$\begin{aligned} X_{ab} &= W + X + Y + ZZ' + ZS'V \\ &= W + X + Y + ZS'V \end{aligned}$$

Opgave 37
Hvilket teorem benytter Shannon til reduktionen ovenfor?

Kredsløbet svarede til dette udtryk er vist i Figur 6 [4.6]. Bemærk den store reduktion i antallet af elementer.



Figur 4.6 Simplifikation af figur 5 [4.5].

[...]

Referencer

1. En komplet bibliografi af litteraturen omhandlende symbolsk logik findes is *Journal of Symbolic Logic*, volume 1, number 4, December 1936. Disse elementære dele af teorien, som er nyttige i forbindelse med relæ kredsløb er grundigt behandlet i de to følgende referencer.

2. The Algebra of Logic, **Louis Cauturat**. The Open Court Publishing Company.
3. Universal Algebra, **A. N. Whitehead**. Cambridge, at the University Press, volume 1, book III, chapters I and II, pages 35-42.
4. E. V. Huntington, *Transactions* of the American Mathematical Society, volume 35, 1933, pages 274-304. De postulater der er refereret til er den fjerde mængde, givet på side 280.

En af de vigtige pointer med Shannons matematisk-logiske beskrivelse af kredsløbsdesign og analyse heraf er således, at man kan tage et forholdsvist komplekst kredsløb – som det på figur 4.5 – opskrive det på ligningsform og så ved hjælp af de udledte teoremer omforme dette udtryk til et væsentligt simplere udtryk repræsenterende et ækvivalent kredsløb – som det på figur 4.6. I en senere artikel udtrykker Shannon selv dette på følgende vis:

> Ved at benytte Boolsk algebra er det muligt at finde adskillige kredsløb, som er ækvivalente i termer af betjeningskarakteristik med et givet kredsløb. Hindringen af det givne kredsløb skrives ned og manipuleres i overenstemmelse med reglerne. Hvert enkelt af de anderledes resulterende udtryk repræsenterer et nyt kredsløb som er er ækvivalent med det givne. I særdeleshed kan udtryk manipuleres så unødvendige elementer elimineres, hvilket resulterer i simplere kredsløb. (Shannon; 1949, s. 590, oversat til dansk)

I termer af matematikkens 'urimelige' anvendelighed, som diskuteret af Hamming, er det netop matematikken som her spiller en afgørende rolle for simplificeringen af kredsløbsdesignet, hvilket Shannon som tidligere set selv påpegede, da han i 1987, i en alder af 71 år, blev interviewet herom:

> De folk der havde arbejdet med relæ-kredsløb var selvfølgelig klar over, hvordan man lavede disse ting. Men de havde ikke den Boolske algebras matematiske begrebsapparat til at hjælpe dem og til at lave dem på effektiv vis. [...]
>
> De var alle udmærket klar over det simple faktum, at hvis du har to kontakter i serie skal begge være lukkede for at lave en forbindelse igennem. Eller hvis de er i parallel, så skabes der forbindelse hvis en hvilken som helst af de to er lukket. De vidste det på denne måde, men de nedskrev ikke ligninger med plus og gange, hvor plus er som en parallel forbindelse og gange er som en serie forbindelse. (Sloane & Wyner; 1993, s. xxxvi, oversat til dansk)

Selve Shannons artikel er væsentligt længere end de cirka 3 sider (Shannon; 1938b, s. 713-715) fra den originale artikel, som vi har gennemgået her ovenfor. De resterende 8 sider af artikelen benytter Shannon, som han også nævner i den introduktion vi har læst, til at studere problemet om 'syntese', hvilket vil sige at man får givet et specifikt sæt af ønskede input- og output-værdier til et kredsløb eller et nætværk af kredsløb og så skal konstruere et sådant af serie- og parallel-forbindelser svarende til disse værdier. Også her var Shannon faktisk i stand til at bygge videre på grundlæggende ideer fra Booles *The Laws of Thought...*, hvor Boole selv, med reference til Taylor-rækker, definerer funktioner til anvendelse i den symbolske logik. Vi skal imidlertid slutte vores gennemgang af Shannon her, så for en diskussion af dette henvises til Barnett (2011a, s. 13-15). For dog at lade Shannon selv få det sidste ord, skal vi se endnu et citat fra 1987-interviewet, hvori han siger følgende om det arbejde med kredsløbsdesign han udførte i en alder 21 år som specialestuderende ved MIT:

... den mere vigtige og sværere del var at finde ud af detaljerne, forene kredsløbenes topologi, måden kontakterne er forbundet på og så videre, med udtrykkene i den Boolske algebra. At finde ud af det var utrolig sjovt. Jeg tror, at jeg havde mere sjov med dette end jeg har haft med noget andet i mit liv, kreativt set. (Sloane & Wyner; 1993, s. xxv-xxvi, oversat til dansk)

5 Afsluttende skriftlig opgave

I de foregående kapitler er I blevet introduceret til tre matematiske tekster: Booles tekst fra 1854 om tankernes love, der udgør det historiske ophav til den i dag såkaldte Boolske algebra; Shannons 1938-artikel som viser en vigtig moderne anvendelse af den Boolske algebra til løsning af et konkret problem, nemlig design og analyse af elektriske kredsløb; og Hammings filosofiske artikel fra 1980, hvori han diskuterer matematikkens urimelige effektivitet.

I dette sidste kapitel skal vi nu forsøge at trække nogle tråde imellem disse tre matematiske tekster. Dette gøres gennem et antal såkaldte essay-opgaver, hvor vi skal betragte forskellige sider af faget matematik med en eller flere af de gennemgåede tekster som omdrejningspunkt.

'Essayet' i disse opgaver består i, at I i grupper diskuterer de gennemgåede tekster udfra stillede spørgsmål i essay-opgaverne og efter endt diskussion besvarer disse på essay-form. »Betyder dette at vi skal lave 'dansk stil' i matematiktimerne,« tænker I måske nu, og til det er svaret: Ja, det kan man godt sige, blot en 'stil' der omhandler matematik, matematikfilosofi, matematikhistorie og matematikanvendelser.

Samlingen af essays er en gruppeaflevering og skal afleveres elektronisk, det vil sige i en pdf-fil, et Word-dokument, el. lign. Husk, at når I anvender internettet til at indsamle informationer, så skal I angive adresserne på de sider hvorfra I tager jeres oplysninger (gerne i form af hyperlinks i fodnoter).

God fornøjelse!

5.1 Essay-opgave 1: Fra Booles 'tanke' til Shannons anvendelse

I denne første essay-opgave skal I se på og sammenholde de to arbejder af henholdsvis Boole og Shannon, som I har læst og arbejdet med i dette forløb.

a. Opsummer hvad formålet, ifølge Boole selv, er med hans undersøgelse i *The Laws of Thought...* fra 1854.

b. Opsummer hvad formålet, ifølge Shannon selv, er med hans undersøgelse i 1938-artiklen *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*.

c. Er de overordnede mål i henholdsvis Booles og Shannons undersøgelser at betragte som værende inden for eller udenfor matematikken selv. Forklar!

Efter at have fastlagt de overordnede formål med Booles og Shannons arbejder skal I nu gå lidt i dybden og se på de tilgange og metoder, hvormed de ved hjælp af matematikken forsøger at indfri disse overordnede mål. Til dette formål kan det være nyttigt at ihukomme det tidligere bragte citat af Shannon fra 1987:

> Det er ikke så meget det at en ting er 'åben' eller 'lukket', det 'ja' eller 'nej' som du nævner. Den virkelige pointe er at to ting i serie er beskrevet med ordet 'og' i logikken, så du ville sige dette 'og' dette, mens to ting i parallel er beskrevet ved ordet 'eller'. Ordet 'ikke' hører sammen med den bagerste kontakt i et relæ snarere end den forreste kontakt. Der er kontakter som lukker, når du betjener et relæ, og der er andre kontakter som åbner, så ordet 'ikke' er relateret til dette aspekt af relæer. Alle disse ting til sammen danner en mere kompleks forbindelse mellem Boolsk algebra, eller symbolsk logik, og relæ-kredsløb. (Sloane & Wyner; 1993, s. xxxvi, oversat til dansk)

d. Lav en liste (1) over de elementer (begreber, ideer, etc.) af Booles system, som præsenteret i kapitel 2, som I finder er de vigtigste og argumenter efterfølgende for hvordan I definerer 'vigtighed' i denne forbindelse og i forhold til Booles arbejde.

e. Lav en tilsvarende liste (2) over de elementer (begreber, ideer, etc.) af Shannons arbejde, som præsenteret i kapitel 4, som I finder er de vigtigste og argumenter atter en gang for hvordan I definerer 'vigtighed' i denne forbindelse og i forhold til Shannons arbejde.

f. Lav nu en liste (3) over de steder i Shannons artikel hvor han bruger elementer fra Booles fremstilling.

g. Diskuter hvorvidt elementerne i jeres liste 3 er at finde i de to andre lister, 1 og 2, samt hvorfor eller hvorfor ikke de er det.

h. Hvilke sammenfald ville I umiddelbart forvente mellem de tre lister inden I rent faktisk udarbejdede dem? Ville I på forhånd også forvente at der var et sammenfald mellem liste 2 og liste 1 – og i så fald hvorfor?

Med de to sidste spørgsmål i denne første essay-opgave er det ideen, at I på baggrund af det foregående forsøger at udsige noget om matematikken som disciplin generelt.

i. Med udgangspunkt i jeres læsning af og arbejde med Booles og Shannons tekster er det da muligt at sige noget om hvordan matematikken, eller dele af den, er opbygget? Og i så fald, hvad?

j. Ligeledes, med udgangspunkt i jeres kendskab til Booles og Shannons systemer, kan I da sige noget mere generelt om hvad der karakteriserer matematikkens problemstillinger, tankegange og metoder? Og i så fald, hvad?

5.2 Essay-opgave 2: Matematikkens urimelige effektivitet

I denne essay-opgave skal I igen fordybe jer i Hammings diskussion af 'matematikkens urimelige effektivitet', og herunder overveje og diskutere hvad ordene 'effektiv' og 'urimelig' dækker over.

a. Hvad vil det ifølge Hamming sige, at et 'stykke' matematik er effektivt?

b. Lav en sammenligning af den relative effektivitet af henholdsvis Booles og Shannons arbejder (systemer), hvor I skelner imellem effektivitet i termer af filosofi og effektivitet i termer af anvendelse.

c. Baseret på jeres svar til spørgsmål a og b ovenfor, diskuter forskellige typer af 'matematikkens effektivitet'. Giv eksempler fra de to cases (Boole og Shannon) som del af jeres argumentation.

d. Opsummer og rekapituler hvad Hamming mener med titlen på sin artikel 'matematikkens urimelige effektivitet', og herunder hvorfor den er at betragte som 'urimelig'.

e. Anser I Booles introduktion og Shannons anvendelse af ideen om en algebra kun opererende på elementerne 0 og 1 samt den matematiske beskrivelse af 'og' og 'eller' som et eksempel på denne af Hamming beskrevne 'matematikkens urimelige effektivitet'? Argumenter for jeres holdning og synspunkter med udgangspunkt i de tre læste tekster.

Som i foregående essay-opgave er de to sidste spørgsmål i denne essay-opgave også af en mere generel natur i forhold til matematikken som disciplin, de resultater den leverer og dens forhold til andre discipliner.

f. Med udgangspunkt i ovenstående samt jeres arbejde med de tre tekster af Boole, Shannon, og Hamming, diskuter da mere generelt hvilke slags resultater matematikken leverer og hvad de kan bruges til.

g. Ligeledes med udgangspunkt i ovenstående samt de tre læste tekster, diskuter da mere generelt hvordan matematikkens forbindelse er til andre discipliner.

5.3 Essay-opgave 3: Matematikkens forskellige ansigter

Et af de aspekter angående matematikkens natur som I har fået belyst igennem dette undervisningsmateriale er hvordan et matematisk område (Boolsk algebra og symbolsk logik) opstår i én kontekst, muligvis som svar på et spørgsmål udenfor matematikken selv (Booles undren over sprogets natur) og senere, efter at være blevet videreudviklet inden for matematikken selv (axiomatiseringen og generaliseringen af den symbolske logik og herunder Boolsk algebra), finder en ny anvendelse på problemstillinger udenfor matematikken (Shannons studier af elektriske kredsløb). Hvis Boole havde levet til at se de faktiske og praktiske anvendelser af sit logiske system, så er der nok ikke nogen tvivl om at han ville være blevet noget overrasket over hvor vidt disse spænder. I en artikel fra 1949 giver Shannon, foruden sin egen brug, følgende eksempler på brugen af Boolsk algebra:

> ... axiomatisk formulering af biologi; studiet af neurale netværk i nervesystemet; analyse af forsikringspolicer; sandsynlighedsteori og mængdelære, etc. (Shannon; 1949, s. 59, oversat til dansk).

Ikke blot hænger diskussionen om den anvendte matematik sammen med Hammings betragtninger angående dens urimelige effektivitet, det faktum at matematik, i modsætning til så mange andre discipliner, har en så høj grad af anvendelighed udenfor sit eget praksisområde er et særegent karaktertræk ved matematikken som videnskab – sagt med andre ord er det ét af matematikkens fem ansigter, som beskrevet af Niss i kapitel 1 (Niss; 2001). Disse fem ansigter er, som bekendt:

- matematik som grundvidenskab (eller ‘ren’ videnskab),
- matematik som anvendt videnskab,
- matematik som et system af redskaber for praksis,
- matematik som et undervisningsfag, og
- matematik som et rum for en særlig slags æstetiske oplevelser.

Med udgangspunkt i Niss’ beskrivelse af disse fem ansigter besvar nu følgende spørgsmål:

a. Opsummer hvad hvert enkelt af matematikkens fem ansigter ifølge Niss dækker over (se kapitel 1).

b. Beskriv hvilke af disse fem ansigter som Booles tekst kan ses som eksempel på en belysning af (der kan selvfølgelig være tale om at teksten berører elementer af flere ansigter på en og samme gang) og forklar hvor i teksten og hvordan dette finder sted.

c. Beskriv hvilke af de fem ansigter som Shannons artikel kan ses som eksempel på en belysning af (også her kan der være tale om at artiklen berører elementer af flere ansigter på en og samme gang) og forklar hvor i artiklen og hvordan dette finder sted.

Også Hamming diskuterer i sin 1980-artikel om matematikkens urimelige effektivitet forskellige ansigter af matematikken, mere præcist nævner han fire sådanne:

- lange rækker af tæt ræsonneren,
- geometri,
- tal, og
- kunstnerisk smag.

Med udgangspunkt i Hammings beskrivelse af disse fire ansigter besvar nu følgende spørgsmål:

d. Opsummer hvad hvert enkelt af Hammings fire ansigter af matematikken dækker over.

e. Hvad siger Hamming mere præcist om ansigtet omhandlende ‘kunstnerisk smag’ og hvilke sammenfald er der mellem de eksempler han giver og Niss’ beskrivelse af “matematik som et rum for en særlig slags æstetiske oplevelser.”

f. Beskriv hvorledes Hammings øvrige ansigter af matematikken forholder sig til Niss’ matematikkens fem ansigter: Er der forskelle? Er der sammenfald? Kunne nogle af ansigterne være indeholdt i andre? Etc.

Igen angår de to sidste spørgsmål mere generelle karakteristika ved matematikken som videnskabelig disciplin, såvel som dens videnskabsfilosofske/-teoretiske status.

g. Med udgangspunkt i jeres ovenstående diskussion af matematikkens fem ansigter i forhold til de i dette undervisningsmateriale behandlede to cases (Boolsk algebra og kredsløbsdesign) samt jeres læsning af Hammings artikel, kan I da sige noget mere generelt om på hvilke måder matematikken som videnskab adskiller sig fra andre discipliner?

h. Og ligeledes, med udgangspunkt i ovenstående og de i dette undervisningsmateriale tre læste tekster, kan I da sige noget mere generelt om hvilken videnskabsteoretisk status matematikkens begreber og resultater har? Og i så fald, hvad?

5.4 Essay-opgave 4: Jeres mening

I denne sidste essay-opgave er der givet plads til jeres egne uforbeholdne, omend saglige og helst velargumenterede, meninger om de læste tekster: Hvilken I bedst kunne lide og hvorfor; hvilken I synes I fik mest ud af og hvorfor netop denne; og andre lignende aspekter som I måtte finde relevante.

a. Hvad synes I om Hammings 1980-artikel efter at have læst denne og arbejdet selvstændigt med den problemstilling som han præsenterer heri?
b. Hvad synes I om Shannons 1938-artikel?
c. Og endelig, hvad synes I om Booles tekst fra 1854?

Litteratur

Barnett, J. H. (2011a). Applications of Boolean Algebra: Claude Shannon and Circuit Design. `http://www.cs.nmsu.edu/historical-projects/projects.php`.

Barnett, J. H. (2011b). Origins of Boolean Algebra in Logic of Classes: George Boole, John Venn and C. S. Peirce. `http://www.cs.nmsu.edu/historical-projects/projects.php`.

Boole, G. (1847). *Mathematical Analysis of Logic*, MacMillan, Barclay & MacMillan, Cambridge.

Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probablities*, Walton and Maberly, London.

Couturat, L. (1914). *The Algebra of Logic*, Open Court, Chicago. Oversat til engelsk af L. G. Robinson.

De Morgan, A. (1847). *Formal Logic: or, The Calculus of Inference, Necessary, and Probable*, Taylor and Walton, London.

De Morgan, A. (1849). *Trigonometry and Double Algebra*, Taylor, Walton & Malberly, London.

Dictionary of Scientific Biography (1970-80). Charles Scribner's Sons, New York. Udkommet i 18 bind.

Grattan-Guinness, I. & Bornet, G. (1997). *George Boole: Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, BirkHäser, Berlin.

Hamming, R. W. (1980). The unreasonable effectiveness of mathematics, *The American Mathematical Monthly* **87**(2): 81–90.

Huntington, E. V. (1904). Sets of independant postulates for the algebra of logic, *Transactions of the American Mathematical Society* **5**(3): 288–309.

Jankvist, U. T. (2008a). *Den tidlige kodningsteoris historie – et undervisningsforløb til gymnasiet*, Tekster fra IMFUFA, nummer 459, IMFUFA, Roskilde. http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/459.pdf.

Jankvist, U. T. (2008b). *RSA og den heri anvendte matematiks historie – et undervisningsforløb til gymnasiet*, Tekster fra IMFUFA, nummer 460, IMFUFA, Roskilde. http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/460.pdf.

Jankvist, U. T. (2011). *Historisk fremkomst og moderne anvendelse af grafteori – et matematikfilosofisk undervisningsforløb til gymnasiet*, Tekster fra IMFUFA, nummer 486, IMFUFA, Roskilde. http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/486.pdf.

Jankvist, U. T. & Toldbod, B. (2005). *Matematikken bag Mars-missionen – Transskriberede interviews fra DTU, Brown University, MIT og JPL*, Master's thesis, Roskilde Universitetscenter, Roskilde. Tekster fra IMFUFA, nr. 449c.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics – An Introduction*, 2 edn, Addision-Wesley Educational Publishers, Inc., Reading, Massachusetts.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thoughts – From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York.

Lützen, J. & Ramskov, K. (1999). *Kilder til matematikkens historie*, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, København. Anden udgave.

Merrill, D. (1990). *Augustus De Morgan and the Logic of Relations*, Kluwer, Dordrecth.

Niss, M. (2001). Indledning, *in* M. Niss (ed.), *Matematikken og Verden*, Fremads debatbøger – Videnskab til debat, Forfatterne og Forlaget A/S, København.

Niss, M. & Jensen, T. H. (eds) (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18.

Shannon, C. E. (1938a). *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.

Shannon, C. E. (1938b). A symbolic analysis of relay and switching circuits, *American Institute of Electrical Engineers Transactions* **57**: 713–723.

Shannon, C. E. (1949). The synthesis of two-terminal switching circuits, *Bell System Technical Journal* **28**: 417–425.

Sloane, N. J. A. & Wyner, A. D. (eds) (1993). *Claude Elwood Shannon: Collected Papers*, IEEE Press, New York.

Undervisningsministeriet (2010). Bekendtgørelse af 2010 (læreplan). `http://www.uvm.dk`.

Venn, J. (1881). *Symbolic Logic*, MacMillan, London.

Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **13**(1): 1–14.

Wolff, P. (1967). *Højdepunkter i matematikken*, Steen Hasselbalchs Forlag.