TEKST NR 430 2004

OPGAVESAMLING

i matematik

1990-2004

TEKSTER fra

IMFUFA
ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, RUC, Postbox 260, 4000 Roskilde, Danmark
Tlf. 46742263, Fax 46743020, e-mail: imfufa@ruc.dk
"Opgavesamling i matematik"

Eksamensopgaver fra perioden 1990 – januar 2004

IMFUFA-tekst nr. 430/2004, 210 sider, ISSN 0106-6242

Nærværende opgavesamling indeholder de opgaver, der har været stillet ved skriftlige eksaminer på RUCs overbygningsuddannelse i matematik i perioden 1990-2004. Perioden har været præget af en del ændringer i studieordningen, således har kurset i lineær algebra skiftet navn fra E2 til E1, og pensum er blevet ændret så det nu også omfatter anden algebra.
Kurset i matematisk analyse, som tidligere var et to-semesterskursus (E3), er blevet delt, således at første semester nu hedder E2, mens andet semester hedder E3.
Endelig er alle skriftlige prøver i dag tre-dage + en weekends prøver, som efterfølges af en mundtlig prøve.

Lineær algebra

SKRIFTLIG 4-timers opgave i matematik modul 2 EMNEKREDSEN lineær algebra. (gl. ordn.

Udleveres den 17. januar 1990 kl. 10.00.

Afleveres den 17. januar 1990 kl. 14.00.

ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT.

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fire punkter

$$A = (1, 3, -1)$$
$$B = (1, 5, -2)$$
$$C = (3, -5, 1)$$
$$D = (2, 2, 0)$$

Bestem en parameterfremstilling for den linje m, som går gennem D, er parallel med planen bestemt af A,B og C og er vinkelret på linjen gennem A og D.

Bestem det punkt E på m som har mindst afstand til B.

Bestem volumen af det af A,B,D og E bestemte tetraeder.

OPGAVE 2

Den lineære afbildning f af R^2 ind i sig selv er givet ved formlen $f(x) = Ax$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestem en ny basis (u_1, u_2) således at f i forhold til denne er bestemt ved en diagonalmatrix, og angiv den matrix F , for hvilken det gælder, at Fx er koordinatsættet for x mht den nye basis.

Vis at $f^n \quad (= f \circ f \circ \cdots \circ f)$ i forhold til den oprindelige basis er givet ved matricen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

Hertil kan med fordel benyttes den nye basis og dennes sammenhæng med den gamle, men et (korrekt) induktionsbevis vil også blive accepteret.

OPGAVE 3

Bestem de værdier af s for hvilke matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s & 4 \\ s & 1 & s \\ 0 & 0 & s-3 \end{pmatrix}$$

har en egenværdi med den algebraiske multiplicitet 2 og angiv for hver af disse værdier den geometriske multiplicitet.

Angiv en værdi af s for hvilken det ikke er muligt at diagolnalisere A

OPGAVE 4

Lad U og V være henholdsvis nulrum og billedrum for den lineære afbildning

$$R^4 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} \in R^4$$

Angiv parameterfremstillinger for U,V og $U \cap V$.

Bestem et lineært uafhængigt sæt af vektorer i R^4, der som delsæt har baser for U,V og $U \cap V$.

SYGEEKSAMEN.

SKRIFTLIG 4-timers opgave i matematik modul 1 EMNEKREDSEN E2. (ny ordn.)

Udleveres den 26. februar 1990 kl. 10.00

Afleveres den 26. februar 1990 kl. 14.00.

ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fire punkter

$$\begin{aligned} A &= (5,-1,-1) \\ B &= (3,0,0) \\ C &= (3,4,2) \\ D &= (3,6,0) \end{aligned}$$

Bestem parameterfremstillinger for den linje m_1, som går gennem A og B, og for den linje m_2, som går gennem C og D.

Bestem ligningen for den plan π, som er parallel med både m_1 og m_2 og desuden ligger lige langt fra dem begge. Angiv en parameterfremstilling for den linje m_3, som er vinkelret på de to linjer og skærer dem begge.

OPGAVE 2

Bestem mængden af relle tal a for hvilke matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

er regulær og find for disse værdier dens inverse matrix.

OPGAVE 3

Vis at det for alle værdier af a gælder at matricen

$$A = \begin{pmatrix} a^2-1 & 2(1-a) & 2(1+a) \\ 2(a+1) & a^2-1 & 2(1-a) \\ 2(1-a) & 2(1+a) & a^2-1 \end{pmatrix}.$$

har egenværdien a^2+3 og bestem det hertil hørende egenrum .
Lad f være den til A hørende lineære afbildning.
Vis at f i forhold til følgende basis:

$$((1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2))$$

har følgende matrix

$$B = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-3 & -6a \\ 0 & 2a & a^2-3 \end{pmatrix}$$

Vis at A har de to egenværdier $(a^2-3) \pm (2\sqrt{3}a)i$.
Kan A diagonaliseres for alle reelle værdier af a?
(Også i det tilfælde, hvor du har valgt kun at besvare ovenstående spørgsmål for udvalgte værdier af a, kan der gives nogle point for opgaven).

OPGAVE 4

Lad U og V være henholdsvis nulrum og billedrum for den lineære afbildning

$$R^4 \ni (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1-2x_2+x_3-2x_4 \\ -5x_2-5x_4 \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4 \\ 5x_2+5x_4 \end{pmatrix} \in R^4$$

Angiv ortogonale baser både for U og V og vis at disse underrum er indbyrdes ortogonale.

Skriftlig 4-timers opgave i matematik modul 1

EMNEKREDSEN E:2 Lineære strukturer fra algebra og analyse (ny ordning)

Udleveres den 8. juni 1990 kl. 10.00

Afleveres den 8. juni 1990 kl. 14.00

<u>ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT.</u>

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet tre punkter

$$A = (-1, 5, -4)$$
$$B = (-1, -4, 5)$$
$$C = (-4, 5, -1)$$

samt vektoren

$$v = (-3, 3, 0)$$

Lad m_1 være linjen gennem A og B.
Lad m_2 være linjen gennem C med retningsvektoren v.
Lad m_3 være linjen givet ved ligningerne

$$x + 3y + z = -2$$
$$x + 5y + z = -4$$

Vis at de tre linjer ligger i samme plan og angiv en ligning for denne.
Vis at linjernes indbyrdes skæringspunkter danner hjørnerne i en ligesidet trekant og bestem dennes areal.

OPGAVE 2

Lad M være løsningsmængden til ligningsystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

og lad N_a være løsningsmængden til ligningsystemet

$$\begin{aligned} -2x_1 + 11x_2 - 10x_3 + 11x_4 &= 0 \\ (2-2a)x_1 + (3+4a)x_2 + (-4-3a)x_3 + (3+4a)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Vis at $M \supseteq N_a^{\perp}$ for alle a og bestem en værdi af a, for hvilken $M \neq N_a$.

OPGAVE 3

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis at A har det karakteristiske polynomium

$$(\lambda^2 - 4)^2$$

Lad f være den til A hørende lineære afbildning.
Bestem en ny basis således at f i forhold til denne er bestemt ved en diagonalmatirix.
Angiv koordinatskiftematricer for overgang fra nye til gamle og fra gamle til nye koordinater.
Vis at f er invertibel og angiv en matrix for f^{-1} i forhold til både gammel og ny basis.

OPGAVE 4

Lad den lineære afbildning f være givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Angiv et ligningssystem for billedrummet for f.
Angiv en lineær afbildning g, hvis nulrum er billedrummet for f.

Skriftlig 4-timers opgave i matematik modul 1

EMNEKREDSEN E:2 Lineære strukturer fra algebra og analyse (ny ordning)

Udleveres den 14. september 1990, kl. 10.00

Afleveres den 14. september 1990, kl. 14.00

ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fire punkter

$$A = (2,1,-1)$$
$$B = (3,-1,1)$$
$$C = (3,1,-3)$$
$$D = (4,2,2)$$

E betegner projektionen af D på den plan π_1, som går gennem A,B og C, mens F er midtpunktet af DE.

Bestem en ligning for den plan π_2, som er parallel med π_1 og går gennem F.

Bestem volumen af den del af tetraederet bestemt af A,B,C og D, som ligger på samme side af π_2 som D.

OPGAVE 2

Vis at sættet af vektorer (b_1, b_2, b_3) udgør en basis for R^3, idet

$$b_1 = (1,0,1)$$
$$b_2 = (0,1,0)$$
$$b_3 = (2,0,3)$$

Den lineære afbildning f af R^3 ind i sig selv er bestemt ved at der gælder

$$f(b_1) = b_2 + b_3$$
$$f(b_2) = b_3 + b_1$$
$$f(b_3) = b_1 + b_2$$

Bestem matricen for f i forhold til standardbasen.

OPGAVE 3

Vis at matricen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 18 & 5 & -6 & -6 \\ -18 & 0 & 11 & 0 \\ 9 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$$

og benyt dette til at bevise, at den ikke kan diagonaliseres.

OPGAVE 4

Vis, at der i nulrummet for den lineære afbildning afbildning

$$R^4 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} \in R^2$$

ikke findes nogen løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + 10x_3 &= 66 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 32 \end{aligned}$$

Foretag en ændring af en af højresiderne i ligningssystmet, så den fremsatte påstand ikke længere er sand.

Skriftlig 4-timers eksamensopgave i matematik modul 1+2 (ny ordning)

EMNEKREDSEN E2: Lineære strukturer fra algebra og analyse.

Udleveres den 16. januar 1991 kl. 10.00

Afleveres den 16. januar 1991 kl. 14.00

ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fem punkter

$A = (0,2,0)$
$B = (1,4,3)$
$C = (1,1,1)$
$D = (3,0,1)$
$E = (6,0,0)$

Vis at linjen l gennem A og B står vinkelret på planen π gennem C,D og E, og at de to punkter ligger på hver sin side af planen.

Bestem volumen af den figur, som er foreningsmængde af de to tetraedre med CDE som grundflade og henholdsvis A og B som toppunkt.

OPGAVE 2

Vis at matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

har en egenværdi λ_0 med den algebraiske multiplicitet 3.

Lad B betegne matricen $A - \lambda_0 E$, hvor E betegner enhedsnmatricen.

Bestem nulrummene U_2 og U_3 for henhodsvis B^2 og B^3 og bestem en basis (b_1, b_2, b_3) for U_3, således at (b_1, b_2) er en basis for U_2.

Angiv Jordans normalform for A.

OPGAVE 3

Bestem for enhver reel værdi af k en ortonormal basis bestående af egenvektorer for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kan dette også lade sig gøre for $k = i$?

OPGAVE 4

For ethvert $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in R^6$ lader vi A_x betegne matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_4 & 0 & x_6 \\ x_3 & x_5 & x_6 & 0 \end{pmatrix}$$

For ethvert $k \in R$ betegner vi med M_k mængden af de sæt x for hvilke A_x har $(1,1,1,1)$ som egenvektor med egenværdien k.

Bestem et system af ligninger og en parameterfremstilling for M_k.

Vis ved hjælp heraf, at en symmetrisk matrix med nuller i diagonalen har $(1,1,1,1)$ som egenvektor, hvis og kun hvis matricen også er symmetrisk om den modsatte diagonal.

Skriftlig 4-timers opgave i matematik modul 1

Udleveres den 17. juni 1991 kl. 10.00

Afleveres den 17. juni 1991 kl. 14.00

Alle hjælpemidler må benyttes.

De studerende må ved prøvens afslutning kl. 14.00 beholde opgaveformuleringen.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet tre punkter

$$A = (4, 2, 0)$$
$$B = (0, 2, 1)$$
$$C = (0, -1, 2)$$

Lad linjen l gå gennem $(0, 0, 0)$ og $(1, 1, 1)$, og lad punktet D være det punkt på l,som har afstanden $\frac{1}{13}$ fra planen π gennem A,B og C og ligger på samme side af π som $(0, 0, 0)$.
Bestem projektionen E af D på π og volumen af tetraederet $ABCD$.
Lad M være matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

og lad f være den tilhørende lineære afbildning opfattet som en transformation af rummet. For ethvert punkt P lader vi P_f betegne det punkt, som fremkommer ved transformation af P.
Beregn volumen af $A_f B_f C_f D_f$, og vis at E_f er projektionen af D_f på π_f (billedet af π ved f).

OPGAVE 2

Lad A betegne matricen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

hvor (a, b, c) er et sæt af komplekse tal, hvorom det gælder at $(1, 1, 1)$ er en egenvektor for A.
Find samtlige egenværdier for A.
Afgør hvornår A er regulær, og vis at nulrummet i modsat fald har dimensionen 1.
Begrund at enhver basis bestående af egenvektorer er ortogonal, hvis a,b og c er reelle.

OPGAVE 3

De to matricer V og U er givet ved

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bevis at

$$U = V + V^2 + V^3$$
$$U^4 = V^4 = 0$$
$$UV = VU = U - V$$

Vi sætter

$$A_t = E + tV$$
$$B_t = E + tU$$

Vis at

$$A_1^{-1} = B_{-1}$$

Vis at det for alle reelle $t \neq 0$ gælder, at A_1 er Jordans normalform for B_t og bestem en matrix S_t, så at

$$B_t = S_t A S_t^{-1}$$

OPGAVE 4

Lad A være matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad f og g være de lineære afbildninger svarende til henholdsvis A og A^T.
Bestem ortogonale baser for nulrummet for f og for billedrummet for g.
Vis at disse to baser tilsammen udgør en ortogonal basis for R^5

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Matematik modul 1,2 og 3 ny ordning

Skriftlig eksamen i emnekredsen E2:

Lineære strukturer fra algebra og analyse

afholdes

torsdag, den 16. januar 1992, kl. 10.00 - 14.00.

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1. De lineære afbildninger $f,g: R^4 \rightarrow R^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & -10 \\ -3 & -5 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$ og at $B(g) \cap N(f) = \{0\}$, og bestem $B(gf)$ og $B(fg)$.

Opgave 2. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle talpar (a,b) en lineære operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f.$$

Fastlæg talparret (a,b), således at funktionen

$$\beta: t \rightarrow e^{-t}\cos 2t$$

tilhører nulrummet for L.
Bestem derpå en basis for nulrummet, samt en basis for egenrummet svarende til egenværdien -10.

Opgave 3. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu + 4)(\mu + 2)^3,$$

og vis tillige, at egenrummet svarende til egenværdien

-2 vil have dimension 2.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen **A** vil transformere til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at bestemme løsningen til differentialligningssystemet

$$f'(t) = Af(t), \quad \text{hvor} \quad f(0) = (0,1,2,0)^t.$$

Opgave 4 $P_3[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 3. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Fastlæg en ortogonal basis for underrummet

$$Q = \{\ p\epsilon P_3 \mid p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0\ \}.$$

Beskriv dernæst de polynomier, der tilhører $Q^{\perp}$ (det ortogonale komplement til Q) og vis, at polynomierne

$$\alpha(t) = 5t^2 - 1 \qquad , \qquad \beta(t) = 7t^3 - 3t$$

er en ortogonal basis for $Q^{\perp}$.

De ortogonale baser i Q og $Q^{\perp}$ vælges nu som basis for P_3. Bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 + 3.$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer fra algebra og analyse E2

afholdes

fredag, den 12. juni 1992, kl. 09.30 - 13.30.

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 Lad U og V være nulrum og billedrum for den lineære afbildning f: $R^4 \to R^4$, der er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en parameterfremstilling for hvert af rummene U, V og $U \cap V$, og fastlæg endelig billedrummet for afbildningen f^2.

Opgave 2 $P_2[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Med Q betegnes det underrum, der udspændes af polynomierne

$$\alpha(t) = t + 1 \quad , \quad \beta(t) = t^2 - t.$$

Vis, at $\{ \alpha , \beta \}$ er en ortogonal basis for Q.

Bestem derpå en basis for det ortogonale komplement til Q - kaldet $Q^{\perp}$.

Man vælger nu disse baser for Q og $Q^{\perp}$ som basis for hele P_2, og bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 - 3.$$

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 3 Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en lineær operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lg = (D^3 - 3D + 2D^0)g.$$

Fastlæg en basis for nulrummet for L.

Funktionen $\alpha: t \to te^{-t}$ tilhører et egenrum for L. Bestem den tilhørende egenværdi samt en basis for egenrummet.

Opgave 4 Den lineære afbildning $F: R^4 \to R^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at afbildningen F vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu - 4)^2(\mu + 2)^2$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg endelig en basis i R^4, således at den til F svarende matrix i denne basis vil være på Jordans normalform.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER **ERSTATNINGSEKSAMEN**

Skriftlig eksamen i emnekredsen

LINEÆRE STRUKTURER FRA ALGEBRA OG ANALYSE - E2

afholdes

mandag den 7. september 1992 kl. 9.30 til 13.30

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladt.

OPGAVE 1

I rummet, forsynet med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, er der givet fire punkter

$$A = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$
$$B = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$
$$C = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$$
$$D = (2\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

Angiv en parameterfremstilling for den linje l, som er bestemt ved at den

- ligger i planen gennem A, B og C
- er parallel med linjen gennem B og C
- deler trekant ABC i to områder med samme areal.

Angiv en ligning for den plan π, som går gennem l og D.

Bestem voluminet for det tetraeder, som er det ene af de to legemer, som tetraederet $ABCD$ deles i ved π.

OPGAVE 2

Den lineære afbildning $F : R^3 \to R^3$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis at A er ortogonal.

Vis at $A^3 = E$, hvor E er enhedsmatricen.

Bestem egenværdierne for F. Det er tilladt at benytte svarene på de foregående spørgsmål.

Netop en af egenværdierne λ_1 er reel.

Bestem en ortogonal basis for R^3, som indeholder en egenvektor for λ_1, og angiv en matrix for F i forhold til denne basis

OPGAVE 3

Lad U_1,U_2 og U_3 være nulrummeme for de lineære afbildninger $f_1, f_2, f_3 : R^4 \to R^3$, der er fastlagt ved matricerne

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -7 & 12 & -5 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vis, at det ene af disse underrum er fællesmængde af de to andre, og angiv en basis e_1, e_2, e_3, e_4 for R^4, således at hvert af underrummene har en basis bestående af visse af disse fire basisvektorer.

OPGAVE 4

For ethvert $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ lader vi A_x betegne matricen

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Lad M være matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

og definer mængden L ved

$$L = \{x \in R^4 : A_x M = M A_x\}$$

Vis at L er et underrum, og bestem en basis herfor. Vis at $\{A_x : x \in L\}$ er en delmængde af mængden af øvre 2×2 trekantmaticer og giv en karakterisering denne delmængde. Foreslå en generalisering af dette resultat og bevis den.

SKRIFTLIG EKSAMEN
I EMNEKREDSEN
LINEÆRE STRUKTURER (E2)
TORSDAG DEN 17. SEPTEMBER
KL 9.30-13.30

ALLE HJÆLPEMIDLER
MÅ BENYTTES

OPGAVESÆTTET BESTÅR
AF 4 OPGAVER, SOM IKKE
NØDVENDIGVIS VÆGTES ENS
TIL EN FULDSTÆNDIG BESVARELSE
HØRER ALLE OPGAVER.

OPGAVE 1

Lad M betegne matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hvor a og b er reelle tal.

Angiv det karakteristiske polynomium for M.

Angiv for $a = -7/6$ og $b = -6$ egenværdierne for M, vis at M i dette tilfælde kan diagonaliseres. Angiv desuden en basis som giver anledning til en diagonalisering.

Bestem a og b således, at 1 og -2 er egneværdier, og vis at M i dette tilfælde ikke kan diagonaliseres. Bestem Jordans normalform for M og en hertil hørende basis.

OPGAVE 2

Lad b_1, b_2, b_3 være en basis for R^3 og lad F være den lineære afbildning af R^3 ind i sig selv, som er bestemt ved at

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_1 + b_2 + b_3 \\ f(b_2) &= 2b_1 + b_3 \\ f(b_3) &= 3b_1 - b_2 + b_3 \end{aligned}$$

Angiv en matrix for F i forhold til basen b_1, b_2, b_3.

Antag nu, at b_1, b_2, b_3 er bestemt ved, at det skal gælde at

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= 2b_1 + b_2 \\ (0,1,0) &= b_1 + b_2 \\ (0,0,1) &= b_3 \end{aligned}$$

Bestem matricen, som giver overgangen fra koordinater i forhold til standardbasen til koordinater i forhold til basen b_1, b_2, b_3.

Angiv en matrix for F i forhold til standardbasen.

OPGAVE 3

Lad U_1 og U_2 være nulrummeme for de lineære afbildninger $f_1, f_2 : R^4 \to R^2$, der er fastlagt ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 22 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem en basis for hvert af de to nulrum og vis at de to rum er indbyrdes ortogonale. Bestem en ortogonal basis e_1, e_2, e_3, e_4 for R^4, således at hvert af underrummene har en basis bestående af visse af disse fire basisvektorer.

OPGAVE 4

Vis at matricen

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er invertibel for ethvert reelt t, og angiv en formel for ${A_t}^{-1}$.
Gæt herudfra en formel for

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

og bevis formlen.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer fra algebra og analyse (E2)

afholdes

torsdag den 14. januar 1993, kl. 09.30 - 13.30.

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestem en ortogonal basis for både billedrummet - $B(f)$ - og nulrummet - $N(f)$ - for denne afbildning.

Vis, at disse baser tilsammen vil udgøre en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$, og fastlæg endelig en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2.

Opgave 2. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle $a,b \in \mathbb{R}$ en operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + aD + bD^0)f.$$

Bestem tallene a og b, således at funktionen

$$\beta: t \to te^{-t}$$

er egenfunktion for operatoren L svarende til egenværdien -4.

Fastlæg derpå en basis for nulrummet for L - $N(L)$.

En anden operator $M: C^\infty \to C^\infty$ er defineret ved

$$Mf = (D + 3D^0)f$$

Bestem endelig en basis for nulrummet svarende til den sammensatte operator $M \circ L$.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 3. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^3$$

og vis endvidere, at matricen $\mathbf{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen $\mathbf{A}$ transformeres til en jordan-matrix, og benyt fx dette til at vise, at samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$$

vil konvergere mod $\mathbf{0}$ for $t \to \infty$.

Opgave 4. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er i standardbasen givet ved matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis, at de tre vektorer

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kan vælges som basis i $\mathbb{R}^3$.

(opgave 4 fortsættes)

Et element $x \in \mathbb{R}^3$ har i standardbasen et koordinatsæt x_s og i u-basen - $\{u_1,u_2,u_3\}$ et koordinatsæt x_u. Fastlæg koordinatskiftematricen P, således at

$$x_u = Px_s$$

Fastlæg endelig den til g svarende matrix i u-basen.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer fra algebra og analyse (E1)

afholdes

torsdag den 13. januar 1994, kl. 09.30 - 13.30.

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ er i det følgende forsynet med det sædvanlige indre produkt. Vis da, at $N(f) \perp B(f)$ - dvs at nulrum og billedrum for f vil være ortogonale.

Fastlæg derpå en ortogonal basis for såvel N(f) som B(f), og vis at disse baser tilsammen vil være en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

Fastlæg tilslut en ortogonal basis for $B(f^2)$ - billedrummet for afbildningen $f \circ f$.

2. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. En lineær differentialoperator L på dette rum er givet ved

$$L = D^2 - 2D + D^0.$$

Bestem en basis for nulrummet - N(L), samt en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien -4.

Bestem endelig en basis for egenrummet for operatoren $L \circ L$ svarende til egenværdien 16.

3. Vis, at vektorerne

$$b_1 = (1,1,1)^T \quad , \quad b_2 = (-1,0,1)^T \quad , \quad b_3 = (2,1,-1)^T$$

vil være en basis for $\mathbb{R}^3$.

En lineær afbildning g: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er i standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ givet ved

(opgaven fortsættes på næste side)

$$\begin{aligned} g(e_1) &= \quad\;\; 2e_2 + e_3 \\ g(e_2) &= e_1 \quad\quad\;\; + 3e_3 \\ g(e_3) &= e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Opskriv den til g svarende matrix i standardbasen, og fastlæg tillige den til g svarende basis i forhold til b-basen - $\{b_1,b_2,b_3\}$.

4. Bestem samtlige egenværdier for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen $\mathbf{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis i $\mathbb{R}^4$ således, at den til $\mathbf{A}$ svarende matrix i denne basis vil være på jordans normalform.

Benyt fx dette til at bestemme den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$$

som opfylder $\mathbf{f}(0) = (1,2,0,-1)^T$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer fra algebra og analyse (E1)

afholdes

fredag den 10. juni 1994, kl. 09.00 - 13.00.

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1

Rummet $\mathbb{R}^4$ tænkes forsynet med standardbasen. I $\mathbb{R}^4$ er givet underrummene

$$U = Sp\{(1,2,-1,1)^T; (3,1,0,2)^T\}$$
$$V = Sp\{(1,1,1,-2)^T; (3,0,2,-1)^T\}$$

Vis, at $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg en basis for $U \cap V$.

Fastlæg dernæst en ortogonal basis $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ i $\mathbb{R}^4$, således at $b_1,\ b_2 \in U$ og $b_2,\ b_3 \in V$.

Om en lineær afbildning $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vides, at

$$N(f) = U \quad \text{og} \quad B(f) = V$$

Fastlæg på denne baggrund en mulig matrixrepræsentation for f i B-basen, og bestem endelig med den valgte matrix en basis for $B(f^2)$.

Opgave 2

C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. På dette rum er givet en fjerde ordens lineær differentialoperator L, ved

$$L = D^4 + a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0D^0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Om denne operator L oplyses, at

a) funktionen $\alpha\colon t \to t$ tilhører egenrummet for L svarende til egenværdien 4/3, og

b) funktionen $\beta\colon t \to te^t$ tilhører nulrummet for L.

Fastlæg på denne baggrund den lineære differentialoperator L.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 3 Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2,$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Foretag et basisskifte, så matricen vil transformere til en jordan-matrix.

Opgave 4 P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredie grad. På dette rum defineres for alle heltallige værdier af n en lineær operator L_n ved

$$L_n p(t) = (1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t) + np(t).$$

Bestem de til L_n svarende egenværdier og egenpolynomier, og fastlæg de værdier af n, for hvilke L_n vil være invertibel.

Bestem endelig for n = 6 og for n = 8 - om muligt - et polynomium p, der opfylder ligningen

$$L_n p(t) = 5t^3 + 3t^2.$$

[Vink: Man kan med fordel benytte en til L_n svarende matrixrepræsentation].

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer fra algebra og analyse (E1)

afholdes

onsdag den 18. januar 1995, kl. 10.00 - 14.00.

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4$ -> $\mathbb{R}^4$ er i standardbasen givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5/2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestem en basis for nulrummet N(f) og billedrummet B(f), og vis at $\dim(N(f) \cap B(f)) = 1$.

Fastlæg dernæst ortogonale baser for såvel N(f) som B(f). Benyt fx at $\dim(N(f) \cap B(f)) = 1$.

Fremstil endelig en ortogonal basis for hele $\mathbb{R}^4$, som indeholder ortogonale baser for N(f) og B(f).

2. Bestem samtlige egenværdier for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis for $\mathbb{R}^3$ således, at den til $\mathbf{A}$ svarende matrix i denne basis vil være en jordanmatrix.

Benyt fx det ovenfor viste til at bestemme den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$$

som indeholder $\mathbf{f}(0) = (0,1,2)^T$.

(opgavesættet fortsættes)

3. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle tal a og b den lineære operator L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$L = (D^2 + aD + bD^0)\circ D.$$

Funktionerne f: $t \to te^{-t}$ og g: $t \to e^{-2t}$ er egenfunktioner for L. Bestem den tilhørende egenværdi samt konstanterne a og b.

Fastlæg endelig en basis (af reelle funktioner) svarende til nulrummet for L - N(L).

4. I $\mathbb{R}^4$ er der udtrykt i standardbasis givet fire vektorer

$$v_1 = (0,2,2,0)^T \qquad v_2 = (1,0,0,-1)^T$$

$$v_3 = (0,2,-2,0)^T \qquad v_4 = (1,0,0,1)^T$$

Vis, at $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kan vælges som basis for $\mathbb{R}^4$.

En lineær afbildning G: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i denne v-basis fastlagt ved

$$G(v_1) = -2v_1 \qquad G(v_3) = 4v_3$$

$$G(v_2) = -2v_2 + v_1 \qquad G(v_4) = 4v_4 + v_3$$

Opskriv den til G svarende matrix i v-basen, og find dernæst den til G svarende matrix i standardbasen.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer (E1)

Torsdag den 15. juni 1995

kl. 10.00 - 14.00

Der stilles 4 opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. Den lineære afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har med hensyn til standardbasen matricen

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -5 & -6 \\ 6 & -7 & -5 & -6 \\ -11 & 10 & 8 & 11 \\ 11 & -10 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at A har det karakteristiske polynomium
$$p(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+2)^2$$

b) Vis, at A ikke kan diagonaliseres.

c) Bestem en basis for $\mathbb{R}^4$, så matricen for f med hensyn til denne basis er på Jordans normalform.

2. Den lineære afbildning $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ har med hensyn til standardbasen matricen

$$A = \begin{pmatrix} c & 4 & 2-2i \\ i & 0 & 2 \\ 3i & 2i & 6+i \end{pmatrix}$$

hvor $c \in \mathbb{C}$.

a) Vis, at A er invertibel for $c \neq 1$.

b) Bestem for ethvert c nulrummet $N(f)$ og billedrummet $B(f)$ for afbildningen f.

c) Vis, at $N(f) \cap B(f) = \{0\}$, og bestem billedrummet $B(f^2)$ for afbildningen f^2.

3. Med $P_2[-1;1]$ betegnes vektorrummet af alle reelle polynomier af højst 2. grad, defineret på intervallet $[-1;1]$. Rummet $P_2[-1;1]$ forsynes med det sædvanlige indre produkt givet ved

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$$

Polynomierne p_1, p_2 og p_3 defineres ved

$$p_1(t) = 2t-1, \quad p_2(t) = t^2+3, \quad p_3(t) = 5t^2-8t-7$$

a) Vis, at $\{p_1,p_2,p_3\}$ er en basis for $P_2[-1;1]$.

b) Bestem koordinaterne for polynomiet $p(t) = 3t^2-2t-3$ med hensyn til basen $\{p_1,p_2,p_3\}$.

Lad U være underrummet $U = Sp\{p_3\}$ af $P_2[-1;1]$.

c) Bestem en basis for underrummet

$$V = \{\ q \in P_2[-1;1] \mid q(\tfrac{1}{2}) = 0\ \},$$

og vis, at $V = U^{\perp}$, altså at V er ortogonalkomplementet til U.

d) Bestem ortogonalprojektionen af p_2 på $U^{\perp}$.

4. Med C^{∞} betegnes vektorrummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineret på $\mathbb{R}$. For alle reelle tal a og b defineres en operator $L : C^{\infty} \to C^{\infty}$ ved

$$L = D^3 + aD^2 + 5D + bD^0$$

Det oplyses, at funktionen ϕ givet ved $\phi(t) = te^{-t}$ tilhører nulrummet $N(L)$.

a) Vis, at $a = 4$ og $b = 2$.

b) Bestem for $a = 4$ og $b = 2$ en basis for egenrummet for L hørende til egenværdien 2.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer fra algebra og analyse (E1)

afholdes

fredag den 12. januar 1996, kl. 10.00 - 14.00.

Der stilles fire opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1. En lineær afbildning g: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i standardbasen fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at den lineære afbildning kun vil have egenværdierne 2 og 5, og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå for $\mathbb{R}^4$ en til matricen svarende jordanbasis, og angiv den til g svarende matrix i forhold til denne basis.

Opgave 2. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. For alle reelle tal a og b defineres en lineær operator L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$L = D^3 + aD^2 + 2bD + bD^0.$$

Det oplyses, at funktionen α: $t \to te^{-2t}$ vil tilhøre nulrummet for operatoren L.

Vis, at a = 5 og b = 4, og bestem derefter en basis for nulrummet. Disse værdier af a og b anvendes i det følgende.

Vis dernæst, at funktionen β: $t \to e^{-3t}$ tilhører egenrummet for L svarende til egenværdien -2, og fastlæg endelig en basis for dette egenrum.

(opgavesættet fortsættes på næste side)

Opgave 3. $P_2[-1,1]$ betegner vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad defineret på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det sædvanlige indre produkt

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Der betragtes underrummet

$$U = \{\ p \in P_2 \mid p(-\tfrac{1}{2}) = 0\ \}.$$

Bestem en basis for dette rum, og fastlæg derpå basis for $U^{\perp}$ - det ortogonale komplement til U.

Bestem endelig projektionen af polynomiet

$$p(t) = 9t^2 + 5t + 10$$

på underrummet U.

Opgave 4. I rummet $\mathbb{R}^4$ er givet en basis $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4\}$. En lineær afbildning $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ opfylder, at

$$N(f) = Sp\{b_1,b_2\} \quad \text{og} \quad B(f) = Sp\{b_2,b_3\}$$

Opstil en matrix (udtrykt i B-basen), som kan repræsentere denne afbildning.

Om den lineære afbildning f oplyses endvidere, at

$$f(b_4) = -\ b_3 \quad \text{og} \quad f^2(b_3) = b_3 - 2b_2.$$

Fastlæg da en af de netop to matricer (udtrykt i B-basen), som kan repræsentere f.

Bestem endelig samtlige egenværdier for f samt en til f svarende jordanbasis (udtrykt i B-basen).

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i emnekredsen

Lineære strukturer (E1)

Onsdag den 15. januar 1997

kl. 9.00 - 13.00

Der stilles 4 opgaver, som alle skal besvares.

Alle hjælpemidler er tilladte.

1. Det reelle talrum $\mathbb{R}^4$ forsynes med det sædvanlige indre produkt

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

(hvor $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ og $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$). Lad U betegne underrummet

$$U = \text{span}\{(1,1,1,1),\ (1,1,1,0)\}$$

a) Bestem en ortonormal basis for U.

b) Vis, at ortogonalkomplementet til U er

$$U^{\perp} = \{\ (x_1,x_2,x_3,0)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\ \}$$

c) Bestem en ortogonal basis for $U^{\perp}$.

2. Betragt matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.

b) Bestem en Jordan normalform J af A.

c) Bestem en invertibel matrix Q, så at $Q^{-1}AQ = J$.

d) Bestem, eventuelt ved brug af ovenstående, den funktion $f\in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^5)$, der er fastlagt ved

$$f'(t) = A\,f(t) \quad \text{og} \quad f(0) = (2,2,2,2,2)^t$$

Opgavesættet fortsættes

3. *NB: Opgave 3 betragtes som fuldt besvaret, hvis blot to af følgende tre spørgsmål er korrekt besvaret.*

a) Lad A være en kvadratisk matrix. Vis, at hvis $A^2 = A$, og λ er en egenværdi for A, så er $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.

b) Lad B være en diagonaliserbar, kvadratisk matrix. Vis, at hvis enhver egenværdi for B er enten 0 eller 1, så er $B^2 = B$.

c) Lad C være en reel, kvadratisk og symmetrisk matrix. Vis, at hvis $C^3 = I$, så er $C = I$.

4. Betragt rummet $P_2(\mathbb{R})$ bestående af alle reelle polynomier af højst anden grad. Lad T være den lineære operator på $P_2(\mathbb{R})$, der er fastlagt ved at

$$T(1) = 1-x^2 , \quad T(x) = 3+x-5x^2 , \quad T(x^2) = -x+2x^2$$

a) Bestem matricen for T med hensyn til standardbasen $\{1,x,x^2\}$.

b) Vis, at nulrummet for T er en delmængde af billedrummet for T.

c) Bestem dimensionen af billedrummet for operatoren T^2.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Opgavesæt til den skriftlige del af eksamen i emnekredsen E1:
Lineære strukturer fra algebra og analyse.
5.-8. januar 1999.

Opgavesættet består af 4 opgaver, der alle skal besvares.

Den enkelte eksaminand skal selv besvare opgaverne. Det er ikke tilladt at modtage hjælp fra andre.

Opgave 1

Betragt matricen

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -18 & -20 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & -7 & 4 \\ -4 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ for A er givet ved

$$p(\lambda) = (1+\lambda)^2(3-\lambda)^2.$$

2. Vis, at A ikke er diagonaliserbar.
3. Bestem en Jordan normalform J af A.
4. Bestem en invertibel matrix Q, således at $Q^{-1}AQ = J$.
5. Bestem den differentiable funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbf{R} \qquad \text{og} \qquad f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2

Givet en matrix A betegner $N(A)$ og $R(A)$ som sædvanlig henholdsvis nulrummet og billedrummet for (venstre-multiplikation med) A.

1. Lad A betegne en reel $m \times n$ matrix og B en reel $m \times p$ matrix. Vis, at følgende udsagn er ækvivalente:

   (i) Der findes en reel $p \times n$ matrix X, så at $A = BX$,

   (ii) $R(A) \subseteq R(B)$.

2. Lad A betegne en reel $m \times n$ matrix og lad A^t betegne dens transponerede. Lad endvidere $\mathbf{R}^n$ være udstyret med det sædvanlige indre produkt. Vis, at

   (a) $R(A^t) \subseteq N(A)^\perp$,

   (b) $\dim R(A^t) = \dim N(A)^\perp$,

   (c) $R(A^t) = N(A)^\perp$.

3. Lad A betegne en reel $m \times n$ matrix og B en reel $p \times n$ matrix. Vis, at følgende udsagn er ækvivalente:

   (i) Der findes en reel $m \times p$ matrix Y, så at $A = YB$,

   (ii) $N(B) \subseteq N(A)$.

Opgave 3

Lad A og B betegne to $n \times n$ matricer over $\mathbf{F}$, hvor $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ eller $\mathbf{C}$.

1. Vis ved induktion efter n, at determinanten $\det(A + tB)$ som funktion af $t \in \mathbf{F}$ er et polynomium af grad højst n.

2. Vis, idet I betegner $n \times n$ identitetsmatricen, at der for alle t, $\lambda \in \mathbf{F}$ gælder

$$(B + tI)(AB - \lambda I + tA) = (BA - \lambda I + tA)(B + tI).$$

3. Vis, at de to produktmatricer AB og BA har det samme karakteristiske polynomium og dermed de samme egenværdier. (Vink: Benyt ovenstående for fastholdt λ og variabelt t).

4. Lad $\lambda \in \mathbf{F} \setminus \{0\}$. Vis, at (venstre-multiplikation med) B afbilder nulrummet $N(AB - \lambda I)$ injektivt i nulrummet $N(BA - \lambda I)$.

5. Lad $\lambda \in \mathbf{F}$ være en egenværdi for AB og BA. Vis, at hvis $\lambda \neq 0$, så har egenrummet for AB hørende til λ samme dimension som egenrummet for BA hørende til λ.

6. Giv et eksempel på, at de to egenrum for henholdsvis AB og BA hørende til 0 som fælles egenværdi godt kan have forskellig dimension. (Find to 2×2 matricer A og B, der opfylder $AB = 0$ og $BA \neq 0$).

Opgave 4

Lad $V_n = P_n(\mathbb{C})$ betegne det komplekse vektorrum bestående af alle polynomier af grad højst n med komplekse koefficienter i en variabel x.

1. Gør rede for, at der er defineret en lineær operator S_n på V_n ved
$$(S_n f)(x) = (x^2 - 1)f''(x) + 2xf'(x) \quad \text{for } f \in V_n.$$
2. Beskriv matricen for S_n mht. standardbasen $\beta = \{1, x, \ldots, x^n\}$ for V_n.
3. Bestem egenværdierne for S_n og gør rede for, at S_n er diagonaliserbar.
4. Bestem i tilfældet $n = 3$ en basis for V_n bestående af egenvektorer for S_n.
5. Vis, at S_n er selvadjungeret mht. det indre produkt på V_n givet ved
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$
(Vink: Vis, at $(S_n f)(x) = ((x^2 - 1)f'(x))'$, og benyt derpå delvis integration).
6. Bestem i tilfældet $n = 3$ en ortonormal basis for V_n mht. ovenstående indre produkt og angiv matricen for S_n mht. denne.
7. Gør rede for, at differentiationsoperatoren T_n på V_n givet ved
$$(T_n f)(x) = f'(x) \quad \text{for } f \in V_n$$
ikke er normal mht. noget indre produkt på V_n, når $n \geq 1$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Opgavesæt til den skriftlige del af eksamen i emnekredsen
Lineære strukturer fra algebra og analyse.
4. - 7. januar 2000.

Opgavesættet består af fire opgaver, som alle skal besvares.

Den enkelte eksaminand skal besvare opgaverne uden hjælp fra andre personer. Derudover er alle sædvanlige hjælpemidler tilladte.

Opgave 1.

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ a & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor a er et reelt tal.

a) Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A for alle værdier af a er givet ved

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)^3(3 - \lambda).$$

b) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.

c) Bestem for hver værdi af a en til A svarende jordanmatrix J.

I det følgende antages, at $a = -2$.

d) Bestem en invertibel matrix Q, således at $J = Q^{-1}AQ$.

e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \qquad \text{og} \qquad f(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 2.

På $C^\infty(\mathbb{R})$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner - er den lineære afbildning D defineret ved

$$Df = f'$$

Den identiske afbildning benævnes D^0.

I $C^\infty(\mathbb{R})$ betragtes underrummet

$$V = N((D - D^0)^4)$$

dvs nulrummet for den lineære afbildning $(D - D^0)^4$.

a) Bestem en basis β for V.

På V defineres de lineære afbildninger U, T: $V \to V$ givet ved

$$U = D^2 - D^0 \quad \text{og} \quad T = D^2 + D^0.$$

b) Vis, at U ikke vil være injektiv, men at T er injektiv.

c) Bestem den til T svarende matrix i forhold til den fundne basis β.

d) Fastlæg en basis γ for V, således at den til T svarende matrix i forhold til denne basis γ vil være en jordanmatrix.

Opgave 3.

Man betragter $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ - rummet af alle n×n matricer over $\mathbb{C}$.

En reel matrix M kaldes en **stokastisk matrix** hvis

- $M_{ij} \geq 0$ for alle $i,j = 1,2,\dots,n$ (dvs alle elementer i M er ikke negative), og
- $M_{1j} + M_{2j} + \dots + M_{nj} = 1$ for alle $j = 1,2,\dots,n$ (dvs summen af elementerne i hver søjle bliver lig 1).

Lad u være søjlevektoren, hvor alle n elementer er 1, og vis da følgende tre udsagn:

a) Når M er en reel matrix med ikke negative elementer, da er M en stokastisk matrix hvis og kun hvis $M^t u = u$.

b) Hvis M og N er stokastiske matricer, da vil også MN og M^p (p er et naturligt tal) være stokastiske matricer.

c) $\lambda = 1$ vil altid være egenværdi for en stokastisk matrix.

For en matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ defineres en **norm** af A ved

$$\|A\| = \max\{|A_{ij}| : i,j = 1,2,\dots,n\}.$$

Vis, at normen opfylder følgende fire betingelser

d1) $\|A\| \geq 0$ og $\|A\| = 0$ hvis og kun hvis $A = O$

d2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ hvor $c \in \mathbb{C}$

d3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

d4) $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$

e) Er M igen en stokastisk matrix, skal man vise, at $\|M\| \leq 1$ og at $\|M^p\| \leq 1$ for alle naturlige tal p.

Da en reel matrix M kan opfattes som defineret over $\mathbb{C}$, vil det karakteristiske polynomium for M faktorisere helt, og M vil derfor altid være similar med en jordanmatrix J, dvs der findes en invertibel matrix Q så

$$J = Q^{-1}MQ.$$

(opgave 3 fortsætter)

Opgave 3 (fortsat)

f) Vis da, at $J^p = Q^{-1}M^pQ$, samt at der vil findes et positivt tal c, således at

$$\|J^p\| \leq c \quad \text{for alle naturlige tal } p.$$

g) Vis da, at enhver jordanblok i J svarende til egenværdien 1 vil være 1×1, og

h) at alle egenværdier λ for M (og J) vil opfylde $|\lambda| \leq 1$.

Opgave 4.

Vi betragter $C^\infty([-\pi,\pi])$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner på intervallet $[-\pi,\pi]$.

a) Er $h \in C^\infty([-\pi,\pi])$ vis da, at

hvis h er en ulige funktion, er $\int_{-\pi}^{\pi} h(t)dt = 0,$

På $C^\infty([-\pi,\pi])$ defineres det sædvanlige indre produkt

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

Endvidere betragter vi underrummet

$$M = \text{span}\{\cos(t), \sin(t), t\cos(t), t\sin(t)\}$$

b) Undersøg om disse fire funktioner er parvis ortogonale.

c) Bestem en ortogonal basis for det underrum, der er udspændt af de tre første funktioner.

d) Udvid derpå denne ortogonale basis til en ortogonal basis for M.

Vi definerer den lineære afbildning $T: C^\infty([-\pi,\pi]) \to C^\infty([-\pi,\pi])$ ved

$$T = D^2 + D^0$$

(den samme afbildning som i opgave 2).

e) Vis, at M vil være et T-invariant underrum i $C^\infty([-\pi,\pi])$.

f) Vis, at M indeholder to T-cykliske underrum af dimension 2.

g) Kaldes disse to T-cykliske underrum M_1 og M_2, vis da at

$$M_2 \perp M_1 \quad \text{og} \quad M = M_1 \oplus M_2.$$

h) Bestem endelig den ortogonale projektion af funktionen $h(t) = t$ på hvert af underrummene M_1 og M_2.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Opgavesæt til den skriftlige del af eksamen i emnekredsen
Lineære strukturer fra algebra og analyse.
2. - 5. januar 2001.

Opgavesættet består af fire opgaver, som alle skal besvares.

Den enkelte eksaminand skal besvare opgaverne uden hjælp fra andre personer. Derudover er alle sædvanlige hjælpemidler tilladte.

Opgave 1.

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 4 \\ -4 & 7 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 20 & 18 & -13 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A er givet ved

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)^2(3 + \lambda)^2.$$

b) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.

c) Bestem en til A svarende jordanmatrix J.

d) Bestem en invertibel matrix Q, således at $J = Q^{-1}AQ$.

e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \qquad \text{og} \qquad f(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2.

I det følgende betragtes et endelig-dimensionalt vektorrum V. To lineære afbildninger T og U på V kaldes **samtidigt** diagonaliserbare, hvis der findes en ordnet basis α for V, således at

$$[T]_\alpha \quad \text{og} \quad [U]_\alpha$$

er diagonalmatricer.

a) Antag nu, at afbildningerne T og U er samtidigt diagonaliserbare, og vis da at UT = TU.

I det følgende antages det, at afbildningerne T og U er diagonaliserbare og endvidere at UT = TU. (Og vi skal vise, at T og U er samtidigt diagonaliserbare).

b) Betragt nu et vilkårligt egenrum E_λ **for** T, og vis, at dette egenrum vil være U-invariant.

c) Lad W være et U-invariant underrum i V, og lad $v_1, v_2, ..., v_k$ være egenvektorer for U svarende til **forskellige** egenværdier. Er nu

$$v_1 + v_2 + ... + v_k \in W$$

vis da, at $v_i \in W$ for alle i = 1, 2, ..., k. (Det kan med fordel vises ved induktion efter k).

d) U er som bekendt diagonaliserbar, vis da, at U_W - dvs U's restriktion til det U-invariante underrum W - også vil være diagonaliserbar. (Benyt fx de karakteristiske polynomier for U og U_W samt resultatet fra punkt c).

e) Vis nu, at man kan bestemme en basis for E_λ af egenvektorer **for** U, samt at T og U hermed er samtidigt diagonaliserbare.

f) Der er givet følgende to matricer

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Undersøg om de vil være samtidigt diagonaliserbare. (Hvorfor kan resultatet fra punkt e benyttes i denne sammenhæng?).

Opgave 3.

Rummet $\mathbb{R}^4$ er forsynet med standardbasen. For ethvert reelt tal p defineres følgende to underrum i $\mathbb{R}^4$

$$U = \text{span}\{(1,2,-1,p);(3,1,0,2)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,1,p,-2);(3,0,2,-1)\}$$

a) Bestem de tal p for hvilke $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg i hvert enkelt tilfælde en basis for $U \cap V$.

Rummet $\mathbb{R}^4$ er endvidere forsynet med det sædvanlige indre produkt. I det følgende benyttes kun én af de fundne værdier for p - vælg selv.

b) Fastlæg nu en orto<u>go</u>nal basis $b = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$ for $\mathbb{R}^4$, således at elementerne i basis opfylder

$$b_1, b_2 \in U \quad \text{og} \quad b_2, b_3 \in V.$$

c) Om en lineær afbildning $S: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ oplyses det, at

$$B(S) = V \quad \text{og} \quad N(S) = U$$

hvor B(S) er billedrummet og N(S) er nulrummet for S. Endvidere oplyses det om afbildningen S, at

$$S(b_3) = -2b_3 \quad \text{og} \quad S(b_4) = b_2 - b_3$$

Fastlæg på denne baggrund en matrixrepræsentation for S i b-basen.

d) Redegør for at S ikke kan diagonaliseres, og bestem den til S svarende jordanmatrix samt en jordanbasis udtrykt i b-basen.

e) Fastlæg endvidere en matrixrepræsentation for S i standardbasen. (Benyt fx en orto<u>nor</u>mal basis, der svarer til b-basis).

f) Bestem endelig en basis for billedrummet af S^2.

Opgave 4.

Betragt vektorrummet $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ - dvs rummet af alle reelle 3×3 matricer.

a) Vis, at der ved $\langle A,B\rangle = tr(B^TA)$

er defineret et indre produkt på $M_{3\times3}(\mathbb{R})$. (B^T betegner den transponerede matrix til B).

b) Betragt derpå delmængderne

$$S = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

og

$$T = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

Vis at S og T er underrum i $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ og at $M_{3\times3}(\mathbb{R}) = S \oplus T$. Hvad er dimensionen af S?

c) I rummet S er nu givet de to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fastlæg da $\langle A,B\rangle$, $\|A\|$ og $\|B\|$.

d) I rummet S betragter vi $U = \text{span}\{A,B\}$ og $U^\perp$. Fastlæg de krav som elementerne i $U^\perp$ nødvendigvis skal opfylde. Hvad er dimensionen af $U^\perp$?

e) Fastlæg på denne baggrund en ortogonal basis for $U^\perp$.

f) Vis endvidere, at $T = S^\perp$.

g) Fastlæg endelig fourierkoefficienterne for matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Opgavesæt til den skriftlige del af eksamen i emnekredsen
Lineære strukturer fra algebra og analyse.
7. - 10. januar 2002.

Opgavesættet består af fire opgaver, som alle skal besvares.

Den enkelte eksaminand skal besvare opgaverne uden hjælp fra andre personer. Derudover er alle sædvanlige hjælpemidler tilladte.

Opgave 1.

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 35 & -12 & 4 & 30 \\ 22 & -8 & 3 & 19 \\ -10 & 3 & 0 & -9 \\ -27 & 9 & -3 & -23 \end{pmatrix}$$

a) Vis at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A er givet ved

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)^4.$$

b) Vis at A ikke er diagonaliserbar, og bestem en basis for egenrummet svarende til $\lambda = 1$.

c) Bestem en til A svarende jordanmatrix J.

d) Bestem en invertibel matrix Q, således at $J = Q^{-1}AQ$.

e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \qquad \text{og} \qquad f(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 2.

Der er givet en lineær afbildning T på vektorrummet V. Endvidere er mængden $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ en cykel af generaliserede egenvektorer for T svarende til egenværdien λ. v_1 er en egenvektor for T.

a) Vis at $(T - \lambda I_V)v_j = v_{j-1}$ for $j = 2,3,4$.

b) Vis tillige at λ^2 vil være egenværdi for T^2 med v_1 som egenvektor.

c) Bestem derpå $(T^2 - \lambda^2 I_V)v_j$ for $j = 1,2,3,4$ udtrykt ved elementerne i β.
[**Vink:** Benyt fx omskrivningen $T^2 - \lambda^2 I_V = (T + \lambda I_V)(T - \lambda I_V)$].

d) Opskriv nu den til T^2 svarende matrix i forhold til β.

e) Denne matrix er tydeligvis ikke en jordanmatrix. Fastlæg en ny basis γ af generaliserede egenvektorer <u>for T^2</u> så matricen for T^2 i forhold til denne basis er en jordanmatrix.

f) Vis endvidere at

$$[T^3]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

[**Vink:** Man kan fx benytte omskrivningen
$T^3 - \lambda^3 I_V = ((T - \lambda I_V)^2 + 3\lambda(T - \lambda I_V) + 3\lambda^2 I_V)(T - \lambda I_V)$].

g) Bestem endelig matricen for T^3 i forhold til den nye basis γ.

Opgave 3.

Lad $V = P_n([-1,1])$, dvs rummet af alle reelle polynomier af højst n-te grad på intervallet $[-1,1]$.

En afbildning $L: V \to V$ er defineret ved

$$Lp(t) = (1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t)$$

for alle $t \in [-1,1]$.

a) Vis at afbildningen L vil være lineær.

b) På V vælges standardbasen $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, og fastlæg billedrummet for L. Vil L være invertibel?

c) Fastlæg samtlige egenværdier for L, og godtgør at L vil være diagonaliserbar. [**Vink:** Det kan anbefales at benytte den til L svarende matrix ift $\mathcal{B}$].

d) I det tilfælde hvor $n = 4$ skal man bestemme de til L svarende egenpolynomier.

På V indføres det sædvanlige indre produkt

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

e) Vis at det for enhver ulige funktion s(t) gælder at

$$\int_{-1}^{1} s(t)dt = 0.$$

f) Vis derpå at de under punkt d) fundne egenpolynomier vil være ortogonale.

g) Vis endelig at L vil være selvadjungeret. [**Vink:** Vis at $Lp(t) = ((1 - t^2)p'(t))'$, og benyt derpå partiel integration].

Opgave 4.

For ethvert $a \in \mathbb{C}$ er som bekendt

$$e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \dots\dots\dots + \frac{1}{p!}a^p + \dots.$$

På denne baggrund defineres for enhver matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ følgende nye matrix

$$C_p = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots\dots\dots + \frac{1}{p!}A^p$$

hvor I er enhedsmatricen i $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ - samt matricen $e^A = \lim_{p\to\infty} C_p$.
(Det kan forudsættes bevist at matricen e^A eksisterer for enhver matrix A.)

a) Udregn e^O og e^I, hvor O er nulmatricen i $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

b) I $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ betragtes matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og udregn e^A, e^B samt e^{A+B}. Vil $e^{A+B} = e^A e^B$?

c) Antag igen at $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ samt at A og B kommuterer (dvs AB = BA). Vis da at $e^{A+B} = e^A e^B$, og benyt dette til at vise at e^A vil være en invertibel matrix for alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

d) En reel nxn-matrix A kan som bekendt diagonaliseres hvis der findes en invertibel matrix P således at

$$P^{-1}AP = D$$

hvor D er en diagonalmatrix. Antag at A kan diagonaliseres, og bestem da e^A udtrykt ved e^D.

e) Vi har nu det lineære differentialligningssystem

$$x'(t) = Ax(t)$$

hvor $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, og A er som beskrevet under punkt d.

Vis da at den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet er

$$x(t) = e^{tA}c \qquad \text{hvor} \quad c \in \mathbb{C}^n$$

f) Kan matricen under punkt d ikke diagonaliseres, kan man som bekendt altid finde en invertibel matrix P således at

$$P^{-1}AP = J$$

hvor J er en jordanmatrix og hvor søjlerne i P netop udgør jordanbasen.

Er D den diagonalmatrix som netop består af hoveddiagonalen i J og er $M = J - D$, skal det vises at

M er nilpotent samt at M og D kommuterer.

g) Vi betragter igen det lineære differentialligningssystem under punkt e, dog med den begrænsning at A ikke kan diagonaliseres.

Foretages transformationen $x(t) = Py(t)$, hvor P er den under punkt f nævnte matrix, ønskes det lineære differentialligningssystem opskrevet, der har funktionen y som løsning.

Den fuldstændige løsning til dette nye differentialligningssystem vil være på formen

$$y(t) = e^{tJ} c \qquad \text{hvor} \quad c \in \mathbb{C}^n.$$

Redegør for at matricen e^{tJ} for alle t vil være en øvre trekantsmatrix.

h) I fortsættelse af opgave 1, punkt e) ønskes de tilhørende matricer P, J og e^{tJ} opskrevet.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER.

Opgavesæt til den skriftlige del af eksamen i emnekredsen
Lineære strukturer fra algebra og analyse.
3. - 6. juni 2002.

Opgavesættet består af fire opgaver, som alle skal besvares.

Den enkelte eksaminand skal besvare opgaverne uden hjælp fra andre personer. Derudover er alle sædvanlige hjælpemidler tilladte.

Opgave 1.

En matrix A er givet ved

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A er fastlagt ved

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)^2(4 - \lambda)^2.$$

b) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.

c) Bestem en til A svarende jordanmatrix J.

d) Bestem en invertibel matrix Q, således at $J = Q^{-1}AQ$.

e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad f(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 2.

På $C^{\infty}(\mathbb{R})$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner - er den lineære afbildning D defineret ved

$$Df = f'$$

Den identiske afbildning benævnes D^0.

På $C^{\infty}(\mathbb{R})$ betragtes underrummet

$$V = N(D^4+2D^2+D^0)$$

dvs nulrummet for den lineære afbildning $D^4 + 2D^2 + D^0$

a) Bestem en basis - af reelle funktioner - for V.

På V defineres endvidere de lineære afbildninger $U,T\colon V \to V$ givet ved

$$U = D^2 - D^0 \quad \text{og} \quad T = D^2 + D^0.$$

b) Bestem billedrummene - B(U) og B(T) - for de to lineære afbildninger

c) Godtgør dernæst at begge afbildninger vil have netop én egenværdi, og bestem en basis for de respektive egenrum.

d) Vis at der findes to U-invariante underrum i V af dimension 2, og at disse to underrum tillige vil være T-cykliske.

Opgave 3.

Der er givet en matrix A og med L_A betegnes venstre-multiplikations afbildningen svarende til A, endvidere betegner N(A) og B(A) nulrum og billedrum for denne afbildning.

a) Lad P betegne en reel $m \times n$ matrix og Q en reel $m \times p$ matrix, og vis da at følgende udsagn er ækvivalente:

- der findes en reel $p \times n$ matrix X, så $P = QX$
- $B(P) \subseteq B(Q)$

b) Lad P igen betegne en reel $m \times n$ og lad P^t betegne dens transponerede. $\mathbb{R}^n$ tænkes endvidere forsynet med det sædvanlige indre produkt. Vis da at

- $B(P^t) \subseteq N(P)^{\perp}$
- $\dim B(P^t) = \dim N(P)^{\perp}$
- $B(P^t) = N(P)^{\perp}$

c) Lad igen P betegne en reel $m \times n$ matrix og Q nu en reel $p \times n$ matrix, og vis da at følgende udsagn er ækvivalente:

- der findes en reel $m \times p$ matrix Y så $P = YQ$
- $N(Q) \subseteq N(P)$.

Opgave 4.

For ethvert $a \in \mathbb{C}$ er som bekendt

$$e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{p!}a^p + \ldots.$$

På denne baggrund defineres for enhver matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ følgende nye matrix

$$C_p = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{p!}A^p$$

hvor I er enhedsmatricen i $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ - samt matricen $e^A = \lim_{p\to\infty} C_p$.
(Det kan forudsættes bevist at matricen e^A eksisterer for enhver matrix A.)

a) Udregn e^O og e^I, hvor O er nulmatricen i $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

b) I $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ betragtes matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og udregn e^A, e^B samt e^{A+B}. Vil $e^{A+B} = e^A e^B$?

c) Antag igen at $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ samt at A og B kommuterer (dvs $AB = BA$). Vis da at $e^{A+B} = e^A e^B$, og benyt dette til at vise at e^A vil være en invertibel matrix for alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

d) En reel n×n-matrix A kan som bekendt diagonaliseres hvis der findes en invertibel matrix P således at

$$P^{-1}AP = D$$

hvor D er en diagonalmatrix. Antag at A kan diagonaliseres, og bestem da e^A udtrykt ved e^D.

e) Vi har nu det lineære differentialligningssystem

$$x'(t) = Ax(t)$$

hvor $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, og A er som beskrevet under punkt d.

Vis da at den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet er

$$x(t) = e^{tA}c \qquad \text{hvor} \quad c \in \mathbb{C}^n$$

f) Kan matricen under punkt d ikke diagonaliseres, kan man som bekendt altid finde en invertibel matrix P således at

$$P^{-1}AP = J$$

hvor J er en jordanmatrix og hvor søjlerne i P netop udgør jordanbasen.

Er D den diagonalmatrix som netop består af hoveddiagonalen i J og er $M = J - D$, skal det vises at

M er nilpotent samt at M og D kommuterer.

g) Vi betragter igen det lineære differentialligningssystem under punkt e, dog med den begrænsning at A ikke kan diagonaliseres.

Foretages transformationen $x(t) = Py(t)$, hvor P er den under punkt f nævnte matrix, ønskes det lineære differentialligningssystem opskrevet, der har funktionen y som løsning.

Den fuldstændige løsning til dette nye differentialligningssystem vil være på formen

$$y(t) = e^{tJ} c \qquad \text{hvor} \quad c \in \mathbb{C}^n.$$

Redegør for at matricen e^{tJ} for alle t vil være en øvre trekantsmatrix.

h) I fortsættelse af opgave 1, punkt e) ønskes de tilhørende matricer P, J og e^{tJ} opskrevet.

Examen i videregående lineær algebra (E1). Opgave til besvarelse i 72 timer. Januar 2003

Opgave nr 1

Lad S og T være underrum i $\mathcal{R}^4$. Vi sætter

$$
\begin{aligned}
s &= \dim S \\
t &= \dim T \\
p &= \dim(S \cap T) \\
q &= \dim(S + T)
\end{aligned}
$$

Bestem alle de kombinationer af s, t, p, q som kan realiseres, når S og T varieres.

Opgave nr 2

Lad R være en ring og lad $U = R^\star$ betegne mængden af enheder i R. (En enhed er per definition et invertibelt element i forhold til ringmultiplikationen. Man benytter også betegnelsen regulært element.)
Til hver kombination af et element $a \in U$ og et element $b \in R$ lader vi svare den afbildning f_{ab} af R ind i sig selv som er givet ved

$$f_{ab}(x) = ax + b.$$

Vi kalder f_{ab} for den af (a, b) bestemte affine afbildning, og vi betegner mængden af affine afbildninger $A(R)$.

Vis at f_{ab} for ethvert par (a, b) er en bijektion, der hvis R er endelig, kan opfattes som en permutation.

Antag at $R = \mathcal{Z}_5$ og angiv alle elementer i $A(R)$ som en permutation i cyklisk notation.

For ehvert sæt (a, b) for hvilket den tilsvarende affine afbildning er defineret definerer vi også matricen M_{ab} ved

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for at afbildningen $M_{ab} \mapsto f_{ab}$ kan opfattes som en gruppehomomorfi

Vis at der kan opstilles et sæt ligninger, som er lineære i a og b, og som for givne x og y i U bestemmer de affine afbildninger for hvilke $(x\ y)$ indgår som en 2-cykel. Kontroller at resultatet stemmer med de informationer du allerede har fundet vedrørende $R = \mathcal{Z}_5$

Vis at $\{f_{ab} : a = 1\}$ udgør en undergruppe af $A(R)$. Vis at denne undergruppe er normal og at kvotientgruppen er isomorf med U, idet afbildningen $a \mapsto \{f_{ab} : b \in R\}$ er en isomorfi. En eftervisning af resultatet for tilfældet $R = \mathcal{Z}_5$ vil blive anset for at være tilfredsstillende ligesom naturligvis et generelt bevis vil være.

Opgave nr 3

Eftervis at polynomiet x^5+x^2+1 er irreducibelt over $\mathcal{Z}_2$.

Lad L være betegnelse for restklasselegemet

$$\mathcal{Z}_2[X]/(X^5+X^2+1).$$

For et polynomium $a(X)$ benytter vi $[a(X)]$ som betegnelse for den restklasse som indeholder $a(X)$

Resumer kort de grundlæggende forhold for dette legeme, herunder hvor mange elementer der er i L og hvordan man kan vælge en særlig simpel repræsentant for hver restklasse, som vi kunne kalde den principale repræsentant.

Vedstående tabel over potenser af $[X]$ kan tages som en oplysning, der kan bruges uden yderligere bevis.

Argumenter vha vedstående tabel for at $[X]$ er et primitivt element og for at $[X^2]$ også er det.

Gør også rede for hvordan denne tabel kan udnyttes til at udføre multiplikationer og divisioner i legemet.

Vi sætter $\alpha = [X]$

Lad A betegne matricen

$$\begin{pmatrix} \alpha^{24} & \alpha^{12} & \alpha^{7} \\ \alpha^{7} & \alpha^{2} & \alpha^{7} \\ \alpha^{12} & \alpha^{12} & \alpha^{2} \end{pmatrix}.$$

Vis at denne matrix har egenværdierne $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6$ og bestem det tilhørende egenrum for en af egenværdierne.

Afgør om A kan diagonaliseres.

n	$[X^n]$
1	$[X]$
2	$[X^2]$
3	$[X^3]$
4	$[X^4]$
5	$[1+X^2]$
6	$[X+X^3]$
7	$[X^2+X^4]$
8	$[1+X^2+X^3]$
9	$[X+X^3+X^4]$
10	$[1+X^4]$
11	$[1+X+X^2]$
12	$[X+X^2+X^3]$
13	$[X^2+X^3+X^4]$
14	$[1+X^2+X^3+X^4]$
15	$[1+X+X^2+X^3+X^4]$
16	$[1+X+X^3+X^4]$
17	$[1+X+X^4]$
18	$[1+X]$
19	$[X+X^2]$
20	$[X^2+X^3]$
21	$[X^3+X^4]$
22	$[1+X^2+X^4]$
23	$[1+X+X^2+X^3]$
24	$[X+X^2+X^3+X^4]$
25	$[1+X^3+X^4]$
26	$[1+X+X^2+X^4]$
27	$[1+X+X^3]$
28	$[X+X^2+X^4]$
29	$[1+X^3]$
30	$[X+X^4]$
31	$[1]$

Opgave nr 4

I rummet er der givet fire planer med ligningerne:

$$\begin{aligned} x+y+z &= -1 \\ x-y-z &= 1 \\ -x+y-z &= 1 \\ -x-y+z &= 1 \end{aligned}$$

Bestem for ethvert par af disse planer en parameterfremstilling deres skæring. Gør tilsvarende for hver samling af tre af disse planer.

Betragt derefter de fire ligninger som ligninger i $\mathcal{Z}_3$ og lever passende beskrivelser af de tilsvarende fællesmængder, herunder angivelse af hvor mange elementer de indeholder.

Eksamen i emnekredsen E1
januar 2004

Besvarelsen skal danne grundlag for at vurdere eksaminandens færdigheder med hensyn til følgende aspekter:

- *Klarhed og overskuelighed i fremstillingen.*
- *Konsistens i argumentationen.*
- *Præcision i terminologi og notation.*
- *Klarhed ved referencer til anvendte resultater.*
- *Omsætning af et forelagt problem til et klart formuleret spørgsmål inden for pensum.*
- *Anvendelse af de i pensum forekommende resultater.*

Sættet vil blive vurderet med henblik på i hvilket omfang tilstedeværelsen af disse færdigheder er sandsynliggjort. Sættet vil altså blive vurderet som værende fuldt tilfredsstillende besvaret hvis samtlige færdigheder skønnes fuldt tilfredsstillende dokumenteret, også selv om visse spørgsmål ikke er besvaret fuldstændigt.

Ved bedømmelsen vil der også blive taget hensyn til dele af besvarelsen, som giver anledning til tvivl om, at eksaminanden besidder visse af de nævnte færdigheder.

Undgå derfor at medtage svar, som kan så tvivl. Især vil fejlslutninger og fejlformuleringer trække ned. Hvis du har mistanke om, at nogle svar indeholder simple regnefejl, skal du dog ikke udelade dem af den grund, men gøre opmærksom på, hvorfor du tror der er regnefejl.

Det er tilladt at benytte edb-understøttede hjælpemidler (for eksempel Matlab) som kontrol. Udskrifter kan om det ønskes vedlægges. Men kun udregninger foretaget "i hånden" og dokumenteret ved udførlige mellemregninger indgår positivt i bedømmelsen.

Hvis der er uoverensstemmelse mellem dine egne beregninger og kontrolberegningerne, vil det være i orden at regne videre på grundlag af kontrolberegningerne, hvis du har mest tillid til dem.

Bemærk at opgaveformuleringerne kan indeholde mellemresultater som kan gøre det muligt at komme videre fra et punkt i opgaven selvom man ikke har kunnet nå frem til dette punkt. Der er altså ingen grund til at gå i stå i en opgave ved et p

1:

For enhver afbildning $f : X \to X$ lader vi $\mathrm{Fix}(f)$ betegne mængden af fixpunkter for f.

Vis at mængden af fixpunkter for en lineær afbildning altid er et underrum og karakteriser mængden af fixpunkter for en affin afbildning, altså en afbildning af formen $F(x) = Ax + b$ hvor A er en matrix og b er en vektor.

Lad A være betegnelse for matricen

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vis at A er matrix for en drejning og bestem dennes drejningsakse.

Lad $b \in \mathbb{R}^3$. Lad F_b betegne den afbildning af $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$, som er givet ved formlen $F_b(x) = Ax + b$.

Bestem mængden af fixpunkter for F_b og vis at denne udgør en linje i rummet, når $b = (2, 1, -1)$. Vis at fixpunktmængden for F_b er en linje, netop når b er vinkelret på drejningsaksen for drejningen hørende til A.

2:

Lad P betegne den regulære femkant i planen, hvis hjørner er løsningerne til ligningen $z^5 = 1$, idet vi også tænker på planen som en kompleks talplan. Vi lader $\mathcal{F}$ betegne isometrigruppen for P, altså gruppen af drejninger og spejlinger af planen som fører P over i sig selv.

Opstil en operationstabel (gruppetabel) for gruppeoperationen i $\mathcal{F}$.

Lad $\mathcal{G}$ betegne den undergruppe af S_5 som er frembragt af de to permutationer $p = (25)(34)$ og $(13)(45)$.

Angiv en operationstabel for gruppeoperationen i $\mathcal{G}$.

Lad os for $a, b \in \mathbb{Z}_5$ lade $f_{a,b}$ være betegnelse for den afbildning af $\mathbb{Z}_5$ på sig selv, som er givet ved formlen $f_{a,b}(x) = ax + b$.

Lad $\mathcal{H}$ betegne mængden $\{f_{a,b} : a \in \{1, -1\}, b \in \mathbb{Z}_5\}$. Vis at $\mathcal{H}$ med sammensætning som gruppeoperation er en gruppe og opstil en operationstabel.

Vis at disse tre grupper er indbyrdes isomorfe.

Angiv for hver af grupperne to elementer som frembringer hele gruppen.

Lad nu l være den linje, som er vinkelret på den plan hvori P befinder sig og går gennem centrum for P, og lad E og F være to punkter på l, som ligger symmetrisk mht planen .Lad

Q være det polyeder, der som hjørner har hjørnerne af P samt E og F.(Et polyeder er en mangesidet figur som for eksempel en terning og et tetraeder.)

Angiv drejninger og spejlinger for Q og overvej hvilke relationer der er til de tre grupper ovenfor.

Bemærk figurerne på de efterfølgende sider, som dels illustrer opgaven, dels kan efter behov kan anvendes til at fremstille modeller.

3:

Lad Q betegne den kvadratiske form på $\mathbb{R}^n$, givet ved formlen

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

hvor $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Lad A betegne matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gør rede for at når $n = 4$ så er Q den af A bestemte kvadratiske form.

Bestem et koordinatsystem i forhold til hvilket Q er givet ved formlen

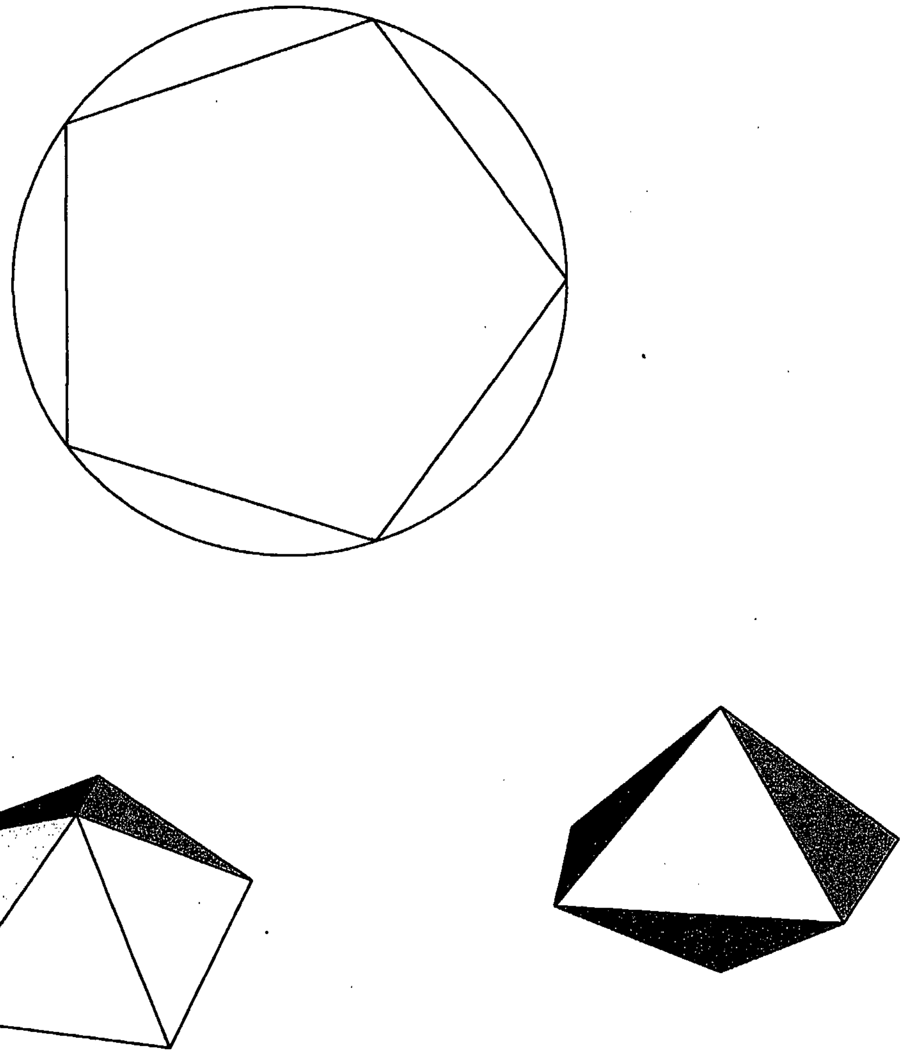
$$Q(u) = -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + 3u_4^2,$$

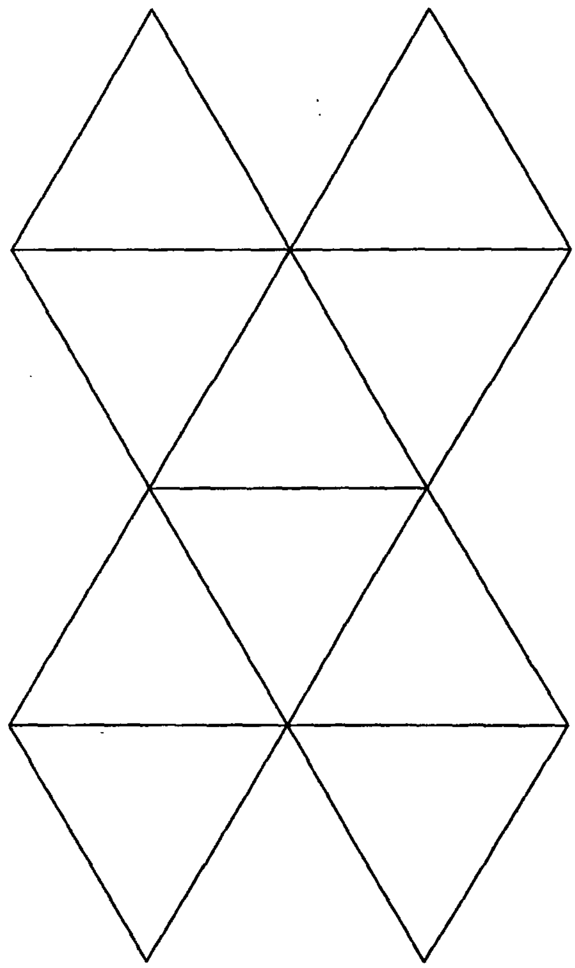
hvor $u = (u_1, \ldots, u_4)$.

Der ønskes en udregning af det karakteristiske polynomium for A med anvendelse af række- og søjleoperationer og med alle mellemregninger anført.

Der ønskes også en redegørelse for at det karakteristiske polynomium kan bestemmes på en nemmere måde, når man udnytter at man på forhånd kender formlen for Q i det nye koordinatsystem, altså i bagklogskabens klare lys.

Opstil en hypotese om tilsvarende resultater for andre værdier af n.





Denne figur kan klippes ud og foldes og klistres til polyederet Q.

Matematisk analyse
1. semester

Intern prøve i emnekredsen

E2 Ikke-lineære strukturer fra analyse.
For studerende, der går op efter 1993-pensum

72 timer efter eget valg 20-27 november 1994

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Det forventes at man arbejder alene

Opgavesættet består af seks opgaver.

Opgave 1

a) Vis, at $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sin(x^4)}{x^4}} = 1$

b) Vis, at $f(x) = \sqrt{\sin(x^4)}$ er differentiabel i $x = 0$, og find $f'(0)$.

Opgave 2

Find stamfunktionen

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$$

Opgave 3

Vis, at hvis følgen $\{a_n\}$ er konvergent med grænseværdi L, og funktionen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er kontinuert i L, da er følgen $\{g(a_n)\}$ konvergent med grænseværdi $g(L)$.

Vink: Man kan evt. benytte beviset for, at sammensætning af kontinuerte funktioner giver en kontinuert funktion (Apostol sætn. 3.5), som inspirationskilde.

Opgave 4

Bestem de værdier af $n \in \mathbf{Z}_+$, for hvilke funktionen

$$f_n(x) = \frac{x^n \cos x}{\sin(x^2)}$$

har grænseværdi for $x \to 0$. Bestem i disse tilfælde grænseværdien.

Opgavesættet fortsættes på næste side

Opgave 5

For hver af følgende rækker skal man afgøre om rækken er konvergent eller divergent.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+n^4} - n^2.$

Opgave 6

a) Vis, at

$$\frac{n!}{n^n} > \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} > 0$$

for alle $n \in Z_+$.

b) Find

$$\sup\left\{ \frac{n!}{n^n} \;\middle|\; n \in Z_+ \right\}.$$

c) Bevis, at følgen $a_n = n!/n^n$ er konvergent. Grænseværdien skal ikke bestemmes.

Opgavesættet er slut

Intern evalueringssæt i emnekredsen
E2 Ikke-lineære strukturer fra analysen.

Opgavesættet består af 7 opgaver, der ønskes besvaret i perioden 18 januar - 23 januar 1995.

Opgave 1

Lad funktionerne f og g, defineret på $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ med værdier i $\mathbf{R}$, være givet ved

$$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(\frac{1}{x})$$

og

$$g(x) = \cos(x) \cdot \sin(\frac{1}{x})$$

a) Vis, at grænseværdierne $\lim_{x \to 0} f(x)$ og $\lim_{x \to \infty} f(x)$ eksisterer og bestem disse.

b) Vis, at $g(x)$ er differentiabel og beregn den afledte $g'(x)$, for $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

c) Vis, at $g'(x)$ har en grænseværdi $\lim_{x \to \infty} g'(x)$ og bestem denne.

Opgave 2

Betragt integralet

$$\int_1^\infty \left(\frac{x}{2x^2 + 2C} - \frac{C}{x+1} \right) dx$$

for $C \in \mathbf{R}$.

Bestem de værdier af C for hvilke integralet konvergerer og evaluer integralet for de værdier af C hvor det konvergerer.

Opgave 3

Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være en reel funktion og betragt talfølgen

$$Q_n = n\left(f(\frac{1}{n}) - f(0)\right)$$

for $n \in \mathrm{N}$.

a) Vis, at talfølgen (Q_n) har en grænseværdi, for $n \to \infty$, hvis $f(x)$ er differentiabel i punktet $x = 0$, og bestem grænseværdien $Q = \lim_{n\to\infty} Q_n$.

b) Vis, at der ikke gælder, at hvis følgen (Q_n) har en grænseværdi for $n \to \infty$, så er $f(x)$ differentiabel i punktet x.
(Vink: Konstruer evt. et modeksempel, husk at begrunde svaret.)

Opgave 4

Lad (a_n), $n \in \mathrm{N}$, være en reel talfølge, hvor $a_1 = \sqrt{2}$ og $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}$, for $n \geq 2$.

a) Vis, ved induktion, at $a_n < 2$ for alle $n \in \mathrm{N}$.

b) Vis, at (a_n) er en voksende følge.

c) Vis, at (a_n) er konvergent.

d) Find grænseværdien $a = \lim_{n\to\infty}(a_n)$.
(Vink: Vis at a er fixpunkt for $f(x) = \sqrt{x+2}$, dvs. at a opfylder ligningen $a = \sqrt{a+2}$.)

Opgave 5

For hver af nedenstående rækker skal man afgøre, om rækken er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{2^{2n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{n^2+\log(n)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{\log(1+\frac{1}{n^2})}$
(Vink: Vis, at $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.)

Opgave 6

Betragt funktionsfølgen

$$f_n(x) = x^n \cos(\frac{\pi}{2}x)$$

for $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Vis, at funktionsfølgen $(f_n(x))$ konvergerer punktvis og bestem grænsefunktionen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Vis, at funktionsfølgen $(f_n(x))$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ på intervallet $[0,1]$.
(Vink: Opdel intervallet i to delintervaller, $[0,\alpha]$ og $[\alpha,1]$ for passende valgt α og benyt bl.a. at $\cos(\frac{\pi}{2}x)$ er kontinuert.)

Opgave 7

Betragt den reelle potensrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} x^{2n+1}$$

a) Bestem rækkens konvergensradius ρ.

b) Vis, at rækken konvergerer for $x = -\rho$ og $x = \rho$.

c) Vis, at rækken er uniformt konvergent i intervallet $[-\rho, \rho]$.

Opgavesættet er slut

Intern prøve i emnekredsen

E2 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

4 dage efter eget valg 11-22 oktober 1995

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Det forventes at man arbejder alene

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1

Lad A være en ikke-tom, opadbegrænset delmængde af de positive reelle tal R_+.

Vis, at $(\sup A)^2 = \sup A_2$, hvor $A_2 = \{x^2 | x \in A\}$.

Opgave 2

Betragt funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Vis med udgangspunkt i definitionen af grænseværdi, at $f(x)$ ikke har en grænseværdi for $x \to 0$.

Opgave 3

Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Vis, at $f(x)$ er differentiabel i $x = 0$ og at $f'(0) = 0$.

b) Find $f'(x)$ for alle $x \in R$ og undersøg om $f'(x)$ er kontinuert i 0.

Opgave 4

Den svære

Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{for } x \in]0;1]; \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Vis, at $f(x)$ er integrabel (over $[0;1]$), selv om $f(x)$ ikke er kontinuert i 0.

NB Integralets værdi skal *ikke* bestemmes.

Vink: Vis, at for alle $n \in P$ gælder, at $f(x)$ er integrabel på $[\frac{1}{n};1]$ og at forskellen mellem over- og undersum på intervallet $[0;\frac{1}{n}]$ kan gøres mindre end $1/n$.

Opgavesættet er slut

3

IKKE-LINEÆRE STRUKTURER (E2)

PRØVE 29-31. JANUAR 1996

Sættet består af fire opgaver.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

0 9 OPGAVE 1

Bevis at det for alle $z \in \mathbb{C}$ gælder at

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Lad for $x \in \mathbb{R}$ funktionen $c_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være givet ved forskriften

$$c_x(y) = \cos(x + iy)$$

Vis at c_x er differentiabel med

$$c_x'(y) = -i \sin(x + iy)$$

Lad ligeledes for $x \in \mathbb{R}$ funktionen s_x være defineret ved i definitionen for c_x at udskifte cos med sin. Vis at både c_x og s_x er løsninger til differentialligningen

$$(D^2 - I)f = 0$$

og at parret (c_x, s_x) for fast x udgør en basis for den fuldstændige løsning hertil og angiv den partikulære løsning, for hvilken $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $f'(0) = -i\frac{\sqrt{2}}{2}$ Angiv også koordinatsættet for løsningen e^t i et af koordinatsystemerne (c_x, s_x) .

1 0 OPGAVE 2

Lad (a_n) være en talfølge med positive elementer. Vis at følgende tre påstande er ensbetydende:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{er absolut konvergent}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) \quad \text{er absolut konvergent}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad \text{er absolut konvergent}$$

Et udtryk som det sidste kaldes et uendeligt produkt, og konvergens af uendlige produkter defineres analogt til konvergens af uendelige rækker.

Foretag selv de nødvendige præciseringer.

Benyt ovenstående til at give et simpelt bevis for at den harmoniske række er divergent.

3.2

1 1 OPGAVE 3

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, og lad (x_n) være en talfølge, som konvergerer mod x. Bevis at talfølgen $(f(x_n))$ konvergerer mod $f(x)$. Antag nu yderligere, at det for alle n gælder at

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Vis at $f(x) = x$

Lad $a > 0$ være givet, og antag at en følge (x_n) er defineret ved at

$$x_1 = \frac{a}{2}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

Vis, at hvis (x_n) konvergerer mod x, da vil $x = \sqrt{a}$.

Kom med et forslag til, hvad dette resultat kan bruges til. (Det kan oplyses at følgen (x_n) altid vil konvegere.)

1 2 OPGAVE 4

Lad P være et polynomium af grad n. Vis at det ubestemte integral

$$\int P(x)\mathrm{Arctg}(x)\ dx$$

kan udtrykkes ved hjælp af de sædvanlige funktioner; du behøver ikke at give en eksplicit formel, blot vise at det kan lade sig gøre.

Vis, at integralet vil have formen

$$Q(x)\mathrm{Arctg}(x) + R(x) + a\log(1 + x^2),$$

hvor Q og R er polynomier og a er en konstant. Angiv også nogle ligninger, som kan bruge til at beregne Q, R og a, når P er kendt.

Beregn endelig

$$\int (3x^2 + 2x + 1)\mathrm{Arctg}(x)\ dx$$

2

IKKE-LINEÆRE STRUKTURER (E2)

PRØVE 17-19. JANUAR 1996

Sættet består af fire opgaver.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

0 5 OPGAVE 1

Vis at det for ethvert naturligt tal n gælder at

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x + o(x),$$

idet vi benytter "lille o" terminologien.
Vis at det for ethvert naturligt tal n gælder at

$$\sqrt[n]{\log(1+x^{2n})} = x^2 + o(x^2).$$

Vis endelig at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\log(1+\frac{1}{n^6})}$$

er konvergent.

0 6 OPGAVE 2

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være givet ved forskriften

$$f(t) = \mathrm{Log}(1+it)$$

hvor $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ er givet ved forskriften $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\mathrm{Arg}z$, idet $\mathrm{Arg}z$ betegner det principale argument for z, altså det argument, som ligger i intervallet $]-\pi, \pi]$, således at vi fx for $x > 0$ har at $\mathrm{Arg}(x+iy) = \mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$.
Vis at f er differentiabel (præciser hvor) med

$$f'(t) = \frac{i}{1+it}$$

Bestem en (komplex) potensrække $\sum a_n t^n$, som i det indre af sit konvergensinterval (konvergenscirklens skæring med den reelle akse) har f' som sumfunktion. Bestem en (komplex) potensrække, som i det indre af sit konvergensinterval har f som sumfunktion. Hvad kan du sige om denne rækkes sum for $t = -i$.
Opstil endelig en række $\sum b_n x^n$, om hvilken du tror, at dens sum for ethvert x i det indre af konvergenscirklen er $\mathrm{Log}(1+x)$.
Du skal altså blot fremsætte en hypotese, ikke bevise den i sin helhed, men dog vise at den er konsistent med, hvad du formodes at vide i forvejen— herunder hvad der er fremkommet i denne opgave.

2.2

0 7 OPGAVE 3

Lad f være en kontinuert og voksende (i blid forstand) funktion. Vis at det for enhver delmængde A af de reelle tal gælder at

$$\sup f(A) = f(\sup(A))$$

når begge sider i ligningen har mening.

Diskuter ved hjælp af eksempler nødvendigheden af de to betingelser på f.

Kom med forslag (uden beviser) til lignende formler, som fremkommer ved at ændre på forudsætningerne.

0 8 OPGAVE 4

Lad $a < b$ og lad $(x_0, x_1, \ldots)$ være en voksende talfølge for hvilken $x_0 = a$ og $x_n \to b$ for $n \to \infty$.

Lad c_n være en begrænset talfølge og lad funktionen f være defineret på $[a, b]$ således at $f(x) = c_n$ for $x_{n-1} < x < x_n$ og således at f er begrænset.

Vis at f er integrabel og at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n - x_{n-1})$$

er konvergent med summen $\int_a^b f(t)\, dt$.

Intern prøve i emnekredsen

E2 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

72 timer efter eget valg 1997

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Det er ikke tilladt at arbejde sammen

Opgavesættet består af fire opgaver.

1 3

Opgave 1

Lad A og B være to ikke-tomme opadbegrænsede mængder, som opfylder følgende betingelser:

$$\forall a \in A : \exists b \in B : a < b$$
$$\forall b \in B : \exists a \in A : b < a$$

a) Gør rede for at mængderne A og B begge har et supremum.

b) Vis at $\sup A = \sup B$.

c) Giv et eksempel hvor A og B er disjunkte mængder.

1 4

Opgave 2

Bestem stamfunktionen

$$\int \frac{3(x^2+1)\,dx}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

1 5

Opgave 3

Undersøg for hver af følgende to rækker om rækken er konvergent eller divergent

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!\,3^n}{n^{3n}2^{2n}}.$$

1 6

Opgave 4

Lad $a < b$ og lad $(x_0, x_1, \ldots)$ være en voksende talfølge for hvilken $x_0 = a$ og $x_n \to b$ for $a \to \infty$. Lad c_n være en begrænset talfølge og lad funktionen f være defineret ved på $[a, b]$ således at

$$f(x) = c_n \qquad \text{for} \qquad x_{n-1} \le x < x_n.$$

a) Gør rede for at $f(x)$ er begrænset.

b) Vis at $f(x)$ er integrabel, og at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n - x_{n-1})$ er konvergent med summen $\int_a^b f(t)\,dt$.

IKKE-LINEÆRE STRUKTURER (E2)
INTERN PRØVE — JANUAR 1999

Sættet består af tre opgaver.
Maximalt tidsforbrug 72 timer.

Besvarelsen skal danne grundlag for at vurdere eksaminandens færdigheder med hensyn til følgende aspekter:

- *Klarhed og overskuelighed i fremstillingen.*
- *Konsistens i argumentationen.*
- *Præcision i terminologi og notation.*
- *Klarhed ved referencer til anvendte resultater.*
- *Omsætning af et forelagt problem til et klart formuleret spørgsmål inden for pensum.*
- *Anvendelse af de i pensum forekommende resultater.*
- *Sikkerhed i de komplekse tals aritmetik og regneregler for elementære funktioner.*
- *Sikkerhed i differentiation og integration af funktioner af en reel variabel.*

Sættet vil blive vurderet med henblik på i hvilket omfang tilstedeværelsen af disse færdigheder er sandsynliggjort. Sættet vil altså blive vurderet som værende fuldt tilfredsstillende besvaret hvis samtlige færdigheder skønnes fuldt tilfredsstillende dokumenteret, også selv om visse spørgsmål ikke er besvaret fuldstændigt.

Ved bedømmelsen vil der også blive taget hensyn til dele af besvarelsen, som giver anledning til tvivl om, at eksaminanden besidder visse af de nævnte færdigheder.

Undgå derfor at medtage svar, som kan så tvivl. Især vil fejlslutninger og fejlformuleringer trække ned. Hvis du har mistanke om, at nogle svar indeholder simple regnefejl, skal du dog ikke udelade dem af den grund, men gøre opmærksom på, hvorfor du tror der er regnefejl.

Det er tilladt at benytte edb-understøttede hjælpemidler (Mathematica, Derive,Matlab og lignende) som kontrol. Udskrifter kan om det ønskes vedlægges. Men kun udregninger foretaget "i hånden" og dokumenteret ved udførlige mellemregninger indgår positivt i bedømmelsen.

Hvis der er uoverensstemmelse mellem dine egne beregninger og kontrolberegningerne, vil det være i orden at regne videre på grundlag af kontrolberegningerne, hvis du har mest tillid til dem.

Det er tilladt at henvise til sætninger fundet i andre lærebøger, når disse sætninger citeres fuldt. For sætninger fra det anvendte materiale (Lindstrøm mm) er det nok at henvise til sætningens nr. Dog skal det helt klart fremgå, hvordan sætningen bliver brugt i sammenhængen, ligesom det naturligvis skal godtgøres at betingelserne for at bruge den er opfyldt.

3 4 Opgave 1

Lad f, g, h være tre reelle afbildninger defineret på delmængder af de reelle tal, således at $h = g \circ f$. Hvis vi antager, at to af disse tre afbildninger er kontinuerte kan man spørge om den tredje også er kontinuert.

(1) Angiv for hvert valg af de to om svaret er ja eller nej, hvis der ikke gøres yderligere antagelser.

Gør nu den ekstra antagelse at f er defineret på et interval og strengt monoton.

(2) Hvordan bliver svaret i denne situation

Gør i stedet den ekstra antagelse at g er defineret på et interval og strengt monoton.

(3) Hvordan bliver svaret i denne situation

(4) Formuler og besvar analoge spørgsmål, når vi i stedet for kontinuitet ser på differentiabilitet.

Lad g være en funktion defineret på et åbent interval. Antag at det for ethvert x i definitionsmængden gælder at $y = f(x)$ er en løsning til ligningen

$$y^3 + y = x^3 - x$$

(5) Vis at g er en differentiabel funktion.

3 5 Opgave 2

Ved undersøgelse af om grænseværdien

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

eksisterer i situationer, hvor både tæller og nævner har grænseværdien 0, kan man betjene sig af gentagen brug af l'Hôpitals regel eller benytte Taylors formel på tæller og nævner.
Situationen foreligger i følgende eksempler

$$\begin{array}{rrl} f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x, & g(x) = 2x^3 - x^4, & a = 0 \\ f(x) = 1 - \cos x - \frac{1}{2} x \sin x, & g(x) = x^4, & a = 0 \\ f(x) = x - \sin x + \frac{1}{6}\sin(x^3), & g(x) = \sin(x^5), & a = 0 \end{array}$$

(6) Foretag en grænseværdiundersøgelse i disse eksempler. I hvert eksempel skal begge nævnte metoder illustreres.

Idet vi for enhver C^n funktion f lader $T_n f$ betegner Taylorpolynomiet af orden n udviklet ud fra a kan man altså betragte den metode, der består i at erstatte spørgsmålet om eksistensen af og den eventuelle værdi af

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

med spørgsmålet om eksistensen af og den eventuelle værdi af

$$\lim_{x \to a} \frac{T_n f(x)}{T_n g(x)}$$

for passende værdier af n.

(7) Formuler en sætning, der sammenfatter denne metode.

(8) Foretag en sammenligning af denne metode med gentagen brug af l'Hôpitals regel.

3 6 Opgave 3

Ved brug af de gængse metoder til at finde partialbrøksopspaltning kan man for ethvert normeret andengradspolynomium P med de to forskellige rødder a_1 og a_2 finde konstanter c_1 og c_2 således at

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2}$$

(9) Angiv formler for c_1 og c_2

Betragt specielt polynomiet

$$P(x) = 1 - x - x^2$$

Lad os minde om at

$$\frac{1}{1-x}$$

er sumfunktion for en vis kvotientrække, og at vi har omskrivningen

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}}$$

(10) Benyt partialbrøksopspaltningen til at bestemme en potensrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

med

$$\frac{1}{1-x-x^2}$$

som sumfunktion

Antag i det videre at

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

(11) Bestem potensrækkens konvergensområde.

(12) Vis at $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$

(13) Vis at b_n er heltallig for alle n og angiv de første 5 af disse hele tal, og check at dette stemmer overens med formlen for $n = 0, 1, 2$ ved udregning af udtrykket i formlen.

Man kan foretage en lignende undersøgelse for ethvert andengradspolynomium af formen

$$P(x) = 1 - \alpha x - \beta x^2$$

hvor relationen mellem koefficienterne i potensrækken bliver

$$\alpha b_n + \beta b_{n+1} = b_{n+2}$$

(14) Vælg dit eget polynomium af denne form og foretag en undersøgelse der indeholder en tilsvarende behandling af det valgte polynomium. Valget er frit, bortset fra, at det skal gælde at $|\alpha\beta| > 6$

3 7 Opgave 4

For to mængder X og Y vil vi lade $F(X,Y)$ betegne mængden af afbildninger defineret på X med værdier i Y.

For to komplekse afbildninger f og g defineret på X altså to medlemmer af $F(X, \mathbb{C})$ definerer vi afstanden

$$d_X(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

og vi siger om en funktionsfølge (f_n) og en funktion f_0 at (f_n) konvergerer uniformt på X mod f_0, hvis vi har at

$$\mathrm{dist}_X(f_n, f_0) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

(15) Gør rede for at dette er en generalisering af noget lignende i Lindstrøm.

Antag nu at $\phi \in F(X,Y)$. Lad $f, g \in F(Y, \mathbb{C})$.

(16) Angiv en relation mellem $d_Y(f,g)$ og $d_X(f \circ \phi, g \circ \phi)$

Lad f_n være en følge af funktioner fra $F(Y, \mathbb{C})$.

(17) Angiv en relation mellem de to udsagn

f_n konverger uniformt på Y mod f_0

$f_n \circ \phi$ konverger uniformt på X mod $f_0 \circ \phi$

Begrebet uniformt konvergent funktionsfølge lader sig umiddelbart overføre til et begreb om uniformt konvergente funktionsrækker.

Lad for hvert helt tal $n \geq 0$, f_n betegne den komplekse funktion defineret ved

$$f_n(z) = (z + z^2)^n, z \in \mathbb{C}.$$

Lad X betegne konvergensområdet for den komplekse funktionsrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

(18) Angiv betingelser i form af uligheder til bestemmelse af X og find betingelser i form af ligninger, som beskriver randen af konvergensområdet (19) Bestem et antal punkter på randen af konvergensområdet, så du kan give en rå skitse af X

(20) Vis at rækken konverger uniformt på enhver mængde af formen

$$\{z : |z + z^2| \leq k\}$$

hvor $k < 1$.

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E2 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

Prøvesæt, december 2001
Revideret 20-11-03

Opgavesættet består af seks opgaver.

Opgave 1

a) Vis at den udprikkede kugle

$$\dot{B}_r(a) = \{\ x\ \mid\ 0 < \|x-a\| < r\ \}$$

er en åben mængde.

b) Lad

$$\overline{B}_r(a) = \{\ x\ \mid\ \|x-a\| \leq r\ \}$$

betegne den afsluttede kugle. Vis at hvis F er en afsluttet mængde og $F \supseteq \dot{B}_r(a)$, da gælder $F \supseteq \overline{B}_r(a)$

Opgave 2

Lad $\{a_n\}$ være en talfølge med den egenskab at

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N : m,n > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

a) Vis at talfølgen $\{a_n\}$ er begrænset.

b) Vis at talfølgen er konvergent.

c) Formuler og vis et lignende resultat for om punktfølger i R^n.

Opgave 3

a) Giv et eksempel på en åben delmængde af de reelle tal, $B \subseteq R$ med den egenskab at $Q \subseteq B$ og $B \neq R$.

b) Vis at hvis B er en lukket delmængde af R med den egenskab at $Q \subseteq B$ da er $B = R$.

Opgave 4

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^n}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

For hvilke værdier af $n \in N$ er funktionen kontinuert i $(0,0)$?

Opgave 5

a) Vis, at $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\log(1+x^4)}{x^4}} = 1$.

b) Vis, at $f(x) = \sqrt{\log(1+x^4)}$ er differentiabel i $x = 0$, og find $f'(0)$.

c) Find de værdier af $n \in \mathbf{Z}_+$ for hvilke funktionen $f_n(x) = \sqrt{\log(1+x^n)}$ er differentiabel i $x = 0$.

Vink til spm. c): Hvad er definitionsmængden for $f_n(x)$?

Opgave 6

Lad A være en ikke-tom, opadbegrænset delmængde af de positive reelle tal R_+.

Vis, at $(\sup A)^2 = \sup A_2$, hvor $A_2 = \{x^2 | x \in A\}$.

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E2 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

12-16 januar 2002

72 timers Taghjemprøve.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1

a) Vis at den udprikkede kugle

$$\dot{B}_r(a) = \{ \ x \ \mid \ 0 < \|x - a\| < r \ \}$$

er en åben mængde.

b) Lad

$$\overline{B}_r(a) = \{ \ x \ \mid \ \|x - a\| \leq r \ \}$$

betegne den afsluttede kugle. Vis at hvis F er en afsluttet mængde og $F \supset \dot{B}_r(a)$, da gælder $F \supset \overline{B}_r(a)$

Opgave 2

a) Lad f betegne en funktion $f : R^m \to R^n$ og lad a være et punkt i $a \in R^m$. Lav selv en definition af begrebet *f er kontinuert i a*.

b) Vi at hvis f er kontinuert i hele R_m, og $U \subset R^n$, da gælder at mængden

$$f^{-1}(U) = \{ \ x \in R^m \ \mid \ f(x) \in U \ \}$$

er åben.

Opgave 3

Lad $\{a_n\}$ være en talfølge med den egenskab at

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N : m, n > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

a) Vis at talfølgen $\{a_n\}$ er begrænset.

b) Vis at talfølgen er konvergent.

c) Formuler og vis et lignende resultat for om punktfølger i R^n.

Opgave 4

Lad $A \subset R$ være en ikke-tom opad begrænset delmængde af R. Vis at der findes en talfølge $\{a_n\}$ af tal fra A, som konvergerer mod $\sup A$.

Opgave 5

a) Lad $B \subset R$ betegne en åben delmængde med den egenskab at $Q \subset B$. Vis at $B = R$.

b) Samme spørgsmål hvis B er lukket, men ikke nødvendigvis åben.

Opgave 6

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^n}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

For hvilke værdier af $n \in N$ er funktionen kontinuert i $(0,0)$?

Opgave 7

Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |\sin \frac{1}{x}| & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Vis at f er integrabel på ethvert interval af formen $[a;1]$, hvor $0 < a < 1$. samt at f er integrabel på intervaller af formen $[-1;-a]$.

b) Vis at for alle $\epsilon > 0$ findes en interval inddeling af $[a;1]$ sådan at $O(D) - U(D) < \epsilon$.

Vink: Intervalinddelingen D skal *ikke* angives. Man skal blot gøre rede for at den findes!

c) Vis at $2a$ er oversum for f på intervallet $[-a;a]$ og at 0 er undersum på samme interval.

d) Vis at f er integrabel på $[-1;1]$.

Opgave 8

a) Lad $\{x^k\}$ betegne en punktfølge i R^n og lad $f_1, f_2, \cdots f_n$ være en ortogonal basis for R^n vis at x^k er konvergent hvis og kun hvis talfølgen $< x^k, f_i >$ er er konvergent for alle i.

b) Samme spørgsmål hvis basen ikke er ortogonal.

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E2 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

12-16 januar 2002

72 timers Taghjemprøve.

Opgavesættet består af seks opgaver.

Opgave 1

a) Lad f betegne en funktion $f : R^m \to R^n$ og lad a være et punkt i $a \in R^m$. Lav selv en definition af begrebet *f er kontinuert i a*.

b) Vis at hvis f er kontinuert i hele R^m, og $U \subset R^n$ er en åben delmængde, da gælder at mængden

$$f^{-1}(U) = \{\ x \in R^m \mid f(x) \in U\ \}$$

er åben.

Opgave 2

Lad $A \subset R$ være en ikke-tom opad begrænset delmængde af R. Vis at der findes en talfølge $\{a_n\}$ af tal fra A, som konvergerer mod $\sup A$.

Opgave 3

Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |\sin \frac{1}{x}| & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Vis at f er integrabel på ethvert interval af formen $[a;1]$, hvor $0 < a < 1$, samt at f er integrabel på intervaller af formen $[-1;-a]$.

b) Vis at for alle $\epsilon > 0$ findes en intervalinddeling D af $[a;1]$ sådan at den tilhørende oversum $O(D)$ og undersum $U(D)$ opfylder $O(D) - U(D) < \epsilon$.

Vink: Intervalinddelingen D skal *ikke* angives. Man skal blot gøre rede for at den findes!

c) Vis at $2a$ er oversum for f på intervallet $[-a;a]$ og at 0 er undersum på samme interval.

d) Vis at f er integrabel på $[-1;1]$.

Opgave 4

a) Lad $\{x^k\}$ betegne en punktfølge i R^n og lad $f_1, f_2, \ldots, f_n$ være en ortogonal basis for R^n. Vis at x^k er konvergent hvis og kun hvis talfølgen $< x^k, f_i >$ er er konvergent for alle i, hvor $< \cdot, \cdot >$ betegner det indre produkt.

b) Samme spørgsmål hvis basen ikke er ortogonal.

Opgave 5

Find stamfunktionen

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx.$$

Opgave 6

a) Vis, at

$$\frac{n!}{n^n} > \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} > 0$$

for alle $n \in Z_+$.

b) Find

$$\sup\left\{ \frac{n!}{n^n} \;\middle|\; n \in Z_+ \right\}.$$

c) Bevis, at følgen $a_n = n!/n^n$ er konvergent. Grænseværdien skal ikke bestemmes.

Opgavesættet er slut

E2 Tag-hjemeksamen Vinteren 02–03

Introduktion

Ved bedømmelsen af opgaverne vil der blive lagt stor vægt på at svar ikke blot er rigtige, men også velbegrundede. Endvidere vil sættet blive bedømt i sin helhed. De angivne pointtal for hver opgave er derfor vejledende, men ikke absolutte størrelser. God fornøjelse.

Opgave 1 (10 point) *I hvert af følgende tilfælde afgør om grænseværdien eksisterer og find den hvis den eksisterer:*

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}.$$

b) *For hvert fast* $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^n}{\sin^n x}.$$

Opgave 2 (15 point)

a) *For hvilke* $p \in \mathbb{R}$ *er funktionen* $\frac{1}{x \log x \log^p \log x} = \frac{1}{x(\log x)(\log\log x)^p}$ *uegentlig Riemann integrabel på intervallet* $[3, \infty[$?

b) *For hvilke* $p \in \mathbb{R}$ *er funktionen* $\frac{1}{x \log x \log^p |\log x|}$ *uegentlig Riemann integrabel på intervallet* $]0, 1/3]$?

c) *For hvilke* $p \in \mathbb{R}$ *er rækken* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log^p \log n}$ *konvergent?*

Opgave 3 (20 point) *Lad* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *være en kontinuert voksende funktion og lad* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ *være en vilkårlig følge.*
a) *Vis, at*

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) = f(\limsup_{n\to\infty} x_n)$$

Du kan have glæde af først at lave en skitse. F.eks. bestående af to parallele akser en akse med intervallet $[a, b]$ *og en følge, og en akse med billedfølgen.*

b) *Vis ved eksempler at ingen af de to betingelser,* kontinuert *og* voksende *kan undværes.*

Opgave 4 (25 point) *Lad* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$ *og lad*

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f(t)dt.$$

a) *Find McLaurin rækkerne for* f *og* F.

b) *For hvilke* $x \in \mathbb{R}$ *konvergerer rækken for* F *?*

c) *Vurder hvor mange led af rækken for* F *der skal medtages ved en nummerisk beregning af* $F(x)$ *for* $x \in [-1, 1]$ *for at opnå en præcission på* 3×10^{-3}.

d) *Vurder hvor mange led af rækken for* F *der skal medtages ved en nummerisk beregning af* $F(x)$ *for* $x \in [-3, 3]$ *for at opnå en præcission på* 1×10^{-6}.

Funktionerne f *og* F *er kendt fra sandsynlighedsregningen og statistikken som henholdsvis tæthedsfunktionen og fordelingsfunktionen for standard normalfordelingen. I statistik er man ofte interesseret i* F*'s værdier i intervallet* $[-3, 3]$ *(som svarer til middelværdien plus/minus 3 gange spredningen).*

Opgave 5 (30 point) *Lad* L *være positiv. En funktion* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, *hvor* $E \subseteq \mathbb{R}$ *kaldes* L*-Lipschitz, hviss*

$$\forall x, y \in E : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Funktionen f *kaldes Lipschitz, hviss der findes et* $L > 0$ *så* f *er* L*-Lipschitz.*

a) *Gør rede for at en Lipschitz funktion* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *er uniformt kontinuert.*

b) *Bevis følgende sætning:*

Sætning 1
Lad $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *være en følge af* L*-Lipschitz funktioner. Hvis følgen* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergerer punktvis mod en funktion* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, *da er* f *også* L*-Lipschitz.*

c) *Vis, at for hvert* $n \in \mathbb{N}$ *er funktionen* $x^n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ n*-Lipschitz. Hvorfor er den punktvise grænsefunktion* $f(x) = \lim_{n \to \infty} x^n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *ikke Lipschitz?*

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E2 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

14-19 januar, 2004

Opgavesættet består af fire opgaver. De studerende må ikke diskutere opgaverne med andre i prøveperioden (14-19 januar).

Som altid med fler-dags prøver vil flere af spørgsmålene kræve, at man arbejder med dem over længere tid og gennemser (de relevante) dele af bogen for at se, hvilke resultater man evt kan benytte. Der er altså ingen grund til panik, selv om man ikke kan se, hvordan opgaven besvares ved første gennemlæsning. Hvis der refereres til bestemte resultater (sætninger el) tæller det positivt at give en præcis henvisning til, hvor (i E T Poulsens bog) sætningen findes, lige som alle svar skal begrundes.

Opgave 1

Betragt funktionen $f : [0;1] \to R$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases} \qquad n \in N$$

a) Skitser grafen for f.

b) Vis, at f er integrabel over $[0;1]$.

c) Bestem $\int_0^1 f(x)\,dx$.

d) Vis, at f er kontinuert i 0.

Opgave 2

Lad $K \subset R^n$ være en begrænset og afsluttet delmængde af R^n, og lad $f : K \to R$ være en kontinuert funktion.

a) Vis, at hvis $A \subseteq K$ er en afsluttet mængde, så er $f(A)$ afsluttet.

b) Giv (mod-)eksempler, som viser, at ingen af de følgende to betingelser kan undværes hvis, at man skal kunne slutte, at $f(A)$ er afsluttet:

i) f skal være kontinuert.

ii) K skal være begrænset.

c) Hvad kan man sige om $f(U)$, hvis $U \subseteq K$ er åben i R^n?

d) Giv eksempler, som illustrere dit svar på spørgsmål c).

Opgavesættet fortsættes på næste side

Opgave 3

Betragt funktionen $f : R \to R$ bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{hvis } x \in Q \\ 0 & \text{hvis } x \notin Q. \end{cases}$$

a) Vis, at f er kontinuert i $a = \pm\sqrt{2}$ og diskontinuert i alle andre punkter. Forklar med ord, hvad pointen er.

b) Angiv en funktion, som er kontinuert i nøjagtigt m punkter, $m \in N$, og diskontinuert alle andre steder.

c) Betragt mængden $A = \{\, f(x) \mid -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\,\}$.
  i) Bestem $\sup A$ og $\inf A$.
  ii) Er tallene $\sup A$ hhv $\inf A$ elementer i mængden A ?
  iii)) Er mængden $A = f(\,[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\,]\,)$ et interval?

d) Betragt nu funktionen $g : R^2 \to R$, som er bestemt ved

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 & \text{hvis } x \in Q \text{ og } y \in Q \\ 0 & \text{ellers}. \end{cases}$$

Hvor er g kontinuert?

Opgave 4

Betragt funktionen $h :]\,0\,;\infty\,[\to R$ bestemt ved

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{for } x \neq 1 \\ 1 & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

a) Vis, at h er diffferentiabel i 1, og bestem $h'(1)$.

b) Hvor er $h'(x)$ kontinuert ?

Opgavesættet er slut

Matematisk analyse
2. semester

Skriftlig eksamen i emnekredsene

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse (ny ordn.)

Reelle funktioner (gl. ordn.)

fredag, den 19. januar 1990

kl. 10.oo - 14.oo

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver.

OPGAVE 1

I mængden $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$ er der givet en differentialform

$$\omega = \frac{y^2}{(x+y)^2}\,dx + \frac{x^2}{(x+y)^2}\,dy \quad .$$

1. Vis, at ω er eksakt.

2. Find samtlige stamfunktioner til ω .

OPGAVE 2

Lad $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betegne funktionen givet ved

$$f(x,y) = x^3 + 9x^2 + 6y^2 + 12xy \ , \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

1. Find de stationære punkter for f, og afgør for hvert af dem, om f har lokalt ekstremum dér.

2. Gør rede for, at restriktionen af f til mængden

   $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 4 \ , \quad |y| \leq 4\}$$

   har en mindsteværdi og en størsteværdi. Find disse samt de punkter, hvori de antages.

(opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3

Betragt den uendelige funktionsrække

$$\sum_{n=o}^{\infty} x\, e^{-nx} \quad , \qquad x \in R\ .$$

1. Vis, at rækken er konvergent for ethvert $x \in [o,\infty[$ og divergent for ethvert $x \in]-\infty,o[$.

2. Vis, idet $e^{-nx} = (e^{-x})^n$, at rækkens sumfunktion $f: [o,\infty[\to R$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-e^{-x}} & \text{for } x \in]o,\infty[\\ o & \text{for } x = o \end{cases}$$

3. Vis, at rækken ikke er uniformt konvergent på $[o,\infty[$. (Vink: Hvad er $\lim_{x \to o_+} f(x)$?)

4. Vis, at rækken er uniformt konvergent på ethvert interval af formen $[a,\infty[$, hvor $a > o$.

   (Vink: Find $\sup\{x\, e^{-nx} \mid x \in [a,\infty[\}$ for $n > \frac{1}{a}$).

OPGAVE 4

A. Betragt den lineære differentialligning

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = t\,, \qquad t \in R\,.$$

a) Find de reelle løsninger til den tilsvarende homogene ligning.

b) Gæt en løsning til den inhomogene ligning (*) og angiv samtlige reelle løsninger til den.

B. Betragt differentialligningen

$$(**) \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{y^2}{t^2}\,, \qquad (t,y) \in R_+ \times R\,.$$

(a) Gør rede for, at funktionen $y(t)$ givet ved $y(t) = 0$ for alle $t \in \,]0,\infty[$ er den eneste maksimale løsning til (**) som antager værdien 0.

(b) Find samtlige maksimale løsninger til (**). Angiv de maksimale løsninger gennem (1,1) og (1,-1).

(opgavesættet SLUT)

Skriftlig eksamen i emnekredsene

E3 Ikke-Lineære strukturer fra analyse (ny ordn.)

Reelle funktioner (gl.ordn.)

fredag, den 8. juni 1990
kl. 10.oo - 14.oo

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1.

Betragt for ethvert $a \in R$ differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + ax = e^{-t}, \quad t \in R.$$

1. Bestem a, således at cost er en løsning til den homogene ligning svarende til (*).

2. Bestem for denne værdi af a samtlige reelle løsninger til den homogene ligning.

3. Bestem for den fundne værdi af a samtlige reelle løsninger til (*).

Opgave 2.

I mængden $A = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2y > -1\}$ betragtes

for ethvert par $(m,n) \in N_0^2$ differentialformen

$$\omega = \frac{2x^m y}{1 + x^2y}\,dx + \frac{x^n}{1 + x^2y}\,dy \quad .$$

1. Skitsér A og vis, at der findes netop ét par $(m,n) \in N_0^2$, for hvilket formen ω er eksakt.

2. Bestem for de fundne værdier af m og n samtlige stamfunktioner til ω og angiv den, der har værdien 0 i punktet (o,o).

Opgave 3.

En funktion $f: R_+^2 \to R$ er givet ved

$$f(x,y) = x^2y + \frac{4}{x} + \frac{4}{y} \quad \text{for } (x,y) \in R_+^2 .$$

1. Bestem samtlige stationære punkter for f.

2. Vis, at f ikke har nogen største værdi.

3. Vis, at f har en mindste værdi og find den.

Opgave 4.

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-2n} \,, \qquad x \in \mathbb{R} \,.$$

1. Bestem konvergensradins ρ for rækken.

2. Vis, at rækken er uniformt konvergent i intervallet $[-\rho,\rho]$.

3. Bestem rækkens sumfunktion $f(x)$ for $x \in \,]-\rho,\rho[$.

4. Bestem rækkens sum for $x = -\rho$ og for $x = \rho$.

Matematik modul 1+2 (ny ordning)
4-timers opgave

Skriftlig eksamen i emnekredsene

E3 Ikke-Lineære strukturer fra analyse (ny ordn.)

torsdag, den 17. januar 1991

kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgaven udleveres til:

Ragna Clauson-Kaas...........modul 1
Johannes K. Nielsen..........modul 2
Anne Christine Green.........modul 2
Mette Bendix Petersen........modul 2
Ole Christiansen.............modul 2
Anja Boisen..................modul 2
Thomas Christensen...........modul 2
Lis Vestergaard..............modul 2

Opgave 1.

Betragt den lineære differentialligning

$$(*) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - 4t^2x = t^2 \ , \quad t \in R_+ \ .$$

(1) Vis, at e^{t^2} er en løsning til den til (*) svarende homogene ligning.

(2) Find den fuldstændige løsning til den homogene ligning.

(3) Find den fuldstændige løsning til (*).

Opgave 2.

Betragt funktionen

$$f(x,y) = (x^2-y)e^{-(x^2+y^2)}, \qquad (x,y) \in R^2.$$

(1) Bestem de stationære punkter for f.

(2) Vis, at f har en størsteværdi og en mindsteværdi. Bestem disse værdier og de punkter, hvori f antager dem.

Opgave 3.

Lad der være givet differentialformen

$$\omega = \frac{y^3}{x^2+y^6}\,dx - \frac{3xy^2}{x^2+y^6}\,dy, \quad (x,y) \in R^2 \setminus \{(o,o)\}.$$

(1) Vis, at ω er lukket i $R^2 \setminus \{(o,o)\}$.

(2) Gør rede for, at ω er eksakt i halvplanen $\{(x,y) \in R^2 \mid y > o\}$, og bestem en stamfunktion til ω heri.

(3) Vis, at ω ikke er eksakt i $R^2 \setminus \{(o,o)\}$.

Opgave 4.

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \quad , \qquad x \in \mathbb{R} \, .$$

(1) Bestem potensrækkens konvergensinterval I.

(2) Gør rede for, at rækkens sumfunktion f(x) er uendeligt ofte differentiabel i I og her opfylder

$$f'''(x) = f(x) \text{ og } f(o) = 1, \; f'(o) = o, \quad f''(o) = o \, .$$

(3) Bestem f(x).

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse (ny ordning)

mandag, den 17. juni 1991

kl. $10^{\underline{00}}$ — $14^{\underline{00}}$.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} - 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = e^t \cos t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Bestem samtlige løsninger til den til $(*)$ svarende homogene ligning.

2. Bestem den fuldstændige løsning til $(*)$.

Opgave 2

1. Vis, at differentialformen

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

er eksakt i området $A = \mathbb{R}^2 \setminus L$, hvor $L = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$.

2. Find værdierne af kurveintegralerne af ω langs kurverne K_1 og K_2 med parameterfremstillingerne henholdsvis

$$(a\cos t, a\sin t),\ t \in [0,\pi] \quad \text{og} \quad (a\cos t, b\sin t),\ t \in [0,\pi],$$

hvor a og b er positive reelle tal.

3. Vis ved hjælp af ovenstående, at der for alle par af reelle positive tal a, b gælder

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Opgave 3

Betragt den komplekse potensrække

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

1. Bestem rækkens konvergensradius.

2. Vis, at der for alle $z \in \mathbb{C}$ og $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, gælder identiteten

$$(z-1)\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} z^n = \frac{1}{N} z^{N+1} - z + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} z^n.$$

3. Bestem mængden af de $z \in \mathbb{C}$, for hvilke rækken $(*)$ er konvergent.

Opgave 4

Betragt funktionen $f: [0,2\pi] \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = 2e^{-y}\sin x + e^{-4y}\sin(2x) \quad \text{for } (x,y) \in [0,2\pi] \times [0,\infty[.$$

1. Gør rede for, at f antager en størsteværdi og en mindsteværdi.

2. Vis, at f ikke har nogen lokale ekstremumspunkter i det indre af sin definitionsmængde.

3. Bestem størsteværdien og mindsteværdien af f og de punkter, hvori de antages.

Skriftlig prøve-eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

fredag den 3. januar 1992
kl. 10-14.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fem opgaver,
der ikke bliver tillagt samme vægt.

Opgave 1

Find værdien af det bestemte integral

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^{3t}+e^{2t}}{(e^{2t}+1)(e^t-1)}\,dt.$$

Vis mellemregningerne. Formelsamlingen må kun bruges til kontrol.

Opgave 2

Betragt funktionen

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)\exp(x-\tfrac{1}{4}), \qquad (x,y)\in R\times R.$$

1) Gør rede for, at f antager en største- og en mindsteværdi på mængden

$$A=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ \ x\ge 0\,\}.$$

2) Find største- og mindsteværdien.

3) Vis, at $f(x,y)$ er nedad begrænset i $R\times R$. Den nedre grænse ønskes ikke bestemt.

Opgave 3

Betragt differentialformen

$$\omega=\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+1}}-x\right)dx+\left(y+\sqrt{x^2+1}\right)dy.$$

1) Find en stamfunktion til ω.

2) Find værdien af kurveintegralet

$$\int_K d\omega,$$

hvor K betegner den bue på cirkelen $x^2+y^2=1$, der starter i $(1,0)$, går gennem $(-1,0)$ og ender i $(0,-1)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Betragt rækken

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}(1-x)^n.$$

1) Vis, at rækken er konvergent for $x \in [0;2]$.

2) Vis, at sumfunktionen er

$$S(x) = x(\log x - 1) - \tfrac{1}{2}x^2(\log x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{4}$$

for $x \in]0;2[$.

Det oplyses, at $\int x \log x \, dx = \frac{1}{2}x^2(\log x - \frac{1}{2})$.

3) Vis, at rækken er ligeligt (uniformt) konvergent på intervallet $[0;2]$.

4) Find værdien af de to rækker

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} \quad \text{og} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-2)}.$$

Opgave 5

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x}, & \text{for } x \neq 0; \\ y, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

1) Opskriv Taylors formel med anden ordens restled for funktionen e^{xy} i udviklingspunktet $(0, y_0)$.

2) Vis, at $f(x,y)$ er kontinuert i $(0, y_0)$.

3) Vis, at $f'_x(0,y) = \frac{1}{2}y^2$, og at $f'_y(0,y) = 1$.

4) Vis, at f er differentiabel.

Opgavesættet er slut

Skriftlig prøve-eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

varighed 4 timer

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fem opgaver,
der ikke bliver tillagt samme vægt.

Opgave 1

Find værdien af det bestemte integral

$$\int_0^\infty \frac{2\sinh t \cosh t}{(1+\sinh t)^3}\, dt.$$

Vis mellemregningerne. Formelsamlingen må kun bruges til kontrol.

Opgave 2

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \log\left[\left(x^2+y^2-2y+\frac{5}{4}\right)\frac{1}{y}\right], \qquad (x,y) \in R \times R_+.$$

1) Gør rede for, at f antager en største- og en mindsteværdi på mængden

$$A = \{\,(x,y) \mid x^2+(y-2)^2 \le 1\}.$$

Tegn mængden A.

2) Find største- og mindsteværdien.

Opgave 3

Betragt differentialformen

$$\omega = \left(\frac{4x^3}{x^4+y^2} - x\right) dx + \left(y + \frac{2y}{x^4+y^2}\right) dy.$$

1) Vis at ω er eksakt i $R \times R_+$.

2) Find den stamfunktion til ω som antager værdien 0 i punktet $(0,1)$ og som er defineret i halvplanen $R \times R_+$.

3) Find værdien af kurveintegralet

$$\int_K \omega,$$

hvor K betegner cirklen $x^2+y^2=1$ gennemløbet een gang med positiv omløbsretnig fra punktet $(1,0)$ til punktet $(1,0)$.

Vink til spm 3: Find to områder i planen så ω eksakt i dem begge.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2(\cos x)^n.$$

1) Vis at rækken er konvergent for $x \in]-\pi;\pi[$.

2) Find sumfunktionen $S(x)$.

3) Vis at rækken **ikke** er uniformt konvergent på intervallet $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Vink: Undersøg $\lim_{x\to 0} S(x)$.

4) Vis at rækken er uniformt konvergent på intervallet $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$.

Opgave 5

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^x-1-x)y^2}{x^2+y^2}, & \text{for } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Vis, at $f(x,y)$ er kontinuert i $(0,0)$.

2) Vis, at $f'_x(0,0) = 0$, og at $f'_y(0,0) = 0$.

3) Vis, at f er differentiabel.

Vink: Benyt Taylors formel med restled på funktionen e^x.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

fredag den 17. januar 1992
kl. 10-14.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fem opgaver,
der ikke vil blive tillagt samme vægt.

Opgave 1

1) Skitsér mængden

$$A = \{\,(x,y) \mid x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ 6 \geq x + y\,\}.$$

2) Betragt funktionen

$$f(x,y) = xy(4 - x - y).$$

Gør rede for, at funktionen antager en største og en mindste værdi på A.

3) Find største- og mindsteværdien.

Opgave 2

Find værdien af integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 + x}\,dx.$$

Vis mellemregningerne. Formelsamlingen må kun bruges til kontrol.

Opgave 3

Betragt differentialligningen

$$(*) \qquad (y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$$

1) Vis, at (*) har et singulært punkt, og find dette.

2) Gør rede for, at der gennem alle ikke-singulære punkter går netop een løsning.

3) Vis, at $h(x,y) = x^{-1}y^{-2}$ er en integrerende faktor.

4) Løs differentialligningen (*).

5) Find mindst to løsninger gennem det singulære punkt.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^2}, & \text{for } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Vis, at $|f(x,y)| \leq |x|$.

2) Vis, at $f(x,y)$ er kontinuert i $(0,0)$.

3) Find de partielle afledede i punktet $(0,0)$, $f'_x(0,0)$ og $f'_y(0,0)$.

4) Vis, at funktionen ikke er differentiabel i $(0,0)$.

Vink til spm. 4: Find f's retningsafledede i en passende retning.

Opgave 5

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \pi^{-n} \sin x.$$

1) Vis, at rækken er konvergent for $x \in [-\pi;\pi]$.

2) Find rækkens sumfunktion $S(x)$.

3) Vis, at

$$\lim_{x \to \pi^-} S(x) = \pi.$$

4) Vis, at rækken **ikke** er ligeligt (uniformt) konvergent på intervallet $[0;\pi]$.

5) Vis, at rækken konvergerer ligeligt på intervallet $[-\pi;0]$.

Vink til spm. 5: Opdel i to intervaller $[-\pi;-\pi+\varepsilon]$ og $]-\pi+\varepsilon;0]$.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i

Flerdimensionale Analyse, E3

Torsdag 11.6.1992
9.30-13.30

ALLE HJÆLPEMIDLER ER TILLADT.

Opgavesættet indeholder 4 opgaver
med ialt 12 spørgsmål.

Ved vurderingen af opgavesættet
vurderes de 12 spørgsmål lige.

1) a) Find samtlige løsninger i intervallet $]0,\infty[$ til den homogene differentialligning

$$y'' - \frac{1}{x}y' = 0.$$

b) Bestem løsningen $u(x)$ af den inhomogene differentialligning

$$y'' - \frac{1}{x}y' = x$$

således at $u(1) = 0$ og $u'(1) = 1$.

2) Lad $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y + y^2 + x^2y.$$

a) Bestem de stationære punkter for f.

b) Angiv arten af disse stationære punkter (lokal min. lokal max. etc.).

3) Lad C være kurven givet ved parametriseringen

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), \cosh(t)), \qquad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

a) Beregn lengden af C.

b) Find krumningen i punktet $(1,0,1)$.

c) Lad $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xz^2 + y, yz^2 + x, \left(x^2 + y^2\right)z\right).$$

Find $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ således at $\nabla\varphi = \mathbf{F}$.

d) Beregn kurveintegralet

$$\int_C (xz^2 + y)dx + (yz^2 + x)dy + (x^2 + y^2)zdz.$$

4) Lad V være givet ved

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z \leq 1,\ 0 \leq z\right\}$$

Lad S være overfladen af V og lad $\mathbf{n}$ være den udadrettede normal.

a) Beregn volumet af V.

b) Lad $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 3y^2 + e^x \cos y, -6xy - e^x \sin y, 1).$$

Beregn integralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

c) Lad $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x(y-z)}{\sqrt{x^2+y^2}} & : \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & : \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Vis at f er kontinuert i $(0, 0, 0)$ men ikke kontinuert i punktene $(0, 0, z)$, $z \neq 0$.

d) Beregn integralet

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz.$$

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

For studerende, der går op efter
Viggo Andreasens pensum

Torsdag den 11. juni 1992
kl. 9.30-13.30.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fem opgaver,
der ikke vil blive tillagt samme vægt.

Opgave 1

1) Skitsér mængden

$$A = \{\, (x, y) \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 3 \,\}.$$

2) Betragt funktionen

$$f(x, y) = xye^{-x^2 - y^2}.$$

Gør rede for, at funktionen antager en største og en mindste værdi på A.

3) Find største- og mindsteværdien.

Opgave 2

Find værdien af integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x^4}\, dx.$$

Vis mellemregningerne. Formelsamlingen må kun bruges til kontrol.

Opgave 3

1) Bestem samtlige de C^1-funktioner $\varphi : R \mapsto R$ for hvilke differentialformen

$$\omega = (2x + \varphi(y))\, dx + \big(3y^2 + 2x(\varphi(y) + e^y)\big)\, dy$$

er eksakt.

2) Find en stamfunktion til ω for en af de fundne funktioner $\varphi(y)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^n}{x^2+y^2}, & \text{for } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

hvor n er et positivt helt tal $(n \in Z_+)$.

1) Vis, at $f(x,y)$ er kontinuert i $(0,0)$ for $n \geq 3$ og diskontinuert for $n < 3$.

2) For $n \geq 3$ skal man finde de partielle afledede i punktet $(0,0)$, $f'_x(0,0)$ og $f'_y(0,0)$.

3) Vis, at funktionen ikke er differentiabel i $(0,0)$ når $n = 3$.

4) Vis, at funktionen er differentiabel i $(0,0)$ når $n > 3$.

Opgave 5

Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x+n^2)n}.$$

1) Vis, at rækken er konvergent for $x \in [0; +\infty)$.

2) Vis at funktionerne

$$\varphi_n(x) = \frac{x}{(x+n^2)n}$$

er voksende for $x \in [0; +\infty)$.

3) Vis, at rækken er uniformt konvergent på ethvert interval af formen $[0; a]$.

4) Vis, at rækkens sumfunktion er differentiabel.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

For studerende, der går op efter
Viggo Andreasens pensum

Torsdag den 14. januar 1993
kl. 9.30-13.30.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fem opgaver,
der ikke vil blive tillagt samme vægt.

Opgave 1

Bestem største- og mindsteværdien for afbildningen

$$f(x,y) = y\cos(x)e^{x-y}$$

på mængden

$$M = \{\ (x,y)\ \mid\ 0 \le x \le \pi/2\ \wedge\ 0 \le y \le 2\ \}.$$

Opgave 2

Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\exp(-xn^2).$$

1) Vis, at rækken er punktvis konvergent for $x \in [0;+\infty)$.

2) Vis, at funktionen $x\exp(-xn^2)$ har maksimumsvædien $1/n^2$.

3) Vis, at rækken er **uniformt** konvergent på intervallet $[0;+\infty)$.

Opgave 3

Betragt differentialformen

$$\omega = -\frac{y\cos x}{\sin^2 x + y^2}\,dx + \frac{\sin x}{\sin^2 x + y^2}\,dy$$

defineret på mængden $M = \{\ (x,y)\ \mid\ -\pi < x < \pi\ \wedge\ (x,y) \neq (0,0)\ \}$.

1) Vis at ω er eksakt på mængden

$$M_+ = \{\ (x,y)\ \mid\ -\pi < x < \pi\ \wedge\ (x,y) \neq (0,0)\ \wedge\ x \ge 0\ \},$$

og find en stamfunktion for ω på denne mængde.

2) Find værdien af kurveintegralet

$$\int_C \omega,$$

hvor C betegner en cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius r, $0 < r < \pi$, gennemløbet i positiv omløbsretning (mod uret).

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Find den værdi af konstanten C for, hvilket integralet

$$\int_2^\infty \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

er konvergent og bestem integralets værdi i dette tilfælde.

Opgave 5

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sinh x}{y^4+\sinh^2 x}, & \text{for } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Vis, at $f(x,y)$ har partielle afledede i $(0,0)$.

2) Bestem den retningsafledede af $f(x,y)$ i $(0,0)$ i retningen $(1,a)$.

3) Er $f(x,y)$ kontinuert i $(0,0)$?

Opgavesættet er slut

Hjemmeprøve i

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

Den studerende har 72 timer til rådighed i perioden Ma den 16-5 kl 9.00 til Fr den 20-5 kl 15.00. Udleverings- og afleveringstidspunkt noteres af Viggo (evt Birthe S.) eller opgaverne sendes.

Opgave 1

Bestem minimum og maksimum for funktionen

$$f(x,y) = \exp(-(x^2 - \frac{xy}{4} + y^2)^3)$$

på enhedscirklen

$$A = \{ \ (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ \}.$$

Opgave 2

1) Vis at funktionsfølgen (f_n), hvor

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}$$

er punktvis konvergent for alle $x \in [0;\infty[$ og bestem grænsefunktionen.∎

2) Undersøg om følgen er uniformt konvergent på hver af følgende mængder a) $[0;\infty[$, b) $]1;\infty[$, og c) $[2;\infty[$.

Opgave 3

Funktionen $f(x)$, som er ulige og periodisk med periode 2π, er i intervallet $[0;\pi]$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{for } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\sin x & \text{for } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

1) Find funktionens Fourierrække.

2) Gør rede for, at rækken er punktvis konvergent, og angiv dens sum for ethvert $x \in [0;\pi]$.

3) Undersøg om rækken er uniformt konvergent.

4) Bestem summen af følgende to rækker

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(4n+3)(4n+1)}$$

Opgave 4

1) Vis at funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuert i hele R^2.

2) Er funktionen tillige differentiabel i hele R^2 ?

3) Gør rede for at relationen

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln 3$$

i en omegn af $(x,y) = (1,1)$ entydigt fastlægger y som en funktion af x, og bestem $y'(1)$.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

Mandag den 13. juni 1993
kl. 9-13

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1

a) Find konvergensradius λ for rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n}.$$

b) Vis at rækkens sumfunktion på intervallet $]-\lambda;\lambda[$ er

$$S(x) = (1-x)\log(1-x) + x.$$

c) Vis, at rækken er uniformt konvergent på det afsluttede interval $[-\lambda;\lambda]$

d) Find summen af rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)n}$$

Opgave 2

Lad $0 < \alpha < \pi$ og betragt funktionen med periode 2π, som i intervallet $[-\pi;\pi]$ er defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} (2\alpha)^{-1} & \text{for } -\alpha \le x \le \alpha \\ 0 & \text{for } \alpha < |x| \le \pi \end{cases}$$

a) Vis at Fourierrækken for $f(x)$ er givet ved

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{\alpha n} \cos nx$$

b) Angiv de x for hvilket denne række konvergerer, og gør rede for om rækken er uniformt konvergent på $[-\pi;\pi]$.

c) Find summen af rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \alpha n}{\alpha n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n}{n}$$

Opgave 3

Betragt funktionen $f(x, y) = h(g(x, y))$, hvor

$$g(x, y) = x^2 + y^2,$$

og

$$h(u) = \begin{cases} \frac{1-\cos(u)}{u} & \text{for } u \neq 0 \\ 0 & \text{for } u = 0. \end{cases}$$

a) Vis at $f(x, y)$ er kontinuert og differentiabel i hele R^2. Bestem f's gradient i $(0, 0)$.

b) Gør rede for at f har en største- og en mindsteværdi på cirklen

$$C = \{ (x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2 \},$$

hvor r>0, og at f har en største og en mindste værdi på R^2. Største- og mindsteværdierne skal *ikke* bestemmes.

Opgave 4

Betragt funktionen

$$g(x, y) = x^2 - 2y + \sin x + \sin y + 2$$

a) Vis, at $g(x, y) \geq 0$ på kurven $y = \frac{1}{2}x^2$, og at $g(x, y) \leq 0$ på kurven $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

b) Gør rede for, at relationen $g(x, y) = 0$ entydigt fastlægger en differentiabel funktion $y = \psi(x)$ på hele R.

c) Find $\psi'(x)$ (udtrykt ved x og y).

d) Gør rede for at funktionen $\psi(x)$ har netop et lokalt minimum. Minimumsværdien skal *ikke* bestemmes. Vink: Vis og benyt, at ligningen $2x + \cos x = 0$ har netop een løsning.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.
For studerende, der går op efter 1993-pensum

Onsdag den 16. juni 1993
kl. 9-13

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver,

Opgave 1

Bestem største- og mindsteværdien for afbildningen

$$f(x,y) = (x + y^2)e^{-x+y}$$

på den mængde, der er begrænset af de tre linjer $x = 1$, $y = 1$ og $x + y = 0$

Opgave 2

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^{n+2}}.$$

1) Vis, at rækken er punktvis konvergent for $x \in [0; +\infty)$.

2) Vis, at funktionen

$$f_n(x) = x^2/(1+x)^{n+2}$$

har maksimumsvædi i $x = 2/n$ og find maksimumsværdien.

3) Vis, at rækken er **uniformt** konvergent på intervallet $[0; +\infty)$.

Opgave 3

1) Vis, at differentialligningen

$$(-2y + x^3)\,dx + x\,dy = 0$$

har netop et singulært punkt, og find dette.

2) Vis at $h(x) = x^{-3}$ er en integrerende faktor.

3) Løs differentialligningen. Der ønskes specielt en beskrivelse af samtlige løsningskurver gennem det singulære punkt.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

1) Tegn mængden

$$B = \{ \ (x, y) \ | \ 0 < y < x^2 \ \}.$$

2) Lad $a > 0$ betegne et fast tal. Vis, at funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^a, & \text{for } (x,y) \in B; \\ 0, & \text{for } (x,y) \notin B. \end{cases}$$

er kontinuert i $(0,0)$.

3) Vis, at funktionen i punktet $(0,0)$ har retningsafledet i alle retninger.

4) Bestem de værdier af a, for hvilke $f(x,y)$ er differentiabel i $(0,0)$.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.
For to studerende, der går op efter 1992-pensum

Onsdag den 16. juni 1993
kl. 9

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fem opgaver,

Opgave 1

Bestem største- og mindsteværdien for afbildningen

$$f(x,y) = (x + y^2)e^{-x+y}$$

på den mængde, der er begrænset af de tre linjer $x = 1$, $y = 1$ og $x + y = 0$

Opgave 2

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^{n+2}}.$$

1) Vis, at rækken er punktvis konvergent for $x \in [0; +\infty)$.

2) Vis, at funktionen

$$f_n(x) = x^2/(1+x)^{n+2}$$

har maksimumsvædi i $x = 2/n$ og find maksimumsværdien.

3) Vis, at rækken er **uniformt** konvergent på intervallet $[0; +\infty)$.

Opgave 3

1) Vis, at differentialligningen

$$(-2y + x^3)\,dx + x\,dy = 0$$

har netop et singulært punkt, og find dette.

2) Vis at $h(x) = x^{-3}$ er en integrerende faktor.

3) Løs differentialligningen. Der ønskes specielt en beskrivelse af samtlige løsningskurver gennem det singulære punkt.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Bestem værdien af integralet

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} \arctan x \right) dx$$

Opgave 5

1) Vis, at funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{for } x \neq 0; \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

er kontinuert for alle $x \in R$.

2) Vis, at $f(x)$ er differentiabel for alle $x \in R$, og angiv differentialkvotienten $f'(x)$.

3) Undersøg, om $f'(x)$ er kontinuert i 0.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

18 januar 1995

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1

Betragt funktionen med periode 2π, som i intervallet $]-\pi;\pi]$ er defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } 0 \le x \le \pi \\ e^{x} & \text{for } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

a) Vis at Fourierrækken for $f(x)$ er givet ved

$$\frac{1-e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{n^2+1}\cos nx$$

b) Angiv de x, for hvilke denne række konvergerer, og gør rede for om rækken er uniformt konvergent på $[-\pi;\pi]$.

c) Vis, at

$$e^{-\pi} = \frac{1-\pi+2\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+1)}{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(n^2+1)}$$

d) Find summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2+1}$$

Opgave 2

a) Gør rede for at funktionen

$$f(x,y) = e^{-x^2+2y^2}$$

antager en størsteværdi G og en mindsteværdi g på mængden

$$A = \{\,(x,y) \mid x^2 + 2xy + 2y^2 \le 1\,\}.$$

b) Find G og g.

Opgave 3

Betragt funktionsfølgen

$$f_n(x) = \exp(x^2 - \frac{x}{n}).$$

a) Vis, at følgen er punktvis konvergent for alle x, og find grænsefunktionen $f(x)$.

b) Undersøg om følgen er uniformt konvergent på hver af følgende tre intervaller: 1) $[0;\infty[$, 2) $[0;1[$, 3) $[0;1]$.

Opgave 4

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ y & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Find de partielle afledede f'_x og f'_y.

b) Vis, at f'_x er kontinuert i $(0,0)$.

c) Vis, at $f(x,y)$ er kontinuert og differentiabel i hele R^2.

Opgavesættet er slut

IKKE-LINEÆRE STRUKTURER (E3)
EKSAMEN 19. JUNI 1995

Sættet består af fire opgaver fordelt på tre sider.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Maximalt tidsforbrug 4 timer.

OPGAVE 1

Lad funktionen $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved forskriften

$$(x, y) \mapsto f_n(x, y) = xy\, e^{-n(x^2+y^2)}$$

og betragt i det følgende rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y)$$

(1)

Vis, at der ikke findes nogen konvergent majorantrække for denne række gældende i hele $\mathbb{R}^2$.

Lad C_r betegne mængden $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \geq r\}$

(2)

Find for hvert n og hvert $r > 0$ maximum for f_n på C_r. Benyt dette til at finde en konvergent majorantrække gældende i C_r

(3)

Vis, at rækken er konvergent i ethvert punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, og at sumfunktionen er diskontinuert i $(0, 0)$, men kontinuert i alle andre punkter.

(4)

Angiv en eksplicit formel for sumfunktionen. Tip: der gemmer sig en kvotientrække et sted.

Bemærk, at det ikke kræves og muligvis heller ikke er det mest hensigtsmæssige at besvare spørgsmålene i den anførte nummerorden !

OPGAVE 2

(1)

Lad A være en ikke tom afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^n$ og lad $a \in \mathbb{R}^n$. Vis at der findes et punkt i A med minimal afstand til a.

Dette resultat må benyttes i det følgende uafhængigt af om du har besvaret det korrekt.

Lad B være den delmængde af $\mathbb{R}^3$, som er defineret ved uligheden

$$x^3 + y^3 + \frac{3}{16}z^4 \leq 1$$

På figurerne 1 og 2 (på side 3) er der tegninger, der illustrerer mængdens snit med planerne med ligningerne $z = 0$ henholdsvis $x = 0$, idet dog kun randen er tegnet. Desuden er tegnet snitkurverne med enhedskugleoverfladen. Det er ved besvarelsen af spørgsmålene i det følgende tilladt (og tilrådeligt) at benytte den information, som kan aflæses af figurerne — uden yderligere argumentation end den, at det fremgår af figuren.

(2)

Vis at B er afsluttet, men ikke kompakt.

(3)

Vis at enhedskuglen er den største kugle med centrum i origo, som er indeholdt i B.

OPGAVE 3

Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) - \frac{1}{2}x^2 - y^2$$

(1)

Redegør for at funktionen f er differentiabel overalt i $\mathbb{R}^2$.

(2)

Find de stationære punkter for funktionen f og karakteriser hvert enkelt efter om det er et saddelpunkt, et relativt maksimumspunkt eller et relativt minimumspunkt.

(3)

Vis, at funktionen f har et maximum og angiv dette.

(4)

Find planintegralet af funktionen f over den øvre halvcirkelskive

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \land y \geq 0\}.$$

OPGAVE 4

Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

(1)

Vis, at f er differentiabel på mængden

$$S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \lor y = 0\}$$

og bestem differentialet $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i et vilkårligt punkt $(x,y) \in S$.

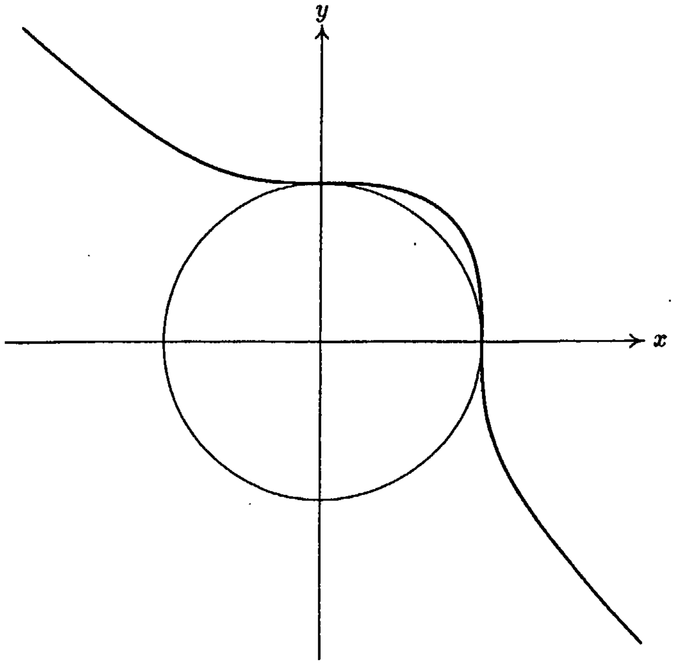
(2)

Vis, at f ikke er differentiabel på mængden

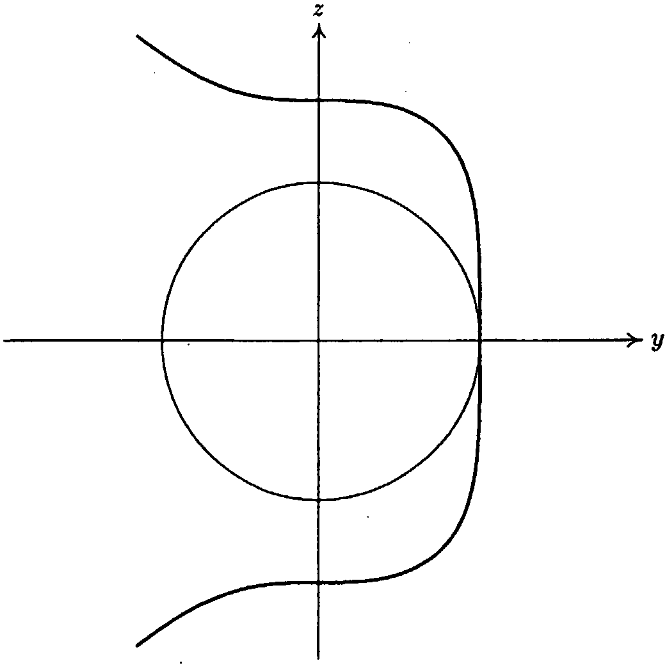
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \lor y = 0\} \setminus \{(0,0)\}$$

(3)

Vis, at f er differentiabel i punktet $(x,y) = (0,0)$ og bestem differentialet $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i punktet $(x,y) = (0,0)$. (Vink: Benyt evt at $|xy| \leq x^2 + y^2$.)



Figur 1.
Snitkurven mellem planen med ligningen $z = 0$ og fladen med ligningen $x^3 + y^3 + \frac{3}{16}x^4 = 1$.
Desuden enhedscirklen i denne plan.



Figur 2.
Snitkurven mellem planen med ligningen $x = 0$ og fladen med ligningen $x^3 + y^3 + \frac{3}{16}x^4 = 1$.
Desuden enhedscirklen i denne plan.

IKKE-LINEÆRE STRUKTURER (E3)
EKSAMEN JUNI 1997

Sættet består af fire opgaver.
Maximalt tidsforbrug 72 timer.

Besvarelsen skal danne grundlag for at vurdere eksaminandens færdigheder med hensyn til følgende aspekter:

- *Klarhed og overskuelighed i fremstillingen.*
- *Konsistens i argumentationen.*
- *Præcision i terminologi og notation.*
- *Klarhed ved referencer til anvendte resultater.*
- *Omsætning af et forelagt problem til et klart formuleret spørgsmål inden for pensum.*
- *Anvendelse af de i pensum forekommende resultater.*
- *Sikkerhed i de komplekse tals aritmetik og regneregler for elementære funktioner.*
- *Sikkerhed i differentiation og integration af funktioner af en reel variabel.*

Sættet vil blive vurderet med henblik på i hvilket omfang tilstedeværelsen af disse færdigheder er sandsynliggjort. Sættet vil altså blive vurderet som værende fuldt tilfredsstillende besvaret hvis samtlige færdigheder skønnes fuldt tilfredsstillende dokumenteret, også selv om visse spørgsmål ikke er besvaret fuldstændigt.

Ved bedømmelsen vil der også blive taget hensyn til dele af besvarelsen, som giver anledning til tvivl om, at eksaminanden besidder visse af de nævnte færdigheder.

Undgå derfor at medtage svar, som kan så tvivl. Især vil fejlslutninger og fejlformuleringer trække ned. Hvis du har mistanke om, at nogle svar indeholder simple regnefejl, skal du dog ikke udelade dem af den grund, men gøre opmærksom på, hvorfor du tror der er regnefejl.

Det er tilladt at benytte edb-understøttede hjælpemidler (Mathematica, Derive, Matlab og lignende) som kontrol. Udskrifter kan om det ønskes vedlægges. Men kun udregninger foretaget "i hånden" og dokumenteret ved udførlige mellemregninger indgår positivt i bedømmelsen.

Hvis der er uoverensstemmelse mellem dine egne beregninger og kontrolberegningerne, vil det være i orden at regne videre på grundlag af kontrolberegningerne, hvis du har mest tillid til dem.

Opgave 1

(1) Eftervis at tredjegradsligningen

$3x^3 - ax^2 + 4 = 0$

for $a = 7$ *har roden* $x = 2$.

(2) Benyt dette til at vise at der findes et interval A^* *på den reelle akse med centrum i* 7 *og et interval* X^* *på den reelle akse med centrum i* 2 *således at ligningen for ethvert* $a \in A^*$ *har netop en rod* $x \in X^*$.

Denne rod kaldes i det følgende "den udvalgte rod".

(3) Bestem for den herved givne funktion af A^* *ind i* X^* *Taylorpolynomiet af første grad med* $a = 7$ *som udviklingspunkt.*

(4) Angiv en approximation til den udvalgte rod for $a = 7.1$.

(5) Formuler og bevis analoge resultater, når både a *og* x *er komplekse, for eksempel ved at omforme den komplekse ligning til et reelt ligningssystem.*

(6) Find en tilnærmet løsning for $a = 7 + 0.1i$

(7) Argumenter for at den udvalgte rod x *vil være reel, hvis* a *er reel.*

(8) Vis at den udvalgte rod løber på en kurve gennem $x = 2$, *når* a *løber på et stykke af cirklen gennem* $a = 7$ *med centrum i* 0.

(9) Angiv en nødvendig betingelse, i form af et ligningssystem, for at den udvalgte rod, har størst mulig numerisk værdi, hvis det skal gælde, at $|a| = 7$. *Du skal ikke at finde denne største rod. Forklar, hvordan denne nødvendige betingelse kan bruges, hvis man vil finde denne største rod.*

Opgave 2

Den komplekse funktion af en kompleks variabel, hyperbolsk tangens, er defineret ved formlen

$$\mathrm{tgh}(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, z \in \mathbf{C}$$

(1) Vis at tgh *opfattet som funktion af en reel variabel opfylder differentialligningen*

$$f'(t) = 1 - f(t)^2$$

(2) Benyt dette til at vise at tgh *er en voksende funktion defineret på* $\mathbf{R}$ *med* $]-1,1[$ *som billedmængde. Argumenter for at* tgh *har en invers og angiv dennes definitionsmængde.*

Denne inverse betegnes Artgh.

Lad f være den komplekse funktion (af en kompleks variabel), som er givet som summen af potensrækken

$$\sum_{n>0,\, n\,\mathrm{ulige}} \frac{z^n}{n} = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \cdots$$

og lad g være den funktion (af en reel variabel) som er defineret ved

$$g(t) = f(\mathrm{tgh}(t)), t \in \mathbf{R}$$

(3) Vis at g *er differentiabel og opfylder betingelsen*

$$g'(t) = 1$$

(4) Benyt dette til at vise at

$$f(t) = \mathrm{Artgh}(t)$$

for alle $t \in]-1,1[$

Opgave 3

Lad X og Y være to mængder og lad f være en bijektiv afbildning af X på Y. Lad A være en en delmængde af X.

(1) Fortolk og bevis formlen

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

Antag nu yderligere at både X og Y hver for sig er forsynet med en metrik, i begge tilfælde benævnt dist. Antag at f er kontinuert og at X er kompakt.

(2) Bevis at f^{-1} er kontinuert, fx. ved at udnytte:

karakteriseringen af kontinuitet ved hjælp af afsluttede mængder.

forbindelsen mellem kontinuitet og kompakthed

forbindelsen mellem kompakthed og afsluttethed

Beviset må indeholde præcise formuleringer af og referencer til de anvendte sætninger.

Betragt følgende eksempel:

$X = [0,1] \cup]2,3], Y = [0,2]$,dist den sædvanlige metrik.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{for } x \in]2,3] \end{cases}$$

(3) Kommenter dette eksempel i relation til det resultat, som er bevist ovenfor:

(4) Kan man lave et tilsvarende eksempel, hvor definitionsmængden er et interval og f er en C^1-funktion?

Opgave 4

Vi minder om at ligningen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

hvor $a, b > 0$ er givne konstanter fremstiller en ellipse, jfr figur 1.
Lad funktionen f være defineret i $\mathbb{R}^2$ ved

$$f(x,y)=(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1)$$

Hvis og når det passer dig, kan du vælge dine egne værdier af a og b og regne videre med disse. Du har frit valg bortset fra $a, b > 1, a \neq b$ og $a + b > 5$

(1) Bestem de stationære punkter for f.

(Det kan oplyses (men det skal vises!) at der ialt er 9 stationære punkter, og at disse ligger symmetrisk i forhold til akserne.

På figur 2 er vist mængden af nulpunkter for f (med $a = 3, b = 2$) og placeringen af de stationære punkter.

(2) Lav en tilsvarende skitse svarende til dine egne værdier af a og b.

Nulpunktskurverne deler deler planen i 6 områder.

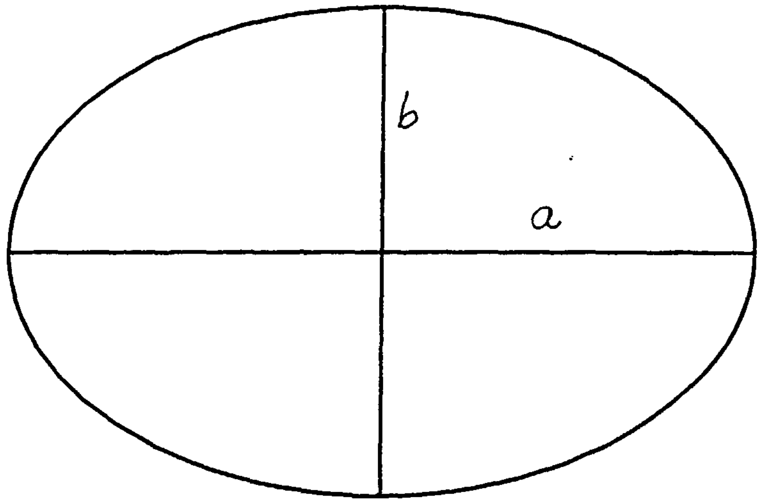
(3) Beskriv hver af de 6 områder ved hjælp af uligheder.

(4) Vis at funktionen har konstant fortegn i det indre af hvert af disse områder.

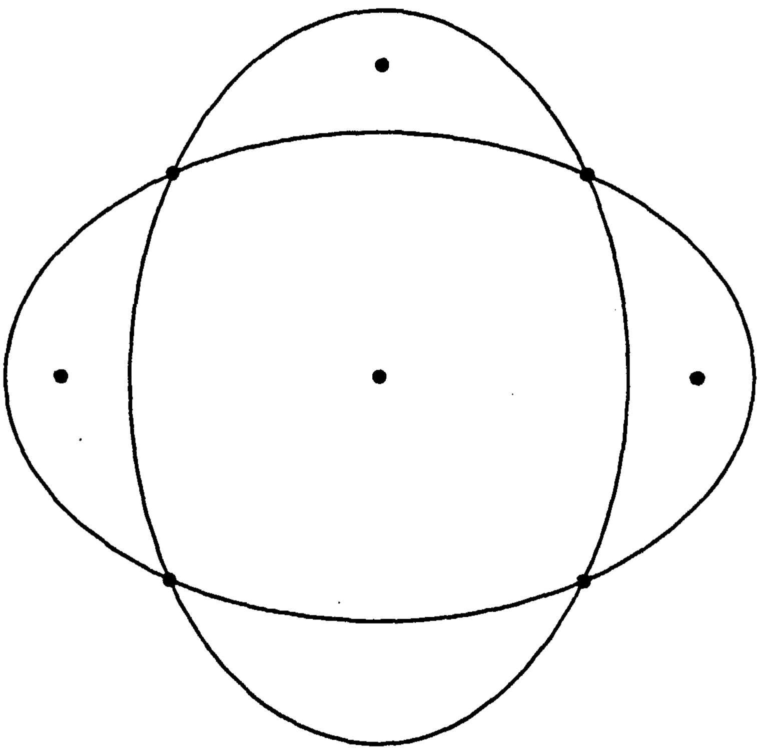
(5) Angiv på din skitse de omtalte fortegn.

(6) Benyt dette til (uden at inddrage Hessematricen) at inddele de stationære punkter i lokale extremumspunkter og saddelpunkter.

(7) Argumenter for at funktionen har et globalt minimum men ikke et globalt maximum.



Figur 1
Ellipsen med ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Figur 2
Nulpunktsmængden (kurverne) og de stationære punkter (klatterne) for funktionen f (med $a = 3$ og $b = 2$.)

En sætning om eksistens af implicit given funktion og differentiation af samme

Hermed en formulering af sætningen om implicit given funktion, som er af samme typografiske format som ellers anvendt i kurset. Det er den samme sætning, som forekommer i det udleverede "Notat om implicit differentiation (1997)", men jeg har benyttet lejligheden til at udrydde et par (beklagelige) unøjagtigheder i formuleringen. Den nu valgte formulering indeholder (implicit) en definition af hvad der menes med implicit given funktion.

TILSTRÆKKELIG BETINGELSE FOR
EKSISTENS AF IMPLICIT GIVEN FUNKTION

T1001

Antag at

<① $n, l, p \in \mathcal{N}$

<② $n = l + p$

<③ $||x||$ *er betegnelse for max-normen for enhver vektor* x

<④ Z *er en åben delmængde af* $\mathcal{R}^n$

<⑤ $z^0 = (x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_p^0, y_1^0, \ldots, y_l^0) \in Z$

<⑥ $a \in \mathcal{R}^l$

<⑦ $F = (F_1, \ldots, F_l) \; : \; Z \to \mathcal{R}^l$

<⑧ $L = \{z \in Z : F(z) = a\}$

<⑨ F *er* C^1

<⑩ $F(z^0) = a$

<⑪ $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}(z^0) = \dfrac{\partial(F_1(x,y), \ldots, F_l(x,y))}{\partial(y_1, \ldots, y_l)}(z^0)$ *er invertibel*

Da findes r, s, X^*, Y^*, Z^*, f *således at*

①> $r, s > 0$

②> $X^* = \{x \in \mathcal{R}^p : ||x - x^0|| < r\}$

③> $Y^* = \{y \in \mathcal{R}^l : ||y - y^0|| < s\}$

④> $Z^* = X^* \times Y^*$

⑤> $f \; : \; X^* \to Y^*$

⑥> *Inden for* Z^* *er* f *implicit bestemt ved ligningen* $F(x, y) = a$.

⑦> $\forall (x, y) \in Z^* \quad : \quad F(x, y) = a \Leftrightarrow y = f(x)$

⑧> $L \cap Z^* = \{(x, y) : y = f(x)\} \cap Z^*$

⑨> $X^* \ni x \mapsto (x, f(x))$ *er en parameterfremstilling for* $L \cap Z^*$.

⑩> f *er* C^1

⑪> $f'(x^0) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}(x^0) = -\left(\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}(z^0)\right)^{-1} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}(z^0)$

Bemærk at en række af konsekvenserne (6-9) blot er forskellige måder at sige det samme på.

Prøve på eksamensspørgsmål i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

januar 1998

72 timers Taghjemprøve.

Opgavesættet består af fire opgaver.

Opgave 1

Betragt funktionen

$$g(x, y) = 2\cosh x - 2y + \sin x + \cos y + 3.$$

a) Vis at $g(x, y) \geq 0$ på kurven $y = \cosh x$, og at $g(x, y) \leq 0$ på kurven $y = \cosh x + 3$.

b) Vis at relationen $g(x, y)$ entydigt fastlægger en C^1-funktion $y = \psi(x)$ for alle $x \in R$.

c) Vis, at $\psi(x)$ har netop et stationært punkt, og bestem om dette er et maksimum eller minimum. Det stationære punkt skal ikke bestemmes.

Opgave 2

Betragt funktionen

$$f(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u} & \text{for } u \neq 0; \\ 1 & \text{for } u = 0. \end{cases}$$

a) Vis at f er en C^2-funktion i hele R.

b) Betragt funktionen

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)e^{xy}}{x+y} & \text{for } x + y \neq 0; \\ e^{-x^2} & \text{for } x + y = 0. \end{cases}$$

Vis, at g er en C^2-funktion i hele R^2, og angiv de partielle afledede af første og anden orden.

Opgave 3

Lad $(M_1, \mathtt{dist}_1)$ og $(M_2, \mathtt{dist}_2)$ betegne to metrisk rum.

a) Vis, at hvis $f, g : M_1 \to R$ er to uniformt kontinuerte funktioner, da er funktionen $f(x) + g(x)$ ligeledes uniformt kontinuert.

b) Giv et eksempel på en uniformt kontinuert funktion, hvis definitionsmængde ikke er kompakt.

c) Vis at hvis $f_n : M_1 \to M_2$ er en uniformt konvergent følge af uniformt kontinuerte funktioner med grænsefunktion $f(x)$, da er $f(x)$ uniformt kontinuert.

Opgave 4

L betegner mængden af talfølger (x_n) med den egenskab at rækken $\sum |x_n|$ er konvergent. Man kan vise, at L udstyret med den sædvanlige ledvise addition og skalarmultiplikation er et vektorrum, og at

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

er en norm. I det følgende betragtes L som et metrisk rum udstyret med den af $\|.\|_1$ inducerde metrik.

a) Vis, at afbildningen $\phi : L \to L$ defineret ved

$$\phi(\ (x_1, x_2, \ldots)\ ) = (x_2, x_3, \ldots)$$

er kontinuert.

b) Vis, at

$$A = \{\ (x_n)\ |\ \sum x_n = 1\ \}$$

er en afsluttet mængde, og beskriv $\phi^{-1}(A)$.

c) Vis, at

$$B = \{\ (x_n)\ |\ \sum |x_n| = 1\ \}$$

er afsluttet og begrænset.

d) Vis, at B *ikke* er kompakt. Vink: Find en følge i B som ikke har en konvergent delfølge.

Her slutter opgavesættet. De følgende to spørgsmål viste sig ved nærmere eftersyn at være for svære.

e) Betragt mængden

$$C = \{\ (x_n)\ |\ |x_n| \le \frac{1}{n^2}\ \}.$$

Vis, at C er afsluttet og begrænset.

f) Vis, at C er kompakt. Vink: I beviset for at en afsluttet og begrænset delmængde af R^n er kompakt anvendte vi en bisektionsmetode. Benyt evt. en lignende ide, hvor der i hvert skridt inddrages en ekstra dimension og kombiner dette med et diagonal argument.

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.

2-5 januar 1998

72 timers Taghjemprøve.

Opgavesættet består af fem opgaver.

Opgave 1

a) Gør rede for, at funktionen

$$f(x,y) = x^2 + e^{2x^2+y^2}$$

har en største- og en mindsteværdi på mængden

$$A = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\,\}.$$

b) Find største- og mindsteværdien.

c) Vis, at f har et globalt minimum, men ikke et globalt maksimum i hele R^2.

Opgave 2

Betragt funktionsfølgen

$$\phi_n(x,y) = \frac{1}{(xy+n^2)(x+n)}, \qquad x,y \geq 0.$$

a) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x,y)$$

er uniformt konvergent. Vink: Man kan med fordel bruge en udgave af majorantkriteriet, der gælder for funktioner af to variable.

b) Vis, at rækkerne $\sum d_x\phi_n(x,y)$ og $\sum d_y\phi_n(x,y)$ af partielt afledede efter x hhv. y begge er uniformt konvergente på mængder af formen $[0;M] \times [0;M]$, hvor $M > 0$.

c) Vis, at sumfunktionen

$$S(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x,y)$$

er differentiabel i hele R_+^2.

Opgave 3

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x} & \text{for } x \neq 0; \\ y & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Find de partielle afledede i et hvert punkt.

b) Vis, at funktionen er differentiabel i hele R^2.

Opgave 4

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \log x^2 + x\cos(y-2).$$

a) Bestem ligningen til tangentplanen for fladen $z = f(x,y)$ i punktet $(1,2,1)$.

b) Bestem Taylorpolynomiet af 1. grad for funktionen med udviklingspunkt $(x_0, y_0) = (1,2)$.

c) Find ved hjælp af Taylorpolynomiet en tilnærmelse f_a til funktionens værdi i $(x_1, y_1) = (1.1, 1.8)$.

d) Bestem - uden at beregne funktionsværdien i (x_1, y_1) - en øvre grænse for $|f_a - f(x_1, y_1)|$.

Opgave 5

Lad dist_1 og dist_2 betegne to metrikker på rummet M med den egenskab, at $\text{dist}_1(x,y) \leq \text{dist}_2(x,y)$ for alle $x,y \in M$.

a) Vis, at hvis A er en åben mængde i (M, dist_1), så er A en åben mængde i (M, dist_2).

b) Vis, at hvis A er afsluttet i (M, dist_1), så er A afsluttet i (M, dist_2).

c) Lad $f : M \to M$ betegne en afbildning. Vis, at hvis $f : (M, \text{dist}_1) \to (M, \text{dist}_2)$ er kontinuert i x_0, så er afbildningen

$$f : (M, \text{dist}_2) \to (M, \text{dist}_1)$$

ligeledes kontinuert i x_0.

d) Vis, at identiteten $h(x) = x$ opfattet som en afbildning

$$h : (M, \text{dist}_2) \to (M, \text{dist}_1)$$

er en kontinuert afbildning.

e) Antag, at diameteren af M er 1 mht. dist_1 og at dist_2 er den diskrete metrik. Gør rede for at metrikkerne opfylder betingelserne ovenfor, og diskuter betydningen af de viste resultater.

Opgavesættet er slut

Skriftlig eksamen i emnekredsen

E3 Ikke-lineære strukturer fra analyse.
(Viggo Andreasens pensum)

9-12 juni 1998

72 timers Taghjemprøve.

Opgavesættet består af fire opgaver.

54

Opgave 1

Betragt funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{2x^2+y^2}, & \text{for } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Vis at f er kontinuert i $(0,0)$.

b) Vis at f har partielle afledede i $(0,0)$ og find disse.

c) Vis at f's partielle afledede er kontinuerte i $(0,0)$.

d) Vis, at f er differentiabel i $(0,0)$.

55

Opgave 2

Betragt funktionen

$$F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{x^2+n^2} - \frac{x}{y^2+n^2+2} \right).$$

a) Vis, at rækken er uniformt konvergent på mængder af formen $[-a;a] \times [-a;a]$.

b) Vis, at rækkerne som fremkommer ved ledvis differentiation efter x hhv. y begge er uniformt konvergente på mængder af form $[-a;a] \times [-a;a]$.

c) Vis, at $F(x,y)$ er differentiabel i hele R^2.

d) Vis, at relationen $F(x,y) = 0$ fastlægger y entydigt som funktion af x på $\{ (x,y) \mid x,y > 0\}$.

e) Vis, at den derved fremkomne funktion er en C^1 funktion af x.

56 **Opgave 3**

Betragt mængden

$$L = \{ \ (s_n) \ | \ s_n = 0 \ \vee \ s_n = 1 \text{ for alle } n \in N\}.$$

Mængden L består altså af alle følger, hvis led er 0 eller 1, f. eks. $(0,1,1,0,\ldots)$.

a) Vis at rækken

$$d(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}$$

er konvergent for alle $s, t \in L$.

b) Vis, at d er en metrik på L.

c) Lad u betegne følgen $u = (1,0,1,0,1,0\ldots)$. Bestem Kuglen $K(u, \frac{1}{8})$.

d) Betragt afbildningen $F : L \to L$ defineret ved at billedet af følgen $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ er følgen $(s_2, s_3, \ldots)$. Vis at F opfylder en Lipschitz betingelse med Lipschitz-konstant 2. Afbildningen F kaldes "skifteafbildningen."

e) Betragt mængden M bestående af alle følger som er 0 fra et vist trin, dvs.

$$M = \{ \ (s_n) \ | \ \exists n \in N : s_m = 0 \text{ for } m > n\}.$$

Vis at det indre af M er den tomme mængde (dvs. $\operatorname{Int} M = \emptyset$) og at afslutningen af M er hele L (dvs. $\operatorname{Clo} M = L$).

57 **Opgave 4**

a) Gør rede for, at funktionen

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

har en største- og en mindsteværdi på mængden

$$A = [0;1] \times [0;1].$$

b) Find største- og mindsteværdien.

c) Vis, at f har et globalt minimum og et globalt maksimum på hele R^2.

IKKE-LINEÆRE STRUKTURER (E3)
EKSAMEN JANUAR 1999

Sættet består af fire opgaver.
Maximalt tidsforbrug 72 timer.

Besvarelsen skal danne grundlag for at vurdere eksaminandens færdigheder med hensyn til følgende aspekter:

- *Klarhed og overskuelighed i fremstillingen.*
- *Konsistens i argumentationen.*
- *Præcision i terminologi og notation.*
- *Klarhed ved referencer til anvendte resultater.*
- *Omsætning af et forelagt problem til et klart formuleret spørgsmål inden for pensum.*
- *Anvendelse af de i pensum forekommende resultater.*
- *Sikkerhed i de komplekse tals aritmetik og regneregler for elementære funktioner.*
- *Sikkerhed i differentiation og integration af funktioner af en reel variabel.*

Sættet vil blive vurderet med henblik på i hvilket omfang tilstedeværelsen af disse færdigheder er sandsynliggjort. Sættet vil altså blive vurderet som værende fuldt tilfredsstillende besvaret hvis samtlige færdigheder skønnes fuldt tilfredsstillende dokumenteret, også selv om visse spørgsmål ikke er besvaret fuldstændigt.

Ved bedømmelsen vil der også blive taget hensyn til dele af besvarelsen, som giver anledning til tvivl om, at eksaminanden besidder visse af de nævnte færdigheder.

Undgå derfor at medtage svar, som kan så tvivl. Især vil fejlslutninger og fejlformuleringer trække ned. Hvis du har mistanke om, at nogle svar indeholder simple regnefejl, skal du dog ikke udelade dem af den grund, men gøre opmærksom på, hvorfor du tror der er regnefejl.

Det er tilladt at benytte edb-understøttede hjælpemidler (Mathematica, Derive,Matlab og lignende) som kontrol. Udskrifter kan om det ønskes vedlægges. Men kun udregninger foretaget "i hånden" og dokumenteret ved udførlige mellemregninger indgår positivt i bedømmelsen.

Hvis der er uoverensstemmelse mellem dine egne beregninger og kontrolberegningerne, vil det være i orden at regne videre på grundlag af kontrolberegningerne, hvis du har mest tillid til dem.

Opgave 1

For hvert $p \in \mathcal{R}$ defineres der ved forskriften

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)^p$$

en funktion, hvis definitionsmængde er den største delmængde af $\mathbb{R}^2$ hvor udtrykket på højre side har mening.

Anse 0^0 for at være udefineret.

(1) Angiv for hvert p definitionsmængden.

(2) For hvilke værdier af p vil dette give en funktion, som er kontinuert differentiabel i hele $\mathbb{R}^2$

Opgave 2

Vi har følgende additionsformel for tangensfunktionen:

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}$$

som gælder for alle de værdier af x og y for hvilke den har mening.

(1) Angiv formlens gyldighedsområde. Du behøver ikke at vise formlen.

(2) Angiv og bevis en firedoblingsformel for tg, *altså en formel som udtrykker* $\mathrm{tg}(4x)$ *som funktion af* $\mathrm{tg}(x)$

(3) Benyt denne til at bestemme $\mathrm{tg}(4\mathrm{Arctg}\frac{1}{5})$

Betragt de to udsagn

$$(*) \quad 4\mathrm{Arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{Arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$(**)$ $\quad (5+i)^8(239-i)^2$ er et rent imaginært tal

(4) Vis at der er en forbindelse mellem disse udsagn og vis at de begge er sande.

Opgave 3

For ethvert helt tal $n \geq 0$ er funktionen f_n givet ved at

$$f_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n} x^{n-i}y^i = x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n$$

Med D betegnes kvadratet $]-1,1[\times]-1,1[$.

(1) Vis at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,y)$$

er konvergent i hele D

Lad f betegne sumfunktionen for rækken defineret i D.

(2) Hvilke differentiabilitetsegenskaber har f.

Nogle af de fundamentale sætninger, som der kan blive tale om at benytte er angivet nedenfor. Det anbefales at referere til disse udgaver af sætningerne, hvis I vil bruge dem. Det er i øvrigt også muligt at komme igennem uden brug af samtlige af disse sætninger.

Antag i det følgende at $g_n(x_1,\ldots,x_m)$ er en følge af reelle afbildninger på en delmængde A af $\mathcal{R}^m$ således at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_1,\ldots,x_m)$$

er punktvis konvergent i A med g som sumfunktion. Der gælder da:

Sætning 1.

Hvis g_n er kontinuert for ethvert n og hvis konvergensen er uniform da er sumfunktionen kontinuert.

Sætning 2.

Hvis der findes en konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ for hvilken det gælder at

$$|g_n(x_1,\ldots,x_m)| \leq a_n$$

for alle n og alle $(x_1,\ldots,x_m)$ da er konvergensen uniform.

Sætning 3.

Hvis $m=1$, hvis g_n er differentiabel for ethvert n og hvis rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} g'_n(x)$$

er uniformt konvergent, da er g differentiabel og differentialkvotienten er givet ved

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(x)$$

Opgave 4

Lad $a, b, c \in \mathbb{R}$ og lad $f_1 : [a, b] \to \mathcal{R}^n$ og $f_2 : [b, c] \to \mathcal{R}^n$ være kontinuerte afbildninger, som opfylder at $f_1(b) = f_2(b)$.

Lad f være afbildningen af $[a, c] \to \mathcal{R}^n$ defineret ved

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{for } a \leq t \leq b \\ f_2(t) & \text{for } b \leq t \leq c \end{cases}$$

(1) Vis at f er kontinuert.

Når $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $x, y \in A$ da siger vi at x og y kan forbindes inden for A hvis der findes et interval $[a, b]$ og en kontinuert afbildning $f : [a, b] \to A$ med $f(a) = x$ og $f(b) = y$

(2) Vis at hvis x kan forbindes med y inden for A og y kan forbindes med z inden for A da kan x forbindes med z inden for A

Vi siger at A er *hel* hvis ethvert punkt x i A kan forbindes inden for A med ethvert andet punkt y i A.

Lad g være en kontinuert afbildning defineret på A med værdier i $\mathbb{R}^m$.

(3) Vis at $g(A)$ er hel hvis A er hel.

Ikke-Linære Strukturer (E3)
Eksamen juni 2000
stillet af Mogens Niss

Indledende bemærkninger

Det følgende sæt består af fem opgaver, som er beregnet til at blive løst inden for en periode på 72 timer.

Opgaverne er ikke designet til at være lige omfangsrige eller til at have samme vægt ved bedømmelsen. Det samme gælder for de enkelte spørgsmål indenfor en opgave. Det er her som altid vigtigt, at du ikke opfatter opgaverne som standardopgaver, som du enten straks skal kunne besvare eller slet ikke kan gøre noget ved - de færreste ikke-rutineprægede matematikopgaver er af den art. Det er altså ikke sikkert, at alle dele af opgaverne giver sig i de første par forsøg. Det er også muligt, at du ved første øjekast tænker 'det har jeg da aldrig set før, det kan jeg ikke stille noget op med'. Men ingen af opgaverne kræver ikke-elementær viden uden for pensum. Tag det altså roligt, prøv med forskellige angrebsmåder, lad de dele der driller ligge lidt og vend siden tilbage til dem. Hvis dele af opgaverne kværner i hovedet på dig, skal du ikke blive frustreret. Det er kun helt normalt.

Besvarelsen af opgaverne skal danne grundlag for at vurdere »eksaminandens« kunnen med hensyn til bl.a. følgende forhold

- *Overblik over stoffet og evne til at kombinere teoretiske begreber, resultater og betragtningsmåder i nye situationer*
- *Klarhed og overskuelighed i fremstillingen, herunder forståelighed, tydelighed og tilstrækkelighed i beskrivelser og forklaringer*
- *Konsistens i argumentationen*
- *Præcision i terminologi og notation, herunder symbolbrug og formelmanipulation*

- *Omsætning af et forelagt problem til et klart formuleret spørgsmål inden for det behandlede stof*
- *Sikkerhed i omgangen med talsystemerne og deres egenskaber, herunder de forskellige systemers aritmetik, frem for alt hvad angår de reelle tal*
- *Sikkerhed i kendskabet til de elementære funktioners egenskaber og udnyttelsen af disse*
- *Sikkerhed i behandlingen af funktioner, såvel hvad angår algebraiske som infinitesimalregningsmæssige manipulationer med dem*
- *Klarhed ved referencer til anvendte resultater*
- *Korrekt anvendelse af de resultater som hentes fra de benyttede undervisningsmaterialer.*

Besvarelsen af sættet vil blive vurderet med fokus på det omfang tilstedeværelsen af denne kunnen er sandsynliggjort. Bedømmelsen af besvarelsen vil ske ud fra en helhedsvurdering, ikke ud fra en mekanisk opgørelse for den enkelte opgave og en efterfølgende pointsammentælling. I den forbindelse vil besvarelsen blive betragtet som fuldt tilfredsstillende, hvis samtlige slags kunnen skønnes fuldt tilfredsstillende dokumenteret, også selv om visse spørgsmål ikke er besvaret fuldstændigt, og der optræder mindre fejl og unøjagtigheder af »banal« karakter. Derimod vil grundliggende fejlslutninger og grove fejlformuleringer »trække ned«.

Det er tilladt at benytte edb-understøttede hjælpemidler (Mathematica, Derive, Matlab og lignende, som kontrol). Men kun udregninger foretaget »i hånden« og dokumenteret ved udførlige mellemregninger og forklaringer vil blive taget positivt i betragtning ved bedømmelsen.

Opgave 1

Lad $n \in \mathrm{N}$ være givet, og lad os betragte mængden W givet ved

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

W kaldes ofte mængden af binære strenge af længde n. På $W \times W$ indføres nu en funktion på følgende måde. For s og t i W sættes

$$\mathrm{dist}(s, t) = \text{antal pladser}, i = 1, 2, \ldots, n \text{ på hvilke } s \text{ og } t \text{ er forskellige}$$

F.eks. er altså (hvis $n = 4$) $\text{dist}((0,0,1,1),(0,1,1,0)) = 2$.

1. Vis, at dist virkelig er en metrik på W og beskriv (gerne i ord) for ethvert $s \in W$ og ethvert $r > 0$ kuglen $K(s,r)$. Til orientering benyttes denne metrik, der sædvanligvis kaldes Hamming-afstanden efter den amerikanske matematiker Richard Hamming, på afgørende måde i teorien for fejlrettende koder.

2. Vis, at W er et begrænset metrisk rum, og at dist er ækvivalent med den diskrete metrik på W.

3. Vis, at $f : W \to \mathbf{R}$, givet ved $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ er kontinuert i W.

Opgave 2

Vi lægger ud med at definere en funktion $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ved at sætte

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_3^2}{x_2} + |x_1 - x_2|,\ (x_1, x_2, x_3) \in X$$

hvor $X = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \in \mathbf{R}, x_2 > 0, x_3 \in \mathbf{R}\}$, som er åben. Betragt tillige de to åbne delmængder af $\mathbf{R}^3$:

$$X_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X | x_1 < x_2\} \text{ og } X_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X | x_1 > x_2\}.$$

Du kan nok have fordel af at lave en skitse af de tre mængder.

1. Vis, at f er en C^2-funktion i både X_1 og X_2.

2. Bestem for ethvert punkt $z_0 \in X_1 \cup X_2$ Jacobimatricen (alias funktionalmatricen) $Df(z_0)$ for f i z_0

3. Undersøg dernæst for ethvert punkt i X af formen (a, a, b) om f er partielt differentiabel i punktet og om f i punktet er differentiabel langs vektoren $u = (1, 1, 0)$. Fortolk og kommentér resultatet af undersøgelsen, og tag herunder stilling til om f er differentiabel i punktet.

4. Undersøg om f har et maksimum henholdsvis et minimum på X.

5. Sæt nu for $(y_1, y_2) \in Y = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ (= \{(y_1, y_2) | y_1 > 0, y_2 > 0\})$

$$g_1(y_1, y_2) = f(y_1, y_2, 0) \text{ og } g_2(y_1, y_2) = f(0, y_1, y_2)$$

og $g = (g_1, g_2) : Y \to \mathbf{R}^2$. Vis, at g_1, g_2 og g er differentiable på $Y \setminus \{(y, y) | y > 0\}$.

Opgave 3

Foretag en undersøgelse, støttet på ræsonnementer, af de logiske relationer mellem henholdsvis *fuldstændighed* og *kompakthed* af metriske rum. Giv derefter eksempler der illustrerer de fundne relationer.

Opgave 4

1. Afgør om rækkerne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{(-1)^n + 4} \right)^n \text{ og } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{(-1)^n + 4} \right)^n$$

er konvergente.

2. Vis, at potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(-1)^n + 4} \right)^n, x \in \mathbf{R}$$

er konvergent i et hvert punkt af formen $x = 3 - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 3)$ og benyt dette til at vise, at potensrækken har konvergensradius 3.

Lad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(-1)^n + 4} \right)^n, \quad x \in]-3, 3[$$

3. Gør rede for, at f er differentiabel på $]-3, 3[$ og vis, at

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{1 - |x|} \text{for } |x| < 1$$

(Du kan eventuelt benytte (og vise), at $n \leq ((-1)^n + 4)^n$ for alle $n \in N$.)

Hermed er opgavesættet slut.

Eksamen E3 sommeren 2001

Besvarelsen skal danne grundlag for at vurdere eksaminandens færdigheder med hensyn til følgende aspekter:

- *Klarhed og overskuelighed i fremstillingen.*
- *Konsistens i argumentationen.*
- *Præcision i terminologi og notation.*
- *Klarhed ved referencer til anvendte resultater.*
- *Omsætning af et forelagt problem til et klart formuleret spørgsmål inden for pensum.*
- *Anvendelse af de i pensum forekommende resultater.*
- *Sikkerhed i de komplekse tals aritmetik og regneregler for elementære funktioner.*
- *Sikkerhed i differentiation og integration af funktioner af en reel variabel.*

Sættet vil blive vurderet med henblik på i hvilket omfang tilstedeværelsen af disse færdigheder er sandsynliggjort. Sættet vil altså blive vurderet som værende fuldt tilfredsstillende besvaret hvis samtlige færdigheder skønnes fuldt tilfredsstillende dokumenteret, også selv om visse spørgsmål ikke er besvaret fuldstændigt.

Ved bedømmelsen vil der også blive taget hensyn til dele af besvarelsen, som giver anledning til tvivl om, at eksaminanden besidder visse af de nævnte færdigheder.

Undgå derfor at medtage svar, som kan så tvivl. Især vil fejlslutninger og fejlformuleringer trække ned. Hvis du har mistanke om, at nogle svar indeholder simple regnefejl, skal du dog ikke udelade dem af den grund, men gøre opmærksom på, hvorfor du tror der er regnefejl.

Det er tilladt at benytte edb-understøttede hjælpemidler (Mathematica, Derive,Matlab og lignende) som kontrol. Udskrifter kan om det ønskes vedlægges. Men kun udregninger foretaget "i hånden" og dokumenteret ved udførlige mellemregninger indgår positivt i bedømmelsen.

Hvis der er uoverensstemmelse mellem dine egne beregninger og kontrolberegningerne, vil det være i orden at regne videre på grundlag af kontrolberegningerne, hvis du har mest tillid til dem.

Det er tilladt at henvise til sætninger fundet i andre lærebøger, når disse sætninger citeres fuldt. For sætninger fra det anvendte materiale (Lindstrøm mm) er det nok at henvise til sætningens nr. Dog skal det helt klart fremgå, hvordan sætningen bliver brugt i sammenhængen, ligesom det naturligvis skal godtgøres at betingelserne for at bruge den er opfyldt.

Det kan sikkert i nogle tilfælde være en god ide at komme igang med en opgave ved at se på nogle specialtilfælde eller eksempler. Hvis et resultat skal vises for alle naturlige tal n kan det måske betale sig at se på $n = 1, 2, \ldots$ osv. for derved at kunne se et mønster. Hvis det fører til det ønskede resultat, er der naturligvis ingen grund til at tage sådanne specialtilfælde med i besvarelsen, men i andre situationer kan det anbefales at aflevere sådanne specielle resultater.

Det er ikke krævet og heller ikke en fordel at gentage opgaveformuleringen i besvarelsen.

Opgave 1

Lad os benytte betegnelsen *dekompleksifikation* for den operation, hvorved en kompleks funktion af en kompleks variabel, ændres til en en funktion defineret på en delmængde af R^2 med værdier i R^2, idet de komplekse tal identificeres med R^2.

(1) *Angiv for hvert $n > 0$ dekompleksifikationen af $z \mapsto z^n$ og angiv også dekompleksifikationen af $z \longmapsto e^z$*

Man kan definere noget som hedder det komplekse Taylorpolynomium af orden p udviklet med udgangspunkt i a, og vise at det for en sum af en potensrække er det polynomium som fremkommer ved at medtage de led fra potensrækken som har en eksponent som ikke overstiger p.

Med andre ord: For en funktion f som er givet ved formlen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

er det komplekse Taylorpolynomium af orden p funktionen $T_p^c f$ givet ved

$$T_p^c f(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n(z-a)^n$$

Lad nu f betegne den komplekse eksponentialfunktion og lad g betegne den dekompleksifiserede af f.

(2) *Vis at Taylorpolynomiet af orden p for g udviklet med udgangspunkt i $(0,0)$ er den dekompleksifiserede af det komplekse Taylorpolynomium af orden p for f udviklet med udgangspunkt i* 0.

(Det vil muligvis være en god strategi at starte med $p = 1, 2, 3$ for at få ideer til en systematik.)

(3) *Foreslå en generalisering af dette eksempel. Bevis forventes ikke.*

Opgave 2

Lad dist_X være en metrik på X og lad dist_Y være en metrik på Y.

Om en afbildning $f : X \to Y$ siger vi, at den er anti-Lipschitz, hvis der findes et positivt tal K således at det for alle $x_1, x_2 \in X$ gælder at

$$\text{dist}_Y(f(x_1), f(x_2)) \geq K\text{dist}_X(x_1, x_2).$$

(4) *Vis at en afbildning som er anti-Lipschitz nødvendigvis må være injektiv.*

(5) *Vis at en afbildning, som er surjektiv og både Lipschitz og anti-Lipschitz må være en homeomorfi.*

(En homeomorfi er per definition en bijektiv afbildning hvor både afbildningen selv og dens inverse er kontinuert).

(6) *Vis at en surjektiv isometri er en homeomorfi.*

(En isometri er per definition det samme som en atstandsbevarende afbildning.)

Opgave 3

Lad V betegne den mængde, der består af de komplekse funktioner, der er defineret på den afsluttede enhedscirkelskive E i den komplekse plan, og som kan fås som sumfunktion af en konvergent potensrække.

(7) *Vis at enhver funktion i V har et numerisk maximum, dvs at for ethvert $f \in V$ gælder at funktionen $|f|$ har et maximum.*

En vigtig sætning fra den komplekse funktionsteori hedder *maximumsprincippet*, og den siger (i et specialtilfælde) at enhver sådan funktion vil antage sit numeriske maximum i et punkt på randen S af E.

Denne sætning skal du ikke bevise! Men

(8) *Kontroller at dens konklusion er korrekt i følgende tre tilfælde:*

$$f(z) = e^z$$

$$f(z) = \frac{1}{2-z}$$

$$f(z) = z^2 - iz$$

Lad nu U betegne mængden af de funktioner på S, som fremkommer som restriktion til S af en funktion i V. Lad endvidere R betegne den afbildning af V ind i U, der til en funktion fra V knytter dens restriktion til S.

Lad både V og U være udstyret med metrikken for uniform konvergens (altså metrikken induceret af supremumsnormen, som i dette tilfælde også er maximumsnormen.)

(9) *Vis at maximumsprincippet kan udtrykkes ved at sige at R er en isometri.*

I resten af opgaven antages det at maximumsprincippet gælder.

(10) *Vis at en funktion i V er bestemt alene af sine værdier på randen S.*

Det sidste spørgsmål har forbindelse til en af de øvrige opgaver. Du må gerne benytte det relevante resultat fra denne opgave, også hvis du er i tvivl om at have besvaret det korrekt.

Opgave 4

(11) *Vis følgende sætning.*

Klemmeprincippet for kontinuerte afbildninger :

Lad X være et metrisk rum og lad f, g, h være tre reelle funktioner defineret på X om hvilke vi antager, at det for alle $x \in X$ gælder at $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Lad endvidere $x_0 \in X$ og antag at $f(x_0) = h(x_0)$. Antag endelig at både f og h er kontinuert i x_0. Da gælder det at g er kontinuert i x_0

(12) *Formuler og bevis en tilsvarende sætning for differentiable funktioner og differentiabilitet.*

(13) *Vis at funktionen som næsten er givet ved forskriften*

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

er differentiabel i $(0,0)$, idet du selv foretager de nødvendige udvidelser og præciseringer.

Nærværende ark udleveres samtidigt med eksamensopgaverne til E3, sommeren 01.

Der er tale om en udskrift af en øvelse og en besvarelse af den, som indgår i noterne, således som de fremstår i den seneste rettede udgave, som er tilgængelig via nettet. Teksten er altså ændret i forhold til de trykte noter.

ET KLEMMEPRINCIP

E11

KlemmePrincip

Antag at

① $f : M \to \mathcal{R}$

② $g : M \to \mathcal{R}$

③ $a \in M$

④ $b \in \mathcal{R}$

⑤ *g og h har grænseværdien b i a*

⑥ $g \le f \le h$

Da gælder at

① *f har grænseværdien b i a*

Bevis

E11

BEVIS:

Lad $r_2 > 0$ være givet.

Udnyt antagelserne om grænseværdier til at vælge $r_{11}, r_{12} > 0$ således at

$$\forall x \in M \; 0 < \operatorname{dist}(x,a) < r_{11} \Rightarrow |g(x) - b| < r_2$$
$$\forall x \in M \; 0 < \operatorname{dist}(x,a) < r_{12} \Rightarrow |h(x) - b| < r_2$$

Sæt $r_1 = \min r_{11}, r_{12}$

Lad nu x være vilkårligt opfyldende betingelsen $0 < \operatorname{dist}(x,a) < r_1$

Da gælder at $0 < \operatorname{dist}(x,a) < r_{11}$ og vi har følgelig at

$$f(x) - b \le h(x) - b \le r_2$$

Desuden gælder at $0 < \operatorname{dist}(x,a) < r_{12}$ og dermed også at

$$f(x) - b \ge g(x) - b \ge -r_2$$

Alt i alt har vi at

$$-r_2 \le f(x) - b \le r_2$$

Da x var vilkårlig har vi så vist at

$$\forall x \; 0 < \operatorname{dist}(x,a) < r_1 \Rightarrow |f(x) - b| < r_2$$

Da vi til vilkårligt $r_2 > 0$ har fundet et $r_1 > 0$ så dette gælder har vi vist at

$f(x) \to b$ for $x \to a$

Skriftlig eksamen i emnekredsen
E3 Ikke-lineære strukturer fra algebra og analyse.

Opgaverne udleveres fra kl. 11:00 mandag den 3. juni, 2002
og skal afleveres senest kl. 11:00 torsdag den 6 juni, 2002

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Opgavesættet består af 5 opgaver,
der ikke nødvendigvis tillægges samme vægt.

Som del af en besvarelse forvendtes det at den studerende
om nødvendigt selv udfolder og præciserer opgaverne.

Opgave 1

Lad

$$F(x,y) = \frac{y}{x^2} - 5\exp\left(\frac{x^2}{y}\right) - 3 + 5e^{\frac{1}{3}}.$$

Vis, at ligningen $F(x,y) = 0$ og kravet $F(1,3) = 0$ lokalt fastlægger en funktion $y = \varphi(x)$, der opfylder at $\varphi(1) = 3$ og at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Bestem ved hjælp af denne differentialligning en løsning $y = \varphi(x)$ så $\varphi(1) = 3$ for $x > 0$.

Opgave 2

Lad funktionerne f_n og g_n være givet ved henholdsvis

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

for $x \in \mathbf{R}$ og $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ og

$$g_n(x) = nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}$$

for $x \in [0, \infty[$ og $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

a) Vis, at rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ og $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ konvergerer og bestem sumfunktionerne.

b) Undersøg for hvilke relle tal a og b rækken $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergerer uniformt på $[a,b]$ og for hvilke værdier af $c \geq 0$ rækken $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ konvergerer uniformt på $[c, \infty[$

c) Bestem $\sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx$.

opgavesættet forsætter

Opgave 3

Undersøg funktionen $f(x) = \sqrt{|xyz|}$ på $\mathbf{R}^3$ mht. kontinuitet, partielle afledte, og differentiabilitet.

Opgave 4

Vis, at der ved

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 1$$

for $0 \le x \le 1$ defineres en afbildningen $T : C[0,1] \to C[0,1]$.

a) Undersøg, om T er en kontraktion mht. metrikken d_∞.

b) Lad T^2 være afbildningen $f \to T(T(f))$. Undersøg, om T^2 er en kontraktion mht. metrikken d_∞.

c) Undersøg om T hhv. T^2 har entydigt bestemte fixpunkter.

Opgave 5

Lad X betegne mængden af C^1-funktioner fra $[0,1]$ ind i $\mathbf{R}$.

a) Vis, at der ved $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|\}$ defineres en metrik på X.

b) Vis, at (X,d) er et fuldstændigt metrisk rum.

c) Undersøg, om afbildningen $T : (X,d) \to (X,d)$ defineret ved $(Tf)(x) = (f(x))^2$ er kontinuert.

d) Angiv et eksemple på en følge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$ som konvergerer uniformt mod en funktion $f \in X$, men som ikke er konvergent mht. metrikke d.

Opgavesættet er slut

Skriftlig 'taghjem' eksamen i E3
Sommeren 2003

Ved vurderingen af din besvarelse vil der blive lagt vægt på at din besvarelse

- er logisk konsistent
- er både klar og præcist udtrykt
- er velbegrundet og veldokumenteret, f.eks i form af henvisninger til relevante sætninger. Ved henvisninger til Wade's bog er det tilstrækkeligt at henvise til Th./Def/Lemma/Opgave ... og dens nummer eller at henvise til et sidetal. Ved henvisning til anden litteratur skal tillige angives hvilken bog/note henvisningen er til.

Flere af opgaverne er tilrettelagt som en serie af delspørgsmål, hvor de foregående skal bruges til besvarelse af et eller flere af de efterfølgende. Opgaverne er stillet således at man kan besvare de efterfølgende delspørgsmål uden at have besvaret de foregående. Det er tilladt at gøre dette. Faktisk vil jeg anbefale at gøre det allerede i første gennemregning af sættet.

Opgavesættet indeholder 4 sider inklusive denne side og består af 5 opgaver. De fire første opgvaver kan udløse op til 20 point hver, mens den sidste opgave kan udløse 40 point, altså ialt 120 point. 100 point vil blive regnet som fuld besvarelse.

Skriftlig 'taghjem' eksamen i E3 Sommeren 2003

Opgave 1 *[20 point] Lad* $f(x) = \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}$ *for* $x \in [-\pi, \pi]$.

a) *Beregn Fourierrækken* Sf *for* f.

b) *For hvilke* $x \in \mathbb{R}$ *konvergerer* $Sf(x)$ *og mod hvad ? Begrund dit svar.*

c) *Konvergerer* Sf *uniformt mod* f *på noget interval ?*

Opgave 2 **(20 point)** *Lad* $F : \{(x,y)|y > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *være givet ved*

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2-ny} \cos nxy$$

Lad $\mathbb{H}_r := \{(x,y)|y > r\}$ *for ethvert* $r \geq 0$.

a) *Vis, at rækken for* F *konvergerer uniformt på* $\mathbb{H}_r$ *for ethvert* $r > 0$.

b) *Vis, at* F *har partielle afledte efter både* x *og* y *i ethvert punkt* $(x,y) \in \mathbb{H}_0$.

c) *Vis, at for alle* $y > 0$: $F_y(0,y) < 0$. *Beregn endvidere* $F(0,y)$, $F_x(0,y)$ *og* $F_y(0,y)$ *for ethvert* $y > 0$.

d) *Gør rede for at der findes et interval* I *omkring* 0 *og en entydigt bestemt* C^1 *funktion* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *med* $y(0) = 1$ *således at :*

$$\forall x \in I : \qquad F(x, y(x)) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Opgave 3 (20 point) *Lad $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være en 2π periodisk funktion med begrænset variation på intervallet $[-\pi, \pi]$. Lad endvidere*

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

være en vilkårlig trigonometrisk række som konvergerer punktvis mod $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

a) *Bevis at S er Fourierrækken for f.*

b) *Lad f være funktionen fra opgave 1. Hvor mange trigonometriske rækker S konvergerer punktvis mod*

$$\begin{cases} \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2} & x \notin \pi + p2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & x \in \pi + p2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

begrund dit svar.

Opgave 4 (20 point) *Lad $(\mathbb{X}, \rho)$ være et metrisk rum og lad $U, V \subseteq \mathbb{X}$ være delmængder med $U \cap V \neq \emptyset$.*

a) *Bevis at hvis U er sammenhængende og $U \cap \partial V = \emptyset$, da er $U \subseteq V$.*

Lad nu $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, hvor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ er en åben delmængde, være en C^1 afbildning med $\Delta_f(\overline{\mathbf{x}}) \neq 0$ for alle $\overline{\mathbf{x}} \in V$. Lad $W, R \subseteq \mathbb{R}^n$ være delmængder således at $\overline{W} \subseteq V$, $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq V$ er en kasse i $\mathbb{R}^n$, der findes $\overline{\mathbf{x}}_0 \in W$ med $f(\overline{\mathbf{x}}_0) \in R$ samt $f(\partial W) \cap R = \emptyset$.

b) *Vis, at $R \subseteq f(W)$.*

Opgave 5 (40 point) *Lad $(\mathbb{X}, \rho)$ være et metrisk rum.*

a) *Vis, at for enhver kompakt og ikke tom delmængde $K \subseteq \mathbb{X}$ findes der $x, y \in K$ med*

$$\rho(x,y) = \mathrm{diam}(K) := \sup\{\rho(x',y') | x', y' \in K\}.$$

b) *Lad $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ være en nestet følge af ikke tomme kompakte delmængder af $\mathbb{X}$, dvs. for alle $n \in \mathbb{N}$: $\emptyset \neq K_{n+1} \subseteq K_n \subseteq \mathbb{X}$.*
Bevis at $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ er kompakt.

Hint: *Lad $\{U_i\}_{i\in I}$ være en vilkårlig åben overdækning af K. Brug Cantors fællesmængdesætning til at vise, at der findes $n \in \mathbb{N}$ så $K_n \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.*

Lad dernæst $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ være en funktion som opfylder

$$\forall x, y \in \mathbb{X} : \qquad \rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y).$$

Vi kalder en sådan funktion en (svag) kontraktion på $\mathbb{X}$

c) *Vis, at f højest har ét fikstpunkt i $\mathbb{X}$. (Et fikstpunkt for f er et punkt $x \in \mathbb{X}$ med $f(x) = x$.)*

d) *Vis, at hvis $K \subseteq \mathbb{X}$ er en vilkårlig kompakt delmængde med mindst to forskellige punkter, da er*

$$\mathrm{diam}(f(K)) < \mathrm{diam}(K).$$

Endvidere hvis $f(K) = K \neq \emptyset$, da består K af ét punkt, et fikstpunkt for f.

e) *Bevis følgende sætning:*

Sætning 1 *Lad $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ være en kontraktion på et metrisk rum $(\mathbb{X}, \rho)$ og antag der findes en ikke tom kompakt delmængde $K_0 \subseteq \mathbb{X}$ med $f(K_0) \subseteq K_0$, da indeholder K_0 et entydigt bestemt fikstpunkt for f.*

Hint: Start med at bemærke at $K_1 := f(K_0)$ også opfylder $f(K_1) \subseteq K_1$.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: http://mmf.ruc.dk eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerappoprt af: Stine Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre

336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss

342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschlæger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning
Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen

358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen

359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)

360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhelm Booß-Bavnbek, Kenro Furutani

362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen

363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen

364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup

365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege

366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX
og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

368/99 Kvartvejsraport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen

369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen

370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter tekst nr. 350/98

371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:
Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen

373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki

374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen

375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik

376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder

377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen

378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and termal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski

386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen

388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen

390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System#: Thomas Engberg Pedersen##, Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2#: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen*, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen**, Bent Sørensen
#Indtil 1/1-2000 Elkraft, ## fra 1/5-2000 Cowi Consult
* Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ** fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram

391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen

392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.

393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.

395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

397/01	En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag 2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann Vejleder: Dorthe Posselt
398/01	Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1) Af: Mogens Brun Heefelt
399/01	Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning Ph.D Thesis by: Johan Lithner Supervisor: Mogens Niss
400/01	On Holomorphic Critical quasi circle maps By: Carsten Lunde Petersen
401/01	Finite Type Arithmetic Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen
402/01	Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse - udvikling af et kursus Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen
403/01	Generaliseringer i integralteorien - En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen
404/01	"Mere spredt fægtning" Af: Jens Højgaard Jensen
405/01	Real life routing - en strategi for et virkeligt vrp Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jogvan Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak Vejleder: Jørgen Larsen
406/01	Opgavesamling til dybdekursus i fysik Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001 Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg
407/01	Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips
408/02	Weak UCP and Perturbed Monopole Equations By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang
409/02	Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy - et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for *den algebraiske ligningsløsning før* Gauss, Abel og Galois Videnskabsfagsprojekt af: David Heiberg Backchi, Uffe thomas Volmer Jankvist, Neslihan Saglanmak Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
410/02	2 projekter om modellering af influenzaepidemier Influenzaepidemier- et matematisk modelleringsprojekt Af: Claus Jørgensen, Christina Lohfert, Martin Mikkelsen, Anne-Louise H. Nielsen Vejleder: Morten Blomhøj Influenza A: Den tilbagevendende plage – et modelleringsprojekt Af: Beth Paludan Carlsen, Christian Dahmcke, Lena Petersen, Michael Wagner Vejleder: Morten Blomhøj
411/02	Polygonformede hydrauliske spring Et modelleringsprojekt af: Kåre Stokvad Hansen, Ditte Jørgensen, Johan Rønby Pedersen, Bjørn Toldbod Vejleder: Jesper Larsen
412/02	Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning – en generel analyse samt en behandling af strømningen bag en cylinder Et matematisk modul III professionsprojekt af. Kristine Niss, Bo Jakobsen Vejledere: Morten Brøns, Johnny Ottesen
413/03	"Elevernes stemmer" Fysikfaget, undervisningen og lærerroller, som eleverne opfatter det i det almene gymnasium i Danmark Af: Carl Angell, Albert Chr. Paulsen
414/03	Feltliniediagrammer En vej til forståelse? Et 1. modul fysikprojekt af: Ditte Gundermann, Kåre Stokvad Hansen, Ulf Rørbæk Pedersen Vejleder: Tage Emil Christensen
415/03	FYSIKFAGET I FORANDRING Læring og undervisning i fysik i gymnasiet med fokus på dialogiske processer, autenticitet og kompetenceudvikling Ph.d.-afhandling i fysikdidaktik af: Jens Dolin
416/03	Fourier og Funktionsbegrebet - Overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb Projektrapport af: Rasmus Brauner Godiksen, Claus Jørgensen, Tony Moyer Hanberg, Bjørn Toldbod Vejleder: Erik von Essen

417/03 The Semiotic Flora of Elementary particles
By: Peder Voetmann Christiansen

418/03 Militærmatematik set med kompetencebriller
3. modul projektrapport af: Gitte Jensen og specialerapport af: Jesper Thrane
Vejleder: Tine Wedege

419/03 Energy Bond Graphs – a semiotic formalization of modern physics
By: Peder Voetmann Christiansen

420/03 Stemning og Musikalsk Konsonans
Et matematisk modelleringsprojekt af: Claus Jørgensen
Vejleder: Johnny Ottesen

421/03 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i fysik 1976 – 2003.
Denne tekst erstatter tekst nr. 370/99

422/03 Vurdering af dynamisk blodstrømningsmodel
- ved numerisk simulering med FEMLAB
Et 2. modul matematikprojekt af: Sofie Inari Castella, Ingunn Gunnarsdóttir og Jacob Kirkensgaard Hansen
Vejleder: Johnny Ottesen

423/03 Fysikkens historie i en almendannende fysikundervisning
- Eksemplificeret med Millikan Ehrenhaft kontroversen
Specialerapport af: Marianne Wilcken Bjerregaard
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

424/03 Dielectric and Shear Mechanical Relaxation in Glass Forming Liquids
- A thorough analysis and experimental test of the DiMarzio-Bishop model
Master thesis in physics by: Kristine Niss and Bo Jakobsen
Supervised by: Niels Boye Olsen

425/03 Fysiske forklaringer i undervisning
Specialerapport af: Kirsten Ringgard Jensen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

426/04 Myreintelligens
Distribuering af Ant Colony System Traveling Salesman Problem
Et 2. modul datalogiprojekt af: Uffe Thomas Volmer Jankvist og Magnus Meinild
Vejleder: Keld Helsgaun

427/04 Fra Leibniz til *Isabelle*
Typeteoriens fremkomst og udvikling samt dens anvendelse i bevisføreren *Isabelle*
Et 3. modul datalogiprojekt af: Ingunn Gunnarsdóttir, Uffe Thomas Volmer Jankvist og Bjørn Toldbod
Vejleder: Jørgen Villadsen