TEKST NR 429 2004

Opgavesamling

til dybdekursus i fysik

**Eksamensopgaver
stillet i perioden
juni 1976 til januar 2004.**

PRIS: 108.50
OPGAVESAMLING TI
9 789673 042807
15.03.2004
STUDIERABAT-10%

TEKSTER fra

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, RUC, Postbox 260, 4000 Roskilde, Danmark
Tlf. 46742263, Fax 46743020, e-mail: imfufa@ruc.dk
"Opgavesamling til dybdekursus i fysik"

Eksamensopgaver fra perioden juni 1976 – januar 2004
Denne tekst erstatter nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg og 406/2001

IMFUFA-tekst nr. 429/2004, 162 sider, ISSN 0106-6242

DYBDEKURSUSOPGAVER JUNI 1976 – JANUAR 2004

Den skriftlige prøve i dybdemodulet omfatter to af studenten valgte fysiske teoribygninger. Siden overbygningsuddannelsens start i 1974 er der afholdt følgende prøver, hvis opgavetekster gengives i det følgende:

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul den 28. juni 1976.

Hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1

I et kildefrit område af et homogent tabsfrit medium med permitivitet ε og permeabilitet μ udbreder en plan bølge sig i x-aksens retning.

Det er givet, at

$$E_x = o \qquad\qquad H_x = o$$

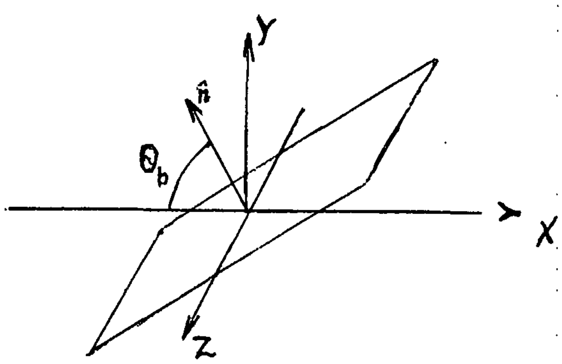
$$E_y = -i\sqrt{\frac{\mu}{c}}\, H_y \qquad\qquad H_y = H_o\, e^{\,i(kx-\omega t)}$$

H_o er en reel konstant og $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

1. Find E_z og H_z

2. Find bølgens polarisationstilstand.

Den plane bølge rammer nu et andet tabsfrit homogent medium med permitivitet ε_1 og permeabilitet μ. Grænsefladen mellem de to medier er plan, og normalen til grænsefladen danner Brewstervinklen Θ_b med x-aksens negative retning (se fig.)



3. Find det reflekterede felt (d.v.s. E- og H-feltets komposanter og bølgevektoren $\underline{k}''$).

4. Hvad er det reflekterede felts polarisationstilstand ?

OPGAVE 2

En partikel med hvilemassen M bevæger sig frit med hastigheden V i laboratoriesystemets x-akses positive regning. Den kinetiske energi er T.

1. Find hastigheden $V = c\beta$ relativistisk.

Partiklen henfalder nu, d.v.s. den splittes i to dele med hvilemasser m_1 og m_2. De to dele bevæger sig fra hinanden med hastighederne v'_1 og v'_2 i tyngdepunktsystemet. (Den kinetiske energi hertil stammer fra massedefekten, altså fra at $M > m_1 + m_2$).

2. Find hastighederne $v'_1 = c\beta'_1$ og
$v'_2 = c\beta'_2$

3. Vis, at m_1's og m_2's hastigheder v_1 og v_2 i laboratoriesystemet kan skrives

$$v_1 = \frac{c}{1+\beta\beta'_1 \cos\phi_1} \sqrt{\beta'^2_1 + \beta^2 + 2\beta\beta'_1 \cos\phi_1 - \beta^2\beta'^2_1 \sin^2\phi_1}$$

$$v_2 = \frac{c}{1+\beta\beta'_2 \cos\phi_2} \sqrt{\beta'^2_2 + \beta^2 + 2\beta\beta'_2 \cos\phi_2 - \beta^2\beta'^2_2 \sin^2\phi_2}$$

hvor ϕ_1 og ϕ_2 er vinklerne mellem M's bevægelsesretning og henholdsvis m_1's og m_2's bevægelsesretninger i tyngdepunktsystemet (se fig. 1)

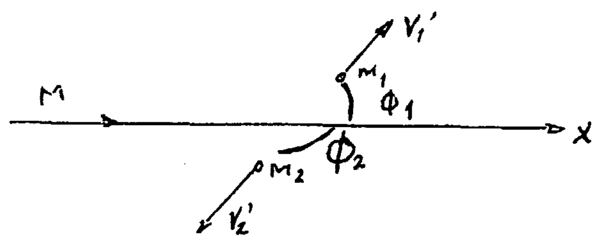


Fig. 1 Tyngdepunktsystem.

4. Vinklen mellem M's bevægelsesretning og m_1's og m_2's bevægelsesretninger i laboratoriesystemet kaldes henholdsvis Θ_1 og Θ_2 (se fig. 2)

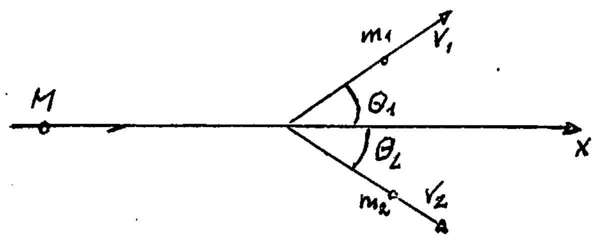


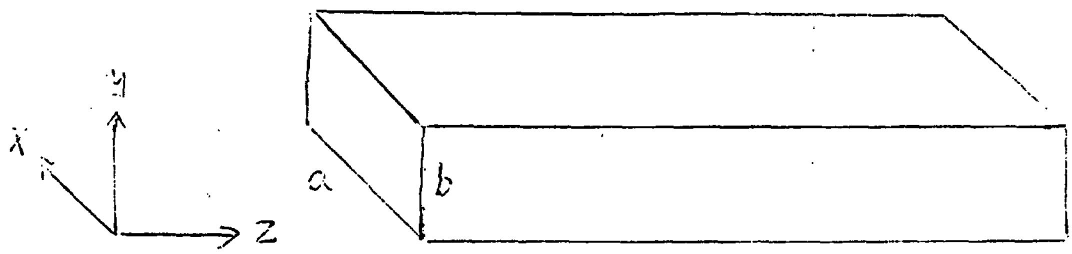
Fig 2. Laboratoriesystem

Find Θ_1 og Θ_2 udtrykt ved ϕ_1 og ϕ_2, β'_1 β'_2 og β.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul, fredag, den 7. januar 1977.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.



En rektangulær bølgeleder har transversale dimensioner a og b og er orienteret således, at bølger kan udbredes i z-aksens retning. Felterne svarende til det laveste TE mode kan da skrives som (realdelen af):

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_o \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i(\omega t - k_g z)}$$
$$E_z = 0$$

$$B_x = -\frac{k_g}{\omega} E_y$$
$$B_y = 0$$
$$B_z = -i\, E_o \frac{\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i(\omega t - k_g z)}$$

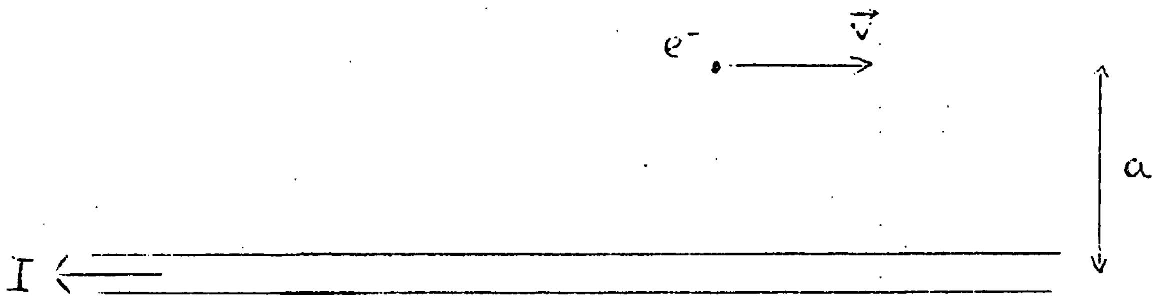
1) Vis, at denne løsning opfylder de nødvendige grænsebetingelser for en bølgeleder med ideelt ledende vægge.

2) Find Poyntings vektor $\vec{N}$.

3) Beregn middelværdien af energistrømmen gennem en plan vinkelret på z-aksen.

4) Find energitætheden U.

Opgave 2.



En meget lang retlinet leder, der her betragtes som uendelig lang, fører en elektrisk strøm I.

1) Find magnetfeltet, $\vec{B}$, i afstanden a fra lederen.

En elektron med ladning (-e) bevæger sig med hastighed v parallelt med lederen i afstanden a, men i modsat retning som strømmen.

2) Hvad er kraften på elektronen?

3) Find de af strømmen inducerede $\vec{E}$ og $\vec{B}$ felter i afstand a fra lederen i elektronens hvilesystem.

4) Brug 3) til at finde kraften på elektronen i dens hvilesystem og sammenlign med den direkte transformerede kraft.

<u>ROSKILDE UNIVERSITETS CENTER</u>

Skriftlig prøve i TERMODYNAMIK & STATISTISK MEKANIK,
dybdemoduleksamen i fysik, den 12. januar 1977 kl. $09^{\underline{30}}$ - $13^{\underline{30}}$
(alle sædvanlige hjælpemidler tilladt).

I

Et mol af en given luftart opfylder i et tilstandsområde tilstandsligningen

$$P \cdot V = R \cdot T + \frac{B(T-\theta)}{V}$$

hvor R er gaskonstanten, B og θ er to positive konstanter.
I samme område findes, at c_V, den molære varmefylde, er konstant.

(1) Find den indre energi U som funktion af T og V, idet energien sættes til nul i tilstanden T_o, V_o.

(2) Angiv sammenhængen mellem T og V ved reversible adiabatiske tilstandsændringer udgående fra tilstanden T_o, V_o.

(3) Angiv, f.eks. ved skravering i et T,V-diagram eller på anden måde, det tilstandsområde, der kan nås fra tilstanden givet ved T_o, V_o ved adiabatiske (reversible eller irreversible) processer.

Opgavesættet fortsættes næste side.

II

Ved statistisk mekaniske beregninger af gassers termodynamiske egenskaber kan man i reglen se væk fra ekcitationer af gasmolekylernes elektronsystemer, når temperaturen ikke er meget høj.

I O_2-molekylet ligger første ekciterede niveau af elektronsystemet $1{,}6 \cdot 10^{-19}$J over grundtilstanden. Udartningsgraden af dette niveau er 2, mens grundtilstanden er 3 gange udartet (d.v.s. der er 2 tilstande med energi $E_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$J og 3 med energi $E_o = 0$). Næste niveau ligger omkring dobbelt så højt $(E_2 \approx 2E_1)$.

(1) Beregn for temperaturerne T=300 K og T=2000 K hvor stor en brøkdel af O_2-molekylerne, der har deres elektronsystemer anslået til første niveau E_1.

III

De termodynamiske egenskaber af et krystallinsk stof er hovedsageligt bestemt af gittersvingningerne. Disse kan repræsenteres ved et antal harmoniske oscillatorer, én for hver normalsvingning af krystallen. Idet normalfrekvenserne betegnes ω_i, $i = 1,2,\ldots, 3N$ og den potentielle energi af krystallen, når alle N atomer befinder sig i deres ligevægtsstilling, kaldes U_o, finder man, at Helmholtz fri energi F(T,V) har formen

$$F(T,V) = U_o + kT \sum_{i=1}^{3N} g\left(\frac{\omega_i}{T}\right).$$

(1) Udfør den angivne beregning af F og bestem derved funktionen g.

Størrelsen U_o, såvel som frekvenserne ω_i afhænger af voluminet V af krystallen.

$$U_o = U_o(V) \quad , \quad \omega_i = \omega_i(V)$$

Vi følger nu Grüneisen ved at gøre følgende antagelse

$$\frac{V}{\omega_i}\frac{d\omega_i}{dV} = \frac{d(\ln\omega_i)}{d(\ln V)} = -\gamma \;,\quad i=1,\ldots,3N$$

hvor γ er en fælles konstant (d.v.s. uafhængig af både V og i).

(2) Vis, ved at anvende Grüneisen's antagelse samt ovenstående udtryk for $F(T,V)$ (hvor formen af funktionen g er underordnet), at systemet adlyder den såkaldte Mie-Grüneisen tilstandsligning:

$$P = -\frac{dU_o}{dV} + \gamma\frac{(U-U_o)}{V}$$

hvor U er den indre energi, og P er trykket.

(3) Vis, udfra dette, at der gælder følgende relation:

$$\alpha = \gamma\frac{\kappa c_V}{V}$$

mellem $\alpha \equiv \left(\frac{\partial \ln V}{\partial T}\right)_P$ volumenudvidelseskoefficienten, $\kappa \equiv -\left(\frac{\partial \ln V}{\partial P}\right)_T$ kompressibiliteten, $c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ varmefylden, og V voluminet.

(Opgavesættet SLUT)

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens modul 2, dybdemodul, torsdag den 12.01.1978.

HJÆLPEMIDLER TILLADT

Opgave 1.

Vi vil betragte finstrukturopspaltningen af det ikke-relativistiske brintatoms 2p niveau.

For at kunne formulere resten nogenlunde kort, starter vi med et indskud om notation. Vi skal betragte operatorer for totalt impulsmoment, baneimpulsmoment og spin, som benævnes $\vec{J}$, $\vec{L}$ og $\vec{S}$ henholdsvis, og med $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Desuden indfører vi egentilstande, således at

$$J^2\, |j, m_j\rangle = j(j+1)\,|j, m_j\rangle\,, \qquad J_z\, |j, m_j\rangle = m_j\,|j, m_j\rangle$$

$$L^2\, |\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\,|\ell, m_\ell\rangle\,, \qquad L_z\, |\ell, m\rangle = m_\ell\,|\ell, m_\ell\rangle$$

$$S^2\, |s, m_s\rangle = s(s+1)\,|s, m_s\rangle\,, \qquad S_z\, |s, m_s\rangle = m_s\,|s, m_s\rangle$$

Impulsmomenter måles altså i enheder af $\hbar$, og unødvendige indices er undertrykt i egentilstandene.

Den omtalte opspaltning kan beregnes, når man til den sædvanlige (Schrödinger) energioperator for brintatomet (her i mks enheder)

$$H_o = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

adderer et såkaldt spin-bane koblingsled

$$H_{SB} = -A\left(\frac{a_o}{r}\right)^3 \vec{L}\cdot\vec{S}$$

således at den totale energioperator bliver

$$H = H_o + H_{SB}$$

Her har $\vec{p}$, m, e og r deres sædvanlige betydning som elektronens impuls (operator), masse, ladning og polær koordinat. Konstanten a_o er Bohr-radius, og den anden konstant A er givet ved Bohr magnetonen og a_o, så at

$$A = 0{,}72 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

1) Vis at operatoren $\vec{L} \cdot \vec{S}$ opfylder $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$.

2) Vis ved brug af algebraen for impulsmoment og spin at J_z kommulerer med H_{SB}, men at L_z og S_z ikke gør det.

De stationære tilstande til H (inclusive H_{SB}) kan da vælges som egentilstande til J^2, J_z, L^2 og S^2.
Vi betragter nu 2p tilstanden i brintatomet, dvs. hovedkvantetal $n = 2$ og $\ell = 1$, og den har naturligvis $s = \frac{1}{2}$. Opspaltningen beregnes ved at finde middelværdien af H_{SB} i det oprindelige brintatoms stationære tilstande, altså 2p egentilstanden til H_o.

3) Udtryk de to tilstande med $j = \frac{3}{2}$ og $j = \frac{1}{2}$, henholdsvis, men hvor begge har $m_j = \frac{1}{2}$, $\ell = 1$ og $s = \frac{1}{2}$ som en linearkombination af egentilstande til L^2, L_z, S^2 og S_z.

4) Beregn middelværdien af H_{SB} i de under 3) nævnte to tilstande (dvs. $\langle j = \frac{3}{2}|H_{SB}|j = \frac{3}{2}\rangle$ og $\langle j = \frac{1}{2}|H_{SB}|j = \frac{1}{2}\rangle$ i lidt løs notation) og udtryk forskellen mellem de to middelværdier (opspaltningen) som et matrixelement af $\left(\frac{a_o}{r}\right)^3$ (vejl. brug resultatet fra 1)).

5) Beregn det relevante matrixelement af $\left(\frac{a_o}{r}\right)^3$ og find opspaltningens størrelse. Hjælp: Den normerede radialfunktion til 2p tilstanden kan skrives $R_{2p}(r) = (24a_o^{\,3})^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{a_o} e^{-\frac{1}{2}\frac{r}{a_o}}$, når den er normeret til $\int_0^\infty r^2 |R_{2p}(r)|^2 dr = 1$

Opgave 2.

Vi betragter en planbølgeløsning til den frie Dirac ligning

$$\psi(\vec{x},t) = u(p)\; e^{-\frac{i}{\hbar}P_\mu x^\mu}$$

Dvs. at Dirac spinoren

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

med 4 komponenter opfylder

$$(P_\mu \gamma^\mu - mc)\; u(p) = 0$$

Her er p en firevektor der opfylder $P^2 = P_\mu P^\mu = (mc)^2$, og summation over dobbelt forekommende indices er underforstået.

Vi skal interessere os for tilfældet $\underline{m = 0}$, og altså bruge

$$P_\mu \gamma^\mu \; u(p) = 0 \qquad \text{(I)}$$

1) Vis at $\frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)$ og $\frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)$ er projektionsoperatorer.

2) Vis at når m = 0 opfylder

$$u_+(p) = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)u(p) \text{ og } u_-(p) = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)u(p)$$

den samme ligning som u(p), nemlig (I).

3) Vis at $u_+(p)$ og $u_-(p)$ (defineret i 2)) hver kun indeholder to uafhængige komponenter, dvs. een to-komponent Pauli-spinor.

Notationen i ovenstående følger Messiah, men her er et par af de vigtige regler:

Antikommutatorer: $\{\gamma_\mu , \gamma_\nu\} = 2\, g_{\mu\nu}$

$$g_{oo} = 1 \quad , \; g_{ij} = -\delta_{ij} \text{ for } i,j = 1,2,3$$

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma_5 , \gamma_\mu\} = 0 \qquad , \qquad \gamma_5^2 = -1$$

Roskilde Universitetscenter.

Skriftlig prøve i Termodynamik og Generel Dynamik.
Dybdemoduleksamen i fysik den 8. januar 1979,
kl. 9:00 - 13:00.
(Benyttelse af medbragt litteratur, tabeller og lommeregner er tilladt).

OPGAVE I.

For en stor gruppe af rene, kondenserede stoffer kan man ved meget lave temperaturer udtrykke den molære varmekapacitet ved fastholdt volumen på formen

$$c_v = \xi \cdot R \cdot \left(\frac{T}{\theta}\right)^{\nu} \qquad (1)$$

hvor ξ og ν er positive dimensionsløse konstanter, R er gaskonstanten og θ en for stoffet karakteristisk temperatur, som kun afhænger af stofkoncentrationen N/V, hvor N er antallet af molekyler i stofprøven, og V er prøvens volumen. Formel (1) gælder kun for $T \ll \theta$. I det følgende betragtes 1 mol af stoffet (dvs. $N = N_A$, Avogadros tal), og T og V holdes inden for gyldighedsområdet af formel (1).

a) Angiv entropien som funktion af temperaturen.

b) Ved det absolutte nulpunkt er den indre energi $U_o(V)$. Angiv den indre energi U(T,V) og Helmholtz-potentialet F(T,V).

Vi antager nu, at følgende relation gælder:

$$\frac{d\theta}{dV} = -\gamma \cdot \frac{\theta}{V} \qquad (2)$$

hvor γ er en positiv konstant, den såkaldte Grüneisen-konstant.

c) Vis, at

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\gamma c_v}{V} \text{ , hvor P er trykket}$$

d) Vis, at

$$\left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] \cdot V = \gamma c_v T$$

e) Vis, at varmekapaciteten ved konstant tryk er givet ved

$$c_p = c_v \cdot \left(1 + \frac{\gamma^2 c_v \kappa T}{V}\right)$$

hvor κ er den isoterme kompressibilitet,

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

OPGAVE II.

For monovalente metaller ved meget lave temperaturer er den molære varmekapacitet givet ved formlen:

$$c_v = \frac{\pi^2}{2} \cdot R \cdot \frac{T}{\theta} \qquad \text{med } \theta = \frac{h^2}{8mk}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}$$

hvor n er antallet af ledningselektroner pr. volumenenhed, $h = 6.62 \cdot 10^{-27}$ erg·sec er Planck's konstant, $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K er Boltzmann's konstant, og $m = 9.11 \cdot 10^{-28}$ g er elektronmassen.

a) For et bestemt metal, A, er $n = 4.07 \cdot 10^{22}\ \text{cm}^{-3}$. Beregn θ.

b) Beregn c_v for metallet A ved temperaturen 1K. (Gaskonstanten $R = 8.31$ J/K).

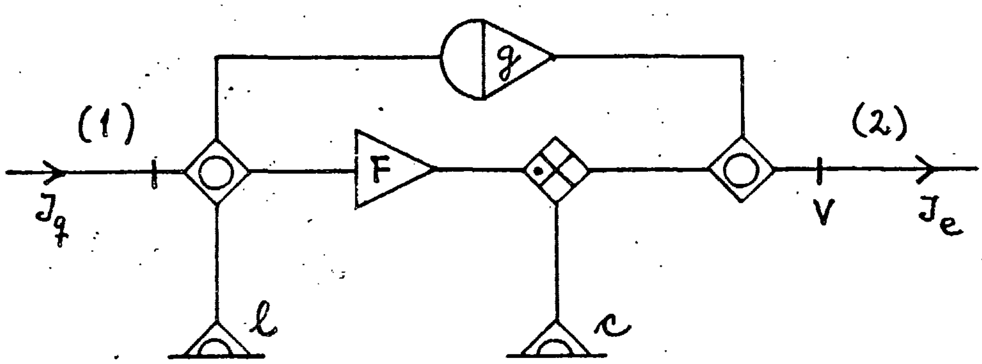
c) To ens klumper på hver 1 mol af metallet A har til at begynde med temperaturerne T_1 og T_2. Vi lader en reversibel Carnot-maskine arbejde mellem de to klumper, således at der overføres mekanisk potentiel energi til et arbejdsreservoir. Hvad er den fælles sluttemperatur T_o, når Carnot-maskinen ikke kan udføre mere arbejde?

d) Hvor meget energi kan overføres til arbejdsreservoiret, når $T_1 = 0.5$ K og $T_2 = 1.5$ K ?

e) Hvad bliver sluttemperaturen (T_s), hvis temperaturudligningen sker ved spontan varmeledning, uden at der udføres arbejde?

OPGAVE III.

For visse metaller og halvledere er den termoelektriske spænding lineært afhængig af størrelsen af et udefra pålagt magnetfelt B. Vi vil forsøge at beskrive et sådant termoelement med nedenstående energibåndsdiagram, hvor gyratorparameteren g antages at være proportional med B.



De øvrige parametre, ℓ, c og F antages uafhængige af magnetfeltet. Strømmene J_q og J_e er henholdsvis varmestrømmen og den elektriske strøm.

a) Vi antager, at elementets kolde loddested er i kontakt med et varmereservoir med temperaturen T_r, og at det varme loddested har temperaturen $T_r+\delta T$, hvor $\delta T \ll T_r$. Vis, at spændingen i den termiske port (1) kan udtrykkes som $\delta T/T_r$.

b) Angiv strømmene J_q og J_e som funktioner af δT og den elektriske spænding V i port 2.

c) Find varmeledningsevnen, når den elektriske port er kortsluttet (V=0).

d) Bestem for fastholdt g og δT den optimale elektriske spænding V_{opt}, således at produktionshastigheden af elektrisk energi bliver så stor som muligt (maksimal produktivitet).

e) Vis, at effektiviteten ε_{opt} svarende til maksimal produktivitet har et maksimum som funktion af g.

(opgavesættet slut)

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens modul 2, dybdemodul, torsdag, den 4.06.81.

HJÆLPEMIDLER TILLADT

Opgave 1.

En tynd kugleskål med radius R er jævnt belagt med den elektriske (flade-)ladningstæthed σ. Kuglen befinder sig i vacuum.

1. Find det elektriske potential $\varphi = \varphi(r)$ for $o \leq r < \infty$, idet o-punktet for potentialet vælges i det uendeligt fjerne.

2. Find et udtryk for feltets energitæthed $u = u(r)$ indenfor og udenfor kugleskallen. Vis, at udtrykket giver den korrekte enhed (dimensionskontrol).

Nu sættes kugleskallen i rotation om en diameter med den konstante vinkelhastighed ω.

3. Find den elektriske strømstyrke, I, der herved ialt produceres.

4. Find størrelsen af det magnetiske felt (B) i kuglens centrum, B_o.

5. Vis, at der mellem B_o fra spm. 4 og φ_o fra spm. 1 (φ_o er potentialet i centrum) gælder følgende sammenhæng:

$$B_o = \frac{2}{3}\frac{\omega\varphi_o}{c^2}$$

hvor c er lyshastigheden i vacuum.

Opgave 2.

Vi betragter en 2-dimensional, isotrop harmonisk oscillator, dvs. en partikel med

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2).$$

1. Opskriv Schrödingerligningen (energi-egenværdiligningen) i cartesiske koordinater (dvs. (x,y)). Find desuden den almindelige løsning hertil, dvs. egenfunktionerne $\psi = \psi(x,y)$ samt energi-egenværdierne, på grundlag af viden om den en-dimensionale oscillator.

2. Diskuter egenfunktionernes paritetsforhold.

3. Angiv udartningsgraden for de første 5 tilstande og find et udtryk for udartningsgraden for den m'te tilstand.

4. Find $\langle r \rangle_o$, dvs. middelværdien af r i grundtilstanden.

Lad nu partiklen befinde sig i en tilstand, der ikke er en egentilstand til energien, nemlig i

$$\psi(x,y) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}a^2(x-\xi)^2}\, e^{-\frac{1}{2}a^2(y-\eta)^2}$$

hvor (ξ,η) er et fast punkt i (x,y) planen.

5. Find sandsynligheden for, at man ved måling af energien i denne tilstand får resultatet $E = \hbar\omega$.

6. Vil sandsynligheden for at få $E = \hbar\omega$ ved måling af energien (jf. spm. 5) afhænge af tiden? (Dvs.: Hvis man havde målt E til et senere tidspunkt, t>o, ville man så have fået en anden sandsynlighed?)

   Begrund svaret.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul,

torsdag den 4. juni 1981

Hjælpemidler er tilladt

Opgave 1

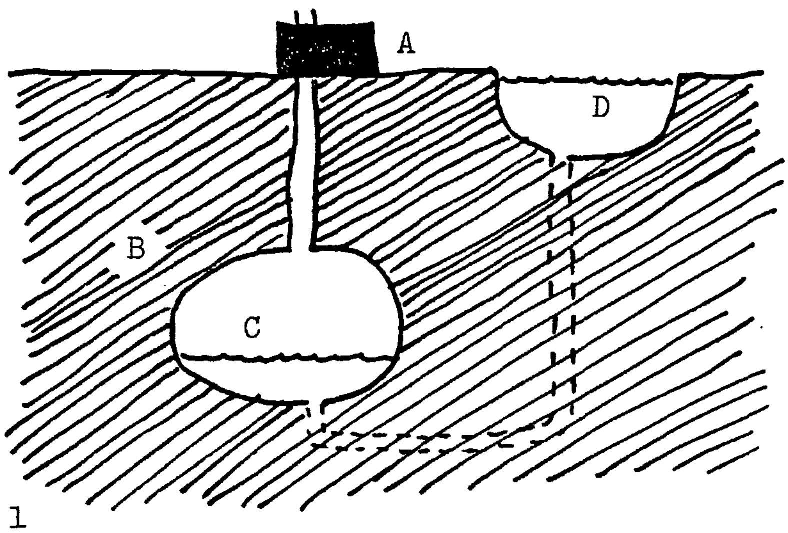


Fig. 1

Et trykluft-energilager kan bestå af et hulrum C i en tæt geologisk formation B, hvortil luft kan pumpes ved hjælp af en kompressor og evt. igen udlades gennem en turbine (A på Figur 1).

Idet luften behandles som en ideal luftart, beregnes den oplagrede energi i følgende tre tilfælde:

1). Luften sammentrykkes fra et oprindeligt volumen V_o til volumenet V ved en isoterm proces, idet den omgivende geologiske formation B opfattes som et stort varmereservoir, som påtvinger luften en konstant temperatur T_o.

2). Luft presses ned i hulrummet C under konstant tryk P_o, idet det fx. antages, at C er delvist vandfyldt og i forbindelse med en sø D ved jordoverfladen, således at en vandmængde forskubbes fra C til D. Den oplagrede lufts volumen i C betegnes V og volumenet før luften blev presset ned i hulrummet betegnes V_o.

Opgaven fortsættes næste side.

Opgave 9 fortsat

3). Luften sammentrykkes adiabatisk fra et oprindeligt volumen V_o og tryk P_o til volumenet V og trykket P, idet processen antages at ske så hurtigt, at der ikke er tid til udveksling af varme med reservoiret B. Den adiabatiske betingelse kan skrives

$$(*) \qquad P\,V^{\gamma} = \text{konstant},$$

hvor $\gamma = c_P/c_V$ antages konstant.

4). Udled (*).

5). Skitsér i et (T,S)-diagram den adiabatiske sammentrykning beskrevet i 3), efterfulgt af et varmetab til det omgivende reservoir B, og endelig fulgt af en proces, hvor luften ved adiabatisk udvidelse driver en turbine og derved frigiver en del af den oplagrede energi. (T er temperatur, S entropi).

6). Et trykluft-energilager kan bestå af et hulrum i en salthorst. Der er intet vandreservoir (D på Fig. 1) til trykudligning. Temperaturen af det omgivende salt sættes til 30^oC. Da saltet ikke kan tåle de høje temperaturer, som luften vil have efter en adiabatisk kompression fra atmosfæretryk (10^5 Nm^{-2}) til et maksimalt lagertryk på $70 x 10^5$ Nm^{-2}, køles luften ned til saltets temperatur inden den sendes ned i salthorsten. Når luften skal hentes op for at drive turbinekraftværket, opvarmes den igen, ideelt med varmen fra den foregående afkøling. Idet det antages, at afkøling og opvarmning sker ved konstant tryk, og at varmeoplagringen er tabsfri, skal processen skitseres i et (T,S)-diagram.

7). Hvor høj er luftens temperatur umiddelbart efter komprimeringen til $70 x 10^5$ Nm^{-2} (sæt $\gamma = 1.5$ og indtagsluftens tem-

Opgaven fortsættes næste side.

Opgave 2 fortsat

peratur lig 10^oC).

8). Hvis afkølingen af den komprimerede luft sker ved hjælp af havvand, og genopvarmningen til den i 7) beregnede temperatur sker ved at afbrænde et brændsel, så er lagerets effektivitet, dvs. den udgående energi (mekanisk) divideret med den indgående energi (dels mekanisk dels varme), ikke længere 100% i idealtilfældet. Find lagereffektiviteten når al den anvendte brændselsenergi antages at blive nyttiggjort under luftopvarmningen, og med de i 6) og 7) gjorte øvrige antagelser.
(luftens massefylde kan sættes til 1.25 kgm^{-3} ved atmosfærens tryk og temperatur. Luftens varmefylde afhænger af temperatur og tryk. Antag for de isobare afkølings- og opvarmningsprocesser betragtet her, at $c_p = 10^3$ J/kg/K).

Skriftlig eksamen i fysikstudiets dybdemodul
Mandag 7. juni 1982
Hjælpemidler er tilladt
8888888888888888888888888888888888888888888888888

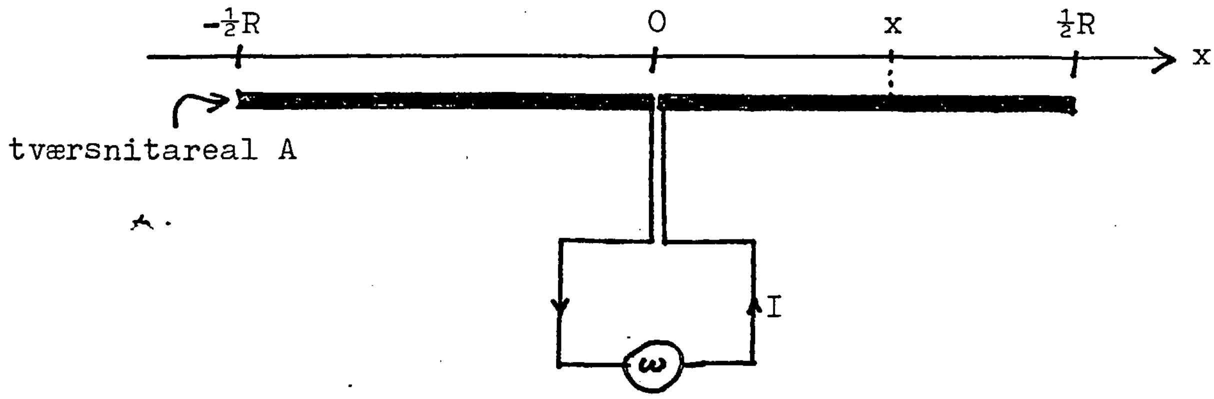


Fig. 1

Opgaven betragter en antenne bestående af to metalstænger med tværsnitareal A og længde $\frac{1}{2}R$, hvorigennem der sendes en vekselstrøm $I = I_0 \cos\omega t$. Den samlede ohmske modstand i antennen er R_0.

Spørgsmål 1 : Find den effekt $P_{Ohm,\ av.}$ som i middel tabes p.g.af Ohmsk modstand i antennen.

Strømmen kan beskrives ved bevægelsen af fri elektroner i antennen. Antag at elektronernes hastighed v kun afhænger af x-koordinaten og tiden t (der ses altså bort fra "skin-effect", at elektronerne fortrinsvist vil bevæge sig på overfladen).

Spørgsmål 2 : Idet elektronens ladning betegnes -e og der antages at være n fri elektroner pr. volumenenhed i antennen, skal det vises at strømmen I(x,t) et givent sted i antennen er proportional med elektronernes hastighed v(x,t), I(x,t) = k v(x,t), og k skal bestemmes.

Spørgsmål 3 : Find den tidslige variation af stedkoordinaten af en elektron med middelpositionen x_m og angiv amplituden i elektronens svingninger.

Forholdene i antennen kan fortolkes som en svingende ophobning af ladninger Q og -Q i de to antennehalvdele, og til en given tid kan antennen betragtes som en elektrisk dipol med ladningerne $Q(t) = Q_0 \sin\omega t$ og $-Q(t)$ i afstanden R.

Elektronernes accelererede bevægelse giver anledning til udsendelse af elektromagnetisk stråling, som kan karakteriseres ved angivelse af de elektriske og magnetiske feltstyrker i rummet omkring antennen, der antages at have egenskaber som vacuum.

Feltstyrken $\vec{E}$ er for en statisk dipol beregnet fx i Lorrain og Corson, Electromagnetism, exempel 2.5.1. I det tidsafhængige tilfælde tilkommer imidlertid nye led, som viser sig at dominere feltet langt fra dipolen. Her kan den elektriske feltstyrke med tilnærmelse skrives

$$E(\vec{r},t) = \frac{R\,\omega\, I_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \sin\theta \sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right), \qquad (1)$$

2

hvor c er udbredelseshastigheden af elektromagnetiske bølger ($= (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$) og θ polarvinklen (se Fig. 2). $\vec{E}$ er rettet vinkelret på $\vec{r}$ og ligger i den af $\vec{r}$ og antennen udspændte plan.

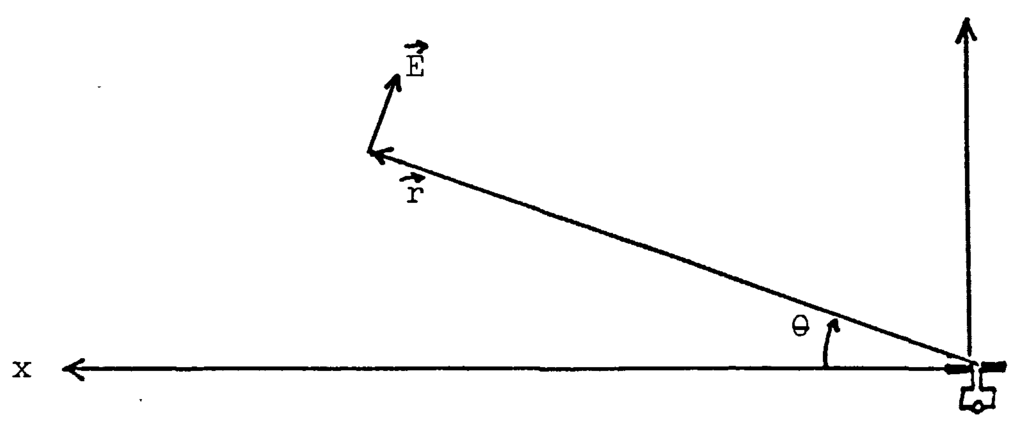


Fig. 2

Spørgsmål 4 : Angiv hvilken faktor i E som beskriver bølgebevægelsen og udtryk bølgelængden λ ved de opgivne størrelser.

Spørgsmål 5 : Giv en kort, kvalitativ forklaring på, at feltstyrken til tiden t afhænger af en funktion taget til en anden tid.

Spørgsmål 6 : Forklar kort, hvorfor det må antages at $R \ll \lambda$ for at komme til den simple tidsafhængighed af $(t - r/c)$ i (1).

Den magnetiske feltstyrke står med de gjorte antagelser vinkelret på både $\vec{r}$ og $\vec{E}$ og har størrelsen

$$H = \frac{R\omega I_o}{4\pi c r} \sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Spørgsmål 7 : Opskriv Poyntings vektor i punktet $\vec{r}$.

Spørgsmål 8 : Find den effekt, integreret over alle retninger, som antennen udstråler.

Spørgsmål 9 : Find den effekt som i middel passerer ud gennem en kugleskal omkring antennen, og vis at den kan skrives på formen $P_{\text{stråling,av.}} = \frac{1}{2} R_s I_o^2$. Angiv strålingsmodstanden R_s.

Spørgsmål 10 : Udregn forholdet R_s/R_o mellem strålings- og Ohmsk modstand numerisk, idet det antages at $R = 25$m, $A = 2.5 \times 10^{-3}$m^2, $I_o = 50$ A, $\omega = 3.7 \times 10^6$ s^{-1}, og at den Ohmske modstand i antennen er givet ved metallets ledningsevne 6×10^7 A/V/m.

$c = 3 \times 10^8$ m/s
$\varepsilon_o = 8.9 \times 10^{-12}$ F/m

Opgave 2.

Man kan fremstille antiprotoner (en antiproton er protonens antipartikel) ved følgende reaktion, som er den energetisk set "billigste" reaktion til fremstilling af antiprotoner:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \overline{p}$$

Her og i det følgende er p symbol for en proton og $\overline{p}$ symbol for en antiproton.

Hvilemassen for en proton såvel som for en antiproton er m_p, hvor $m_p \times c^2 = 940$ MeV. Elementarladningen er $1{,}6 \times 10^{-19}$C. Lysets hastighed er $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Spm. 1. Find ovennævnte reaktions tærskelværdi, målt i MeV, idet den ene proton (kaldet targetprotonen) er i hvile i laboratoriesystemet før processen.

Spm. 2. Find γ ($\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$) og impulsen (i enheder af MeV/c), målt i laboratoriesystemet, dels for den indkommende proton før reaktionen og dels for de protoner og antiprotoner, som produceres ved ovennævnte reaktion ved den i spm. 1. fundne tærskelværdi.

Spm. 3. Vi tænker os nu, at ovennævnte reaktion til fremstilling af antiprotoner finder sted i et område med et homogent magnetfelt med feltstyrken 1,8 Tesla.
De indkommende protoners energi svarer til tærskelværdien for antiprotonproduktion, og deres bevægelsesretning er vinkelret på magnetfeltets retning.

Gør rede for udseendet og beliggenheden af banekurverne for de indkommende protoner og for de ved ovennævnte reaktion frembragte protoner og antiprotoner, så længe de bevæger sig i området med det homogene magnetfelt. Beregn herunder krumningsradierne for de nævnte partiklers banekurver. Hvorledes kan man skelne antiprotonerne fra protonerne udfra udseendet af banekurverne?
Det forudsættes ved besvarelsen af de stillede spørgsmål, at der kan ses bort fra opbremsning i stof i target mv.

(opgaven fortsættes)

Spm. 4. Den i spm. 1. fundne tærskelværdi er den tærskelværdi man vil observere, hvis man skyder en stråle af protoner ind i et target af flydende brint, således som det f.eks. sker ved anvendelse af brintboblekamre til undersøgelse af elementarpartikelprocesser ved p-p-stød.

Man kunne imidlertid også vælge at benytte et target af atomkerner med et noget større massetal. I sådanne atomkerner bevæger nukleonerne (protoner og neutroner) sig (i alle retninger) med kinetiske energier på op til af størrelsesordenen 20 MeV.

Beregn approksimativt den ændring af tærskelværdien for processen:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

som kan forventes i forhold til den i spm. 1. fundne tærskelværdi, såfremt der anvendes et target af tungere atomkerner.

Beregningerne udføres ved at erstatte den i spm. 1. anvendte hvilende targetproton med en proton, som bevæger sig med en kinetisk energi på 20 MeV i modsat retning af den indkommende protonstråle.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul, den 14.6.1983.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

En rektangulær pladekondensator med siderne a = 100 cm, b = 20 cm og pladeafstand d = 1 cm er anbragt i atmosfærisk luft, hvor man antager, at dielektricitetskonstanten er ε_0. Den oplades, så at spændingsforskellen mellem pladerne er 1000 volt.

1) Find D og E samt ladningen Q på en af pladerne.

Imellem pladerne indskydes nu yderligere den ene gren af et U-rør. Grenen står lodret, parallelt med siden a, og den opfylder netop plademellemrummet. I U-røret er der en væske med dielektricitetskonstanten $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ og vægtfylde $\rho = 1.05$ g/cm^3. Før U-røret føres ind, står væsken 50 cm under overkanten.

2) Idet Q holdes konstant, spørges der efter udtryk for D og E i væsken og i luften ovenover, samt for systemets elektrostatiske energi.

3) Find højdeforskellen mellem væskeoverfladerne i U-rørets grene.

$g = 9.81$ m/s^2

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m

Opgave 2

En elementarpartikel med hvilemasse M er ustabil og henfalder til tre partikler med hvilemasserne m_1, m_2 og m_3.

1) Opskriv et udtryk for den maksimale energi, som kan føres bort af en af henfaldspartiklerne, hvis partiklen med masse M er i hvile før henfaldet.

Opgavesættet fortsættes

Lad den henfaldende elementarpartikel være en eta-meson (η^o), som (bl.a.) kan henfalde efter følgende proces:

$$\eta^o \longrightarrow \pi^o + \pi^+ + \pi^-$$

Partiklernes hvilemasser er: $M_{\eta^o} = 550\ \text{MeV}/c^2$

$M_{\pi^o} = 135$ -

$M_{\pi^\pm} = 140$ -

2) Hvis vi gør den antagelse, at η^o-mesonen er i hvile (i laboratoriesystemet), når den henfalder efter ovenstående proces, hvor stor er da den maksimale energi, hvormed en af de ladede π-mesoner vil kunne observeres?

Eta-mesonen (η^o) kan f.eks. produceres ved følgende reaktion:

$$\pi^- + p \longrightarrow n + \eta^o \quad (n = \text{neutron},\ p = \text{proton})$$

Processen kommer i stand ved at sende en stråle af højenergetiske π^--mesoner mod et target af flydende brint.

3) Hvor stor er tærskelværdien for denne reaktion? Det oplyses yderligere, at $M_p \simeq M_n \simeq 940\ \text{MeV}/c^2$.

4) Hvor stor er η^o-mesonens kinetiske energi, målt i laboratoriesystemet, lige ved reaktionens tærskelværdi?

Vi antager nu, at en η^o-meson med den i 4) beregnede kinetiske energi slet ikke bremses (mister energi), inden henfald efter processen $\eta^o \longrightarrow \pi^o + \pi^+ + \pi^-$ finder sted.

5) Hvor stor er den maksimale energi, målt i laboratoriesystemet, hvormed en af de ladede π-mesoner kan udsendes?

Opgavesæt slut.

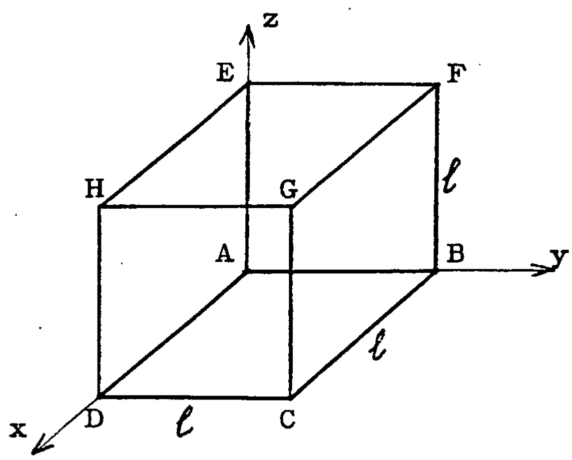
Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul, 19.1.1984.

2

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Tolv ens ledningsstykker med længden ℓ og modstanden R sammenloddes, så at de er anbragt som kanterne på en terning. Mellem to hjørner placeret diametralt modsat på en sideflade, påtrykkes potentialforskellen V. Lad os med nedenstående figurs betegnelser tænke os, at punktet H har potentialet +V i forhold til punktet A.



1) Beregn strømmene i de tolv ledninger. Gør først rede for systemets symmetriegenskaber og udnyt disse i beregningerne.

2) Beregn den samlede modstand mellem punkterne A og H.

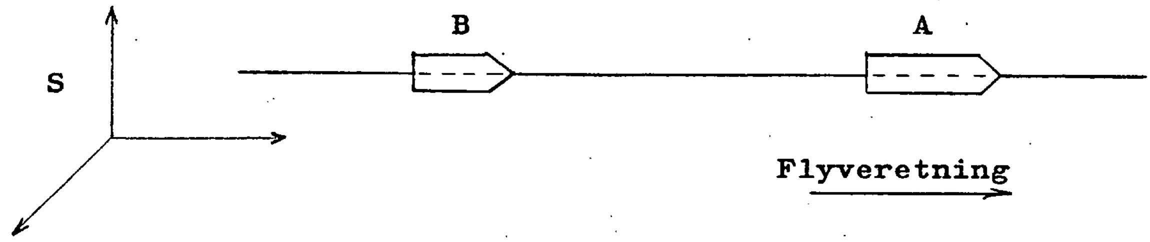
3) Idet der refereres til figurens betegnelser og anvendes det her viste koordinatsystem med begyndelsespunkt i A og akserne langs terningens kanter, ønskes beregnet komponenterne af den magnetiske feltstyrke, som strømmen i ledningsstykket AE giver anledning til i skæringspunktet mellem terningens diagonaler, dvs. i punktet $(x,y,z) = (\ell/2, \ell/2, \ell/2)$.

4) Vis, at det samlede magnetfelt hidrørende fra strømmene i de tolv ledningsstykker er nul i punktet $(\ell/2, \ell/2, \ell/2)$. Det er her underforstået, at der bortses fra magnetfelter fra strømme i tilledningerne til A og H.

Opgavesættet fortsættes næste side

Opgave 2.

To rumskibe, A og B, bevæger sig i rummet langs samme rette linie og i samme retning, men med hver sin konstante hastighed, v_A og v_B, i forhold til et inertialsystem S. Lad os antage, at B følger efter A. Rumskibene antages at kunne bevæge sig med meget store hastigheder.



På A råder man over et radaranlæg, som kan udsende radarsignaler, nemlig dels enkelte signaler og dels serier af signaler, hvor der er et veldefineret, konstant tidsinterval mellem to på hinanden følgende signaler i serien. Radarsignalerne er glimt af umådelig kort varighed. Endvidere har man på A en modtager, som kan opfange reflekterede signaler, samt et apparat som kan måle tidsintervaller, dels mellem udsendelsen af et enkeltsignal og modtagelsen af dets reflekterede signal, og dels mellem signalerne i serie reflekterede signaler.

1) Der afsendes fra A et enkelt radarsignal mod B, som reflekteres fra B's forende og atter modtages i A. Bestem afstanden fra A til B, målt i A's hvilesystem, når det opgives, at der målt på apparatet i A er forløbet t sekunder fra afsendelsen af radarsignalet til modtagelsen af det reflekterede signal. Da måleprocessen altså varer t sekunder, ønskes det præciseret, til hvilket tidspunkt indenfor de t sekunder afstanden har den fundne værdi.

2) Der afsendes nu en serie radarsignaler med tidsintervallet Δt sekunder mellem to på hinanden følgende signaler, fra A mod B. Lidt senere opfanges en serie fra B's forende reflekterede signaler, hvor tidsintervallet mellem to på hinanden følgende signaler har en ændret værdi, $\Delta' t$.
Udregn hastigheden af B i forhold til A, målt i det inertialsystem, hvori A er i hvile.

Opgavesættet fortsættes næste side

3) Det er så heldigt, at man ved anvendelse af et særligt kraftigt radarsignal er i stand til at opfange et reflekteret signal fra såvel B's forende som fra et udspring på B's bagende. Man kan bestemme tidsforskellen δt sekunder mellem modtagelsestidspunkterne for disse to ekkosignaler.
Vis, at man herved kan bestemme hvilelængden af B, når man i forvejen kender B's hastighed i forhold til A.

4) På A bliver man overbevist om, at B er et fjendtligt rumskib og beslutter at affyre en kraftig laserkanon mod B. Man sender en strålingsmængde med den samlede energi E bagud mod B. Hvor stor bliver hastigheden af A efter affyringen, målt i forhold til det inertialsystem, hvori A var i hvile før affyringen?

(Opgavesættet slut)

SOMMEREKSAMEN 1984.

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul 19.6.84.

Hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

K^+-mesoner kan frembringes ved reaktionen

$$\gamma + p \rightarrow K^+ + \Lambda$$

d.v.s. ved at en foton rammer en proton.

Det antages nu, at protonen er i hvile i laboratoriesystemet før processen. Antag endvidere, at den producerede K^+-meson er i hvile i laboratoriesystemet efter processen.

1) Find energien af fotonen, målt i laboratoriesystemet.

K^+-mesonen(som også i det følgende antages at være i hvile) henfalder oftest til en myon og en neutrino:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

2) Find myonens (μ^+) totalenergi.

3) Find myonens impuls.

Antag nu, at henfaldsprocessen af K^+-mesonen finder sted i et område af rummet med et homogent magnetfelt med feltstyrken 1T. Vi iagttager en myon (μ^+), som ved henfaldet udsendes med en hastighed, som danner vinklen 89^o med magnetfeltets retning.

4) Beregn størrelsen af radius i projektionen af banekurven på en plan vinkelret på magnetfeltet.

5) Beregn, hvor stor afstand i feltets retning myonen (μ^+) vil tilbagelægge, hvis den i sit hvilesystem lever $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ sekunder (middellevetiden).

(opgavesættet fortsættes næste side)

(opgave 1 fortsat)

Partiklernes hvilemasser er:

$M_p \quad = \quad 938 \text{ MeV/c}^2$

$M_{K^+} \quad = \quad 494 \text{ MeV/c}^2$

$M_\Lambda \quad = \quad 1115 \text{ MeV/c}^2$

$M_{\mu^+} \quad = \quad 106 \text{ MeV/c}^2$

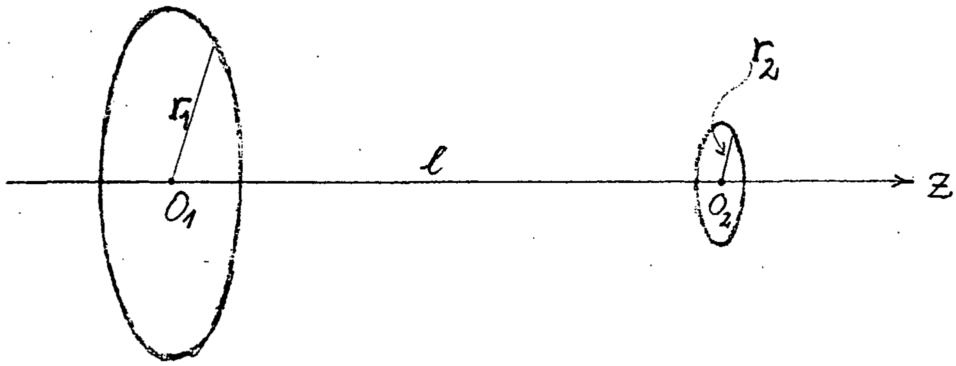
M_ν anses her for negligibel.

$c \quad = \quad 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

(opgavesættet fortsættes næste side)

Opgave 2.

To cirkulære kredse, lavet af tynde ledninger, med radier r_1 og r_2, hvor $r_1 >> r_2$, er anbragt koaksialt og med indbyrdes afstand ℓ, hvor $\ell >> r_1$ (se figuren). I den store kreds (radius r_1) opretholdes en konstant strøm I_1.



1. Find approksimativt $\vec{B}$ hidrørende fra strømmen i den store kreds i det punkt O_2 (beliggende på den fælles akse) som er centrum for den lille kreds.

   Vi antager nu, at der løber en strøm I_2 i den lille kreds, med samme omløbsretning omkring den fælles akse som I_1.

2. Vis, at den lille kreds må påvirkes af magnetfeltet fra den store kreds med en resulterende kraft og bestem dens retning.

3. Vis, at kraften på den lille kreds approksimativt kan bestemmes ved $F = m_2 \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$, hvor m_2 er den lille kreds' magnetiske dipolmoment, og B er den i spm. 1 beregnede feltstyrke.
   Beregn derefter F.

(opgavesættet fortsættes næste side)

(opgave 2 fortsat)

I stedet for den lille kreds anbringes nu en anden kreds med samme radius r_2 og ohmsk modstand nul. Den har selvinduktionskoefficienten L. Fra meget stor afstand føres den med jævn fart V hen mod den store kreds, idet de to kredses akser hele tiden falder sammen.

4. Beregn strømmen $I_2(z)$ i den lille kreds som funktion af afstanden z til den store kreds, idet vi antager, at strømmen i begyndelsespositionen $z = z_o$ er $I_2(z_o) = o$, og idet vi stedse regner med at $z \gg r_1$.

(opgavesættet slut)

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (relativitetsteori og kvantemekanik)
torsdag, den 10. januar 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Brug af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

En partikel med masse m bevæger sig i et én-dimensionalt harmonisk oscillatorpotential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

a) Partiklen antages at befinde sig i grundtilstanden. Anfør energien og bølgefunktionen for grundtilstanden.

Pludselig til tiden t=o ændres potentialet til

$$V'(x) = m\omega^2 x^2$$

b) Sandsynligheden for, at partiklen befinder sig i grundtilstanden for det nye harmoniske potential V'(x), kaldes P_o. Beregn værdien af P_o umiddelbart efter t=o.

c) Ændrer sandsynligheden P_o sig, når tiden går? Begrund svaret.

d) Find tilsvarende sandsynligheden P_1 for at finde partiklen i den første anslåede tilstand af V'(x) umiddelbart efter t=o.

e) Vis, at middelværdien af energien, <E>, umiddelbart efter t=o er $\frac{3}{4}\hbar\omega$.

f) Angiv værdien af <E> før t=o og giv en forklaring på, at middelenergien ændrer sig ved t=o.

— o —

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 2.

Udgangspunktet for denne opgave er følgende "paradoks". Et rumskib med hvilelængden L_o accelereres fra hvile i forhold til inertialsystemet S, således at dets forende (F) i tidsrummet t_F tilbagelægger strækningen x_F og opnår en sådan hastighed, at rumskibets længde målt i S er kontraheret til $\frac{1}{2}L_o$. Rumskibets bagende (B) vil da i tidsrummet t_F have tilbagelagt strækningen $x_F + \frac{1}{2}L_o$, d.v.s. at bagendens middelhastighed i tidsrummet t_F har været $\bar{v}_B = (x_F + \frac{1}{2}L_o)/t_F$. Hvis L_o er tilstrækkelig stor, vil $\bar{v}_B$ kunne blive større end lyshastigheden c. Men ifølge den specielle relativitetsteori kan materielle genstande kun bevæge sig med hastigheder mindre end c!

——— 0 ———

START PÅ OPGAVEN:

Lad os antage, at rumskibet bringes i bevægelse ved at give forenden (F) og bagenden (B) en række parvise puf, som giver de to ender en hastighedsforøgelse $d\beta$, hvor $\beta = \frac{v}{c}$, idet v er rumskibets hastighed langs x-aksen i S. Hvis rumskibets hvilelængde skal være bevaret (d.v.s. at rumskibet ikke deformeres), må puffene i et par være samtidige såvel som lige store målt i rumskibets øjeblikkelige hvilesystem S', d.v.s. det inertialsystem, som i forhold til S bevæger sig med en hastighed v lig med rumskibets hastighed i forhold til S på det pågældende tidspunkt.

1) Hvor stor er tidsforskellen Δt, målt i S, mellem to puf i henholdsvis F og B, som er samtidige i forhold til S', hvor S' er ovennævnte øjeblikkelige hvilesystem svarende til hastigheden β. I hvilken ende af rumskibet kommer puffet først, set fra S?

2) Vis, at udtrykket for den såkaldte Lorenz-forkortning kan udledes ved hjælp af resultatet fra 1).

(opgaven fortsættes næste side)

(opgave 2 fortsat)

3) Efterhånden som rumskibets hastighed øges, vil puffene i den ene ende indtræffe stadigt tidligere, målt i S, end de parvis tilsvarende puf i den anden ende. Udled et udtryk for denne vækst i forspring som funktion af β.

4) Som et grænsetilfælde af det i 4) beskrevne tidsforløb af puf, hvor puffene i den ene ende følges stadigt hurtigere efter hinanden, tænker vi os nu, at alle puffene i denne ende indtræffer samtidigt, målt i S, svarende til at denne endes acceleration går mod uendelig.
Vis, at der i denne grænse gælder følgende relation:
$(L_0/c^2)\gamma^3 \cdot a = 1$

hvor L_0 = rumskibets hvilelængde

a = accelerationen af den anden ende (d.v.s. den ende som ikke i grænsen får en uendelig stor acceleration) målt i S

$\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

Vis dernæst, at der må gælde følgende ulighed for sammenhængen mellem L_0 (rumskibets hvilelængde) og a', hvor a' er accelerationen målt i forhold til det øjeblikkelige hvilesystem S':

$$L_0 \cdot a' \leqslant c^2$$

Transformationsligningen for acceleration i x-aksens retning mellem to inertialsystemer S og S' (betegnet a_x og a'_x) er ved den specielle beliggenhed:

$$a_x = (a'_x/\gamma^3) \cdot (1 + v \cdot u'_x/c^2)^3$$

hvor v er hastigheden af S' i forhold til S

u'_x er genstandens ~~hastighed~~ i forhold til S'

Diskutér det i indledningen omtalte paradoks på grundlag af disse resultater.

(opgaven fortsættes næste side)

(opgave 2 fortsat)

5) Illustrer ved et par taleksempler, at den i 4) udledte relation ikke vil have nogen praktisk betydning i den makroskopiske verden.

Betragt dernæst et mikroskopisk system, bestående af to elektroner, hver med ladning e, masse m_e og radius r_e, som anbringes i kontakt med hinanden (afstanden mellem deres centre er altså $2r_e$) og derefter slippes fri, hvorefter de begynder at accelerere på grund af den gensidige Coulomb-frastødning. Vis, at man ved indsættelse af begyndelsesaccelerationen for a' i grænserelationen i 4) får en L_0-værdi, som svarer til den såkaldte "klassiske elektron radius",

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad .$$

6) Afbild i et rumtidsdiagram svarende til inertialsystemet S verdenslinierne for henholdsvis forende, bagende og et mellemliggende punkt på et rumskib med hvilelængde L_0, idet rumskibet accelereres maksimalt svarende til den i 4) udledte grænse. (Det er bekvemt at benytte hvilelængden L_0 som enhed på x-aksen og L_0/c som enhed på tidsaksen).

7) Afbild i et rumtidsdiagram svarende til inertialsystemet S verdenslinierne for forende, bagende og et mellemliggende punkt på et rumskib med hvilelængde $L_1 < L_0$, hvis forende accelereres med <u>samme</u> acceleration som rumskibets forende i 6).

Skitsér hvorledes beliggenheden af det øjeblikkelige hvilesystem ændres under bevægelsesforløbet. Vis, hvorledes verdenslinierne for rumskibets forende og bagende forløber, hvis accelerationen på et vist tidspunkt ophører.

$c = 3 \times 10^8$ m/s

(opgavesættet slut)

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (relativitetsteori og kvantemekanik), fysik modul 2.
fredag, den 7. juni 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Brug af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

En raket med hvilemassen m bevæger sig i en retlinet bevægelse i forhold til et inertialsystem S under påvirkning af en konstant kraft F i fremadgående retning. I forhold til S påbegyndtes bevægelsen fra hvile ($v_{raket} = 0$) til tiden $t = o$. Det antages i det følgende, at raketten i sin bevægelse efterhånden opnår relativistiske hastigheder.

1) Hvor lang tid forløber, målt i S, før raketten har opnået hastigheden $v_{raket} = \frac{1}{2}c$, hvor c er lyshastigheden ?

2) Hvor stor er rakettens øjeblikkelige acceleration, målt i S, på det i spørgsmål 1 beregnede tidspunkt ?

3) Et arbejde kan i relativitetsteorien på samme måde som i den newtonske mekanik udtrykkes ved produktet af kraft og vej. Udregn på denne måde, hvor stort arbejde der skal udføres for at give raketten hastigheden $\frac{1}{2}c$. Kontrollér, om resultatet stemmer overens med værdien af rakettens kinetiske energi.

4) En iagttager i S ønsker at kontrollere rakettens hastighed til det tidspunkt, hvor dens hastighed ifølge beregningerne skulle være $\frac{1}{2}c$. Iagttageren er anbragt således i S, at raketten bevæger sig direkte bort fra iagttageren.

Der afsendes derfor en serie radarsignaler med tidsintervallet Δt sekunder mellem to på hinanden følgende signaler. Radarsignalerne reflekteres fra rakettens bagende, og ekkosignalerne fra raketten registreres lidt senere hos iagttageren, som nu måler et ændret tidsinterval $\Delta ' t$

./..

(opgave 1 fortsat)

sekunder mellem to på hinanden følgende ekkosignaler.
Hvor stor skal intervalændringen ($\Delta' t - \Delta t$) være, såfremt rakettens hastighed er $\frac{1}{2}c$?

5) Efter at raketten har opnået hastigheden $v_{raket} = \frac{1}{2}c$ i forhold til S, ophører kraftpåvirkningen, og raketten fortsætter i en jævn retlinet bevægelse med hastigheden $v_{raket} = \frac{1}{2}c$.

På raketten er anbragt en kanon. Med denne afskydes en masse af størrelsen $\alpha \cdot m$ $(0 < \alpha < 1)$, hvor m er rakettens samlede masse. Massedelen $\alpha \cdot m$ slynges bagud med hastigheden w i forhold til det inertialsystem S', hvori raketten var i hvile før kanonens affyring.
Find rakettens hastighed i forhold til S' efter affyringen af kanonen, udtrykt ved α, w og c, hvor c er lyshastigheden

6) Vis, at der for en given værdi af α er en øvre grænse for w, som betegnes $w_{max}(\alpha)$.
Beregn rakettens hastighed efter kanonaffyringen i forhold til henholdsvis S' og S, hvis $w = \frac{1}{2}w_{max}(\alpha)$.

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 2.

Den normerede bølgefunktion ψ for en partikel i et centralfelt er til en vis tid ($t=o$) givet i polære koordinater ved

$$\psi(r,\theta,\varphi,o) = f(r) \cdot N \cdot (1 + 3\cos\theta)$$

Den radiale bølgefunktion f opfylder

$$\int_o^\infty |f|^2 r^2 dr = 1$$

Partiklens baneimpulsmoment kaldes $\vec{L}$.

a) Bestem normeringskonstanten N for bølgefunktionens vinkeldel.

b) Angiv de mulige resultater ved en måling af henholdsvis $\vec{L}^2$, L_x, L_y og L_z.

c) Find middelværdien $\langle\vec{L}^2\rangle$ samt sandsynligheden for at observere hver af de mulige resultater af en måling af $\vec{L}^2$.

Der foretages nu en måling af $\vec{L}^2$. Resultatet blev den højeste af de mulige værdier.

d) Opskriv bølgefunktionen, der beskriver partiklen efter denne måling.

(opgavesættet slut)

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (elektrodynamik og kvantemekanik), fysik modul 2.
fredag, den 7. juni 1985 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Brug af alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

En solenoide med vandret akse har 1500 vindinger og er 80 cm lang. Strømstyrken gennem solenoidens vindinger betegnes I_1.
Midt inde i solenoiden er anbragt en enkelt, plan, cirkulær vinding med arealet $10\,\mathrm{cm}^2$, som kan dreje sig frit omkring en lodret akse gennem en diameter i vindingen. Strømstyrken i denne vinding betegnes med I_2.
Det antages, at solenoidens diameter kan regnes for forsvindende lille i forhold til dens længde, og at der kan ses bort fra jordens magnetfelt.

1) Solenoiden og vindingen forbindes begge til konstante spændingskilder, således at der løber strømmene $I_1 = 6.0\mathrm{A}$ og $I_2 = 1.2\mathrm{A}$.
Beregn det arbejde, man skal udføre, når man langsomt drejer vindingen 180° udfra en begyndelsesstilling, hvor vindingens plan er vinkelret på solenoideaksen. Gør rede for det udførte arbejdes fortegn.

2) Solenoidens forbindelse til spændingskilden afbrydes. I stedet forbindes den gennem en modstand til et galvanometer. Den samlede modstand i dette kredsløb er 1200 ohm. Den cirkulære vinding i solenoidens midte er atter anbragt vinkelret på solenoideaksen og er stadig forbundet til sin spændingskilde, så at $I_2 = 1.2\mathrm{A}$.
Beregn den ladning, som passerer gennem galvanometret, når strømmen I_2 afbrydes.

(opgaven fortsætter)

(opgave 1 fortsat)

3) En lille kompasnål anbringes midt for solenoidens ene endeflade. Nålen er frit drejelig om en lodret akse gennem tyngdepunktet, og dens magnetiske moment er $0.010\ A \cdot m^2$.
Idet strømmen i solenoiden er afbrudt ($I_1 = 0$) og strømmen i den cirkulære vinding, som er anbragt som i 2), er $I_2 = 1.2A$, skal man beregne den kraft, hvormed kompasnålen i sin ligevægtsstilling påvirker vindingen.

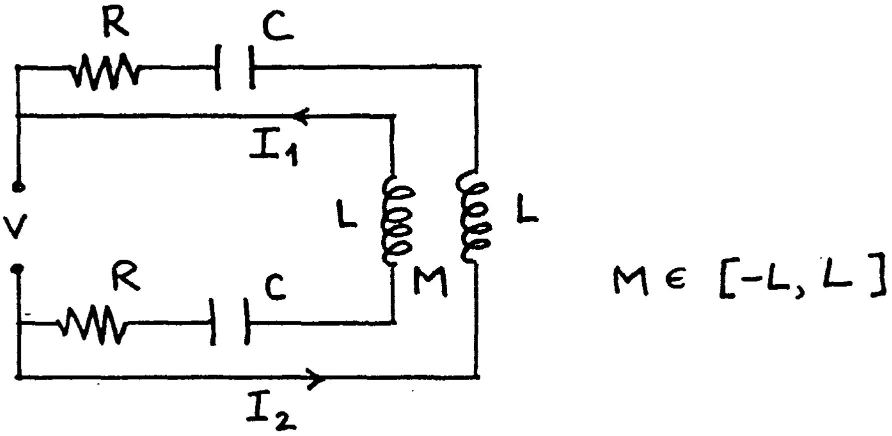
4) For $I_1 = 6.0 \cdot 10^{-3}$ A og $I_2 = 0$ findes kompasnålens svingningstid til 0.80 s. Beregn svingningstiden for $I_1 = 0$ og $I_2 = 1.2A$.
Udtrykket for svingstiden ved små harmoniske svingninger er $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\tau}}$, hvor J er kompasnålens inertimoment og τ det drejningsmoment, hvormed nålen påvirkes, når den er anbragt vinkelret på magnetfeltet fra solenoide/vinding.

(opgavesættet fortsætter)

Skriftlig eksamen i dybdemodul (elektrodynamik og kvantemekanik), 13. januar 1986.

Hjælpemidler tilladt. Rigtig besvarelse af 80% af de stillede spørgsmål giver karakteren 11.

Opgave 1
(spørgsmål 7 kan besvares uafhængigt af de foregående).



1.1. Find impedanserne Z_1 og Z_2 af de to viste kredse der indeholder den harmoniske spændingskilde $V=V_0\cos\omega t$, og tillige den samlede impedans Z set fra spændingskilden.

1.2. Bestem fasen af strømmen I_1 i kreds 1, relativt til fasen af V.

1.3. Find ladningen på kondensatoren i kreds 1 som funktion af tiden, samt ladningens fase relativt til V.

1.4. Bestem resonansfrekvensen ω_0 for M=0 og den tilsvarende ω_M for $M\neq 0$.

1.5. Antag nu at $\omega=\omega_M$. Hvad er Z i dette tilfælde, og hvad er den maksimale ladning Q_0 på kondensatoren i kreds 1.

1.6. Find for CL/R^2 = 100 farad^2 forholdet Q_0/V_0 (der er et mål for resonansens styrke), som funktion af M, og skitser forløbet.

1.7. Nu fjernes spændingskilden V, så der bliver én fælles kreds tilbage. Angiv en betingelse for, at en periodisk strøm gennem længere tid kan svinge i kredsen (f.eks. ved at begynde med ladning på en eller begge kondensatorer).

Opgave 2

(spørgsmål 5 kan besvares uafhængigt af de foregående)

Opgaven betragter en punktpartikel med massen m, der bevæger sig i det én-dimensionale potential V(x) givet ved

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(4\beta - x^2 + \frac{1}{16\beta} x^4\right), \text{ hvor } \beta = \frac{\hbar}{m\omega}$$

2.1. Vis at med indførelsen af den ny variable $z=x/\sqrt{\beta}$ kan potentialet skrives som $V(x) = \frac{1}{2}\hbar\omega\, P(z)$ med

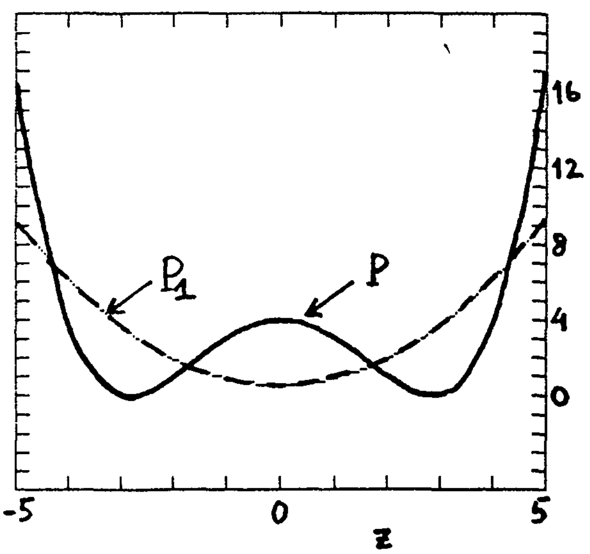
$$P(z) = 4 - z^2 + z^4/16.$$

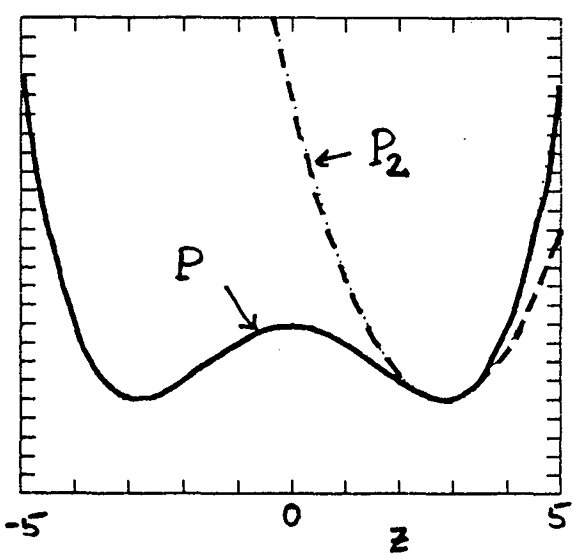
De stationære tilstande kan nu findes ved perturbationsregning udfra løsningerne for et harmonisk oscillator potential $V_1(x) = \frac{1}{2}\hbar\omega\, P_1(z)$. Følgende to valg af $P_1(z)$ betragtes:

$$P_1(z) = 0.59 + 0.35\, z^2$$

$$P_2(z) = 2\,(z - z_0)^2 \quad \text{hvor } z_0 = \sqrt{8}$$

P og de to tilnærmede potentialer er vist på hosstående figurer. P_1 er den bedste 2. ordens tilnærmelse (fundet ved mindste kvadraters metode) til P i intervallet [-5,5], mens P_2 er en 2. ordens Taylor rækkeudvikling omkring P's positive minimums punkt $z_0 = \sqrt{8}$.





(opgaven fortsætter næste side)

2.2. Opskriv energispektret for de ~~tre~~ to basis hamiltonoperatorer $T+V_1$ og angiv i hvert tilfælde basisfrekv~~æ~~ensen ω_1 udtrykt ved ω.

2.3. Idet $T+V_1$ tages som basis-hamiltonoperator og $V-V_1$ som perturbations hamiltonoperator, ønskes energispektret for $H=T+V$ bestemt ved første ordens perturbationsregning (altså uændrede bølgefunktioner. Nyttige integrationsformler er angivet sidst i opgaven).

2.4. Samme spørgsmål ønskes besvaret med V_1 erstattet af V_2. Basis bølgefunktionerne er harmonisk oscillator bølgefunktioner $u_n(x-x_0)$ taget relativt til V_2's minimum for x-værdien $x_0=z_0\sqrt{\beta}=\sqrt{8\beta}$.

2.5. Som kandidater til en forbedret bølgefunktion for grundtilstanden vil det pga. potentialet V's symmetri være naturligt at se på

$$u_\pm(x) = N(u_0(x-x_0) \pm u_0(x+x_0)),$$

hvor $u_0(x\pm x_0) = \sqrt{\alpha/\sqrt{\pi}}\,\exp(-\alpha^2(x\pm\sqrt{8\beta})^2/2)$

med $\alpha=\sqrt{m\omega_2/\hbar} = \sqrt{m\omega\sqrt{2}/\hbar}$

er grundtilstands oscillator bølgefunktioner for henholdsvis V_2 med potential minimum for positiv x_0 og det tilsvarende potentiale med minimum for $-x_0$.

Vis at overlappet $\int u_0^*(x+x_0)u_0(x-x_0)dx$ er forsvindende.

Det kan tilsvarende vises at forventningsværdien af energien i de to tilstande $u_\pm$ praktisk taget er ens.

Følgende integrationsformler gælder for harmonisk oscillator bølgefunktioner $u_n(x)$ svarende til basis frekvensen ω_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x)\, x^2\, u_n(x)\, dx = \frac{\hbar}{m\omega_1}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x)\, x^4\, u_n(x)\, dx = \frac{3}{4}\left(\frac{\hbar}{m\omega_1}\right)^2 (2n^2+2n+1)$$

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (relativitetsteori og kvantemekanik)

mandag, den 13. januar 1986 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

Hjælpemidler tilladt.

OPGAVE 1. I den specielle relativitetsteori vises, hvorledes relativitetsprincippet og et krav om opretholdelse af energibevarelsessætningen fører til følgende udtryk for et systems energi og impuls:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{og} \quad \bar{p} = \frac{m\bar{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

hvor m er systemets masse (hvilemasse), $\bar{u}$ er systemets hastighed i forhold til det pågældende inertialsystem, $u = |\bar{u}|$ og c er lysets hastighed.

En eksperimentel verifikation af gyldigheden af bevarelsessætningerne for energi og impuls ved elastiske stød mellem partikler ved store hastigheder blev udført af F.C.Champion i 1932 ved tågekammerundersøgelse af stødprocesser, hvor en elektron med stor hastighed kolliderer med en hvilende elektron.

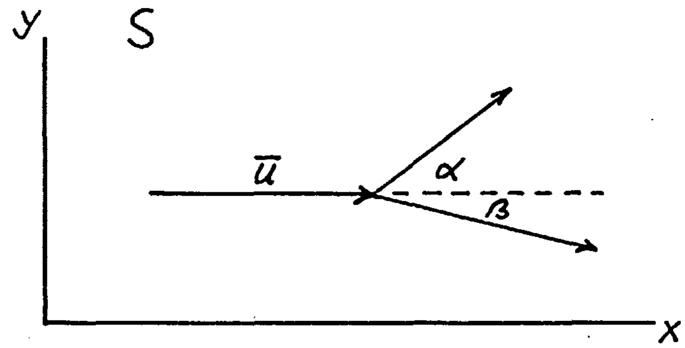
(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

<u>Spm. 1.</u> Betragt en elastisk stødproces mellem to partikler med lige store masser, hvor den ene partikel før stødet bevæger sig med hastigheden $\bar{u}$, og den anden partikel er i hvile i forhold til inertialsystemet S. Vis, at de to partiklers bevægelsesretninger efter stødet danner en vinkel på 90° med hinanden, hvis u er så lille, at den Newtonske mekanik er gyldig.

<u>Spm. 2.</u> Betragt den samme type stødproces som i spm.1., men det antages nu, at hastigheden $\bar{u}$ er så stor, at Newton's mekanik ikke længere er gyldig.

Vinklerne mellem den indkommende partikels bevægelsesretning før stødet og de to partiklers bevægelsesretninger efter stødet, målt i S, betegnes med henholdsvis α og β (se figuren)



Vis, at der gælder følgende relation:

$$\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \text{hvor} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Vis, at denne relation i den ikke-relativistiske grænse stemmer overens med resultatet i spm.1.

(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

Spm. 3. Betragt en elastisk stødproces, hvor en elektron med en kinetisk energi på 1,0 MeV støder mod en hvilende elektron. Hvor stor bliver afvigelsen af $\alpha + \beta$, d.v.s. vinklen mellem de to partiklers bevægelsesretninger målt i S, fra 90°, hvis de to elektroner efter stødet har samme kinetiske energi ?

Spm. 4. Beregn krumningsradius af banen for en elektron med den kinetiske energi 1,0 MeV, som bevæger sig en plan vinkelret på kraftlinierne i et homogent magnetfelt med feltstyrken 0.05T. Hvilken værdi af krumningsradius ville man få ved en urelativistisk beregning ?

Lysets hastighed $c = 3 \times 10^{8}$ m/s

Elektronens hvilemasse $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg ~ 511keV

Elektronens ladning $e = 1.60 \times 10^{-19}$C

1eV = 1.60×10^{-19}J

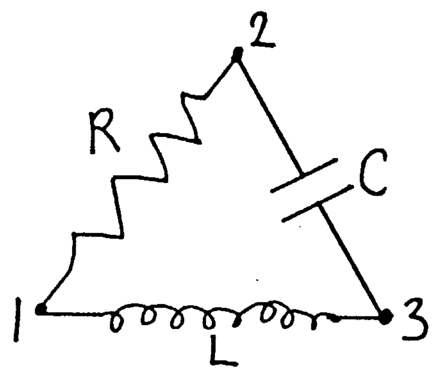
Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens dybdemodul, den 4.6.1986

Hjælpemidler er tilladt.

(Ved bedømmelsen vil opgave 1,2 og 3 blive vægtet med 50% og opgave 4 med 50%)

Opgave 1

En modstand R, en kondensator med kapacitet C og en spole med induktans L er anbragt i en trekant som vist på figuren.



1) Beregn impedansen Z_{12} mellem hjørne 1 og hjørne 2 som funktion af vinkelfrekvensen ω.
2) Find den vinkelfrekvens ved hvilken $Z_{12}=0$ idet det oplyses at $R = 1\ k\Omega$, $C = 1$ nF og $L = 1$ mH.
3) Findes der også en vinkelfrekvens ved hvilken impedansen mellem hjørne 2 og 3 er lig med nul?

Opgave 2

En sfærisk symmetrisk ladningsfordeling har ladningstætheden $\rho(r)$ hvor

$$\rho(r) = \begin{cases} Q\left(\frac{r}{R}\right)^2 , & r < R \\ 0 , & r > R \end{cases}$$

1) Rummet bestemt ved $r>R$ er tomt. Beregn det elektrostatiske potential $\varphi(r)$ for alle r.

2) Vi tænker os nu i stedet rummet bestemt ved $r>R$ opfyldt af et dielektrikum med dielektricitetskonstanten ε. Find overflade polarisationsladningstætheden σ_p i grænselaget bestemt ved $r = R$.

Opgave 3

I et sædvanligt xyz koordinatsystem er halvplanen bestemt ved $x<0$ tom, mens halvplanen bestemt ved $x>0$ er opfyldt af et umagnetisk stof med dielektricitetskonstanten $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$. En planpolariseret elektromagnetisk bølge falder fra vacuum ind mod grænseplanen bestemt ved $x=0$. Den indkommende del af bølgen har et $\bar{E}$-felt givet ved

$$\bar{E}(x,y,z) = (E_0, 0, E_0)\, e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)} \qquad (x<0).$$

Det oplyses at y-komponenten af $\bar{k}$ er lig med nul. Hvor mange procent af den indkommende bølges energi reflekteres og hvor mange procent transmiteres?

Opgave 4

En partikel med massen m er indespærret i en kugle med radius R (dvs. sandsynligheden for at finde partiklen udenfor denne kugle er nul).

4.1. Opskriv den radiære Schrödinger ligning for partiklen.

4.2. Angiv partiklens (bane-)impulsmoment i grundtilstanden.

4.3. Find energien og den normerede bølgefunktion for partiklen i dens grundtilstand.

Nu udvides kuglen så dens radius fordobles. Udvidelsen antages at ske så hurtigt at partiklens bølgefunktion lige efter udvidelsen forbliver den i spørgsmål 4.3 fundne.

4.4. Find sandsynligheden for at partiklen befinder sig i grundtilstanden for det ny kuglepotential.

4.5. Find bølgefunktionerne for den laveste impulsmoment L =1 og L=2 tilstand i det ny kuglepotential, samt for den næstlaveste L=0 tilstand.

4.6 Find sandsynlighederne for at finde partiklen i hver af de tre i spørgsmål 4.5 nævnte tilstande.

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

Opgave 1

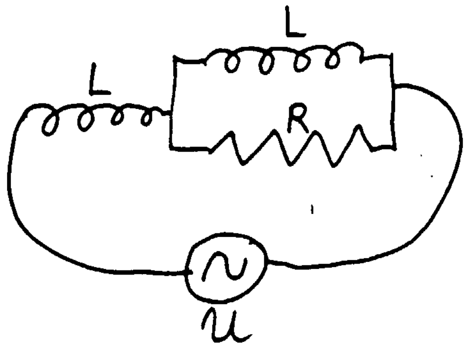


fig. 1

Et elektrisk kredsløb består af to spoler med induktans L og en modstand R forbundet med en vekselstrømsspændingskilde som vist på fig. 1. Det antages at $L = 20$ H , $R = 1$ kΩ og at spændingen er net, dvs $U = 220$ V med frekvens 50 Hz.

1) Hvor stor er faseforskydningen mellem spænding og strøm?

2) Hvor megen energi omsættes til varme per tidsenhed?

Opgave 2

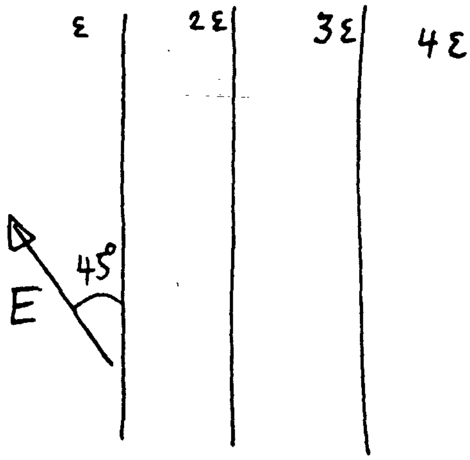


fig. 2

Et uendeligt udstrakt materiale er sammensat af fire forskellige stoffer med dielektricitetskonstanterne ε , 2ε, 3ε og 4ε henholdsvis. Stofferne er adskildt af parallelle planer som skitseret på fig. 2. I venstre halvplan er der et homogent elektrisk felt E rettet 45° på grænseplanen til 2ε-laget.

1) Beregn størrelse og retning af det elektriske felt i højre halvplan.

2) Beregn den inducerede ladningstæthed i grænselaget mellem 2ε og 3ε lagene.

3) Bestem Brewster vinklen for refleksion ved $\varepsilon - 2\varepsilon$ laget. Hvorfor kan det ikke forventes at lys, der falder ind fra venstre med retning bestemt ved Brewster vinklen, reflekteres som rent polariseret?

Opgave 3

En stråle af elektroner med kinetisk energi E_o sendes i vakuum vinkelret mod et stoflag med tykkelsen b.

Det antages at stoflaget kan beskrives ved en potentialbarriere med højden Φ_o og bredden b, samt at $E_o > \Phi_o$.

Hvis man benytter en planbølge-beskrivelse af elektronen vil man alligevel kunne udregne virkningen af elektronens endelige udstrækning i følgende to grænsetilfælde af spredningseksperimentet:

A) Barrierebredden er meget lille i forhold til elektronens udstrækning (spredningsprocesserne ved barrierens to vægge er gensidigt afhængige).

B) Barrierebredden er meget stor i forhold til elektronens udstrækning (spredningsprocesserne ved barrierens to vægge er uafhængige af hinanden).

1) Beregn den totale reflektionskoefficient i tilfælde A).

2) Beregn den totale reflektionskoefficient i tilfælde B).

3) Skitsér den totale transmissionskoefficient som funktion af barrierebredden b i begge tilfælde.

4) Hvor stor bliver den totale reflektionskoefficient i tilfælde B), når $E_o < \Phi_o$?

Opgave 4.

Opgaven handler om heliumatomet (med 2 elektroner). Sigtet er at udregne dets energi i grundtilstanden approksimativt.

1) Nedskriv den fulde hamiltonoperator for de to elektroner omkring heliumkernen.

2) Hvad er egenfunktionen og energien i grundtilstanden, idet der ses bort fra elektron-elektron vekselvirkningen. Begrund svaret.

3) Hvilken spin-tilstand har systemet i grundtilstanden. Begrund svaret.

4) Udregn en førsteordens korrelation til grundtilstandsenergien ved at tage hensyn til elektron-elektron vekselvirkningen.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Skriftlig eksamen i fysikuddannelsens
dybdemodul (termodynamik og elektrodynamik)
torsdag, den 7. januar 1988 kl. $10^{\underline{00}}$ - $14^{\underline{00}}$.

HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgave I.

En metaltråd kan strækkes elastisk med en trækkraft K til en længde L. Trækkraften er nul, når tråden har længden

$$L_1(T) = L_o + a \cdot (T - T_o)$$

hvor a er en konstant. Endvidere antages, at trådens isoterme elastiske modul

$$g_T = \left(\frac{\partial K}{\partial L}\right)_T$$

kan betragtes som en konstant, når T er i nærheden af T_o og L i nærheden af L_o, og når K er lille i forhold til grænsen for plastisk deformation og brud. Disse forudsætninger antages opfyldt i det følgende. Der ses bort fra rumfangsændringer ved trådens strækning.

1) Opskriv en tilstandsligning for K som funktion af L og T.

2) Vis, at $\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = a g_T$, hvor S er entropien.

3) Bestem $\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T$, hvor U er den indre energi.

4) Vis, at varmekapaciteten for fastholdt L, (C_L) er uafhængig af L.

(opgavesættet fortsættes)

5) Vis, at varmekapaciteten for fastholdt K er givet ved:

$$C_K = C_L + Tg_T a^2$$

6) Find et udtryk for trådens adiabatiske elastiske modul

$$g_S = \left(\frac{\partial K}{\partial L}\right)_S$$

7) Vis, at $\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = - \frac{Tg_T a}{C_L}$

8) Aluminium har for temperaturer omkring 0° C længdeudvidelseskoefficienten $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$, massefylden $\rho = 2{,}7\ g/cm^3$, den specifikke varmekapacitet $c_p = 0.2\ \frac{cal}{g \cdot K}$. Young's modul er

$E = 7 \cdot 10^{10}\ \frac{N}{m^2}$; (denne størrelse er det isoterme elastiske modul for strækning af en terning på $1\ m^3$ i retning af en af kanterne).

Udregn g_T a og C_K for en tråd af aluminium med tværsnitsareal $1\ mm^2$ og længden $L_o = 1$ m .

Vurdér den procentiske forskel på C_L og C_K og udregn temperaturændringen, når tråden strækkes adiabatisk med en kraft på 70 N .

Opgave II.

1) Et metallisk lederstykke af form som en cylinder med radius a og længden ℓ har modstanden R og bærer jævnstrømmen I i længdeaksens retning. Angiv størrelse og retning for den elektriske feltstyrke $\vec{E}$, den magnetiske feltstyrke $\vec{H}$ og Poynting's vektor $\vec{S}$ som funktioner af afstanden fra cylinderaksen. Bestem divergensen af Poynting's vektor og diskutér betydningen af dette resultat.

2) I dette og de følgende spørgsmål betragtes en solenoide-spole med længden $\ell = 50$ cm og diameteren $d = 5$ cm. Spolen er jævnt beviklet med $N = 2000$ vindinger af kobbertråd med en samlet modstand på $R = 10$ ohm.
Idet der ses bort fra randeffekter, skal man beregne den maximalt opnåelige statiske værdi af den magnetiske induktion B inde i spolen, når der ikke må afsættes mere end 100 watt til varme. Bestem også spolens selvinduktionskoefficient L.
Hvor stor er den kapacitet C, som spolen skal parallelforbindes med, hvis den skal benyttes som den induktive komponent i en svingningskreds, der er afstemt til kammertonen (frekvens $440 s^{-1}$)?
Angiv Q-værdien for svingningskredsen og den relative usikkerhed (halvværdibredde) for resonansfrekvensen.

3) Spolen stilles lodret på bordet, og en supraledende stang med massefylden $\rho = 5 g/cm^3$, samme længde som spolen og et halvt så stort tværsnitsareal, føres et stykke x ned i spolen. Beregn selvinduktionen som funktion af x. Hvor stor skulle strømmen i spolen være, hvis supralederen skulle svæve ?

4) Vi antager nu, at spolen har været forbundet til en spændingskilde på 20 volt indtil tidspunktet $t = 0$. Nu forsøger man så at "afbryde" strømmen ved at indsætte en ekstra modstand $K \cdot R$ $(K \gg 1)$ i kredsen. Denne modstand kan højst tåle 1000 volt. Hvor stor må K være? Diskutér strømmen som funktion af tiden efter "afbrydelsen".

Opgaven udleveres 3. juni 1988 kl. 10.00.
Opgaven afleveres 3. juni 1988 kl. 14.00.

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (2. modul) fysik.
fredag, den 3. juni 1988.

Sættet består af tre opgaver i hhv. termodynamik, elektrodynamik og relativitetsteori. Eksaminanden udvælger to af opgaverne, svarende til de opgivne fagmoduler.

Hjælpemidler tilladt.

Opgave 1. Termodynamik.

Vi betragter et reservoir, som indeholder en enatomig ideal gas med temperaturen T_r og trykket P_r.
Vi danner nu et system ved at indeslutte N mol af gassen i en beholder med stoftætte, stive og adiabatiske vægge. Beholderen er forsynet med et stempel, hvorpå en trykmaskine kan udøve et ekstra tryk $P-P_r$, således at trykket i beholderen har en konstant værdi P.
Endvidere kan vi med en varmemaskine udveksle varme med reservoiret og således kontrollere temperaturen T i beholderen.

1). Beregn det minimale arbejde, som trykmaskinen skal udføre på systemet, når trykket i beholderen ændres fra P_r til P, medens temperaturen fastholdes på værdien T_r.

2). Beregn det minimale arbejde, som trykmaskinen skal udføre, når temperaturen i beholderen ændres fra T_r til T, medens trykket fastholdes på værdien P.

3). Angiv systemets varmekapacitet ved fastholdt tryk (udtrykt ved N og gaskonstanten R).
Beregn dernæst det minimale arbejde, som varmemaskinen skal udføre under processen i spørgsmål 2.

(opgave 1 fortsættes på side 2)

4). Hvad er betingelsen for, at det faktiske arbejde, som maskinerne skal udføre, svarer til de beregnede minimale arbejder? Angiv systemets frie energi i forhold til reservoiret (eller exergien, d.v.s. det maximale arbejde, som kan overføres til et arbejdsreservoir), når temperaturen er T og trykket P.

5). Skitsér i et T-P diagram nogle kurver med konstant værdi af den i spørgsmål 4 udregnede frie energi E. Hvilken slags kurver er der tale om i den grænse, hvor systemets temperatur og tryk kun afviger lidt fra reservoirets?

6). Atmosfærisk luft indeholder ca. 1% argon (atomvægt 40) Vi betragter atmosfæren som et argonreservoir med T_r = 300 K og P_r = 0.01 atm. Beregn den minimale energiomkostning ved renfremstilling af 1 kg argon ved 1 atm. og -185° C. (Kogepunktet ved 1 atm. er -186° C).

(opgave 1 slut).

Opgave 2. Elektrodynamik.

Et coaxialkabel er lavet af en umagnetisk, cylindrisk metalkerne med radius R_1 og en ydre cylindrisk kappe med samme akse og indvendig radius R_2 $(R_2 > R_1)$. Metalkernen har den specifikke ledningsevne σ, og området mellem kernen og kappen er vacuum. Den indre cylinder bærer en jævnstrøm I i aksens retning, og kappen bærer samme strøm i modsat retning.

1). Angiv modstanden pr. længdeenhed, R', samt størrelse og retning af strømtætheden $\vec{i}$, den elektriske feltstyrke $\vec{E}$ og den magnetiske induktion $\vec{B}$ som funktion af afstanden r fra aksen $(r < R_2)$.

2). Vis, at det magnetiske vektorpotential $\vec{A}$ kan vælges på formen $A(r)\vec{e}_z$, hvor $\vec{e}_z$ er en enhedsvektor i aksens retning, og hvor $A(R_2) = 0$.

3). Begrund, at selvinduktionskoefficienten pr. længdeenhed, L', kan defineres ved ligningen

$$A(0) = L' \cdot I$$

Bestem L' i den grænse, hvor tykkelsen af vacuumlaget er forsvindende lille.

Vi tænker os nu, at den ydre kappe består af et supraledende materiale. På et givet tidspunkt, $t = 0$, vil vi lade vacuumlaget forsvinde $(R_2 = R_1)$, således at kablet kortsluttes. Herefter er situationen ikke stationær, men vi vil regne med, at den er quasistationær, således at vi kan se bort fra forskydningsstrømme. Desuden antages, at felt- og strømvektorer bevarer retningen.

4). Vis, at den elektriske feltstyrke efter kortslutningen går kontinuert mod 0 for $r \rightarrow R_1$.

(opgave 2 fortsættes på side 4)

5). Vi skriver feltstyrken på formen $E(r,t) = E_o(r) \cdot e^{-t/\tau}$. Vis så, at $E_o(r)$ må tilfredsstille differentialligningen

$$\frac{d^2E_o}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_o}{dr} + \frac{\mu_o\sigma}{\tau}E_o = 0$$

6). Find en tilnærmet løsning til ovenstående ligning ved at skrive $E_o(r)$ som et andengradspolynomium i r og bestem herved relaxationstiden τ. Sammenlign med den simple model, hvor hver længdeenhed af kablet betragtes som en lukket kreds med selvinduktion L' og modstand R'. Udregn τ for $R_1 = 1$ cm, $\sigma = 5 \cdot 10^6$ $(\text{ohm} \cdot \text{cm})^{-1}$.

(opgave 2 slut).

Opgave 3. Relativitetsteori.

En raket er forsynet med en avanceret motor, som fuldstændigt kan omdanne masse til energi. Energien udsendes som elektromagnetisk stråling fra rakettens bagende.

1). Set fra rakettens hvilesystem omdannes i det lille tidsrum $d\tau$ massen dM til energi. Bestem hastighedsændringen dv', når den øjeblikkelige hvilemasse er M.

2). Bestem den tilsvarende ændring af hastigheden v i forhold til raketbasens inertialsystem. Vis, for bevægelse i én retning, at størrelsen $\ln M$ er en entydig funktion af $\beta = v/c$, når $M = M_0$ for $\beta = 0$. Bestem så β som funktion af M.

3). I det følgende tænker vi os, at brændstofforbruget styres, således at accelerationen i forhold til rakettens hvilesystem har en konstant værdi, a. Bestem M og β som funktion af egentiden τ, når raketten starter fra basen til tiden $t = \tau = 0$.

4). Hvor stor er den maximale hastighed, som raketten kan opnå, hvis brøkdelen r af den oprindelige hvilemasse skal bevares? Hvor lang tid er der gået på rakettens ur (τ) og på basens ur (t), når raketten har opnået sin maximale hastighed?

5). Der skal lægges et program for en rejse ud og hjem langs en ret linje i rummet, således at accelerationen i hvilesystemet har konstant numerisk værdi, a (bortset fra korte perioder, medens raketten vendes), og således at brøkdelen r af den oprindelige hvilemasse er tilbage ved hjemkomsten. Lav en kort beskrivelse af

(opgavesættet nr. 3 fortsat)

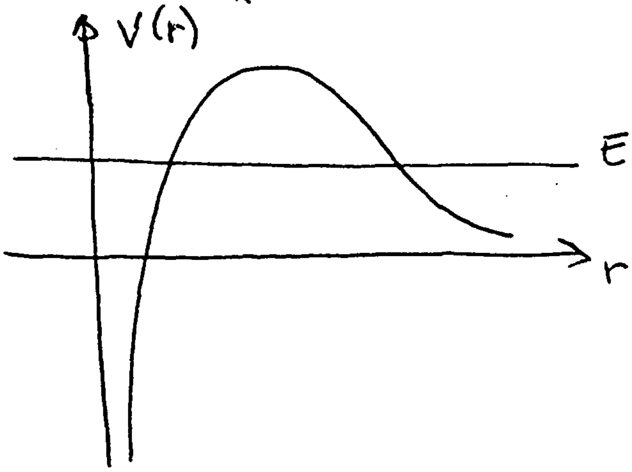
af rejsens forløb og angiv et udtryk for den maximale hastighed.

6). Udregn for $r = 0.01$ og $a = 10\ m/s^2$ værdierne af t og τ ved hjemkomsten. Hvor langt borte har raketten været?

(opgavesættene slut).

Opgave i kvantemekanik:

Den potentielle energi V(r) af en α-partikel i en atomkerne er resultatet af to bidrag: Et bidrag fra coulomb-kræfterne ($V_c(r)$) og et bidrag fra kernekræfterne ($V_k(r)$). således at $V(r) = V_c(r) + V_k(r)$



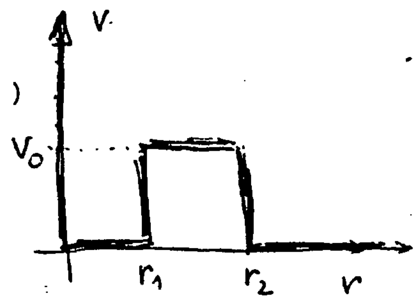
Udsendelse af en α-partikel er en typisk kvante-effekt, som fremkommer ved kvantemekanisk tunellering.

Til beskrivelse af α-partikel udsendelsen kan man som approksimation anvende følgende potential:

$V_1(r) = 0$ for $r < r_1$ ($V_1(r) \to \infty$ for $r = 0$)

$V_1(r) = V_o$ for $r_1 < r < r_2$

$V_1(r) = 0$ for $r > r_2$

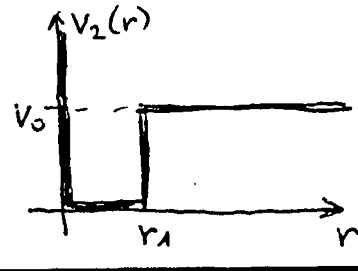


1) Find de stationære tilstande for en partikel i et sådant potential, når partiklens masse er μ og dens energi E har værdier $E < V_o$ i området $r > 0$.

2) Vis at den stationære sandsynlighed for at finde partiklen i området $r < r_1$ kun er forskellig fra nul for visse diskrete energi-værdier, som er energi-egenværdierne for en partikel i et potential $V_2(r)$ af formen:

$V_2(r) = 0$ for $r < r_1$ ($V_2(R) \to \infty$ for $r = o$)

$V_2(r) = Vo$ for $r > r_1$.



3) Diskuter (kvalitativt) energi spektret og mulighederne for at normalisere bølgefunktionerne for partiklen i de to tilfælde.

4) Skitser (kvalitativt) hvordan man i tilfælde af en partikel i et potential af formen $V_1(r)$ kan udregne sandsynligheder for udsendelse af en partikel fra området $r < r_1$.

(Hjælp: Betragt tids-udviklingen af en bølgepakke, som til tiden $t=o$ er lokaliseret i området $r < r_1$).

Opgave i statistisk mekanik.

N elektroner er indelukket i en flad kasse med kantlængderne L,L og d i henholdsvis x-, y- og z retningen. Vi ser bort fra vekselvirkningen mellem elektronerne og ser på forholdene i grænsen $N \to \infty$, $L \to \infty$, $n = N/L^2$ konstant, d konstant.

1) Angiv den laveste enkeltpartikel energi E_o .

2) Som betingelse for, at systemet kan behandles som en todimensional elektrongas, må vi forlange, at elektrontilstandenes bølgetal i z retningen kun antager den lavest mulige værdi π/d . Angiv under denne forudsætning et udtryk for tilstandstætheden på energiskalaen, G(E).

3) Bestem Fermi-energien E_F ved det absolutte temperaturnulpunkt under samme forudsætning som i spørgsmål 2).

Er det rimeligt at forvente, at en film på et atomlags tykkelse af et monovalent metal kan behandles som et todimensional elektrongas?

(I de følgende spørgsmål regnes med, at betingelsen for todimensionalitet er opfyldt).

4) Bestem det todimensionale elektronsystems energi U_o ved det absolutte nulpunkt. Vis, at den kraft, hvormed systemet påvirker omgivelserne i z-retningen, er givet ved

$$K_z = 2NE_o/d$$

5) Vis (gerne ved et grafisk argument), at når størrelsen $x = kT/(E_F - E_o)$ er positiv, men lille, vil E_F være uafhængig af temperaturen T til 2.orden i x.
Argumenter for, at både varmekapaciteten og entropien er givet ved αkNx, hvor α er en matematisk konstant.

(opgavesættet fortsættes)

6) Angiv et formelt udtryk for det grandkanoniske termodynamiske potential Ω, og vis, at $\Omega = NE_0 - U$, hvor U er middelenergien. Udregn U i grænsen $x \ll 1$ og vis herved, at $\alpha = \pi^2/3$.

(opgavesættet SLUT)

Opgave i relativitetsteori.

Et inertialsystem K har x-aksen på en vandret jordoverflade og y-aksen lodret opad. Til tidspunktet $t = o$ (set fra K) befinder der sig en vandret stang med hvilelængden L i højden h over jorden. Stangen bevæger sig lodret nedad med konstant hastighed u, indtil den rammer jorden, hvor den bliver liggende. Under hele bevægelsen er stangen parallel med x-aksen (set fra K) og dens venstre endepunkt har $x = o$.

På stangen er med delestreger angivet en længdeskala ξ, gående fra $\xi = o$ i venstre endepunkt til $\xi = L$ i højre endepunkt, og i ethvert markeret delepunkt på ξ-skalaen er anbragt et standardur, som viser tiden $\tau(\xi)$ i stangens hvilesystem. For $t = o$ viser alle urene på stangen $\tau(\xi) = o$. Når et punkt på stangen rammer jorden, går uret i det pågældende punkt i stå.

1) Angiv τ som funktion af ξ og t under bevægelsen fra $y = h$ til $y = o$. Hvor på x-aksen rammer stang-uret i punktet ξ, og hvad viser det, når det er gået i stå?

Det samme begivenhedsforløb skal nu betragtes fra et andet inertialsystem K' med x'-aksen ud ad x-aksen og bevægende sig med hastigheden v i forhold til K i den positive x-retning. For $t = o$ falder y'-aksen sammen med y-aksen, og urene på y'-aksen viser tiden $t' = o$.

2) Bestem K'-koordinaterne x' og y' for stangpunktet ξ til tidspunktet t' i K'.

3) Vis, at stangen, set fra K', ikke er vandret, men danner en vinkel α med x'-aksen. Angiv et udtryk for α og tegn et øjebliksbillede af stangen for $t' = o$.

4) Bestem L således, at endepunktet $\xi = L$ netop rører jorden for $t' = o$ (set fra K'). Lav en tegneserie af forløbet, set fra K', indtil stangen hviler på jorden.

(opgavesættet SLUT)

Opgave i kvantemekanik.

En elektron (masse m) bevæger sig i potentialet

$$V(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\cdot(x^2 + y^2 + z^2)$$

I spørgsmålene 1 - 4 nedenfor ses bort fra elektronens spin.

1) Forklar hvorfor de stationære tilstande kan opregnes på formen $|n_x,n_y,n_z\rangle$ ved kvantetallene for den éndimensionale oscillator. Hvilke værdier kan de tre kvantetal antage? Udtryk energien og pariteten af en sådan tilstand ved tallet $n = n_x + n_y + n_z$.

2) Angiv udartningen af de fire laveste energiniveauer, eller evt. en generel formel for udartningen af niveau n.

3) Giv en begrundelse for, at det er muligt at vælge en basis $|n,\ell,m\rangle$, af stationære egentilstande til L^2 og L_z, hvor $\vec{L}$ er impulsmomentet. Hvad er pariteten af en tilstand med L^2-egenværdien $\hbar^2\ell(\ell+1)$?

4) Hvilke ℓ-værdier kan optræde for en given værdi af n? Opregn de mulige ℓ-værdier for de fire laveste niveauer, samt antallet af m-værdier for hver af disse. Kontroller, at det stemmer med de i spørgsmål 2 udregnede udartninger.

I det følgende tager vi hensyn til elektronens spin $\vec{S}$ og introducerer et nyt bidrag til Hamiltonoperatoren, spin-bane koblingen

$$H_{so} = A\cdot\vec{L}\cdot\vec{S}$$

(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

5) Vis, at H_{so} kan diagonaliseres i en ny basis efter kvantetallene j og m_j for den totale impulsmomentoperator $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Angiv de mulige værdier af j og m_j for hver af l-værdierne i niveauet $n = 2$.

6) Angiv, under forudsætning af, at H_{so} kan betragtes som en svag perturbation, hvordan det udartede niveau $n = 2$ splitter op under indflydelse af spin-bane koblingen. Vis endvidere (kvalitativt, med en tegning af niveauer), hvordan den resterende udartning ophæves af et svagt magnetfelt.

Opgave i elektrodynamik.

En kondensator består af 2N tynde, cirkulære metalplader, anbragt parallelt med centrerne på en fælles akse vinkelret på pladerne. Halvdelen af pladerne er i ledende forbindelse med hinanden og rummer en samlet positiv ladning Q, medens den anden halvdel af pladerne, som også er ledende forbundet, er forsynet med en lige så stor negativ ladning -Q. De positive plader er isoleret fra de negative, og pladerne er anbragt således, at nærmeste nabo til hver enkelt plade er en plade med modsat ladningsfortegn. Mellem pladerne er der vacuum, og afstanden fra en plade til nærmeste nabo(er) er d, som antages at være meget mindre end pladernes radius R. Antallet af plader er imidlertid så stort, at afstanden L mellem de to plader for enderne af kondensatoren er meget større end R. ($L \approx 2N \cdot d >> R$).

1) Gør rede for ladningsfordelingen i det indre af metallet, på de to plane overflader og den cylindriske udadvendte overflade for en plade. Der må skelnes mellem to tilfælde, idet pladen kan have to nærmeste naboer, hvis den sidder i det indre af stablen, eller kun én, hvis den sidder for enden.

2) Angiv et udtryk for kondensatorens kapacitet C. Udregn C for N = 2000, R = 1 m, d = 1 mm. Hvor stor er spændingsforskellen mellem de to pladesæt, når Q = 0.1 coulomb?

Vi antager nu, at de positive plader er indbyrdes forbundne (mekanisk), således at de kan dreje om aksen med en fælles vinkelhastighed, og at det samme gælder for de negative plader. Med en motor sættes de positive plader i rotation med vinkelhastigheden ω, og de negative drejes den modsatte vej med vinkelhastigheden $-\omega$. Vi antager, at ladningerne forbliver stationære i forhold til pladerne.

(opgavesættet fortsætter)

(opgavesættet fortsat)

3) Vis, at der opstår et magnetfelt, som er parallelt med aksen (der ses bort fra endeeffekter), og angiv den magnetiske feltstyrke $H(r)$ som funktion af r, afstanden fra aksen.

4) Vis, at en positiv ladning q, som deltager i rotationen af en af de positive plader i afstanden r fra aksen, vil blive påvirket af en Lorentz-kraft $\vec{F}_L(r)$. Angiv størrelse og retning af denne kraft. I hvilken afstand fra aksen er kraften maksimal?

(opgavesættet slut)

Opgave i relativitetsteori.

En myon accelereres fra hvile til en hastighed på 95% af lysets ved hjælp af et homogent elektrisk felt.

1) Hvor stor er den fornødne spændingsforskel?

2) Hvor lang tid tager accelerationen, målt i laboratoriesystemet, hvis den forløbne vejlængde er 10 m?

Efter accelerationen bevæger myonen sig ind i et område uden elektrisk felt, men med et homogent magnetfelt $B = 10$ tesla. Hastigheden står vinkelret på magnetfeltet.

3) Beregn radius i den fremkomne cirkelbane.

4) Myonens middellevetid i hvile er $2 \cdot 10^{-6}$ s. Hvor mange komplette cirkelbaner kan den forventes at udføre, inden den henfalder?

(Myonens hvilemasse er 106 MeV/c^2 og dens ladning er en elektronladning, $1.6 \cdot 10^{-19}$ coulomb).

Opgave i elektrodynamik .

To concentriske tyndvæggede metalcylindre har højden h og radier r_1 og r_2 ($r_1 < r_2 \ll h$). På den inderste cylinder sidder ladningen +Q og på den yderste sidder ladningen −Q. Cylindrene befinder sig i vacuum.

1. Angiv størrelse og retning af den elektriske feltstyrke $\vec{E}$ i afstanden r fra cylindrenes fælles akse.

2. Angiv systemets kapacitet C og den samlede elektrostatiske energi U_e.

Cylindrene sættes nu i rotation samme vej om den fælles akse med samme omløbstid T.

3. Angiv størrelse og retning af den magnetiske feltstyrke $\vec{H}(r)$. (Det kan antages, at der ikke er noget magnetfelt for $r > r_2$).

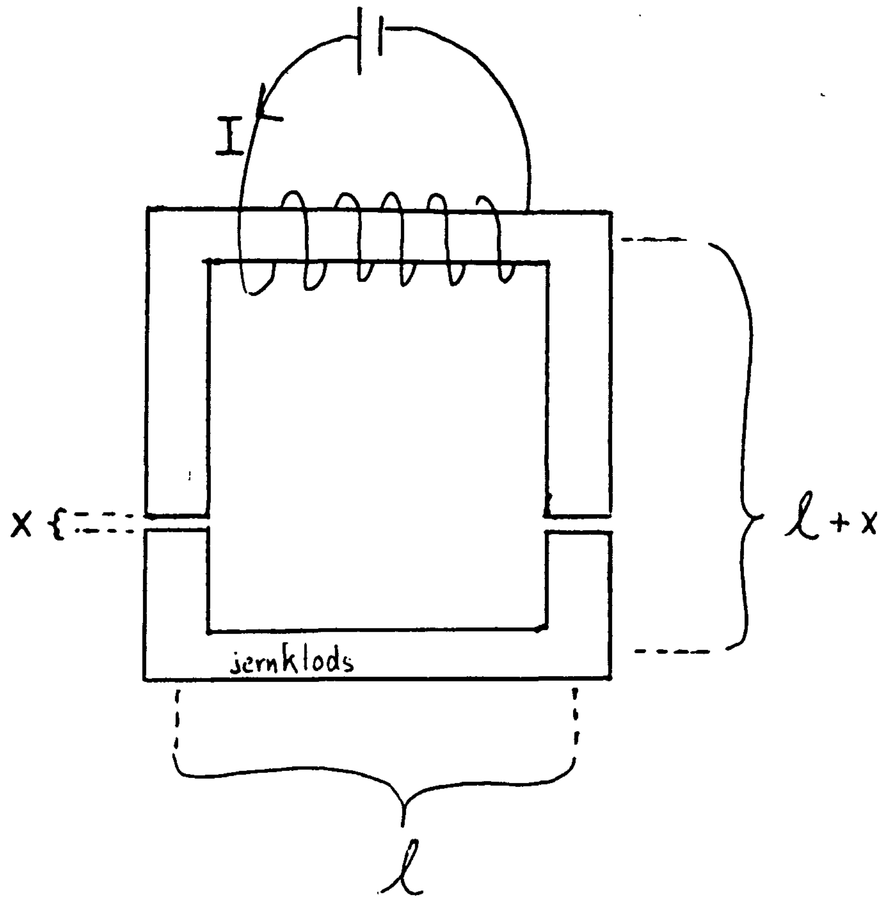
4. Vis, at der er en strøm af elektromagnetisk energi, $W = 2 \cdot U_e/T$ i mellemrummet mellem cylindrene.

5. Udregn magnetfeltets energi U_m.

6. Antag $r_2 - r_1 \ll r_1$ og vis så, at forholdet mellem den magnetiske og den elektriske energi er lig med kvadratet på forholdet mellem cylindrenes omdrejningshastighed og lyshastigheden.

Opgavesættet SLUT

ELEKTRODYNAMIK.



Opgave 1. En elektromagnet, som vist på ovenstående figur, består af en hesteskoformet jernkerne adskilt fra en jernklods af et lille luftgab. Omkring jernkernen er der viklet N vindinger af en kobbertråd, gennem hvilken der løber strømmen I.
Tværsnitsarealet af jernkernen og jernklodsen er ens og betegnes A. Idet x er luftgabets størrelse, kan det antages, at $x^2 << A << \ell^2$, hvor ℓ angiver (middel)-dimensionen af magneten (jvf. figuren).
I opgaven betragtes jern som et lineært magnetisk medium med $\mu = 3000\,\mu_0$.

a) Opstil de relevante Maxwell-ligninger og bestem $\bar{B}$ og $\bar{H}$ overalt i jernkernen, jernklodsen og luftgabet.

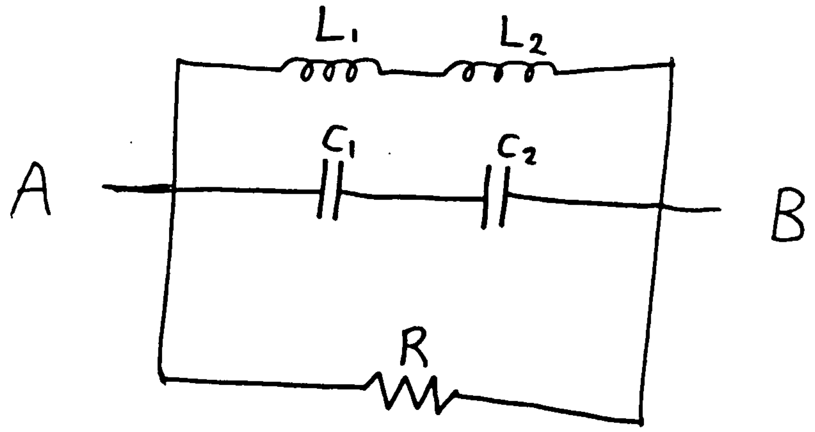
b) Beregn den magnetiske energi.

c) Find kraften, hvormed endeklodsen skal påvirkes for at løsrive den fra elektromagneten, når $x = o$, idet det antages, at jernklodsen slipper begge magnetpoler samtidigt.

Vink: Kraften kan beregnes ud fra svaret på b).

(opgaven slut)

ELEKTRODYNAMIK.



Opgave 2. a) Beregn den komplekse frekvensafhængige impedans af ovenstående kredsløb mellem A og B bestående af 2 spoler med induktans L_1 og L_2 , 2 kondensatorer med kapacitet C_1 og C_2 samt modstanden R.

b) Idet det fra nu af antages, at $L_1 = 1$ H, $L_2 = 5$ H, $C_1 = 2 \cdot 10^{-12}$F, $C_2 = 2 \cdot 10^{-12}$F, $R = 9 \cdot 10^6 \Omega$, og $\omega = 2 \cdot 10^6$ Hz , skal man beregne fasedrejningen mellem strøm og spænding, når en ydre spændingskilde tilkobles mellem A og B.

c) Hvad er den afsatte effekt, når spændingsamplituden er 13 V ?
Hvor bliver energien af ?

(opgavesættet slut)

Opgave i kvantemekanik.

Spintilstanden af et system, bestående af tre elektroner, kan udvikles på basistilstandene $|a_1, a_2, a_3 >$, hvor a_i er egenværdien for Pauli matricen $\sigma_z^{(i)}$. Spin z operatoren for elektron nr. i (i = 1,2 eller 3) er altså $S_z^{(i)} = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z^{(i)}$.

Vi indfører kvantetallene s og m, defineret ved, at egenværdien for kvadratet på totalspinnet $\vec{S}$ er $\hbar^2 s(s+1)$ og egenværdien af S_z er $\hbar$ m.

1) Angiv de mulige værdier af s og for hver af disse de mulige værdier af m. Vis, at s og m ikke kan være et fuldstændigt sæt kvantetal til beskrivelse af spintilstanden.

2) Undersøg, om spintilstanden

$$|A> = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1, 1 > - |-1, -1, -1>)$$

har veldefinerede værdier af s og m. Vis dernæst, at $|A>$ er egentilstand for operatorerne $\sigma_x^{(i)}\sigma_y^{(j)}\sigma_y^{(k)}$ samt $\sigma_x^{(i)}\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(k)}$, hvor ijk er en vilkårlig permutation af tallene 1, 2 og 3. Angiv de tilhørende egenværdier.

3) Tilstanden af systemet er givet ved et produkt af spintilstanden $|A>$ og en rumlig bølgefunktion, som kan skrives på formen

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = f(\vec{r}_2-\vec{r}_3)f(\vec{r}_3-\vec{r}_1)f(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

Angiv en nødvendig symmetri-egenskab for funktionen f. Vis endvidere, at tilstanden har en veldefineret paritet og angiv dens værdi.

(opgavesættet fortsætter)

(opgaven i kvantemekanik fortsat)

4) Vi betragter operatorerne

$$\sigma^{(i)}(\varphi_i) = \cos\varphi_i \cdot \sigma_x^{(i)} + \sin\varphi_i \cdot \sigma_y^{(i)}$$

svarende til en spinretning i xy planen for elektron i, der danner vinklen φ_i med x-aksen. Angiv en betingelse for de tre vinkler φ_1, φ_2 og φ_3 , således at $|A\rangle$ er egentilstand for operatoren

$$\Sigma = \sigma^{(1)}(\varphi_1)\, \sigma^{(2)}(\varphi_2)\, \sigma^{(3)}(\varphi_3)$$

Angiv også de tilhørende egenværdier og sammenlign med resultater fra spørgsmål 2.

(opgavesættet SLUT)

Opgave i relativitetsteori.

En partikel med hvilemassen m bevæger sig på linjen $y = b$ med hastigheden v. Til tidspunktet $t = o$ rammer den en hvilende antipartikel (samme hvilemasse) i punktet (o,b). Begge partikler annihileres, og der udsendes to fotoner fra punktet (o,b) til tidspunktet $t=o$.

1) Angiv den samlede energi og den samlede impuls (størrelse og retning) for de to fotoner.

2) Den ene foton (foton 1) registreres i punktet (a,o). Angiv tidspunktet t_1 for registreringen.

Vi indfører nu et inertialsystem K' med hastigheden u i forhold til laboratoriesystemet K. K og K' har sammenfaldende x-akser, og y-akserne er sammenfaldende for $t = t' = o$.

3) Bestem hastigheden u, således at K' er tyngdepunktssystem for de to partikler.

4) Angiv i tyngdepunktssystemet koordinaterne x_1' og y_1' samt tidspunktet t_1' for registreringen af foton 1.

Vi antager nu, at der "i ethvert punkt" på linjen $y = 2b$ er opsat detektorer til registrering af foton 2.

5) Angiv koordinater (x_2' og x_2) og tidspunkter (t_2' og t_2) for registreringen af foton 2 i K' og K.

6) Vi antager nu, at $a = b$ $(> o)$, og at begge fotonerne i K' systemet udsendes vinkelret på x' aksen.
Beregn hastigheden v.

Skriftlig eksamen i dybdemodulet (elektrodynamik)
(NY ORDNING) (50% af et sæt) (alle hjælpemidler tilladt)
fredag den 7. juni 1991 kl. 9.00 - 15.00.

Opgave 1.

En uendelig stor kondensator er rotationssymmetrisk omkring z-aksen og har følgende form. Den øvre kondensatorplade er hyperboloiden givet ved ligningen

$$z = \sqrt{\frac{r^2+a^2}{2}}$$

hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Den nedre kondensatorplade er keglefladen givet ved

$$z = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

1) Tegn kondensatoren og opstil ligningen for potentialet $\varphi(x,y,z)$ mellem kondensatorpladerne.

2) Vis, at hvis V er spændingsforskellen mellem pladerne, er løsningen

$$\varphi(x,y,z) = \frac{V}{a^2}(2z^2-r^2) + \text{Const.}$$

3) Beregn det elektriske felt overalt mellem kondensatorpladerne.

4) Vis, at kondensatorens kapacitet er uendelig stor.

(opgave 1 slut)

Opgave 2.

Følgende simpel model af en asynkronmotor betragtes. En vinding af en kobbertråd har form som et kvadrat med siden L. Kobbertråden er mekanisk forbundet med en plastikakse i z-aksens retning således, at aksen halverer to modstående sider. Aksen kan rotere og tænkes forbundet til en meget tung skive.

Skiven og tråden roterer nu med vinkelfrekvensen ω. Tråden befinder sig i et rumligt homogent magnetfelt givet ved

$$\bar{B} = B_o \ (\cos(\omega_o t), \sin(\omega_o t), o).$$

Det antages først, at $o < \omega < \omega_o$.

1) Idet kobbertrådens modstand betegnes R, skal man beregne den i tråden inducerede strøm som funktion af tiden, $I(t)$. Det antages, at tråden ligger i x-z-planen til $t = o$.

2) Beregn den effekt der i middel afsættes som Joulevarme i tråden, $< P_{Joule} >$ og den effekt, der i middel tilføres skiven som rotationsenergi, $< P_{nyttig} >$.

3) For hvilken vinkelfrekvens ω er $< P_{nyttig} >$ størst ?

4) Vis, at $\dfrac{<P_{nyttig}>}{<P_{Joule}>} \rightarrow \infty$ for $\omega \rightarrow \omega_o$.

5) Hvad sker der, hvis $\omega > \omega_o$?

(opgavesættet slut)

Skriftlig eksamen i dybdemodulet, juni 1991.

Kvantemekanik

Opgave 1.

En partikel med masse m bevæger sig i to dimensioner. Dens potentielle energi er givet ved

$$V(x,y) = \frac{1}{2}K(x^2+y^2) \quad \text{for alle } x \text{ og alle } y \qquad (1)$$

hvor K er en positiv konstant.

a) Begrund kort, at de mulige energier for partiklen er:

$$E_{n_1,n_2} = (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega \; ; \; \left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\} = 0,1,2,\ldots ; \; \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Hvordan ser de tilsvarende bølgefunktioner ud ?

b) Angiv grundtilstandsenergien og den tilhørende bølgefunktion, hvis den potentielle energi i stedet for (1) er givet ved

$$V(x,y) = \frac{1}{2}K\,(x^2+y^2) \text{ for } x > o \text{ og } y > o \; ; \; V(x,y) = \infty \text{ ellers.} \quad (2)$$

c) Til et givet tidspunkt ændres den potentielle energi fra at være givet ved (2) til at være givet ved (1). Bølgefunktionen antages til dette tidspunkt at være den under b) fundne. Hvad er sandsynligheden for til et senere tidspunkt at måle energien til at være $3\hbar\omega$?

(Hjælp: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$; $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$; $\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$)

fortsættes..

(Skr. eksamen i dybdemodulet, juni 1991, Kvantemekanik, fortsat):

Opgave 2.

En partikel med masse m bevæger sig i to dimensioner.
Dens potentielle energi er givet ved

$$V(x,y) = \frac{1}{2}K(x^2+y^2) \quad \text{for alle } x \text{ og alle } y,$$

hvor K er en positiv konstant.

De mulige energier for partiklen er

$$E_{n_1,n_2} = (n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega \; ; \quad \left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\} = 0,1,2,\ldots; \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

med tilsvarende egentilstande $|n_1,n_2>$.

a) Hvad ved vi om partiklens tilstand sammenholdt med tilstandene $|n_1,n_2>$, hvis dens energi er målt til at være $3\hbar\omega$?

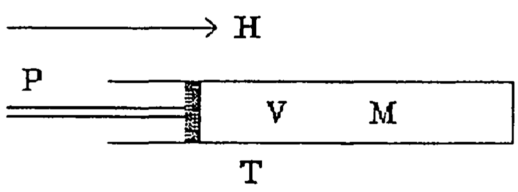
b) Vis, at en måling af partiklens impulsmoment nødvendigvis vil resultere i én af de tre værdier $0, 2\hbar$ og $-2\hbar$, hvis dens energi er målt til at være $3\hbar\omega$.

(Hjælp: $L = i\hbar(a_2^+ a_1 - a_1^+ a_2)$, hvor a_i^+ og a_i er sædvanlige skabelses- og annihilationsoperatorer)

———— o ————

Dybdemoduleksamen i termodynamik.
Tirsdag d. 7. januar 1992 kl. $10^{\underline{00}}$ - $13^{\underline{00}}$.
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

En paramagnetisk gas er indesluttet i en aflang beholder med stempel. Beholderen er anbragt i et homogent magnetfelt H parallelt med beholderens længderetning. Der ses bort fra beholderens magnetiske egenskaber og eventuelle formafhængige demagnetiseringseffekter.



Gassens samlede magnetiske moment M er givet ved udtrykket

$$M = \frac{nCH}{T - \theta \cdot \frac{nb}{V}}$$

hvor n er antallet af mol, T den absolutte temperatur, V beholderens rumfang, og hvor C, θ og b er positive konstanter. Ovenstående udtryk gælder for $T > \theta$ og $V > nb$, hvilket vi i det følgende antager er tilfældet.

Vi betragter først en magnetiseringsproces, hvor gassen har fastholdt temperatur og rumfang, medens magnetfeltet langsomt øges fra 0 til H.

1) Angiv størrelse og fortegn af det magnetiske arbejde, som udføres på gassen under processen.

2) Vis, at entropien S er en aftagende funktion af M for fastholdt T og V. Udregn dernæst den fra omgivelserne tilførte varme under processen.

3) Vis, at energien U er svagt aftagende under samme proces, og at U er uafhængig af M i det ideelt paramagnetiske tilfælde $\theta = 0$.

4) Angiv et udtryk for $\left(\frac{\partial P}{\partial H}\right)_{T,V}$ og udregn trykændringen ved processen.

I det følgende sættes $\theta = 0$, og gassen antages at have en konstant varmekapacitet for fastholdt rumfang, C_V, og at adlyde tilstandsligningen

$$P\cdot(V - nb) = nRT$$

Energien U afhænger kun af T.

5) Vis, at varmekapaciteten for fastholdt tryk og magnetfelt er

$$C_{P,H} = C_V + nR + \frac{\mu_0}{nC}M^2$$

6) Efter at gassen er kommet i termisk ligevægt med temperaturen T_i og magnetfeltet H, varmeisoleres beholderen og magnetfeltet fjernes med fastholdt tryk. Bestem gassens sluttemperatur T_f.

[Hjælp: udtryk TdS ved dT, dP og dM og find derved $\left(\frac{\partial \ln T}{\partial M}\right)_{S,P}$].

Kan man opnå en større afkøling af gassen, hvis den adiabatiske demagnetisering udføres med fastholdt rumfang i stedet for med fastholdt tryk? (Begrund svaret).

(Opgaven slut)

Dybdemoduleksamen i termodynamik.

Torsdag d. 4. juni 1992.

HJÆLPEMIDLER TILLADT.

En gas adlyder tilstandsligningen

$$Pv = RT - \frac{a}{v}$$

hvor P er trykket, v det molære rumfang, R er gaskonstanten, T den absolutte temperatur og a en positiv konstant. Tilstandsligningen antages at gælde for $v \geq \frac{3a}{RT}$.

Den molære varmekapacitet for fastholdt rumfang er givet ved

$$c_v = \frac{5}{2}R$$

1) Find den isoterme kompressibilitet κ_T og varmeudvidelseskoefficienten β.

2) Find den molære energi og enthalpi som funktioner af T og v.

3) Find varmekapaciteten for fastholdt tryk og den adiabatiske kompressibilitet.

4) I et Joule-Kelvin eksperiment presses gassen adiabatisk gennem et porøst filter ud i et område med lavere tryk. Bliver temperaturen herved højere eller lavere?

5) Find sluttemperaturen T_f i Joule-Kelvin eksperimentet, når starttemperaturen er T_i = 140 K og det molære rumfang ændres fra $v_i = \frac{4a}{RT_i}$ til $v_f = 2v_i$.

(Opgaven slut)

Skriftlig eksamen i dybdemodulet, juni 1992.

Kvantemekanik.

Opgave 1.

En spinløs partikel med masse m bevæger sig i tre dimensioner. Dens potentielle energi er givet ved:

$$V(x,y,z) = \tfrac{1}{2}K(x^2+y^2+z^2) \text{ for alle værdier af } x,y \text{ og } z,$$

hvor K er en positiv konstant.

a) Begrund kort, at de mulige resultater af en måling af partiklens energi er:

$$E_{n_x,n_y,n_z} = (n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2})\hbar\omega; \quad \left.\begin{matrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{matrix}\right\} = 0,1,2,\ldots; \quad \omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Hvordan ser de til egentilstandene $|n_x,n_y,n_z>$ svarende bølgefunktioner ud?

b) Hvad ved vi om partiklens tilstand sammenholdt med egentilstandene $|n_x,n_y,n_z>$, hvis dens energi er målt til at være $\frac{7}{2}\hbar\omega$?

c) Find middelværdierne $<L_z>$ og $<L_z^2>$ for de forskellige egentilstande $|n_x,n_y,n_z>$ med $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$.

Vis, at målinger af L_z for partiklen, når det alene i forvejen vides, at dens energi er $\frac{7}{2}\hbar\omega$, vil give middelværdierne $<L_z>=0$ og $<L_z^2>=\frac{5}{3}\hbar^2$.

Begrund herudfra, at $<\overline{L}^2>= 5\hbar^2$.

(Hjælp: $L_z = i\hbar(a_y^+a_x - a_x^+a_y)$, hvor a_i^+ og a_i er sædvanlige skabelses- og annihilationsoperatorer for den harmoniske oscillator).

(fortsættes..)

(Skriftlig eksamen i dybdemodulet, juni 1992,
Kvantemekanik fortsat):

Opgave 2.

En spinløs partikel med masse m bevæger sig i tre dimensioner. Dens potentielle energi er i polære koordinater givet ved:

$$V(r) = \tfrac{1}{2}Kr^2 \quad \text{for alle } r \geq 0 \text{ ,}$$

hvor K er en positiv konstant.

a) Begrund, at egentilstandene for Hamiltonoperatoren kan vælges således, at de også er egentilstande for $\bar{L}^2$ og L_z.

b) Vis, at funktionerne:

$$\psi_m(r,\theta,\varphi) = r^2\, e^{-\frac{r^2}{2a^2}} \cdot Y_{2m}(\theta,\varphi) \quad ; \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \;; \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ ,}$$

tilfredsstiller den tidsuafhængige Schrödingerligning med $E = \frac{7}{2}\,\hbar\omega$.

($Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ er fælles egenfunktioner for $\bar{L}^2$ med egenværdien $\ell(\ell+1)\hbar^2$ og for L_z med egenværdien $m\hbar$. r, θ og φ er sædvanlige polære koordinater).

c) Begrund, at der udover de fem funktioner ψ_m i spørgsmål b) må findes netop én sjette lineært uafhængig fælles egenfunktion for $\bar{L}^2$, L_z og Hamiltonoperatoren med energiegenværdien $\frac{7}{2}\,\hbar\omega$.

Begrund - bl.a. ud fra resultatet $\langle\bar{L}^2\rangle = 5\hbar^2$ i opgave 1, spørgsmål c) - at dens vinkelafhængighed må være givet ved $Y_{00}(\theta,\varphi)$.

——— o ———

Dybdemoduleksamen i termodynamik.
Tirsdag d. 12. januar 1993.
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

For en ideal gas er den molære entropi og energi givet ved udtrykkene

$$s = R \ln(\alpha v T^{\mu}) \quad ; \quad u = R \mu T$$

hvor T er den absolutte temperatur og v det molære rumfang. R er gaskonstanten, og α og μ er stofafhængige konstanter.

1) Angiv værdien af μ for en énatomig gas. Angiv endvidere for en vilkårlig værdi af μ de molære varmekapaciteter for konstant rumfang og konstant tryk.

To beholdere, som begge har rumfanget V, er forbundet med et snævert rør, hvorigennem en reversibelt arbejdende pumpe kan transportere luft fra den ene beholder til den anden. Der ses bort fra rørets rumfang.

2) Angiv den totale entropi S og energi U, når beholder 1 indeholder $n\cdot(1+\xi)$ mol og beholder 2 indeholder $n\cdot(1-\xi)$ mol af den ideale gas, og når begge beholdere er i termisk ligevægt med et varmereservoir med temperaturen T.

3) Vis, at S er maksimal for $\xi=0$, og angiv et tilnærmet udtryk for S, når $|\xi| \ll 1$, ved rækkeudvikling til 2. orden i ξ.

4) Når systemet er i tilstanden med temperatur T og forskydningsparameter ξ, varmeisoleres beholderne, og passagen gennem røret åbnes, så gassen kan passere frit fra den ene beholder til den anden. Angiv temperaturen T′ samt entropien S′ og energien U′ for den nye ligevægtstilstand.

(opgaven fortsætter)

5) Hvis man i stedet for at lade gassen passere frit gennem røret, som i spørgsmål 4, udnytter trykforskellen på reversibel måde til at udføre arbejde på omgivelserne, hvad bliver så sluttilstandens temperatur T'', entropi S'' og energi U'' ?

6) Lige som i spørgsmål 5 udnyttes trykforskellen til reversibelt udført arbejde, men vi lader nu beholderne have varmeledende kontakt med varmereservoiret under hele processen, således at temperaturen fastholdes på værdien T. Vil systemet under denne proces modtage varme fra reservoiret, eller vil det afgive varme? (Begrund svaret).

(Opgaven slut)

ELEKTRODYNAMIKEKSAMEN

RUC, 12/1 1993, kl 10-13.

Sættet består af to opgaver der ved bedømmelsen vægtes med hver 50%.

OPGAVE 1

Man betragter en statisk ladningsfordeling i rummet hvis ladningstæthed i sædvanlige retvinklede koordinater er givet ved

$$\rho(x,y,z) = \frac{\rho_0}{a^2}(a^2-x^2-y^2) \quad , \quad x^2+y^2<a^2$$
$$\rho(x,y,z) = 0 \quad , \quad x^2+y^2>a^2$$

Ladningsfordelingen befinder sig i et stof med dielektricitets-konstanten $\epsilon=\epsilon_0$ og den magnetiske permeabilitet μ .

1) Hvilken type koordinatsystem er det naturligt at benytte når man skal regne på en ladningsfordeling som ovenstående?

2) Find det elektriske felt overalt i rummet.

Nu tænkes ladningsfordelingen at rotere langsomt omkring z-aksen med vinkelhastigheden ω .

3) Vis at der herved opstår et magnetisk felt i z-aksens retning der for $x^2+y^2<a^2$ er givet ved

$$B_z(x,y,z) = \frac{1}{4}\frac{\mu\rho_0\omega}{a^2}[(x^2+y^2)(x^2+y^2-2a^2) + a^4]$$

OPGAVE 2

Opgaven vedrører et hypotetisk stof, i det følgende betegnet et "S-medium". S-mediet er umagnetisk, så i S-mediet gælder altså $\mu = \mu_0$. S-mediet er karakteriseret ved proportionalitet mellem strømtæthedsvektoren, $\overline{\boldsymbol{J}}$, og vektorpotentialet i et passende gaugevalg, $\overline{\boldsymbol{A}}$:

$$\overline{\boldsymbol{J}} = -K\overline{\boldsymbol{A}} \quad , \quad K > 0 \quad . \qquad (1)$$

I det følgende antages det at vektorpotentialet er valgt så ligning (1) er opfyldt. Det antages endvidere at det elektriske skalarpotential ϕ overalt i S-mediet er lig med nul. Endelig antages det at den totale ladningstæthed i S-mediet overalt er nul.

1) Vis at vektorpotentialet opfylder Coulomb gaugebetingelsen, $\overline{\nabla} \cdot \overline{\boldsymbol{A}} = 0$.

2) Vis at der i S-mediet gælder følgende sammenhæng mellem strømtæthedsvektoren, $\overline{\boldsymbol{J}}$, og det elektriske felt, $\overline{\boldsymbol{E}}$:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{K}\frac{\partial \overline{\boldsymbol{J}}}{\partial t} \quad . \qquad (2)$$

3) S-mediet har tætheden n af mobile ladningsbærere, der hver har ladningen q og massen m . Vis at proportionaliteten i ligning (2) følger hvis det antages at de mobile ladningsbærere bevæger sig uafhængigt af hinanden og af S-mediets statiske ladninger. Vis endvidere at der i denne situation gælder $K = nq^2/m$.

I opgavens anden halvdel betragtes opførslen af et magnetisk felt i S-mediet. Alle størrelser i det følgende er tidsuafhængige.

4) Vis at magnetfeltet $\overline{\boldsymbol{B}}$ overalt i S-mediet opfylder ligningen

$$\nabla^2 \overline{\boldsymbol{B}} = \mu_0 K \overline{\boldsymbol{B}} \quad . \tag{3}$$

5) Vis at størrelsen $\lambda = (\mu_0 K)^{-\frac{1}{2}}$ er en længde. Vis endvidere at λ giver et mål for hvor langt et ydre magnetisk felt trænger ind i S-mediet. [Vink: Betragt for eksempel en situation hvor halvrummet $x>0$ er opfyldt af S-mediet og løs ligning (3) under antagelsen at magnetfeltet kun afhænger af x .]

6) Vurder groft størrelsen af λ idet S-mediets ladningsbærere antages at være elektroner med tæthed som i et metal.

Skriftlig eksamen i kvantemekanik, juni 1993.

Opgave 1.

En spinløs partikel med masse m bevæger sig i tre dimensioner i et brintlignende atom. Dens potentielle energi er i polære koordinater givet ved:

$$V(r) = - \frac{Z e_o^2}{r}$$

, hvor Z og e_o er sædvanlige konstanter.

a) Begrund, at egentilstandene for Hamiltonoperatoren kan vælges således, at de også er egentilstande for $\bar{L}^2$ og L_z.

b) De fælles egentilstande betegnes $|n,\ell,m\rangle$ svarende til sædvanlige kvantetal for energien, $\bar{L}^2$ og L_z.

Hvad ved vi om partiklens tilstand sammenholdt med egentilstandene $|n,\ell,m\rangle$, hvis vi alene ved, at dens energi er målt til at være den næstlavest mulige ?

c) Der tilføjes et magnetfelt, B, i z-aksens retning.

Med god tilnærmelse er partiklens Hamiltonoperator herefter:

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{Z e_o^2}{r} + \frac{eB}{2m} L_z$$

, hvor -e er partiklens ladning.

Hvordan påvirkes det næstlaveste energiniveau uden magnetfeltet af magnetfeltet ? Angiv egenværdier og tilhørende egentilstande for H.

(fortsættes)

Opgave 2.

En spinløs partikel med masse m bevæger sig som i opgave 1 i tre dimensioner i et brintlignende atom. De fælles egentilstande for Hamiltonoperatoren, $\bar{L}^2$ og L_z betegnes $|n,\ell,m\rangle$ svarende til sædvanlige kvantetal for energien, $\bar{L}^2$ og L_z.

a) Hvordan ser de til tilstandene $|2,\ell,m\rangle$ svarende fire bølgefunktioner ud i polære koordinater ?

b) Der tilføjes både et elektrisk felt, E, og et magnetfelt, B, begge i z-aksens retning. Med god tilnærmelse er partiklens Hamiltonoperator herefter:

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{Z e_o^2}{r} + \frac{eB}{2m} L_z + eEz$$

, idet -e er partiklens ladning.

Er tilstandene $|n,\ell,m\rangle$ stadig fælles egentilstande for H, $\bar{L}^2$ og L_z ?

c) Vis ved symmetribetragtninger, at alle elementerne i matricen

$$\langle 2,\ell,m|eEz|2,\ell',m'\rangle$$

er 0, undtagen

$\langle 2,1,0|eEz|2,0,0\rangle$ og $\langle 2,0,0|eEz|2,1,0\rangle$.

d) Felterne er tilstrækkeligt svage til, at deres virkning kan betragtes som en perturbation set i forhold til situationen uden felter.

Hvordan påvirkes det næstlaveste energiniveau uden felter af felterne ?

[Hjælp: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$, hvor n er et helt tal større end eller lig med 0.]

(fortsættes)

Opgave 3.

Der regnes som i opgave 1 og opgave 2 på det næstlaveste energiniveau for en spinløs partikel i et brintlignende atom.

a) Hvordan påvirkes energiniveauet, når der samtidigt tilføjes et magnetfelt og et derpå vinkelret elektrisk felt ?

Sammenhold resultatet i grænserne for henholdsvis forsvindende elektrisk felt og forsvindende magnetfelt med det i opgave 2 spørgsmål d) fundne.

[Hjælp: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

hvor n er et helt tal større end eller lig med 0.]

(opgavesæt slut)

Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik
Tirsdag d. 11. januar 1994 kl. 10.00 - 13.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgave 1. Et system indeholder N_a atomer af type a. Hvert atom kan befinde sig i grundtilstanden, en eksiteret tilstand med energi ϵ eller en eksiteret tilstand med energi 2ϵ. Systemet er i ligevægt ved temperaturen T. I den opstillede model negligeres højereliggende energiniveauer end de ovenfor nævnte.

1.1) Angiv tilstandssummen for systemet. Hvilken brøkdel af atomerne befinder sig i tilstanden med energi ϵ?
1.2) Angiv varmekapaciteten for systemet. Hvad er højtemperatur grænsen for varmekapaciteten? Kommenter det fundne resultat.
1.3) Ovenstående system blandes med N_b atomer af typen b. Hvert atom af b-typen kan befinde sig enten i grundtilstanden eller i en eksiteret tilstand med energi ϵ. Angiv Helmholtz potentialet og middelenergien for blandingen, der er i ligevægt ved temperaturen T. Angiv hvordan et udtryk for entropien **principielt** kan findes (det er ikke nødvendigt at udføre regningen).

Opgave 2. Constantan er en legering af 60% Cu og 40% Ni. Smeltepunktet for Ni er 1452°C og for Cu 1083°C. Cu og Ni er fuldstændigt blandbare i både fast og flydende form. Ved opvarmning af constantan er det fundet, at legeringen begynder at smelte ved 1200°C, mens det ved afkøling af en smelte er fundet at fast stof begynder at udfældes ved 1275°C. Skitser kvalitativt et temperatur-sammensætnings fasediagram for legeringer af Cu og Ni, og brug dette til at afgøre, hvilken tilstandsform en legering af 30% Ni og 70% Cu har ved 1200°C .

Opgave 3. Visse gasser følger den mekaniske tilstandsligning:

$$P = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{(V_m)^\omega} \tag{1}$$

Eksponenten ω er ≥ 2, og a og b er positive konstanter karakteristiske for den betragtede gas. Den molære varmekapacitet ved konstant volumen er givet ved:

$$c_v = CT^\beta \tag{2}$$

hvor β og C er konstanter. R er gaskonstanten, P trykket, T temperaturen og V_m det molære volumen.
I det følgende antages relevante værdier af P og T at være indenfor gyldighedsområdet for ovenstående beskrivelse.

3.1) Find den molære entropi som funktion af T og V_m.
3.2) For CO (kulmonoxid) kan ovenstående beskrivelse benyttes med ω=2, a=1.485 ℓ^2atm/mol^2 og b=3.985 $10^{-2}\ell$/mol. 4 mol CO undergår en isoterm (quasi-statisk) udvidelse fra V = 0.6 ℓ til V = 0.8 ℓ ved en temperatur på 150K. Find arbejdet udført på gassen, gassens entropiændring samt ændringen i gassens indre energi.

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten R = 0.08206 $\frac{\ell atm}{mol K}$ = 8.3145 $\frac{J}{mol K}$, Avogadros tal N_A = 6.022 10^{23} mol^{-1}, Boltzmanns konstant k_B = 1.3807 10^{-23}J/K, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

FYSIKUDDANNELSEN

Skriftlig eksamen, fredag den 3. juni 1994, kl. 10.00 - 13.00.

Fysik, modul 2, KVANTEMEKANIK.

Opgavesættet består af 3 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1. [40%]

Bølgefunktionen for en partikel med Hamilton-operatoren $H = A\,(\mathbf{L}^2)^2$ (hvor $\mathbf{L}$ er impulsmomentoperatoren) er kl $t=0$ i sfæriske koordinater givet ved

$$|\psi\rangle = N \sin^2\theta \; f(r) \quad ,$$

hvor N er en konstant og $f(r)$ opfylder

$$\int_0^\infty dr\, r^2\, |f(r)|^2 = 1 \quad .$$

1) Er $|\psi\rangle$ en egentilstand til L_z?

2) Er $|\psi\rangle$ en egentilstand til H?

3) Find normeringskonstanten N.

4) Angiv de mulige resultater af en måling af $\mathbf{L}^2$ og bestem de tilhørende sandsynligheder.

5) Find bølgefunktionen til senere tider $t>0$.

Opgave 2. [30%]

En partikel med massen m bevæger sig i én dimension i potentialet

$$U(x) = U_o \exp\left[\frac{x^2}{2x_o^2}\right] .$$

Det antages gennem hele opgaven at:

(*) Grundtilstandsbølgefunktionen er kun væsentligt forskellig fra nul i de x, der opfylder $|x| \ll x_o$.

1) Estimer grundtilstandsenergien og energien af den første exciterede tilstand. [Vink: Argumenter for og udnyt dernæst, at (*) medfører, at man som en god approximation kan rækkeudvikle exponentialfunktionen.]

2) Angiv betingelsen for at (*) er opfyldt udtrykt ved Plancks konstant, x_o, U_o og m.

3) Det antages nu, at potentialet kl t=0 pludseligt ændres til $U'(x)$, hvor

$$U'(x) = \frac{1}{2} U_o \exp\left[\frac{x^2}{2x_o^2}\right] .$$

Hvad er sandsynligheden for at finde partiklen i den ny grundtilstand umiddelbart efter kl t=0, givet at partiklen var i grundtilstanden før kl t=0? Hvad er sandsynligheden for at finde partiklen i den ny grundtilstand for $t \to \infty$?

Opgave 3. [30%]

En partikel med massen m bevæger sig i én dimension. Partiklen befinder sig i potentialet

$$U(x) = U_o \sin(\frac{x}{a}) \quad .$$

Partiklens Hamilton-operator betegnes H.

1) Vis at enhver måling af energien vil give en energi ϵ, der opfylder $\epsilon + U_o > 0$.

2) Forskydningsafbildningen T defineres ved

$$(T\psi)(x) = \psi(x+2\pi a) \quad .$$

Vis at T er en lineær operator og at T kommuterer med H.

3) Vi betragter nu en fælles egentilstand for T og H givet ved bølgefunktionen $\psi(x)$. Vis at der findes et tal k, så

$$\psi(x) = N_k\, e^{ikx}\, \phi_k(x) \quad ,$$

hvor N_k er en normeringskonstant og ϕ_k opfylder $T\phi_k = \phi_k$.
[Vink: Vælg k så egenværdien hørende til $\psi(x)$ for operatoren T udtrykkes som tallet $e^{i2\pi ka}$.]

4) Redegør for at k må være reel, for at ψ_k er en fysisk acceptabel egenfunktion.

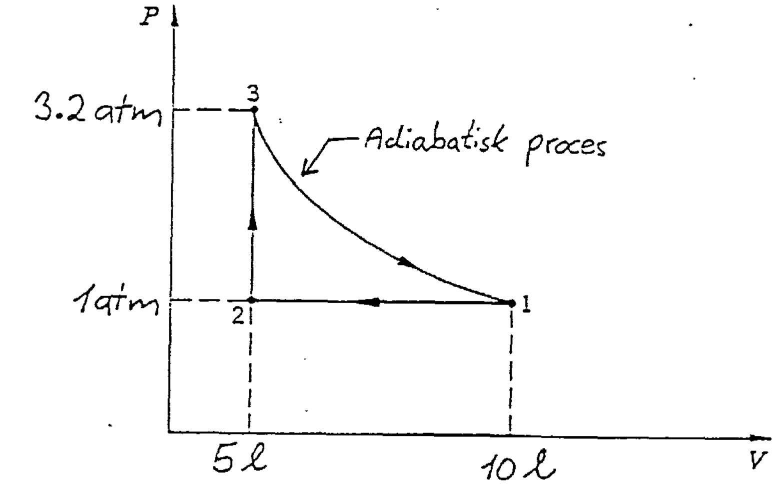
ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik
Mandag d. 6. juni 1994 kl. 10.00 - 13.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgave 1. Energiniveauerne for et system med et magnetisk moment $\vec{\mu}$ i et magnetfelt $\vec{B}$ er givet ved E=-$\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Et atom med en uparret elektron i et magnetfelt har således to mulige tilstande med energi hhv μ_BB og -μ_BB, hvor μ_B er Bohrmagnetonen. De to tilstande svarer til at projektionen af det atomare magnetiske moment på retningen bestemt af det ydre felt er hhv. -μ_B og μ_B.

1.1) Et system består af N af hinanden uafhængige atomer som beskrevet ovenfor. Systemet er i ligevægt ved temperaturen T. Hvor stor en brøkdel af de N atomer er i hver af de mulige tilstande? Angiv et udtryk for Helmholtz fri energi for hele systemet.

1.2) Angiv et udtryk for projektionen langs feltretningen af det resulterende magnetiske moment for systemet, μ_{TOT}. Vis at den magnetiske susceptibilitet givet ved μ_{TOT}/B ved tilstrækkeligt høje temperaturer er omvendt proportional med temperaturen (Curies lov).

Opgave 2. Et mol af en enatomig ideal (perfekt) gas gennemløber den på figuren skitserede kredsproces. Beregn hvor meget arbejde der netto er udført på omgivelserne efter at gassen har gennemløbet én cyklus. Hvad er effektiviteten af en maskine baseret på denne cyklus?



Opgave 3. En blanding af to gasser beskrives med den fundamentale ligning:

$$S = AU^{1/3}V^{1/3}N^{1/3} + \frac{BN_1N_2}{N} \tag{1}$$

N_1 og N_2 angiver antal mol af de to gasser, N=N_1+N_2.
S er gasblandingens entropi, V volumenet og A samt B er konstanter.

3.1) Find et udtryk for trykket i gasblandingen som funktion af temperatur T samt V, N_1 og N_2.

3.2) En isoleret beholder deles i to med en stiv, diatermisk væg, der er gennemtrængelig for gas 1, men ikke gas 2. Hvert af de to kamre har volumenet V_0. I venstre kammer er 1 mol af gas 1 og ikke noget af gas 2. I højre kammer er 1/2 mol af gas 1 og 1/2 mol af gas 2. I udgangssituationen er temperaturen i venstre kammer 200K og i højre kammer 400K. Find ligevægtstemperaturen T_{eq}.

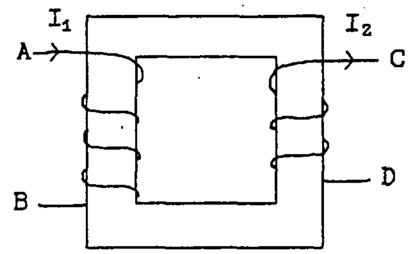
3.3) Opstil et ligningssystem til bestemmelse af fordelingen af gas 1 molekyler i de to kamre i ligevægt. Det er ikke nødvendigt at løse ligningssystemet, men det skal fremgå at systemet ikke er underbestemt.

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten R = 0.08206 $\frac{l\,atm}{mol K}$ = 8.3145 $\frac{J}{mol K}$, Avogadros tal N_A = 6.022 10^{23} mol^{-1}, Boltzmanns konstant k_B = 1.3807 10^{-23}J/K, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr

Opgave i elektrodynamik

10. januar 1995

En induktiv transformator består af en primær og en sekundær spole viklet om en lukket kerne af blødt jern med tværsnitsareal a og middelomkreds s.



Figur 1

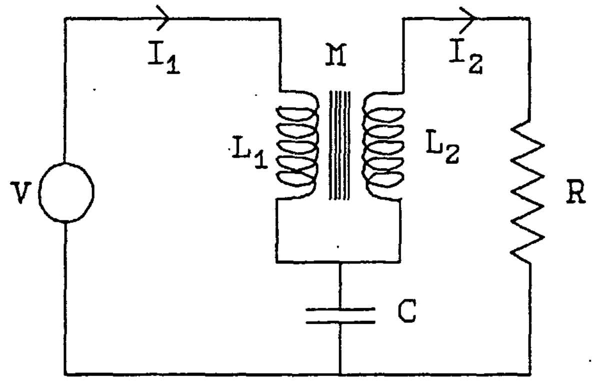
Jernet kan betragtes som et lineært magnetiserbart materiale med permeabiliteten μ ($\mu >> \mu_0$). De to spoler har vindingstallene N_1 og N_2. Transformatorens omsætningsforhold, T, defineres som forholdet mellem sekundær- og primær-vindingstallet.

1) Angiv de to spolers selvinduktionskoefficienter. Hvis sekundærspolens selvinduktion udtrykkes som $L_2 = TL$, hvad er så primærspolens selvinduktion L_1 og spolernes gensidige induktans M, udtrykt ved L og T. (Fortegnet af M bestemmes ud fra de på figur 1 viste viklingsretninger for de to spoler, samt de viste orienteringer for primærstrømmen I_1 og sekundærstrømmen I_2.)

2) Angiv, hvorledes spændingsforskellene $V_A - V_B$ og $V_C - V_D$ afhænger af de tidsafhængige strømme $I_1(t)$ og $I_2(t)$.

I det følgende betragter vi et netværk, hvori den beskrevne transformator indgår sammen med en modstand R, en kondensator med kapaciteten C og en spændingskilde V cos(ωt), som vist på figur 2. Vi lader nu I_1 og I_2 betegne de komplekse strømamplituder, således at den tidsafhængige primærstrøm er $|I_1| \cos(\omega t + \theta_1)$.

(opgaven fortsætter)



Figur 2

3) Opstil et sæt ligninger til bestemmelse af I_1 og I_2 ved parametrene V, R, C, L, T og ω.

4) Bestem den komplekse impedans $Z(\omega) = V/I_1$.

5) Vis, at realdelen af Z er nul for en bestemt frekvens ω_m. Bestem fasedrejningen θ_1 som funktion af T ved frekvensen ω_m. (Vi antager i dette spørgsmål, at $T \neq 1$). Hvordan forholder det sig med realdelen af den komplekse admittans $Y = 1/Z$ ved samme frekvens? Hvor stor effekt skal spændingskilden levere? Hvad bliver der af denne energi?

6) Tegn et simpelt netværk, bestående af en selvinduktion L, modstanden R og kapaciteten C, der har samme frekvensafhængige impedans som netværket på figur 2 for T = 1. Hvordan vil det gå, hvis dette system pumpes af en spændingskilde med frekvensen ω_m?

(opgaven slut)

Skriftlig eksamen, torsdag den 12. januar 1995, kl. 10.00 - 13.00
Fysik, dybdemodulet, KVANTEMEKANIK.
Opgavesættet består af 2 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

I. OPGAVE (60 %)

Man betragter en partikel med massen m i det én-dimensionale harmoniske oscillator potential $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. For hvert kompleks tal z defines tilstanden $|z>$ som den normerede egentilstand for A operatoren ($A = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega}}$, jvnf. p. 128 i Gasiorowicz) med egenværdien $z\sqrt{\hbar}$, altså

$$A|z> = z\sqrt{\hbar}|z> . \tag{1}$$

1) Vis at hvis $|z>= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\psi_n>$, hvor $|\psi_n>$ er den n'te normerede energiegentilstand, gælder

$$\lambda_n = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\lambda_0. \tag{2}$$

(Vink: Vis først at $\lambda_n = \frac{z}{\sqrt{n}}\lambda_{n-1}$ ved at udnytte resultatet fra opgave 1 p. 136 i Gasiorowicz.)

2) Vis at (pånær en fasefaktor) er tilstanden $|z>$ givet ved

$$|z> = \exp[-\frac{|z|^2}{2}]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|\psi_n> . \tag{3}$$

3) Find et udtryk for det indre produkt $<z_1|z_2>$ og vis at denne størrelse går mod nul for $|z_1 - z_2| \to \infty$.

4) Som bølgefunktionsrepræsentationen af tilstanden $|z>$ antages nu

$$|z> = C\ exp[i\alpha x - \beta(x - x_o)^2], \tag{4}$$

hvor C er en normaliseringskonstant. Vis at denne repræsentation "virker", find et udtryk for β og bestem sammenhængen mellem z og α . Giv en fysisk fortolkning af disse to konstanter.

5) Det kan vises at tilstanden $|z>$ udvikler sig i tiden efter ligningen

$$|z>(t) = e^{-i\frac{\omega t}{2}}\ |ze^{-i\omega t}> . \tag{5}$$

Giv en fysik fortolkning af dette i lyset af fortolkningen af konstanterne i 4).

6) Hvad er fortolkningen af tilstanden $|z>$ i den klassiske grænse ($m \to \infty$) ?

II. OPGAVE (40 %)

En partikel bevæger sig i 3 dimensioner i potentialet

$$U(r) = Ar^n, \tag{6}$$

hvor A er en konstant, r er afstanden til origo og $n \geq -1$.

1) Find dimensionen af A. Hvorfor er det nødvendigt at antage at $nA \geq 0$?

2) Variationsmetoden benyttes til at estimere grundtilstandsenergien. Som ansatz tages bølgefunktionen

$$\psi(\mathrm{r}) = C\, e^{-br}. \tag{7}$$

Vis at det er nødvendigt at antage at $b > 0$ og angiv den fysiske fortolkning af b. Find normaliseringskonstanten C.

3) Angiv for hvert n den værdi af variationsparameteren b som giver den mindste energi.

4) Sammenlign resultatet fra 3) med de eksakte grundtilstandsenergier for tilfældene $n = -1$, $n = 0$ og $n = 2$.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

FYSIKUDDANNELSEN

Skriftlig 3-timers prøve i dybdekursus i

KVANTEMEKANIK

Fredag den 9. juni 1995, kl. 10.00 - 13.00.

Opgavesættet består af 3 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

I. OPGAVE (40 %)

Vi betragter en partikel med massen m i det én-dimensionale "box"potential $V(x)$ givet ved $V(x) = 0$ for $|x| < a$ og $V(x) = \infty$ for $|x| > a$. Til et givet tidspunkt kl $t = 0$ er partiklen beskrevet ved bølgefunktionen $\psi(x) = C(x^2 - a^2)$ for $|x| < a$ og $\psi(x) = 0$ ellers.

1) Bestem dimensionen af konstanten C og udregn værdien af C.

2) Find middelværdien af energien til kl $t = 0$.

3) Find sandsynligheden for at en måling af energien kl $t = 0$ som resultat giver grundtilstandsenergien.

II. OPGAVE (30 %)

En spin-1/2 partikel er beskrevet ved Hamiltonoperatoren $H = A(3\sigma_x + 4\sigma_y)$, hvor A er en konstant og σ_x og σ_y er de sædvanlige Paulimatricer. Partiklens rumbølgekoordinater ignoreres i opgaven.

1) Til tiden kl $t = 0$ vides det, at partiklen med sikkerhed har spinnet rettet i den positive y-akse. Beregn tilstanden til alle senere tider, idet tilstanden beskrives ved en sædvanlig 2-spinor.

2) Beregn for enhver tid $t > 0$ sandsynligheden for at en måling af spinnet i y-aksens retning resulterer i værdien $-\hbar/2$.

III. OPGAVE (30 %)

Opgaven vedrører energi-tids usikkerhedsrelationen. For et system beskrevet ved tilstanden $|\psi>$ defineres som sædvanlig for enhver Hermitisk operator A middelværdien $< A >$ ved $< A > = < \psi|A|\psi >$ og ubestemtheden, ΔA, ved $\Delta A = \sqrt{< A^2 > - < A >^2}$.

1) Vis at $\Delta A = 0$, hvis $|\psi >$ er en egentilstand til A.

1a) [extraspørgsmål] Redegør for at hvis $|\psi >$ ikke er en egentilstand til A gælder altid $\Delta A > 0$.

I almindelighed afhænger $< A >$ af tiden. Vi definerer nu tidsubestemtheden Δt som groft taget den tid, det tager for størrelsen $< A >$ at ændre sig ΔA. Mere præcist defineres Δt ved

$$\Delta t \left| \frac{d < A >}{dt} \right| = \Delta A . \tag{1}$$

2) Vis at $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$, hvor ΔE er energiubestemtheden som sædvanligt defineret ved $\Delta E = \Delta H$, hvor H er Hamiltonoperatoren. Vink: Benyt bla den generaliserede usikkerhedsrelation (jævnfør ligning (B-34) på side 499 i Gasiorowicz), der gælder for to Hermitiske operatorer A og B,

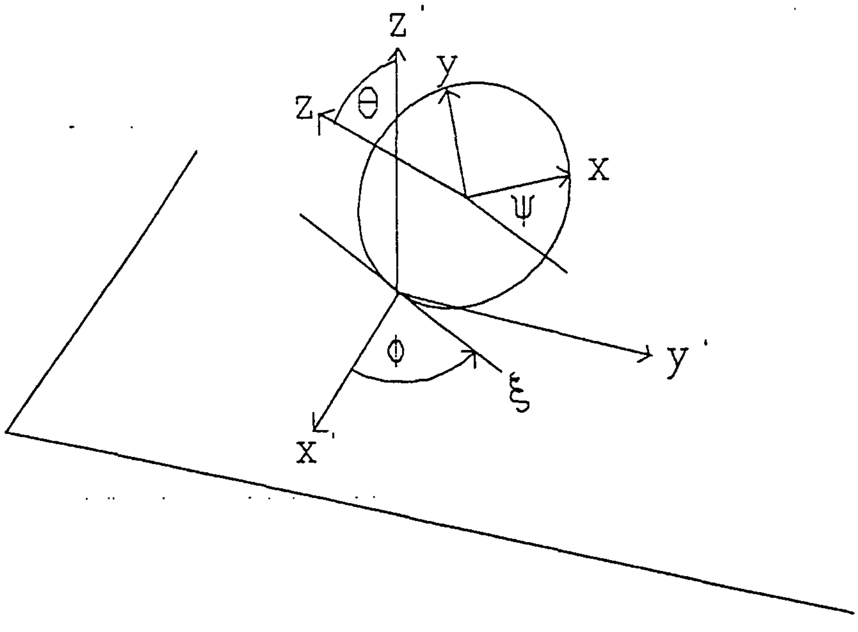
$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} (< i[A, B] >)^2 . \tag{2}$$

3) Vi betragter nu specialtilfældet hvor $|\psi >$ er en egentilstand for H. Vis ud fra definitionen af Δt [lign. (1)] at $\Delta t = \infty$. Hvordan harmonerer dette resultat med energitids usikkerhedsrelationen?

Opgave i analytisk mekanik

13. juni 1995

Som model for et *trillebånd* betragter vi en uendelig tynd ring med masse m og radius r, der ruller på en vandret plan i et sædvanligt tyngdefelt. Laboratorie-koordinatsystemet K_L har x'-aksen og y'-aksen i planen og z'-aksen som normal til planen. Ringen rører planen i et punkt med laboratoriekoordinaterne $(x'_0, y'_0, 0)$, som på tegningen nedenfor er begyndelsespunktet for K_L, men som i løbet af ringens bevægelse kan komme overalt i planen. Ringens øjeblikkelige tangent i planen, linjen ξ, danner vinklen ϕ med x'-aksen, og ringens plan danner vinklen θ med den vandrette plan. Et til ringen fast knyttet koordinatsystem K_B har begyndelsespunkt i ringens centrum, x-aksen og y-aksen i ringens plan og z-aksen vinkelret herpå, dvs. z-aksen danner vinklen θ med z'-aksen, og x aksen danner vinklen ψ med retningen ξ. De tre vinkler ϕ, θ og ψ er da de sædvanlige Euler vinkler, der beskriver drejningen af K_B i forhold til K_L.



1) Bestem ringens tre principale inertimomenter I_x, I_y og I_z.

2) Udtryk laboratoriekoordinaterne (x'_c, y'_c, z'_c) for ringens centrum ved røringspunktets koordinater x'_0 og y'_0 og Eulervinklerne.

(opgaven fortsætter)

3) Udtryk røringspunktets hastighed i planen ved vinklen ϕ og den tidsafledede af vinklen ψ.

4) Idet ringens kinetiske energi kan skrives som $T = T_t + T_r$, hvor første led vedrører den translatoriske bevægelse af massemidtpunktet og andet led er rotationsenergien af den relative bevægelse, skal man udtrykke T ved massemidtpunktets tre hastighedskoordinater i K_L og vinkelhastighedens tre koordinater i K_B.

5) Udtryk den kinetiske energi ved Eulervinklerne og deres tidsafledede.

6) Udtryk systemets Lagrange-funktion ved de generaliserede koordinater ψ, ϕ og θ og deres tidsafledede.

7) Angiv tre bevægelseskonstanter for systemet.

8) Vis, at den kinetiske energi kan diagonaliseres med koordinatuafhængige inertanser ved brug af hastighedstransformationen

$$\begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Bestem b_{12}, b_{22} og de tre inertanser.

9) Retikulér problemet som en energibåndsmodel med uafhængige lagre.

(opgaven slut)

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik
Mandag d. 15. januar 1996 kl. 10.00 - 14.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.
Opgavesættet består af TRE opgaver på to ark

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten R = 0.08206 $\frac{\ell atm}{molK}$ = 8.3145 $\frac{J}{molK}$, Avogadros tal $N_A = 6.022\ 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$, Boltzmanns konstant $k_B = 1.3807\ 10^{-23}$J/K, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr, 1eV = 1.602 10^{-19}J.

Opgave 1. I en perfekt krystal sidder alle atomer i et perfekt periodisk arrangement med ét atom pr. plads i det periodiske gitter. To muligheder for dannelse af punkt defekter betragtes:

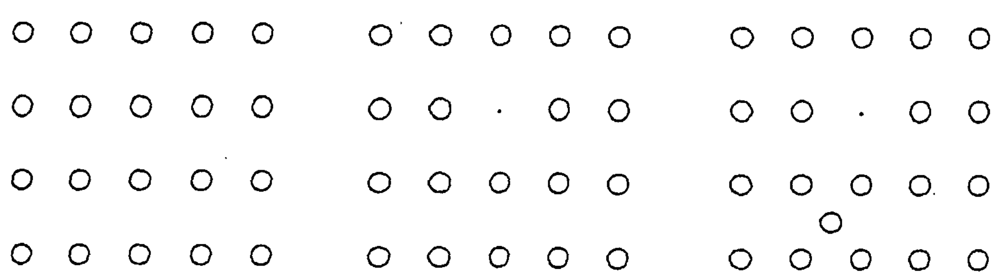
a) **Schottky defekt:** Vakance dannet ved overførsel af et atom fra en gitterplads til krystaloverfladen.

b) **Frenkel defekt:** Dannes ved overførsel af et atom fra en gitterplads til en ikke-gitter plads (interstitiel placering).

1.1) Antag at det koster energien ϵ_s at fjerne et atom fra en bulk gitterplads og dermed lave en Schottky defekt (atomet fjernes helt fra systemet). Antag desuden, at koncentrationen af defekter, n, er så lille, at defekterne kan betragtes som uafhængige. Hvad er entropien S(n) for en krystal med N gitterpladser og n vakancer? Hvad er Helmholtz potentialet, $F_s(n)$, for systemet?

1.2) Find et udtryk for n(T) og beregn den relative mængde af vakancer for et system, hvor $\epsilon_s = 0.5$ eV ved temperaturen 300 K. For små x er ln(1-x) $\approx$ -x.

1.3) Antag det koster energien ϵ_f at lave en Frenkel defekt. Find et udtryk for Helmholtz potentialet, $F_f(n)$, for et system med n Frenkel defekter og N gitterpladser, idet det antages at antallet af mulige interstitielle positioner er lig det samlede antal gitterpladser (både besatte og ubesatte).



Perfekt krystal
et atom pr. gitterplads

Schottky defekt: en vakance, dvs en tom gitterplads

Frenkel defekt: et atom er flyttet fra en gitterplads til en interstitiel plads

Opgave 2. Ved et tryk på en atm. er benzens kogepunkt 353.2 K. Følgende termodynamiske data kendes:
For temperaturer mellem 320 K og 380 K er den molære varmekapacitet ved konstant tryk for flydende benzen givet ved udtrykket: $c_p^{liq}\ [\frac{J}{mol\ K}] = 0.258\ \mathrm{T}\ [\mathrm{K}] + 59.2$
For gasformig benzen kendes den molære varmekapacitet ved temperaturen 370 K: $c_p^{gas}(370K)$ $= 106.5\ \frac{J}{mol\ K}$, denne størrelse kan antages uafhængig af temperaturen for temperaturer mellem 353.2 K og 380 K. Desuden kendes fordampningsentalpien $\Delta_{vap}H = 30.8$ kJ/mol, der kan betragtes som en konstant.
2.1) Beregn forskellen i molær entropi mellem flydende og gasformig benzen ved 370 K.
2.2) Under et eksperiment på toppen af et bjerg er det fundet, at benzen koger ved 335.2 K. Hvad er trykket på toppen af bjerget?

Opgave 3. En paramagnetisk gas betragtes. Det magnetiske arbejde, der udføres på gassen ved en ændring af magnetiseringen M, i det ydre felt B, er givet ved:
$đW_{mag} = B\ dM$.
3.1) Vis at

$$C_{B,V} = C_{M,V} - \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{B,V}\left(B - \left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_{T,V}\right)$$

hvor varmekapaciteten $C_{x,y}$ er givet ved $T(\frac{\partial S}{\partial T})_{x,y}$. T er temperaturen, V volumen og U energien af gassen.
3.2) For den betragtede gas gælder:

$$\mathrm{pV = nRT}$$
$$\mathrm{M = nK}\frac{B}{T}$$
$$\mathrm{U} = \frac{3}{2}\,\mathrm{nRT}$$

p er trykket i gassen, n er antal mol af gassen, K er en positiv konstant og R er gaskonstanten.
Et system bestående af to beholdere med stive, stofugennemtrængelige og adiabatiske vægge har samme volumen, V_0. Beholderne indeholder begge n_0 mol af den paramagnetiske gas. I den ene beholder har gassen temperaturen T og i den anden 2T. De to beholdere befinder sig i et konstant ydre magnetfelt B_0. Beholderne bringes i kontakt med hinanden via en diatermisk (men stiv og stofugennemtrængelig) væg på en sådan måde, at de stadig er isolerede fra omgivelserne. Beregn den totale entropiændring ved den beskrevne proces, ΔS_{tot}. Er entropiændringen større eller mindre end ændringen ved en tilsvarende proces <u>uden</u> ydre magnetfelt?

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

FYSIKUDDANNELSEN

Skriftlig 4-timers prøve i dybdekursus i

KVANTEMEKANIK

mandag den 10. juni 1996, kl. 10.00 - 14.00.

Opgavesættet består af 3 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

OPGAVE 1 [30%]

Vi betragter en partikel uden spin, der bevæger sig i et centralsymmetrisk potential. Partiklen er kl $t = 0$ beskrevet ved bølgefunktionen

$$\psi(x, y, z) = K(x + y + z)e^{-r/a} , \qquad (1)$$

hvor K er en normeringskonstant, a en karakteristisk længde og $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Bestem de mulige udfald af en måling af L_z kl $t = 0$ og deres tilhørende sandsynligheder.

2. Man tænker sig nu, at målingen af L_z først foretages senere end kl $t = 0$. Vil denne situation resultere i de samme mulige udfald og tilhørende sandsynligheder, som hvis målingen foretages kl $t = 0$?

3. Bestem de mulige udfald af en måling af L_x kl $t = 0$ og deres tilhørende sandsynligheder.

OPGAVE 2 [30%]

To identiske partikler med massen m og spin $\frac{1}{2}$ befinder sig i en 3-dimensional kubisk box med sidelængden L (potentialet er altså 0 inden i boxen og ∞ udenfor).

1. Bestem energien og den normerede bølgefunktion for den laveste energiegentilstand med totalt spin 0, idet det antages, at partiklerne ikke vekselvirker med hinanden. Bølgefunktionen ønskes angivet som funktion af både de rumlige koordinater og spinkoordinaterne for de to partikler.

Det tænkes nu, at partiklerne i boxen vekselvirker via potentialet $V = V_0\delta(x_1 - x_2)\delta(y_1 - y_2)\delta(z_1 - z_2)$, hvor x_i er den i'te partikels x-koordinat, osv.

2. Giv en fysisk fortolkning af potentialet, herunder af fortegnet på konstanten V_0.

3. Bestem for tilstanden angivet i spørgsmål 1 ved hjælp af laveste ordens perturbationsregning ændringen af energien, der skyldes vekselvirkningen mellem partiklerne.

OPGAVE 3 [40%]

Vi betragter et kvantemekanisk system med et 2-dimensionalt tilstandsrum, hvori en ortonormal basis er givet ved tilstandene $|\psi_1\rangle$ og $|\psi_2\rangle$. Det oplyses, at disse to tilstande er egentilstande med forskellige egenværdier for en Hermitisk operator, A (hørende til en vis ikke nærmere specificeret fysisk egenskab), dvs at $A\,|\psi_i\rangle = a_i\,|\psi_i\rangle$, hvor $a_1 \neq a_2$. Hamiltonoperatoren, H, er givet ved at $H\,|\psi_1\rangle = \lambda\,|\psi_2\rangle$ og $H\,|\psi_2\rangle = \lambda\,|\psi_1\rangle$, hvor λ er en positiv konstant.

1. Opstil matricen for H. Find egenenergierne og de tilhørende normede energiegentilstande.

2. Det antages, at systemet kl $t = 0$ er i tilstanden $|\psi_1\rangle$. Beregn systemets tilstand til alle senere tider.

3. Beregn sandsynligheden, $P_1(t)$, for at en måling af egenskaben A kl t giver resultatet a_1.

4. Vis at for $t \to 0$ gælder, at $P_1(t)$ ikke indeholder noget førsteordensled i t, altså at man for små tider kan skrive $P_1(t) = 1 - Ct^2$. Bestem konstanten C.

5. Med symbolet $P_n(t)$ betegnes sandsynligheden for, at en måling af egenskaben A kl t giver resultatet a_1, hvis der forudgående er foretaget $n-1$ målinger af egenskaben A til tiderne $t/n, 2t/n, ..., (n-1)t/n$. Vis at $P_n(t) > [P_1(t/n)]^n$. [Vink: Vis først og udnyt dernæst, at højresiden er sandsynligheden for, at alle n målinger af A giver resultatet a_1.]

6. Vis at $P_n(t) \to 1$ for $n \to \infty$. [Vink: Kombiner resultaterne fra spørgsmål 4. og 5. med den matematiske identitet $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n^2)^n = 1$, der gælder for alle x.]

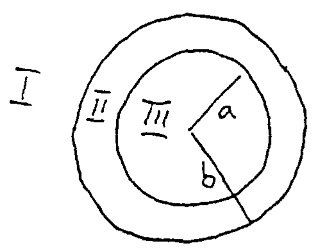
7. Hvad er den fysiske fortolkning af resultatet fra 6.?

4 timers eksamen i Dybdekurset 6. januar 97 . Elektrodynamik

Prøven består af to opgaver.
Opgave 1 vægtes med 2/3 og opgave 2 med 1/3.

Opgave 1

Opgaven omhandler magnetisk afskærmning. Betragt en uendelig lang hul cylinder af et materiale (mumetal) med meget høj relativ magnetisk permeabilitet, $K_m = \mu/\mu_0$. Stoffet anses magnetisk isotropt, lineært og homogent. Cylinderens akse vælges som z-akse. Indre og ydre radius betegnes med a og b. En vilkårlig afstand fra aksen betegnes r. Cylinderen er placeret i et oprindeligt homogent magnetfelt i x-aksens retning, altså vinkelret på cylinderaksen. Dette fjernfelt har størrelsen B_∞ . Med område I betegnes vacuum udenfor cylinderen, med II selve cylinderen og med III vacuum inde i cylinderen.



1) Gør rede for, at det magnetiske skalar potential ϕ^* opfylder Laplace's ligning i de tre områder og angiv samtlige randbetingelser.

2) Idet cylinderkoordinater indføres, skal man vise, at ϕ^* givet ved

$\phi_I = (A\, r + B/r)\cos(\theta)$, $r > b$

$\phi_{II} = (C\, r + D/r)\cos(\theta)$, $a < r < b$

$\phi_{III} = E\, r\cos(\theta)$, $r < a$

kan opfylde de i 1) fundne betingelser ved passende valg af konstanterne A,B,C,D,E.

3) Gør rede for, at feltet B_0 i område III er homogent, og at B_∞/B_0 bliver

$B_\infty/B_0 \doteq 1 + (1 - (a/b)^2)\,(K_m - 1)^2/(4\,K_m)$

(opgave 1 fortsat)

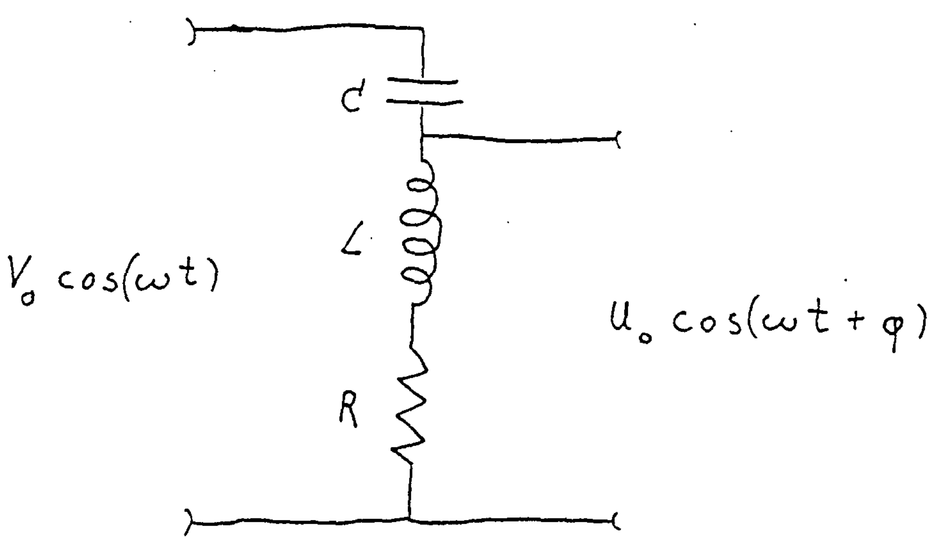
4) Foretag en rækkeudvikling af sidstnævnte udtryk i grænsen $1/K_m \ll (b - a)/a \ll 1$. Bestem, hvor tykvægget en cylinder af mumetal med $K_m = 10^5$ og med radius $a = 0{,}1$m skal være for at reducere B-feltet med en faktor 10^3.

Opgave 2

Betragt det tegnede elektriske diagram. Venstresiden tilkobles en spændingsgenerator, der leverer en vekselspænding $V_0 \cos(\omega t)$, hvor ω er den cykliske frekvens. Spændingen $U_0 \cos(\omega t + \phi)$ på højresiden måles med et voltmeter med meget høj indgangsimpedans.

1) Bestem frekvensen ω_0 ved hvilken U_0 bliver lig V_0

2) Antag $R = (L/C)^{1/2}$. Hvad bliver fasedrejningen ϕ da for $\omega = \omega_0$?



Skriftlig 4-timers prøve i dybdekurset i

KVANTEMEKANIK

tirsdag den 3. juni 1997, kl. 10.00 - 14.00

Opgavesættet består af 3 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

OPGAVE 1 [40%]

En partikel med massen m befinder sig i én dimension under påvirkning af potentialet $V(x) = A + Bx^2$, hvor $B > 0$.

1. Hvilke mulige resultater kan en måling af energien give?

— Det oplyses, at kl $t = 0$ befinder partiklen sig i tilstanden $|\psi\rangle = C\,(|u_0\rangle - |u_1\rangle)$, hvor $|u_n\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ er de normerede egentilstande for Hamiltonoperatoren (som sædvanlig nummereret efter stigende energi).

2. Bestem C så $|\psi\rangle$ er normeret.

3. Bestem middelenergien, middelimpulsen og middelpositionen af partiklen kl $t = 0$.

4. Hvilke af de i 3. nævnte størrelser afhænger af tiden for $t > 0$?

5. Bestem sandsynlighedstætheden for at finde partiklen i punktet $x = 0$ kl $t = 0$. Hvordan afhænger denne sandsynlighedstæthed af tiden for $t > 0$?

OPGAVE 2 [30%]

En spin-$\frac{1}{2}$-partikel befinder sig i et rumligt og tidsligt konstant ydre magnetfelt, der peger i den positive z-akses retning. Hvis magnetfeltstyrken betegnes B_0 og γ er partiklens gyromagnetiske ratio gælder at spindelen af Hamiltonoperatoren er givet ved $H = -\gamma B_0 S_z$, hvor S_z er z-komposanten af partiklens spinoperator S. Det oplyses, at partiklen kl $t = 0$ har spinnet pegende i den negative x-akses retning.

1. Bestem partiklens spinor kl $t = 0$.

2. Bestem partiklens spinor til alle senere tider.

3. Bestem $\langle \mathbf{S} \rangle$ for partiklen til alle tider $t > 0$.

4. Eftervis at der til alle tider $t > 0$ gælder $\frac{d}{dt} \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \mathbf{S}] \rangle$. Dette skal gøres ved eksplicit at udregne højre- og venstre-siden af lighedstegnet til alle tider $t > 0$ for partiklen.

OPGAVE 3 [30%]

Vi betragter et én-elektron atom med kerneladningen Ze. P_{nlm} betegner sandsynligheden for at en måling af elektronens afstand fra kernen resulterer i en værdi større end den af Bohrs teori forudsagte (ligning (1-34) i bogen), givet at elektronen befinder sig i egentilstanden for Hamiltonoperatoren karakteriseret på sædvanlig vis ved kvantetallene n, l og m.

1. Udtryk P_{nlm} ved hjælp af bølgefunktionen for n, l, m-tilstanden.

2. Vis at P_{nlm} er uafhængig af m.

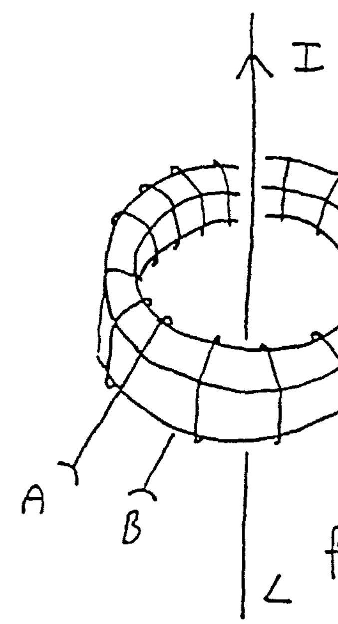
3. Udregn P_{nlm} for tilfældet $n = 1$.

4-timers skriftlig eksamen i Fysik, mandag 9. juni 1997
Dybdekurset i Elektrodynamik side 1

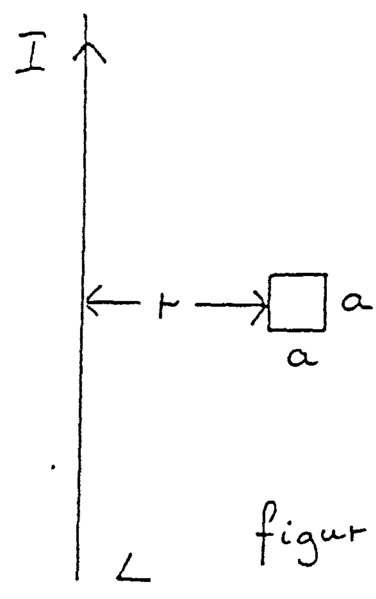
Opgave 1

På figur 1 ses en cirkulær jernring. På figur 2 er den vist i et snit indeholdende symmetriaksen. Jernet antages at have lineære magnetiske egenskaber og den relative permeabilitet er 3000. Jernringens indre radius r er 2,5 cm og dens tværsnit er kvadratisk med en sidelængde a på 0,5 cm. På jernringen er en lak-isoleret kobbertråd viklet op til en spole, hvis ender er ført ud til terminalerne A og B. Kobberbeviklingen består af 500 vindinger af en 0,3 mm diameter tråd. Kobbers specifikke modstand er $17 \cdot 10^{-9}$ Ohm·m. En anden elektrisk leder, L er ført igennem jernringen og ligger på symmetriaksen. Igennem denne løber en vekselstrøm med amplituden I = 1 A og frekvensen 50 Hz.

1) Beregn spændingen mellem de to terminaler A og B, når de ikke er forbundne.
2) Hvor stor er selvinduktionen af spolen?
3) Hvor stor er modstanden af spolen?
4) Beregn strømstyrken J i spolen når terminalerne A og B er forbundne.
5) Hvor stort er energitabet pr. periode i denne situation?
6) Hvad betyder det for svarene i 1) og 4), hvis ledningen L ikke går igennem centrum eller ikke er parallel med symmetriaksen?



figur 1



figur 2

Opgave 2

1) Beregn E-feltets amplitude i vacuum for en stråle af monokromatisk planpolariseret lys med intensiteten 1 W/m^2.

Denne stråle rammer nu et ikke-ledende dielektrikum med et relativt brydningsindex på 2. Indfaldsvinklen er 60° og E-vektoren danner 45° med indfaldsplanen.

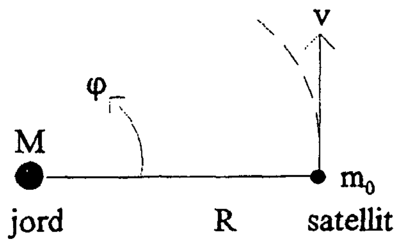
2) Hvilken vinkel danner den reflekterede bølges E-felt med indfaldsplanen.

3) Hvad bliver intensiteten af den reflekterede stråle.

-------------------------- slut ---------------------------------

27. januar 1998. *Skriftlig fysik eksamen, dybdemodul relativitetsteori.* *RUC 02*
kl. 10:00 til 14:00 **(hjælpemidler tilladt)** **Lokale II**

En satellit med hvilemasse m_0 bevæger sig i en stationær, cirkulær bane med radius R omkring jorden, hvis hvilemasse M antages stor i forhold til m_0. Diskuter beskrivelsen af denne bevægelse i den generelle relativitetsteori, og vis at der ikke er grund til at forvente observerbare afvigelser fra den klassiske beskrivelse af bevægelsen. Ville det gøre nogen forskel, hvis banen ikke var cirkelformet?



Besvarelsen udformes så den omfatter svar på følgende delspørgsmål:

1) Vis at den stationære cirkelbane i Newton'sk beskrivelse, givet ved at tyngdekraft og centrifugalkraft skal balancere, kan karakteriseres ved

$$R^3 = MG\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^{-2}$$

hvor vinkelhastigheden $d\varphi/dt$ er konstant (notationen følger ovenstående figur).

2) For det sfærisk symmetriske, statiske tilfælde kan Schwarzschild løsningen til Einstein's feltligninger for den generelle relativitetsteori benyttes. For satellittens cirkelbevægelse i tyngdefeltet, der antages at foregå i planet $\theta = \pi/2$, opskrives nu de geodætiske ligninger

$$\frac{d\beta^\lambda}{d\tau_0} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\beta^\mu\beta^\nu \qquad (\lambda, \mu \text{ og } \nu \text{ kan alle være } 1, 2, 3 \text{ eller } 4; \text{ sumkonvention!})$$

(R. Mould: *Basic Relativity*, udg. 1996, angiver alle fra nul forskellige Christoffel symboler i Eq. (12.36) plus i løsning til opgave 12.6 givet på side 441; τ_0 er egentiden og hastighederne $\beta^\lambda = dx^\lambda/d\tau_0$ er i det valgte koordinatsystem givet ved Mould's Eqs. (12.38) og (12.31)).

Vis, idet $x^1 = r$ ikke endnu antages konstant lig R, at løsningerne til ligningerne for λ=2,3,4 er

$$\beta^2 = \frac{d\theta}{d\tau_0} = 0 \quad \text{(direkte antaget)}$$

$$\beta^3 = \frac{d\varphi}{d\tau_0} = \frac{L_z}{m_0 c r^2}$$

$$\beta^4 = \frac{d\tau}{d\tau_0} = \gamma^* = \frac{E}{\sigma E_0}$$

Her er $E_0 = m_0c^2$, c lyshastigheden i den speciel relativitetsteori, σ er $-g_{44}$ (Mould Eq. (12.28)), og L_z og E er integrationskonstanter givet i Mould, Eq. (12.43).

3) Find udfra den geodætiske ligning for β^1 (ved på højre side at indsætte ovenstående løsninger og benytte antagelsen om konstant radius, $\beta^1 = 0$) at vinkelhastigheden skal opfylde

$$(*) \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \sqrt{\frac{GM}{r^3c^2}} \qquad \left(\text{benyt } \frac{d\varphi}{d\tau_0} = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{d\tau_0}\right)$$

4) Udtrykket (*) er identisk med den Newton'ske grænse fundet i 1) ovenfor. Vis at L_z og E i denne grænse er lig satellittens impulsmoment langs z-aksen, $m_0R^2\, d\varphi/dt$, og dens energi

$$m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0R^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - m_0\frac{GM}{R}$$

5) Diskuter løsningen i det relativistiske tilfælde og sammenlign med diskussionen af periheldrejning, cf. Mould p. 343 nederst og opgaveteksterne 12.11 og 12.12 (disse opgaver skal ikke løses her).

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik
Torsdag d. 29. januar 1998 kl. 10.00 - 14.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.
Opgavesættet består af TRE opgaver på TO ark papir

Nogle nyttige konstanter: Gaskonstanten R $= 0.08206 \frac{\ell atm}{molK} = 8.3145 \frac{J}{molK}$, Avogadros tal $N_A = 6.022\ 10^{23}\ mol^{-1}$, Boltzmanns konstant $k_B = 1.3807\ 10^{-23} J/K$, 1 atm = 101325 N/m^2 = 760 torr, 1eV $= 1.602\ 10^{-19}$J.

Matematisk nødhjælpskasse:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Opgave 1. En biofysiker er involveret i undersøgelsen af en bestemt biokemisk reaktion relateret til DNA. Biofysikeren opstiller en simpel statistisk mekanisk model, hvori DNA's dobbelt helix modelleres som en 'lynlås'. Hvert enkelt sammenkoblingsled (link) i lynlåsen svarer til et basepar i DNA. I modellen har lynlåsen N sammenkoblingsled. Hvis et led er åbent har det energien ϵ, hvis det er lukket har det energien 0. Lynlåsen kan KUN åbnes fra den ene af de to ender og det s'te led kan KUN åbnes hvis alle forgående led allerede er åbnet.

1.1) Beregn Helmholtz potentialet for systemet som funktion af temperaturen.
1.2) Hvordan afhænger middelantallet af åbne led af temperaturen i lavtemperatur grænsen?

Opgave 2. Ved høje temperaturer har jern to faste faser med forskellig krystalstruktur, α-jern og γ-jern. For et bestemt tryk, p_o, er α-jern stabilt for temperaturer under 900°C og over 1400°C, mens γ-jern er den stabile fase for temperaturer mellem 900°C og 1400°C.
I det givne temperaturområde kan den specifikke varmekapacitet ved konstant tryk, c_p betragtes som uafhængig af temperaturen for begge de to faser.
$c_{p,\alpha} = 43.28 \frac{J}{molK}$ og $c_{p,\gamma} = 38.54 \frac{J}{molK}$ ved trykket p_o.

2.1) Skitsér to kurver, der viser det KVALITATIVE forløb af den molære entropi, $S_m(T)$ og det kemiske potentiale, $\mu(T)$ for jern i det ovennævnte temperaturområde ved trykket p_o.
2.2) Beregn enthalpiændringen ved faseovergangen α-jern $\rightarrow$ γ-jern, $\Delta_{trs}H(900°C, p_o)$.

Opgave 3.

3.1) Vis at trykafhængigheden af c_p, den molære varmekapacitet for et simpelt system ved konstant tryk, kan udtrykkes ved hjælp af ekspansionskoefficienten, α:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -Tv_m\left(\alpha^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_p\right)$$

T er temperatur, p tryk og v_m det molære volumen.

3.2) For et bestemt simpelt system gælder tilstandsligningen:

$$pv_m + A\frac{p}{T^2} = RT$$

hvor A er en konstant og R er gaskonstanten.

I et tabelværk findes værdien af c_p for systemet ved trykket p_1 og temperaturen T_1. Systemet gennemløber en isochor proces ved et begyndelsestryk p_2, væsentligt forskelligt fra p_1. Under processen ændres temperaturen fra T_1 til T_2 og trykket fra p_2 til p_3. Varmekapaciteten kan antages at være konstant under processen $(T_1, p_2) \rightarrow (T_2, p_3)$.

Hvor stor er ændringen i systemets molære indre energi ved processen $(T_1, p_2) \rightarrow (T_2, p_3)$?

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Kvantemekanik
Torsdag d. 18. juni 1998 kl. 10:00 - 14:00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.
Opgavesættet består af TRE opgaver på TO ark papir

Opgavesættet består af 8 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen

Opgave 1. En spin 1/2 partikel er begrænset til at bevæge sig langs x-aksen i et tre-dimensionalt rum under påvirkning af et harmonisk oscillator potentiale.
Til tiden t=0 er partiklen beskrevet ved bølgefunktionen:

$$\psi(x,t=0) = 6u_0(x)\chi_+ + (2+i)u_1(x)\chi_- - 2u_1(x)\chi_+$$

$u_n(x)$ er den n'te normaliserede stationære egentilstand for den én-dimensionale harmoniske oscillator og $\chi_{+/-}$ er de normaliserede egenspinorer for z-komposanten af det spin-angulære moment, S_z.

1.1)

- Normalisér bølgefunktionen.
- Energien af et stort antal systemer i tilstanden ψ måles - hvad er middelværdien af de målte energier?
- I et eksperiment måles energien E og S_z samtidigt. Hvad er sandsynligheden for, at målingen giver resultatet $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ og $S_z = -\frac{\hbar}{2}$?

1.2) I et eksperiment måles y-komposanten af det spin-angulære moment, S_y, til tiden t=0. Angiv de mulige resultater af målingen med tilhørende sandsynligheder.

Opgave 2.) Systemet beskrevet i opgave 1 udsættes for en lille perturbation, der er lineær i x: $\hat{H}' = -\lambda x$

2.1) Vis at der til første orden ikke sker nogen ændring i de relevante energiniveauer.

2.2) Find 2.ordens korrektionen, E_n^2, til energien af de uperturberede stationære tilstande $u_n(x)$.
(*Hint:* Udnyt stepoperatorerne ("ladder operators") a_+ og a_-)

2.3) Find den eksakte energi for de perturberede tilstande og kommentér udfra denne størrelsen af højere ordens korrektioner til energien.
(*Hint:* Skift variabel til $X \equiv x - (\lambda/m\omega^2)$)

Opgave 3.) Et system kan eksistere i to tilstande, $|a_0\rangle$ og $|a_1\rangle$, som er normaliserede egentilstande for den observable A, svarende til egenværdierne 0 og 1. Systemet er under påvirkning af et tidsuafhængigt potentiale og Hamilton operatoren $\hat{H}$ er defineret ved:

$$\hat{H}\,|a_0\rangle = \alpha\,|a_0\rangle + \beta\,|a_1\rangle$$
$$\hat{H}\,|a_1\rangle = \beta\,|a_0\rangle + \alpha\,|a_1\rangle$$

α og β er reelle.

3.1) Kommuterer $\hat{H}$ og $\hat{A}$?

3.2) Systemet er i tilstanden $|a_0\rangle$ til tiden t=0. Find et udtryk for systemets tilstand til tiden t.

3.3) Værdien af den observable A måles til tiden t=T, men resultatet mistes. Værdien af A måles igen til tiden t=2T. Hvad er sandsynligheden for at resultatet af den anden måling er 0?

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Termodynamik og Statistisk Mekanik
Mandag d. 22. juni 1998 kl. 10.00 - 14.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.
Opgavesættet består af TRE opgaver på TRE ark papir

Opgavesættet består af 6 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen

Opgave 1. En én-dimensional kæde er sat sammen af N led, hvor N er meget stor. Det enkelte led har en længde på a og en bredde, der kan regnes for negligibel. Hvert led i kæden kan vende på to måder: Enten er leddet placeret, så det bidrager med sin fulde længde a til den samlede kædes længde (parallel position) eller også står leddet vinkelret på denne position, så leddets bidrag til den samlede kædelængde kan negligeres (tænk f.eks. på en idealiseret kæde af N sammenkoblede papirclips - se figur). Den samlede kædelængde er Nx, hvor x er defineret gennem denne tilordning.

1.1) Find et udtryk for kædens entropi S som funktion af x. Hvor lang er kæden?

Den ene kædeende fastgøres til en væg og der trækkes i den anden ende med en kraft F. Energiforskellen mellem et enkelt leds to mulige positioner er Fa, hvor parallel position svarer til størst energi.

1.2) Find et udtryk for kædelængden som funktion af kraften F og temperaturen T. Iflg. Hooke's lov er der proportionalitet mellem den kraft, hvormed der trækkes i en fjeder og deformationen af fjederen. Vis at det ovenfor beskrevne system adlyder Hooke's lov for høje temperaurer.

Opgave 2. Lipider er en bestemt type biologisk relevante molekyler, der kan danne faser med forskellig struktur ved blanding med vand. Et system bestående af n_l mol lipid og n_v mol vand betragtes.

2.1)

- Hvad er det maksimale antal faser, der kan være i ligevægt i systemet?

- Hvor mange variable skal specificeres i et fasediagram for systemet?

- To forskellige faser observeres i det ovenfor beskrevne system ved et bestemt tryk. Er systemets temperatur velbestemt?

2.2) Systemet afgrænses fra omverdenen af en semipermeabel membran, der er gennemtrængelig for vand, men ikke lipid. Systemet anbringes i et vandbad med konstant temperatur og tryk.

- Identificér de ekstensive variable, der indgår i fundamentalligningen for systemet i energirepræsentationen.

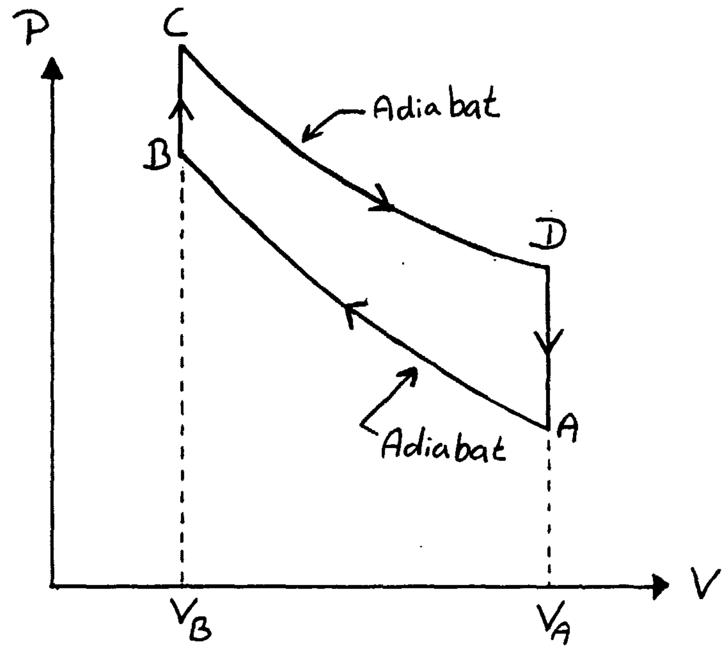
- Angiv det termodynamiske potentiale, der er relevant for den beskrevne eksperimentelle situation. Udtryk potentialet ved hjælp af variable, der karakteriserer lipidkomponenten af systemet.

Opgave 3. En maskine er baseret på kredsprocessen skitseret i nedenstående tryk-volumen diagram. Alle deltrin kan betragtes som foregående i en monoatomar ideal gas.

3.1) Beregn maskinens maksimale effektivitet som funktion af volumenforholdet V_A/V_B.

3.2) Maskinen bruges til at drive et køleskab. Køleskabet er placeret i et rum med temperaturen T_R = 23°C og et tryk på 1 atm. Beregn det minimale arbejde maskinen skal levere for at fryse 400 g vand med en begyndelsestemperatur på 25°C.

Fysisk-kemiske data for vand: Molmasse 18.0153 g/mol, frysepunkt 273.15 K ved 1 atm, $c_{p,m}$=75.291 $\frac{J}{molK}$, $\Delta_{fus}S$=22.00$\frac{J}{molK}$



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER FYSIKUDDANNELSEN

Dybdeeksamen i elektrodynamik 25. januar 1999 kl. 9.00-13.00

Alle sædvanlige hjælpemidler tilladt, herunder lommeregnere uden forbindelse med omverdenen.
Opgavesættet består af 2 opgaver på 2 sider.
Opgave 1 vægtes med 1/3 og opgave 2 med 2/3.

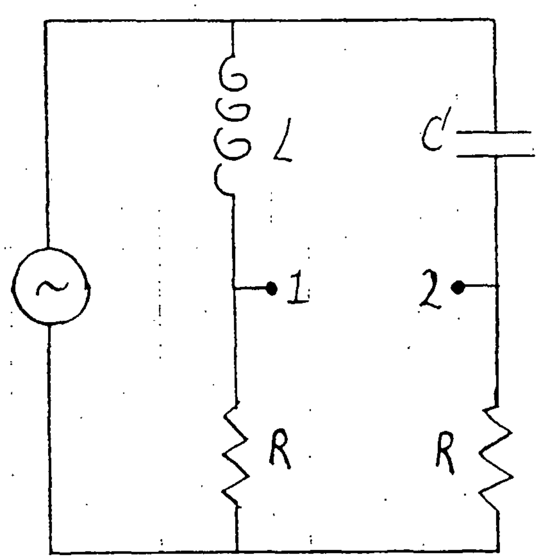
Opgave 1.

Betragt nedenstående elektriske diagram. Heri er $L = 10\text{mH}$, $C = 2\mu\text{F}$ og $R = 50\Omega$. Potentialet i bunden af diagrammet er 0. Spændingskilden leverer en vekselspænding med amplituden 10 V og den cykliske frekvens ω.

1) Ved hvilken frekvens er spændingsamplituderne i punkterne 1 og 2 lige store?

2) Hvad er amplituden af spændingsforskellen mellem 1 og 2 ved denne frekvens?

3) Hvad bliver fasedrejningen af spændingerne i punkterne 1 hhv 2 set i forhold til spændingen fra spændingskilden ved denne frekvens?



Opgave 2.

Et aksial-symmetrisk **B**-felt er i et område V af rummet i cylinderkoordinater givet ved $\mathbf{B}(r,\theta,z) = k\cdot(-r/2\ \mathbf{e}_r + z\ \mathbf{e}_z)$, hvor k er en konstant. $\mathbf{e}_r$ og $\mathbf{e}_z$ er enhedsvektorer i hhv radiel og axial retning.

1) Ifølge een af Maxwell-ligningerne findes der ingen magnetiske monopoler. Vis, at ovenstående udtryk for **B**-feltet opfylder denne ligning.

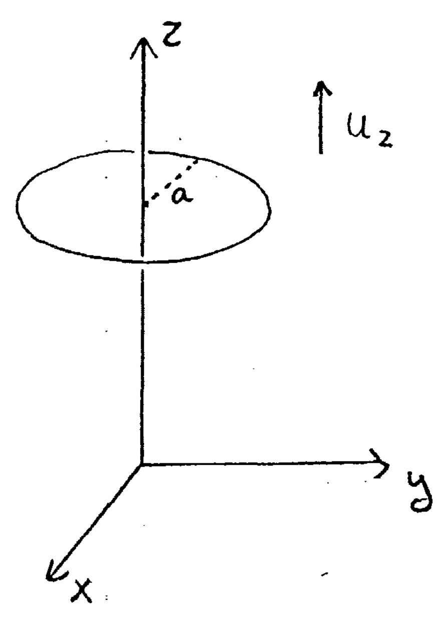
2) **B**-feltet tænkes skabt ved hjælp af nogle stationære strømme. Findes disse kilder inden i området V eller må de være placeret uden for V (evt. på randen af V)?

3) Vi tænker os nu en cirkulær leder med radius a placeret i ovennævnte magnetfelt. Lederen ligger i en plan vinkelret på z-aksen (se tegningen). Lederen bevæges med konstant hastighed u_z translatorisk i z-aksens retning. Beregn strømmen i lederen, når dens modstand er R, og der iøvrigt kan ses bort fra dens selvinduktion. Angiv strømmens retning.

4) Beregn den Joule'ske varme, der produceres pr.tidsenhed.

5) Find den kraft, hvormed man skal trække i lederen for at opretholde hastigheden u_z samt det arbejde, man udfører pr. tidsenhed.

6) Hvad bliver der af den ved arbejdet tilførte energi?



ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Kvantemekanik
Mandag d. 28. juni 1999 kl. 10.00 - 14.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.
Opgavesættet består af TRE opgaver på TO ark papir

Opgavesættet består af 9 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen

Opgave 1. For en generel løsning Y_l^m til den vinkelafhængige del af Schrödinger ligningen gælder følgende:

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

samt

$$\hat{L}_{\pm}Y_l^m = A_l^m Y_l^{m\pm 1}$$

$$A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}$$

$\hat{L}$ angiver operatoren for angulært moment (baneimpulsmoment).
Givet funktionen $\mathrm{Y}_1^0(\theta,\phi)$:

$$Y_1^0(\theta,\phi) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta$$

1.1) Elektronen i et brintatom er i en tilstand, hvor rumdelen af bølgefunktionen er $\mathrm{R}_{21}(\mathrm{r})$.
Find ved anvendelse af ovenstående oplysninger eksplicitte udtryk for de relevante funktioner Y_l^m for elektronen.

1.2) Der er udført eksperimenter på mange brintatomer i tilstanden beskrevet ovenfor. Resultatet af disse målinger er at middelværdien af z-komposanten af det angulære moment, $\langle L_z\rangle = \frac{2}{3}\hbar$ samt at sandsynligheden for at måle værdien 0 af z-komposanten af det angulære moment er $\frac{1}{4}$. Angiv elektronens bølgefunktion $\psi(r,\theta,\phi)$ (fraregnet spin).

1.3)

- Hvad er middelværdien af kvadratet på det angulære moment, $\langle L^2\rangle$?

- Hvad er middelværdien af x-komposanten af det angulære moment, $\langle L_x\rangle$?

- Hvad er elektronens energi hvis der tages hensyn til finstruktur?

Opgave 2.) Hamiltonoperatoren Ĥ for en spin 1/2 partikel er givet ved $\hat{H} = \beta \hat{S}_y$ hvor β er en (positiv) konstant og $\hat{S}_y$ er y-komposanten af spinoperatoren $\hat{\mathbf{S}}$. Til tiden t=0 peger partiklens spin i den negative y-akses retning.

2.1) Bestem partiklens spinor til alle tider t > 0. Afhænger $\langle S_y \rangle$ af tiden?

2.2) En tilsvarende partikel har til tiden t=0 spinnet pegende i den positive z-akses retning. Bestem $\langle \mathbf{S} \rangle$ til alle tider t > 0.

2.3) Systemet hvor spinnet til tiden t=0 peger i den negative y-akses retning betragtes. Systemet udsættes for en perturbation givet ved $\hat{H}' = \gamma \cos(\omega t) \hat{S}_x$, hvor γ er 'lille' og $\hat{S}_x$ er x-komposanten af spinoperatoren $\hat{\mathbf{S}}$. Beregn sandsynligheden for at spinnet 'flipper', dvs til tiden t peger i den positive y-akses retning.

Opgave 3.)
3.1) Vis at egentilstandene for impulsoperatoren $\hat{p}$ er givet ved

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

En partikel er beskrevet ved bølgefunktionen $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$ for $|x| \leq L$ og $\psi(x) = 0$ for $|x| > L$.

3.2) Normér bølgefunktionen $\psi(x)$ og find sandsynligheden $P(p)$ for at en måling af partiklens impuls giver værdien p.

3.3) Diskutér det fundne resultat i relation til usikkerhedsrelationen.

Skriftlig 4-timers prøve i

TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK

Torsdag den 27. januar 2000, kl. 10.00-14.00.

Opgavesættet består af 2 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

1 Opgave 1 (60%)

Et termodynamisk system er kendetegnet ved at den indre energi kan skrives $U(T, V) = \phi(T)V$, hvor T er temperatur, V volumen og $\phi(T)$ en funktion af temperaturen.

1. Redegør for at $\phi(T)$ har samme dimension som trykket P.
2. Det oplyses at P kun afhænger af temperaturen og at $P = \phi/n$, hvor $n > 1$ er en konstant. Udled følgende udtryk for entropi-differentialet (hvor $P'(T) = dP/dT$)

$$dS = n\,\frac{VP'(T)}{T}\,dT + (n+1)\,\frac{P(T)}{T}\,dV\,.$$

3. Vis at $S = \alpha V T^n$, hvor α er en positiv konstant.
4. Bestem Helmholtz fri energi A og Gibbs fri energi G.
5. Systemet tænkes nu termisk isoleret fra omgivelserne. Herefter ekspanderes systemet reversibelt. For hver størrelse T, P, S, U, A og G ønskes angivet om størrelsen stiger, falder eller er uforandret under ekspansionen.

2 Opgave 2 (40%)

Et system har $N + 1$ tilstande. De N tilstande har alle energien $E \neq 0$, mens den sidste har energien 0.

1. Find Helmholtz fri energi A for systemet.
2. Vis at entropien for systemet er givet ved

$$S = k_B\left[\ln(1+X) - \frac{X}{1+X}\ln\left(\frac{X}{N}\right)\right],$$

   hvor $X = N\exp(-E/k_B T)$.

3. Find entropien i grænsen $T \to 0$ og i grænsen $T \to \infty$ og giv en fysisk fortolkning af resultaterne.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER

Dybdemoduleksamen i Kvantemekanik

Torsdag 22. juni 2000 kl. 10.00 - 14.00

HJÆLPEMIDLER TILLADT.

Opgavesættet består af TRE opgaver på TO ark papir

Opgavesættet består af 9 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen

Matematisk nødhjælpskasse: Beregning af determinant for en $n \times n$ matrix: Vælg en række (eller en søjle) og gang hvert element T_{ij} i den valgte række med elementets cofaktor og addér resultaterne. Cofaktor til elementet T_{ij} er $(-1)^{i+j}$ gange determinanten for den undermatrix, der fås ved at slette i'te række og j'te søjle.

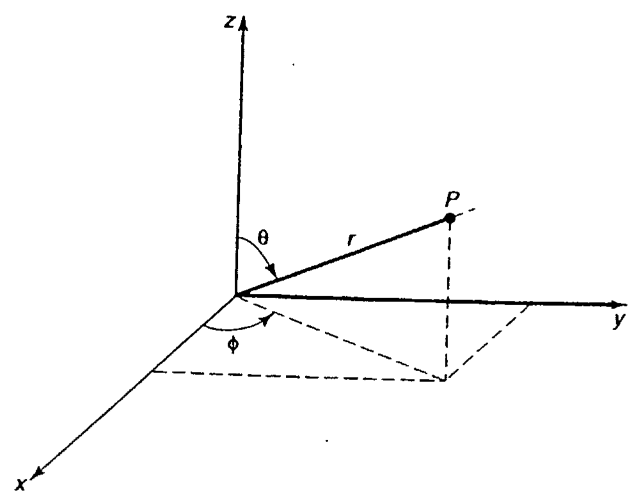
Opgave 1. En spin 1/2 partikel befinder sig i et magnetfelt givet ved $\vec{B} = (B, 0, 0)$. Til tiden t=0 er z-komposanten af spinnet $+\frac{\hbar}{2}$.

1.1) Til hvilket tidspunkt τ vil en måling af y-komposanten af spinnet med sikkerhed give $+\frac{\hbar}{2}$?

Partiklen placeres nu i et magnetfelt med samme størrelse som i 1.1), men retning givet ved en enhedsvektor med polarvinkel θ og azimuthalvinkel ϕ (se figur).

1.2) Angiv matricen for operatoren $\hat{S}_{\theta,\phi}$, der angiver spinkomposanten langs den nye feltretning.

1.3) Find den egenfunktion, der repræsenterer den orientering af spinkomposanten langs den nye feltretning, der svarer til lavest energi.



Polarvinkel θ, azimuthalvinkel ϕ, afstand r

Opgave 2. En fri partikel i én dimension betragtes. Partiklen har massen m og er til tiden t=0 beskrevet ved bølgepakken $\psi(x) = A\exp(\frac{-\alpha x^2}{2})$, hvor α er en positiv konstant.

2.1) Hvad er sandsynligheden for at finde partiklen i intervallet mellem x og $x + dx$, udtrykt ved parameteren α?
2.2) Hvad er sandsynligheden for at impulsen p har en værdi i intervallet mellem p og $p + dp$?
2.3) Beregn middelværdien af partiklens energi. Argumentér for det fundne resultat udfra bølgepakkens bredde.

Opgave 3. Elektronen i et brintatom er i en tilstand givet ved:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{100}(\vec{r}) + \sqrt{5}\psi_{210}(\vec{r}) + 2i\psi_{211}(\vec{r})$$

I opgaven ses bort fra finstruktur.

3.1)

- Normér ψ.
- Find middelværdien af z-komposanten af det angulære moment, $\langle L_z \rangle$.
- Find middelværdien af elektronens energi.
- Hvad er sandsynligheden for at en måling af kvadratet på det angulære moment giver $6\hbar^2$?

Brintatomet placeres i et felt, således at den potentielle energi givet ved $V(r,\theta) = \gamma r\cos(\theta)$ adderes til Coulomb vekselvirkningen mellem elektron og kerne. z-aksen er polarakse (def. af r og θ, se figuren til opg. 1) og γ er 'lille'.

3.2) Find energien af brintatomets grundtilstand til første orden.
3.3) Hvor mange energiniveauer splitter den første exciterede tilstand op i? Hvad er energien af disse niveauer til første orden?

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER FYSIKUDDANNELSEN

Dybdeeksamen i elektrodynamik 22.januar 2001 kl. 10.00-14.00

Alle sædvanlige hjælpemidler samt lommeregnere uden forbindelse med omverdenen på niveau med eller under TI89 er tilladt.Der er een opgave med 10 spørgsmål.

Vi betragter en cylinderformet Ohm'sk leder med radius A og længde L. Symmetriaksen er z-aksen. Inde i lederen er der et lille kugleformet hulrum med radius R og centrum i (x,y,z)=(0,0,0) (se fig.1). Der gælder R << A og R << L. I såvel hulrummet (område I) som i lederen (område II) er den dielektriske permitivitet og den magnetiske permeabilitet givet ved deres vacuumværdier,hhv ϵ_0 og μ_0. Herudover er den Ohm'ske leder karakteriseret ved proportionalitet mellem det elektriske felt $\boldsymbol{E}$ og strømtætheden $\boldsymbol{J}$: $\boldsymbol{J} = g\boldsymbol{E}$, hvor g er den specifikke ledningsevne. Der løber en stationær strøm i lederen og fjernt fra hulrummet kan E-feltet antages for homogent og rettet i z-aksens retning, $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$. Alt efter hensigtsmæssighed vil vi benytte sfæriske koordinater (r,θ,ϕ) eller cylinderkoordinater (s,ϕ,z). Azimuthalvinklen ϕ er identisk for de to systemer, mens r betegner afstanden fra origo og s afstanden fra z-aksen. Polarvinklen θ gives af $z=r\cos(\theta)$.(se fig.2).

1) Gør rede for, at $div(\boldsymbol{J})=0$ i område II.

2) Gør rede for, at potentialerne V^I og V^{II} i det indre af begge områderne I og II opfylder Laplacelignigen.

3) Opstil randbetingelserne for potentialet ved hulrummets overflade K, samt for $r\to 0$ og $r\to\infty$ (dog inden for lederen).

4) Vis, at

$$V^I(r,\theta) = -\frac{3}{2}E_0 r\cos(\theta)$$

$$V^{II}(r,\theta) = -E_0 r\cos(\theta) - \frac{1}{2}E_0\frac{R^3}{r^2}\cos(\theta)$$

tilfredsstiller 2) og 3).

5) Beregn E-feltet i område I og II. Giv udtrykkene i både sfæriske og cylinderkoordinater.

6) Beregn overfladeladningstætheden σ på hulrummets overflade.

7) Udtryk strømtætheden i lederen i cylinderkoordinater.

8) Betragt nu en cirkelflade C vinkelret på z-aksen.Den har centrum i koordinaten z på z-aksen og radius s, (s<A). C kan ligge helt indenfor K (fig.3), skære K (fig.4) eller ligge udenfor K (fig.5). Sæt

$$s_0(z) = \begin{cases} (R^2-z^2)^{1/2} & ,|z|<R \\ 0 & ,|z|>R \end{cases}$$

$s_0(z)$ er radius i den cirkel, der fremkommer, hvis C skærer K. Vis, at den samlede strøm igennem C er

$$I(z,s) = \begin{cases} 0 & ,s<s_0(z) \\ gE_0\pi s^2\{1-(\frac{R^2}{z^2+s^2})^{3/2}\} & ,s>s_0(z) \end{cases}$$

9) Bestem B-feltets komposant B_ϕ i område I og II.

10) Vis, at B_z og B_s begge er 0 i område I og II. (Vink: Vis enten, at Maxwellligningerne for $\boldsymbol{B}$ derved opfyldes eller brug symmetriargumenter på vektorpotentialet $\boldsymbol{A}$)

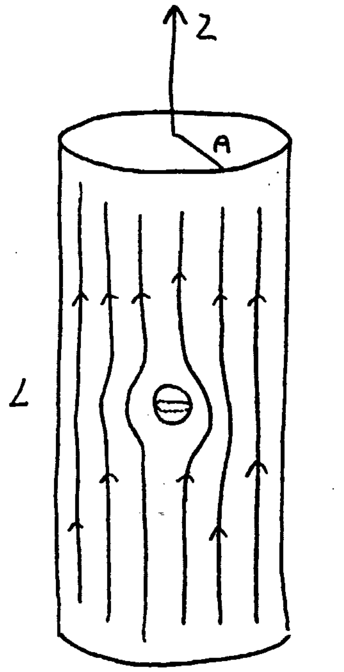


fig. 1
strømliniebilledet
er antydet

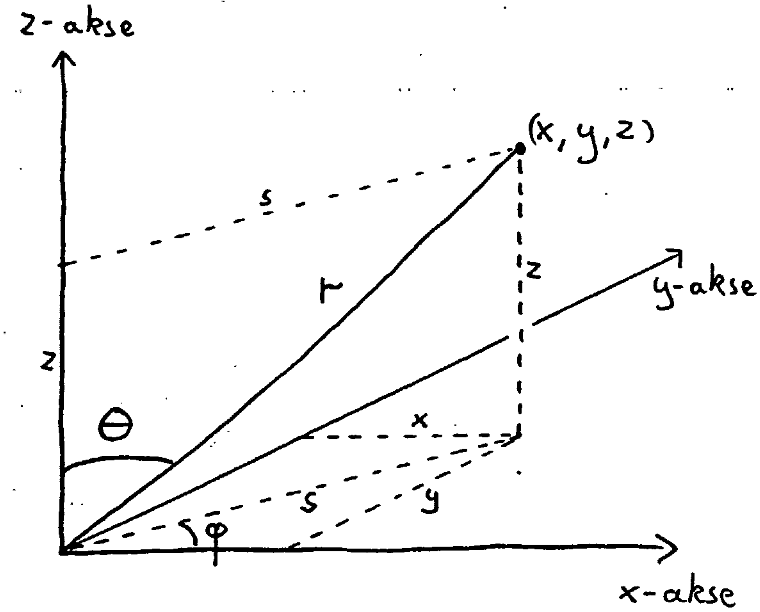


fig. 2
Sammenhænge mellem Cartesiske (x,y,z),
sfæriske (r, Θ, φ) og cylindriske
(s, φ, z) koordinater

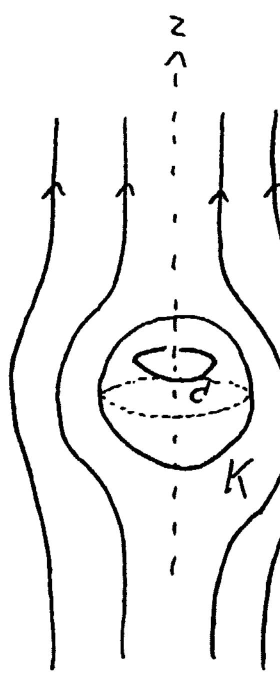


fig. 3
C' inden for K

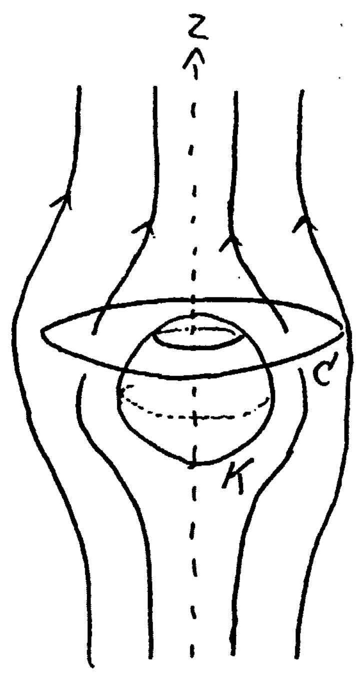


fig. 4
C' skærer K

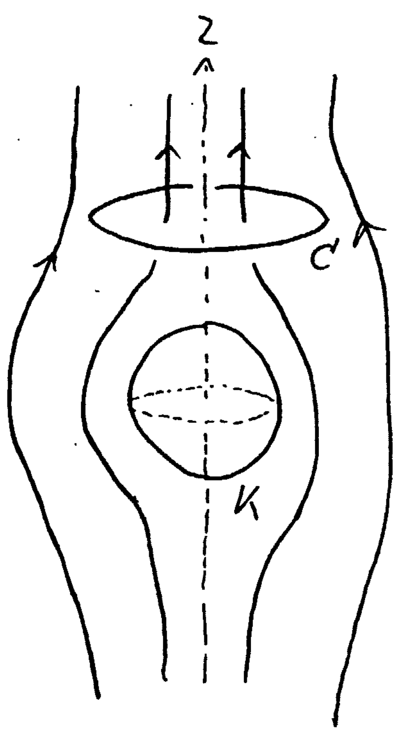


fig. 5
C' uden for K

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i Kvantemekanik
Tirsdag 19. juni 2001 kl. 10.00 - 14.00
HJÆLPEMIDLER TILLADT.
Opgavesættet består af TRE opgaver på TO ark papir
Opgavesættet består af 9 delspørgsmål, der vægtes ligeligt i vurderingen

Opgave 1. En spin 1/2 partikel befinder sig i et magnetfelt $\vec{B}$ rettet langs z-aksen. Til tider $t \leq 0$ er z-komposanten af spinnet positiv. Til tiden $t = 0$ sker en momentan 90^0 rotation af magnetfeltet, så det derefter peger i den negative x-akses retning.

1.1) Find partiklens spinor for tider $t > 0$.

1.2) På systemet beskrevet i 1.1 måles den observable svarende til $(\hat{S}_x + \hat{S}_y)$. Hvad er den største værdi målingen kan resultere i og hvad er sandsynligheden for at måle denne værdi?

1.3) I spørgsmål 1.1 blev det forudsat at rotation af magnetfeltet sker momentant. Antag istedet at rotationen af magnetfeltet tager tiden T.
Argumentér for hvad $\langle S_x \rangle$ er, når rotationen er tilendebragt, hvis T er meget stor. Estimér en grænse for T, der skiller 'langsom rotation' fra 'hurtig rotation'.

Opgave 2. Ionisering af et atom kan ske via såkaldt 'intern konversion', hvorved der sker en overførsel af energi fra en exciteret kerne til en af de atomare elektroner. Dette fører til ionisering, hvis den overførte excitationsenergi er større end den relevante ioniseringsenergi. Det antages, at sandsynligheden for udsendelse af en elektron via intern konversion er proportional med sandsynligheden for at elektronen befinder sig på kernens position.

2.1) Et helium atom er ioniseret ved intern konversion og det vides, at den frigjorte elektron er kommet fra en n=2 tilstand.
Angiv de øvrige kvantetal for den tilstand, den frigjorte elektron kommer fra.
Den frigjorte elektron kunne også have været en n=1 elektron. Hvad er forholdet mellem sandsynligheden for intern konversion via en n=1 elektron og via den relevante n=2 elektron?

OPGAVEN FORTSÆTTES NÆSTE SIDE

2.2) Helium ionen betragtes. Elektronens bølgefunktion er givet ved:

$\psi(\vec{r}) = A(3\psi_{100}(\vec{r}) + i\psi_{211}(\vec{r}) - 2\psi_{210}(\vec{r}) + 4\psi_{300}(\vec{r}))$
Der ses bort fra spindelen af bølgefunktionen.

- Normér bølgefunktionen
- Energien af et stort antal systemer i tilstanden ψ måles - hvad er middelværdien af de målte energier (der ses bort fra finstruktur)?
- Hvad er middelværdien af kvadratet på det angulære moment, $\langle L^2 \rangle$?
- Hvad er sandsynligheden for at en måling af L_z giver 0?

2.3) Ved måling er det fundet, at elektronen befinder sig i tilstanden ψ_{300}. Angiv hvordan levetiden af denne tilstand kan beregnes. De størrelser, der skal beregnes for at finde levetiden, skal angives ved hjælp af bølgefunktionens parametre, men det er ikke nødvendigt at foretage selve beregningerne. Antallet af sådanne ikke-gennemførte beregninger skal være mindst muligt.

Opgave 3. En én-dimensional krystal af N spin 1/2 partikler betragtes. Krystallen er orienteret langs x-aksen i et koordinatsystem og afstanden mellem hver partikel er a.
Vekselvirkningen mellem partiklerne er givet ved Hamiltonoperatoren:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}J\left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \sum_{i=1}^{N} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$$

J er en positiv koblingskonstant, $\vec{S}_i$ angiver spinoperatoren for den i'te partikel. Cykliske randbetingelser kan anvendes, dvs randeffekter kan negligeres.

3.1) Systemet befinder sig i et magnetfelt rettet langs den positive z-akse: $\vec{B} = (0, 0, B)$. Spindelen af den samlede bølgefunktion er et produkt af en-partikel bølgefunktioner. Bølgefunktionen i grundtilstanden er givet ved $X_0 = \chi_+^1\chi_+^2\chi_+^3....\chi_+^N$. Argumentér for værdien af z-komposanten af de enkelte partiklers spin i grundtilstanden og find energien E_0 af grundtilstanden.

3.2) X_j angiver spinbølgefunktionen svarende til at spinnet på plads j er antiparallel til orienteringen i grundtilstanden (spinnet er 'flippet'). Orienteringen af de øvrige spin er uændret, dvs $X_j = \chi_+^1\chi_+^2\chi_+^3...\chi_-^j...\chi_+^N$.
Vis at:
i) $(\frac{2}{\hbar})^2\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}X_j = X_j \quad (j \neq i \text{ og } j \neq i+1)$
ii) $(\frac{2}{\hbar})^2\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}X_i = 2X_{i+1} - X_i \quad (j = i)$
iii) $(\frac{2}{\hbar})^2\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}X_{i+1} = 2X_i - X_{i+1} \quad (j = i+1)$

3.3) Spinbølgefunktionen $X = \sum_j c_j X_j$ betragtes.
$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\exp(iqja)$, hvor $-\frac{\pi}{a} < q < \frac{\pi}{a}$.
Antag at X er en egenfunktion for systemets Hamiltonoperator svarende til energien E og find excitationsenergien $E - E_0$.

Skriftlig 4-timers prøve i

TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK

Fredag den 25. januar 2002, kl. 10.00 – 14.00.

Opgavesættet består af 2 opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 [50%]

Vi betragter en hypotetisk gas beskrevet ved tilstandsligningen

$$\left(P + a\frac{N}{V}\right)(V - Nb) = Nk_BT,$$

hvor P er trykket, V volumenet, T temperaturen, k_B Boltzmanns konstant, N antal molekyler, mens a og b er konstanter. Gassen opfylder $C_V = 3Nk_B$.

1. Vis at energidifferentialet er givet ved

$$dE = a\frac{N}{V}dV + 3Nk_BdT.$$

Vink: Vis først og udnyt dernæst at $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$.

2. Gassen starter ved volumenet V_0 og temperaturen T_0 (det antages at V_0 og T_0 er så store, at tilstandsligningen har mening, dvs både $V_0 - Nb$ og tryk er positive). Ved en reversibel isoterm proces fordobles volumenet. Beregn den tilførte varmemængde under processen.

3. Systemet holdes fra nu af termisk isoleret fra omgivelserne. Med start i ligevægt ved volumenet $2V_0$ og temperaturen T_0 tilføres energi via en kraftig laserpuls. Dernæst øges volumenet til $3V_0$. Når gassen herefter er kommet i ligevægt er temperaturen igen T_0. Beregn entropiændringen fra start til slut af denne proces. Er processen reversibel?

4. Hvordan ser tilstandsligningen ud ved lave molekyltætheder? Argumenter for at tilstandsligningen ikke kan beskrive en faktisk eksisterende gas.

Opgave 2 [50%]

Opgaven vedrører elektronsystemets bidrag til de termodynamiske variable af en gas af tellurium-atomer. Et tellurium-atoms elektronsystem kan befinde sig ved 4 energier, nummereret fra 0 til 3:

$$\epsilon_0 = 0;\ \epsilon_1 = 0,584\text{eV};\ \epsilon_2 = 0,589\text{eV};\ \epsilon_3 = 1,309\text{eV}.$$

Der er i alt 14 tilstande af elektronsystemet. De 5 laveste har energien ϵ_0, den næste har energien ϵ_1, så kommer der 3 tilstande med energien ϵ_2, og endelig er der 5 tilstande med energien ϵ_3.

1. Beregn sandsynligheden for at finde elektronsystemet for et tellurium-atom ved energien ϵ_1 når $T = 3000$K.

2. Beregn elektronsystemets bidrag til Helmholtz' fri energi ved $T = 298$K.

3. Hvor stor en brøkdel af tellurium-gassens entropi ved standardbetingelsen ($T = 298$K, $P = 1$ atm.) hidrører fra elektronsystemet?

4. Hvordan ændrer sidstnævnte brøkdel sig for $T \to 0$? Kommenter resultatet i lyset af varmelærens tredie hovedsætning.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i kvantemekanik
Mandag 24. Juni 2002 kl. 10:00-14:00
KUN PERSONLIGE HJÆLPEMIDLER TILLADT:
INGEN KOMMUNIKATION I ELLER UD FRA EKSAMENSLOKALET
Opgavesættet består af 3 opgaver på i alt 3 ark papir

Opgave 1. En partikel befinder sig i et én-dimensionalt potentiale givet ved $V(x) = 0$ for $0 \le x \le a$ og $V(x) = \infty$ uden for dette interval. Til tiden t=0 er partiklens bølgefunktion inden for intervallet fra $x = 0$ til $x = a$ givet ved $|\psi\rangle = \psi(x) = A\,x\,(x - a/2)\,(x - a)$, mens den er nul uden for dette interval.

1.1. Find normeringskonstanten A. Det kan benyttes at

$$\int_0^a x^2 (x - \frac{a}{2})^2 (x-a)^2 dx = \frac{a^7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7}$$

1.2. Opskriv de to første egentilstande $|i\rangle = \psi_i(x)$, i=1,2, for potentialet V og de tilhørende to laveste egenværdier E_i.

1.3. Find overlappet $\langle i|\psi\rangle$ mellem ψ og egentilstandene ψ_i for i=1 og 2. Er den opgivne bølgefunktion ψ en god approksimation til nogen af disse egentilstande? Ved udregning af overlappene kan benyttes at

$$\int_0^a \sin\frac{\pi x}{a}\left(x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \frac{1}{2}a^2 x\right)dx = 0 \quad \text{og at} \quad \int_0^a \sin\frac{2\pi x}{a}\left(x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \frac{1}{2}a^2 x\right)dx = \frac{6a^4}{(2\pi)^3}$$

1.4. Opskriv udviklingen af $\psi_0(x,t=0)$ til senere tider t, idet ψ_0 betegner den tilnærmede form af ψ, hvor kun de første to led i en rækkeudvikling på egentilstandene medtages.

Opgave 2. Personen P spiller med sin kvantecomputer Q et spil defineret som følger: P placerer en mønt i en æske med låg, med "krone" opad (på møntens ene side er et billede af en dronning med krone. Denne side betegnes "krone". Den anden side har et ligegyldigt indhold og betegnes "plat"). Nu stikker Q sin gribe-arm ned i æsken og kan vende mønten eller lade være, men uden på noget tidspunkt at se ned i æsken. Derefter er det P's tur til på samme vilkår at stikke hånden ned i æsken og evt. vende mønten. Så får Q endnu en tur og herefter åbnes æsken og møntens position checkes. Hvis "krone" vender op vinder Q og hvis "plat" vender op vinder P.

De to tilstande repræsenteres ved vektorerne

$$\text{"}krone\text{"} = |1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \qquad \text{"}plat\text{"} = |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

og de to strategier "vende mønten" eller "ikke vende den", som den menneskelige spiller P kan følge, repræsenteres ved operatorerne

$$V = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad og \qquad I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

2.1. Check disse operatorers virkning på en vilkårlig tilstand $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Ifølge klassisk fysik har de to spillere lige stor sandsynlighed for at vinde spillet. Imidlertid er kvantecomputeren Q udstyret med evnen til at kunne danne vilkårlige tilstands-superpositioner, og

Q vælger som sin strategi for det første træk (dvs. aktion med gribe-arm i æsken) hverken V eller I, men

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Vis at S er hermitisk og at $S^{-1} = S$.

2.3. Hvad kommer der ud af Q's anvendelse af S på begyndelsestilstanden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

2.4. Når P derefter anvender V eller I på den i spørgsmål 2.3 fundne tilstand, hvilke tilstande resulterer så?

2.5. Beregn udkommet efter at Q nu som sit 2. træk anvender $S^{-1} = S$ på de i spørgsmål 2.4 fundne tilstande.

2.6. Hvor stor er P's chance for at vinde spillet?

Opgave 3. [det er muligt at begynde ved spørgsmål 3.2, 3.3, 3.5, 3.6 og 3.7 uden at have besvaret de foregående spørgsmål].
Betragt et lige antal fermioner, som parvis er i samme rumlige tilstand, men med modsat rettede spin. Behandles parrene som bevægende sig uafhængigt i et fælles middelpotentiale, kan Hamiltonoperatoren skrives

$$H_0 = \sum_{i=1}^{m} 2e_i b_i^+ b_i \tag{1}$$

Energispektret kan antages at være ikke-udartet, dvs. at e_i'erne ikke er ens for forskellige i. For skabelsesoperatoren b_i^+ for et par i tilstanden $|i\rangle$, og den hermitisk konjugerede destruktionsoperator b_i, gælder ombytningsrelationerne

$$[\, b_i^+, b_j^+ \,] = 0 \qquad\qquad [\, b_i, b_j^+ \,] = \delta_{ij} \textit{ plus led med } \delta_{ij}\; b_j^+\, b_j$$

hvor $\delta_{ij} = 1$ når i=j, og ellers 0, og hvor kun leddene med $b_j^+\, b_j$ afslører at b_i^+-partiklerne er opbygget af fermion-par. I det følgende ses bort fra disse led, og ombytningsrelationerne antages derfor at være

$$[\, b_i^+, b_j^+ \,] = 0 \qquad\qquad [\, b_i, b_j^+ \,] = \delta_{ij} \tag{2}$$

Par-operatorerne b_i^+ kan således opfattes som rene boson-operatorer, der hvis Hamiltonoperatoren H_0 er givet ved (1) hver tilføjer en energi $2e_i$ (svarende til 2 gange fermionernes energi).

3.1. Kontrollér dette ved at udregne forventningsværdien af H_0 for tilstandene $b_i^+|0\rangle$, hvor $|0\rangle$ er den tomme tilstand som er defineret ved $b_i|0\rangle = 0$.

Nu tilføjes en vekselvirkning H_1 mellem parrene, svarende til observerede forhold i superflydende elektron- og nukleon-systemer:

$$H_1 = -G \sum_{i,j=1}^{m} b_i^+ b_j \tag{3}$$

3.2. Opskriv den samlede Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ som en *(m × m)* matrix i det af $|i\rangle$-tilstandene udspændte vektorrum.

I resten af opgaven betragtes specielt ét partikel-par med kun to mulige tilstande $|i=1\rangle$ og $|i=2\rangle$, og dermed Hamiltonoperatoren

$$H = \begin{pmatrix} 2e_1 - G & -G \\ -G & 2e_2 - G \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } e_1 = -\frac{e}{2} \text{ og } e_2 = \frac{e}{2}. \tag{4}$$

Egenvektorerne for ét-par tilstande er af formen $\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$.

3.3. Opskriv determinant-ligningen til bestemmelse af de for sådanne tilstande mulige energi-egenværdier E.

3.4. Vis at løsningerne til denne ligning er

$$E = -G \pm \sqrt{G^2 + e^2} \tag{5}$$

3.5. Skitsér løsningerne *E/e* som funktion af *G/e*.

3.6. Bestem egenvektorerne $\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$ svarende til de to værdier af E.

[svaret er for den som svarer til den laveste energi givet ved: $\alpha_1^2 = \dfrac{e + \sqrt{G^2 + e^2}}{2\sqrt{G^2 + e^2}}$, $\beta_1^2 = 1 - \alpha_1^2$]

3.7. Udregn sandsynligheden for i grundtilstanden (den med lavest E) at finde et par i basis-tilstanden $|2\rangle$.

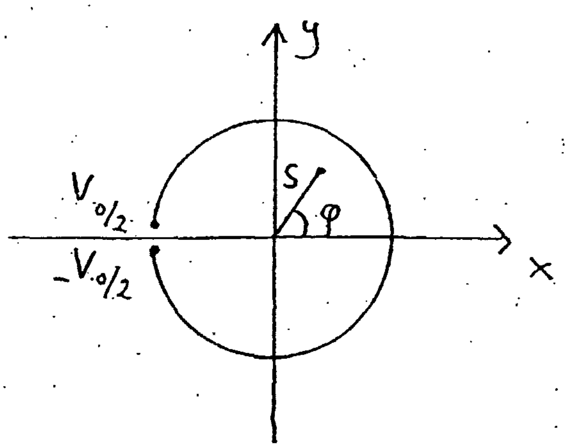
BSØ 16.5.02

Dybdeeksamen i elektrodynamik 24.januar 2003 kl. 10.00-14.00

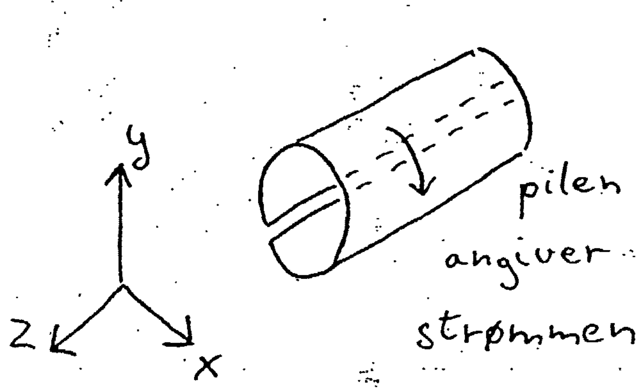
Alle sædvanlige hjælpemidler samt lommeregnere uden forbindelse med omverdenen på niveau med eller under TI89 er tilladt. Mobiltelefoner må ikke medbringes. Der er een opgave med 12 spørgsmål.

I denne opgave benyttes alt efter hensigtsmæssighed rektangulære koordinater, (x,y,z) eller cylinder-koordinater, (s,ϕ,z), hvor $x=s\cos(\phi), y=s\sin(\phi)$. Vi betragter en uendelig lang opslidset cylinderflade givet ved radius a og azimuthalvinkel $-\pi<\phi<\pi$. På linien givet ved $s=a$ og $\phi=\pi$ sidder et batteri således at potentialet lige over x-aksen er $V_0/2$ og lige under er $-V_0/2$. Cylinderfladen er Ohmsk ledende med ledningsevnen γ pr. længdeenhed i z-aksens retning.

Geometrien er således som i opgave 7.41 i lærebogen af D. J. Griffiths, men der spørges her til andre fysiske aspekter af denne model for et elektrisk kredsløb. Et evt. kendskab til løsning af opgave 7.41 er derfor ikke af betydning for denne eksamensopgave.



z-akse ud af papirets plan



1) Beregn strømmen, K og den afsatte effekt, begge pr. længdeenhed i z-aksens retning.

2) Den Ohmske leder er ikke en ækvipotentialflade; men potentialet på den er givet ved $V(s=a,\phi)=V_0\frac{\phi}{2\pi}$ som funktion af vinklen ϕ. Begrund dette.

3) Gør rede for, at potentialet i rummet (vacuum) for såvel $s<a$ som $s>a$ i den stationære situation må opfylde Laplaces ligning.

Vi interesserer os i det følgende kun for området $s<a$.

4) Vis, ved indsættelse, at

$$V(x,y,z) = k\,Arctan\left(\frac{y}{a+x}\right)$$

løser Laplaces ligning. Her er k en konstant.

5) Vis, at $k=\frac{V_0}{\pi}$. (hjælp: $\tan\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\sin(u)}{1+\cos(u)}$)

6) Karakteriser ækvipotentialfladerne og skitser udseendet af ækvipotentialflader og E-feltlinier.

7) Beregn E-feltkomposanterne E_s og E_ϕ

8) Beregn B-feltet.

9) Skitser feltlinier for Poyntingvektoren.

10) Vis, at den radielle komposant af Poyntingvektoren S_s er

$$\gamma \frac{V_0^2}{\pi} \frac{a\cos(\phi)+s}{a^2+s^2+2as\cos(\phi)}.$$

11) Beregn ved brug af resultatet i 10) den samlede energimængde, der strømmer ind i den Ohmske leder via det elektromagnetiske felt pr. tidsenhed og pr. længdeenhed i z-aksens retning.

12) Beregn normal- og tangentialkomposanten af det mekaniske stress (kraft pr. areal) det elektromagnetiske felt fra den indre side påvirker den Ohmske leder med.

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
Dybdemoduleksamen i kvantemekanik
Torsdag 19. Juni 2003 kl. 10:00-14:00
KUN PERSONLIGE HJÆLPEMIDLER TILLADT:
INGEN KOMMUNIKATION I ELLER UD FRA EKSAMENSLOKALET
Opgavesættet består af 5 opgaver på i alt 4 ark papir

Opgave 1. Opgaven betragter en simpel én-dimensional model for et di-atomigt molekyle, givet ved potentialet

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{for } x < -b \\ 0 & \text{for } -b \le x \le -a \quad (\text{område I}) \\ V_0 & \text{for } -a < x < a, \text{ hvor } V_0 \text{ er en positiv konstant.} \quad (\text{område II}) \\ 0 & \text{for } a \le x \le b \quad (\text{område III}) \\ +\infty & \text{for } x > b \end{cases}$$

Opskriv bølgefunktionerne ψ for en enkelt elektron i en stationær tilstand og de tilhørende udtryk til bestemmelse af tilladte energier E, dvs. løsninger til den tidsuafhængige Schrödinger ligning for en elektron i ovenstående potentiale. Der betragtes kun energier i intervallet $0 < E < V_0$. Det tillades at bølgefunktionerne indeholder en enkelt skala-konstant, der senere vil kunne bestemmes ved normering. Vis at løsningerne kan skrives som enten lige eller ulige funktioner,

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin(k(x+b)) & i \text{ område I} \\ B\exp(qx) + C\exp(-qx) & i \text{ område II} \\ D\sin(k(x-b)) & i \text{ område III} \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$

hvor der for lige løsninger gælder

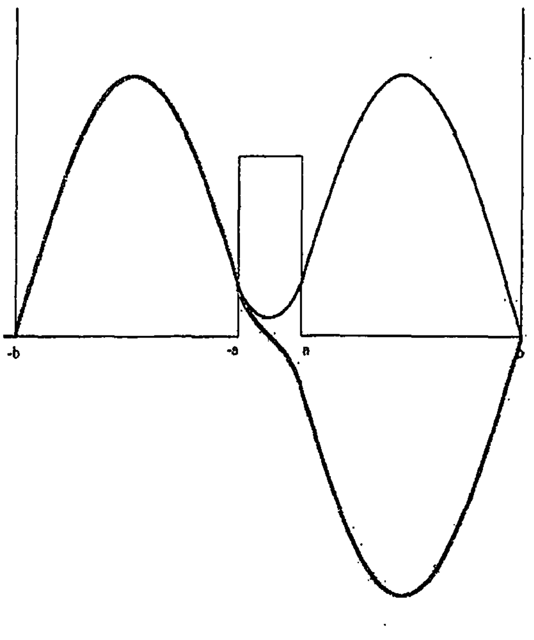
$$A = D = 2B\cosh(qa)/\sin(k(b-a)); \quad C = B; \quad kq^{-1}\cot(k(b-a)) = -\operatorname{tgh}(qa), \qquad \text{(i)}$$

mens der for ulige løsninger gælder

$$A = -D = -2B\sinh(qa)/\sin(k(b-a)); \quad C = -B; \quad kq^{-1}\cot(k(b-a)) = -\coth(qa), \qquad \text{(ii)}$$

med følgende sammenhæng mellem bølgetal og energi (m er elektronens masse):

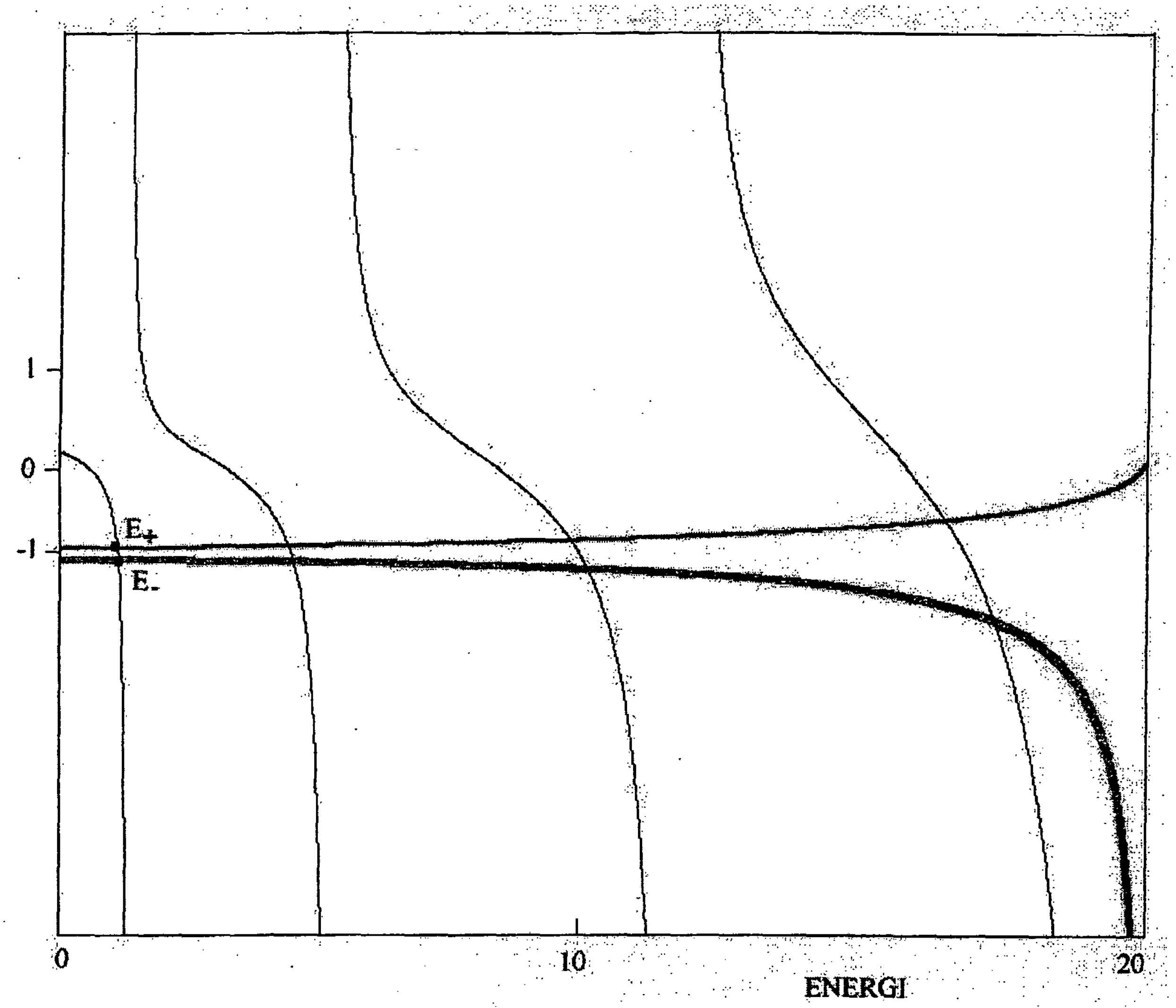
$$\hbar^2k^2 = 2mE; \quad \hbar^2q^2 = 2m(V_0 - E).$$



Figuren til venstre viser den laveste lige og ulige bølgefunktion for en version af det omhandlede potentiale.

Den numeriske løsning af energibetingelserne (udtrykkene der relaterer k og q) er illustreret i figuren øverst på følgende side, som giver den fælles venstre side af de to betingelser givet sidst i (i) og (ii) ovenfor (buede linjer oppefra og ned) samt de to højre sider (de i starten næsten vandrette linjer).

De tilladte energier falder i par (svarende til lige og ulige bølgefunktioner), der i starten ligger meget tæt men efterhånden afviger mere og mere, efterhånden som E nærmer sig V_0. De to laveste energier med tilhørende normerede bølgefunktioner betegnes E_+, ψ_+ (lige) og E_-, ψ_- (ulige).



De hyperbolske funktioner er defineret ved

$\sinh(z) = ½(\exp(z) - \exp(-z))$; $\cosh(z) = ½(\exp(z) + \exp(-z))$

$\mathrm{tgh}(z) = \sinh(z) / \cosh(z)$; $\coth(z) = \cosh(z) / \sinh(z)$.

Opgave 2. En endnu simplere model for det di-atomige molekyle ville være at lade V_0 i modellen beskrevet i opgave 1 være $+\infty$, dvs. potentialet består af to separate brønde med uendeligt høje vægge. Løsninger for et enkelt brøndpotential af denne form findes i alle lærebøger. Opskriv løsningerne for systemet med to separate brønde, altså tilladte energier og tilhørende bølgefunktioner.

2.1. Vis at løsningerne kan skrives som lige og ulige funktioner i analogi til de i opgave 1 fundne, og skitsér den laveste lige og ulige løsning i et potentiale svarende til den første figur i opgave 1. Hvad er energien af disse to tilstande?

2.2. De laveste par af energiløsninger i opgave 1 (figuren ovenfor) ses at ligge meget tæt og også tæt på løsningen for de separate brøndpotentialer. Man kunne derfor tænke på at løse opgave 1 ved perturbations-regning ud fra løsningerne til potentialet her i opgave 2. Hvorfor kan det ikke lade sig gøre?

Opgave 3. Nu betragtes tidsafhængige løsninger for potentialet givet i opgave 1. Elektronen startes i tilstanden

$$\psi(x,t=0)=\psi_0(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{b-a}}\sin k_0(x+b) & i\ område\ I\\ 0 & i\ alle\ øvrige\ områder\end{cases}$$

3.1. Vis at den tilnærmede form af denne tilstands rækkeudvikling på egentilstandene fundet i opgave 1, som kun medtager den laveste lige og den laveste ulige funktion, er

$$\psi_0(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+(x)+\psi_-(x))$$

3.2. Hvorledes udvikler denne tilstand sig i tiden?

3.3. Vis at tilstanden efter en vis tid Δt er blevet til

$$\psi(x,t=\Delta t)=\psi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+(x)-\psi_-(x))$$

3.4. Elektronen oscillerer mellem venstre og højre side af molekylet. Opskriv hvordan perioden $T = 2\Delta t$ i denne oscillation afhænger af E_+ og E_-.

Opgave 4. Antag nu, at der befinder sig to elektroner med spin i det di-atomige molekyle med potentialet givet i opgave 1.

4.1. Opskriv bølgefunktionerne for de mulige værdier af det totale spin, udtrykt ved spinbølgefunktionerne $\chi(s=½;\ m_s=\pm ½)$, og rumlige bølgefunktioner for den laveste lige eller ulige funktion ψ_+ og ψ_-.

Lad P være paritetsoperatoren $\quad P: x \rightarrow -x$

og lad X være ombytningsoperatoren $\quad X$: *partikel 1* $\longleftrightarrow$ *partikel 2.*

4.2. Opskriv virkningen af P og X på de i 4.1 fundne tilstande, og udled en sammenhæng mellem P og X, gyldig for virkningen på de betragtede tilstande.

Opgave 5. Personen P spiller med sin kvantecomputer Q et spil defineret som følger: P placerer en mønt i en æske med låg, med "krone" opad (på møntens ene side er et billede af en dronning med krone. Denne side betegnes "krone". Den anden side har et ligegyldigt indhold og betegnes "plat"). Nu stikker Q sin gribe-arm ned i æsken og kan vende mønten eller lade være, men uden på noget tidspunkt at se ned i æsken. Derefter er det P's tur til på samme vilkår at stikke hånden ned i æsken og evt. vende mønten. Så får Q endnu en tur og herefter åbnes æsken og møntens position checkes (kvantemekanisk: observeres). Hvis "krone" vender op vinder Q og hvis "plat" vender op vinder P.

De to tilstande repræsenteres ved vektorerne

$$\text{"}krone\text{"} = |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{"}plat\text{"} = |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

og de to strategier "vende mønten" eller "ikke vende den", som den menneskelige spiller P kan følge, repræsenteres ved operatorerne

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad og \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imidlertid er kvantecomputeren Q udstyret med evnen til ikke blot at kunne foretage trækkene V og I, men også at kunne danne vilkårlige tilstands-superpositioner, og Q vælger som sin strategi for både sit første træk (dvs. aktion med gribe-arm i æsken) og sit andet træk hverken V eller I, men

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.1. Vis ved at lade operatorerne for successive træk virke på begyndelsestilstanden "krone", altså først S, så enten V eller I, og endelig S igen, at computeren vinder hver gang.

Irriteret over denne situation beslutter P sig til at snyde. Under sin anden tur sniger P sig til at se ned i æsken hvordan mønten er orienteret, før han foretager sit træk. Denne handling udgør en observation.

5.2. Hvad er nu P's chance for at vinde spillet?

5.3. Gør det nogen forskel hvilket træk P gør i anden runde?

Det ses at kun ved at snyde kan P opnå et "fair" spil som det klassiske. Har du nogen sinde mødt eller hørt om en kvantecomputer, der var i stand til at lave vilkårlige superpositioner?

BSØ 8.5.03

Skriftlig 4-timers prøve i
TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK
Torsdag d. 22 Januar 2004, kl. 10.00-14.00

Opgavesættet består af to opgaver. Vægtning er angivet på opgaverne. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (50%)

Et system består af tre Ising spin σ_1, σ_2 og σ_3, som hver kan antage værdierne $+1$ eller -1. Systemet har altså 8 tilstande. I en givet tilstand er energien af systemet givet ved:

$$E = -J\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3\right) + m_B B \sum_i \sigma_i \tag{1}$$

hvor er J er en positiv konstant, m_B er Bohr's magneton og B er et ydre magnetisk felt. I delspørgsmål a) til d) er $B = 0$.

a) Vis at systemet har 6 tilstande med energien $-J$ og 2 tilstande med energien $+3J$. Giv gerne en fysisk fortolkning af de to typer tilstande.

b) Beregn systemets energi og varmekapacitet som funktion af temperaturen.

c) Beregn systemets entropi som funktion af temperaturen.

d) Find entropien i grænsen $T \to 0$ og i grænsen $T \to \infty$, og giv en fysisk fortolkning af resultaterne.

e) Lad nu $B > 0$. Angiv entropien af systemet i grænsen $T \to 0$.

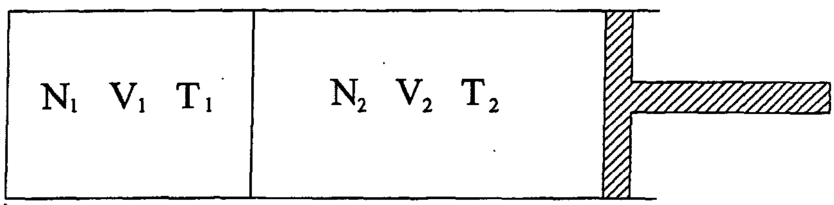
Opgave 2 (50%)

Vi ser på en mono-atomarisk ideal-gas.

a) Udled et udtryk for den isoterme kompressibilitet, κ_T.

b) Vis at den adiabatiske kompressibilitet er givet ved $\kappa_S = \frac{3}{5}P^{-1}$.

Vi ser nu på et system bestående af to kamre, hvoraf det ene kan ændre volumen via et stempel:



Hvert kammer er fyldt med en mono-atomarisk ideal-gas, og den fastsiddende væg mellem de to kamre er en god termisk leder. N_1 og N_2 er antallet af partikler i henholdsvis kammer 1 og kammer 2. V_1 og V_2 er volumet af henholdsvis kammer 1 og kammer 2. V_1 er konstant og V_2 kan ændres vha. stemplet. T_1 og T_2 er temperaturen i henholdsvis kammer 1 og kammer 2.

c) Vi lader nu det samlede system være i god termisk kontakt med omgivelserne, og definerer en isoterm kompressibilitet for kammer 2 (P_2 er trykket i kammer 2);

$$\kappa_{T,2} \equiv -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial P_2}\right)_T \tag{2}$$

Beregn $\kappa_{T,2}$ og sammenlign den med κ_T for den mono-atomariske ideal-gas.

d) Det samlede system isoleres nu termisk fra omgivelserne, og vi definerer en adiabatisk kompressibilitet for kammer 2;

$$\kappa_{S,2} \equiv -\frac{1}{V_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial P_2}\right)_S \tag{3}$$

(Bemærk at det er entropien for det *samlede* system der holdes konstant). Udled et udtryk for $\kappa_{S,2}$

e) Angiv $\kappa_{S,2}$ i grænsen $N_1 \ll N_2$ og i grænsen $N_1 \gg N_2$, og giv en fysisk fortolkning af resultaterne.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: http://mmf.ruc.dk eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerappoprt af: Stine Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre

336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss

342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschlæger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research *in* Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning
Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen

358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen

359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)

360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhelm Booß-Bavnbek, Kenro Furutani

362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen

363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen

364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup

365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege

366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

368/99 Kvartvejsraport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen

369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen

370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter tekst nr. 350/98

371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen

373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki

374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen

375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik

376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder

377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen

378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and termal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski

386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen

388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen

390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System#: Thomas Engberg Pedersen##, Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2#: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen*, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen**, Bent Sørensen
#Indtil 1/1-2000 Elkraft, ## fra 1/5-2000 Cowi Consult
* Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ** fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram

391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen

392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.

393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.

395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorthe Posselt

398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt

399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss

400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen

401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen

402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen

403/01 Generaliseringer i integralteorien
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen

404/01 "Mere spredt fægtning"
Af: Jens Højgaard Jensen

405/01 Real life routing
- en strategi for et virkeligt vrp
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jogvan Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak
Vejleder: Jørgen Larsen

406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik
Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg

407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang

409/02 Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy
- et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning *før* Gauss, Abel og Galois
Videnskabsfagsprojekt af: David Heiberg Backchi, Uffe thomas Volmer Jankvist, Neslihan Saglanmak
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

410/02 2 projekter om *modellering af influenzaepidemier*
Influenzaepidemier- et matematisk modelleringsprojekt
Af: Claus Jørgensen, Christina Lohfert, Martin Mikkelsen, Anne-Louise H. Nielsen
Vejleder: Morten Blomhøj
Influenza A: Den tilbagevendende plage – et modelleringsprojekt
Af: Beth Paludan Carlsen, Christian Dahmcke, Lena Petersen, Michael Wagner
Vejleder: Morten Blomhøj

411/02 Polygonformede hydrauliske spring
Et modelleringsprojekt af: Kåre Stokvad Hansen, Ditte Jørgensen, Johan Rønby Pedersen, Bjørn Toldbod
Vejleder: Jesper Larsen

412/02 Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning – en generel analyse samt en behandling af strømningen bag en cylinder
Et matematisk modul III professionsprojekt af. Kristine Niss, Bo Jakobsen
Vejledere: Morten Brøns, Johnny Ottesen

413/03 "Elevernes stemmer" Fysikfaget, undervisningen og lærerroller, som eleverne opfatter det i det almene gymnasium i Danmark
Af: Carl Angell, Albert Chr. Paulsen

414/03 Feltliniediagrammer En vej til forståelse?
Et 1. modul fysikprojekt af: Ditte Gundermann, Kåre Stokvad Hansen, Ulf Rørbæk Pedersen
Vejleder: Tage Emil Christensen

415/03 FYSIKFAGET I FORANDRING Læring og undervisning i fysik i gymnasiet med fokus på dialogiske processer, autenticitet og kompetenceudvikling
Ph.d.-afhandling i fysikdidaktik af: Jens Dolin

416/03 Fourier og Funktionsbegrebet
- Overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb
Projektrapport af: Rasmus Brauner Godiksen, Claus Jørgensen, Tony Moyer Hanberg, Bjørn Toldbod
Vejleder: Erik von Essen

417/03 The Semiotic Flora of Elementary particles
By: Peder Voetmann Christiansen

418/03 Militærmatematik set med kompetencebriller
3. modul projektrapport af: Gitte Jensen og specialerapport af: Jesper Thrane
Vejleder: Tine Wedege

419/03 Energy Bond Graphs – a semiotic formalization of modern physics
By: Peder Voetmann Christiansen

420/03 Stemning og Musikalsk Konsonans
Et matematisk modelleringsprojekt af: Claus Jørgensen
Vejleder: Johnny Ottesen

421/03 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i fysik 1976 – 2003.
Denne tekst erstatter tekst nr. 370/99

422/03 Vurdering af dynamisk blodstrømningsmodel
- ved numerisk simulering med FEMLAB
Et 2. modul matematikprojekt af: Sofie Inari Castella, Ingunn Gunnarsdóttir og Jacob Kirkensgaard Hansen
Vejleder: Johnny Ottesen

423/03 Fysikkens historie i en almendannende fysikundervisning
- Eksemplificeret med Millikan Ehrenhaft kontroversen
Specialerapport af: Marianne Wilcken Bjerregaard
Vejleder: Albert Chr. Paulsen

424/03 Dielectric and Shear Mechanical Relaxation in Glass Forming Liquids
- A thorough analysis and experimental test of the DiMarzio-Bishop model
Master thesis in physics by: Kristine Niss and Bo Jakobsen
Supervised by: Niels Boye Olsen

425/03 Fysiske forklaringer i undervisning
Specialerapport af: Kirsten Ringgard Jensen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

426/04 Myreintelligens
Distribuering af Ant Colony System Traveling Salesman Problem
Et 2. modul datalogiprojekt af: Uffe Thomas Volmer Jankvist og Magnus Meinild
Vejleder: Keld Helsgaun

427/04 Fra Leibniz til *Isabelle*
Typeteoriens fremkomst og udvikling samt dens anvendelse i bevisføreren *Isabelle*
Et 3. modul datalogiprojekt af: Ingunn Gunnarsdóttir, Uffe Thomas Volmer Jankvist og Bjørn Toldbod
Vejleder: Jørgen Villadsen