

**TEKST NR 422**

**2003**

**Vurdering af dynamisk  
blodstrømningsmodel**

- ved numerisk simulering med FEMLAB

**Sofie Inari Castella  
Ingunn Gunnarsdóttir  
Jacob Kirkensgaard Hansen**

**Et 2.modul matematikprojekt  
Vejleder: Johnny Ottesen**

**TEKSTER fra**

**IMFUFA**

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA · Roskilde Universitetscenter · Postboks 260 · DK-4000 Roskilde  
Tlf: 46 74 22 63 · Fax: 46 74 30 20 · Mail: imfufa@ruc.dk

Ingunn Gunnarsdóttir, Sofie Inari Castella og Jacob Kirkensgaard Hansen:  
*Vurdering af dynamisk blodstrømningsmodel – ved numerisk simulering med FEMLAB*

Et 2. modul matematikprojekt  
Vejleder: Johnny Ottesen

IMFUFA tekst nr. 422/2003

99 sider

ISSN 0106-6242

---

### **Abstract**

Projektet tager udgangspunkt i en ikke-lineær dynamisk model af blodstrømning i arterier, hvilket konkret vil sige at der tages højde for de ikke-lineære led i Navier-Stokes ligningerne og den ikke-lineære bevægelse af årevæggen.

Med udgangspunkt i begreberne *verificering* og *validering* foretages en grundig vurdering af modellen. Dette indbefatter en diskussion af de antagelser der ligger til grund for opstillingen af modellen, et alternativt simuleringssætup i det kommercielle program FEMLAB med henblik på at sammenligne to forskellige numeriske løsninger, og en sammenligning af modellens resultater med eksperimentelle data.

Det konkluderes at det i al væsentlighed er lykkedes at verificere modellen hvad angår de matematiske antagelser der danner grundlaget for opstillingen af modellen, omend der via en alternativ udledning af en af modellens ligninger påpeges et manglende led. Signifikansen af dette led diskuteres og der konkluderes at dette led ikke bør negligeres under de i modellen opstillede antagelser.

Det konkluderes videre at det ikke er lykkedes at fremstille sammenlignelige alternative simuleringer, hvilket primært skyldes implementeringsmæssige vanskeligheder i det kommercielle simuleringssprogram FEMLAB.

Endelig konkluderes at det ikke er lykkedes at validere modellen direkte ud fra de eksperimentelle data, da data og simulering knytter sig til to forskellige arterier, med vidt forskellige forhold gældende. Der er dog indikationer af kvalitative ligheder mellem data og model.

# Forord

Vi vil gerne benytte lejligheden til at takke vores vejleder Johnny Ottesen for kyndig vejledning og inspiration til projektet. Samtidig ønsker vi at takke Ernst-Torben Fründ og Steffen Ringgaard fra Skejby Sygehus for venligst at udlevere datamateriale, samt Anders Ekerøth fra FEMLAB-support for råd og tips om opsætning af simuleringerne.

Tak til Kristine Groth Knudsen for sliklager og det tre dage lange udsøgte ikke-indiske ristaffel og til Kristján Gunnarsson for det begejstrede forsøg (omend smilet hurtigt blegnede...). Også tak til de øvrige ansatte og studerende på IMFUFA som har bidraget med dit, dat og deslige (Gnibbles, røvsmykker og gule sedler...).

En særlig tak til Bo Jacobsen for stor tålmodighed med Sofie og en ekstra stor tak til Eva Uhre (gruppens fjerde medlem) for hjælp med kickstart af FEMLAB og eksemplarisk medlemskab af mad- og ølklub. Til sidst tak til Duck'en for trofast følgeskab og for at lægge låg på den islandske vulkan.

Roskilde, januar 2003

Sofie Inari Castella  
Ingunn Gunnarsdóttir  
Jacob Kirkensgaard Hansen



# Indhold

<b>1 Indledning</b>	<b>1</b>
1.1 Om projektet . . . . .	1
1.1.1 Verificering og validering . . . . .	2
1.1.2 Problemformulering . . . . .	4
<b>2 Blodstrømningsmodellering</b>	<b>5</b>
2.1 Blodstrømningsmodellens formål . . . . .	5
2.2 Blods strømningsrelaterede egenskaber . . . . .	5
2.2.1 Viskositet . . . . .	5
2.2.2 Laminar og turbulent strømning . . . . .	6
2.2.3 Pulserende strømning i årer . . . . .	7
2.3 Blodets bevægelse . . . . .	9
2.3.1 Navier-Stokes ligningerne . . . . .	10
2.3.2 Kontinuitetsligningen . . . . .	11
<b>3 Cavalcantimodellen</b>	<b>15</b>
3.1 Opstilling af den konceptuelle model . . . . .	15
3.1.1 Indledende antagelser og begrænsninger . . . . .	15
3.1.2 Modellering af blodets bevægelse . . . . .	16
3.1.3 Modellering af årevægsbevægelse . . . . .	21
3.1.4 Tryk-radiusrelation . . . . .	23
3.2 Cavalcantimodellens antagelser . . . . .	24
3.2.1 Dimensionsanalyse . . . . .	24
3.2.2 Diverse antagelser . . . . .	27
3.3 Cavalcantimodellens resultater . . . . .	29
3.3.1 Parametertest . . . . .	29
3.3.2 Hastighedsprofiler . . . . .	31
<b>4 FEM simuleringer</b>	<b>33</b>
4.1 FEM for ODE'er . . . . .	33
4.1.1 Galerkins metode . . . . .	33
4.1.2 Mesh og basisfunktioner . . . . .	36
4.2 FEM for PDE'er . . . . .	38
4.2.1 Variationel formulering af PDE . . . . .	38
4.3 FEMLAB . . . . .	41
4.3.1 PDE løsning i FEMLAB . . . . .	41
4.3.2 Opsætning af den computeriserede model . . . . .	42
4.4 Simuleringsresultater . . . . .	46

---

4.4.1	Simulering A . . . . .	47
4.4.2	Simulering B . . . . .	49
4.4.3	Simulering C . . . . .	52
4.4.4	Sammenligning af simuleringer med resultater fra [5] . . .	53
4.4.5	Diskussion af simuleringer . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Datasammenligning</b> . . . . .	<b>57</b>
5.1	Datapræsentation . . . . .	57
5.2	Sammenligning med resultater fra [5] . . . . .	59
5.2.1	Flowprofiler . . . . .	59
5.2.2	Hastighedsprofiler . . . . .	61
5.3	Sammenligning med FEM-løsning . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Diskussion</b> . . . . .	<b>67</b>
6.1	Verificeringsmæssige overvejelser . . . . .	67
6.1.1	Cavalcantimodellen . . . . .	67
6.1.2	Simuleringsresultaterne . . . . .	68
6.1.3	FEMLAB . . . . .	69
6.2	Valideringsmæssige overvejelser . . . . .	70
6.3	Konklusion . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Perspektivering</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Dimensionsanalyse</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Skejby Sygehus data</b> . . . . .	<b>77</b>
B.1	Rådata . . . . .	77
B.2	Overflade- og 2D plots af rådata . . . . .	84
B.3	Gennemsnitlige tværsnitshastighedsprofiler . . . . .	90
	<b>Litteratur</b> . . . . .	<b>93</b>

# Kapitel 1

## Indledning

### 1.1 Om projektet

Dette er et projekt af *modelvarianten* på Roskilde Universitetscenters matematikoverbygning, og skal dermed ligge indenfor følgende ramme.

*Projektet skal behandle matematiske modeller opstillet til at repræsentere og bearbejde genstandsområder uden for matematikken selv. Der kan både være tale om en undersøgelse og vurdering af eksisterende modeller/modeltyper og om selvstændig opstilling og analyse af modeller eller modeldele.<sup>1</sup>*

Vi har valgt at tage udgangspunkt i en eksisterende model, nærmere bestemt en dynamisk model af blodstrømning i arterier, opstillet af Cavalcanti og Gnudi<sup>2</sup> [5]. Blodstrømningsmodellering har utroligt mange anvendelser i den fysiologiske og medicinske forskning, fordi der herigennem opnås en langt højere forståelse for hæmodynamikken, dvs. hvorledes blod bevæger sig gennem det cardiovaskulære system, og hvordan den lokale blodbevægelse afhænger af fysiske og geometriske parametre. Denne forståelse kan bla. bidrage til forskning i arterielle sygdomme og til design af diverse transplantater [5].

Den hernævnte blodstrømningsmodel kan i lighed med en del andre matematiske modeller baseret på partielle differentiaalligninger ikke løses analytisk, men må istedet løses numerisk. Ved at benytte en numerisk metode til at løse modellens ligninger, skyder man et ekstra filter ind mellem matematikken og virkeligheden. Herved vanskeliggør man evalueringen af både model og metode, eftersom man ved en sammenligning af den numeriske løsning med data, ikke kan være sikker på hvilken af de to man evaluerer. I denne sammenhæng synes det indlysende at fremhæve det aspekt af arbejdet med matematiske modeller som ikke fremgår eksplicit af ovennævnte rammebeskrivelse, nemlig hvad den nævnte *vurdering* af modellen dækker over, og ydermere hvordan en sådan iværksættes i praksis.

<sup>1</sup>Studievejledningen for matematik 2002 side 11.

<sup>2</sup>Fremover betegnes modellen på uretfærdigste vis kun *Cavalcantimodellen*.

### 1.1.1 Verificering og validering

Når man ønsker at modellere fluiddynamiske fænomener er det altafgørende at anvende numeriske beregninger. Både for brugere og udviklere af sådanne beregningsprogrammer er det derfor vigtigt at få klarhed over hvordan man foretager en kritisk vurdering af både modellerings- og simuleringsaspekterne af det samlede problem [16]. Indenfor fluiddynamikbranchen opererer man med to helt centrale begreber i forbindelse med en samlet vurdering af et simuleringssetup; *verificering* og *validering*.<sup>3</sup> Definitionerne er

#### Verificering

Bestemmelsen af hvorvidt en computerimplementeret model repræsenterer udviklernes konceptuelle beskrivelse af modellen, indenfor rammerne af en nærmere specificeret nøjagtighed.

#### Validering

Bestemmelsen af i hvor høj grad en model er en nøjagtig repræsentation af virkeligheden, set fra modellens tiltænkte brugers synspunkt.

Der optræder i begge definitioner en angivelse af en »nøjagtighed«, hvilket indikerer at der eksisterer et eller andet mål for denne størrelse. Ved verificering måles denne nøjagtighed generelt ved sammenligning med enten analytiske løsninger eller meget præcise numeriske løsninger. Ved validering måles nøjagtigheden istedet ved sammenligning med empiriske data. Dvs. at ved verificeringen er forholdet mellem simulering og virkelighed ikke et emne, mens det ved valideringen netop er emnet [16].

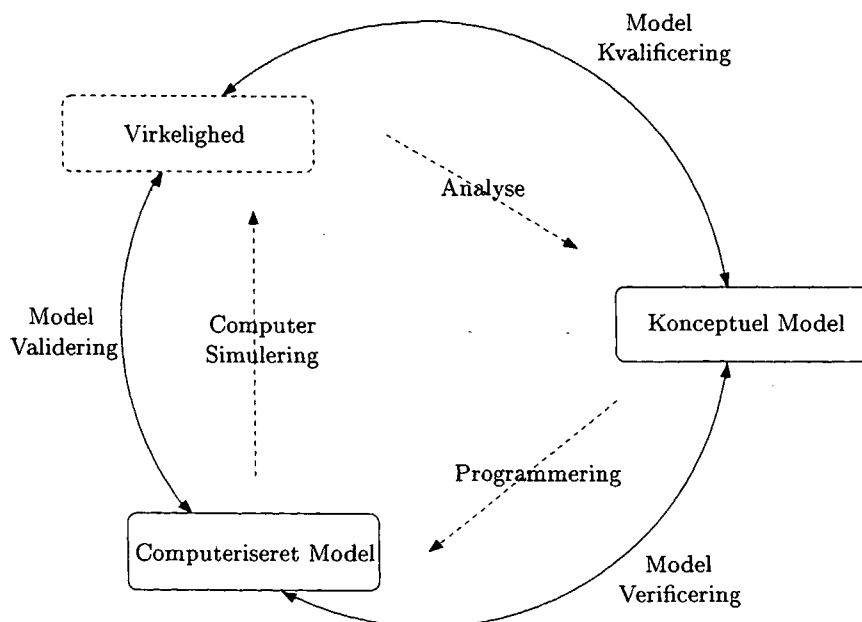
Opdelingen af vurderingsprocessen i disse to dele antyder at vi kan betragte modellen på to forskellige niveauer, og vi betegner nu disse for hhv. en *konceptuel* og en *computeriseret* model. Den konceptuelle model opbygges ved at observere og analysere det fysiske system der ønskes beskrevet, og består af al information, modelleringsdata og ligninger forbundet hermed. Som vi skal se er Cavalcanti-modellen domineret af partielle differentiaalligninger der beskriver diverse bevarelseslove. Den computeriserede model derimod er et computerprogram hvori den konceptuelle model er implementeret, og som efterfølgende anvendes til at simulere virkeligheden. Samspelet mellem disse elementer er illustreret i figur 1.1<sup>4</sup>.

I praksis foregår verificeringen som nævnt ved at sammenligne simulerede resultater med kendte løsninger, men som vi skal se eksisterer der som regel ikke analytiske løsninger til avancerede fluiddynamiske problemer, og derudover er der ovenikøbet mangel på numeriske højpræcisionsløsninger til sammenligning med simuleringer [16]. Der opstår derfor et fundamentalt verificeringsproblem som omhandler forholdet mellem den kontinuumsmatematik der anvendes til beskrivelse i den konceptuelle model, og den diskrete matematik som der i den

<sup>3</sup>Vi adopterer her fuldstændig definitionerne på de to begreber som de er givet af American Institute of Aeronautics and Astronautics. Der er andre mulige definitioner, men de bredest anerkendte er alle ækvivalente med disse [16].

<sup>4</sup>Kvalificeringen af en model som er nævnt i figuren, betyder groft sagt at man beslutter hvorvidt det er besværet værd overhovedet at påbegynde en specifik modelleringsproces.





Figur 1.1 Verificeringen og valideringens rolle i de forskellige modelleringsfaser [16].

computeriserede model anvendes til at simulere modellen. Det er klart at i enhver computerbaseret beregningssituation er det nødvendigt at diskretisere problem på en form der muliggør løsning via en eller flere endelige algoritmer, selv om den konkrete opsætning naturligvis sagtens kan variere fra problem til problem. Det sidste skyldes bl.a. at to forskellige numeriske beregningsmetoder ikke nødvendigvis kræver den samme implementering. Under opsætningen af den computeriserede model er det derfor nødvendigt at foretage en grundig vurdering af den konceptuelle model, da den specifikke numeriske metode indeholder specielle restriktioner og begrænsninger i forhold til modellen.

Når vi taler om validering af modellen, er det som sagt sammenligninger med virkeligheden der er essentielle, hvilket vil sige eksperimentelle eller andre kontrollerede empiriske data. Det er ikke en del af valideringen at fastlægge hvilke ændringer der kan foretages i den computeriserede model, men udelukkende at konstatere om der er overensstemmelse mellem modellen og det helt specifikke virkelighedsudsnit som de eksperimentelle data repræsenterer. Derudover er det klart at valideringens formål er at detektere og kvantificere fejl og usikkerheder i både den konceptuelle og computeriserede model, samt numeriske fejl i beregningerne [16]. Dette indikerer at de eksperimentelle data betragtes som »sandheden« om virkeligheden. Dette er i og for sig ikke tilfældet; nærmere repræsenterer de empiriske data det mest troværdige aftryk af virkeligheden i valideringsøjemed. Den typiske måde at validere en konkret model på i praksis, er ved sammenligninger af grafiske repræsentationer af eksperimentelle data og den computeriserede models resultater. Hvis de beregnede resultater generelt stemmer overens med de eksperimentelle data betragtes modellen som valideret [16].

### 1.1.2 Problemformulering

I dette projekt ønsker vi at vurdere Cavalcantimodellen, hvilket altså vil sige både at verificere og validere den. For at verificere modellen ønsker vi

- kort at diskutere de fysiske og geometriske antagelser, samt den teoretiske baggrund der danner grundlaget for opstillingen af den konceptuelle model i [5],
- grundigt at diskutere de matematiske antagelser der danner grundlaget for opstillingen af den konceptuelle model i [5],
- som alternativ til at sammenligne den numeriske løsning med en kendt løsning at sammenligne simuleringer ved to forskellige numeriske metoder,

og for at validere modellen

- at sammenligne de numeriske løsninger med eksperimentelle data.

Diskussionen af både de fysiske og matematiske antagelser og sammenligninger med data etc. vil fremgå som teksten skrider frem, men sammenligningen af de numeriske metoder kræver nok en ekstra bemærkning. Som nævnt er der forskel på forskellige numeriske metoder. Det betyder ikke at den samme fejl ikke kan opstå i begge situationer, men generelt vil det næppe være tilfældet pga. de tidligere nævnte implementeringsmæssige forskelle. Pointen i dette led af verificeringen af modellen er at *reproducere* simuleringerne med en anden numerisk metode, og på denne måde af- eller bekræfte de tendenser simuleringen i [5] viser.

I den her refererede artikel er simuleringen foretaget ved hjælp af Finite Difference metoden (FDM), men vi vil i stedet benytte Finite Element metoden (FEM) som løsningsmetode, hvilket vi i praksis gør vha. den kommercielle softwarepakke FEMLAB®.

## Kapitel 2

# Blodstrømningsmodellering

### 2.1 Blodstrømningsmodellens formål

Ved konstruktion af en matematisk model til beskrivelse af blodstrømning, er målet at få sammenhænge mellem kræfter, bevægelser og de fysiske proportioner af systemet. Med systemets proportioner menes årens dimensioner, dvs. indre radius, vægtykkelse og længde, blodets fysiske karakteristika, eksempelvis viskositet samt væggens viskoelastiske egenskaber. Modellen skal endvidere kunne beskrive samtlige følgende fænomener

- bevægelse af væsken
- bevarelse af masse i systemet
- bevægelse af årevæg
- randbetingelser.

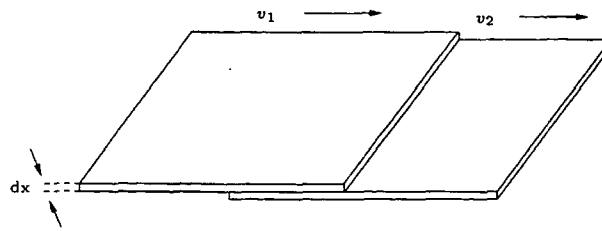
Resultatet er et sæt ligninger; en matematisk model, der forbinder systemets egenskaber med blodtryk og -flow, og dermed kan forudsige de hæmodynamiske fænomener som kan forventes i en åre af de givne dimensioner, elasticitet osv. Vi vil i det følgende uddybe ovenstående begreber og fænomener.

### 2.2 Blods strømningsrelaterede egenskaber

#### 2.2.1 Viskositet

Væskers flow gennem rør styres bla. af en fundamental egenskab for væsker, *viskositeten*, som er en indre friktion mellem tilstødende væskelag. Denne friktion gør at hvis et lag af en viskøs væske bliver sat i bevægelse ved tilførelse af kraft, bliver bevægelsen kommunikeret til de tilstødende lag (se figur 2.1).

Lagene er i kontakt over et areal  $A$ , og hvert lag har tykkelsen  $dx$ . Stresset  $S$ , eller kraften pr. areal, der er nødvendigt for at bevæge lagene i kraft af



**Figur 2.1** Illustrering af viskositet. Væsken antages bestående af infinitesimalt tynde lag, med tykkelsen  $dx$ . Hvert lag bevæger sig med en hastighed,  $v_1$  og  $v_2$ . Friktionen, når et lag glider over et andet, udtrykkes som kraften nødvendig for at producere bevægelsen delt med kontaktarealet. I en newtonsk væske er stresset proportional med hastighedsgradienten, og proportionalitetskonstanten er væskens viskositet [14].

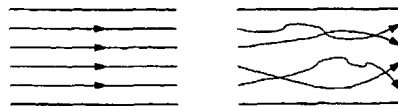
friktion mellem lagene vil være proportional med hastighedsgradienten,  $dv/dx$ , også kaldet shearraten. Proportionalitetskonstanten  $\eta$  er defineret som væskens viskositet<sup>1</sup> og er afhængig af bla. væskens temperatur og hastighed,

$$S = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dx}. \quad (2.1)$$

Vand og mange andre væsker hvis opførsel beskrives ved en sådan lineær proportionalitet mellem hastighedsgradient og påtrykt stress kaldes *newtonske væsker*. Blod er dog ikke en perfekt newtonsk væske, da viskositeten ikke er konstant ved lave shearrater, og da den varierer med diameteren i meget små rør (dog er den forholdsvis konstant ved høje shearrater i rør større end 1 mm i diameter [14]). Vands viskositet ved 37°C er  $6.95 \cdot 10^{-3}$  poise, mens værdierne for humant og hundebloods<sup>2</sup> viskositet normalt ved 37°C ligger mellem  $3 \cdot 10^{-2}$  og  $4 \cdot 10^{-2}$  poise [14]. Kinematisk viskositet  $\nu$ , der ofte benyttes i blodmodellering, defineres som  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , hvor  $\rho$  er væskens densitet.

## 2.2.2 Laminar og turbulent strømning

Blodstrømning i en åre antages ofte værende laminar. Betragtes væsken som opdelt i tynde lag, vil laminart flow, til forskel fra turbulent flow, sige at lagene bevæger sig parallelt uden at de blandes (se figur 2.2).

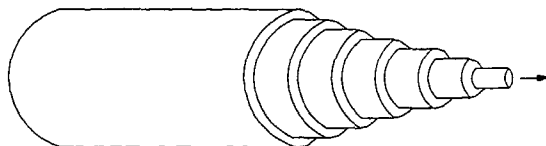


**Figur 2.2** Figuren viser forskellen på laminar strømning (til venstre) og turbulent strømning (til højre) [12].

<sup>1</sup>Standardenheden for viskositet er poise, og 1 poise er lig  $1 \text{ dyn s/cm}^2$ , hvor  $1 \text{ dyn} = 10^{-5}$  Newton.

<sup>2</sup>I [5] sammenlignes den opstillede model med målinger foretaget på hunde.

I en åre vil disse væskelag ofte bevæge sig i en serie af cylinderformede koncentriske skaller (se figur 2.3) og strømmingen ved randen vil gå mod nul. Faktisk er det en fundamental eksperimentel iagttagelse at en væskes hastighed går mod nul, som man nærmer sig begrænsningsfladen [12]. I resten af åren vil hastighedsprofilerne være meget forskellige, bla. afhængigt af om flowet er jævnt eller pulserende. Ved jævnt, laminart flow ses eksempelvis ofte en parabolisk hastighedsprofil.



**Figur 2.3** Eksempel på laminart flow i en åre. I dette eksempel er hastigheden altså højest i centrum af åren.

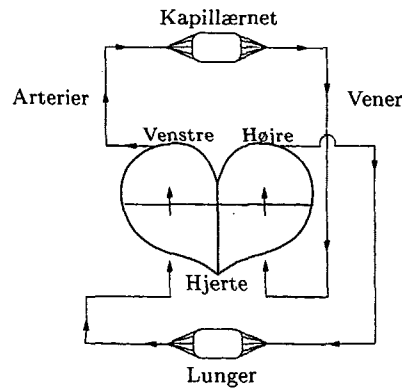
Reynolds beskrev i 1833 nogle af de faktorer, der har indflydelse på væskebevægelsesovergange fra laminart til turbulent flow. De vigtigste faktorer for udviklingen af turbulent flow er rørets dimensioner, gennemsnitshastigheden af flowet samt den kinematiske viskositet [14]. Disse blev derfor kombineret i det såkaldte Reynolds tal, der udtrykker et flows tendens til turbulens. Reynolds tal for flow i en cylinder er

$$N_R = \frac{2r\bar{v}}{\nu}, \quad (2.2)$$

hvor  $r$  er radius,  $\bar{v}$  er flowets gennemsnitshastighed og  $\nu$  den kinematiske viskositet. Jo højere Reynolds tal, des større tendens til turbulens. Tælleren udtrykker den inertielle modstand, altså at massive objekter udviser modstand når de forsøges bevæget, og nævneren den viskøse modstand. Altså udtrykker Reynoldstallet at opretholdelsen af det laminare flow afhænger af balancen mellem disse [14]. Hvis flowet er pulserende, mangler Reynoldstallet (2.2) en faktor, nemlig den tid der er nødvendig for udviklingen og udbredelsen af hvirvler og turbulens.

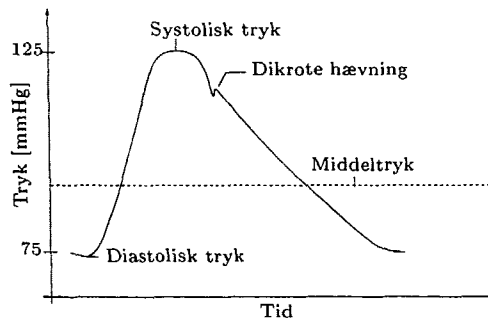
### 2.2.3 Pulserende strømning i årer

I mennesker flyder blodet rundt i kroppen gennem kredsløbsystemet, dels for at føre iltet blod til organerne og dels for at føre det afiltede blod væk igen. Fra hjertets venstre ventrikel pumpes det iltede blod ud i aorta og det resterende arterienet. I kapillærnettene afgives ilten og blodet føres nu tilbage gennem venerne via hjertets højre ventrikel til lungerne og hjertet, hvor det på ny iltet og pumpes gennem systemet (se figur 2.4).



Figur 2.4 Diagram over blodkredsløbet.

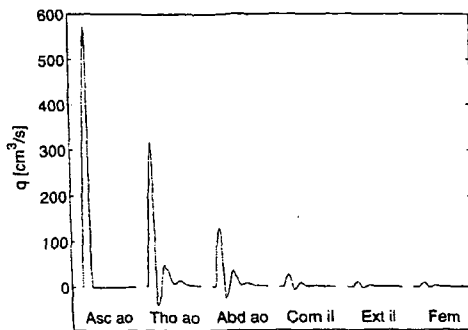
Eftersom hjertets pumpen ikke er jævn er blodstrømningen i arteriesystemet pulserende, hvilket forårsager både accelerationer og decelerationer samt positivt og negativt flow. Hjertet pumper dog periodisk, hvorfor blodstrømningen også er periodisk. I en sådan periode taler man om hjertets kontraktionsfase, *systolen*, hvor hjertet udpumper blod og hvor blodtrykket opnår sin højeste værdi, det *systoliske blodtryk*, samt dets afslapningsfase, *diastolen*, hvor hjertet fyldes med blod og hvor det arterielle blodtryk antager sin laveste værdi, det *diastoliske blodtryk*, (se figur 2.5) [20]. Ydermere ses på blodtrykkurven den såkaldte *dikrote hævnning*, som bl.a. forklares ved en kortvarig tilbagestrømning mod de netop lukkede aortaklapper [20].



Figur 2.5 Typisk arterielt blodtryk under kredsløbscyklus [2].

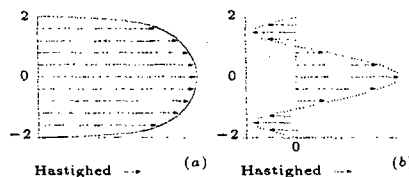
Fra hjertet udpumpes altså en mængde blod, der forgrener sig ned gennem kredsløbssystemet. Denne kraftige udpumpning forårsager at de store arterier, for at kunne absorbere denne blodmængde, udvider sig. Samtidig forgrener årerne sig ned gennem systemet hvilket resulterer i at flowet ned gennem kredsløbssystemet bliver mere og mere jævnt, se figur 2.6.

Havde blodstrømningen ikke været periodisk men jævn, ville tværsnitshastighedsprofilen være parabolisk, mens der for et pulserende flow f.eks. kan fremkomme en profil som figur 2.7(b). At flowet er pulserende gør at tværsnitshastighedsprofilen svinger meget over perioden, og i dette eksempel endda flyder i



Figur 2.6 Flowet for en kredsløbscyklus, afbildet mod tiden, for opstigende aorta (ascending aorta), brystkasse aorta (thorax aorta) og bughule aorta (abdominal aorta) samt den store hoftearterie (common iliac) og dens forgrening (external iliac) og til sidst lårarterien (femoral arterie)[17].

begge retninger. Det sidste skyldes at årevæggen er *elastisk*, og derfor kan ændre form pga. forskellige påvirkninger<sup>3</sup>. Med elasticiteten af et materiale menes materialets evne til at returnere til sin originale form og dimensioner efter en deformation, og hvis et materiales elastiske egenskaber er uafhængige af i hvilken retning kraften er påført, kaldes materialet *isotropisk*.



Figur 2.7 Eksempel på tværsnitshastighedsprofiler i en åre med radius 2. På figur (a) ses et tidspunkt i flowcyklus, hvor der udelukkende er positivt flow, mens der på figur (b) er både positivt og negativt flow.

I praksis er de fleste materialer *viskoelastiske*, dvs. at de udviser både elastiske og viskøse egenskaber. Dette forhold er også gældende for årevæggen som indeholder mange forskellige slags væv, hver med sine karakteristiske egenskaber. Det betyder bl.a. at når årevæggen udvider sig for at kunne absorbere de pulserende blodmængder, så tager det længere tid for åren at returnere til sin hviletilstand; vi siger at materialet *relakserer*.

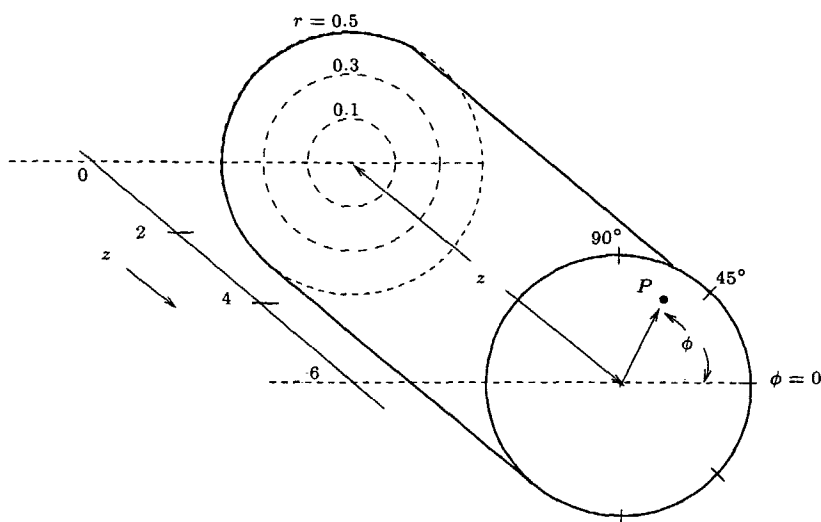
## 2.3 Blodets bevægelse

Blodets bevægelse beskrives ved de såkaldte Navier-Stokes ligninger. Sammen med disse anvendes ofte kontinuitetsligningen for usammentrykkelige væsker, hvorfor vi i det følgende vil opstille disse.

<sup>3</sup>Man kan utvivlsomt producere tilsvarende profiler også i faste rør, blot med de rette randbetingelser i rørets ender. Det er imidlertid ikke det der er tale om her.

### 2.3.1 Navier-Stokes ligningerne

I 1822 publicerede Navier en analyse af laminart flydende viskøse væskers bevægelse, som i 1845 blev udvidet og korrigeret af Stokes (heraf Navier-Stokes ligningerne). Ved dette sæt differentilligninger kan en væskes bevægelse i ethvert punkt beskrives. Hvis systemet eksempelvis består af et enkelt cylindrisk rør, og væskestrømningen er laminar, kan enhver partikels position bekvemt defineres i cylinderkoordinater (se figur 2.8). En enkelt partikels longitudinale



**Figur 2.8** Cylinderkoordinater. Ethvert punkts placering kan defineres ved de tre koordinater  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$ . I dette eksempel er punktet  $P$  defineret ved  $r = 0,3$ ,  $\phi = 65^\circ$  og  $z = 6$ .

hastighed  $v_z$  bliver derfor  $\frac{\partial z}{\partial t}$ , den radiale hastighed  $v_r$  tilsvarende  $\frac{\partial r}{\partial t}$  og den azimuthale hastighed  $v_\phi$  bliver  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ . De kræfter, der er involveret i væskens bevægelse kan under ovennævnte omstændigheder beskrives i tre ligninger som beskriver kræfterne relateret til trykgradienterne  $\frac{\partial p}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial r}$  og  $\frac{\partial p}{\partial \phi}$  [14]. Hvis der ikke er nogen azimuthalhastighed og de øvrige komponenter ikke afhænger af  $\phi$ , beskriver de to førstnævnte ligninger bevægelsen, og er givet ved

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \nu \rho \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right], \quad (2.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] - \nu \rho \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right]. \quad (2.4)$$

Ligning 2.3 beskriver den longitudinale trykgradient, og ligning 2.4 den radiale trykgradient. De første tre led på højre side af 2.3, der multipliceres med densiteten  $\rho$ , repræsenterer inertikræfter. De sidste tre led som multipliceres med  $\nu \rho$  repræsenterer viskøse kræfter, dvs. kræfter forbundet med de forskellige



væskelags indbyrdes gnidning. Ligningerne udtrykker altså en antagelse om at trykfaldet pr. længdeenhed er givet ved inertikræfterne minus de viskøse tab [14]. De inertielle led kommer fra Newtons 2. lov<sup>4</sup>, med densiteten  $\rho$  som udtryk for masse pr. volumenenhed, og hvor leddene  $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ ,  $v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}$  og  $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$  repræsenterer accelerationer [14]. Disse led fremkommer eftersom accelerationen er  $a = \frac{dv_z}{dt}$  og

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hvert af disse led er associeret med et specifikt fænomen [14]:

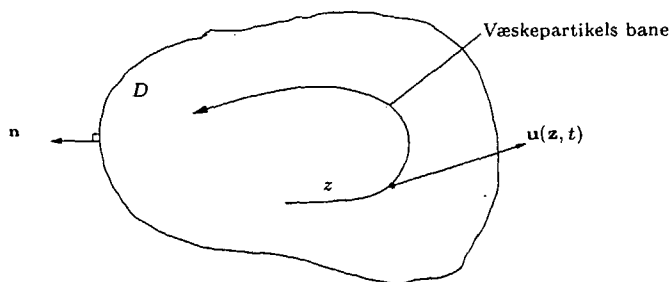
$\frac{\partial v_z}{\partial t}$  repræsenterer ren longitudinal (lokal) acceleration.

$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}$  udtrykker den ændring i den longitudinale acceleration som en væskepartikel nødvendigvis oplever hvis den passerer fra det ene til det andet af to tilgrænsende væskelag med forskellige longitudinale hastigheder<sup>5</sup>.

$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$  repræsenterer den acceleration lagene i væsken påvirkes af hvis åren udvides eller forsnævres. Denne forsnævring eller udvidelse kan evt. være repræsenteret i systemet i form af randbetingelser. F.eks. svarer et rør lukket i den ene ende til en total forsnævring af åren. For en inkompressibel væske i et fast uendelig langt rør er dette led derfor nul.

### 2.3.2 Kontinuitetsligningen

Kontinuitetsligningen udtrykker massebevarelse, dvs. at nettoraten af masseflux til systemet er lig raten af oplagring af masse i systemet. Lad os betragte en væskepartikel i et to- eller tredimensionelt domæne  $D$  (se figur 2.9).



Figur 2.9 Væskepartikels bevægelse i et domæne  $D$  [7].

Lad  $\mathbf{z}(t)$  betegne partiklens position til tiden  $t$ , og tilsvarende  $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$  partiklens hastighed. Under antagelse af at væsken har en veldefineret og kontinuert den-

<sup>4</sup>Kraft lig masse gange acceleration;  $F = ma$ .

<sup>5</sup>Hvilket tilgrænsende lag altid har, medmindre hastighedsprofilen er perfekt flad.

sitet<sup>6</sup>  $\rho$  til enhver tid, er væskemassen  $m$  i enhver delmængde  $W$  af  $D$  givet ved

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{z}, t) dV, \quad (2.6)$$

hvor  $dV$  er volumenelementet i planen eller rummet. Betragter vi nu et vilkårligt fast  $W$  sker ændringen af massen med raten

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{z}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{z}, t) dV. \quad (2.7)$$

Lad  $\partial W$  angive randen af  $W$ . Ud fra massebevarelsen får vi at raten af forøgelse af masse i  $W$  er lig raten hvormed masse passerer  $\partial W$  i den indadrettede retning

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (2.8)$$

hvor  $\mathbf{n}$  er den udadrettede normal defineret i punkter på  $\partial W$  og  $dA$  er arealelementet på  $\partial W$ . Fra divergensteoremet<sup>7</sup> har vi at

$$\int \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \oint \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (2.9)$$

hvorfor 2.7 og 2.8 giver

$$\int_W \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0. \quad (2.10)$$

Da dette skal holde for alle  $W$ , og eftersom integranden er kontinuert, er 2.10 ækvivalent med den såkaldte kontinuitetsligning [7]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.11)$$

I mange tilfælde kan man regne væsken for homogen og usammentrykkelig, dvs. at densiteten  $\rho$  er konstant, hvorved kontinuitetsligningen for usammentrykkelige væsker kan opskrives [14]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.12)$$

For et todimensionelt hastighedsfelt i cylinderkoordinater vil ligning 2.12 se ud som følger

<sup>6</sup>Denne *kontinuumsantagelse* regnes for at være ekstremt nøjagtig ved beskrivelse af makroskopiske fænomener [7].

<sup>7</sup>Divergensteoremet udtrykker at vi får det samme om vi summerer alle kildernes bidrag til fluxen indenfor volumet, eller står på randen og summerer hvor meget der passerer.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Der findes ingen generel løsning af Navier-Stokes ligningerne, blot analytiske løsninger til specialtilfælde. Eftersom fluiddynamiske problemer opstilles på baggrund af Navier-Stokes ligningerne, er det af denne årsag at numeriske beregninger er nødvendige i løsningen af disse. Således også for Cavalcantimodellen som i det følgende kapitel opstilles og diskuteres.



## Kapitel 3

# Cavalcantimodellen

### 3.1 Opstilling af den konceptuelle model

I [5] modelleres blodets bevægelse vha. kontinuitets- og Navier-Stokes ligningerne, hvor man tager højde for arterievæggens bevægelse samt den ikke-lineære bevægelse af blodet.

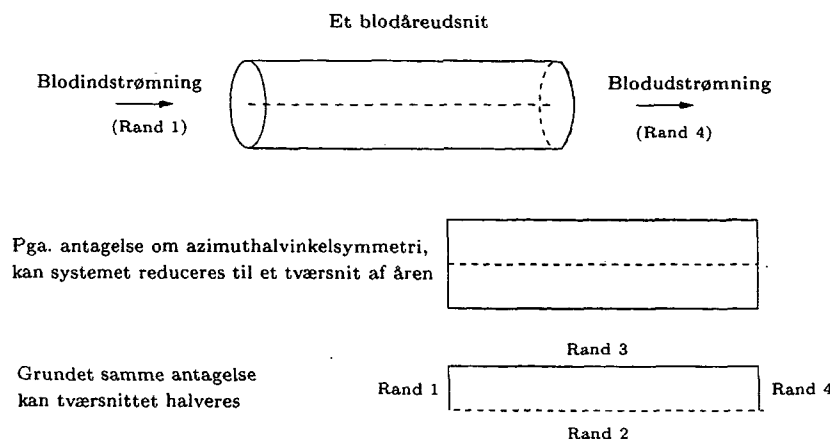
#### 3.1.1 Indledende antagelser og begrænsninger

Arterien modelleres som en retlinet, deformerbar cylinder af isotropisk, inkompressibelt, viskoelastisk materiale med et cirkulært tværsnit og uden longitudinale bevægelser. For at kunne simulere forskellige tværsnit og vægstivhed langs åren er indre radius, vægtykkelse og vægelasticitet afhængige af den aksiale position. Da der yderligere antages azimuthalvinkelsymmetri i åren, begrænser man sig til kun at udtale sig om en kort del af en arterie, samt et åreudsnit ikke i nærheden af en bifurkation (åreforgrening). Med antagelsen om azimuthalvinkelsymmetri kan systemet reduceres fra tredimensionelt til todimensionelt, da et tværsnit på langs af åren spejlet rundt om den longitudinale akse løbende gennem centrum vil give det tredimensionelle billede af åren (se figur 3.1).

Af azimuthalvinkelsymmetriantagelsen kan dette tværsnit yderligere halveres, så det der reelt modelleres over er et tværsnit på langs af åren, som løber langs den longitudinale akse gennem centrum og ud til randen (se figur 3.1).

På baggrund af antagelsen om azimuthalvinkelsymmetri kan systemet matematisk forsimples væsentligt, da der i artiklen argumenteres for rimeligheden i at antage at der ingen azimuthal bevægelse er, og at flowet dermed er todimensionalt, dvs. med udelukkende en aksial og en radial hastighedskomponent. Herudover argumenteres for at eftersom den indre radius  $R$  er væsentligt mindre end bølgelængden af trykbølgen, reducerer ligning 2.4 til  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ , og tilbage er Navier-Stokes ligning 2.3. Således antages trykket uafhængigt af den radiale koordinat  $r$ . Denne antagelse undersøger vi nærmere i afsnit 3.2.1.

Blodet modelleres som en newtonsk væske på baggrund af henvisninger til tidligere arbejde som har vist at der ingen signifikante forskelle er på flowmønstre



Figur 3.1 Modelleringsystem

for en ikke-newtonsk væske og en newtonsk væske i netop den her behandlede type blodstrømning [5].

### 3.1.2 Modellering af blodets bevægelse

Ud fra de indledende antagelser og begrænsninger kan kontinuitets- og Navier-Stokes ligningerne opskrives i cylinderkoordinater som følger

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (3.2)$$

Disse ligninger modellerer altså blodets opførsel. I [5] udelades leddet  $\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$  i ligning 3.2, da de henviser til tidligere undersøgelser, som har påvist leddet negligabelt i forhold til de radiale afledede. Vi vender tilbage til denne antagelse i afsnit 3.2.1.

For at udtrykke de fysiske begrænsninger for væskestrømningen som udgøres af åren, defineres randbetingelserne som følger

$$v_z(r, z, t)|_{r=R} = 0 \quad (3.3)$$

$$v_r(r, z, t)|_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.5)$$

$$v_r(r, z, t)|_{r=0} = 0, \quad (3.6)$$

hvor  $R = R(z, t)$  repræsenterer årens indre radius. Vi ved fra afsnit 2.2 at væskens aksiale hastighed ved randen er nul (ligning 3.3). Ligning 3.4 udtrykker at væskens radiale hastighed antages lig randens radiale hastighed, dvs. at der ikke kan opstå tomrum mellem væsken og randen, og at væsken er usammentrykkelig og ikke kan være uden for randen. Ligningerne 3.5 og 3.6 udtrykker antagelser om at væsken i åren opfører sig symmetrisk omkring centrum af åren, dvs. azimuthalbevægelse antages ikke eksisterende i systemet. Eftersom den indre radius  $R(z, t)$  ændrer sig over tid, er randen bevægelig, hvilket gør ligningssystemet kompliceret at løse. Systemet ændres derfor til et system i et fast rør ved at introducere den dimensionsløse koordinat  $\eta$

$$\eta = \frac{r}{R(z, t)}, \quad (3.7)$$

som forholdet mellem den radiale koordinat  $r$  og den indre radius  $R(z, t)$ . Det område vi modellerer nu er altså et plan ned gennem åren langs centrumsaksen, med faste rande, da  $z$ -koordinaten løber i årens længde og  $\eta$  i intervallet  $[0, 1]$ .

De nye randbetingelser<sup>1</sup> bliver for  $r = R$ , dvs. for  $\eta = 1$

$$w(\eta, z, t)|_{\eta=1} = 0, \quad (3.8)$$

$$u(\eta, z, t)|_{\eta=1} = \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (3.9)$$

Og for  $r = 0$ , dvs. for  $\eta = 0$

$$u(\eta, z, t)|_{\eta=0} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0,$$

dvs.

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (3.11)$$

da  $R \neq 0$  (vi antager at åren ikke kan klappe sammen). Den nye koordinat indføres i ligning 3.1

<sup>1</sup>Ved indførelse af den dimensionsløse størrelse  $\eta$  ændres den radiale hastighed  $v_r$  til  $u$  og den aksiale hastighed  $v_z$  til  $w$ .

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{u}{\eta R} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} = \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u}{\eta R} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \quad (3.13)$$

Efter koordinatskiftet ser ligning 3.1 ud som følger

$$\boxed{\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u}{\eta R} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\eta}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0} \quad (3.14)$$

Vi skifter nu også koordinater i ligning 3.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} + w \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R \eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

som er lig

$$\begin{aligned} - \frac{\eta}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} + w \left( - \frac{\eta}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{\eta R^2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

og som kan omskrives til

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{R} \left( \eta \left( \frac{\partial R}{\partial t} + w \frac{\partial R}{\partial z} \right) - u \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)} \quad (3.17)$$

Ligningerne 3.14 og 3.17 beskriver nu blodets bevægelse i åren under de nævnte begrænsninger og antagelser, og de er dermed sammen med randbetingelserne en model for blodets bevægelse. I [5] forsimples disse yderligere for at kunne løse ligningerne numerisk.

Ved at gange 3.14 med  $\eta R$  og integrere mht. den radiale koordinat fra 0 til  $\eta$  fås

$$\int_0^\eta \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \int_0^\eta u d\eta + \int_0^\eta \eta R \frac{\partial w}{\partial z} d\eta - \int_0^\eta \eta^2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = 0. \quad (3.18)$$

Første og andet led i 3.18 bidrager ved beregning med leddet  $w\eta$ , hvorved 3.18 nu ser ud som følger

$$w\eta + \int_0^\eta \eta R \frac{\partial w}{\partial z} d\eta - \int_0^\eta \eta^2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = 0. \quad (3.19)$$



Da tredje led på venstre side ved partiel integration kan omskrives til

$$-\frac{\partial R}{\partial z} w \eta^2 + 2 \int_0^\eta w \frac{\partial R}{\partial z} \eta d\eta,$$

kan ligning 3.19 omskrives som følger

$$\begin{aligned} u\eta + \int_0^\eta \eta R \frac{\partial w}{\partial z} d\eta - \frac{\partial R}{\partial z} w \eta^2 + 2 \int_0^\eta w \frac{\partial R}{\partial z} \eta d\eta &= \\ u\eta + \int_0^\eta R \frac{\partial w}{\partial z} \eta d\eta - \frac{\partial R}{\partial z} w \eta^2 + 2 \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^\eta w \eta d\eta &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Heraf får vi følgende udtryk for  $u$

$$u = \eta w \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{2}{\eta} \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^\eta \eta w d\eta - \frac{R}{\eta} \int_0^\eta \eta \frac{\partial w}{\partial z} d\eta. \quad (3.21)$$

Ved at indsætte  $\eta = 1$  og randbetingelserne 3.8 og 3.9 bliver 3.21

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -2 \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^1 \eta w d\eta - R \int_0^1 \eta \frac{\partial w}{\partial z} d\eta. \quad (3.22)$$

Ved division med  $R$ , og da følgende gælder for  $\eta = 1$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{2}{R} \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^1 \eta d\eta, \quad (3.23)$$

kan 3.22 omskrives til

$$\frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^1 \eta d\eta = -\frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^1 \eta w d\eta - \int_0^1 \eta \frac{\partial w}{\partial z} d\eta, \quad (3.24)$$

som giver

$$-\int_0^1 \eta \frac{\partial w}{\partial z} d\eta = \int_0^1 \eta \left( \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w \right) d\eta. \quad (3.25)$$

Det antages i [5] at integranderne er lig hinanden

$$-\eta \frac{\partial w}{\partial z} = \eta \left( \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w \right), \quad (3.26)$$

hvorved et udtryk for  $\frac{\partial w}{\partial z}$  fås

$$-\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w. \quad (3.27)$$

Denne antagelse kommer vi også nærmere ind på i afsnit 3.2. Ved at indsætte 3.27 i 3.21 findes følgende udtryk for den radiale hastighed  $u$

$$u = \eta w \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{2}{\eta} \int_0^\eta \eta \frac{\partial R}{\partial z} w d\eta + \frac{2}{\eta} \int_0^\eta \eta \frac{\partial R}{\partial t} d\eta - \frac{2}{\eta} \int_0^\eta \eta \frac{\partial R}{\partial z} w d\eta. \quad (3.28)$$

Andet og sidste led på højre side går nu ud og tilbage er<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} u &= \eta w \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{2}{\eta} \int_0^\eta \eta \frac{\partial R}{\partial t} d\eta \\ &= \eta w \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{2}{\eta} \frac{\partial R}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \eta^2 \right]_0^\eta \\ &= \eta w \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{2}{\eta} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{1}{2} \eta^2 \\ &= \eta w \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} \eta \\ &= \eta \left( w \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Indsættes nu 3.29 i 3.17 får vi at

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \quad (3.30)$$

I [5] indsættes yderligere 3.27 hvorfor

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w^2 + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \quad (3.31)$$

Ligningerne 3.14 og 3.30/3.31 er således også en model for blodets bevægelse. Man kan diskutere hvorvidt ligning 3.31 er en forsimpning i forhold til ligning 3.30, men i [5] er der to pointer ved at foretage den sidste omskrivning. For det første viser ligning 3.31 tydeligt at der optræder to ikke-lineære led direkte afhængige af radius, dens afledte og den aksiale hastighed [5], og for det andet muliggør det den diskretisering af ligningerne der er nødvendig for at kunne løse vha. Finite Difference metoden. Udtrykkes nemlig den aksiale hastighedskomponent  $w$  som en rækkeudvikling

$$w(\eta, z, t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(z, t) (\eta^{2k} - 1), \quad (3.32)$$

som opfylder randbetingelserne og er azimuthalvinkelsymmetrisk, bliver den radiale hastighedskomponent (ligning 3.29) heraf

<sup>2</sup>Ligningerne 3.27 og 3.29 er iøvrigt en partikulær løsning til 3.14.

$$u(\eta, z, t) = \eta \left( \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial z} \sum_{k=1}^N \alpha_k(z, t) (\eta^{2k} - 1) \right). \quad (3.33)$$

hvorved der opnås et ligningssystem (se [5] for nærmere detaljer) uden eksplicit optræden af hverken den aksiale eller radiale hastighed. Denne diskretisering udnyttes videre til at udtrykke flowet  $Q$  vha. 3.32 som

$$Q(z, t) = -\pi R^2 \sum_{k=1}^N \frac{k}{k+1} \alpha_k. \quad (3.34)$$

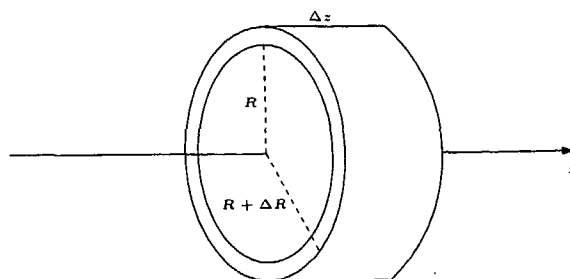
Som vi skal se i det følgende anvendes dette udtryk i [5] til at beskrive årevæggens bevægelse.

### 3.1.3 Modellering af årevægsbevægelse

Væggens bevægelse beskrives på følgende måde

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (3.35)$$

Der argumenteres ikke nærmere for opstillingen af ligningen, men kigger vi lidt nærmere på den ser vi at det sådan set er en kontinuitetsligning. Dvs. den udtrykker at væsken er inkompressibel, og at der er massebevarelse i systemet.



Figur 3.2 Infinitesimal skive af blodåre.

Har vi nemlig et flow som afhænger af  $z$  og  $t$ , dvs. at der strømmer et givent volumen igennem et tværsnit af åren pr. tidsenhed, så har vi at volumenændringen i et lille tidsskridt  $\Delta t$  i en infinitesimal skive af åren (se figur 3.2) er

$$(Q(z + \Delta z, t) - Q(z, t)) \Delta t. \quad (3.36)$$

Fordi væsken er inkompressibel og der er massebevarelse, må der ske en tilsvarende (men modsat) volumenændring givet ved

$$-\pi((R + \Delta R)^2 - R^2) \Delta z. \quad (3.37)$$

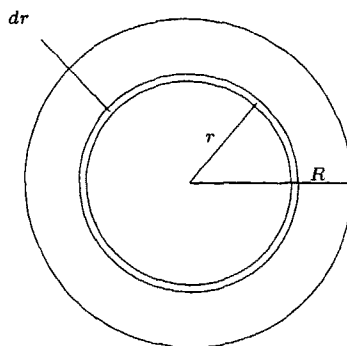
Sætter vi de to udtryk lig hinanden og arrangerer lidt om får vi at

$$-\frac{(Q(z + \Delta z, t) - Q(z, t))}{\Delta z} = \frac{\pi(\Delta R)^2}{\Delta t} + \frac{2\pi R \Delta R}{\Delta t}. \quad (3.38)$$

Lader vi nu de små ændringer gå mod nul reduceres dette til ligning 3.35 da

$$\frac{(\Delta R)^2}{\Delta t} = \frac{\Delta R}{\Delta t} \Delta R \rightarrow 0 \text{ for } \Delta R \rightarrow 0 \quad (3.39)$$

Flowet som udtrykt ved ligning 3.34 repræsenterer imidlertid ikke et umiddelbart anvendeligt udtryk mht. simuleringer foretaget i FEMLAB, fordi diskretiseringen styres af faste algoritmer i programmet. Vi ønsker altså at løse ligningerne uden brug af denne rækkeudvikling, og behøver derfor et andet udtryk for flowet. Da flow udtrykker hvor meget blod, der strømmer igennem et tværsnit af åren til ethvert tidspunkt vælger vi istedet at integrere hastigheden over et åretværsnit. Fra azimuthalvinkelsymmetriantagelsen får vi at hastigheden i en vilkårlig radius  $r$  er konstant rundt i den  $dr$  tynde strimmel (se figur 3.3).



Figur 3.3 Åretværsnit.

Herfra følger at

$$Q = \int_0^R v_z 2\pi r dr. \quad (3.40)$$

Ved at differentiere  $Q$  mht.  $z$  får vi følgende udtryk

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial v_z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= 2\pi R v_z \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial v_z} \left( \int_0^R v_z 2\pi r dr \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= 2\pi R v_z \frac{\partial R}{\partial z} + \left( \int_0^R \frac{\partial}{\partial v_z} (v_z 2\pi r) dr \right) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= 2\pi R v_z \frac{\partial R}{\partial z} + \int_0^R 2\pi r dr \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= 2\pi R v_z \frac{\partial R}{\partial z} + \pi R^2 \frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Vi laver nu det samme koordinatskift som før,  $\eta = \frac{r}{R(z,t)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial z} &= 2\pi R w \frac{\partial R}{\partial z} + \pi R^2 \left( -\frac{\eta}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&= \pi R \left( 2w \frac{\partial R}{\partial z} - \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial w}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Dette udtryk kan nu indsættes i ligning 3.35,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{2\pi R} \left( \pi R \left( 2w \frac{\partial R}{\partial z} - \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( 2w \frac{\partial R}{\partial z} - \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial w}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

hvorved vi får et udtryk for  $\frac{\partial R}{\partial t}$ ,

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial t} = -w \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z}} \tag{3.43}$$

som er udtrykt ved de afhængige variable  $w$  og  $R$ . Sammenligner vi dette udtryk med det udtryk for  $\frac{\partial R}{\partial t}$  der simpelt fremkommer fra ligning 3.27, ses at ligning 3.43 indeholder et ekstra led. Denne uoverensstemmelse kommer vi nærmere ind på i afsnit 3.2.

### 3.1.4 Tryk-radiusrelation

I [5] opstilles følgende konstitutive ligning til beskrivelse af sammenhængen mellem tryk og radius

$$p(z, t) = \frac{\mu_w \frac{\partial R}{\partial t} + \sigma_0 (e^{\beta(\delta-1)} - 1)}{\frac{r_m}{h} \delta^2 - \frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

hvor  $\mu_w$  er årevæggens viskositet,  $h \equiv h(z)$  er vægtykkelsen i hviletilstand (dvs. ved  $p = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ ) og  $r_m \equiv r_m(z)$  radius målt til midt i væggen, ligeledes i hviletilstand. Udtrykket  $\sigma_0 (e^{\beta(\delta-1)} - 1)$  repræsenterer det statiske strain-stress forhold ( $\sigma_0$  og  $\beta$  er konstanter uafhængige af den aksiale koordinat og tiden) mens  $\delta$  udtrykker forholdet mellem radius af åren i påvirket og upåvirket tilstand, defineret som

$$\delta \equiv \frac{R_m}{r_m} = \frac{R + \sqrt{R^2 + 2r_m h}}{2r_m}, \quad (3.45)$$

hvor fodindexet  $m$  igen angiver at der måles til midt i årens væg.

Samlet er det altså ligningerne 3.14, 3.31 og 3.35, med hastighederne udtrykt ved ligningerne 3.32 og 3.33, samt den konstitutive relation 3.44 og randbetingelserne 3.8 til 3.10 som simuleres i [5]. Herudover er det nødvendigt at specificere betingelserne i hver ende af det simulerede arterieudsnit, dvs. hvordan er in- og outflow samt begyndelsesbetingelserne for systemet. I [5] opstilles en elektrisk netværksanalog for at opstille ligninger for in- og outflow, udtrykt ved et pulserende startflow der simulerer hjertets pumpe rytme og nogle valgte impedanser. Disse impedanser udtrykker blot at der i det samlede kredsløb er en modstand i årerne både før og efter den modellerede sekvens.

## 3.2 Cavalcantimodellens antagelser

Før vi præsenterer Cavalcantimodellens resultater vil vi i dette afsnit diskutere de forskellige antagelser der gøres i [5], for at undersøge om de er velbegrundede eller om man med fordel kunne gøre andre antagelser.

### 3.2.1 Dimensionsanalyse

Vi vil undersøge følgende antagelser gjort i [5]

- $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$  anses for negligeabel i 3.17
- Navier-Stokes ligningen for den radiale trykgradient 2.4 reduceres til  $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$  under antagelse af at den indre radius  $R(z, t)$  er væsentligt mindre end bølgelængden af trykbølgen.

For at kunne evaluere de enkelte leds betydning i en ligning, kan det være hensigtsmæssigt at normere de forskellige størrelser for at evaluere deres størrelse i forhold til hinanden. Dette gøres ved at indføre dimensionsløse variable og vha. disse omskrive ligningerne til dimensionsløs form. Dimensionsanalysen vil give

os en indsigt i ligningernes enkelte leds vægtning i forhold til hinanden, og vi kan på denne måde vurdere om nogle af leddene er negligable.

I en blodåre er den indre radius væsentligt mindre end årens længde, hvorfor det må være rimeligt at antage at den radiale hastighed er betydeligt mindre end den longitudinale hastighed. Vi antager yderligere at følgende forhold gælder [18]

$$\frac{u_0}{w_0} = \frac{R_0}{L_0}, \quad (3.46)$$

hvor  $u_0$  og  $w_0$  er karakteristiske hastigheder i hhv. radial og axial retning,  $L_0$  er en karakteristisk længde og  $R_0$  er en karakteristisk indre radius af blodåren. I [5] er radius i hviletilstand  $r_m = 1.65$  mm, hvilket vi anvender som den karakteristiske radius, og årens længde er 30 cm, så  $L_0 = 30$  cm. Altså er størrelsesforholdet

$$\varepsilon \equiv \frac{u_0}{w_0} = \frac{R_0}{L_0} = 5.5 \cdot 10^{-3}, \quad (3.47)$$

et lille tal. Til senere brug ønsker vi også at bestemme en karakteristisk hastighed. For en 20 kg tung hund er den normale midlede hastighed i lårarterien 10 cm/s [14]. Vi anvender nu dette tal som den karakteristiske aksiale hastighed, hvorfor vi også kan beregne  $u_0$  fra ligning 3.46

$$u_0 = \frac{R_0}{L_0} w_0 = 0.055 \text{ cm/s}. \quad (3.48)$$

For at undersøge de enkelte leds vægtning i forhold til hinanden indfører vi følgende dimensionsløse størrelser,

$$Z = \frac{z}{L_0}, \quad T = \frac{w_0}{L_0} t, \quad R_d = \frac{R}{R_0}, \quad U = \frac{u}{u_0}, \quad W = \frac{w}{w_0}, \quad P = \frac{p}{\rho w_0^2}, \quad (3.49)$$

Vi omskriver nu ligning 2.3 på dimensionsløs form

$$\begin{aligned} -\frac{w_0^2 \rho}{L_0} \frac{\partial P}{\partial Z} &= \rho \left[ \frac{w_0^2}{L_0} \frac{\partial W}{\partial T} + u_0 U \frac{w_0}{R_0} \frac{\partial W}{\partial R_d} + \frac{w_0^2}{L_0} W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \\ &\quad - \nu \rho \left[ \frac{w_0}{R_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial R_d^2} + \frac{1}{R_d R_0} \frac{w_0}{R_0} \frac{\partial W}{\partial R_d} + \frac{w_0}{L_0^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right], \end{aligned} \quad (3.50)$$

som omskrives til

$$\begin{aligned} -\frac{w_0^2 \rho}{L_0} \frac{\partial P}{\partial Z} &= \rho \frac{w_0^2}{L_0} \left[ \frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial R_d} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] \\ &\quad - \nu \rho \frac{w_0}{R_0^2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial R_d^2} + \frac{1}{R_d} \frac{\partial W}{\partial R_d} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ganger vi nu igennem med  $\frac{L_0}{\rho w_0^2}$  får vi

$$-\frac{\partial P}{\partial Z} = \left[ \frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial R_d} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] - \nu \frac{L_0}{w_0 R_0^2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial R_d^2} + \frac{1}{R_d} \frac{\partial W}{\partial R_d} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right]. \quad (3.52)$$

Her kan vi se at  $\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}$  ganges med  $\varepsilon^2$ . I [5] antages dette led lille i fht. de radiale afledte, men fra ovenstående ligning kan vi se at det er lille i forhold til alle andre led, og man kan derfor se bort fra dette led. Dermed reduceres ligningen til

$$-\frac{\partial P}{\partial Z} = \left[ \frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial R_d} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right] - \nu \frac{L_0}{w_0 R_0^2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial R_d^2} + \frac{1}{R_d} \frac{\partial W}{\partial R_d} \right]. \quad (3.53)$$

Simplificeringen i [5], hvor der netop ses bort fra dette led, må altså siges at være rimelig under ovennævnte antagelser. Vi vil nu undersøge 2.4 på samme måde, så vi omskriver denne på dimensionsløs form

$$\begin{aligned} -\frac{\rho w_0^2}{R_0} \frac{\partial P}{\partial R_d} &= \rho \frac{w_0 u_0}{L_0} \left[ \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial R_d} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right] \\ &\quad - \nu \rho \frac{u_0}{R_0^2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial R_d^2} + \frac{1}{R_d} \frac{\partial U}{\partial R_d} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{U}{R_d^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ganger vi nu igennem med  $\frac{R_0}{\rho w_0^2}$  bliver ligningerne til

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial R_d} &= \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial R_d} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right] \\ &\quad - \nu \frac{\varepsilon^2}{R_0 u_0} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial R_d^2} + \frac{1}{R_d} \frac{\partial U}{\partial R_d} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{U}{R_d^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

De led der multipliceres med  $\varepsilon^2$  antager vi negligeable, hvorved ligningen reduceres til

$$\frac{\partial P}{\partial R_d} = 0. \quad (3.56)$$

Altså har vi nu eftervist [5]'s reducere af 2.4, samt at trykket ikke er afhængigt af radius. Vi vælger også at undersøge kontinuitetsligningen 3.1, som på dimensionsløs form bliver

$$\frac{u_0}{R_0} \frac{\partial U}{\partial R_d} + \frac{u_0 U}{R_0 R_d} + \frac{w_0}{L_0} \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (3.57)$$

Ganger vi igennem med  $\frac{R_0}{u_0}$  fås



$$\frac{\partial U}{\partial R_d} + \frac{U}{R_d} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (3.58)$$

Altså kan man konkludere at alle ligningens led er af samme størrelsesorden og vi kan derfor ikke berettiget simplificere denne ligning. Dette stemmer overens med [5].

### 3.2.2 Diverse antagelser

I det følgende afsnit vil vi komme ind på de resterende antagelser som gøres under opstillingen af modellen i [5].

#### Antagelse om lighed af integrander

I afsnit 3.1.2 viser vi hvordan Cavalcanti kommer frem til ligning 3.27 ved at antage at integranderne i ligning 3.25 er lig hinanden, hvilket vil sige at de udvider en integral egenskab til at gælde lokalt. Som nævnt kan dette omskrives til et udtryk for  $\frac{\partial R}{\partial t}$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -w \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.59)$$

Ved denne antagelse smides imidlertid også en hel klasse af mulige løsninger væk. Som begrundelse for antagelsen henvises til en artikel af samme forfatter [6], hvor der argumenteres ved at to numeriske løsninger hvor denne antagelse er brugt, ikke har været mærkbart forskellige. På trods af at det er blevet illustreret ved hjælp af numeriske løsninger at antagelsen ikke har nogen større betydning for resultatet, kan det ikke siges at være en velunderbygget antagelse i *matematisk* forstand. I afsnit 3.1.3 udledte vi ligning 3.43

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -w \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z},$$

som lidt omskrevet bliver

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial z} \left( \frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} - w \right) - \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.60)$$

hvorfra vi ser at der er et ekstra led indeholdende størrelsen

$$\frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (3.61)$$

i forhold til ligning 3.59. Dvs. at [5] implicit antager 3.61 som negligabel i forhold til  $w$ . Spørgsmålet er nu hvorvidt dette er rimeligt. Vi ved at  $\eta$  er nul i centrum af åren, men vokser ud mod randen. Hvis vi betragter en parabolisk hastighedsprofil går  $w$  mod nul ved randen, men vokser mod centrum af åren, mens  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  opfører sig omvendt. Det betyder altså at centralt i åren dominerer

leddet med  $w$ , mens 3.61 går mod nul i kraft' af at både  $\eta$  og  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  gør. Tæt på randen derimod er det omvendt. Her er  $w$  lille mens de øvrige størrelser vokser, hvilket betyder at 3.61 bliver det dominerende led. Betydningen af dette kan evt. afgøres ved de nye simuleringer vi opsætter.

### Antagelser og forsimplinger vedrørende årevæggen

I [5] antages årevæggen usammentrykkelig og isotropisk. Disse antagelser diskuteres i [14], hvor det påpeges at væggen ikke er isotropisk, dvs. at de elastiske egenskaber ikke er uafhængige af retningen af deformationen. Det påpeges dog at det ved forsøg er påvist at antagelsen om isotropi ikke giver anledning til større fejl i modelleringen af flow-, tryk- og hastighedsforhold. At arterien antages usammentrykkelig, kommenteres i [14] som en rimelig antagelse for normale arterier.

Under det pulserende flow er den longitudinale forskydning i arterievæggen meget lille [19], hvorfor simplificeringen i [5] til udelukkende at have radialbevægelse i åren må være rimelig.

Det antages yderligere at åren har et cirkulært tværsnit, hvilket i [19] siges at være normalt for arterier, dog med visse undtagelser, hvor tværsnittet er elliptisk. Ydermere antages det også i [5], at årens akser er retlinjede, hvorefter de begrænser sig selv til kun at se på et kort udsnit af en åre, samt ikke i nærheden af en bifurkation. Både antagelsen om cirkulært tværsnit og retlinjede akser må siges at være forsimplinger af virkeligheden; en åre har hverken et perfekt cirkulært tværsnit eller retlinjede akser, men for en passende kort åresekvens må antagelsen synes rimelig.

### Antagelser og forsimplinger vedrørende blodet og dets bevægelse

I [5] gøres ingen umiddelbare overvejelser om hvorvidt blodets strømning i den modellerede kontekst er i nærheden af det turbulente område. Vi kan imidlertid afgøre spørgsmålet ved at beregne Reynolds tallet for systemet. Her anvendes middelflowet, dvs. 10 cm/s, hvorfor vi fra ligning 2.2 får at

$$N_R = \frac{2r\bar{v}}{\nu} = \frac{2 \cdot 0.165 \text{ cm} \cdot 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{0.033 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}} = 100, \quad (3.62)$$

hvor data for  $r$  og  $\nu$  er hentet i [5]. Ved regelmæssigt flow indikerer denne værdi en yderst lille tendens for overgang fra laminart til turbulent flow, da denne overgangsværdi normalt ligger omkring 2300. At flowet her er pulserende, gør at Reynolds tallet til visse tider kan blive langt højere, men da der skal en vis tid til at udvikle hvirvler og turbulens, og da det pulserende flow kan være mere stabilt end regelmæssigt flow [14], må det kunne konkluderes at flowet i systemet er laminart. Til sammenligning er der i [14] opgivet et Reynolds tal for en lårarterie i en hund på 130, med maksimal værdi 580 (grundet det pulserende flow).

Der antages i [5] at blodets strømning er azimuthalvinkelsymmetrisk, hvilket sikkert er en god approksimation langt fra bifurkationer og kurvede åresekvenser, men ellers ikke. Derudover er der i opstillingen af Navier-Stokes ligningerne

set fuldstændig bort fra alle ydre kraftpåvirkninger, hvilket i praksis selvfølgelig også er en approksimation. Både mennesker, hunde og andre kredsløbsdrevne organismer har ihvertfald en ting til fælles i eksistensen på denne planet, nemlig det faktum at de alle bevæger sig i det samme tyngdefelt. Tyngdekraftpåvirkningen er givetvis negligeabel sammenlignet med de trykpåvirkninger der er tale om rundt i kredsløbet, men afhængigt af den enkelte specifikke åresekvens placering i rummet er det ihvertfald en approksimation at hastighedsfeltet er totalt rotationsfrit.

I artiklen antages blodets densitet værende konstant, dvs. at blodet antages usammentrykkeligt og homogent. Da blod består af mange forskellige komponenter af meget forskellig størrelsesorden er det ikke homogent, hvilket kunne give anledning til fejl. På grund af denne åres størrelsesorden burde denne antagelse imidlertid ikke give anledning til de store fejl, da årens dimensioner er væsentligt større end partiklerne i blodet. Modellering i kapillærnettene<sup>3</sup> med den samme antagelse ville derimod give anledning til signifikante fejl. At blodet antages usammentrykkeligt er givetvis også en approksimation, ligesom det at blodet antages værende en newtonsk væske, dvs. med konstant viskositet, givetvis giver nogle fejl i simuleringerne i forhold til fænomener *in vivo*. Disse antagelser er imidlertid nødvendige for overhovedet at kunne regne på problemerne i praksis.

### 3.3 Cavalcantimodellens resultater

I det følgende vil vi præsentere udvalgte simuleringresultater<sup>4</sup> fra [5]. Åren som simuleringerne i [5] er udført for er en lårarterie i en hund.

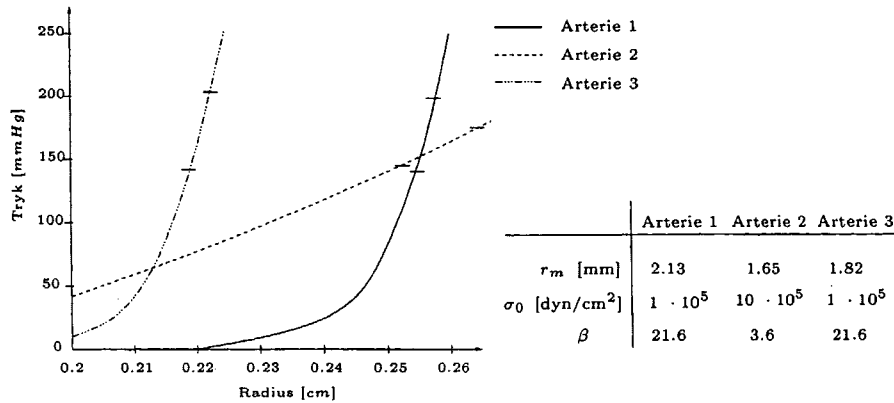
#### 3.3.1 Parametertest

Parametrene  $\sigma_0$  og  $\beta$ , der indgår i trykligningen 3.44, og hvileradius  $r_m$  bestemmer arteriens geometri og stivhed i deformeret tilstand. For at undersøge hvordan disse egenskaber påvirker hæmodynamikken, tester [5] tre sæt parametre ved at gennemføre simuleringer for hvert parametersæt, jævnfør figur 3.4.

Her konkluderes det at arterie 1 og arterie 3 udviser samme elastiske egenskaber ved forskellige radier, mens arterie 1 og arterie 2 har den samme tidsmidlede radius [5], men forskellige elastiske egenskaber. Heraf konkluderes det at arterie 2 er mere elastisk end arterie 1, og at arterie 3 har samme stivhed som arterie 1, men et væsentligt mindre tværsnitsareal. Arterie 2's større elasticitet kan også ses ved at den undergår den største deformation af de tre (jf. figur 3.4).

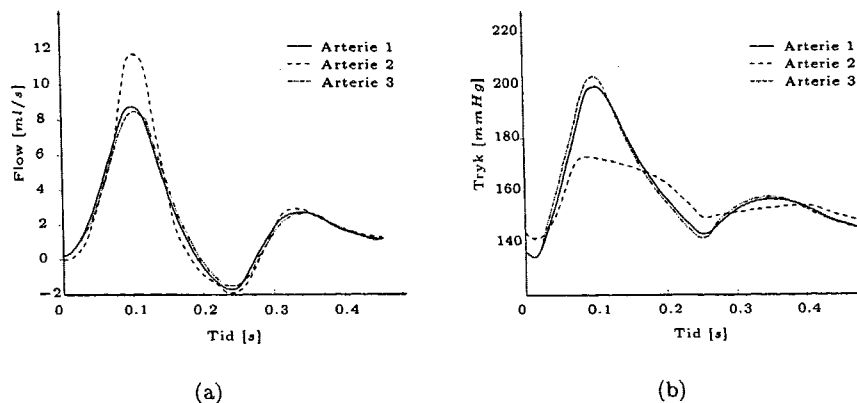
<sup>3</sup>Den typiske indre radius i kapillærnettet er ca. 5  $\mu\text{m}$ .

<sup>4</sup>Visse grafer og figurer fra [5] er pga. den dårlige kvalitet ikke scannet ind i rapporten, men istedet gentegnet fra det originale materiale i [5].

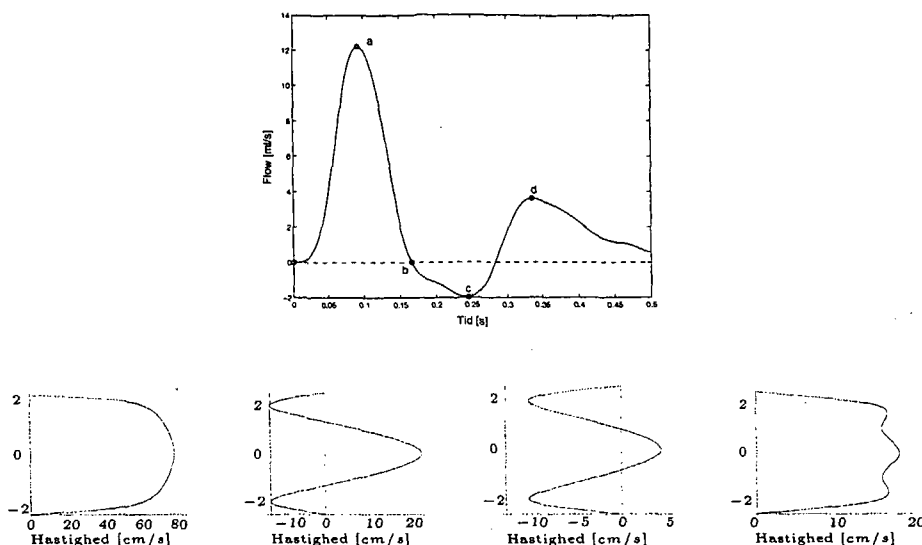


**Figur 3.4** Tryk-radiusrelation for de tre simulerede arterier. Det er indikeret hvilke dele af kurverne der indgår i kredsløbscyklus.

Ved sammenligning mellem simuleringerne af de tre arterier kan effekterne af væggenes elasticitet adskilles fra effekterne af arteriens tværsnitsareal. For alle tre arterier konkluderes det at der ikke er signifikante forskelle i gennemsnitsværdierne for hverken flow eller tryk (se figur 3.5). Af figuren ses også at selv om væggenes elasticitet ikke har stor effekt på gennemsnitsværdierne, medfører den store ændringer i tryk- og flowbølgeform, eksempelvis har arterie 2 et højere systolisk flow og et mindre systolisk tryk end de to andre, som trods forskellige radier ikke adskiller sig væsentligt fra hverandre. Den indre radius har altså ingen stor effekt på tryk- og flowkurverne, hvorimod væggenes elastiske egenskaber er afgørende. I [5] udvælger man nu arterie 2 for at kigge nærmere på hastighedsfeltet gennem kredsløbscyklus.



**Figur 3.5** (a) Flowbølger og (b) trykbølger indenfor en kredsløbscyklus for de tre arterier.



Figur 3.6 Aksiale hastighedsprofiler ved de karakteristiske tidspunkter (a), (b), (c) og (d) (jf. figur 3.6) i flowcyklus

### 3.3.2 Hastighedsprofiler

På flowkurven i figur 3.6 er plottet detaljerede aksiale hastighedsprofiler ved de på flowkurven indikerede tidspunkter a-d. I [5] diskuteres figur 3.6. Det påpeges at det er tydeligt at hastighedsprofilerne over hele kredsløbscyklus ikke er paraboliske. Det ses at i den systoliske fase (a) hvor blodet bevæger sig frem er profilen fladere end en parabolisk profil. Det betyder at hastighedsgradienten tæt ved væggen er højere end den tilsvarende beregnet for et jævnt laminart flow. På selve væggen udtrykker denne hastighedsgradient shearraten (jf. afsnit 2.2) på væggen. I [14] vises at denne<sup>5</sup> for jævnt laminart flow kan udtrykkes ved flow og radius som

$$\left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R} = 4 \frac{Q}{\pi R^3} \quad (3.63)$$

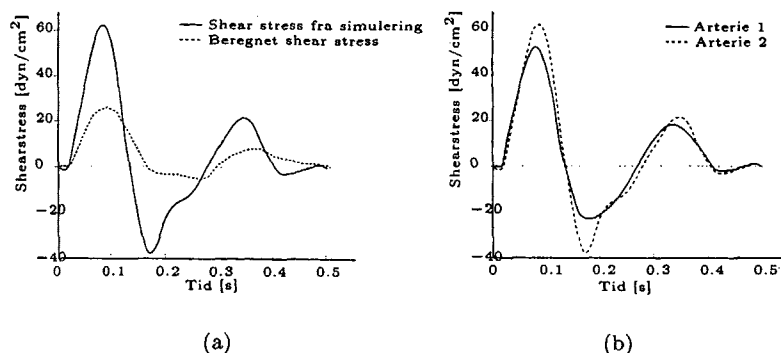
Fra ligning 2.1 får vi at stresset på væggen dermed bliver

$$S = \eta \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = 4\eta \frac{Q}{\pi R^3}, \quad (3.64)$$

hvor  $\eta$  nu igen repræsenterer blodets viskositet. I [5] sammenlignes stresset fra simuleringen med ligning 3.64, hvilket ses på figur 3.7 (a).

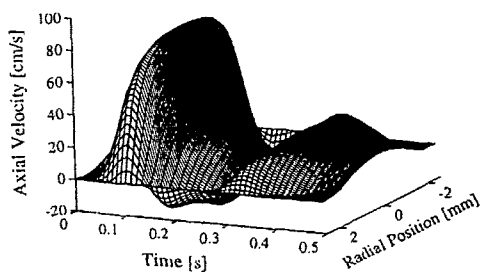
Det ses at der er signifikant forskel på de to kurver på figur 3.7 (a), og der udtrykkes i [5] da også overraskelse over hvor stor en fejl det medfører at anvende ligning 3.64.

<sup>5</sup>Vi husker lige at denne hastighedsgradient indgik i det ekstra led vi udledte i ligning 3.43 for  $\frac{\partial R}{\partial t}$  via  $\frac{\partial \omega}{\partial \eta}$ . Vi vender tilbage til dette i diskussionen.



**Figur 3.7** Vægstresset som funktion af tid for (a) arterie 2 for hhv. simulering og ligning 3.64 (b) arterie 1 og 2.

Udover stresset repræsenteret ved ligning 3.64 er der også et stress rundt i årens omkreds. Eftersom alle arterierne i upåvirket tilstand har samme vægtykkelse, men forskellige radier, og eftersom arterie 1 og 2 som nævnt har samme tidsmidlede radius må arterie 2's væg blive tyndere end arterie 1's. Det medfører et større stress på arterie 2 som skyldes den højere elasticitet; åren bliver simpelt hen »strukket« mere. Denne forskel kan ses på figur 3.7 (b). Den store forskel i det negative peak skyldes det baglæns flow langs væggen som optræder i den diastoliske fase, jf. figur 3.6 (c).



**Figur 3.8** Tre-dimensionalt billede af den aksiale hastighedsprofil gennem kredsløbscyklus.

Dette baglæns flow er også tydeligt på den tre-dimensionale fremstilling af kredsløbscyklus som ses i figur 3.8.

Tendenserne fra figur 3.6, altså hastighedsprofilerne på forskellige tidspunkter i flowcyklus, er de som vi primært ønsker at reproducere med FEM simuleringerne. I det følgende ønsker vi derfor indledningsvis at beskrive principperne bag FEM, samt redegøre for opstillingen af simuleringerne i FEMLAB.

## Kapitel 4

# FEM simuleringer

### 4.1 FEM for ODE'er

Finite element metoder er beregnet til at finde approksimative løsninger til problemer som typisk er beskrevet ved partielle differentiaalligninger i et eller andet afgrænset domæne. Springet fra én til flere afhængige variable komplicerer behandlingen væsentligt, og det kan godt betale sig at introducere de grundlæggende begreber i en én-dimensionel og ordinær differentiaalligningskontekst. Det starter vi derfor med.

#### 4.1.1 Galerkins metode

Lad os betragte den én-dimensionale ordinære 2. ordens differentiaalligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = -x, \quad (4.1)$$

med randbetingelserne

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (4.2)$$

En klassisk finite difference tilgang, som benyttes til simuleringerne i [5], består i at approksimere de afledte med differenskvotienter og herefter løse den resulterende differensligning, enten skridt for skridt eller som et sæt af algebraiske ligninger. Et alternativ er at søge en løsning på formen

$$u_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i(x) = \alpha_1 \beta_1(x) + \alpha_2 \beta_2(x) + \cdots + \alpha_N \beta_N(x), \quad (4.3)$$

hvor funktionerne  $\beta_i(x)$  betegnes *basisfunktioner*. Opgaven er altså på en eller anden måde at bestemme koefficienterne  $\alpha_i$ , hvorefter man har en approksimeret

løsning. Pointen er nu at bestemme disse koefficienter således at et nærmere specificeret *fejlmål* minimeres. Et mål for fejlen er f.eks.

$$E = \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + u_N + x, \quad (4.4)$$

hvor fejlen selvfølgelig er nul hvis  $u_N$  er den eksakte løsning. Man kan nu vælge forskellige kriterier til bestemmelse af koefficienterne, eksempelvis mindste kvadraters metoden, dvs. at minimere integralet af kvadratet på  $E$  [11]. Et alternativ er at benytte *vægtede residualier*, dvs. at tvinge den vægtede fejl til at være nul [11], hvor denne er givet ved

$$\int_0^1 E v dx, \quad (4.5)$$

hvor  $v$  betegnes *vægt-* eller *testfunktionen*. I *Galerkins metode* vælger man netop de førnævnte basisfunktioner som testfunktioner, dvs. at koefficienterne  $\alpha_i$  bestemmes således at

$$\int_0^1 E \beta_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

Det er på nuværende tidspunkt bekvemt at vælge sine basisfunktioner således at de opfylder randbetingelserne 4.2, samt at de er indbyrdes ortogonale. Fra ligning 4.6 ser vi at vi også tvinger  $E$  til at være vinkelret på  $\beta_i(x)$ 'erne (ligning 4.6 kan fortolkes som et indre produkt). Vi kan variere denne metode ved at generalisere testfunktionen til at være en linearkombination af basisfunktionerne, altså

$$v = \sum_{i=1}^N \gamma_i \beta_i(x). \quad (4.7)$$

Hvis vi igen betragter ODE'en fra ligning 4.1 er målet altså nu at finde  $\alpha_i$ 'erne således at

$$\int_0^1 E v dx = \int_0^1 (u_N'' + u_N + x) v dx = 0 \quad \forall v \in \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_N\}. \quad (4.8)$$

Dette er den *variationelle formulering* af ligning 4.1 [11]. Vi kan nu med fordel udnytte similariteten mellem  $u_N$  og  $v$ , jvf. ligning 4.3 og 4.7, hvis vi integrerer partielt og anvender randbetingelserne for  $v$ . Vi har at

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_N'' v dx &= [u_N' v]_0^1 - \int_0^1 u_N' v' dx \\ &= - \int_0^1 u_N' v' dx \quad \forall v \in \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_N\} \end{aligned} \quad (4.9)$$



Dvs. at vi kan omskrive ligning 4.8 til

$$\int_0^1 E v dx = \int_0^1 (-u'_N v' + u_N v + x v) dx = 0 \quad \forall v \in \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_N\}, \quad (4.10)$$

hvilket vil sige at vi i stedet for at løse den oprindelige differentialligning med randbetingelser, nu skal løse ligning 4.10. Fordi der nu optræder samme ordens afledte af hhv. den approksimerede løsning og testfunktionen, betegnes ligning 4.10 som den *symmetriske variationelle formulering* [11], eller nok mere populært; den *svage* form af randværdiproblemet 4.1 og 4.2<sup>1</sup>. Hvis vi nu indsætter udtrykkene for  $u_N$  og  $v$ , samt udnytter at hhv.  $u_N$ ,  $v$  og  $\beta_i$ 'erne opfylder randbetingelserne, dvs.

$$u_N(0) = u_N(1) = v(0) = v(1) = \beta_i(0) = \beta_i(1) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.11)$$

så får vi fra 4.10 at

$$\sum_i \gamma_i \left( \sum_j \left\{ \int_0^1 (-\beta'_i \beta'_j + \beta_i \beta_j) dx \right\} \alpha_j + \int_0^1 x \beta_i dx \right) = 0. \quad (4.12)$$

Definerer vi nu

$$K_{ij} = \int_0^1 (-\beta'_i \beta'_j + \beta_i \beta_j) dx \quad (4.13)$$

og

$$F_i = - \int_0^1 x \beta_i dx, \quad (4.14)$$

så får vi at

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i \left( \sum_{j=1}^N K_{ij} \alpha_j - F_i \right) = 0. \quad (4.15)$$

Eftersom  $\gamma_i$ 'erne er vilkårlige koefficienter får vi følgende  $N$  ligninger til bestemmelse af  $\alpha_i$ 'erne

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \alpha_j = F_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.16)$$

<sup>1</sup> Dette er i øvrigt den generelle tilgang når et randværdiproblem skal omskrives til svag form; gang med en testfunktion og integrer op over det relevante domæne.

eller

$$K\alpha = F, \quad (4.17)$$

hvor

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

og

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

samt

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

$K$  betegnes i øvrigt *stivhedsmatricen* og  $F$  *lastvektoren*.

Fordi man i Galerkin-metoden opbygger testfunktionen af basisfunktionerne, bliver valget af disse altafgørende for kvaliteten af approksimationen, og en svaghed ved metoden er da netop også at der ikke er nogen systematisk metode til at konstruere basisfunktionerne [11]. Det er dette problem der håndteres af FEM.

#### 4.1.2 Mesh og basisfunktioner

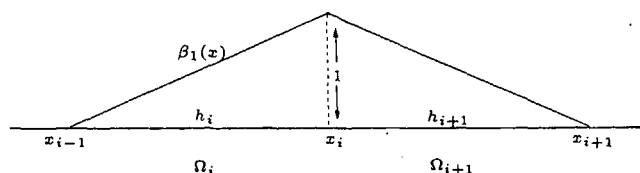
Grundidéen i FEM er at basisfunktionerne (og dermed  $u_N$  og  $v$ ) kan defineres stykkevis over delregioner (heraf betegnelsen elementer) af det domæne hvor randværdiproblemet skal løses. Indenfor hvert element  $\Omega_i$ , søger vi så en approksimeret løsning der minimerer førnævnte fejl, og som er kontinuert indenfor det enkelte element.

Selve opdelingen af domænet i elementer (betegnet *mesh'et*) kan ske på vilkårligt mange forskellige måder, og et specifikt valg påvirker selvfølgelig den endelige approksimation. I to dimensioner er det standard at opdele domænet i enten tre- eller firekantede elementer. Elementernes hjørner udgør herved et netværk af knudepunkter henover domænet, og det er normalt ud fra værdien i disse punkter at den lokale approksimation i det enkelte element konstrueres. Det er ikke nødvendigt for elementerne at have samme størrelse, endside at være

kongruente, hvorfor det er muligt at opdele domæner med arbitrære former nærmest vilkårligt præcist. Basisfunktionerne konstrueres på baggrund af tre kriterier [11]:

1. Basisfunktionerne konstrueres ud fra simple stykkevist definerede funktioner der betegnes *formfunktioner* (typisk et polynomium af lav grad). Formfunktionerne defineres element for element.
2. Basisfunktionerne er tilstrækkeligt pæne til at samtlige integraler i den svage form eksisterer.
3. Hver basisfunktion har egenskaben at den har værdien 1 i et knudepunkt og er 0 i alle andre knudepunkter.

Det følger nu direkte fra punkt 3 og ligning 4.3 at  $\alpha_i = u_N(x_i)$ , dvs. at koefficienten  $\alpha_i$  præcist har værdien  $u_N(x_i)$  i knudepunktet  $x_i$ .



Figur 4.1 Et eksempel på basisfunktioner i én dimension

Et eksempel på basisfunktioner der opfylder disse kriterier (i en dimension) er

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.21)$$

hvor  $x_i$  er knudepunktskoordinater,  $h_i = x_i - x_{i-1}$  og  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$  (se figur 4.1). Der vil generelt være adskillige formfunktioner defineret over hvert element  $\Omega_i$ , men kun få vil have værdi forskellig fra 0. I dette tilfælde konstrueres basisfunktionerne ud fra formfunktionerne

$$\Psi_i = \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (4.22)$$

på element  $\Omega_i$  og

$$\Psi_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \quad (4.23)$$

på element  $\Omega_{i+1}$ . Eftersom vi ønsker kontinuerte basisfunktioner, og at disse konstrueres ud fra formfunktionerne, er det altafgørende at sidstnævnte er ens i fælles punkter. Hermed opnår vi også at både den approksimerede løsning 4.3 og testfunktionen 4.7 begge bliver kontinuerte og stykkevist lineære funktioner, eftersom disse begge er konstrueret som linearkombinationer af basisfunktionerne.

## 4.2 FEM for PDE'er

Når vi bevæger os til behandlingen af partielle differentiaalligninger er der behov for visse udvidelser, selv om nogle begreber er helt analoge. Vi betragter igen et eksempel, denne gang Poisson's ligning

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (4.24)$$

Vi ønsker at løse ligning 4.24 over et to-dimensionalt domæne  $D$  med randen  $\partial D$ , underlagt visse randbetingelser på  $\partial D$ . Der er to hovedtyper af randbetingelser:

1.  $\phi(x, y) = g(x, y)$
2.  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = h(x, y)$

hvor  $g(x, y)$  og  $h(x, y)$  er givne funktioner på  $\partial D$ , og  $n$  angiver en udadrettet normal til  $\partial D$ . Randbetingelse 1 betegnes en *Dirichlet*-betingelse, og 2 en *Neumann*-betingelse.

### 4.2.1 Variational formulering af PDE

Analogt til det én-dimensionale tilfælde ønsker vi at formulere ligningen variationelt, dvs. på svag form, hvilket i dette tilfælde er lidt mere kompliceret. I [11] vises at af alle de kontinuerte funktioner  $\phi(x, y)$  som opfylder  $\phi = g(x, y)$  på  $\partial D$ , er den som er løsning til Poisson's ligning med ovennævnte randbetingelser, den som minimerer funktionalen

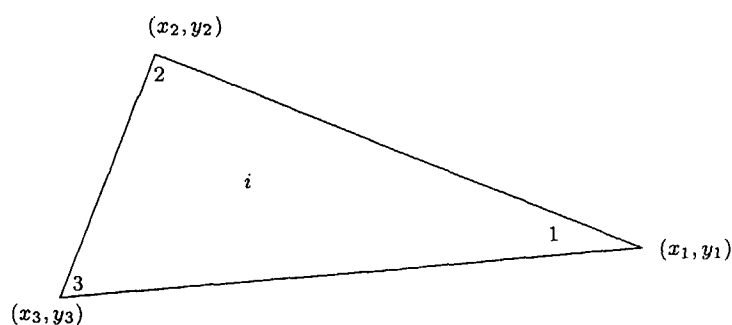
$$J(\phi) = \frac{1}{2} \int_D \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \int_D f(x, y) \phi dx dy - \int_{\partial D} g(x, y) \phi dl, \quad (4.25)$$

hvor  $dl$  er linieelementet langs  $\partial D$ . Funktionerne der opfylder at  $\phi = g(x, y)$  på  $\partial D$  betegnes *tilladte funktioner*. Dvs. at den variationelle formulering af ligning 4.24 er at finde en funktion  $\phi$  som minimerer ligning 4.25. Dette er den svage løsning. Løsningen til ligning 4.24 betegnes den stærke løsning. Proceduren ved PDE'er er altså først at konvertere differentiaalligningen til variationel form, og derefter at gennemgå fire faser [11], ret analogt til det én-dimensionale tilfælde:

1. Først deles domænet op i elementer og elementtyper, og der vælges basisfunktioner.
2. Hvert elements bidrag til den samlede løsning beregnes via stivhedsmatricer og lastvektorer.
3. De enkelte bidrag kombineres, hvorved der opnås et stort ligningssystem for løsningen.

4. Ligningssystemet løses.

Hvis vi nu betragter et typisk trekantet element i 2 dimensioner (se figur 4.2), så er konventionen at nummerere hjørnerne mod uret (elementer nummereres også globalt; vi betragter blot det  $i$ 'te).



Figur 4.2 Nummerering af knudepunkter i det  $i$ 'te element

Som tidligere nævnt ønsker vi at definere  $\phi$  på dette element ud fra værdien af  $\phi$  i de tre knudepunkter. En lineær form vil have det korrekte antal frihedsgrader [11], hvorfor

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (4.26)$$

hvor de tre ukendte fastsættes ud fra værdien af  $\phi_1, \phi_2$  og  $\phi_3$  i knudepunkterne (dvs. vi løser tre ligninger med tre ubekendte). Løsningen til de resulterende ligninger kan skrives i lukket form vha. basisfunktioner [11] som

$$\phi(x, y) = \phi_1 \beta_1(x, y) + \phi_2 \beta_2(x, y) + \phi_3 \beta_3(x, y), \quad (4.27)$$

hvor

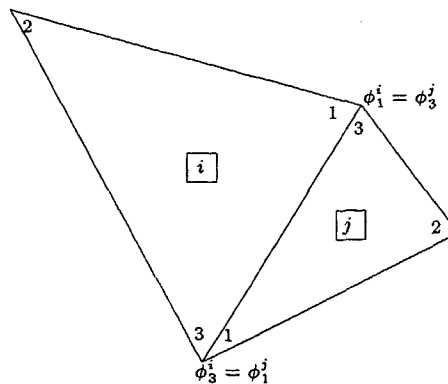
$$\beta_1(x, y) = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \quad (4.28)$$

med

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 &= y_2 - y_3 \\ c_1 &= x_3 - x_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

og

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (4.30)$$



Figur 4.3 Tilstødende elementer i to dimensioner.

som er trekantens areal. Basisfunktionerne  $\beta_2$  og  $\beta_3$  findes ved cyklisk permutation. Der gælder nu både at variationen af  $\phi$  langs en rand er lineær, og at  $\phi$  kun afhænger af knudepunktsværdierne i randens to endepunkter. Hvis vi nu betragter to naboelementer (se figur 4.3) følger det at  $\phi^{(i)}$  og  $\phi^{(j)}$  er ens langs den fælles side, hvor de hævdede indices angiver hhv. det  $i$  og  $j$ 'te element. Dvs. at  $\phi(x, y)$  automatisk er kontinuert henover alle indre elementgrænser i domænet, omend de afledte ikke nødvendigvis er det. For at minimere  $J(\phi)$  fra ligning 4.25, udtrykker vi dem nu ved funktionalerne for de enkelte elementer

$$J = \sum J^{(i)}, \quad (4.31)$$

hvor

$$J^{(i)} = \frac{1}{2} \int_{D^{(i)}} \left\{ \left( \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \int_{D^{(i)}} f(x, y) \phi^{(i)} dx dy - \int_{\partial D^{(i)}} g(x, y) \phi^{(i)} dl, \quad (4.32)$$

hvor  $D^{(i)}$  er domænet hvorover det  $i$ 'te element er defineret,  $\partial D^{(i)}$  er randen og  $\phi^{(i)}$  er den approksimerede funktion på det  $i$ 'te element. Vi har altså erstattet formuleringen i ligning 4.25 med en tilsvarende, hvor  $\phi$  nu er opbygget af de stykkevist definerede funktioner fra ligning 4.27. Dvs. at vi kan opsummere en procedure til opsætning af FEM ligningerne som:

1.  $J^{(i)}$ 'erne evalueres ud fra ligning 4.32.
2.  $J^{(i)}$ 'erne summeres til  $J$ , udtrykt ved knudepunkt-værdierne for  $\phi$ .
3. Knudepunktsværdier på randen evalueres ud fra Dirichletrandbetingelsen.
4.  $J$  minimeres med hensyn til de ukendte indre knudepunktsværdier, og de kendte randpunkter.

Som sagt var den korrekte approksimation  $\phi$  netop den som minimerede  $J$ , så vi er principielt færdige.

## 4.3 FEMLAB

### 4.3.1 PDE løsning i FEMLAB

FEMLAB er et kommercielt overbygningsprogram til MATLAB til modellering og løsning af problemer beskrevet ved partielle differentiaalligninger. Programmet er opbygget omkring en grafisk brugerflade, hvorfra man kan kontrollere alle facetter af simuleringen skridt for skridt. Det første skridt i formuleringen af simuleringen er opbygningen af en *geometri*. Man kan vælge at modellere én, to eller tredimensionalt, alt efter hvorledes problemet kan formuleres. Det kan klart betale sig at finde symmetrier der muliggør simplificeringer, og gerne afskaffelsen af hele dimensioner.

Programmet er udstyret med en række prædefinerede ligninger eksempelvis diffusionsligningen eller Schrödingerligningen, og det er muligt at løse disse i flere dimensioner, endda koblet på kryds og tværs. FEMLAB indeholder faktisk Navier-Stokes ligningerne som en standardapplikation, men disse er opsat i kartesiske koordinater, hvorfor ligningernes form er anderledes end dem vi skal løse i cylinderkoordinater. Af samme årsag ville en løsning af vores problem skulle løses i 3D, men 3D simuleringer er for os desværre uhåndterlige hvad angår hukommelseskrav, og desuden har man ikke mulighed for at justere på de forskellige led i ligningerne. Vi vælger derfor at benytte programmets PDE-solver på *General* form, hvorfor vores ligninger skal tilpasses i følgende prædefinerede form,

$$d_a v' + \nabla \cdot \Gamma = F, \quad (4.33)$$

hvor  $v$  er en vektor med de afhængige variable,  $v'$  de tidsafledte afhængige variable og  $d_a$  er en  $n \times n$  matrix hvor  $n$  angiver dimensionen, mens  $\Gamma$  og  $F$  er vektorer hvis indhold afhænger af den konkrete situation. Ligningerne (3.14), (3.30) og 3.43 skal altså i FEMLAB udelukkende udtrykkes gennem (4.33).

Randbetingelserne defineres tilsvarende i FEMLAB gennem

$$0 = H \quad (4.34)$$

eller

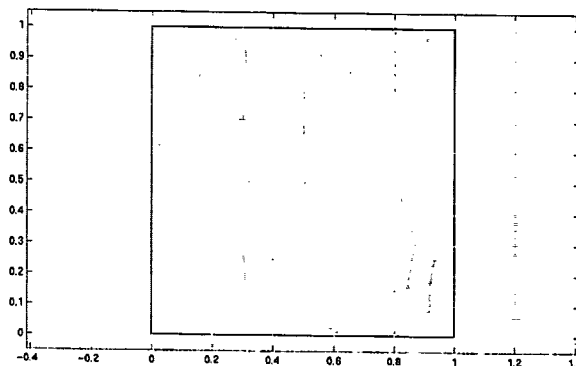
$$-n \cdot \Gamma = G + \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^T \mu. \quad (4.35)$$

for henholdsvis Dirichlet- eller Neumannbetingelser.  $H$  og  $G$  modsvarer hhv.  $g(x, y)$  og  $h(x, y)$  fra afsnit 4.2, og  $\mu$  er en såkaldt Lagrange multiplikator<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Lagrange multiplikatoren er kun defineret på randen. Den muliggør eksistensen af både Dirichlet og Neumann betingelser på samme rand simultant; en såkaldt generaliseret Neumannbetingelse [8].

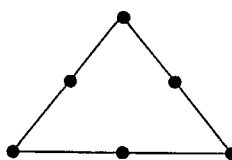
Eftersom  $\Gamma$  indgår både i formuleringen af ligninger og randbetingelser er det vigtigt at holde øje med samspillet mellem Dirichlet og Neumann betingelserne for at undgå rod i ligningerne. Der kan yderligere angives en startværdi for de afhængige variable, dvs.  $v(t_0)$ , hvor det er vigtigt at disse stemmer overens med randbetingelserne.

Når opstillingen af ligninger og randbetingelser er færdiggjort genererer FEM-LAB automatisk et mesh over den opstillede geometri, hvorefter den egentlige løsning påbegyndes. Dette mesh kan forfines efter behov, enten over hele geometrien eller i udvalgte elementer. Et eksempel kan ses i figur 4.4.



Figur 4.4 Eksempel på en meshet geometri i FEMLAB.

I praksis anvender vi en anelse mere komplicerede elementer end de der blev beskrevet i afsnit 4.2.1, nemlig såkaldte kvadratiske Lagrangeelementer som er standardelementet i FEMLAB. Fordi der nu er tale om en kvadratisk ligning opererer vi nu med seks ligninger med seks ubekendte, hvorfor der ikke kun evalueres i elementernes hjørner, men også i midtpunktet af hvert af elementets sider (jf. figur 4.5).



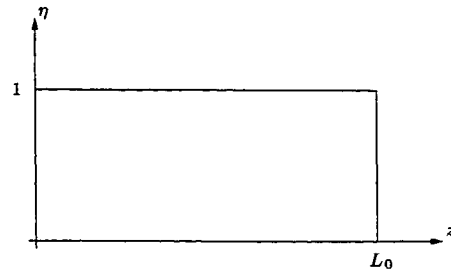
Figur 4.5 Kvadratisk Lagrangeelement [4].

### 4.3.2 Opsætning af den computeriserede model

Vi starter nu med at opsætte en geometri i FEMLAB, som opdeles i et centralt domæne og fire omkringliggende rande. Hver af randene tildeles et nummer, hvor rande 2 og 3 er hhv. årens centrum og årevæggen, mens rand 1 er inflowsranden og rand 4 er den rand hvor væsken strømmer ud (jf. figur 3.1).

Næste skridt er at specificere de ligninger der skal gælde på de forskellige delområder af geometrien. Derudover skal der defineres konstanter og forskellige





**Figur 4.6** Modelleringsgeometrien i FEMLAB, hvor  $L_0 = 30$  cm i overensstemmelse med [5].

udtryk der skal bruges i opsætningen. Alle konstanter er adopteret fra [5], for at gøre resultaterne sammenlignelige.

Vi valgte efter forskellige tilgange at opsætte systemet ved at koble to generelle applikationer; en PDE med to afhængige variable til beskrivelse af hastighedsfeltet, og en PDE med én afhængig variable til beskrivelse af randens bevægelse. Hastighedsfeltet beskrives ved Navier-Stokes og kontinuitetsligningerne, dvs. ligning 3.14

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u}{\eta R} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\eta}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0,$$

som vi ganger igennem med  $R\eta$  for at undgå at komme til at dividere med nul, hvilket ville føre til at systemet ikke kunne løses numerisk,

$$\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + u + \eta R \frac{\partial w}{\partial z} - \eta^2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \quad (4.36)$$

og ligning 3.30

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right),$$

hvor  $\rho = 1.06 \text{ g/cm}^3$  og  $\nu = 0.033 \text{ cm}^2/\text{s}$  [5]. Størrelsen  $\frac{\partial p}{\partial z}$  som indgår i ligning 3.30 finder vi ved at differentiere ligning 3.44 i afsnit 3.1.4

$$p(z, t) = \frac{\mu_w \frac{\partial R}{\partial t} + \sigma_0 (e^{\beta(\delta-1)} - 1)}{\frac{r_m}{h} \delta^2 - \frac{1}{2}},$$

som bliver til

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu_w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right) + ED \frac{\beta}{2r_m} \left( \frac{\partial R}{\partial z} + \Lambda \right) - \frac{2\delta r_m}{h} (\mu_w \frac{\partial R}{\partial t} + E) \left( \frac{\partial R}{\partial z} \frac{1}{2r_m} + \Lambda \right)}{D^2}, \quad (4.37)$$

hvor

$$\begin{aligned}\Lambda &= 2R \frac{\partial R}{\partial z} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + 2r_m h}} \right) \\ E &= \sigma_0 \left( e^{\beta(\delta-1)} - 1 \right) \\ D &= \delta^2 \frac{r_m}{h} - \frac{1}{2} \\ \delta &= \frac{R + \sqrt{R^2 + 2r_m h}}{2r_m}.\end{aligned}\quad (4.38)$$

Her er  $h = 0.1$  mm,  $\sigma_0 = 10^6$  dyn/cm<sup>2</sup>,  $\beta = 3.6$  og  $r_m = 1.65$  mm for arterie 2. Som randbetingelser bruger vi en Dirichlet-betingelse til at beskrive

$$w(\eta, z, t)|_{\eta=1} = 0, \quad u(\eta, z, t)|_{\eta=1} = \frac{\partial R}{\partial t}$$

på rand 3 og

$$u(\eta, z, t)|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0,$$

på rand 2, hvor den sidstnævnte indsættes som

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (4.39)$$

På rand 1 benyttes Neumann-betingelsen til at udtrykke inflowet

$$w = f(t)(1 - \eta^2) \quad (4.40)$$

$$u = 0 \quad (4.41)$$

hvor  $1 - \eta^2$  gør at inflowet er parabolisk og funktionen  $f(t)$  giver det pulserende inflow. Startværdien af den aksiale og radiale hastighed sættes til hhv.  $f(t_0)$  og 0. Det bemærkes at med denne opsætning stemmer randbetingelsen på rand 1 overens med hastighedernes startværdier. På rand 4 ønskes indledningsvis at væsken kan flyde frit videre ud i resten af åren. Vi har implementeret denne randbetingelse på to måder. Den første er ved ikke at specificere nogen randbetingelse (dvs. programmet selv vælger randbetingelsen), og den anden ved at sikre at hastighedsprofilen lige efter randen er den samme som lige før, hvorfor de aksiale afledte sættes lig nul

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=30} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=30} = 0.$$

Rand 3's bevægelse indsættes som en én-variabel PDE, beskrevet ved ligning 3.43

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -w \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z}.$$

For denne differentiaalligning har vi sat startværdien til  $R(t_0) = r_m = 0.165$  cm, dvs. til arterie 2's radius i hviletilstand [5]. Randbetingelserne ved in- og outflow sættes til

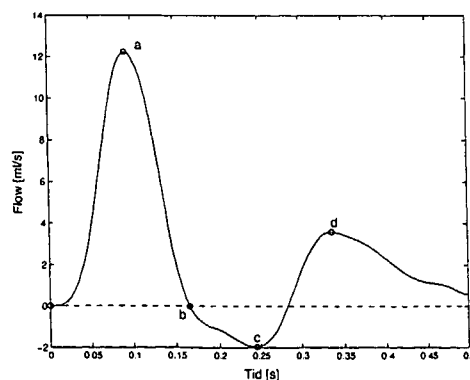
$$R = r_m, \quad (4.42)$$

indsat som Dirichlet-betingelse. Denne betingelse betyder at randen i årens endepunkter sættes fast til årens radius i hviletilstand. Ved inflowranden (rand 1) stemmer denne randbetingelse overens med startværdien og ved outflowsranden (rand 4) har vi valgt denne betingelse for at sikre at R ikke kan blive nul hvorved væsken ikke ville kunne strømme ud. På rand 2 og 3 sætter vi som betingelse at R er uafhængig af  $\eta$

$$\frac{\partial R}{\partial \eta} = 0, \quad (4.43)$$

som den i øvrigt er i hele systemet. Dette indsættes som en Dirichlet-betingelse. Af alle randbetingelserne er den eneste der volder implementeringsmæssige problemer  $u = \frac{\partial R}{\partial t}$  på rand 3. Det skyldes at programmet ikke kan håndtere ikke-lineære randbetingelser for tidsafhængige problemer. Vi kan for at omgå problemet imidlertid endnu engang benytte en svag formulering i form af en såkaldt *weak constraint*, med hvilken man kan diskretisere Dirichletbetingelser på randene [8].

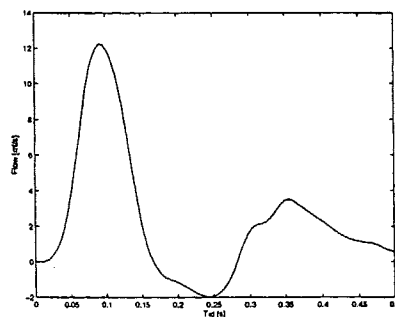
Ved sammenligning med resultater fra [5], er det vigtigt at opsætte et system der ligner deres opstillede system mest muligt. I artiklen er den eneste kvantitative information om deres inflow grafen 4.7.



Figur 4.7 Flowprofil præsenteret i [5]

Ud fra denne graf har vi derfor konstrueret en funktion der beskriver inflowet. Dette er bl.a. gjort vha. MATLAB's »spline«-funktion, og som det ses af figur 4.8 stemmer de to kurver ret godt overens. Splinefunktionen kan dog ikke uden

videre indsættes i FEMLAB, da det ikke er et funktionsudtryk men en m-fil. Når vores simulering er sat op i endelig form i FEMLAB, forventer vi at kunne implementere denne.

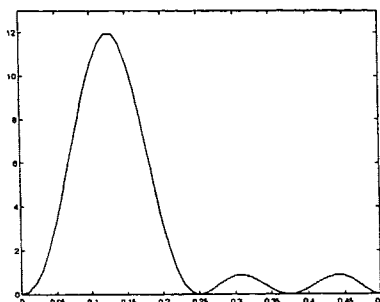


Figur 4.8 Flowprofil konstrueret ved MATLAB's spline funktion.

Vi forsøger os derfor indledningsvis med et simple inflow, nemlig funktionen

$$f(t) = 6(\sin^2(2\pi \frac{t}{T}) + \sin^3(2\pi \frac{t}{T})), \quad (4.44)$$

hvor  $t$  er tiden og  $T$  er perioden på 0.5 s og som ses afbildet i figur 4.9. Denne funktion er konstrueret med henblik på at bevare tendenserne fra figur 4.7.



Figur 4.9 Simpel flowprofil (x-akse: tid [s] y-akse: flow [ml/s]).

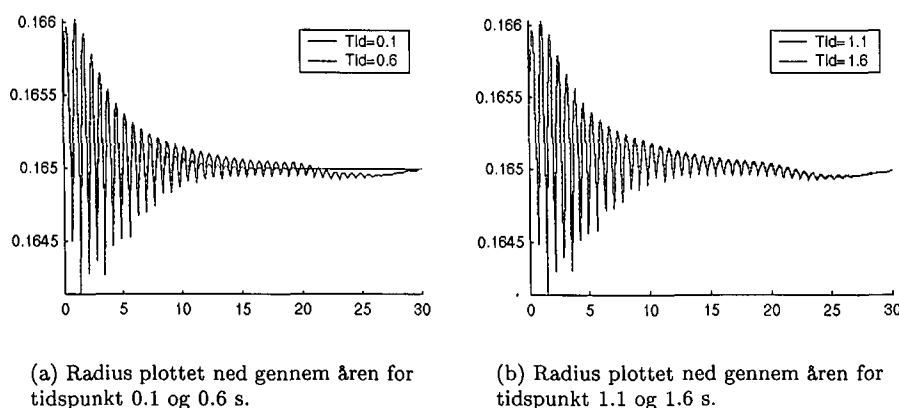
Denne funktion stemmer ikke lige så godt som den foregående overens med det angivne flow i [5], men den er konstrueret ud fra en relativt simpel funktion som umiddelbart kan indsættes i FEMLAB. Det ses også at tendensen med at der strømmer meget ind i starten, hvorefter strømmingen reduceres væsentligt, er bevaret. Denne funktion har dog ikke negativt flow på noget tidspunkt, men til gengæld strømmer der heller ikke lige så meget ind, så middelflowet er sammenligneligt. Det er derfor denne funktion som vi anvender indledningsvis.

## 4.4 Simuleringsresultater

Det er først få dage før aflevering af denne rapport lykkedes os at løse lignings-systemet i FEMLAB. Umiddelbart ser løsningererne ud til at beskrive systemet

som forventet, men ved nærmere eftersyn har vi detekteret adskillige fejl i løsningerne. For ingen af de gennemførte simuleringer er samtlige randbetingelser opstillet i den computeriserede model overholdt. Da det ydermere er meget tidskrævende at køre en simulering (ca. to døgn), har vi ikke fået mange løsninger med i rapporten. Det er dog lykkedes os at køre en simulering i lang nok tid til at løsningen blev stabiliseret, og dermed at få nogle få hastighedsprofiler at sammenligne med Cavalcantimodellens resultater. Vi har foretaget tre simuleringer, simulering A for 2 sekunder, som svarer til 4 kredsløbscykler i vores opsætning, simulering B for 4 sekunder, dvs. 8 kredsløbscykler, og simulering C for én kredsløbscyklus. Simulering A hhv. B er ens i opsætning undtaget for randbetingelserne for den radiale og aksiale hastighed på rand 1 og 4, dvs. in- og outflowsrandene. Simulering C er opsat på samme måde som simulering A, med den undtagelse at hvileradius er sat til 2,5 mm, istedet for 1.65 mm som i simulering A og B. Vi har valgt at medtage disse løsninger, selvom alle randbetingelser altså ikke er overholdt.

#### 4.4.1 Simulering A



**Figur 4.10** Simulering A. Radius plottet ned gennem åren (x-aksen repræsenterer årelængden i cm, og y-aksen radius i cm).

Simulering A har følgende randbetingelser på rand 1

$$w = 40(1 - \eta^2) \left( \sin^2\left(2\pi \frac{t}{0.5}\right) + \sin^3\left(2\pi \frac{t}{0.5}\right) \right) \quad (4.45)$$

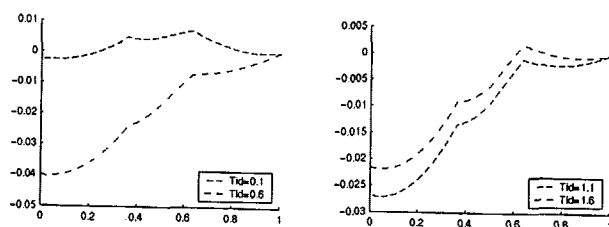
$$u = 0 \quad (4.46)$$

og på rand 4

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (4.47)$$

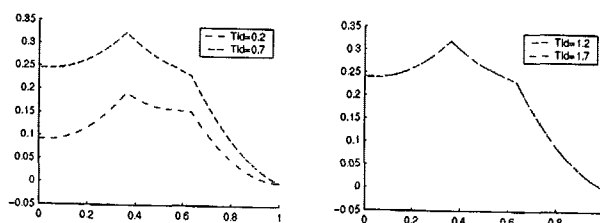
Da vi simulerer med et pulserende inflow, tager det et antal cykler for systemet at stabilisere sig. For at undersøge hvornår denne stabilisering indtræffer, dvs. hvornår løsningerne er blevet periodiske, har vi plottet radius til det første tidspunkt i hver af de fire kredsløbscykler i figur 4.10.

Som det ses af figur 4.10(a) er systemet under de første to kredsløbscykler endnu ikke stabilt, mens figur 4.10(b) indikerer at efter to kredsløbscykler er løsningen stabiliseret. Radius ser i første omgang ud til at have store udsving, men den største ændring er kun på  $10^{-3}$  mm.



(a) Aksial hastighed plottet for tværsnit midt i åren for tidspunkt 0.1 og 0.6 s.

(b) Aksial hastighed plottet for tværsnit midt i åren for tidspunkt 1.1 og 1.6 s.



(c) Aksial hastighed plottet for tværsnit midt i åren for tidspunkt 0.2 og 0.7 s.

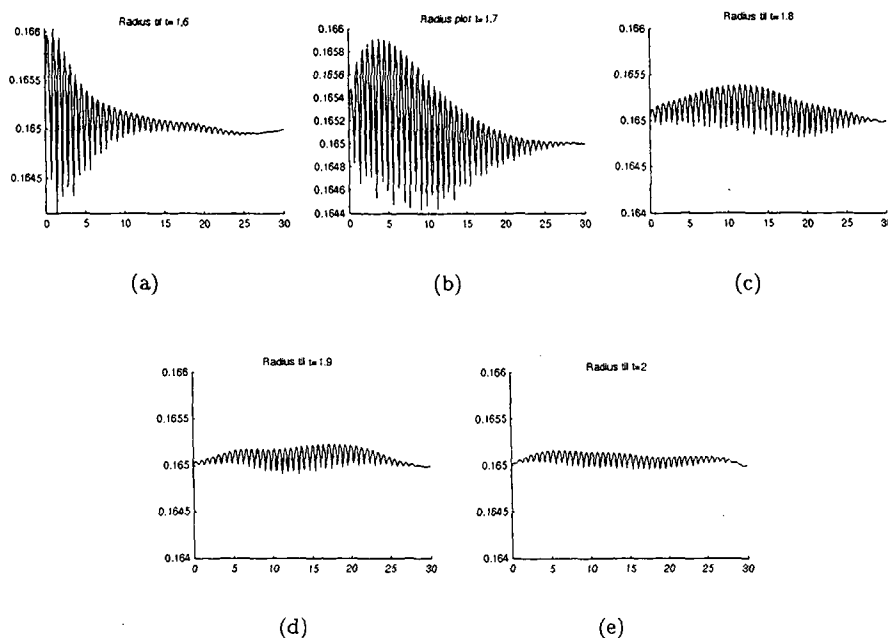
(d) Aksial hastighed plottet for tværsnit midt i åren for tidspunkt 1.2 og 1.7 s.

**Figur 4.11** Simulering A. Aksial hastighed plottet for tværsnit midt i åren (x-aksen repræsenterer  $\eta$ , og y-aksen den aksiale hastighed i cm/s).

I figur 4.11 er de aksiale hastigheder afbildet som hastighedsprofiler over et tværsnit midt i den simulerede åre, dvs. 15 cm fra hver ende. I figurer 4.11(a) og 4.11(b) er det første tidspunkt i hver af de fire kredsløbscykler plottet. På disse hastighedsprofiler fremkommer det at efter de fire cykler har systemet endnu ikke stabiliseret sig. Hvis vi istedet ser på det næste tidspunkt i de fire kredsløbscykler på figurer 4.11(c) og 4.11(d), ses at løsningen nu har stabiliseret sig.

Det må altså konkluderes at der kræves en simulering over længere tid, dvs. med flere kredsløbscykler end fire, for at opnå en stabil løsning. Vi har derfor i

simulering B<sup>3</sup> løst for 4 sekunder, som svarer til otte kredsløbscykler.



**Figur 4.12** Radiusudvikling over sidste kredsløbscyklus for simulering A. y-akserne er for samtlige figurer skaleret ens. x-aksen repræsenterer årlængden i cm, og y-aksen radius i cm.

Vi vil dog kort præsentere radiusudviklingen over den sidste kredsløbscyklus for simulering A (se figur 4.12), trods at løsningen endnu ikke helt kan konkluderes at være blevet stabil.

Figuren illustrerer radius reaktion på den store blodmængde i starten af cyklus. Lignende kurver præsenteres for Simulering B, hvor løsningen har stabiliseret sig, hvorfor yderligere kommentarer ikke bliver knyttet til figur 4.12.

#### 4.4.2 Simulering B

Simulering B har følgende randbetingelser på rand 1

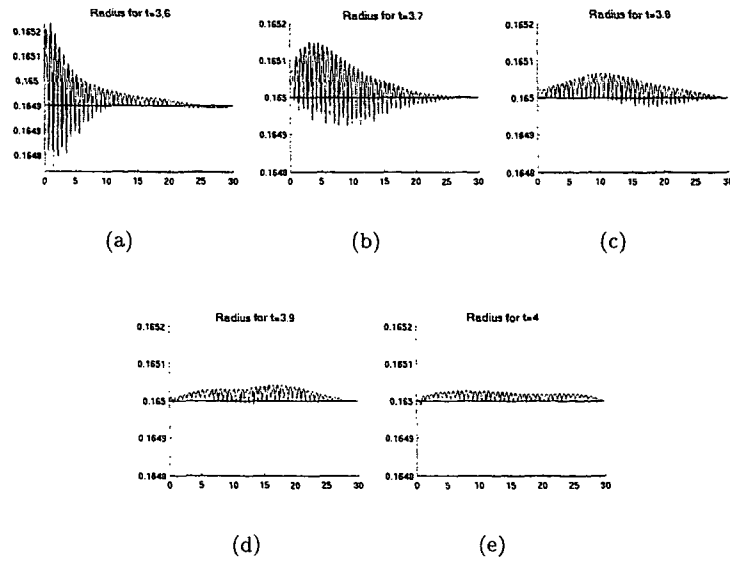
$$w = 6(1 - \eta^2) \left( \sin^2\left(2\pi \frac{t}{0.5}\right) + \sin^3\left(2\pi \frac{t}{0.5}\right) \right) \quad (4.48)$$

$$u = 0 \quad (4.49)$$

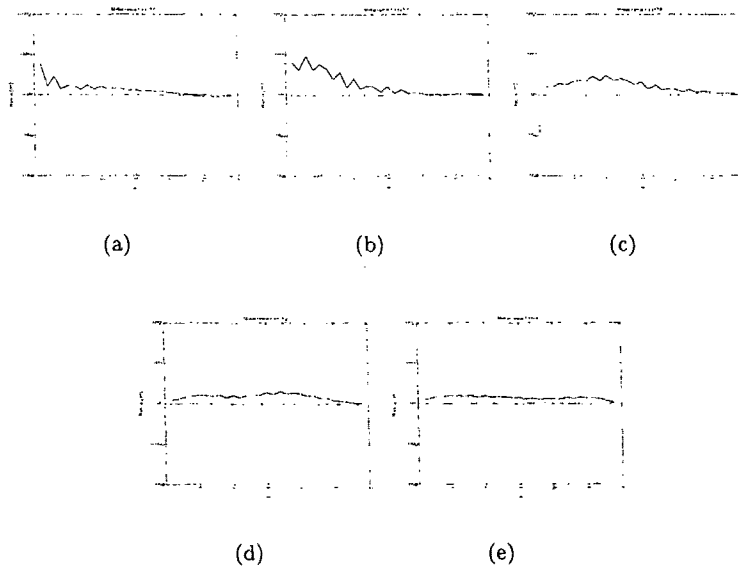
og på rand 4 har vi ingen betingelser (dvs. programmet bestemmer randbetingelserne), hvilket skal svare til frit udløb af blodet.

I figur 4.13 er radius afbildet for sidste kredsløbscyklus i simuleringen.

<sup>3</sup>Det er udelukkende grundet mangel på tid at simulering A ikke også er simuleret over 4 sekunder (en sådan simulering tager ca. 2 døgn).



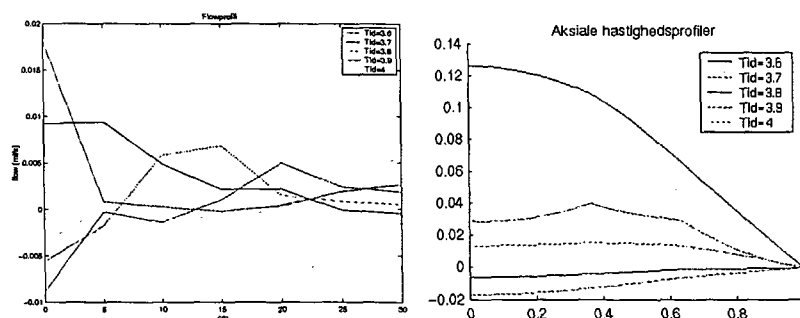
**Figur 4.13** Radiusplot for simulering B's sidste kredsløbscyklus, dvs. for  $t=3.6-4$  s. x-aksen repræsenterer årelængden i cm, og y-aksen radius i cm. y-akserne er for samtlige figurer skaleret ens. Den rette linie repræsenterer hvileradius på 0.165 cm.



**Figur 4.14** Midlede radiusplot for simulering B, (umidlede plots ses i figur 4.13). x-aksen repræsenterer årelængden i cm, og y-aksen radius i cm. y-akserne er for samtlige figurer skaleret ens. Den rette linie repræsenterer hvileradius på 0.165 cm.



Som det ses oscillerer radius meget omkring hvileradius, og tendenserne for radiusudvikling er meget svære at se. Det er ikke sandsynligt at radius oscillerer på denne måde. Vi forventer nærmere en udvidelse i åren umiddelbart efter at blodet strømmer ind hvorefter åren relaxerer tilbage til hvileradius. Vi har derfor valgt at midle samtlige plots fra figur 4.13 i figur 4.14. På figur 4.14(a) ses hvordan åren udvider sig, som reaktion på den store blodmængde der pumpes ind. På de efterfølgende delfigurer i figur 4.14 ses at radiusændringen forplantes ned gennem åren. Af figurer 4.14(d) og 4.14(e) ses hvordan radiusændringen er jævnet ud over hele åren, og dermed er der ikke længere tale om en stor lokal ændring, som i begyndelsen af kredsløbscyklus. Dette kan skyldes at i kraft af den store åreudvidelse i starten af cyklus trykudlignes der, hvorved radiusændringen falder. Vi skal dog også huske at randbetingelsen for den bevægelige rand er sat til  $R = r_m$  på outflowsranden, hvilket kan være med til at tvinge systemet til at dæmpe radiusændringen. Her ville det være interessant at forsøge at løse samme system, hvor man i stedet benyttede randbetingelsen  $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$  på outflowsranden. En sådan betingelse betyder at radius er den samme lige før og efter randen; man kan sige at dette svarer til at åren fortsætter uændret. I figur



(a) Flowprofiler for simulering B

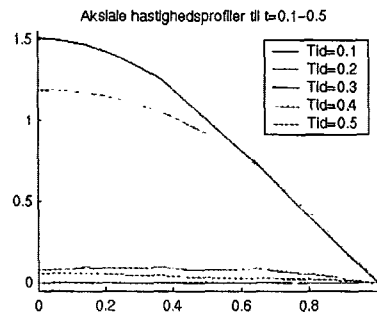
(b) Simulering B. Aksiale hastighedsprofiler taget midt i den simulerede åre for  $t=3.6-4$  s. x-aksen repræsenterer  $\eta$  og y-aksen hastigheden i cm/s

Figur 4.15 Flowprofiler og hastighedsprofiler for simulering B.

4.15(a) er flowudviklingen ned gennem åren over kredsløbscyklus præsenteret.

Tryk (der forårsager radiusændring) og flow synes at have samme kvalitative tendenser, jævnfør figurer 4.14 og 4.15(a).

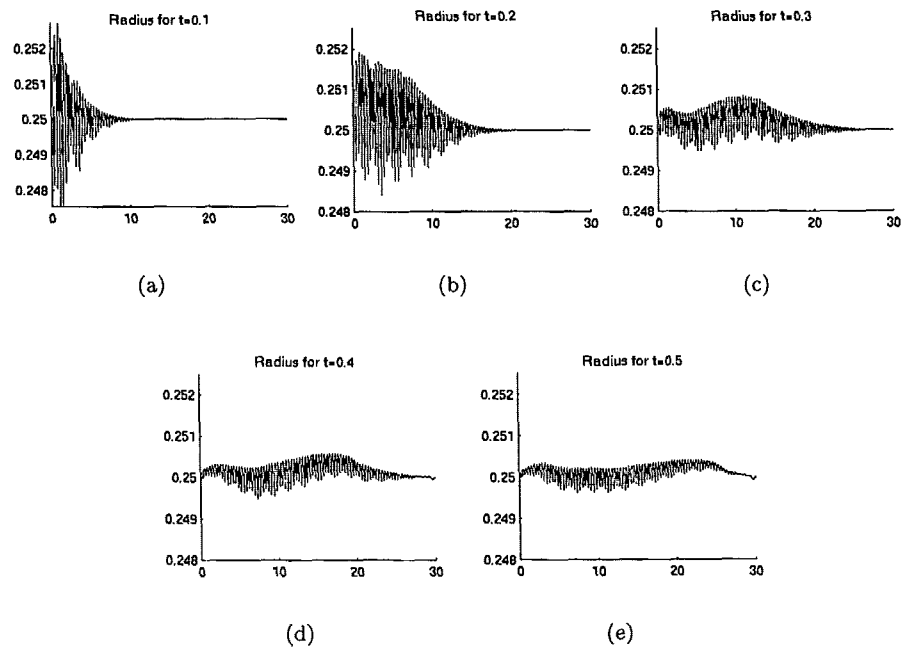
På figur 4.15(b) er den aksiale hastighed afbildet som tværsnitshastighedsprofiler over den sidste kredsløbscyklus i simuleringen. Af figuren ses paraboliske og flade hastighedsprofiler. Holdes figuren sammen med radiusafbildningerne på figur 4.13 ses at hastigheden er størst omkring  $t=3,8$  s. Til dette tidspunkt har radius midt i åren størst værdi, se figur 4.13(c).



**Figur 4.16** Simulering C. Aksiale hastighedsprofiler taget midt i den simulerede åre (dvs. ved 15 cm)), for  $t=3.6-4$ . x-aksen repræsenterer  $\eta$  og y-aksen hastigheden i cm/s

### 4.4.3 Simulering C

Simulering C er foretaget med henblik på sammenligning med skanningsdata fra Skejby Sygehus (præsenteres nærmere i følgende kapitel), derfor er den sat op på samme måde som simulering A, med undtagelse af hvileradius  $r_m$  der er sat til 2.5 mm, da dette er radius for den skannede åre data bygger på. Da der kun er løst for én periode, er løsningen ikke stabil endnu. I figur 4.16 er de



**Figur 4.17** Simulering C. Radiusplot for kredsløbscyklus. x-aksen repræsenterer årelængden i cm, og y-aksen radius i cm. Y-akserne er for samtlige figurer skaleret ens.

aksiale hastighedsprofiler for simulering C gengivet. Sammenligner vi disse med

de tilsvarende for simulering A, dvs. vi sammenligner simuleringer hvor eneste forskel er hvileradius  $r_m$ , ses det af figur 4.11, hvor resultaterne fra simulering A er gengivet, at blodet strømmer væsentligt hurtigere i simulering C, dvs. for åren med den større hvileradius. Samtidig bemærkes det også at der for simulering A forekommer negativt flow, mens det ikke er tilfældet for simulering C. I figur 4.17 ses radius udvikling ned gennem åren over kredsløbscyklus. Figuren viser samme tendenser som set for simuleringer A og B, dvs. at radius ses at have en relativt stor udvidelse i begyndelsen af cyklus, hvilket forårsager en trykudligning, der giver sig udtryk i en mere stabil radius omkring hvileradius.

#### 4.4.4 Sammenligning af simuleringer med resultater fra [5]

På trods af at den begrænsede mængde data ikke giver grundlag for en kvantitativ sammenligning med resultater fra [5], vælger vi at fremhæve nogle enkelte iagttagede tendenser. Vi har set at alle hastighedsprofiler fra vores simuleringer er paraboliske hhv. flade og at de til ethvert tidspunkt har enten positivt eller negativt flow. Der forekommer altså ikke profiler som på figur 3.6 (b) og (c). Sammenligner vi nu den aksiale hastighed på tværsnitsprofilerne i figur 3.6 med den tilsvarende hastighedsprofil i vores simuleringer, ses at væsken strømmer væsentligt langsommere i vores simuleringer. Dette mener vi skyldes at vi har sat vores inflowhastighed for lavt.

Biologisk set er det usandsynligt, at radius oscillerer som simuleringerne viser. Vi har derfor valgt at midle radius. Undersøger vi størrelsesordenen af radiusændringen, ser vi på figur 4.12 4.10 og 4.13 at den afviger højst  $10^{-2}$  mm fra hvileradius. I forhold til hvileradius på 1.65 mm og vægtykkelse på 0.1 mm må dette siges at være en meget lille ændring. Dette kan igen skyldes at der ikke strømmer meget væske i systemet, pga. det lavt satte inflow. Man må derfor konstatere at en kvantitativ sammenligning mellem [5] og de FEMLAB simuleringer vi her har, ikke giver større mening, da systemet kan forventes at opføre sig væsentligt anderledes ved højere hastigheder.

Vi har efter rapportaflevering fået foretaget nogle enkelte supplerende simuleringer, dog stadig uden at samtlige randbetingelser er opfyldt. For den ene af disse simuleringer har vi været i stand til at få vores inflow til at virke. Dvs. at hastighederne i væsken ned gennem hele åren er på et niveau der er sammenligneligt med [5]'s resultater. Ydermere har vi lavet to sammenlignelige simuleringer med og uden leddet 3.61 og har ikke været i stand til at detektere nogle forskelle mellem de to løsninger. Det skal dog igen påpeges at da samtlige randbetingelserne ikke er opfyldt, vil vi ikke konkludere noget om leddets betydning på baggrund af disse simuleringer.

#### 4.4.5 Diskussion af simuleringer

Det har vist sig særdeles vanskeligt og tidskrævende at få simuleringerne i FEMLAB til at fungere korrekt. Vi har forsøgt at simplificere vores system mest muligt, med henblik på gradvist at bygge videre på det. Programmet har udover de i sidste afsnit præsenterede løsninger kun været i stand til at løse systemet for en

fastholdt rand. Ved simuleringer med den bevægelige rand har fejlmeddelelsen typisk været "stepsize too small", hvilket i følge [8] betyder at den ikke-lineære iteration ikke kunne konvergere. Der gives tre forslag til hvad grunden til dette kan være:

- ikke passende evaluering af startværdi
- forkert skalering mellem de variable størrelser
- systemet har ingen løsning.

Vi har i vores opsætning valgt vores afhængige variable således at de stemmer overens med randbetingelserne på inflowsranden (rand 1). Vores udgangspunkt for startværdien er en antagelse fra [5] om at systemet før simuleringen går igang befinder sig i en hviletilstand. Det vil i dette tilfælde sige at årevæggene er i hviletilstand og startværdien for  $R$  dermed er  $R(t_0) = r_m = 0.165$  cm. Væsken antages yderligere ikke værende i bevægelse. At begyndelsesværdierne vælges på denne måde, gør at systemet starter fra en såkaldt nultilstand og derfor skal indstille sig over de første par cykler. Fysiologisk set er ovenstående antagelser tvivlsomme. Man kunne derfor vælge at evaluere en karakteristisk hastighed for en væskepartikel i systemet, som gjort i afsnit 3.2.1 og give  $w$  og  $u$  en starthastighed på hhv  $w_0(1 - \eta^2)$  og  $u_0(1 - \eta^2)$ . Vi har forsøgt os med begge dele uden det har gjort en stor forskel og har derfor beholdt den førstnævnte startværdi.

Hvad angår skalering mellem de variable, har vi undersøgt om vores system indeholder vidt forskellige størrelser. Dette gøres ved hjælp af dimensionsanalyse, efter samme metode som i afsnit 3.2.1. Konklusionen på denne dimensionsanalyse er at systemet er skaleret passende, og at dette tilsyneladende ikke er problemet<sup>4</sup>. Den sidste af de ovenfor oplyste muligheder mener vi ikke er gældene for vores system.

Typisk for FEMLAB-manualen [8] er ovenstående forslag langt fra repræsentativt for hvad problemet reelt konstituerer. Via forskellige web-baserede know-how baser uafhængige af FEMLAB, såvel som på FEMLAB's eget knowledge-base har vi fundet andre forslag til kontrol af systemet, såvel som årsager til fejlmeddelelsen. Generelt kan siges at systemet ikke skal være *ill-posed*, hvilket udover de allerede nævnte problemer vil sige at systemet ikke skal være underbestemt, dvs. vi skal i praksis have samme antal ligninger som afhængige variable. Samtidig er det afgørende at der ikke er modsigelser i systemet, eksempelvis at en begyndelsesværdi modsiger en randbetingelse, eller at en randbetingelse modsiger en ligning. Vi har løbende rettet fejl og uoverensstemmelser, og mener at have kontrolleret opsætningen grundigt.

I [5] angives at de i deres FDM simuleringer har anvendt *Gear's metode* til at integrere differentialligningerne, fordi de var karakteriseret ved stærkt varierende tidskonstanter. Et sådant differentialligningssystem betegnes som *stift* og er løst sagt et system hvor hastighedsfeltets størrelse eller ændring varierer meget hurtigt. Det betyder at man ved anvendelse af en eller anden eksplicit tidskridtsalgoritme næsten uvægerligt vil foretage tidsskridt der overser afgørende

<sup>4</sup>Dimensionsanalysen kan ses i appendiks A.

information, hvadenten skridtene er små eller store. Gear's metode anvender en metode der blander systemets nuværende og fremtidige tilstand på en måde som gør den mindre følsom overfor disse hurtige ændringer. Det betyder at der optræder tidskrævende ikke-lineære led i evalueringen af det enkelte skridt, men eftersom det samlede antal skridt reduceres voldsomt er metoden i den sidste ende tidsbesparende [9]. Det har i praksis været umuligt at få svar på hvorledes man tackler et stift ikke-lineært tidsafhængigt system i FEMLAB.

Som en konsekvens heraf har størstedelen af arbejdet i FEMLAB været decideret »trial and error« arbejde. Det er klart at vi har forsøgt at systematisere denne arbejdsform mest muligt, eksempelvis ved som nævnt at bygge ligningssystemet op led for led. En strategi som vi ikke har udnyttet fuldt ud er kombinationen af en stationær løsning som begyndelsesværdi for det tidsafhængige problem. Vi har forsøgt at anvende de stationære ikke-lineære løsningsalgoritmer, men er også her rendt ind i problemer. Vi har ikke undersøgt denne metode fuldt ud, primært fordi manualen understregede at visse af de tidsafhængige løsningsalgoritmer skulle være i stand til at håndtere ikke-lineære problemer.

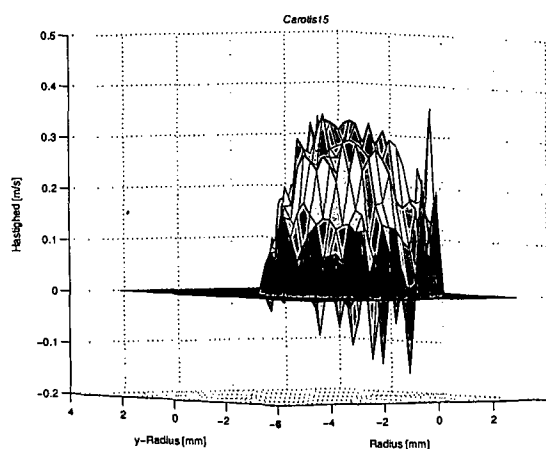


## Kapitel 5

# Datasammenligning

### 5.1 Datapræsentation

I følgende kapitel vil vi præsentere data fra Skejby Sygehus<sup>1</sup> for efterfølgende at sammenligne med resultater fra [5] samt kort med simulering C. Data fra Skejby Sygehus stammer fra en patientskanning af Carotis Interna, dvs. halspulsåren lige efter forgreningen i halsen. Diameteren af åren er knap 5 mm. Vi har modtaget 18 29x28 matricer med en hastighedsværdi i hver pixel. Hver pixel er 0.25 mm i begge retninger og pixelværdien er angivet i m/s.

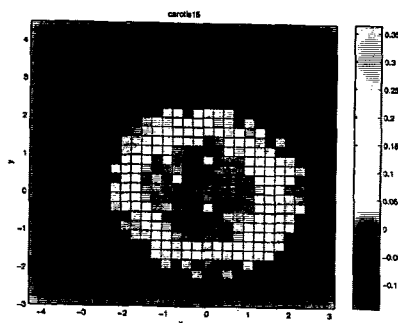


Figur 5.1 Surface fremstilling af matrix 15.

Hastighedsværdierne er midlet over snittykkelsen på 3 mm, altså er værdien for hver pixel en midling over volumet  $0.25 \times 0.25 \times 3 \text{ mm}^3$ . Pixels uden for blodåren er sat til nul. Skanningen tog ialt 8 minutter og 30 sekunder, dvs. at der inden for denne tid er tidsmidlet. Et enkelt billede er altså opsamlet over mange hjerteslag. Ved en surface-fremstilling i MATLAB af en af de 18 matricer

<sup>1</sup>I kapitlet præsenteres udvalgte data; for samtlige data se appendiks B.

fremkommer en figur som figur 5.1, og en to-dimensional fremstilling af samme matrix ses i figur 5.2.



**Figur 5.2** To-dimensional fremstilling af matrix 15. x- og y-akserne viser radius i mm, mens farverne indikerer hastigheden i m/s

Det første billede er 8 ms efter EKG'ets R-tak<sup>2</sup>, hvorefter der er 36 ms mellem de efterfølgende billeder. Patienten havde en gennemsnitlig puls på 84 under skanningen, hvilket gennemsnitligt giver en kredsløbscyklus på 714 ms. De 18 billeder dækker en periode på 620 ms og spänner derfor ikke en hel kredsløbscyklus.

For sammenligning med flowprofilen over en kredsløbscyklus præsenteret i [5], har vi for hver af de 18 matricer beregnet det samlede flow og plottet dette mod de 18 tidspunkter. For hver matrix adderes samtlige pixelværdier, dvs. hastigheder, og multipliceres med arealet af en pixel  $((0.25 \text{ mm})^2)$ ; herved fås det samlede flow til det enkelte tidspunkt.

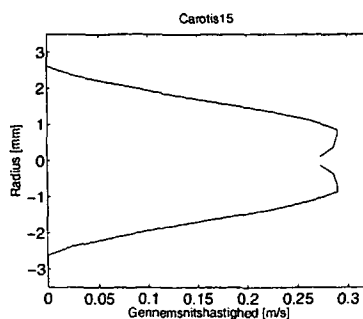
For sammenligning af data med hastighedsprofiler fra [5] har vi for hvert billede taget gennemsnittet af hastighederne over hver enkelt radial position. Dette er i praksis gjort ved transformation af x- og y-koordinaterne til polære koordinater, hvorefter vi approximerer  $\bar{w}_{data}$  ved

$$\bar{w}_{data} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_{data}(r, \theta) d\theta \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_{data}(r, j). \quad (5.1)$$

På denne måde er det muligt for os at fremstille to-dimensionale tværsnitshastighedsprofiler til sammenligning med de i [5] præsenterede profiler. Vi opnår ved denne metode én hastighed til hver radial position, hvorfor vi har valgt at spejle graferne. Da data er diskrete punkter fordelt over åren er vi ikke i besiddelse af hastighedsværdier til enhver radius, hvorfor hastighedsgennemsnittet er taget indenfor et lille radiusinterval. Denne midlede hastighed plottes mod gennemsnittet af radierne indenfor det valgte interval, hvilket gør at intet data er plottet i punktet nul. Et eksempel på en sådan fremstillet hastighedsprofil ses i figur 5.3.

<sup>2</sup>dvs. 8 ms efter aktiveringen af hjertets venstre kammer, hvorfra blodet pumpes ud i aorta, (der iøvrigt fra sin øverste buede del forgrenes til bla. halsarterien Carotis) [20].



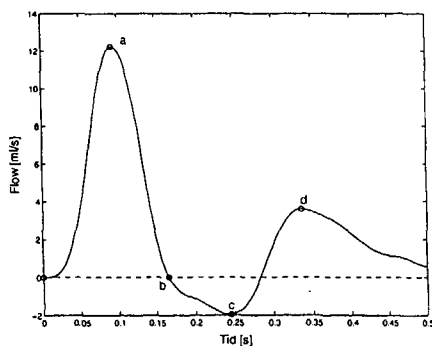


Figur 5.3 Todimensionalt plot af matrix 15.

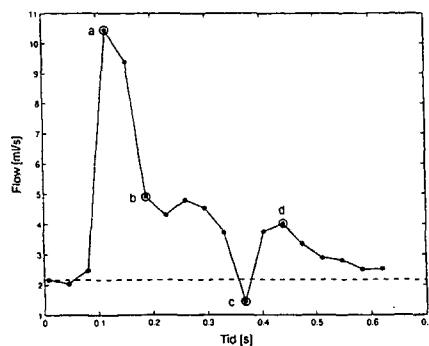
## 5.2 Sammenligning med resultater fra [5]

### 5.2.1 Flowprofiler

Figur 5.4(b) viser flowprofilen for data fra Skejby Sygehus. De markerede punkter *a*, *c* og *d* er på figur 5.4(b) placeret for at kunne lave kvalitative sammenligninger med de tilsvarende tendenser på figur 5.4(a). Punktet *b* har samme funktion, men da der ikke er overensstemmelse mellem de to grafer omkring dette punkt, er det placeret umiddelbart inden en afvigende tendens i forhold til figur 5.4(a).



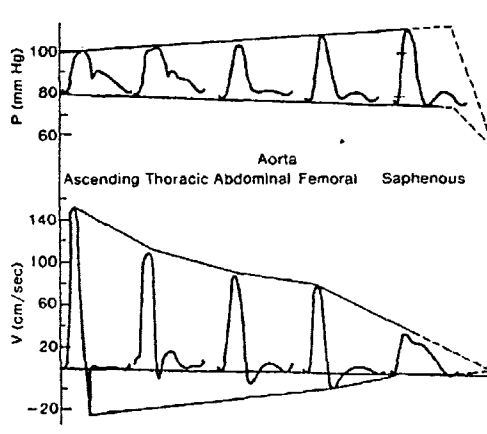
(a) Flowprofil [5].



(b) Flowprofil på baggrund af data fra Skejby Sygehus.

Figur 5.4 Flowprofiler fra [5] hhv. Skejby Sygehus data.

Figur 5.4(b) er som sagt tegnet på baggrund af en beregnet flowværdi til hvert af de 18 tidspunkter, og dermed ligger der kun 18 sæt koordinater til grund for grafen. Med dette in mente ses det af figur 5.4 at simuleringerne fra [5] bibeholder det store udslag omkring tidspunkt *a* som ses på skanningsdata, at der mellem tidspunkterne *b* og *c* ikke er overensstemmelse mellem data og Cavalcantimodellens resultater, og at forløbet fra tidspunkt *d* og frem viser god



Figur 5.5 Tryk (øverst) og gennemsnitshastighed (nederst) i aorta og dens arterieforgreninger i en hund [14].

overensstemmelse mellem data og modelresultater.

Ved en direkte sammenligning af flowprofilerne (figur 5.4) skal vi huske at den ene skal beskrive flowet i en hunds lårarterie og den anden flowet i et menneskes halsarterie. Halsarterien befinder sig meget nær hjertet, og er en af de første forgreninger af hovedpulsåren aorta, mens lårarterien befinder sig længere væk fra hjertet, hvilket, som nævnt i afsnit 2.2.3, gør at flowprofilerne vil være forskellige. På flowprofilen for data ses umiddelbart efter tidspunkt *b* en tendens, der kunne ligne flowprofilens udgave af den dikrote hævnning. På flowprofilen fra [5] ses den dikrote hævnning ikke. Dette er dog heller ikke overraskende da lårarterien befinder sig længere nede i kredsløbssystemet, hvilket er illustreret på figur 5.5, hvor det ses hvordan trykket i en hunds arterier fordeles sig ud fra aorta og flere forgreningstrin ned. Som det ses på figuren har gennemsnitshastigheden i lårarterien (femoral arterie) samme tendenser som flowprofilen 5.4(a).

Gennemsnitsflowet for Cavalcantimodellens flowprofil er beregnet til 2.4 ml/s, mens det for data flowprofilen er 4 ml/s, hvilket ikke er overraskende taget i betragtning af at Cavalcantimodellen simulerer blodstrømningen i en hunds lårarterie med diameter på 3.3 mm, og data fra Skejby Sygehus er for en human halsarterie med diameter på 5 mm. Af figur 5.4 ses det at flowet for data aldrig bliver nul eller negativt som det er tilfældet på figur 5.4(a), men vi er dog ikke klar over om nulpunktet på grafen 5.4(a) fra [5] er blevet flyttet, så flowet til tiden nul er sat lig nul. Vælger vi at flytte nul til første punkt på dataflowkurven, fås også negativt flow, men ved dette fås samtidigt et middelflow på 1.8 ml/s, dvs. et middelflow der er lavere end det beregnet for Cavalcantimodellens flowprofil hvilket absolut ikke kan siges at være forventet. En mulig forklaring på dette kunne være, at der er sat et for højt inflow under simuleringerne i [5].

I [5] nævnes det at data fra tre forskellige kilder har været brugt til validering af simuleringerne, men denne validering er ikke gengivet. Dog nævnes det at bla. flow- og trykkurver fra [15] er nær de simulerede resultater. I figur 5.6 er de grafisk præsenterede eksperimentelle data fra [15] gengivet, og som det ses

er det umiddelbart meget svært at lave kvantitative sammenligninger, da grafen fra [15] er i så dårlig kvalitet. Dog kan tendenserne for flowet fra [5] genkendes på figur 5.6.

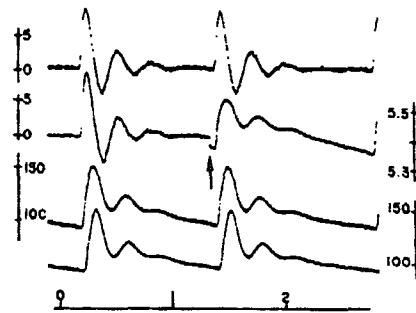
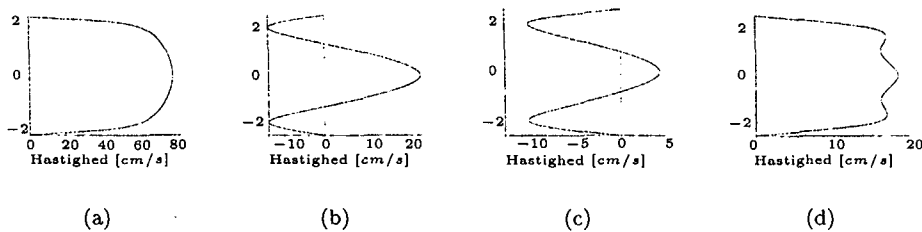


FIGURE 1 Records of experimental data. From top downward: proximal flow, distal flow (switched at arrow to diameter), proximal pressure, distal pressure. Ordinate scales at left: blood flows in ml/sec, proximal pressure in mm Hg. Ordinates at right: diameter in mm, distal pressure in mm Hg. Abscissa, time in seconds.

Figur 5.6 Eksperimentelle data fra [15].

### 5.2.2 Hastighedsprofiler

I [5] er følgende fire tværsnitshastighedsprofiler præsenteret (jf. figur 5.7) svarende til tidspunkterne (a)-(d) angivet på figur 5.4(a).



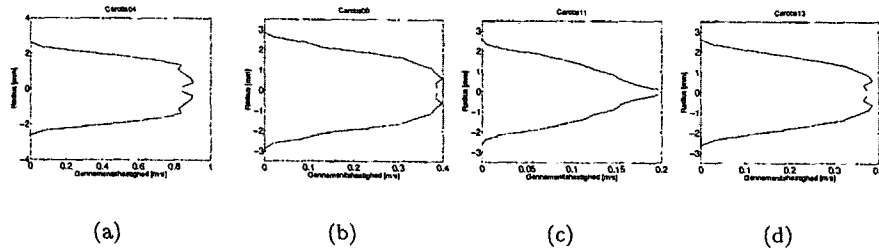
Figur 5.7 Aksiale hastighedsprofiler i flowcyklus [5] svarende til tidspunkterne angivet på figur 5.4(a).

Vi har valgt her at gengive de tilsvarende hastighedsprofiler for data, dvs. hastighedsprofiler svarende til de markerede punkter på figur 5.4(b), se figur 5.8.

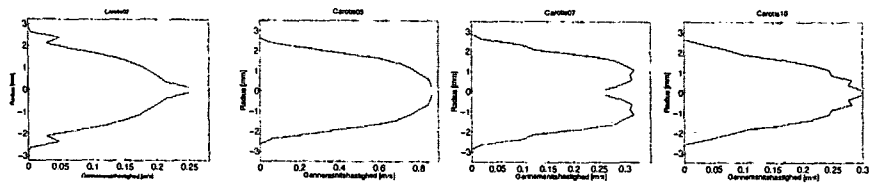
De fire profiler gengivet i 5.8 er dog ikke repræsentative for samtlige tendenser for de 18 billeder, hvorfor yderligere fire hastighedsprofiler for data er afbildet i figur 5.9<sup>3</sup>. Disse kombineret med profilerne i figur 5.8 viser hovedtendenser for alle 18 billeder.

De midlede hastighedsprofiler for data har vi valgt også at gengive tredimensionalt, med tiden som tredje variabel, da dette giver et rumligt billede

<sup>3</sup>For samtlige hastighedsprofiler se appendix B.3.

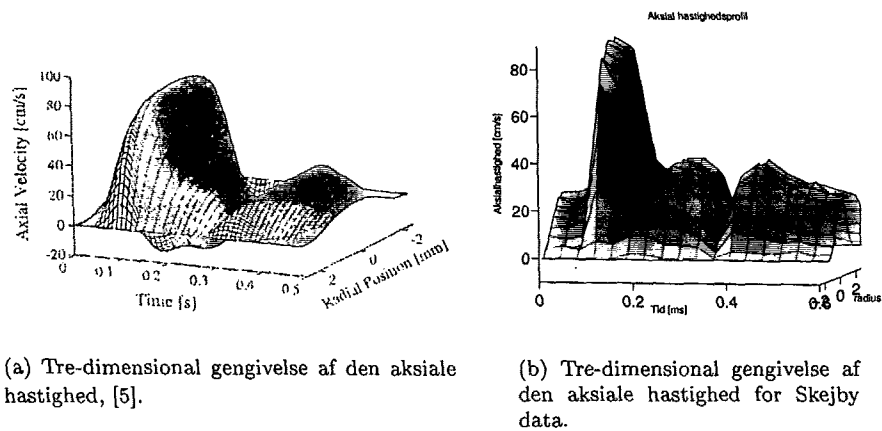


Figur 5.8 Aksiale hastighedsprofiler for Skejby data svarende til de markerede punkter a-d angivet på figur 5.4(b). x-aksen viser gennemsnitshastigheden i m/s og y-aksen radius i mm.



Figur 5.9 Hastighedsprofiler af Skejby data til tiderne 44, 152, 224 og 548 ms. x-aksen viser gennemsnitshastigheden i m/s og y-aksen radius i mm.

af blodstrømningen. Denne afbildning er præsenteret i figur 5.10 sammen med [5]'s tilsvarende afbildning.



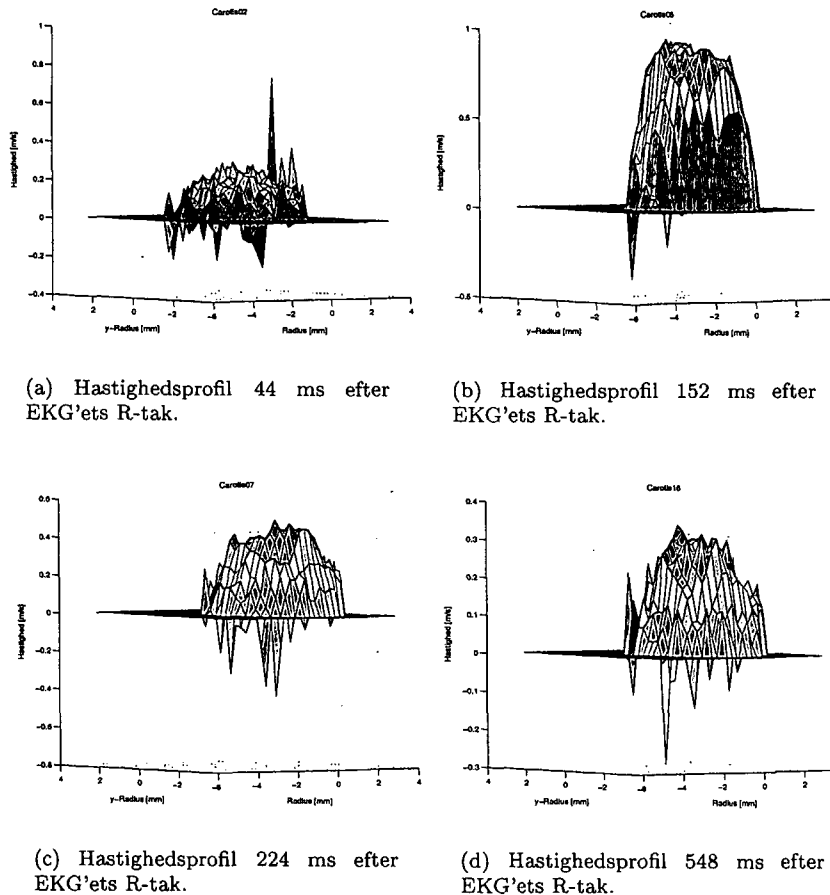
(a) Tre-dimensional gengivelse af den aksiale hastighed, [5].

(b) Tre-dimensional gengivelse af den aksiale hastighed for Skejby data.

Figur 5.10 Tre-dimensionale gengivelser af den aksiale hastighed som funktion af tid og radius.

Som det ses på figur 5.7 har [5] ved simuleringen fået fire meget forskellige tværsnitshastighedsprofiler, bla. en positivt parabolisk tværsnitshastighedsprofil samt to profiler med både negativt og positivt flow, mens tværsnitshastighedsprofilerne for data er en blanding af positivt kegleformede og paraboliske profiler. På samt-

lige midlede tværsnitshastighedsprofiler for data ses udelukkende positivt flow. Derimod ses negativt flow på samtlige ikke-midlede billeder, eksempler på dette er afbildet i figur 5.11.



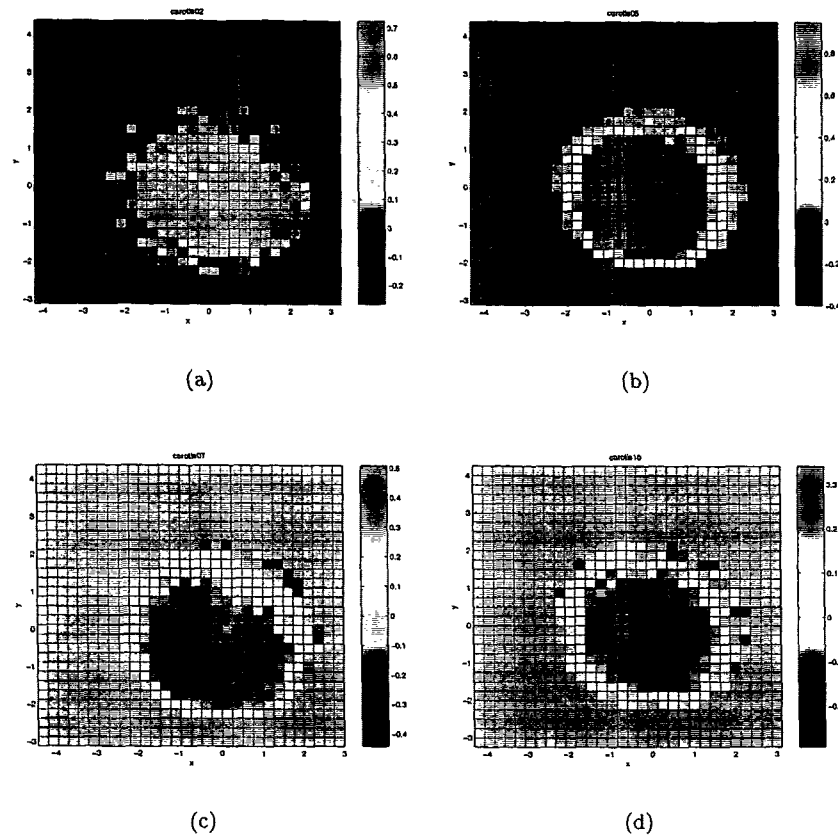
**Figur 5.11** Surface-afbildning af den aksiale hastighed til tiderne 44, 152, 224 og 548 ms, svarende til de midlede hastighedsprofiler i figur 5.9.x- hhv. y-akserne repræsenterer radius i mm, mens z-aksen repræsenterer hastighed i m/s.

Ved midlingen går en hel del information altså tabt. På [5]'s hastighedsprofiler (figur 5.7) ses at det negative flow udelukkende befinder sig ved kanten af åren. På de to-dimensionale plots af matricerne (se figur 5.12), ses at dette stemmer overens med data.

Asymmetrierne i især de negative hastigheder på data ses tydeligt på figur 5.12, hvorfor vi har valgt at lave et ikke-midlet plot af hastigheder til en fast  $\theta$ -værdi<sup>4</sup> fra centrum til randen af åren.

Dette snit kan lægges utallige steder på hver af de 18 matricer, men vi har bevidst valgt at lave nogle enkelte plots og her udvalgt de der illustrerer de

<sup>4</sup>Det vil reelt sige for et lille  $\theta$  interval, igen grundet de diskrete værdier. Disse diskrete værdier er også her grunden til at ingen data plottes omkring centrum af åren.



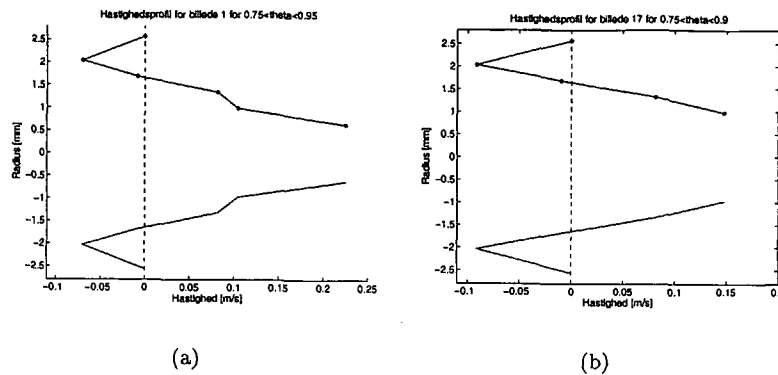
**Figur 5.12** To-dimensionale plots af matricer, svarende til de i figurerne 5.9 og 5.11 afbildede profiler.

tendenser, der ikke allerede fremgår af de midlede hastighedsprofiler for data, se figur 5.13.

Som det ses viser de umidlede hastighedsprofilerne i figur 5.13 de samme tendenser som ses på [5]'s profil gengivet i figur 5.7(b). De to umidlede dataprofiler er fra hhv. 8 ms og 584 ms, hvilket ikke svarer til samme tidspunkt som figur 5.7(b) er plottet for; de er blot et eksempel på at disse tendenser forekommer i data. Profiler med samme tendenser som gengivet i figur 5.13 kan findes i samtlige 18 matricer. At disse tendenser ikke fremkommer på de midlede profiler, bekræfter at strømmingen er asymmetrisk, hvilket til dels kan forklares ved at skanningen er foretaget nær en bifurkation.

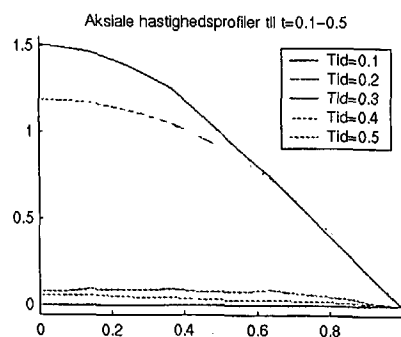
### 5.3 Sammenligning med FEM-løsning

Vi har nået at udføre en simulering med radius svarende til størrelsen af den skannede åre, dvs. 2.5 mm. Denne simulering er udført med henblik på en sammenligning med data, dog er intet andet i simuleringsopstillingen ændret end



**Figur 5.13** Radialt umidlede hastighedsprofiler for hhv. matrix 1 og 17. Til grund for kurverne ligger de markerede punkter. Vi har valgt at spejle graferne for at gøre dem lettere sammenlignelige med andre gengivede hastighedsprofiler i kapitlet. Dvs. at grafen ikke skal opfattes som en tværsnitshastighedsprofil over diameteren af den skannede åre, da der som sagt udelukkende er tale om en spejlet radiusprofil.

hvilkeradius. Dvs. parametrene  $\sigma_0$  og  $\beta$  er uændrede i forhold til simuleringerne for hundelårarterien. Som vist i afsnit 3.3.1 er fastsættelsen af disse bestemmende for den simulerede åres elasticitet, og det er ikke sandsynligt at elasticiteten for en lårarterie og en halsarterie er ens. Trods dette har vi valgt at udføre simuleringen, da vi ønskede at se om nogle nye tendenser fremkom. Desværre har vi ydermere kun nået en simulering på en kredsløbscyklus, dvs. for 0-0.5 sekunder, hvilket gør at løsningen endnu ikke har stabiliseret sig helt. Med alt dette in mente vil vi i det følgende kort sammenholde simuleringen og data.



**Figur 5.14** Aksiale hastighedsprofiler taget midt i den simulerede åre (dvs. ved 15 cm), for  $t=3.6-4$ . X-aksen repræsenterer  $\eta$  og y-aksen hastigheden i cm/s.

I figur 5.14 er den aksiale hastighed fra simuleringen afbildet som tværsnitshastighedsprofiler over kredsløbscyklus. Figuren viser paraboliske og flade hastighedsprofiler, svarende til hhv. højt og lavt flow. Af figuren ses også at der til ingen tider i kredsløbscyklus opstår negativt flow, dvs. at ingen hastighedsprofiler fra simuleringen viser tendenserne præsenteret i figurer 5.7(b) og 5.7(c) fra [5], hvilket også er tilfældet for samtlige midlede tværsnitshastighedsprofiler for

data. Pga. simuleringens mangler vil vi ikke udføre videre sammenligninger.

Samlet må vi på baggrund af data konkludere at kvalitativt ses mange af tendenserne fra data også i resultaterne præsenteret i [5]. At give endelige konklusioner og direkte validere [5]'s resultater og dermed indirekte modellen mener vi ikke at have belæg for på baggrund af ovenstående analyse, da data og simuleringsresultater afspejler blodstrømningen i to meget forskellige arterier. Ydermere giver det også problemer at data er fremkommet ved skanning så nær en bifurkation.



# Kapitel 6

## Diskussion

### 6.1 Verificeringsmæssige overvejelser

#### 6.1.1 Cavalcantimodellen

I afsnit 3.2.1 viser vi at opstillingen af Cavalcantimodellens grundligninger 3.1 og 3.17 er rimelig udfra de fysiske antagelser der er foretaget. Dette blev gjort under antagelse af at  $R \ll L$  og under antagelse af at et meget lille led i en ligning ikke har en mærkbar betydning for det samlede resultat. Den første antagelse er faktum i årer af den størrelsesorden som vi her undersøger og må derfor siges at være rimelig. Den anden antagelse er en ad hoc antagelse, hvor man i beregningsmæssige sammenhænge ikke har oplevet forskel i resultater hvor små led er udeladt. I teorien er det dog ikke udelukket at disse små led kan have betydning i følsomme områder, f. eks. hvor hastighederne vender i en hastighedsprofil som eksempelvis på figur 5.7.

Vi fortsætter med at betragte en antagelse om lighed af integranderne i ligning 3.25, og i afsnit 3.1.3 udleder vi en ligning for  $\partial R/\partial t$  hvori der i forhold til [5] indgår et ekstra led, jf. ligning 3.61. I afsnit 3.2 viser vi at dette led er det dominerende led nær årens væg hvor aksial hastigheden bliver lille, men den radiale afledte stor, og vi bemærker i afsnit 3.3.2 at denne hastighedsgradient på randen er lig shearraten på væggen. Det synes intuitivt korrekt at beskrivelsen af væggenes bevægelse også skal indeholde et bidrag fra shearraten, specielt des mere elastisk væggen er. Som nævnt i afsnit 3.3.2 viser [5]'s simuleringer at shearstresset i både den systoliske og den diastoliske fase har størst udsving for arterie 2, som er den mest elastiske af de tre simulerede arterier. Uden nye simuleringer er det ikke muligt umiddelbart at afgøre størrelsesordenen af shearstresset i de to faser, men vi kan udfra figur 3.7 (a) kvalitativt fastslå fortegnet af stresset, og dermed af shearraten (som har samme fortegn, jf. ligning 3.64). Vi ser at  $S$  er positiv i den systoliske fase, men negativ i den diastoliske. Hvis vi antager at Cavalcantimodellens forudsigelse om negative hastigheder langs årevæggen i den diastoliske fase er korrekt, således at hastigheden ved væggen er positiv i den systoliske fase, og negativ i den diastoliske, finder vi fra ligning 3.60

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial z} \left( \frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} - w \right) - \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z},$$

at  $w$  og shearraten altid har modsat fortegn. Dvs. at det i [5] udeladte led dæmper den effekt som hastigheden udøver. Samtidig ser vi også at vores ekstra led og  $\partial R/\partial z$  har samme fortegn. Dette giver anledning til forskellige effekter i hhv. den systoliske og diastoliske fase. Hvis vi i den systoliske fase befinder os på et sted hvor åren naturligt udvider sig, dvs.  $\frac{\partial R}{\partial z}$  er positiv, og da vi samtidig ved at shearraten er positiv, får vi altså samlet et positivt bidrag, hvilket vil sige at dette led så at sige arbejder med åreudvidelsen. Eftersom  $w$  også er positiv i den systoliske fase, men  $w$ -leddet i ligning 3.60 er negativt, bliver effekten af dette led altså modsat, hvilket vil sige modarbejdende udvidelsen. En tilsvarende argumentation kan gennemføres for indsnævringer i åren, og ligeledes i den diastoliske fase. Resultatet er i alle tilfælde at de to led modarbejder, hvilket antyder at Cavalcantimodellen undervurderer randens bevægelse i begge retninger. Som sagt skal der nye simuleringer til før vi kan afgøre dette spørgsmål.

Udover den ovenfor nævnte antagelse diskuterer vi yderligere i afsnit 3.2 modellens diverse fysiske og geometriske antagelser. I forlængelse af disse er det relevant at spørge om det fysiske modelsystem der modelleres er et realistisk system. I den forbindelse synes en 30 cm lang, fuldstændig lige åresekvens i låret på en hund umiddelbart at virke urealistisk, men ved opstillingen af en model må man også gøre sig visse overvejelser om hvor mange detaljer af det man vil beskrive der er nødvendige i modellen, for at den kan beskrive de fænomener man ønsker. Dvs. hvis man, trods eksempelvis simplificeringen af årens tværsnit, stadig kan reproducere virkelighedens fænomener, behøves modellen ikke at kompliceres yderligere ved at lade den indeholde en perfekt beskrivelse af årens tværsnit til alle tider. Om de omtalte forsimplinger i dette tilfælde giver anledning til større fejl i forhold til virkelighedens fænomener mener vi umiddelbart ikke er tilfældet.

### 6.1.2 Simuleringsresultaterne

Som antydnet ovenfor må man ved opstillingen af en matematisk model for et givet genstandsområde i reglen foretage en del afgrænsninger og simplificeringer. En skarp sondring mellem relevant og ikke-relevant materiale kan være nødvendig, ofte med store konsekvenser for den endelige model. Efter formuleringen af mange matematiske modeller gælder det endvidere at det er nødvendigt med yderligere matematiske simplificeringer for at være i stand til at løse og anvende modellen. Som omtalt i afsnit 1.1.1 opstår der på grund af fluiddynamiske problemers komplekse karakter et fundamentalt problem omhandlende forholdet mellem kontinuumsmatematik, og den diskretisering der foregår i implementeringen af en computeriseret model. Dybest set handler dette problem om hvorledes computeren repræsenterer og opererer på tal. Det er klart at et endeligt antal diskrete værdier ikke fuldstændigt kan repræsentere et kontinuum. Udfordringen i denne approksimative talrepræsentation består derfor i så vidt muligt at kontrollere og minimere den mængde af fejl der uvægerligt vil komme. En måde at opnå dette på ville være at simulere et komplekst fluiddynamisk pro-

blem hvor der eksisterer en analytisk løsning (der findes få eksempler, se f.eks. [1]).

Som tidligere nævnt har simuleringerne voldt os store problemer, og som allerede diskuteret i afsnit 4.4 er det umuligt at konkludere noget kvantitativt ud fra de hidtidige simuleringer. Det skyldes at vores system endnu ikke er opsat på en måde så de to systemer kan siges at være sammenlignelige. Vi har eksempelvis endnu ikke implementeret randbetingelserne for åresekvensens to ender, dvs. simuleret at åren fortsætter kontinuert i begge retninger og at disse endepunkter også kan bevæge sig. I forlængelse af dette har vi ikke simuleret de i afsnit 3.1.4 nævnte impedanser, endside implementeret det korrekte inflow. Mht. flowet så antyder vi i afsnit 5.2.1 at der i [5] simuleres med et for højt inflow. Hermed mener vi for højt i forhold til det fysiske system de modellerer. Vi kan foretage en hurtig argumentation hvis vi betragter et vilkårligt tværsnit af åren hvor der passerer et volumen  $\Phi$  pr. sekund. Dvs. at pr. sekund flytter væsken sig afstanden  $L$ , når den passerer arealet  $A$ , hvorfor væskens middelhastighed bliver

$$W = \frac{\Phi}{A}. \quad (6.1)$$

Fra [14] fandt vi at middelhastigheden i en hunds lårarterie var 10 cm/s, og vi finder derfor at middelflowet  $\bar{\Phi}$  bliver

$$\bar{\Phi} = \pi \cdot (0.165 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm/s} = 0.86 \text{ ml/s}, \quad (6.2)$$

hvilket er ca. en faktor 4 mindre end hvis man beregner middelflowet fra figur 3.5(a). Selv med en bevægelig rand synes dette i overkanten. Som ses af hastighedsprofilerne i afsnit 4.4 har vi i vores simuleringer endnu ikke løst for så høje hastigheder som de indikeret i [5] (programmet fejlmelder simpelthen). Endnu engang må vi konstatere at vi ikke på baggrund af FEMLAB simuleringerne kan udtale os om verificeringen af modellen.

Fordi vi har brugt så mange kræfter på programmet ønsker vi at knytte et par ekstra bemærkninger hertil.

### 6.1.3 FEMLAB

FEMLAB ser i første omgang ud som et meget brugervenligt program med den simple grafiske brugerflade og de forskellige prædefinerede ligninger man kan vælge til sin modellering, og der er ingen tvivl om at FEMLAB er et stærkt og lettilgængeligt værktøj hvis man kan formulere sit problem i form af disse standardligninger. Lidt anderledes forholder det sig hvis man skal modellere ikke-lineære og tidsafhængige ikke-standardproblemer. Hvis man bevæger sig uden for programmets standardfunktioner, er der ikke meget hjælp at hente omkring programmets forskellige funktioner og applikationer. FEMLABs forskellige manualer for programmet er ikke informative om meget andet end hvor man kan finde de forskellige funktioner - *hvad* de gør er der enten begrænsede eller ingen oplysninger om.

Vi har haft store problemer med at implementere vores model i FEMLAB, i starten med hvordan det rent praktisk skulle sættes op, men senere med hvorfor

programmet (i de første mange omgange) ikke kunne løse systemet. Dette har været en yderst tidskrævende proces. Der er ikke meget oplysning i de forskellige fejlmeldinger fra programmet omkring hvad det egentlig er i ens system der ikke virker. I denne forbindelse har vi søgt hjælp hos FEMLAB support, men det har selv for dem ikke været indlysende hvad problemet er, hvilket tyder på at programmet i virkeligheden ikke er færdigudviklet hvad angår opsætning af ikke-standardproblemer og problematikken heri.

Her er vi faktisk ved kernen af problemerne ved FEMLAB. Det er klart at en dårlig manual besværliggør arbejdet selv med en nok så pædagogisk brugerflade, men fundamentalt er det største problem at man netop i kraft af den grafiske brugerflade fuldstændig mister kontrollen med den diskretisering der selvfølgelig foregår i programmet. At overtage denne kontrol kræver for det første at man har en rimelig erfaring med programmering i MATLAB, samt at man yderligere sætter sig grundigt ind i FEMLAB's programmeringssprog. Begge disse opgaver er selvfølgelig overkommelige, men herudover er man faktisk nødt til også at besidde en ikke uvæsentlig mængde viden om numeriske metoder, herunder forskellige lineære, iterative og tidsskridtsalgoritmer for bare med nogenlunde omtanke at kunne vælge mellem de mange kombinationsmuligheder som FEMLAB tilbyder. Det er vores opfattelse af programmets virkelige styrke og åbenlyse kvaliteter ville komme bedre til udtryk hvis man kunne bygge bro mellem de brugere der har denne specialviden, og de der ikke har. Tilhører man en brugergruppe mellem disse giver programmet som det er i sin nuværende udformning på den ene side mulighed for lynhurtigt at opsætte de forskellige koblede standardproblemer, men ønsker man at arbejde med mere avancerede problemstillinger, bliver det hurtigt utilfredsstillende at arbejde med en »black box«.

## 6.2 Valideringsmæssige overvejelser

I forbindelse med definitionen af valideringsbegrebet i afsnit 1.1.1 understreges det at valideringen foregår med udgangspunkt i de tiltænkte brugeres synspunkter. Det vil i denne forbindelse primært sige individer der på den ene eller den anden måde beskæftiger sig med hæmodynamiske fænomener. De formodede brugere antages at være beskæftiget enten med en eller anden form for forskning i blodstrømningsrelaterede fænomener eller med diagnostisering af arterielle sygdomme. Sidstnævnte kunne eksempelvis være i forbindelse med skanninger til detektion af åreforkalkning. I [5] vises at selv små indsnævringer i åren drastisk påvirker hastighedsprofilerne. Dvs. at man med præcise numeriske beregninger for årer af en specifik størrelse kan sammenligne data og simulering og herudfra vurdere hvorvidt åren er normal.

Mht. til valideringen af Cavalcantimodellen er det som nævnt i kapitel 5 svært at konkludere noget håndfast ud fra de data vi har haft til rådighed; de fysiske omstændigheder er simpelthen for forskellige. En mulighed for en bedre validering består selvfølgelig i opsætningen af en simulering rettet mod netop denne arterie.

## 6.3 Konklusion

Det er lykkedes i al væsentlighed at verificere Cavalcantimodellen hvad angår de matematiske antagelser der danner grundlaget for opstillingen af modellen, omend det påkalder sig en vis opmærksomhed at der tilsyneladende er glemt eller negligeret et led i udledningen af en af modellens ligninger; vel at mærke et led der ikke bør negligeres under de i modellen opstillede antagelser. Der stilles spørgsmålstejn ved flere af modellens fysiske og geometriske antagelser, som anses for urealistiske, men hvis tilstedeværelse accepteres som et udtryk for hvad der i praksis er realistisk at regne numerisk på.

Det er reelt ikke lykkedes at fremstille simuleringer til sammenligning med de i [5] refererede resultater, hvilket primært skyldes de implementeringsmæssige vanskeligheder i FEMLAB. De få simuleringer med stabile periodiske løsninger som det er lykkedes at producere, adskiller sig opstillingsmæssigt på afgørende punkter fra de i [5] foretagne simuleringer, hvorfor en direkte sammenligning i realiteten er meningsløs.

Det er ikke lykkedes direkte at validere modellen udfra de eksperimentelle data, omend der er indikationer af kvalitative ligheder mellem data og model. Den manglende validering skal ses i lyset af at data og simuleringerne fra [5] er fra vidt forskellige arterier, med vidt forskellige forhold gældende.



## Kapitel 7

# Perspektivering

Ved afslutningen af et projektarbejde står man typisk med et hav af ufærdige initiativer og uprøvede idéer, og således også her. I vores tilfælde er det primært pga. vanskelighederne med FEMLAB at vi ikke har fået gjort alt hvad vi gerne ville, og vi ønsker lige at ridse op hvad det nærmere er som vi gerne ville have inkluderet i rapporten.

Vi ville gerne have lavet en række simuleringer for at

- vurdere modellens resultater i forhold til mere direkte sammenlignelige empiriske data, dvs. fra lårarterier i hunde, eller andre arterier af samme proportioner.
- simulere en arterie svarende til den skannede, og på denne måde få valideret modellen.
- simulere årer med forsnævninger og naturlig indsnævring. Denne type simuleringer viser i [5] mange interessante resultater.
- vurdere tidsforbruget i forhold til kvaliteten af resultaterne af den numeriske metode.
- kontrollere FEMLAB's nøjagtighed ved sammenligning med en kompliceret fluiddynamisk problemstilling med eksakt løsning.
- undersøge hvorledes valget af mesh påvirker simuleringerne.
- simulere halspulsåren på en velvoksen hungiraf.

## Appendiks A

# Dimensionsanalyse

Omskriver vi vores ligninger til dimensionsløs form, bliver vores ligning 4.36

$$\eta u_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} + u_0 U + \eta R_0 R_d \frac{w_0}{L_0} \frac{\partial W}{\partial Z} - \eta^2 \frac{R_0 w_0}{L_0} \frac{\partial R_d}{\partial Z} \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{A.1})$$

som ved omskrivning bliver til

$$\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + U + \eta R_d \frac{\partial W}{\partial Z} - \eta^2 \frac{\partial R_d}{\partial Z} \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{A.2})$$

altså er alle leddene her ligevægtige. Vi omskriver nu på samme måde ligning 3.31

$$\frac{w_0^2}{L_0} \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{w_0^2}{L_0} W \frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{\rho w_0^2}{\rho L_0} \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\nu}{R_0^2 R_d^2} \left( w_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{w_0}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right). \quad (\text{A.3})$$

som kan omskrives til

$$\frac{\partial W}{\partial T} = W \frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\nu L_0}{R_0^2 w_0 R_d^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right). \quad (\text{A.4})$$

Indsætter vi nu værdierne for de karakteristiske størrelser som fundet i afsnit 3.2.1 og  $\nu = 0.033 \text{ cm}^2/\text{s}$  får vi ligningen

$$\frac{\partial W}{\partial T} = W \frac{\partial W}{\partial Z} - \frac{\partial P}{\partial Z} + 3.31 \frac{1}{R_d^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right). \quad (\text{A.5})$$

Altså kan vi her se at der ikke er meget forskel i leddenes størrelsesorden, ca. en faktor 3.3, hvilket må antages at være rimelige størrelsesforhold i en ligning. Vi forsætter nu på samme måde med ligningen for randens bevægelse, ligning 3.43

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -w \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (\text{A.6})$$



som bliver til

$$\frac{w_0 R_0}{L_0} \frac{\partial R_d}{\partial T} = -W \frac{w_0 R_0}{L_0} \frac{\partial R_d}{\partial Z} - \frac{R_0 w_0 R_d}{2L_0} \frac{\partial W}{\partial Z} + \eta \frac{w_0 R_0}{2L_0} \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial R_d}{\partial Z}, \quad (\text{A.7})$$

som er lig med

$$\frac{\partial R_d}{\partial T} = -W \frac{\partial R_d}{\partial Z} - \frac{R_d}{2} \frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial R_d}{\partial Z}. \quad (\text{A.8})$$

Her er der her kun en faktor 0.5 i forskel mellem ligningens led, hvilket igen er rimelige størrelsesforhold.









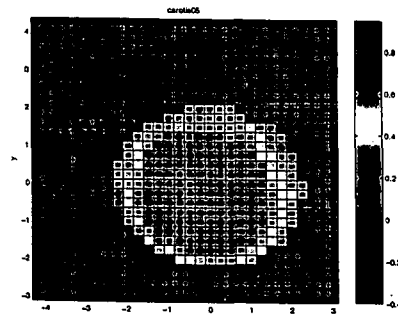
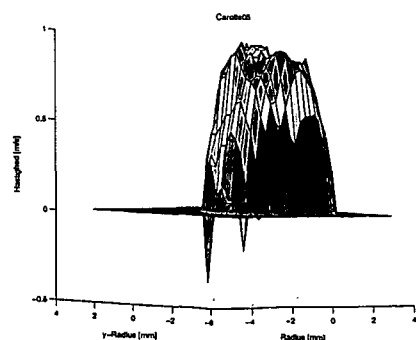
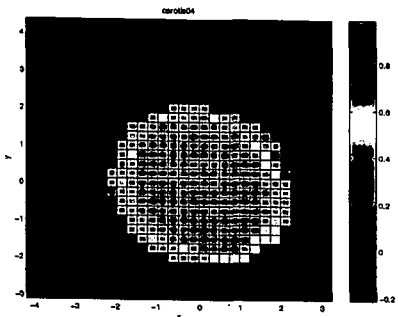
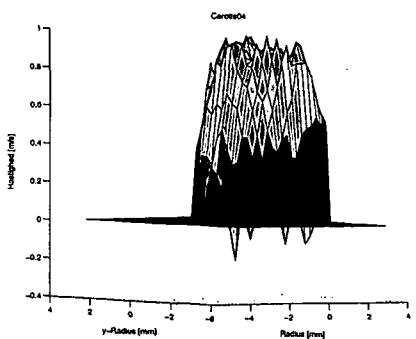
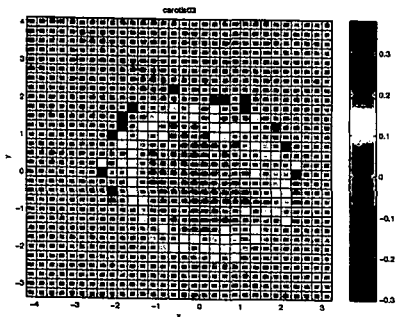
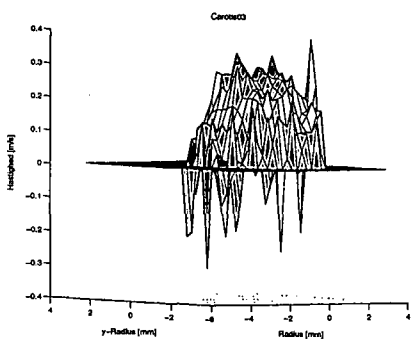
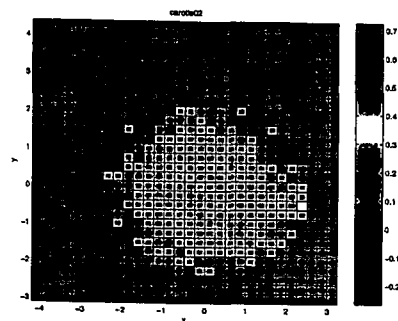
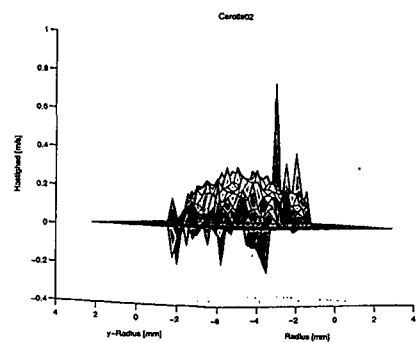


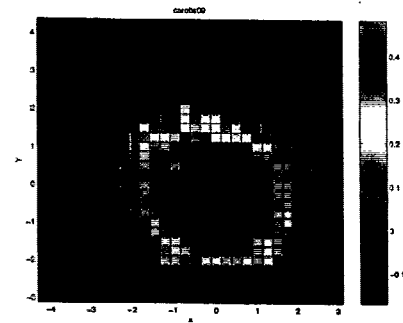
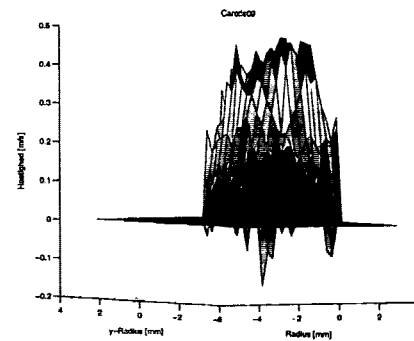
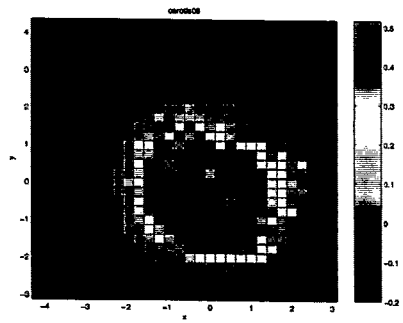
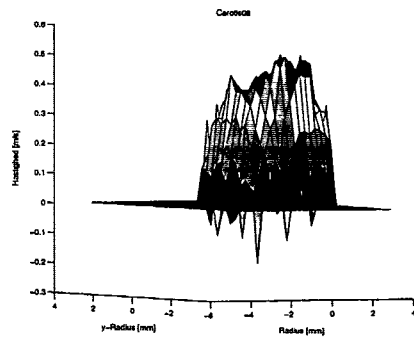
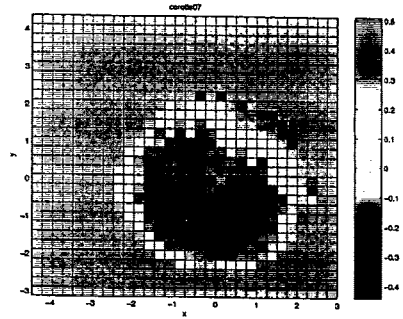
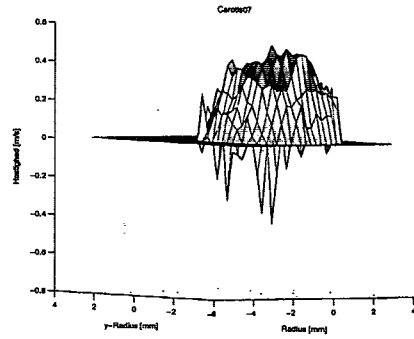
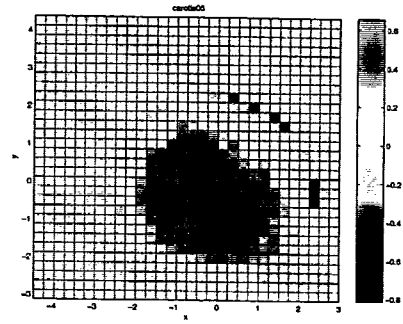
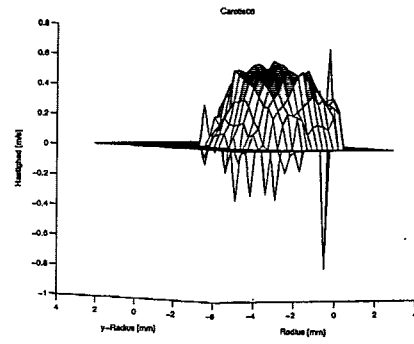


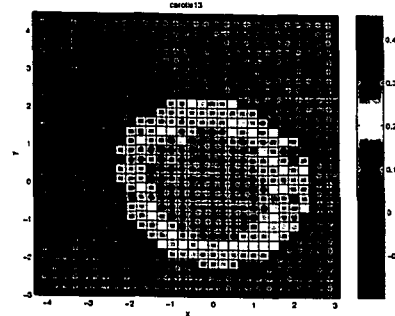
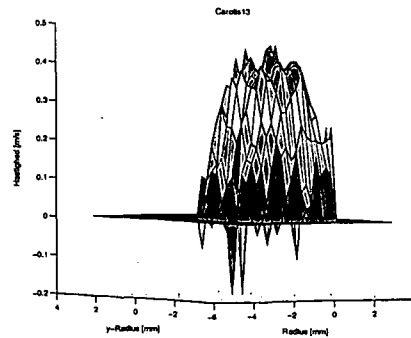
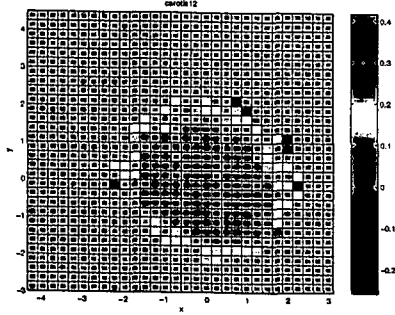
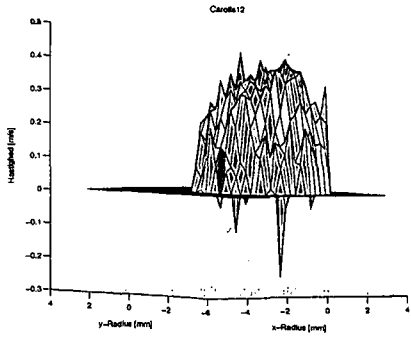
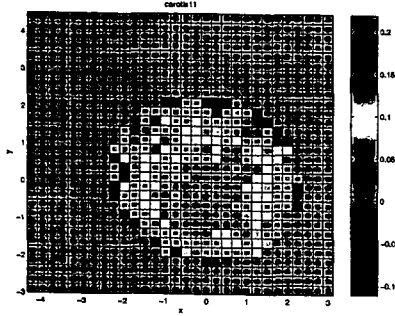
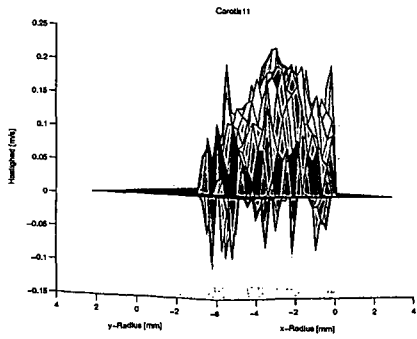
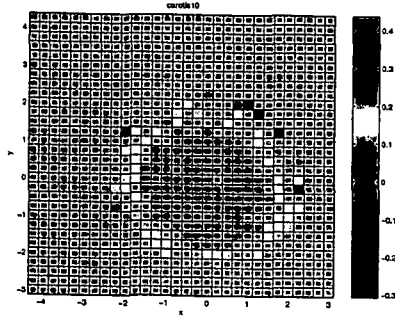
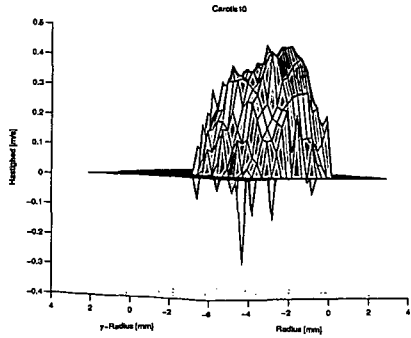


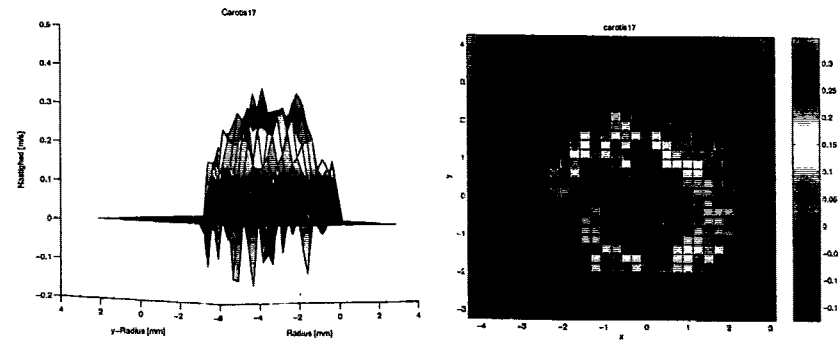
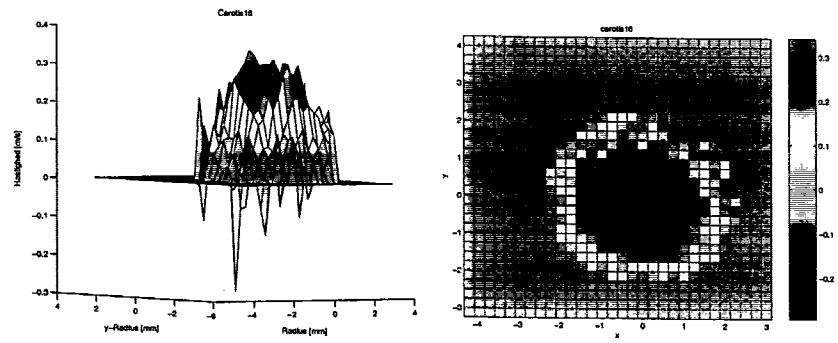
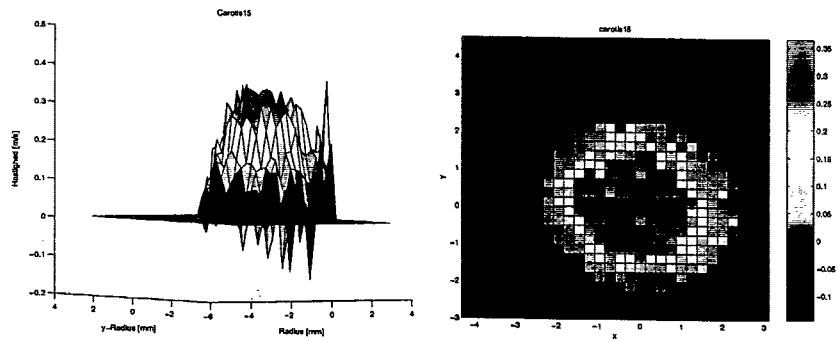
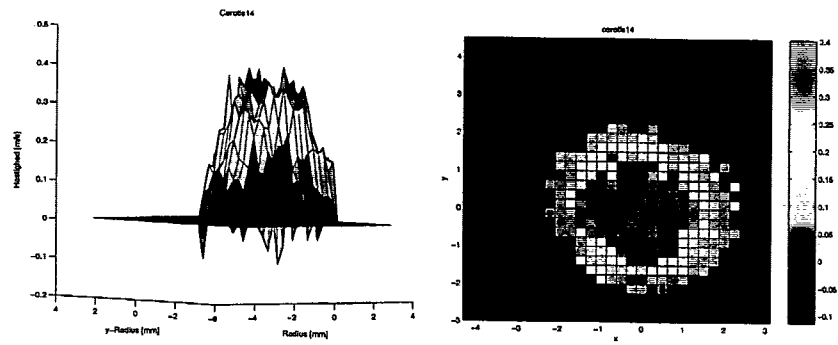


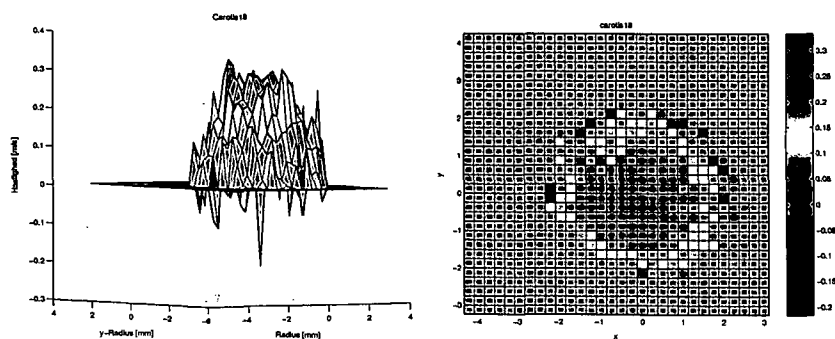




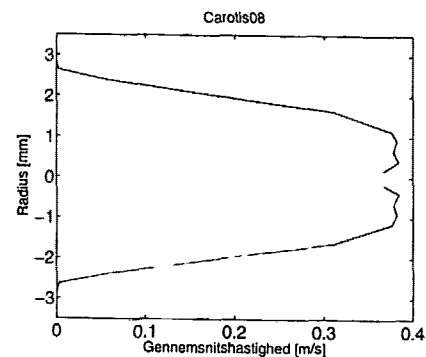
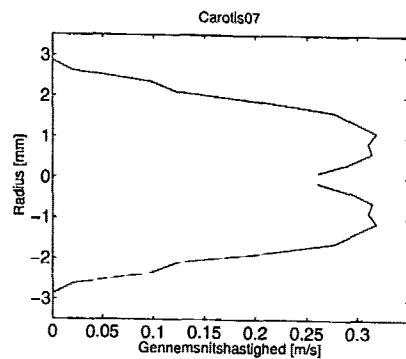
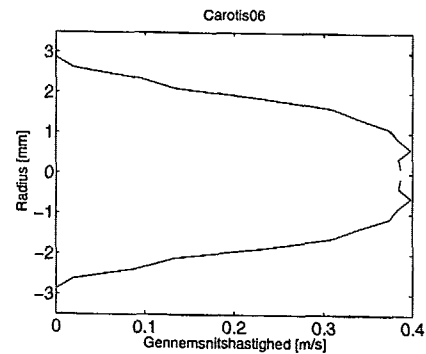
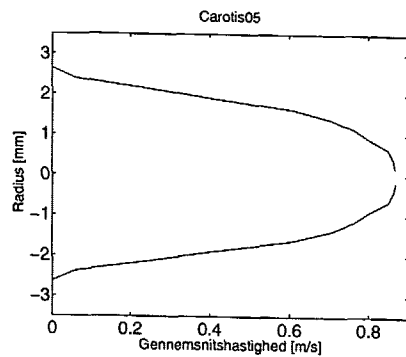
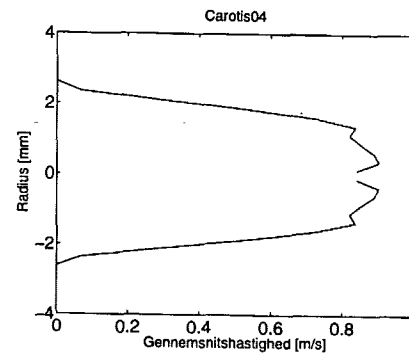
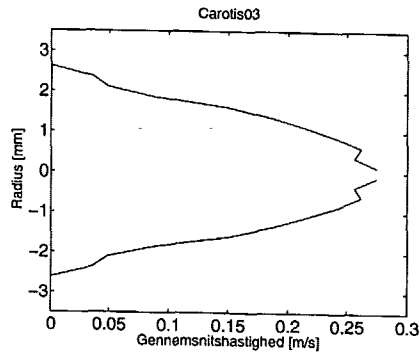
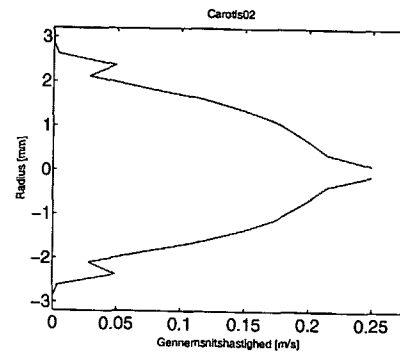
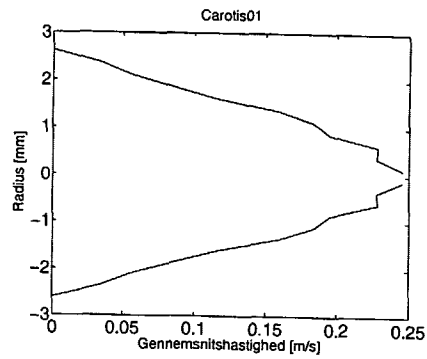


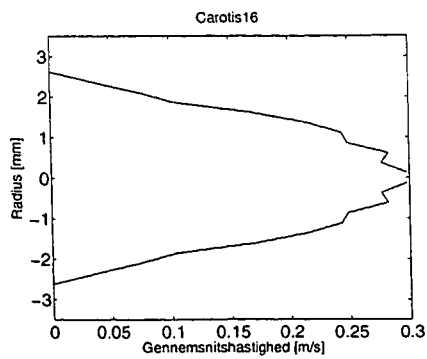
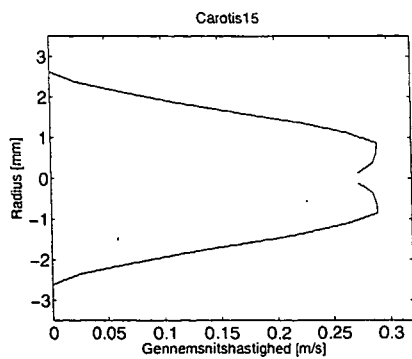
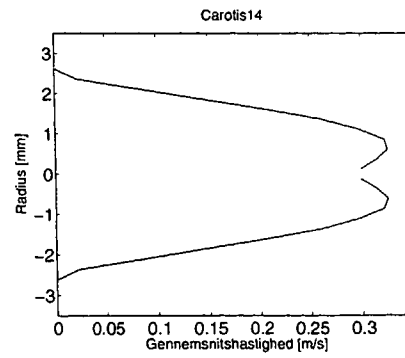
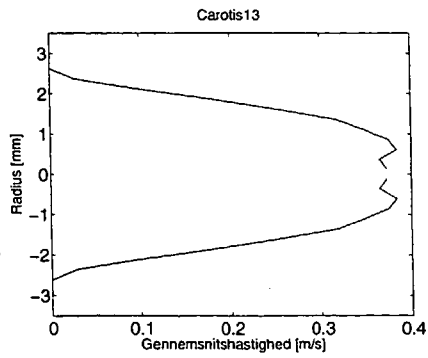
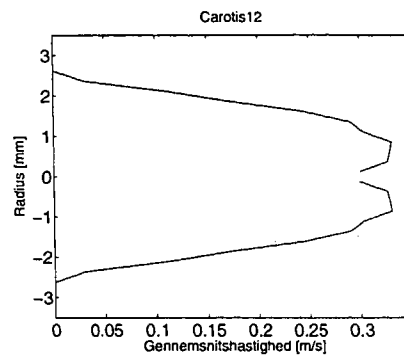
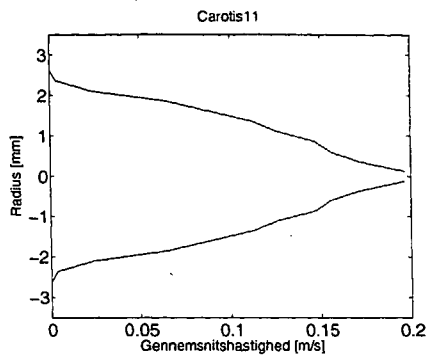
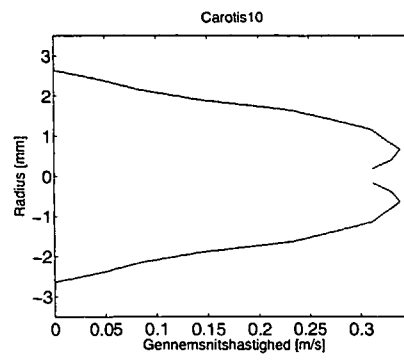
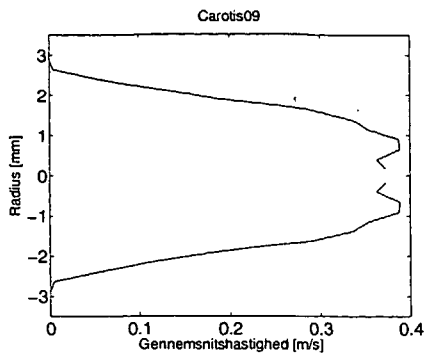




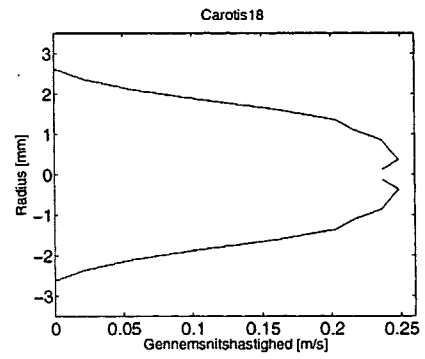
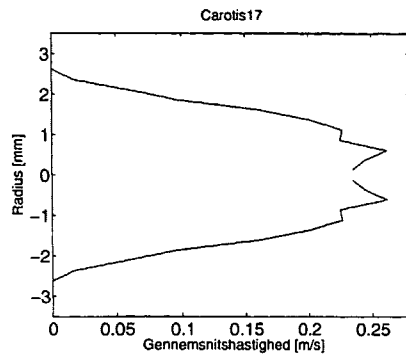


### B.3 Gennemsnitlige tværsnitshastighedsprofiler









# Litteratur

- [1] Ames, W. F.: 1992, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, Boston.
- [2] Arthur Vander, J. S. and Luciano, D.: 2001, *Human Physiology - The Mechanisms of Body Function*, McGraw-Hill, New York.
- [3] Babuska, I. and Strouboulis, T.: 2001, *The Finite Element Method and its Reliability*, Oxford University Press, New York.
- [4] Brenner, S. C. and Scott, L. R.: 2002, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer Verlag, New York.
- [5] Cavalcanti and Gnudi: 1995, Numerical simulation of arterial hemodynamics, in H.Power (ed.), *Bio-fluid Mechanics*, Vol. 3 of *Advances in Fluid Mechanics*, Computational Mechanics Publications.
- [6] Cavalcanti, S.: 1994, Hemodynamics of an artery with mild stenosis, *J. Biomechanics* .
- [7] Chorin, A. J. and Marsden, J. E.: 1993, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer Verlag, New York.
- [8] COM: 2001, *FEMLAB Reference Manual 2.2*.
- [9] Davis, P.: 1995, Cfc's and stiff differential equations at dupont, *Society for Industrial and Applied Mathematics News* **28**(9).
- [10] Drzewiecki, G. and Li, J. (eds): 1998, *Analysis and Assessment of Cardiovascular Function*, Springer Verlag, New York.
- [11] G.Evans, J. and P.Yardley: 2000, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York.
- [12] Jacobsen, C. S.: 1998, *Introduktion til Fluid Mekanik*, Den Private Ingeniørfond, DTU, Lyngby.
- [13] Martin, H. C. and Carey, G. F.: 1973, *Introduction to Finite Element Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [14] Milnor, W. R.: 1982, *Hemodynamics*, Williams & Wilkins, Baltimore/London.

- [15] Milnor, W. R. and Bertram, C. D.: 1978, The relation between arterial viscoelasticity and wave propagation in the canine femoral artery in vivo, *Circulation Research* .
- [16] Oberkampf, W. and Trucano, T.: 2002, Verification and validation in computational fluid dynamics, *Technical report*, Sandia National Laboratories.
- [17] Olufsen, M. S.: 1998, *Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator*, Imfufa tekst nr 345, Roskilde Universitetscenter.
- [18] Ottesen, J.: 2002, Valveless pumping in a fluid-filled closed elastic tube-system: one-dimensional theory with experimental validation, *Journal of Mathematical Biology* .
- [19] R.L.Whitmore: 1968, *Rheology of the Circulation*, Pergamon Press Ltd., Oxford.
- [20] Warberg, J.: 1995, *Human fysiologi*, Polyteknisk Forlag, Lyngby.
- [21] Zienkiewicz, O.: 1977, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company, London.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: <http://mmf.ruc.dk> eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: [imfufa@ruc.dk](mailto:imfufa@ruc.dk).

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG  
Specialrapport af: Sine Korremann  
Vejleder: Dorte Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters  
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity  
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM  
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids  
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University  
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose  
- et projekt om matematisk modellering  
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne  
Første modul fysikprojekt  
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,  
Esben Frits Pedersen, Frederik Resen Steenstrup  
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline  
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -  
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry  
by: Mogens Niss
- 342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel  
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND  
AND SUPPLY
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE  
AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG  
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen
- 344/97 Puzzles and Siegel disks  
by: Carsten Lunde-Petersen
- 345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator  
Ph.D. Thesis  
by: Mette Sofie Olufsen
- 346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces  
af: Sebastian Horst  
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
- 347/98 Verificering af Matematiske Modeller  
- en analyse af Den Danske Eulerske Model  
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger  
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact  
assessment for power plants in Denmark  
by: Stefan Krüger Nielsen  
project leader: Bent Sørensen
- 349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i  
arbejdsmarkedsuddannelserne  
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
- 350/98 OPGAVESAMLING - Bredder-Kursus i Fysik 1976 - 1998  
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96
- 351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education  
by: Mogens Niss
- 352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications  
by: Carsten Lunde Petersen
- 353/98 Problemløsning og modellering i en almindende matematikundervisning  
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen
- 354/98 A Global Renewable Energy Scenario  
by: Bent Sørensen and Peter Meibom
- 355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces  
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

- 356/98 Terrænmodellering  
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller  
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 Cayleys Problem  
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918  
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W.  
Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udese, Peter C. Wulff  
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an  
Implementation in Cardiovascular Models  
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
- 
- 359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply  
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios  
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)
- 360/99 SYMMETRI I FYSIK  
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani
- 362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen  
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss  
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION  
by: Donald T. Campbell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen
- 364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik  
Integreret speciale i fysik og kommunikation  
af Sebastian Horst  
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup
- 365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context  
by: Tine Wedege
- 366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX  
og IMFUFA-LATEX  
af: Jørgen Larsen
- 367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 368/99 Kvarterrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF  
BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM  
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences  
by: Jacob S. Jalving  
Supervisor: Carsten Lund Petersen
- 370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999  
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter  
tekst nr. 350/98
- 371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik  
undervisning  
Et matematikspeciale af: Maria Hermansson  
Vejleder: Mogens Niss
- 372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:  
Udviklingshistorie og multipel opdagelse  
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen
- 373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu  
Theorem  
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki
- 374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler  
Specialeafhandling af: Anders Marcussen  
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen
- 375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-  
1914  
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik
- 376/99 Universality of AC conduction in disordered solids  
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder
- 377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?  
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 
- 378/00 Solar energy preprints:  
1. Renewable energy sources and thermal energy storage  
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system  
by: Bent Sørensen

- 379/00  
**EULERS DIFFERENTIALREGNING**  
 Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne  
 En tredjeesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse  
 af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen  
 Vejleder: Jørgen Larsen
- 380/00  
**MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN**  
 Isovolumetriske ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovascularsystem  
 af: Gitte Andersen (3. moduls-rapport), Jakob Hilmner og Stine Weisbjerg (speciale)  
 Vejleder: Johnny Ottesen
- 381/00  
 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne  
 - Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik  
 og forskning i voksenuddannelse  
 Ph. d.-afhandling af Tine Wedege
- 382/00  
 Den selvundvigende vandrings  
 Et matematisk professionsprojekt  
 af: Martin Niss, Arnold Skimminge  
 Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen
- 383/00  
 Beviser i matematik  
 af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter  
 Wulff  
 Vejleder: Mogens Niss
- 384/00  
 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model  
 Ph.D. thesis by: Thomas B. Schröder  
 Supervisor: Jeppe C. Dyre
- 385/00  
 The Geometry of Cauchy Data Spaces  
 This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)  
 by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski
- 386/00  
 Neutrale mandatfordelingsmetoder - en illusion?  
 af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup  
 Vejleder: Berthelme Booss-Bavnbek
- 387/00  
 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax  
 Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts  
 by: Tine Hoff Kjeldsen
- 388/00  
 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel  
 et 2. moduls matematik modelprojekt  
 af: Bo Jakobsen, Kristine Niss  
 Vejleder: Jesper Larsen
- 389/00  
 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of  
 experience with the Roskilde model  
 By: Mogens Niss  
 Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for  
 mathematics!  
 by: Johnny Ottesen
- 390/01  
**SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I  
 DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM** Slutrapport, april 2001  
 Projektleder: Bent Sørensen  
 Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System<sup>®</sup>; Thomas  
 Engberg Pedersen<sup>®</sup>; Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2<sup>®</sup>; Peter Simonsen,  
 RISØ Systemanalyseafd.; Kaj Jørgensen; Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen,  
 Poul Erik Mørthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen<sup>®</sup>; Bent Sørensen  
<sup>®</sup>Indtil 1/1-2000 Elkraft, <sup>®</sup> fra 1/5-2000 Cowi Consult  
<sup>®</sup>Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, <sup>®</sup> fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.  
 Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram
- 391/01  
 Matematisk modelleringskompetence - et undervisningsforløb i gymnasiet  
 3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie  
 Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen  
 Vejleder: Johnny Ottesen
- 392/01  
**"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF  
 PHYSICS**  
 an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)  
 PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT  
 by: Bent Sørensen.
- 393/01  
 Hilberts matematikfilosofi  
 Specialrapport af: Jesper Hasmark Andersen  
 Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 394/01  
**"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF  
 PHYSICS**  
 an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)  
 PART II: PHYSICS PROPER  
 by: Bent Sørensen.
- 395/01  
 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!  
 Specialafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg  
 Vejleder: Tine Wedege
- 396/01  
 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!  
 Specialafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg  
 Vejleder: Tine Wedege

397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomalous swelling i phospholipiddobbeltlag  
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann  
Vejleder: Dorthe Posselt

398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)  
Af: Mogens Brun Heefelt

399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning  
Ph.D Thesis by: Johan Lithner  
Supervisor: Mogens Niss

400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps  
By: Carsten Lund Petersen

401/01 Finite Type Arithmetic  
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation  
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen  
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen

402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse  
- udvikling af et kursus  
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen

403/01 Generaliseringer i integralteorien  
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet  
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre  
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen

404/01 "Mere spredt fægning"  
Af: Jens Højgaard Jensen

405/01 Real life routing  
- en strategi for et virkeligt vrp  
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godtixsen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jørgvan Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak  
Vejleder: Jørgen Larsen

406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik  
Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001  
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg

407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow  
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations  
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang

409/02 Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy  
- et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning for Gauss, Abel og Galois  
Videnskabsfagsprojekt af: David Heiberg Backchi, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Neslihan Saglanmak  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

410/02 2 projekter om modellering af influenzaepidemier  
Influenzaepidemier - et matematisk modelleringsprojekt  
Af: Claus Jørgensen, Christina Lohfert, Martin Mikkelsen, Anne-Louise H. Nielsen  
Vejleder: Morten Blomhøj  
Influenza A: Den tilbagevendende plage - et modelleringsprojekt  
Af: Beth Paludan Carlsen, Christian Dahmcke, Lena Petersen, Michael Wagner  
Vejleder: Morten Blomhøj

411/02 Polygonformede hydrauliske spring  
Et modelleringsprojekt af: Kåre Stokvad Hansen, Ditte Jørgensen, Johan Rønby Pedersen, Bjørn Toldbod  
Vejleder: Jesper Larsen

412/02 Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning - en generel analyse samt en behandling af strømningen bag en cylinder  
Et matematisk modul III professionsprojekt af: Kristine Niss, Bo Jakobsen  
Vejledere: Morten Brøns, Johnny Ottesen

413/03 "Elevernes stemmer" Fysikfaget, undervisningen og lærerroller, som eleverne opfatter det i det almene gymnasium i Danmark  
Af: Carl Angell, Albert Chr. Paulsen

414/03 Feltiniediagrammer En vej til forståelse?  
Et 1. modul fysikprojekt af: Ditte Gundermann, Kåre Stokvad Hansen, Ulf Rørbæk Pedersen  
Vejleder: Tage Emil Christensen

415/03 FYSIKFAGET I FORANDRING Læring og undervisning i fysik i gymnasiet med fokus på dialogiske processer, autenticitet og kompetenceudvikling  
Ph.d.-afhandling i fysikdidaktik af: Jens Dolin

416/03 Fourier og Funktionsbegrebet  
- Overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb  
Projekt rapport af: Rasmus Brauner Godtixsen, Claus Jørgensen, Tony Moyer Hanberg, Bjørn Toldbod  
Vejleder: Erik von Essen

- 417/03 The Semiotic Flora of Elementary particles  
By: Peder Voetmann Christiansen
- 418/03 Militærmatematik set med kompetencebriller  
3. modul projektrapport af: Gitte Jensen og specialrapport af: Jesper Thrane  
Vejleder: Tine Wedege
- 419/03 Energy Bond Graphs – a semiotic formalization of modern physics  
By: Peder Voetmann Christiansen
- 420/03 Stemning og Musikalsk Konsonans  
Et matematisk modelleringsprojekt af: Claus Jørgensen  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 421/03 OPGA VESAMLING  
Bredde-kursus i fysik 1976 – 2003.  
Denne tekst erstatte tekst nr. 370/99
- 423/03 Fysikkens historie i en almindelige fysikundervisning  
- Eksemplificeret med Millikan Ehrenhaft kontroversen  
Specialrapport af: Marianne Wilcken Bjerregaard  
Vejleder: Albert Chr. Paulsen