

TEKST NR 420

2003

**Stemning og
Musikalsk
Konsonans**



- Et matematisk modelleringsprojekt -

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA - Roskilde Universitetscenter - Postboks 260 - DK 4000 Roskilde
Tlf.: 46742263 - Fax: 46743020 - Mail: imfufa@ruc.dk
Claus Jørgensen
"Stemning og Musikalsk Konsonans – et matematisk modelleringsprojekt"
IMFUFA tekst nr. 420 - 82 sider – ISSN 0106-6242

Abstract

I nærværende projekt forsøges opstillet en matematisk model, der kan analysere, vurdere og styre en given stemnings indflydelse på oplevelsen af *musikalsk konsonans* i et givet stykke musik. Med musikalsk konsonans menes en bred vifte af principper, der er styrende for tonal musik. Dette begreb opdeles i to komponenter. Den ene komponent kaldes konsonans og defineres på basis af frekvenser, svævningsfænomener og opfattelsen af beats imellem toner og deres overtoner. Den anden komponent kaldes harmoni. Denne indeholder de tillærte og kulturbestemte sider af oplevelsen. Modellen bygges op omkring opfattelsen af beats og ligger sig dermed op af konsonansbegrebet.

Med udgangspunkt i arbejde af Helmholtz fra midten af det nittende århundrede opstilles nu en model for konsonansen af to toner. Denne model videreudvikles i projektet til at dække over et helt musikstykke. På baggrund af modellen evalueres J. S. Bachs "Praeludium i C-dur" fra værket Wohltemperierte Klavier. Endelig ansues problemet som et optimeringsproblem, hvor målet er at bestemme den arbitrære stemning, der har den største konsonans.

Der diskuteres, hvorvidt modellen, der kun bygger på konsonansbegrebet, kan analysere en stemnings indflydelse på oplevelsen af *musikalsk konsonans*. Der konkluderes, at modellen i nogen grad kan analysere en stemnings betydning for den musikalske konsonans. Der argumenteres i projektet for, at man, i modsætning til fx ny forskning af William B. Sethares, har en skarp adskillelse mellem begreberne konsonans og harmoni.

Nøgleord:

Matematisk modellering, konsonans, dissonans, harmoni, musikalsk konsonans, Helmholtz, beats, toner, partialtoner, stemninger, cents, optimering, det pythagoræiske komma, pitch, kvalitet.

Indhold

1	Indledning	1
1.1	Forord	1
1.2	Motivation	1
1.3	Problemfelt	1
1.3.1	Musikalsk konsonans	3
1.3.2	Problemformulering	3
1.4	Metode	4
1.4.1	Disposition	5
I	Introduktion til problemet	7
2	Stemning og temperament	9
2.1	Lige stemning	10
2.2	Enheden cent	10
2.3	Pythagoræisk stemning	11
2.3.1	Det pythagoræiske komma	12
2.4	Rene intervaller	13
2.5	Middeltonestemning	14
2.6	Veltempereret stemning	15
2.7	Opsummering	16
3	Akustikken i en tone	17
3.1	Støj eller tone?	17
3.2	Karakterisering af en tone	17
3.3	Frekvensspektrum og Fouriertransformation	18
3.4	Ørets frekvensanalyse	20
3.5	Det skabende øre	21
3.5.1	Pitch og partialtoner	22
3.6	Opsummering	22
4	Interaktion mellem partialtoner	23
4.1	Svævninger	24
4.2	Beats og svævninger	25

II	Model for beatintensitet	27
5	To sinusbølger	31
5.1	Sympatiske resonatorer	31
5.2	Intensiteten af beats	34
5.2.1	Sinusbølger med forskellig amplitude	34
5.3	Opfattelse af beats	37
5.3.1	Hvilken β -værdi skal vi vælge?	39
5.3.2	Frekvensafhængighed	40
5.4	En funktion af fire variable	40
5.5	Kritik af denne model	42
5.5.1	Parameteren β	42
6	To toner	45
6.1	En tone og en sinusbølge	45
6.2	To toner	46
6.3	Valg af standard	48
6.4	Dybe og lyse toner	49
6.5	Store intervaller	50
6.6	Addition af beatintensitet	51
7	Akkorder	53
7.1	Beatintensitet for akkorder	53
7.1.1	Eksempel A: Treklangen C-E-G	54
7.1.2	Eksempel B: Treklangen C#-F-G#	55
7.2	Addition af beatintensitet	57
8	Et musikstykke	59
8.1	Opstilling af funktionen H	59
8.1.1	Dimensionsbegrænsning	59
8.1.2	Er H differentiabel?	60
8.2	Eksempel C: Et musikstykke	60
8.2.1	Optimering	61
8.2.2	Matlabs funktion <i>fmincon</i>	61
8.3	Den "optimale" stemning	62
8.4	Opsummering	63
III	Afrunding	65
9	Diskussion	67
9.1	Fravær af beats og konsonans	67
9.2	Adskillelse af konsonans og harmoni	68
9.2.1	Et optimalt kompromis?	69
10	Konklusion	71

11 Perspektivering	73
11.1 Anvendelser	73
11.1.1 Optimering med dæmpning	73
11.1.2 Musikvidenskab	74
11.1.3 Historiske stemninger	75
11.2 Videreudvikling af modellen	75
Litteratur	77

1 Indledning

1.1 Forord

Nærværende rapport er et projekt skrevet ved IMFUFA, Roskilde Universitetscenter. Projektet er et matematisk modelleringsprojekt, og fuldt udbytte af rapporten vil kræve, at læseren er bekendt med matematiske metoder og tankegange. En grundlæggende interesse og forståelse for musik og musikvidenskab vil gøre noget af læsningen lettere, men rapporten er søgt skrevet, så dette ikke er en forudsætning.

Tak til Jens Ulrik Lefmann, der var den første der demonstrerede skønheden af Bachs Wohltemperierte Klavier i en klassisk stemning. Tak til Ibo Ortgies, GOArt (Göteborg Organ Art center), for hjælp til at forstå Bach i forhold til forskellige temperament. Og et stort tak til projektvejleder Johnny Ottesen for god og fleksibel vejledning.

1.2 Motivation

Han havde hørt den mange gange før, altså Bachs praeludium i C-dur, den første sats fra "Das Wohltemperierte Klavier". Han havde også selv spillet den, da han havde gået til klaver et par år forinden. Men der var noget nyt ved den denne gang. Han kunne tydeligt mærke det, mens hans hår på armen langsomt rejste sig og gav ham gåsehud. Det var som om, dette gamle fortærskede stykke musik havde fået nyt liv. Det var svært at beskrive, hvad det var, der var anderledes, men på en eller anden måde var klangen mere ren, mere "rigtig". Nysgerrigheden boblede, mens han fik forklaret, at klaveret, der blev spillet på, var stemt i en klassisk stemning i stedet for den moderne lige stemning, der ellers er den eneste, man normalt møder. En ny verden af spørgsmål og muligheder åbnede sig, og han besluttede, at han ville undersøge fænomenet til bunds.

1.3 Problemfelt

Konsonans er når en lysere tone blander sig med en mørkere. Dissonans er manglende evne til blanding, tonerne vil skurre og lyde skarpt i øret. [Euklid] fra [von Helmholtz, 1998][side 342]

Euklids gamle definition af konsonans og dissonans rammer meget godt nutidens opfattelsen af, om toner danner harmoni eller lyder urent i vores ører. Mens de fleste kan lave en form for skellen af graden af konsonans, er det dog de færreste, der kan sætte ord på, hvorfor toner ikke "passer sammen". Menneskets nysgerrighed har drevet os ud i adskillige forklaringer på fænomenet, ofte med matematikken som grundlag. Således har utallige matematikere siden Pythagoras (570-504 BC) forsøgt at definere konsonans ud fra talforhold. På baggrund af sådanne konsonansbegreber har man kunnet udlede, hvordan man teoretisk set burde stemme instrumenter. Teoretisk set, fordi man sjældent havde den tekniske kunne til at stemme på den pågældende måde. Matematikere var de første som argumenterede for *lige stemning*, som er den stemning, vi bruger i dag. Det var imidlertid ikke alle, der var enige i, at lige stemning var den bedste stemning. Således mødte den i første omgang stor modstand blandt udøvere og komponister. Emnet blev debatteret med stor lidenskab, og det tog lang tid, før den lige stemning blev accepteret. Selv i starten af 1900-tallet var man endnu skeptisk. Eller som Sir Percy Buck udtrykker det

Først kom musikken. Siden opstod skalaer [og stemninger] efter utallige eksperimenter. Endelig kom teoretikerne for at forklare disse skalaer. Og da de vidste mere om matematik end om musikkens historie, lavede de love, som ingen mennesker nogensinde har fulgt. [Lloyd and Boyle, 1978][side 34]

I dag er debatten om, hvorvidt vi skal spille i lige stemning, stort set forstummet. Lige stemning er idag et fælles grundlag for stort set al vestlig musik. Et grundlag, som ikke umiddelbart er til diskussion. Og så alligevel. Rundt omkring i verden har der samlet sig små grupperinger af modstandere, der stadig ikke vil acceptere lige stemning. De arrangerer koncerter i andre stemninger, og bekræfter hinanden i den lige stemnings vederstyggelighed. Men hvad er argumenterne? Er der virkelig en forskel, og har man et bedre alternativ?

Denne rapport vil gå i matematikernes fodspor og diskutere forskellige stemninger fra en matematisk og fysisk synsvinkel. Det viser sig hurtigt, at det at anskue stemningsspørgsmålet fra en matematisk vinkel, på ingen måde er det samme som at tage parti for den lige stemning. Faktisk kan man, viser det sig, ved en dybere analyse af spørgsmålet, bruge matematikken til at sætte spørgsmålstegn ved den lige stemnings lyksaligheder. Denne tilgang skaber således mulighed for, at bruge matematikken som grundlag for en dybere diskussion af en given stemnings styrker og svagheder.

Dette afsnit begyndte med Euklids definition af konsonans. Konsonans er imidlertid et begreb, der gennem tiden har fået tillagt utallige forskellige betydninger, hvorfor det er nødvendig med en præcisering. Vi vil i det følgende definere begrebet *musikalsk konsonans*, for derigennem at opbygge og præcisere vores forståelse af begreberne forbundet med *konsonans*. Vores definition er identisk med den definition Terhardt giver i en artikel fra 1984.

1.3.1 Musikalsk konsonans

Musikalsk konsonans kan opfattes som en bred vifte af principper, der er styrende for tonal musik. Disse principper bliver ofte mere eller mindre løst indikeret gennem begreber som harmoni, konsonans og dissonans, og princippernes gyldighed kan hurtigt verificeres gennem analyse af stort set et hvert musikstykke. Derved vil typiske og systematiske toneforhold blive afdækket. De på nuværende tidspunkt endnu uafklarede principper, som skaber disse typiske og systematiske toneforhold, kaldes musikalsk konsonans. [Terhardt, 1984][side 278]

Det viser sig, at dette begreb er blevet brugt og betragtet fra en psykoakustisk, såvel som en musikalsk-harmonisk side. Med psykoakustik menes videnskab om perception af lyd. Den musikalsk-harmoniske tilgang handler om strukturen, udviklingen og forholdet mellem akkorder (dvs. bestemte tonesammensætninger). Man kan karakterisere den sidste tilgang ved, at den har basis i noder og systemer, der i høj grad kan karakteriseres som en akkumulation af erfaringer og traditioner. Her er således tale om en æstetisk tilgang, der ikke uden videre kan sammenlignes med den psykoakustiske, der er mere "naturvidenskabelig". Disse to tilgange har ført til flere modstridende udsagn, hvorfor det har været nødvendigt at anskue begrebet som et to-komponent-begreb.

Den første komponent er den psykoakustiske, som vi vil kalde for *konsonans*. Denne repræsenterer graden af fravær af "forstyrrende" faktorer og er ikke begrænset til musik, men dækker over lyd i almindelighed. Endvidere kan konsonans kobles direkte til toners frekvenser. Den anden komponent kan kaldes for *harmon*i. Harmoni repræsenterer de typiske musikspecifikke principper om tonal samhørighed, kompatibilitet, teori om naturlige bastoner med mere [Terhardt, 1984][side 276]. Denne tilgang kan ikke kobles direkte til toners frekvens, men derimod til begrebet *pitch*, der indtil vi senere vil definere det nærmere, kan anskues som "hvor lys eller mørk en tone opfattes".

Vi vil i dette projekt fokusere på den første af de to komponenter, konsonans, og kun i lille grad beskæftige os med harmoni. Vi vil således, med mindre andet er anført, bruge begrebet konsonans i den psykoakustiske betydning.

1.3.2 Problemformulering

Vi har fundet frem til følgende problemformulering:

Kan man ved matematisk modellering analysere, vurdere og styre en given stemnings indflydelse på oplevelsen af musikalsk konsonans i et givet stykke musik?

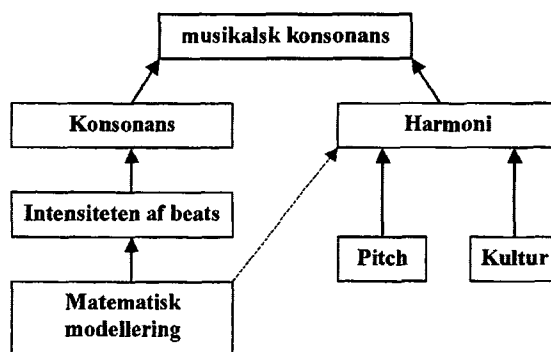
Denne problemformulering lægger op til, at vi skal konstruere en matematisk model for konsonans. En stor del af denne rapport vil da også beskæftige sig med konstruktionen af denne model. Heldigvis begynder vi ikke på helt bar bund, da utallige forskere har arbejdet med at opstille mål for konsonans. Vi vil i denne rapport tage udgangspunkt i Helmholtz' beatteori fra 1863 og nyere forskning på

baggrund af beatteorien (Plomp og Levelt, Kameoka og Kuriyagawa og senest Sethares).

Endelig er det også et klart mål at komme videre end til opstillingen af modellen. Vi vil via databehandling af et musikstykke forsøge at *anvende* den opstillede model, og på den måde søge at analysere og vurdere en given stemnings indflydelse på *oplevelsen* af musikalsk konsonans i det pågældende stykke musik. Med oplevelse mener vi den subjektive helhedsvurdering, man ved lytning kan tillægge et stykke musik. Derudover ønsker vi at anskue problemet som et optimeringsproblem, hvor vores model skal pege på en stemning med maksimal konsonans (og *ikke* musikalsk konsonans), altså noget vi kunne kalde den 'optimale stemning'. Endelig vil vi diskutere, hvorvidt denne stemning, der har den største konsonans, også har den største musikalske konsonans (se figur 1.1).

Den anvendelsesorienterede del af projektet er mindst lige så vigtig som opstillingen af vores model. Det er gennem en diskussion af modellens anvendelighed, at vi vil forsøge at besvare problemformuleringen.

1.4 Metode



Figur 1.1 Den matematiske models plads i begrebshierakiet. Den matematiske model vil koncentrere sig om beatintensitet og dermed konsonans. Den stiplede linje markerer, at anvendelser af modellen, fx i form af en modelleret stemning, kan påvirke harmonien.

I det følgende vil vi komme med overvejelser omkring, hvordan vi vil arbejde med vores problemstilling. En del af de fagspecifikke begreber, der kunne være ønskelige at inddrage i et metodeafsnit, vil først blive ordentligt defineret i de følgende kapitler, hvorfor metoden hovedsageligt vil beskæftige sig med, hvordan en matematisk model kan forbindes med oplevelsen af musikalsk konsonans.

I denne rapport søges opbygget en model, der udfra en given stemning og et givent musikstykke kan fortælle os noget om oplevelsen af musikalsk konsonans. Musikalsk konsonans anskues som et to-komponent-begreb, og som figur 1.1 illustrerer, vil vores model blive bygget op omkring beatintensitet, der indtil

videre kan betragtes som uønsket lyd i musikken, og som vi vil definere ud fra fysiske forhold. Modellen vil således kun kunne fortælle os, om et givent musikstykke med en given stemning har lav beatintensitet (er konsonant). Den anden komponent i musikalsk konsonans, harmoni, er imidlertid en fysisk ikke-målbar størrelse, der til dels er kulturbestemt, og denne binder sig ikke på frekvenser, men på den opfattede pitch. At skulle modellere harmoni er en væsensforskellig opgave end at modellere konsonans, hvorfor vi har afholdt os fra dette. Da vi ønsker at forholde modellen til oplevelsen af musikalsk konsonans er der følgerig den fare, at vi finder en stemning som vores model fortæller er konsonant. Denne kan imidlertid vise sig at være konstrueret, så oplevelsen af harmoni lider skade, og dermed oplevelsen af musikalsk harmoni, uden at vores model kan fortælle det. Denne problemsstilling er en af projektets vigtigste, og vi vil vende tilbage til denne i diskussionen.

1.4.1 Disposition

I denne disposition gives et overblik af rapporten. Hvis teksten er skrevet med fed, er det fordi, der er skrevet et kapitel med dette navn.

Som man måske kan fornemme ud fra indledningen og problemformuleringen, er der planer om at føre en evt. musikalsk naiv læser ind i den lille del af musikkens omfattende univers, der omhandler musikalske intervaller og toners 'matematiske' forhold. Dette gøres i afsnittet **stemninger**, hvor man endvidere stifter bekendtskab med de vigtigste toneforhold, med den stemning, man bruger idag, samt flere alternativer til denne. Dette afsnit kan betegnes som et opremsende teoriafsnit, hvor kendskab til musikalske intervaller og klassiske stemninger skal danne basis for en dybere forståelse af den model, der senere skal opstilles.

Forståelse af lyd og perception er selvsagt centrale aspekter af vores problemstillingen. I en beskrivelse af **akustikken i en tone**, vil vi ved fysiske og psykoakustiske metoder forsøge at karakterisere, hvad vi forstår ved en tone. Det er centralt at *tone* er i ental, da kapitlet handler om lyden og perceptionen af en enkelt tone. I det næstkommende kapitel vil vi skifte tonen ud med flere af slagsen. Med udgangspunkt i sinusbølger diskuteres her fænomener der opstår ved en **interaktion mellem partialtoner**. En central pointe ved disse afsnit er at koble toner og sinusbølger sammen.

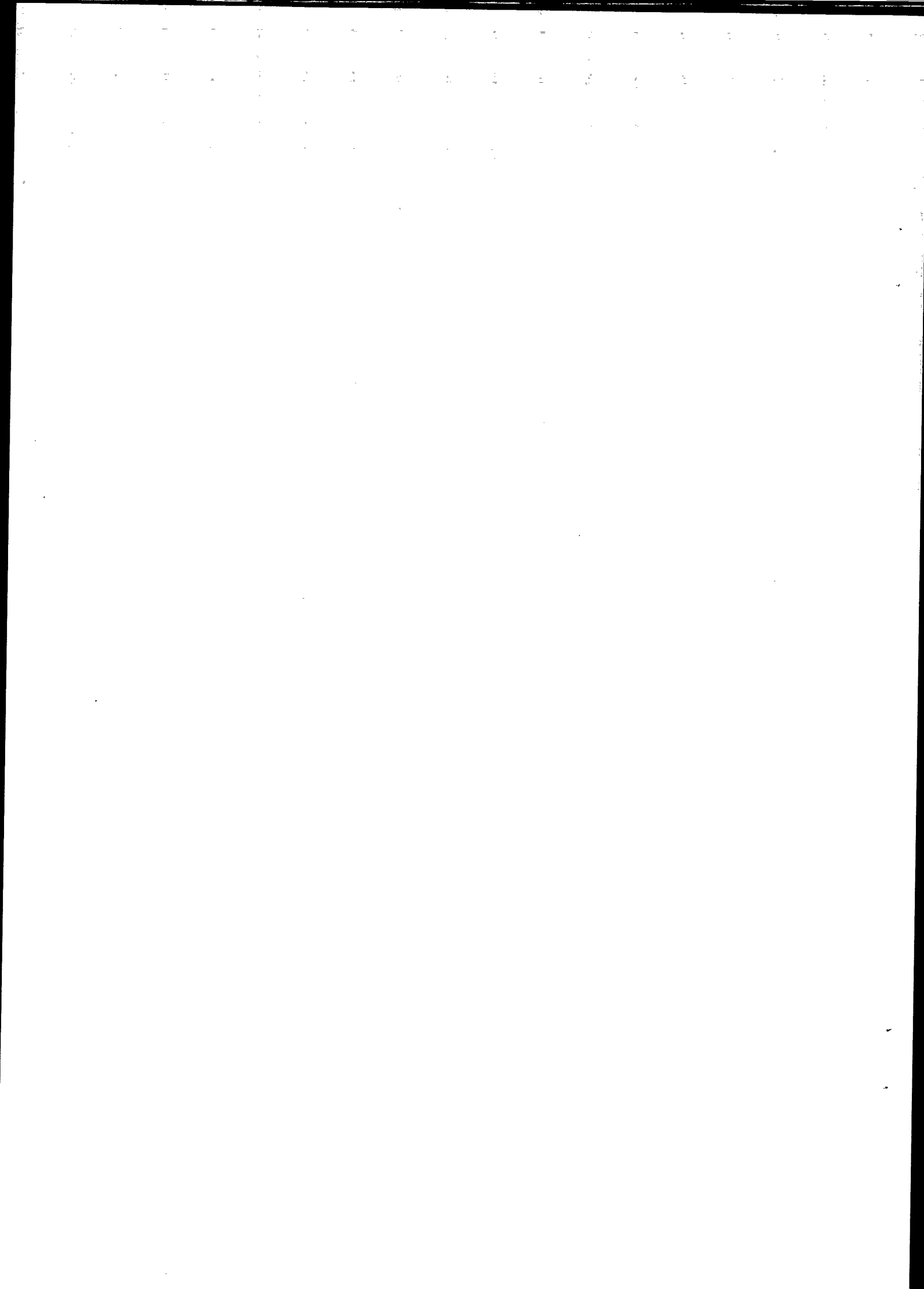
Med udgangspunkt i en forståelse af, at toner kan opfattes som sammensat af sinusbølger, opstilles nu en model for begrebet konsonans. Der tages her udgang i Helmholtz' beatteori fra 1863, og målet for konsonans bliver intensitet af beats. For at begynde med en overskuelig størrelse, vælger vi at begynde opstillingen med at bestemme et mål for beatintensiteten mellem **to sinusbølger**. Herefter trækkes på førnævnte kobling mellem toner og sinusbølger, hvorved vi kan videreudvikle modellen til at kunne bestemme beatintensiteten mellem **to toner**. Her giver modellen os mulighed for en dybere forståelse af de intervaller, vi har beskrevet i afsnittet om stemninger. Nu tages det naturlige skridt fra to til flere toner. Herved kan vi pludselig bestemme beatintensiteten i **akkorder**. Endelig er det nu tid at anvende modellen på et givet musikstykke. Vi vil

således vise hvordan beatintensiteten for et musikstykke varierer afhængigt af, hvilken stemning man bruger. Vi er nu begyndt at anskue stemning som et optimeringsproblem. Endelig foretages optimeringen, og vi finder frem til den såkaldte "optimale stemning".

For at afrunde projektet vil vi med udgangspunkt i den opstillede model søge at besvare projektets problemformulering. Omdrejningspunktet i denne besvarelse er en **diskussion** af samspillet mellem den opstillede model og de på figur 1.1 illustrerede begreber, særligt konsonans, harmoni og musikalsk konsonans.

Del I

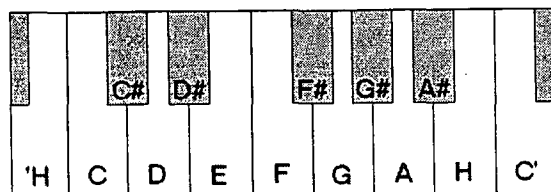
Introduktion til problemet



2 Stemning og temperament

I dette kapitel vil vi give en kort introduktion til tonenavne, toneforhold og deres betegnelser. Med dette som udgangspunkt forklares, hvilken stemning man benytter i dag, samt hvilke man har benyttet før i tiden. Afsnittets formål er at give et billede af stemninger som en ikke-statisk størrelse. Samtidig vil de gennemgåede stemninger blive brugt som eksempler ved de anvendelser af modellen, som vi senere i rapporten vil foretage.

Vi vil i vores figurer tage udgangspunkt i klaveret, på trods af, at dette i sin moderne udformning er langt yngre end flere af de stemninger, vi vil diskutere. Dette er valgt, da klaveret har den egenskab, at der er netop en tone knyttet til hver tangent, hvorfor det skematisk set er lettere at illustrere en given stemning på et klaver.



Figur 2.1 Klaviatur med tonenavne. Den midterste oktav løber fra og med C til og med H. Afstanden mellem to nabotoner (fx 'H og C eller C og C#) kaldes et halvtone-trin.

Ved at tage udgangspunkt i klaviaturet vist på figur 2.1, kan vi nu navngive alle toner på klaveret ved deres tonenavn og deres oktav. Oktaven over den midterste indeholder således tonerne fra C' til H', oktav over denne tonerne fra C'' til H'' osv. Hvis vi snakker om to eller flere toner, der spilles samtidig, vil vi skrive dem efter hinanden, med den nederste tone først (fx CE, 'GF osv.).

I en musikalsk kontekst kaldes en sammensætning af netop to toner for et interval. Da sådanne intervaller er projektets omdrejningspunkt, vil vi enkelte steder bruge deres musikalske betegnelse. Det er ikke nødvendigt at være god til tabel 2.2 for at fortsætte læsningen, men man kan vende tilbage til den, hvis der mod forventning viser sig behov for dette.

interval	antal halvtoner	eksempel
unison	0	CC
sekund	2	CD
lille terts	3	DF
stor terts	4	FA
kvart	5	CF
kvint	7	DA
oktav	12	FF'

Figur 2.2 Tabel over de vigtigste musikalske intervaller. En kvint kan anskues som 7 halvtonetrin på figur 2.1. Det kunne fx være intervallet CG, D#A# eller EH. Bemærk at "oktav" bruges i to betydninger, enten som en stedangivelse på skalaen eller om et interval [Jørgensen, 1975].

2.1 Lige stemning

I det følgende vil vi snakke om *forholdet* mellem to eller flere toner. Med forholdet mener vi forholdet mellem de to toners frekvenser (vi ser her bort fra overtoner).

Den lige stemning er den stemning, som vi bruger i dag. Matematisk set kan denne stemning defineres ved blot to principper. Det første er, at oktaven til en tone altid har forholdet 2:1. Således har vi at $\frac{C}{C} = \frac{C\#}{C\#} = \dots = 2$. Det andet princip er, at alle på hinanden følgende halvtonetrin skal have samme forhold til hinanden. Således skal der gælde, at $\frac{C\#}{C} = \frac{D}{C\#} = \frac{D\#}{D} = \dots$. En stemning, der opfylder de to principper, kaldes en lige stemning.

Lad nu q_1 og q_2 betegne frekvenserne for to på hinanden følgende halvtoner. Da intervallet en oktav består af 12 halvtonetrin, gælder der endvidere at $\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{12} = 2$, hvorfra vi får at alle på hinanden følgende halvtoner har forholdet

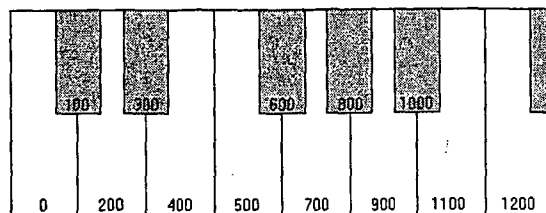
$$\frac{q_2}{q_1} = \sqrt[12]{2} \quad (2.1)$$

2.2 Enheden cent

Begrebet frekvens med enheden Hz, som vi kender fra den fysiske definition af lydbølger, er en udmærket måleenhed ved absolut angivelse af bestemte toner. Eksempelvis er tonen A i dag defineret til 440 Hz - og tonen oktaven over, A', bliver da 880 Hz. Som arbejdsredskab i forbindelse med angivelse, analyse og sammenligning af stemninger er det dog ønskeligt at råde over en måleenhed - et målebegræb - der kan anvendes relativt. Man har derfor indført måleenheden cent, der kan beskrive forholdet mellem to toner som en differens.

Vi så før, hvordan tonerne i en oktav i den lige stemning inddeles i tolv på hinanden følgende halvtoner med samme forhold 2.1. Analogt med dette inddeler

centenheden nu oktaven 1200 trin, hvor alle par af to på hinanden følgende har samme forhold og en oktav - altså intervallet på 12 halvtoner eller 1200 cent - stadig har forholdet 2. Da er frekvensforholdet mellem toner med netop en cent i forskel $\sqrt[1200]{2}$. Ligeledes vil toner med en afstand på n cent have frekvensforholdet $(\sqrt[1200]{2})^n$.



Figur 2.3 Klaviatur med centværdier for lige stemning. Tonen C er valgt som reference og er sat lig 0 cent. Forholdet mellem alle halvtonettrin er 100 cent.

Lad fx tonen q_1 og en lysere tone q_2 have frekvensforholdet $\frac{q_2}{q_1}$. Dette forhold kan vi nu også udtrykke i cent. Hvis vi lader c betegne forholdet $\frac{q_2}{q_1}$ i cent og sætter tonen q_1 som udgangspunkt gælder der at

$$\frac{q_2}{q_1} = \left(\sqrt[1200]{2} \right)^c \quad (2.2)$$

Af dette får vi at

$$c = \frac{\log \frac{q_2}{q_1}}{\log \sqrt[1200]{2}} \quad (2.3)$$

Man siger da at forholdet mellem q_1 og q_2 er c cent.

Den vigtigste egenskab ved centenheden er, at den er logaritmisk. Hvis vi ønsker at multiplicere forhold, kan vi således addere centværdier istedet. Tag fx afstanden fire halvtonettrin. I lige stemning svarer dette til forholdet $\frac{q_2}{q_1} = (\sqrt[12]{2})^4$. I cent svarer dette forhold istedet til $4 \cdot 100$ cent. Enheden er specielt anvendelig, når man skal sammenligne andre stemninger med lige stemning. Det er således langt nemmere at få et overblik over en given stemning, hvis den vises i centværdier. Dette skal vise sig nyttigt i de følgende afsnit, hvor vi kort vil beskrive, nogle af de stemninger der har præget europæisk musik gennem tiden.

2.3 Pythagoræisk stemning

Skønt det er muligt at Pythagoras (570-504 BC) fik sin viden fra egyptiske præster, er det sædvanligvis ham, der får æren for at have opdaget, at en svingende streng, hvis længde forkortes til to tredjedele eller halvdelen af dens frie længde, producerer et interval til den tone, strengen ellers havde produceret, der

er særligt velklingende. Han konkluderede derpå, at der opstår konsonans, hvis to toner (strengelængder) har forholdet 1:1, 2:3 og 1:2 konsonans. Disse tal har et særligt forhold, der kan tydeliggøres ved at dele dem med to, hvorved vi får $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{4}$. Pythagoræerne så og værdsatte dette simple matematisk harmoniske forhold og det bekræftede deres filosofi, der byggede på en matematisk opfattelse af verden. Forholdet fik således et religiøst skær, mens ørets perception, og spørgsmålet om, hvorfor øret foretrækker toner fra strengelængder, hvis forhold kan udtrykkes i små heltal, trådte i baggrunden [Lloyd and Boyle, 1978][side 3].

Denne opfattelse var dominerende i Europa i næsten totusind år, hvor den dannede basis for den måde, man stemte instrumenter på. Det grundlæggende princip i den pythagoræiske stemning er, at alle kvinter, kvarter og oktaver er rene, dvs. at alle toners frekvenser er i forholdet 3:2 (7 halvtoner - en kvint), 4:3 (5 halvtoner - en kvart) og 2:1 (12 halvtoner - en oktav). Og de tre konventioner kan opfyldes simultant. Lad tonen C have frekvensen f . Hvis vi fx går fra C til G (7 halvtoneer - en kvint) da skal tonen G have frekvensen $\frac{3}{2}f$. Dernæst går vi fra G til C' (5 halvtoneer - en kvart) der så tildeles frekvensen $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}f = 2f$. Tonen C' har altså den dobbelte frekvens, hvorved alle tre konventioner er opfyldt simultant.

Lad fortsat tonen C have frekvensen f . Vi vil nu gå fra C til G (7 halvtoner - en kvint) og derefter fra G til D' (7 halvtoner - en kvint), der derved får frekvensen $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}f = \frac{9}{4}f$. Nu kan vi gå fra D' til D og få frekvensen $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4}f = \frac{9}{8}f$. Således kan alle toner i denne stemning beskrives som toner med forhold til udgangstonen på formen $2^p 3^q$, hvor p og q er hele tal. Nu kunne man tro, at det pythagoræiske system således var selvkonsistent. I praksis viser det sig dog, og som det vil fremgå af det følgende afsnit, at der opstår et paradoks, hvis man fx vil stemme et klaver ud fra dette princip. [Haluska, 1998][side 295-298]

2.3.1 Det pythagoræiske komma

Hvis man forestiller sig, at man stemmer 12 på hinanden følgende kvinter rene, må forholdet mellem sluttonen og udgangstonen være $(3:2)^{12}$. Sluttonen viser sig at være udgangstonen taget syv oktaver over udgangstonen. Vi kunne derfor have valgt en anden sti til denne tone, nemlig syv oktavspring hvilket fortæller os, at forholdet mellem sluttonen og udgangstonen er $(2:1)^7$. En udregning af disse to forhold giver imidlertid, at de ikke er ens. Og som følgende udregning viser, er forholdet mellem 12 Kvinter og 7 oktaver, der helst skulle have været 1:1, er

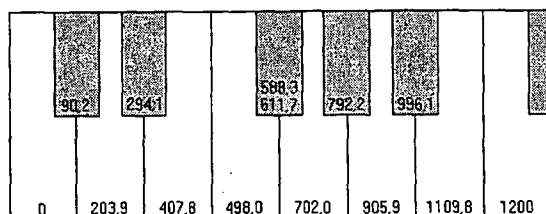
$$\frac{(3:2)^{12}}{(2:1)^7} = \frac{531441}{524288} \approx 1.0136 (=23.4 \text{ cent}) \quad (2.4)$$

Værdien $531441/524288$ benævnes ofte det pythagoræiske komma. Værdien fortæller, at hvis vi stemmer alle kvinter rene, så ender vi med en oktav, der er forkert med 1,36%.

Pythagoræisk stemning er lettest at beskrive ved en algoritme og i sammenhæng med figur 2.4.

1. Først vælges en udgangstone (her er valgt C).
2. Dernæst stemmes kvinten over udgangstonen C, tonen G, så denne får centværdien 702.
3. Nu stemmes kvinten til G, tonen D', som således får værdien 1403,9, ud fra hvilken vi finder tonen D ved at trække 1200 fra.
4. Dernæst stemmes kvinten til D, tonen A, så denne får værdien 905.9
5. osv.

Der stemmes hhv. 6 kvinter op og 6 kvinter ned fra C. Vi ender således på tonen F# fra to sider med forskellige værdier til følge.



Figur 2.4 Eksempel på pythagoræisk stemning. De to værdier for tonen F# har netop et pythagoræisk komma til forskel.

En central egenskab ved den Pythagoræiske stemning, sammenlignet med lige stemning, er, at der nu ikke længere er en direkte sammenhæng mellem intervalbetegnelsen og afstanden mellem de to toner i cent. I lige stemning dækker betegnelsen en en kvint altid over en afstand på 700 cent. I pythagoræisk stemning er der imidlertid en konflikt. Hvis 11 af kvinterne har en afstand på 702.0 cent, vil den sidste nødvendigvis have en afstand på $702.0 - 23.4 = 678.6$ cent, hvilket gør den kraftigt dissonerende (grim, skurrende). Et sådant interval, der har en længde der afviger kraftigt fra de andre, kaldes en "ulv", og man har i praksis undgået at bruge sådanne intervaller.

2.4 Rene intervaller

I pythagoræisk stemning har den store tert (forholdet på 4 halvtoner) i 10 ud af 12 tilfælde forholdet $\frac{(3:2)^4}{(2:1)^2} = \frac{81}{64} \approx 407.8$ cent. Dette forhold vil de fleste betegne som skarpt, grimt og uharmonisk, og grækerne undgik i praksis at bruge dette interval. Ptolemaeus (87-150 AD) foreslog at bruge en stor tert med forholdet 5:4 i stedet [Helmholtz, s. 345]. Han blev således forløber for en opfattelse, hvor kriteriet for konsonans er, om forholdet mellem de to strengelængder kan udtrykkes i små heltal.

Man må ikke opfatte de rene intervaller som en stemning, som fx lige stemning og pythagoræisk stemning. Hvis man stemte et klaver efter disse forhold, ville man

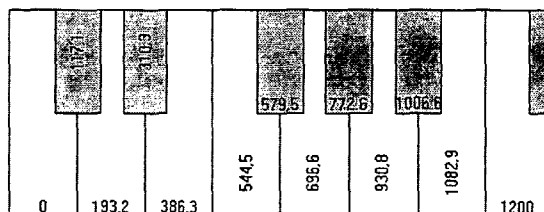
interval	antal halvtoner	eksempel	forhold	...i cent
unison	0	CC	1:1	0
sekund	2	CD	9:8	203.91
lille terts	3	CD#	6:5	315.64
stor terts	4	CE	5:4	386.31
kvart	5	CF	4:3	498.04
kvint	7	CG	3:2	701.96
stor sekst	9	CA	5:3	884.36
oktav	12	CC'	2:1	1200.00

Figur 2.5 Tabel over rene intervaller. Husk at udgangstonen er vilkårlig.

hurtigt opdage, at det kun var udgangstonen, der besad de ønskede kvaliteter. De rene intervaller har derimod i perioder været meget populære inden for fx sang eller strygermusik, hvor det er muligt at justere tonen, således at det rene interval opnås. Vi vil fremover i rapporten bruge betegnelsen rent om et interval, hvis toners forhold kan beskrives ved små heltal, ligesom vi senere vil uddybe, hvorfor disse "magiske" talforhold konstant dukker op, når vi snakker om interval og stemning.

2.5 Middeltonestemning

I slutningen af middelalderen betyder musikkens udvikling, at den rene store terts (386.3 cent) bliver mere og mere populær. Den pythagoræiske store terts (ca. 407 cents) bliver sværere og sværere at leve med, hvorfor man begynder at eksperimentere med nye stemninger, hvor mange af de store tertser er rene. De fleste af disse forslag betegnes nu som middeltonestemninger. Før det attende århundrede havde middeltonestemningen nået en altdominerende position. Navnet på stemningen er imidlertid relativt nyt, opfundet lang tid efter denne stemnings veldagsdage var ophørt [Jorgensen, s. 8].

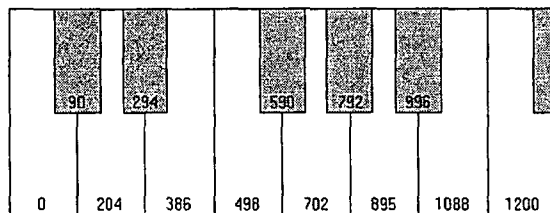


Figur 2.6 Klaviatur med centværdier for en middeltonestemning. Bemærk at de i alt seks på hinanden følgende toner med vandret skrift startende fra A# har samme differens ($\frac{386.3}{2}$) i centværdier (altså samme forhold). Det samme er tilfældet for de toner med lodret skrift, startende fra D#. Der er i disse to rækker tale om rene tertser, hvor den mellemliggende tone er det geometriske gennemsnit af de to.

Middeltonestemningen indeholder mange rene store tertser, men indeholder samtidig mange såkaldte "ulve". I praksis betød antallet af ulve, at man begrænsede den fremførte musik til at indeholde relativt få forskellige klange, nemlig dem, der var fri for ulve. Man lagde ret voldsomme bånd på komponisternes frihed, da der var et begrænset antal anvendelige tonearter.

2.6 Veltempereret stemning

På et tidspunkt bød udviklingen at man reducerede eller eliminerede disse ulveintervaller. Op gennem det syttende, attende og nittende århundrede eksperimenterede og foreslog man et sandt virvar af kompromiser, der havde det tilfælles at de var 'spilbare' i alle tonearter, altså fri for ulve. Stemninger med denne egenskab fik betegnelsen veltempererede. I de fleste af de veltempererede stemninger, var der dog stadig voldsom forskel på intervallerne. Typisk var den store terts mellem C og E meget tæt på det rene forhold 5:4, mens den store terts mellem C# og F som regel var et godt stykke fra, dog uden at den var helt ubrugelig. Et oplagt eksempel på en veltempereret stemning er Kirnbergerstemningen som på et tidspunkt vandt stor udbredelse, ikke mindst fordi, at den er den nemmeste at stemme på et akustisk klaver, da den bygger på mange rene intervaller. Således beskrives den som ca. 11 gange hurtigere at stemme end lige stemning [Jorgensen, 1991][side 277].



Figur 2.7 Klaviatur med centværdier for Kirnbergerstemningen

Et karakteristisk træk ved veltempererede stemninger er, at selvom alle tonearter er spilbare, så vil et musikstykke lyde forskelligt, afhængigt af hvilken toneart man spiller i. Dette fænomen, kaldet tonearternes klangfarve, har fascineret og forundret gennem århundreder og fået visse kunstnere til at give de forskellige tonearter forskellige egenskaber eller karaktertræk. Således giver fx tyskeren Christian Schubart i 1806 forskellige tonearter følgende beskrivelse:

C-dur: fuldstændig ren. Dens karaktertræk er uskyldighed, simplicitet, naivitet, børnesnak.

C#-dur: Er udfordrende, degenererer til lidelse og ekstase. Den kan ikke le, men den kan smile. Den kan ikke hyle, men må skære ansigt for at få smerten ud. Kun usædvanlige følelser kan komme til udtryk i denne toneart.

D-dur: Tonearten for triumf, hallelujaer, krigsråb og sejrsglæde. Derfor sættes marcher, feriesange og omkvæd om himlens glæder i denne toneart.

D#-dur: Tonearten for kærlighed, hengivenhed og intime samtaler med gud.

E-dur: Høje glædesråb, grinende tilfredshed, om end ikke fuldendthed. Fuld glæde i denne toneart.

[Steblin, 2002]

2.7 Opsummering

I dette kapitel har vi set, at der gennem tiden har været mange alternativer til den lige stemning, som i dag er altdominerende. Vi har endvidere set på disse alternativets karakteristika og den motivation, der lå bag dem. Vi vil senere trække på den viden om stemninger, der er gennemgået i dette kapitel.

	C	D#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
L	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
P	0	114	204	294	408	498	612	702	816	906	996	1110
M	0	117	193	310	386	545	580	697	773	931	1007	1083
K	0	91	192	296	387	498	591	696	792	890	996	1092
R	0		204		386	498		702	814	884		

Figur 2.8 Oversigt over de gennemgæede stemninger i cent. Her er tale om (L)ige, (P)ythagoræisk, (M)iddeltone- og (K)irnbergerstemningen. De (R)ene intervaller i forhold til tonen C er vist nederst.

3 Akustikken i en tone

I dette kapitel gives en fysisk og psykoakustisk beskrivelse af en tone. Det er centralt at *tone* er i ental, da kapitlet handler om lyden og perceptionen af en enkelt tone. Teorien i dette og det følgende kapitel skal være med til at danne basis for opstillingen af en model for konsonans.

Beskrivelsen af lyd vil variere, afhængigt af, om man beskuer begrebet gennem fysikerens eller musikerens briller. For fysikeren er lyd vibrationer gennem et medie med frekvenser mellem 20 og 20000 Hz. For musikeren er det en sanset oplevelse. En musiker vil i studiet af musikalsk akustik naturligt begynde med begreberne pitch(tonehøjde), lydstyrke, kvalitet osv., fordi disse er de begreber, han kan høre. Omvendt vil en fysiker begynde sit studie ud fra frekvens, intensitet, svingningsopskrift osv., da det er det, han kan måle. Det er imidlertid vigtigt at skelne klart mellem de fysiske begreber og de i nogen grad tilsvarende sansede begreber. Vi vil i det følgende bestræbe os på, at sammenholde eller koble de to anskuelser. Læseren forventes at have et elementært kendskab til fysiske begreber som frekvens, periode og lignende, hvorved vi fysisk karakteriserer lyd.

3.1 Støj eller tone?

Støj er det vi hører, når vinden smider med blade, en bølge plasker ind på stranden eller en stor menneskemængde snakker om alt muligt forskelligt på en gang i et rum uden stor dæmpning. Men hvad er det, der hæver nogen lyde op af det sammensurium vi kalder støj, og gør det til en tone? Helmholtz karakteriserer lidt løst forskellen på denne måde: "*Sansningen af en tone skyldes en hurtigt periodisk bevægelse af lydudbrederen. Sansningen af støj skyldes ikke-periodiske bevægelser*". [von Helmholtz, 1998][side 13] En tone er altså karakteriseret ved periodicitet.

3.2 Karakterisering af en tone

I det følgende vil vi forsøge at karakterisere, hvordan vi opfatter en tone.

Helmholtz inddeler vores opfattelse af en tone i tre klasser:

- 1.Lydstyrke
- 2.Pitch

3. Kvalitet

De tre begreber er sansede begreber og har således ingen betydning uden for vores hjerner. Alligevel er der en hvis kobling mellem disse og visse fysiske begreber. *Lydstyrken* er således tæt forbundet med amplituden. Toner med lille amplitude opfattes som svage og toner med stor amplitude opfattes som kraftige. En jævn forøgelse (formindskelse) af amplituden på en given tone vil således altid føre til, at den opfattede lydstyrke stiger (falder). Lydstyrken afhænger således, modsat de to andre klasser, af amplituden [von Helmholtz, 1998][side 16].

Pitch er opfattelsen af, hvor lys eller mørk en tone er. Den almindelige forståelse er, at den opfattede pitch er proportional med logaritmen til frekvensen af tonen. For en lyd karakteriseret ved en simpel sinuskurve er dette utvivlsomt korrekt. For de fleste blæse- og strengeinstrumenter er der også en vis sammenhæng mellem den dybeste frekvens instrumentet producerer og den opfattede pitch. [Sethares, 1997][side 32]. Men grundige psykoakustiske studier viser, at der ikke altid er en direkte forbindelse mellem den dybeste frekvens, der indgår i tonen, og den opfattede pitch. Pitch er således et vanskeligere begreb at karakterisere fysisk end lydstyrke. Dog gælder stadig at en jævn forøgelse af frekvensen af en tone (opnås fx ved at forkorte en strengelængde) vil føre til en opfattelse af, at en højere og højere pitch.

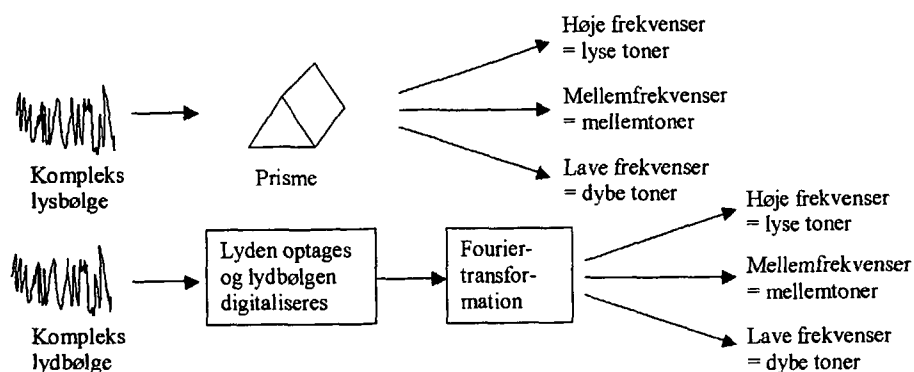
To toner fra forskellige instrumenter kan have samme lydstyrke og pitch og stadig lyde vidt forskelligt. Tonen fra et instrument kan være fyldig eller spinkel, klar eller ulden, jævn eller dynamisk. Den tredje og sidste klasse, hvorved vi kan karakterisere en tone, er *kvalitet*. For at uddybe denne sidste klasse, vil vi først se lidt på en tones komponenter, altså se nærmere på den lyd et musikinstrument udsender.

3.3 Frekvensspektrum og Fouriertransformation

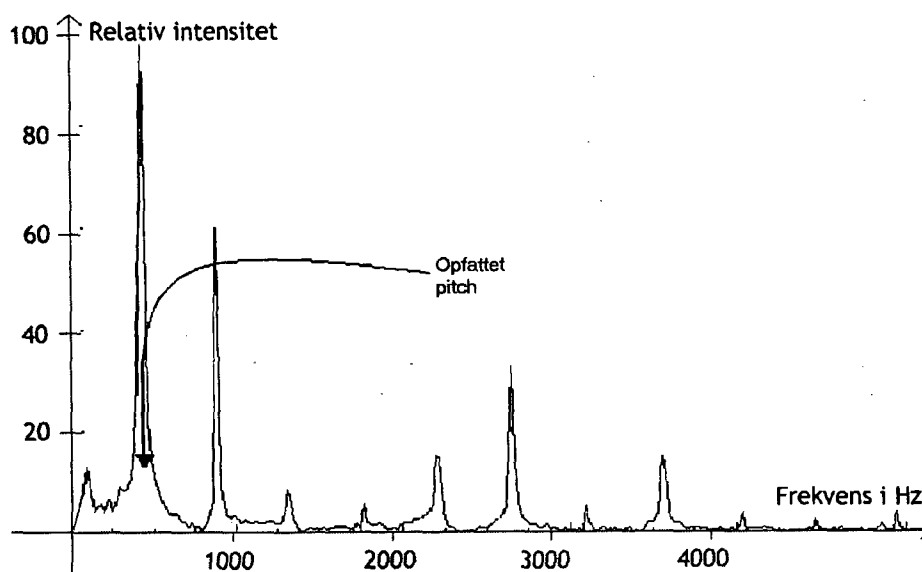
Da lyd (i fysisk forstand) er bølger, har det mange egenskaber tilfælles med lys. Tænk på et prisme, der kan dele en given stråle af lys ind i dets komponenter fordelt efter frekvens. På samme måde kan man ved en (lidt mere teknisk) Fouriertransformation dele en periodisk kompleks lydbølge ind i en familie af simple sinuskurver, karakteriseret ved deres frekvens og amplitude (se figur 3.1). Matematisk set er en fouriertransformation mulig, blot en funktion er stykvis kontinuert, altså at den højre- og venstrefledede eksisterer overalt. Lyd, og toner i særdeleshed, anskuet som et punkts forskydning fra en ligevægt, kan antages at opfylde dette krav [Sethares, 1997][side 14].

Moderne teknologi og Fouriers opdagelse gør det nemt for os at opdele lyden af forskellige toner i simple sinussvingninger. På figur 3.2 og 3.3 ses eksempler på frekvensspektre fra hhv. en tone fra et klaver og en menneskestemme. Lydene er optaget af og bearbejdet på egen PC ved hjælp af programmet Datalyse.

De to skitserede toner har vidt forskellig *kvalitet*, karakteriseret fysisk alene ved hvilke overtoner, der er "indeholdt i" grundtonen [von Helmholtz, 1998][side 186].

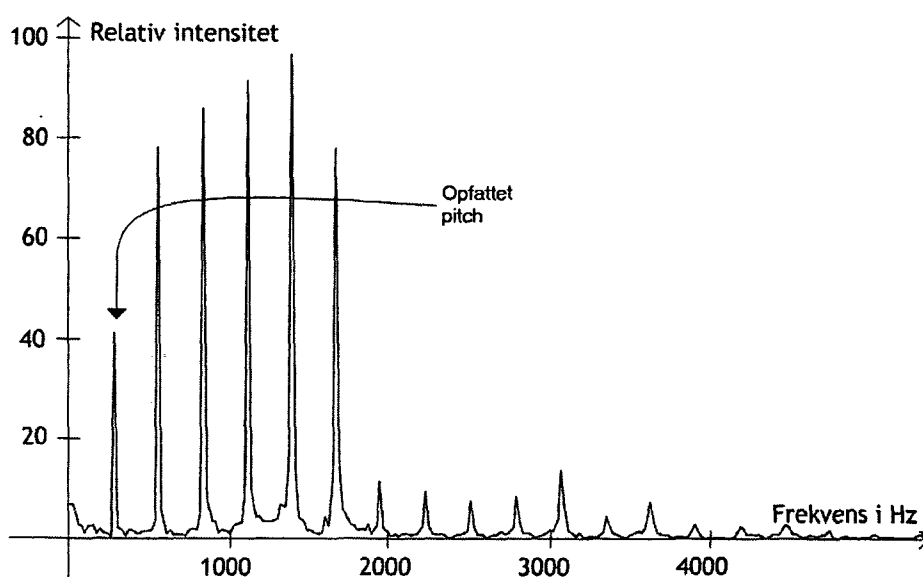


Figur 3.1 Sammenligning af prisme og fouriertransformation



Figur 3.2 Frekvensspektrum for kammertonen A (440 Hz) med en Korg X3 klaverlyd. Frekvensspektret for denne tone afslører, at den også indeholder en del andre frekvenser. Bemærk hvordan der samler sig spidse omkring heltallige multipla af grundfrekvensen, dvs. frekvenserne 440 Hz, 880 Hz, 1320 Hz osv.

Forskellen på de to opfattede toners *kvalitet* ligger altså "gemt" i deres respektive frekvensspektre. På trods af forskellene, har de to toner alligevel et meget væsentligt grundtræk til fælles: Alle frekvenser med nævneværdig intensitet er heltallige multipla af grundtonen. Det viser sig, at dette er et generelt træk ved alle en-dimensionelle musikinstrumenter, på hvilke den vestlige harmoniske musik bygger. Toner på denne form kaldes *harmoniske*. Har overtonerne (spidserne) ikke denne orden, kaldes overtonerne *uharmoniske* (sådanne spektre fremkommer fx for trommer, klokker m.m.).



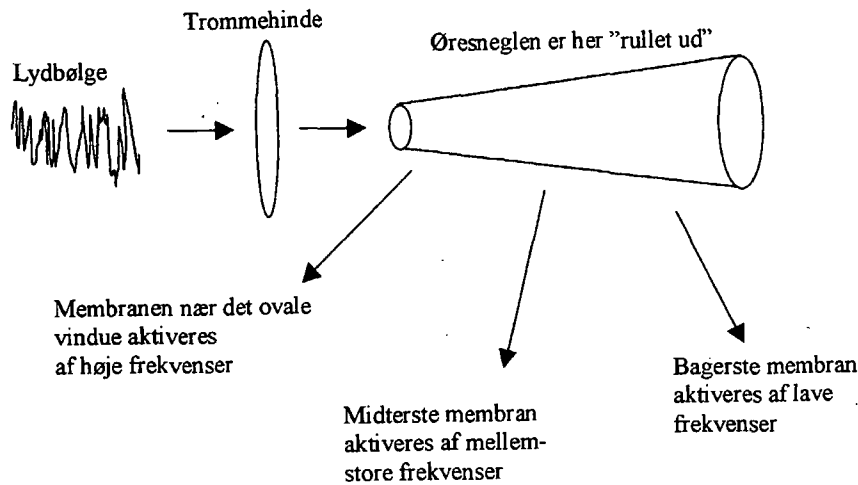
Figur 3.3 Frekvensspektrum for en stemme syngende en "ah-lyd i en tonehøjde svarende til klaverets midterste C (262 Hz). Bemærk at den frekvens, der svarer til den opfattede tone har lavere intensitet end overtonerne.

Vi vil referere til en (harmonisk) tones *partialtoner*. På figur 3.3 kan ses eksempler på partialtoner, hvor hver enkelt af spidserne fra figuren repræsenterer en bestemt partialtone. Vi definerer 1. partialtone, som den partialtone, hvis frekvens er den laveste fællesnævner for de tilstedeværende partialtoners frekvenser. Vi kan nu tildele en partialtone et nummer svarende til det multipla af 1. partialtones frekvens, der giver frekvensen til denne partialtone. Vi vil endvidere benævne det idealiserede frekvensspektrum, der karakteriserer en bestemt tone, for denne tones *svingningsopskrift*. Med idealiseret menes, at man ser bort fra evt. støj og betragter tonen som bestående af et diskret frekvensspektrum, hvor kun frekvenser svarende til partialtoner har en intensitet. Således vil svingningsopskriften for stemmen, der synger "ah" ved 262 Hz skrives som $B = (0.41, 0.78, 0.86, 0.92, 0.97, 0.87, 0.11, 0.10, 0.09, \dots)$ (se figur 3.3).

3.4 Ørets frekvensanalyse

Vi vil kort beskrive øret, da det er her de fysiske vibrationer omsættes til de elektriske signaler, der bliver til toner i vores hjerne.

Som det fremgår af figur 3.4 tager øret en indkommende lydbølge og sender en kodet repræsentation af denne til hjernen. Denne repræsentation er en form for spektralanalyse af lyden, som set på figur 3.2 og 3.3. Der er altså stor konceptuel lighed mellem ørets analyse og en Fouriertransformation [Sethares, 1997][side 17].



Figur 3.4 Smpel model af øret. Ekstern lyd får trommehinden til at vibrere. Disse oscillationer føres ind i øresneglen gennem det ovale vindue. Øresneglen er væskefyldt og snegleformet. I øresneglen detekteres hvilke frekvenser, der er tilstede i lyden, og dette signal sendes til hjernen. [Sethares, 1997][side 16]

3.5 Det skabende øre

Hvis man lytter til en sinusbølge med fast frekvens og voksende intensitet, vil man lægge mærke til, at tonens kvalitet ændres. Folk med et trænet musikalsk øre vil sige at de efterhånden kan høre en iblanding af oktaven over (2. partialtone) og senere en tone yderligere (3. partialtone). Oversat til fysikkens sprog betyder det, at svingningsopskriften på den lyd, som når hjernen, nu indeholder nye frekvenser, som er henholdsvis den dobbelte og den tredobbelte af den ydre lyd giver. Disse nye frekvenser dannes i ørets mekaniske del som følge af, at ørevævet udsving ikke er proportionalt med trykket, som påvirker det. Man siger at øret reagerer ikke-lineært på lyden. Hvis fx øret påvirkes af en kraftig sinusbølge med frekvensen f , vil det inden i sig danne en række nye frekvenser på $2f$, $3f$, $4f$ osv. med aftagende amplitude. Antallet og intensiteten af opfattede partialtoner vokser med lydstyrken [Benade, 1962][side 60-61]. Fænomenet kan iagttages hvis man har adgang til en tone uden øvre partialtoner, fx et prøvebillede på et fjernsyn, hvor man kan justere lydstyrken. Hvis lydstyrken vokser vil der dannes overtoner i øret. Man vil sandsynligvis ikke kunne skelne disse overtoner fra den oprindelige tone, da dette kræver et særdeles trænet øre, men man vil, på grund af tilførslen af øvre partialtoner, kunne opfatte, at tonen får en mere lys kvalitet. [Lloyd and Boyle, 1978][side 148].

3.5.1 Pitch og partialtoner

Med definitionen af partialtoner på plads, vil vi kort vende tilbage til og uddybe opfattelsen af pitch. Som tidligere beskrevet, svarer den opfattede pitch ikke altid til den 1. partialtone, som, viser det sig, faktisk kan være fuldstændig fraværende. Opfattelsen af pitch kan bedre defineres som produceret af hjernen og karakteristisk for den komplekse lydbølge *opfattet som en helhed*. [Lloyd and Boyle, 1978][side 143]. Hvilken pitch, øret og hjernen tildeler en tone, afhænger altså af hele tonens svingningsopskrift. Og hvis man fjerner en enkelt partialtone vil den opfattede pitch ofte være uforandret. Man kan derfor sige, at man "hører" frekvenser som ikke er tilstede. Dette fænomen kaldes "virtual pitch" og har afgørende indflydelse på vores opfattelse af harmoni [Terhardt, 1984][side 293]. Opfattelsen af Pitch er en videnskab for sig, og har uden tvivl stor indflydelse på vores oplevelse af musik, men da det knytter sig til oplevelsen af harmoni, uddybes pitch-begrebet ikke yderligere i dette projekt.

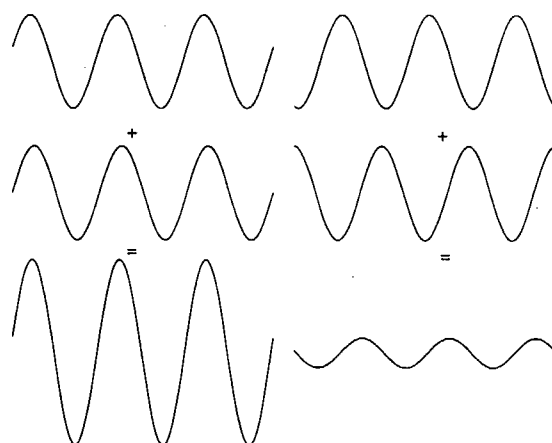
3.6 Opsummering

I dette kapitel har vi set nærmere på en tone og opfattelsen af denne. Vi har set, hvordan man kan inddele vores opfattelse i tre klasser, lydstyrke, pitch og kvalitet, og set på fænomener i den forbindelse. Vigtigst af alt har vi set, at man kan anskue en tone som bestående af et antal partialtoner, der alle kan beskrives ved simple sinusbølger. En iagttagelse, der er fundamental for den videre læsning.

4 Interaktion mellem partialtoner

I forrige afsnit beskrev vi, hvordan vi opfatter en tone og dens evt. tilhørende partialtoner. I dette afsnit er målet, at se nærmere på de fænomener vi oplever, når vi hører to eller flere toner samtidigt. Vi vil, med henblik på den kommende opstilling af en model, fokusere på sammensætningen af to partialtoner, der kan karakteriseres ved to sinussvingninger.

I forrige kapitel, hvor vi så på en enkelt tone, havde tonens fase ingen betydning for frekvensspektret eller den opfattede tone. Hvis der er tale om to uafhængige sinussvingninger, kan interferens imidlertid spille en stor rolle for den sammensatte lyd. Har de to toner samme frekvens, vil vi, afhængigt af, om de to toner er i fase eller modfase, opleve positiv eller destruktiv interferens.

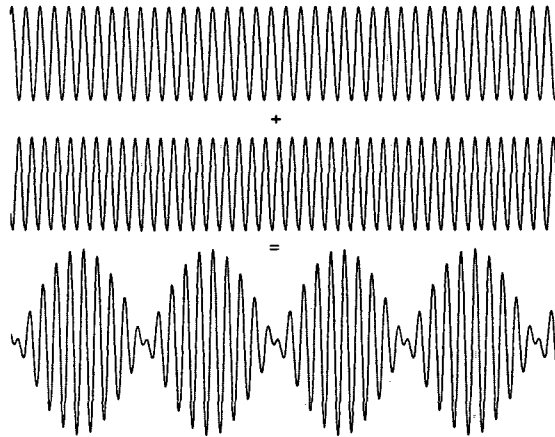


Figur 4.1 Illustration af positiv og destruktiv interferens mellem to sinussvingninger med samme frekvensens. Til venstre opstår konstruktiv interferens da de to svingninger omtrent er i fase. Til højre er de to bølger næsten i modfase, hvorfor den resulterende sinusbølge har meget lille amplitude.

I praksis optræder simple sinussvingninger kun som komponenter i et som regel langt mere komplekst lydbillede. Samtidig har vi set hvordan opfattelsen af, hvilken tone der spilles ikke ændres, fordi en af partialtonerne evt. forsvinder. I alle tilfælde viser det sig, at tonernes fase kun har minimal betydning for opfattelsen [Helmholtz, s. 184]. Et andet fysisk fænomen, der optræder i forbindelse med interferens, er svævninger. Og dette fænomen viser sig at have en afgørende betydning for vores opfattelse af tonesammensætninger.

4.1 Svævninger

Når to sinuskurver har næsten samme frekvens, optræder der hørbare svævninger.



Figur 4.2 Illustration af svævninger. Den resulterende kurve kan betragtes som en kurve med fast frekvens og varierende intensitet. Hver gang intensiteten passerer et minimum siger man, at der har optrådt en svævning. Som sanset begreb kaldes en svævning for et beat.

På den medfølgende CD gives et par eksempler på beatfænomener. Lyt fx til

[1]: Beats i sinusbølger 1

- (a) En sinusbølge med frekvensen 220 Hz (4 sekunder)
- (b) En sinusbølge med frekvensen 221 Hz (4 sekunder)
- (c) Sinusbølge (a) og (b) sammen (8 sekunder)

[2]: Beats i sinusbølger 2

- (a) En sinusbølge med frekvensen 220 Hz (4 sekunder)
- (b) En sinusbølge med frekvensen 225 Hz (4 sekunder)
- (c) Sinusbølge (a) og (b) sammen (8 sekunder)

Lad os se nærmere på fænomenet. En almindelig trigonometrisk formel relaterer summen af to sinuskurver til et produkt af en sinus- og en cosinusfunktion:

$$\sin x + \sin y = \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2} \quad (4.1)$$

Summen af to sinusbølger med frekvenser f og $f + \Delta f$ og kan således skrives som:

$$\begin{aligned}\sin 2\pi ft + \sin 2\pi(f + \Delta f)t &= 2 \cos \frac{2\pi(f - (f + \Delta f))}{2} \sin \frac{2\pi(f - (f - \Delta f))}{2} t \\ &= 2 \cos \pi \Delta f t \sin 2\pi \left(f + \frac{\Delta f}{2} \right) t\end{aligned}\quad (4.2)$$

Hvis vi nu antager at f er meget større end Δf ses af ligning 4.2, at den resulterende lydbølge kan anskues som en bølge med frekvensen $f + \frac{\Delta f}{2}$, hvis intensitet varierer langsomt med en periode, der kun er afhængig af Δf . Hver gang intensiteten passerer et minimum, siger man, at der har optrådt en svævning. Antallet af svævninger n pr. tid kan således findes ved at se på, hvor ofte cosinusfunktionen i ligning 4.2 har nulpunkt, dvs. dens halve periode:

$$\frac{n}{\text{tid}} = \left| \frac{\pi \Delta f}{\pi} \right| = |f_1 - f_2| \quad (4.3)$$

Antallet af svævninger er altså lig den absolutte forskel på de to frekvenser.

4.2 Beats og svævninger

Et beat er en sanset svævning. Af 4.3 ses, at der optræder svævninger så snart f_1 er forskellig fra f_2 . Det viser sig imidlertid, at øret har en vis grænse for, hvor mange svævninger man kan opfatte pr. tid. Og hvis man kommer et stykke forbi denne grænse, opfattes ingen svævninger overhovedet [Sethares, 1997][side 40]. Fænomenet er måske mere velkendt i forbindelse med øjets perception. Lad os fx forestille os, at vi ser på et fjernsyn, hvor vi selv bestemmer den frekvens, hvormed fjernsynets billedflade udskiftes. Hvis der vises et billede pr. sekund kan vi tydeligt tælle og forstå, at der er tale om separate billeder. Hvis vi øger frekvensen jævnt, vil vi på et eller andet tidspunkt miste evnen til at skelne billederne fra hinanden. Her kan vi ikke længere ud fra vores perception give et estimat på frekvensen. Det er dog sandsynligt, at det iagttagede billede vil fremstå flimrende, uroligt og ubehageligt. Hvis vi imidlertid øger frekvensen yderligere, vil den flimrende fornemmelse langsomt forsvinde, og vores perception kan ikke længere fortælle os, at der er tale om separate billeder. Øret fungerer på samme måde. Hvis vi med udgangspunkt i to sinusbølger øger svævningsfrekvensen jævnt, vil vi på et tidspunkt miste muligheden for at give et estimat på antallet af svævninger gennem vores perception. Det er igen sandsynligt at lyden, analogt med før, vil fremstå 'flimrende', urolig og ubehagelig. Hvis vi øger frekvensen yderligere, vil det urolige begynde at forsvinde. Til sidst opfattes således ingen beats overhovedet. Dette eksemplificeres ved skæring [3] og [4] på den medfølgende CD.

[3]: Beats i sinusbølger 3

- (a) En sinusbølge med frekvensen 220 Hz (4 sekunder)
- (b) En sinusbølge med frekvensen 270 Hz (4 sekunder)

(c) *Sinusbølge (a) og (b) sammen (8 sekunder)*

[4]: Beats i sinusbølger 4

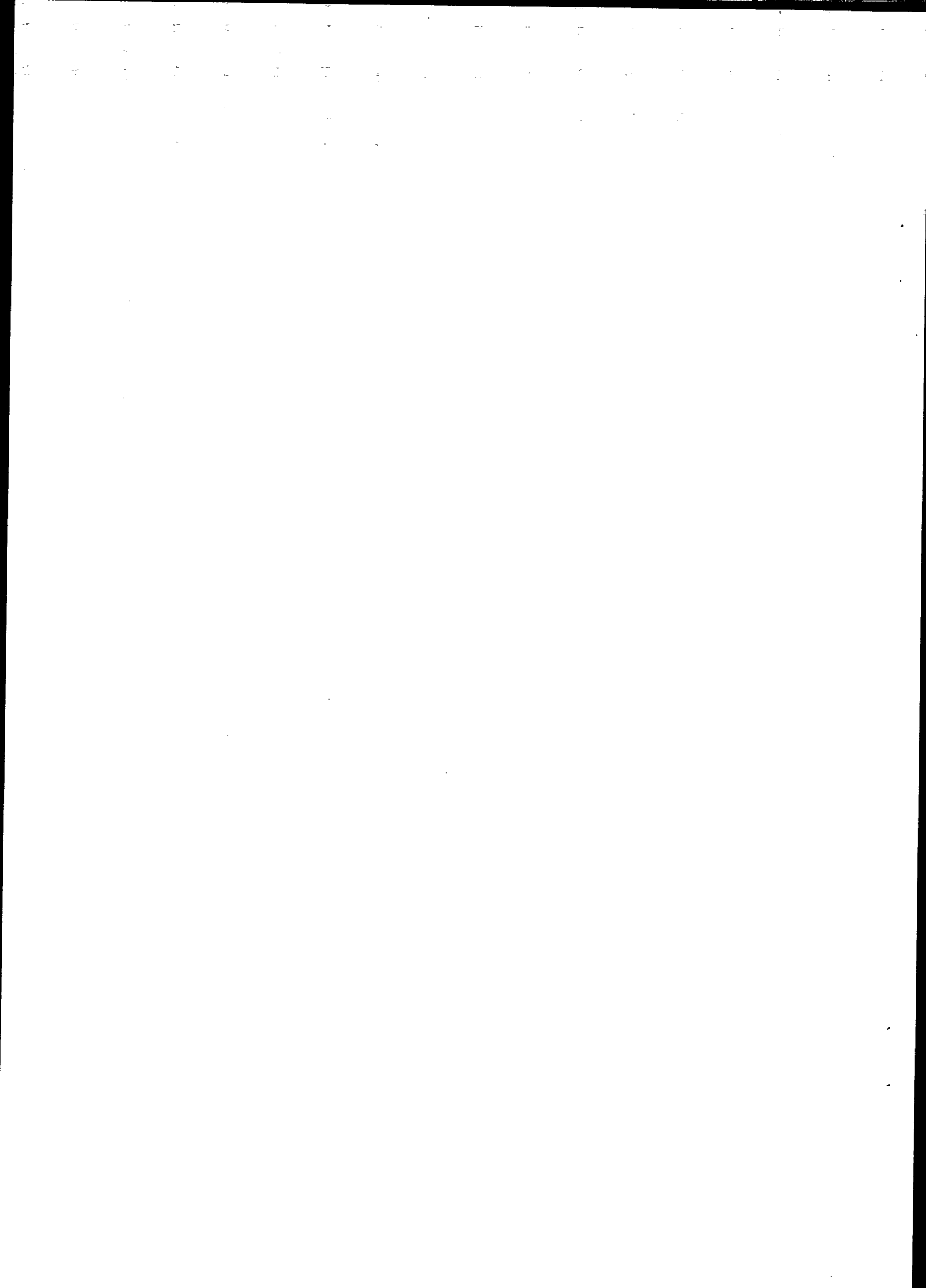
En sinusbølge med fast frekvens på 220 Hz spilles sammen med en tilsvarende sinusbølge, hvis frekvens langsomt varieres fra 220 Hz til 470 Hz.

Da temaet for skæring [4] er fravær af beats, bør den høres ved moderat eller lav volumen, for at undgå at øret genererer overtoner ud fra den faste frekvens (se afsnit 3.5). Omvendt kan man bruge skæringen ved høj volumen til at generere beats, der fysisk set ikke er til stede i rummet. Man kan således gennem disse hørbare beats opdage, hvordan øret genererer overtoner.

Helmholtz koblede i midten af 1800-tallet gennem omfattende videnskabeligt arbejde intensiteten af beats til konsonansbegrebet. Ud fra analogier med øjet slutter han, at vores nerveapparat foretrækker relativt kontinuerte impulser. Han definerede således konsonans som "fravær af beats". I det følgende afsnit vil vi med udgangspunkt i Helmholtz arbejde, forsøge at give en fysisk-matematisk definition af, hvor kraftige beats vi oplever, når vi hører to sinusbølger.

Del II

Model for beatintensitet



Efter at have behandlet grundlæggende teori om toner og opfattelsen af disse, vil projektet nu gå ind i en ny fase. I denne fase vil vi anvende den behandlede teori til at opbygge en matematisk model for beatintensitet. Vi vil opbygge modellen for beatintensitet i fire trin. I første trin, der er det mest omfattende, bestemmes et mål for intensiteten af beats for to sinusbølger. I næste trin udvides målet til at gælde for to toner. I tredje trin flyttes fokus til sammensætninger af et vilkårligt antal toner. I fjerde og sidste trin udvides resultaterne fra de første tre trin til at gælde for et helt musikstykke.

To sinusbølger —> To toner —> Akkorder —> Et musikstykke

Vi vil under forklaringen af modellen, særligt i de tre sidste trin, bruge en del eksempler, der er centrale for projektets problemstilling. Man skal således se disse eksempler som demonstration af modellens anvendelse, og det er ud fra disse eksempler, vi vil diskutere anvendelse af modellen.

5 To sinusbølger

I det følgende vil vi opstille et mål for beatintensiteten for to sinusbølger. Gennemgangen bygger på appendiks 9 og 14 i [von Helmholtz, 1998], hvor Helmholtz forklarer, hvordan han har konstrueret sit mål for intensiteten af beats. Helmholtz forklaring er ikke særlig grundig, og afsnittene bærer tydeligt præg af, at der er tale om appendiks. Da udledningen er central for projektet vil vi alligevel forsøge at gengive og udbygge dens forskellige trin. Vi vil være nogenlunde tro mod Helmholtz fremstilling, men vil, i stedet for som ham at se på toner, der som bekendt kan opfattes som sammensætninger af sinusbølger, i første omgang kun beskæftige os med sinusbølger. Der vil således være enkelte afvigelser i ligningerne, da nogle af hans ligninger beskæftiger sig med toner, mens vores tilsvarende kun beskæftiger sig med sinusbølger. Helmholtz notation fra henholdsvis appendiks 9 og 14 er bibeholdt.

5.1 Sympatiske resonatorer

En sympatisk resonator er et legeme, som er følsom overfor bestemte frekvenser. Samtidig har resonatoren den egenskab, at når det først er sat i bevægelse, så vil den fortsætte med at vibrere et stykke tid, før den falder til ro. Den frekvens, disse aftagende vibrationer forekommer med, kaldes resonatorens egenfrekvens. Vi vil begynde dette kapitel med et par betragtninger vedrørende sympatiske resonatorer, som vi får brug for senere. Lad os anskue en sympatisk resonator med massen m , der konstant vil flyttes mod sit udgangspunkt af en elastisk kraft. Man kunne fx forestille sig et hår på basalmembranen, der aktiveres af bestemte frekvenser. Når det tunge punkt flyttes distancen x fra dets hvileposition, lad da $-a^2x$ være den elastiske kraft på dette. a^2 kan således betragtes som resonatorens fjederkonstant, eller som et mål for resonatorens stivhed. Antag at punktet påføres en ydre påvirkning i form af en periodisk kraft, der kan skrives på formen $A \sin nt$, hvor A betegner amplituden af denne kraft, n betegner frekvensen og t betegner tiden. Antag endvidere at bevægelsen dæmpes med en kraft proportional med punktets hastighed, vi således kan skrive som $-b^2 \frac{dx}{dt}$. b^2 er således parameter for, hvor hurtigt resonatorens bevægelse dæmpes.

Vi kan nu vha. Newtons 2. lov opskrive en bevægelsesligning for punktet:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b^2 \frac{dx}{dt} + A \sin nt \quad (5.1)$$

Denne ligning er en inhomogen lineær 2. ordens differentiaalligning. Først undersøges karakterligningen $\lambda^2 + \frac{b^2}{m}\lambda + \frac{a^2}{m}$. Diskriminanten

$$D = \frac{b^4}{m^2} - 4\frac{a^2}{m} \quad (5.2)$$

ses at være negativ, såfremt $4ma^2 \geq b^4$, hvilket vi for at følge Helmholtz' uledning vil antage. Den fuldstændige løsning til differentiaalligningen 5.1 bliver med Helmholtz' betegnelser

$$x = \frac{A \sin \epsilon}{b^2 n} \sin(nt - \epsilon) + B e^{-\frac{b^2 t}{2m}} \sin\left(\frac{t}{m} \sqrt{a^2 m - \frac{1}{4} b^4} + c\right) \quad (5.3)$$

hvor B og c er integrationskonstanter og

$$\tan \epsilon = \frac{b^2 n}{a^2 - mn^2} \quad (5.4)$$

Andet led i ligning 5.3 med koefficienten B er kun væsentlig først i bevægelsen, da faktoren $e^{-\frac{b^2 t}{2m}}$ vil formindskes med tiden. Vi vælger, for at følge Helmholtz, at se bort fra dette led, og i stedet undersøge det første led nærmere. Først kan den "maksimale kinetiske energi" i^2 for den bevægelse, det første led i 5.3 repræsenterer, bestemmes til

$$i^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (5.5)$$

når

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{A \sin \epsilon}{b^2} \cos(nt - \epsilon)\right)^2 \quad (5.6)$$

antager sin maksimale værdi. Således fås:

$$i^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{A \sin \epsilon}{b^2}\right)^2 = \frac{mA^2 \sin^2 \epsilon}{2b^4} \quad (5.7)$$

Hvis vi nu antager, at vi kan variere den frekvens n , vi påvirker punktet med, vil maksimum, som vi vil kalde I^2 , opnås når $\sin^2 \epsilon = 1$. I så fald bliver:

$$I^2 = \frac{mA^2}{2b^4} \quad (5.8)$$

og vi kan også skrive 5.7 som

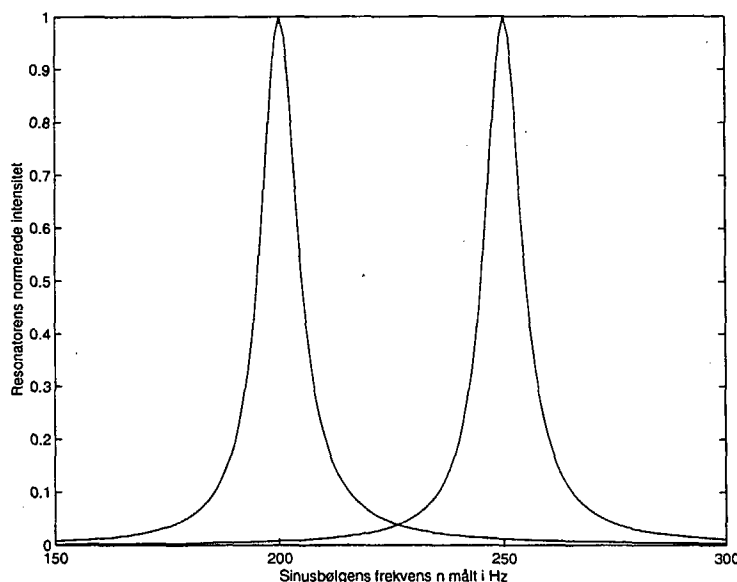
$$i^2 = I^2 \sin^2 \epsilon \quad (5.9)$$

Lad den frekvensafhængige resonans for et givent punkt være defineret som *den kraftigste vibration en sinusbølge med den givne frekvens kan inducere*. Størrelsen ϵ , der afhænger af de for et givent punkt konstante størrelser a , b og m samt frekvensen n af den påvirkende sinusbølge, bestemmer altså styrken af de resonans, der forekommer i punktet. Hvis vi betragter et givent punkt og varierer frekvensen n , ser vi af ligning 5.9, at denne har maksimum når $\tan \epsilon = \pm\infty$. Dette ses ud fra 5.4 at være opfyldt netop når $a^2 = mn^2$. Hvis N nu er den værdi af n som giver den maksimale resonans fås:

$$N^2 = \frac{a^2}{m} \quad (5.10)$$

Denne frekvens N er den som fremkalder den stærkeste resonans. Hvis b er tilstrækkelig lille, vil denne frekvens samtidig være tæt på legemets egenfrekvens. Hvis vi indfører størrelsen N i ligning 5.4 får vi at

$$\tan \epsilon = \frac{b^2 n}{m(N^2 - n^2)} \quad (5.11)$$



Figur 5.1 Normeret resonans for to resonatorer med hhv. egenfrekvenser 200 Hz og 250 Hz som funktion af den frekvens n , man påvirker dem med. Grafen er produceret ud fra ligning 5.9 og 5.11. Med normeret menes, at 2. akse er skaleret ved at dele med værdien af I^2 (se 5.8). Endelig er forholdet $\frac{b^2}{m}$ fra 5.11 valgt til 10 s^{-1} .

For at opsummere Helmholtz resultater om resonatorer, har vi konstrueret en graf, hvor man afbilder den kraftigste intensitet (resonansen) for to resonatorer med givne egenfrekvenser, som en funktion af, hvilken frekvens man påvirker det med (se figur 5.1). Bemærk hvordan der er lidt luft omkring foden af hver af

de to spidser, hvilket illustrerer, at en resonator godt kan bringes til at reagere periodisk, selvom frekvensen ikke er helt lig dens egenfrekvens.

5.2 Intensiteten af beats

I det følgende vil vi betragte hørehår med massen m og dæmpningsfaktor b^2 som sympatiske resonatorer. Antag at øretsneglen udsættes for sinusbølger med tætliggende frekvenser n_1 og n_2 og tilhørende intensiteter B' og B'' . Lad også n betegne en frekvens og lad $n_1 \leq n \leq n_2$. Lad endvidere B_1 og B_2 betegne den største intensitet, som de to sinusbølger hver især kan inducere resonatoren med egenfrekvensen n med. Af 5.9 fås nu at

$$B_1 = B' \sin \epsilon_1 \text{ og } B_2 = B'' \sin \epsilon_2 \quad (5.12)$$

hvor ϵ_1 og ϵ_2 formuleres ud fra 5.11:

$$\begin{aligned} \tan \epsilon_1 &= \frac{b^2 n_1}{m(n^2 - n_1^2)} = \frac{\frac{b^2}{n}}{\frac{m(n^2 - n_1^2)}{n_1 n}} = \frac{\frac{\pi b^2}{mn}}{\pi \left(\frac{n}{n_1} - \frac{n_1}{n} \right)} = \frac{\beta}{\pi \left(\frac{n}{n_1} - \frac{n_1}{n} \right)} \\ \Leftrightarrow \pi \tan \epsilon_1 &= \frac{\beta}{\frac{n}{n_1} - \frac{n_1}{n}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Tilsvarende fås

$$\pi \tan \epsilon_2 = \frac{\beta}{\pi \left(\frac{n}{n_2} - \frac{n_2}{n} \right)} \quad (5.14)$$

Vi vil for at følge Helmholtz betragte $\beta = \frac{\pi b^2}{mn}$ som værende konstant for små ændringer af n . Hvis man forestiller sig, at hørehårs masse m og egenfrekvens n er omvendt proportionale samtidig med at dæmpningen, parametriseret ved b^2 , er nogenlunde frekvensuafhængig, ses det, at betragtningen ikke er helt urimelig.

5.2.1 Sinusbølger med forskellig amplitude

I de svævninger vi har illustreret på figur 4.2 havde de oprindelige sinusbølger samme amplitude. Hvis disse havde haft forskellig amplitude, havde svævnin-
gerne fået et lidt andet udseende (se figur 5.2). For at vise hvordan sumbølgens amplitude varierer, vil vi beskrive svævningen ved hjælp af den komplekse eksponentialfunktion. Lad B_1 være amplituden for en sinusbølge med frekvens f og lad t betegne tiden. Da kan vi beskrive sinusbølgen som imaginærdelen af den til denne sinusbølge tilhørende komplekse eksponentialfunktion.

$$\operatorname{Im}(B_1 e^{i2\pi ft}) = \operatorname{Im}(B_1 e^0 (\cos(2\pi ft) + i \sin(2\pi ft))) = B_1 \sin(2\pi ft) \quad (5.15)$$

Lad nu B_2 være amplituden for en anden sinusbølge med frekvensen $f + \Delta f$.
Da får vi sumbølgen for to sinusbølger til

$$B_1 e^{i2\pi ft} + B_2 e^{i2\pi(f+\Delta f)t} = (B_1 + B_2 e^{i2\pi\Delta ft}) e^{i2\pi ft} \quad (5.16)$$

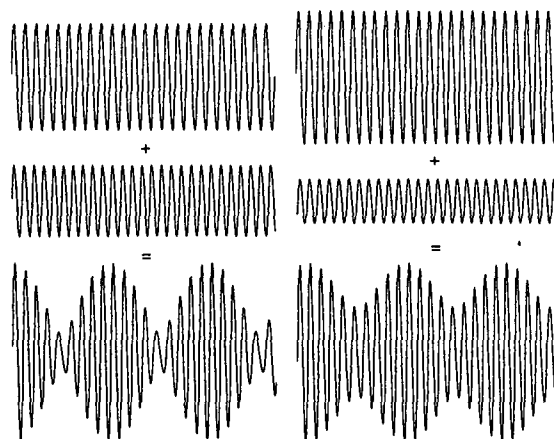
For hvert t er dette et komplekst tal, som kan repræsenteres ved dets modulus gange $e^{i \cdot \text{arg}}$. Kvadratet af længden på det komplekse tals modulus er

$$\begin{aligned} \text{modulo}^2 &= ((B_1 + B_2 e^{i2\pi\Delta ft}) e^{i2\pi ft}) ((B_1 + B_2 e^{-i2\pi\Delta ft}) e^{-i2\pi ft}) \\ &= B_1^2 + B_2^2 + B_1 B_2 (e^{i2\pi\Delta ft} + e^{-i2\pi\Delta ft}) \\ &= B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos(2\pi\Delta ft) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Der gælder at intensiteten af en bølge med given frekvens er proportional med kvadratet på amplituden, her givet ved det komplekse tals modulus. Intensiteten af de vibrationer, der påvirker resonatoren med egenfrekvensen n , når den både påvirkes af n_1 og n_2 , vil jf. ligning 5.17 fluktuere mellem værdierne $(B_1 + B_2)^2$ og $(B_1 - B_2)^2$.

Forskellen mellem disse to værdier giver et mål for styrken af evt. beats. Ved hjælp af 5.12 fås denne forskel til

$$4B_1 B_2 = 4B' B'' \sin \epsilon_1 \sin \epsilon_2 \quad (5.18)$$



Figur 5.2 Illustration af svævnings mellem sinusbølger med forskellig amplitude.

Nu indføres følgende skift af variable:

$$\begin{aligned}
 n_1 + n_2 &= 2N \\
 n_1 &= N(1 - \delta) \\
 n_2 &= N(1 + \delta) \\
 n &= N(1 + \nu)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Med denne skrivemåde kan vi nu omskrive ligning 5.13 til

$$\tan \epsilon_1 = \frac{\beta}{\pi \left(\frac{1+\nu}{1-\delta} - \frac{1-\delta}{1+\nu} \right)} = \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1-\delta)^2}{(1+\nu)(1-\delta)}} \tag{5.20}$$

og ligning 5.14 til

$$\tan \epsilon_2 = \frac{\beta}{\pi \left(\frac{1+\nu}{1+\delta} - \frac{1+\delta}{1+\nu} \right)} = \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1+\delta)^2}{(1+\nu)(1+\delta)}} \tag{5.21}$$

Man kan ved simple trigonometriske omskrivninger vise at

$$\sin^2 x = \sqrt{\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} = \frac{|\tan x|}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \tag{5.22}$$

Ved at kombinere ligning 5.18 med $\tan \epsilon_1$ (5.20) og $\tan \epsilon_2$ (5.21) får vi ved hjælp af 5.22 intensiteten til:

$$\begin{aligned}
 4B_1 B_2 &= 4B' B'' \sin \epsilon_1 \sin \epsilon_2 \\
 &= 4B' B'' \sin \arctan \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1-\delta)^2}{(1+\nu)(1-\delta)}} \sin \arctan \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1+\delta)^2}{(1+\nu)(1+\delta)}} \\
 &= 4B' B'' \frac{\tan \arctan \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1-\delta)^2}{(1+\nu)(1-\delta)}}}{\sqrt{1 + \left(\tan \arctan \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1-\delta)^2}{(1+\nu)(1-\delta)}} \right)^2}} \frac{\tan \arctan \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1+\delta)^2}{(1+\nu)(1+\delta)}}}{\sqrt{1 + \left(\tan \arctan \frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1+\delta)^2}{(1+\nu)(1+\delta)}} \right)^2}} \\
 &= 4B' B'' \frac{\frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1-\delta)^2}{(1+\nu)(1-\delta)}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1-\delta)^2}{(1+\nu)(1-\delta)}} \right)^2}} \frac{\frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1+\delta)^2}{(1+\nu)(1+\delta)}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\pi \frac{(1+\nu)^2 - (1+\delta)^2}{(1+\nu)(1+\delta)}} \right)^2}} \\
 &= 4B' B'' \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \pi^2 \left(\frac{(1+\nu)^2 - (1-\delta)^2}{(1+\nu)(1-\delta)} \right)^2}} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \pi^2 \left(\frac{(1+\nu)^2 - (1+\delta)^2}{(1+\nu)(1+\delta)} \right)^2}}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Hvis vi antager at δ er fast og ν er variabel, når beatstyrken 5.23 sit maksimum når ν er 0, hvilket svarer til, at n netop er lig gennemsnittet af n_1 og n_2 . Hvis

vi kalder dette maksimum for styrken af beats for s og normerer funktionen ved at dele med 4, får vi altså at

$$s(\delta) = B' B'' \frac{\beta^2}{\beta^2 + \pi^2 \left(\frac{\delta^2 + 2\delta}{1 + \delta} \right)^2} \quad (5.24)$$

For at forskønne dette udtryk benytter Helmholtz at δ , der kan anskues som halvdelen af den relative afstand mellem to frekvenser, ofte er meget lille. Udtrykket $\frac{\delta^2 + 2\delta}{1 + \delta}$ kan derfor Taylorudvikles til

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 + 2\delta}{1 + \delta} &= 0 + \left[\frac{(2\delta + 2)(1 + \delta) - 1(\delta^2 + 2\delta)}{(1 + \delta)^2} \right]_{\delta=0} \cdot \delta + \sigma(\delta^2) \\ &= 2\delta + \sigma(\delta^2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Med denne udmærkede approksimation får Helmholtz det lidt kønnere udtryk

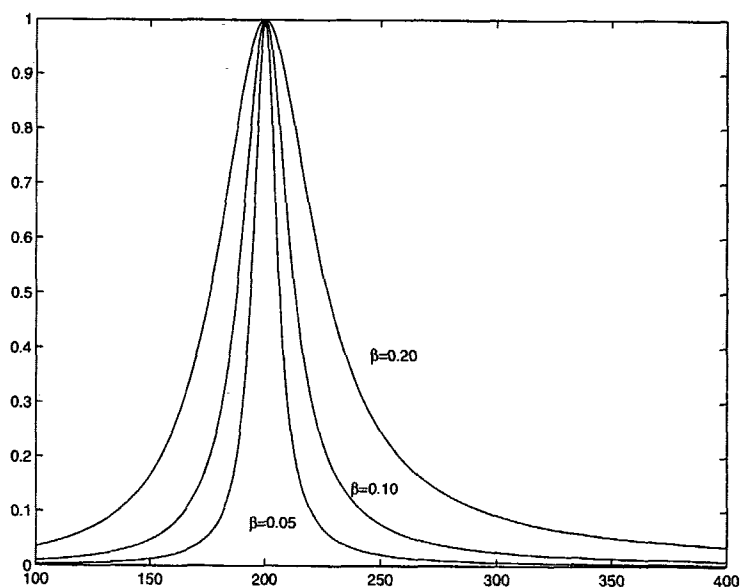
$$s(\delta) \approx B' B'' \frac{\beta^2}{\beta^2 + 4\pi^2 \delta^2} \quad (5.26)$$

Da vi ikke har samme beregningsmæssige begrænsninger som Helmholtz, vil vi regne videre med ligning 5.24.

I beregningen af graden af beatstyrken vælger Helmholtz kun at se på den maksimale værdi givet ved ligning 5.24. Han anfører at det muligvis kunne være ønskeligt at integrere værdien for alle værdier af ν . Dette, forklarer han, ville imidlertid kræve nøjere kendskab til tætheden af resonatorer i øret, hvorfor Helmholtz kun arbejder videre med 5.26. Hvis man skal fortolke værdien af beatstyrken s kan man sige, at den fortæller i hvilken grad øret ikke kan skille (fourieropløse) to sinusbølger fra hinanden, og hører de to toner som en enkelt evt. beatende tone. Pointen er, at hvis øret hører to sinusbølger med meget forskellig frekvens, dvs. at der ikke er et sensorisk overlap mellem de signaler øret får fra de to sinusbølger, så vil man trods evt. svævninger ikke opfatte beats, men to separate bølger, hvorfor beatstyrken s vil antage værdien nul. Værdien af β er central for funktionen s . Som figur 5.3 viser, ændrer funktionen s karakter afhængig af, hvilket β der benyttes. Dette problematiseres senere.

5.3 Opfattelse af beats

Sidst, men ikke mindst, skal vi for at give et udtryk for beatintensiteten tage hensyn til, at meget langsomme beats ikke fører til oplevelse af dissonans, ligesom at oplevelsen af dissonans når et maksimum mellem 30 og 40 beats, hvorefter den aftager. For at tage hensyn til dette, må vi gange s med en faktor, der er forsvindende når antallet af beats er lavt, når et maksimum mellem 30 og 40 beats, og aftager igen for at gå mod 0 når antallet af beats vokser mod



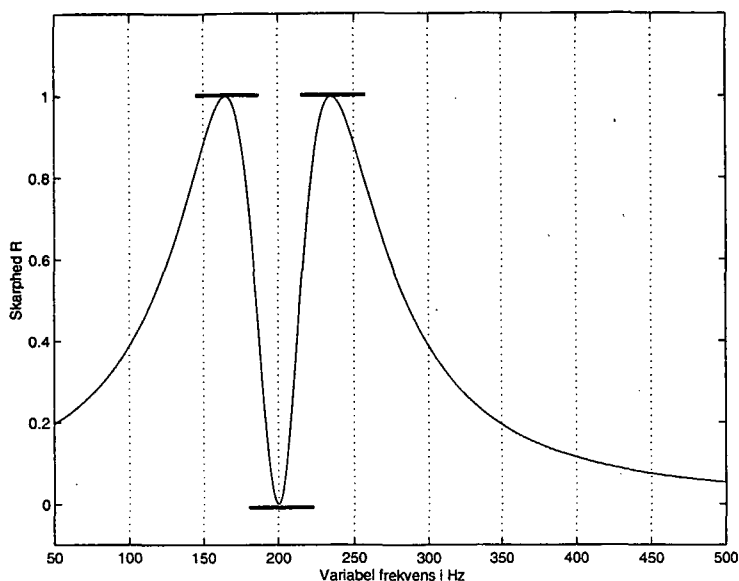
Figur 5.3 En sinusbølge med konstant frekvens 200 Hz spilles sammen med en sinusbølge med variabel frekvens. Værdien af s ses at have maksimum, når begge sinusbølger har frekvensen 200 Hz. De forskellige kurver viser, hvilken rolle værdien af β spiller for, hvordan s afhænger af frekvensen.

uendeligt. Helmholtz foretager her et ad hoc-valg. Hvis vi definerer værdien θ til at være lig δ når forskellen i frekvensen mellem n_1 og n_2 er netop 35 Hz, vælger Helmholtz således skarpheden R (fra det engelske udtryk Roughness) til at være

$$R = \frac{4\theta^2\delta^2}{(\theta^2 + \delta^2)^2} \quad (5.27)$$

Denne funktion når sin maksimale værdi 1 når $\delta = \pm\theta$ og bliver nul, hvis δ er nul eller uendelig. Derudover har den vandret tangent for $\delta = 0$ og for $\delta = \pm\theta$ (se figur 5.4). Ligningen er ifølge Helmholtz den simplest mulige, men er selvfølgelig til en vis grad arbitrær. Dette valg af en arbitrær funktion bryder med den ellers ikke-psykologiske og relativt naturvidenskabelige tilgang, som har været fremtrædende i dette kapitel. Man kunne således her have valgt en anden arbitrær funktion uden at komme i konflikt med Helmholtz ræsonnementer. Omvendt kan det diskuteres, om det overhovedet er muligt at sætte tal på en oplevelse af skarphed og dissonans, som er det vi prøver at parametrisere. At han beslutter at vælge denne funktion som en ad-hoc løsning vækker forståelse hos denne rapport's forfattere. Den opfylder de nævnte kriterier mht. minimum, maxima og vandrette tangenter, samtidig med at den er relativ simpel. Man må dog tage ind i sine overvejelser, at denne funktion ikke længere er objektiv. Man kan således forestille sig, at hvert individ har sin egen kurve. Nyere undersøgelser af fx [Kameoka and Kuriyagawa, 1961] viser imidlertid, at der er relativ stor

enighed om skarpheden af to sinusbølger, hvorfor det i høj grad giver mening at arbejde videre med denne arbitrære funktion, der viser sig at kunne producere brugbare resultater.



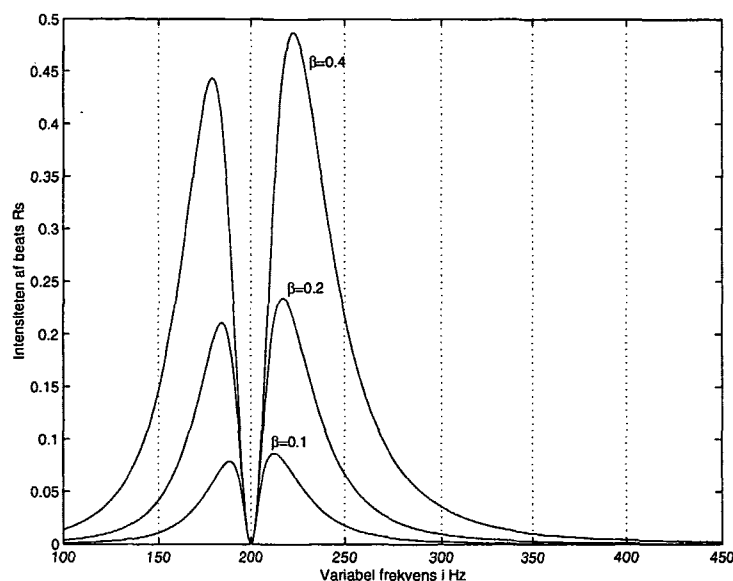
Figur 5.4 Grafisk afbildning af beatfaktoren mellem sinusbølge med konstant frekvens 200 Hz og sinusbølge med variabel frekvens. Der er maksima ved 165 og 235 Hz, svarende til, at der optræder netop 35 beats. Der er indtegnet vandrette tangenter ved de to maxima og ved det globale minimum 200 Hz.

For at beregne intensiteten af beats tager Helmholtz produktet af R (givet ved 5.27) og s (givet ved 5.24). Den endelige ligning for beatintensiteten kan derfor skrives som

$$R \cdot s = 4B' B'' \frac{\beta^2 \theta^2 \delta^2}{\left(\beta^2 + \pi^2 \left(\frac{\delta^2 + 2\delta}{1 + \delta} \right)^2 \right) (\theta^2 + \delta^2)^2} \quad (5.28)$$

5.3.1 Hvilken β -værdi skal vi vælge?

På figur 5.5 er graferne for $R \cdot s$ afbildet for flere forskellige β -værdier. Dette er tilfældet, fordi der i β indgår størrelser, hvis værdier projektets forfatter ikke har haft tid til at finde gode estimater for. Her er fx tale om massen af den påvirkede resonator og dæmpningen af bevægelsen, for hvilke man ud fra undersøgelser af øret måske kunne bestemme værdier for. Da vi ikke har haft mulighed for at give en præcis bestemmelse af størrelsen, har vi udfra sammenligninger vores grafer med Helmholtz egne, hurtigt kunne bestemme en omtrentlig værdi. Vi vil i resten af projektet arbejde med $\beta = 0.1$, da denne værdi får vores kurve til at stemme bedst overens med blandt andre Helmholtz egne kurver.



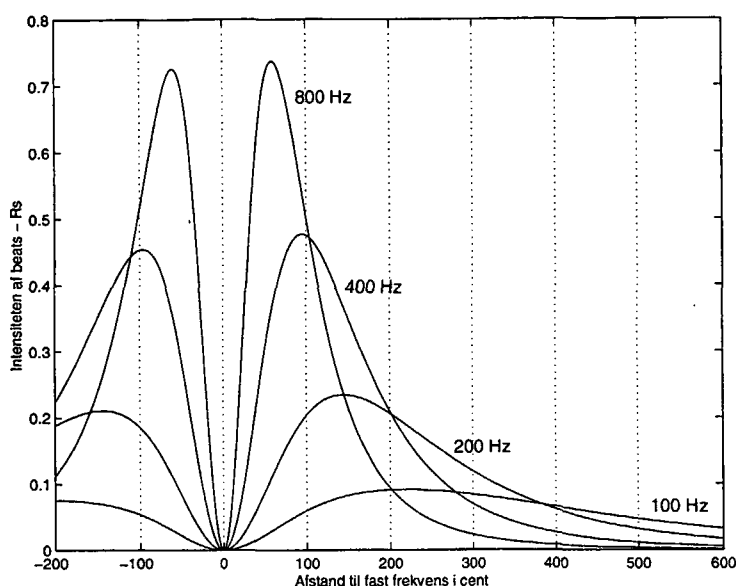
Figur 5.5 Helmholtz' beatintensitetsfunktion for to sinusbølger, hvor den ene har konstant frekvens på 200 Hz. Kurven er plottet for forskellige værdier af β . Kurverne kan anses som et produkt af kurverne på 5.3 og 5.4. Bemærk at der er en "kløft" omkring frekvensen 200 Hz. Bemærk endvidere assymetrien der kommer fra 5.24

5.3.2 Frekvensafhængighed

Det viser sig, at kurven for beatintensiteten mellem to sinusbølger med konstant forhold er ret afhængig af, hvilken frekvens de sammenlignes ved. Ved lave frekvenser vokser antallet af beats relativt langsomt, når forholdet mellem de to frekvenser øges. Ved høje frekvenser vokser antallet relativt hurtigt. Dette sker hovedsageligt, fordi antallet af svævninger vokser svarende til den absolutte forskel mellem frekvenserne, mens det er den relative forskel af frekvensen af de to sinusbølger, der er afgørende for, hvornår de danner et bestemt interval. For eksempel vil to sinusbølger med frekvenser 80 og 90 Hz producere 10 svævninger pr. sekund (se ligning 4.2). Hvis vi fordobler frekvenserne vil forholdet, og dermed opfattelsen af intervallet, være bevaret, men antallet af svævninger vil være steget til det dobbelte (se figur 5.6).

5.4 En funktion af fire variable

Vi vil runde afsnittet af med at omskrive Helmholtz ligning for beatintensitet for to sinusbølger, til et udtryk, hvor de to variable δ og θ udskiftes med de to frekvenser x_1 og x_2 , som sinusbølgerne optræder med. Hvis vi betragter x_1 som den mindste og x_2 som den største af de to frekvenser fås af ligning 5.19 at



Figur 5.6 Intensiteten af beats for par af sinusbølger. Den faste frekvens er på hhv. 100, 200, 400 og 800 Hz, mens den variable frekvens er afbildet for værdier nær disse frekvenser. På kurverne er markeret, hvilken af de faste frekvenser den pågældende kurve fremkalder sanset dissonans sammen med. Bemærk at 1. akse nu har enheden cent og derfor er relativ.

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}(1 - \delta) \quad (5.29)$$

hvorved δ kan bestemmes til

$$\delta = -\frac{2x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2} \quad (5.30)$$

Værdien θ defineres, så denne er lig δ når der optræder 35 svævninger, dvs. når differensen mellem x_1 og x_2 er netop 35. Altså får vi

$$\theta = \delta_{35} = \frac{35}{x_1 + x_2} \quad (5.31)$$

Hvis vi indsætter disse værdier for δ og θ i 5.28, mens vi fortsat lader B' og B'' betegne intensiteten af hhv. x_1 og x_2 , får vi den endelige funktion for beatintensitet af to sinusbølger til

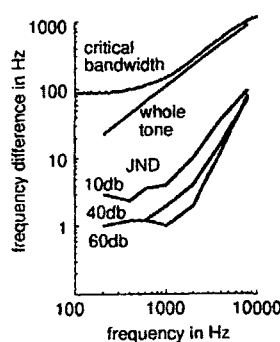
$$f(x_1, B', x_2, B'') = B' B'' \frac{\beta^2 \left(\frac{35}{x_1 + x_2}\right)^2 \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}\right)^2}{\beta^2 + \pi^2 \left(\frac{\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}\right)^2 + 2\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}}{1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}}\right)^2 \left(\left(\frac{35}{x_1 + x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}\right)^2\right)^2} \quad (5.32)$$

5.5 Kritik af denne model

Efter denne forholdsvis ukritiske gennemgang af Helmholtz funktion for intensitet af beats, er det på sin plads at sætte et par spørgsmålstegn ved denne, samt de antagelser vi har gjort os på vejen. Man må huske på at Helmholtz bog er fra 1863, hvorfor hans iøvrigt særdeles kreative forsøgsopstillinger og målinger, snildt ville kunne overgås i dag mht. præcision og hvad der er muligt. Fx har Helmholtz ikke haft adgang til en tonegenerator, der kan give fuld kontrol over en sinusbølge. Samtidig ville det være mærkeligt, om vi i dag ikke på en eller anden måde er klogere på ørets fysiologi og opfattelsen af lyd, og på den måde er bedre stillet end Helmholtz.

5.5.1 Parameteren β

En afgørende parameter i modellen er β , hvis værdi ($=0.1$) er behæftet med stor usikkerhed. Som tidligere forklaret, er β en parameter for, i hvilken grad øret kan "fourieropløse" en lydbølge, så beats mellem sinuskurver de to pågældende frekvenser ikke kan opstå. Siden 1863 er der lavet en del empiriske undersøgelser af, hvornår dette sker, og man har indført to begreber til at beskrive dette. Når to sinusbølger ligger så tæt i frekvens, at deres påvikning af basalmembranen overlapper, siger man at de ligger på samme *kritiske bånd*. Det kritiske bånd er målt direkte på katte og indirekte på mennesker [Sethares, 1997][side 42]. Bredden af dette kritiske bånd er nogenlunde konstant ved lave frekvenser og vokser tilnærmelsesvist proportionalt med frekvensen ved høje frekvenser som vist på figur 5.7. Et andet begreb i denne sammenhæng er *JND*, der står for *Just Noticeable Difference*. Denne er den mindste skift i frekvens en lytter kan opfange. På figur 5.7 er værdien vist i det tilfælde, hvor frekvensen varieres langsomt. Ved pludselige skift er værdien endnu lavere.



Figur 5.7 Bredden af det kritiske bånd og JND (Just Noticeable Difference) er frekvensafhængig. Blandt de mørke toner er det kritiske bånd meget bredt i forhold til tonehøjden. Bemærk at JND tilnærmelsesvist er proportional med bredden af det kritiske bånd. Figuren er fra [Sethares s. 42]

Disse begreber har tydeligvis en forbindelse til vores β . Man kan således be-

tragte figur 5.3 som en illustration af det kritiske bånd, forstået sådan, at hvis beatstyrken s overstiger en vis værdi, så tilhører de to frekvenser samme kritiske bånd. Vi har betragtet β som en konstant størrelse, hvilket kun viser sig at være en god tilnærmelse for frekvenser over 500 Hz. På trods af dette, har vi alligevel valgt at arbejde med en fast β -værdi, da en fast værdi simplificerer vores model, og da det viser sig, at denne værdi kun i meget lille grad påvirker vores resultater. Grunden til, at værdien af β ikke er så vigtig for vores resultater, kan forklares ud fra figur 5.5. Projektet vil beskæftige sig med, om vi er på bunden af en kløft, eller tæt på denne bund. Som det ses på figur 5.5, er graferne omkring bunden af dalen fuldstændig sammenfaldende, hvorfor den nøjagtige værdi β har mindre betydning. En nærmere undersøgelse og bestemmelse af denne værdi kunne stadig være en oplagt forbedring af modellens præcision, men vi har valgt ikke at beskæftige os mere med dette.

Endelig bør det nævnes, at Plomp og Levelt i en artikel fra 1965 angriber Helmholtz beatteori og foreslår, at den maksimale dissonans for to sinuskurver når sit maksimum når deres frekvens afviger med ca. en fjerdedel af bredden af det kritiske bånd [Plomp and Levelt, 1965]. De nævner dog, at deres resultater stemmer godt overens med Helmholtz' ved frekvenser omkring 500 Hz. Vi har under modelopstillingen valgt at se bort fra deres resultater, hovedsageligt fordi den metode, de fremskaffer deres resultater på, er væsensforskellig fra Helmholtz'. Denne forskel tages op i diskussionen. Samtidig kommer [Kameoka and Kuriyagawa, 1961] i samme periode ud fra lignende undersøgelser til en lidt anden konklusion. De afviser at der er en sammenhæng mellem det kritiske bånd og den maksimale dissonans. Deres resultater stemmer også i nogen grad overens med beatteorien, dog viser deres dissonanskurver, at ved høje frekvenser rykkes grænsen for det mest irriterende antal beats opad, fx mod måske 70-80 beats for frekvenser over 3000 Hz. Denne undersøgelse har vi ligeledes valgt at se bort fra i modelopstillingen.

6 To toner

På baggrund af Helmholtz' arbejde, har vi i sidste afsnit opstillet beatintensitetsfunktionen f for to sinusbølger. I dette afsnit vil vi ændre fokus fra sinusbølger til toner, bestående af et antal harmoniske partialtoner, altså partialtoner der er heltallige multipla af den 1. partialtone. Vi vil således benytte os af, at vi kan opfatte en tone som en sammensætning af sinusbølger.

Vi vil arbejde videre med beatintensitetsfunktionen f som gælder for to sinusbølger, og følgelig et hvert par af partialtoner. Når vi vil beregne beatintensiteten for to toner bestående af flere partialtoner, vi vil således beregne en sum af f for alle par af de to toners partialtoner. Lad x_1 betegne en tones 1. partialtones frekvens og $\mathbf{B}' = (B'_1, B'_2, \dots)$ denne tones svingningsopskrift. Det n -te element i svingningsopskriften betegner den relative intensitet af denne tones n -te partialtone. Lad endvidere x_2 betegne en anden tones 1. partialtones frekvens i Hz og lad denne tone have svingningsopskriften \mathbf{B}'' . Da kan den summerede beatintensitet F som funktion af to harmoniske toner skrives som

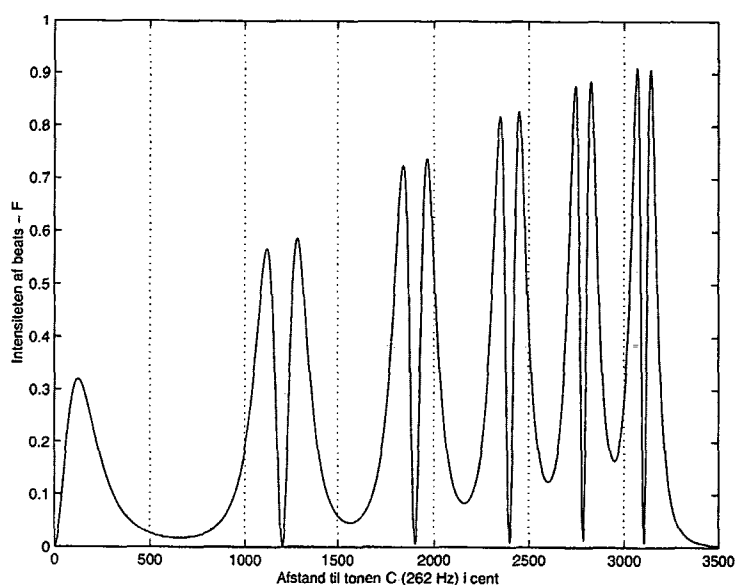
$$F(x_1, \mathbf{B}', x_2, \mathbf{B}'') = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(i \cdot x_1, B'_i, j \cdot x_2, B''_j) \quad (6.1)$$

Vi indfører nu følgende konvention: Hvis en svingningsopskrift \mathbf{B} er endelig og har m elementer, defineres denne til at være den tilsvarende uendelige svingningsopskrift, hvor elementerne fra og med nr. $m + 1$ sættes lig 0. Således er fx $\mathbf{B} = (1, 0.6, 0.8) = (1, 0.6, 0.8, 0, 0, \dots)$

6.1 En tone og en sinusbølge

Lad os antage, at vi spiller en fastholdt tone C (1. partialtone har frekvensen 262 Hz) med en svingningsopskrift, hvor de 6 første partialtoner er de eneste repræsenteret, samtidig med at de er lige kraftige. Sammen med denne tone udsendes nu en sinusbølge med variabel frekvens. Lad den fastholdte tones 1. partialtones frekvens være 262 Hz og lad $\mathbf{B}' = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ være dens svingningsopskrift. Lad endvidere x_2 være frekvensen på den variable sinusbølge med svingningsopskriften $\mathbf{B}'' = (1)$. Da kan beatintensiteten for de to toner ud fra 6.1 nu bestemmes til

$$F(262 \text{ Hz}, \mathbf{B}', x_2, \mathbf{B}'') = \sum_{i=1}^6 f(i \cdot 262 \text{ Hz}, 1, x_2, 1) \quad (6.2)$$



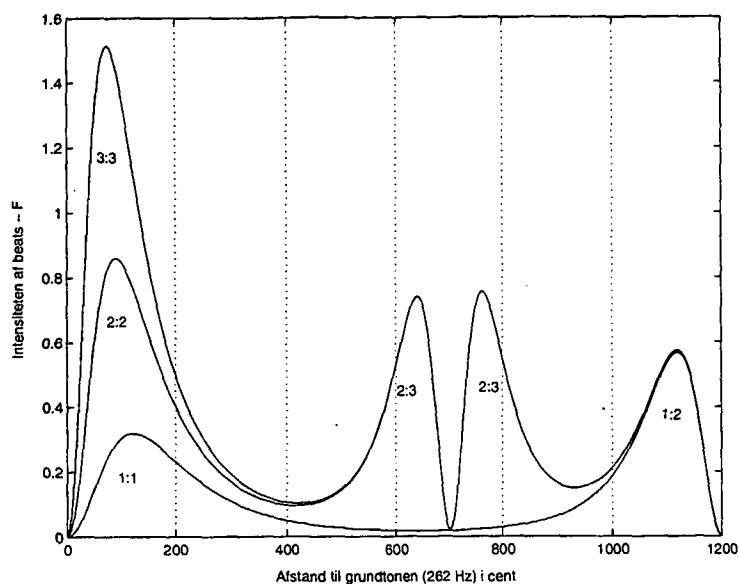
Figur 6.1 Intensiteten af beats er afbildet for fastholdt tone og variabel sinusbølge (se ligning 6.2). Bemærk hvordan der opstår en kløft omkring de intervaller, hvor sinusbølgens frekvens svarer nøjagtigt til en af den fastholdte tones partialtoner. Bakkerne bliver mere stejle når frekvensen stiger.

Hvis man følger sinusbølgen, der bevæger sig opad i frekvens, vil grafen for F ramme en bakke, falde til nul, og på ny ramme en bakke, hver gang sinusbølgen nærmer sig, rammer og fjerner sig fra en af den fastholdte tones partialtoners frekvenser (se figur 6.1). Dette princip, med at holde en tone fast, og variere den anden, bruges også i de følgende eksempler.

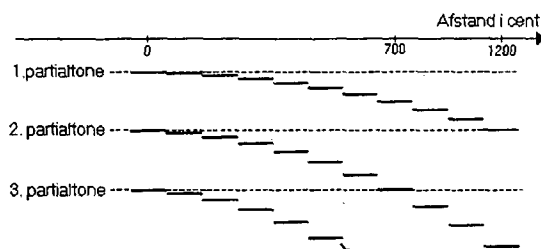
6.2 To toner

Vi kan også forestille os, at vi arbejder med toner der begge indeholder flere harmoniske partialtoner. For simpelhedens skyld vil vi begynde med at se på to toner, med en svingningsopskrift, hvor de tre første partialtoner er de eneste tilstede, samtidig med, at de er lige kraftige. Hvis vi igen holder den ene tone fast ved 262 Hz mens den anden varieres opstår nu tre minima i "kløfter" (ved 0 cent, 702 cent og 1200 cent) og to minima mellem disse kløfter (se figur 6.2). De minima der optræder i kløfter er mere interessante end de løst definerede, hvorfor vi præciserer betegnelsen kløft til minima af denne type.

Man kan anskue beatintensitet, som noget der opstår, så snart et par af de to toners partialtoner har frekvenser, der nærmer sig hinanden. For at få en fornemmelse af dette, kan man sammenligne figur 6.2 med figur 6.3. Når afstanden mellem de to toner er 0 cent, er alle partialtoner sammenfaldende, hvorfor beatintensiteten er minimal. Hvis vi nu forøger frekvensen på en af de to toner med 100 cent, og dermed denne tones partialtoner, vil de tre par af partialtoner



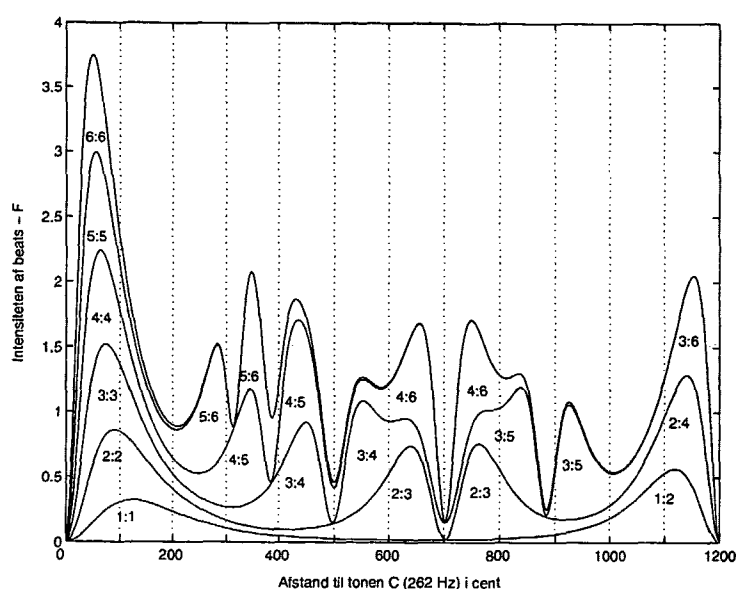
Figur 6.2 Intensiteten af beats for to toner, der begge har en svingningsopskrift $B = (1, 1, 1)$, som funktion af deres afstand, givet ved ligning 6.1. Nederste kurve svarer til $i = 1$, næste kurve til $i = 2$ plus $i = 1$, øverste til summen af $i = 3$, $i = 2$ og $i = 1$



Figur 6.3 Illustration af partialtonesammenstød for en variabel tone (markeret med linjestykker) og en konstant tone (markeret med stiplede linjer), begge med svingningsopskrift $B = (1, 1, 1)$. De to toners afstand er markeret i cents.

nu begynde at producere beats. På figur 6.2 er dette illustreret ved tre akkumulerede bakker, i hvilke to tal markerer, hvilke partialtoner, der beater med hinanden. Når afstanden mellem de to toner vokser, vil intensiteten af beats aftage indtil den øverste tones anden partialtone ved en afstand på ca. 600 cent begynder at beate med den fastholdte tones tredje partialtone (se figur 6.3). Hvis de to toner har forholdet $\frac{3}{2} \approx 702$ cent, vil den øverste tones anden partialtone have nøjagtig samme frekvens som den nederste tones tredje partialtone, hvorfor der da ingen beats vil være mellem de to partialtoner.

Hvis vi nu istedet forestiller os, at de to toner begge havde en svingningsopskrift $B = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, hvor netop de seks første partialtoner er tilstede og med



Figur 6.4 Intensiteten af beats for to toner, der begge har en svingningsopskrift $B = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, som funktion af deres afstand. Ved sammenligning med figur 6.2 ses det, at den variable tones tredje partialtone nu også beater med den fastholdtes 4, 5 og 6 partialtone. Bemærk hvordan der er minimum nær de centværdier, der svarer til de *rene intervaller*

samme styrke, får beatintensitetskurven et noget mere avanceret udseende (se figur 6.4). Beatintensiteten ses at have flere af de minima, vi kalder for kløfter, end før. Man kan stadig genkende kløfternes karakteristiske lidt flade bund, ligesom der altid er to omtrent lige store bakker omkring en kløft. På bakkerne omkring kløfterne på figur 6.4 er markeret med numre, hvilke af de to toners partialtoner, der er skyld i den høje beatintensitet. Man kan bruge disse bakker til at forstå de rene intervaller, vi har beskrevet i afsnit 2.4. Således kan man fx forstå den rene terts, altså toneforholdet $\frac{5}{4}$ (=386 cent), som det forhold, hvor den nederste tones femte partialtone er sammenfaldende med den øverste tones fjerde partialtone. På grafen for beatintensitet er kommet dette til udtryk ved den tydelige kløft ved 386 cent. På samme måde svarer en hver af de andre kløfter til de forskellige rene intervaller (se figur 2.5). Man kan på denne måde opfatte de rene intervaller som lokale minimaer for beatintensiteten.

6.3 Valg af standard

I det foregående eksempel har vi taget udgangspunkt i en lyd med netop 6 partialtoner, der alle var lige kraftige. Svingningsopskriften varierer imidlertid meget fra instrument til instrument (se figur 3.2 og 3.3). Og den kan ofte variere voldsomt, afhængigt af hvordan man bruger instrumentet. Fx er stedet for guitarstrengens anslag, hårdheden af anslaget på klaveret, den vokal man vælger

osv. altafgørende for tonens svingningsopskrift. Endelig har vi beskrevet, hvordan flere og kraftigere partialtoner kan dannes i øret ved kraftigere lydintensitet, hvorfor lydstyrken pludselig også er en faktor man bør tage i betragtning, hvis man ønsker en mere præcis funktion for beatintensitet. Man kunne derfor forestille sig, at vi skulle til at arbejde med en beatintensitet, hvor partialtonernes bidrag skal vægtes med lydstyrken, med det valgte instrument og det valgte anslag. Der er ingen tvivl om, at det ville være en mere eksakt metode.

I dette projekt har vi imidlertid valgt at lave den idealisering, at alle instrumenter har svingningsopskriften $B = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Der er flere grunde til dette valg. Først og fremmest gør det opgaven mindre kompleks. Dernæst giver det os mulighed for at kunne frigøre vores resultater fra det pågældende instrument (og det anslag og den lydstyrke), resultaterne ellers ville være bundet til. Valget af en standardiseret mål har været oplagt i en rapport som denne, hvor vi har ønsket at studere stemninger generelt. Den sidste og vigtigste grund til at vælge en standard er, at det viser sig, at grafen for funktionen F ikke ændrer sig særlig meget, hvis man kun laver moderate ændringer i svingningsopskriften. Alle store kløfter på dissonanskurven er bevaret, ligesom forholdet mellem de forskellige hældninger på grafen i disse kløfter også er nogenlunde konstant. Og da disse to forhold er de vigtigste for vores resultater, overstiger gevinsten ved at indføre det standardiserede mål rigeligt ulemperne. Derfor vil vi resten af denne rapport beskæftige os med denne standardiserede beatintensitet. Vi vil således omdefinere funktionen F for beatintensitet af to toner til en standardiseret funktion. Herved får vi

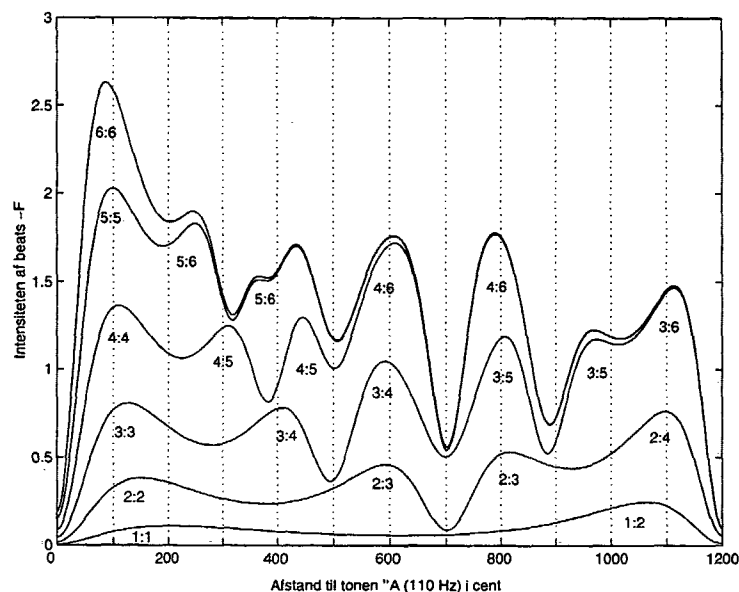
$$F(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 f(i \cdot x_1, j \cdot x_2, 1) \quad (6.3)$$

Vi har således defineret F til at være en sum af 36 led, hvor hvert led repræsenterer en beregning af f for to partialtoner.

6.4 Dybe og lyse toner

Det er velkendt blandt pianister, at man i de dybe oktaver meget sjældent benytter intervaller mindre end en kvint. Hvis man har et klaver til rådighed er det nemt at høre hvorfor. Prøv fx at spille en stor tert i en af de lyse oktaver. Lyden er ren og fin, og et musikalsk trænet øre kan straks høre, hvilket interval der er tale om. Hvis man igen spiller en stor tert, men denne gang i den dybe ende af klaveret, er oplevelsen en helt anden. Nu lyder intervallet uldent og skurrende, og det er de færreste som kan bestemme, om klaveret overhovedet er stemt. Grafen for beatintensitetsfunktionen F har også et noget andet udseende blandt de dybe toner, end for den midterste oktav, startende ved 262 Hz, hvis grafer vi indtil videre har set på (se figur 6.5). Alle bakkerne omkring kløfterne er nu så brede, at de stort set eliminerer flere af de nabokløfter, vi så på figur 6.4. De eneste kløfter, som er tydelige og har en nogenlunde dybe, er unisonen

(ca. 0 cent) kvinten (ca. 702 cent), den store sekst (ca. 890 cent) og oktaven (ca. 1200 cent).

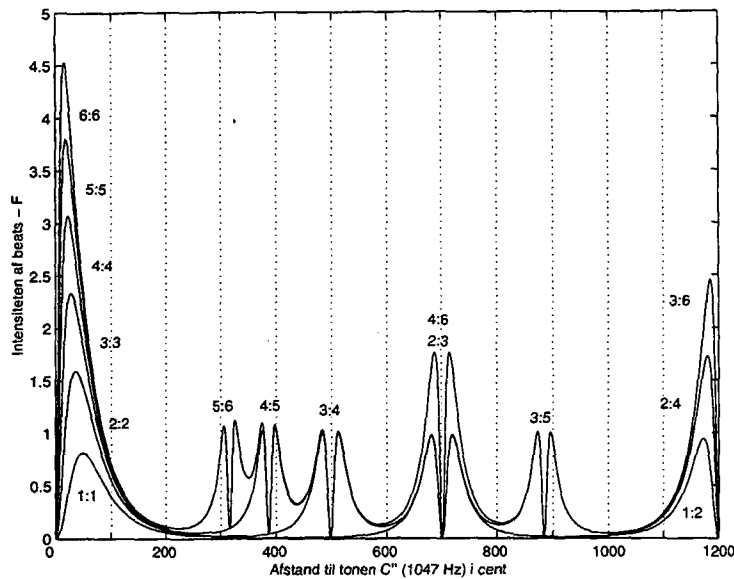


Figur 6.5 Graf for beatintensitetsfunktionen med udgangspunkt i en meget dyb tone. Bemærk at bakkerne omkring disse dale er mindre stejle end før, hvilket indikerer at intervallerne er mindre skarpt definerede.

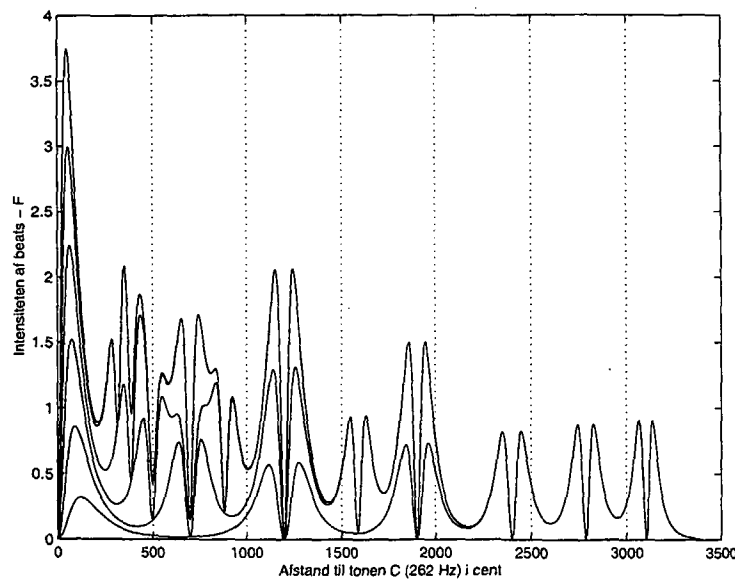
Hvis man omvendt tager udgangs punkt i en meget lys tone, vil man opleve at kløfterne bliver smallere end før. Fx vil tertsen i den lige stemning (400 cent) nu ligge omtrent ved et maksimum for beatintensiteten (se figur 6.6).

6.5 Store intervaller

Indtil videre har vi kun sammenlignet toner henover en oktav. Der kan imidlertid sagtens forekomme intervaller i et musikstykke, der er større end en oktav. På figur 6.7 ses, hvordan beatintensiteten generelt er lavere, når vi har med store intervaller at gøre. Dette er tilfældet, da der er færre og færre partialtonesammenstød, når tonerne kommer langt fra hinanden. Hvis intervallet bliver større end 3500 cent vil man opleve, at tonerne ikke længere blander sig. Man kan således, hvis tonen kun indeholder de første 6 partialtoner og afstanden overstiger 3500 cent kun i meget lille grad høre, om intervallet kan udtrykkes i heltalsforhold (er konsonant). Hvordan beatintensitetsfunktionen varierer med udgangsfrekvensen og intervallets størrelse er ligeledes illustreret på figur 6.8.



Figur 6.6 Beatintensitetskurve med udgangspunkt i en meget lys tone. Alle kløfterne er nu smalle, hvilket gør, at tonerne er mere præcist definerede.

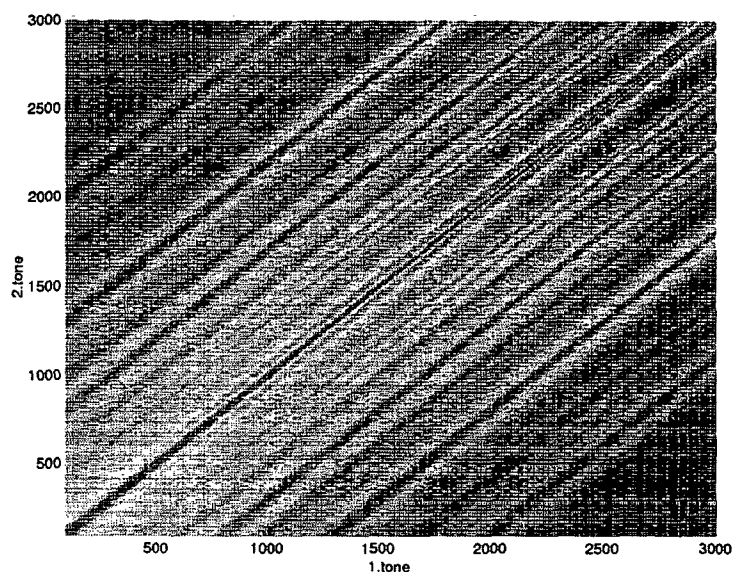


Figur 6.7 Beatintensitetskurve, hvor meget store intervaller er medtaget. Der er længere mellem kløfterne, når afstanden bliver stor.

6.6 Addition af beatintensitet

I dette kapitel har vi ukritisk adderet beatintensiteter fra sinusbølger til toner. Men er det rimeligt at addere disse? Er det en akkumulativ størrelse, eller er det

snarere et enten-eller-fænomen. Vi har valgt at gøre som Helmholtz og addere størrelserne. Dette er valgt ud fra et syn på beatintensitet som en fysisk størrelse. Med dette syn undgår vi inden for begrebets rammer, at tage stilling til, om den sidste ekstra beatintensitet betyder lige så meget for opfattelsen af dissonans som den første. Man kunne således sagtens forestille sig, at vores oplevelse ikke generes i samme grad af de første og de sidste beats.



Figur 6.8 Beatintensitet afhængig af to toners afstand til 100 Hz i cent. I de lyse områder har funktionen en høj værdi, og intervallet mellem de to toner vil have en høj beatintensitet. Man kan betragte de fleste af de figurer, der er brugt i dette afsnit som skæringer af denne overflade, hvor man, med udgangspunkt i diagonalen, har holdt en af tonernes frekvenser konstant.

7 Akkorder

I foregående afsnit har vi set på harmonien først mellem to sinusbølger, siden mellem to toner, og et mål for deres beatintensitet er nu defineret ved F (givet ved ligning 6.3). Indtil dette punkt har vi i store træk gennemgået det arbejde Helmholtz allerede udførte i midten af det nittende århundrede. I dette kapitel vil vi imidlertid gå længere end Helmholtz, stå på egne ben, og forsøge at bruge beatintensitetsfunktionen til at evaluere stemninger og samklange bestående af mere end to toner. Arbejdet i dette og det følgende kapitel vil altså have et mere selvstændigt præg.

7.1 Beatintensitet for akkorder

Vi fik i forrige kapitel defineret beatintensiteten F for to toner. Det hænder imidlertid ofte, at man i musikken har lyst at bruge mere fyldige klangflader, hvorfor man sætter både 3, 4, 5 eller flere toner sammen. En sådan sammensætning af toner kaldes en akkord. Vi vil i det følgende betegne en sammensætning af n toner for en n -klang, og en sammensætning af et vilkårligt antal toner for en samklang. En treklang, dvs. en sammensætning af tre toner, kan anskues som en sammensætning af tre par af toklange. Og det er på denne måde vi vil tildele en given treklang en intensitet af beats. De enkelte toner sammenlignes altså kun parvis. I en treklang evalueres først den nederste tones forhold til hver af de to andre toner, hvorefter de to øverste toners indbyrdes forhold evalueres. På samme måde kan en firklang anskues som en sammensætning af seks toklange. Generelt gælder, at antallet N af toklange i en n -klang er

$$\begin{aligned} N(n\text{-klang}) &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ hvor } n \geq 2 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Vi har valgt at definere intensiteten af beats for en n -klang som den gennemsnitlige intensitet af de to-klange, der indgår i akkorden. Lad $\{x_1, x_2, \dots\}$ betegne frekvenserne på de toner, som indgår i n -klangen og lad K betegne alle par af to-klange i n -klangen ($\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), \dots\}$). Da får vi *beatintensiteten for en n -klang* G til

$$G(x_1, x_2, \dots) = \frac{\sum_{i=1}^N F(K_i)}{N} \quad (7.2)$$

Har funktionen G en meget høj værdi, vil akkorden lyde urolig og dissonant. Har G en meget lav værdi, vil akkorden lyde rolig og konsonant. Vi vil i det følgende gennem to eksempler give et indtryk af, hvordan funktionen G kan bruges til at evaluere beatintensiteten for forskellige stemninger.

7.1.1 Eksempel A: Treklangen C-E-G

Denne treklang opdeles i tre par af toklange: CE, EG og CG. Vi vil regne i enheden cent og vælger den nederste tone C (261.6 Hz) som udgangspunkt. Med lige stemning er C nu defineret til 0 cent, E til 400 cent og G til 700 cent. Nu kan intensiteten af beats for samklangen (givet ved G) beregnes til

$$\begin{aligned} G(0, 400, 700) &= \frac{F(0, 400) + F(0, 700) + F(400, 700)}{3} \\ &= \frac{1.21 + 0.17 + 1.19}{3} = 0.8589 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Det ses af udregningen, at hovedparten af beatintensiteten kommer fra $F(0, 400)$ (stor tert) og $F(400, 700)$ (lille tert) mens $F(0, 700)$ (kvinten) kun medfører meget lidt beatintensitet.

Vi kunne i stedet for have valgt at evaluere denne akkord i pythagoræisk stemning. I denne stemning er C igen 0 cent, E 408 cent og G 702 cent. Da bliver beatintensiteten istedet

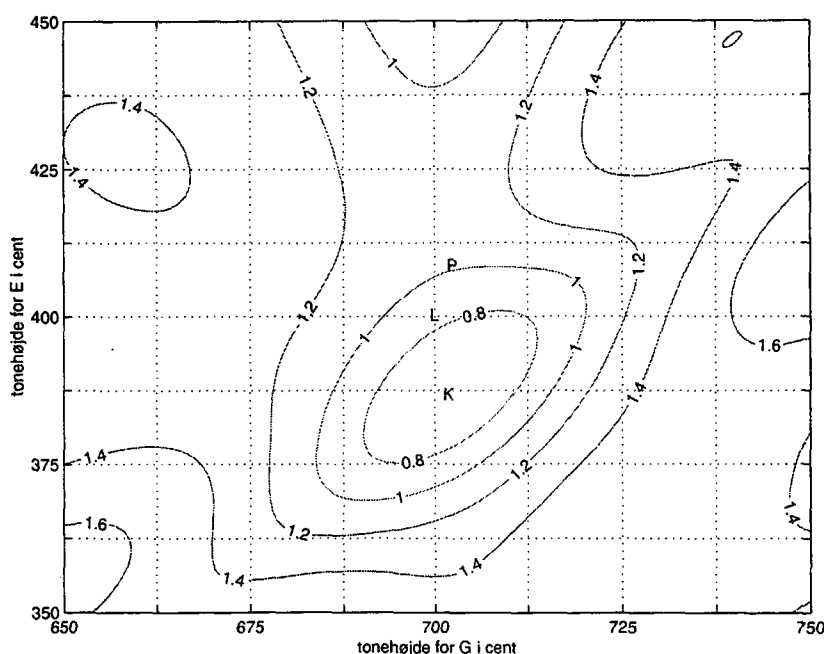
$$\begin{aligned} G(0, 408, 702) &= \frac{F(0, 408) + F(0, 702) + F(408, 702)}{3} \\ &= \frac{1.49 + 0.16 + 1.36}{3} = 1.0028 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Hvis man sammenligner denne udregning med den foregående, ses det, at beatintensiteten for hver af de to tertser (intervallerne på henholdsvis ca. 300 og ca. 400 cents) tydeligt er vokset, mens beatintensiteten for kvinten $F(0, 702.0)$ er faldet marginalt. Beatintensiteten for treklangen ses at være vokset betydeligt.

Endelig kan akkorden evalueres i en tempereret stemning som fx Kirnbergerstemningen. I denne stemning er C 0 cent, E 386 cent, og G 702 cent. Således får vi nu

$$\begin{aligned} G(0, 386, 702) &= \frac{F(0, 386) + F(0, 702) + F(386, 702)}{3} \\ &= \frac{0.9678 + 0.16 + 0.70}{3} = 0.6110 \end{aligned} \quad (7.5)$$

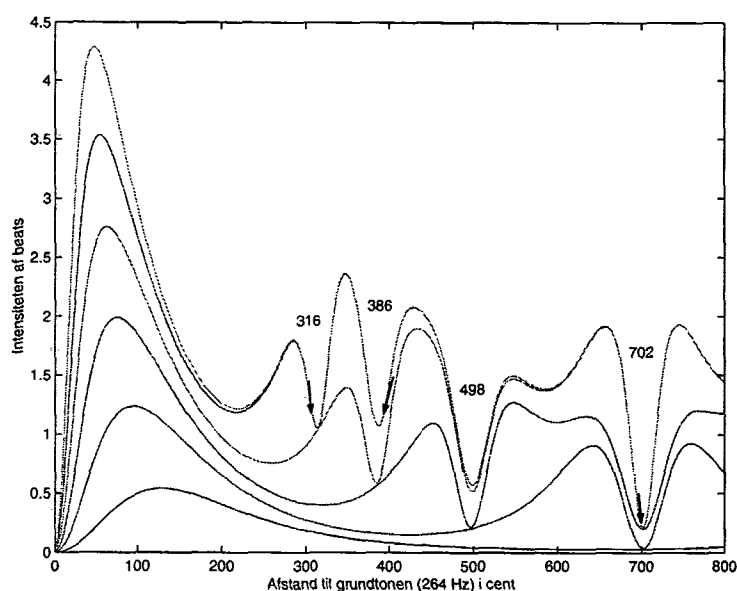
Vi kan altså konstatere, at treklngen, bestående af CEG har en lavere beatintensitet i Kirnbergerstemningen (se 2.7), end i lige stemning og pythagoræisk. Med udgangspunkt i ovenstående kan man tegne niveaukurver, der viser, hvordan beatintensiteten varierer, når vi med fastholdt C ændrer værdien for E og G (se figur 7.1). På figuren ses, at Kirnbergerstemningen giver et minimum for G, når treklang CEG skal evalueres. At Kirnbergerstemningen giver dette minimum, hænger sammen med, at de tre intervaller CE, CG og EG i Kirnbergerstemningen alle er *rene*, og følgelig ligger i bunden af deres respektive kløfter. Man kan således forstå et sådant minimum som om, at beatintensiteten for alle akkordens to-klange alle ligger minimum (se figur 7.2).



Figur 7.1 Niveaukurver for akkorden CEG's beatintensitet G som funktion af centværdierne for tonerne E og G. På figuren er markeret ved (L)ige stemning (400,700), (P)ythagoræisk (408,702) og (K)irnberger (386,702). Det ses at K ligger nær et minimum for beatintensiteten, hvorfor den har størst konsonans.

7.1.2 Eksempel B: Treklngen C#-F-G#

Vi vil i dette eksempel flytte udgangstonen til C# (277.2 Hz). Den akkord vi nu vil se på, C#-F-G#, svarer til akkorden fra før, CEG, alle toner er blot hævet med en halvtone. Analogt med eksempel A kan vi for lige stemning hurtigt beregne værdien af funktionen G til



Figur 7.2 Intensiteten af beats for CE, CG og EG. Pilene markerer bevægelsen fra lige stemning hen mod minimum for det pågældende interval. Intervallet på 3 halvtoner (ca. 300 cent) fra E til G burde egentlig være tegnet på en separat kurve med E som grundtone, men da forskellen på disse to kurver er meget lille, fx er alle minima bevaret, er denne bevægelse alligevel taget med på grafen.

$$\begin{aligned}
 G(0, 400, 700) &= \frac{F(0, 400) + F(0, 700) + F(400, 700)}{3} \\
 &= \frac{1.17 + 0.16 + 1.19}{3} = 0.8432 \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Værdierne ses at afvige marginalt fra værdierne med akkorden CEG. Med pythagoræisk stemning får vi værdien af G til

$$\begin{aligned}
 G(0, 408, 702) &= \frac{F(0, 408) + F(0, 702) + F(408, 702)}{3} \\
 &= \frac{0.14 + 1.35 + 1.47}{3} = 0.9889 \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

der ligeledes ses kun at afvige marginalt med resultatet fra eksempel A. Det er anderledes med Kirnbergerstemningen. Her har tonerne $C\#FG\#$ et andet forhold til hinanden, i forhold til treklangen CEG. Således er $C\#$ 0 cent, F 408 cent og $G\#$ 702 cent, hvilket svarer til den pythagoræiske stemning (7.7). Vi kan altså konstatere, at mens beatintensiteten for en treklang som CEG i lige stemning er nogenlunde konstant, hvis vi transponerer tonerne et par halvtoner op eller ned, så varierer den voldsomt med Kirnbergerstemningen. Hvis vi nu

antager, at der er en stor sammenhæng mellem beatintensiteten og tonearternes forskellige klangfarver, som beskrevet i afsnit 2.6, så giver vores matematiske model fx mulighed for at beskrive forskelle og ligheder mellem tonearterne ved hjælp af funktionen G .

7.2 Addition af beatintensitet

I dette afsnit har vi taget springet fra en to-klang til n -klang og defineret beatintensiteten for en n -klang som et gennemsnit af beatintensiteten for alle par af to-klange. Men hvorfor vælges gennemsnit fremfor blot at tage summen, som da vi tog springet fra sinusbølger til toner? Grunden til dette er, at vi har valgt at se på beatintensiteten i forhold til, hvor mange to-klange vi modtager, ud fra den antagelse, at kraftig ikke-beatende toner, så at sige, kan overdøve beats, man ellers ville have hørt. Valget bygger på egne iagttagelser og er som sådan ikke videnskabeligt underbygget. Vi vil dog, blandt andet for at mindske betydningen af denne antagelse, i næste kapitel vælge at analysere en sang, der kun består af 5-klange, hvorfor den i forhold til denne problemstilling er "vægtningsneutral".

8 Et musikstykke

Vi har i foregående kapitel defineret beatintensitetsfunktionen G for en vilkårlig samklang. Vi har endvidere set, hvordan funktionen kan evaluere forskellige stemningers indflydelse på intensiteten af beats for denne samklang. I dette kapitel vil vi anskue et musikstykke som en familie af samklange og evaluere intensiteten af beats i musikstykket som helhed.

8.1 Opstilling af funktionen H

Man kan anskue et givent musikstykke som bestående af m samklange. Lad \mathbf{y}_i betegne de toner, der indgår i musikstykkets i -te samklang, og lad $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}$ betegne mængden af samklange. Vi kan nu opstille en funktion for den samlede beatintensitet af samklange gennem et helt musikstykke:

$$H(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^m G(\mathbf{y}_i) \quad (8.1)$$

Som det fremgår af ligning 8.1, har vi valgt at lade funktionen H være en simpel sum af de samklange, der indgår i musikstykket. Nu er det imidlertid sådan, at samklange i det meste musik varierer voldsomt i varighed og form. Og en samklang med dobbelt varighed af en anden samklang bør vel vægtes højere. At foretage denne vægtning er imidlertid en stor opgave, som ikke har kunne nås inden for dette projekts rammer. Vi vil derfor arbejde videre med den simple sum, der trods alt stadig vil være en tilnærmelse til en evt. vægtning.

8.1.1 Dimensionsbegrænsning

I et musikstykke optræder almindeligvis et stort antal forskellige toner, typisk i området mellem "C og C'", hvorfor \mathbf{Y} , der var mængden af samklange, kan vise sig at indeholde rigtig mange størrelser. Funktionen H kan således, hvis musikstykket er kompliceret, være en funktion af rigtig mange variable. For at reducere problemet, indføres følgende konvention: Lad $T = \{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, H\}$ betegne mængden af toner i den midterste oktav. Til hver af elementerne i T er tilknyttet en frekvens. Lad endvidere alle andre toner være defineret ud fra disse i rene oktavforhold på 2:1. På den måde får vi fx at frekvensen $D'' = D \cdot 2^2$ og $C' = C \cdot 2^{-1}$. Vi har således

reduceret det maksimale antale variable i Y til de 12 variable samlet i T , hvorfor Y nu kan betragtes som en funktion af T .

8.1.2 Er H differentiabel?

Ud fra et optimeringsperspektiv er det interessant, i hvilken udstrækning funktionen H er differentiabel. Vi vil derfor undersøge funktionen H lidt nærmere. Lad os først erindre, at H er en sum af beatintensiteter for n -klange, hvor hvert led er repræsenteret ved funktionen G (se ligning 7.2). Hver af disse beatintensiteter G kan igen repræsenteres ved en sum af beatintensiteter for to-klange givet ved vores standardiserede funktion F (se ligning 6.3). Og endelig kan hvert F betragtes som en sum af beatintensiteter for par af sinusbølger givet ved f (se ligning 5.32). Da vi har valgt en standard hvor alle toner har en svingningsopskrift med seks lige kraftige partialtoner, kan vi endvidere fastslå, at hver funktion F er en sum af netop 36 beatintensiteter for sinusbølger givet ved f , en for hver af den ene tones partialtoner med hver af den andens. Hvis et musikstykke har m samklange og $N(y_i)$ betegner antallet af to-klange i den i -te samklang er antallet af led i H er givet ved:

$$\text{antal led} = 36 \sum_{i=1}^m N(y_i) \quad (8.2)$$

Hvert af disse led har jf. valget af standard følgende udseende:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\beta^2 \left(\frac{35}{x_1+x_2} \right)^2 \left(\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2} \right)^2}{\beta^2 + 4\pi^2 \left(\frac{\left(\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2} \right)^2 + 2 \frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}}{1 + \frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}} \right)^2 \left(\left(\frac{35}{x_1+x_2} \right)^2 + \left(\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2} \right)^2 \right)^2} \quad (8.3)$$

Da x_1 og x_2 betegner to partialtoners frekvenser, må de begge være positive tal. Og da β ligeledes er positiv, afslører et nærmere eftersyn af ligning 8.3, at denne funktion er fri for singulariteter. Og da f ydermere kun indeholder en sammensætning af de 4 elementære regningsarter, må den endvidere være vilkårligt ofte kontinuert differentiabel. Da H er en endelig sum af sådanne funktioner, må denne ligeledes være vilkårligt ofte differentiabel.

8.2 Eksempel C: Et musikstykke

Stykket vi i dette for projektet centrale eksempel har valgt at tage udgangspunkt i, er J. S. Bach's Praeludium i C-dur fra værket "Wohltemperierte Klavier" [Bach, 1960]. Andre kender stykket som Ave Maria. Det var dette musikstykke, hvis skønhed i Kirnbergerstemningen, var motivation for projektet. En anden grund til at vælge dette stykke er, at der i de første 32 af ialt 35 takter

indgår en samklang på samme form med netop fem toner i hver, hvorfor man mere uproblematisk end ellers, kan bruge funktionen H , der er en simpel sum, og ikke en vægtning af de forskellige samklange efter varighed og form. Vi har valgt at optimere netop disse 32 5-klange og se bort fra de sidste 3 takter.

Vi kan nu evaluere beatintensiteten for musikstykket givet ved $H(Y(T))$. Hvis vi sætter T lig enten (L)ige, (P)ythagoræisk eller (K)irnbergerstemningen, får vi således

$$H(Y(L)) = 23.2498 \quad (8.4)$$

$$H(Y(P)) = 24.8536 \quad (8.5)$$

$$H(Y(K)) = 22.0610 \quad (8.6)$$

Det ses tydeligt, at beatintensiteten H varierer med stemningen. Den er således højest i pythagoræisk og lavest i Kirnbergerstemningen og omtrent midt i mellem i lige stemning.

8.2.1 Optimering

Nu er det sådan at fx tonen E bruges meget i dette musikstykke, hvorfor værdien af $H(Y(T))$ vil variere, hvis man "stemmer" sit E, og dermed bl.a. tonerne 'E og E', op eller ned. Det samme gælder for stort set alle andre toner. Vi vil i det følgende anskue problemet som et optimeringsproblem, hvor vi ønsker at finde minimum for $H(Y(T))$ i det 12-dimensionale rum, som de tolv toner i $Y(T)$ udspænder. Da tonerne er relative, og vi ikke ønsker at gøre musikstykket lysere eller mørkere, kan vi imidlertid vælge en referencetone (vi vælger C), som ikke rykker sig. Herved er problemet reduceret til 11 dimensioner. Vi bør endvidere sikre os, at tonerne ikke bevæger sig for langt væk fra udgangspunktet, at der bliver tale om en anden klang end den i stykket definerede (at en lille terts bliver til en stor terts osv.) For at sikre os, at klangene bevarer deres definition, definerer vi domænet for den enkelte tone til ± 20 cent fra udgangstonen i lige stemning.

Inden vi kaster os ud i selve optimeringen vi kort anskue funktionen $H(Y(T))$ for dette musikstykke. Denne viser sig at være en ret omfangsrig sum, der jf. ligning 8.2 indeholder $36 \cdot 32 \cdot 10 = 11520$ led, hvilket umiddelbart er et uoverskueligt antal. Samtidig er der tale om en vilkårligt ofte differentiabel funktion, der virker rimelig håndterlig. Det er således oplagt at minimere funktionen ved hjælp af en computer. Optimeringen er foretaget ved hjælp af det matematiske værktøj Matlab.

8.2.2 Matlabs funktion *fmincon*

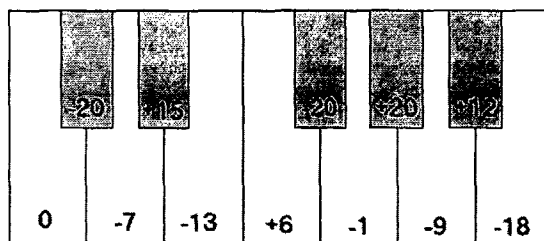
I en optimeringspakke til Matlab findes programmet *fmincon*, der er designet til at finde minimum af en funktion af flere begrænsede (constrained) variable.

Og det er netop et sådant problem vi har med at gøre. Programmet betjener sig af en hel række optimeringsalgoritmer, og vælger ved hvert trin i optimeringen ud fra funktionens variation, hvilken metode næste trin skal foretages med. Når Matlab løser dette problem vælger programmet to metoder. Først bruges matlab-algoritmen *line search* til at komme tæt på minimum, hvorefter programmet skifter til en ny algoritme, hvor den vha. en metode kaldet Hessian-modified lokaliserer dette minimum mere præcist. Der er her sandsynligvis tale om en optimeringsalgoritme, der bygger på Newtons metode [Peressini et al., 1988].

Det tager ca. 3 minutter for en Pentium IV 2.4 GHz processor at finde frem til en løsning, hvis vi vælger lige stemning som udgangspunkt. Da det kan være svært at overskue effektiviteten af dette program, og sikkerheden for, at vi vitterlig har fundet det globale minimum, har vi kørt optimeringen fra forskellige begyndelsespunkter. Hvis vi fx vælger at starte i det "laveste hjørne" af udfaldsrummet, dvs. der hvor alle variable er sat til den lavest tilladte værdi. Det lykkedes imidlertid programmet at finde samme minimum, blot skal der nu bruges 6 minutter. Vi har ligeledes foreslået optimeringsprogrammet at starte i det øverste hjørne af udfaldsrummet. Resultatet er efter 6 minutter igen det samme. Der er altså tilsyneladende et globalt minimum for denne funktion, og vi har altså lokaliseret den stemning, der giver den laveste samlede beatintensitet sangen igennem.

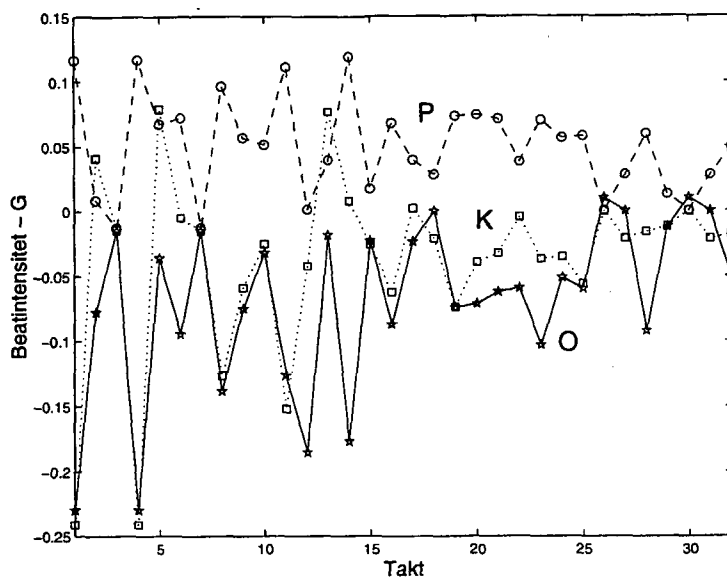
8.3 Den "optimale" stemning

Lad os endelig se nærmere på den "optimale" stemning vi har fundet. Den fundne løsning ses at variere kraftigt fra lige stemning (se figur 8.1). Flere af tonerne ses således at være helt ude på den maksimalt tilladte afvigelse fra lige stemning på 20 cent. Modellen anbefaler altså en stemning der ligger et godt stykke fra den lige stemning, som er den vi er vant til. At nogle toner rammer den maksimale afvigelse tyder ligeledes på, at denne grænse er en barriere for en yderligere minimering af beatintensiteten. Den store afvigelse fra lige stemning kan være problematisk i henhold til opfattelsen af harmoni. Dette tages op i diskussionen.



Figur 8.1 Den optimale stemning angivet som differensen i cent i forhold til lige stemning.

Funktionsværdien for dette minima er 20.9100, der ses at være en del lavere end de andre stemninger vi har evalueret H med. På hvilken måde beatintensiteten bliver formindsket sangen igennem fremgår af figur 8.2.



Figur 8.2 Differens i beatintensiteten (givet ved G) takt for takt i forhold til lige stemning. På figuren er vist (P)ythagoræisk, (K)irnberger og (O)ptimal stemning.

8.4 Opsummering

I dette kapitel har vi set, hvordan vi kan opstille en funktion for beatintensitet for et musikstykke. Gennem et illustrativt eksempel har vi set, hvordan musikstykkets beatintensitet varierer med stemningen, ligesom vi har vist, hvordan man ved en optimering kan finde et minimum for beatintensiteten. Vi har altså gennem vores model fundet frem til den stemning, der har størst konsonans.

Del III

Afrunding

9 Diskussion

Vi har i dette projekt været vidt omkring. Vi har set på stemninger, set på toner og perception, opstillet kriterier for den relative konsonans af sinusbølger for derigennem at opstille en model for konsonans for en given sang. Efterfølgende har vi brugt modellen på J. S. Bachs Praeludium i C-dur, vi har fundet den stemning, der har den største konsonans.

Målet med denne diskussion er at opsummere, hvad vores model giver indblik i, ligesom vi ønsker at vende tilbage til udgangspunktet og diskutere, hvorvidt modellen kan beskrive oplevelsen af musikalsk konsonans.

9.1 Fravær af beats og konsonans

Den første og største antagelse i modellen er, at konsonans bygger på fravær af beats. At beats er essensen af det, vi opfatter som dissonans. Denne antagelse er grundlæggende for hele projektet, men er ikke behandlet grundigt. Man kan sige, at vi har undgået den ved fra starten at definere konsonans som fravær af beats, men er denne definition rimelig? Der er der grund til at være kritisk. Specielt fordi forskning udført i første halvdel af 1960'erne sætter spørgsmålstegn ved beatteorien. Således opstiller de to forskerpar Plomp og Levelt samt Kameoka og Kuriyagawa på baggrund af nogenlunde ens forsøg, forskellige alternative kurver for dissonans, og løsriver dermed beatintensitet fra konsonansbegrebet. De to undersøgelser isøvrigt lidt forskellige resultater viser sig at være i overensstemmelse med Helmholtz ligning ved frekvenser omkring 500 Hz, hvorfor undersøgelserne af forfatterne betegnes som en delvis bekræftelse af Helmholtz beatteori, men også som en forbedring [Plomp and Levelt, 1965] [Kameoka and Kuriyagawa, 1961].

Disse to undersøgelser, der nok er de grundigste, der er udført omkring oplevet dissonans af sinusbølger, er imidlertid væsensforskellige fra Helmholtz' undersøgelser. Forskellige metoder, forskelligt fokus og forskellige mål er blot et par af de ting, som adskiller disse to undersøgelser fra Helmholtz' arbejde. Helmholtz har et fysisk udgangspunkt, hvor det eneste ikke-fysiske element er iagttagelsen af (eller holdning om) at 30 til 40 beats er værst for konsonansen. Således er byggestenene i Helmholtz' teori fysiske og principielt målbare størrelser. Fordelene ved dette er, at resultatet bliver relativt objektivt, frigjort fra ukendte psykologiske faktorer.

Undersøgelserne fra 1960'erne er gået helt anderledes til værks. Fokus har i højere grad været at give en præcis bestemmelse af den oplevede konsonans af

sinusbølger, mens den fysiske forklaring på, hvorfor et interval er konsonant, træder i baggrunden. Man har endvidere ikke foretaget samme skelnen som Helmholtz mellem begreberne konsonans og musikalsk konsonans, men betragtet konsonans som et mere vidtfavnende begreb. I det følgende vil vi i parentes bemærke vores skelnen mellem de to begreber. Udgangspunktet for artiklerne har, ligesom for Helmholtz, været opfattelsen af, at toner kan opfattes som en sammensætning af sinusbølger. Man har derfor valgt at fokusere på den oplevede (musikalske) konsonans af par af disse. Metoden har været at bede et antal testpersoner bedømme en serie af sinusbølger, som værende mere eller mindre vellydende (musikalsk konsonante). Testpersoner (i begge artikler mellem 10 og 20 personer) har således givet forskellige par af sinusbølger karakterer efter, om de syntes, de gav en oplevelse af konsonans. Undersøgelserne bygger på subjektive udsagn, der naturligt varierer, men også viser nogen overensstemmelse. Ved statistisk behandling af disse data har man nu bestemt en gennemsnitlig (musikalsk) konsonansskurve for to sinusbølger ved forskellige udgangsfrekvenser.

Man kan med rette diskutere, om sådanne kurver ikke er tættere på "virkeligheden" end Helmholtz beatintensitetskurver, der i så fald er reduceret til en tilnærmelse til disse kurver. Det ville afgjort have været en oplagt mulighed, at tage udgangspunkt i sådanne statistisk bestemte dissonanskurver. For, kunne man spørge, ville modellen på den måde ikke komme til at ligge så tæt på sit mål som muligt: Så præcist som muligt at kunne beskrive *oplevelsen* af en given klang?

Som bekendt har rapporten taget udgangspunkt Helmholtz' beatintensitet, og ikke dissonanskurver tegnet på baggrund af statistisk behandling af svarene på spørgsmål om folks perception af to sinusbølger. Grunden til dette valg, vil fremgå af det følgende.

9.2 Adskillelse af konsonans og harmoni

I dette projekt har vi valgt at foretage en klar skelnen mellem konsonans og harmoni. Det burde således være klart, at vores matematiske model, der bygger på intensiteten af beats, er fysisk funderet. Omvendt har vi begrænset dens virkningsfelt til kun at være konsonans, hvorfor oplevelsen af musikalsk konsonans ikke kan bestemmes entydigt ud fra denne model. Omvendt er det en enorm styrke at have en model på et fysisk grundlag. På den måde bliver vi i stand til at skelne mellem, hvad der er fysiske fænomener, og hvad der er kultur og subjektive meninger. I undersøgelserne med testpersonerne har man, i sagens natur, fået blandet forskellige begreber sammen uden mulighed for at skelne mellem, hvad der er harmoni (kulturbestemt og knyttet til den opfattede pitch) og hvad der er konsonans (den fysiske størrelse beatintensitet). Denne sammenblanding af forskellige fænomener forringer evnen til at diskutere en given stemnings kvaliteter, hvorfor vi mener, at vi har brug for at kunne diskutere de to begreber adskilt af hinanden. Samtidig åbner denne skelnen mulighed for

at gå et niveau dybere ned i spørgsmålet om musikalsk konsonans, hvorved fx grundlagsdiskussioner vil have større tyngde.

I meget af den nyere forskning på dette område kommer denne holdning ikke til udtryk. Fx arbejder den på området for tiden nok mest kendte forsker W. Sethares (se [Sethares, 1993] og [Sethares, 1997]) i opbygningen af vores harmoniske system med en model, der bygges fx på dissonanskurver af [Plomp and Levelt, 1965]. Her er der således ikke den netop beskrevne adskillelse mellem konsonans og harmoni.

9.2.1 Et optimalt kompromis?

Prisen for det fysiske fundament er, at vi ikke umiddelbart kan svare på, hvorvidt vores "optimale" stemning, der er den med den samlet set højeste konsonans, også er den stemning der giver den største musikalske konsonans. At den stemning med den højeste konsonans er en stemning hvor harmonioplevelsen ikke er god. Man kan fx forestille sig, at vi på et trin i optimeringen, så at sige, taber mere i oplevelse af harmoni, end vi vinder i konsonans, hvorfor oplevelsen af musikalsk konsonans samlet set forringes. Det er med baggrund i denne tankegang, at man kunne ønske at lægge en såkaldt "dæmper" på optimeringen. Altså at tage hensyn til følelsen af harmoni, ved i højere grad at bevare forskellige intervaller i nærheden af deres definition i lige stemning. Der er umiddelbart et potentiale for at maksimere oplevelsen af musikalsk konsonans ved at indføre en sådan dæmpning. Disse overvejelser kræver dog et nærmere studie, hvilket ligger uden for projektets rammer. Et forslag til dæmpning er alligevel medtaget i perspektivering. Endelig skal man huske, at man så snart man foretager en såkaldt dæmpning på processen, er det ikke længere beatintensitet, vi optimerer, hvorfor vi mister det fysiske fundament. Vi kan naturligvis stadig angive beatintensiteten for en ny stemning og sammenligne denne med alternativer.

10 Konklusion

Lad os kort genopfriske projektets problemformulering:

Kan man ved matematisk modellering analysere, vurdere og styre en given stemnings indflydelse på oplevelsen af musikalsk konsonans i et givet stykke musik?

Til dette spørgsmål kan vi nu give følgende svar:

Man kan ved matematisk modellering analysere, vurdere og styre en given stemnings indflydelse på konsonansen af et musikstykke, men kun i nogen grad oplevelsen af musikalsk konsonans. En model for intensiteten af beats, som er opstillet i projektet, er central for at forstå og evt. kontrollere en stemnings konsonans og følgelig til dels oplevelsen af musikalsk konsonans.

11 Perspektivering

Musikalsk konsonans er afgørende for vores oplevelse af musik. Følgelig er der store perspektiver i, at opnå større forståelse og kontrol over denne. Vi har inddelt projektets perspektivering i to dele. Først skitseres mulige anvendelser af en sådan model, herunder en løs skitse til en såkaldt "dæmpning" af beatintensitetsminimeringen. Det er et bevidst valg, at sætte denne skitse i perspektiveringen. Dette valg beror på, at den baggrund, hvormed dæmpningen vælges er væsensforskellig fra resten af modelopstillingen. Der er i høj grad tale om et ad-hoc valg, der vil kræve yderligere undersøgelser. I anden del af perspektiveringen forsøges det, at give et billede af, hvordan man kan videreudvikle modellen.

11.1 Anvendelser

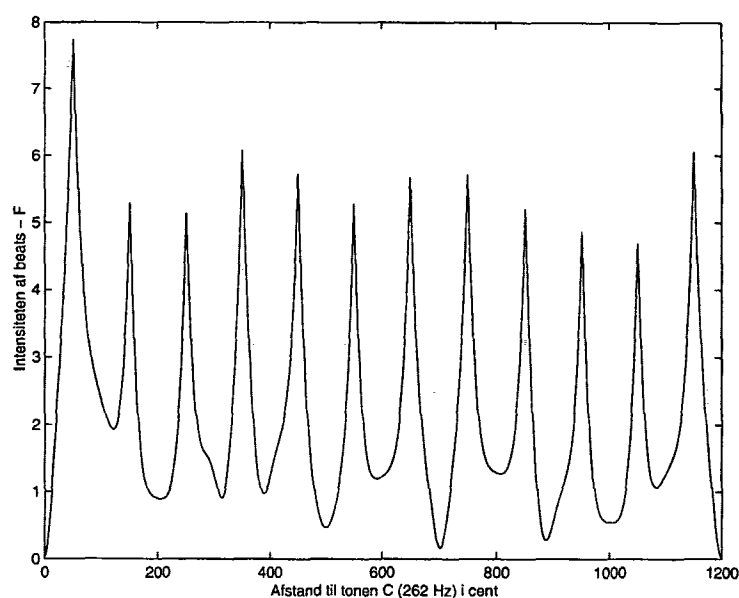
Modellen opstillet i dette projekt har mange forskellige anvendelsesmuligheder. Først og fremmest åbner den mulighed for, at kunne vælge en stemning, man ikke ellers kunne have fundet frem til. De musikalske perspektiver i dette er store, og da moderne teknologi gør det muligt at stemme fx et elklaver på under et minut, kan man godt forestille sig, at denne viden kan tilføre visse musikstykker en ekstra dimension.

I projektet er indtil videre kun vist og beregnet den stemning, der har den største konsonans. Hvis jeg skulle på baggrund af modellen skulle foreslå en stemning til en opførsel af "Praeludium i C-dur" ville den være en noget andet. Jeg ville her i høj grad tage hensyn til oplevelsen af harmoni og indføre en såkaldt dæmpning.

11.1.1 Optimering med dæmpning

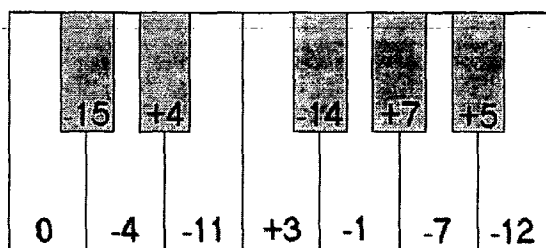
Jeg har valgt en relativ simpel dæmpning, der påfører et interval en straf, så snart man kommer for langt væk fra lige stemning. Man kunne fx forestille sig, at vi adderer et dæmpningsled til beatintensitetsfunktionen for to toner F på formen $\alpha(x - x_i)^4$, hvor x betegner toneforholdet i cent, x_i betegner det pågældende forhold i lige stemning, og α er en positiv konstant. Efter et par testkørsler og gennemspilninger foreslår jeg nu, at α vælges, så dæmpningsledet har værdier mellem 0 og 6. Med denne dæmpning får grafen for F et noget andet udseende (se figur 11.1)

Med denne funktion som udgangspunkt ender minimeringen med et nyt forslag til optimal stemning (se figur 11.2). Dette forslag ender med en beatintensitet



Figur 11.1 Beatintensitet med dæmpning for to toner. Tonen C fastholdes mens den anden tone varieres. *æervalgtil4*.

for musikstykket *H* på 21.2596, der er noget større end de 20.9100 vi fik uden dæmpning, men stadig langt under de 23.2498 vi får med lige stemning. Hvor meget man skal "dæmpe" sin optimering er imidlertid stadig en smagssag, og vil nok variere fra person til person.



Figur 11.2 Nyt forslag til optimal stemning. Bemærk de mange fællestræk med figur 8.1

Hvis man skal pege på andre anvendelser af modellen, er det oplagt at kaste sig over musikvidenskaben.

11.1.2 Musikvidenskab

En model for beatintensitet vil kunne være et centralt analyseredskab, hvis man ønsker at forstå og analysere musik fra perioder, hvor andre stemninger end

den lige har været dominerende. Et forskningsområde, der idag stort set kun behandles ud fra æstetiske principper - og endda ofte som om at stykket var skrevet i lige stemning. Denne tilgang må ud fra dette projekt betragtes som noget énøjet, da modellen netop påviser, hvordan konsonansen i et musikstykke ændres med forskellige stemninger, ligesom man gennem modellen og det i projektet opbyggede begrebsapparat kan diskutere, hvordan oplevelsen af harmoni har ændret sig i forhold til idag.

11.1.3 Historiske stemninger

De historiske stemninger, vi har set på i projektet, har i en lang periode eksisteret sideløbende og med tilhængere og modstandere. Man har derfor ikke et fuldstændigt overblik over, præcist hvilke stemninger forskellige værker er blevet skrevet i. Fx har utallige forsket i, hvilken af de utallige veltempererede stemninger, Bach har skrevet "Wohltemperierte Klavier" i. Der er muligvis et potentiale i at lave en statistisk behandling af musikværker, for derigennem at udelukke eller foreslå forskellige af de mulige stemninger.

11.2 Videreudvikling af modellen

Vi vil runde rapporten af, med at pege på, hvordan man kan videreudvikle modellen. Videreudviklinger, der vil kunne forbedre modellen i forhold til de netop opstillede anvendelsesmuligheder. Først og fremmest kan selve beatintensitetsfunktionen få forøget sin præcision gennem grundigere studier af øret, end dem der har ligget til grund for modellen i dette projekt. Modellens største udfordring er imidlertid stadig samspillet mellem konsonans og harmoni, hvor særligt den sidste størrelse, i forhold til dette projekts problemstilling, har et ubrugt potentiale. En grundig behandling af harmoni-begrebet ville således være det mest oplagte sted at arbejde videre med den problematik, vi har behandlet i dette projekt.

Litteratur

- J. S. Bach. *Wohltemperierte Klavier, Teil 1*. G. Henle Verlag, München-Duisburg, 1960.
- A. H. Benade. *Musik og lyd*. Gyldendal, København, 1962. Dansk oversættelse af den amerikanske Horn, Strings, and Harmony fra 1960.
- J. Haluska. Comma 34805 / 32768. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 6, no. 3:295-305, 1998.
- O. Jørgensen. *Tuning*. Michigan State University Press, Michigan, USA, 1991.
- C. Jørgensen. *Noder, Rytmer og Toner*. Wilhelm Hansen, København, 1975.
- A. Kameoka and M. Kuriyagawa. Consonance theory part i: Consonance of dyads. *Journal of the Acoustical Society of America*, 45(6):1451-1459, 1961.
- L. S. Lloyd and H. Boyle. *Intervals, Scales, Temperaments*. Macdonald and Jane's Publishers Limited, London, 1978.
- A. L. Peressini, F. E. Sullivan, and J. J. Uhl. *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- R. Plomp and W. J. M. Levelt. Tonal consonance and critical bandwidth. *Journal of the Acoustical Society of America*, 38:548-560, 1965.
- W. Sethares. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. Springer-Verlag, London, 1997.
- W. B. Sethares. Local consonance and the relationship between timbre and scale. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94(3):1218-1228, 1993.
- R. Steblin. *A History of Key Characteristics in the 18th and Early 19th Century*. University of Rochester Press, New York, 2002.
- E. Terhardt. The concept of musical consonance: A link between music and psychoacoustics. *Music Perception*, 1 no. 3:276-295, 1984.
- H. L. F. von Helmholtz. *On the Sensations of Tone*. Thoemmes press, Bristol, United Kingdom, 1998.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: <http://mmf.ruc.dk> eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialrapport af: Stine Korreman
Vejleder: Dorthe Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss
- 342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND
AND SUPPLY
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTTELSE
AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

- 344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen
- 345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen
- 346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøringsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
- 347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact
assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen
- 349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i
arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
- 350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96
- 351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss
- 352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen
- 353/98 Problemløsning og modellering i en almindende matematikundervisning
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen
- 354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom
- 355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

- 356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K. W.
Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an
Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
-
- 359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)
- 360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projekt-rapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christensen
- 361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhard Boos-Bavnbeek, Kenro Furutani
- 362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen
- 364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørerup
- 365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege
- 366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX
og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

- 367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhard Boos-Bavnbeek
- 368/99 Kvarterrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTTELSE AF
BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen
- 370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter
tekst nr. 350/98
- 371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik
undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermansson
Vejleder: Mogens Niss
- 372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:
Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen
- 373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu
Theorem
by: Bernhard Boos-Bavnbeek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki
- 374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen
- 375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-
1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik
- 376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder
- 377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen
-
- 378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and thermal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

- 379/00
EULERS DIFFERENTIALREGNING
 Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
 En tredjeseesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
 af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
 Vejleder: Jørgen Larsen
- 380/00
MATEMATISK MODELLELING AF HJERTEFUNKTIONEN
 Isovolumetriske ventrikulær kontraktion og udpumpning til det kardiovaskulære
 system
 af: Gitte Andersen (3. moduls-rapport), Jakob Hilmer og Sine Weisbjerg (speciale)
 Vejleder: Johnny Ottesen
- 381/00
 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
 - Rekognosceringer og konstruktionsprojekter i grænselandet mellem matematikkens didaktik
 og forskning i voksenuddannelse
 Ph. d.-afhandling af Tine Wedege
- 382/00
 Den selvundvigende vandring
 Et matematisk professionsprojekt
 af: Martin Niss, Arnold Skimminge
 Vejleder: Viggo Andreasen, John Villumsen
- 383/00
 Beviser i matematik
 af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter
 Wulff
 Vejleder: Mogens Niss
- 384/00
Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
 Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
 Supervisor: Jeppe C. Dyre
- 385/00
 The Geometry of Cauchy Data Spaces
 This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
 by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski
- 386/00
 Neutrale mandaffordelingsmetoder - en illusion?
 af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
 Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 387/00
**A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax
 Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts**
 by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 388/00
 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
 et 2. moduls matematik modelprojekt
 af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
 Vejleder: Jesper Larsen

- 389/00
 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of
 experience with the Roskilde model
 By: Mogens Niss
 Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for
 mathematics!
 by: Johnny Ottesen
- 390/01
**SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I
 DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001**
 Projektleder: Bent Sørensen
 Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System⁴; Thomas
 Enberg Pedersen⁵; Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2⁶; Peter Simonsen,
 RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen⁷, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen,
 Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen⁸; Bent Sørensen
⁹Indtil 1/1-2000 Elkraft, ¹⁰ fra 1/5-2000 Cowi Consult
¹¹Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ¹² fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
 Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram
- 391/01
 Matematisk modelleringskompetence - et undervisningsforløb i gymnasiet
 3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie
 Inari Castilla, Jan Lauridsen, Maria Göttsche, Ditte Mandøe Andreasen
 Vejleder: Johnny Ottesen
- 392/01
**"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF
 PHYSICS**
 an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
 PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
 by: Bent Sørensen.
- 393/01
 Hilberts matematikfilosofi
 Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
 Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 394/01
**"PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF
 PHYSICS**
 an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
 PART II: PHYSICS PROPER
 by: Bent Sørensen.
- 395/01
 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
 Specialafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
 Vejleder: Tine Wedege
- 396/01
 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
 Specialafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
 Vejleder: Tine Wedege

- 397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipidbøllag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt
- 399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss
- 400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen
- 401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen
- 402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen
- 403/01 Generaliseringer i integralteorien
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre
Vejledere: Bernhard Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen
- 404/01 "Mere spredt fægning"
Af: Jens Højgaard Jensen
- 405/01 Real life routing
- en strategi for et virkeligt vrp
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jørgen Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak
Vejleder: Jørgen Larsen
- 406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik
Eksamenopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg
- 407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow
By: Bernhard Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

- 408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations
By: Bernhard Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang
- 409/02 Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy
- et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning, før Gauss, Abel og Galois
Videnskabsfagsprojekt af: David Heiberg Backchi, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Neslihan Saglanmak
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 410/02 2 projekter om modellering af influenzaepidemier
Influenzaepidemier- et matematisk modelleringsprojekt
Af: Claus Jørgensen, Christina Lohfert, Martin Mikkelsen, Anne-Louise H. Nielsen
Vejleder: Morten Blomhøj
Influenza A: Den tilbagevendende plage – et modelleringsprojekt
Af: Beth Paludan Carlsen, Christian Dahmcke, Lena Petersen, Michael Wagner
Vejleder: Morten Blomhøj
- 411/02 Polygonformede hydrauliske spring
Et modelleringsprojekt af: Kåre Stokvad Hansen, Ditte Jørgensen, Johan Rønby Pedersen, Bjørn Toldbod
Vejleder: Jesper Larsen
- 412/02 Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning – en generel analyse samt en behandling af strømmingen bag en cylinder
Et matematisk modul III professionsprojekt af: Kristine Niss, Bo Jakobsen
Vejledere: Morten Brøns, Johnny Ottesen
- 413/03 "Elevernes stemmer" Fysikfaget, undervisningen og lærerroller, som eleverne opfatter det i det almene gymnasium i Danmark
Af: Carl Angell, Albert Chr. Paulsen
- 414/03 Feltnetdiagrammer En vej til forståelse?
Et 1. modul fysikprojekt af: Ditte Gundermann, Kåre Stokvad Hansen, Ulif Rørbæk Pedersen
Vejleder: Tage Emil Christensen
- 415/03 FYSIKFAGET I FORANDRING Læring og undervisning i fysik i gymnasiet med fokus på dialogiske processer, autenticitet og kompetenceudvikling
Ph.d.-afhandling i fysikdidaktik af: Jens Dolin
- 416/03 Fourier og Funktionsbegrebet
- Ovegangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb
Projektrapport af: Rasmus Brauner Godiksen, Claus Jørgensen, Tony Moyer Hanberg, Bjørn Toldbod
Vejleder: Erik von Essen

417/03

The Semiotic Flora of Elementary particles
By: Peder Voetmann Christiansen

418/03

Militærmatematik set med kompetencebriller
3. modul projektrapport af: Gitte Jensen og specialrapport af: Jesper Thrane
Vejleder: Tine Wedege