# TEKST NR 416 2003

# Fourier og Funktionsbegrebet

**- Overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb -**

**Rasmus Brauner Godiksen**
**Claus Jørgensen**
**Tony Moyer Hanberg**
**Bjørn Toldbod**

**Vejleder: Erik von Essen**

# TEKSTER fra

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA - Roskilde Universitetscenter - Postboks 260 - DK 4000 Roskilde
Tlf.: 46742263 - Fax: 46743020 - Mail: imfufa@ruc.dk
Rasmus Brauner Godiksen, Claus Jørgensen, Tony Moyer Hanberg og Bjørn Toldbod
"Fourier og Funktionsbegrebet - Overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb"
IMFUFA tekst nr. 416 - 90 sider – ISBN 0106-6242

## Abstract

I denne rapport undersøges Jean Baptiste Joseph Fouriers (1768-1830) betydning for funktionsbegrebets udvikling. Ud fra en antagelse om at Leonhard Eulers (1707-1783) funktionsbegreb er repræsentativt for funktionsbegrebet på Fouriers tid, undersøges Fouriers betydning for skiftet fra Eulers funktionsbegreb til funktionsbegrebet defineret af Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Der tages udgangspunkt i den opfattelse af funktionsbegrebet, der kommer til udtryk i Eulers *Introductio in analysin infinitorum* fra 1748, i Fouriers *Théorie Analytique de la Chaleur* fra 1822 samt i artiklen *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* fra 1837, der er skrevet af Dirichlet. Det undersøges med udgangspunkt i Eulers og Fouriers værker, hvordan Fourier bryder med sin samtids funktionsbegreb. Derudover undersøges reaktionerne på Fouriers arbejde fra hans samtid gennem sekundær litteratur. Til sidst undersøges gennem en sammenligning af Fouriers og Dirichlets arbejde, i hvor høj grad Dirichlet henter inspiration til sit nye funktionsbegreb fra Fourier.

I rapporten konkluderes, at Fouriers vigtigste bidrag til udviklingen af funktionsbegrebet var hans klare påvisning af inkonsistens i det Eulerske funktionsbegreb. At der virkelig er tale om et brud understreges i rapporten af den voldsomme kritik, hans resultater udsættes for af samtiden. Derudover konkluderes, at Dirichlet i høj grad er inspireret af Fourier i det arbejde, der leder ham frem til det nye funktionsbegreb.

# Forord

Denne Imfufatekst er en revideret udgave af en andenmoduls projektrapport udarbejdet i efterårssemesteret 2002 på IMFUFA [1] på Roskilde Universitetscenter. Ændringerne i forhold til den oprindelige rapport består i rettelser af diverse småfejl samt en tilføjelse til kapitlet om Dirichlet, en tilføjelse som vi blev opfordret til at indføre af vores censor Jesper Lützen.

Projektet var et videnskabsfagsprojekt og skal derfor opfylde modulbindingen:

> Projektet skal behandle matematikkens natur og indretning som videnskabsfag, herunder dens begreber, metoder, teorier og opbygning m.v.

Vi vil her gerne takke vores vejleder Erik von Essen for fin opbakning gennem hele forløbet og Jesper Lützen for konstruktiv kritik ved eksamen samt efterfølgende at sende yderligere materiale vedrørende problemstillingen.

Rasmus Brauner Godiksen (2. modul)
Tony Moyer Hanberg (2. modul)
Claus Jørgensen (1. modul)
Bjørn Toldbod (2. modul)

maj 2003

[1] Institut for Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelser.

# Indhold

# 1 Indledning

Funktionsbegrebet, som kan »spores så langt tilbage i historien, som vi har skriftlige kilder.« [Lützen, 1978][s. 5], er et af de vigtigste begreber i den moderne analyse, men det har ikke altid haft det udseende, det har i dag. Begrebet skulle i 1748 med Eulers værk *Introductio in analysin infinitorum* blive tildelt en central plads i *analysen* – en matematisk disciplin, som var opstået i det syttende århundrede. *Eulers funktionsbegreb*, der skulle komme til at dominere analysen, var baseret på algebraen og idéen om *et analytisk udtryk*, og det adskilte sig på mange områder fra det nutidige funktionsbegreb. I 1807 skete der imidlertid noget, som senere skulle vise sig at blive begyndelsen til enden for det Eulerske funktionsbegreb. Fourier indsendte i dette år en afhandling om varmelære, *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, i hvilken han viste, at man kan repræsentere en funktion ved hjælp af en særlig trigonometrisk række. Fouriers arbejde blev mødt med stor skepsis fra den matematiske elite. Særligt Fouriers resultater med de trigonometriske rækker, som senere skulle blive kendt som Fourierrækker, vakte røre, da de var i strid med Eulers funktionsbegreb. Men resultaterne i Fouriers arbejde var ikke til at afvise på længere sigt, og det Eulerske funktionsbegreb begyndte langsomt at smuldre. Toogtyve år efter Fouriers resultater første gang vakte opsigt, skulle det gamle funktionsbegreb få dødsstødet af en af Fouriers elever, Dirichlet. Dirichlet publicerede i 1837 teksten *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen*, hvori han definerede et nyt funktionsbegreb, *Dirichlets funktionsbegreb*, der grundlæggende er identisk med det nutidige funktionsbegreb.

**Problemformulering**

Ovenstående beretning, som er velkendt fra matematikhistoriske værker, vil vi i dette projekt dykke ned i for præcist at undersøge, hvordan Fouriers arbejde var med til at bryde med det gamle funktionsbegreb og forme det funktionsbegreb, vi møder i dag. Hermed er vi klar til at præsentere vores problemformulering.

*Vi ønsker at undersøge Fouriers betydning for overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb.*

Det er her vigtigt at pointere, at rapportens primære fokus *ikke* er at give en fuldstændig beretning om funktionsbegrebets udvikling. Det er heller ikke vores mål at give en komplet beskrivelse af Fouriers arbejde. Det er imidlertid disse to områders overlap, vores rapport er koncentreret om. Altså at give et klart billede af den del af funktionsbegrebets udvikling, der har forbindelse til Fouriers arbejde. Og omvendt, at behandle den del af Fouriers arbejde, der har med funktionsbegrebets udvikling at gøre.

## 1.1 Motivation

Motivationen for dette projekt har været todelt. For det første er flere af gruppens medlemmer stødt på Fourierrækker i såvel matematik som fysikundervisning og har været fascineret af deres egenskaber. Samtidig synes vi, at det nittende århundrede, hvor grundstenene til den moderne analyse bliver formet og lagt, er en særdeles spændende periode i matematikhistorien.

## 1.2 Metode

Vi har under arbejdet valgt at fokusere på de tre store matematikere Euler, Fourier og Dirichlet. Rapporten er bygget op om en præsentation af disse og deres værker samt en sammenligning af deres opfattelser af funktionsbegrebet.

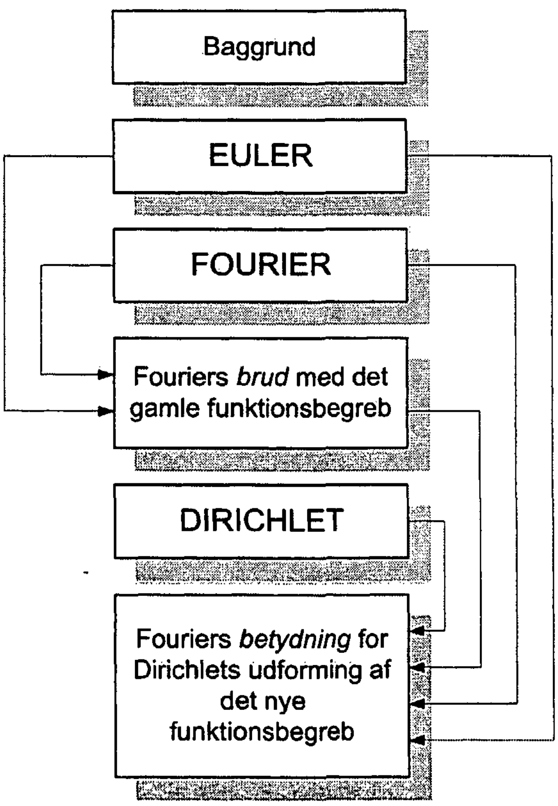
Den første matematiker, vi behandler, er Euler, som var den altdominerende personlighed indenfor den matematiske analyse i det attende århundrede. Konsekvensen af denne dominans var, at Eulers forestillinger om analysen og dermed også funktionsbegrebet i stort omfang smittede af på omgivelserne, hvorfor hans fremstilling af funktionsbegrebet kan opfattes som repræsentativ for perioden. Eulers funktionsbegreb kommer derfor i vores fremstilling til at fremstå som funktionsbegrebet før Fourier.

Dernæst behandles Fourier og det arbejde, som vi skal vurdere betydningen af. Her vil vi gennemgå, hvilke centrale resultater han nåede frem til og hvordan. Denne gennemgang skal danne grundlag for en analyse af hans arbejde. Vi vil blandt andet undersøge, hvorvidt Fouriers funktionsbegreb har ændret sig i forhold til Eulers.

Endelig behandles Dirichlet, der i 1829 som den første opstillede tilstrækkelige betingelser for konvergensen af Fourierrækkerne. I den forbindelse gav Dirichlet en definition af det funktionsbegreb, som i dag kaldes Dirichlets funktionsbegreb.

Styrken ved at fokusere på de tre matematikere er muligheden for at gå i dybden med deres originale værker. Dette kan give et mere direkte billede af deres tanker, end sekundær litteratur kan. Det er således primært gennem en analyse af deres originale værker, at vi søger et svar på vores problemformulering.

Som man kan se på figur 1.1, har vi udover præsentationen af de tre matematikere og deres arbejder to analyserende afsnit i rapporten. I det første af disse afsnit, *Fouriers brud*, vil vi gå i dybden med, hvordan og i hvor høj grad Fourier brød med sin samtids funktionsbegreb. Dette vil hovedsageligt blive gjort ved at sammenligne Eulers og Fouriers anvendelse af funktionsbegrebet. Derefter vil vi se på den kritik hans arbejde rejste fra Frankrigs ledende matematikere. Kritikken er vigtig, idet den belyser hvilke områder af Fouriers arbejde, der var 'uspiseligt' for den tids matematikere og dermed viser, hvor hans arbejde brød med hans samtids matematik. En ikke uvæsentlig pointe er, at vi sætter




**Figur 1.1** Rapportens opbygning. Ideen med denne opbygning er, lidt forsimplet sagt, at placere Fourier imellem en repræsentant for det gamle og det nye funktionsbegreb og at besvare vores problemformulering udfra denne placering.

lighedstegn mellem Fouriers samtids funktionsbegreb og Eulers.

I det andet analyserende afsnit, *Fouriers betydning*, vil vi forsøge at samle trådene og give en samlet vurdering af, hvilken betydning for funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet, man kan tilskrive Fouriers arbejde. Dette gøres ved at inddrage alle tre matematikere og den tidligere analyse af Fouriers brud med Eulers funktionsbegreb.

### Forskel på definition og anvendelse af funktionsbegrebet

De tre matematikere, vi beskæftiger os med, definerer hver især deres funktionsbegreb, hvorfor man umiddelbart kunne tro, at en analyse af disse definitioner kunne give et komplet billede af den enkeltes funktionsbegreb. Man kan imidlertid ikke altid tage en sådan definition for 'gode varer'. Man er nødt til at undersøge, hvordan den bliver brugt. Definitionen alene giver et meget ufuldstændigt billede af funktionsbegrebet. Vi har derfor under behandlingen af de tre matematikere i høj grad set på, hvordan de hver især *anvender* netop deres funktionsbegreb, for at få et mere nuanceret billede af dette.

### Den historiske ramme

Vi har følt, at det er nødvendigt at sætte de tre hovedpersoner ind i den rette historiske ramme, hvorfor denne rapport vil begynde med et afsnit, der skal beskrive, hvordan rammerne for matematikken ændrer sig over den periode, vi beskriver.

# 2 Baggrund

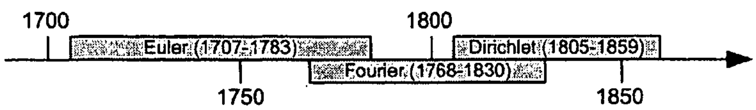
I det følgende gives en kort beskrivelse af den samfundsmæssige udvikling i Frankrig i det attende og starten af det nittende århundrede med henblik på denne udviklings betydning for matematikken. Derudover gives en oversigt over analysens udvikling. Disse introducerende afsnit skal tjene til at sætte besvarelsen af rapportens problemstilling i rette sammenhæng.

## 2.1 Et samfund i forandring

Som tidligere nævnt er projektet bygget op omkring de tre matematikere Euler, Fourier og Dirichlet og deres tilgang til matematikken. I en sådan fremstilling, hvor personlige opfattelser af begreber spiller en rolle, er det vigtigt at beskrive de involverede personers omgivende miljøer for på den måde at danne et overblik over deres inspirationskilder. Vi mener derfor, at det er relevant at opridse den del af den samfundsmæssige udvikling fra Euler til Dirichlet, som har betydning for den matematiske udvikling for i højere grad at forstå baggrunden for hovedpersonernes tilgang til matematikken. Afsnittene er hovedsageligt skrevet på baggrund af [Bottazzini, 1986] samt [Bell, 1937].

### 2.1.1 Forholdene i det attende århundrede

Universiteterne i Europa spillede ikke nogen central rolle for den matematiske forskning i det attende århundrede. Universiteterne, som var domineret af filosoffer [Katz, 1993][s. 572], lagde meget vægt på de klassiske traditioner og var nærmest fjendtlige overfor ny videnskab. Fysikken, der var i rivende udvikling, blev endnu ikke betragtet som en klassisk disciplin, og man beskæftigede sig derfor ikke med den på universiteterne. Matematikken derimod var 'antik' nok til at blive accepteret. Universiteterne forventede, at en matematiker skulle bruge sin tid på undervisning. Forskning blev anset for en unødvendig luksus,




**Figur 2.1** Oversigt over hvornår de tre hovedpersoner i rapporten levede.

som var spild af tid og penge. Disse betingelser taget i betragtning, er det svært at se nogen grunde til, at universiteterne skulle kunne føre an i den matematiske forskning, hvilket de heller ikke gjorde [Bell, 1937][s. 141].

Forskningen i det attende århundrede blev derfor hovedsageligt bedrevet på akademier rundt omkring i Europa, f.eks. Skt. Petersborgs og Berlins videnskabsakademi, der blandt andet finansierede Eulers forskning. Akademierne blev selv finansieret af landendes respektive monarker blandt andet på grund af den store prestige, der var forbundet med at have førende matematikere (eller videnskabsmænd generelt) tilknyttet et akademi.

Endelig er det karakteristisk for matematikken, i forhold til det efterfølgende århundrede, at det var relativt få personer, der drev udviklingen. Således havde enkeltpersoner som f.eks. Euler meget stor betydning for opfattelsen og udviklingen af forskellige centrale matematiske begreber. Meningsforskelle mellem matematikere blev ofte kun diskuteret af de involverede personer og blev ikke debatteret af en bredere skare af matematikere, hvorfor personlige holdninger og stædighed ofte kom til at spille en stor rolle i diskussionerne. Som følge heraf nåede man i stridsspørgsmål sjældent til enighed. Diskussionerne foregik for det meste pr. brev, og da man på akademierne ikke altid havde travlt med at publicere resultater, er brevvekslinger mellem de forskellige matematikere ofte langt mere interessante end akademiernes officielle journaler [Bottazzini, 1986][s. 44].

### 2.1.2 Forholdene i det nittende århundrede

Slutningen af det attende og begyndelsen af det nittende århundrede, hvor Fourier begyndte at publicere tekster, var præget af voldsomme forandringer indenfor Europas politiske, sociale og økonomiske strukturer. Disse forandringer var et resultat af den franske revolution, som også fik en stor betydning for den matematiske udvikling og for matematikerens rolle i samfundet. Udviklingen skete først i Frankrig men bredte sig efterfølgende til resten af Europa [Bell, 1937][s. 44].

Vi har ovenfor beskrevet, hvordan forskningen i det attende århundrede foregik på akademier adskilt fra universiteter og undervisning. Dette billede ændredes radikalt, da Frankrigs nye magthavere i 1793 lukkede de fleste universiteter og akademier, herunder akademiet i Paris, med den begrundelse at de ansatte var intrigante, og at forskningen byggede på snævre egeninteresser. Nej, forskningen skulle komme 'folket' til gode, og der var brug for en helt ny type videnskabsmand, der kunne tilfredsstille det nye samfunds behov ikke mindst behovet for et veluddannet militær. Til det formål dannede man helt nye institutioner. Vigtigst for matematikkens udvikling var *Institut national des arts et sciences*, der skulle videreføre den forskning akademiet tidligere havde stået for men nu i 'folkets interesse'. Der blev skabt et skolesystem, der kunne uddanne 'folket' til at tjene Frankrig, som lagde stor vægt på både matematisk analyse og anvendt matematik. Specielt i Frankrig fastholdt man en polyteknisk tilgang til matematikken, dvs. den anvendte matematik fik en central plads. Mange af de mest berømte matematikere blev sat til at undervise på de nye skoler, heriblandt Gaspard Monge (1746-1818), Adrien Marie Legendre (1752-1833), Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) og Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) [Bell, 1937][s. 46].

Det var fra og med denne periode at undervisning blev en uadskillelig del af matematikeres virke. Underviserne skulle holde forelæsninger, eksamener, seminarer, men vigtigst af alt skulle de producere matematisk litteratur til det tilrettelagte undervisningsprogram, som alle studerende skulle følge. Som følge af den øgede fokus på undervisning begyndte man at interessere sig mere for matematisk stringens og organisation af begreber [Bell, 1937][s. 47].

## 2.2 Analysens udvikling

Udover en beskrivelse af de miljøer, de tre hovedpersoner befandt sig i, vil vi give en beskrivelse af analysens udvikling i perioderne mellem personernes hovedværkers udgivelse. Afsnittet skal hjælpe til at belyse, i hvilken grad Fourier og Dirichlet fulgte den igangværende udvikling, og i hvilken grad de brød med den. Afsnittet bygger på [Kline, 1990].

Analysen opstod i det syttende århundrede som en udvidelse af algebraen. Matematikken havde på dette tidpunkt i stort omfang forvandlet sig fra en videnskabelig disciplin, hvis begreber var idealiseringer eller abstraktioner, der var tæt knyttet til iagttagelser af naturen, til en disciplin, der dyrkede begreber, som var skabt af den menneskelige hjerne, herunder f.eks. komplekse tal, differentialer og integraler. De nye koncepter adskilte sig grundlæggende fra de gamle, men matematikerne i det syttende og attende århundrede opdagede ikke nødvendigheden af en anderledes behandling af de nye koncepter. Problemstillingen vedrørende det matematiske fundament for det nye matematiske område blev derfor ikke løst umiddelbart [Kline, 1990][s. 393].

Den manglende udvikling af analysens fundament skyldtes i meget stor grad, at de fleste matematikudøvere i det attende århundrede, udover at fungere som matematikere, også arbejdede indenfor andre videnskabelige områder. Motivationen for at undersøge matematikken var derfor næsten udelukkende arbejdet med at løse konkrete fysiske problemstillinger indenfor især astronomien og mekanikken. Selvom matematikken, som nævnt ovenfor, i højere grad end tidligere dyrkede menneskeskabte begreber, var dens virkeområde dog stadig naturen. Arbejdet med de fysiske problemer førte til en massiv udvikling af nye matematiske områder og metoder, og analysens udvikling gennem det attende århundrede blev derfor præget af en stor forøgelse af indhold ved udbredelsen af grene som uendelige rækker, ordinære og partielle differentialligninger m.m.

Korrektheden af de nye metoder blev begrundet med deres succes indenfor fysisk anvendelse til fordel for egentlig matematisk bevisførelse. De forsøg, der blev gjort på at levere stringente matematiske beviser indenfor analysen, slog ofte fejl, hvilket er naturligt set i lyset af analysens manglende fundament. Bevisførelsen bidrog altså kun til at øge forvirringen, og mange matematikere undlod derfor efterhånden at levere beviser påstande, som de fandt indlysende. Resultatet af denne udvikling var en behandling af analysen, som var meget intuitiv og induktiv, og der opstod blandt nogle matematikere en ligegyldighed overfor bevisførelse og en nedladende holdning til matematikken som en deduktiv videnskab. Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) udtaler således, i sin *Eléments de géometrie* fra 1741, om denne tilgang til analysen:

> »...But the tables have turned. All reasoning concerned with what common sense knows in advance, serves only to conceal the truth and to weary the reader and is today disregarded.« [Kline, 1990][s. 619]

Som citatet antyder, betragtede man grundlagsdiskussioner som ufrugtbare.

Den enorme anvendelighed af de nye metoder, der blev udviklet gennem det attende århundrede, betød også, at matematikerne i høj grad var villige til at acceptere mange paradokser og modstrider i analysen. Som eksempel herpå kan nævnes brugen af uendelige rækker, som var blevet et kraftigt redskab indenfor løsningen af differentialligninger. Konvergensbegrebet var endnu ikke præciseret, og operationer, som er tilladte på endelige rækker, blev uden tvivl om deres gyldighed anvendt på de uendelige rækker med mange mærkelige resultater til følge. Euler arbejdede således allerede omkring 1730 med rækkeudvikling af udtrykkene

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{2.1}$$

og

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \tag{2.2}$$

Ved indsættelse af $x = 2$ i 2.1 og $x = -1$ i 2.2 opnår han udtrykkene

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots \quad \text{og} \tag{2.3}$$

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \tag{2.4}$$

Da leddene på højresiden af 2.3 er større end eller lig med leddene på højresiden af 2.4, må uligheden $-1 \geq \infty$ gælde i en eller anden forstand, og Euler konkluderer, at $\infty$ må være en form for grænse mellem de positive og de negative tal, ligesom 0 er det. Eulers noget underlige konklusion viser i hvor høj grad matematikerne stolede på symbolerne, og eksemplet illustrerer i øvrigt, at analysen blev fortolket og anvendt algebraisk. Eksemplet er taget fra [Kline, 1990][s. 447].

Den store udvikling af analysens anvendelsesmæssige aspekt på bekostning af dens fundament illustreres bedst med følgende ord fra Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), som udtrykker sin bekymring for udviklingen:

> »Up to the present ... more concern has been given to enlarging the building than to illuminating the entrance, to raising it higher than to giving proper strength to the foundations.«[Kline, 1990][s. 619]

En sidste årsag, der kan gives til den manglende interesse for bevisførelse, er det for analysen helt fundamentale paradigme om dens *generelle gyldighed* [Lützen, 1978][s. 18]. Analysens udsagn blev i hele det attende århundrede opfattet som værende generelt gyldige, og selve dens eksistensberettigelse og styrke blev knyttet til denne generalitet. Man antog således blandt andet, at alle funktioner kunne differentieres og integreres, idet disse teknikker jo var analysens og derfor måtte være generelt gyldige. Paradigmet om analysen generelle gyldighed må nødvendigvis have været med til at forstærke den manglende interesse for bevisførelse. Hvis man kunne vise, at noget galdt i én sammenhæng, måtte det jo gælde generelt, og mange såkaldte beviser fra det attende århundrede er derfor blot undersøgelser af særtilfælde, hvis resultater så generaliseres.

Et begreb som er vigtigt at nævne i forbindelse med analysens generalitet, er *den analytiske fortsættelsesegenskab.* I det attende århundrede var der en klar opfattelse af, at et funktionsudtryk eller en kurve, som var givet i et vist område eller interval, *entydigt* kunne udvides til også at gælde udenfor det givne område. Denne udvidelse kunne foregå ved indsættelse i et analytisk udtryk eller ved rækkeudvikling, men den var altså altid entydig. Opfattelsen, som var naturlig set i lyset af de funktioner, man arbejdede med, skulle senere give anledning til stor diskussion i forbindelse med Fouriers trigonometriske rækker.

Analysen blev i den første halvdel af det attende århundrede primært opfattet som et redskab til undersøgelse af kurver, f.eks bestemmelse af kurvers tangenter, bestemmelse af arealer under kurver og lignende. Denne opfattelse af analysen som et geometrisk værktøj var fremtrædende hos blandt andre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) [Lützen, 1978][s. 6]. Med Eulers værk fra 1748, *Introductio in analysin infinitorum*, blev der gjort op med denne opfattelse, idét funktionsbegrebet blev tildelt en central plads i analysen. *Introductio* indeholder en af de første nedskrevne definitioner af det funktionsbegreb, som senere skulle blive kendt som *det Eulerske funktionsbegreb.* I perioden efter *Introductio* fulgte som følge af Eulers store indflydelse en øget algebraisering af analysen, som skulle nå sit højdepunkt med Lagranges lærebog fra 1801, *Lecons sur les calculs des fonctions* [Lützen, 1978][s. 21]. Lagrange skulle senere blive en af Fouriers største modstandere i forbindelse med Fourierrækkerne. Den øgede algebraisering førte ikke til nogen løsning af de problemer matematikerne oplevede i forbindelse med bevisførelse indenfor analysen, og for nogle matematikere føltes det som om udviklingen af nye matematiske redskaber begyndte at stagnere. Mod slutningen af det attende århundrede var det sparsomt med udviklingen af ny matematik, og som det fremgår af et brev fra Lagrange til d'Alembert fra 1781, var der næsten en opgivende stemning:

> »It seems to me, that the mine [of mathematics] has already gone too deep and that unless someone discover new veins it will be necessary sooner or later to abandon it. Physics and chemistry now offers more brilliant riches and are more easily exploited.« [Bottazzini, 1986][s. 57]

Holdningen mod slutningen af det attende århundrede var, at analysen var ved at være 'udbrændt', at de problemer man ikke kunne løse var uoverstigelige, og at analysen ikke ville bidrage med noget nyt. I bagklogskabens klare lys er det lidt morsomt, at man har tænkt sådan på tærsklen til det, de fleste vil kalde matematikkens *mest frugtbare århundrede overhovedet.* [Bottazzini, 1986][s. 4]

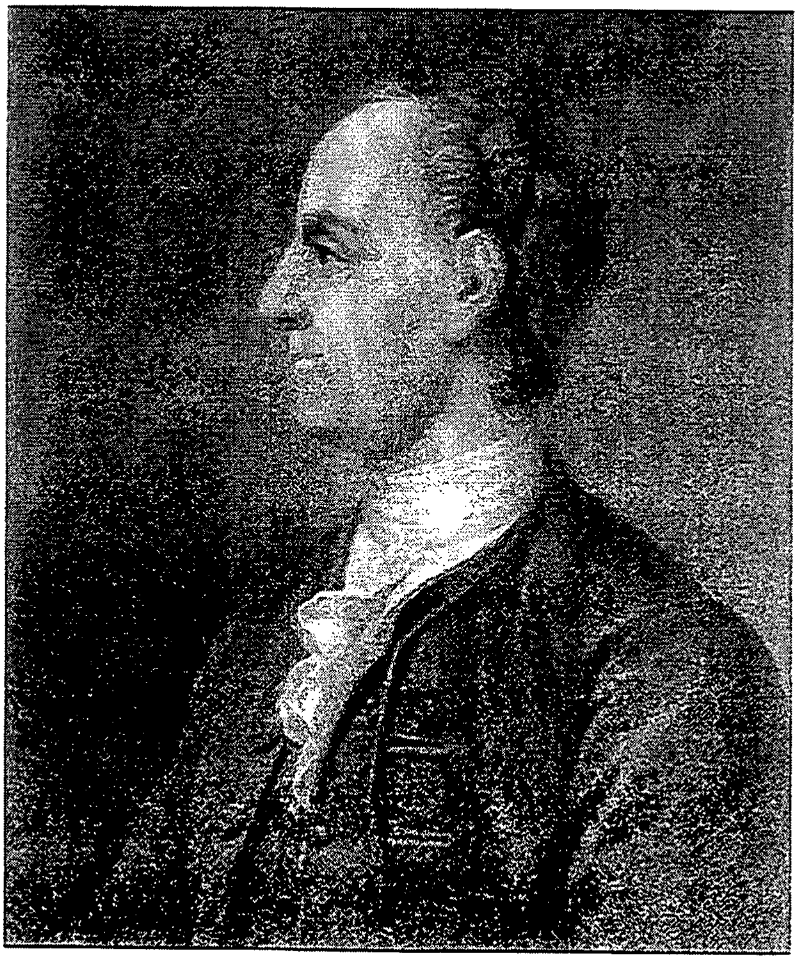
I tiden efter Fouriers gennembrud med de trigonometriske rækker begyndte en stigende interesse for blandt andet konvergensspørgsmål langsomt at vinde indpas i analysen. Denne interesse, som i nogen grad stammede fra det konkrete arbejde med Fourierrækkerne, skulle sammen med den tidligere nævnte samfundsudvikling og udvikling på forsknings- og undervisningsområdet markere begyndelsen til en analyse, som i højere grad var præget af stringens. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) skulle med sin *Cours d'analyse* fra 1821 slå denne udvikling fast. Han skrev således i indledningen til værket:

> »Hvad angår metoderne, så har jeg søgt at give dem al den stringens, som man kræver i geometri, *ved aldrig at tage min tilflugt til bevisgrunde uddraget fra algebraens generalitet.*« [Lützen, 1978][s. 25]

Cauchy gav i *Cours d'analyse* en definition af kontinuitet, som er i overensstemmelse med det nutidige kontinuitetsbegreb og brugte denne definition til at vise, at enhver kontinuert funktion er integrabel. Dette resultat anvendte Dirichlet senere i sit konvergensbevis.

# 3 Euler

I dette kapitel vil vi præsentere Leonhard Euler og en del af hans arbejde. Kapitlet indledes med en oversigt over Eulers liv, hvorefter vi vil give en beskrivelse af hans funktionsbegreb, *det Eulerske funktionsbegreb.*



**Figur 3.1** Portræt af Leonhard Euler

## 3.1 Leonhard Euler (1707–1783)

Leonhard Euler blev født i Basel i Schweiz i 1707. Et par år senere flyttede hans familie til Reichen, hvor hans far blev calvinistisk pastor. Faderen, Paul Euler, ønskede at sønnen fulgte i hans fodspor, så han kunne overtage hans hverv i kirken, men begik heldigvis den fejl at lære sin søn matematik.

Unge Euler vidste hurtigt, hvad han ville. Alligevel fulgte han til at begynde med faderens anvisninger og begyndte at studere teologi og hebraisk på universitetet i Basel. Indenfor matematikken var han imidlertid så dygtig, at han tiltrak Johann Bernoullis (1667-1748) opmærksomhed, og denne tilbød efterfølgende at give Euler en lektion om ugen. Euler brugte resten af ugen på at forberede sig til næste lektion, så han kunne få så meget ud af tiden som muligt. Hans evner gjorde også indtryk på Daniel Bernoulli (1700-1782), som han stiftede venskab med.

I 1724, da Euler var 17 år, insisterede hans far imidlertid på, at han forlod matematikken fuldstændig og brugte al sin tid på teologi. Men det lykkedes for 'Bernoullierne' at overbevise Eulers far om, at sønnens skæbne var at blive en stor matematiker frem for pastor i Reichen. Selvom Bernoulliernes profeti viste sig at gå i opfyldelse i en grad, de næppe selv havde forventet, påvirkede Eulers teologistudier ham resten af livet, og han forblev stærk i sin calvinistiske tro [Bell, 1937][s. 144].

Euler søgte uden held at få et professorat i Basel, men gennem sit venskab med Daniel Bernoulli, der havde fået en stilling på akademiet i Skt. Petersborg, fik han en stilling i medicinsk forskning samme sted stillet i udsigt. Euler fulgte forelæsninger om fysiologi i Basel, men han kunne ikke afholde sig fra at drage matematikken ind i det, han lavede. F.eks. inspirerede ørets fysiologi ham til at arbejde med en matematisk undersøgelse af lyd, som videre fik ham til at arbejde med bølgeudbredelse osv. Han ankom til Rusland i 1727 fuld af forventninger men måtte imidlertid sande, at Ruslands liberale regent, Katharina den Store, døde selv samme dag, han satte sine fødder på russisk jord. Ruslands nye magthavere betragtede akademiet som overflødigt og sendte mange af de udenlandske forskere hjem. Sådan var situationen, da Euler ankom til Skt. Petersborg, og i al forvirringen lykkedes det ham at få arbejde i akademiets matematiske afdeling. Omstændighederne blev bedre, og Euler begyndte at arbejde.

I 1733 havde Daniel Bernoulli fået nok af Rusland, og han tog tilbage til Schweiz. Euler overtog derefter i en alder af 26 pladsen som ledende matematiker på akademiet. Samme år giftede han sig med Catharina Gsell. Den politiske situation i Rusland var imidlertid præget af streng censur og brutale magthavere. Euler gik derfor med tanker om at forlade landet. Men da hans kone fødte det ene barn efter det andet, følte han sig fanget og flygtede derfor i stedet ind i sit arbejde. Omkring 1735 blev Euler syg og mistede synet på sit ene øje, hvilket dog ikke påvirkede hans produktivitet.

Eulers enorme produktion er legendarisk, og der er mange historier om hans fantastiske evner. Det siges, at Euler kunne arbejde under alle forhold. Han var glad for børn (han fik 13 i alt, dog overlevede kun fem af disse barndommen) og producerede ofte matematiske ideer med en baby på armen og støjende børn omkring sig. Letheden, hvormed han skrev selv det sværeste matematik, var fantastisk. Ligeledes siges det, at han skrev adskillige sider hver eneste dag og havde en voksende stak af papirer, der ventede på trykkeren. Når materiale skulle publiceres ved akademiet, tog trykkeren sider fra toppen af bunken. Således skete det ofte, at datoen for offentliggørelsen af Eulers matematik ofte løb modsat den rækkefølge, den var blevet produceret. Da Euler samtidig havde for vane hyppigt at vende tilbage til et område, han allerede havde behandlet for at uddybe eller klargøre noget, kunne hans behandling af matematiske problemstillinger ofte virke noget underlig, hvis den blev læst i den rækkefølge, materialet blev publiceret i [Bell, 1937][s. 146].

Matematiske opdagelser optog ikke al Eulers tid i Rusland. Hvorend han blev sat til at løse opgaver, der ikke var for langt væk fra den rene matematik, klarede han det så godt, at den løn, han fik af de russiske magthavere, var særdeles godt givet ud. For bare at nævne nogle af hans aktiviteter skrev Euler matematiske lærebøger til de russiske skoler, hjalp til med at reformere mål- og vægtsystemet og hjalp geograferne i Rusland med forskellige problemer [Bell, 1937][s. 147].

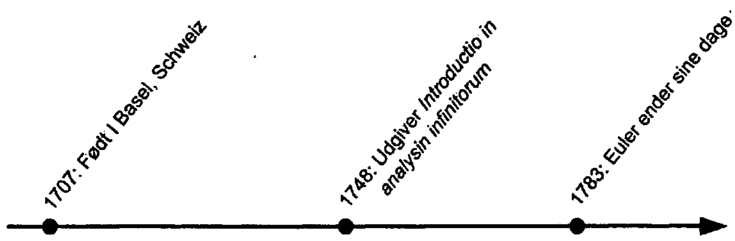
I 1740 tog Euler imod et tilbud fra den prøjsiske konge, Frederick den Store, om en ledende stilling ved videnskabsakademiet i Berlin, som han var tilknyttet de følgende 24 år. Han var ikke altid lige tilfreds med sin position, blandt andet havde han et lidt anstrengt forhold til kongen, der skønt han ønskede at fremme matematikken ikke selv kunne udstå den. Han satte dog pris på Eulers evner og fik Euler engageret i så forskellige ting som f.eks. møntfodsproblemer, pensionsspørgsmål og kanalbyggeri [Bell, 1937][s. 148].

En af grundene til det anstrengte forhold mellem Euler og Frederick den Store, var Eulers manglende evne til at holde sig fra udsagn om filosofiske spørgsmål, som han ikke havde forstand på. Den prøjsiske konge savnede en mere dannet mand på posten som ledende matematiker, og han tilbød derfor d'Alembert denne. D'Alembert advarede ham om, at Euler sandsynligvis ikke ville tolerere at have andre matematikere over sig, men dette gjorde kun Frederick den Store mere stædig, og situationen blev tilsidst utålelig for Euler. I 1766 I en alder af 59 år, vendte Euler derfor tilbage til akademiet i Skt. Petersborg.

Her blev han modtaget som en fyrste og fik stillet et fuldt møbleret hus til rådighed til ham selv og hans 18 medfølgende. På dette tidspunkt begyndte Euler at miste synet på sit andet øje, og der gik ikke længe, før han blev fuldstændig blind. Han tog imidlertid meget fattet imod 'udsigten' til at blive blind og brugte den sidste tid med synet i behold på at lære at skrive sine formler på en tavle med et stykke kridt, så hans sønner kunne skrive ned, mens han forklarede sine ideer. Imod alle odds ændrede Eulers tab af synet ikke på hans produktivitet. Her kom Eulers fænomenale hukommelse også til sin fulde ret, ligesom hans fantastiske evne til at regne i hovedet var en nødvendig faktor for hans produktivitet. Som et eksempel på hans næsten ufattelige evner kan nævnes, at han efter mange års blindhed lavede en fuldstændig analyse af månens bevægelser, det eneste problem, der nogensinde havde voldt Newton kvaler. Og alle beregningerne foregik fuldstændigt i Eulers hoved.

Dele af Eulers matematiske notation bliver stadig brugt i dag. Euler har blandt andet benyttet symbolerne $i$ for $\sqrt{-1}$, $f(x)$ for en funktion, $e^x$ for den naturlige eksponentialfunktion m.m. Euler bliver i [Kline, 1990][s. 401] omtalt som en af historiens helt store matematikere på linie med Newton, Gauss og Archimedes.

Euler forblev livlig og klar i hovedet til sin død den 18. september 1783. Efter at have underholdt sig med at regne på balloners opdrift, legede Euler med sit barnebarn, da han pludselig fik et slagtilfælde. Med ordene 'Jeg dør' stoppede Euler med at leve og regne [Bell, 1937][s. 152].




**Figur 3.2** De vigtigste årstal i Eulers liv set i forhold til vores projekt.

## 3.2 Eulers funktionsbegreb

I dette afsnit beskrives det funktionsbegreb, som Euler præsenterede i værket *Introductio in analysin infinitorum* fra 1748. Afsnittet, som hovedsageligt bygger på en oversat udgave af *Introductio*, skal gennem en behandling af udvalgte passager i Eulers værk, illustrere hvordan Euler og de fleste af 1700-tallets øvrige matematikere benyttede og opfattede funktionsbegrebet. Hovedtrækkene i Eulers opfattelse af funktionsbegrebet kunne sagtens forklares kort, men ville ikke bidrage med nogen ordentlig forståelse af begrebet. For at opnå en sådan er man nødt til at *se*, hvordan Euler arbejder med funktioner, og vi har derfor valgt at tildele Euler et helt kapitel i denne rapport. For vores problemstilling er det i forbindelse med Eulers funktionsbegreb tilstrækkeligt at behandle teorien for funktioner af en variabel, da de pointer vi er interesserede i at illustrere fint kommer til udtryk her, og vi har derfor i det følgende valgt at begrænse os til sådanne funktioner.

Selvom funktionsbegrebet i perioden frem til Fouriers gennembrud skulle blive tildelt nye definitioner, som på overfladen virkede mere generelle end Eulers definition fra 1748, blev funktionsbegrebet i praksis opfattet og anvendt på fuldstændig samme måde, som Euler gjorde. Euler gav selv en ny definition i 1755, som var formuleret meget lig en nutidig definition, men han fortsatte alligevel med at anvende funktionsbegrebet i 1748-ånden [Lützen, 1978][s. 20].

Vi har derfor i denne fremstilling valgt at fokusere på den udlægning af analysen, som Euler giver i *Introductio*.

### 3.2.1 Eulers grundlæggende definitioner

I første del af *Introductio* giver Euler en grundlæggende beskrivelse af funktionsbegrebet, samt nogle af de vigtigste analytiske metoder til behandling af funktioner, f.eks. omformning og rækkeudvikling af disse. Hans algebraiske tilgang til analysen afsløres allerede i indledningen:

> »Often I have considered the fact that most of the difficulties which block the progress of students trying to learn analysis stem from this: that although they understand little of ordinary algebra, still they attempt this more subtle art.« [Euler, 1988][s. v]

Opfattelsen af analysen som en udvidelse af algebraen er, som vi i det følgende skal opdage, meget synlig i *Introductio*. Euler indleder værket med sin definition af funktionenen:

> »A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities.«[Euler, 1988][art. 4]

Som man kan se, bygger den Eulerske definition af funktionen ikke på en idé om sammenhænge mellem variable, som moderne definitioner gør, men på begrebet *et analytisk udtryk*. Med et analytisk udtryk skal forstås et udtryk, der fremkommer ved algebraiske operationer på den variable størrelse – ofte et uendeligt antal, som vi skal se nedenfor i forbindelse med rækkeudvikling af funktioner. Som eksempler på simple funktioner giver Euler $a+3z$, $az-4z^2$, $az+b\sqrt{a^2-z^2}$ og $c^z$. Euler skriver på dette tidpunkt ikke $f(z)=a+3z$ men blot $a+3z$. Han skulle senere opfinde notationen med $f(z)$, men den ændrede notation dækker ikke over en ændret holdning til funktionsbegrebet.

Definitionen af en funktion indeholder ingen udspecificeret information om funktionens definitions- eller værdimængde. Dette forhold skyldes, at variable størrelser i Eulers teori tildeles en egenskab som ligegyldiggør en nærmere specificering af disse mængder. Variable størrelser definerer Euler på følgende vis:

> »A variable quantity is one which is not determined or is universal, which can take on any value.«[Euler, 1988][art. 2]

Definitionen udtrykker, at Euler opfatter en variabel som et vilkårligt element, meget lig en nutidig opfattelse, men der tillades ingen begrænsning af denne størrelse. Den variable skal kunne antage alle talværdier i de komplekse tal (den er universel). Dette formulerer Euler således:

»...Thus a variable quantity encompasses within itself absolutely all numbers, both possitive and negative, integers and rationals, irrationals and transcendentals. Even zero and complex numbers are not excluded from the signification of a variable quantity.«[Euler, 1988][art. 3]

Denne egenskab, som i [Lützen, 1978][s. 9] benævnes kravet om *den variables generalitet*, afspejler klart det tidligere nævnte paradigme om *analysens generelle gyldighed*. Den første konsekvens af kravet om den variables generalitet er, at alle funktioner skal være defineret for alle talværdier, eller sagt på en anden måde, alle funktioner har definitionsmængden $\mathbb{C}$. Euler begrænser dog til tider sine funktioner til de reelle tal, men udelukkende af praktiske årsager. Da en funktion er et analytisk udtryk, hvori der indgår en variabel størrelse, drager Euler konklusionen, at funktionen selv en variabel størrelse, og kravet om den variables generalitet dikterer derfor, at funktionen skal kunne antage alle talværdier, dvs. enhver funktion har også værdimængden $\mathbb{C}$. Euler opfatter dog på ingen måde en funktion som en afbildning mellem to mængder, men dette er heller ikke nødvendigt i hans begrebsverden, da en Eulersk funktion set med nutidige øjne altid har definitions- og værdimængde $\mathbb{C}$. Hvorfor Euler vælger at opfatte en funktion som en variabel er ikke helt klart, men opfattelsen er praktisk f.eks. i forbindelse med sammensætning af funktioner, hvilket højst sandsynligt var grund nok. Som eksempel på funktioners generalitet gives udtrykket $\sqrt{9-z^2}$, som ved indsættelse af komplekse tal på $z$'s plads kan antage alle talværdier, og som derfor kan opfattes som en funktion. Euler nævner, at udtryk som $z^0$, $1^z$ eller $\frac{a^2-az}{a-z}$ $(= a\frac{a-z}{a-z})$, der altid antager samme værdi, ikke opfattes som funktioner men som konstante størrelser, der bare ved første øjekast ligner funktioner.

### 3.2.2 Forskellige typer funktioner

Efter de indledende definitioner foretager Euler en opdeling af funktioner i to klasser: *De algebraiske* og *de transcendente*. Algebraiske funktioner er analytiske udtryk sammensat ved algebraiske manipulationer af den variable. Disse manipulationer omfatter de elementære regneoperationer $(+, -, \cdot, :)$ samt potensopløftning og uddragning af rødder. Derudover tillades løsning af ligninger, som vi vil vende tilbage til lidt senere.

De algebraiske funktioner opdeles yderligere i *de rationale funktioner* og *de irrationale*. De rationale funktioner er udtryk hvor de algebraiske operationer, der anvendes, er begrænset til de elementære regneoperationer, samt potensopløftning med heltallige eksponenter, mens de irrationale funktioner udgøres af udtryk, hvori der også indgår uddragning af rødder og potensopløftning med ikke-heltallige eksponenter.

De transcendente funktioner er dem, der involverer transcendente operationer, f.eks. sinus og cosinus, samt logaritmer og eksponentialer. Med sin opdeling af funktioner i klasser mener Euler at have beskrevet alle de mulige funktioner. I nutidig forstand er de Eulerske funktioner altså kun dem, der kan opskrives ved ét analytisk udtryk. Euler ville ikke acceptere 'tuborgfunktioner'. Euler skulle kort tid efter udgivelsen af *Introductio* udvide dette funktionsbegreb. Dette beskrives senere i afsnittet. Udover de nævnte opdelinger af funktioner foretager Euler endnu en opdeling; de funktioner der tilknyttes én værdi, og de der tilknyttes flere. Som eksempel på en funktion med flere værdier kan nævnes udtrykket $Z^2 - zZ + 2z = 0$, der opfattes som en funktion, der til hvert $z$ knytter *to* værdier af $Z$, nemlig ligningens løsninger. Det Eulerske funktionsbegreb adskiller sig altså klart fra det nutidige ved fraværet af kravet om entydighed. Funktioner med 3,4 og 5 osv. funktionsværdier accepteres ligeledes. Dette kommer blandt andet til udtryk i Eulers behandling af teorien for inverse funktioner. Betragter man f.eks. udtrykket, $y = x^2$, er dette en funktion, der til hvert $x$ knytter *en* værdi af $y$. Den inverse funktion er udtrykket $x = \pm\sqrt{y}$ som til hvert $y$ knytter *to* værdier af $x$. Her stilles ingen krav om injektivitet til funktionen, der skal inverteres, og alle funktioner har derfor en invers funktion. Denne egenskab ved funktioner er nødvendig, da eksistensen af en funktion uden en invers funktion i Eulers øjne ville blive opfattet som et brud på analysens generalitet.

### 3.2.3 Transformation af funktioner

Eulers opfattelse af funktionen som et analytisk udtryk betyder, at hans tilgang til spørgsmålet om, hvornår to funktioner er ens, er noget anderledes end en nutidig tilgang, hvor to funktioner $f$ og $g$ er ens, hvis der gælder, at $f(x) = g(x)$ for alle $x$ i et fælles definitionsområde. I det Eulerske funktionsbegreb er to funktioner ens, hvis deres analytiske udtryk er ens, eller hvis det ene udtryk kan omskrives til det andet ved hjælp af algebraiske manipulationer. Omskrivningerne som Euler kalder *transformation af funktioner* kan foretages på to måder; ved en direkte omskrivning eller ved substitution. Som eksempler på en direkte omskrivning nævnes omskrivningen af udtrykket $\frac{2a^2}{a^2-z^2}$ til $\frac{a}{a-z} + \frac{a}{a+z}$ eller faktorisering af polynomier, altså omskrivninger, som, beskrevet med moderne sprog, bevarer funktionens variabelsammenhæng. Transformation ved substitution er en anden transformation, som i modsætning til den første transformation, ikke bevarer variabelsammenhænge. Euler giver som eksempel funktionen $a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4$, der ved substitutionen, $y = a - z$, kan omskrives til $y^4$. Formålet med transformationen, som i nutidig forstand er en sammensætning af funktioner, er at bringe en funktion på en mere simpel form. Euler giver yderligere eksemplet $\sqrt{a^2 + z^2}$, som er en irrational funktion, der ved den rationale substitution, $z = \frac{a^2-y^2}{2y}$, kan transformeres til en rational funktion $\frac{a^2+y^2}{2y}$. Lighed mellem funktioner er altså et spørgsmål om omskrivning af de analytiske udtryk. Dette sammenfattes af Lützen som:

> »Eulers funktionslighedstegn er altså defineret ud fra algebra, hvad der mere end antyder dette funktionsbegrebs algebraiske natur.«[Lützen, 1978][s. 8]

Eulers behandling af transformation af funktioner leder ham automatisk frem til den vigtigste form for omformning, nemlig rækkeudvikling af funktioner. Han forklarer det nyttige ved at repræsentere en funktion som en uendelig række, ved følgende argument:

> »Since the nature of polynomial functions is very well understood, if other functions can be expressed by different powers of $z$ in such a way that they are put in the form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + ...$, then they seem to be in the best form for the mind to grasp their nature, even though the number of terms is infinite...«[Euler, 1988][art. 59]

Fremstillingen af en funktion ved en uendelig række skulle bringe den på dens mest gennemskuelige form, nemlig som et uendeligt polynomium. Der gives ingen redegørelse for eksistensen af en sådan række for en vilkårlig funktion, men Euler virker overbevist om, at en sådan række eksisterer. Han tilføjer alligevel for en sikkerheds skyld:

> »...If there is any doubt that a function can be thus expressed with an infinite series, this doubt should be removed by the following discussion. In order that the following explanation be rather general, besides positive integral powers of $z$ we will allow the exponent to be any real number. Thus there is no doubt that any function of $z$ can be given in the form $Az^\alpha + B^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + ...$, where the exponents $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are any real numbers.«[Euler, 1988][art. 59]

Eulers tro på at enhver funktion kan opskrives ved en uendelig række er meget tidstypisk og viser endnu engang troen på analysens generalitet. I behandlingen af rækkerne indgår da heller ikke nogen undersøgelse af rækkernes konvergens. Som eksempel bestemmer Euler en potensrække for funktionen $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ gennem følgende udledning. Man antager, at der findes en uendelig række, som fremstiller funktionen, dvs. at

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + ... \tag{3.1}$$

Ved multiplikation med $\alpha + \beta z + \gamma z^2$ opnås

$$\begin{aligned} a + bz &= (\alpha + \beta z + \gamma z^2)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + ...) \qquad (3.2) \\ &= \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + ... \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + ... + \gamma Az^2 + \gamma Bz^3 + \gamma Cz^4 + \gamma Dz^5. \end{aligned}$$

Ovenstående ligning giver ved sammenligning af led med samme potenser, $a = \alpha A$, og $b = \alpha B + \beta A$ , dvs. $A = \frac{a}{\alpha}$, og $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$. De resterende koefficienter bestemmes af følgende ligninger

$$\begin{aligned} \alpha C + \beta B + \gamma A &= 0, \\ \alpha D + \beta C + \gamma B &= 0, \\ \alpha E + \beta D + \gamma C &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ligningssystemet viser, at hvis to på hinanden følgende koefficienter er kendt, kan den næste i rækken bestemmes. Da nu $A$ og $B$ er kendt kan alle efterfølgende koefficienter altså bestemmes udfra disse. Euler giver selv et konkret eksempel, nemlig funktionen $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$. Her er $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$ og $\gamma = -1$. Dermed fås $A = 1$, $B = 3$. Dette giver ligningssystemet

$$\begin{aligned} C - B - A &= 0, \\ D - C - B &= 0, \\ E - D - C &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

dvs. $C = B + A$, $D = C + B$, $E = D + C$ osv. En koefficient i rækken er altså lig summen af de to foregående koefficienter, og den uendelige række bliver derfor

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2} = 1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + \ldots \tag{3.5}$$

Resultatet kan eftervises ved følgende udregning

$$\begin{aligned} &(1 - z - z^2)(1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots \\ =&1 - z - z^2 + 3z - 3z^2 - 3z^3 + 4z^2 - 4z^3 - 4z^4 + 7z^3 - 7z^4 - 7z^5 + \ldots \\ =&1 + (-z + 3z) + (-z^2 - 3z^2 + 4z^2) + (-3z^3 - 4z^3 + 7z^3) + \ldots \\ =&1 + 2z + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + \ldots \\ =&1 + 2z \end{aligned} \tag{3.6}$$

Altså gælder

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2} = 1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots \tag{3.7}$$

Ovenstående behandling af den uendelige række var i fuld overensstemmelse med de dengang gældende regler, idét rækken jo blev betragtet som et algebraisk udtryk. De tilladte regneoperationer på endelige rækker blev derfor automatisk overført til de uendelige rækker. Det problematiske i denne behandling af rækker er ikke svær at indse. Indsættes $z = 1$ i ligningen, opnås udtrykket $-3 = 1 + 1 + 1 + \ldots$. Problemstillingen vedrørende en generel behandling af rækkers konvergens ligger dog uden for rammerne af dette projekt, og vi vil derfor blot nævne, at en af grundene til at ovenstående ikke blev forkastet, men faktisk accepteret som værende fuldt gyldigt, var at man i det attende århundrede havde en meget stærk tiltro til algebraens love.

### 3.2.4 Funktionernes egenskaber

Ved en behandling af det Eulerske funktionsbegreb, som med nutidige øjne forekommer lidt naivt, er det utroligt vigtigt at huske på, at Euler i *Introductio* er den første som definerer funktionsbegrebet som et centralt begreb i analysen. Egenskaber som kontinuitet, differentiabilitet og integrabilitet, der spiller en afgørende rolle i en moderne forståelse af funktioners opførsel, og som vi i dag automatisk forbinder med funktionsbegrebet, var ikke defineret (opfundet) på Eulers tid. Den manglende forståelse for at funktioner ikke altid opfører sig 'pænt' er muligvis en af hovedforklaringerne på de store problemer matematikerne løb ind i (set med nutidige øjne), når de prøvede at lave matematiske beviser indenfor analysen. Selvom man ved brug af de analytiske metoder ofte løb ind i mange underlige resultater, blev metoderne alligevel hyppigt benyttet. Grunden til, at man i den forbindelse ikke oplevede flere modstrider eller paradokser, var, at næsten alle de Eulerske funktioner, som jo udgøres af analytiske udtryk, *har* alle ovenfor nævnte egenskaber (se Eulers eksempler på funktioner s. 15), fraregnet enkelte isolerede punkter. Benytter man sig af Eulers definition af en funktion, er det svært, at komme til at beskæftige sig med andet end 'pæne' funktioner som kan differentieres, integreres, rækkeudvikles osv. Der er derfor ingen naturlig drivkraft, der fører til en afklaring af begreberne kontinuitet, differentiabilitet og integrabilitet, da disse egenskaber jo så at sige er indbygget i funktionsbegrebet.

Et begreb som også er vigtigt at nævne i forbindelse med Eulers funktionsbegreb, er den analytiske fortsættelsesegenskab. Begrundelse for denne tro er højst sandsynligt at finde i paradigmet om analysen generalitet, som vi tidligere har nævnt. Tankegangen vedrørende den analytiske fortsættelsesegenskab skulle senere give anledning til stor diskussion i forbindelse med Fouriers trigonometriske rækker.

Efter udgivelsen af *Introductio in analysin infinitorum* foretog Euler en udvidelse af sit funktionsbegreb. I forbindelse med *kontroversen om den svingende streng* (se afsnit 5.2.1) indførte han de *diskontinuerte funktioner.* Motivationen for indførelsen af disse funktioner var som sædvanligt ønsket om at løse en fysisk problemstilling. De nye funktioner var karakteriseret ved, at der i et eller flere punkter på de tilhørende kurver forekom 'knæk', *men funktionernes kurver var stadig sammenhængende*, dvs. funktionerne var stadigvæk kontinuerte i nutidig forstand. Funktionerne, som altså ikke var differentiable i nutidig forstand, men kun stykvis differentiable, vil vi derfor benævne de *Euler-diskontinuerte* funktioner. Hans oprindelige funktioner vil vi kalde *Euler-kontinuerte.* I anden del af *Introductio*, behandlede Euler de diskontinuerte kurver, som formodentligt senere inspirerede ham til at beskæftige sig med diskontinuerte funktioner:

> »From the concept of a curve, there follows immediately a division into *continuous* and *discontinuous.* A *continuous* curve is one such that its nature can be expressed by a single function of $x$. If the cúrve is of such a nature that for its various parts, $BM$, $MD$, $DM$, etc. different functions of $x$ are required for its expression, that is, after one part $BM$ is defined by one function of $x$, then another function is required to express the part $MD$, then we call such a curve *discontinuous* or *mixed* or *irregular.* This is because such a curve cannot be expressed by one constant law, but is formed from the several continuous parts.«[Euler, 1988][vol. II, art. 9]

Ovenstående definition leder tankerne hen på ordsproget 'kært barn har mange navne'. De Euler-diskontinuerte funktioner skulle imidlertid aldrig rigtigt blive noget 'kært barn'. Funktioner, som ikke kunne repræsenteres ved ét analytisk udtryk, men som skulle defineres forskelligt i forskellige intervaller, syntes at være i strid med selve funktionsbegrebet, og var derfor meget svære at acceptere for datidens øvrige matematikere. De diskontinuerte funktioner virkede også svære at forene med den analytiske fortsættelsesegenskab. I [Lützen, 1978][s. 17] nævnes, at d'Alembert senere, i 1761, indirekte skulle påpege, at de Euler-diskontinuerte funktioner ikke altid kunne differentieres, hvilket var imod den almindelige opfattelse om, at alle funktioner kunne differentieres. Euler forklarede efterfølgende i værket *De usu functionum discontinuarum in analysi* fra 1763, at det nye funktionsbegreb skulle etablere en bijektiv korrespondance mellem funktion og kurve, således at enhver kurve kunne knyttes til en funktion[Lützen, 1978][s. 14]. Derudover var Euler, som følgende citat viser, af den opfattelse, at analysen måtte udvides, så den kunne beskrive alle problemstillinger, der forekom i naturen:

> »The debate between Euler and d'Alembert on the vibrating string was a discussion based on two very different attitudes toward mathematics. D'Alembert(at least here) valued rigor so highly that he was willing to limit radically the range of his own mathematical discovery. Euler, on the other hand, insisted that mathematics must be made general enough to deal with all situations in physics, and he was willing to extend his own concept of function and to use somewhat questionable arguments to attain this goal.« [Lützen, 2001][s. 471]

Den manglende accept af de nye funktioner betød dog, at Eulers oprindelige udlægning af funktionsbegrebet forblev dominerende.

### 3.2.5 Opsamling

Det funktionsbegreb, som skulle blive fremherskende i den sidste halvdel af det attende århundrede, blev grundlagt i 1748 af Euler med værket *Introductio in analysin infinitorum.* Euler præsenterede her et funktionsbegreb, som var stærkt præget af paradigmet om *analysens generalitet.* De Eulerske funktioner byggede ikke på en sammenhæng mellem variable, som nutidige definitioner gør, men på idéen om et analytiske udtryk, dvs. idéen om at en funktion *er* et analytisk udtryk. De analytiske udtryk kunne være ligninger, som definerede funktioner med flere funktionsværdier, dvs. Eulers funktioner var ikke altid entydige. Lighed mellem funktioner var et spørgsmål om algebraisk lighed mellem analytiske udtryk. Disse udtryk indeholdt en variabel størrelse, der ikke kunne begrænses til kun at antage værdier i et bestemt interval, men som var definerede generelt i de komplekse tal. Eulers funktioner var derfor altid definerede overalt. Funktionerne blev uden videre antaget at besidde alle de pæne egenskaber funktioner kan være i besiddelse af, nemlig kontinuitet, differentiabilitet, integrabilitet osv.

undtagen i enkelte isolerede punkter. Derudover blev det antaget, at alle funktioner kunne rækkeudvikles, og at den analytiske fortsættelsesegenskab galdt entydigt. Euler udvidede senere sit funktionsbegreb til også at inkludere de Euler-diskontinuerte funktioner, dvs. funktioner, der i forskellige intervaller var repræsenterede ved forskellige analytiske udtryk. Disse nye funktioner blev aldrig rigtigt accepterede, men de er interessante i forbindelse med behandlingen af Fourierrækker, og vi vil derfor vende tilbage til dem i et senere afsnit.

# 4 Fourier

I dette kapitel vil vi indledningsvist beskrive manden Joseph Fourier, og det arbejde han udførte, herunder hvilke relevante publikationer han udgav. Derudover vil vi i større detalje dykke ned i det arbejde, som resulterede i 'opfindelsen' af de trigonometriske rækker, vi nu kender som *Fourierrækker.*

**Figur 4.1** Portræt af Joseph Fourier

## 4.1 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Dette afsnit er skrevet på baggrund af [Grattan-Guinness, 1972], [Grattan-Guinness, 1969], [Herivel, 1975] og [Bose, 1915-16].

Fourier blev født den 21. marts 1768 i Auxerre i Yonne-provinsen, Frankrig. Han kom fra beskedne kår med en fader, som var skrædder. Desuden var han det tolvte barn ud af en søskendeflok på femten, som hans far havde fået med to forskellige koner (tre med sin første kone og tolv med Fouriers mor). Begge Fouriers forældre døde, inden han var fyldt ni år. Til hans held hjalp forskellige folk ham, så han kunne fortsætte i Joseph Pallais' forberedende skole, selv om han var blevet forældreløs. Senere anbefalede en Madame Mouton ham til Biskoppen af Auxerre, der sendte den nu tolvårige Fourier til *École Royale Militaire de Auxerre*. Her viste han sig hurtigt at være meget talentfuld inden for så godt som alle discipliner. Som trettenårig begyndte han at fatte interesse for matematikken, som han brugte hele sin fritid på at studere. Det siges, at han stjal ender af sterinlys, som han brugte, når han om natten sneg sig ned i klasseværelset for at studere. Efter at have afsluttet sine studier her blev han sendt til *Collège Montaigu*, som var en højere læreanstalt beliggende i Paris. Også her udmærkede Fourier sig, og han tog sin eksamen i den unge alder af sytten år.

Hans ambition var dog ikke at blive intellektuel, nej, Fourier ville være officer og forsøgte at komme ind i artilleriet og ingeniørtropperne. På trods af at hans ansøgning blev støttet af inspektørerne[1] på École Royale Militaire, herunder Legendre, blev denne afvist med begrundelsen, at Fourier ikke var adelig.

I stedet for at indtræde i militæret valgte Fourier at slutte sig til Bennediktinerordenen. Efter dog først at have været assisterende underviser på sin gamle skole (Ècole Militaire de Auxerre), startede han i 1787 som novice på *St. Benoît-sur-Loiri klostret*, hvor han studerede og underviste andre novicer i matematiske fag. Selv om Fourier færdiggjorde sit noviciat, fik han aldrig aflagt sin troskabsed, da det blev forbudt at aflægge sådanne eder i forbindelse med den franske revolution (1789). Selvom det senere blev muligt igen, aflagde Fourier aldrig sin ed.

Allerede som ung producerede Fourier ny matematik. Han var i en alder af ca. 20 år i stand til at fremkomme med nogle resultater vedrørende ligningsløsning, som han i en afhandling i 1789 kunne indsende til *Académie des Sciences* i Paris. Her var nogle af eksaminatorerne Legendre og Monge.

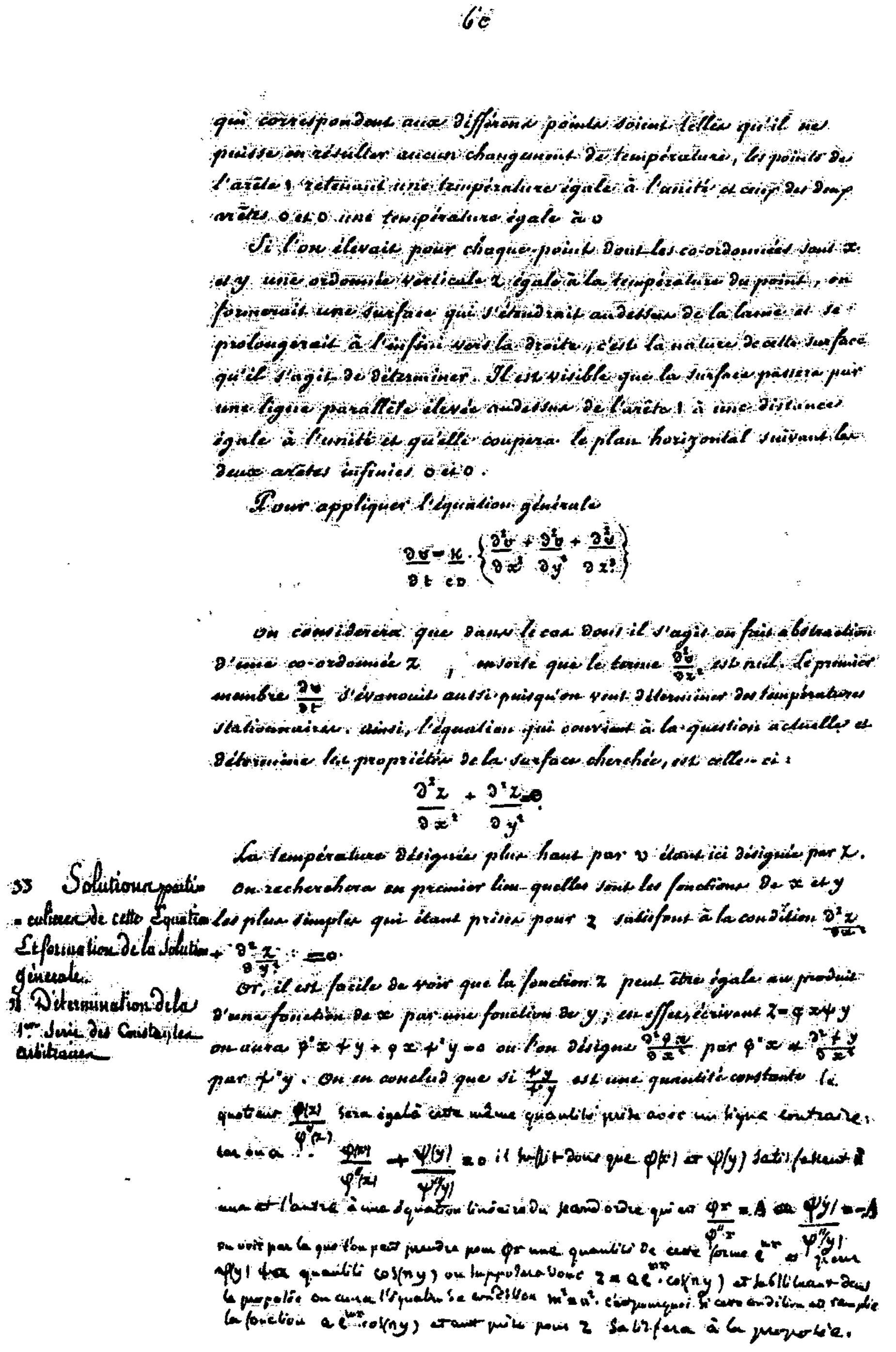
Fourier vendte i 1789 tilbage til Auxerre for at blive underviser på sin gamle militærskole. Her underviste han i matematik men også i retorik, filosofi og historie, og han blev kendt som en brilliant underviser, der kunne præsentere stoffet med stor klarhed. I denne tid begyndte Fourier også at involvere sig i politik, hvilket i juli 1794 næsten kostede ham hovedet i guillotinen. Han blev dog reddet blandt andet af sin store popularitet i lokalbefolkningen, hvor han var kendt som en retfærdig mand.

[1] som var en slags garanter for det faglige niveau

Den franske revolution vendte op og ned på skolesystemet i Frankrig. Gamle skoler blev nedlagt, og nye blev oprettet. Fourier blev studerende og underviser ved flere at de nyoprettede uddannelsesinstitutioner. På *École Normale* modtog Fourier undervisning af blandt andre Lagrange, Laplace, Claude Louis Berthollet (1748-1822) og Monge. École Normale bestod kun i fire måneder, især fordi de studerende ikke lærte nok. Fourier havde dog nået at gøre sig bemærket, og da *Ecole Polytechniquè* blev oprettet i november 1794, fik Fourier med hjælp fra Monge en stilling som assisterende underviser, hvor han især hjalp Monge med hans kursus i deskriptiv geometri.

Fourier arbejdede dog ikke kun som underviser og videnskabsmand men også som administrator og diplomat. Da Napoleon Bonaparte (1769-1821) i 1798 drog på ekspedition til Egypten, udpegede han Fourier som en del af sit videnskabelige korps. Napoleon agtede videnskabsmænd meget højt og oprettede *Institut d'Egypte* efter samme mønster som *Institut de France*. Institut d'France, som ofte blot bliver kaldt for *Instituttet*, var opbygget, så det havde fire sektioner; en for matematik, en for fysik, en for literatur og en for kunst. Fourier blev udnævnt som *secrétaire perpétuel* for Institut d'Egypte og udfyldte derudover en del diplomatiske stillinger. Fourier forhandlede f.eks. ofte på vegne af de franske generaler i Egypten. Han viste sig at være så dygtig en diplomat, at Napoleon, da han vendte hjem til Paris for at avancere op ad magtens stige, ikke ville skille sig af med Fourier men udnævnte ham til præfekt i Grenoble i 1802. Fourier ville dog helst have vendt tilbage til Ècole polytechnque for at forske og undervise.

Under sit ophold i Grenoble startede Fourier det arbejde, som senere skulle tilskrive ham en plads i matematikkens og fysikkens historie nemlig arbejdet med varmeledning i faste stoffer. Selv om han havde travlt med at passe sine forpligtelser som embedsmand, lykkedes det ham at udfærdige et manuskript *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, som han i 1807 kunne indsende til *Instituttet*. Værket indeholdt både teoretiske overvejelser vedrørende varmeledning og data, som var resultater af en række forsøg også vedrørende varmeledning, som Fourier havde udført. Komiteen, som blev sat til at vurdere dette værk, bestod af Lagrange, Laplace, Lacroix og Monge. Selv om værket indeholdt brilliante og nyskabende ideer, blev det aldrig udgivet især på grund af modstand fra Laplace og Lagrange, som blandt andet ikke kunne lide brugen af de såkaldte *Fourierrækker* til løsning af varmeledningsligningen. Det eneste offentligheden så, var et fem sider langt og ikke særligt entusiastisk review skrevet af Siméon Denis Poisson (1781-1840), som senere skulle blive en af Fouriers hårdeste kritikere.



6c

qui correspondent aux différens points soient telles qu'il ne puisse en résulter aucun changement de température, les points de l'arête 1 retenant une température égale à l'unité et ceux des deux arêtes 0 et 0 une température égale à 0

Si l'on élevait pour chaque point dont les co-ordonnées sont $x$ et $y$ une ordonnée verticale $z$ égale à la température du point, on formerait une surface qui s'étendrait au-dessus de la lame et se prolongerait à l'infini vers la droite; c'est la nature de cette surface qu'il s'agit de déterminer. Il est visible que la surface passera par une ligne parallèle élevée au-dessus de l'arête 1 à une distance égale à l'unité et qu'elle coupera le plan horizontal suivant les deux arêtes infinies 0 et 0.

Pour appliquer l'équation générale

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\}$$

on considérera que dans le cas dont il s'agit on fait abstraction d'une co-ordonnée $z$, en sorte que le terme $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ est nul. Le premier membre $\frac{\partial v}{\partial t}$ s'évanouit aussi puisqu'on veut déterminer des températures stationnaires. Ainsi, l'équation qui convient à la question actuelle et détermine les propriétés de la surface cherchée, est celle-ci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

La température désignée plus haut par $v$ étant ici désignée par $z$.

33 Solutions particulières de cette Équation Et formation de la Solution générale.

On recherchera en premier lieu quelles sont les fonctions de $x$ et $y$ les plus simples qui étant prises pour $z$ satisfont à la condition $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

34 Détermination de la 1re Série des Constantes arbitraires

Or, il est facile de voir que la fonction $z$ peut être égale au produit d'une fonction de $x$ par une fonction de $y$; en effet, écrivant $z = \varphi x \, \psi y$ on aura $\varphi'' x \, \psi y + \varphi x \, \psi'' y = 0$ où l'on désigne $\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial x^2}$ par $\varphi'' x$ et $\frac{\partial^2 \psi y}{\partial x^2}$ par $\psi'' y$. On en conclud que si $\frac{\psi y}{\psi'' y}$ est une quantité constante le quotient $\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)}$ sera égal à cette même quantité prise avec un signe contraire, car on a $\frac{\varphi(x)}{\varphi''(x)} + \frac{\psi(y)}{\psi''(y)} = 0$ il suffit donc que $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ satisfassent l'une et l'autre à une équation linéaire du second ordre qui est $\frac{\varphi x}{\varphi'' x} = A$ et $\frac{\psi(y)}{\psi''(y)} = -A$ on voit par là que l'on peut prendre pour $\varphi x$ une quantité de cette forme $e^{mx}$ et pour $\psi(y)$ une quantité $\cos(ny)$ on supposera donc $z = a e^{mx} \cdot \cos(ny)$ et substituant dans la proposée on aura l'équation de condition $m^2 = n^2$. C'est pourquoi si cette condition est remplie la fonction $a e^{mx} \cos(ny)$ étant prise pour $z$ satisfera à la proposée.

Figur 4.2 Eksempel på Fouriers originalarbejde; side fra *Mémoire sur la propagation de la chaleur.*

Da *Instituttet* i 1810 udstedte en konkurrence omhandlende varmeledning i faste stoffer, indsendte Fourier et essay *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* til denne. Indholdet i essayet, som blev leveret til *Instituttet* i 1811, var i hovedtræk det samme som 1807-memoiret, men det var udvidet på visse områder. Fourier vandt konkurrencen på trods af at dommerne, som omfattede Laplace og Lagrange, stadigvæk havde reservationer omkring Fouriers brug af Fourierrækker. Essayet blev, på trods af at Fourier havde vundet konkurrencen, ikke udgivet før 1822. På det tidspunkt var Fourier vendt tilbage til Paris (1816), blevet valgt ind i *Académie des Sciences* (1817) og blevet valgt som permanent sekretær for den matematiske afdeling af Akademiet (1822).

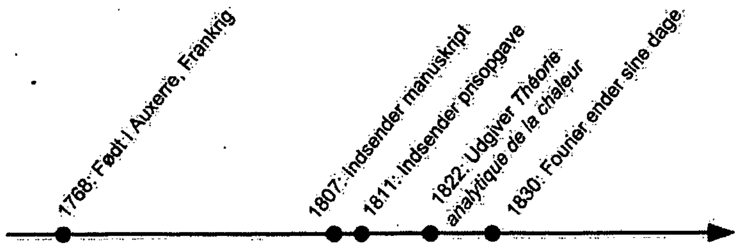
Udover de værker, som Fourier havde indsendt til *Instituttet*, havde han også udarbejdet et værk *Théorie analytique de la chaleur*, som han fik trykt uafhængigt af *Instituttet*. *Théorie analytique* indeholdt i det store hele det samme som 1811-essayet, men visse dele vedrørende opvarmning af jorden, strålevarme og eksperimentelle data var udeladt. Dette værk blev udgivet i 1822, og Fourier var da i den situation, at han var blevet permanent sekretær for det Videnskabelige Adademi og havde fået udgivet både sit 1811-essay og *Théorie analytique*. Dermed havde han for alvor slået sit navn som videnskabsmand fast og sikret sig ejerskabet af sine ideer.

Som så mange andre videnskabsmænd på Fouriers tid beskæftigede Fourier sig ikke kun med et enkelt felt men arbejdede med flere forskellige videnskabelige emner som litteratur, kunsthistorie, arkæologi, filosofi og geografi. Han var desuden hovedkraften bag værket *Description de l'Egypte* om den franske ekspedition til Egypten. Det er dog fysikken og især matematikken, som har gjort Fourier berømt. Foruden varmelære (herunder den nødvendige matematiske analyse) har Fourier beskæftiget sig med emner som generel mekanik, friktion, algebra, ligningsløsning, geometri og statistik. Fourier var 54 år i 1822, da han for alvor slog igennem som videnskabsmand. Dette er lidt atypisk, da mange af datidens videnskabsmænd slog igennem allerede som meget unge. Dette må man formode blandt andet skyldes modstanden mod Fouriers arbejde, og at han i lang tid befandt sig væk fra Paris (Egypten og Grenoble).

I de sidste år af sit liv var Fourier, hvad man med rette kan kalde en anerkendt videnskabsmand. Han blev udnævnt til flere ærefulde poster i fremmede videnskabelige selskaber blandt andet som medlem af *Royal Society of London*. Derudover blev han medlem af *Académie Francaise* og blev udnævnt som præsident for *conseil de perfectionnement* af École Polytechnique efter Laplace. Fourier døde som 62 årig i 1830 efter at være blevet ramt af et hjerteslag. Fourier blev aldrig gift, og fik ej heller nogen børn.

Vi håber at have givet et indtryk af Joseph Fourier; en mand, som har været dedikeret, ambitiøs og dygtig til næsten alt hvad han har arbejdet med, og som har beskæftiget sig med en lang række forskellige erhverv/discipliner. Derudover har Fourier været en mand, som har bevæget sig i de højeste samfundsmæssige og videnskabelige kredse, og som har haft mange magtfulde og begavede venner (og fjender), men også en mand, som ikke har haft let ved at komme til tops.

Udover at komme fra fattige kår og dermed ikke være særlig priviligeret, var Fourier tæt på at blive et offer for de mange magtkampe og det kaos, som herskede i datidens Frankrig.




**Figur 4.3** De vigtigste årstal i Fouriers liv set i forhold til vores projekt.

I resten af dette kapitel vil vi beskæftige os med hvorledes Fourier udleder og undersøger sine berømte trigonometriske rækker.

## 4.2 Varmeledning i faste stoffer

I dette afsnit vil vi beskrive de ligninger vedrørende varmeledning, som Fourier udleder. Afsnittet er skrevet på baggrund af [Fourier, 1955], som er den engelske oversættelse af *Théorie analytique de la chaleur.* Vores behandling af Fouriers arbejde bygger primært på kapitel III i *Théorie Analytique* (artikel 163–237), som har overskriften *Propagation of Heat in an infinite rectangular solid.* Fourier opdeler groft sagt sin *Théorie analytique* i to dele; den første (kapitel I og II) indeholder udledningen af ligningerne for varmeledningen i faste stoffer; den anden (kapitel III til IX) indeholder løsningen af dem.

Ligningerne for varmeledning kan kun løses, hvis passende randbetingelser er givet. Fourier løser først ligningerne i ét tilfælde, det såkaldte *uendelige rektangulære legeme.* Han viser, at løsningen kan skrives som en trigonometrisk række. Derefter generaliserer han resultaterne til vilkårlige funktioner.[2]. I vores behandling vil vi gå frem efter samme mønster, men springe en hel del af detaljerne i behandlingen over.

Den fysiske baggrund for Fouriers udledning af varmeledningsligningen er interessant og et selvstændigt studie værdig (se f.eks. [Herivel, 1975]), men det ligger udenfor dette projekts rammer at beskæftige sig med fysikeren Fourier. Dog skal det nævnes, at Fourier udleder varmeledningsligningen på en fysisk baggrund, man i dag nok vil stille spørgsmålstegn ved. Fourier mener, at varmelæren er en selvstændig gren af fysikken fuldstændigt uafhængigt af mekanikken, som på Fouriers tid var den dominerende fysiske diciplin. Således mener han, at varmelæren er en grundlæggende teori – altså et sæt af *naturlove.* Han mener sågar,

[2]Noget egentligt bevis i nutidig forstand er der ikke tale om, der er nærmere tale om en sandsynliggørelse.

som han forklarer i forordet på *Théorie analytique*, at hans værk er for varmelæren, hvad Isaac Newtons (1642-1727) *Principia* var for mekanikken [Fourier, 1955][s. 2]. I *Théorie analytique* lykkes det ham nemlig at opstille en ligning for varmes bevægelse i et medie, på samme måde som Newton havde opstillet den mekansiske bevægelsesligning.

Fouriers matematiske notation i *Théorie Analytique* er, på trods af at værket er næsten 200 år gammelt, stort set identisk med moderne notation[3]. Dette er illustreret på side 26. Vi vil benytte moderne notation, da dette gør teksten en smule lettere at forstå, uden at det for alvor ødelægger det originale præg i fremstillingen, som vi gerne vil bevare. Vi vil i det følgende så vidt muligt fremstille begreber og udlede resultater på samme måde, som Fourier gør det, og forklare hvor vi afviger fra Fouriers fremstilling.

På forhånd vil vi dog først nævne et område, hvor vi konsekvent afviger fra Fouriers notation. Bestemte integraler angives i dag med symbolet $\int_a^b$, som symboliserer, at der integreres *fra a til b*. Denne notation er opfundet af Fourier, men den bliver først indført midt i *Théorie Analytique* [Fourier, 1955][art. 231]. Vi har valgt at benytte den hele vejen. Til sidst skal nævnes, at Fourier benytter vidt forskellige bogstaver til at angive de samme størrelser gennem *Théorie Analytique*. Vi har omdøbt en del, for at opnå en større grad af sammenhæng i dette arbejde.

### 4.2.1 Fouriers definitioner i teorien for varmeledning

Fouriers definitioner af de indgående fysiske størrelser, som f.eks. ledningsevne og varmekapacitet, svarer i høj grad til de definitioner, fysikere benytter i dag. Vi vil her præsentere Fouriers definitioner af de indgående størrelser, for at komme så tæt på Fouriers fremstilling som muligt. Derudover er det med til at understrege Fouriers fysiske udgangspunkt.

Temperaturskalaen, som Fourier benytter sig af, er defineret, så vands smeltepunkt er 0 grader, og vands kogepunkt er 1 grad. Fourier bruger bogstavet $v$ til at angive temperaturen.

Fourier er ikke klar over, at opvarmning og afkøling er en form for energiudveksling, og koblingen til energi mangler derfor totalt i Fouriers forståelse. Det skal dog siges, at energibegrebet ikke var velforstået på Fouriers tid, så det er ikke så underligt, at Fourier ikke har en god forståelse af varme.

Når det gælder materialers evne til at transportere varme skelner, Fourier mellem *intern konduktivitet* $K$ og *ekstern konduktivitet* $h$. Intern konduktivitet, $K$, definerer han på følgende måde. Man forestiller sig et 1 m tykt materiale, som er fastholdt mellem to uendeligt store plader med en temperaturforskel på 1 grad. $K$ er den varme, som transporteres gennem dette materiale pr. m$^2$, pr. minut. Fourier argumenterer for, at en dobbelt så stor temperaturforskel vil resultere

[3] Vi har primært læst i den engelske oversættelse af *Théorie Analytique*, men denne er meget tro mod den originale franske tekst, ifølge [Grattan-Guinness, 1970][s. 97].

i, at dobbelt så meget varme vil blive ledt gennem materialet, og at et dobbelt så tykt materiale vil resultere i, at halvt så meget varme vil blive ledt igennem. Varmestrømmen pr. areal pr. tid er altså proportional med temperaturforskellen og omvendt proportional med tykkelsen af materialet. Proportionalitetskonstanten er $K$. Hvis vi kalder mængden af varme for $q$ (Fourier bruger ikke selv et bogstav til at udtrykke varmen), argumenterer Fourier altså for, at der gælder følgende sammenhæng

$$\frac{q}{a\,t} = K\frac{\Delta v}{\Delta x}, \tag{4.1}$$

hvor $t$ er tiden, $a$ er arealet, $\Delta v$ er temperaturforskellen og $\Delta x$ er afstanden mellem pladerne. Hvis vi gør afstanden mellem pladerne og temperaturforskellen uendelig lille (ifølge Fourier skal 4.1 altid gælde) ser vi at varmestrømmen er proportional med $\frac{\partial v}{\partial x}$, som kaldes for temperaturgradienten. Fourier opstiller ikke selv en ligning svarende til 4.1, sandsynligvis fordi han ikke har nogen klar kvantitativ forståelse af hvad varme er, og 4.1 er derfor opstillet ud fra Fouriers argumenter, som i høj grad er sproglige.

Den eksterne konduktivitet, $h$, definerer Fourier som mængden af varme et materiale afgiver til omgivelserne pr. $m^2$ pr. minut, hvis temperaturforskellen mellem materialet og omgivelserne er 1 grad. Også her argumenterer Fourier for, at en dobbelt så stor temperaturforskel vil resultere i en dobbelt så stor varmestrøm således, at

$$\frac{q}{a\,t} = h(v_m - v_o), \tag{4.2}$$

hvor $v_m$ er materialets og $v_o$ er omgivelsernes temperatur.

Fourier forklarer, at hvis et legeme bestående af et eller andet materiale får tilført varme, stiger dets temperatur. Fourier definerer den mængde varme, som skal til for at opvarme 1 kg af et givet materiale 1 grad med $C$. Han argumenterer derefter for, at mængden af varme, der skal til for at opvarme et legeme, er proportional med hvor mange grader, det skal opvarmes. Derudover kræver et dobbelt så tungt legeme dobbelt så meget varme, for at dets temperatur ændres. Fourier argumenterer altså for følgende sammenhæng

$$q = C\,m(v_2 - v_1), \tag{4.3}$$

hvor $m$ er massen af materialet, og $v_1$, $v_2$ er start- slut-temperaturen. $C$ er, indenfor nutidig terminologi, den *specifikke varmekapacitet.*

### 4.2.2 Varmeledning internt i materialer

Ud fra ligning 4.1 og 4.3 udleder Fourier følgende ligning:

$$CD\frac{\partial v}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{4.4}$$

som beskriver temperaturen $v$ af et punkt internt i et materiale. Temperaturen $v$ er en funktion af $x$, $y$, $z$ og $t$, dvs. de rumlige (kartesiske) koordinater, og tiden. $D$ angiver densiteten. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ er et udtryk for ændringen af temperaturgradienten. Hvis denne er positiv tilføres mere varme, end der afgives. Er den negativ afgives mere, end der tilføres. Ligning 4.4 udtrykker, at den varme (givet ved $K(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2})$), som bliver tilført en infinitesimal lille del af et legeme, bliver brugt til at opvarme denne del. Opvarmningen er givet ved $CD\frac{\partial v}{\partial t}$. Det ses, at jo større varmeledningsevnen $K$ er, desto mere varme bliver der tilført, og jo større varmekapaciteten $C$ eller densiteten $D$ er, desto mere varme skal der til at opvarme den lille del af legemet. I dag ville vi nok udtrykke denne ligning vha. nablaoperatoren

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}, \tag{4.5}$$

hvor $\hat{x}$, $\hat{y}$ og $\hat{z}$ er enhedsvektorerne i de tre retninger. Dette ville give

$$CD\frac{\partial v}{\partial t} = K\nabla^2 v, \tag{4.6}$$

som er den sædvanlige måde at opskrive varmeledningsligningen på.

### 4.2.3 Varmeledning fra materialer til omgivelser

Fourier udleder også ligningen

$$\frac{K\left(m\frac{\partial v}{\partial x} + n\frac{\partial v}{\partial y} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} + h(v - v_0) = 0, \tag{4.7}$$

som beskriver temperaturen af et punkt på overfladen af et materiale, som er i berøring med almindelig luft. $N = (m, n, p)$ er en normalvektor[4] til overfladen og $v_o$ er temperaturen af omgivelserne.

Ligning 4.7 udtrykker, at den mængde varme (givet ved $\frac{K(m\frac{\partial v}{\partial x}+n\frac{\partial v}{\partial y}+p\frac{\partial v}{\partial z})}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$), som strømmer til overfladen, er lige så stor som den mængde varme (givet ved $h(v-v_o)$), der forlader overfladen igen. Dette er et naturligt krav, da en uendelig tynd overflade ikke kan indeholde noget varme. Ved at skrive 4.7 op med nablaoperatoren bliver ligningen

$$KN \cdot \nabla v + h(v - v_o)\sqrt{m^2+n^2+p^2} = 0. \tag{4.8}$$

Hvis vi derudover stiller det (naturlige) krav, at normalvektoren skal være en enhedsvektor, får vi ligningen

$$K(\hat{N} \cdot \nabla v + h(v - v_0) = 0. \tag{4.9}$$

## 4.3 Fouriers løsning af varmeledningsligningen

Det første eksempel, hvor Fourier løser ligningerne for varmeledning, i *Théorie Analytique*, er det *uendelige rektangulære legeme.* I samme kapitel som Fourier

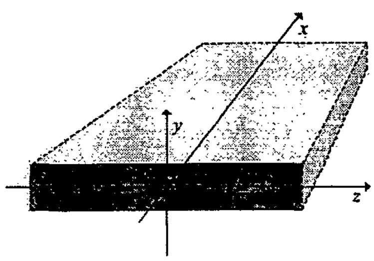
[4] $N$ behøver ikke nødvendigvis at have længden 1.

løser ligningerne for dette specialtilfælde, opstiller han de generelle trigonometriske rækker for funktioner.

Det uendelige rektangulære legeme er defineret som et legeme beliggende mellem to uendeligt store planer parallelle med $z$-$x$-planen. Legemet strækker sig fra $z = -\infty$ til $z = \infty$, og fra $x = 0$ til $x = \infty$. Planerne ligger i højderne $y = -\frac{\pi}{2}$ og $y = \frac{\pi}{2}$ (se figur 4.4). En del af $y$-$z$-planen i $x = 0$ udgør en enkelt 'endeplan'. Endeplanen strækker sig fra $z = -\infty$ til $z = \infty$, og fra $y = -\frac{\pi}{2}$ til $y = \frac{\pi}{2}$. Det materiale, der bliver regnet på, er således punktmængden

$$M = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < z < \infty\} \tag{4.10}$$

Fourier stiller kravene, at endeplanen holdes ved en konstant temperatur på 1 grad, og at top- og bundplanen holdes ved en konstant temperatur på 0 grader.




**Figur 4.4** Et udsnit af det uendelige rektangulære legeme, som Fourier regner på. Endeplanen er fastholdt ved temperaturen 1, og top samt bund er fastholdt ved temperaturen 0.

### 4.3.1 Differentialligningen

Varmeledningsproblemet løser han først i *det stationære tilfælde*, dvs. hvor temperaturen har opnået ligevægt og altså ikke ændrer sig pr. tid. Dette reducerer umiddelbart ligning 4.4 til

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{4.11}$$

som pga. symmetriårsager endvidere kan reduceres til

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{4.12}$$

Derudover er der ikke nogen varmeledning fra legemet til omgivelserne af den slags, som er beskrevet i ligning 4.7. Dette skyldes, at det legeme, der betragtes, er i kontakt med de to planer fastholdt ved temperaturen 0 grader og endeplanen fastholdt ved 1 grad. Legemet er således ikke i kontakt med luft nogen steder. Problemet er nu at bestemme $v$, som er blevet reduceret til en funktion af $x$ og $y$. Der er ingen afhængighed af $t$, da vi behandler det stationære tilfælde, og der er ingen afhængighed af $z$ pga. symmetrien i legemet.

### 4.3.2 Separation af de variable

Fourier angriber dette problem vha. separation af variable. Metoden var ikke ukendt på Fouriers tid, men den var heller ikke almindeligt udbredt [Grattan-Guinness, 1969][s. 231]. Som det gøres ved løsning af differentialligninger vha. separation af variable, antager Fourier, at løsningen til ligning 4.12 kan skrives som et produkt af to funktioner; den ene udelukkende en funktion af $x$, den anden udelukkende af $y$

$$v(x,y) = F(x)f(y). \tag{4.13}$$

Antages dette, bliver ligning 4.12 til

$$0 = f(y)\frac{d^2F(x)}{dx^2} + F(x)\frac{d^2f(y)}{dy^2}, \tag{4.14}$$

som omskrives til

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = -\frac{1}{f(y)}\frac{d^2f(y)}{dy^2}. \tag{4.15}$$

Den eneste måde, denne ligning kan være opfyldt, er, hvis begge sider af lighedstegnet er lig med en konstant – Fourier kalder denne konstant m – således at

$$\begin{aligned} \frac{d^2F(x)}{dx^2} &= mF(x) \\ \frac{d^2f(y)}{dy^2} &= -mf(y). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Fourier argumenterer hovedsageligt ud fra fysiske argumenter for, at den rigtige løsning er af formen

$$v(x,y) = e^{-kx}\cos ky, \tag{4.17}$$

hvor $k = \sqrt{m}$ og $m$ er reel og positiv. Det ses, at denne løsning opfylder ligning 4.12 og randbetingelserne $v(x, \pm\frac{\pi}{2}) = 0$, samt $v(\infty, y) = 0$ hvis k er et ulige heltal. Dette er også tilfældet, hvis $v$ er en linearkombination af sådanne løsninger

$$v(x,y) = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \dots, \tag{4.18}$$

hvor $a$, $b$, $c$ osv. er konstanter. Der mangler dog stadig en redegørelse for randbetingelsen $v(0,y) = 1$. Når $x = 0$ kan ligning 4.18 reduceres til

$$v(0,y) = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \dots \tag{4.19}$$

Hvis det er muligt at bestemme konstanterne $a$, $b$, $c$ osv., således at den trigonometriske række 4.19 konvergerer mod 1 for alle $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, er randbetingelsen $v(0,y) = 1$ også opfyldt, og en løsning til problemet inklusiv randbetingelser er fundet.

### 4.3.3 Det uendelige ligningssystem

Fourier finder koefficienterne til rækken i 4.19 ved at opstille randbetingelsen som ligningen

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \ldots \tag{4.20}$$

og så differentiere alle led et ad gangen, hvilket giver

$$\begin{aligned} 0 &= a\sin y + 3b\sin 3y + 5c\sin 5y + \ldots \\ 0 &= a\cos y + 3^2 b\cos 3y + 5^2 c\cos 5y + \ldots \\ 0 &= a\sin y + 3^3 b\sin 3y + 5^3 c\sin 5y + \ldots \end{aligned} \tag{4.21}$$

På Fouriers tid var ledvis differentiering af en sådan funktionsrække i overensstemmelse med de gældende regler. I en nutidig behandling af problemstillingen er gyldigheden af operationerne kun sikret, hvis den første række konvergerer punktvis og de efterfølgende konvergerer uniformt. Dette er tydeligvis ikke opfyldt for ovenstående rækker (f.eks. springer 4.20 i endepunkterne), men Fourier er dog så heldig, at hans udregninger lykkes alligevel. Da ligning 4.20 og ligningssystemet 4.21 skal være opfyldt for alle $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, skal de selvfølgeligt også være opfyldt for $y = 0$, som ved indsættelse giver

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + \ldots \\ 0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + \ldots \\ 0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + \ldots \\ 0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + \ldots \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dette er, forklarer Fourier, uendeligt mange ligninger med uendeligt mange ubekendte. Kan man løse dette ligningssystem og dermed bestemme alle koefficienterne, er rækken bestemt. Vi vil nu beskrive hvordan Fourier løser ligningssystemet.

### 4.3.4 Løsning af ligningssystemet

Fouriers metode til at finde koefficienterne er i princippet følgende: Først løses en ligning med én ubekendt ($a$)

$$1 = a. \tag{4.23}$$

Derefter løses to ligninger med to ubekendte ($a$ og $b$)

$$\begin{aligned} 1 &= a + b \\ 0 &= a + 3^2 b, \end{aligned} \tag{4.24}$$

og efter dette tre ligninger med tre ubekendte ($a$, $b$ og $c$)

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c \\ 0 &= a + 3^2 b + 5^2 c \\ 0 &= a + 3^4 b + 5^4 c, \end{aligned} \tag{4.25}$$

osv. $a$ har én værdi i ligningssystemet med en ligning, en anden i tilfældet med to ligninger, en tredje i tilfældet med tre ligninger osv. Fourier forklarer, at følgen af $a$'er må konvergere mod det 'sande' $a$, når antallet af ligninger går mod uendeligt.

Tricket til at finde løsningerne til de forskellige ligningssystemer er at indse, at der er en form for system i ligningerne. Hvis man tager fire ligninger med fire ubekendte, vil de se således ud

$$\begin{aligned} 1 &= a+b+c+d \\ 0 &= a+3^2b+5^2c+7^2d \\ 0 &= a+3^4b+5^4c+7^4d \\ 0 &= a+3^6b+5^6c+7^6d. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ved at multiplicere den første ligning med $7^2$ og trække den næste fra fås

$$7^2 = (7^2-1)a+(7^2-3^2)b+(7^2-5^2)c. \tag{4.27}$$

Gøres tilsvarende for de andre fås

$$\begin{aligned} 0 &= (7^2-1)a+(7^2-3^2)3^2b+(7^2-5^2)5^2c \\ 0 &= (7^2-1)a+(7^2-3^2)3^4b+(7^2-5^2)5^4c. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Ved at indføre nye størrelser $a'$, $b'$ og $c'$ givet ved

$$\begin{aligned} \frac{7^2-1}{7^2}a &= a' \\ \frac{7^2-3^2}{7^2}b &= b' \\ \frac{7^2-5^2}{7^2}c &= c', \end{aligned} \tag{4.29}$$

opnår vi følgende nye ligningssystem

$$\begin{aligned} 1 &= a'+b'+c' \\ 0 &= a'+3^2b'+5^2c' \\ 0 &= a'+3^4b'+5^4c', \end{aligned} \tag{4.30}$$

som er det samme som 4.25. Således kan vi, hvis vi kender løsningen til ligningssystemet med tre ligninger, finde løsningen (på nær $d$) i ligningssystemet med fire ligninger. Vi ganger blot løsningen i ligningssystemet med tre ligninger med faktorne givet i 4.29. F.eks. er $a = \frac{7^2}{7^2-1}a'$, hvor $a$ er løsningen i tilfældet med fire ligninger og $a'$ er løsningen i tilfældet med 3.

Eliminerer vi nu $c$ i 4.30 på samme måde som vi eliminerede $d$ i 4.26 får vi

$$\begin{aligned} 5^2 &= (5^2-1)a'+(5^2-3^2)b' \\ 0 &= (5^2-1)a'+(5^2-3^2)3^2b', \end{aligned} \tag{4.31}$$

som ved omskrivningen

$$\begin{aligned} \frac{5^2-1}{5^2}a' &= a'' \\ \frac{5^2-3^2}{5^2}b' &= b'', \end{aligned} \tag{4.32}$$

bliver til

$$\begin{aligned} 1 &= a''+b'' \\ 0 &= a''+3^2b'', \end{aligned} \tag{4.33}$$

hvilket er det samme som 4.24. En sidste elimination (af $b$) og omskrivningen

$$\frac{3^2-1}{3^2}a'' \to a''', \tag{4.34}$$

giver

$$1 = a''', \tag{4.35}$$

som er den ene ligning med den ene ubekendte. Ved at følge denne fremgangsmåde kan vi altså finde den 'sande' værdi af $a$, dvs. løsningen til det uendelige ligningssystem, som er $a = 1\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\ldots$. Vi kan også finde den 'sande' værdi af $b$, hvis vi kender $b$ for to ligninger med to ubekendte (der er ikke nogen løsning for $b$ i tilfældet med en ligning). Løsningen for $b$ med 2 ligninger med 2 ubekendte er, $b'' = \frac{1}{1-3^2}$. Vi får derfor $b = \frac{1}{1-3^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-3^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-3^2}\cdot\ldots$

Ligeledes kan vi finde de 'sande' værdier for $c$, $d$ osv., hvis vi kender $c$ for tre ligninger med tre ubekendte, $d$ for fire ligninger med fire ubekendte osv. Vi tager jo blot disse værdier, og ganger dem med de faktorer (som dem givet i 4.29, 4.32 og 4.34), der transformerer dem til løsninger for ligningssystemer med flere ligninger. De 'sande' løsninger findes, når produktet består af uendeligt mange faktorer.

Løsningerne for $b$ i to ligninger med to ubekendte er som nævnt, $b = \frac{1}{1-3^2}$, løsningen for $c$ i tre ligninger med tre ubekendte er $c = \frac{1}{1-5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-5^2}$, og løsningen for $d$ i fire ligninger med fire ubekendte er $d = \frac{1}{1-7^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-7^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-7^2}$ osv. Således bliver de samlede løsninger til koefficienterne i det uendelige ligningssystem

$$\begin{aligned} a &= 1\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\ldots \\ b &= \frac{1}{1-3^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-3^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-3^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-3^2}\cdot\ldots \\ c &= \frac{1}{1-5^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-5^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-5^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-5^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-5^2}\cdot\ldots \\ d &= \frac{1}{1-7^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-7^2}\cdot\frac{5^2}{5^2-7^2}\cdot\frac{9^2}{9^2-7^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-7^2}\cdot\frac{13^2}{13^2-7^2}\cdot\ldots \end{aligned} \tag{4.36}$$

som med simple omskrivninger og ved at benytte at $\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots$ (Wallis theorem) bliver reduceret til

$$\begin{aligned} a &= \frac{4}{\pi} \\ b &= -\frac{4}{3\pi} \\ c &= +\frac{4}{5\pi} \\ d &= -\frac{4}{7\pi}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Hvis vi husker Eulers metode til udledning af koefficienterne for en potensrække (se afsnit 3.2.3), ser vi, at Fouriers metode minder meget om denne.

Ved at indsætte værdierne for de nu fundne koefficienter i ligning 4.18 findes den samlede løsning, som er

$$v(x,y) = \frac{4}{\pi}e^{-x}\cos y - \frac{4}{3\pi}e^{-3x}\cos 3y + \frac{4}{5\pi}e^{-5x}\cos 5y - \ldots \tag{4.38}$$

### 4.3.5 Fouriers kommentarer til løsningen

Faktisk opskriver Fourier ikke umiddelbart ligning 4.38, men stopper op for at se nærmere på rækken

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots, \tag{4.39}$$

hvis sum er $\frac{\pi}{4}$ i intervallet $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Fouriers opfattelse af konvergens af en funktionsrække er, hvad vi i dag ville kalde punktvis konvergens. Fourier er dog ikke særlig præcis omkring begrebet. Dette ses ud fra følgende citat, der omhandler 4.39:

> »It would be easy to prove that this series is always convergent, that is to say that writing instead of $x$ any number whatever, and following the calculation of the coefficients, we approach more and more to a fixed value, so that the difference of this value from the sum of the calculated term becomes less than any assignable magnitude.« [Fourier, 1955][art. 177]

Fourier viser (på en måde vi i dag også ville anse for korrekt), at summen af de $m$ første led i 4.39 kan skrives som

$$C + \delta(m), \tag{4.40}$$

dvs. en konstant $C$ plus en funktion $\delta(m)$. Desuden forklarer han for et fastholdt $x$, at $\delta(m) \to 0$ når $m \to \infty$ – rækken konvergerer altså punktvist. $C$ bestemmer Fourier ved at sætte $x = 0$, hvilket reducerer rækken til den kendte række $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} -$, som har summen $\frac{\pi}{4}$.

Fourier kommer også med følgende interessante bemærkning:

»By giving to the arc $x$ other particular values, we should find other series, which it is useless to set down, several of which have been already published in the works of Euler.« [Fourier, 1955][art. 181]

Her er det tydeligt, at han forsøger at verificere rækken i 4.39 ved at vise, at den for forskellige værdier af $x$ reducerer til forskellige velkendte talrækker.

Derudover finder Fourier, ved at lave forskellige omskrivninger af 4.39 forskellige rækker. Han udleder f.eks. rækken

$$\log(2\cos\frac{1}{2}x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \dots, \tag{4.41}$$

som Euler tidligere havde fundet.

Ikke alle Fouriers omskrivninger ville blive accepteret i dag, uden at der først var gjort rede for lovligheden af dem. Fourier behandler den uendelige sum, som var den endelig, ved f.eks. at bytte om på rækkefølgen af led i summen, bytte om på sum og integraler og differentiere eller integrere leddene et ad gangen. Dette er i nutidig forstand kun tilladt, hvis rækken opfører sig 'pænt', dvs. opfylder forskellige konvergenskriterier. Det skal dog bemærkes at Fourier ikke manipulerer med rækkerne på måder, der på hans tid blev anset for 'ulovlige'. Disse manipulationer er vi godt klar over, Fourier bruger, men vi vil i resten af kapitlet ikke gøre opmærksom på dem hver gang de forekommer, da det virker forvirrende i beviserne.

En række, som vi senere skal opdage er interessant i forbindelse med Fouriers forståelse af funktionsbegrebet, er rækken, som opstår ved ledvis integration af rækken

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots \tag{4.42}$$

Integrationen giver (efter at alle led er blevet ganget med $\frac{2}{\pi}$)

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\sin x - \frac{2}{3^2\pi}\sin 3x + \frac{2}{5^2\pi}\sin 5x - \dots \tag{4.43}$$

Som et sidste resultat inden han fortsætter til den generelle behandling af trigonometriske rækker, viser Fourier, at løsningen på problemet vedrørende varmeledning i det uendelige rektangulære legeme, dvs. ligning 4.38, kan skrives som

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{2\cos y}{e^x - e^{-x}}\right) \tag{4.44}$$

I udledningen af ovenstående bytter Fourier om på rækkefølgen af leddene i rækken.

## 4.4 Fourierrækken for en vilkårlig funktion

Efter at have behandlet specialtilfældet ovenfor går Fourier i gang med det virkeligt interessante, nemlig udviklingen af en, ifølge ham, vilkårlig funktion som en trigonometrisk række.

I en moderne fremstilling definerer man, hvad en *Fourierrække* for en funktion er, og viser så at denne under visse betingelser konvergerer, og at grænsen er funktionen selv. Så viser man, at hvis en trigonometrisk række konvergerer mod en bestemt funktion, vil denne række være funktionens Fourierrække. Fouriers tilgang er noget anderledes, idet han som udgangspunkt antager, at alle funktioner kan skrives som en trigonometrisk række, og opgaven er således 'blot' at udlede en metode til at finde koefficienterne.

Som udgangspunkt gør Fourier det samme, som han gjorde i tilfældet med det uendelige rektangulære legeme nemlig at opstille et uendeligt ligningssystem. Ud fra dette opstilles så endelige ligningssystemer: Én ligning med en ubekendt, to ligninger med to ubekendte, osv. Løsningerne til disse bestemmes 'på en smart måde', og den 'sande' løsning er så den, som følgen af løsninger konvergerer imod, når antallet af ligninger (og ubekendte) går mod uendeligt.

### 4.4.1 Det uendelige ligningssystem for ulige funktioner

Vi vil ikke udførligt gengive den konkrete gennemgang men blot opstille det uendelige ligningssystem og beskrive dets løsninger. Fourier starter med at se på en begrænset del af de 'vilkårlige' funktioner. Han antager nemlig, at funktionen kan opskrives ved en Taylorrække udviklet omkring 0, som kun har led med ulige potenser (en sådan funktion er en ulige funktion). Således kan funktionen nu skrives ved en potensrække og ved en trigonometrisk række

$$\varphi(x) = Ax - B\frac{x^3}{3!} + C\frac{x^5}{5!} - D\frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (4.45)$$

$$\varphi(x) = a\,\sin x + b\,\sin 2x + c\,\sin 3x + d\,\sin 4x + \dots \qquad (4.46)$$

hvor $A = \varphi'(0)$, $B = -\varphi'''(0)$, $C = \varphi^{v}(0)$, $D = -\varphi^{vii}$ osv. Ved at differentiere ligning 4.46 ledvist og sætte $x = 0$, opnås ligningssystemet

$$\begin{aligned} A &= a + 2b + 3c + 4d + \dots \\ B &= a + 2^3b + 3^3c + 4^3d + \dots \\ C &= a + 2^5b + 3^5c + 4^5d + \dots \\ D &= a + 2^7b + 3^7c + 4^7d + \dots, \end{aligned} \qquad (4.47)$$

da $A$, $B$, $C$ osv. udtrykker de afledede.

### 4.4.2 Løsningen til ligningssystemet

Nu er problemet så at løse ligningssystemet 4.47. Metoden, Fourier benytter, er stort set identisk, med den han brugte i specialtilfældet, men de tekniske vanskeligheder er større, og udregningerne er langt mere komplicerede. Fourier kommer frem til følgende løsning for det uendelige ligningssystem i punktet $\pi$

$$a = +\frac{2}{1\pi}\varphi(\pi) - \frac{2}{1^3\pi}\varphi''(\pi) + \frac{2}{1^5\pi}\varphi^{iv}(\pi) - \ldots \tag{4.48}$$

$$b = -\frac{2}{2\pi}\varphi(\pi) + \frac{2}{2^3\pi}\varphi''(\pi) - \frac{2}{2^5\pi}\varphi^{iv}(\pi) + \ldots \tag{4.49}$$

$$c = +\frac{2}{3\pi}\varphi(\pi) - \frac{2}{3^3\pi}\varphi''(\pi) + \frac{2}{3^5\pi}\varphi^{iv}(\pi) - \ldots \tag{4.50}$$

$$d = -\frac{2}{4\pi}\varphi(\pi) + \frac{2}{4^3\pi}\varphi''(\pi) - \frac{2}{4^5\pi}\varphi^{iv}(\pi) + \ldots \tag{4.51}$$

Vi laver nu en mindre omdøbning af koefficienterne: $a_n$ står fra nu af for den $n$'te koefficient, dvs. $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$ osv. Koefficienterne kan så udtrykkes på følgende mere kompakte form

$$a_n = \pm\frac{2}{n\pi}\varphi(\pi) \mp \frac{2}{n^3\pi}\varphi''(\pi) \pm \frac{2}{n^5\pi}\varphi^{iv}(\pi) \mp \ldots, \tag{4.52}$$

hvor det første fortegn er positivt, hvis $n$ er ulige, og negativt hvis $n$ er lige.

En af Fouriers store pointer er, at koefficienterne til den trigonometriske række for en vilkårlig funktion kan skrives som bestemte integraler. Resultatet når han frem til ved at vise, at rækken, som udtrykker koefficienten i 4.52, kan skrives som et integral, hvilket vi nu vil vise. Vi viser det, som Fourier gør. Først opfattes koefficienten $a_n$ som en funkton af $x$

$$a_n(x) = \pm\frac{2}{n\pi}\varphi(x) \mp \frac{2}{n^3\pi}\varphi''(x) \pm \frac{2}{n^5\pi}\varphi^{iv}(x) \mp \ldots \tag{4.53}$$

Denne differentieres ledvist to gange, hvilket giver

$$a_n''(x) = \pm\frac{2}{n\pi}\varphi''(x) \mp \frac{2}{n^3\pi}\varphi^{iv}(x) \pm \frac{2}{n^5\pi} \mp \varphi^{vi}(x) \pm \ldots \tag{4.54}$$

Sammenligner man ligning 4.54 med ligning 4.53 og nøjes med at se på de tilfælde, hvor $n$ er ulige, ser man, at

$$a_n(x) + \frac{1}{n^2}\frac{d^2a_n(x)}{dx^2} = \frac{2}{n\pi}\varphi(x). \tag{4.55}$$

Denne sammenligning er i virkeligheden at lægge 4.53 sammen med 4.54. Løsningen til differentialligningen 4.55 er

$$a_n(x) = \frac{2}{\pi}\sin nx \int \cos nx\, \varphi(x)dx - \frac{2}{\pi}\cos nx \int \sin nx\, \varphi(x)dx. \tag{4.56}$$

Da $n$ er et ulige heltal og da $a_n(x)$ skal vurderes i $x = \pi$, bliver udtrykket til

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\, \varphi(x)dx \tag{4.57}$$

Fourier forklarer, at hvis man løser integralet i 4.57 vha. delvis integration, får man rækken givet i 4.53. Han gør det ikke selv, men det er let at vise (vi undlader konstanten $\frac{2}{\pi}$).

$$\int_0^\pi \sin nx\, \varphi(x)dx = -\frac{1}{n}[\cos nx\, \varphi(x)]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\, \varphi'(x)dx \tag{4.58}$$

$$= \frac{\varphi(\pi)}{n} + \frac{1}{n^2}[\sin nx\, \varphi'(x)]_0^\pi - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi \sin nx\, \varphi''(x)dx. \tag{4.59}$$

Der gøres fra 4.58 til 4.59 brug af, at $\cos n\pi = -1$, når $n$ er ulige, og at $\varphi(0) = 0$ da $\varphi(x)$ har en Taylorrække, som kun har led med ulige potenser. Fortsætter vi udregningerne får vi

$$= \frac{\varphi(\pi)}{n} + 0 + \frac{1}{n^3}[\cos nx\,\varphi''(x)]_0^\pi - \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \cos nx\,\varphi'''(x)dx \quad (4.60)$$

$$= \frac{\varphi(\pi)}{n} - \frac{\varphi''(\pi)}{n^3} - \frac{1}{n^4}[\sin nx\,\varphi'''(x)]_0^\pi + \frac{1}{n^4}\int_0^\pi \sin nx\,\varphi^{iv}(x)dx \quad (4.61)$$

$$= \frac{\varphi(\pi)}{n} - \frac{\varphi''(\pi)}{n^3} + \frac{\varphi^{iv}(\pi)}{n^5} + \frac{1}{n^6}[\sin nx\,\varphi^{v}(x)]_0^\pi - \frac{1}{n^6}\int_0^\pi \sin nx\,\varphi^{vi}(x)dx \quad (4.62)$$

Som det ses, kan vi fortsætte med dette, og hvis vi ganger den resulterende række med $\frac{2}{\pi}$, opnås rækken for koefficienterne givet i ligning 4.52. I udregningerne ovenfor har vi kun set på det tilfælde, hvor $n$ er ulige. Hvis $n$ er lige, er forløbet af udregningerne stort set identisk.

Fourier argumenterer således for, at en vilkårlig ulige funktion $\varphi(x)$ i intervallet $[0, \pi]$ kan udvikles ved rækken

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x + \ldots, \quad (4.63)$$

med koefficienterne

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,\varphi(x)\,dx. \quad (4.64)$$

### 4.4.3 Fouriers trick

Fourier forklarer, at man kan *verificere* dette resultat ved følgende udregning. Tager vi rækken givet i ligning 4.63, multiplicerer hvert led med $\sin nx$ og integrerer ledvist fra 0 til $\pi$ fås

$$\int_0^\pi \sin nx\,\varphi(x)\,dx = a_1\int_0^\pi \sin nx\ \sin x\,dx + a_2\int_0^\pi \sin nx\ \sin 2x\,dx + \ldots \quad (4.65)$$

Integralet $\int_0^\pi \sin nx \sin mx\,dx$, hvor $n$ og $m$ er heltal, er 0 hvis $n$ og $m$ er forskellige og $\frac{\pi}{2}$, hvis de er ens. Dette medfører at

$$\int_0^\pi \sin nx\,\varphi(x)\,dx = a_n\frac{\pi}{2} \quad (4.66)$$

eller

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,\varphi(x)\,dx \quad (4.67)$$

som er det resultat, vi har set før. Selv om ovenstående ikke er et generelt gyldigt bevis, er denne metode til at bestemme Fourierkoefficienterne dog så elegant, at den ofte bruges i fysikken. Metoden, som under visse betingelser er gyldig, går i dag under navnet *Fouriers trick.*

### 4.4.4 Fremstilling ved cosinusrækker

Fourier bruger Fouriers trick til at 'vise', at ikke kun funktioner hvis Taylorrække udelukkende består af led med ulige potenser (ulige funktioner), kan opskrives vha. metoden ovenfor. Som eksempel viser han, at $\cos(x)$ i intervallet $[0, \pi]$ kan skrives på formen

$$\cos x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)\sin 2x + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\sin 4x + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\sin 6x + \ldots \quad (4.68)$$

At kunne opskrive en lige funktion som en række af ulige funktioner er et meget spektakulært resultat på Fouriers tid. Fourier bruger eksemplet til at sandsynliggøre, hvor kraftfuld og generel hans metode er og fortsætter umiddelbart derefter med at 'vise', at han vha. Fouriers trick også kan udvikle en (ifølge ham) vilkårlig funktion i intervallet $[0, \pi]$ ved en cosinusrække. Resultatet bliver at rækken

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + b_3\cos 3x + b_4\cos 4x + \ldots \quad (4.69)$$

med koefficienterne

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\, \varphi(x)\, dx \quad (4.70)$$

fremstiller funktionen $\varphi(x)$ i intervallet $[0, \pi]$.

### 4.4.5 Eksempler på Fourierrækker

Fourier udvikler ved hjælp af Fouriers trick $\frac{x}{2}$ ved en sinusrække

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots \quad (4.71)$$

og ved en cosinusrække

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{3^2\pi}\cos 3x - \frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \ldots \quad (4.72)$$

Derudover har han også udledt rækken for $\frac{x}{2}$ ved en sinusrække i forbindelse med behandlingen af varmeledning i det uendelige rektangulære legeme (ligning 4.43). Til disse tre rækker knytter han følgende bemærkning:

> »It must be remarked that these three values of $\frac{1}{2}x$ ought not to be considered as equal; with reference to all possible values of $x$, the three preceding developments have a common value only when the variable $x$ is included between 0 and $\frac{1}{2}\pi$.« [Fourier, 1955][art. 225]

Fourier kommer altså her med et direkte angreb på den analytiske fortsættelsesegenskab ved at fremføre tre funktioner som er ens i et bestemt interval, men afviger udenfor dette.

På dette tidspunkt er det interessant at præsentere en figur, som Fourier har tegnet. Denne stammer ikke fra *Théorie Analytique*, men fra hans 1807-memoir. I *Théorie Analytique* beskrives de tre funktioner men figurerne er udeladt. Det ses af figuren, at Fourier forestiller sig de vertikale linjer på den midterste figur som hørende til funktionen, hvilket ikke giver mening i det nutidige funktionsbegreb.

Fourier viser også eksempler på, at det er muligt at opskrive trigonometriske rækker for funktioner, som er Euler-diskontinuerte og funktioner, som er 'rigtigt' diskontinuerte. Han udleder trigonometriske rækker for følgende funktioner

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} c & x \in ]0, \alpha[ \\ 0 & x \in ]\alpha, \pi[ \end{cases} \tag{4.73}$$

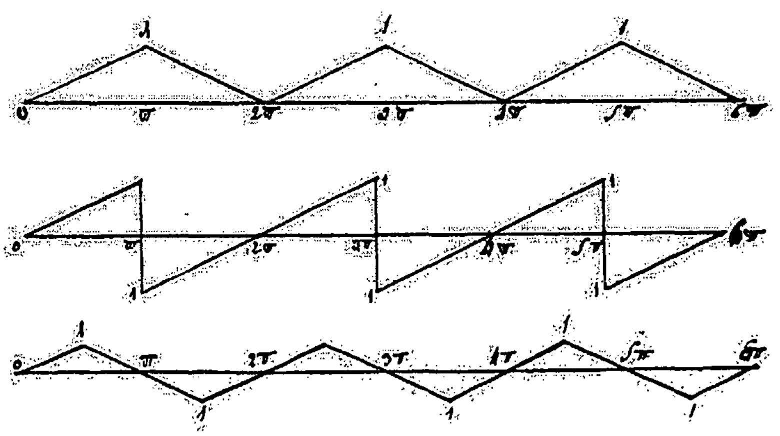
$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{\alpha} & x \in ]0, \alpha[ \\ 0 & x \in ]\alpha, \pi[ \end{cases} \tag{4.74}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2 & x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ 0 & x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \end{cases} \tag{4.75}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} x & x \in ]0, \alpha[ \\ \alpha & x \in ]\alpha, \pi - \alpha[ \\ \pi - x & x \in ]\pi - \alpha, \pi[ \end{cases} \tag{4.76}$$

hvor $c$ og $\alpha$ er passende konstanter. $\varphi_2$, $\varphi_3$ og $\varphi_4$ er Euler-diskontinuerte funktioner, idet de tilhørende kurver er sammenhængende men beskrevet ved forskellige funktionsudtryk i forskellige intervaller. $\varphi_1$ er sådan set slet ikke er en funktion ifølge Euler, da dens kurve ikke er sammenhængende.

Da en funktionsrække ifølge Euler er et analytisk udtryk og dermed en kontinuert funktion, kan Fourier således både opskrive et udtryk for en funktion, som er Euler-kontinuert, og et udtryk som er Euler-diskontinuert.



**Figur 4.5** Fra øverst til nederst; tegninger af funktionerne givet ved rækkerne i 4.72, 4.71 og 4.43. Bemærk hvorledes Fourier forbinder springdiskontinuiteterne på den midterste kurve med fuldt optrukne linier.

### 4.4.6 Den fulde trigonometriske række

Fourier argumenterer for, hvordan en kombination af 4.63 og 4.69 kan benyttes til at beskrive en fuldstændig vilkårlig funktion på intervallet $[-\pi, \pi]$.

Ud fra geometrisk inspirerede argumenter viser han, at en vilkårlig funktion kan skrives som summen af en lige og en ulige funktion. Ydermere vises, at en sinusrække kan beskrive en vilkårlig ulige funktion i intervallet $[-\pi, \pi]$, og at en cosinusrække kan beskrive en lige funktion i samme interval. Således kan sinus- og cosinusrækkerne bruges til at beskrive den ulige hhv. den lige del af en vilkårlig funktion. Resultatet Fourier viser er altså, at en vilkårlig funktion $\varphi(x)$ kan udvikles i intervallet $[-\pi, \pi]$ ved

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x \\ &\quad + a_3 \sin 3x + b_3 \cos 3x + a_4 \sin 4x + b_4 \cos 4x + \ldots \qquad (4.77)\end{aligned}$$

hvor koefficienterne er

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \varphi(x)\, dx \qquad (4.78)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \varphi(x)\, dx \qquad (4.79)$$

For en grundigere argumentation for opskrivningen af den fulde række se afsnit 6.2.2.

## 4.5 Konvergens af Fourierrækkerne

Fourier viser på intet tidspunkt, at Fourierrækken for en vilkårlig funktion er konvergent. Han viser konvergensen for en lang række specialtilfælde ved at vise, at rækkerne bliver til konvergente talrækker, når bestemte værdier af $x$ indsættes. Selvom Fourier selv mener, at have bevist lighedstegnet i ligning 4.77 (med koefficienterne givet i 4.78 og 4.79) adskillige gange, er det nærmeste han kommer et bevis i nutidig forstand nærmest blot en skitse til et sådant (se [Fourier, 1955][art. 423]). Udgangspunktet er en omskrivning af 4.77. Indsætter vi udtrykkene for koefficienterne i ligningen, har vi

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx \\ &+ \frac{1}{\pi}\sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, \varphi(x)\, dx + \frac{1}{\pi}\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, \varphi(x)\, dx \\ &+ \frac{1}{\pi}\sin 2x \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, \varphi(x)\, dx + \frac{1}{\pi}\cos 2x \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\, \varphi(x)\, dx \\ &+ \frac{1}{\pi}\sin 3x \int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x\, \varphi(x)\, dx + \frac{1}{\pi}\cos 3x \int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x\, \varphi(x)\, dx \\ &+ \ldots \qquad (4.80)\end{aligned}$$

Eller mere kompakt

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx & (4.81)\\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\varphi(x)\,dx+\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\varphi(x)\,dx\right].\end{aligned}$$

Hvis vi ændrer integrationsvariablen fra $x$ til $\alpha$ og flytter $\sin nx$ og $\cos nx$ ind under integralerne får vi

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha & (4.82)\\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin n\alpha\,\varphi(\alpha)\,d\alpha+\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos n\alpha\,\varphi(\alpha)\,d\alpha\right].\end{aligned}$$

Ved at bytte om på rækkefølgen af integration og summation, og ved at benytte regnereglen $\sin nx\sin n\alpha+\cos nx\cos n\alpha=\cos n(x-\alpha)$, bliver 4.82 til

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha\\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-\alpha)\right)d\alpha. & (4.83)\end{aligned}$$

Hvis vi nu indfører $\cos 0(x-\alpha)$ i det første led, og omskriver det andet en smule får vi

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\cos 0(x-\alpha)\,d\alpha\\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-\alpha)\right)d\alpha. & (4.84)\end{aligned}$$

Da $\cos n(x-\alpha)$ er en lige funktion mht. $n$, er $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\cos n(x-\alpha)$, og 4.84 reducerer til

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos n(x-\alpha)\right)d\alpha. \qquad (4.85)$$

For at følge Fouriers arbejde vil vi slutte af med at lave et variabelskift, som han også laver, nemlig $\alpha'=\frac{r}{\pi}\alpha$ og $x'=\frac{r}{\pi}x$. Dette giver

$$\varphi(\frac{\pi}{r}x') = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\varphi(\frac{\pi}{r}\alpha')\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{r}(x'-\alpha')\right)d\alpha'. \qquad (4.86)$$

Undlader vi 'mærkerne' og indser, at $\varphi(\frac{\pi}{r}x')$ blot er en anden vilkårlig funktion af $x'$, og indfører $X=2r$, får vi

$$\varphi(x)=\frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}}\varphi(\alpha)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2n\pi}{X}(x-\alpha)\right)d\alpha. \qquad (4.87)$$

Herfra starter så, hvad vi kunne kalde Fouriers skitse af et konvergensbevis[5]. Ved at gøre summen i 4.87 endelig og lave følgende omskrivning

$$\sum_{n=-N}^{N} \cos nu = \cos Nu + \sin Nu \frac{\sin u}{1-\cos u}, \tag{4.88}$$

kan vi nu omskrive 4.87 med endelige grænser til

$$\varphi(x) = \frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \varphi(\alpha)\cos Nu \, d\alpha + \frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \varphi(\alpha)\sin Nu \frac{\sin u}{1-\cos u} d\alpha, \tag{4.89}$$

hvor $u = \frac{2\pi}{X}(x-\alpha)$. Ifølge Riemann-Lebesgue-lemmaet giver det første integral nul når $N \to \infty$. Tilbage er så

$$\frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \varphi(\alpha)\sin Nu \frac{\sin u}{1-\cos u} d\alpha \tag{4.90}$$

og opgaven er 'blot' at vise, at udtrykket i 4.90 konvergerer når $N \to \infty$. Fourier argumenterer løst for, at udtrykket konvergerer mod $\varphi(x)$ [Fourier, 1955][art. 423]. Ideen i argumentationen er at dele integralet i 4.90 op i to dele – et integral omkring nul, hvor man integrerer fra $-\varepsilon$ til $\varepsilon$ ($\varepsilon$ er lille) og integralet af 'resten'. Fourier argumenterer for, at integralet omkring nul bliver lig $X\varphi(x)$ og integralet af resten bliver nul når $N$ 'bliver uendelig'. Fouriers argumenter er prægede af geometriske ideer og langt fra grundige nok. Beviset kræver rent faktisk meget arbejde, hvis det skal gøres ordenligt. Fourier er selv klar over, at hans skitse ikke er et rigtigt bevis, men som han siger »It will be sufficient to indicate the course of the proof« [Fourier, 1955][art. 423]. Han mener altså tilsyneladende, at skitsen er nok!

[5] Det er lidt interessant at Fourier i opskrivningen af sin version af 4.87 begår de tilsyneladende banale fejl at ændre brøken foran integralet fra $\frac{1}{X}$ til $\frac{1}{2\pi}$ og grænserne fra $\frac{-X}{2}$ og $\frac{X}{2}$ til $-X$ og $X$ [Fourier, 1955][art. 423].

# 5 Fouriers brud med det Eulerske funktionsbegreb

I dette kapitel vil vi se nærmere på Fouriers brud med det Eulerske funktionsbegreb. Dette vil vi gøre på to forskellige måder.

For det første vil vi ud fra den del af Fouriers arbejde, som blev præsenteret i sidste kapitel samt visse nye elementer, forsøge at vurdere, hvordan Fouriers arbejde brød med det Eulerske funktionsbegreb.

Dernæst vil vi se på den kritik, Fouriers arbejde gav anledning til fra Frankrigs ledende matematikere. Kritikken er interessant, da den belyser hvilke dele af Fouriers arbejde, som var 'uspiseligt' for datidens matematikere og dermed netop viser, hvor arbejdet brød med hans samtids matematik. Analysen bygger på sekundær litteratur, nærmere bestemt [D.J.Struik, 1990], [Ravetz, 1961], [Grattan-Guinness, 1970], [Herivel, 1975] og [Lützen, 1978]. Analysen er interessant, da den giver en anden vinkel på Fouriers brud med det Eulerske funktionsbegreb.

## 5.1 Analyse af Fouriers arbejde

I dette afsnit vil vi diskutere Fouriers arbejde, herunder hans opfattelse af funktionsbegrebet og de egenskaber han tillægger funktioner.

### 5.1.1 Hvad er en funktion

Det oprindelige Eulerske funktionsbegreb bygger som beskrevet i afsnit 3.2.1 på, at en funktion er et *analytisk* udtryk. Fouriers beskrivelse af sit funktionsbegreb antyder en lidt mere generel opfattelse. Efter udledningen af Fourierkoefficienterne for sinus og cosinus bemærker Fourier:

> »This and the preceding theorem [udledningen af koefficienterne for cosinus hhv. sinus] suit all possible functions, whether their character can be expressed by known methods of analysis, or whether they correspond to curves traced arbitrarily.« [Fourier, 1955][art. 224]

Udover analytiske udtryk opfatter Fourier altså også vilkårlige geometriske sammenhænge mellem variable som funktioner. Denne fortolkning af funktionsbegrebet adskiller sig ikke væsentligt fra den Eulerske, selvom Euler i ovenstående beskrivelse nok ville insistere på, at de geometriske sammenhænge svarer til analytiske udtryk. Fourier uddyber senere i *Théorie Analytique* sin opfattelse af en funktion:

> »In general the function $f(x)$ represents a succession of values or ordinates each of which is arbitrary. An infinity of values being given to the abscissa $x$, there are equal number of ordinates $f(x)$. All have actual numerical values, either positive or negative or null.« [Fourier, 1955][art. 417]

Her adskiller Fouriers opfattelse sig klart fra den Eulerske, idét Fourier kræver, at antallet af funktionsværdier $f(x)$ (ordinaterne) er det samme som antallet af værdier af $x$. Fourier knytter hermed, omend på en noget uklar måde, kravet om entydighed til funktionsbegrebet. Af citatet ses i øvrigt, at Fourier har en geometrisk tilgang til matematikken, idét han vælger at beskrive den generelle funktion med abscisse og ordinat.

Ovenstående citat kan godt give det indtryk, at Fourier ville kunne acceptere funktioner, som ikke nødvendigvis kan tegnes, idet han forklarer, at funktionens værdier eller ordinaterne alle er vilkårlige. Dette er dog noget uklart, da han i den foregående bemærkning giver det indtryk, at hans funktioner enten kan repræsenteres analytisk eller tegnes. Fourier tager da heller ikke konsekvensen af påstanden om, at funktionsværdier kan være defineret fuldstændigt vilkårligt. Igennem hele sit arbejde tænker han tydeligvist geometrisk, og bruger ofte mere eller mindre geometriske argumenter for at vise sine *generelle* resultater[1].

I det hele taget er det interessant at overveje hvilke funktioner Fourier tænker på, når han siger, at funktionsværdierne er vilkårlige. Der kan ikke være tvivl om, at Fourier accepterer analytiske udtryk eller tegnede kurver, der eventuelt kan have springdiskontinuiteter, men hvor vidt hans forestilling om funktionsbegrebet rækker videre end dette, kan man sætte spørgsmålstegn ved. Fourier kommer ikke med eksempler på funktioner, som ikke er sammensætninger af analytiske udtryk eller geometriske kurver, selv om han forklarer, at hans resultater gælder for *fuldstændigt vilkårlige* funktioner.

Det sidste punkt, der skal nævnes i sammenligningen af Eulers og Fouriers opfattelser af funktionsbegrebet, er, at Fourier ikke accepterer, at en funktion antager uendelige værdier. Han forklarer, at funktioner enten kan være positive, negative eller nul. Som argument giver han:

> »It is impossible that any problem in nature should lead to the supposition that the function $f(x)$ becomes infinite, when we give to $x$ a singular value included between given limits.« [Fourier, 1955][art. 417]

Dette er nærmest et metafysisk argument. Fourier udtrykker her klart, at matematikken er et redskab til beskrivelse af naturen, og matematikken må derfor

[1]Se f.eks. artikel 232 eller 415 i [Fourier, 1955]

være styret af denne. Sandsynligvis har Fourier ment, at matematikken skulle tjene som en beskrivelse af naturen. Denne påstand bygger vi på Fouriers forestilling om en klar sammenhæng mellem fysikken og matematikken. Af samme årsag arbejder Fourier næsten udelukkende med reelle funktioner og variable.

Flere steder i *Théorie Analytique* giver han således udtryk for at udforskning af naturen sker *gennem* analysen. Han indleder f.eks. kapitel 3 i *Théorie Analytique* med følgende sætning:

> »Problems relative to the uniform propagation, or to the varied movement of heat in the interior of solids, are reduced, by the foregoing methods, to problems of pure analysis, and the progress of this part of physics will depend in consequence upon the advance which may be made in the art of analysis. The differential equations which we have proved contain the chief results of the theory; they express, in the most general and most concise manner, the necessary relations of numerical analysis to a very extensive class of phenomena; and they connect for ever with mathematical science one of the most important branches of natural philosophy.« [Fourier, 1955][art. 163]

### 5.1.2 Kontinuitet

Fouriers arbejde viser med al tydelighed inkonsistensen i Eulers definition af kontinuitet/diskontinuitet. For Euler består kontinuerte funktioner af et enkelt analytisk udtryk, mens diskontinuerte funktioner er defineret ved forskellige udtryk for forskellige intervaller. Rækken som er givet ved

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{2}{3^2\pi}\cos 3x - \frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \dots \qquad (5.1)$$

konvergerer til $\frac{x}{2}$ i intervallet $[0, \pi]$, til $\frac{x}{2} - \pi$ i intervallet $[\pi, 3\pi]$, til $\frac{x}{2} - 2\pi$ i intervallet $[3\pi, 5\pi]$ osv. Dette er altså et eksempel på en funktion, som både kan skrives ved et enkelt analytisk udtryk og ved et antal forskellige analytiske udtryk gældende i forskellige intervaller. Funktionen er dermed både Euler-kontinuert og Euler-diskontinuert. Vi mener, at eksemplet understreger det uhensigtsmæssige i Eulers definition af kontinuitet.

### 5.1.3 Den analytiske fortsættelsesegenskab

Som vi allerede har nævnt i sidste kapitel, gør Fourier op med den analytiske fortsættelsesegenskab. Eksemplet på side 42, hvor $\frac{x}{2}$ opskrives som tre forskellige trigonometriske rækker, udgør et modeksempel på den analytiske fortsættelsesegenskab. De tre rækker er kun ens i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ – udenfor dette er de forskellige. Kendskab til funktionen i et interval giver altså *ikke* en entydig fortsættelse af funktionen udenfor dette.

Han er selv klar over dette brud, og at det er imod hvad man opfatter som analyse på hans tid, hvilket illustreres fint af følgende citat:

> »We see by this that we must admit into analysis functions which have equal values, whenever the variable receives any values whatever included between two given limits, even though on substituting in these two functions, instead of the variable, a number included in another interval, the results of the two substitutions are not the same.« [Fourier, 1955][art. 230]

Fourier er udmærket klar over, at tilhængere af 'det gamle funktionsbegreb' ikke vil acceptere funktioner, som bryder med den analytiske fortsættelsesegenskab, men han forklarer, at sådanne funktioner må tillades i analysen. Citatet viser, at Fourier sammenligner funktionsværdier for forskellige funktioner i et givet interval. I det Eulerske funktionsbegreb giver det ikke mening at sammenligne funktioner i et interval, da lighed mellem funktioner som tidligere nævnt er et spørgsmål om algebraisk lighed.

Man kan måske spørge sig selv, hvorfor Fourier ikke stopper op, når han opdager, at han er på vej til at bryde med et af de fundamentale principper i matematikken. Der kan være mange grunde, men en mulig forklaring kunne være, at han er styret af fysiske problemstillinger. Han kunne eftervise, at hans metoder virkede, og at de beskrev virkeligheden godt – vi husker, at Fourier udførte faktiske eksperimenter, så han kunne se, om udregningerne stemte overens med hans observationer. Hvis vi fastholder, at Fourier anser matematikken som en slags *naturens sprog*, må han også have haft en tro på, at hans resultater var rigtige.

### 5.1.4 Analysens generalitet

Gennemgående for Fouriers arbejde er, hvad man kunne kalde verifikation af sætninger gennem empiri, dvs. han anvender sætningerne på forskellige specialtilfælde, hvor de passer og konkluderer derved, at sætningerne er rigtige. Dette afspejler tidens forståelse af analysen som værende generel, dvs. at sætninger gælder overalt (se afsnit 2.2). Hvis Fourier f.eks. kan vise, at han med sine metoder kan finde trigonometriske rækker for mange forskellige funktioner, må hans resultater være generelt gyldige.

Som vi beskrev i sidste kapitel antager Fourier desuden, at alle funktioner og rækker har pæne egenskaber, f.eks. at alle funktioner er integrable og differentiable og at rækkerne konvergerer. Han antager dette uden på noget tidspunkt at gøre antagelserne eksplicitte. At Fourier ikke ser nogen grund til at gøre dette skyldes, at analysens generalitet sikrer, at alle disse forhold er opfyldt. De regneregler Fourier bruger er ligeledes pga. analysens generalitet gyldige for alle funktioner eller rækker. Han benytter sig altså af analysens generalitet og bryder i den forbindelse ikke med den Eulerske tankegang.

## 5.2 Kritikken af Fourier

Vi vil her belyse noget af den kritik, som f.eks. Poisson og Lagrange rejste, efter at være blevet præsenteret for Fouriers arbejde. Udfra kritikken vil vi som nævnt i begyndelsen af kapitlet give et anderledes billede af, hvordan Fourier brød med datidens funktionsbegreb.

### 5.2.1 Den svingende streng

Nogle punkter af kritikken af Fouriers arbejde minder meget om den kritik der tidligere havde været rejst i forbindelse med Daniel Bernoullis bidrag til *kontroversen om den svingende streng*, som kort vil blive præsenteret i det følgende. For at forstå kritikken af Fouriers arbejde er det således nødvendigt at kende til kritikken af Bernoullis. Kontroversens vigtigste deltagere var tre markante matematikere fra det attende århundrede, d'Alembert, Euler og Bernoulli. De forsøgte hver især at opstille en ligning for den eksakte bevægelse af en svingende streng.

#### Forhistorien

Udgangspunktet for kontroversen var Brook Taylors(1698-1746) værk *De motu nervi tensi* og hans *Methodus Incrementorum directa et inversa*, som han udgav i henholdsvis 1713 og 1715. I værkerne arbejdede Taylor, sandsynligvis motiveret af sin store kærlighed til musik, med beskrivelsen af en svingende streng, som er fastgjort i enderne, og ud fra dette arbejde kan følgende differentialligning opstilles:

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{5.2}$$

Her er $\sigma$ massen pr. længde, $T$ er spændingen i strengen og $t$ er tiden. $y$ er udsvinget fra ligevægtspositionen, og $x$ er afstanden fra det venstre endepunkt. Formlen er skrevet med moderne notation.

#### Løsninger til problemet om den svingende streng

Euler udgav i 1749 *Sur la vibration des cordes*, der behandlede dette emne, og han nåede frem til løsningen:

$$y = \frac{1}{2} f(x + t\sqrt{\frac{T}{\sigma}}) + \frac{1}{2} f(x - t\sqrt{\frac{T}{\sigma}}), \tag{5.3}$$

hvor $f$ er en arbitrær funktion.

Euler var klar over, at man kan komme ud for, at startbetingelserne for strengen er på en sådan måde, at den ikke vil kunne beskrives med kun ét analytisk udtryk. Et eksempel på en sådan startbetingelse kunne være, at strengen før den blev sluppet havde en sådan form, at den havde et eller flere 'knæk'. Man kan forestille sig en sådan form fremkomme ved, at strengen på midten bliver løftet op med to fingre og derefter sluppet. En sådan funktion vil ikke nødvendigvis kunne skrives ved et enkelt analytisk udtryk, idet der muligvis skal ét udtryk til at beskrive den før knækket og ét udtryk til at beskrive den efter. Dette kan give anledning til problemer i forbindelse med den analytiske fortsættelsesegenskab, idet funktionen på den ene side af knækket ikke har noget at gøre med funktionen på den anden side. Euler var selv klar over, at sådanne betragtninger kunne give anledning til nye udfordringer (eller problemer) og skrev følgende i et brev til d'Alembert fra 1763:

> »considering such functions as are subject to no law of continuity opens to us a wholly new range of analysis.« [Grattan-Guinness, 1970][s. 6]

Denne nye opdagelse ledte faktisk allerede i 1749 Euler frem til hans definition af Euler-kontinuerte og Euler-diskontinuerte funktioner [Grattan-Guinness, 1970][s. 6]. Som nævnt i kapitel 3 slog de Euler-diskontinuerte funktioner dog aldrig rigtigt igennem, da de ikke 'passede ind' i analysen.

D'Alembert gav selv en løsning på problemet et par år før udgivelsen af Eulers løsning. Denne løsning var stort set identisk med Eulers [Grattan-Guinness, 1990][s. 146]. D'Alembert modsatte sig i forbindelse med Eulers løsning brugen af de 'diskontinuerte' funktioner. Modstanden skyldtes flere ting, hvoraf en var, at hældningen af kurven – og dermed differentialkoefficienten – ikke var veldefineret i knækket [Grattan-Guinness, 1970][s. 7]. Dette opfattede d'Alembert som et brud på analysens generalitet. Desuden mente d'Alembert ikke, at Eulers løsning var lige så generel som hans egen.

Bernoulli gav i 1753 en meget alternativ løsning til streng-problemet i hans *Réflexions et eclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748*. Bernoullis løsning byggede på en idé om, at alle strengens bevægelser kunne beskrives ved trigonometriske funktioner. Han argumenterede for at, en streng fysisk kan antage uendeligt mange positioner, men at positionerne vil have samme geometri. Han kom – sandsynligvis inspireret af Taylor, som også havde arbejdet med sinusfunktioner – frem til en række funktioner:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \\ y_2 &= \beta \sin \frac{2\pi x}{a} \\ y_3 &= \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \\ y_4 &= \delta \sin \frac{4\pi x}{a} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ved at lægge disse funktioner sammen fik han en ny funktion, nemlig:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} \cdots, \tag{5.5}$$

(hvor $a$ er strengens længde) som han mente kunne beskrive alle de forskellige vibrationer, en svingende streng kan bevæge sig i [D.J.Struik, 1990][s. 361-366].

### Kritikken af Bernoullis løsning

Ligesom Eulers løsning blev kritiseret af d'Alembert, kritiserede Euler selv Bernoullis løsning for ikke at være generel. Kritikken var baseret på egenskaberne for Bernoullis løsning. Hvordan kunne en trigonometrisk række, der af natur var periodisk, være en generel løsning? Antog man så ikke hermed, at alle funktioner var periodiske? Kunne man ikke forestille sig, at man overså løsninger, der ikke var periodiske? Euler argumenterede også mod Bernoullis løsning på det grundlag, at løsningen måtte være ulige, da den kun bestod af sinusled, og derfor ikke kunne være generel. Hvordan skulle en sum af ulige funktioner kunne give andet end en ulige funktion? [Grattan-Guinness, 1970][s. 598].

Euler nægtede at tro på, at en sinusrække kunne repræsentere en funktion, som havde funktionsværdien nul i et delinterval, og som var givet ved et andet funktionsudtryk i resten [Grattan-Guinness, 1972][s. 246].

Det var ikke kun Euler som kritiserede Bernoulli. D'Alembert var også modstander af Bernoullis trigonometriske rækker, hvilket ikke er underligt i betragtning af, at d'Alembert's forslag til løsning af differentialligningen for den svingende streng stort set var identisk med Eulers. Hen imod slutningen af kontroversen blandede Lagrange sig også i debatten [Grattan-Guinness, 1970][s. 13]. Han var i det store hele på Euler og d'Alemberts side.

Kontroversen blev aldrig rigtigt afsluttet, men man kan sige, at Euler og d'Alembert 'vandt' i den forstand, at der opstod hvad man kunne kalde et paradigme vedrørende differentialligninger. Paradigmet udtrykte, at løsninger til differentialligninger skulle have den form, som Euler og d'Alembert påstod [Grattan-Guinness, 1990][s. 149]. Denne form vil vi kalde *funktionsform* i modsætning til Bernoullis *trigonometriske form.*

## 5.2.2 Kritikken af Fouriers arbejde

Som vi tidligere har beskrevet var *den variables generalitet* og *analysens generelle gyldighed* centrale paradigmer i Eulers funktionsbegreb. At disse begreber stadig var centrale for funktionsbegrebet, da Fourier præsenterede sine trigonometriske rækker, fremstår tydeligt af den kritik, der blev rejst mod Fouriers arbejde.

Som nævnt i afsnit 4.1 var det eneste offentligheden så til Fouriers første arbejde om varmeledning fra 1807 et review af hans memoir. Poisson havde skrevet dette review, og han kritiserede Fouriers resultater på to hovedområder. Det første handlede om Fouriers måde at udlede varmeledningsligningerne, det andet om hans løsning af dem, særligt Fouriers brug af Fourierrækkerne som løsninger. Vi vil ikke gå nærmere ind i diskussionen af Fouriers udledning af ligningerne, da denne primært er en fysisk diskussion.

Kritikken af løsningen af varmeledningsligningen er derimod anderledes interessant. Poisson kritiserede især Fouriers brug af en trigonometrisk række som løsning til denne differentialligning. I stedet foreslog han en – ifølge ham selv – mere generel løsning, som var en funktion med komplekse variable, der mindede om løsningen foreslået tidligere af Euler og d'Alembert til løsningen af differentialligningen for den svingende streng

$$y = f(x + it) + g(x - it) \tag{5.6}$$

hvor $i = \sqrt{-1}$. I det hele taget troede Poisson ikke særligt meget på Fouriers resultater, og han betegner ifølge [Grattan-Guinness, 1990][s. 609] Fourierrækkerne som »en matematisk hypotese, der ikke vil finde sted i naturen.«

Poisson var ikke den eneste kritiker. Laplace mente tilsyneladende, at cosinus udviklet ved en sinusrække var *i modstrid med analysens principper* [Herivel, 1975][s. 154]. Vi vil komme nærmere ind på dette nedenfor.

I det hele taget vakte Fouriers arbejde en gammel diskussion til live, og oven i købet tog Fourier den tidligere tabers side. Grattan-Guinness formulerer det således:

> »... this approach was worse than new: it was an old and rejected method brought back to life.« [Grattan-Guinness, 1990][s. 631]

Da Fourier vandt konkurrencen på *Instituttet* med sin prisopgave fra 1811, lød kritikken fra konkurrencens dommere således:

> »This work contains the true differential equations of the transmission of heat, both in the interior of bodies and at their surface; and the novelty of the subject, combined with its importance, has caused the Class [of mathematical and physical sciences of the Institute] to award it the prize, observing, however, that the manner in which the author arrives at his equations is not without difficulties, and that his analysis, to integrate them, still leaves something to be desired both as regards generality and rigor.« [Fourier, 1890][s. vii] oversat i [Bottazzini, 1986][s. 63].

Selvom man måtte medgive, at Fourier nåede frem til de rigtige ligninger, var man altså ikke tilfreds med de matematiske aspekter af Fouriers arbejde. For eksempel var man ikke tilfreds med måden hvorpå han løste de differentialligninger, han var nået frem til. Kritikken omfattede både resultatets generalitet og stringensen i udledningen.

Det er ikke muligt for os med sikkerhed at vide hvilke aspekter af Fouriers arbejde, som manglede generalitet og stringens. Dog må vi formode, at kritikken vedrørende manglende generalitet skyldtes Fouriers brug af Fourierrækker som løsning til differentialligninger i stedet for den foretrukne *funktionsform*. Er denne formodning rigtig, viser det, at forestillingen om en generel funktion ikke havde ændret sig siden kontroversen om den svingende streng. Dommerne accepterede ikke, at Fourier kunne udvikle 'vilkårlige' funktioner ved trigonometriske rækker. Dette kan være grunden til at de kommenterede den manglende stringens – hvis Fouriers arbejde var stringent, ville de blive nødt til at acceptere Fouriers påstande. Det er interessant at Laplace og Lagrange var en del af dommerpanelet. Laplace havde som beskrevet ovenfor reservationer overfor visse dele af Fouriers arbejde, og Lagrange havde i sin tid været på Eulers og d'Alemberts side mod Bernoulli i kontroversen om den svingende streng.

Efter Fourier vandt *Instituttets* konkurrence, var Poisson der igen med kritik af arbejdet. I 1815 skrev han en artikel, hvori der forekom en formulering, som næsten er en ordret gentagelse af udtalelsen fra dommerne – at Fouriers arbejde manglede generalitet og stringens. I artiklen genkaldte han endda kritikken af Bernoullis trigonometriske rækker [Herivel, 1975][s. 157]. Selv efter at man havde tildelt Fourier sejren i konkurrencen, var man uvillig til at acceptere Fouriers måde at løse differentialligningerne på, og opfattede de mest generelle funktioner, som dem der kan skrives på funktionsform.

### 5.2.3 Fouriers svar på kritikken

Fourier vidste godt, at han brød med nogle af de forestillinger om funktioner, som man havde haft i lang tid og havde produceret mange argumenter for. For på forhånd at argumentere for sine rækker viste Fourier, direkte imod Eulers opfattelse (se side 53), at en trigonometrisk række *kan* repræsentere en funktion som er nul i dele af intervallet og forskellig fra nul i resten. Dette så vi eksempler på i sidste kapitel på side 43. På den måde kunne han afvise noget af den kritik, som var rettet mod Bernoulli og som kunne rettes mod ham selv.

Dette var dog langt fra nok til at lukke munden på kritikerne. Fourier svarede også igen på Laplace's kritik af udviklingen af sinus ved en række af cosinusfunktioner, eller nærmere bestemt ligningen

$$\frac{1}{4}\pi \sin x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} - \frac{\cos 8x}{7\cdot 9} - \cdots \tag{5.7}$$

Fourier skriver:

> »These theorems are not contrary to the principles of calculus. They may be demonstrated rigorously and the demonstration not only consist in the procedure which serves to determine the coefficients; it consists also in proving that if one sets in place of $x$ in the equations ... any value whatsoever between certain limits the second number is a determined value which is equal to the first.« [Herivel, 1975][s. 316].

Det er tydeligt, at hans forsøg på at skrive sinus som en række af cosinusfunktioner var blevet angrebet og blevet kaldt 'i modstrid med analysens principper'.

Fourier lod sig imidlertid ikke ryste og forsvarede sin fremgangsmåde. Han opfordrede Laplace til at sætte værdier for $x$ ind i rækken, for at få ham til at indse at værdierne stemte overens. Denne 'praktiske' indstilling viser meget tydeligt en udvikling fra Euler, hvor det eneste vigtige var at vise at de algebraiske (og i nutidig forstand ofte ugyldige) omskrivninger var korrekte. Om værdierne for den opnåede række passede med funktionsværdierne, når man indsatte værdier for $x$, var ikke et mål for lighed mellem funktioner.

Selvom Fourier forsvarede sine metoder, satte den megen kritik alligevel sine spor i hans prisopgave fra 1811 og i hans bog fra 1822. Han begyndte at bruge mere energi på at forsvare sine resultater og nedtone eller udelade de sektioner, hvor han i sit 1807-manuskript direkte påstod at hans trigonometriske rækker kunne bruges som en generel løsning til differentialligninger [Grattan-Guinness, 1972][s. 253]. Grattan-Guinness mener af samme årsager, at 1807-manuskriptet giver et bedre billede af Fouriers tanker, end Fouriers senere udgivelser gør.[2]

Et vigtigt forhold, som gjorde Fourier i stand til at forsvare sine argumenter i højere grad end Bernoulli, var hans evne til at udregne koefficienterne til de trigonometriske rækker. Fourier fandt en simpel måde af finde koefficienterne på, og han kunne dermed verificere sine resultater med eksempler, hvilket Bernoulli ikke kunne [Grattan-Guinness, 1970][s. 245]. Dette har uden tvivl været medvirkende til Fouriers gennemslagskraft og mulighed for at bryde med Eulers funktionsbegreb.

### Et net af intriger?

Når man læser om kritikken af Fouriers arbejde, får man det indtryk, at den ofte var ubønhørlig hård. Særligt Poisson, der selv arbejdede med varmelære, lægger ikke fingre imellem. På trods af, at hans eget arbejde tydeligt er inspireret af Fouriers, skriver han i et essay fra 1815, at »skønt hans egen analyse er langt mere kompliceret, så levner den, modsat Fouriers, ingen tvivl om resultaterne« [Grattan-Guinness, 1990][s. 622]. Man kan sætte spørgsmålstegn ved om f.eks. Poisson kun har haft faglige grunde til at kritisere Fouriers metoder. Da der blev samlet ind til Fouriers begravelse nægtede Poisson f.eks. at biddrage [Herivel, 1975][s. 138].

[2] Vi forholder os naturligvis kritiske til dette udsagn, da det kan være skjult reklame for den udgivelse af 1807-manuskriptet, som netop Grattan-Guinness har fået i stand.

# 6 Dirichlet

I dette kapitel præsenteres matematikeren Lejeune Dirichlet, hvis arbejde med trigonometriske rækker skulle komme til at spille en væsentlig rolle i forbindelse med udviklingen af et nyt funktionsbegreb, nemlig *Dirichlets funktionsbegreb.* Dirichlet opstillede i 1829 som den første, tilstrækkelige betingelser for konvergensen af Fourierrækkerne og gav i den forbindelse et bevis herfor, som selv efter nutidige krav om stringens, må betragtes som værende korrekt. I forbindelse med konvergensbeviset gav Dirichlet en ny definition af funktionsbegrebet, som vil blive beskrevet i det følgende.

**Figur 6.1** Portræt af Gustav Peter Lejeune Dirichlet

## 6.1 Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805–1859)

Dirichlet blev født d. 13 februar 1805 i Düren, Tyskland, hvor faderen var postdirektør. Før han fyldte 12 år, viste han stor interesse for matematik og brugte allerede på dette tidspunkt tid og lommepenge på matematikbøger. Når han fik at vide, at bøgerne var for svære, og at han ikke ville kunne forstå dem, svarede han bare:

»ich lese sie so lange, bis ich sie verstehe.« [Reichardt, 1988][s. 38]

Hans forældre så gerne, at han blev købmand, men da han viste uvilje mod dette, gav forældrene efter og sendte ham til Bonn i 1817, så han kunne gå på gymnasium. Han var en flittig elev særligt i historie og matematik, der var hans yndlingsfag. Dirichlet var meget engageret i de emner, han var interesseret i og havde, sin unge alder taget i betragtning, mange selvstændige synspunkter. I stedet for at lege som de andre, brugte Dirichlet hellere sin tid på at diskutere politik og historie. Efter at have gået på gymnasium i Bonn i to år, blev han efter forældrenes ønske, overflyttet til et gymnasium i Köln, hvor han blev undervist i matematik af Georg Simon Ohm (1789-1854). I 1821 tog han – som 16-årig – sin adgangsgivende eksamen til universitetet, hvorefter han diskuterede sit fremtidige erhverv med sine forældre. Dirichlet brændte for matematikken, men hans forældre foretrak et mere sikkert erhverv som f.eks. jura. Forældrene, der skulle financiere uddannelsen, endte dog heldigvis med at give efter for hans ønske [Reichardt, 1988][s. 39].

Da Dirichlet var ung, var Paris stadig matematikkens hovedby, hvorfor han flyttede hertil for studere ved *Collège de France*. Her blev han undervist af blandt andre Lacroix og Jean-Baptiste Biot (1774-1862). Han havde bragt bogen *Disquisitiones arithmeticae* med sig fra Tyskland, og dette vigtige værk af Gauss havde han altid liggende på sit bord, når han studerede. Han var således den første, udover Gauss, som forstod dette værk til bunds, og det lykkedes ham gennem hårdt arbejde at omdanne værkets stive former til mere flydende og tydelige fremstillinger uden tab af stringens. Dirichlet fortjener i høj grad ære for at have formidlet Gauss' ideer til en bredere kreds af matematikere. [Reichardt, 1988][s. 38]

De første to år i Paris levede Dirichlet enkelt og tilbagetrukket. Han var meget optaget af sine studier og havde kun enkelte tilholdssteder. Hans omgangskreds bestod ligeledes kun af få andre tyske studerende, med hvem han læste. I sommeren 1823 skete der imidlertid noget, der skulle vise sig at få den allerstørste betydning for Dirichlets karriere. En berømt fransk general ved navn Foy søgte en tysklærer til sine børn og fik anbefalet Dirichlet. Dirichlet gjorde et så godt indtryk, at han fik stillingen og efter kort tid, blev han regnet som en del af familien. Dirichlet var lykkelig for sin nye stilling, der stadig levnede rigelig tid til studier. Dette skyldtes ikke mindst, at han nu ikke længere var en økonomisk byrde for sine forældre. Generalen havde ofte besøg af interessante venner fra de øverste sociale og akademiske lag, som Dirichlet mødte, og i det hele taget udviklede opholdet hos generalen Dirichlets dannelse og livsanskuelse.

Under sit ophold i Paris mødte han Fourier, som han blev stærkt knyttet til. Fourier fandt i Dirichlet en ung mand, han kunne åbne sit matematiske hjerte overfor, og som kunne forstå ham fuldkomment. Dirichlet lærte her Fouriers varmelære og stødte for første gang på de Fourierrækker, han senere skulle blive den første til at give et stringent konvergensbevis for.

Dirichlets dygtighed blev bemærket og hans matematiske færdigheder var snart eftertragtede. I efteråret 1828 ankom Dirichlet til Berlin og blev tilknyttet militærakademiet, hvor han så frem til at undervise dannede mænd på hans egen alder i matematik. Hos general Foy havde han studeret nyere krigshistorie og havde derfor en del interesser tilfælles med dem, han skulle undervise. Arbejdet med trigonometriske rækker førte i 1829 til publikationen af *Sur la convergence des séries trigonometrique qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.* Arbejdet kan ses som en personlig indsats på vegne af den døende Fourier, for Dirichlets matematiske interesser lå andetsteds [Grattan-Guinness, 1970][s. 94].

I 1831 blev han udnævnt til en stilling på akademiet i Berlin og underviste herefter også i matematik på universitetet. En elev beskriver Dirichlets undervisning således:

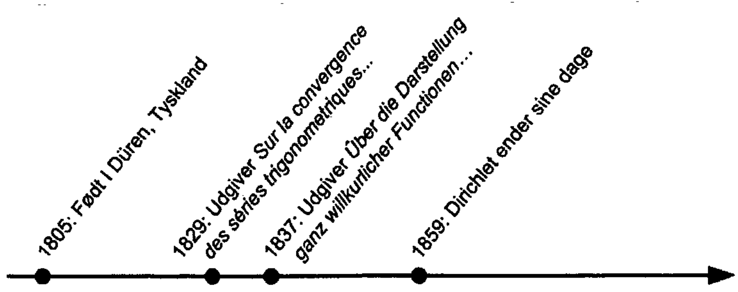
> »What is peculiar in him, he never sees his audience - when he does not use the black-board at which time his back is turned to us, he sits at the high desk facing us, puts his spectacles up on his forehead, leans his head on both hands, and keeps his eyes, when not covered with his hands, mostly shut. He uses no notes, inside his hands he sees an imaginary calculation, and reads it out to us – that we understand it as well as if we saw it too. I like that kind of lecturing.« [1]

Dirichlets forbedrede løn satte ham i en økonomisk position, hvor han kunne gifte sig med Rebecca, der var søster til komponisten Felix Mendelssohn. Han begyndte på et tidspunkt at føle sig bundet af sine undervisningsforpligtelser på militærakademiet. Efter at have forsket og undervist i adskillige årtier, flyttede han i en alder af 50 fra Berlin til universitetet i Göttingen, hvor han overtog en stilling efter Gauss. Her arbejdede Dirichlet i knap fire år indtil han i 1859, som følge af en hjertesygdom, led en alt for tidlig død.

## 6.2 Dirichlets arbejde med Fourierrækker

Efter Fouriers løse skitse til et konvergensbevis forsøgte både Poisson og Cauchy at gennemføre dette bevis, men deres arbejde førte ikke til beviser, som

[1] Dette citat er fundet på http://mathforum.org/library/view/19625.html.




**Figur 6.2** De vigtigste årstal i Dirichlets liv set i forhold til vores projekt.

i nutidig forstand kan betragtes som korrekte [Lützen, 1978][s. 26]. Beviserne blev da heller ikke accepterede generelt og arbejdet med at vise Fourierrækkernes konvergens fortsatte. Dirichlet skulle derfor i 1829 med sit arbejde *Sur la convergence des séries trigonometrique qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, hvor det lykkedes ham at opstille tilstrækkelige konvergensbetingelser, blive den første til at give et egentligt bevis for rækkernes konvergens. I forbindelse med konvergensbeviset gav Dirichlet i den tyske udgave fra 1837 *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* sin definition af funktionsbegrebet, og dette arbejde vil derfor blive præsenteret i det følgende. Begge teksterne er at finde i Dirichlets samlede værker [Dirichlet, 1889]. For at lette den senere diskussion af teksten er den følgende fremstilling udformet, så den er tro mod Dirichlets oprindelige fremstilling. Vi har dog nogle steder valgt at ændre notationen for at øge forståelsen samt at uddybe enkelte passager. Den detaljerede udledning af Fourierkoefficienterne er medtaget i rapporten, fordi den illustrerer, hvordan Dirichlet anvender det nye funktionsbegreb. Dirichlets konvergensbevis er medtaget, fordi det viser i hvor høj grad, han var inspireret af Fouriers arbejde. Derudover er udledningen af koefficienterne og konvergensbeviset interessante for rapportens matematikhistoriske linie, idét de udgør den første løsning af problemet, som er korrekt i nutidig forstand.

### 6.2.1 Dirichlets funktionsbegreb

I indledningen til den tyske tekst fremfører Dirichlet motivationen for sit arbejde samt den definition på en funktion, som senere skulle blive alment accepteret, og som er vigtigt for denne rapports problemstilling. Indledningen vil derfor blive gengivet her i en oversat udgave. Dirichlet starter med følgende udtalelse:

> »De mærkværdige rækker, som i et bestemt interval fremstiller funktioner, der er ganske regelløse eller i forskellige dele af dette interval følger helt forskellige regler, har siden grundlæggelsen af den matematiske varmelære af Fourier, fundet så talrige anvendelser i den analytiske behandling af fysiske problemer, at det forekommer hen-

sigtsmæssigt, at for dettes værks følgende bind, at indlede de bestemte uddrag af de nyeste arbejder om nogle dele af den matematiske fysik med udviklingen af nogle af de vigtigste af disse rækker.« [Dirichlet, 1889][s. 135]

Motivationen for at give en mere udførlig og stringent matematisk behandling af Fourierrækkerne kommer altså fra rækkernes anvendelighed indenfor løsning af fysiske problemstillinger. I stedet for at lade Fourierrækkernes store anvendelse indenfor fysikken være et argument for deres korrekthed, som man tidligere havde gjort med mange analytiske værktøjer, argumenterer Dirichlet altså nærmest modsat; den store anvendelse nødvendiggør bevisførelse for korrektheden (konvergensen) af rækkerne. I forhold til et bredere historisk perspektiv, viser Dirichlets forklaring af sin motivation den stigende interesse for matematisk bevisførelse, som skulle tage til gennem det nittende århundrede. Han fortsætter:

»Man tænker sig om $a$ og $b$ to faste værdier og om $x$ en foranderlig [variabel] størrelse, som lidt efter lidt skal antage alle mellem $a$ og $b$ liggende værdier. Tilsvarer nu hvert $x$ et eneste, endeligt $y$ og på en sådan måde, at mens $x$ vedvarende gennemløber intervallet fra $a$ til $b$, forandrer $y = f(x)$ sig ligeledes lidt efter lidt, så kaldes $y$ en vedvarende eller kontinuert funktion af $x$ i dette interval. Det er tillige slet ikke nødvendigt, at $y$ i hele dette interval skal være afhængig af $x$ efter den samme lov, ja man behøver ikke engang at tænke på en afhængighed, der kan udtrykkes gennem matematiske operationer. Geometrisk fremstillet, dvs. $x$ og $y$ tænkt som abscisse og ordinat, viser en kontinuert funktion sig som en sammenhængende kurve, for hvilken hver abscisse indeholdt mellem $a$ og $b$ tilsvarer et punkt. Denne definition foreskriver for kurvens enkelte dele ingen fælles lov; man kan tænke sig den selv samme [kurve] sammensat af de mest forskelligartede dele eller tegnet ganske regelløst. Det fremgår heraf, at en sådan funktion kun opfattes som fuldstændigt bestemt for et interval, når den enten er givet grafisk for hele dettes omfang, eller bliver underkastet gældende matematiske love i dettes enkelte dele. Sålænge man kun har bestemt en funktion i en del af intervallet, bliver arten af dens fortsættelse for det øvrige interval ganske overladt til vilkårlighed.« [Dirichlet, 1889][s. 135]

Dirichlet præsenterer her et funktionsbegreb, som bygger på en generel idé om en sammenhæng mellem variable størrelser. Denne variabelsammenhæng er ikke nødvendigvis mulig at udtrykke ved et analytisk udtryk, men Dirichlet kræver om en funktion $y = f(x)$, at der til hvert $x$ skal tilsvare et *entydigt* $y$. Desuden kræver han, at $y$ skal være et endeligt tal. Funktioner er i Dirichlets definition tilknyttet et definitionsinterval. En funktion, som ændrer sig vedvarende[2] gennem et interval kalder Dirichlet en *kontinuert funktion.* Vi vil i en senere diskussion i afsnit 7.1 referere til denne funktionsegenskab som *Cauchy-kontinuitet.*

[2]Denne definition af kontinuitet er egentlig en uformel udgave af det nutidige kontinuitetsbegreb.

### 6.2.2 Udledningen af Fourierkoefficienterne

I den første del af sin tekst foretager Dirichlet en generel udledning af Fourierkoefficienterne for en vilkårlig kontinuert funktion $f$ på intervallet $[0, \pi]$. I udledningen af koefficienterne samt i det efterfølgende bevis for konvergensen benytter han følgende sammenhæng (vi har valgt at udelade redegørelsen af denne).

$$\cos\vartheta + \cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta + ... + \cos n\vartheta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta}{2\sin\frac{1}{2}\vartheta}. \tag{6.1}$$

Idéen i udledningen er at opstille en endelig sum af $n-1$ sinusled

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ... + a_{n-1}\sin(n-1)x, \tag{6.2}$$

som er lig den funktion, rækken skal fremstille, i punkterne $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, ..., \frac{(n-1)\pi}{n}$. Derefter lader man antallet af led gå mod uendelig, således at afstanden $\frac{\pi}{n}$, mellem de punkter hvor rækken antager den rigtige funktionsværdi, går mod nul. Den endelige sum skal altså opfylde ligningssystemet.

$$\begin{aligned}
a_1 \sin\frac{\pi}{n} + a_2 \sin\frac{2\pi}{n} + ... + a_h \sin\frac{h\pi}{n} + ... + a_{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{n} &= f\left(\frac{\pi}{n}\right), \\
a_1 \sin\frac{2\pi}{n} + a_2 \sin\frac{4\pi}{n} + ... + a_h \sin\frac{2h\pi}{n} + ... + a_{n-1}\sin(n-1)\frac{2\pi}{n} &= f\left(\frac{2\pi}{n}\right), \\
a_1 \sin\frac{3\pi}{n} + a_2 \sin\frac{6\pi}{n} + ... + a_h \sin\frac{3h\pi}{n} + ... + a_{n-1}\sin(n-1)\frac{3\pi}{n} &= f\left(\frac{3\pi}{n}\right), \\
&\vdots \\
a_1 \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + ... + a_h \sin\frac{(n-1)h\pi}{n} + ... + a_{n-1}\sin\frac{(n-1)^2\pi}{n} &= f\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

For at bestemme koefficienterne multipliceres første ligning med $2\sin\frac{m\pi}{n}$, anden ligning med $2\sin\frac{2m\pi}{n}$ osv. De $n-1$ nye ligninger adderes til én stor ligning og opdeles i led, hvor faktorerne $a_m$ adskilles. Således opnår man en ligning, som Dirichlet ikke opskriver, men som kan skrives som

$$a_1G_1 + a_2G_2 + ...a_hG_h + ... + a_{n-1}G_{n-1} = F, \tag{6.4}$$

hvor

$$F = 2\sin\frac{m\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{n}\right) + ... + 2\sin\frac{(n-1)m\pi}{n} f\left((n-1)\frac{\pi}{n}\right) \tag{6.5}$$

og

$$\begin{aligned}
G_h &= 2\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{h\pi}{n} + 2\sin\frac{2m\pi}{n}\sin\frac{2h\pi}{n} + \\
&\quad + 2\sin\frac{3m\pi}{n}\sin\frac{3h\pi}{n} + ... + 2\sin(n-1)\frac{m\pi}{n}\sin(n-1)\frac{h\pi}{n}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

For et fastholdt $m$ viser Dirichlet nu, at $G_h = 0$ for $h \neq m$, og at $G_h = n$ for $h = m$. Dirichlets behandling af denne del af udledningen er noget overfladisk (han har nok ment, at det var trivielt), så vi har valgt at uddybe den. Antager man, at $h \neq m$ kan det $h$'te led, $a_h G_h$, på venstresiden af ligning (6.4) ved omskrivningen $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ omskrives til

$$\begin{aligned} a_h \Big( & \Big(\cos(m-h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m-h)\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos(n-1)(m-h)\frac{\pi}{n}\Big) \\ & - \Big(\cos(m+h)\frac{\pi}{n} + \cos 2(m+h)\frac{\pi}{n} + \ldots + \cos(n-1)(m+h)\frac{\pi}{n}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Begge ovenstående parenteser kan summes efter (6.1). Indsættes $\vartheta = (m-h)\frac{\pi}{n}$ og $n-1$ i stedet for $n$, giver første parentes

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})(m-h)\frac{\pi}{n}}{2\sin(m-h)\frac{\pi}{2n}}. \tag{6.8}$$

Ved omskrivningen $\sin(l\pi - \gamma)) = \pm\sin\gamma$ bliver

$$\begin{aligned} \sin\Big((n-\frac{1}{2})(m-h)\frac{\pi}{n}\Big) &= \sin\Big((m-h)\pi - (m-h)\frac{\pi}{2n}\Big) \\ &= \pm\sin(m-h)\frac{\pi}{2n} \end{aligned} \tag{6.9}$$

hvor $(m-h) = l$ og $(m-h)\frac{\pi}{2n} = \gamma$. Fortegnet er positivt for $(m-h)$ ulige og negativt for $(m-h)$ lige. Udtrykket fra (6.8) bliver da

$$-\frac{1}{2} + \frac{\pm\sin(m-h)\frac{\pi}{2n}}{2\sin(m-h)\frac{\pi}{2n}}, \tag{6.10}$$

dvs. den første parentes i (6.7) antager altså værdien $-1$ for $(m-h)$ lige og 0 for $(m-h)$ ulige. Ved en tilsvarende fremgangsmåde kan vises, at den sidste parentes antager værdien $+1$ for $(m+h)$ lige og 0 for $(m+h)$ ulige. Det samlede udtryk i (6.7) og dermed også (??) antager altså værdien 0 ($-1+1$ eller $0+0$) under forudsætning, at $h \neq m$. For $h = m$ giver den første parentes i (6.7) $(n-1)\cos 0 = (n-1)$. Den anden parentes kan summes til 1, da $(m+h) = 2m$ er et lige tal. Samlet er altså vist, at $G_h = n$ for $h = m$ og $G_h = 0$ for $h \neq m$.

Ovenstående udledning er uddybet meget i forhold til den originale, men det samlede resultat af arbejdet er altså, at ligning (6.4) kan reduceres til

$$na_m = 2\sin\frac{m\pi}{n} f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + \ldots + 2\sin(n-1)\frac{m\pi}{n} f\Big((n-1)\frac{\pi}{n}\Big) \tag{6.11}$$

og videre

$$a_m = \frac{2}{n}\Big[\sin\frac{m\pi}{n} f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) + \ldots + \sin(n-1)\frac{m\pi}{n} f\Big((n-1)\frac{\pi}{n}\Big)\Big]. \tag{6.12}$$

Denne ligning omskriver Dirichlet ved at indskyde $\sin\left(\frac{0m\pi}{n}\right) f\left(\frac{0\pi}{n}\right)$ og forlænge udtrykket med $\frac{\pi}{\pi}$ til

$$\begin{aligned} a_m = \frac{2}{\pi}\Big[ & \frac{\pi}{n}\sin\frac{0m\pi}{n} f\Big(\frac{0\pi}{n}\Big) + \frac{\pi}{n}\sin\frac{m\pi}{n} f\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \\ & + \frac{\pi}{n}\sin\frac{2m\pi}{n} f\Big(\frac{2\pi}{n}\Big) + \ldots + \frac{\pi}{n}\sin(n-1)\frac{m\pi}{n} f\Big((n-1)\frac{\pi}{n}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Betragter man ovenstående udtryk, ses at dette kan skrives som

$$a_m = \frac{2}{\pi}\left[\delta g(0) + \delta g(0+\delta) + \delta g(0+2\delta) + ... + \delta g(0+(n-1)\delta)\right], \qquad (6.14)$$

dvs. venstresummen for $g(x)$ på intervallet $[0, \pi]$, hvor $\delta = \frac{\pi}{n}$ og $g(x) = \sin mx f(x)$. Når antallet af led $n$ i summen går mod uendelig, konvergerer (6.13) pga. funktionens kontinuitet mod

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin mx f(x) dx. \qquad (6.15)$$

Dette havde Cauchy vist. Dirichlet forklarer nu, at man ved ovenstående bestemmelse af koefficienterne $a_m$ kan opskrive funktionen $f$ ved rækken

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... a_m \sin mx + ..., \qquad (6.16)$$

og at rækken fremstiller funktionen for *alle* værdier mellem nul og $\pi$. Ved en snedig omskrivning opstiller Dirichlet ligeledes et udtryk for en cosinusrække, som på intervallet $[0, \pi]$ fremstiller funktionen $f$ ved

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + ... b_m \cos mx + ..., \qquad (6.17)$$

hvor

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mx f(x) dx. \qquad (6.18)$$

Rækkerne (6.16) og (6.17) fremstiller kun en funktion på intervallet $[0, \pi]$, men Dirichlet giver følgende argument for, at rækkerne kan fremstille en funktion på hele intervallet $[-\pi, \pi]$ (argumentationen er uddybet lidt).

For en lige funktion, dvs. en funktion for hvilken $f(-x) = f(x)$ kan rækken (6.17) uden videre udvides til hele intervallet $[-\pi, \pi]$, da $\cos mx$ selv er en lige funktion. Tilsvarende kan en ulige funktion fremstilles på hele intervallet $[-\pi, \pi]$ ved rækken (6.16), da $\sin mx$ er en ulige funktion. En vilkårlig funktion $\varphi(x)$ kan som bekendt skrives som summen af en lige og en ulige funktion, nemlig

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}. \qquad (6.19)$$

Funktionen $\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$ er en lige funktion og kan derfor på hele intervallet $[-\pi, \pi]$ repræsenteres ved rækken

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} = \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + ..., \qquad (6.20)$$

hvor

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos mx\left[\varphi(x) + \varphi(-x)\right] dx. \qquad (6.21)$$

Ved at benytte sædvanlige regneregler for integraler, samt at $\cos mx$ er en lige funktion, kan udtrykket omformes til

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos mx\,[\varphi(x)+\varphi(-x)]\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos mx\varphi(x)dx + \int_0^{\pi} \cos mx\varphi(-x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos mx\varphi(x)dx - \int_0^{-\pi} \cos mx\varphi(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos mx\varphi(x)dx + \int_{-\pi}^{0} \cos mx\varphi(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\varphi(x)dx. \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

En tilsvarende sinusrække kan opstilles for den ulige funktion $\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}$.

Det samlede resultat kan nu opskrives. Den vilkårlige kontinuerte funktion $\varphi(x)$, som er summen af den lige og den ulige funktion fra (6.19), kan repræsenteres ved rækken

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + b_3\cos 3x + \ldots \\
&+ a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + \ldots \\
&= \frac{1}{2}b_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\sin mx + b_m\cos mx), \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

hvor

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\varphi(x)dx \qquad (6.24)$$

og

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\varphi(x)dx. \qquad (6.25)$$

Måden, hvorpå Dirichlet opstiller den fulde række, er i det store hele identisk med Fouriers metode.

### 6.2.3 Dirichlets konvergensbevis

Dirichlet skriver i indledningen til sit konvergensbevis, at den foregående udledning af Fourierkoefficienterne let leder én til den forkerte slutning, at en ganske regelløs funktion lader sig fremstille ved en Fourierrække. Dette er imidlertid ikke tilfældet. Beviset for konvergensen vil vi ikke gennemgå i detaljer, da det ikke er vigtigt for vores problemstilling, men vi vil forsøge at give et billede af den overordnede strategi, for at vise i hvilken grad Dirichlet var inspireret af Fouriers arbejde.

Dirichlet vælger at gribe konvergensbeviset an ved at betragte en afsnitssum med $2n+1$ led og vise at denne, når funktionen $\varphi(x)$ er underlagt nogle helt specifikke krav, konvergerer mod $\varphi(x)$ for $n$ gående mod uendelig. Vi har i det følgende valgt at bruge ordet *konvergerer*, skønt Dirichlet formulerer sig anderledes, hvilket vi vil se nedenfor. De $2n+1$ første led i den generelle Fourierrække er leddene

$$\frac{1}{2}b_0 + b_1\cos x + b_2\cos 2x + \ldots + b_n\cos nx + + a_1\sin x + a_2\sin 2x + \ldots + a_n\sin nx. \tag{6.26}$$

Ved indsættelse af koefficienterne givet ved (6.24) og (6.25) bliver rækken til

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\,d\beta \qquad (6.27)\\ + \quad & \frac{1}{\pi}\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\cos\beta d\beta + \ldots + \frac{1}{\pi}\cos nx\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\cos n\beta\,d\beta \\ + \quad & \frac{1}{\pi}\sin x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\sin\beta d\beta + \ldots + \frac{1}{\pi}\sin nx\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\sin n\beta\,d\beta, \end{aligned}$$

som ved omskrivningen $\sin nx\sin n\beta + \cos nx\cos n\beta = \cos n(x-\beta)$, der også anvendes af Fourier i (4.82), kan skrives som

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\left[\frac{1}{2} + \cos(\beta - x) + \cos 2(\beta - x) + \ldots + \cos n(\beta - x)\right]d\beta. \tag{6.28}$$

Til sidst omskrives dette udtryk ved omskrivningen givet i (6.1) til

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\beta-x}{2}}{2\sin\frac{\beta-x}{2}}d\beta. \tag{6.29}$$

Dirichlet forklarer nu korrekt, at konvergensen af rækken er sikret, hvis forskellen mellem ovenstående udtryk og funktionen $\varphi(x)$ bliver mindre end enhver nok så lille størrelse, når $n$ vokser ud over alle grænser. Formuleret lidt mere moderne siger han altså, at rækken konvergerer mod funktionen, hvis der for hvert $x \in [-\pi, \pi]$ gælder, at differensen mellem rækken og funktionen går mod nul, når $n$ går mod uendelig. Efter omskrivningen fra 6.26 til 6.29 afbryder Dirichlet midlertidigt beviset for at udlede et generelt resultat, han senere skal bruge.

Han viser nu, at der for en vilkårlig konstant $h \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ og en funktion $f(\beta)$, som er kontinuert, ikke-voksende og positiv på intervallet $[0, h]$, gælder, at udtrykket

$$\int_0^h f(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta \tag{6.30}$$

konvergerer mod $\frac{\pi}{2}f(0)$ for $n$ gående mod uendelig. Dernæst viser han, at dette resultat er uafhængigt af $f$'s fortegn på intervallet, og at det også gælder for $f$ ikke-aftagende. Således er ovenstående resultat vist for en vilkårlig funktion, som er kontinuert og monoton på intervallet. Redegørelsen for resultatet vil vi ikke give her.

Betragtes nu en anden konstant $g \in ]0, h]$ gælder ovenstående også med $g$ som den øvre grænse for integralet, da $g \in ]0, \frac{\pi}{2}]$. Samlet gælder så, at udtrykket

$$\begin{aligned} &\int_g^h f(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta \\ = &\int_0^h f(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta - \int_0^g f(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta \end{aligned} \tag{6.31}$$

konvergerer mod nul for $n$ gående mod uendelig.

Dirichlet viser nu, at resultatet også gælder for en funktion $f$, som kun er monoton på intervallet $[g,h]$ (ovenfor blev krævet, at funktionen skulle være monoton på hele intervallet $[0,h]$). Dette gøres som følger: Dirichlet definerer en ny funktion $f_1$ som er lig $f$ på intervallet $[g,h]$. På intervallet $[0,g]$ er $f_1$ defineret så den er monoton på hele intervallet $[0,h]$. Dirichlet laver altså en monoton udviddelse $f_1$ af $f$ , så funktionerne stemmer overens på $[g,h]$, men ikke på hele intervallet $[0,h]$. Om $f_1$ gælder så, at funktionen er monoton på hele intervallet $[0,h]$ og derfor gælder, at

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^h f_1(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}f_1(0), \tag{6.32}$$

og

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^g f_1(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}f_1(0). \tag{6.33}$$

Ved at trække de to resultater fra hinanden fås

$$\lim_{n\to\infty}\int_h^g f_1(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta = 0. \tag{6.34}$$

Da $f_1$ stemmer overens med $f$ på intervallet $[g,h]$ fås, at

$$\lim_{n\to\infty}\int_h^g f(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta = 0, \tag{6.35}$$

som skulle vises. Dirichlets bevis er et lysende eksempel på bruddet med den analytiske fortsættelsesegenskab, idet Dirichlet tager en funktion som er defineret på et interval ($[0, \frac{\pi}{2}]$) og ændrer denne i en del af intervallet. Dette resultat har vi fået påpeget af Jesper Lützen.

Dirichlet vender på dette tidspunkt tilbage til konvergensbeviset. I resten af konvergensbeviset opstiller han kravene, at $\varphi(x)$ er *stykvis kontinuert* og *stykvis monoton* på $[-\pi,\pi]$. På dette tidspunkt indføres også notationen $\varphi(x+0)$ og $\varphi(x-0)$ som grænseværdien for $\varphi(t)$ for $t$ gående mod $x$ fra højre henholdsvis venstre. Denne notation anvendes i resten af beviset.

Udtrykket fra (6.29) omformes ved brug af en lang række standardomskrivninger for integraler til

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} \varphi(x-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{2\sin\beta}d\beta \\ + &\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} \varphi(x+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{2\sin\beta}d\beta. \end{aligned} \tag{6.36}$$

De to integraler behandles i resten af beviset separat. En stor del af denne behandling omfatter en masse udregninger, som vi vil undlade at bringe her. Overordnet set er fremgangsmåden at foretage en inddeling af de intervaller, der integreres over, i et endeligt antal underintervaller hvor funktionen $\varphi(x)$ er kontinuert og monoton. Dette er naturligvis muligt på grund af kravet om, at $\varphi(x)$ skal være stykvis kontinuert og monoton. Grænseværdierne af integralerne i (6.36) for $n$ gående mod uendelig bestemmes for et fastholdt $x$ ved resultaterne fra (6.30) og (6.31). Denne bestemmelse kræver en del omskrivninger og specialbehandling af særtilfælde. Denne del af beviset undlades ligeledes her, men Dirichlets resultater er værd at gengive.

Dirichlet viser samlet, at rækken fra (6.26), som kan omskrives til (6.29), for ethvert $-\pi < x < \pi$ er konvergent med sum $\frac{1}{2}[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)]$. Hvis $\varphi$ er kontinuert i $x$ er dette lig $\varphi(x)$. For $x=-\pi$ og $x=\pi$ er rækken konvergent med sum $\frac{1}{2}[\varphi(-\pi+0)+\varphi(\pi-0)]$.

Således har Dirichlet vist, at Fourierrækken for en stykvis kontinuert og stykvis monoton funktion, $\varphi(x)$, er konvergent med grænseværdi $\frac{1}{2}[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)]$.

## 6.3 Dirichlets brug af funktionsbegrebet

Vi har tidligere nævnt, at funktionsbegrebet efter Euler skulle blive tildelt nye definitioner, som på overfladen virkede mere generelle end Eulers oprindelige definition, og at disse definitioner aldrig i praksis blev anvendt. Vi har derfor valgt kort at dokumentere, at Dirichlet rent faktisk lader sin definition af funktionsbegrebet få konsekvenser for hans anvendelse af samme.

Karakteristisk for Dirichlets definition af funktionsbegrebet er, at den i forhold til de tidligere 'generelle' definitioner er utrolig præcist formuleret. Kravet om entydighed og endelige funktionsværdier, begrænsningen af funktioner til intervaller, samt fraværet af kravet om det analytiske udtryk er eksplicit formuleret og efterlader ingen tvivl om, hvordan dette funktionsbegreb skal anvendes.

Udledningen af Fourierkoefficienterne for en vilkårlig funktion viser også tydeligt, at Dirichlets tilgang til funktionsbegrebet adskiller sig fra den algebraiske tilgang, vi tidligere har set eksempler på. Den trigonometriske række udledes udfra kravet om, at rækken skal være lig den funktion, den fremstiller, for specielle værdier af den variable. Dirichlet betragter altså funktionsværdier i punkter og opfatter ikke lighed mellem funktioner som et spørgsmål om omformning af analytiske udtryk men som et spørgsmål om lighed mellem funktionsværdier.

Konvergensbeviset viser, at Dirichlet ikke automatisk antager, at funktionerne opfører sig 'pænt'. Han udtrykker klart, når han gør antagelser om sine funktioner og forklarer, at det generelt er nødvendigt at gøre antagelser for at påvise resultaters gyldighed. Hermed er han med til at indlede et nyt paradigme i analysen.

# 7 Fouriers betydning for funktionsbegrebet

I dette kapitel vil vi vurdere, hvilken betydning Fouriers arbejde har haft for den udvikling af funktionsbegrebet, der fandt sted mellem Eulers *Introductio in analysin infinitorum* fra 1748 og Dirichlets *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* fra 1837. Dette vil vi gøre ved indledningsvist at sammenligne Dirichlets og Eulers funktionsbegreber, for klart at vise hvorfra og hvortil funktionsbegrebet bevægede sig. Denne sammenligning skal sammen med materiale fra de tidligere kapitler danne grundlaget for den efterfølgende diskussion af Fourierrækkernes betydning for udviklingen af funktionsbegrebet.

## 7.1 Sammenligning af Dirichlets og Eulers funktionsbegreber

De to funktionsbegreber bygger helt grundlæggende på to forskellige idéer. Det Eulerske funktionsbegreb bygger på idéen om *et analytisk udtryk*, mens Dirichlets bygger på idéen om en *sammenhæng mellem variable*. Dirichlet gør særligt opmærksom på, at hans funktioner ikke nødvendigvis kan udtrykkes ved analytiske udtryk. I [Dirichlet, 1889][s. 132] giver han faktisk et eksempel på en funktion, der ikke engang i et vilkårligt lille interval kan udtrykkes ved et analytisk udtryk, nemlig funktionen

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & \text{for } x \text{ rational} \\ d & \text{for } x \text{ irrational} \end{cases}, \qquad (7.1)$$

hvor $c$ og $d$ er forskellige konstanter. Dirichlets funktion, der er intetstedskontinuert, er et af de første eksempler på en lang række af patologiske funktioner, som skulle dukke op i løbet af det nittende århundrede, og som skulle bidrage til en afklaring af funktionsbegrebet.

Den nævnte funktion opfylder ikke Eulers krav om en funktions repræsentation ved ét analytisk udtryk og ville derfor ikke blive accepteret. Indenfor rammerne af Eulers udvidede funktionsbegreb, hvor de Euler-diskontinuerte funktioner er inkluderet, ville Dirichlets funktion heller ikke kunne accepteres, da den ikke engang kan repræsenteres stykvis ved analytiske udtryk. I denne forstand er Dirichlets funktionsbegreb altså bredere end det Eulerske.

Kravet om entydighed af funktioner adskiller også klart de to funktionsbegreber. Euler tillader funktioner, der er definerede som ligninger, og kommer derfor ofte i den situation, at hans funktioner for én værdi af den variable knytter flere funktionsværdier. Dette accepterer Euler, mens Dirichlet kræver entydighed. Anskuet ud fra denne synsvinkel accepterer Euler altså flere funktioner end Dirichlet.

Dirichlets funktioner er begrænsede til et interval fra $a$ til $b$ og Dirichlet knytter dermed begrebet definitionsmængde til sine funktioner. Den variabelsammenhæng, som funktionen beskriver i et delinterval $[c, d]$ af definitionsintervallet, giver ingen oplysning om funktionens opførsel uden for $[c, d]$. Her må funktionen betragtes som værende fuldstændig vilkårlig. Dirichlet frasiger altså fuldstændig sine funktioner den analytiske fortsættelsesegenskab. Eulers funktioner, derimod, kan ikke begrænses til et interval på grund af kravet om den variables generalitet. Et brud på denne ville Euler opfatte som en voldshandling mod selve analysens ånd. En Eulersk funktion, der er givet ved et analytisk udtryk i ét interval, kan entydigt udvides til hele $\mathbb{C}$. Den analytiske fortsættelsesegenskab opfattes af Euler som en grundlæggende funktionsegenskab. Omkring denne diskussion af funktioner og intervaller indtager de to funktionsbegreber altså modsatte standpunkter.

Med sin beskrivelse af en kontinuert funktion viser Dirichlet, at han er klar over, at ikke alle funktioner opfører sig 'pænt', og at man er nødt til at klassificere dem efter egenskaber. Førhen havde man antaget, at alle funktioner var kontinuerte og at alle funktioner kunne differentieres og integreres. Den førnævnte funktion $\varphi(x)$ i (7.1), som er intetsteds-kontinuert og intetsteds-differentiabel – altså en rigtig 'grim' funktion selv i nutidig forstand – tjener som eksempel på en funktion, hvor dette ikke er opfyldt. Dirichlets opfattelse af kontinuitet er i øvrigt i overensstemmelse med en nutidig opfattelse, selvom hans definition er noget intuitiv i forhold til en $\varepsilon, \delta$-definition. I modsætning til Dirichlet antager Euler, kraftigt assisteret af paradigmet om analysens generelle gyldighed, at alle funktioner kan tilskrives egenskaberne kontinuitet, differentiabilitet, integrabilitet osv. Eulers senere indførsel af de Euler-diskontinuerte funktioner ændrer ikke nævneværdigt på denne opfattelse.

Dirichlets lighed mellem funktioner adskiller sig også meget fra Eulers. Dirichlet betragter ofte funktioner i udvalgte punkter og interesserer sig således for den værdi, funktionen antager i et nærmere specificeret $x$. To funktioner $f$ og $g$ er lig hinanden i et punkt $x_0$, hvis $f(x_0) = g(x_0)$, eller i et interval $I$, hvis $f(x) = g(x)$ for alle $x \in I$. Dirichlets lighed mellem funktioner er altså en numerisk lighed i nutidig forstand, mens Eulers lighed mellem funktioner udelukkende er et spørgsmål om algebraisk lighed mellem analytiske udtryk. I forbindelse med diskussionen om funktionsværdier er det værd at nævne, at Dirichlet kræver, at en funktion kun må antage endelige funktionsværdier i et punkt $x$, mens Euler tillader uendelige funktionsværdier.

Nogle af forskellene mellem funktionsbegreberne kan illustreres ved følgende eksempel. Betragt funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{7.2}$$

For Dirichlet ville det være naturligt at nøjes med at se på $f(x)$ i et interval, f.eks. $[1, 10]$, så ville $f(x)$ antage værdier mellem 1 og $\frac{1}{10}$. Indenfor intervallet $[1, 10]$ ville han kalde $f(x)$ en kontinuert funktion (*Dirichlet-kontinuert*) og ikke udtale sig om funktionen udenfor intervallet. Til sammenligning ville Euler i kraft af den analytiske fortsættelsesegenskab ikke kunne begrænse $f(x)$ til et interval men udvide den til hele den reelle talakse (eller hellere hele $\mathbb{C}$). Funktionen ville så antage alle værdier mellem $-\infty$ og $\infty$ med $f(0) = \infty$ og $f(\infty) = 0$. Euler ville kalde $f(x)$ kontinuert (*Euler-kontinuert*) og anvende funktionen, som var den (*Cauchy-kontinuert*), undtagen for $x = 0$.

Ovenstående sammenligning skulle forhåbentligt have gjort det klart, at funktionsbegrebet har gennemgået en enorm udvikling fra Euler til Dirichlet. Man kan ikke kalde Dirichlets funktionsbegreb en generalisering af det Eulerske; de to funktionsbegreber omfatter blot vidt forskellige funktioner. Det Eulerske funktionsbegreb er funderet på algebraens love, som også er 1700-tallets analyses spilleregler. Dirichlets funktionsbegreb er, set med moderne øjne, et mere modent funktionsbegreb, som er praktisk for den moderne analyse. Eulers funktionsbegreb er stærkt afhængigt af analysens generalitet. Dirichlets funktionsbegreb er ikke.

## 7.2 Fouriers betydning for det nye funktionsbegreb

Der kan ikke være tvivl om, at Dirichlet har været påvirket af Fouriers arbejde. For det første blev han, som vi har beskrevet i afsnit 6.1, knyttet til Fourier under sit ophold i Paris. Derudover er det ikke svært at drage paralleller mellem Fouriers og Dirichlets arbejde. Lighederne ses især i Dirichlets berømte konvergensbevis for Fourierrækkerne, der lidt forsimplet sagt er en mere stringent version af Fouriers skitse. At ideen bag Dirichlets bevis er den samme som Fouriers oprindelige idé indses, hvis man betragter udtrykket (4.87), som Fourier giver i starten af skitsen til sit konvergensbevis. Dette udtryk kan omskrives, hvis man i stedet for at betragte en uendelig sum af cosinus-led, betragter de $2n + 1$ første led, som Dirichlet gør. Udtrykket er da

$$\varphi(x) = \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \varphi(\alpha) \left( \sum_{n=-N}^{N} \cos \frac{2n\pi}{X}(x - \alpha) \right) d\alpha. \tag{7.3}$$

Da $\cos x$ er en lige funktion, og $\cos 0 = 1$, kan dette omskrives til

$$\varphi(x) = \frac{2}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \varphi(\alpha) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos \frac{2n\pi}{X}(x - \alpha) \right) d\alpha. \tag{7.4}$$

For $X = 2\pi$ reducerer ovenstående til

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\left[\frac{1}{2}+\cos(\alpha-x)+\cos 2(\alpha-x)+...+\cos N(\alpha-x)\right]d\alpha, \quad (7.5)$$

som er Dirichlets udgangspunkt opstillet i (6.28). Dirichlets omskrivning fra ligning 6.28 til ligning 6.29 er en parallel til Fouriers omskrivning fra 4.87 til 4.89 – Fourier og Dirichlet vælger sådan set 'blot' to forskellige formler til at omskrive summen af de $2n+1$ første led. Dirichlets generelle resultat, som udtrykker, at integralet i 6.30 kan udtrykkes ved funktionsværdien i $x = 0$, er en formaliseret udgave af Fouriers geometriske argument for, at kun området omkring $x = 0$ bidrager til integralet i 4.90. Hele gangen i Dirichlets bevis er altså den samme som Fouriers, og man må på baggrund af dette formode, at Dirichlet har fået idéen til sit bevis fra Fourier.

På trods af slægtskabets mellem Dirichlets og Fouriers arbejde, er der dog store forskelle mellem de to. Fourier må betegnes som fysiker og matematiker, der i høj grad lader naturen styre sin matematik, mens Dirichlet er 'ren' matematiker. Dette kommer til udtryk både i formen af deres værker og i det niveau af stringens, som disse præges af. Fourier formulerer sig i et fyldigt sprog med mange metafysiske elementer. Dirichlet, derimod, fremlægger klart sit matematiske grundlag, inden han påbegynder sit egentlige arbejde. Dirichlets øgede stringens er dog ikke kun et spørgsmål om personlig stil. Fouriers matematiske uddannelse stammer fra en tid, hvor stringens nærmest blev betragtet som en hindring for matematikkens udvikling (se afsnit 2.2). Dirichlets uddannes i en periode, hvor stringens i højere grad bliver betragtet som en nødvendighed.

Dirichlet, som står som faderen til det nye funktionsbegreb, har været inspireret af Fourier på flere områder – men på hvilke? Dette spørgsmål kan kun besvares ved at undersøge de enkelte elementer af Fouriers og Dirichlets funktionsbegreber og finde ud af hvor disse er ens, og hvor de adskiller sig fra hinanden.

Helt centralt i det Dirichletske funktionsbegreb er som tidligere beskrevet begrebet *sammenhænge mellem variable*, som klart adskiller sig fra Eulers idé om *et analytiske udtryk*. Fourier har i sin definition (se side 48) *tilsyneladende* den Dirichletske tilgang til funktionsbegrebet mht. variabelsammenhænge, men som vi har diskuteret i afsnit 5.1.1, er denne tilgang noget kunstig. På trods af at Fourier giver udtryk for, at funktioner er givet ved sammenhænge mellem variable, behandler han alle sine funktioner, som var de 'pæne' analytiske udtryk eller geometriske kurver. Desuden er Fouriers matematik styret af fysiske problemstillinger, hvor de indgående variabelsammenhænge er 'pæne', hvilket kan give anledning til at tro, at Fourier ville have svært ved at forestille sig funktioner så generelle, som hans funktionsbegreb tillader. Hvis man skal sætte det lidt på spidsen kan man sige, at Fourier muligvis ville kunne acceptere Dirichlets patologiske funktion, men han ville aldrig kunne opfinde den selv. Fourier har således ikke for alvor brudt med opfattelsen af funktionen som et analytisk udtryk, og denne del af det moderne funktionsbegreb kan ikke direkte tilskrives ham.

Dirichlet gør eksplicit rede for sine funktioners egenskaber, f.eks. at de er kontinuerte. Dette gør Fourier ikke i nær samme grad. Dette skyldes, at Fourier på mange måder tilhører 'den gamle skole' i den forstand, at han tror på analysens generalitet. Derfor behøver han ikke at redegøre for sine funktioners egenskaber.

Fourier bryder dog, som vi tidligere har beskrevet, med den analytiske fortsættelsesegenskab. Ved at fremstille forskellige rækker, som er ens i et givet interval men forskellige udenfor, er det klart for Fourier, at den analytiske fortsættelsesegenskab ikke kan være gyldig. Dette gør han, som vi ligeledes har beskrevet, også eksplicit opmærksom på i *Théorie Analytique*. Fourier ser bruddet med den analytiske fortsættelsesegenskab som et resultat af arbejdet med Fourierrækkerne. Dette alvorlige angreb rettet mod det eksisterende funktionsbegreb er en af Fouriers store meritter.

Grunden til at Fouriers resultater ikke kunne ignoreres, ligesom Daniel Bernoullis resultater i forbindelse med den svingende streng kunne, var Fouriers evne til at bestemme Fourierkoefficienterne. Koefficienterne åbnede muligheden for at give konkrete eksempler på funktioner udviklet ved trigonometriske rækker og gav dermed angrebet på Eulers funktionsbegreb en langt større tyngde end tidligere.

I det Dirichletske funktionsbegreb er den fulde konsekvens af afvisningen af den analytiske fortsættelsesegenskab taget, idet Dirichlet eksplicit forklarer og bruger, at en funktion, hvis variabelsammenhæng er fastlagt på et givet interval, må betragtes som fuldstændig vilkårlig udenfor dette. Fourier nøjes med at bemærke, at forskellige funktioner kan have ens funktionsværdier på intervaller uden at være ens.

Et andet sted, hvor Fourier angriber det Eulerske funktionsbegreb, er i forbindelse med begrebet kontinuitet. I afsnit 5.1.2 så vi, at Fourier viste, at en funktion kan være både Euler-kontinuert og Euler-diskontinuert på en og samme tid. Dette er ligesom bruddet med den analytiske fortsættelsesegenskab en påvisning af en inkonsistens i det Eulerske funktionsbegreb.

Fourier udtrykker ligesom Dirichlet tydeligt kravet om, at en funktion er entydig, men hvor Dirichlet opstiller kravet som en matematisk betingelse, er det for Fourier mere en konsekvens af naturens indretning. Det ville således være unaturligt for Fourier, hvis en funktion havde flere forskellige funktionsværdier, da dette f.eks. kunne betyde, at et område i et legeme ville have flere forskellige temperaturer på en gang. Således er Fourier moderne i den forstand, at en funktion skal være entydig, men på en noget anden baggrund end Dirichlet og nutidige matematikere er.

Dirichlet har gjort op med opfattelsen af, hvad det vil sige, at to funktioner er ens – det handler ikke om algebraiske manipulationer men om funktionens værdier i punkter eller intervaller. Fourier står et eller andet sted mellem Euler og Dirichlet. På den ene side forklarer Fourier, at visse funktioner har ens værdier i givne intervaller. På den anden side gør dette dem ikke nødvendigvis ens. Hvis han udvider intervallerne, hvilket han som regel gør, er de forskellige. At han udvider intervallerne skyldes nok, at han stadig er påvirket af den Eulerske tankegang. Fourier ser ikke bort fra funktionsværdier udenfor de umiddelbart interessante intervaller – og det på trods af at det, set i lyset af de fysiske problemer, han regner på, ikke giver mening at udregne funktionsværdierne udenfor intervallerne. Her har Dirichlet taget konsekvensen og erklæret funktionens værdier udenfor de givne intervaller vilkårlige.

I diskussionen af Fouriers betydning for Dirichlets funktionsbegreb er det naturligt at stille spørgsmålet: Hvorfor vælger Dirichlet at give en definition af en funktion i en artikel om Fourierrækker? Svaret på dette spørgsmål er ikke så nemt at give. Fourier havde tidligere vist, at Fourierrækkerne konvergerede i en række specialtilfælde, og han havde lavet en skitse af et generelt konvergensbevis. Skitsen var dog ikke tilstrækkeligt til at vise, at Fourierrækkerne for *enhver* funktion konvergerede. Fourier havde dog med sin skitse stillet spørgsmålet om hvornår Fourierrækkerne konvergerede. Selvom Fourier troede, at han havde besvaret spørgsmålet, var der andre, der synes, at det var nødvendigt at give en grundigere redegørelse – et egentligt konvergensbevis.

For at kunne svare på Fouriers spørgsmål, er man nødt til at anvende og dermed også definere nogle egenskaber ved funktioner. Benytter man sig af Fouriers skitse til et konvergensbevis, er man nødt til at definere og anvende begreberne kontinuitet og monotoni. Man er desuden tvunget til at begrænse funktioner til særlige intervaller. Dermed tvang løsningen af Fouriers problem de matematikere, som arbejdede med det, til at redegøre for funktioners egenskaber i en hidtil uset grad. Fourier har altså også haft den betydning, at de nye problemer, hans arbejde frembragte, nødvendiggjorde en præcisering af nogle af de begreber, man i dag knytter til funktionsbegrebet.

## 7.3 Opsamling

Som vi har set eksempler på i kapitel 5, er kritikken af Bernoullis trigonometriske rækker tæt forbundet med den kritik Fourier blev mødt med af sin samtid. Dette viser med al tydelighed, at selvom der var sket meget med analysen fra Eulers funktionsbegreb til Fouriers varmelære, så var funktionsbegrebet i store træk stadig det samme.

Den hårde kritik, som Fourier mødte, må opfattes som et udtryk for, at Fourier var den første til for alvor at bryde med det gamle funktionsbegreb. Der har altså ikke været nogen *før* Fourier, som har kunne inspirere Dirichlet til at bryde med Eulers funktionsbegreb på de punkter, han gør.

Vi er overbevist om, at Dirichlet enddog har været *meget* inspireret af Fourier. Dette bygger vi især på lighederne mellem Fouriers og Dirichlets arbejde – flere steder er udgangspunktet og ideerne bag beviserne identiske. Desuden var Dirichlet studerende under Fourier. Således mener vi, at de elementer af funktionsbegrebet, som er ens for Fourier og Dirichlet, og som er forskellige fra det Eulerske funktionsbegreb, stammer fra Fourier. De områder, hvor Dirichlet er nyskabende i forhold til Fourier, må skyldes egen opfindsomhed eller indflydelse fra andre, men det ligger uden for dette projekts rammer at svare på fra hvem.

Fourier brød meget tydeligt med det Eulerske funktionsbegreb i forbindelse med den analytiske fortsættelsesegenskab. Bruddet var en konsekvens af resultater opnået med Fourierrækkerne. Med dette brud fulgte, at Fourier tillod en sammenligning af funktioners værdier i bestemte intervaller, hvilket ikke indenfor det Eulerske funktionsbegreb kunne opfattes som et mål for lighed mellem funktioner. Derudover krævede Fourier at funktioner var entydige, og han accepterede ikke, at funktioner antog uendelige værdier. Begge disse krav udsprang fra fysiske forestillinger.

Til gengæld brød Fourier ikke med det Eulerske funktionsbegreb, når det galdt analysens generalitet som sådan. Han tildelte uden videre alle funktioner 'pæne' egenskaber og generaliserede ud fra specialtilfælde. Det er også tydeligt, at han i praksis kun benyttede sig af funktioner, som var analytiske udtryk eller geometriske kurver (evt. med spring).

Fouriers Brud med det gamle funktionsbegreb bestod i, at utilstrækkeligheder i det gamle funktionsbegreb blev synliggjort af de resultater, han opnåede gennem Fourierrækkerne. Der var altså tale om, at 'opfindelsen' af et nyt matematisk redskab afslørede problemer ved det eksisterende begrebsapparat. Denne afsløring banede vejen for en ændring i opfattelsen af det eksisterende funktionsbegreb. Da Fourier accepterede de resultater, han opnåede med de trigonometriske rækker, tog han det afgørende skridt på vejen til et brud med det Eulerske funktionsbegreb. Fouriers arbejde pegede også fremad i kraft af, at det efterlod uløste problemer, som krævede en præcisering af funktionsbegrebet. Der skulle dog andre (Dirichlet) til at opbygge et nyt funktionsbegreb, som kunne træde i stedet for det gamle, og som kunne anvendes i forbindelse med matematikkens nye problemer.

# 8 Diskussion

Denne diskussion indeholder forskellige overvejelser vedrørende vores metode til besvarelse af rapportens problemstilling. Vi vil i det følgende diskutere styrker og svagheder ved denne metode.

En generel bemærkning til dette arbejde er, at det er udført af fire matematikstuderende med interesse for matematikkens historie og ikke fire matematikinteresserede historikere. Den historiske faglighed i projektet må derfor formodes at være noget naiv, hvorimod den matematiske forståelse forhåbentligt er på et rimeligt niveau.

Der er ikke nogen i gruppen, som kan læse fransk eller latin, og vi har derfor ikke kunne læse originale tekster på disse sprog. Dette er naturligvis et problem, da vi beskæftiger os med en del af matematikkens udvikling, som i høj grad foregår i Frankrig. Heldigvis er der gode engelske oversættelser (Euler og Fourier) eller tyske genudgivelser (Dirichlet) af de værker, som har været vigtigst for os. Der er dog to områder, hvor vi især har måtte gribe til sekundær litteratur. For det første har vi ikke været i stand til at læse Fouriers 1807-memoir, hvori Fourier efter sigende skulle være mere præcis omkring sine grundlæggende forestillinger. Det andet område er i forbindelse med kritikken af Fourier. Vi ville især gerne læse Poissons kritik af Fourier, for at få en bedre forståelse af samtidens modstand mod Fouriers arbejde.

Grundlæggende er projektets omdrejningspunkt funktionsbegrebet. Mange historikere eller historisk interesserede matematikere har interesseret sig for udviklingen af dette begreb, og spørgsmålet er, hvorvidt vi kan bidrage med information eller konklusioner, som ikke bare kan findes i en artikel. Denne rapport har en lidt alternativ vinkel i forhold til de fleste afhandlinger, idet dens fokus er rettet mod Fouriers betydning for funktionsbegrebet og ikke mod en generel beskrivelse af Fouriers arbejde eller af funktionsbegrebets udvikling. Desuden giver omfanget af denne projektrapport mulighed for en grundig behandling af de pointer, vi finder relevante for en underbyggelse af vores konklusioner. Arbejdet her er altså snævert fokuseret omkring Fouriers arbejde.

I projektet har vi begrænset os til kun at beskæftige os i detaljer med tre personer – Euler, Fourier og Dirichlet. Dette betyder, at vi i stort omfang har måtte se bort fra betydingsfulde matematikere som f.eks. Lagrange og Cauchy. Den manglende indsigt i disse matematikeres arbejde har sammen med det faktum, at vi ikke på forhånd har været i besiddelse af en bred viden omkring matematikken i det attende og nittende århundrede, besværliggjort vurderingen af Dirichlets inspirationskilder. Stammer inspirationen fra Fourier, eller kommer den andetsteds fra? Vi mener, at Dirichlets personlige forhold til Fourier og lighederne mellem deres arbejde i høj grad sandsynliggør, at de elementer i Dirichlets funtionsbegreb, som allerede findes hos Fourier, skyldes, at Dirichlet var inspireret af Fourier.

Igennem projektet forsøger vi at undersøge, hvilken rolle forskellige personer har spillet for matematikkens udvikling, og en del af denne undersøgelse handler om, hvem der har fået hvilke ideer først. Men det er jo ikke muligt at vurdere, hvem der har tænkt hvad først, og det eneste man kan holde sig til, er de nedskrevne kilder, der findes. Samtaler, personlige relationer m.v., som uden tvivl har haft stor betydning, er langt sværere at tage højde for.

Et andet problem, som er beslægtet med ovenstående, er, at det til tider kan være svært at gennemskue, hvad matematikere præcist forestiller sig, når de formulerer sig i deres tekster. Fourier har f.eks. nedskrevet et funktionsbegreb, som tilsyneladende er meget generelt, men han bliver i praksis ved med at benytte mange elementer fra det Eulerske. Det er nødvendigt at være meget opmærksom på, hvad Fourier gør i sine matematiske udredninger, hvis man skal prøve at aflure meningen med hans formuleringer. Det kan godt være, at der i *Théorie Analytique* står skrevet, at en funktion kan defineres meget generelt, men det er ikke sikkert, at Fourier har samme forestilling som os af, hvad generelt er. Dette illustrerer vigtigheden af, at undersøge det faktiske matematiske arbejde grundigt.

Vores konklusioner bygger på vores egne analyser, men vi har selvfølgeligt støttet os til f.eks. artikler, så vi ikke skulle lede i blinde efter interessante pointer.

Vi er godt klar over, at vi ikke er professionelle indenfor matematikkens historie, og at vi formentlig ikke kommer med konklusioner, der ligefrem er revolutionerende, men vi mener, at vores konklusioner er underbygget i en sådan grad, at de er troværdige.

# 9 Konklusion

Fouriers vigtigste betydning for funktionsbegrebet var, at han brød med det Eulerske funktionsbegreb. Dette brud understreges af samtidens kritik af hans arbejde. Særligt tydeligt var bruddet med den analytiske fortsættelsesegenskab, som medførte, at intervaller kom til at spille en central rolle for funktionsbegrebet. Derudover brød Fourier i den forstand, at han krævede entydighed af funktioner, og at funktioner kun kan have endelige funktionsværdier. Medvirkende til bruddet var Fouriers påvisning af inkonsistensen i Eulers definition af kontinuitet.

Derimod brød Fourier ikke med analysens generalitet som sådan, og i praksis skete der kun en lille udvidelse af tilladte funktioner. Fouriers funktioner var enten analytiske udtryk eller geometriske kurver (evt. med spring).

Ud over at angribe det Eulerske funktionsbegreb kraftigt, præsenterede Fourier et nyt matematisk problem, nemlig spørgsmålet om konvergensen af Fourierrækkerne, som ikke kunne løses indenfor det gamle funktionsbegreb. Det videre arbejde med at løse dette problem nødvendiggjorde definitionen af et nyt funktionsbegreb og var således motivationen for definitionen af Dirichlets funktionsbegreb.

# 10 Eine kleine Nachtmusik

Beretningen om Fourierrækkernes betydning for den videre udvikling af funktionsbegrebet, vil vi forsøge at skitsere i dette afrundende kapitel. I den forbindelse vil vi kun behandle den udvikling, som fandt sted i det nittende århundrede. Kapitlet bygger på artiklerne [Bose, 1918] og [Vleck, 1914]. Mange af de pointer, vi trækker frem i nedenstående, er et selvstændigt studie værdigt, og fremstillingen af disse må betegnes som meget overfladisk. Afrundingen er alligevel interessant, da den giver et billede af den omfangsrige indflydelse, Fouriers resultater har haft.

Som overskriften antyder, skulle analysens udvikling i et stort omfang glide ud af de franske matematikeres hænder og over tyskernes. Den første, vi vil nævne i dette kapitel, er således Bernhard Riemann (1826-1866), som blev stærkt inspireret af Dirichlets konvergensbevis. Riemann søgte, i stedet for *de tilstrækkelige betingelser* som Dirichlet havde opstillet, at opstille *de nødvendige betingelser*. Riemann skulle senere vise, at kontinuitet *ikke* var en nødvendighed og i forbindelse med sin undersøgelse af Fourierrækkerne, skulle han definere det integralbegreb, vi i dag kender som *Riemann-integralet*. Fourierrækkerne kom altså også til at spille en rolle i adskillelsen af kontinuitet og integrabilitet. Riemann fik imidlertid ikke fuldført den afklaring af konvergensen af rækkerne, han gerne ville, og hans arbejde blev som følge heraf først publiceret i 1867 – efter Riemanns død. Arbejdet med konvergensen af Fourierrækkerne fortsatte derfor.

Karl Weierstrass (1815-1897) skulle senere, i 1875, ligeledes i forbindelse med arbejde med Fourierrækker give et eksempel på en trigonometrisk række, som var kontinuert men intetsteds-differentiabel. Følgevirkningerne af præsentationen af denne funktion var en fuldstændig afklaring og adskillelse af begreberne kontinuitet og differentiabilitet.

Således slutter *vores* beretning om Fourierrækkerne og funktionsbegrebet udvikling. Definitionen af det moderne funktionsbegreb blev grundlagt af Dirichlet i 1837 (1829). I løbet af det nittende århundrede fulgte en afklaring af de centrale funktionsegenskaber kontinuitet, differentiabilitet og integrabilitet. Udviklingen var i stor grad præget af Fourierrækkerne både direkte og indirekte. I [Bose, 1918] tilskrives Fourier også en del af æren for præciseringen af det vigtige begreb uniform konvergens samt andre videregående begrebsdannelser i analysen. 'EuFourieren' vil i [Bose, 1918][s. 84] ingen ende tage.

> »We bow then to the greatness of Jean Baptiste Joseph Fourier and we greet him, in the 20th century, with the eloquent words of Sir William Rowan Hamilton, another great Mathematician whom Fourier charmed and inspired in writing his theory of Fluctuating functions :-
>
> "Fourier with solemn and profound delight,
> Joy born of awe, but kindling momently
> To an intense and thrilling ecstacy,
> I gaze upon thy glory and grow bright:
> As if irradiate with beholden light;
> As if the immortal that remains of thee
> Attune me to thy spirit's harmony,
> Breathing serene resolve and tranquil might,
> Revealed appear thy silent thoughts of youth,
> As if to consciousness, and all that view
> Prophetic, of the heritage of truth
> To thy majestic years of manhood due:
> Darkness and error fleeing far away,
> And the pure mind enthroned in perfect day."
>
> «

# Litteratur


E. Bell. *Men of Mathematics.* Simon and Schuster, New York, 1937.

A. C. Bose. Fourier his life and work. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society,* 7:33–48, 1915-16.

A. C. Bose. Fourier's series and its influence on some of the developments of mathematical analysis. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society,* pages 71–84, 1918.

U. Bottazzini. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* Springer Verlag, New York, 1986.

L. Dirichlet. *Werke.* Georg Reimer, Berlin, 1889.

D.J.Struik. *A Source Book in Mathematics 1200–1800.* Princeton University Press, United States of America, 1990. First printing 1969 by the President and Fellows of Harvard College.

L. Euler. *Introduction to Analysis of the Infinite.* Springer Verlag, New York, 1988. Translated by John D. Blanton, 2 bind.

J. Fourier. Oeuvres 1. In G. Darboux, editor, *Oeuvres de Fourier.* Du Bureau des Longitudes, De Lécole Polytechnique, Paris, 1890.

J. Fourier. *The Analytical Theory of Heat (English translation).* Dover Publications, Inc., New York, 1955. Translated, with notes, by Alexander Freeman, original version published in 1922.

I. Grattan-Guinness. Joseph Fourier and the revolution in mathematical physics. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications,* 5:230–253, 1969.

I. Grattan-Guinness. Bolzano, Cauchy and the 'new analysis' of the early nineteenth century. *Archive of History of Exact Sciences,* 6:372–400, 1970.

I. Grattan-Guinness. *Joseph Fourier 1768-1830.* Massachusets Institute of Technology, The Colonial Press Inc., 1972.

I. Grattan-Guinness. *Convolutions in French Mathematic 1800-1840.* Birkhauser Verlag, Berlin, 1990. 3 bind.

J. Herivel. *Joseph Fourier, The Man and The Physicist.* Oxford University Press, Oxford, 1975.

V. J. Katz. *A History of Mathematics.* Harper Collins College Publishers, New York, 1993.

M. Kline. *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times vol. 2.* Oxford University Press, New York, 1990. vol. 2 og 3.

J. Lützen. Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, 25/26:5–32, 1978.

J. Lützen. Between rigor and applications: Developments in the concept of function in mathematical analysis. pages 468–487, 2001.

J. Ravetz. Vibrating strings and arbitrary functions. In *The Logic of Personal Knowledge*, pages 71–88. Routledge & Kegan Paul Ltd., London, 1961. Essays presented to Michael Polanyi.

H. Reichardt. *Nachrufe auf Berliner Mathematiker des 19. Jahrhunderts.* Springer Verlag, New York, 1988.

E. B. V. Vleck. The influence of Fourier's series upon the development of mathematics. *Science*, 39:113–124, 1914.

**Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: http://mmf.ruc.dk eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.**

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski

386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen

388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen

---

390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System#: Thomas Engberg Pedersen##, Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2#: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen*, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen**, Bent Sørensen
#Indtil 1/1-2000 Elkraft, ## fra 1/5-2000 Cowi Consult
* Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ** fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram

391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen

392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.

393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.

395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorthe Posselt

398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt

399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss

400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen

401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen

402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen

403/01 Generaliseringer i integralteorien
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen

404/01 "Mere spredt fægtning"
Af: Jens Højgaard Jensen

405/01 Real life routing
- en strategi for et virkeligt vrp
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jogvan Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak
Vejleder: Jørgen Larsen

406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik
Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg

407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

---

408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang

409/02 Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy
- et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning *før* Gauss, Abel og Galois
Videnskabsfagsprojekt af: David Heiberg Backchi, Uffe thomas Volmer Jankvist, Neslihan Saglanmak
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

410/02 2 projekter om modellering af influenzaepidemier
Influenzaepidemier- et matematisk modelleringsprojekt
Af: Claus Jørgensen, Christina Lohfert, Martin Mikkelsen, Anne-Louise H. Nielsen
Vejleder: Morten Blomhøj
Influenza A: Den tilbagevendende plage – et modelleringsprojekt
Af: Beth Paludan Carlsen, Christian Dahmcke, Lena Petersen, Michael Wagner
Vejleder: Morten Blomhøj

411/02 Polygonformede hydrauliske spring
Et modelleringsprojekt af: Kåre Stokvad Hansen, Ditte Jørgensen, Johan Rønby Pedersen, Bjørn Toldbod
Vejleder: Jesper Larsen

412/02 Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning – en generel analyse samt en behandling af strømningen bag en cylinder
Et matematisk modul III professionsprojekt af. Kristine Niss, Bo Jakobsen
Vejledere: Morten Brøns, Johnny Ottesen

---

413/03 "Elevernes stemmer" Fysikfaget, undervisningen og lærerroller, som eleverne opfatter det i det almene gymnasium i Danmark
Af: Carl Angell, Albert Chr. Paulsen

414/03 Feltliniediagrammer En vej til forståelse?
Et 1. modul fysikprojekt af: Ditte Gundermann, Kåre Stokvad Hansen, Ulf Rørbæk Pedersen
Vejleder: Tage Emil Christensen

415/03 FYSIKFAGET I FORANDRING Læring og undervisning i fysik i gymnasiet med fokus på dialogiske processer, autenticitet og kompetenceudvikling
Ph.d.-afhandling i fysikdidaktik af: Jens Dolin

416/03 Fourier og Funktionsbegrebet
- Overgangen fra Eulers til Dirichlets funktionsbegreb
Projektrapport af: Rasmus Brauner Godiksen, Claus Jørgensen, Tony Moyer Hanberg, Bjørn Toldbod
Vejleder: Erik von Essen