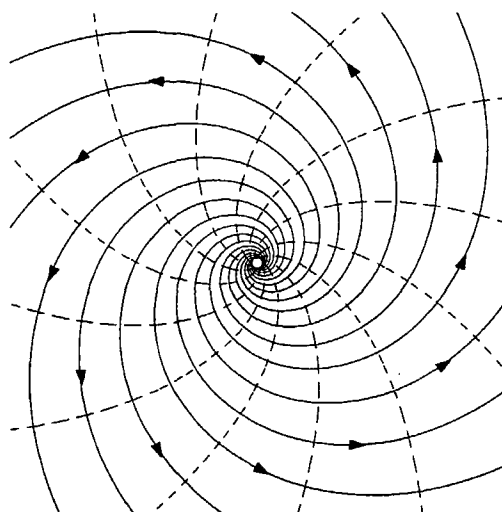


**TEKST NR 414**

**2003**

# **Feltliniediagrammer**

**En vej til forståelse?**



**Ditte Gundermann  
Kåre Stokvad Hansen  
Ulf Rørbæk Pedersen**

**Vejleder: Tage Emil Christensen**

**TEKSTER fra**

**IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA - Roskilde Universitetscenter - Postboks 260 - DK 4000 Roskilde

Tlf: 46742263 - Fax: 46743020 - Mail: imfufa@ruc.dk

Ditte Gundermann, Kåre Stokvad Hansen og Ulf Rørbæk Pedersen:

"Feltliniediagrammer: En vej til forståelse?"

IMFUFA tekst nr. 414 - 68 sider - ISBN 0106-6242

## Abstrakt

Projektets formål er at undersøge feltliniediagrammers betydning for forståelse af det elektromagnetiske felt.

Projektet indeholder en diskussion af begrebet forståelse, en begrebsmæssig gennemgang af det elektromagnetiske felt og efterfølgende en karakteristik af feltliniediagrammer.

På baggrund heraf konkluderes at feltliniediagrammer bidrager til forståelse af det elektromagnetiske felt ved at være en måde at repræsentere feltet visuelt på. De er gode til at afspejle en række af det elektromagnetiske felts egenskaber, så som stress, feltretning, feltstyrke og ækvipotentialer. Endvidere er feltliniediagrammer overskuelige og er gode til at vise feltets kilder.

Feltliniediagrammer kan benyttes til at komme med kvalitative forudsigelser, og er på den måde med til at give, hvad der i projektet betegnes som fysisk forståelse.

Det påpeges at feltliniediagrammer ikke altid repræsenterer det elektromagnetiske felt korrekt, og det vises at der tilsyneladende hersker en generel misforståelse om at feltlinietætheden altid afspejler feltstyrken.

Vi vil gerne takke vores vejleder Tage Emil Christensen for kommentarer og inspiration til projektet og en tak til både Karin Bayer og Albert Paulsen for at bidrage med interessant og anvendelig litteratur.

# Indhold

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>5</b>
1.1	Motivation for projektet . . . . .	5
1.2	Problemfelt . . . . .	6
1.3	Rapportens opbygning . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Forståelse</b>	<b>9</b>
2.1	Repræsentationsformer . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Den begrebslige forståelse af det elektromagnetiske felt</b>	<b>15</b>
3.1	Hvad er det elektriske felt . . . . .	15
3.2	Elektrisk potentiale . . . . .	17
3.2.1	Den begrebsmæssige forståelse af potentialet . . . . .	17
3.2.2	Anvendelse af potentiale . . . . .	17
3.3	Stresstensorer . . . . .	18
3.3.1	Den generelle stresstensor . . . . .	18
3.3.2	Stresstensor i klassisk mekanik . . . . .	20
3.3.3	Stresstensen i hydrostatik . . . . .	20
3.3.4	Stresstensen i faste stoffer . . . . .	21
3.3.5	Stresstensen i magnetostatik og elektrostatik . . . . .	21
3.3.6	Lorentzkraft eller stresstensor? . . . . .	24
3.4	Impulstrømme . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Visualisering og tolkning af feltliniediagrammer</b>	<b>29</b>
4.1	Feltlinier . . . . .	29
4.2	Ortogonalflader . . . . .	30
4.3	Skitsering af elektriske feltlinier . . . . .	31
4.4	Skitsering af magnetiske feltlinier . . . . .	35
4.5	Potential repræsenteret ved gummilagen . . . . .	35
4.6	Stesstensorfortolkning af feltliniediagrammer . . . . .	37
4.6.1	Gummibåndsanalogi . . . . .	39
4.7	Superpositionering af feltliniediagrammer . . . . .	41
4.8	Feltlinier i bevægelse . . . . .	41
4.9	Fra tre dimensioner til to . . . . .	42
4.10	Feltlinietæthed og feltstyrke . . . . .	45
<b>5</b>	<b>En ledning i et <math>B</math>-felt</b>	<b>47</b>
<b>6</b>	<b>Opsummering</b>	<b>51</b>
<b>7</b>	<b>Diskussion</b>	<b>53</b>
<b>8</b>	<b>Konklusion</b>	<b>57</b>

---

<b>9 Perspektivering</b>	<b>59</b>
<b>A Maxwells ligninger</b>	<b>61</b>
<b>B Maxwells stresstensor</b>	<b>63</b>
<b>C Computertegnede figurer</b>	<b>65</b>
C.1 Numerisk løsning af Laplaces ligning . . . . .	65
<b>Litteratur</b>	<b>67</b>

# 1 Indledning

Nærværende projektrapport er afslutningen på et 1. moduls projekt af »meta«-varianten under studieordningen for fysik på RUC.

## 1.1 Motivation for projektet

En af de problemstillinger som var udgangspunkt for dette projekt, omhandlede matematikkens rolle i fysikken. Gruppen var inspireret af et oplæg ved IMFUFAs æresdoktor Philip J. Davis som drillende sagde: »Fysik er blot anvendt matematik«. Som fysikstuderende følte gruppens medlemmer sig en smule provokerede. Vi var selvfølgelig overbeviste om at fysik er mere end anvendt matematik, men når det kom til stykket, var vi alligevel ikke i stand til at give en klar beskrivelse af hvilke ekstra kompetencer fysikeren besidder.

På daværende tidspunkt havde gruppens medlemmer alle netop overstået eksamen i kurset »breddefysik«. Kurset tager udgangspunkt i hverdagsfysik, dvs. i fænomener som man kan møde i hverdagen, og opgaverne er formuleret så løst, at det er op til opgaveløseren selv at præcisere problemstillingen og opstille de rigtige ligninger. For at løse opgaverne er det således ikke nok blot at kunne jonglere med formlerne, man er også nødt til at forstå fysikken. Den fysiske forståelse bygger altså ikke kun på matematik. Eksempler på sådanne opgaver kan findes i »Opgavesamling til breddefysik« [IMFUFA, 1999], »Thinking physics« [Epstein & G.Hewitt, 1981] og bladet »KVANT«.

Vi stødte på en undersøgelse foretaget på DTU, som siden både er foretaget på KVL og på Aalborg universitet. Undersøgelsen baserede sig på to skriftlige test af studerende - én inden eksamen og én umiddelbart efter. Opgaveformuleringerne lagde op til selvstændige forklaringer på fysiske begreber, og krævede derfor en forståelse af det stof, der hørte til det pågældende kursus. Efterfølgende blev enkelte studerende interviewet om deres skriftlige besvarelser.

Resultatet af undersøgelsen beskrives i hovedrapporten, hvor der blandt andet konkluderes [Jakobsen et al., 1998]

»...at en meget stor del af de studerende, som består kurser med gode karakterer, ikke har en dertil svarende forståelse af og evne til at bruge ingeniørfaglige kernebegreber og metoder«.

Og i bladet »Ingeniøren« skrives der [Wessel, 1998, side 2]:

»Undersøgelsen viste, at 2/3 af de studerende ikke havde forstået grundlæggende aspekter af teorien. De gik nu til eksamen alligevel - og bestod. Ganske som de plejer«.

Der syntes således ikke at være en direkte sammenhæng mellem bestået eksamen og forståelse. Resultatet af undersøgelsen uddybes i undersøgelsens hovedrapport, hvor der blandt andet skrives [Jacobsen et al., 1999, side 36]:

»At de studerende er gode til at gennemføre endda ret komplicerede beregninger, kan således ikke tages som udtryk for at de har forstået fagets centrale begreber. I flere tilfælde har studerende opnået en høj karakter ved eksaminer hvor de har gennemført beregninger på begreber og sammenhænge som de ved tests har vist en ringe grad af forståelse af. Vi har konkrete eksempler på at studerende ved en sluttet end ikke kunne redegøre for den fysiske betydning af de led der indgik i en formel, som de godt kunne bruge i beregninger ved eksamenen«.

I hovedrapporten refereres desuden til lignende undersøgelser foretaget både herhjemme og i udlandet med tilsvarende resultater. Interessen for en undersøgelse af begrebet fysisk forståelse begyndte herefter at stige. Spørgsmål som: Hvad er forståelse, og hvordan kan den opnås? var blandt de fremherskende. Det syntes tydeligt, at der ikke nødvendigvis var en forbindelse mellem forståelse og en bestået eksamen.

Et andet resultat af undersøgelsen udtrykkes meget eksplicit, nemlig at studerende i høj grad fokuserer på eksamen, og det derfor er styrende for arbejdsindsatsen. Som der skrives i et referat af undersøgelsen [Center for Didaktik Og Metode Udvikling, 2000, side 10]

»Det uheldige er at eksaminer som de for en stor dels vedkommende praktiseres, er ret forudsigelige og ofte kun prøver en meget begrænset kompetence som ikke omfatter forståelse af det mest centrale og som styrer de studerendes studieindsats i en uheldig retning«.

Dette kan give problemer i forhold til ens måde at tilegne sig viden på. Der bliver lagt en stor fokus på eksamensrelaterede opgaver, hvilket i nogen udstrækning sker på bekostning af tilegnelsen af begrebsmæssig forståelse. Dette er ikke nødvendigvis lærebøgers skyld, men det skyldes nok i højere grad det tidlige pres der er i studieforløbet. Det kan være med til at der fokuseres på ligningerne, og hvordan man kan bruge dem, i stedet for at se på det fysiske indhold i ligningerne.

En af undersøgelsens refleksioner lyder således [Jacobsen et al., 1999, side 36] :

»Det skal naturligvis ikke opfattes sådan, at det ikke er vigtig at de studerende lærer at udføre beregninger. Mere generelt kan man sige, at en dyb forståelse af et fags centrale elementer vil give én flere *kompetenceelementer*. Blandt andet vil man have en intuitiv forankring af de centrale elementer, man vil kunne genkende dem i forskellige repræsentationer, man vil kunne genkende dem i praktisk kontekst, man vil kunne foretage komplicerede beregninger med dem, man vil kunne foretage passende vurderinger af beregningemetoder og man vil kunne manipulere og tilpasse metoder når det er påkrævet«.

## 1.2 Problemfelt

Ønsket var herefter at finde ud af hvad der øger forståelsen, så de ovenfor nævnte kompetencer eventuelt kan opnås. I den forbindelse faldt vi over feltliniebegrebet som eksempel på en illustrativ fremstilling af et fysisk fænomen, nemlig elektromagnetiske felter. Efter en del omveje kom vi så lidt sent frem til følgende problemformulering:

**Bidraget feltliniediagrammer til forståelse  
af det elektromagnetiske felt?**

Besvarelsen af problemformuleringen kræver en klarlæggelse af hvad et elektromagnetisk felt egentlig er. Under projektarbejdet stødte vi på forskellige udlægninger af hvad man skal forstå ved det elektromagnetiske felt. Især en artikel [Herrmann, 1989] gjorde det tydeligt, at vi selv i nogen udstrækning havde misforstået hvad et elektromagnetisk felt er. I rapporten vil det blive gennemgået hvordan man kan få en ide om hvilke egenskaber feltlinierne repræsenterer ved det elektromagnetiske felt. Da det er vores intension at klarlægge hvordan feltliniediagrammer kan give forståelse, vil vi uddybe dele af den sædvanlige fremstilling af felter, ved at tilføje den såkaldte stresstensorfortolkning af feltlinierne.

I de fleste lærebøger er feltlinier blot noget, som tjener til at illustrere hvordan feltet ser ud omkring en given ladningsfordeling eller lignende. Der gives ikke nogen grundig opskrift på hvordan feltlinier tegnes, eller på hvordan de skal tolkes i forhold til det elektromagnetiske felt, andet end hvad tætheden og retningen af feltlinier angår.

### 1.3 Rapportens opbygning

For at kunne besvare problemformuleringen, må man først gøre sig klart, hvad man vil mene med ordet »forståelse« og i særdeleshed »fysisk forståelse«. Dette, præciseres i rapportens kapitel 2, og udfra indholdet i dette kapitel gives en karakteristik af hvad vi mener med fysisk forståelse er.

I kapitel 3 søges det klarlagt hvilke egenskaber det elektromagnetiske felt har. Her er udvalgt egenskaber, som vi finder væsentlige at fremhæve for at kunne opnå en begrebslig forståelse (se side 12) af det elektromagnetiske felt.

I kapitel 4 beskrives feltliniediagrammer. Både hvad feltliniediagrammer er, og hvordan man fremstiller dem. Det klarlægges desuden hvordan feltliniediagrammer skal tolkes for at kunne repræsentere nogle af de egenskaber som det elektromagnetiske felt har, og som er beskrevet i kapitel 3. Som afrunding og opsamling på kapitel 3 og 4 præsenteres et eksempel på brugen af de redskaber der er blevet beskrevet. Dette sker i kapitel 5.

Rapporten afsluttes med en diskussion af de for besvarelsen af problemformuleringen relevante pointer gennem rapporten. Endelig samles der op på disse i konklusionen.

Det skal nævnes, at med vores arbejde med analogiers anvendelighed som baggrund, har vi fundet det naturligt at benytte analogier i vores fremstilling. Der vil derfor flere steder i rapporten være analogier mellem de elektromagnetiske systemer og systemer med lignende egenskaber.

## 2 Forståelse

Ved et indledende litteraturstudie om emnet forståelse viste det sig, at det er meget vanskeligt at give en objektiv og videnskabelig definition af begrebet. »Forståelse« bruges i flæng i en lang række tilfælde, så i stedet for blot at tale om en endelig opnåelse af forståelse, er det nok mere meningsfuldt at snakke om flere niveauer af forståelse. En af grundene til det er svært at definere forståelse, er at det i høj grad er et subjektivt fænomen. De fleste har nok en ide om hvornår de (i hvert fald føler de) har forstået noget, men hvordan, hvornår og i hvilken grad det blev forstået, afhænger i høj grad af hvilke erfaringer vedkommende havde forud for forståelsen. Disse erfaringer er selvfølgelig forskellige fra person til person, og det er derfor svært at beskrive objektivt hvad forståelse bundet i. Af måske samme grund beskæftiger en del videnskabsteoretikere sig i stedet for med hvad der kan antages at føre til fysisk forståelse og ikke så meget med hvad forståelse er. En anden tilgang er at se på hvilke kompetencer man må siges at have, for at besidde hvad man kan kalde fysisk forståelse. Som udgangspunkt virker det indlysende, at fysisk forståelse er noget en fysiker skal have, men hvordan giver denne forståelse sig til kende i fysikerens måde at tilegne sig og udtrykke viden på? Det er et spørgsmål som en del videnskabsteoretikere og fysikere i tidens løb har beskæftiget sig med.

Begrebet forståelse blevet diskuteret indenfor mange forskellige fagdiscipliner og ud fra forskellige tilgangsvinkler. Nogle har endog dristet sig til at komme med definitioner af samme. I det følgende vil vi gennemgå og sammenholde en række forskellige udlægninger og diskussioner omkring forståelse og forklaringer.

En holdning som man ikke sjældent støder på i debatten om forståelse er, at forståelse bygger på en form for genkendelse. Ifølge P.W. Bridgeman er en god forklaring, dvs. en der leder til forståelse, en som relaterer det fysiske fænomen som ønskes forklares til et andet, som er så velkendt at man ikke stiller spørgsmål til det. Han formulerer det således i følgende citat [Bridgeman, 1958, side 37]:

»I believe that examination will show that the essence of explanation consist in reducing a situation to elements with which we are so familiar with that we accept them as a matter of course, so our curiosity rests«

Dette synspunkt er blandt andet inspireret af forklaringer af gassers opførsel ved hjælp af statistisk mekanik, hvor gassens molekyler beskrives som små billardkugler, hvis opførsel man er så bekendt med at man ikke stiller spørgsmål for yderligere forklaring. En holdning som i nogen grad ligner Bridgemans findes beskrevet hos Friedman [Friedman, 1988, side 192]. Pointen er, at for at noget kan forstås skal det ske på baggrund af noget, der i forvejen er forstået.

Det kan umiddelbart synes rimeligt, at ny erkendelse skal funderes på andet kendt eller forstået, men der er dog, som også Friedman [Friedman, 1988] påpeger, problemer ved at stille det krav til fysiske forklaringer, at de skal relatere



ukendte fænomener til kendte eller forståede. For det første eksisterer der forklaringer inden for fysikken, som relaterer et fra dagligdagen kendt fænomen til et fænomen eller en beskrivelse som ikke er en del af vores erfaring. Et eksempel er refraction og refleksion som forklares vha. elektromagnetiske bølger. Desuden er ikke alle selv fra hverdagen velkendte fænomener nødvendigvis forståede. Eksempelvis er de fleste mennesker bekendt med diverse husholdningsmaskiner, men de færreste kan nok siges at have forstået dem. For det andet relaterer mange fysiske forklaringer fænomener til andre fænomener som ikke er forståede, men som må accepteres som en slags grundantagelser. Indenfor nogle discipliner er der desuden det problem, at der ikke er noget analogt at relatere det pågældende fænomen til. Dette er f.eks. tilfældet inden for kvantemekanikken, men det forhindrer ikke kvantemekanikken i at gøre korrekte forudsigelser.

Friedmans holdning til hvad en videnskabelig forklaring er og bør være, og hvordan en sådan medvirker til øget forståelse illustreres meget præcis ved hans egen formulering [Friedman, 1988, side 195]:

»I claim that ... science increases our understanding of the world by reducing the total number of independent phenomena that we have to accept as ultimate or given. A world with fewer independent phenomena is, other things equal, more comprehensible than one with more«.

Denne holdning synes i højere grad at sigte mod hvad fysikken som videnskab sigter imod, end mod hvad forståelse er for den enkelte, og der kan findes mange udemærkede eksempler på hvordan forskellige grene af fysikken forenes til mere generelle teorier. Eksempelvis kan nævnes foreningen af elektriske og magnetiske kræfter i elektrodynamikken.

En lignende holdning til hvad fysikkens opgave er genfindes også i Rudolf Carnaps »Foundations of Logic and Mathematics« Carnap [1939]. I et afrundende kapitel om forståelse i fysik, fremhæves den pointe, at det ikke er fysikerens eller fysikkens mål at have klare intuitive formuleringer af hvordan verden er. Det centrale er at kunne beskrive verden, uanset hvor abstrakt og matematisk vanskelig en teori end måtte fremtræde.

Det er således Carnaps holdning, at der ikke skal stilles krav om forståelse af eksempelvis symbolet  $E$  i Maxwells ligninger. Det er ikke nødvendigt, at man kan forklare hvad  $E$  er uden at ty til ligninger og gennemregninger, men som han selv skriver [Carnap, 1939, side 68-69]:

»...we understand 'E', if ›understanding‹ of an expression, a sentence, or a theory means capability of its use for the description of known facts or the prediction of new facts. An ›intuitive understanding‹ or a direct translation of 'E' into terms referring to observable properties is neither necessary nor possible«.

Denne holdning må siges at være udtryk for en pragmatisme, det kan være svært at affinde sig med. En af dem som ikke stiller sig tilfreds med denne opfattelse af fysikkens rolle er Peder Voetmann Christiansen. I sit indlæg til »GAMMA Γ« i december 1986 udtrykker han bekymring over ovenstående og lignende holdninger. Han kritiserer fysikken for dens manglende billede af den virkelighed, den selv forsøger at klarlægge. Hans holdning er, at det ikke er nok at konstatere at formlerne giver de rigtige forudsigelser i forhold til resultaterne i laboratiet, hvis man ikke kan danne sig et billede af hvad de givne ligninger

beskriver. Peder Voetmann Christiansen skriver [Christiansen, 1990, side 144-145]

»Fysikken er højst aktiv i processen at iagttage og skabe virkeligheden, men har selv problemer med sin virkelighedsopfattelse, sin ontologi. I lang tid har det slet ikke været »in« at tale om virkeligheden som noget, der eksisterer uafhængigt af fysikers formelapparat. Man må helst ikke forestille sig noget eller gøre sig billeder af det, ifølge Bohr og den københavnske fortolkning af kvantemekanikken. Det forbud kan ingen kreativ fysiker leve med. Man må operere med et sæt forestillinger, der går bag om de matematiske symboler...«

En tilsvarende holdning kommer til udtryk hos Sebastian Horst i sit speciale, hvor han skriver [Horst, 1999, side 93]:

»Men hvor matematikken i høj grad giver fysikken sin store anvendelighed, mener jeg billederne er afgørende for forståelsen. ... En fysikuddannelse hvor det visualiserende aspekt er nedtonet, kan give udmærkede ingeniørfærdigheder, dvs. evnen til at producere nøjagtige forudsigelser for velkendte problemstillinger. Men den kreative og nyskabende tanke er muligvis bedst tjent med at evnen til at visualisere trænes og prioriteres i langt højere grad end det har været tilfældet. I hvert fald har historiske analyser af videnskabens udvikling gentagne gange vist at analogidannelse, visuelle repræsentationer og tankeeksperimenter har haft afgørende indflydelse på udviklingen af nye teorier.«

Billeddannelse og brugen af analogier var noget som også i 1800-tallet optog videnskabsfolk. James Clerke Maxwell (1801-1879) var optaget af at beskrive elektromagnetismen ved hjælp af analogier til kendte sammenhænge inden for både hydrodynamikken og mekanikken. Eksempelvis beskrev han det elektriske skalarpotentiale som tryk i et kontinuert medie, og feltlinier som analog til strømninglinier inden for hydrodynamikken. Maxwell mente at mekanikkens tænkemåde er mere intuitiv fordi den bygger på »kropslige« erfaringer fra hverdagen, såsom vægt, udvidelse, kraft, tryk, impuls mm. [Cat, 2001].

De anvendte analogier byggede efter Maxwells eget udsagn mere på lighed mellem relationer end på lighed mellem de relaterede fænomener. Maxwells lærer William Hamilton tilskriver ligeledes relationer en stor rolle i forbindelse med erkendelse. Ifølge Hamilton er erkendelse af natur relaterende, og alt viden er viden om relationer [Cat, 2001].

Maxwell mente, at analogier var bindeled mellem den matematiske abstrakte formalisme og den konkrete fysiske beskrivelse. Han understregede dog, at den fysiske beskrivelse skulle understøttes af den matematiske. På trods af deres store forståelsesmæssige force kunne analogierne kun give en løs viden, ligesom de oftest ikke kunne tillægges nogen reel fysisk sandhed, før de havde bevist deres berettigelse ved gentagne korrekte forudsigelser eller beskrivelser. Maxwell var samtidig opmærksom på, at det var vigtigt, at undersøge uoverensstemmelser mellem de analoge fænomener så man undgik fejlslutninger [Cat, 2001].

Vi vil nu se på en tilgang til forståelse som findes hos didaktikere og psykologer. Her fokuseres på hvilke kriterier man kan opstille for opnået forståelse, og hvilke anskuelsermetoder der fører til forståelse.

## 2.1 Repræsentationsformer

I fysikstudiet bliver man som studerende stillet overfor en række ydre krav fra uddannelsesinstitutionen side. Der er en række kurser der skal gennemføres,

eksamener der skal bestås, projekter der skal skrives, teori og matematiske redskaber der skal læres etc. Disse dækker desuden også mindre specifikke krav som f.eks. at kunne tilegne sig og anvende nye begreber og redskaber, tilegne sig fortrolighed med apparater, lave eksperimentelle opstillinger, behandle måledata, lave usikkerhedsanalyser, repræsentere resultater og meget andet. Der er således en hel række af kompetencer der skal tilegnes under uddannelsesforløbet.

Indenfor psykologien beskæftiger man sig med repræsentationsformer som udtryk for forståelse. Og her kommer disse kompetencer i spil, i det de i psykologien opfattes som måder at tilegne sig forståelse. Ligeledes opfattes anvendelse af repræsentationsformer som et udtryk for at en forståelse er opnået. En af forfatterne for definere forståelse ved hjælp af repræsentationsformer er Wolff-Michel Roth. Han definerer 5 repræsentationsformer, som han mener dækker over de forskellige måder hvorpå man kan udtrykke eller tilegne sig viden om et fænomen eller begivenhed på. Roths 5 repræsentationsformer er:

- **Fænomenologisk repræsentation**
- **Eksperimentel repræsentation**
- **Deskriptiv repræsentation**
- **Matematisk symbolsk repræsentation**
- **Begrebsmæssig repræsentation**

Denne liste udvides i Jens Dolins Ph.D afhandling [Dolin, 2002, side 162] med inspiration fra en artikel af Thorley og Stofflett [Thorley & Stofflett, 1996] til også at indbefatte:

- **Billedmæssig repræsentation**
- **Kinæstetisk repræsentation**

[Dolin, 2002, side 162]. Dolins mål er at indrage disse repræsentationsformer i gymnasieundervisningen. Med denne udvidelse af Roths liste vil det være på sin plads med en uddybelse af de enkelte repræsentationsformer. I den forbindelse er det vigtigt at pointere, at repræsentationsformerne dels kan ses som en måde at tilegne sig forståelse på, ved at repræsentere det samme begreb eller fænomen med de forskellige indgangsvinkler, og dels en måde at kunne »måle« forståelse på, da evnen til at kunne repræsentere et begreb eller en teori på forkellig vis er udtryk for opnået forståelse [Dolin, 2002, side 174].

**Fænomenologisk repræsentation** handler om at sætte ord på det, der umiddelbart observeres. Men det er ikke en fuldstændig forudsætningsløs proces. Det er væsentlig at fokusere på de størrelser, der har relevans i forhold til en fysisk beskrivelse. Dette stiller krav til at kunne finde fokus.

**Eksperimentel repræsentation** er fokus på hvordan man kan opnå kendskab til fysiske begreber ved eksperimentelle erfaringer. Dette indbefatter at beherske eksperimentelle færdigheder, som igen forudsætter en viden om apparater og fysiske størrelser. Eksempelvis hvordan man ved måling af en spænding kan måle en temperatur ved brug af en temperaturafhængig modstand.

**Deskriptiv repræsentation** består i nogen udstrækning i at kunne repræsentere målte data på hensigtsmæssig måde, men i lige så høj grad i at kunne forbinde disse repræsentationer med egenskaber ved de undersøgte fænomener. Dette kan for eksempel indbefatte viden om hvordan en bestemt graf svarer til målte fysiske egenskaber. Eksempelvis hvordan varmekapaciteten afhænger af temperaturen.

**Matematisk symbolsk repræsentation** handler om at kunne gå fra det fænomenologiske og deskriptive til funktionsudtryk og omvendt. At forbinde den matematiske repræsentation med de fysiske fænomener og vide hvad matematiske operationer svarer til i forhold til det faktisk fysiske.

**Begrebsmæssig repræsentation** indeholder evnen til at kunne anvende de generaliseringer som i fysikken benyttes til beskrivelser og forklaringer. Eksempelvis at kunne gennemskue, at det er den mekaniske energis bevarelse, der lægger bag bevægelsesligninger i et konservativt kraftfelt. Som Dolin udtrykker det [Dolin, 2002, side 167]: »Begreberne er så at sige de led, som fysikken skyder ind mellem de umiddelbare fænomener og teorien...«. Det kan også være mindre avancerede begreber som forståelse af impulsbevarelse, temperatur, varmekapacitet eller elektrisk ladning.

**Billedmæssig repræsentation** er både den indre og ydre billeddannelse. Det vil sige på den ene side eksempelvis at kunne skitsere et system ved et elektrisk kredsløb, tegne feltlinier og på den anden side at lave analogier og metafoer.

**Kinæstetisk repræsentation** har egentlig mest sit sigte til indlæring ved hjælp af kroppen, og kan ses som et middel til at opbygge en begrebsmæssig forståelse. Eksempelvis kan begrebet gyroskopisk præcision tilegnes ved at holde et snorende hjul, mens man sidder på en drejelig stol.

Det er vigtigt at pointere at der ikke er tale om en hierarkisk skelnen mellem de forskellige repræsentationsformer, ligesom de ikke kan tages som udtryk for en tidlig udvikling af den enkeltes forståelse. Endvidere gøres ofte brug af flere repræsentationsformer i et samspil, når et fænomen skal forstås.

Som det fremgår er forståelse et nyanceret begreb. Efter vores mening er brugen af repræsentationsformer den mest bredt spændende beskrivelse af hvad der kan betegnes som forståelse.

Vi vil i dette projekt koncentrere os om den del af forståelse som ligger uden for det rent matematiske. Med andre ord den forståelse som de studerende ifølge DTU-rapporten manglede.

Dertil kommer endnu en type af forståelse, som er svær at kategorisere ud fra de ovennævnte repræsentationsformer. Denne form for forståelse vil vi betegne som fysisk forståelse. Feynman kalder denne kompetence for fysisk gætværk eller fysisk intuition og i et citat af Dirac skriver Feynman [Feynman, 1989, side 2-1]:

What it means really to understand an equation—that is, in more than strictly mathematical sense—was described by Dirac. He said: »I understand what an equation means if I have a way of figuring out the characteristics of its solution without actually solving it. So if we have a way of knowing what should happen in given circumstances without actually solving the equations, then we understand the equations, as applied to these circumstances. A physical understanding is a completely unmathematical, imprecise, and inexact thing, but absolutely necessary for a physicist.«

Det som Dirac her beskriver som fysisk forståelse er det, som man kort kan kalde evnen til at give kvalitative forudsigelser. Det vil sige, at man uden nøje gennemregning vil kunne afgøre hvad de karakteriske træk ved svaret på en opgave eller et problem er.

Vi vil i det følgende se på feltliniediagrammer inden for elektromagnetismen. Vi vil specielt fokusere på den begrebsmæssige og den billedmæssige repræsentation af det elektromagnetiske felt.

Gennem eksempler illustreres det hvordan feltliniediagrammer endvidere kan benyttes til at give kvalitative svar, eller det som Dirac kalder umatematiske, upræcise og ueksakte svar, og som er absolut nødvendigt for at være fysiker.

Vi vælger at skelne mellem to typer af forståelse.

Det som vi vil opfatte som forståelse er at kunne repræsentere et begreb, en teori eller et fænomen ved hjælp af flere repræsentationsformer og være i stand til at kunne skifte frit mellem disse.

Det som vi vil betragte som fysisk forståelse, er det som Dirac beskriver som fysisk forståelse, altså evnen til at kunne give kvalitative forudsigelser uden først at lave matematiske gennemregninger.

## 3 Den begrebslige forståelse af det elektromagnetiske felt

Vi vil i dette kapitel klargøre hvad man skal »forstå« ved et felt. Det er væsentligt for at opnå forståelse at man har den delforståelse der knytter sig til den begrebsmæssige repræsentationsform (se side 12).

Feltlinier repræsenterer som bekendt elektriske og magnetiske felter. For at svare på hvorvidt brug af feltlinier gavner forståelsen af felter, er det derfor nødvendigt først at danne en begrebsmæssig forståelse af hvad et felt er.

Der er mange begrebsmæssige ligheder mellem det elektriske og magnetiske felt. I det næste vil vi have det elektriske felt i fokus, men som sagt er de begrebsmæssige og forståelsesmæssige aspekter af diskussionen om feltets karakter de samme for magnetfelter. Dette kommer vi mere ind på senere.

### 3.1 Hvad er det elektriske felt

I lærebøgers introduktion til det elektriske felt tages ofte afsæt i kraftpåvirkningen fra en ladning  $Q$  på en testladning  $q$ . Denne kraft er givet ved Coulombs lov:

$$\vec{F} = q \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \hat{r}, \quad (3.1)$$

hvor  $r$  er afstanden fra ladningen til testladningen, og  $4\pi\epsilon_0$  er en konstant. Det elektriske felt defineres herefter som

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}, \quad (3.2)$$

Det elektriske felt i et punkt skal i almindelighed findes fra en rumlig ladningsfordeling  $\rho$ , og vil da være givet ved:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \cdot dV', \quad (3.3)$$

hvor  $\vec{r}$  er det punkt man her bestemmer feltstyrken for. Den elektriske feltstyrke angiver således størrelsen af kraften på en såkaldt testladning i et givet punkt i rummet, og testladningen vil opleve en kraft langs det elektriske felt. Det elektriske felt introduceres som om det blot er en omskrivning af Coulombs lov.

Det at feltet i sig selv ikke er noget fysisk eksisterende, men først er en del af den fysisk virkelighed når der er en ladning til at »mærke« feltet, har vi valgt at kalde »den præmaxwellianske fortolkning« (i henhold til [Herrmann, 1989]). Feltet opfattes som en fysisk størrelse, nemlig kraft pr. ladning.

Nogle lærebogsforfattere vil dog ikke lade deres læsere side tilbage med den præmaxwellianske fortolkning. De har følt det nødvendigt, at tage en diskussion op om hvad man skal forstå ved feltet.

I det næste vil vi se nærmere på det vi vil kalde »den moderne fortolkning« af feltet (i henhold til [Herrmann, 1989]), som langt de fleste fysikere i dag er tilhængere af. I denne fortolkning skal man forstå feltet som noget fysisk virkeligt. Det er blevet klart at Maxwells ligninger skal fortolkes sådan, for at opfylde den specielle relativitetsteori, og at det elektriske felt derfor repræsenterer mere end blot Coulombs lov.

I dag bruges ordet felt i to forskellige betydninger, som det også påpeges i [Herrmann, 1989]. Den første er, hvor feltet giver navn til en lokal fysisk størrelse, hvor feltet skal i begrebsmæssigt samme kasse som energi, temperatur, entropi osv. Den anden betydning af ordet felt er den hvor feltet er navnet på et fysisk system, og begrebsmæssigt skal i samme kasse som et stift legeme, en gas, et tov osv.

Ved brug af Coulombs lov bliver man ansporet til at opfatte kræfter mellem ladninger som »virkning over afstand«, *ladning* ↔ *ladning*. I moderne fysik har man indført et felt der overfører kræfterne, *ladning* ↔ *felt* ↔ *ladning* (det er simpelthen et krav hvis man skal tro på Einsteins specielle relativitetsteori) [Halliday et al., 1992].

I den begrebsmæssige forståelse af et felt er det vigtigt at gøre sig denne forskel klar. I lærebogen Griffiths [1999] introduceres det elektriske felt  $\vec{E}$  på traditionel vis ved en omskrivning af Coulombs lov for en punktladning. Efter dette afsnit tager David J. Griffiths diskussionen op om hvad man skal forstå ved det elektriske felt. Han formulerer det på følgende måde:

»What exactly is an electric field? I have deliberately begun with what you might call the ›minimal‹ interpretation of  $\vec{E}$ , as an intermediate step in the calculation of electric forces. But I encourage you to think of the field as a ›real‹ physical entity, filling the space in the neighborhood of any electric charge«.

Griffiths opfordrer altså sine læsere til at tænke på feltet som noget fysisk virkeligt, og er ikke bare kraft pr. ladning. I »Ohanien Physics« tages den samme diskussion op og skrives således [Ohanian, 1989, side 591]:

»Fields are a form of matter - they are endowed with energy and momentum, and they therefore exist in a material sense. If we think of solids, liquids, gases and plasmas as the four states of matter, then fields are the fifth state of matter«.

Griffiths og Ohanian opfordrer deres læsere til at tænke på feltet som noget virkeligt fysisk - en entitet.

Som både Griffiths og Ohanian påpeger, bør det elektromagnetiske felt opfattes som havende egentlig fysisk eksistens på samme måde som andre fysiske systemer. I de følgende afsnit vil egenskaber ved det elektromagnetiske felt blive beskrevet. Det er kun de egenskaber ved det elektromagnetiske felt som kan repræsenteres visuelt ved hjælp af feltliniediagrammer, der er taget med i de følgende afsnit.

## 3.2 Elektrisk potentiale

Potentialet er tæt knyttet til det elektriske felt. Derfor vil den begrebsmæssige status af potentialet og dets anvendelse blive beskrevet i dette kapitel.

### 3.2.1 Den begrebsmæssige forståelse af potentialet

Det elektrostatiske potentiale blev introduceret af Laplace i 1770'erne og var centrum for teorierne om »action-at-a-distance« som bl.a. Gauss var repræsentant for. Potentialet havde dog mest status af en matematisk størrelse, og der eksisterede ikke nogen egentlig fysisk fortolkning af det. Det var netop manglen på fortolkning som ansporede Maxwell til at forsøge at give en fysisk beskrivelse af de elektromagnetiske fænomener vha. analogier. Maxwell var bl.a. optaget af ligheden mellem potentialet i elektrostatikken og tryk i hydrodynamikken, og sammenlignede feltlinier med strømninglinier. Han mente dog ikke at potentialet havde nogen reel fysisk eksistens, men at det blot var et matematisk redskab til at regne kræfter ud med [Cat, 2001].

Hvorvidt man skal opfatte potentialet som havende fysisk eksistens er en større diskussion, som nok meget afhænger af definitioner af begrebet eksistens. Denne diskussion vil vi ikke tage op her, men vi kan henvise til diskussionen om hvorvidt fysikkens love blot er konventioner i bogen »Foundations of Physics« [Frank, 1969].

### 3.2.2 Anvendelse af potentiale

Det elektrostatiske potentiale kan anvendes til at bestemme det elektriske felt. Fordelen er, at det er lettere at regne ud f.eks. i tilfælde hvor anvendelsen af Gauss' lov ikke giver en simpel løsning på  $\vec{E}$ . Fordi det statiske elektriske felt er et konservativt kraftfelt ( $\nabla \times \vec{E} = 0$ ) kan det beskrives som gradienten af en skalarfunktion:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3.4)$$

Fortegnet er en konvention, der bunder i, at den mekaniske energi skal være en bevaret størrelse i mekanikken, så  $E_{pot} = qV$  og ikke  $E_{pot} = -qV$ . Ved hjælp af  $V$  kan man bestemme  $E$ -feltet selvom systemet ikke er tilstrækkeligt symmetrisk til en fordelagtig anvendelse af Gauss' lov, eller selvom ladningsfordelingen ikke er kendt.

Der gælder ifølge Laplaces ligning, at:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (3.5)$$

i områder hvor der ikke er nogen ladning. Kendes randbetingelserne for systemet kan det vises, at der kun findes én løsning der opfylder ligning (3.5).

Løsningen kan bestemmes på forskellige måder, både numerisk og analytisk. Senere i rapporten (se afsnit 4.5) vil det blive vist, hvordan potentialet kan tænkes repræsenteret ved et gummilagen, og metoden vil her blive brugt til at visualisere det elektriske felt for en lynafleder. I appendix C vises en numerisk metode til at udregne potentialet ved brug af computer.



### 3.3 Stresstensorer

Stresstensorer benyttes til at beskrive kræfter i medier indenfor for flere forskellige fysiske discipliner, heriblandt elektromagnetisme. Dette afsnit vil derfor indeholde en beskrivelse af stresstensorer. Efter at have set generelt på hvad en stresstensor er vil vi se på betydningen af stresset indenfor mekanikken, for senere at overføre formalismen fra mekanikken til elektrodynamikken. Denne metode er valgt, for at gøre det tydeligt, at man betragte det elektromagnetiske felt som et fysisk system.

#### 3.3.1 Den generelle stresstensor

I et vilkårligt punkt er det muligt at lægge et infinitesimalt plan med normalvektoren  $\vec{n}$ . Planet vil blive påvirket af en kraft der er proportional med dets areal.  $\vec{s}$  er en størrelse der angiver kraft pr. areal i det valgte punkt. Stresstensoren  $\mathbf{T}$  er defineret således at  $\vec{s}$  findes ved

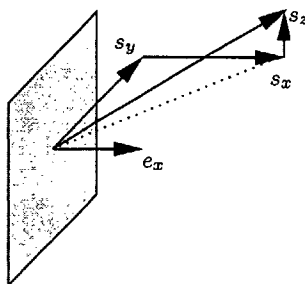
$$\vec{s} = \mathbf{T} \cdot \vec{n}. \quad (3.6)$$

$\vec{s}$  er kraften pr. areal som siden i  $\vec{n}$ 's retning (forside) påvirker den modsatte side (bagside) med.

I et Kartetisk rum vil  $\mathbf{T}$  eksempelvis være repræsenteret med en  $3 \times 3$  matrix som er givet ved:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

hvor elementet  $T_{ij}$  angiver  $\vec{s}_i$  komponenten på en normalflade med normal komponenten  $\vec{e}_j$ . På figur 3.1 ses et plan med  $\vec{e}_x$  som normalvektor.



**Figur 3.1** Areal med normalvektoren  $\vec{e}_x$ .  $s_x$ ,  $s_y$  og  $s_z$  angiver kraften pr. areal i henholdsvis  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -aksens retning, som højre siden (forsiden) påvirker venstre side (bagside) med

Ved at se på kræfterne på en lille terning af materieleet kan det iøvrigt indses at  $\mathbf{T}$  vil være en symmetrisk tensor. Lad en lille terning med sidelængden  $2a$

være orienteret så den har sine flader parallelt til koordinataksene (se figur 3.2). Inertimomentet for terningen er da givet ved:

$$I = \int \rho r^2 dV \Rightarrow I = [\textit{konstant}] \rho a^2 (2a)^3, \quad (3.8)$$

hvor  $\rho$  er massefylden af terningen. Det resulterende kraftmomentet i forhold til  $z$ -aksen kan udtrykkes ved stresstensorens komponenter på to sider af terningen (se figur 3.2), og da givet ved:

$$\tau = 2aT_{xy}(2a)^2 - 2aT_{yx}(2a)^2, \quad (3.9)$$

og da

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (3.10)$$

kan følgende skrives op:

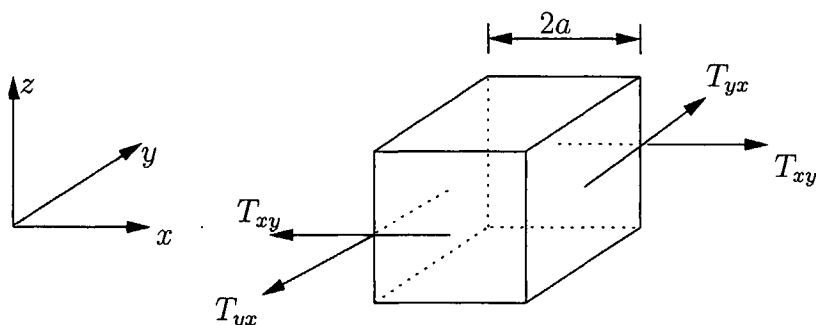
$$2aT_{xy}(2a)^2 - 2aT_{yx}(2a)^2 = a^2[\textit{konstant}]\rho(2a)^3 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Leftrightarrow \quad (3.11)$$

$$T_{xy} - T_{yx} = a^2[\textit{konstant}]\rho \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (3.12)$$

Når  $a \rightarrow 0$  bliver udtrykket mere præcist og det findes at

$$T_{xy} = T_{yx}, \quad (3.13)$$

og der ved opnås en symmetrisk stresstensor.



**Figur 3.2** En terning med sidelængden  $2a$  orienteret, så dens sider er langs koordinataksene.

Stresstensen vil typisk ændre sig fra sted til sted i materialet eller i systemet. For da at kunne beskrive hele legemet, blokken eller systemet, er man nødt til at give en værdi til hver komponent i  $\mathbf{T}$  som funktion af stedet. Stresset skal altså beskrives med et tensorfelt (ligesom der også findes skalar- og vektorfelter), hvilket er karakteriseret ved at der til ethvert punkt er givet 6 tal. For at visualisere dette felt er der altså principielt brug for et 9 dimensionalt rum, hvilket man skulle tro ville gøre at begrebet ikke er egnet til fysisk forståelse. I det følgende vil vi dykke lidt mere ned i stressbegrebet, for at vise dets anvendelighed ind, og få fortrolighed med egenskaber der knytter sig til stresstensen. Vi vil vise at en stresstensor kan opløses i en bulk og en shear del. Senere i rapporten skal vi se at en beskrivelse af elektromagnetiske felter ved hjælp af stresstensorer i høj grad kan fremme forståelsen af felterne.

### 3.3.2 Stresstensor i klassisk mekanik

Den måske simpleste form for stress er den der er i en snor. Her er stresset blot givet ved snorspændingen (se figur 3.5). Lad os gøre det mere generelt og se på et rumligt legeme. Vi ser nu på et massivt materiale, hvorpå der virker forskellige kræfter. Disse kræfter vil påvirke legemet på tre forskellige måder afhængig af kræfternes forskel i størrelse og retning. Disse kraftpåvirkninger giver anledning til tre forskellige ændringer i materialet: Translation, rotation og deformation. I det næste vil vi se nærmere på deformationen. I et deformeret materiale vil der være nogle indre kræfter beskrevet ved et stress. Det vil nu fremgå, at de interne kræfter i materialet i tre dimensioner kan beskrives ved hjælp af en tensor.

Hvis man betragter et legeme der består af et stof med en eller anden form for elasticitet, og så laver en deling af dette legeme, vil stoffet - generelt - på hver side af opdelingen deformere på grund af de indre kræfter. Det vil sige, at der må have været nogle kræfter mellem de to blokke, som holdt stoffet på plads før stoffet blev skåret over. Udfra disse kræfter kan man beskrive stresset i stoffet.

### 3.3.3 Stresstensoren i hydrostatik

Lad os nu kigge på et simpelt tilfælde hvor stresset er nemt at beskrive. Indenfor hydrostatikken er stresset kun givet ved en skalar, nemlig trykket. Vi vil bruge dette til at definere og karakterisere det man kalder trykdelen af en stresstensor.

Det karakteristiske ved væsker frem for faste legemer er, at en væske ikke kan opretholde et shearstress. Hvis en væske påvirkes med et shearstress vil væsken begynde at flyde. Modstanden mod at flyde karakterisere væskens viskositet.

Indenfor hydrostatikken beskæftiger man sig med væsker i hvile, hvilket svarer til at der ikke er noget shearstress. Det vil sige, at et hvert stress på væsken altid er vinkelret på enhver flade i væsken. Normalkraften pr. enhedsareal svarer til trykket  $p$ , og har samme retning som normalvektoren til arealet.

Stresset i en hydrostatisk væske vil da kunne beskrives ved hjælp af en stresstensor  $\mathbf{T}$ , der i dette tilfælde er en  $3 \times 3$  matrix med elementet  $-p$  i diagonalen og resten nuller;

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

Dette gælder ikke generelt, men det er opfyldt i hydrostatikken. Normalt kan en sådan matrix ikke blot udskiftes med en skalar, da matrixens indeks også afhænger af valget af koordinatsystem. I hydrostatikken er kraften lig med trykket gange arealet, og er vinkelret på overfladen der betragtes.

Det er naturligtvis en omvej at benytte denne matrixfremstilling af trykket i dette simple tilfælde, hvor det blot kunne være beskrevet som en skalar. Det væsentlige er at det giver os en mulighed for generelt at beskrive det man kalder trykdelen af et stress. Det skal være en matrix der har udseende af ovenstående.

Dvs. en diagonalmatrix med ens elementer på de tre pladser. Trykket i stressfeltet er således den størrelse, der står gentaget i diagonalen, i dette tilfælde  $-p$ , og kan findes som:

$$p = -\frac{1}{3} \text{spor}(\mathbf{T}). \quad (3.15)$$

### 3.3.4 Stresstensoren i faste stoffer

I modsætning til hydrostatikken er det normalt nødvendigt at se på alle tre komponenter af kraften, altså komponenterne af kraften i  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -aksens retning. En fuldstændig beskrivelse af det indre stress kræver en tensor, som udover en trykdel har en sheardel.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

Lad os opløse  $\mathbf{T}$ .

Trykket fra denne findes som

$$p = -\frac{1}{3} \text{spor}(\mathbf{T}) = -\frac{1}{3} (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \quad (3.17)$$

Man kan nu opløse stresstensoren i en bulkdel og en sheardel

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_b + \mathbf{T}_s = \underbrace{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}}_{\text{bulk}} + \underbrace{\begin{pmatrix} T_{xx} + p & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} + p & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} + p \end{pmatrix}}_{\text{shear}}. \quad (3.18)$$

Sheardelen af stresstensoren har den egenskab at sporet af den er nul. Bulkdelen beskriver kraften i retning af planets normalvektor, det kan tænkes som en slags tryk. Da sheardelen er beskrevet ved en symmetrisk matrix med reelle værdier (ligesom stresstensoren) er det muligt at fremstille matricen i en base, der sikrer, at det er en diagonalmatrix. Det betyder dog ikke at sheardelen svarer til en bulk del, da elementer i diagonal er nødt til at være forskellige, for at sporet fortsat er nul.

### 3.3.5 Stresstensoren i magnetostatik og elektrostatik

Stresset i det elektromagnetiske felt er beskrevet ved Maxwells stresstensor [Griffiths, 1999, side 352]:

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2), \quad (3.19)$$

hvor  $\delta_{ij}$  er et Kronecker-delta for hvilket der gælder at  $\delta_{ij} = 1$  for  $i = j$  og ellers nul (ved  $E$  og  $B$  uden indeks menes de numeriske størrelse af  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$ ). I »Introduction to Electrodynamics« [Griffiths, 1999] introduceres Maxwells stresstensor i et tilfælde, hvor kraftpåvirkningen af et lille volumen der indeholder en ladning skal bestemmes,

$$\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho d\tau. \quad (3.20)$$

Ideen er at udtrykke rumstrømme og rumladninger ved hjælp af  $\rho = \epsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})$  og  $\vec{J} = \rho\vec{v} = 1/\mu_0 \nabla \times \vec{B}$ , og herefter transformere volumenintegraler om til fladeintegraler. Se endvidere appendiks B for en uddybning. Lad os prøve at gøre brug af stresstensen i et eksempel.

**Hvad er stresset i et homogent statisk elektrisk felt og i et homogent statisk magnetisk felt?**

Lad os se på et tilfælde hvor feltet kun har en  $x$ -komponent. I det elektrostatiske tilfælde kan man fra ligning (3.19) finde, at

$$\mathbf{T}_E = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

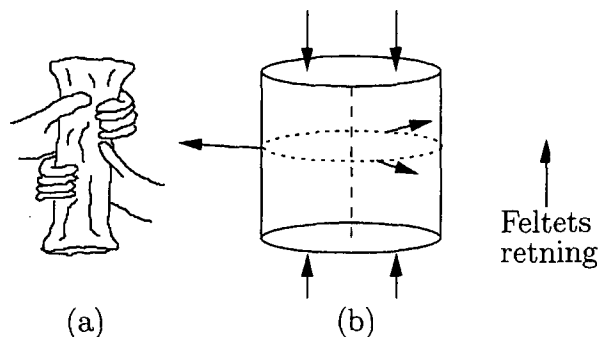
og i det magnetostatiske tilfælde findes at

$$\mathbf{T}_B = \begin{pmatrix} \frac{B^2}{2\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B^2}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{2\mu_0} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Hvordan skal man nu forstå disse tensorer? Man kan lægge nogle planer ind og se hvilken kraft forsiden af et sådan plan vil påvirke bagsiden med, ved at gøre brug af definitionen af stresstensen i ligning (3.6) (forsiden af et plan er normalenvektorens positive retning). Lukkes en del af rummet inde af en imaginær cylindrisk dåse, kan man se hvorledes denne del af rummet påvirker omgivelserne (se figur 3.3(b)). Man skal lade planernes forsider vende indad og bagsider udad. På planer der ligger parallelt med feltets retning (se figur 3.3(b)), dvs. på dåsens sider, vil der være en trykkende kraft udad. På planer der står vinkelret på feltretningen, dvs. dåsens top og bund, vil der være et træk i omgivelserne.

Dette stress kan illustreres ved at se på en svamp som trykkes sammen på den ene led og trækkes i på den anden led (se på figur 3.3(a)) (inspireret af [Herrmann, 1989]). Feltet i et område vil påvirke omgivelserne analogt til den måde svampen påvirker hænderne.

I et tilpas lille område af et virkeligt felt vil man kunne antage at feltet er homogent. Man kan derfor fremsætte et par generelle sætninger om felterne.



**Figur 3.3** En svamp hvor fingrene presses ind mod svampen, og hænderne rives fra hinanden. Svampen vil yde en kraft på hænderne som angivet i diagrammet til højre. Dette kan i nogen grad beskrive de samme kræfter en cylindrisk dåse vil yde på sine omgivelser, hvis et homogent statisk felt er orienteret som vist.

### Sætning 3.1

*Der udøves et mekanisk træk langs med feltretningen som er proportional med kvadratet på feltstyrken*

og

### Sætning 3.2

*Der udøves et mekanisk tryk vinkelret på feltretningen der er proportional med kvadratet på feltstyrken*

Disse sætninger kan give en god fysisk intuitiv forståelse af feltet, og viser at man kan tænke på feltet som noget virkeligt som har fysiske egenskaber. Vi vil senere bruge disse overvejelser på feltliniediagrammer.

Det tryk og træk der henvises til i sætningerne er givet ved

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (3.23)$$

og

$$\frac{B^2}{2\mu_0} \quad (3.24)$$

for henholdsvis det elektriske og det magnetiske felt.

Dette tryk er ikke helt analogt til det man finder i det mekaniske tilfælde, hvilket kan illustreres ved at forsøge, at opløse tensoren i en shear- og en bulkdel som vi gjorde tidligere. Eksempelvis må man sætte det magnetiske tryk til (se ligning (3.15))

$$p = -\frac{1}{3} \text{spor}(\mathbf{T}_B) = \frac{B^2}{6\mu_0} \quad (3.25)$$

Hvilket er middeltrykket og denne ændrer sig ikke ved koordinatsskift.

Stresstensoren kan nu deles op i en bulk- og en sheardel:

$$\mathbf{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{B^2}{6\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B^2}{6\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{6\mu_0} \end{pmatrix}}_{bulk} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2B^2}{3\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B^2}{3\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{3\mu_0} \end{pmatrix}}_{shear}. \quad (3.26)$$

Det tryk vi finder her, er en faktor  $\frac{1}{3}$  forskelligt fra det, der normalt kaldes for det magnetiske tryk, da det der normalt kaldes det magnetiske tryk er givet ved  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ . Stresstensoren indeholder både en bulk og en shear del, men der er ikke nogen gevinst i at opløse den i disse to komponenter. Det smarte er at beholde størrelsen  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ , og relatere den til sætning 3.1 og sætning 3.2.

### 3.3.6 Lorentzkraft eller stresstensor?

For at finde kraften på ladningen i elektriske og magnetiske felter, kan man benytte sig af Lorentzkraften. Den er givet ved

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.27)$$

Ved brug af Lorentskraften, som den er skrevet ovenfor, skal man i visse tilfælde være påpasselig med hvilket felt der indsættes. Man skal se på feltet ved den ladning hvor man vil finde kraften. I dele af rummet hvor der er punktladninger, linie- eller overfladeladningstætheder vil feltet dog ikke være veldefineret. Der er altså et problem med at indsætte disse idealiserede ladningstætheder. Dette problem opstår ikke hvis ladningen er »udsmurt«, dvs. givet ved en ladningsfordeling. I den virkelige fysiske verden vil ladninger altid være »udsmurte«, men det vil ofte være lettere at tænke og regne på ladning der ikke er »udsmurt«. Lad os se på et eksempel, hvor man bliver udsat for problematikken. Man kunne f.eks. spørge:

**Hvor stor er kraften som en kapacitorplade vil blive påvirket med?**

På en ideel pladekapacitor med uendeligt tynde plader vil feltet ikke være veldefineret. Feltet vil gå fra at være

$$E_{kapacitor} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.28)$$

på den ene side til at være nul på den anden side ( $\sigma$  er en overfladeladningstæthed). Man kan prøve at komme ud af dette problem på flere forskellige måder:

1. *metode:* Selvfeltmetoden

En måde at forklare dette på er ved at sige, at det såkaldte »selvfelt« ikke skal regnes med, dvs. det felt ladningen selv skaber. En klump ladning på pladen vil dels opleve et felt fra ladninger på dens egen plade, og dels et felt fra ladninger

på den modsatte plade. Feltet fra dens egen plade vil summeres op til nul, efter som ladningerne er fordelt symmetrisk på pladen. Felterne fra ladninger på den modsatte plade vil summeres op til et bidrag der er vinkelret på pladen. Feltet fra den modsatte plade kan ses som feltet fra en uendelig stor plan der er givet ved

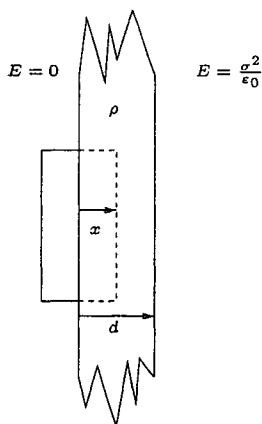
$$E_{\text{uendeligplan}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.29)$$

Ved brug af Lorentzkraften, ligning 3.27, kan kraften pr. areal rettet mod den modsatte plade findes til

$$\vec{s} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (3.30)$$

### 2. metode: Middelfeltmetoden

En anden måde til bestemmelse af kraften går ud på at argumentere for at pladen må have en tykkelse. Ladninger i pladen vil opleve et felt, der er afhængigt af ladningens placering. Man kan tænke sig at lægge en pilleæske i randen af kapacitorpladen, som vist på figur 3.4. Ladningsfordelingen  $\rho(x)$  i kapacitorpladen vil være en funktion af  $x$ . Ved brug af Gausses lov (ligning A.5) kan et udtryk for  $E_x$  findes til



**Figur 3.4** Tværsnit af kapacitorplade med en indlagt lukket gaussflade med bredden  $x$  og arealet  $A$

$$E(x) = \frac{q(x)}{A\epsilon_0}, \quad (3.31)$$

hvor  $q(x)$  er givet ved

$$q(x) = \int_0^x \rho(x') dx' \cdot A. \quad (3.32)$$



Kraften på en lille ladning  $dq'$ , som er ladningen der er smurt ud mellem  $x$  og  $x + dx$ , vil være givet ved

$$dF = E(x)dq'(x) = \frac{q(x)}{A\epsilon_0}dq' \quad (3.33)$$

Den samlede kraft findes ved at integrere bidrag op på alle ladninger. Kraften på pladen vil være givet ved

$$F = \frac{1}{A\epsilon_0} \int_0^Q q(x)dq' = \frac{1}{A\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2}Q^2 = \frac{A^2\sigma^2}{2A\epsilon_0} = \frac{A\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (3.34)$$

, hvor  $Q$  er den samlede ladning. Som tidligere finder man at

$$s = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (3.35)$$

Feltet inde i pladen vil være meget komplekst på mikroskopisk niveau. Når man er tæt på elektroner eller kerner vil feltet vokse voldsomt op. Det kan virke som et under at denne metode går godt. Det at man kan se på et middelfelt i stedet for de virkelige felter er dog velkendt. I materialer benytter man sig ofte af middel felter middelfelter ( $E_{\text{makroskopiske}} = \langle E_{\text{mikroskopisk}} \rangle$  og  $B_{\text{makroskopiske}} = \langle B_{\text{mikroskopisk}} \rangle$ ) istedet for de virkelige felter.

Når man benytter Lorentzkræften skal man se på feltet, der hvor ladningerne sidder. Det er netop her man har problemer med feltet, og det gør metoden problematisk. En måde at komme ud af dette dilemma er ved at gøre brug af det faktum, at feltet er et medium. Man kan se på stresset et sted i feltet. Metoden er analog til hvis man i tovtrækningskonkurrencen på figur 3.5 side 28 så på snorkraften et sted i tovet, for at finde kraften de to mænd vil hive i hinanden med.

3. metode: Stressmetoden

Man ser nu på et vandret plan der går ud til uendelig (på denne måde får man en lukket flade), se figur 4.11 side 41. Stresset på denne plade vil være givet ved ligning 3.23. Kraften pr. areal som den ene plade vil påvirke den anden med er,

$$\vec{s} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (3.36)$$

Man kommer således uden om at se på feltet ved ladningerne, hvor det er problematisk, og man benytter tilmed det virkelige felt i systemet fra ligning 3.28.

### 3.4 Impulstrømme

I dette afsnit vil vi vise at stressensoren kan fortolkes som impuls der strømmer i det elektromagnetiske felt. Dette illustrerer at feltet er en fysisk entitet og det kan således også vises, at der strømmer energi gennem feltet.

Impulsbevarelse er et fundamentalt aksiom inden for fysik, ikke bare en global bevarelse af impuls, men også lokal bevarelse af impuls. Dette betyder, at hvis impuls skal overføres fra et sted til et andet sted, så må det strømme. Det elektromagnetiske felt afviger ikke fra andre systemer på dette punkt.

Det elektromagnetiske felt kan yde en mekanisk kraft på partikler i et område  $V$ , denne kraft kan udtrykkes med en impulsstrøm, og fra Newtons anden lov ved vi at

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{mek}}{dt} \quad (3.37)$$

Kraften kan ligeledes udtrykkes ved ligning (B.14) (se appendiks B side 64). Fra denne ligning, der stammer fra at skulle bestemme kraften på en ladning, fås:

$$\frac{d\vec{p}_{mek}}{dt} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau + \oint_S \mathbf{T} \cdot d\vec{a}. \quad (3.38)$$

Denne ligning beskriver impulsbevarelse ( $\vec{S}$  kaldes Poyntingvektoren, og er defineret som  $\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ ). Det første integral  $\epsilon_0\mu_0 \int_V \vec{S} d\tau$  repræsenterer det elektromagnetiske felts egen impuls i volumen  $V$ . Der gælder at:

$$\vec{p}_{felt} = \epsilon_0\mu_0 \int_V \vec{S} d\tau. \quad (3.39)$$

Det andet integral  $\oint_S \mathbf{T} \cdot d\vec{a}$  beskriver hvor meget impuls, der strømmer ind gennem randen af  $V$  pr. tid. Lad  $\vec{\varphi}_{mek}$  udtrykke den mekaniske impulstæthed og  $\vec{\varphi}_{felt} = \mu_0\epsilon_0 \vec{S}$  udtrykke den elektromagnetiske impulstæthed. Ligning 3.38 kan omskrives til differentialform,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\varphi}_{mek} + \vec{\varphi}_{felt}) = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (3.40)$$

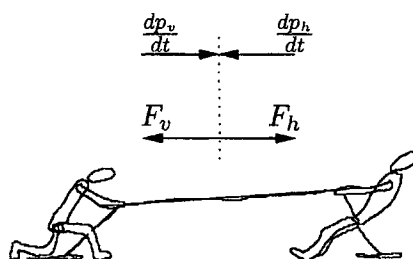
Stresstensen  $\mathbf{T}$  kan betegnes med

$$\mathbf{T} = -\Pi \quad (3.41)$$

hvor  $\Pi$  er en tensor der angiver impulsstrømmen pr. areal. Udtrykket for impulsbevarelse kan nu skrives som

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\varphi}_{mek} + \vec{\varphi}_{felt}) + \nabla \cdot \Pi = 0 \quad (3.42)$$

Det fremgår altså at feltet kan transportere impuls mellem partikler, hvor  $\Pi$  repræsenterer denne impulsstrøm. Dette er analogt til impulsstrømmen f.eks. i et reb. På figur 3.5 ses to mænd der hiver i hver sin ende af et reb. De påvirker rebet med kræfter der er lige store men modsat rettede. Der er altså ingen resulterende kraft, så situationen er statisk, men der er i et hvert punkt i rebet en snorspænding som kan beskrives ved en simpel stresstensor. Man kan derfor nemt finde kraften i et punkt i rebet. Af ligning (3.37) ses at der må være en impulsstrøm gennem rebet. Det skal dog bemærkes at det ikke er en impuls i klassisk mekanisk forstand således at der sendes partikler gennem rebet.



**Figur 3.5** To mænd trækker i hver sin ende af et tov med lige stor modsatrettet kraft. Kraften kan også ansues som en impulsstrøm.

## 4 Visualisering og tolkning af feltliniediagrammer

Som beskrevet tidligere er det en vigtig del af den fysiske forståelse at kunne danne sig billeder af fænomener (se side 12). Det er ligeledes et godt redskab til at få en kvalitativ forudsigtelse af løsningen til et givet problem. Ud af mange visuellerrepræsentation af elektriske og magnetiske felter er feltliniediagrammer er den mest anvendte. I det følgende vil regler og retningslinier for konstruktion og tolkning af feltlinier blive beskrevet. Dette sker for at kunne vurdere hvorvidt og på hvilke punkter feltliniediagrammer er en god repræsentation af feltet.

### 4.1 Feltlinier

En bekvem måde til grafisk at visualisere det elektriske felt, er ved hjælp af elektriske feltlinier. Disse kaldes også elektriske kraftlinier, for at understrege, at de repræsenterer den elektriske feltstyrke. Det karakteristiske ved denne repræsentation er i følge [Crummett & Western, 1994, side 608] at der gælder at:

#### Sætning 4.1

*Elektriske feltlinier tangerer retningen på den elektriske feltstyrke i ethvert punkt i rummet*

#### Sætning 4.2

*Antallet af feltlinier pr. areal der går gennem et areal vinkelret på de elektriske feltlinier i et punkt er proportionalt med den elektriske feltstyrke i punktet*

Det samme er gældende for magnetiske feltliniediagrammer.

Feltlinier starter kun hvor  $\text{div}(\vec{E}) > 0$  og ender kun hvor  $\text{div}(\vec{E}) < 0$ . Feltlinier starter eller ender ikke nødvendigvis nogen steder, men kan gå i lukkede kurver eller ud til uendelig. Retningen af feltet angives med retningen af linierne. Almindeligvis ses den tolkning at størrelsen af feltet er givet ved tætheden af linier, det er dog ikke altid muligt at lave diagrammer der opfylder begge sætninger. Kort kan det siges, at hvis der findes et eller flere punkter hvor både  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$  og  $\nabla \times \vec{E} \neq 0$ , er det ikke muligt. Dette vil vi diskutere igen i afsnit 4.10 side 45.

Der er flere grunde til at feltliniediagrammer er så anvendte som de er i litteraturen. Dels har feltliniediagrammer den fordel, at de er mere overskuelige at se på end eksempelvis et diagram, hvor der til en række punkter er givet en vektorpil. Sammenlign eksempelvis figur 4.8 og 4.9 som viser et diagram af det

samme elektriske felt med henholdsvis vektorpile og feltlinier. Elektriske felter kan desuden skitseres ved feltliniediagrammer ud fra nogle enkle regler og et kendskab til systemets randbetingelser. Dette vil blive uddybet i afsnit 4.3.

## 4.2 Ortogonalflader

I dette afsnit vil vi diskutere brugen af de såkaldte ortogonalflader. Disse flader er vinkelret på feltlinierne. En ortogonallinie vil repræsentere et plan der er projiceret ned i den todimensionale repræsentation. Om man skal tegne flader eller linier afhænger af om man har et todimensionalt eller et tredimensionalt diagram. For overskuelighedens skyld vil alle feltliniediagrammer i det følgende være todimensionale, og derfor vil ortogonalfladerne altså være repræsenteret med linier. Det er i almindelighed ikke kutyme at indtegne ortogonallinier, men som vi skal se i det næste er det meget nyttigt.

Først vil vi se på ortogonallinier i elektriske feltliniediagrammer. Som beskrevet i afsnit 3.2 er  $E$ -feltet gradienten af potentialet og vil derfor gå vinkelret på ækvipotentialerne. Har vi et konservativt kraftfelt kan vi derfor tolke ortogonallinier som ækvipotentialer. I almindelighed kan vi også tolke ortogonallinier som ækvipotentialområder, dog med en anden betydning, som vi skal se i kapitel 4.10. Det ses at hvis man går en lille vedlængde  $d\vec{l}$  ud af en ortogonal linie med en punktladning vil ændringen af den potentielle energi være nul,

$$dE = \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (4.1)$$

da kraften  $\vec{F}$  står vinkelret på  $d\vec{l}$ .

Som tidligere nævnt starter og ender feltlinier steder hvor  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$ , disse steder kaldes feltliniernes kilder. På samme måde kan man sige noget om hvor ortogonallinier ender og starter:

### Sætning 4.3

*Ortogonallinier har kilder hvor  $\nabla \times \vec{E} \neq 0$*

Der er også den mulighed at ortogonallinierne ikke ender nogen steder, men vil gå i lukkede kurver eller ud til uendelig.

Ovenstående sætning vises let i det todimensionelle tilfælde [Herrmann et al., 2000], eksempelvis hvor der ikke er nogen  $z$ -komponent af feltet,

$$\vec{E} = (E_x, E_y, 0). \quad (4.2)$$

Ortogonalfeltet vil da være givet

$$\vec{S} = (S_x, S_y, 0) = (-E_y, E_x, 0). \quad (4.3)$$

Rotationen af  $\vec{E}$  i  $z$  retningen vil være givet ved

$$(\nabla \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = \nabla \cdot \vec{S}. \quad (4.4)$$

Det ses at kilderne til ortogonalfeltet er der hvor rotationen af  $\vec{E}$  er forskelligt fra nul.

Indtegnning af ortogonallinier i magnetiske feltliniediagrammer skal ske efter samme princip. Dette ses af at magnetfeltets kilder netop er steder med  $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ .

På figur 4.5 ses et feltliniediagram af to strømførende ledninger. I diagrammet er desuden indtegnet ortogonallinierne, og det ses, at linierne mødes i et punkt hvor  $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ .

I visse tilfælde er det nødvendigt at give ortogonallinierne en retning for at kunne spotte hvor linierne mødes.

I tre dimensioner vil der som sagt være tale om ortogonalflader. F.eks. vil ortogonalfladerne til  $E$ -feltet fra en punktladning være kugleskaller med centrum i ladningen, og fra en lige strømførende ledning vil ortogonalfladerne til  $B$ -feltet være planer som står ud fra ledningen med ens vinkler imellem sig og fortsætter ud i uendelig. Betragtes sidstnævnte i et plan vinkelret på ortogonalplanerne vil det ligne et stjernefelt, se figur 4.3.

Ved at indtegne ortogonallinier i feltliniediagrammet bliver dette umiddelbart noget mere rodet, men med de fordele der er ved at tegne ortogonallinier må det anbefales. For at hjælpe på overskueligheden kan man tegne ortogonallinierne som stiplede linier som det gøres i [Feynman, 1989, side 4-8] eller med farver.

### 4.3 Skitsering af elektriske feltlinier

Feltliniediagrammer er noget man får føling med at skitsere efter at have set mange diagrammer. Der er dog nogle regler som »kunstneren« bør efterleve:

Der findes tre simple regler til at tegne feltlinier for det elektriske felt, der grunder i egenskaber ved  $E$ -feltet:

#### Sætning 4.4

*Feltlinier må ikke krydse.*

#### Sætning 4.5

*Feltlinier tegnes fra systemets kilder til dets afløb eller ud til uendelig.*

#### Sætning 4.6

*Antallet af feltlinier fra en kilde eller til et afløb skal være proportional med kildens størrelse.*

[Crummett & Western, 1994, side 608] Kilder er den del af rummet hvor  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$ , dvs. i den del af rummet hvor der er ladning.

Grunden til at sætning 4.4 skal være opfyldt er at feltlinierne repræsenterer den elektriske feltstyrke. Hvis to eller flere feltlinier da krydser hinanden, svarer det til at den elektriske feltstyrke i et punkt har flere værdier (retning og størrelse). Ved punktkilder og linie- og overfladeladningstætheder, krydser feltlinier dog, men disse steder er  $\vec{E}$  heller ikke entydigt bestemt.

Årsagen til at sætning 4.5 og sætning 4.6 skal være opfyldt kan bedst forklares vha. fluks begrebet. Hvis man laver en lille lukket flade et sted i rummet vil der være en proportionalitet mellem den samlede fluks  $\Phi$  ud gennem fladen, og antallet af feltlinier der starter eller slutter inden for det omsluttede volumen. Fra Gauss lov (A.5) ved vi at

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} = \Phi \quad (4.5)$$

hvilket betyder at antallet af feltlinier der starter inden for volumen skal være proportionalt med ladningen inden for randen. Hvis  $q > 0$  skal der starte feltlinier inden for volumen, hvis  $q < 0$  skal der slutte feltlinier inden for volumen, og hvis  $q = 0$  skal antallet af feltlinier være uændret. Lader man volumen fylde hele rummet, dvs. lader randen vokse til uendelig, vil der netto løbe feltlinier til eller fra uendelig, forudsat at  $q \neq 0$ .

Udover ovenstående regler gælder nogle lidt svagere formulerede retningslinier for skitsering af feltlinier, for systemer med kendte randbetingelser:

#### Sætning 4.7

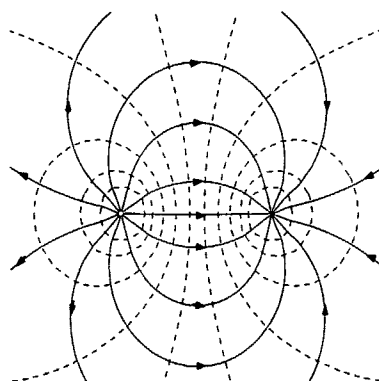
*Feltlinier skal fordeles retfærdigt*

#### Sætning 4.8

*Feltlinier skal opfylde systemets symmetri*

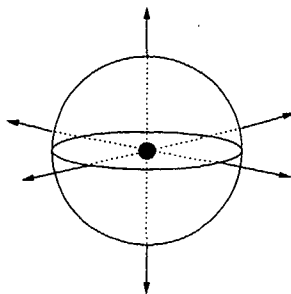
De to sidste regler må vi selv stå indefor, hvorfor de måske også kræver en uddybning.

Det at fordele feltlinier retfærdigt, er en forholdsvis svag formulering, men er noget man får føling med, efterhånden som man her set feltlinierdiagrammer for forskellige systemer. Eksempelvis vil man kunne lave flere forskellige feltlinierdiagrammer for feltliniediagrammet på figur 4.1, der ville opfylde sætning 4.4, 4.5 og 4.6.



**Figur 4.1** Elektrisk feltliniediagram der viser feltlinierne fra en positiv ladning til en negativ ladning

Det andet punkt er måske lidt nemmere at forklare. Det at se på symmetrien i systemet, kunne eksempelvis være at lave en linie gennem de to ladninger



**Figur 4.2** En kugle med jævn ladningsfordeling. Det vises hvordan afstanden mellem feltlinierne aftager med afstanden fra kuglens centrum.  $\vec{E}$  aftager med  $1/r^2$

på figur 4.1, og så kræve at feltet er rotationssymmetrisk om denne akse. En tilsvarende symmetri kan findes ved at lave et spejlplan midt i mellem de to ladninger. Feltet må være ens på hver side af planet, med forbehold for at retningen af feltet skal vendes, da den positive ladning føres over i den negative ladning og omvendt. Feynman skriver lidt om sådanne argumenter i forbindelse med at bestemme retningen på varmestrømmen fra en punktførmig varmekilde [Feynman, 1989, side 3-6]:

» You see that we are adding a certain amount of guesswork – usually called › physical intuition‹ – to our mathematics in order to find the answer«

At Feynman kalder det gætværk er nok at undervurdere sine egne evner, men en eller anden form for intuition kan man godt kalde det.

Lad os tage nogle eksempler på hvordan man kan benytte sig af feltlinier til at komme med kvalitative svar eller løsninger på opgaver.

En simpel opgave kunne lyde:

**Hvordan afhænger den elektriske feltstyrke fra en ladning af afstanden?**

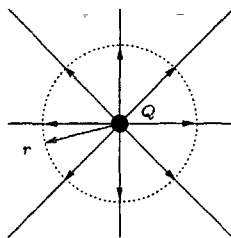
Svaret kendes fra Coulombs lov, men lad os nu benytte en skitsering af feltlinier til at besvare spørgsmålet.

Lad os antage at der er tale om en positivt ladet kugle, med jævn ladningsfordeling  $\rho$ . Systemet er kuglesymmetrisk. Der skal være lige langt mellem hver feltlinie, og hver feltlinie skal fortsætte ud til uendelig i rette linier. Hvis man placerer en kugleoverflade med centrum i ladningen, se figur 4.2, vil antallet af feltlinier gennem overfladen være uafhængig af afstanden. Omvendt vokser overfladearealet af kuglen med kvadratet på afstanden. Feltstyrken er propotional med feltlinier pr. areal og det findes at feltlinier pr. areal  $\propto E \propto \frac{1}{r^2}$ .

Man må ikke lade sig snyde af repræsentationer af feltlinier i 2 dimensioner, se eksempelvis figur 4.3, her falder tætheden af feltlinier med  $\frac{1}{r}$  (se endvidere afsnit 4.9 for andre problemer med projektioner)

Bagefter kan man tjekke op med matematikken, for at se om det kvalitative svar er i overensstemmelse med den matematiske løsning. Undervejs vil vi gøre brug af de fysiske overvejelser.





**Figur 4.3** Forsøg på 2-dimensionel repræsentation af en kugle med jævn ladningsfordeling. Det fremgår af figuren at afstanden mellem feltlinierne IKKE aftager med  $1/r^2$  men med  $1/r$  fra kuglens centrum

Fra Gauss' lov ved vi at (se ligning (A.5)):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{omsluttet}}}{\epsilon_0} \quad (4.6)$$

Den samlede ladning er  $\rho \frac{3}{4}\pi r_0^3 = Q_{\text{omsluttet}}$ , hvor  $r_0$  er radius af den ladet kugle, og  $\rho$  er ladningstætheden. Vælger man en kugle med radius  $r > r_0$  og centrum i den lille kugles centrum som integrationsflade vil det elektriske felt i denne afstand være konstant, og vinkelret på overfladen, ud fra de argumenter vi benyttede før, da vi så på feltlinierne. Det vil sige, at  $\vec{E}$  kan stilles udenfor integraltegnet i ligning (4.6):

$$\begin{aligned} E \oint d\vec{A} &= \frac{\rho \frac{3}{4}\pi r_0^3}{\epsilon_0} && \Leftrightarrow \\ E \pi r^2 &= \frac{\rho \frac{3}{4}\pi r_0^3}{\epsilon_0} && \Leftrightarrow \\ E &= \frac{\rho \frac{3}{4}\pi r_0^3}{\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{3\rho r_0^3}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Der fås således den samme proportionalitet som ved den kvalitative løsning. Undervejs blev der brugt nogle af de symmetribetragtninger og fysiske argumenter som også blev anvendt i den kvalitative løsning. Det vil sige, at det bliver en del nemmere at løse ligningen, når man har gjort sig nogle overvejelser vedrørende systemet.

Lad os prøve med et andet eksempel.

#### Hvordan afhænger den elektriske feltstyrke af afstanden fra en uendelig lang stang med en jævn ladningsfordeling?

Den jævne ladningsfordeling på stangen betyder at antallet af feltlinier, der skal starte på stangen pr. længde er konstant. Igen er afløbet for feltlinierne uendelig. Symmetrien for stangen er cylindrisk, og feltlinierne fordeler sig på tilsvarende symmetrisk vis.

Feltlinierne står vinkelret på stangen og strækker sig i rette linier ud til uendelig. Lægger man nu en cylinder med centrum i stangens midte vil antallet af feltlinier ikke ændre sig, hvis radius af cylinderen øges. Arealet af cylinderen vil derimod vokse med  $r$ . Den elektriske feltstyrke aftager derfor med  $\frac{1}{r}$ , med samme argument som i foregående eksempel.

Igen kan tjekkes op med Gauss' lov (ligning 4.6) samt ved at benytte de ovenfor nævnte argumenter for symmetrier.

Den overflade der vælges er en uendelig lang cylinder med sin symmetriakse samme sted som stangen. Herved fås:

$$E = \frac{\rho \pi r_0^2 l}{\epsilon_0 2\pi r l} = \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4.8)$$

Det skulle gerne være klart hvori forskellen på de metoder lægger. Det centrale er at med feltlinieløsningen benytter man sig ikke eksplicit af Maxwells ligninger, men benytter i stedet fysiske argumenter og symmetriargumenter. Der er således ikke nødvendigt at gøre eksplicit brug ligningerne for at komme med kvalitative løsninger, man har så at sige løsningerne inden man tager sin formelsamling frem og løser ligningerne.

## 4.4 Skitsering af magnetiske feltlinier

Der gælder de samme regler for elektriske- og magnetiske feltliniediagrammer, men da der ifølge Maxwells ligninger altid gælder at  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , går magnetiske feltlinier ikke fra kilder til afløb som elektriske feltlinier oftest gør. I stedet gælder at:

### Sætning 4.9

*Magnetiske feltlinier går i lukkede ringe eller fortsætter mod uendelig.*

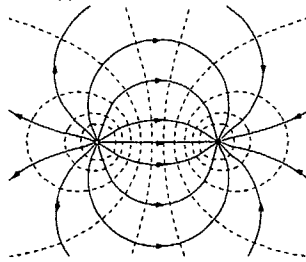
Kilder til det magnetiske felt er elektriske strømme som er rotationscentre ( $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ ).

Ved skitsering af magnetiske feltlinier kan det være en fordel først at tegne ortogonallinier, og derefter tegne feltlinier vinkelret på disse. Skitsering af ortogonallinier foregår med samme retningslinier som for elektriske feltlinier, blot med punkter med  $\nabla \times \vec{B} \neq 0$  som rotationscentre. Sammenlign eksempelvis figur 4.4 og figur 4.5 der viser et elektrisk og et magnetisk feltliniediagram. Her ses at formen på ortogonallinierne i det magnetiske feltliniediagram har stor lighed med feltlinierne i det elektriske feltliniediagram. Forskellen på de to diagrammer er at divagenskilder er erstattet med rotationskilder.

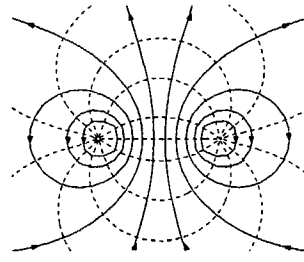
## 4.5 Potential repræsenteret ved gummilagen

I dette afsnit beskrives en metode til kvalitativt at finde vektorfunktionen til et konservativt vektorfelt. Det der her har interesse er at få et kvalitativt billede af potentialet (se afsnit 3.2.2), for derved at kunne danne sig et billede af det elektriske felt.

Teknikken kræver, at der er tale om et konservativt felt. Derfor kan man ikke i almindelighed benytte sig af teknikken i elektromagnetiske systemer, men i elektrostatiske systemer kan man uden videre benytte teknikken til at finde  $\vec{E}$ .



**Figur 4.4** Elektrisk feltliniediagram af feltet mellem to linier med homogen ladningstæthed. Linien til venstre er positivt ladet og den til højre er negativt ladet. Linierne er divergenscentre og feltlinier starter her. Der er ingen rotationscentre og ortogonallinierne ender ikke.



**Figur 4.5** Magnetisk feltliniediagram af feltet mellem to strømførende ledninger. I venstre ledning løber strømmen op af papiret og i højre ledning løber strømmen ned i papiret. Ortogonallinierne ender på ledningerne da disse er rotationscentre. Feltlinierne ender ikke da der ikke er divergenscentre.

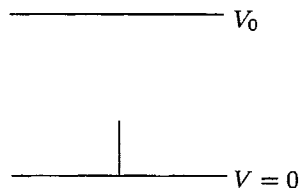
Lad os gennemgå metoden ved at se på et eksempel med en lynafleder i et statisk  $E$ -felt. For lethedens skyld vil vi se på noget der er symmetrisk på en sådan måde, at det kan betragtes som et 2 dimensionalt problem.

Teknikken udnytter at funktionen kan løses med Laplaces ligning som beskrevet i afsnit 3.2

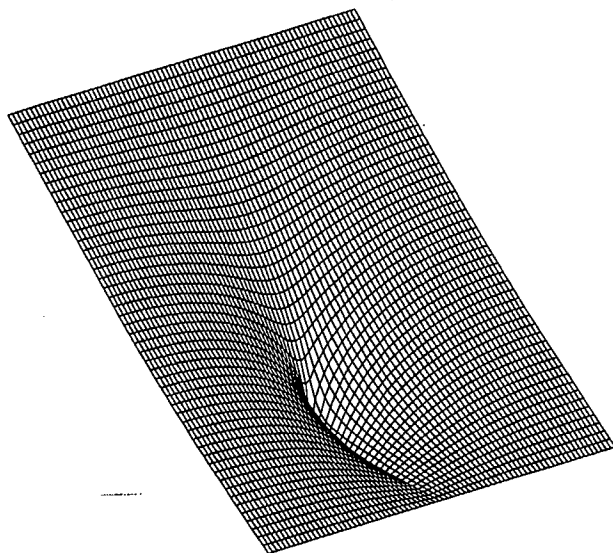
$$\nabla^2 V = 0. \quad (4.9)$$

Løsning til ligning (4.9) kan desuden visualiseres ved et gummilagen, da højden af et gummilagen som funktion af stedet også opfylder Poissons ligning [Feynman, 1989, side 12-5]. Metoden har haft en praktisk anvendelse til at løse komplicerede problemer eksperimentelt, ved i praksis at udspænde en sådan membran og løfte og sænke det forskellige steder [Feynman, 1989, side 12-6]. I dag bruges computere til at løse problemet numerisk. Det er hvad vi har gjort i flere tilfælde (se endvidere appendiks C).

I vores eksempel vil randbetingelserne se ud som vist i figur 4.6.



**Figur 4.6** Randbetingelser for en lynafleder i et potential



**Figur 4.7** Lynafleder i et potential. Udspændt gummilagen svarende til randbetingelserne i figur 4.6

Vi foretsiller os nu at spænde et gummilagen ud. Lagnet »nittes« fast til potentialerne i randene. Det er nu muligt forestille sig et billede svarende til det på figur 4.7. Højden af gummilagnet svarer til  $V$ . Med ligning ((3.4)  $\vec{E} = -\nabla V$ ) i bagehoved kan man tænke sig til  $\vec{E}$ .  $\vec{E}$  vil gå vinkelret på højdekurver (eller ækvipotentialkurver) og have en størrelse der er proportionalt med hældningen af lagnet.

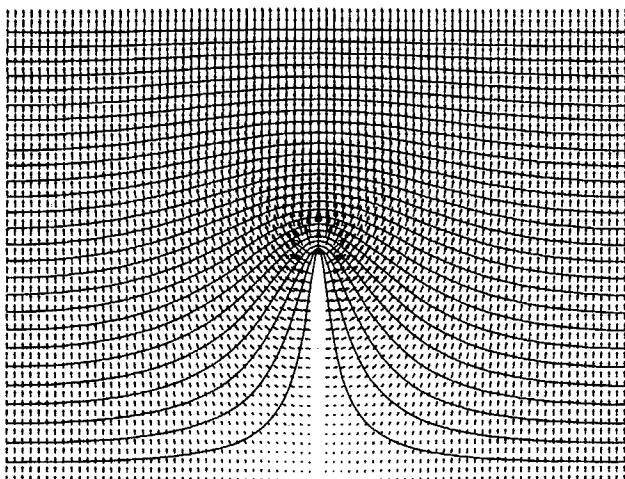
For lynaflederen ses  $\vec{E}$  repræsenteret med vektorpile og ækvipotentialkurver på figur 4.8. På figur 4.9 ses feltlinierne og ækvipotentialkurverne for  $\vec{E}$ .

Ud fra denne repræsentation kan man lave et par kvalitative forudsigelser om systemet. Feltet er størst ude i spidsen af lynaflederen, og det er her der først vil være gennemslag, hvilket er grunden til at vi har kaldt det en lynafleder. Som fordelingen af feltlinier angiver, vil ladningstætheden være størst i spidsen af lynaflederen, og falde ned igennem. Med stresstensorfortolkningen (se endvidere afsnit 3.3.5 og 4.6) kan man se at feltet vil yde et opadrettet træk på antennen.

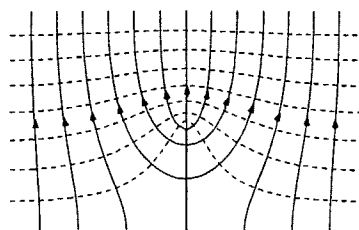
## 4.6 Stesstensorfortolkning af feltliniediagrammer

Når man har fået lavet et feltliniediagram, kan man med en stresstensorfortolkning i bagehovedet lave en række forudsigelser om systemet. Stresstensorfortolkningen kobler således en visuel/billedlig repræsentation og en begrebsmæssig repræsentation sammen.

Hvis man vil vide noget om kraften i en given del af rummet, kan man se på feltlinierne i en omegn heraf. Man laver nu en lukket flade omkring området. Man tænker sig nu at dele den lukkede overflade op i arealer, over hvilke man kan



**Figur 4.8** Ækvipotentialkurver for en lynafleder, samt det beregnede felt  $\vec{E}$  repræsenteret med vektorpile



**Figur 4.9** Ækvipotentialkurver for en lynafleder, samt det beregnede felt for  $\vec{E}$  repræsenteret med feltlinier

summere kræfter op. Feltlinier på et tilpas lille areal kan tænkes at repræsentere et konstant felt.

Hvis man vælger sit koordinatsystem således at  $x$ -aksen er parallel med feltets retning, kan det indses med resultatet fra ligning (3.22) og ligning (3.21) at man kan bestemme kraften på overfladen med arealvektoren  $\vec{a}$  (hvor arealvektoren er normalvektoren til det lille areal og med arealets størrelse) som:

$$\vec{F}_E = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

og

$$\vec{F}_B = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{B^2}{2\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B^2}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{2\mu_0} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Ovenstående udtrykker en egenskab ved feltlinier og ortogonallinier der er givet ved at:

**Sætning 4.10**

*Der udøves et træk langs med feltlinier*

og

**Sætning 4.11**

*Der udøves et tryk langs med ortogonallinier*

Kræfterne på arealerne vil afhænge af hvordan feltlinierne går i forhold til disse. Alt dette svarer til at feltlinierne netop repræsenterer det elektromagnetiske felt. (Her svarer sætning 4.10 og sætning 4.11 til henholdsvis sætning 3.1 og sætning 3.2)

Det er værd at bemærke at hvis man øger volumenet ud i vakuum, vil det ikke ændre på kræften. Som det fremgår af ligning 3.20:  $\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho d\tau$ , vil bidraget til kraften være nul, da  $\rho$  her vil være nul.

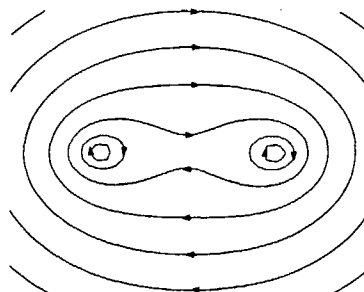
Fra Lorentzkraften ved vi at retningen for den elektriske kraft på en ladning er parallel med det elektriske felt, og at retningen for den magnetiske kraft er vinkelret både på feltet og strømmen. Dette kan give anledning til en opfattelse af, at der er forskel på karakteren af de to felter. Ved hjælp af stresstensorfortolkningen ses det imidlertid, at de to felter ligner hinanden meget. For begge gælder at trækket langs med feltlinierne er lige så stort som trykket på tværs af feltlinierne. Det der gør at  $E$  tilsyneladende er forskellig fra  $B$ -feltet er at elektriske feltlinier ender på ladninger, som resulterer i kræfter parallelt med feltet, mens magnetiske feltlinier roterer om strømme, hvilket betyder at kraften fra feltet på strømmen går vinkelret på feltlinierne.

Stresstensorfortolkningen i samspil med feltlinier et et kraftfuldt redskab og tilmed let tilgængeligt [Herrmann, 1989]. Feltlinierne illustrerer på denne måde ikke kun styrke og retning på feltet, men angiver også med 4.10 og 4.11 retningen på kraftpåvirkningerne. Til trods for dette, ses denne fortolkningen af feltlinier generelt ikke når feltlinier introduceres. Vi har i hvertfald ikke fundet denne fortolkning i de lærerbøger vi har kigget igennem [Hansen, 1967], [Ohanian, 1989], [Halliday et al., 1992], [Becker, 1964], [Ford, 1972], [Keller et al., 1993].

### 4.6.1 Gummibåndsanalogi

Den analogi vi her vil se på, er en ikke særlig brugt analogi mellem gummibånd og feltlinier. Den er mest brugt indenfor plasmafysik, men ifølge [Cross, 1989] er den også anvendelig på feltlinier fra almindelige ladninger og strømme.

Det er muligt at lave en analogi mellem feltlinierne og gummibånd (eller strakte strenge). Denne analogi diskuteres i artiklen [Cross, 1989]. Som beskrevet vil feltlinierne (i henhold til stresstensorfortolkningen) have en tendens til at forkorte sig ligesom et gummibånd. Med denne analogi kan man eksempelvis se, at positive og negative ladninger yder et træk hen imod hinanden. Man kan ligeledes se, at der vil være et tryk på en strømførende ledning i et magnetfelt (se figur 5.4).



**Figur 4.10**  $\vec{B}$ -feltet fra to ledninger, hvor strømmen for begge ledninger er rettet ned i papiret, og strømmene er lige stærke. Feltlinierne kan sammenlignes med gummibånd, der presser de to ledninger mod hinanden. De inderste feltlinier bidrager dog også til den tiltrækkende kraft mellem de to ledninger.

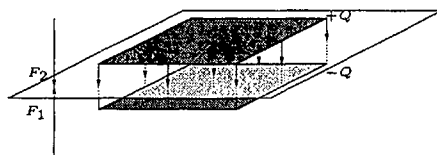
Der er dog en fare for at lave en række fejlforklaringer med denne analogi som Rodney C. Cross påpeger i sin artikel [Cross, 1989]. Man skal ikke tro at trækket virker direkte på feltlinierne, men at kræfterne virker der hvor der er ladninger.

Denne kommentar til analogien er vi uenige i. Der er et stress i feltet og dermed giver det mening at snakkes om at kræfterne virker ude i feltet, men samlede kraft på et område vil være nul undtagen ved ladninger.

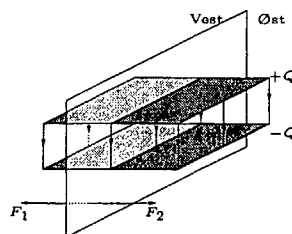
På figur 4.10 ses magnetiske feltlinierne fra to ledninger, hvor strømmen for ledninger løber ned i papiret ( $\otimes$ ) med samme strømstyrke. På denne figur ser det ud som om at feltlinierne lige rundt om ledninger ikke bidrager til den tiltrækkende kraft mellem ledningerne. Dette er ikke rigtigt, da feltet lige rundt om ledningen er ligeså vigtigt for tiltrækningen som resten af feltet.

Et eksempel der ikke er påpeget af Cross [Cross, 1989] på at anvendelsen af gummibåndsanalogien kan give anledning til fejlforklaringer, er eksemplet med en ideel kapacitor. Feltlinierne skal tegnes som rette linier mellem de to kapacitorplader (jævnfør afsnit 4.5 for metoder til at tegne feltlinier ud fra kendskabet til potentialer). Ser man på de kræfter som virker på et vandret plan placeret mellem to vandrette kapacitorplader med uendelig store arealer, vil man kunne forestille sig nogle trækkræfter på hver side af planet ved hjælp af gummibåndsanalogien. Dette er i overensstemmelse med hvad man ville få ved at benytte sig af stresstensorforklaringen (se figur 4.11). Laver man en lodret flade gennem det samme system (se figur 4.12) vil man ikke se at de to sider yder et tryk på hinanden ud fra gummibåndsanalogien. Går man tilbage til den oprindelige stresstensor analogi vil vi dog forudse dette tryk.

Der er altså en række muligheder for at begå fejlforklaringer med gummibåndsanalogien. For at gøre brug af den må man erkende dens begrænsninger, hvilket gør sig gældende for en hver analogi (se [Iding, 1997]), hvor dette pointeres på baggrund af en undersøgelse af indlæring ved hjælp af brugen af analogier). Gummibåndsanalogien har omvendt den fordel, at den gør brug af et hverdagsfænomen som gummibånd. Til trods for at den er let tilgængelig, bliver analogien kun benyttet indenfor enkelte specifikke discipliner og bliver i almindelighed først indført på et sent undervisningsniveau [Cross, 1989].



**Figur 4.11** Udsnit af uendelig stor kapacitor.  $F_2$  er den kraft der virker på planet fra den øverste side, og  $F_1$  er den tilsvarende kraft på planet fra den nedre side. Der er et træk på langs med feltlinierne. Systemet vil så at sige implodere, hvis der ikke var noget til at forhindrer det.



**Figur 4.12** Udsnit af ideel stor kapacitor.  $F_1$  er den kraft der virker på planet fra den højre side af, og  $F_2$  er den tilsvarende kraft der virker på planet fra den venstre side. Der er et tryk på tværs af feltlinierne og systemet vil så at sige eksplodere, hvis der ikke var noget til at forhindrer det.

## 4.7 Superpositionering af feltliniediagrammer

Et fundamentalt princip i elektrodynamikken er superpositionsprincippet [Feynman, 1989, side 4-2]. Ser man på et system af flere forskellige kilder til elektromagnetiske felter, kan disse felter adderes vektorielt og giver dermed det virkelige resulterende felt. Denne egenskab kan ikke umiddelbart udnyttes med feltlinierepræsentationen, da der ikke findes en eksakt måde at addere to feltliniediagrammer på og få det resulterende felt. Man er derfor nødt til at vende tilbage til vektorrepræsentationen hvis man vil superpositionere felter. Man kan dog med lidt øvelse få en kvalitativ ide om, hvordan det resulterende feltliniebillede fra to forskellige felter ser ud, ved at se på billeder af de to felter hver for sig. Ved at se på retninger og tætheder af feltlinier i de to diagrammer kan man få en ide om styrke og retning i det resulterende billede. Dette kræver dog, at den samme feltlinietæthed repræsenterer den samme feltstyrke for begge diagrammer. Denne metode er ret upræcis, og kan ikke anvendes til at komme med kvantitative resultater.

## 4.8 Feltlinier i bevægelse

Elektriske og magnetiske felter er to sider af det samme fænomen, nemlig elektromagnetisk vekselvirkning. Som nævnt bør det elektromagnetiske felt opfattes som en virkelig fysisk entitet med fysiske egenskaber, som kan beskrives ved et samspil mellem elektriske og magnetiske felter. Det er dog vigtigt at påpege, at opspaltningen af det elektromagnetiske felt i en elektrisk og en magnetisk del i høj grad afhænger af det valgte inertialsystem. Kræfter som i et inertialsystem er beskrevet ved et elektrisk felt, kan i et andet være beskrevet ved både et



elektrisk og et magnetisk felt. Feltliniebeskrivelsen af et givent system kan altså se forskellig ud i forskellige inertialsystemer, og de bør derfor ikke tillægges for stor fysisk realitet. Det giver ingen mening at tale om hastigheden af en feltlinie i bevægelse eller kraftpåvirkningen på en ladet partikel i et bevæget magnetfelt. Det er ikke felterne der bevæger sig, men værdierne af felterne der ændrer sig i rummet.

## 4.9 Fra tre dimensioner til to

En af begrænsninger ved at visualisere feltlinier i lærebøger og i almindelighed er at feltliniediagrammerne nødvendigvis må præsenteres i 2 dimensioner, eller også kan det forsøges at vise feltlinierne med perspektiv (se eksemplvis figur 4.2). Feltliniediagrammer med perspektiv bliver ofte uoverskuelige, hvorfor langt de fleste feltliniediagrammer præsenteres i 2 dimensioner uden perspektiv.

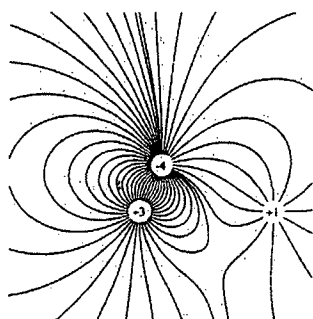
Det har desværre nogle uheldige sideeffekter at lave todimensionale fremstillinger af tre dimensionale systemer. Problemerne knytter sig især til feltliniediagrammer, der fremstilles ved brug af computere hvilket påpeges i en artikel af Alan Wolff m.fl. [Wolf et al., 1996]. Det der her fremhæves er, at der ved ukritisk brug af programmer til at tegne feltlinier, kan opstå, det der i artiklen kaldes for »ækvatorial klumpning« (»equatorial clumping«) og »falsk dipol moment« (»false dipol moment«).

»ækvatorial klumpning« vil sige at der kan opstå uregelmæssige store afstande mellem feltlinier nogen steder, mens der andre steder er en »klumpning« af feltlinier. Dette forekommer ved ladninger, hvor man ender sine feltlinier. Det betyder at feltet tæt på en negativ ladning tilsyneladende ikke opfylder, den symmetri man vil forvente. Feltet tæt på en punktladninger skal være kuglesymmetrisk, da feltet her skal være domineret af ladningen selv. Dette kan føre til, at man mistolker feltliniediagrammet, således at man konkluderer, at feltet er stærkere på den ene side af en ladning end på den anden. Et eksempel på dette kan ses på figur 4.13. Grunden til at dette problem kan forekomme, er at selvom feltliniefordelingen i planet ikke er jævn, så er fordelingen i 3 dimensioner det. Det vil sige, at selvom vinkelsymmetrien ikke er opfyldt i planet (vinklen i planet betegnes  $\theta$ , mens vinklen i forhold til planet vil blive betegnet  $\phi$ ) kan det godt være opfyldt i 3 dimensioner, det kræver blot at afstanden mellem feltlinierne varierer tilpas med  $\phi$ .

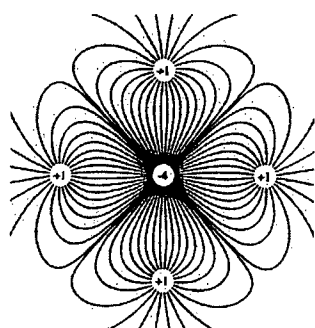
Det der kaldes for »falsk dipol moment« kan for eksempel forekomme som det vises på figur 4.14, hvor det umiddelbart ser ud som om, at systemet udadtil er elektrisk ladet, selvom den samlede ladning er nul. Dette skyldes, at de feltlinier der starter i planet er tvunget til at blive i planet, i forhold til konventionerne for at tegne feltlinier. De feltlinier der går ud af figuren kan således ikke strække sig op i den tredje dimension, for at gå over eller under de positive ladninger og på den måde at gå ind til den negative ladning.

Problemerne skyldes ifølge forfatterne til artiklen udelukkende projektnsproblemer. De har således undersøgt om det skulle skyldes numeriske fejl eller integrationsproceduren.

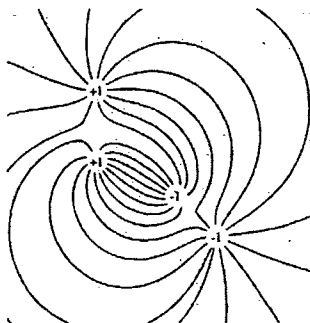
I artiklen er der flere forslag til at komme uden om problematikken. Eksempelvis foreslås det, at bruge »todimensional fysik«, da der således ikke sker



**Figur 4.13** Tre ladninger med relative ladninger på  $-4$ ,  $+3$  og  $+1$ . Det bemærkes at der rundt om den negative ladning ( $-4$ ) er en vinkelafhængig fordeling feltlinie. Dette skyldes projektionen fra tre dimensioner til to.



**Figur 4.14** Fem ladninger med relative ladninger på  $+1$ ,  $+1$ ,  $+1$ ,  $+1$  og  $-4$ . Udadtil burde dette system være elektrisk neutralt, men det fremgår af figuren, at der er flere feltlinier, der tilsyneladende fortsætter ud til uendelig. Dette skyldes projektionen fra tre til to dimensioner.



**Figur 4.15** Fire ladninger med relative ladninger på +1, +1, -1 og -1. Det ser umiddelbart ud som om de to negative ladninger (-1) ikke er lige ladet. Dette skyldes et uheldigt valg af vinklen for den første feltlinie på de to positive ladninger (+1).

informationstab ved en projektion. Det betyder tilgængæld, at man er nødt til at omskrive sine ligninger så eksempelvis Gausses lov er opfyldt i 2 dimensioner. Dvs. at istedet for

$$\oint (\vec{E} \cdot \hat{n} dA) = 4\pi q_{\text{omsluttet}} \quad (4.12)$$

[Wolf et al., 1996, side 715] vil Gausses lov være

$$\oint (\vec{E} \cdot \hat{n} dl) = 2\pi q_{\text{omsluttet}}. \quad (4.13)$$

[Wolf et al., 1996, side 720]

Et andet forslag går på at betragte uendelige lange linier der går vinkelret på det plan man vil afbillede, i stedet for at benytte sig af punktladninger. Begge dele ville kunne udrydde de omtalte problemer, der opstår ved at lave snitflader af tredimensionale systemer. Denne ide støttes af T. E. Freeman der i en artikel om samme problem. Hans bekymring går dog i højere grad på, at studerende kan få et forkert indtryk af feltet ved ukritisk brug af programmer til at tegne feltlinier [Freeman, 1995]

Et problem fra den førstnævnte artikel står dog stadig tilbage. Problemet kaldes for rand klumpning (»boundary clumping«), og kommer af at man, når man skal lave sit feltliniediagram, skal vælge hvor mange feltlinier, man vil knytte til hver ladningsmængde  $q$ . Derefter skal feltlinierne fordeles så vinklen  $\Delta\theta$  mellem dem bliver  $\frac{2\pi}{qn}$ , hvor  $n$  betegner antallet af feltlinier man vil knytte til hver  $q$ . Da det er et endeligt antal feltlinier man benytter til at repræsentere et kontinuert felt, kan der opstå problemer for feltliniediagrammer med mere end to ladninger. Der kan for eksempel forekomme løsninger som vist på figur 4.15. Her er den valgte placering af den første feltlinie uheldig, så det fremstår som om den ene af de to negative ladninger er mere ladet end den anden, da der ender flere feltlinier på denne. Dette problem lader sig dog løse ved et vælge en anden  $\theta_0$ , dvs. hvor den første feltlinie skal begynde.

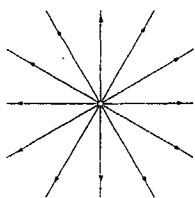
Der er således en række problemer ved at benytte computere til at fremstille sine feltliniediagrammer, og problemet følger med hvis man ikke er kritisk i forhold til resultaterne af fremstillingen.

## 4.10 Feltlinietæthed og feltstyrke

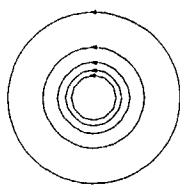
Som tidligere nævnt (i sætning 4.2 side 29) er den almindelige opfattelse, at antallet af feltlinier gennem et plan vinkelret på feltlinierne er et udtryk for feltstyrken. I [Ohanian, 1989, side 596] skrives dette som,

»...the density of lines is directly proportional to the magnitude of the electric field; that is; where the lines are close spaced the electric field is strong, and where the lines are far apart the field is weak.«

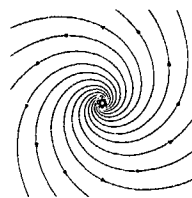
Lignende formuleringer findes i andre lærebøger. Det viser sig imidlertid, at der ikke altid gælder, at tætheden af feltlinier er et udtryk for feltstyrken.



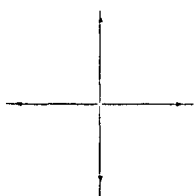
**Figur 4.16** Feltliniediagram af det elektriske felt fra en homogen posektivladet linie der går vinkelret ud af papiret



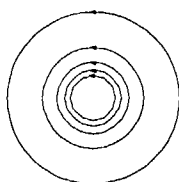
**Figur 4.17** Feltliniediagram af det elektriske felt rundt om en uendelig lang og tynd solenoiden der går vinkelret ud af papiret. I solenoiden løber en konstant voksende strøm, og dermed er det elektriske felt ikke tidsafhængigt.



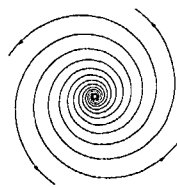
**Figur 4.18** Feltliniediagram af af det elektriske felt i et system med en homogen posektivladet linie og en solenoiden hvor der løber en konstant voksende strøm. Feltet er fundet ved at superponering af felterne vist i figur 4.16 og figur 4.17.



**Figur 4.19** Feltliniediagram af det elektriske felt fra en homogent posektivladet linie der går vinkelret ud af papiret. Her er ladningen på linien en  $\frac{1}{3}$  af hvad den er på 4.16



**Figur 4.20** Viser det samme som figur 4.17.



**Figur 4.21** Viser stort set det samme som figur 4.18, men med den væsentlige forskel at der her er mindre ladning på linien. Feltet er fundet ved at superponering af felterne vist i figur 4.19 og figur 4.20.

I følgende eksempel vises det, at det ikke altid er muligt at repræsentere elektriske felter med feltliniediagrammer. Man tænker sig at have en uendelig tynd og lang solenoide på  $z$ -aksens. I solenoide løber en konstant voksende strøm, der

skaber en konstant voksende magnetisk fluks i solenoiden. Fra Faradys lov, ligning A.3, kan et udtryk for det elektriske felt findes. Det elektriske felt vil være konstant i tiden og falde med  $\frac{1}{r}$ . Feltet vil gå i cirkler omkring solenoide. På  $z$ -aksen vil der være en linie hvor rotationen af  $\vec{E}$  er forskelligt fra nul, se figur 4.17. I  $z$ -aksen lægges nu en uendelig lang linie med en given ladningstæthed. Feltet fra linien kan findes fra Gauss' lov, som det er gjort på side 34. Feltet er stjerneformet og falder med afstanden som  $\frac{1}{r}$ , se figur 4.16. Superpositioneres de to felter fås et feltliniediagram som det på figur 4.18. Dette ser meget tilforladeligt ud.

Sætter man ladningstætheden på linien ned med en  $\frac{1}{3}$ , vil linien have et felt som det der ses på 4.19. Her er kun fire feltlinier istedet for tolv. Superponerer man nu de to felter, vist på figur 4.19 og figur 4.20, vil man få et feltliniediagram som det på figur 4.21. De fire feltlinier er tættere viklet om hinanden end de tolv i figur 4.18. Feltlinierne ligger tættere, hvilket kunne tyde på at feltet her er stærkere end i førstnævnte, men det er faktisk mindre. Det er altså ikke muligt her at sige, at tætheden af feltlinier er et udtryk for feltstyrken. Den måde man skal fastlægge feltlinietætheden er ved at ligge et plan vinkelret på feltlinierne. På dette plan vil den samme feltlinie gå igennem flere gange, den skal kun tælles med en gang, men det ser ud som om at flere forskellige feltlinier vil passere igennem. Det kan vises at disse problemer kun opstår i nogle systemer [Herrmann et al., 2000]:

#### Sætning 4.12

*I systemer hvor et eller flere punkter har både  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$  og  $\nabla \times \vec{E} \neq 0$  vil den elektriske feltlinietæthed IKKE være proportional med feltstyrken.*

Man er altså tvunget til at lave en analyse af systemet, for at benytte feltlinier som man plejer. Feltlinier ender steder hvor  $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$  (se afsnit 4.1 side 29) og ortogonalfeltlinier ender steder hvor  $\nabla \times \vec{E} \neq 0$  (se sætning 4.3 side 30).

Fra ovenstående sætning kan man også indse at problemet ikke vil opstå i magnetiske feltliniediagrammer, fra Gauss' lov for  $B$ -felter (ligning A.2) ved vi at der altid gælder at  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , med andre ord vil  $B$ -feltlinier altid gå i lukkede kurver.

Man skal afholde sig fra at bruge formuleringer som: »feltlinietætheden er direkte proportional med feltstyrken« uden videre kommentarer (som der eksempelvis skrives i [Ohanian, 1989]), da relationen ikke generelt vil gælde. Relationen er et vigtigt element ved feltliniediagrammer, men det må samtidigt pointeres at den ikke altid gælder.

## 5 En ledning i et $B$ -felt

For at anskueliggøre hvordan feltliniediagrammer, gummilagensmetoden og stresstensorfortolkningen kan bruges, vil vi i dette kapitel se på et klassisk og historisk set vigtigt eksperiment, der går ud på at måle kraften på en strømførende ledning i et eksternt  $B$ -felt. Det er almindelig kendt at kraften på ledningen kan findes med »bil«-formlen;

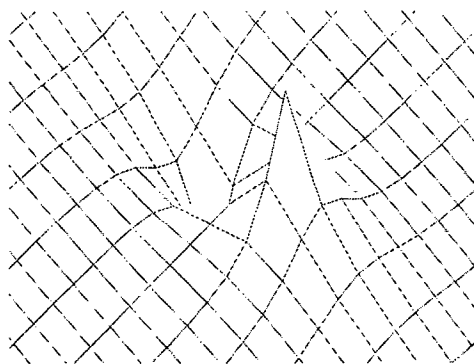
$$\vec{F} = l \cdot \vec{I} \times \vec{B}. \quad (5.1)$$

Men hvad er det for et  $B$ -felt man skal sætte ind i denne formel? Det viser sig at man skal indsætte det ydre  $B$ -felt så man skal se bort fra det  $B$ -felt der stammer fra strømmen i ledningen. Dette forsvares med at det såkaldte »selvfelt« ikke skal medregnes, da ledningen ikke kan yde en kraft på sig selv (populært sagt: »Man kan ikke hive sig selv op i hårene«). Hvis ledningen er lavet af et ferromagnetisk materiale, vil magnetfeltet i omegnen af ledningen vokse, da det ydre magnetfelt vil magnetisere ledningen. Feltet fra magnetiseringen skal dog heller ikke regnes med. Det er vanskeligt at se hvad det er for et  $\vec{B}$ , der skal indgå i (5.1). Lad os se om vi kan finde en måde, der kan føre os uden om disse vanskeligheder.

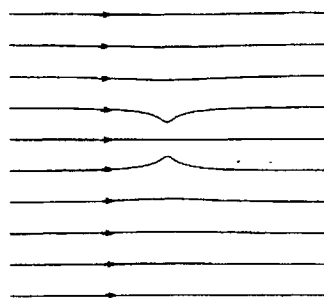
I stedet for at tage udgangspunkt direkte i »bil«-formlen kan man tænke på problemet med en stresstensorfortolkning. Så skal man ikke tænke på det abstrakte  $B$ -felt i »bil«-formlen, men i stedet det virkelige  $B$ -felt i systemet. Nu skal  $B$ -feltet i omegnen af ledningen findes.

Lad os forestille os at strømmen i ledningen løber ned i papiret ( $\otimes$ ). For at finde  $B$ -feltet kan man forsøge sig med at superpositionere nogle felter man kan tænke sig til. Det første felt man kunne tænke sig til er det der kommer fra en ledning der bliver magnetiseret i et ydre  $B$ -felt. Dette magnetfeltet vil være konservativt udenfor ledningen, og man kan benytte gummilagenmetoden til at finde skalarpotentialfunktionen  $V$  der hører til dette felt. Dette kræver at man kender lidt til randbetingelserne af den magnetiserede ledning, hvilket kan gøre metoden lidt vanskelig. Man skal tænke på et skråt gummilagen som presses lidt op og ned der hvor ledningen er, se figur 5.1. Man har dog et problem med at forestille sig magnetfeltet inde i ledningen med denne metode. Man kan også prøve at tegne feltlinierne ud fra reglen om at ferromagnetiske metaller har en tendens til at suge feltlinier til sig. Man vil med begge metoder forvente et feltliniediagram der ser ud som det i figur 5.2

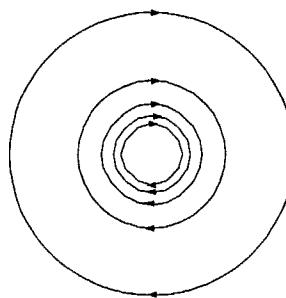
Man skal nu superpositionere de to felter i figur 5.2 og figur 5.3. Som vi har set kan dette ikke umiddelbart lade sig gøre, men man kan forsøge sig med at forlade feltlinierepræsentationen og vende tilbage til det virkelige felt. Magnetfeltet fra strømmen i ledningen vil forstærke feltet oven over ledning og svække feltet under. På venstre side vil feltet få en opadgående komponent, og på højre side



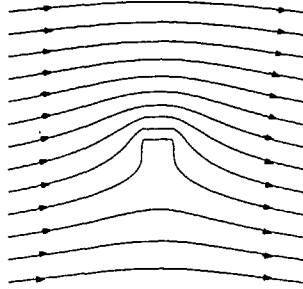
**Figur 5.1** Gummilagensvisualisering af en ikke strømførende magnetiseret ledning i et  $B$ -felt



**Figur 5.2** Feltlinier omkring en magnetiserbar ledning uden strøm i et ydre  $B$ -felt



**Figur 5.3**  $B$ -feltet fra en strømførende ledning



**Figur 5.4** Feltlinier uden om en strømførende ledning i et eksternt  $B$ -felt, hvor strømmen i ledningen løber ned i papiret.

en nedadgående. På baggrund af dette er det muligt at forestille sig et billede som det der ses i 5.4.

Med stresstensorfortolkningen kan man nu se, at der vil være en nedadrettet kraft på ledningen, da trykket fra feltlinierne er størst over ledningen.

Som det gerne skulle fremgå af dette eksempel er det muligt ved hjælp af indre billeder at komme med kvalitative forudsigelser. En skitsering af feltlinidiagrammer giver desuden mulighed for at visualisere stresset i feltet.



## 6 Opsummering

I dette kapitel vil pointerne fra hver kapitel kort blive opsummeret.

I kapitel 2 om forståelse blev det påpeget, at den forståelse en fysiker må besidde giver sig til udtryk ved mere end en matematisk symbolsk repræsentation (hvilket også kom til udtryk i konklusionen på DTUs undersøgelse). Det blev ligeledes påpeget at evnen til at kunne repræsentere det samme begreb på flere måder, er udtryk for opnået forståelse. Det blev endelig påpeget, at en vigtig evne en fysiker bør besidde, er evnen til at komme med kvalitative forudsigelser. Dette kaldes for den fysiske forståelse.

I kapitel 3 om den begrebslige forståelse af det elektromagnetiske felt, blev det som det første påpeget, at det elektromagnetiske felt er en fysisk entitet, hvorfor feltet tillægges fysiske egenskaber på samme måde som andre fysiske systemer. Her var det hovedsagligt hvad man skal forstå ved stress i det elektromagnetiske felt der blev beskrevet. Det blev i den forbindelse nævnt, at det har sine fordele at benytte Maxwells stresstensor fremfor at benytte sig af Lorentzkraften.

I kapitel 4 om visualisering og tolkning af feltliniediagrammer, blev det påpeget hvordan feltliniediagrammer, kan benyttes til at visualisere det elektromagnetiske felt. En af pointerne der her kom frem, var at man kan benytte feltliniediagrammer til at skitsere elektriske og magnetiske felter, og derved komme med kvalitative forudsigelser. Endvidere blev feltliniediagrammer og ortogonalliniers evne til at afspejle stress i feltet påpeget, og at man derfor bør benytte sig af ortogonalfeltlinier, når man laver feltliniediagrammer. Endelig blev en række begrænsninger ved feltliniediagrammerne påpeget. I kapitlet blev fremført en visuel repræsentation af det elektromagnetiske felt, og forklaret hvordan feltliniediagrammer kan anskueliggøre stresset i feltet.

## 7 Diskussion

I henhold til problemformuleringen vil der i dette kapitel blive diskuteret, hvordan feltliniediagrammer kan bidrage til forståelse af det elektromagnetiske felt.

I en artikel i »American Journal of Physics« [Törnkvist et al., 1993] fremlagdes konklusionerne fra en undersøgelse som omhandlede studerendes forståelse af feltlinier i en række statiske tilfælde. En af konklusionerne var, at de studerende har en tendens til, at tillægge feltlinierne en større grad af virkelighed end de fortjener. De studerende formår således ikke at skelne mellem feltlinierne og det fysiske felt. Dette fremgår tydeligt i dette citat taget fra artiklens konklusion [Törnkvist et al., 1993, side 338]:

»They attach far too much reality to the field lines and often treat them as isolated entities in the Euclidean space, not as a set of curves representing a vectorial property of the space. The hierarchical sequence between the concepts ... is not fully understood«.

Undersøgelsen er foretaget med universitetsstuderende på andet år. Derfor synes problemstillingen for dette projekt ganske relevant. Når man anvender sådanne repræsentationer i undervisning og illustrationer er det altså vigtigt at være opmærksom på hvor meget reel virkelighed der bør lægges i de givne repræsentationer. I projektrapporten er der således gjort et forsøg på, at skabe en ontologisk distinktion mellem eksempelvis det elektromagnetiske felt og potentialet.

En måde til at undgå førortalte forvirring omkring feltliniers tolkning, er i højere grad at gøre opmærksom på de begrænsninger der er for anvendelse af feltliniediagrammer, og på hvilke punkter repræsentationen kan være i uoverensstemmelse med den repræsenterede fysiske størrelse. Vi mener selv at have nævnt de vigtigste i rapporten (se afsnit 4.7, 4.8, 4.9 og 4.10). Der er nogle tekniske vanskeligheder angående den grafiske fremstilling af diagrammerne, der kan resultere i illustrativt misvisende fremstillinger. Her tænkes på problemerne med at projicere tredimensionale felter ned i to dimensioner. Desuden er der problemer med at superpositionere feltlinier, og så er der nogle tilfælde, hvor det ikke giver mening at udtrykke felterne vha. feltlinier. Her tænkes specielt på de tidsafhængige felter og de tilfælde hvor tætheden af feltlinier ikke kan tages som udtryk for feltstyrken.

Efter at have nævnt disse betænkeligheder ved feltlinierepræsentationen, kunne man oplagt sætte spørgsmålstegn ved dens evne til at tilvejebringe en god forståelse af det elektromagnetiske felt. Skal man følge forslaget i artiklen »Electric Field Line Diagrams Don't Work« [Wolf et al., 1996] bør man opgive at benytte sig af feltliniediagrammer og istedet benytte vektordiagrammer. I artiklens konklusion skriver forfatteren således:

»...each of the problems that we have considered is avoided by simply using graphical methods that do not employ continuous lines of force. For example, both the local direction and the local magnitude of a two-dimensional slice of an electric field can be accurately, although less aesthetically, represented by placing individual field vectors at the vertices of square grid«.

Efter vores mening er dette dog en meget dårlig ide, da man samtidig fravriter sig mange af de fordele der er med feltlinier. Denne holdning deles af [Herrmann et al., 2000], der om at forkaste feltliniediagrammer skriver at:

»In our view, this would be throwing the baby out with the bath. Our proposal is: Take advantage of the virtues of conventional field line diagrams but don't pretend they represent something that they do not. In other words: Don't claim that the line density measures the field strength«.

Som Herrman nævner er der en række fordele ved feltliniediagrammer som ikke opnås med f.eks. vektordiagrammer. For det første er feltliniediagrammer langt mere overskuelige end vektordiagrammer. Se eksempelvis figur 4.8 og 4.9 side 38, hvor det samme felt er repræsenteret på begge måder. For det andet kan de hurtigt give en ide om relative feltstyrker og retninger i feltet.

En anden væsentlig egenskab ved feltliniediagrammer er, at man ret nemt kan visualisere stresset i feltet. På trods af denne store fordel er den måde at fortolke feltliniediagrammer på ikke udbredt i litteraturen. Det er vores opfattelse, at der i lærebøger bliver gjort alt for lidt ud af at give en fortolkning af feltliniediagrammerne. Ved at benytte stresstensorfortolkningen på disse kan man få et overblik over den rumlige fordeling af kraftpåvirkningerne i feltet. I den forbindelse skal det fremhæves, at ved at udbygge feltliniediagrammer med ortogonallinier kan man få en endnu bedre visualisering af stresset i feltet. Især vil dette være en fordel i magnetfelter, da man derved får en bedre fornemmelse for kraftpåvirkningen vinkelret på feltlinierne. Desuden vil ligheden mellem det elektriske og det magnetiske felt blive klarere, da det ses at de begge har lige så stort træk langs med feltlinierne som tryk på tværs. En tredje force ved feltlinie- og ortogonalrepræsentationen er muligheden for at se hvor og om der er divergens og rotation i felterne og hvor der er eventuelle divergens- og rotationscentre, dvs. områder i rummet hvor der er kilder til felter. I feltliniediagrammer begynder feltlinier steder hvor divergensen er forskellig fra nul, og ortogonalplaner begynder og ender, hvor rotationen er forskellig fra nul.

Som det blev nævnt i kapitel 2, kan det betegnes som et udtryk for forståelse, at kunne repræsentere og udtrykke viden om fysiske fænomener på flere forskellige måder. En billedlig repræsentation af det elektromagnetiske felt er således med til at øge forståelsen af det elektromagnetiske felt. Billeddannelse er af stor betydning for vores evne til at opfatte ny viden om fysiske fænomener, som vi også så i kapitel 2. Her påpegede Peder Voetmann Christiansen (se side 11) at fysikken i højere grad bør forsøge at danne billeder af de matematiske symboler der indgår i ligninger, for at man kan opnå forståelse af dem. Ligeledes blev det fremhævet at den begrebslige beskrivelse er af stor betydning for forståelsen (se side 6 i indledningen). Ledsages feltliniediagrammerne derfor med en begrebslig fortolkning, opfylder de således to vigtige faktorer for opnåelse af forståelse.

Den visuelle fremstilling af felterne skal selvfølgelig ikke erstatte eller overskygge den matematiske repræsentation. Kun ved hjælp af sidstnævnte kan man få en korrekt og eksakt beskrivelse af de fysiske fænomener og som indeholder alle de

fundamentale sammenhænge og principper. Det nytter dog ikke at være i stand til at regne opgaver rigtig ud, hvis man som nogle af de studerende på DTU (og sikkert mange andre steder), ikke har en tilsvarende begrebslig forståelse af de symboler der indgår i ligningerne. De to beskrivelser bør følges ad og supplere hinanden. På den måde bliver det også mere klart hvad der er de virkelige fysiske entiteter og hvad der er repræsentationer eller modelbegreber og hvilke begrænsninger der er for disse modelbegrebers anvendelse.

Det er klart at feltliniediagrammer til tider afspejler nogle ikke-fysiske egenskaber som det påpeges i [Wolf et al., 1996], og vil man bruge feltliniediagrammer, er det nødvendigt at gøre sig bevidst om disse begrænsninger. Når det er sagt, er det dog vores mening, at feltlinier er et godt redskab til at repræsentere elektromagnetiske felter. Det er ikke feltliniediagrammernes evne til at give kvantitative oplysninger der udmærker dem, men derimod deres evne til at skabe overblik over feltets relative styrke, stress, rotation, divergens og ækvipotentialer. Kender man begrænsningerne kan man med sindsro og stor fordel benytte feltliniediagrammer som et godt værktøj til at give forståelse af det elektromagnetiske felt.

## 8 Konklusion

Feltliniediagrammer bidrager til forståelse af det elektromagnetiske felt, ved at være en måde at repræsentere feltet visuelt på. Feltliniediagrammer bliver mere anvendelige, hvis de udvides til at indeholde ortogonalfeltlinier. Ved korrekt tolkning af feltliniediagrammer afspejles endvidere en række af det elektromagnetiske felts egenskaber, så som stress, retning, styrke, ækvipotentialer, divergenscentre og rotationscentre. Feltliniediagrammer kan benyttes til at komme med kvalitative forudsigelser, og er på den måde med til at give fysisk forståelse.

Desværre benyttes feltliniediagrammer i almindelighed for ukritisk, og der forekommer en generel misforståelse om at feltlinietætheden altid afspejler feltstyrken. Dette fører til en hvis forvirring. Blandt nogle studerende er det uklart at feltliniediagrammer blot er en repræsentation af det elektromagnetiske felt, hvilket kunne afhjælpes ved at påpege de tilfælde, hvor feltliniediagrammer ikke afspejler feltets egenskaber korrekt.

## 9 Perspektivering

I arbejdet med denne projektrapport har der været en række overvejelser, som ikke direkte har været relevante for besvarelsen af problemformuleringen.

Et af de emner vi havde oppe og vende var den tvetydige brug af ordet »felt«. Der er grobund for en vis begrebsforvirring omkring ordet »felt«. I almindelighed skal man ikke opfatte et felt som en fysisk entitet, der kan overføre kræfter. Eksempelvis er et temperaturfelt ikke et felt der i sig selv overfører kræfter til andre systemer. Det er blot et felt i den forstand, at man til ethvert punkt i rummet kan knytte et tal, der angiver temperaturen.

På Maxwells tid havde man ikke denne begrebs forvirring. Dengang mente man der var et medie kaldet æter som feltet udbredte sig i (på samme måde som at temperaturen udbreder sig i et medie). Det elektriske og det magnetiske felt repræsenterede en mekanisk spænding (et stress) i æteren. Denne fortolkning af Maxwells ligninger kaldes »æterteorien«. Med »æterteorien« skulle det være muligt at måle en såkaldt ætervind, ved at se på udbredeshastigheden af bølger i æteren. Med andre ord skulle lysets hasighed være forskellig i forskellige retninger, da Jorden må bevæge sig igennem æteren. Michelson (1852-1931) og Morley (1838-1923) udførte i 1887 et eksperiment der gjorde brug af optisk interferens, og dermed stor målenøjagtighed. De kunne ikke finde nogen ætervind. Med dette eksperiment og Einsteins specielle relativitetsteori blev æterteorien forkastet. Det ikke længere nødvendigt at have et medie som feltet kunne udbrede sig i [Griffiths, 1999, side 480]. Man er herefter gået over til jargonen: »Feltet er mediet selv«. Ordet »æter« blev fjernet fra ordforrådet. Med fare for at lyde plat, kan man sige at fysikerne blev kastet ud i et begrebsmæssigt vakuum. Ved at holde op med at bruge ordet æter, mister man også alle de positive associationer ordet giver.

»Æter« er et godt ord da det øger forståelsen af at det elektromagnetiske felt er en fysisk entitet. Man kunne genindføre ordet med en moderne fortolkning. Man kunne lade ordet »æter« erstatte ordet »felt« i den betydning, hvor det betegner et fysisk system. Dette kunne være med til at give begrebsmæssig forståelse af hvad der er på spil, og afmystifisere det vi idag kalder »felt«. Ulempen ved »æter« er at man kunne opfatte det i den betydning som det havde i æterteorien. I andre grene af fysikken har vi dog ikke noget problem med anvende modelbegreber som giver delvis forkerte associationer. Eksempelvis undervises der i Bohrs Atommodel, selvom den er forældet.

En anden ting vi i projektforløbet har bemærket, er at feltlinier i generel forstand bruges indenfor andre områder af fysikken. Eksempelvis i termodynamikken bruges feltlinier til at visualisere varmemstrømmen, og her er feltlinietætheden et udtryk for hvor kraftig varmemstrømmen er. Temperaturen er her et skalarfelt, og gradienten af temperaturen angiver varmemstrømmens retning og »styrke«.

Tilsvarende benytter man sig af feltlinier i hydrodynamikken. Her er feltlinier under visse betingelser partikelbaner og potentialet er trykket. Feltlinierne i hydrodynamikken adskiller sig dog fra feltlinierne i elektrodynamikken, ved at en stor feltlinietæthed (når Bernoullis ligning er opfyldt) er udtryk for en stor hastighed og derfor udtryk for et lavt tryk. I hydrodynamikken er der et træk vinkelret på feltlinierne imodsatning til elektrodynamikken hvor der er et tryk.

## A Maxwells ligninger

Maxwells ligninger på differential form [Griffiths, 1999, side 321]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Gausses lov for elektricitet}) \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gausses lov for magnetisme}) \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradays lov}) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampère-Maxwells lov}) \quad (\text{A.4})$$

Maxwells ligninger på integral form [Ohanian, 1989, side 853]:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Gausses lov for elektricitet}) \quad (\text{A.5})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{Gausses lov for magnetisme}) \quad (\text{A.6})$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradays lov}) \quad (\text{A.7})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{Ampère-Maxwells lov}) \quad (\text{A.8})$$



## B Maxwells stresstensor

Her vil det blive vist hvordan Maxwells stresstensor kan være med til at beskrive kraften på en ladning.

Man betragter hvilke kræfter der virker på en mængde ladninger fordelt over et volumen  $V$ . Den samlede kraftpåvirkning er givet ved at summere Lorentzkraften op for ladningsfordelingen. Hvis nu ladningsdensiteten er  $\rho$  kan dette udtrykkes

$$\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho d\tau = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) d\tau. \quad (\text{B.1})$$

Denne måde at beskrive Lorentzkraften på er nemmere at forholde sig til, da man slipper uden om at betragte punktladninger, og i stedet ser på en rumlig ladningsfordeling.

Kraften pr. enhedsvolumen kan skrives som

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (\text{B.2})$$

Dette kan udtrykkes alene ved det elektriske og magnetiske felt. Dette sker ved at eliminere  $\rho$  og  $\vec{J}$  fra ligning (B.2). Ved at benytte ligning (A.1) og (A.4) kan (B.2) skrives som

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}. \quad (\text{B.3})$$

Nu er

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) + \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (\text{B.4})$$

Ved at benytte Faradays lov (A.3) der er givet ved:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (\text{B.5})$$

kan ligning (B.4) omskrives til

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}). \quad (\text{B.6})$$

Det vil sige at (B.2) kan omskrives til

$$\vec{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (\text{B.7})$$

For at gøre dette udtryk mere symmetrisk kan man addere leddet  $(\nabla \cdot \vec{B})\vec{E}$ , da  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  betyder dette ikke noget.

Det kan vises ved gennemregning, at der generelt gælder, at:

$$\begin{aligned}\nabla(E^2) &= 2(\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} + 2\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \Leftrightarrow \\ \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) &= \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}.\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

Da dette er en generel sætning er det samme opfyldt for  $\vec{B}$ . Derfor kan den oprindelige ligning (B.2) skrives som:

$$\begin{aligned}\vec{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}] \\ - \frac{1}{2}\nabla\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}).\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

Dette er ikke det mest overskuelige udtryk, men det kan omskrives ved hjælp af Maxwells stresstensor, der er defineret på følgende måde:

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0}(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2).\quad (\text{B.10})$$

Indeksene  $i$  og  $j$  refererer til koordinaterne  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Det vil sige at stresstensen har ni elementer ( $\delta_{ij}$  kaldes Kronecker delta og er 1 når  $j = i$  og 0 når  $j \neq i$ ). Da  $\mathbf{T}$  er en matrix vil prikproduktet mellem en vektor og stresstensen give en vektor.

Specielt vil divergensen af  $\mathbf{T}_j$  være:

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_j = \epsilon_0[(\nabla \cdot \vec{E})E_j + (\vec{E} \cdot \nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \vec{B})B_j + (\vec{B} \cdot \nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2]\quad (\text{B.11})$$

Da tensoren beskriver kraften pr. areal vil divergensen altså beskrive kraften pr. volumen, hvilket var det der skulle bestemmes. Det vil sige at ligning (B.2) kan skrives ved hjælp af divergensen af Maxwells stresstensor. Her ved fås:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}).\quad (\text{B.12})$$

Det sidste led kan omskrives ved hjælp af Poyntingvektoren, der er defineret ved  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$ . Poynting vektoren er karakteriseret ved at være energien per tid, per enhedsareal transporteret af det elektromagnetiske felt. Specielt er  $\vec{S} \cdot d\vec{a}$  energien pr. tid gennem en infinitesimal overflade  $d\vec{a}$  også kaldet energifluksen. Det vil sige, at (B.12) kan skrives som:

$$\vec{f} = \nabla \cdot \vec{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}.\quad (\text{B.13})$$

Den samlede kraft på ladningerne indenfor volumen  $V$  kan da udtrykkes som:

$$\vec{F} = \oint_S \mathbf{T} \cdot d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau.\quad (\text{B.14})$$

Det første led fås ved at benytte divergensteoremet. Det interessante er, at hvis systemet ikke ændrer sig i tid, eller mere præcist når  $\int \vec{S} d\tau$  er tidsuafhængig, er det kun det første led der bestemmer kraften. Det vil sige at den elektromagnetiske kraft kan udtrykkes kun ved hjælp af stresstensen  $\mathbf{T}$  på den overflade der betragtes.

## C Computertegnede figurer

I forbindelse med figurer til projektet at vi brugt MATLAB® 5 til at regne og tegne. Vi vil i nærværende appendiks skrive lidt om vore overvejelser i forbindelse med dette.

### C.1 Numerisk løsning af Laplaces ligning

Afhænger potentialet af to variable vil Laplaces ligning i kartesiske koordinater se ud som

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Vi har løst Laplaces ligning, se ligning 3.5, numerisk til at finde potentialer. Ved at benytte middelværditeoremet er det muligt at finde harmoniske funktioner, der er løsninger til Laplaces ligning.

For en harmonisk funktion vil der gælde at i et givent punkt  $(x, y)$  kan funktionsværdien findes som middelværdien af de omgivende punkter. Tegnes en lille cirkel omkring et punkt kan funktionsværdien i punktet findes som

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\text{cirkel}} V dl. \quad (\text{C.2})$$

Denne relation kan benyttes til at finde en numerisk løsning. I et gitter specificeres værdier for potentialet i randene, og i resten af gitteret laves et gæt for potentialet. Nu korrigeres alle gitterpunktens værdier ved at sætte værdien til middelværdien af de omkringliggende punkter. Denne beregning gentages et stort antal gange og potentialerne vil begynde at »sætte sig«. Efter en række iterationer vil ændringerne mellem to gennemregninger være lille.

Der kan laves feltliniediagrammer ud fra de numerisk beregnede potentialer. Langs ækvipotentialerne tegnes ortogonallinier som stiplede linier. Feltlinierne har vi indtegnet som såkaldte »strømningslinier« og efterfølgende sat retningspile på. Strømningslinier gå i retning af potentialets gradient. Strømningslinier startes fra et punkt. Omkring ækvipotentiallinier (der er repræsenteret med et punkt i det todimensionelle diagram) har vi fordelt strømningsliniernes startpunkter ligeligt på en lille cirkel. I andre figurer har randene været ækvipotentialplaner (der er repræsenteret som linier i diagrammet). Feltlinietætheden skal være proportional med ladningdensiteten på pladen  $\sigma$ . Ladningstætheden er givet ved [Griffiths, 1999, side 123]

$$\sigma = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial n}, \quad (\text{C.3})$$

ændringen af potentialet i retning af normalen til ækvipotentiallinien  $\vec{n}$ .

Vi har sat de kritiske ækvipotentiallinier hvor feltlinier har skulle starte fra væk fra andre elementer i systemet. Således har vi kunne antage at liniætætheden er konstant. Denne taktik er valgt af programmeringsmæssige årsager.

# Litteratur

- Becker, R. [1964]. *Electromagnetic Fields and Interactions*, Dover Publications, Inc. New York.
- Bridgeman, P. W. [1958]. *The Logic of Modern Physics*, New York : Macmillan.
- Carnap, R. [1939]. *Foundations of Logic and Mathematics*, The University of Chicago Press, Ltd., London.
- Cat, J. [2001]. On understanding: Maxwell on methods of illustration and scientific metaphor, *Stud. Hist. Mod. Phys.* **32**(3): 395–441.
- Center for Didaktik Og Metode Udvikling, C. [2000]. Uddannelsesreformer på DTU, *Technical report*, DTU.
- Christiansen, P. V. [1990]. *Tegn Og Kvanter*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.
- Cross, R. C. [1989]. Magnetic lines of force and rubber bands, *American Journal of Physics* **57**(8): 722–725.
- Crummett, W. P. & Western, A. B. [1994]. *University Physics - Models and Applications*, Wm. C. Brown Publishers.
- Dolin, J. [2002]. *Fysikfaget I Forandring*, PhD thesis, IMFUFA.
- Epstein, L. C. & G.Hewitt, P. [1981]. *Thinking Physics*, Insight press.
- Feynman, R. [1989]. *The Feynman Lectures on Physics: Commemorative Issue*, Vol. II, Allan M. Wylde.
- Ford, K. W. [1972]. *Classical and Modern Physics*, Xerox Corporation.
- Frank, P. [1969]. *Foundations of Physics*, The University of Chicago Press, Ltd., Chicago.
- Freeman, T. E. [1995]. One-, two-, or tree-dimensional fields?, *American Journal of Physics* **63**(3): 273–274.
- Friedman, M. [1988]. *Theories of Explanation*, Oxford University Press, Inc.
- Griffiths, D. J. [1999]. *Introduction to Electrodynamics*, third edn, Prentice-Hall International (UK) Limited, London.
- Halliday, D., Resnick, R. & Krane, K. S. [1992]. *Physics*, John Wiley & Sons, Inc.

- Hansen, H. M. [1967]. *Lærebog I Fysik*, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, København.
- Herrmann, F. [1989]. Energy density and stress: A new approach to teaching electromagnetism, *American Journal of Physics* **57**(8): 707–714.
- Herrmann, F., Hauptmann, H. & Suleder [2000]. Representations of electric and magnetic fields, *American Journal of Physics* **68**(2): 171–174.
- Horst, S. [1999]. *Illustrationens kraft - visuel formidling af fysik*, Master's thesis, Roskilde Universitetscenter.
- Iding, M. K. [1997]. How analogies foster learning from science texts, *Instructional Science* **25**: 233–253.
- IMFUFA [1999]. OPGAVESAMLING - bredde-kurus i fysik 1976-1999. tekst nr. 370/99.
- Jacobsen, A., Rump, C., Clemmensen, T. & May, M. [1999]. Kvalitetsudviklingsprojektet "faglig sammenhæng- hovedrapport, *Technical report*, DTU.
- Jakobsen, A., Rump, C., Lauvås, P., Clemmensen, T., May, M. & Meleschko, A. [1998]. Udvikling af modeller for kvalitetsudvikling på kursusniveau ved brug af tests og kollegavejledning.
- Keller, F. J., Gettys, W. E. & Skove, M. J. [1993]. *Physics - Classical and Modern*, McGraw-Hill, Inc.
- Ohanian, H. C. [1989]. *Physics*, second expanded edn, Penguin Boks Canada Ltd.
- Thorley, N. R. & Stofflett, R. T. [1996]. Representation of the conceptual change model in science teacher education, *Science Education* **80**: 317–339.
- Törnkvist, S., Peterson, K. A. & Tranströmer, G. [1993]. Confusion by representation: On students's comprehension of the electric field concept, *American Journal of Physics* **61**(4): 335–338.
- Wessel, L. [1998]. De lærer at sno sig, *Ingeniøren* **2**(26): 2.
- Wolf, A., Hook, S. J. V. & Weeks, E. R. [1996]. Electric field line diagrams don't work, *American Journal of Physics* **64**(6): 714–724.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: <http://mmf.ruc.dk>  
eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: [imfufa@ruc.dk](mailto:imfufa@ruc.dk).

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG  
Specialrapport af: Stine Korreman  
Vejleder: Dorte Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters  
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity  
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM  
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids  
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University  
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose  
- et projekt om matematisk modellering  
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne  
Første modul fysikprojekt  
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,  
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup  
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline  
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -  
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry  
by: Mogens Niss
- 342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel  
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND  
AND SUPPLY
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE  
AF EL-PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG  
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97

Puzzles and Siegel disks  
by: Carsten Lunde-Petersen

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator  
Ph.D. Thesis  
by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-førstøvningsproces  
af: Sebastian Horst  
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller  
- en analyse af Den Danske Eulerske Model  
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger  
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact  
assessment for power plants in Denmark  
by: Stefan Krüger Nielsen  
project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i  
arbejdsmarkedssuddannelserne  
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredded-Kursus i Fysik 1976 - 1998  
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education  
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications  
by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almindelig matematikundervisning  
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

354/98 A Global Renewable Energy Scenario  
by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces  
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

- 356/98 Terrænmodellering  
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller  
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 Cayleys Problem  
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918  
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W.  
Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff  
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an  
Implementation in Cardiovascular Models  
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
- 
- 359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply  
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios  
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)
- 360/99 SYMMETRI I FYSIK  
En Meta-projekt-rapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants  
by: Bernhard Boos-Bavnbek, Kenro Furutani
- 362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen  
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss  
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION  
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen
- 364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik  
Integreret speciale i fysik og kommunikation  
af Sebastian Horst  
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjølup
- 365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context  
by: Tine Wedege
- 366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX  
og IMFUFA-LATEX  
af: Jørgen Larsen

- 367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property  
by: Bernhard Boos-Bavnbek
- 368/99 Kvartvejsrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF  
BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM  
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences  
by: Jacob S. Jalving  
Supervisor: Carsten Lunde Petersen
- 370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999  
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter  
tekst nr. 350/98
- 371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik  
undervisning  
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson  
Vejleder: Mogens Niss
- 372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:  
Udviklingshistorie og multipel opdagelse  
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen
- 373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu  
Theorem  
by: Bernhard Boos-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki
- 374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler  
Specialeafhandling af: Anders Marcussen  
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen
- 375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-  
1914  
Historiespeciale af Henrik Andressen, cand.mag. i Historie og Matematik
- 376/99 Universality of AC conduction in disordered solids  
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder
- 377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?  
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 
- 378/00 Solar energy preprints:  
1. Renewable energy sources and thermal energy storage  
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system  
by: Bent Sørensen



- 389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model  
By: Mogens Niss  
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 
- 390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001  
Projektlæder: Bent Sørensen  
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System<sup>#</sup>: Thomas Engberg Pedersen<sup>#</sup>, Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2<sup>#</sup>: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen<sup>#</sup>, Bent Sørensen<sup>#</sup>  
<sup>#</sup>Indtil 1/1-2000 Elkraft, <sup>#</sup> fra 1/5-2000 Cowi Consult  
<sup>#</sup>Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, <sup>#</sup> fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.  
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram
- 391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet 3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boyé, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inat Castella, Jan Lauridsen, Maria Gatzsche, Ditte Mandøe Andreasen  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS  
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)  
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT  
by: Bent Sørensen.
- 393/01 Hilberts matematikfilosofi  
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS  
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)  
PART II: PHYSICS PROPER  
by: Bent Sørensen.
- 395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!  
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg  
Vejleder: Tine Wedege
- 396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!  
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg  
Vejleder: Tine Wedege

- 379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING  
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne  
En tredjeseesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse  
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen  
Vejleder: Jørgen Larsen
- 380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN  
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovascularsystem  
af: Gitte Andersen (3. moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne  
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i vokseuddannelse  
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege
- 382/00 Den selvundvigende vandring  
Et matematisk professionsprojekt  
af: Martin Niss, Arnold Skimminge  
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen
- 383/00 Beviser i matematik  
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff  
Vejleder: Mogens Niss
- 384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model  
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder  
Supervisor: Jeppe C. Dyrre
- 385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces  
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)  
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski
- 386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?  
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup  
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts  
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel  
et 2. moduls matematik modelprojekt  
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss  
Vejleder: Jesper Larsen

- 397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phosphoridobbeltag  
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann  
Vejleder: Dorte Posselt
- 398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)  
Af: Mogens Brun Heefelt
- 399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning  
Ph.D Thesis by: Johan Litner  
Supervisor: Mogens Niss
- 400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps  
By: Carsten Lunde Petersen
- 401/01 Finite Type Arithmetic  
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation  
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen  
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen
- 402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse  
- udvikling af et kursus  
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen
- 403/01 Generaliseringer i integralteorien  
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet  
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre  
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen
- 404/01 "Mere spredt fægting"  
Af: Jens Højgaard Jensen
- 405/01 Real life routing  
- en strategi for et virkeligt vrp  
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jogvan Martin Poulsen og Neshihan Saglanmak  
Vejleder: Jørgen Larsen
- 406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik  
Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001  
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg
- 407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow  
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

- 408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations  
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang
- 409/02 Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy  
- et studie af kombinatorer, permutationer samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning, før Gauss, Abel og Galois  
Videnskabsfagsprojekt af: David Heiberg Backchi, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Neshihan Saglanmak  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 410/02 2 projekter om modellering af influenzaepidemier  
Influenzaepidemier- et matematisk modelleringsprojekt  
Af: Claus Jørgensen, Christina Lohfert, Martin Mikkelsen, Anne-Louise H. Nielsen  
Vejleder: Morten Blomhøj  
Influenza A: Den tilbagevendende plage – et modelleringsprojekt  
Af: Beth Paludan Carlsen, Christian Dahmcke, Lena Petersen, Michael Wagner  
Vejleder: Morten Blomhøj
- 411/02 Polygonformede hydrauliske spring  
Et modelleringsprojekt af: Kåre Stokvad Hansen, Ditte Jørgensen, Johan Rønby Pedersen, Bjørn Toldbod  
Vejleder: Jesper Larsen
- 412/02 Hopfbifurkation og topologi i væskestrømning – en generel analyse samt en behandling af strømmingen bag en cylinder  
Et matematisk modul III professionsprojekt af: Kristine Niss, Bo Jakobsen  
Vejledere: Morten Brøns, Johnny Ottesen
- 413/03 "Elevernes stemmer" Fysikfaget, undervisningen og lærerroller, som eleverne opfatter det i det almene gymnasium i Danmark  
Af: Carl Angell, Albert Chr. Paulsen
- 414/03
- 415/03 FYSIKFAGET I FORANDRING Læring og undervisning i fysik i gymnasiet med fokus på dialogiske processer, autenticitet og kompetenceudvikling  
Ph.d.-afhandling i fysikdidaktik af: Jens Dolin