

TEKST NR 411

2002

Polygonformedede hydrauliske spring

- Et modelleringsprojekt -

**Kåre Stokvad Hansen,
Ditte Jørgensen,
Johan Rønby Pedersen og
Bjørn Toldbod**

Vejleder: Jesper Larsen

TEKSTER fra

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA · Roskilde Universitetscenter · Postboks 260 · DK-4000
Roskilde · tlf.: 46742263 · fax: 46743020 · e-mail:
imfufa@ruc.dk

Kåre Stokvad Hansen, Ditte Jørgensen, Johan Rønby Pedersen og
Bjørn Toldbod. Vejleder: Jesper Larsen. Polygonformede
hydrauliske spring - et modelleringsprojekt.

IMFUFA tekst nr. 411/2002 79 sider

ISSN 0106-6242

Abstract:

Når en væskestråle rammer bunden i et fladbundet kar, løber væsken væk fra strålens centrum langs karetets bund. I en karakteristisk afstand fra væskestrålens centrum sker et pludseligt spring i væskehøjden, således at der tegner sig en cirkel rundt om væskestrålen i bunden af karet. Indenfor denne cirkel er vandstanden markant lavere end udenfor. Dette stabile spring i vandstanden kaldes det hydrauliske spring. I 1995 blev polygonformede hydrauliske spring opdaget i forbindelse med udarbejdelsen af et bachelorprojekt[4]. I forlængelse af denne overraskende opdagelse, blev i 1997 på Niels Bohr instituttet opstillet en matematisk model, som havde til formål at klargøre hvilke fysiske mekanismer, der ligger til grund for opståelsen af de polygonformede spring. Modellen bygger på en ide om, at en kombination af en linespænding over springet og en balance mellem de ydre, vandrette, radiale kræfter på springet er de styrende mekanismer i eksistensen af polygonformede spring. Den matematiske del af denne model er ikke beskrevet detaljeret i litteraturen.

Denne rapport opstiller og analyserer den eksisterende model med henblik på at afdække, om eksistensen af polygonformede hydrauliske spring kan forklares alene ud fra de mekanismer, modellen bygger på. Rapporten konkluderer, at modellen er i stand til at afspejle en række kvalitative egenskaber ved det hydrauliske spring. Linespændingen er dog ikke begrundet i et fundamentalt fysisk princip, og det er derfor ønskværdigt at opstille en model for formen af springet, der er bedre funderet i fysiske antagelser.

I rapporten opstilles derfor ligningerne for en ny fysisk model, der blandt andet bygger på massebevarelse. Et specialtilfælde af den nye model analyseres og de to modellens fysiske principper diskuteres. Den foreløbige analyse af den model indikerer at denne er et skridt på vejen til en bedre model for de polygonformede spring.

Forord

Denne Imfufatekst er en revideret udgave af en 1. moduls projektrapport på matematikoverbygningen på RUC udarbejdet i forårssemesteret 2002. I den oprindelige projektrapport, som bærer titlen 'Modellering af det hydrauliske spring' opstilles og analyseres en allerede eksisterende model for polygonformede hydrauliske spring. Modellen, som oprindeligt er opstillet af CATS-gruppen på Niels Bohr Institutet og som ikke tidligere er blevet beskrevet detaljeret i litteraturen, har til formål at afdække de styrende mekanismer for opståelsen af polygonformede hydrauliske spring. Den tager udgangspunkt i en balance mellem de radiale kræfter på springet samt en ide om en såkaldt linespænding hen over springet. Ved den matematiske repræsentation af den fysiske model opstår en problemstilling, der kaldes et variationsproblem. I den forbindelse præsenteres i rapporten et redskab kaldet variationsregning, som tillader en løsning af et sådant problem.

Rapportens diskussion og analyse resulterede i en række kritikpunkter af den eksisterende models fysiske troværdighed samt en skepsis over for modellens evne til at afdække de polygonformede springs styrende mekanismer. Der opstod derfor i gruppen et brændende ønske om at opstille en alternativ model med et bedre fysisk fundament.

Den nye model, hvis ligninger opstilles og beskrives i rapporten, er en modificeret udgave af den eksisterende model. Modellen bibeholder den radiale kraftbalance, mens den postulerede linespænding udskiftes med en beskrivelse af den tangentielle væskestrømning i springet. På grund af tidspres indeholder den oprindelige rapport ingen matematisk analyse af den nye model.

I forhold til den 'gamle' projektrapport indeholder denne tekst en analyse af et specialtilfælde af modellen, samt en optimering af de i rapporten anvendte numeriske metoder. Analysen viser, at den nye model er i stand til at fremstille løsninger, der er i overensstemmelse med eksperimentelt observerede spring, som den gamle model ikke kan forudsige. I øvrigt illustrerer den nye model umiddelbart de ønskede sammenhænge mellem de fysiske parametre og de fremkomne polygoner. I den forbindelse skal det nævnes, at analysen af modellen på ingen måde er fuldstændig, men de foreløbige resultater tyder på, at den nye model er et skridt i retning af en bedre model for de polygonformede spring samt en bedre forståelse af fænomenet.

I forbindelse med arbejdet ønsker vi at takke Tomas Bohr (DTU) for at have taget sig tid til at fortælle om de eksperimentelle observationer og svare på vores spørgsmål, samt Hans Bruun Nielsen (DTU) for hjælp og inspiration til optimering af vores MatLab-koder. Til sidst ønsker vi at takke vores vejleder Jesper Larsen (IMFUFA) for god vejledning samt hjælp med opstilling og analyse af den eksisterende såvel som den nye model.

Indhold

1	Indledning	9
1.1	Det hydrauliske spring	9
1.2	Matematiske modeller	10
1.3	Problemformulering	11
1.4	Rapportens opbygning	12
2	Eksperimentelle observationer	13
3	Den fysiske modellering	17
3.1	Kræfterne på hvirvlen	17
3.1.1	Den indadrettede kraft	17
3.1.2	Den udadrettede kraft	18
3.1.3	Kraftbalancen	20
3.2	Liniespændingen	21
3.3	Opsummering	22
4	Den matematiske modellering	23
4.1	Variationsregning	23
4.2	Opstilling af differentiallygningen	24
4.3	Polygoner og de tilhørende funktioner	25
4.4	Konstanter i differentiallygning	26
4.5	Opstilling af integraler	29
4.6	Løsning af ligningssystem	32
5	Resultatbehandling	33
5.1	A-området	34
5.2	C-området	41
6	Vurdering af modellen	43
7	Alternativ fysisk model	45
7.1	Massebevarelsen over hvirvlen	45
7.2	Kraftbalance	48
7.3	Opstilling af differentiallygning	49
7.4	Analyse af et specialtilfælde	51
8	Konklusion	55
9	Perspektivering	57

A	Variationsregning	59
A.1	Indledende definitioner	59
A.1.1	Funktional	59
A.1.2	Variation af funktion	60
A.2	Eulers ligning	60
A.2.1	Særligt fælde	62
A.3	Variationsregningens fundamentallemma	63
A.4	Variation af funktional	64
A.4.1	Stationær værdi	65
A.5	Bibetingelse	65
B	Afgrænsning af differentialligningens konstanter	69
C	MatLab-kode	77
	Litteratur	81

1 Indledning

Denne rapport er resultatet af et modelprojekt på matematikoverbygningen ved RUC. I et modelprojekt skal man beskæftige sig med et eksempel på en matematisk model for noget, der ikke er matematik. Man kan enten vælge at behandle en allerede eksisterende model eller selv at opbygge en.

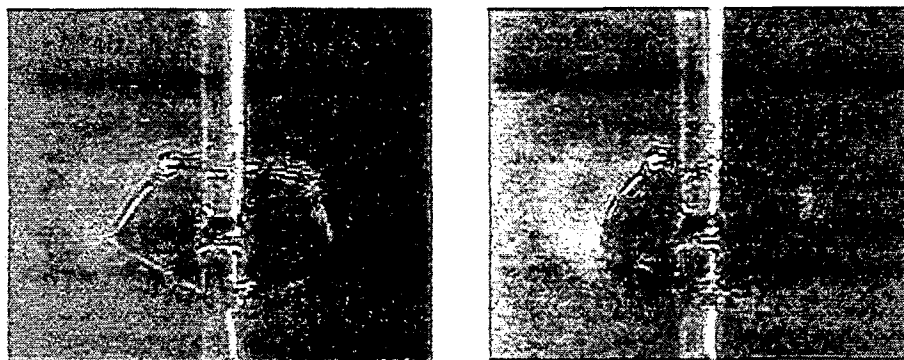
Vores udgangspunkt ved projektstarten var, at det kunne være spændende at beskæftige sig med modellering indenfor det fysiske felt væskedynamik. Der var dog ingen af os, der havde særlige forudsætninger indenfor dette. Vi havde derfor svært ved at vurdere, hvilke af vores ideer til projektemner, der var realistiske at give sig i kast med, når vi stort set skulle starte fra bunden. Vi kontaktede derfor Jesper Larsen, som foreslog, at vi kunne beskæftige os med modellering af det hydrauliske spring (DHS).

1.1 Det hydrauliske spring

Når man lader vand løbe ned i en vask, ser man, at der indstiller sig en ligevægt. Indenfor en radius r omkring vandstrålen vil vandstanden være lav, mens vandstanden i afstanden r vil forøges pludseligt. Dette spring i vandstanden kaldes det hydrauliske spring. Fænomenet kan observeres for andre væsker end vand. En af de mere kuriøse egenskaber ved springet er, at det under visse omstændigheder antager polygonform. Dette blev opdaget af A.E. Hansen og A. Haaning, som skrev et bachelorprojekt om fænomenet ved NBI i 1995 [4]. Den forsøgsopstilling, der blev benyttet, består af en vandret glasplade med en justerbar ydre kant. Væsken løber ud på pladen fra en dyse og ud over kanten, når den når en vis højde.

Det viser sig, at størrelsen og formen af DHS er afhængig af fire parametre: Højden på den ydre kant (og dermed højden af væsken udenfor springet, som kaldes h_y), den totale væskeflux Q , faldhøjden fra dysen h_f og væskens viskositet ν . Hvis man undersøger en væske med lav viskositet som for eksempel vand, vil formen af DHS altid være cirkulær. Men ved undersøgelser af væsker med en viskositet på ca. 10 gange vands, ændrer formen sig under de rette omstændigheder, og der opstår regulære polygoner med op til 14 kanter. Eksempler på disse ses på figur 1.1. Denne observation er på sin vis kontraintuitiv, fordi den anvendte forsøgsopstilling er fuldstændig cylindersymmetrisk, hvilket væskestrømningen på pladen umiddelbart også burde være. Denne egenskab ved væskestrømningen gør det hydrauliske spring til et spændende fænomen at modellere.

DHS er et velegnet problemfelt for os, fordi der på Niels Bohr Institutet (NBI) allerede er forsket i fænomenet og udarbejdet matematiske modeller, som kan



Figur 1.1 Polygoner med hhv. 5 og 4 sider.

danne grundlag for projektet. På den anden side er DHS et tilpas eksotisk fænomen, da det ikke er fuldstændigt gennemtreknet i litteraturen. Der er masser af muligheder og svagheder i de eksisterende modeller at tage fat på.

Det skal nævnes, at den model, vi beskæftiger os med, ikke er beskrevet i detaljer nogen steder. Dens hovedprincipper og resultater beskrives kortfattet i [3], hvor fokus ligger på et eksperimentelt studie af springet. Selvom vi gennemgår en allerede eksisterende modelleringsproces, er der altså langt fra tale om et litteraturstudie.

1.2 Matematiske modeller

En matematisk model er en beskrivelse af et ikke-matematisk objekt. Modellen gør brug af matematiske redskaber. Formålet med at opstille en matematisk model kan være at opnå en beskrivelse af objektet, der gør det muligt at forudsige konsekvensen af en hændelse eller at opnå en bedre forståelse af objektet. Formålet kan også være at optimere et produkt på baggrund af statistiske overvejelser eller viden om det område, man ønsker at modellere. Det problematiske i at modellere et objekt er, at modellen på den ene side skal afspejle objektets natur, og på den anden side skal den være så simpel, at den kan fortolkes. Arbejdsprocessen, man skal igennem for at konstruere en model af et objekt, er beskrevet i det følgende.

Modellens formål, dvs. de egenskaber ved det ikke-matematiske objekt modellen skal kunne beskrive, formuleres i en **problemformulering**, der så danner udgangspunkt for modelleringsprocessen. Det er sjældent muligt at beskrive et komplekst objekt matematisk, og det er derfor nødvendigt at foretage en **systemafgrænsning**. Derved opnår man en struktureret og ofte simplificeret beskrivelse af virkeligheden, så problemet beskrives inden for nogle rammer, hvor det er muligt at modellere det. Objektet afgrænses altså til et ideelt system, som for modellens troværdigheds skyld skal være tilpas tæt på virkeligheden, indenfor hvilken problemstillingen betragtes. Det er altså vigtigt, at afgrænsningen bliver foretaget på baggrund af indsigt i det modellerede objekt, da det er ønskværdigt kun at negligere de forhold, der er uvæsentlige for problemets

opførsel. Systemafgrænsningen og **matematiseringen** af systemet er tæt knyttet, og disse processer gennemgås ofte sideløbende. Objektet skal nemlig kunne beskrives matematisk efter afgrænsningen, hvorfor det ofte er nødvendigt at tilpasse systemet efter mulighederne for en matematisk repræsentation. Matematiseringen resulterer i en model af objektet i det afgrænsede, matematiske system. Modellen vil typisk være et ligningssystem. Derefter udføres en **matematisk analyse af ligningssystemet**, der sjældent kan løses analytisk og derfor analyseres numerisk, f.eks. ved hjælp af computersimulering. Modellens resultater **tolkes** da i forhold til det oprindelige objekt. Hvilke egenskaber ved det modellerede objekt belyser modellen? Efter endt modellering foretages en **validitetsvurdering** af modellen som helhed. Dette indebærer, at man afklarer, i hvilket omfang modellen kan beskrive virkeligheden. Validitetsvurderingen kræver en kritisk vurdering af modelleringsprocessens skridt og afgrænsninger.

Ovennævnte forløb sker typisk ikke trinvist, da de enkelte dele af processen er tæt knyttede. Opnås utilfredsstillende resultater for modellen må afgrænsningen, matematiseringen og de efterfølgende analyser revurderes og eventuelt omformuleres.

1.3 Problemformulering

Det motiverende spørgsmål for dette projekt er, hvorfor der opstår polygonformede hydrauliske spring. Dette spørgsmål ønskes besvaret gennem en matematisk modelleringsproces. Da det ikke er en detaljeret beskrivelse af væskestrømningen, vi ønsker at afdække, men de fysiske forholds indflydelse på springets form, vil det være naturligt at forsøge sig med en kvalitativ modelopbygning baseret på enkle principper.

Den allerede eksisterende model tager udgangspunkt i en ide om, at en kombination af en linespænding i springet og en balance mellem de ydre, vandrette, radiale kræfter på springet er de styrende mekanismer i eksistensen af polygonformede spring (se kapitel 3). Væskestrømningen i selve springet betragtes ikke i denne model.

Den alternative model, der opstilles i dette projekt, tager udgangspunkt i den måde, hvorpå væsken strømmer i springet. Modellen opbygges ud fra principperne om massebevarelse og en tangentiell trykkraftbalance i springet.

Formålet med de to modeller er det samme, nemlig at forsøge at afdække de styrende mekanismer for formen af springet og på den måde at opnå en bedre forståelse af dette.

Med udgangspunkt i de to modelleringsprocesser er vi nået frem til følgende problemformulering:

Kan eksistensen af polygonformede hydrauliske spring forklares alene ved en linespænding og en ydre kraftbalance på springet?

1.4 Rapportens opbygning

I første omgang har vi koncentreret os om at forstå og analysere en allerede eksisterende model af springets form. Modellen er udarbejdet af CATS-gruppen på NBI og er delvist beskrevet i Anders Marcussens speciale [3]. Modelarbejdet har resulteret i, at vi har opstillet en alternativ model, men langt størstedelen af vores arbejde med projektet har bestået i at gennemføre og forstå den allerede eksisterende modelleringsproces, hvilket også afspejles i vægtningen af de to dele af rapporten.

Som beskrevet i afsnit 1.2, består den indledende fase af modelleringsprocessen i at undersøge hvilken type objekt, der skal modelleres. Derfor indledes rapporten med en opsummering af hvilke eksperimentelle observationer, der er gjort af det hydrauliske spring. Af de egenskaber, der karakteriserer systemet, udvælges de forhold, der menes at være styrende for systemets opførsel. De ikke-styrende forhold fravælges for at forsimple beskrivelsen af systemet. På denne baggrund opstilles og forklares den fysiske model. Dette foregår i kapitel 3. Modellens fysiske problemstilling matematiseres ved hjælp af variationsregning, som præsenteres i kapitel 4. Variationsregningen tillader, at problemstillingen omformes til en differentiaalligning, der skal løses. Systemet analyseres herefter matematisk. Kapitlet redegør for hvilken type funktion, der tilfredsstiller den opstillede differentiaalligning, således at løsningerne giver fysisk mening. Denne undersøgelse leder frem til den numeriske løsning, der analyseres i kapitel 5. Analysen af-dækker systemets kvalitative egenskaber, dvs. hvordan systemet ifølge modellen opfører sig, når der justeres på de indgående parametre. I samme kapitel sammenlignes modellens resultater med de eksperimentelle. Denne sammenligning leder frem til en vurdering af modellens validitet. Validitetsvurderingen er at finde i kapitel 6, hvor hele modelleringsprocessen vurderes. Her beskrives, hvilke kvaliteter og svagheder modellen har. På den baggrund opsummeres hvilke fysiske mekanismer, der kan være væsentlige at ændre eller tilføje ved opstillingen af en ny model. I kapitel 7 opstilles en ny model til beskrivelse af springets form. Den nye model, som er opstillet som følge af validitetsvurderingen af den eksisterende model, analyseres i et begrænset omfang.

Projektrapportens konklusion opsummerer de resultater, der er opnået i forhold til den opstillede problemformulering. Endelig følger en perspektivering, hvori der reflekteres over læringsprocessen i projektføreløbet.

2 Eksperimentelle observationer

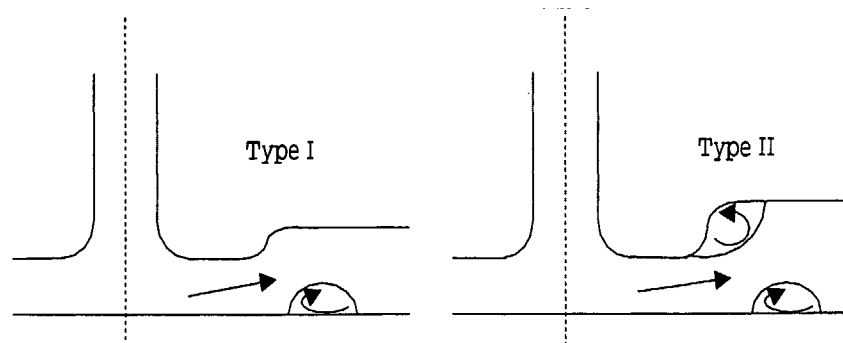
I det følgende gives en kvalitativ beskrivelse af det hydrauliske springs egenskaber og opførsel. Denne beskrivelse er i al væsentlighed en opsummering af de erfaringer og observationer, som er beskrevet i [3]. Det hydrauliske spring vil kun blive betragtet, når det er i en stabil tilstand, svarende til, at væskestrømningen er stationær.

Når der i det følgende angives positioner i opstillingen, benyttes polære koordinater. Der defineres et koordinatsystem med nulpunkt der, hvor væskestrålen fra dysen rammer glaspladen (altså i midten af det cirkulære nedslagsområde) med z-akse op gennem væskestrålen og med glaspladens overflade som xy-plan. Vinklen θ defineres som vinklen mellem x-aksen og projektionen af stedvektoren for den position i opstillingen, som betragtes, på xy-planen.

I forsøgsopstillingen er der som nævnt i indledningen, fire parametre, der kan varieres: Væskens viskositet ν , væskens faldhøjde h_f , den totale væskeflux Q og den ydre væskehøjde h_y . Empirisk er det fundet, at polygoner ikke kan opstå, hvis væskens viskositet er lav. Eksempelvis kan de ikke opstå i en køkkenvask med vand. Derfor har den væske (ethylen-glycol), som Anders Marcussen bruger i sine eksperimenter, en viskositet på cirka 10 gange vands ($1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). Polygonerne er kun stabile, når h_f er mellem en og fem cm, og deres afhængighed af faldhøjden er lille. Antallet af hjørner i polygonerne stiger, hvis den totale flux øges og resten af parametrene fastholdes.

Ved små h_y er der hvirveldannelse ved glaspladen lige under selve springet (se figur 2.1 til venstre). Øges den ydre væskehøjde, bliver springet stejlere og stejlere for til sidst at 'få overbalance'. Denne overbalance består i, at væsken, som så at sige står lodret i springet før overbalancen, falder ind over det tynde væskelag foran springet i en roterende hvirvel (se figur 2.1 til højre). Overbalancen opstår ved en helt bestemt h_y , som vil blive betegnet den kritiske højde h_k . Den indre højde h_i ændres dog stort set ikke. Anders Marcussen opdeler på baggrund af denne observation det hydrauliske spring i to typer: En med overbalancen og en uden, som han benævner spring af hhv. type I og type II.

En mulig forståelse af overbalancen kan opnås ved at sammenligne springet med en bølge i havet. Der er ikke noget materiale, der bevæger sig med en havbølge. Den er blot en forplantning af en cirkulation af vandpartiklerne, som udbreder sig med bølgens hastighed. I bølgens referenceramme farer en masse vandpartikler altså forbi bølgen, mens de bevæger sig periodisk op og ned, så f.eks. sporet af en partikel i vandoverfladen netop tegner bølgens kontur. Bortset fra at vandpartiklerne ikke bevæger sig ned igen efter at have passeret springet, vil en iagttagelse af det hydrauliske spring af type I i springets referenceramme vise præcist det samme. I dette tilfælde er det blot væsken og ikke bølgen, der bevæger sig i forhold til omgivelsernes referenceramme. Når en bølge bliver



Figur 2.1 Model for væskens bevægelsesmønster. Når den ydre væskehøjde er større end en kritisk højde, observeres type II spring.

højere og højere, får den på et tidspunkt overbalance, og en hvirvel, som godt kan minde om den, der dannes i type II, opstår foran bølgen.

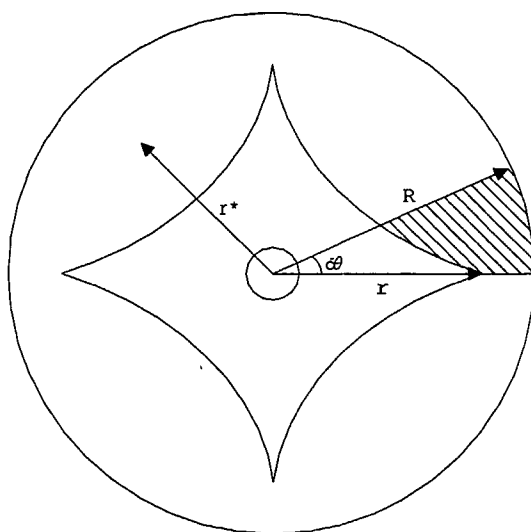
Det er i type II tilstanden, dvs. for ydre væskehøjder større end den kritiske, at polygonformerne kan opstå. I et højdeinterval efter den kritiske højde, altså lige efter overgangen fra type I til type II spring, er det iagttaget, at springet stadig er cirkulært, men at væskeoverfladen er fluktuerende (ikke-stationær). Efter dette interval følger et interval, hvor polygoner med op til 14 hjørner er stabile. Når væskehøjden øges yderligere, falder antallet af hjørner i de polygoner, der er stabile i den givne væskehøjde. Samtidig bliver springet mindre for til sidst at forsvinde helt, når væsken lukker sig om væskestrålen fra dysen. Det er observeret, at for et givent h_y kan flere forskellige polygoner være stabile, f.eks. kan polygoner med to til fem kanter eksistere for samme ydre væskehøjde.

Vinklen i polygonernes hjørner er konstant for et fastholdt h_y , hvilket er muligt, fordi polygonernes sider buer. For en ydre væskehøjde, hvor f.eks. en 4-kant med lige sider er stabil, kan en 3-kant med udadbuende sider eller en 5-kant med indadbuende sider også være stabile.

Når springet er polygonformet, iagttages en omsluttende cirkel med radius R , som definerer hvirvlens ydre grænse. Springet har altså en vis θ -afhængig, radial bredde, der afgrænser hvirvlen og er givet ved $R-r(\theta)$ (se figur 2.2). Af udtrykket ses, at bredden er mindst, når r er størst, dvs. hvirvlen i overfladen af springet er størst midt på polygonsiderne og mindst i hjørnerne.

Størrelsen y defineres som forholdet mellem R og r , så $y(\theta) = \frac{r(\theta)}{R}$. y benyttes senere i den matematiske beskrivelse af springet.

En sidste interessant iagttagelse er gjort i forbindelse med væskens transport gennem og væk fra springet. Ved at drysse glimmer i væsken, er det observeret, at der foregår en tangentiell væsketransport inde i hvirvlen, og at der som følge deraf opstår såkaldte væskestråler i polygonernes hjørner. Hovedparten af væsken forsvinder fra springet gennem disse. I den forbindelse er det ikke undersøgt, hvor vidt væsketransporten indenfor springet er helt radial og uniformt fordelt.



Figur 2.2 En skitse af det hydrauliske spring set fra oven. Det skraverede areal er et udsnit af hvirvlen.

3 Den fysiske modellering

I dette kapitel udføres den fysiske del af modelleringsprocessen, som leder frem til en model af formen af hydrauliske spring af type II.

3.1 Kræfterne på hvirvlen

At opstille en model for DHS ved at betragte bevægelsesligninger for væskestrømmen (Navier-Stokes ligning) er uhyre komplekst. Dels er der separation i springet (hvirvlerne ved bunden og i toppen af springet), og dels er den førnævnte væsketransport i den øvre hvirvel i springet meget kompliceret.

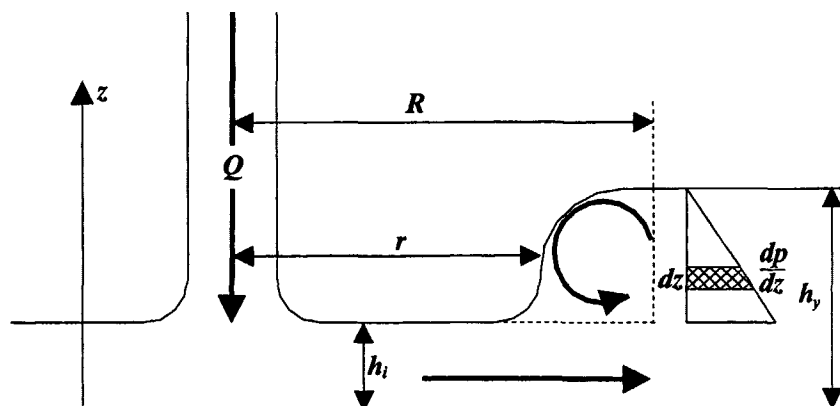
Den opstillede model for DHS er derfor baseret på et mere simpelt princip, nemlig en betragtning af de ydre, vandrette kræfter, som virker på hvirvlen i overfladen af DHS. Derved opnås en simplere problemstilling end den, bevægelsesligningerne for væskestrømmen kunne give. I denne modellering af det hydrauliske spring ses således bort fra strømninger i selve hvirvlen.

En idealiseret udgave af overfladehvirvlen, som ved et tværsnit har form som et rektangel, betragtes. Denne har en lodret side, der vender ud mod den ydre væske, og en vandret bund, hvorunder væsken strømmer. Dette ses på figur 3.1 (stiplede linier).

Forskellen mellem den indre og ydre væskehøjde forårsager en indadrettet kraft på hvirvlen. Da hvirvlen ikke flytter sig, må der være en udadrettet kraft, som modsvarer den indadrettede kraft. Denne kraft antages at opstå som følge af den viskøse gnidning mellem bunden af hvirvlen og overfladen af den væske, der strømmer ind under hvirvlen i udadgående retning. I det følgende udledes udtrykkene for disse kræfter og kraftbalancen mellem dem opstilles.

3.1.1 Den indadrettede kraft

Trykket i væsken antages at være hydrostatisk. Derfor er trykket i alle retninger i højden z lig med det vertikale tryk, som udtrykkes ved $p(z) = \rho g(h_y - z)$. Da trykket er en kraft per areal, er den indadrettede kraft virkende på et udsnit af hvirvlens ydervæg med højden dz , placeret i højden z , givet ved udsnittets vertikale areal ganget med $p(z)$. Den samlede indadrettede kraft på hvirvlen er givet ved integralet af dette udtryk over forskellen i væskehøjden på hvirvlens inder- og yderside, altså fra h_i til h_y . Hvirvlens yderside antages at være en cylinder med radius R og højde dz , og arealet af denne er derfor $2\pi R dz$.



Figur 3.1 Tværsnit af det hydrauliske spring med angivelser af de definerede størrelser. De stiplede linier omkring hvirvlen markerer idealiseringen af dens form. Trekanten til højre illustrerer det stigende tryk ned gennem væsken.

Kraften på hvirvlen er således

$$\begin{aligned} F_{ind} &= 2\pi R \int_{h_i}^{h_y} \rho g (h_y - z) dz \\ &= 2\pi R \left[\rho g (h_y z - \frac{1}{2} z^2) \right]_{h_i}^{h_y} = 2\pi R \rho g \left(\frac{1}{2} h_y^2 - h_i h_y + \frac{1}{2} h_i^2 \right) \\ &= \pi R \rho g (h_y - h_i)^2 \end{aligned}$$

Under antagelse af, at væsken kan opfattes som værende hydrostatisk, er dette altså et udtryk for den totale indadrettede trykkraft på hvirvlen.

Den kraft, der virker på et vinkeludsnit $d\theta$ af hvirvlen, er da

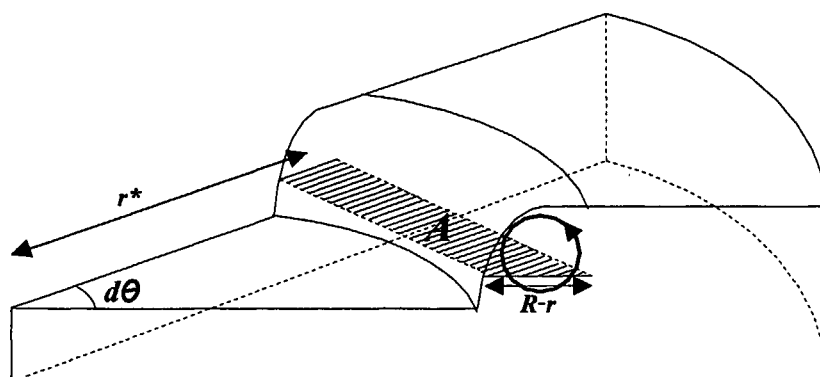
$$dF_{ind} = \frac{R\rho g}{2} (h_y - h_i)^2 d\theta \quad (3.1)$$

3.1.2 Den udadrettede kraft

Når en væske strømmer hen over en plan flade, som det er tilfældet i opstillingen, har væsken i overfladen en hastighed, der afhænger af væskehøjden, mens væsken helt nede ved bundfladen er ubevægelig som følge af den såkaldte no-slip betingelse. Det betyder, at der op igennem væsken forekommer en hastighedsgradient $\frac{du}{dz}$.

I det følgende antages, at denne hastighedsgradient er konstant (dvs. uafhængig af z), således at hastigheden op gennem væsken vokser proportionalt med højden.

På grund af den lodrette hastighedsgradient vil to vandrette væskelag, der ligger oven på hinanden, flyde med forskellig vandret hastighed og derfor gnide mod hinanden. Dette forårsager en gnidningskraft F_{ud} , der for en Newtonsk væske er



Figur 3.2 Vinkeludsnit af DHS og hvirvlen. Gnidningskraften antages at virke på det skraverede areal.

proportional med $\frac{du}{dz}$ samt med arealet A af lagenes kontaktflade med proportionalitetsfaktor μ , der definerer væskens viskositet. Altså kan kraften udtrykkes som

$$F_{ud} = \mu A \frac{du}{dz} \quad (3.2)$$

Her betragtes altså en gnidning mellem undersiden af hvirvlen og den væske, som strømmer ind under hvirvlen. A er arealet af hvirvlens underside (se figur 3.2).

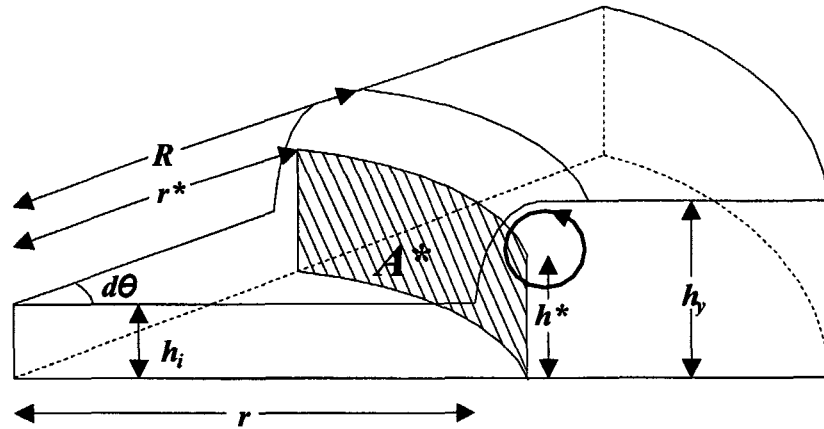
Som tidligere nævnt er hvirvlens bredde $R - r(\theta)$. For et lille vinkeludsnit $d\theta$ af hvirvlen er $r(\theta)$ tilnærmelsesvis konstant, og arealet under hvirvlen kan estimeres til et vandret rektangel med sidelængderne $R - r(\theta)$ og $r^* d\theta$, hvor $r^* = \frac{1}{2}(R + r(\theta))$ er springets gennemsnitsradius (se figur 3.2). Arealet bliver da

$$A = (R - r(\theta)) \frac{R + r(\theta)}{2} d\theta$$

Når hastighedsgradienten antages konstant, kan denne findes ved at aflæse en hastighed v^* et sted i springet og dividere den med den højde h^* , som v^* er aflæst ved. Altså er den $\frac{du}{dz} \approx \frac{v^*}{h^*}$. Som h^* anvendes gennemsnittet af væskehøjderne på hver side af hvirvlen

$$h^* = \frac{h_i + h_y}{2}$$

v^* vælges som den gennemsnitlige vandrette hastighed en væskepartikel har, når den strømmer gennem springet. Denne er ikke en egentlig fysisk hastighed, da en væskepartikels hastighed ændres gennem springet og i øvrigt både har en vandret og en lodret komponent. v^* kan udtrykkes ved den lokale væskeflux per radian $q(\theta)$. Denne størrelse er interessant, da $q(\theta)$ integreret op over hele springet skal give den samlede flux Q , hvilket benyttes senere i modelleringen. Fluxen $q(\theta)d\theta$ gennem det lille vinkeludsnit $d\theta$ er givet ved v^* ganget med det gennemsnitlige vertikale areal A^* , som væsken passerer igennem (se figur 3.3).



Figur 3.3 Udsnit af DHS og arealet A^* , som bruges i udledningen af den lokale flux.

Dette areal estimeres til $A^* = h^* r^* d\theta$ (ikke at forveksle med det vandrette kontaktfladeareal A), og følgende udtryk for v^* opnås

$$v^* = \frac{q(\theta)d\theta}{h^* r^* d\theta} = \frac{q(\theta)}{h^* r^*}$$

Gnidningskraften på det lille vinkeludsnit $d\theta$ af hvirvlen kan nu opskrives som

$$\begin{aligned} dF_{ud} &= c_1 \mu \frac{v^*}{h^*} (R - r) \left(\frac{R + r}{2} \right) d\theta \\ &= c_1 \mu \frac{q}{h^{*2} r^*} R(1 - y) r^* d\theta \\ &= \frac{4c_1 \mu q}{(h_y + h_i)^2} R(1 - y) d\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

hvor konstanten c_1 er en geometrisk skaleringsfaktor, der er medtaget for at udligne eventuelt opståede lineære fejl i valgene af størrelserne v^* og h^* og i idealiseringen af hvirvlens form.

3.1.3 Kraftbalancen

Som tidligere nævnt, må de to opskrevne kræfter på det lille vinkeludsnit $d\theta$ af hvirvlen være lige store, da springet er stabilt. Ved at sætte den indadrettede kraft i ligning (3.1) lig den udadrettede i (3.3), fås

$$\begin{aligned} dF_{ud} &= dF_{ind} && \Leftrightarrow \\ \frac{4c_1 \mu q(\theta)}{(h_y + h_i)^2} R(1 - y) d\theta &= \frac{R \rho g}{2} (h_y - h_i)^2 d\theta && \Leftrightarrow \\ q(\theta) &= \frac{g}{8c_1 \nu} \frac{1}{1 - y(\theta)} (h_y^2 - h_i^2)^2 && (3.4) \end{aligned}$$

hvor ν er væskens kinematiske viskositet defineret ved $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Den totale flux Q er en målbar størrelse i opstillingen, som kan udtrykkes ved den lokale flux.

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} q(\theta) d\theta \\ &= \frac{g}{8c_1\nu} (h_y^2 - h_i^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-y(\theta)} d\theta \Leftrightarrow \\ \beta &= \frac{8c_1\nu Q}{g(h_y^2 - h_i^2)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-y(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

β er en konstant sammensat af kendte, målbare parametre i opstillingen samt en konstant c_1 .

Kravet om, at det opskrevne integral netop skal være lig med β , begrænser modellens løsninger, hvilket senere benyttes til bestemmelse af $y(\theta)$.

3.2 Liniespændingen

Der er mange funktioner $y(\theta)$, der opfylder den i (3.5) opstillede betingelse, og der er derfor brug for endnu en afgrænsning af tilladte funktioner y [3]. Den nye betingelse til y beskrives i det følgende.

Forklaringen på, hvorfor der opstår polygonformede hydrauliske spring, er tæt knyttet til den hvirvel, der opstår ved overgangen fra type I til type II spring. Når springet er polygonformet, er hvirvlen knækket i polygonens hjørner, så der f.eks. for en 5-kant faktisk er tale om fem individuelle hvirvler – en for hver side. Det er observeret, at hvis man forstyrrer en side af polygonen forsigtigt med en pind, udfører siden svage, dæmpede svingninger tilbage til udgangspositionen. Det antages på den baggrund, at hvirvlen er et elastisk medium, som kan "knække" ved en vis kritisk krumning, og at der må være en såkaldt liniespænding (line tension) i hvirvlen, som vil forsøge at minimere springets omkreds.

Hvis man betragter $r(\theta)$ som en vektor kan denne skrives som

$$r(\theta) = (f(\theta), g(\theta)) = (|r(\theta)| \cos(\theta), |r(\theta)| \sin(\theta))$$

For at opstille et udtryk for omkredsen af springet, betragtes dets radius ved to vinkler $r(\theta)$ og $r(\theta + \Delta\theta)$. Hvis $\Delta\theta$ er lille, er længden af vektoren $\Delta r = r(\theta + \Delta\theta) - r(\theta)$ lig med længden af det lille udsnit ds af springets omkreds, som ligger mellem vinklerne θ og $\theta + \Delta\theta$. Fra Pythagoras fås

$$\frac{|\Delta r|}{\Delta\theta} = \sqrt{\left(\frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}\right)^2 + \left(\frac{g(\theta + \Delta\theta) - g(\theta)}{\Delta\theta}\right)^2}$$

som for $\Delta\theta \rightarrow 0$, bliver

$$ds = \sqrt{f'^2 + g'^2} d\theta$$

De θ -afledte komponenter bliver

$$f' = -r' \sin(\theta) + r \cos(\theta) \quad \text{og} \quad g' = r' \cos(\theta) + r \sin(\theta)$$

Indsættes disse i udtrykket for ds , fås ved en omskrivning af udtrykket

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

Springets omkreds er da givet ved

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

Dette integral skal ifølge den postulerede linespænding minimeres.

Ovenstående udledning kan foretages med y på r 's plads, uden at det resulterende udtryk ændres med andet end en faktor R . At ovenstående integral er minimalt, er derfor ensbetydende med, at følgende integral er minimalt

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{y^2 + y'^2} d\theta$$

3.3 Opsummering

I dette kapitel er der udledt to betingelser, som $y(\theta)$ skal opfylde.

Den ene betingelse bygger på, at der må være en kraftbalance på hvirvlen, da denne er stabil. Denne betingelse giver at følgende udtryk, skal være opfyldt for en løsningsfunktion $y(\theta)$

$$\beta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - y(\theta)} d\theta$$

hvor β er en konstant for en given parametersammensætning. Den anden betingelse bygger på en antagelse om en linespænding over springet, hvilket giver udtrykket

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{y(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta$$

Dette integral skal minimeres af funktionen $y(\theta)$. Disse to betingelser bruges i udledningen af modellen.

4 Den matematiske modellering

Den fysiske model for det hydrauliske spring, der blev opstillet i kapitel 3, bygger på en kraftbalance på hvirvlen mellem den udadrettede gnidningskraft, stammende fra væskestrømningen, og den indadrettede trykkraft, stammende fra den omkringliggende væske. Modellen bygger desuden på princippet om, at omkredsen af springet skal være mindst mulig på grund af den svage liniespænding. I dette kapitel analyseres den fysiske model matematisk.

4.1 Variationsregning

I dette afsnit præsenteres kort en metode, der tillader en matematisk behandling af problemstillingen. En mere uddybende gennemgang af variationsregningen findes i appendiks A.

Formen af det hydrauliske spring skal beskrives ved en funktion $y(\theta)$, som giver forholdet mellem den indre og den ydre radius af springet som funktion af vinklen. Funktionen kendes ikke men skal ved indsættelse i integralet

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{y^2 + y'^2} d\theta$$

minimere dette, svarende til en minimering af springets omkreds. Samtidig skal funktionen $y(\theta)$ opfylde ligningen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - y(\theta)} d\theta = \frac{8C_1 \nu Q}{g(h_y^2 - h_i^2)^2} = \beta$$

svarende til, at kraftbalancen er opfyldt.

En problemstilling, der vedrører bestemmelsen af den funktion i en mængde af funktioner, som ved indsættelse i et forelagt integral minimerer dette, kaldes et variationsproblem. Introducerer man et nyt integral og kræver, at løsningen indsat i dette integral giver integralet en bestemt værdi, kaldes problemstillingen for et variationsproblem under en bibetingelse. Det variationsproblem, der optræder i denne rapport, antager netop denne form. Det følgende kapitel beskriver på et overordnet niveau et værktøj kaldet variationsregning, der muliggør løsning af variationsproblemer.

Variationsregningen indfører et begreb kaldet en funktional, der er centralt i variationsregningen og som derfor vil blive præsenteret her. En funktional I defineres som en afbildning fra en funktionsmængde ind i et talområde, dvs. en afbildning, som til enhver funktion f i funktionalens definitionsmængde D , knytter et tal $I\{f\}$.

$$I: f \rightarrow I\{f\}, \quad f \in D, \quad I\{f\} \in \mathbb{R}$$

Funktionalerne i denne projektrapport antager form som integraler, men de kan principielt antage andre former. Som eksempel på en anden form for funktional kan nævnes afbildningen $f \rightarrow f'(x_0)$. Minimeringen af funktionalen, der beskriver omkredsen af det hydrauliske spring, kaldes variationsproblemet hovedbetingelse, mens funktionalen, som beskriver kraftbalancen på hvirvlen, og som skal antage en bestemt værdi, definerer bibetingelsen. Det skal dog understreges, at man ved betegnelserne hovedbetingelse og bibetingelse ikke skal forstå, at den ene betingelse er vigtigere end den anden. En funktion, der minimerer en funktional, vil opfylde en ligning kaldet Eulers ligning. Betingelserne, der stilles til funktionalen, er i en vis forstand analoge til de krav, der stilles til en (differentiabel) funktion, når denne skal antage en ekstremumsværdi. Opfyldelsen af Eulers ligning er nødvendig men garanterer ikke minimering af funktionalen. Om funktionalen antager en minimumsværdi, bestemmes normalt ud fra eksempelvis ydre fysiske rammer. Ved et variationsproblem med en bibetingelse kan Eulers ligning udvides således, at den også medtager kravet om opfyldelse af bibetingelsen.

Ved minimering af en funktional vil denne antage en bestemt værdi, som kaldes en stationær værdi. At Eulers ligning er opfyldt betyder altså, at funktionalen antager en stationær værdi.

De funktionaler, der indgår i denne rapporters variationsproblem, er af en speciel form, nemlig specialtilfældet, der beskrives i (A.10). Opfyldelsen af Eulers ligning kan derfor udskiftes med et mindre strengt krav, nemlig opfyldelse af et førsteintegral til Eulers ligning givet ved

$$(F - \lambda G) - y'(F - \lambda G)'_{y'} = c \quad (4.1)$$

hvor F og G er integranderne i de integraler, der optræder i hhv. hovedbetingelsen og bibetingelsen. Når denne ligning er opfyldt, antager funktionalen altså en stationær værdi, som på grund af de fysiske rammer vil være et minimum. Som nævnt i appendiks A vil enhver konstant funktion ($y' = 0$) ligeledes opfylde ligning (4.1). Dette særtilfælde svarer til en løsningsfunktion, der beskriver det cirkulære hydrauliske spring, som altså altid vil være en løsning for modellen. Dette benyttes senere.

4.2 Opstilling af differentiallyningen

Beskrivelsen af formen af det hydrauliske spring er nu blevet opstillet som et variationsproblem under en bibetingelse. De til funktionalerne hørende udtryk

for F og G indsættes i ligning (4.1).

$$\begin{aligned}
 (F - \lambda G) - y'(F - \lambda G)'_y &= c \Leftrightarrow \\
 \left(\sqrt{y^2 + y'^2} - \frac{\lambda}{1-y}\right) - y' \frac{2y'}{2\sqrt{y^2 + y'^2}} &= c \Leftrightarrow \\
 y^2 + y'^2 - \left(\frac{\lambda}{1-y}\right)\sqrt{y^2 + y'^2} - y'^2 &= c\sqrt{y^2 + y'^2} \Leftrightarrow \\
 y^2 &= \left(c + \frac{\lambda}{1-y}\right)\sqrt{y^2 + y'^2} \Leftrightarrow * \\
 y^4 &= \left(c + \frac{\lambda}{1-y}\right)^2(y^2 + y'^2) \Leftrightarrow * \\
 \frac{y^4}{\left(c + \frac{\lambda}{1-y}\right)^2} &= y^2 + y'^2 \Leftrightarrow \\
 y'^2 &= \frac{y^4}{\left(c + \frac{\lambda}{1-y}\right)^2} - y^2 \Leftrightarrow \\
 y' &= \pm \sqrt{\frac{y^4}{\left(c + \frac{\lambda}{1-y}\right)^2} - y^2} \Leftrightarrow \\
 y' &= \pm y \sqrt{\frac{y^2}{\left(c + \frac{\lambda}{1-y}\right)^2} - 1} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$y' = \pm \frac{\sqrt{y^2(1-y)^2 - (c(1-y) + \lambda)^2}}{|c(1-y) + \lambda|} \quad (4.2)$$

* (I analysen af modellen betragtes kun parameterområder hvor $c + \frac{\lambda}{1-y} > 0$).

Denne ligning vil blive behandlet videre i det følgende.

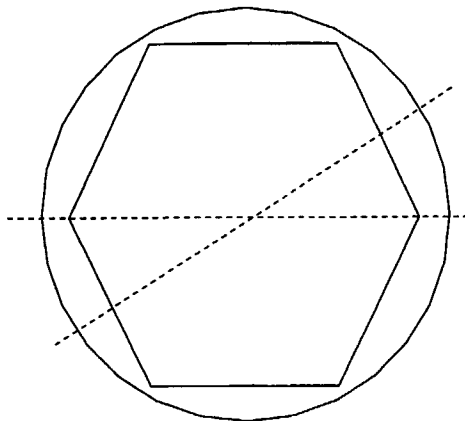
4.3 Polygoner og de tilhørende funktioner

En løsning til ovenstående differentialligning skal være en funktion, som ved en fysisk fortolkning giver forholdet mellem den indre og den ydre radius i springet. Denne funktion er repræsenteret ved størrelsen $y(\theta)$, som er en funktion af vinklen θ . Ved en polær afbildning skal funktionen give et billede af det hydrauliske spring. Løsningsfunktionerne skal opfylde en række betingelser, som vil blive beskrevet i det følgende.

Den fysiske fortolkning af funktionen fastlægger de første krav, der skal efterkommes. Om $y(\theta)$ må det naturligvis kræves, at funktionen er kontinuert, og at $0 < y(\theta) < 1$ for alle θ . Funktionen skal være defineret på intervallet $[0, 2\pi]$ og desuden opfylde $y(0) = y(2\pi)$.

Der opstilles på nuværende tidspunkt en ad hoc begrænsning af de tilladte løsninger, idet der specielt ledes efter funktioner, som ved en polær afbildning kan give polygonformer. Der opstilles derfor yderligere betingelser og på den måde

afgrænses mængden af mulige løsninger. En regulær polygon er symmetrisk omkring en ret linie, der går gennem centrum og henholdsvis et hjørne eller midten af en side i polygonen (se figur 4.1). Polygonens symmetri giver os da, at den



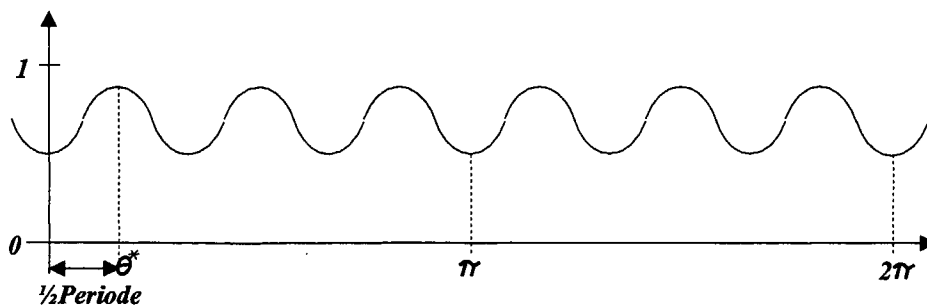
Figur 4.1 En polygon er symmetrisk omkring en ret linie, der går gennem centrum og henholdsvis et hjørne eller midten af en side i polygonen.

tilhørende funktion skal være periodisk, og at antallet af perioder på intervallet $[0, 2\pi]$ skal være lig antallet af sider i polygonen. Betragter man en sådan periode, indses hurtigt, at endepunkterne svarer til hjørnerne i polygonen, og funktionen antager altså sin største værdi her. Funktionen skal være aftagende indtil periodens midtpunkt, derefter voksende. Desuden skal funktionen være symmetrisk omkring midtpunktet, og det er derfor tilstrækkeligt at betragte den *sidste* halvdel af en periode. Derfor behøver man altså kun at betragte et delinterval af $[0, 2\pi]$ med længden $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ (n er det ønskede antal sider i polygonen), hvor funktionen er voksende. For at simplificere de efterfølgende beregninger skal endepunkterne fastlægges, så intervallet antager formen $[0, \theta^*]$ (hvor $\theta^* = \frac{\pi}{n}$). Funktionen vil da antage sin mindste værdi ($y_{\min} = y(0)$) i intervallets begyndelsespunkt og sin største værdi ($y_{\max} = y(\theta^*)$) i intervallets endepunkt (se figur 4.2).

4.4 Konstanter i differentiallyigning

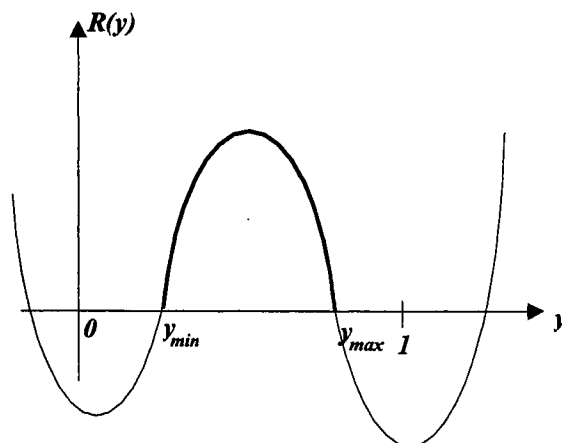
I differentiallyigningen (4.2) er y' givet ved et udtryk, der indeholder et fjerdegradspolynomium $R(y)$ (udtrykket under rodtegnet kan omskrives til et sådant). Der foretages en begrænsning af de mulige løsninger, idet det kræves, at løsningerne skal opfylde de betingelser, der tidligere er blevet opstillet for sådanne funktioner. Løsningerne skal opfylde, at der findes et θ -interval $[0, \theta^*]$ hvor y' er positiv og $y'(0) = y'(\theta^*) = 0$.

Betragter man fjerdegradspolynomiet i differentiallyigningen, ses, at hvis polynomiet har fire rødder, vil y' være nul i disse og samtidig antage positive værdier



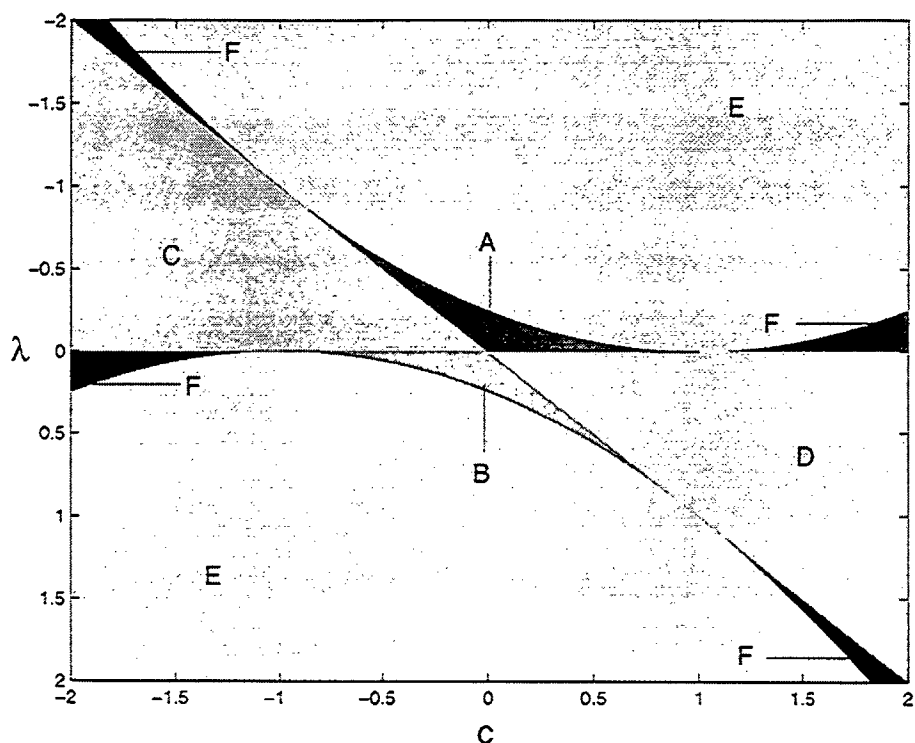
Figur 4.2 Løsningsfunktionen skal være periodisk. Antallet af perioder på intervallet $[0, 2\pi]$ skal være lig antallet af sider i den ønskede polygon. Funktionen må kun antage værdier mellem nul og en.

mellem de to inderste. Hvis de to inderste rødder, som fastlægger y_{min} og y_{max} , tilhører intervallet $]0, 1[$, har man altså en mulig løsning. Om rødderne skal gælde, at $y_{min} = y(0)$ og $y_{max} = y(\theta^*)$. En parametrisk afbildning af $R(y)$ og y med θ som parameter (hvor θ gennemløber intervallet $[0, \theta^*]$) skal give buestykket mellem de to inderste rødder. Længden af buestykket skal altså være θ^* (se figur 4.3).

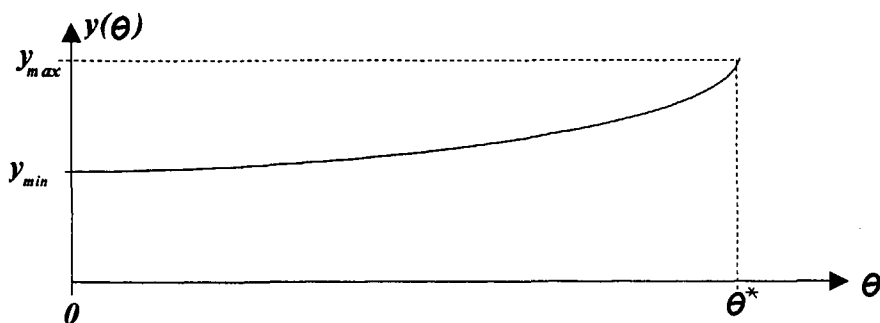


Figur 4.3 De to inderste rødder i fjerdegradspolynomiet skal være mellem nul og en. De yderste rødders placering er ikke fastlagt.

Parametrene c og λ skal tilpasses, så $\theta^* = \frac{\pi}{n}$, og desuden begrænses, således at der kun forekommer reelle størrelser i ligningen. Parameterområdet for c og λ afgrænses i appendiks B på baggrund af ovenstående kriterier. Resultatet er afbildet i et c, λ -plan, som ses på figur 4.4. Områderne kaldet A og C indeholder mulige løsninger.



Figur 4.4 Figuren viser c, λ -planen. Områderne A og C indeholder de ønskede løsninger. Områderne kaldet E er sorteret fra, da c, λ -kombinationerne i disse områder giver imaginære løsninger. I områderne kaldet F eksisterer ikke to rødder i intervallet $]0,1[$. Områderne B og D frasorteres da kun $\lambda > 0$ betragtes. Begrænsningen af områderne er foretaget analytisk i appendiks. Billedet ovenfor er fremstillet numerisk og er i overensstemmelse med analysen. Bemærk at ovenstående kun er et udsnit. Områderne er ikke begrænset af figurens ydre rand.



Figur 4.5 Funktionen $y(\theta)$ kræves voksende på intervallet. I endepunkterne antager funktionen værdierne y_{min} og y_{max} .

I område A er

$$y_{min} = \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda}$$

$$y_{max} = \frac{1+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda}$$

de inderste rødder. I område C er

$$y_{min} = \frac{1+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda}$$

$$y_{max} = \frac{1+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda}$$

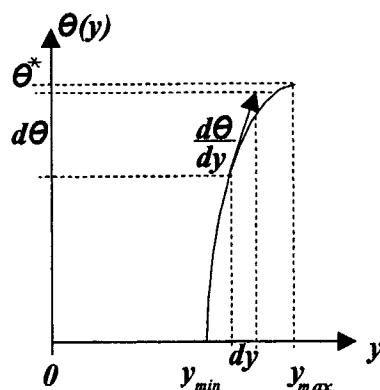
de inderste. Den største og den mindste rod i fjerdegradspolynomiet (de yderste rødder) kaldes henholdsvis a og b . Rødderne har betydning for den numeriske behandling af modellen og vil blive benyttet senere.

4.5 Opstilling af integraler

I afsnit 4.3 blev beskrevet, hvilke egenskaber funktionen $y(\theta)$ skal have, hvis den ved en polær afbildning skal kunne fremstille en polygon. Funktionen skal være voksende på intervallet $[0, \theta^*]$, og $y_{min}, y_{max} \in [0, 1]$, hvor y_{min} og y_{max} er intervallets endepunkter (se figur 4.5).

For en given polygon med n kanter skal konstanterne c og λ bestemmes, så $\theta^* = \frac{\pi}{n}$. Da funktionen $y(\theta)$ er monoton på θ -intervallet, eksisterer en invers funktion $\theta(y)$, som afbilder intervallet $[y_{min}, y_{max}]$ på intervallet $[0, \theta^*]$. θ^* er da givet ved

$$\theta^* = \int_0^{\theta^*} d\theta = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{d\theta}{dy} dy \quad (4.3)$$



Figur 4.6 θ kan udtrykkes ved y , og et udtryk for θ^* kan opstilles.

Figur 4.6 viser, hvordan udtrykket opstilles.

Ved separation af de variable i den opstillede differentialligning (ligning (4.2)), fås

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{d\theta} = y \frac{\sqrt{y^2(1-y)^2 - (c(1-y)+\lambda)^2}}{|c(1-y)+\lambda|} \Leftrightarrow \\ d\theta &= \frac{|c(1-y)+\lambda|}{y\sqrt{y^2(1-y)^2 - (c(1-y)+\lambda)^2}} dy \end{aligned} \quad (4.4)$$

Indsættes (4.4) i (4.3), fås

$$\theta^* = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{|c(1-y)+\lambda|}{y\sqrt{y^2(1-y)^2 - (c(1-y)+\lambda)^2}} dy \quad (4.5)$$

Polynomiet i nævneren kan faktorerises (se afsnit 4.4), så integralet bliver

$$\theta^* = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{|c(1-y)+\lambda|}{y\sqrt{(y-a)(y-y_{min})(y_{max}-y)(b-y)}} dy \quad (4.6)$$

hvor $a < y_{min} < y_{max} < b$. Rødderne bestemmes i appendiks B. I denne integration opstår singulariteter i grænserne, da kvadratroden under brøken bliver nul for $y = y_{min}$ og $y = y_{max}$. For at undgå dette foretages substitutionen

$$z = 2 \frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}} - 1 \quad (4.7)$$

De nye grænser for integralet bliver da $z(y_{min}) = -1$ og $z(y_{max}) = 1$. Isolerer

man y i udtrykket for z og definerer størrelsen δ ved $\delta = y_{max} - y_{min}$, fås

$$\begin{aligned} & (y - y_{min})(y_{max} - y) \\ &= \left(\frac{z+1}{2}\delta + y_{min} - y_{min}\right)\left(y_{max} - \frac{z+1}{2}\delta - y_{min}\right) \\ &= \left(\frac{\delta^2}{4}\right)(1 - z^2) \end{aligned}$$

Da $dy = \frac{\delta}{2}dz$, kan (4.6) omskrives til

$$\begin{aligned} \theta^* &= \int_{-1}^1 \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y\sqrt{(y-a)(b-y)}\left(\frac{\delta^2}{4}\right)(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta}{2} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y\sqrt{(y-a)(b-y)}\sqrt{(1-z^2)}} dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nu foretages en ny substitution. Lad $z = \cos(t)$. Da er $dz = -\sin(t)dt$, og de nye grænser bliver $z = 1 \Rightarrow t = 0$ og $z = -1 \Rightarrow t = \pi$. Dette indsættes i ligningen ovenfor.

$$\begin{aligned} \theta^* &= \int_{\pi}^0 \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y\sqrt{(y-a)(b-y)}\sqrt{1-\cos^2(t)}} (-\sin(t)dt) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|c(1-y) + \lambda|(\sin(t))}{y\sqrt{(y-a)(b-y)}\sqrt{\sin^2(t)}} dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y\sqrt{(y-a)(b-y)}} dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

Det resulterende integral skal for en 'polygon'-løsning med n sider antage værdien $\frac{\pi}{n}$. Bemærk, at grænserne vendes i ovenstående udledning, således at der indirekte integreres fra y_{max} til y_{min} .

For en kort stund vendes tilbage til det tidligere opstillede variationsproblem, og bibetingelsen $\beta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-y} d\theta$ betragtes. På grund af kravet om symmetri for den ønskede funktion y , der fremstiller en polygon med n sider, skal følgende gælde

$$\beta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-y} d\theta = 2n \int_0^{\theta^*} \frac{1}{1-y} d\theta$$

Udtrykket for $d\theta$ indsættes ligeledes i dette integral og de tidligere beskrevne substitutioner foretages. Dermed opnås betingelsen

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2n} &= \int_0^{\theta^*} \frac{1}{1-y} d\theta \\ &= \int_{y_{min}}^{y_{max}} \frac{1}{1-y} \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y\sqrt{y^2(1-y)^2 - (c(1-y) + \lambda)^2}} dy \\ &= \int_0^{\pi} \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y(1-y)\sqrt{(y-a)(b-y)}} dt \end{aligned} \quad (4.10)$$

Alle nødvendige betingelser, der er knyttet til ønsket om at finde 'polygon'-løsninger til den oprindelige differentilligning, er nu opstillet. Løsningsfunktionen, der er afhængig af parametrene c og λ , for en polygon med n kanter skal

opfylde

$$\theta^* = \frac{\pi}{n} = \int_0^\pi \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y\sqrt{(y-a)(b-y)}} dt \quad (4.11)$$

samt

$$\frac{\beta}{2n} = \int_0^\pi \frac{|c(1-y) + \lambda|}{y(1-y)\sqrt{(y-a)(b-y)}} dt \quad (4.12)$$

I disse to ligninger er det – for en given polygon – principelt kun c og λ , der er ubekendte, da β i princippet kan bestemmes eksperimentelt. Ved hjælp af det beskrevne specialtilfælde af Eulers ligning er det oprindelige variationsprolem under en bibetingelse altså omformuleret til problemstillingen at løse to ligninger med to ubekendte. Dette problem vil blive løst i det følgende, hvor integralerne kaldes henholdsvis Θ - og B -integralet.

4.6 Løsning af ligningssystem

For en given kombination af c og λ i de allerede opstillede parameterområder kan fjerdegradspolynomiet $R(y)$'s rødder a , b , y_{min} og y_{max} bestemmes. Alle størrelserne, der indgår i udtrykkene for Θ og B er fastlagt, og integralerne kan således bestemmes numerisk. Dette er gjort ved brug af trapezmetoden med en tilpas fin opdeling af integrationsintervallet. Principielt skal hele det tilladte parameterområde gennemses for løsninger til ligningssystemet. I den numeriske løsning af ligningssystemet udnyttes det, at løsninger til ligningssystemet vil være et minimum til skalarfunktionen: $f(c, \lambda) = (\Theta - \frac{\pi}{n})^2 + (B - \frac{\beta}{2n})^2$. MatLab-funktionen *fminsearch*(*fun*, *x0*) bruges til at finde et minimum af en skalarfunktion *fun* af flere variable omkring startgættet *x0*. Ved at bruge denne MatLab-funktion på f kan nulpunktet for denne og dermed løsningen af ligningssystemet findes for en given kombination af n og β . For at finde en løsning må startgættet dog ikke ligge for langt fra løsningen, og det kræves naturligvis, at der faktisk findes en løsning for den givne kombination af n og β . Det fundne minimum for f er kun en løsning til ligningssystemet, hvis *fminsearch* giver værdien 0. Da der er tale om en numerisk rutine i MatLab, vil det i praksis sige, at det fundne minimum skal ligge acceptabelt tæt på nul.

Når en løsningsfunktion er fundet afbildes den på følgende vis. Θ -integralet med nedre og øvre grænser hhv. 0 og π giver vinklen mellem et hjørne og midten af en side i polygonen. Ved at indsætte en anden værdi af integrationsvariablen t som øvre grænse, findes vinklen svarende til en anden værdi af y , der for den givne værdi af t kan findes ud fra ligning 4.7. På den måde findes sammenhørende værdier af y og θ for den givne værdi af integrationsvariablen t . Dette kan gøres for en masse værdier af t mellem 0 og π og ved polær afbildning af de fundne y og θ fremkommer da en halv side af et polygon. For at afbilde hele polygonen gentages dette for værdier af t i intervallet $[0, 2n\pi]$ (da alle n sider herved afbildes).

Som beskrevet skal *fminsearch* bruge et startgæt for at finde et minimum for f . Dette startgæt må ikke ligge for langt fra løsningen. Desuden er det ikke alle kombinationer af n og β , der giver løsninger. Disse forhold nødvendiggør en kvalitativ undersøgelse af parameterområdet, som vil blive gennemført i den følgende resultatbehandling.

5 Resultatbehandling

I dette kapitel bliver modellens resultater præsenteret. De undersøgelser af modellens egenskaber, der er foretaget i denne rapport, har fokus rettet på at eftervise de resultater, Anders Marcussen beskriver i sit speciale [3]. Kapitlet indledes derfor med en kort opsummering af disse resultater:

1. Det cirkulære hydrauliske spring eksisterer for alle β , og dette er den eneste løsning for små β .
2. Et polygon-spring med et bestemt antal hjørner findes kun i et interval af β ; flere hjørner i polygonen fås, når β vokser.
3. Intervallerne overlapper, så flere polygoner kan være løsning for samme værdi β .

Desuden nævnes, at modellen ikke kan reproducere polygoner med konkave og konvekse sider.

Det første resultat Anders Marcussen påpeger er, at cirkelløsningen eksisterer for alle β . Som tidligere beskrevet skal løsningsfunktioner opfylde ligning (4.1). I appendiks A redegøres for, at funktioner y , for hvilke $y' = 0$, altid vil opfylde ligningen. Dette resultat er uafhængigt af parameterverdier, hvorfor løsningsfunktioner, der beskriver et cirkulært hydraulisk spring, eksisterer for alle værdier af β .

I β indgår udover eksperimentelle størrelser også konstanten c_1 . I [3] nævnes, at konstanten er af størrelsesordenen 1, men i øvrigt er det svært at præcisere dens størrelse nærmere. Når c_1 reguleres, ændres også $\frac{\beta}{2n}$, og dermed hvor og om en løsning til ligningssystemet vil eksistere for et givent n . I den følgende analyse af det tilladte parameterområde indgår derfor også en undersøgelse af hvilke værdier af β , der rent faktisk giver løsninger.

Det er vist i appendix B, at de tilladte kombinationer af c og λ kan begrænses til områderne A og C , der er vist på figur 4.4. Områderne adskiller sig ved at y_{min} er defineret ved forskellige rødder i $R(y)$. Resultaterne for disse områder er forskellige, og de behandles derfor separat. I begge tilfælde undersøges Θ - og B -integralernes værdier i hele det givne parameterområde, hvilket gøres ved i MatLab at afbilde integralernes værdier som et "mesh" over parameterområdet. For at muliggøre dette foretages i begge tilfælde en transformation, hvor c, λ -området ved en bijektiv afbildning føres over i kvadratet $]0, 1[\times]0, 1[$.

5.1 A-området

Det kan let vises (men er undladt her), at transformationen

$$y_{min} = \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda}$$

$$y_{max} = \frac{1+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda}$$

er en bijektiv afbildning af A -området over i kvadratet $]0, 1[\times]0, 1[$. Dog skal det bemærkes, at kun halvdelen *over* kvadratets diagonal, hvor $y_{max} > y_{min}$, giver fysisk mening. Der foretages nu en diskretisering af kvadratet, idet man kun betragter værdier for y_{min} og y_{max} i punkter, der tilhører et tilpas fintmasket gitter. I hvert gitterpunkt, dvs. for alle kombinationer af y_{min} og y_{max} i gitteret, bestemmes c og λ , som er givet ved

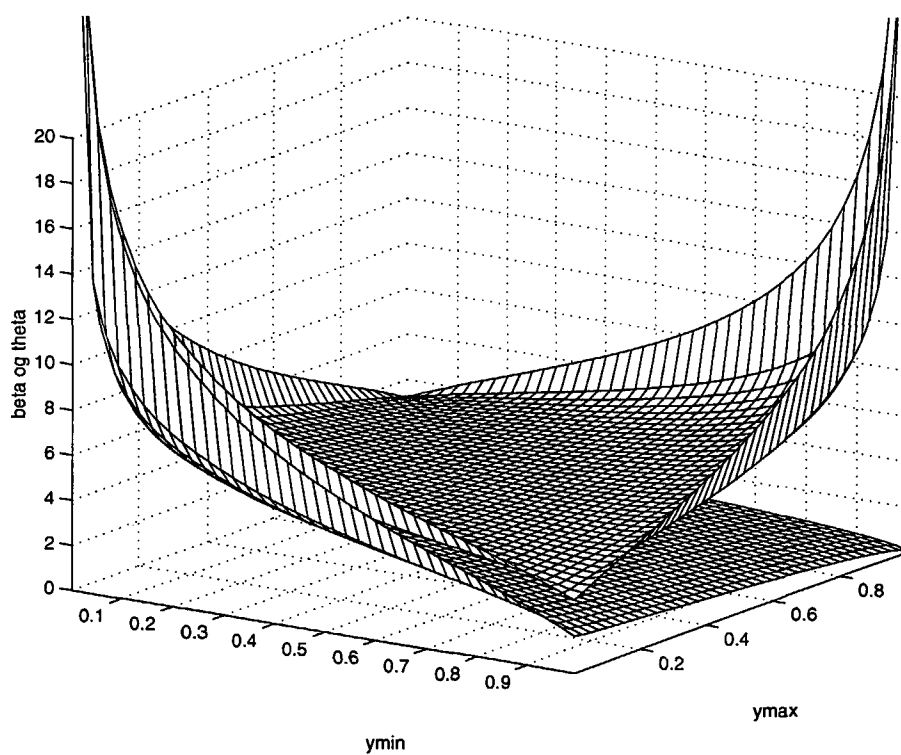
$$c = y_{min} + y_{max} - 1$$

$$\lambda = y_{min}y_{max} + 1 - y_{min} - y_{max}$$

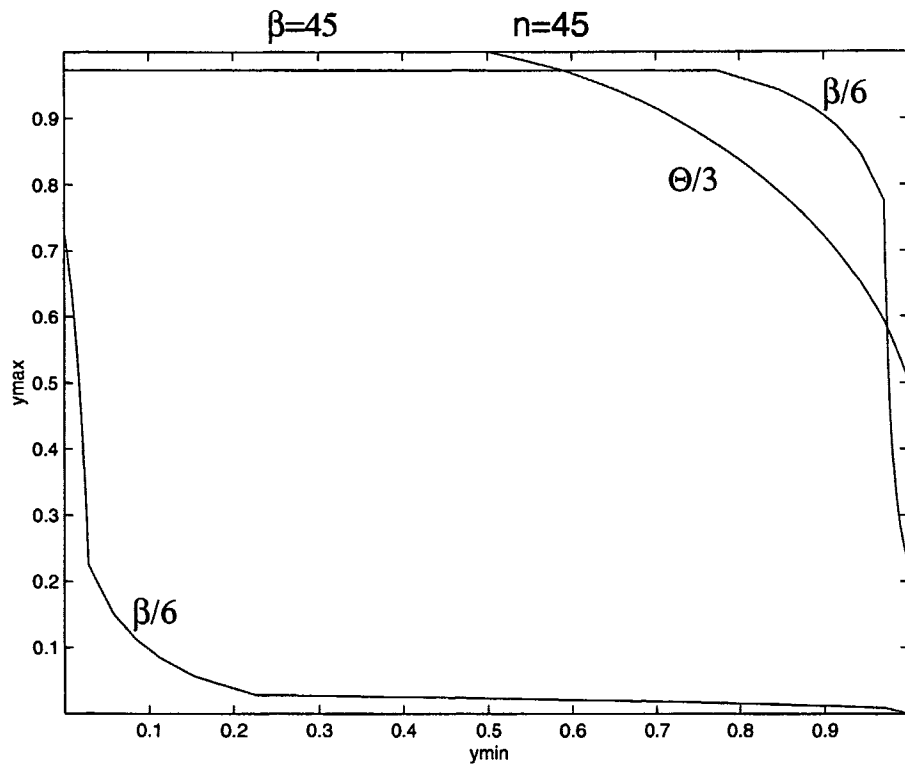
Θ -integralet bestemmes nu i hvert gitterpunkt ved brug af trapezmetoden. Resultatet ses på figur 5.1 (nederste kurve). Ved at interpolere mellem integralets værdi i gitterpunkterne kan MatLab frembringe niveaukurver for værdierne $\frac{\pi}{n}$ for forskellige n . På disse kurver gælder altså, at $n\Theta = \pi$, hvilket netop er en af forudsætningerne for, at løsningen ved afbildning giver en polygon med n kanter. Disse kurver er uafhængige af værdien af β . Også B -integralet bestemmes i hvert gitterpunkt ved brug af trapezmetoden og afbildes over parameterområdet. De relevante niveaukurver er her $\frac{\beta}{2n}$, og det interessante er nu for hvilke β de to integralers niveaukurver svarende til et givent n krydser hinanden. På figur ?? ses et eksempel på en skæring mellem niveaukurverne svarende til en 3-kant med $\beta = 45$. Ved at betragte B -fladen over y_{min}, y_{max} -planet (se figur 5.1) kan man overbevise sig om, at hvis c_1 skrues op, vil niveaukurven $\frac{\beta}{2n}$ nærme sig afbildningens rand, og omvendt hvis c_1 skrues ned, vil B -niveaukurven nærme sig midten. Derimod er Θ -integralet og de tilhørende niveaukurver $\frac{\pi}{n}$ entydigt bestemt (uafhængige af β og dermed af c_1). Ved først at vælge en polygon, som man vil finde løsninger for (f.eks. en 5-kant), dernæst at udregne β/c_1 ud fra eksperimentelle data og til sidst skrue på c_1 , kan skæringen mellem de to niveaukurver opnås stort set overalt på Θ -niveaukurven for den valgte polygon. Ved en polær afbildning af y som funktion af θ opnås resultater som vist på figur 5.3, 5.4 og 5.5 nedenfor.

Modellen kan frembringe alle de eksperimentelt observerede polygoner, dvs. fra 2-kanter til 14-kanter (også polygoner med flere sider kan frembringes ved at skrue c_1 tilstrækkeligt højt op).

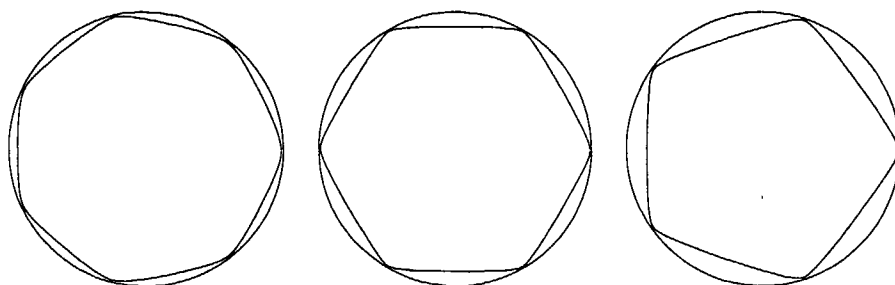
Figur 5.6 illustrerer, hvordan antallet af sider for de mulige polygonløsninger vokser med β . Da B -niveaukurverne nærmer sig linien $y_{max} = 1$, vil en B -niveaukurve, der lige præcis skærer Θ -kurven for en 7-kant, også skære Θ -kurverne svarende til alle $n < 7$, da disse enten nærmer sig $y_{max} = 1$ langsommere, eller ender på linien. Dette indikerer, at når h_y falder, og β dermed vokser, bliver polygoner med flere og flere sider mulige løsninger til modellen. Dette er i



Figur 5.1 Θ - og B -integralernes værdier bestemt for alle (y_{min}, y_{max}) i gitterpunkterne. Kurven for B er øverst. På randen, dvs. linierne $y_{min} = 0$ og $y_{max} = 1$ forekommer singulariteter.



Figur 5.2 Niveaukurver for θ - og B -integralerne. Kurvernes skæring markerer en løsning. Bemærk, at kun området over diagonalen hvor $y_{\min} < y_{\max}$ kan fortolkes.



Figur 5.3 7-kant for $h_y = 5.55$ mm. Resten af parametrene er fastholdt.

Figur 5.4 6-kant for $h_y = 5.88$ mm. Resten af parametrene er fastholdt.

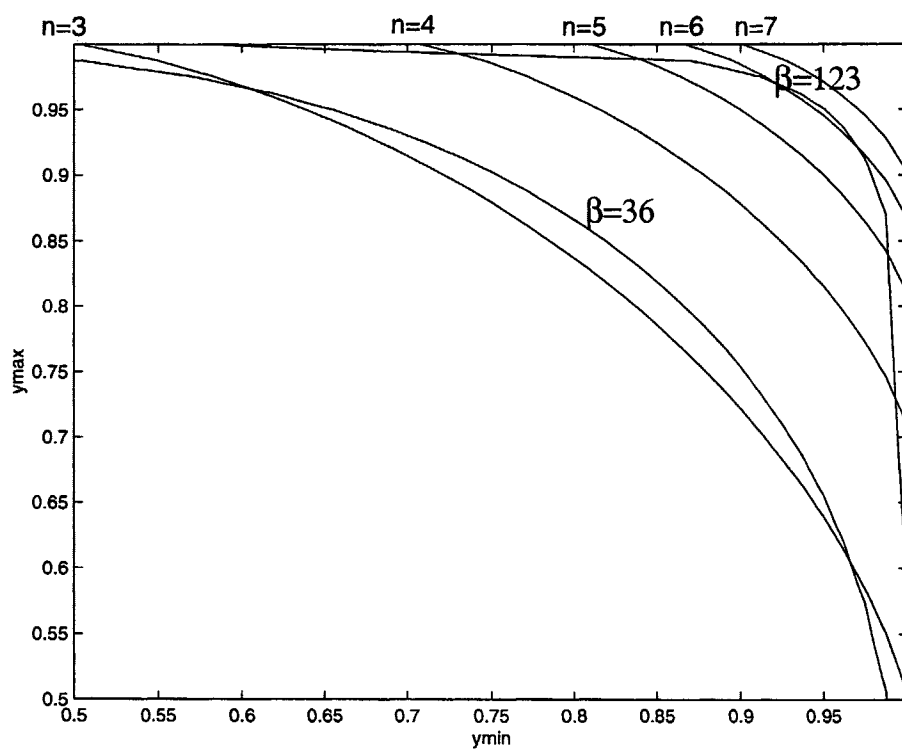
Figur 5.5 5-kant for $h_y = 6.40$ mm. Resten af parametrene er fastholdt.

god overensstemmelse med de eksperimentelle observationer. De i figur 5.3, 5.4 og 5.5 viste eksempler på modellerede polygoner er netop valgt, så kun h_y øges, og det ses, at antallet af kanter bliver mindre.

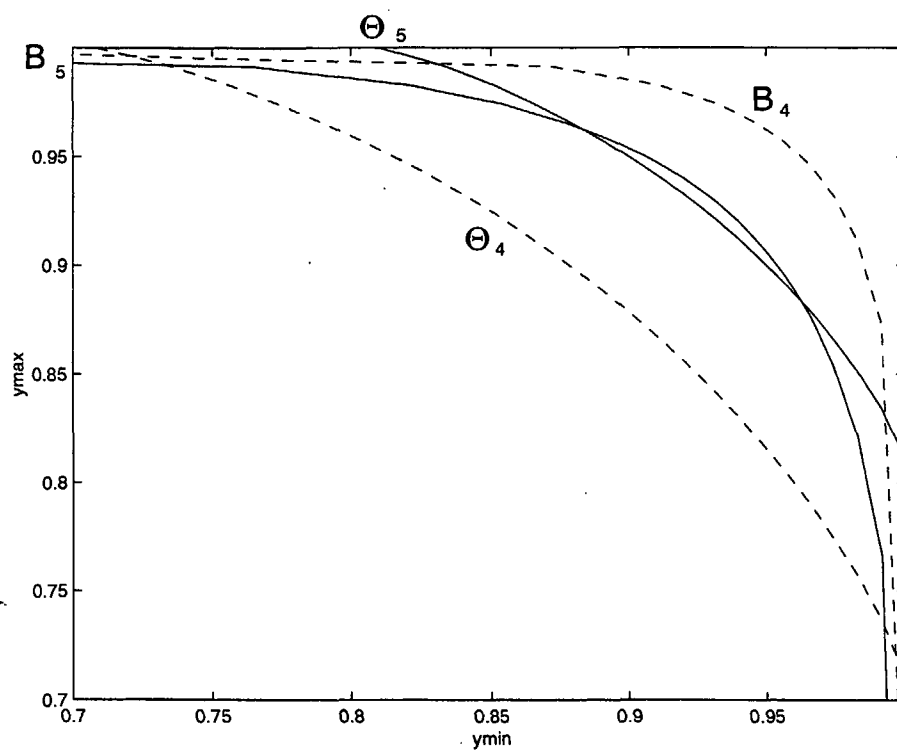
Man skal være opmærksom på, at de afbildede B -niveaukurver kun er korrekte indtil en vis afstand fra linierne $y_{max} = 1$ og $y_{min} = 0$. Dette skyldes singulariteter på disse linier, som gør fejlene ved den anvendte numeriske integrationsprocedure store, fordi integranden i disse områder ændrer sig meget over den valgte integrationsstridtlængde. Denne skridtlængde kan sættes ned, men kun til en vis grænse, der sættes af den tilgængelige computerkraft. Hvilken trinlængde, der er nødvendig i en vis afstand fra f.eks. linien $y_{max} = 1$ (f.eks. afstanden $y_{max} = 0.9999$), kan afprøves ved for enkelte værdier af y_{min} at udregne integrandernes værdier numerisk med stadigt mindre trinlængder. Når værdierne ikke længere ændrer sig betydeligt ved en nedsættelse af trinlængden, er en tilstrækkeligt lille trinlængde nået. I analysen anvendes en trinlængde på 0.005, hvilket giver rimelige niveaukurver indtil $y_{max} = 0.9999$ i det y_{min} -interval, niveaukurvernes skæring typisk tilhører.

Det er interessant, hvor tæt på $y_{max} = 1$ niveaukurverne er korrekte, når det skal undersøges, om der kan eksistere flere polygoner for samme β , som det er observeret eksperimentelt. Ved at skrue på c_1 kan β indstilles sådan, at der er løsninger for f.eks. en 5-kant. Det skal så undersøges, om niveaukurverne svarende til f.eks. en 4-kant også krydser for den fundne værdi af β . Θ -niveaukurven for en 4-kant må ligge længere nede mod venstre hjørne af niveauplottet på figur 5.2 end den tilsvarende niveaukurve for en 5-kant. Dette skyldes, at $\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{5}$, og Θ -overfladen i figur 5.1 falder i retning af $(y_{min}, y_{max}) = (1, 1)$. Til gengæld må den relevante del af B -niveaukurven for en 4-kant ligge længere oppe i højre hjørne af niveauplottet, fordi $\frac{\beta}{2 \cdot 4} > \frac{\beta}{2 \cdot 5}$, og fordi B -overfladen stiger mod $(y_{min}, y_{max}) = (1, 1)$. Når et sæt niveaukurver for en 5-kant krydser, vil den tilsvarende Θ -kurve for en 4-kant altså ligge til venstre for 5-kantens kurver, mens 4-kantens B -kurve vil ligge til højre for 5-kantens kurver (se figur 5.7).

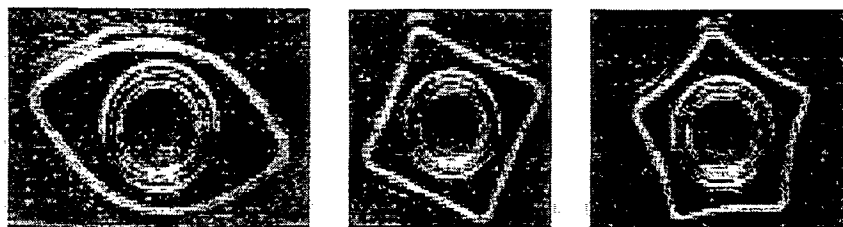
Grunden til at 4-kantens niveaukurver alligevel kan skære hinanden er, at B -kurverne krummer mere end Θ -kurverne, så B -kurven 'indhenter' Θ -kurven oppe langs linien $y_{max} = 1$, som det er vist på figur 5.7. Det er netop når



Figur 5.6 Når β vokser øges antallet af mulige polygoner, fordi B -niveaukurven krydser ind over flere polygoners Θ -niveaukurver.



Figur 5.7 Θ - og B -niveaukurver for en 5-kant (fuldtoptrukne) og en 4-kant (stiplede) med $c_1 = 145$.



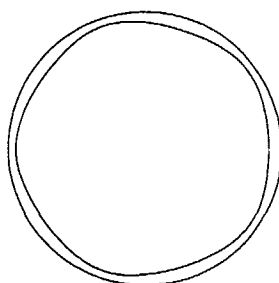
Figur 5.8 2-, 4- og 5-kant med samme parametersammensætning ($h_f = 2$ cm, $Q \approx 40$ ml/s, $\nu = 13.2 \times \nu_{vand}$ og $h_y = 5.29$ mm).

kurverne kommer tæt på denne linie, at den før omtalte risiko for store fejl i integrationsproceduren opstår.

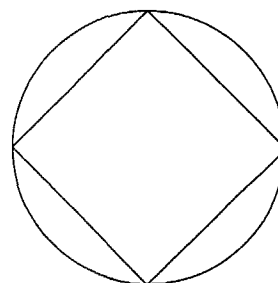
Ifølge de eksperimentelle erfaringer vil to forskellige polygoner ved samme parameterverdier have samme hjørnevinkel, så en eller begge polygoner har konkave/konvekse sider. Et eksempel på dette er vist på figur 5.8 for 2-, 4- og 5-kanter.

Ud fra de eksperimentelle parameterverdier, som er angivet i [3] for eksemplet på figur 5.8, er β udregnet, og det er fundet, at $c_1 = 145$ både giver skæringer for 4- og 5-kanter (figur 5.7). Dette er en ret stor værdi af c_1 set i lyset af, at denne konstant er en geometrisk skaleringsfaktor stammende fra de idealiseringer, der er gjort af hvirvlens form i modelopstillingen i afsnit 3.1.2.

På figur 5.9 og 5.10 er vist en 5-kant og en 4-kant svarende til skæringerne i figur 5.7.



Figur 5.9 5-kant med $c_1 = 145$. De øvrige parametre er som på figur 5.8. c_1 er valgt, så der lige er skæring mellem 5-kantens to niveaukurver.



Figur 5.10 4-kant med $c_1 = 145$. De øvrige parametre er som på figur 5.8.

Figureerne illustrerer, at modellen ikke er i stand til at vise de karakteristiske konvekse og konkave sider eller de ens hjørner, som ses på figur 5.8. Det er heller ikke lykkedes at finde en løsning for en 2-kant med den givne β . Dette skyldes, at 2-kantens B -niveaukurve med den udregnede β kommer så tæt på linien $y_{max} = 1$, før den krydser Θ -niveaukurven, at vores integrationsmetode ikke er præcis nok. Men principielt skulle det være muligt at finde 2-kantens løsning.

Modellen kan altså i A -området beskrive de kvalitative egenskaber ved formen af det hydrauliske spring, som er opremset i starten af kapitlet, men kan ikke bruges til at forudsige præcist hvilke polygonformer, der vil eksistere for en given parametersammensætning, og den kan heller ikke forudsige konkave og konvekse sider.

5.2 C-området

I C -området foretages på samme måde som i A -området en transformation, der afbilder c, λ -området bijektivt på kvadratet $]0, 1[\times]0, 1[$. Til transformationen (beviset for bijektiviteten er ligeledes undladt) benyttes to nye parametre ρ og σ , som er givet ved

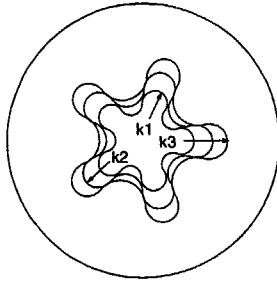
$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{1-c} & \Leftrightarrow & \quad c = 1 - \frac{1}{\rho} \\ \sigma &= -\frac{\lambda}{c} & \Leftrightarrow & \quad \lambda = -\sigma c \end{aligned}$$

Det fremkomne kvadrat opdeles i gitterpunkter, og ud fra værdierne af ρ og σ i disse punkter kan c og λ beregnes. Θ - og B -integralernes værdier bestemmes nu og de ønskede niveaukurver afbildes i et koordinatsystem. I eventuelle skæringer antager begge integraler de tilladte værdier. Processen er analog til processen beskrevet i behandlingen af A -området.

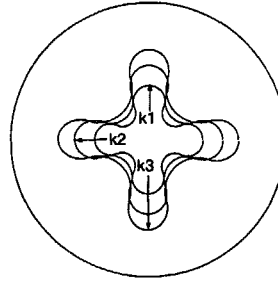
I C -området er det meget nemmere at påvise eksistensen af flere forskellige løsninger for samme β . Betragtes f.eks. den parametersammensætning, der er beskrevet i teksten til figur 5.8, er det muligt at bestemme en værdi for konstanten c_1 , så der er skæringer for en 2-, 4- og 5-kant tilpas langt inde i ρ, σ -kvadratet. Således undgår man de ovenfor nævnte problemer med integrationsrutinen. De c_1 , som giver resultater, er meget tættere på 1 end i A -området. Problemet er bare, at de former af springet, som løsningerne i C -området giver, er ufysiske, fordi de ikke ligner de eksperimentelt fundne polygoner.

På figurerne 5.11, 5.12 og 5.13 er vist, hvordan polygonerne ser ud, når c_1 tildeles værdierne $k_1 = 15, k_2 = 17$ og $k_3 = 20$. For hver af disse værdier er der mulighed for flere polygoner, men polygonerne ligner ikke noget, der er observeret eksperimentelt.

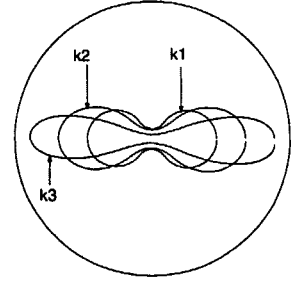
At modellen giver løsninger, som ikke er observeret empirisk, og som derfor efter al sandsynlighed ikke eksisterer i virkeligheden, kan tyde på, at de betingelser, der opstilles i modellen, ikke er tilstrækkelige.



Figur 5.11 5-kant for $k_1 = 15$, $k_2 = 17.5$ og $k_3 = 20$.

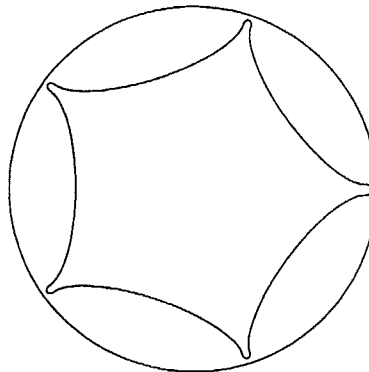


Figur 5.12 4-kant for $k_1 = 15$, $k_2 = 17.5$ og $k_3 = 20$.



Figur 5.13 2-kant for $k_1 = 15$, $k_2 = 17.5$ og $k_3 = 20$.

Disse løsninger er ikke nævnt i hverken [1] eller [3]. Det er muligt, at der findes et fysisk argument for at se bort fra løsningerne i C -området, men dette argument er ikke fundet i løbet af dette projektarbejde. Problemet med figu-



Figur 5.14 En 5-kant med konkave sider fundet i C -området. Parameterværdierne er her de samme som i figur 5.8 og $c_1=50$.

rerne i C -området er dels, at forskellen på y_{min} og y_{max} er urealistisk stor, og dels, at polygonernes hjørner er alt for runde. En bemærkelsesværdig egenskab ved C -området er dog, at jo tættere skæringen mellem en polygons Θ - og B -niveaukurver ligger ved randen $\sigma = 0$, jo mindre bliver forskellen mellem y_{min} og y_{max} , og jo skarpere bliver hjørnerne. Det betyder, at helt tæt ved randen kan polygoner med konkave sider, der minder en del om de eksperimentelt observerede, frembringes (se figur 5.14). Dette kræver dog høje værdier af c_1 . Det har ikke været muligt at finde polygoner med konvekse sider i C -området.

Modellens resultater vil blive vurderet i det følgende.

6 Vurdering af modellen

I de enkelte dele af modeludledningen i kapitel 3 foretages en del grove skøn og approksimationer, hvis rimelighed kan diskuteres (f.eks. udledningen af q ud fra h^* og v^*). Mange af disse tilnærmelser kan dog retfærdiggøres, da de opstillede ligninger udtrykker de ønskede kvalitative sammenhænge mellem de størrelser, som indgår i modellen.

I stedet for at gennemgå rimeligheden af de mange tilnærmelser vil der i dette kapitel blive præsenteret en overordnet kritik af de ræsonnementer og antagelser, der ligger til grund for den opstillede model. Dette gøres med henblik på at skabe et overblik over hvilke modificeringer af modellen, der kan foretages, så nogle af dens svagheder udbedres.

Det første kritikpunkt knytter sig til den påståede linespænding. Argumentationen for at indføre denne formuleres således i [3]:

»Det er eksperimentelt observeret, at når man forstyrrer en side i en polygon med en pind, opfører dens form sig, som var den en elastisk "streng" der genfinder sin oprindelige form, den havde før forstyrrelsen, via svage dæmpede svingninger. Det er derfor naturligt at postulere en svag *line tension*, så springet langsomt udvikles mod en stationær form med minimal omkreds.«

Antagelsen om en linespænding stammer altså fra observationen af de svingninger, der opstår, når en polygonside forstyrrer. Men sådanne svingninger kunne man også forestille sig kunne opstå *uden* den postulerede linespænding blot ved at betragte den opstillede vandrette, radiale kraftbalance på springet. Dette kan illustreres med en simpel analogi. Forestiller man sig et lod, der hænger i en fjeder, vil der opstå en hviletilstand, når fjeder- og tyngdekraften udbalancerer hinanden. Forstyrrer man loddet vertikalt, vil der opstå dæmpede svingninger, som bringer loddet tilbage til udgangspositionen. De dæmpede svingninger opstår alene på baggrund af de balancerende kræfter, hvorfor man kunne forestille sig, at det samme kunne gælde for svingningerne i det hydrauliske spring.

Formålet med modellen er at forsøge at afdække hvilke fysiske mekanismer, der er styrende for eksistensen af polygonformede hydrauliske spring. Men da der ikke redegøres for, hvilke fysiske principper den postulerede linespænding udspringer fra, vil modellen have svært ved at opfylde sit formål, selvom den i et vist omfang er i stand til at forudsige polygonformede spring.

Det andet kritikpunkt er, at væskestrømmen i selve springet ikke behandles eksplícit noget sted i modellen. Det antages, at væskefluxen indenfor springet er jævnt fordelt over θ , men at den radiale flux *gennem* springet er omvendt proportional med hvirvlens bredde og derfor θ -afhængig. Dette må enten betyde, at der ikke er massebevarelse over springet eller, at der er en tangentiell flux

gennem springet. Det må naturligvis være sidstnævnte, der er tilfældet, hvilket også er observeret eksperimentelt, men denne tangentielle flux behandles ikke i modellen. Da hovedparten af væsken transporteres ud ved hjørnerne af de polygonformede spring, må den tangentielle flux være af en ikke ubetydelig størrelsesorden i forhold til den radiale flux gennem springet. Ud fra disse overvejelser kan man konkludere, at det sandsynligvis ikke er rimeligt at unklade en beskrivelse af den tangentielle flux i springet i en model af DHS' form.

Når man opstiller en (matematisk) model for et objekt, kan man have forskellige interesser. En økonomisk model kunne f.eks. blive opstillet med henblik på at kunne forudsige aktiemarkedets udvikling over tid. Formålet med en sådan model er at *forudsige* en udvikling ud fra nogle kendte mekanismer. Vurderingen af en sådan model vil være en bedømmelse af modellens forudsigelsessevne. Modellen af det hydrauliske spring har derimod et andet formål, nemlig at afdække fysikken bag fænomenet og på den måde bidrage til en mere generel forståelse af lignende fænomener. Også her må en validitetsvurdering nødvendigvis bygge på en sammenligning af modellens resultater med empiriske observationer. Det er imidlertid vigtigt at skelne mellem denne sammenlignings status i de to eksempler på modeller. I førstnævnte er forudsigelsessevnen det primære formål. Dette er *ikke* tilfældet for modellen af DHS. Her fungerer sammenligningen som et tjek af, om det er de rigtige mekanismer, der er medtaget i modellen, men den er i øvrigt ikke en garanti for dette. Det primære formål er at blive klogere på disse mekanismer. Forudsigelsen af hvilke polygoner, der vil opstå for en given parametersammensætning, er derfor ikke så interessant som modellens kvalitative opførsel samt dens muligheder for at omsætte de opnåede resultater til en bedre fysisk forståelse.

Modellens ad hoc karakter vanskeliggør denne fysiske tolkning. På denne baggrund må modellen opfattes som værende delvis utilfredsstillende, da den bygger på en styrende mekanisme, hvis argumentation ikke kan funderes i noget dybere fysisk princip.

Formuleret mere generelt formår modellen ikke helt at afspejle det modellerede objekts natur. Grunden til, at modellen trods alt stadig kan vise en række kvalitative karakteristika ved DHS, kan muligvis findes i, at de i modellen opstillede betingelser er utilstrækkelige. Det kan betyde, at modellen derfor *blandt andre former* kan frembringe polygonformer, der ligner de eksperimentelt observerede. Dette underbygges af, at der i C -området er fundet løsninger, der ikke er observeret fysisk. Man kunne have valgt at indføre en ekstra betingelse ad hoc for at udelukke de løsninger i C -området, som ikke ligner noget fysisk (f.eks. at størrelsen $\frac{y_{max}}{y_{min}}$ ikke må overstige en vis størrelse). Dette ville dog kun få modellens løsninger til at stemme bedre overens med det observerede og ikke fremme forståelsen for de mekanismer, der gør polygonformede hydrauliske spring mulige, hvilket er modellens formål.

Vi vil i det følgende forsøge at modificere modellen ud fra de ovenfor nævnte kritikpunkter.

7 Alternativ fysisk model

I dette kapitel vil en alternativ model blive opstillet på baggrund af den kritik, som blev præsenteret i kapitel 6. Her er redegjort for, at de betingelser, der opstilles i modellen ikke er tilstrækkelige, fordi den frembringer ufysiske løsninger. På baggrund af det andet kritikpunkt i kapitel 6 er det nærliggende at tilføje en beskrivelse af den tangentielle flux i springet for derigennem at opnå en ekstra betingelse og få massebevarelsen eksplicit udtrykt i modellen. Dette er også foreslået i [1], som en eventuel modificering af modellen. På baggrund af det første kritikpunkt i kapitel 6 opgives idéen om en linespænding i springet. Ved den gamle model bibeholdes β -betingelsen opstillet ud fra betragtninger af den ydre kraftbalance på hvirvlen i springet. Denne betingelse er $q(\theta) = \frac{[konstant]}{(1-y)}$. Den nye model bygger desuden på et estimat af den tangentielle gnidning mellem hvirvlens yderside og den ydre væske, som ikke har nogen tangentiell hastighedskomponent.

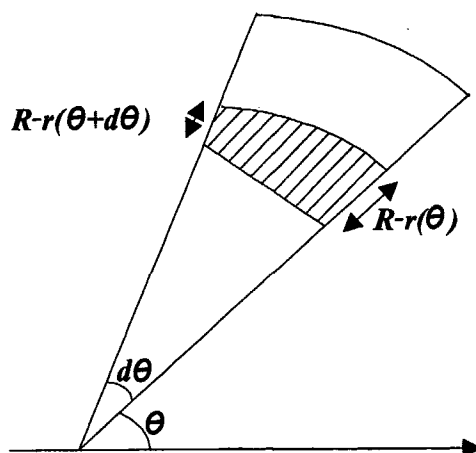
7.1 Massebevarelsen over hvirvlen

Det antages ligesom i den gamle model, at den indre flux ud imod springet udelukkende er radial og desuden er θ -uafhængig, dvs. jævnt fordelt i alle retninger. Om dette rent faktisk er tilfældet er ikke undersøgt empirisk. Hvis man antager, at der kun er radial væskeflux i springet og kræver, at der for ethvert udsnit af springet skal være massebevarelse, må der gælde, at den væskemængde, som strømmer ind i hvirvlen fra indersiden er lig med den væskemængde som strømmer ud på ydersiden: $\frac{Q}{2\pi}d\theta = qd\theta$. Da $\frac{Q}{2\pi}$ er en konstant, må $q(\theta)$ altså også være det. Men da der rent faktisk er observeret, en væsketransport på tværs i hvirvlen, må den lokale flux q indeholde et tangentielt bidrag og derfor være θ -afhængig. Der må gælde, at forskellen mellem $\frac{Q}{2\pi}d\theta$ og $q(\theta)d\theta$ er lig den samlede væsketransport tværs gennem udsnittet af hvirvlen. Denne massebevarelse kan betragtes som en tilnærmet form for impulsbevarelse.

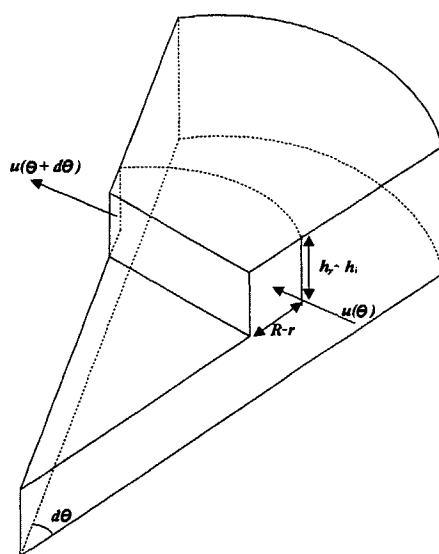
Et lille udsnit af systemet betragtes fra oven. Dette er vist på figur 7.1. Den ene side af hvirvlen har bredden $R - r(\theta)$, mens den anden side af hvirvlen har bredden $R - r(\theta + d\theta)$. Ved Taylorudvikling, hvor der ses bort fra led af højere orden end en, fås $R - r(\theta + d\theta) \approx R - r(\theta) - r'(\theta)d\theta$.

På figur 7.2 er den tværgående væsketransport skitseret. Betragtes et vinkeludsnit af springet med bredden $d\theta$ gælder altså, at forskellen mellem væsketransporten radiale væk fra centrum af springet på inder- og ydersiden af hvirvlen, svarer til den tangentielle væsketransporten i hvirvlen.

Arealet af et tværsnit af hvirvlen kan antages rektangulært, og altså kan det udtrykkes som $A(\theta) = (h_y - h_i)(R - r)$ og $A(\theta + d\theta) = (h_y - h_i)(R - r - r'd\theta)$. Væ-



Figur 7.1 Bredden af hvirvlen varierer som funktion af θ .



Figur 7.2 Arealet af hvirvlen og den tangentielle hastighed er ligeledes θ -afhængige.

skens hastighed i hvirvlen betegnes $\bar{u}(\theta)$. Denne hastighed er en middelhastighed over det rektangulære areal, der betragtes. For et lille udsnit $d\theta$ er ændringen af \bar{u} over hvirvelstykket givet ved $\bar{u}(\theta + d\theta) - \bar{u}(\theta)$. Altså er væsketransporten gennem hvirvlen på den ene side af udsnittet givet ved $\bar{u}(h_y - h_i)(R - r)$, mens den på den anden side er givet ved $\bar{u}(\theta + d\theta)(h_y - h_i)(R - r - r'd\theta)$. Dette udtryk kan igen tilnærmes ved en Taylorudvikling.

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(\theta + d\theta)(R - r(\theta + d\theta))h \\
& \approx (\bar{u} + \bar{u}'d\theta)(R - r - r'd\theta)h \\
& = \bar{u}(R - r - r'd\theta)h + \bar{u}'d\theta(R - r - r'd\theta)h \\
& = \bar{u}Rh - \bar{u}rh - \bar{u}r'd\theta h + \bar{u}'d\theta Rh - \bar{u}'d\theta r'h - \bar{u}'d\theta r'd\theta h \\
& \approx \bar{u}(R - r)h + \bar{u}'d\theta(R - r)h - \bar{u}r'd\theta h \\
& = \bar{u}(R - r)h + (\bar{u}'R - (\bar{u}'r + \bar{u}r'))d\theta h \\
& = \bar{u}(R - r)h + \frac{d}{d\theta}(\bar{u}R - \bar{u}r)hd\theta \\
& = \bar{u}(R - r)h + \frac{d}{d\theta}(\bar{u}(R - r)h)d\theta
\end{aligned}$$

Her er $h_y - h_i$ erstattet med h for overskuelighedens skyld. Undervejs er der set bort fra led, der indeholder $d\theta^2$, da disse er små. På baggrund af ovenstående betragtninger kan følgende ligning opstilles for massebevarelsen over springet.

$$\begin{aligned}
& \frac{Q}{2\pi}d\theta - q(\theta)d\theta + \bar{u}(R - r)(h_y - h_i)c_2 - \\
& \bar{u}(R - r)(h_y - h_i)c_2 - \frac{d}{d\theta}(\bar{u}(R - r)(h_y - h_i))d\theta c_2 = 0 \Leftrightarrow \\
& \frac{Q}{2\pi} - q(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\bar{u}(R - r)(h_y - h_i)c_2) \Leftrightarrow \\
& \frac{Q}{2\pi} - q(\theta) = c_2 R(h_y - h_i) \frac{d}{d\theta}(\bar{u}(1 - y)) \quad (7.1)
\end{aligned}$$

I denne ligning er c_2 medtaget for at kompensere for eventuelle lineære fejl, der kan opstå, når hvirvlen betragtes som rektangulær.

Da ligning (7.1) er opstillet på baggrund af kravet om massebevarelse for et udsnit, er det interessant, om dette også er opfyldt over hele systemet. Derfor integreres (7.1) over hele springet.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \left(\frac{Q}{2\pi} - q(\theta) \right) d\theta = \\
& \int_0^{2\pi} [c_2 R(h_y - h_i) \frac{d}{d\theta}(\bar{u}(1 - y))] d\theta \Leftrightarrow \\
& 0 = c_2 R(h_y - h_i) \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}(\bar{u}(1 - y)) d\theta \Leftrightarrow \\
& 0 = [\bar{u}(1 - y)]_0^{2\pi} \quad (7.2)
\end{aligned}$$

Da udtrykket på højresiden af (7.2) er periodisk med 2π er ligningen opfyldt.

7.2 Kraftbalance

Det antages, som i den forrige model, at trykket kan beskrives som hydrostatisk. Over hvirveludsnittet $d\theta$ sker en ændring af tværsnitsarealet (se figur 7.2). Da trykket beskrives som værende hydrostatisk, giver dette anledning til en trykkraftforskel mellem enderne af udsnittet. Udtrykket for det hydrostatiske tryk er givet ved ligning (3.1). Her er arealet, trykket virker på, ikke hvirvlens yderside, men tværsnitsarealet i hvirveludsnittets ender. Trykkraften i den ene ende bliver da $F_{\text{tryk}}(\theta) = A(\theta)[\frac{1}{2}\rho g(h_y - h_i)]$, og i den anden ende bliver trykkraften $F_{\text{tryk}}(\theta + d\theta) = A(\theta + d\theta)[\frac{1}{2}\rho g(h_y - h_i)]$. Siden denne trykkraftsforskel ikke gør springet ustabil, må den udbalanceres af en anden lige så stor, modsat rettet kraft.

Det antages, at denne kraft kommer fra den viskøse gnidning mellem den væske, der transporteres i hvirvlen, og væsken uden om springet. Gnidningskraften kan beskrives som i ligning (3.2), og derfor skal et udtryk for hastighedsgradienten og arealet af fladen, gnidningskraften virker mod, bestemmes.

Væsken i hvirvlen må være stillestående ved hvirvlens yderkant på grund af noslip betingelsen (da væsken udenfor hvirvlen antages kun at bevæge sig radiale, og væsken i hvirvlen bevæger sig tangentielt), men hvordan hastighedsprofilen i hvirvlen ellers ser ud er svært at beskrive, og derfor må hastighedsgradienten $\frac{du}{d(R-r)}(\theta)$ estimeres.

Et simpelt estimat (fremsat som i afsnit 3.1.2) er $\frac{\bar{u}(\theta)}{R-r(\theta)}c_3$, hvor c_3 skal justere eventuelle lineære fejl ved denne approksimation. Da gradienten er θ -afhængig, må det vurderes, om approksimationen er beskrivende for hele vinkeludsnittet.

Den gennemsnitlige hastighedsgradient over vinkeludsnittet kan udtrykkes som

$$\begin{aligned} c_3 \left(\frac{\bar{u}}{R-r} \right) &= \frac{c_3}{d\theta} \int_{\theta}^{\theta+d\theta} \frac{\bar{u}(\theta)}{R-r(\theta)} d\theta = \\ &= \frac{c_3}{d\theta} \frac{\bar{u}(\theta^m)}{R-r(\theta^m)} d\theta = \\ &= c_3 \frac{\bar{u}(\theta^m)}{R-r(\theta^m)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

hvor $\theta < \theta^m < \theta + d\theta$. Da $d\theta$ antages at være lille, er forskellen mellem θ og θ^m forsvindende. Derfor antages gennemsnitshastighedsgradienten for det lille vinkeludsnit at være $\frac{\bar{u}(\theta)}{R-r(\theta)}c_3$.

Gnidningen mod væskens bevægelsesretning foregår egentlig mod hele hvirvlens ydervæg, men for at lave et simpelt, θ -uafhængigt udtryk, betragtes kun gnidningen mod hvirvlens yderside (altså "båndet" i afstanden R fra centrum med højden $(h_y - h_i)$). I afsnit 3.1.1 blev vist, at for et infinitesimalt vinkeludsnit er arealet på ydersiden af hvirvlen $(h_y - h_i)Rd\theta$. Det vil sige, at den gnidningskraft, der virker mod væskens bevægelsesretning, kan udtrykkes som $F_{\mu} = \mu c_4 \frac{u}{R-r} ((h_y - h_i)Rd\theta)$, hvor c_4 er den samlede korrigeringsfaktor hidrørende fra tilnærmelserne for hastighedsgradienten og beskrivelsen af hvirvlens ydre rand som rektangulær.

På den baggrund opstilles følgende kraftsbalance

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho g}{2}(h_y - h_i)^2(R - r) && - \\
 & \frac{\rho g}{2}(h_y - h_i)^2(R - r - r'd\theta) && = \\
 & \mu \frac{\bar{u}(\theta)}{R - r} R d\theta (h_y - h_i) c_5 && \Leftrightarrow \\
 & \frac{\rho g}{2}(h_y - h_i)^2(R - r) && - \\
 & \frac{\rho g}{2}(h_y - h_i)^2 \left((R - r) + \frac{d}{d\theta}(R - r)d\theta \right) && = \\
 & \mu \frac{\bar{u}(\theta)}{R - r} R d\theta (h_y - h_i) c_5 && \Leftrightarrow \\
 & \frac{-\rho g}{2}(h_y - h_i) R \frac{d}{d\theta}(1 - y) = \mu \frac{\bar{u}(\theta)}{1 - y} c_5 && \Leftrightarrow \\
 \bar{u}(\theta) = \frac{-\rho g(h_y - h_i) R}{2\mu c_5} (1 - y) \frac{d}{d\theta}(1 - y) &&& (7.4)
 \end{aligned}$$

c_5 er en samlet betegnelse for c_4 og en korrigering af den fejl, der begås ved at beskrive hvirvlens tværsnit som rektangulært.

Dette udtryk for middelhastigheden giver nogle betingelser for, hvornår hastigheden kan være nul. Dette er enten opfyldt, når $1 - y = 0$ (i et hjørne), eller når $\frac{d}{d\theta}(1 - y) = 0$ (midt på hvirvlen). Det antages, at den tangentielle hastighed er nul midt på en polygonside og i hjørnerne. Dette giver nogle betingelser til bestemmelse af den differentiallyigning, der nu opstilles.

7.3 Opstilling af differentiallyigning

Indsættes nu (7.4) i (7.1), fås

$$\begin{aligned}
 & \frac{Q}{2\pi} - q(\theta) \\
 & = c_2 R h \frac{d}{d\theta} \left[(1 - y) \left(\frac{-\rho g h R}{2\mu c_5} (1 - y) \frac{d}{d\theta}(1 - y) \right) \right] \\
 & = c_2 R h \frac{d}{d\theta} \left[(1 - y)^2 \left(\frac{-\rho g h R}{2\mu c_5} \right) \frac{d(1 - y)}{d\theta} \right] \\
 & = c_2 R h \left(\frac{-\rho g h R}{2\mu c_5} \right) \left[\frac{d(1 - y)^2}{d\theta} \frac{d(1 - y)}{d\theta} + (1 - y)^2 \frac{d^2(1 - y)}{d\theta^2} \right] \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

I ovenstående er $h = (h_y - h_i)$. Gennem omskrivningerne $c_6 = \left(\frac{-c_2 R^2 (h_y - h_i)^2 \rho g}{2\mu c_5} \right)$ og $z = (1 - y)$ omskrives udtrykket til

$$\frac{Q}{2\pi} - q = c_6 \left[\frac{d(z^2)}{d\theta} \frac{dz}{d\theta} + z^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} \right] = c_6 [(z^2)' z' + z^2 z''] \quad (7.6)$$

I den tidligere model blev opstillet et udtryk for den radiale strømning, der er givet ved $q(\theta) = \frac{g}{8c_1\nu} \frac{1}{1-y(\theta)} (h_y^2 - h_i^2)^2$. Dette skrives for overskuelighedens skyld som $q(\theta) = \frac{c_7}{(1-y)}$ med $c_7 = \frac{g(h_y^2 - h_i^2)^2}{8c_1\nu}$ og indsættes i (7.6)

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2\pi} - \frac{c_7}{z} &= c_6[(z^2)'z' + z^2z''] && \Leftrightarrow \\ \frac{c_7}{z} &= \frac{Q}{2\pi} - c_6[(z^2)'z' + z^2z''] && \Leftrightarrow \\ c_7 &= \frac{Q}{2\pi}z - c_6z[(z^2)'z' + z^2z''] \end{aligned}$$

Denne andenordens differentiaalligning kan omskrives til en førsteordens differentialigning, hvilket gøres i det følgende. Lad først $A = -\frac{Q}{c_6 2\pi}$ og $B = -\frac{c_7}{c_6}$. Da er

$$\begin{aligned} z[(z^2)'z' + z^2z''] + Az &= B && \Leftrightarrow \\ z[(z^2)'z' + z^2z''] + Az - B &= 0 && \Leftrightarrow \\ z[z^2z']' + Az - B &= 0 && \Leftrightarrow \\ z^2z'(z^2z')' + Az^2z' - Bzz' &= 0 && \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}[2(z^2z')(z^2z')'] + \frac{A}{3}3z^2z' - \frac{B}{2}2zz' &= 0 && \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}[(z^2z')^2]' + \frac{A}{3}(z^3)' - \frac{B}{2}(z^2)' &= 0 && \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}(z^2z')^2 + \frac{A}{3}z^3 - \frac{B}{2}z^2 &= C \end{aligned} \quad (7.7)$$

Som i den tidligere model ønskes et udtryk for θ^* , hvilket fås ved at isolere z' i 7.7 og separere de variable

$$C = \frac{1}{2}(z^2z')^2 + \frac{A}{3}z^3 - \frac{B}{2}z^2 \quad \Leftrightarrow \quad (7.8)$$

$$(z^2z')^2 = 2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$z'^2 = \frac{2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2}{z^4} \quad \Leftrightarrow * \quad (7.9)$$

$$z' = \pm \frac{\sqrt{2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2}}{z^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \pm \frac{\sqrt{2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2}}{z^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$d\theta = \pm \frac{z^2}{\sqrt{2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2}} dz \quad \Leftrightarrow$$

$$\theta = \pm \int \frac{z^2}{\sqrt{2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2}} dz + [konst] \quad (7.10)$$

(* her må det kræves at $2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2 \geq 0$) I ovenstående ligning er C en integrationskonstant, der bestemmes ved de randbetingelser, der må gælde for en ønsket løsning. Konstanterne A og B er afhængige af geometriske skaleringsfaktorer og kan derfor ikke udtrykkes alene ved fysiske parametre, men ved indsættelse af udtrykkene for c_6 og c_7 kan følgende proportionaliteter opnås

$$A \propto \frac{\nu Q}{R^2(h_y - h_i)^2 g} \quad (7.11)$$

$$B \propto \frac{(h_y + h_i)^2}{R^2} \quad (7.12)$$

Som i den tidligere model har vi, at $z' = 0$ i polygonens hjørner og midt på siderne, dvs. i $z = z_{max}$ og $z = z_{min}$. Yderligere har vi kravet at det ubestemte integral (7.10) med grænserne z_{min} og z_{max} for en n -kant skal give $\frac{\pi}{n}$. Til sidst har vi den mere overordnede betingelse, at udtrykket under kvadratrodstegnet i ligning (7.10) skal være positivt eller nul, for at udtrykket giver fysisk mening.

7.4 Analyse af et specialtilfælde

I dette afsnit foretages en analyse af et simplificeret specialtilfælde af modellen, idet det antages, at hvirvlen når helt ud til springets rand. Denne antagelse giver den simple randbetingelse $z_{min} = 0$, som ved indsættelse i ligning (7.8) giver $C = 0$. Antagelsen medfører desuden, at z' går imod uendelig, når z går imod z_{min} . Dette kan fortolkes fysisk, som at væskestrømningen i polygonernes hjørner udelukkende er radial (væskejets), og at springets sider helt er adskilt fra hinanden, hvilket også er observeret eksperimentelt. Som den anden randbetingelse anvendes, at $\frac{dz}{d\theta}(z_{max}) = 0$ (dvs. at ændringen i hvirvlens dybde er nul midt på hvirvlens side). Af ligning (7.9) fås derfor

$$\frac{-\frac{2}{3}Az_{max}^3 + Bz_{max}^2}{z_{max}^4} = \frac{B - \frac{2}{3}Az_{max}}{z_{max}^2} = 0 \Rightarrow z_{max} = \frac{3B}{2A}$$

Udtrykket for θ kan nu skrives som

$$\theta = \int_0^{\frac{3B}{2A}} \frac{z^2}{\sqrt{Bz^2 - \frac{2}{3}Az^3}} dz = \int_0^{\frac{3B}{2A}} \frac{z}{\sqrt{B - \frac{2}{3}Az}} dz \quad (7.13)$$

Dette integral har den analytiske løsning $\theta = 3\frac{B\sqrt{B}}{A^2}$, som altså er et udtryk for vinklens afhængighed af A og B i specialtilfældet. Da A og B er fastlagt ved de fysiske parametre ses, at hystereser er udelukket i specialtilfældet. I det generelle tilfælde er integralets grænser ikke fastlagt som i specialtilfældet og hystereser kan derfor ikke udelukkes generelt.

Ved indsættelse af udtrykkene for A og B opnås et udtryk for θ 's afhængighed af de fysiske parametre

$$\theta \propto \frac{g^2(h_y + h_i)^5(h_y - h_i)^4}{R\nu^2 Q^2}$$

Denne proportionalitet kan ved en simpel omskrivning udtrykkes som

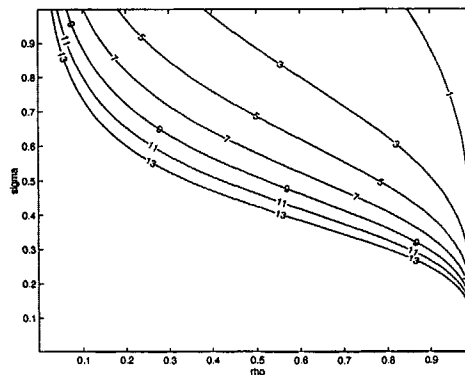
$$\theta \propto \frac{(h_y + h_i)^5}{R} \frac{1}{\beta^2} \quad (7.14)$$

Denne proportionalitet indikerer samme afhængighed mellem værdien af β og de mulige løsningsfunktioner som blev set i den gamle model (når β vokser, stiger antallet af hjørner i polygonerne svarende til at θ falder).

Løsning af den nye model foregår i et vist omfang analogt til løsningen af den gamle model. Som tidligere beskrevet må af hensyn til den fysiske fortolkning kræves, at størrelsen $\sqrt{2C - \frac{2}{3}Az^3 + Bz^2}$ kun antager positive værdier. Dette krav er i specialtilfældet analogt til kravet $B - \frac{2}{3}Az > 0$ som automatisk er opfyldt da $z \in [0, \frac{3B}{2A}]$. Desuden må kræves, at $z_{max} = \frac{3B}{2A} \in [0, 1] \Rightarrow A > \frac{3}{2}B$. De tilladte A, B -kombinationer afbildes over i et $[0, 1] \times [0, 1]$ (ρ, σ)-kvadrat ved de bijektive afbildninger

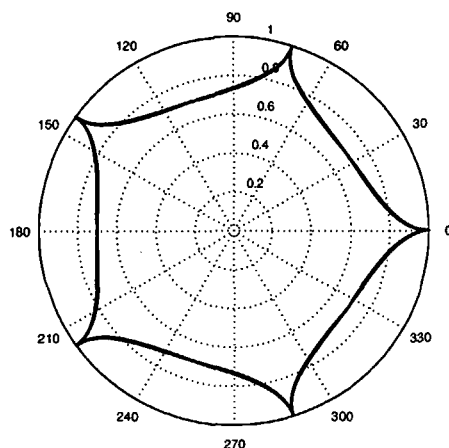
$$\begin{aligned} B = \frac{1}{\rho} - 1 & \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{1+B} \\ A = \frac{3B}{2\sigma} & \Leftrightarrow \sigma = \frac{3B}{2A} \end{aligned}$$

som automatisk sikrer, at ovenstående krav til A og B er opfyldt. Som beskrevet i behandlingen af den gamle model, afbildes nu en niveaukurve for den ønskede værdi af θ . Nedenfor ses løsningskurver for de forskellige polygoner. Langs kurverne findes ρ, σ -kombinationer, der giver en løsningsfunktion, som ved en polær afbildning fremstiller den ønskede polygon. Polygonens form afhænger af hvor på løsningskurven ρ og σ vælges (se figur 7.4 og 7.5). Eventuelt kunne en ekstra betingelse opstilles på baggrund af fysiske argumenter for at finde løsningspunkter på de fremkomne løsningskurver, men dette er undladt her.

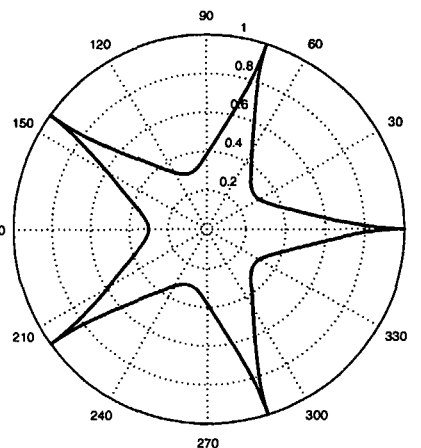


Figur 7.3 Løsningskurver for den nye model.

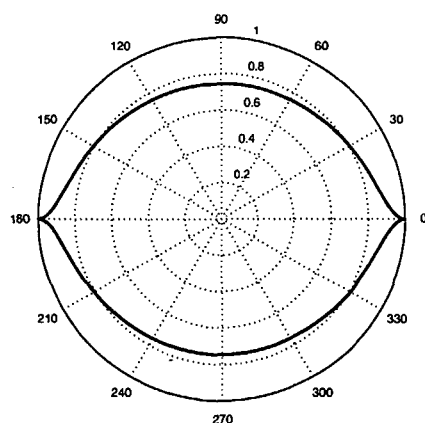
Generelt kan ρ og σ vælges så polygonernes sider bliver vilkårligt konkave eller rette. Modellen kan i det analyserede specialtilfælde vise løsningsfunktioner for en et- og to-kant, der ved afbildning ligner de eksperimentelt observerede et- og to-kanter. På dette punkt adskiller modellen sig fra den gamle model, som ikke var i stand til at vise et- eller to-kanter.



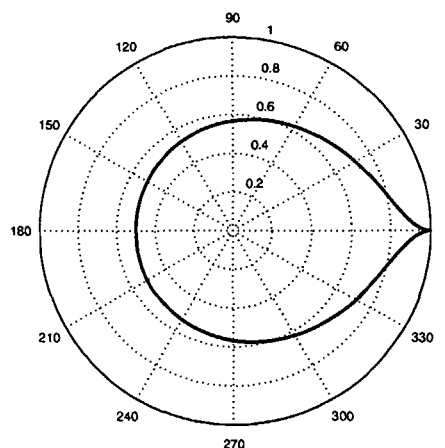
Figur 7.4 5-kant med næsten rette sider.



Figur 7.5 5-kant med konkave sider.



Figur 7.6 Den ny models løsning for en 2-kant.



Figur 7.7 Den ny models løsning for en 1-kant.

Som det ses kan modellen både give løsninger i god overensstemmelse med det eksperimentelt observerede - også 1-kanter - og mere ufysiske løsninger (7.5). Sidstnævnte opstår for store værdier af σ .

Som nævnt ovenfor giver den nye model ved løsning en *kurve*, langs hvilken der findes ρ, σ -kombinationer, der giver den ønskede polygon. Den nye models sortering af løsninger er altså svagere end den gamle models (her resulterede løsning af modellen i et *skæringspunkt*, dvs. en enkelt parameterkombination) hvilket tyder på, at den nye model mangler endnu en betingelse, der kan frasortere uønskede løsninger. En sådan betingelse skulle gerne frasortere løsninger med store værdier af σ , men det er afgørende, at betingelsen funderes i fysiske

betragtninger og ikke blot indføres ad hoc.

En mere gennemgribende vurdering af modellen er svær at give på grundlag af den begrænsede analyse, der er foretaget på nuværende tidspunkt, men modellen viser i specialtilfældet overordnet de rigtige sammenhænge mellem de fysiske parametre og de fremkomne polygoner. Ud fra dette kan konkluderes, at den nye model er værd at underlægge en grundigere analyse.

8 Konklusion

Den allerede eksisterende model tager udgangspunkt i en ide om, at en kombination af en liniespænding i springet og en balance mellem de ydre, vandrette, radiale kræfter på springet er de styrende mekanismer i eksistensen af polygonformede spring. Væskestrømningen i selve springet betragtes ikke i modellen.

Modellens liniespænding og kraftbalance kan opstilles som et matematisk variationsproblem, der reducerer problemstillingen til en løsningsbestemmelse af en førsteordens ordinær differentiaalligning. Modellens mulige løsningsfunktioner begrænses ad hoc, således at kun løsninger, der ved en polær afbildning fremstiller en polygon, opnås.

Modellen er i stand til at reproducere det cirkulære hydrauliske spring for alle værdier af β samt de eksperimentelt observerede polygoner med 2 til 14 kanter. Modellen er også i stand til at vise flere forskellige, stabile tilstande for springet for en β -værdi, og den kan vise, at de forskellige polygoner kun eksisterer i et β -interval. Ligeledes er modellen i stand til at vise den rette sammenhæng mellem de fysiske parametre og springets form. Til sidst kan nævnes, at modellen er i stand til at vise polygoner med konkave sider. Modellen viser altså den rette kvalitative opførsel i forhold til det observerede.

Modellen giver en række uønskede løsninger, som vælges fra for at undgå ikke-polygonformede spring. Denne begrænsning er utilfredsstillende, da den egentlig kun kan gennemføres, fordi man allerede ved, hvad man leder efter nemlig polygonformede spring. Men selv efter frasorteringen af de ikke ønskede løsninger giver modellen desværre ikke-fysiske løsninger. Nødvendigheden af at frasortere løsninger, samt eksistensen af de ufysiske løsninger trods denne frasortering, indikerer, at den opstillede liniespænding og kraftbalance ikke er tilstrækkeligt til beskrivelsen af formen af det hydrauliske spring. Den opstillede liniespænding, der ikke bygger på noget dybere fysisk princip (end intuition), er egentlig kun postuleret. Modellen mangler altså en form for fysisk fundament eller argumentation for det opstillede princip.

Modellens formål er at forsøge at afdække de styrende fysiske mekanismer for formen af springet, og denne manglende argumentation er derfor utilfredsstillende, hvorfor det er ønskværdigt at opstille en mere fysisk troværdig model.

I [1] foreslås, at en ny model, der tager højde for massebevarelsen, opstilles og udvikles. Opfyldelse af kravet om massebevarelse må regnes for en fundamental egenskab ved en model af det hydrauliske spring, da en manglende massebevarelse må betragtes som værende ufysisk.

I den nye model, hvor den radiale kraftbalance er bevaret, mens princippet med den postulerede liniespænding er udskiftet med beskrivelsen af den tangentielle væskestrømning, er kravet om massebevarelse opfyldt. Modellen gør dog stadig

brug af den ad hoc begrænsning af tilladte løsningsfunktioner som benyttes i den gamle model.

Analysen af modellens specialtilfælde viser, at modellen er i stand til at vise de samme eksperimentelt observerede sammenhænge mellem de fysiske parametre og fremkomne polygoner som den gamle model. Den nye model er desuden i stand til at vise eksperimentelt observerede polygoner, som den gamle model ikke kan vise.

En egentlig vurdering af den nye model er vanskelig at foretage, idet analysen af modellen ikke er fuldstændig. Analysen af specialtilfældet indikerer dog, at modellen i kraft af sit bedre fysiske fundament kan være et skridt på vejen til en bedre model for springet og dermed en bedre forståelse af hele fænomenet.

9 Perspektivering

Indenfor rammerne af dette projekt har formålet med det videnskabelige arbejde været at lære noget om de fysiske mekanismer, der muliggør eksistensen af polygonformede hydrauliske spring. Projektet er imidlertid en del af en universitetsuddannelse og dermed en læringsproces. I en mere overordnet ramme har formålet med projektet været, at vi skulle opnå en erfaring med matematisk modellering. I perspektiveringen har vi derfor valgt at reflektere over, hvad vi har lært af dette modelleringsprojekt.

Da vi har valgt at beskæftige os med en allerede eksisterende model, var beskrivelsen af problemet i vid udstrækning foretaget forud. Det samme gælder systemafgrænsningen og fokuseringen på de mekanismer, man kunne forestille sig som de bestemmende for formen af DHS. Det har dog været en lærerig proces selv at gennemgå modelleringsprocessen.

Overgangen fra den fysiske model til en matematisk repræsentation har vi selv udarbejdet fra bunden, og vi har derfor fået en oplevelse af, hvordan et fysisk fænomen kan beskrives og modelleres ved hjælp af matematik. I denne behandling har vi anvendt både analytiske og numeriske metoder som redskaber.

I forbindelse med resultatbehandlingen af modelleringen har vi fået et indblik i, hvordan en models resultater kan tolkes. Vi har lagt stor vægt på at fremlægge resultaterne så objektivt som muligt, da resultaterne i høj grad kan tolkes i bestemte retninger. I forlængelse af tolkningen af modellens resultater, har vi vurderet validiteten af den opstillede model.

I sidste del af projektføreløbet oplevede vi den iterative del af modelleringsprocessen, da vi udbyggede modellen til også at opfylde kravet om massebevarelse. Desværre har vi ikke nået en fuldstændig undersøgelse af den nye models resultater. Udledningen og opstillingen af modellen samt behandlingen af den nye models specialtilfælde må altså betragtes som dette projekts bidrag til en model for formen af det hydrauliske spring.

På baggrund af projektføreløbet og dets gennemgang af modelleringsprocessen, er det også væsentlig at spørge, om man er blevet i stand til at opstille en matematisk model fra bunden. Vi har fået et indblik i, at man i en modelproces ofte oplever problemer, som kun kan løses med 'smarte tricks'. At få ideen til disse tricks kræver ofte en stor erfaring med modellering. Denne store erfaring har vi af gode grunde ikke, men processen har givet et indblik i hvilke kompetencer, der er nødvendige i en modelleringsproces. Vi mener, at den proces vi har været igennem er eksemplarisk, fordi vi gennem det konkrete eksempel med det hydrauliske spring har fået et mere generelt indblik i, hvilke faser man skal igennem og hvilke kompetencer, der kræves i en matematisk modelleringsproces.

Jamen hurra

A Variationsregning

En problemstilling, der vedrører bestemmelsen af den funktion $y(x)$ i en funktionsmængde, der ved indsættelse i et forelagt integral giver dette dets største eller mindste værdi, kaldes et variationsproblem. I det følgende kapitel beskrives og udledes et redskab kaldet variationsregning, der muliggør løsning af sådanne variationsproblemer. Kapitlet bygger på Erik B. Hansens bog Variationsregning [2].

Kapitlet indledes med et par definitioner af begreber, der er essentielle for forståelsen af variationsregningen.

A.1 Indledende definitioner

A.1.1 Funktional

Variationsregningen gør brug af et begreb kaldet en funktional, som kan opfattes som en funktion, hvis variable selv er funktioner. Funktionaler spiller en central rolle i variationsregningen, hvorfor de vil blive beskrevet nærmere i det følgende.

En funktional I defineres som en afbildning fra en funktionsmængde ind i et talområde, dvs. en afbildning, som til enhver funktion f i funktionalens definitionsmængde D , knytter et tal $I\{f\}$.

$$I : f \mapsto I\{f\}, f \in D, I\{f\} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

I et simpelt tilfælde er en sådan funktional defineret ved integralet

$$I\{y\} \equiv \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (\text{A.2})$$

hvor a og b er faste tal. Funktionen $F = F(x, y, y')$ er en funktion af tre variable, hvor x er en (uafhængig) variabel i traditionel forstand, mens $y = y(x)$ er en variabel funktion (y' er den afledede med hensyn til x). y kaldes den afhængige variable. Ovenstående funktional, der er defineret som et integral, er af den type, som er interessant i dette projekt, og behandlingen af funktionaler vil derfor i det følgende være begrænset til integraler af netop denne form.

Et variationsproblem består i at bestemme den funktion $y(x)$ i funktionalens definitionsmængde, der giver integralet sin største eller mindste værdi. Funktionalens definitionsmængde vil ofte være begrænset af en række betingelser. For eksempel vil der normalt til et variationsproblem være foreskrevet randbetingelser, der består i, at funktionen $y(x)$ skal antage bestemte værdier for $x = a$

og $x = b$. Derudover vil definitionsmængden for en funktional, der er tilknyttet et fysisk variationsproblem, ofte blive begrænset yderligere i overensstemmelse med en fysisk fortolkning. Funktioner, der tilfredsstillende opstillede betingelser, kaldes de for funktionalen tilladte funktioner.

A.1.2 Variation af funktion

Arbejdet med at fastlægge den funktion, der giver et integral sin største eller mindste værdi, består i at sammenligne tilladte funktioner. Er y en tilladt funktion, betegnes en anden tilladt funktion $y + \delta y$ en sammenligningsfunktion. Størrelsen δy kaldes variationen af y . Da $y + \delta y$ er en tilladt funktion, dvs. $(y + \delta y)(a) = y(a)$ gælder for enhver variation af y

$$\begin{aligned}(y + \delta y)(a) &= y(a) + \delta y(a) = y(a) \Rightarrow \delta y(a) = 0 \\ (y + \delta y)(b) &= y(b) + \delta y(b) = y(b) \Rightarrow \delta y(b) = 0\end{aligned}$$

Desuden må variationen δy tilhøre funktionalens definitionsmængde. Variationer, der tilfredsstillende alle betingelser, kaldes tilladte variationer. Som variationer betragtes funktioner af formen $\delta y = \epsilon \eta(x)$, hvor ϵ er en konstant, der kan antage alle værdier i et interval omkring nul, og η er en fastholdt vilkårlig funktion, der dog skal opfylde de krav, der stilles til en tilladt variation. Det vises i afsnit A.2, at variationsproblemet gennem behandling af denne type variationer kan reduceres til en ekstremumsværdi-bestemmelse for en funktion af en variabel. I dette projekt er det en minimering af integralet, der er interessant, og altså er det minimumsværdi-bestemmelsen, der er vigtig.

A.2 Eulers ligning

Formålet med dette afsnit er at udlede en betingelse for, at den simple funktional, der er beskrevet ovenfor, antager sin største eller mindste værdi, når funktionen \bar{y} indsættes. Betingelsen er i en hvis forstand analog til de krav, der stilles til en (differentiabel) funktion, når denne skal antage en ekstremumsværdi.

Lad funktionalen I med definitionsmængde $C^1[a, b]$ være defineret ved

$$I\{y\} \equiv \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (\text{A.3})$$

og lad randbetingelserne $y(a) = y_a$ og $y(b) = y_b$ gælde. Antag, at der eksisterer en tilladt funktion \bar{y} , der giver funktionalen sin mindste værdi. For et givent variationsproblem er det vanskeligt at fastlægge de krav, der skal stilles til funktionen \bar{y} . Men som tidligere nævnt kan variationsproblemet for den simple funktional, der er beskrevet her, reduceres til en mindsteværdi-opgave for en funktion af en variabel. Betragter man en variation, der er defineret som en funktion af en variabel, lader dette sig gøre. Lad derfor $\delta y = \epsilon \eta(x)$, hvor ϵ er en konstant, der kan antage alle værdier i et interval omkring nul, og η er en fastholdt vilkårlig funktion, der dog skal opfylde de krav, der stilles til en

tilladt variation. Indsættes $\bar{y} + \delta y = \bar{y} + \epsilon \eta(x)$ (hvor \bar{y} er den funktion, som giver integralet sin mindste værdi) i funktionalen, bliver integralet en funktion J af variabelen ϵ givet ved

$$J(\epsilon) = I\{\bar{y} + \epsilon \eta(x)\} = \int_a^b F(x, \bar{y} + \epsilon \eta, \bar{y}' + \epsilon \eta') dx \quad (\text{A.4})$$

Da \bar{y} giver funktionalen sin mindste værdi, er $J(0) \leq J(\epsilon)$ for alle ϵ , og $J'(0) = 0$. Idet det antages, at F er differentiabel, gælder

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} = F'_y \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + F'_{y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon}$$

og derfor

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon \eta(x)\} \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} F(x, \bar{y} + \epsilon \eta, \bar{y}' + \epsilon \eta') \right]_{\epsilon=0} dx \\ &= \int_a^b \left[F'_y(x, \bar{y} + \epsilon \eta, \bar{y}' + \epsilon \eta') \frac{\partial y}{\partial \epsilon} \right. \\ & \quad \left. + F'_{y'}(x, \bar{y} + \epsilon \eta, \bar{y}' + \epsilon \eta') \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} dx \\ &= \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta + F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta'] dx \end{aligned}$$

altså

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon \eta(x)\} \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta + F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta'] dx \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Af (A.4) og (A.5) udledes

$$\begin{aligned} J'(0) &= \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon \eta(x)\} \right]_{\epsilon=0} \\ &= \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta + F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta'] dx = 0 \end{aligned}$$

Ved partiel integration fås nu

$$\begin{aligned} & \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta + F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta'] dx \\ &= \int_a^b F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta dx + \int_a^b F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta' dx \\ &= \int_a^b F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta dx + [F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta dx \end{aligned}$$

og da $\epsilon\eta(a) = \epsilon\eta(b) = 0$, da variationen i randpunkterne skal være lig nul, fås

$$\int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')] \eta \, dx = 0 \quad (\text{A.6})$$

Da ovenstående skal gælde, uanset hvilken funktion, der indsættes for η , er det nærliggende at slutte, at den kantede parentes i integralet er nul. Variationsregningens fundamentallemma, som bevises i næste afsnit, viser, at dette faktisk gælder (resultatet bruges her). Altså

$$F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') = 0$$

Fortolkningen af ovenstående ligning er hovedpointen i dette afsnit.

En nødvendig betingelse for, at funktionalen

$$I\{y\} \equiv \int_a^b F(x, y, y') \, dx \quad (\text{A.7})$$

antager sin mindste værdi, når funktionen \bar{y} indsættes, er altså, at \bar{y} tilfredsstiller ligningen

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Differentialligningen i (A.8) kaldes Eulers ligning. I forbindelse med behandlingen af denne, er det vigtigt at gøre opmærksom på, at ligningen er invariant under en variabeltransformation, dvs. ligningen skifter ikke form ved skift fra en type koordinater til en anden.

A.2.1 Særtilfælde

I et særtilfælde af det simple variationsproblem afhænger integranden ikke af y , dvs.

$$F = F(x, y')$$

Da $F'_y = 0$, bliver Eulers ligning

$$\frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$$

Ved integration fås

$$F'_{y'} = c \quad (\text{A.9})$$

Eulers ligning er her blevet reduceret til en mindre kompliceret ligning. Resultatet bruges nedenfor.

I et andet særtilfælde afhænger integranden ikke af x , dvs.

$$F = F(y, y') \quad (\text{A.10})$$

Her indføres y som ny integrationsvariabel (under passende forudsætninger) ved omskrivningen

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}$$

Da kan variationsproblemets funktional skrives

$$\begin{aligned} I\{y\} &= \int_a^b F(y, y') dx \\ &= \int_{y(a)}^{y(b)} F\left(y, \frac{1}{x'}\right) \frac{dx}{dy} dy \\ &= \int_{y(a)}^{y(b)} F\left(y, \frac{1}{x'}\right) x' dy \\ &= \int_{y(a)}^{y(b)} G(y, x') dy \end{aligned}$$

G er nu en funktion af y og x' , hvor y er den uafhængige variable, og x er en funktion af y . Denne situation svarer altså til det første særtilfælde i ligning (A.9) (med x og y ombyttet), og Eulers ligning kan derfor reduceres til

$$\begin{aligned} G'_{x'} &= c && \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dx'} F\left(y, \frac{1}{x'}\right) x' & && \\ = F + x' F'_{y'} \left(- \left(\frac{1}{x'} \right)^2 \right) & && \\ = F - F'_{y'} \left(\frac{1}{x'} \right) & && \\ = F - y' F'_{y'} = c & && \text{(A.11)} \end{aligned}$$

Antag, at y er en løsning til Eulers ligning. Da er

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx} (F - y' F'_{y'}) \\ &= F'_y y' + F'_{y'} y'' - y'' F'_{y'} - y' \frac{d}{dx} F'_{y'} \text{ (kædereglens)} \\ &= y' \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right) \\ &= y' \cdot 0 \text{ (da } y \text{ er løsning til Eulers ligning)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Enhver løsning til Eulers ligning opfylder altså ligning (A.11). Af ovenstående udregning ses, at ligningen ikke kun er opfyldt, hvis y tilfredsstiller Eulers ligning, men også hvis y er en konstant funktion, dvs. $y' = 0$, er ligningen opfyldt. Variationsproblemet i denne rapport antager formen (A.10) og ligning (A.11) vil derfor blive benyttet i stedet for Eulers ligning.

A.3 Variationsregningens fundamentallemma

I sidste afsnit blev der henvist til variationsregningens fundamentallemma, som vil blive vist her.

Lad $f \in C^0[a, b]$ og lad

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0 \quad (\text{A.12})$$

for enhver funktion $\eta \in C^1[a, b]$, for hvilken $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Så er $f(x) = 0$ for alle $x \in [a, b]$.

Sætningen bevises ved modstrid. Antag, at $f(x_0) \neq 0$ for et $x_0 \in]a, b[$. Da f er kontinuert, følger det, at $f(x) \neq 0$ i en omegn af x_0 , dvs. $f(x) \neq 0$ for alle x i et interval $]c, d[$ omkring x_0 . Integralet skal være nul for enhver funktion $\eta \in C^1[a, b]$ og derfor også for funktionen η_0 defineret ved

$$\eta_0 = \begin{cases} (x-c)^2(x-d)^2 & \text{for } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Indsættes η_0 i integralet, fås

$$\int_a^b f(x)\eta_0(x)dx = \int_c^d f(x)\eta_0(x)dx \neq 0$$

hvilket strider mod (A.12), og man kan derfor slutte, at $f(x) = 0$ for alle $x \in]a, b[$. Da f er kontinuert, er også $f(a) = f(b) = 0$, altså $f(x) = 0$ for alle $x \in [a, b]$.

A.4 Variation af funktional

Begrebet variation af en funktional, der er tæt knyttet til variation af en funktion, vil blive defineret i dette afsnit. Lad \bar{y} og $\bar{y} + \delta y$ være to tilladte funktioner ved variationsproblemet med funktionalen

$$I\{y\} \equiv \int_a^b F(x, y, y')dx \quad (\text{A.13})$$

med randbetingelserne $y(a) = y_a$ og $y(b) = y_b$. Som beskrevet i forrige afsnit, er variationen af \bar{y} defineret ved $\delta y = \epsilon \eta(x)$, og $I\{\bar{y} + \delta y\}$ bliver dermed en funktion af ϵ . Antages I det følgende, at F er tilstrækkelig ofte differentiabel, fås ved Taylorudvikling

$$I\{\bar{y} + \delta y\} = I\{y\} + \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon \eta\} \right]_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2)$$

hvor $O(\epsilon^2)$ betegner alle størrelser med hensyn til ϵ af orden højere end eller lig med to. Variationen af funktionalen I omkring den tilladte funktion y defineres ved

$$\delta I\{y\} = \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon \eta\} \right]_{\epsilon=0} \quad (\text{A.14})$$

I ovenstående udtryk indgår ikke led af højere orden end en, da disse ved små variationer er forsvindende små. Begrebet variation af en funktional bruges i nedenstående definition.

A.4.1 Stationær værdi

Hvis $\delta I\{y\} = 0$ for enhver tilladt variation af funktionen y , siges funktionalen at være stationær for små variationer omkring y , og $I\{y\}$ kaldes en stationær værdi for funktionalen.

Indsættes den tilladte variation $\delta y = \epsilon\eta$ og $\delta y' = \epsilon\eta'$ i (A.5), fås

$$\begin{aligned}\delta I\{y\} &= \epsilon \left[\frac{d}{d\epsilon} I\{\bar{y} + \epsilon\eta\} \right]_{\epsilon=0} \\ &= \epsilon \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta + F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\eta'] dx \\ &= \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\epsilon\eta + F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\epsilon\eta'] dx \\ &= \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}')\delta y + F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')\delta y'] dx\end{aligned}$$

som ved partiel integration giver (se udledning af (A.6))

$$\delta I\{\bar{y}\} = \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}') - F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')]\delta y \, dx \quad (\text{A.15})$$

Er funktionalen stationær omkring \bar{y} , er $\delta I\{y\} = 0$, dvs.

$$\delta I\{\bar{y}\} = \int_a^b [F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}') - F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}')]\delta y \, dx = 0 \quad (\text{A.16})$$

som ifølge variationsregningens fundamentallemma giver, at

$$F'_y(x, \bar{y}, \bar{y}') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, \bar{y}, \bar{y}') = 0$$

Denne iagttagelse fører til en vigtig konklusion, nemlig at funktionalen I er stationær for små variationer omkring \bar{y} er ensbetydende med, at \bar{y} tilfredsstiller Eulers ligning. Indsætter man $\bar{y} + \delta y$ for y i ligning (A.13) og rækkeudvikler, ser man, at $\delta I\{y\}$ udgøres af de led i rækken, der er lineært afhængige af δy og $\delta y'$, altså

$$\delta I\{\bar{y}\} = \int_a^b [F'_y\delta y - F'_{y'}\delta y'] dx.$$

Variationen af en funktional dannes derfor ofte ved brug af følgende metode: I funktionalen indsættes for y funktionen $\bar{y} + \delta y$, hvorefter man rækkeudvikler, idet δy og $\delta y'$ betragtes som små størrelser. Variationen af funktionalen udgøres af de led, som er lineært afhængige af δy og $\delta y'$.

A.5 Bibetingelse

Til tider er man interesseret i at inddrage endnu en betingelse, kaldet en bibetingelse, der skal opfyldes af tilladte funktioner ved et forelagt variationsproblem.

Med dette som udgangspunkt betragtes i det følgende opgaven at bestemme funktioner $y = y(x)$, der giver funktionalen

$$I\{y\} \equiv \int_a^b F(x, y, y') dx$$

en stationær værdi, når det forlanges, at y tilfredsstiller randbetingelserne $y(a) = y_a$ og $y(b) = y_b$ samt en bibetingelse af formen

$$J\{y\} \equiv \int_a^b G(x, y, y') dx = l$$

hvor l er en given konstant. Tilladte funktioner skal – udover at opfylde ovennævnte betingelser – tilhøre definitionsområdet $D = C^1[a, b]$. Dette nye variationsproblem kan ved en metode beskrevet i det følgende reduceres til det føromtalt simple variationsproblem. Antages det, at funktionalen I er stationær for små variationer omkring den tilladte funktion y , gælder ligningen

$$\delta I\{y\} = \int_a^b [F'_y \delta y - F'_{y'} \delta y'] dx = 0 \quad (\text{A.17})$$

Størrelsen $\delta I\{y\}$ dannes ud fra den tilladte funktion $\bar{y} + \delta y$ ved brug af den tidligere omtalte metode. Da både y og $y + \delta y$ er tilladte funktioner, skal det gælde, at $J\{\bar{y}\} = J\{\bar{y} + \delta y\} = l$, dvs. J er stationær for små variationer omkring \bar{y} , og dermed er for enhver tilladt variation

$$\delta J\{y\} = \int_a^b [G'_y \delta y + G'_{y'} \delta y'] dx = 0 \quad (\text{A.18})$$

Nu betragtes to funktioner η_1 og η_2 , der begge er tilladte variationer, dvs. tilhører $C^1[a, b]$ og er nul i $x = a$ og $x = b$. α_1 og α_2 defineres til at være de værdier, integralet i (A.18) antager, med η_1 og η_2 indsat, dvs.

$$\begin{aligned} \epsilon \alpha_1 &= \epsilon \int_a^b [G'_y \eta_1 + G'_{y'} \eta'_1] dx \\ \epsilon \alpha_2 &= \epsilon \int_a^b [G'_y \eta_2 + G'_{y'} \eta'_2] dx \end{aligned}$$

Indsættes funktionen $\delta y = \epsilon(\alpha_2 \eta_1 - \alpha_1 \eta_2)$ i (A.18), bliver integralet

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_a^b [G'_y (\alpha_2 \eta_1 - \alpha_1 \eta_2) + G'_{y'} (\alpha_2 \eta'_1 - \alpha_1 \eta'_2)] dx \quad (\text{A.19}) \\ &= \epsilon \alpha_2 \int_a^b (G'_y \eta_1 + G'_{y'} \eta'_1) dx - \epsilon \alpha_1 \int_a^b (G'_y \eta_2 + G'_{y'} \eta'_2) dx \\ &= \epsilon \alpha_2 \alpha_1 - \epsilon \alpha_1 \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

dvs. $\delta y = \epsilon(\alpha_2 \eta_1 - \alpha_1 \eta_2)$ opfylder (A.18). Hvis $\delta I\{\bar{y}\}$ skal være nul for variationen $\epsilon(\alpha_2 \eta_1 - \alpha_1 \eta_2)$, skal det ifølge (A.17) gælde, at

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_a^b [F'_y (\alpha_2 \eta_1 - \alpha_1 \eta_2) - F'_{y'} (\alpha_2 \eta'_1 - \alpha_1 \eta'_2)] dx = 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha_2 \int_a^b [F'_y \eta_1 + F'_{y'} \eta'_1] dx - \alpha_1 \int_a^b [F'_y \eta_2 + F'_{y'} \eta'_2] dx = 0 \end{aligned}$$

Omordnes (A.18) på tilsvarende måde, opnås ligningssystemet

$$\begin{cases} \alpha_2 \int_a^b [F'_y \eta_1 + F'_{y'} \eta'_1] dx - \alpha_1 \int_a^b [F'_y \eta_2 + F'_{y'} \eta'_2] dx = 0 \\ \alpha_2 \int_a^b [G'_y \eta_1 + G'_{y'} \eta'_1] dx - \alpha_1 \int_a^b [G'_y \eta_2 + G'_{y'} \eta'_2] dx = 0 \end{cases}$$

Hvis ovenstående ligningssystem skal have en ikke-triviel løsning, må der gælde, at

$$\int_a^b [F'_y \eta + F'_{y'} \eta'] dx = \lambda \int_a^b [G'_y \eta + G'_{y'} \eta'] dx$$

for $\eta = \eta_1$ og $\eta = \eta_2$. Ovenstående kan, ved partiel integration, på sædvanlig vis omformes til

$$\int_a^b [F'_y - \lambda G'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'} - \lambda G'_{y'})] \eta dx \quad (\text{A.20})$$

Af (A.20) og variationsregningens fundamentallemma kan det konkluderes, at Eulers ligning skal gælde for størrelsen $F - \lambda G$ med funktionen y indsat. Løsningen af et variationsproblem, hvori der indgår en bibetingelse, løses altså ved følgende metode: Af integranden F i den funktional I , der skal antage en stationær værdi, og integranden G i bibetingelsen dannes størrelsen $F - \lambda G$, hvor λ er en konstant. Variationsproblemets løsning skal så findes blandt løsningerne til Eulers ligning med $F - \lambda G$ indsat:

$$(F - \lambda G)'_y - \frac{d}{dx}(F - \lambda G)'_{y'} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Som tidligere nævnt er det variationsproblem, der er tilknyttet det hydrauliske spring, et variationsproblem under en bibetingelse, som i øvrigt antager formen angivet i (A.10), og Eulers ligning kan derfor erstattes af ligningen.

$$(F - \lambda G) - y'(F - \lambda G)'_{y'} = c \quad (\text{A.22})$$

Ovenstående ligning danner i rapporten grundlag for det videre arbejde med variationsproblemet.

B Afgrænsning af differentiallyigningens konstanter

I differentiallyigningen

$$y' = \pm y \frac{\sqrt{y^2(1-y)^2 - (c(1-y) + \lambda)^2}}{|c(1-y) + \lambda|} \quad (\text{B.1})$$

er y' givet ved et udtryk, der indeholder et fjerdegradspolynomium i y . De løsninger til differentiallyigningen, der er interessante for dette projekt, er de funktioner $y(\theta)$, der ved en polær afbildning vil fremstille en polygon. Der foretages derfor en begrænsning af de mulige løsninger, idet det kræves, at løsningerne skal opfylde de betingelser, der tidligere er blevet opstillet for sådanne funktioner. Løsningerne skal opfylde, at der findes et y -interval mellem nul og en, hvor y' kun antager positive værdier (y' skal være nul i intervallets endepunkter). Betragter man fjerdegradspolynomiet i differentiallyigningen, ses, at hvis polynomiet har fire rødder, vil y' være nul i disse og samtidig antage positive værdier mellem de to inderste. Hvis de to inderste rødder, som vil blive refereret til som y_{min} og y_{max} (hvor $y_{min} < y_{max}$), tilhører intervallet $]0,1[$, har man altså en løsning, der opfylder alle de opstillede betingelser til mulige 'polygon-løsninger'. Parametrene c og λ skal desuden begrænses således, at der kun forekommer reelle størrelser i ligningen.

Kravet om reelle løsninger må betyde, at udtrykket under roden skal være positivt, dvs.

$$\begin{aligned} 0 &< (y^2(1-y)^2 - (c(1-y) + \lambda)^2) \Leftrightarrow \\ 0 &< (-y^2 + (1+c)y - (c+\lambda))(-y^2 + (1-c)y + (c+\lambda)) \Leftrightarrow \\ 0 &< P(y)Q(y) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Lad $P^*(y)$ og $Q^*(y)$ betegne de polynomier, der opstår, hvis $-c$ og $-\lambda$ indsættes på c 's og λ 's pladser i de to polynomier. Om $P^*(y)$ og $Q^*(y)$ gælder, at

$$\begin{aligned} &P^*(y)Q^*(y) \\ &= (-y^2 + (1-c)y - (-c-\lambda))(-y^2 + (1+c)y + (-c-\lambda)) \\ &= (-y^2 + (1-c)y + (c+\lambda))(-y^2 + (1+c)y - (c+\lambda)) \\ &= Q(y)P(y) \\ &= P(y)Q(y) \end{aligned}$$

Polynomiernes symmetri viser altså, at en undersøgelse af parametersammensætningerne (c, λ) og $(-c, -\lambda)$ vil give ens resultater. Betragtes $P(y)$ og $Q(y)$ i et c, λ -plan vil en undersøgelse af 1. og 3. kvadrant give samme P og Q . Tilsvarende

vil 2. og 4. kvadrant give det samme. Som følge heraf er det kun nødvendigt at undersøge 1. og 2. kvadrant, dvs. det er muligt at se bort fra det parameterområde, hvor λ er negativ. Dette er gjort i den følgende analyse. I (B.2) kræves, at produktet af de to polynomier skal være positivt, dvs. polynomierne skal have samme fortegn.

Det blev tidligere antaget, at fjerdegradspolynomiet har fire rødder, dvs. begge andengradspolynomier har to rødder, og diskriminanterne skal derfor være positive. Derfor gælder ulighederne

$$\begin{cases} D_P = (1+c)^2 - 4(-1)(-c-\lambda) = (1-c)^2 - 4\lambda > 0 \\ D_Q = (1-c)^2 - 4(-1)(c+\lambda) = (1+c)^2 + 4\lambda > 0 \end{cases}$$

som kan omskrives til

$$-\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 < \lambda < \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \quad (\text{B.3})$$

Da λ er begrænset til kun at antage positive værdier, kan ovenstående ulighed erstattes af uligheden

$$0 < \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \quad (\text{B.4})$$

Polynomierne har rødder givet ved

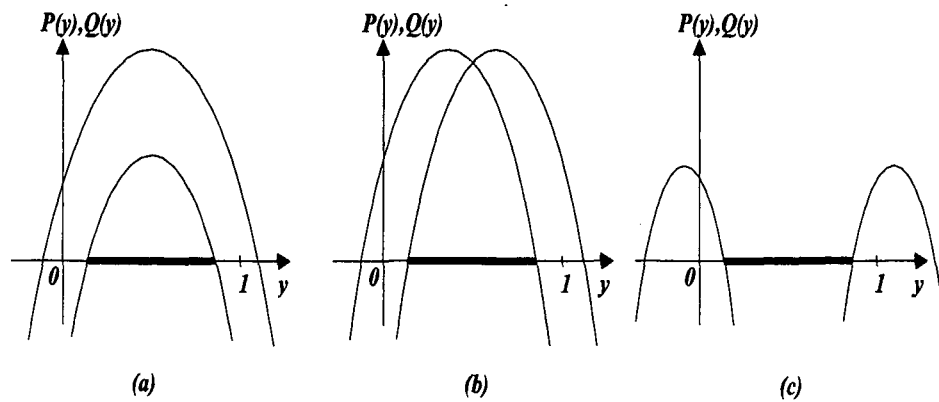
$$\begin{aligned} P(y) = 0 &= \frac{1+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} \\ Q(y) = 0 &= \frac{1-c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda} \end{aligned}$$

Ovenstående rødder vil i det følgende blive betegnet henholdsvis P_- , P_+ , Q_- og Q_+ (hvor f.eks. P_- er den rod i P , der har et minus mellem de to led). Bemærk, at ulighederne $P_- < P_+$ og $Q_- < Q_+$ gælder for alle $c, \lambda \in \mathbb{R}$. Placeringen af polynomiernes rødder må i henhold til kravene, der stilles til løsninger, begrænses til de tilfælde, der er vist på figur B nedenfor.

Da λ er positiv, gælder om Q_+ , at

$$\begin{aligned} Q_+ &= \frac{1-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda} \\ &> \frac{1-c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1-c}{2} + \left|\frac{1+c}{2}\right| \geq 1 \end{aligned}$$

Q_+ kan altså ikke spille rollen som inderste rod, da de inderste rødder skal tilhøre intervallet $]0,1[$. P_+ skal derfor være en af de inderste rødder, dvs. $0 < P_+ < 1$.



Figur B.1 Figuren viser den mulige placering af polynomiernes rødder. De yderste rødder er ikke fastlagt.

Uligheden behandles i to omgange.

$$\begin{aligned}
 P_+ &= \frac{1+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} &< 1 \Rightarrow \\
 \frac{1+c}{2} &< 1 \Rightarrow \\
 c &< 1
 \end{aligned}$$

Kravet $P_+ > 0$ er automatisk opfyldt for $-1 < c < 1$. For $c < -1$ skal gælde

$$\begin{aligned}
 \frac{1+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} &> 0 && \Rightarrow \\
 \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} &> -\frac{1+c}{2} && \Rightarrow \\
 \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda &> \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 && \Rightarrow \\
 -\lambda &> c && \Rightarrow \\
 \lambda &< -c
 \end{aligned}$$

Samlet kan konkluderes, at parameterområdet hvor $\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 < \lambda$, dvs. hvor P -polynomiets diskriminant er negativ, kan udelukkes. For $c > 1$ er $Q_+, P_+ > 1$. En af disse rødder skal spille rollen som inderste rod, men da uligheden $0 < y_{\min} < y_{\max} < 1$ skal gælde, kan dette område ligeledes udelukkes. For $c < -1$ skal gælde, at $\lambda < -c$, hvorfor området, hvor $c < -1$ og $\lambda > -c$ som det sidste, kan udelukkes.

For $0 < \lambda < -c$ er $c < 0$, og der gælder, at

$$\begin{aligned} Q_- &= \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda} \\ &> \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 - c} \\ &= \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1-c}{2} - \frac{1-c}{2} \quad (\text{da } c < 0) = 0 \end{aligned}$$

Derudover gælder

$$\begin{aligned} Q_- &= \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda} \\ &< \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1-c}{2} - \left|\frac{1+c}{2}\right| \leq 1 \end{aligned}$$

I dette område gælder altså, at $0 < Q_- < 1$ og $0 < P_+ < 1$, hvilket giver et vigtigt resultat.

I parameterområdet $0 < \lambda < -c$ er der løsninger af den ønskede type.

I området hvor $-1 < c < 1$ og $-c < \lambda < \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$ gælder

$$\begin{aligned} P_- &= \frac{1+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} \\ &> \frac{1+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 + c} \\ &= \frac{1+c}{2} - \frac{1+c}{2} = 0 \end{aligned}$$

Samt

$$P_- = \frac{1+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} < \frac{1+c}{2} < 1$$

Samlet gælder:

Parameterområdet hvor $-1 < c < 1$ og $-c < \lambda < \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$ indeholder ligeledes de ønskede løsninger.

Parameterværdier, for hvilke de ønskede løsninger forekommer, er altså begrænsede til områderne A og C, som vises på figur B. I det område, der sidst blev

undersøgt, dvs. området hvor $-1 < c < 1$ og $-c < \lambda < \left(\frac{1-c}{2}\right)^2$ gælder

$$\begin{aligned} Q_- &= \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda} \\ &< \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 - c} \\ &= \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1-c}{2} - \left|\frac{1-c}{2}\right| \leq 0 \end{aligned}$$

Den samlede konklusion for dette parameterområde er altså, at $Q_- < 0, Q_+ > 1$ og $P_-, P_+ \in]0, 1[$, dvs. rødderne for P er de inderste rødder. Da $P_- < P_+$ fastsætter P_- den nedre grænse for y (kaldet y_{min}), mens P_+ fastsætter den øvre (y_{max}). Området indeholder de ønskede løsninger.

I parameterområdet, hvor $0 < \lambda < -c$, er

$$\begin{aligned} P_- &= \frac{1+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 + \lambda} \\ &< \frac{1+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 + c} \\ &= \frac{1+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1+c}{2} - \left|\frac{1+c}{2}\right| \leq 0 \end{aligned}$$

Området indeholder altså kun to rødder (P_+ og Q_-) mellem nul og en. En sidste undersøgelse skal fastlægge hvilken rod, der er størst. Bemærk først, at

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda\right) \left(\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda\right) \\ &= \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 - \lambda^2 \\ &= \left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2 - \lambda c - \lambda^2 \end{aligned} \tag{B.5}$$

og at $\lambda < -c$ medfører $-\lambda c - \lambda^2 > 0$, dvs.

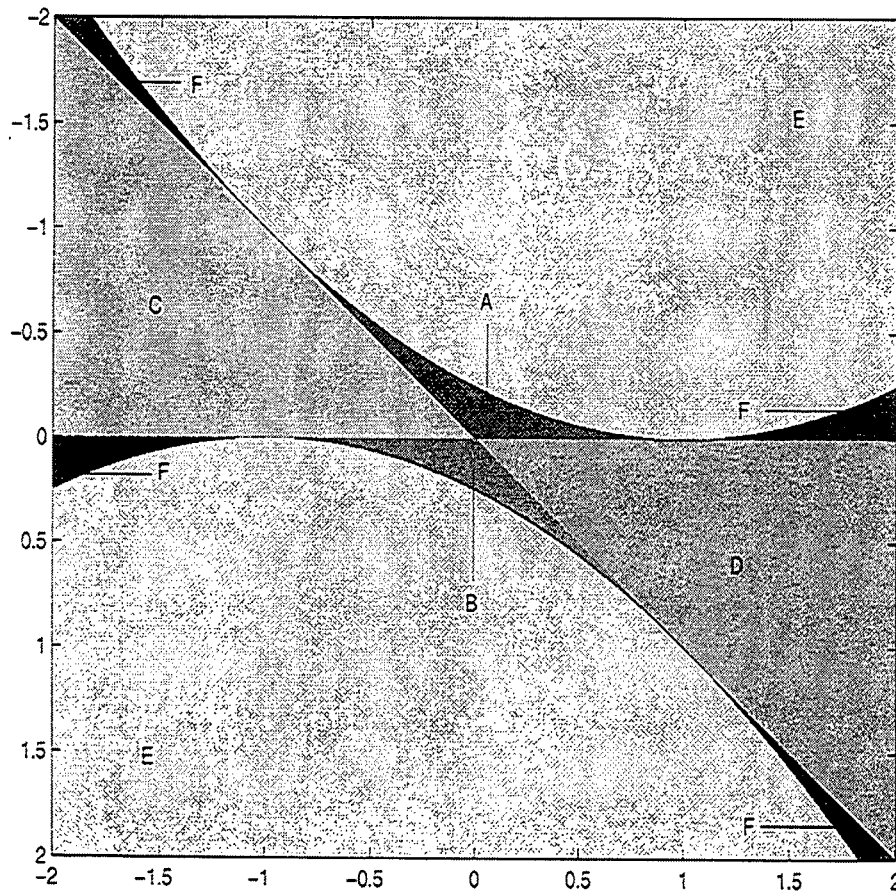
$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2 - \lambda c - \lambda^2} \\ &> \sqrt{\left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2} = \left|\frac{c^2-1}{2}\right| \geq \frac{c^2-1}{2} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Antag nu $Q_- < P_+$. Så gælder

$$\begin{aligned} \frac{1-c}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda} &< \frac{1+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} \Leftrightarrow \\ -c &< \sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda} + \sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda} \Leftrightarrow \\ c^2 &< \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda + \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda \\ &+ 2\sqrt{\left(\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda\right)\left(\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda\right)} \Leftrightarrow \\ c^2 &< \frac{c^2+1}{2} + 2\sqrt{\left(\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - \lambda\right)\left(\left(\frac{1+c}{2}\right)^2 + \lambda\right)} \Leftrightarrow \\ \frac{c^2-1}{2} &< \sqrt{\left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2 - \lambda c - \lambda^2} \quad (\text{fra B.5}) \Leftrightarrow \\ \left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2 &< \left(\frac{c^2-1}{2}\right)^2 - \lambda c - \lambda^2 \quad (\text{tilladt p.g.a. B.6}) \Leftrightarrow \\ 0 &< -\lambda c - \lambda^2 \Leftrightarrow \\ \lambda &< -c \end{aligned}$$

For parameterområdet hvor $0 < \lambda < -c$ kan samlet konkluderes, at $P_- < 0$, $Q_+ > 1$ og $Q_-, P_+ \in]0, 1[$. Desuden gælder, at $Q_- < P_+$, dvs. Q_- definerer den nedre grænse for y , og P_+ definerer den øvre.

De værdier, c og λ kan antage for de løsninger, der ledes efter, er nu fastlagt. Områderne er vist på figur B. I området kaldet A er $y_{\min} = P_-$ og $y_{\max} = P_+$, mens område C har $y_{\min} = Q_-$ og $y_{\max} = P_+$.



Figur B.2 Figuren viser c, λ -planen. Områderne A og C indeholder de ønskede løsninger. De andre områder frasorteres af forskellige årsager. Billedet er fremstillet ved en numerisk analyse. Bemærk at ovenstående kun er udsnit. Områderne er ikke begrænset af figurens ydre rand.

C MatLab-kode

```
%f-funktion for A-området
function p=funA(x,n,beta)

YMIN=x(1); YMAX=x(2);

opl1=1000; T=[0:opl1].*pi./opl1; Z=cos(T);

C=YMIN+YMAX-1;
L=YMIN.*YMAX+1-YMIN-YMAX;
D=YMAX-YMIN;
A=(1-C)./2+sqrt(((C+1)./2).^2+L);
B=(1-C)./2-sqrt(((C+1)./2).^2+L);
Y=D.*(Z+1)./2+YMIN;

F=abs((C.*(1-Y)+L))./(Y.*sqrt((A-Y).*(Y-B)));
G=F./(1-Y);
middelF=(F(1:end-1)+F(2:end))./2;
Theta=pi./opl1.*sum(middelF)-pi./n;
middelG=(G(1:end-1)+G(2:end))./2;
Beta=pi./opl1.*sum(middelG)-beta./(2.*n);

p=Theta.^2+Beta.^2;
-----
%Funktion til at finde polygoner i A-området
function f=findApolygon(n,beta,startgaet)

punkt=fminsearch('funA',startgaet,[],n,beta);

f=[punkt(1),punkt(2),funA(punkt,n,beta)];

YMIN=f(1);
YMAX=f(2);

opl=1000;
T=[0:opl].*2.*n.*pi./opl;
Z=cos(T);
C=YMIN+YMAX-1;
L=YMIN.*YMAX+1-YMIN-YMAX;
D=YMAX-YMIN;
A=(1-C)./2+sqrt(((C+1)./2).^2+L);
```

```

B=(1-C)./2-sqrt(((C+1)./2).^2+L);
Y=D.*(Z+1)./2+YMIN;
F=(C.*(1-Y)+L)./(Y.*sqrt((A-Y).*(Y-B)));

figure(1)
Theta=2.*n.*pi./opl.*cumsum(F);
polar(Theta,Y)
% Der findes løsninger for beta > 3.1608n^2 - 0.0679n + 6.6903
-----
%f-funktion for C-området
function p=funC(x,n,beta)

RHO=x(1);
SIGMA=x(2);

opl1=1000;
T=[0:opl1].*pi./opl1;
Z=cos(T);

C=1-1./RHO;
L=-SIGMA.*C;
D=YMAX-YMIN;
A=((1+C)-sqrt((1+C).^2-4.*(L+C)))./2;
B=((1-C)+sqrt((1-C).^2+4.*(L+C)))./2;
YMIN=((1-C)-sqrt((1-C).^2+4.*(L+C)))./2;
YMAX=((1+C)+sqrt((1+C).^2-4.*(L+C)))./2;

Y=D.*(Z+1)./2+YMIN;
F=abs((C.*(1-Y)+L)./(Y.*sqrt((A-Y).*(Y-B))));
G=F./(1-Y);
middelF=(F(1:end-1)+F(2:end))./2;
Theta=pi./opl1.*sum(middelF)-pi./n;
middelG=(G(1:end-1)+G(2:end))./2;
Beta=pi./opl1.*sum(middelG)-beta./(2.*n);

p=Theta.^2+Beta.^2;
-----
%Funktion til at finde polygoner i C-området
function f=findCpolygon(n,beta,startgaet)

punkt=fminsearch('funC',startgaet,[],n,beta);

f=[punkt(1),punkt(2),funC(punkt,n,beta)];

RHO=f(1);
SIGMA=f(2);

opl=1000;
T=[0:opl].*2.*n.*pi./opl;
Z=cos(T);

```

```

C=1-1./RHO;
L=-SIGMA.*C;
A=((1+C)-sqrt((1+C).^2-4.*(L+C)))./2;
B=((1-C)+sqrt((1-C).^2+4.*(L+C)))./2;
YMIN=((1-C)-sqrt((1-C).^2+4.*(L+C)))./2;
YMAX=((1+C)+sqrt((1+C).^2-4.*(L+C)))./2;
D=YMAX-YMIN;
Y=D.*(Z+1)./2+YMIN;
F=abs((C.*(1-Y)+L))./(Y.*sqrt((A-Y).*(Y-B)));

figure(4)
Theta=2.*n.*pi./opl.*cumsum(F);
polar(Theta,Y)
-----
%Løsning af ny model
clear

rhomin=0.001; rhomax=.999; sigmamin=.001; sigmamax=0.999;
opl=200;
trnrho=abs(rhomax-rhomin)./opl;
trnsigma=abs(sigmamax-sigmamin)./opl;
rhoarray=[rhomin:trnrho:rhomax];
sigmaarray=[sigmamin:trnsigma:sigmamax];

[Rho,Sigma]=meshgrid(rhoarray,sigmaarray);
B=1./Rho-1;
A=3.*B./(2.*Sigma);
Theta=3.*B./A.^2.*sqrt(B);

figure(1)
n=[1:2:13];
[C1,h1] = contour(rhoarray,sigmaarray,Theta,[pi./n])
xlabel('rho')
ylabel('sigma')
zlabel('Theta')
clabel(C1,h1)

rho=.48;
sigma=.7;
b=1./rho-1;
a=3.*b./(2.*sigma);
zmax=3.*b./(2.*a);
dz=zmax./1000;
z=[0.001:dz:zmax];
dthetadz=z./sqrt(b-2.*a.*z./3);
dtheta=dthetadz.*dz;
Theta=cumsum(dtheta);
y=1-z;
Thetastjerne=3.*b.*sqrt(b)./a.^2

```



```
pi./n
figure(2)
for i=1:n
    polar(2.*(i-1).*pi/n+Theta,y,'k.')
    hold on
    polar(2.*(i-1).*pi/n-Theta,y,'k.')
end
```

Litteratur

- [1] Thomas Bohr. *The Long Polygong Song*. Upubliceret skrift, Niels Bohr Institutttet, Blegdamsvej 17, 2100 København, 1998.
- [2] Erik B. Hansen. *Variationsregning*. Polyteknisk Forlag, Anker Engelundsvej 1, 2800 Lyngby, 1993.
- [3] Anders Marcussen. *Specialeafhandling. Det hydrauliske spring; Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler*. CATS, Niels Bohr Institutttet, Blegdamsvej 17, 2100 København, 1999.
- [4] Adam E. Hansen og Anders Haaning. *Bachelorprojekt. Hvirvlen i det Cirkulære Hydrauliske Spring*. Niels Bohr Institutttet, Blegdamsvej 17, 2100 København, 1995.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: <http://mmf.ruc.dk>
eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialrapport af: Stine Korremann
Vejleder: Dorte Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Frits Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss
- 342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND
AND SUPPLY
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE
AF EL-PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97

Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen

345/98

Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen

346/98

Klyngedannelse i en hulkatode-forstevningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98

Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek

348/98

Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact
assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen

349/98

Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i
arbejdsmarkeduddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98

OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98

Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98

The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen

353/98

Problemløsning og modellering i en almindende matematikundervisning
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

354/98

A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98

Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

- 356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K. W.
Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an
Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
- 359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)
- 360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projekt-rapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonnè
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhard Boos-Bavnbek, Kenro Furutani
- 362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspring af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen
- 364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjærup
- 365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege
- 366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX
og IMPUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

- 367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhard Boos-Bavnbek
- 368/99 Kvarterrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF
BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen
- 370/99 OFGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter
tekst nr. 350/98
- 371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik
undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermansson
Vejleder: Mogens Niss
- 372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:
Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen
- 373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu
Theorem
by: Bernhard Boos-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki
- 374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen
- 375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-
1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik
- 376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder
- 377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and thermal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

- 389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
Vejleder: Johnny Ottesen
-
- 390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System[#]; Thomas Engberg Pedersen[#]; Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2[#]; Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Mørthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen^{**}, Bent Sørensen[#]
[#]Indtil 1/1-2000 Elkraft, [#] fra 1/5-2000 Cowi Consult
^{*}Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ^{**} fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram
- 391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inani Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreassen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.
- 393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.
- 395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedge
- 396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedge

- 379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En trefjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 380/00 MATEMATISK MODELLELING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovascularære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen
- 381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænseområdet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedge
- 382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreassen, John Villumsen
- 383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss
- 384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre
- 385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski
- 386/00 Neutrale mandafordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 388/00 Behandling af impuls ved kilder og drøn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

- 397/01 En undersøgelse af solventis og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 398/01 Kursusmateriale til "Lineare strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt
- 399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss
- 400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen
- 401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen
- 402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen
- 403/01 Generaliseringer i integralteorien
- En undersøgelse af Lebesgue-integralet, Radon-integralet og Perron-integralet
Et 2. modul matematikprojekt udarbejdet af: Stine Timmermann og Eva Uhre
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Tinne Hoff Kjeldsen
- 404/01 "Mere spredt fagting"
Af: Jens Højgaard Jensen
- 405/01 Real life routing
- en strategi for et virkeligt vrp
Et matematisk modelprojekt af: David Heiberg Backchi, Rasmus Brauner Godiksen, Uffe Thomas Volmer Jankvist, Jørgen Martin Poulsen og Neslihan Saglanmak
Vejleder: Jørgen Larsen
- 406/01 Opgavesamling til dybdekursus i fysik
Eksamensopgaver stillet i perioden juni 1976 til juni 2001
Denne tekst erstatter tekst nr. 25/1980 + efterfølgende tillæg
- 407/01 Unbounded Fredholm Operators and Spectral Flow
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matthias Lesch, John Phillips

- 408/02 Weak UCP and Perturbed Monopole Equations
By: Bernhelm Booss-Bavnbek, Matilde Marcolli, Bai-Ling Wang
- 409/02 Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy
- et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning (for Gauss, Abel og Galois
Videnskabsfagsprojekt af: David Heiberg Backchi, Uffe thomas Volmer Jankvist, Neslihan Saglanmak
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 410/02 2 projekter om modellering af influenzaepidemier
Influenzaepidemier- et matematisk modelleringsprojekt
Af: Claus Jørgensen, Christina Lohfert, Martin Mikkelsen, Anne-Louise H. Nielsen
Vejleder: Morten Blomhøj
Influenza A: Den tilbagevendende plage - et modelleringsprojekt
Af: Beth Paludan Carlsen, Christian Dahmcke, Lena Petersen, Michael Wagner
Vejleder: Morten Blomhøj