TEKST NR 398 2001

Kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra og analyse"
(E1)

Mogens Brun Heefelt

PRIS: 36.25
KURSUSMATERIALE
9 789673 011766
31.05.2001

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA · Roskilde Universitetscenter · Postboks 260 · DK-4000 Roskilde · tlf 4674 2263 · fax 4674 3020

Mogens Brun Heefelt: Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1).

IMFUFA tekst nr. 398/2001 66 sider ISSN 0106-6242

---

*Denne tekst er et kursusmateriale til kurset "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1), og den indgår som supplement til lærebogen - **Friedberg, Insel and Spence**. "Linear Algebra", 3rd Ed., (1997).*

Denne tekst erstatter lærebogens afsnit om nulrum for lineære differential-operatorer samt supplerer lærebogens afsnit om jordans normalform og om løsning af et system af første ordens lineære differentialligninger.

Endvidere indeholder teksten en omfattende opgavesamling, hvor de sidste elleve sider er ældre eksamenssæt.

Indholdsfortegnelse.

Afsnit A: Invariante underrum

I dette afsnit vil vi vise nogle sætninger om invariante underrum, som vil blive anvendt i de to følgende afsnit.

Lad os betragte et vektorrum V over $\mathbb{C}$, og lad A: V → V være en lineær operator på V. Er videre W et underrum af V, da kaldes W **et A-invariant underrum**, hvis

$$Aw \in W \text{ for alle } w \in W$$

dvs, at

$$A(W) \subseteq W.$$

Eksempel A1. Er v en egenvektor for operatoren A svarende til egenværdien λ vil $W = \text{span}\{v\}$ være et A-invariant underrum, da det for alle $w \in W$ gælder, at $Aw = \lambda w \in W$. #

Er p et polynomium af n-te grad med komplekse koefficienter

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots . + a_n t^n$$

kan man ud fra den lineære operator A definere en ny lineære operator

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots . + a_n A^n.$$

hvor I er den identiske operator. Ved simpel udregning ses da, at operatorerne A og p(A) vil kommutere, dvs

$$Ap(A) = p(A)A.$$

Er q tilsvarende et polynomium af k-te grad med komplekse koefficienter, defineres på samme måde operatoren

$$q(A) = b_0 I + b_1 A + \dots . + b_k A^k.$$

Man får igen ved simple udregninger, at p(A) og q(A) vil kommutere

$$q(A)p(A) = p(A)q(A)$$

da $A^i A^j = A^j A^i$.

Eksempel A2. Er p et polynomium af grad n, og er $W = N(p(A))$ - nulrummet for p(A) - skal vi se, at W er A-invariant.

Er $w \in W$, dvs at $p(A)w = 0$, kan vi slutte, at

$$p(A)(Aw) = p(A)Aw = A(p(A)w) = 0,$$

hvilket viser, at $Aw \in W$. #

Sætning A3. Lad nu p være et polynomium af grad n, og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t)p_2(t)$, hvor p_1 og p_2 begge er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Lad V være nulrummet for operatoren $p(A)$ - $N(p(A))$, da skal vi vise, at

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

dvs V er en direkte sum af $W_1 = N(p_1(A))$ og $W_2 = N(p_2(A))$.

Da p_1 og p_2 har største fælles divisor 1, findes polynomier q_1 og q_2, således at der gælder ligningen

$$q_1(t)p_1(t) + q_2(t)p_2(t) = 1,$$

og derfor kan vi også definere operatorligningen

$$(*) \qquad q_1(A)p_1(A) + q_2(A)p_2(A) = I.$$

Vi lader nu (*) virke på et vilkårligt $v \in V$, da er

$$v = q_1(A)p_1(A)v + q_2(A)p_2(A)v.$$

Her skal vi vise, at første led på højre side i ligningen tilhører W_2, idet

$$p_2(A)[q_1(A)p_1(A)v] = q_1(A)[p_2(A)p_1(A)]v = q_1(A)p(A)v = 0,$$

da $v \in N(p(A))$. Tilsvarende kan man vise, at det andet led tilhører W_1, og dermed er ethvert element i V sum af et element fra W_1 og et element fra W_2.

Vi mangler nu at vise, at summen er direkte, dvs at

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

Lad os derfor antage, at $w \in W_1 \cap W_2$, da vil

$$p_1(A)w = 0 \qquad \text{og} \qquad p_2(A)w = 0$$

(w ligger jo i både W_1 og W_2). Lader vi nu (*) virke på w, fås at

$$w = q_1(A)p_1(A)w + q_2(A)p_2(A)w = 0 + 0 = 0$$

og dermed er summen af W_1 og W_2 direkte. #

Denne sætning kan umiddelbart generaliseres til:

Sætning A4. Lad p være et polynomium af grad n, og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_k(t)$, hvor $p_1, \ldots, p_k$ alle er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Da er

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots \oplus N(p_k(A)).$$

Dette vises ved induktion. For $k = 2$ er det vist i sætning A3. Lad os nu antage, at sætningen er korrekt for $k = j$, dvs at

$$N(q(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots\ldots \oplus N(p_j(A)),$$

når $q(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_j(t)$, og polynomierne har største fælles divisor 1. Vi betragter nu

$$p(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_j(t) \cdot p_{j+1}(t)$$

hvor polynomierne har største fælles divisor 1. Da nu produktet af de første j af polynomierne, dvs

$$q(t) = p_1(t) \cdot \ldots \cdot p_j(t)$$

opfylder sætningen, vil

$$N(q(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots\ldots \oplus N(p_j(A)).$$

Samtidig er $$p(t) = q(t) \cdot p_{j+1}(t),$$

hvor q og p_{j+1} har største fælles divisor 1, og ifølge sætning A3 bliver

$$N(p(A)) = N(q(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Med $N(q(A))$ indsat bliver derfor

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \ldots\ldots \oplus N(p_j(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Hermed er sætningen bevist. #

En simpel konsekvens af denne sætning bliver nu:

Sætning A5. Lad polynomiet p have følgende faktoropløsning

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1}(t - a_2)^{m_2} \ldots (t - a_k)^{m_k},$$

hvor alle a_i-er er forskellige. Da vil $N(p(A))$ være direkte sum af underrummene $U_1, U_2, \ldots, U_k$, hvor

$$U_i = N((A - a_i I)^{m_i}).$$

Da polynomierne $p_i(t) = (t - a_i)^{m_i}$ og $p_j(t) = (t - a_j)^{m_j}$ for $i \neq j$ vil have største fælles divisor 1, følger sætningen umiddelbart af sætning A4. #

Afsnit B: Nulrum for lineære differentialoperatorer

I dette afsnit skal vi arbejde på at bestemme en basis for nulrummet til en lineær differentialoperator af n-te orden givet ved

$$L = D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots\ldots + b_1D + b_0D^0$$

hvor alle b_i er reelle konstanter og hvor D^0 er den identiske operator.

I denne sammenhæng vil vi gå ud fra, at differentialoperatoren D afbilder vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R})$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner - ind i sig selv. Undervejs vil det dog være hensigtsmæssigt at udvide betragtningerne til rummet $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ - rummet af alle komplekse, vilkårligt ofte differentiable funktioner af en reel variabel, dvs funktioner

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

hvor f_1, $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Er der givet polynomiet

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots. + b_1t + b_0,$$

kan vi direkte ud fra differentialoperatoren D definere diffentialoperatoren $L = p(D)$.

Man skal iøvrigt være opmærksom på, at spørgsmålet om at finde nulrummet for $p(D)$ netop er det samme som at finde alle funktioner, der løser den n-te ordens lineære differentialligning

$$(D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \ldots\ldots + b_1D + b_0D^0)f(t) = 0.$$

Polynomiet p vil - såfremt t varierer over de komplekse tal - have en faktoropløsning i førstegradspolynomier som fx

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1}(t - a_2)^{m_2}\ldots.(t - a_k)^{m_k},$$

hvor nogle a_i-er kan være komplekse, men således at de parvist er komplekst konjugerede.

Af sætning A5 kan vi nu slutte, at en basis for $N(p(D))$ er fundet, når man har fundet en basis for hvert af nulrummene

$$U_i = N((D - a_iD^0)^{m_i}).$$

Til dette formål får vi brug for følgende sætning:

Sætning B1. $(D - aD^0)^m f(t) = e^{at}D^m(e^{-at}f(t))$

Sætningen vises ved induktion efter m. For m = 1 får man

$$e^{at}D(e^{-at}f(t)) = e^{at}[-ae^{-at}f(t) + e^{-at}f'(t)]$$
$$= f'(t) - af(t) = (D - aD^0)f(t).$$

Antages sætningen nu korrekt for m = k, skal man vise, at den også gælder for m = k + 1. Det antages altså, at

$$(D - aD^0)^k f(t) = e^{at}D^k(e^{-at}f(t)),$$

som vi skal bruge på formen

$$e^{-at}(D - aD^0)^k f(t) = D^k(e^{-at}f(t)).$$

Da er

$$e^{at}D^{k+1}(e^{-at}f(t)) = e^{at}D[D^k(e^{-at}f(t))] =$$
$$e^{at}D[e^{-at}(D - aD^0)^k f(t)] =$$
$$e^{at}[-ae^{-at}(D - aD^0)^k f(t) + e^{-at}D(D - aD^0)^k f(t)] =$$
$$(D - aD^0)(D - aD^0)^k f(t) = (D - aD^0)^{k+1}f(t).\ \#$$

Vi kan af denne sætning se, at man fastlægger nulrummet for operatoren $(D - aD^0)^m$, ved at finde de funktioner f, som opfylder

$$(D - aD^0)^m f(t) = 0 \quad \text{eller} \quad D^m(e^{-at}f(t)) = 0.$$

Funktioner, der opfylder $D^m g(t) = 0$, er alle polynomier af grad højst m - 1, dvs

$$e^{-at}f(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{m-1}t^{m-1}$$

hvor alle c_i kan vælges frit. Derfor er

$$f(t) = (c_0 + c_1 t + \ldots + c_{m-1}t^{m-1})e^{at}$$

hvilket betyder at nulrummet bliver

$$N((D - aD^0)^m) = \text{span}\{e^{at}, te^{at}, \ldots, t^{m-1}e^{at}\}.$$

Eksempel B2. Med $L = D^2 + 4D + 3D^0$ bliver det tilhørende andengradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$, og derfor er nulrummet $N(L) = \text{span}\{e^{-t}, e^{-3t}\}$.

Eksempel B3. Med $L = D^2 + 4D + 4D^0$ bliver det tilhørende andengradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2$, og derfor er nulrummet $N(L) = \text{span}\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$.

Eksempel B4: Med $L = D^4 - 2D^2 + D^0$ bliver det tilhørende fjerdegradspolynomium $p(t) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t + 1)^2(t - 1)^2$, og derfor er nulrummet $N(L) = \text{span}\{e^{-t}, te^{-t}, e^t, te^t\}$.

De nævnte eksempler har kun behandlet den situation, hvor faktoropløsningen bliver reel, men vi tog udgangspunkt i den situation, at faktoropløsningen også kunne være kompleks.

Fx vil andengradspolynomiet $\qquad p(t) = t^2 + 4t + 5$

have faktoropløsningen $\qquad p(t) = (t + 2 + i)(t + 2 - i)$.

Og generelt vil komplekse rødder i et andengradspolynomium med reelle koefficienter være komplekst konjugerede, dvs er $\alpha + i\beta$ rod vil også $\alpha - i\beta$ være rod, og man har at

$$p(t) = (t - (\alpha + i\beta))(t - (\alpha - i\beta)) = t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 + \beta^2.$$

Derfor burde nulrummet for operatoren

$$p(D) = D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)D^0$$

have følgende basis

$$\{e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}\}.$$

Disse to funktioner er imidlertid ikke reelle, og de tilhører derfor ikke $C^\infty(\mathbb{R})$. De vil imidlertid begge tilhører $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Vi vil nu undersøge, om det med en passende valgt (kompleks) linearkombination af disse to funktioner vil være muligt at bestemme en reel funktion. Hertil kan vi benytte, at

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t).$$

Man kan således omskrive et element i nulrummet på følgende måde

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + c_2e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}[(c_1+c_2)\cos\beta t + i(c_1-c_2)\sin\beta t] \\ &= k_1e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

netop når

$$c_1 = (k_1 - ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 + ik_2)/2$$

med $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, dvs når c_1 og c_2 vælges komplekst konjugerede, vil f blive en reel funktion.

Vi kan således se, at også $\{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t\}$ vil være en basis for $N(p(D))$, og den har tilmed den fordel, at dens elementer er reelle funktioner - og de tilhører derfor $C^\infty(\mathbb{R})$.

Eksempel B5. Med $L = D^2 + 4D + 5D^0$ bliver det tilhørende andengradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 5 = (t + 2 + i)(t + 2 - i)$ som vist ovenfor, og man har da $N(L) = \text{span}\{e^{-2t}\cos t,\ e^{-2t}\sin t\}$.

Hvis $\alpha + i\beta$ er rod i polynomiet med multiplicitet k, vil tilsvarende $\alpha - i\beta$ være rod i polynomiet med multiplicitet k, og man kan på en tilsvarende måde som ovenfor vise, at de to komplekse elementer $t^i e^{(\alpha+i\beta)t}$ og $t^i e^{(\alpha-i\beta)t}$ kan erstattes med de to reelle

$$t^i e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{og} \quad t^i e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Herefter kan vi opsamle vores resultater om fastlæggelse af en basis for nulrummet til den lineære differentialoperator $L = p(D)$ hvor

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0.$$

a) Er a en enkelt reel rod i $p(t)$ vil

$$e^{at} \in N(L)$$

b) Er a en reel rod med multiplicitet k i $p(t)$ vil

$$e^{at},\ te^{at},\ \ldots,\ t^{k-1}e^{at} \in N(L)$$

c) Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ enkle, komplekst konjugerede rødder i $p(t)$, vil

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t \in N(L)$$

d) Er endelig $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ komplekst konjugerede rødder med multiplicitet k i $p(t)$, vil

$$\begin{aligned}&e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,\\ &e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \in N(L)\end{aligned}$$

Egenrum for lineære differentialoperatorer.

Er μ egenværdi for en lineær afbildning $g: V \to V$, vil samtlige egenvektorer for g svarende til egenværdien μ - sammen med 0-elementet - være et underrum. Dette underrum kaldes egenrummet for μ - E_μ. Vi ved endvidere, at dette egenrum er nulrummet for afbildningen $g - \mu i$, dvs $E_\mu = N(g-\mu i)$.

Er således $L: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ en lineær differentialoperator, kan man efterspørge egenfunktionerne for L svarende til en egenværdi

μ, dvs finde samtlige funktioner $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, som opfylder

$$Lf = \mu f,$$

hvilket - som nævnt ovenfor - svarer til at finde en basis for nulrummet $N(L - \mu D^0)$.

Eksempel B6: Vi betragter differentialoperatoren $L = D^3 - 3D - 2D^0$ og vil finde en basis for egenrummet svarende til egenværdien -4. Dvs vi skal finde funktioner f, der opfylder $Lf = -4f$, eller en basis for nulrummet for operatoren $L + 4D^0$. Dette modsvarer polynomiet $p(t) = t^3 - 3t - 2 + 4 = t^3 - 3t + 2 = (t - 1)^2(t + 2)$. Da er

$$E_{-4} = N(L + 4D^0) = \text{span}\{e^t, te^t, e^{-2t}\}.$$

Afsnit C: Diagonalisering og jordans normalform.

Som det fremgår af lærebogen kan en lineær afbildning T på et n-dimensionalt komplekst vektorrum V diagonaliseres, hvis det karakteristiske polynomium faktoriserer helt, og hvis der findes en basis for V af egenvektorer for T.

Betegner α standardbasen i V, skal **A** betegne den til T svarende nxn matrix i forhold til α-basen. Man kan nu udfolde diagonaliseringen af T. Antager vi, at **A** - og derfor også T - har egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - hvor flere egenværdier kan være ens - med de tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ - som er lineært uafhængige - da gælder at

$$\forall i : \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i .$$

Indføres matricen $\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$, hvor **Q** i søjlerne netop har alle de lineært uafhængige egenvektorer, er

$$\begin{aligned}\mathbf{AQ} &= (\mathbf{Av}_1, \mathbf{Av}_2, \ldots, \mathbf{Av}_n) = (\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{v}_n) \\ &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{QD}\end{aligned}$$

hvor **D** er en diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen, netop opskrevet i den samme rækkefølge, som egenvektorerne er opskrevet i transformationsmatricen **Q**. Da søjlerne i **Q** er lineært uafhængige svarer $\mathbf{AQ} = \mathbf{QD}$ til at

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}.$$

Spørgsmålet er nu, hvad der sker, når man <u>ikke</u> har en basis for $\mathbb{C}^n$ af egenvektorer for **A** - eller en basis for V af egenvektorer for T.

I lærebogen besvares det med et længere bevis for sætning 7.4, som bygger på et endnu længere bevis for sætning 7.3. I forlængelse af afsnit A er vi imidlertid i stand til at give et meget kort bevis for indholdet i sætning 7.4 - dog med en anden ordlyd.

I det følgende betragtes igen det endeligdimensionale vektorrum V og den lineære afbildning $T: V \rightarrow V$, hvor vi forudsætter, at det karakteristiske polynomium for T - p(t) faktoriserer helt, så T har egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ med multiplicitet $m_1, m_2, \ldots, m_k$ og $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Endvidere defineres det **generaliserede egenrum** for T svarende til

λ ved

$$K_\lambda(T) = \{ x \in V \mid \exists p \in \mathbb{N}: (T - \lambda I)^p(x) = 0\}.$$

I sætning 7.1 og sætning 7.2 i lærebogen bevises det, at $K_\lambda(T)$ er et T-invariant underrum, samt at

$$K_\lambda(T) = N((T - \lambda I)^m)$$

hvor m = mult(λ). Endvidere har vi fra sætning 5.28 - dvs Cayley-Hamiltons sætning, at

$$p(T) = T_0$$

hvor T_0 er nulafbildningen - dvs $\forall x \in V$: $T_0(x) = 0$.

Vi vil nu være i stand til at bevise sætning 7.4 - dog i en anden formulering:

Sætning C1: V er direkte sum af de generaliserede egenrum for T.

Da det karakteristiske polynomium for T faktoriserer helt vil

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2}....(t - \lambda_k)^{m_k},$$

og ifølge sætning A5, vil

$$N(p(T)) = N((T - \lambda_1 I)^{m_1}) \oplus N((T - \lambda_2 I)^{m_2}) \oplus .... \oplus N((T - \lambda_k I)^{m_k}).$$

Da endvidere

$$K_\lambda(T) = N((T - \lambda I)^m)$$

bliver

$$N(p(T)) = K_{\lambda_1}(T) \oplus K_{\lambda_2}(T) \oplus ... \oplus K_{\lambda_k}(T).$$

Da tillige

$$p(T) = T_0$$

er

$$N(p(T)) = V$$

og vi har så bevist, at

$$V = K_{\lambda_1}(T) \oplus K_{\lambda_2}(T) \oplus ... \oplus K_{\lambda_k}(T). \ \#$$

Dette kan let reformuleres til indholdet i sætning 7.4. Er β_i således en basis af generaliserede egenvektorer for rummet $K_{\lambda_i}(T)$, bliver en basis β for V af generaliserede egenvektorer fastlagt ved

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup ... \cup \beta_k$$

hvor $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$ for alle i,j = 1,2,...,k med i $\neq$ j.

Da alle de generaliserede egenrum er T-invariante, kan man bestemme den til T svarende matrix men hensyn til β, ved at sammensætte den af blokmatricer i diagonalen, hvor hver blok kun er vedrører en basis β_i.

Af sætning 7.7 i lærebogen fremgår det endvidere, at en sådan basis $ß_i$ er sammensat af et antal cykler - $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_q$ af generaliserede egenvektorer. Er der q egenvektorer er der også q cykler - for den pågældende egenværdi - da netop startvektoren af hver sådan cykel er en egenvektor. En cykel af generaliserede egenvektorer for T svarende til egenværdien λ er på formen

$$\{(T-\lambda I)^{p-1}(v),\ (T-\lambda I)^{p-2}(v),\ \ldots,\ (T-\lambda I)(v),\ v\}$$

Denne cykel siges at have længde p.

Da hver sådan cykel γ_j er basis for et T-cyklisk underrum - der jo er T-invariant, kan der svarende til hver cykel bestemmes en blokmatrix som en del af blokmatricen svarende til basen $ß_i$.

Vi betragter igen matricen **A** svarende til T i standardbasen α og det tilfælde, hvor en cykel $\gamma = \{v_1, v_2, .., v_p\}$ for egenværdien λ har længden p. Startvektoren v_1 - dvs den eneste egenvektor opfylder jo, at

$$\mathbf{Av}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 \qquad \text{eller} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0$$

De resterende p-1 vektorer i cyklen opfylder da følgende algoritme - jfr definitionen på en sådan cykel

$$\begin{aligned}
\mathbf{Av}_2 &= \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 && \text{eller} && (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\\
\mathbf{Av}_3 &= \lambda\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 && \text{eller} && (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2\\
&\ \ \vdots\\
\mathbf{Av}_p &= \lambda\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1} && \text{eller} && (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p-1}
\end{aligned}$$

Bemærk her, at $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{p-1}\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_1$ i overensstemmelse med definitionen af en cykel med længde p.

Sættes som før $\quad \mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$

bliver

$$\begin{aligned}
\mathbf{AQ} &= (\mathbf{Av}_1, \mathbf{Av}_2, \ldots, \mathbf{Av}_p)\\
&= (\lambda\mathbf{v}_1, \lambda\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_p+\mathbf{v}_{p-1})\\
&= \mathbf{Q}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0\\ . & . & \ldots & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}\\
&= \mathbf{QJ}
\end{aligned}$$

Denne matrix **J** kaldes en **jordanmatrix**, og den består af en egenværdi for **A** - og for T - i diagonalen og af et 1-tal lige over diagonalen i de søjler, hvor der i **Q** står en generaliseret egenvektor. De p lineært uafhængige vektorer, der udgør søjlerne i **Q**, kaldes tilsvarende en **jordanbasis**.

Eksempel C2. Med matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bliver det karakteristiske polynomium $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1 - \lambda)^3$, dvs $\lambda = 1$ er den eneste egenværdi. Af $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0$ kan man nu bestemme egenvektorerne svarende til egenværdien 1, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og man får, at $-z = 0$ og $x + y = 0$. Således bliver den eneste egenvektorretning fastlagt til fx

$$\mathbf{v}_1 = (-1,1,0).$$

Benyttes nu algoritmen skal vi altså finde $\mathbf{v}_2$, således at

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvilket giver $-z = -1$ og $x + y = 1$ dvs

$$\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$$

Bemærk at man lige så vel kunne have valgt $(0,1,1)$ eller $(½,½,1)$

Algoritmen skal fortsættes, således at man finder $\mathbf{v}_3$ af

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der giver $-z = 1$ og $x + y = 0$, dvs vektorretningen bliver fx

$$\mathbf{v}_3 = (0,0,-1).$$

Herefter bliver matricerne

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og for at sikre at der er regnet rigtig skal $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$, hvilket en simpel udregning bekræfter. #

Eksempel C3: I eksemplet ovenfor kunne man også benytte den algoritme, der er beskrevet i lærebogen, dvs at man udregner

$$\mathrm{rang}((\mathbf{A} - \mathbf{I})^j)$$

for j = 1,2,3. Da $\mathrm{rang}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 2$ vil 'prikdiagrammet' fortælle, at der kun er én cykel af generaliserede egenvektorer for $\lambda = 1$. Af $\mathrm{rang}((\mathbf{A} - \mathbf{I})^3) = 0$ ses det, at $K_1 = \mathbb{R}^3$, og derfor kan en basis for K_1 fx være standardbasen. Vi kan da fx vælge

$$\mathbf{v} = (0,0,1)$$

som slutvektor, og da bliver

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = (-1,0,-1) \quad \text{og} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\mathbf{v} = (1,-1,0)$$

der vi give en matrix $\mathbf{Q}$ der bortset fra fortegnene er som i eksempel C2.

Havde man i stedet valgt $\mathbf{v} = (1,0,0)$ eller $\mathbf{v} = (0,1,0)$ som slutvektor, ville man få

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = (0,1,1) \quad \text{og} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\mathbf{v} = (-1,1,0)$$

og dermed bliver fx

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og igen kan man ved en simpel udregning bekræfte, at $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$. #

Eksempel C4. Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -(1 + \lambda)^3$, dvs den eneste egenværdi er -1 med $\mathrm{mult}(-1) = 3$. Af $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ får man tre ens ligninger af formen

$$x - 2y + z = 0,$$

og en basis for egenrummet E_{-1} er fx

$$\{(2,1,0);(1,0,-1)\}.$$

Der vil derfor være to cykler af generaliserede egenvektorer, og af

$$\mathrm{rang}((\mathbf{A} + \mathbf{E})^2) = 0$$

får man som i forrige eksempel, at $K_{-1} = \mathbb{R}^3$. Man kan så fx vælge slutvektoren

$$\mathbf{v} = (1,0,0).$$

Bemærk, at man også kunne have valgt $(0,0,1)$ eller $(0,1,0)$.

Da får man, at

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = (1,1,1)$$

og de to cykler er $\gamma_1 = \{(1,1,1);(1,0,0)\}$ og $\gamma_2 = \{(1,0,-1)\}$. Herefter bliver matricerne

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det bekræftes ved udregning, at matricerne opfylder $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$. #

Eksempel C5: Matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2 - \lambda)^3(6 - \lambda)$.

Da $\mathrm{mult}(2) = 3$, skal vi først undersøge $\mathrm{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$, og med

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ser man, at 2. og 4. søjle er ens, og at de tre første søjler er lineært uafhængige, dvs $\mathrm{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 3$. Derfor fortæller 'prikdiagrammet' for denne egenværdi, at der kun er en egenvektorretning. Den er en løsning til $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, fx

$$\mathbf{v} = (0,1,0,-1).$$

Når vi herefter skal bestemme den cykel γ af generaliserede egenvektorer, der svarer til $\lambda = 2$, ved vi at $\mathrm{rang}((\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3) = 1$ - hvorfor? Af

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3 = \begin{pmatrix} -8 & 32 & 40 & 32 \\ -10 & 40 & 50 & 40 \\ -8 & 32 & 40 & 32 \\ 2 & -8 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

ser vi $K_2 = N((\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3) = \{(x,y,z,w) \mid x - 4y - 5z - 4w = 0\}$, og man kan vælge en basis for dette rum, fx

$$\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\} = \{(0,1,0,-1);(1,-1,1,0);((4,1,0,0)\},$$

hvor $\mathbf{u}$ er den fundne egenvektor og $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$, så de kan ikke benyttes som slutvektor i cyklen γ - hvorfor?

Tilbage er $\mathbf{w}$, og af

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{w} = (6,9,6,-15) \quad \text{og} \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2\mathbf{w} = (0,18,0,-18)$$

finder vi, at vektorerne i cyklen γ er

$$\{(0,18,0,-18);(6,9,6,-15);(4,1,0,0)\}.$$

Af $(\mathbf{A} - 6\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ finder vi, at en egenvektor svarende til $\lambda = 6$ vil være

$$\mathbf{v} = (4,5,4,-1).$$

Herefter har vi fundet matricerne

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 & 4 \\ 18 & 9 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ -18 & -15 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og som før bekræfter $\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}$ at der er regnet rigtigt. #

Afsnit D: Løsning af et system af første ordens lineære differentialligninger.

Vi tager udgangspunkt i de n koblede, lineære differentialligninger af første orden

$$f_1'(t) = a_{11}f_1(t) + \ldots\ldots + a_{1n}f_n(t)$$

$$f_2'(t) = a_{21}f_1(t) + \ldots\ldots + a_{2n}f_n(t)$$

$$\vdots$$

$$f_n'(t) = a_{n1}f_1(t) + \ldots\ldots + a_{nn}f_n(t)$$

Vi lader nu **A** repræsentere matricen af a_{ij}-erne, og vi sætter vektoren

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots\ldots, f_n(t))^T$$

Herved kan differentialligningssystemet i komprimeret form skrives

$$(*) \qquad \mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t).$$

I afsnit C er der vist, hvordan man altid kan transformere en matrix til jordans normalform. Man vælger transformationsmatricen **S**, således at matricens søjler netop består af jordanbasen. Dernæst kan man entydigt fastlægge en ny funktion $\mathbf{g}(t)$ ved

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$$

da **S** er invertibel. Indsættes dette **f** i ligningen (*), bliver

$$\mathbf{S}\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{g}(t)$$

eller da matricen **S** er invertibel (søjlerne i **S** er en basis) er

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{g}(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t).$$

Hvis alle søjlerne i **S** er egenvektorer for **A**, vil **J** være en diagonalmatrix, men hvis ikke alle vektorer i **S** er egenvektorer vil der i **J** stå et 1-tal lige over diagonalelementet i netop de søjler, hvor der i den tilsvarende søjle i **S** står en generaliseret egenvektor.

Der er herefter to tilfælde at undersøge (selv om tilfældet med diagonalmatricen blot er et specialtilfælde af det andet):

1. Er <u>alle</u> søjler i **S** egenvektorer kan det transformerede differentialligningssystem

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{D}\mathbf{g}(t)$$

opdeles i n enkeltligninger, som ikke afhænger af hinanden, dvs

$$g_i'(t) = \lambda_i g_i(t), \qquad \text{hvor } i = 1,\dots,n.$$

Disse ligninger har derfor løsningen

$$g_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, \qquad \text{hvor } i = 1,\dots,n.$$

Løsningerne til det oprindelige system findes så ved at transformere tilbage med

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t).$$

2. Er ikke alle søjler i **S** egenvektorer, betragter vi den del af hele systemet

$$(**) \qquad \mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t),$$

som kun vedrører én cykel af generaliserede egenvektorer for egenværdien ξ. Lad os antage, at cyklen har længden k.

Da vil matricen **J** indeholde kxk-blokmatrix $\mathbf{J}_\xi$, der har formen

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

og den del af differentialligningssystemet (**), som svarer til denne blok, bliver derfor

$$g_1'(t) = \xi g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = \xi g_2(t) + g_3(t)$$

$$\dots .$$

$$g_{k-1}'(t) = \xi g_{k-1}(t) + g_k(t) \quad , \quad g_k'(t) = \xi g_k(t)$$

Løses dette differentialligningssystem bagfra, finder vi at

$$g_k(t) = c_k e^{\xi t}$$

$$g_{k-1}(t) = c_k t e^{\xi t} + c_{k-1} e^{\xi t}$$

$$\dots .$$

$$g_2(t) = \frac{c_k}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\xi t} + \dots + c_2 e^{\xi t}$$

$$g_1(t) = \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\xi t} + \dots + c_2 t e^{\xi t} + c_1 e^{\xi t}.$$

Tilsvarende løses differentialligningssystemet (**) svarende til de øvrige cykler for ξ, og dernæst svarende til de øvrige egendier. Løsningerne til det oprindelige system findes ved at transformere tilbage med

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{Sg}(t).$$

Eksempel D1. Vi betragter differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= - 2f_2(t) + f_3(t) \\ f_2'(t) &= f_1(t) - 3f_2(t) + f_3(t) \\ f_3'(t) &= f_1(t) - 2f_2(t). \end{aligned}$$

Matricen $\mathbf{A}$ i dette system er behandlet i eksempel C4. Her finder vi transformationsmatricen $\mathbf{S}$ og jordanmatricen $\mathbf{J}$ til

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Her er den sidste søjle i $\mathbf{S}$ en generaliseret egenvektor, og derfor står der i $\mathbf{J}$ et 1-tal over diagonalelementet i sidste søjle. Herefter bliver differentialligningssystemet

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{Jg}(t)$$

til de tre differentialligninger

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= -\, g_1(t) \\ g_2'(t) &= -\, g_2(t) + g_3(t) \\ g_3'(t) &= -\, g_3(t), \end{aligned}$$

der får løsningerne

$$\begin{aligned} g_1(t) &= c_1e^{-t} \\ g_2(t) &= c_2e^{-t} + c_3te^{-t} \\ g_3(t) &= c_3e^{-t}. \end{aligned}$$

Når man så transformerer tilbage med $\mathbf{f}(t) = \mathbf{Sg}(t)$ bliver den fuldstændige løsning til det oprindelige differentialligningssystem

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

eller lidt omskrevet

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = e^{-t}[c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ t \end{pmatrix}] \qquad \#$$

Eksempel D2. Vi betragter differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= f_1(t) \qquad\qquad - f_3(t) \\ f_2'(t) &= f_1(t) + 2f_2(t) \\ f_3'(t) &= f_1(t) + \ f_2(t) \end{aligned}$$

Matricen **A** i dette system er behandlet i eksempel C2 og C3. Her fandt vi transformationsmatricen **S** og jordanmatricen **J** til

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor kun den første søjle i **S** er egenvektor, og derfor står der i **J** et 1-tal over begge diagonalelementerne. Herefter bliver differentialligningssystemet

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{Jg}(t)$$

til de tre differentialligninger

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= g_1(t) + g_2(t) \\ g_2'(t) &= g_2(t) + g_3(t) \\ g_3'(t) &= g_3(t). \end{aligned}$$

Løst bagfra bliver løsningerne

$$\begin{aligned} g_1(t) &= c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t/2 \\ g_2(t) &= c_2e^t + c_3te^t \\ g_3(t) &= c_3e^t. \end{aligned}$$

Når man transformerer tilbage med **S** bliver den fuldstændige løsning

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

eller lidt omskrevet

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = e^t [c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t - t^2/2 \\ t^2/2 \\ t - 1 \end{pmatrix}]$$

#

Med denne gennemgang er spørgsmålet om at bestemme den fuldstændige løsning til et system af første ordens lineære differentialligninger besvaret helt. Det betyder, at også de tilfælde, hvor egenværdierne er komplekse, er omfattet af denne gennemgang. Det er imidlertid ikke klart, om de fundne løsninger også vil være reelle, når egenværdierne er komplekse. Der kræves lidt forberedelse for at undersøge dette.

Er matricen $\mathbf{A}$ reel, vil det karakteristiske polynomium også være reelt, og hvis der optræder komplekse rødder i dette polynomium, vil de være parvist komplekst konjugerede med samme algebraiske multiplicitet. De tilhørende egenvektorer vil tilsvarende være komplekst konjugerede, og generaliserede egenvektorer i jordanbasen vil også kunne vælges komplekst konjugerede. Disse påstande vises ganske let, jfr det følgende.

Er $\alpha + i\beta$ en egenværdi for matricen $\mathbf{A}$ med tilhørende egenvektor $\mathbf{u}$, dvs at

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = (\alpha + i\beta)\mathbf{u}$$

vil man - da $\mathbf{A}$ er reel - ved at konjugere ligningen få

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} = (\alpha - i\beta)\bar{\mathbf{u}},$$

dvs $\alpha - i\beta$ er egenværdi for $\mathbf{A}$ med $\bar{\mathbf{u}}$ som tilhørende egenvektor.

Er tilsvarende vektoren $\mathbf{u}_1$ en generaliseret egenvektor svarende til egenværdien $\alpha + i\beta$, dvs at

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = (\alpha + i\beta)\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}$$

vil man ved konjugering få, at

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{u}}_1 = (\alpha - i\beta)\bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}},$$

hvilket viser, at $\bar{\mathbf{u}}_1$ vil være en generaliseret egenvektor svarende til egenværdien $\alpha - i\beta$.

Lad os første se på et specialtilfælde:

<u>Eksempel D3.</u> Betragtes differentialligningssystemet

$$f_1'(t) = af_1(t) - bf_2(t)$$

$$f_2'(t) = bf_1(t) + af_2(t),$$

vil den tilhørende matrix have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (a - \lambda)^2 + b^2,$$

der har rødderne $a + ib$ og $a - ib$. De tilhørende egenvektorer bliver

$$\mathbf{u} = (1,-i)^T \qquad \bar{\mathbf{u}} = (1,i)^T.$$

Vælges transformationsmatricen $\mathbf{S}$ med disse to vektorer som søjler, vil transformationen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$ give differentialligningssystemet

$$g_1' = (a + ib)g_1 \quad \text{og} \quad g_2' = (a - ib)g_2.$$

der har løsningerne

$$g_1(t) = c_1 e^{at} e^{ibt} \quad \text{og} \quad g_2(t) = c_2 e^{at} e^{-ibt},$$

hvor c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$. Disse løsninger er langt fra reelle. Transformeres løsningerne tilbage med $\mathbf{S}$, og vælges konstanterne fx til

$$c_1 = (k_1 + ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 - ik_2)/2$$

hvor k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$, bliver

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ibt} & 0 \\ 0 & e^{-ibt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_1 + ik_2)/2 \\ (k_1 - ik_2)/2 \end{pmatrix}$$

Benyttes tillige, at

$$e^{ibt} = \cos bt + i \sin bt$$

bliver

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Prøv selv! Hermed er der i dette specialtilfælde redegjort for, at man kan finde reelle løsningerne, selv om egenværdierne for matricen er komplekst konjugerede. #

Vi betragter nu et differentialligningssystem (som vi for nemheds skyld antager, består af fire lineære differentialligninger)

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t),$$

hvor den reelle matrix $\mathbf{A}$ antages at have de komplekst konjugerede egenværdier $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ med algebraisk multiplicitet 2 og geometrisk multiplicitet 1. Hermed vil en jordanbasis i $\mathbb{C}^4$ bestå af

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2\},$$

hvor $\mathbf{u}_1$ og $\bar{\mathbf{u}}_1$ er egenvektorer, mens de to andre er generaliserede egenvektorer. Vælges transformationsmatricen $\mathbf{S}$ med netop disse fire søjler i denne anførte rækkefølge, giver transformationen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$ netop jordanmatricen

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

i differentialligningssystemet

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t),$$

der består af de fire differentialligninger

$$g_1'(t) = (\alpha + i\beta)g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = (\alpha + i\beta)g_2(t)$$

$$g_3'(t) = (\alpha - i\beta)g_3(t) + g_4(t) \quad , \quad g_4'(t) = (\alpha - i\beta)g_4(t)$$

der giver følgende løsninger

$$g_1(t) = c_1e^{\alpha t}e^{i\beta t} + c_2te^{\alpha t}e^{i\beta t} \quad , \quad g_2(t) = c_2e^{\alpha t}e^{i\beta t}$$

$$g_3(t) = c_3e^{\alpha t}e^{-i\beta t} + c_4te^{\alpha t}e^{-i\beta t} \quad , \quad g_4(t) = c_4e^{\alpha t}e^{-i\beta t}.$$

Når vi transformere disse løsninger tilbage til den oprindelige basis med $\mathbf{S}$, bliver

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}[(c_1\mathbf{u}_1e^{i\beta t} + c_3\bar{\mathbf{u}}_1e^{-i\beta t}) + t(c_2\mathbf{u}_1e^{i\beta t} + c_4\bar{\mathbf{u}}_1e^{-i\beta t})$$
$$+ (c_2\mathbf{u}_2e^{i\beta t} + c_4\bar{\mathbf{u}}_2e^{-i\beta t})].$$

Skal man godtgøre, at disse vektorligninger kan gøres reelle, indfører vi vektorernes reel- og imaginærdele

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2 \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - i\mathbf{v}_4.$$

Endvidere <u>vælger</u> vi koefficienterne c_i hensigtsmæssigt til

$$c_1 = (k_1 + ik_2)/2 \quad , \quad c_2 = (k_3 + ik_4)/2$$

$$c_3 = (k_1 - ik_2)/2 \quad , \quad c_4 = (k_3 - ik_4)/2,$$

og erindrer, at

$$e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t.$$

Dermed bliver

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{v}_1(k_1\cos\beta t - k_2\sin\beta t) + \mathbf{v}_2(k_1\sin\beta t + k_2\cos\beta t)$$
$$+ \mathbf{v}_3(k_3\cos\beta t - k_4\sin\beta t) + \mathbf{v}_4(k_3\sin\beta t + k_4\cos\beta t)$$
$$+ \mathbf{v}_1t(k_3\cos\beta t - k_4\sin\beta t) + \mathbf{v}_2t(k_3\sin\beta t + k_4\cos\beta t)]$$

eller

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t & t\cos\beta t & -t\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t & t\sin\beta t & t\cos\beta t \\ 0 & 0 & \cos\beta t & -\sin\beta t \\ 0 & 0 & \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$

Hermed er den fuldstændige løsning fundet, og som man kan se, er den rent reel. Der er hermed dog ikke ført fuldt bevis for, at man til et lineært differentialligningssystem med komplekst konjugerede egenværdier med algebraisk multiplicitet p og geometriske multiplicitet k < p altid kan bestemme en fuldstændig løsning på reel form, men de her gennemførte udregninger sandsynliggør, at analoge betragtninger på et større system vil give et tilsvarende resultat.

Alternativ fremstilling af den fuldstændige løsning til en n-te ordens lineær differentialligning.

Man kan imidlertid også på baggrund af det foregående bestemme en basis for nulrummet svarende til en n-te ordens lineær differentialoperator. Man omskriver den n-te ordens lineære differentialligning

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0) f(t) = 0.$$

til første ordens lineære differentialligninger. Man indfører således funktionerne

$$f_1 = f, \quad f_2 = Df, \quad \ldots\ldots, \quad f_n = D^{n-1}f$$

og herved kan man dels opskrive ligningerne

$$f_1' = f_2, \quad f_2' = f_3, \quad \ldots, \quad f_{n-1}' = f_n$$

og dels ved indsættelse i den oprindelige ligning få

$$f_n' = D^n f = -a_0 f_1 - a_1 f_2 - \ldots - a_{n-1} f_n.$$

Disse ialt n lineære differentialligninger af første orden kan nu med fordel opskrives på matrixform $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$ således

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}$$

Skal dette ligningssystem løses, skal matricen enten diagonaliseres eller (i det mindste) bringes på jordans normalform. Hertil skal vi bestemme samtlige egenværdier for matricen **A**.

Vi skal altså bestemme det karakteristiske polynomium, dvs

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

eller

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}$$

Ganges først alle søjler med (-1), og foretages herefter følgende søjleoperationer:

$$s_{n-1} = s_{n-1} + \lambda s_n, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad s_1 = s_1 + \lambda s_2$$

bliver

$$p(\lambda) = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots\ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots\ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & -1 \\ F(\lambda) & * & * & \ldots\ldots & * & * \end{vmatrix}$$

hvor $F(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots. + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$, og hvor * betyder et led uden interesse, da man udvikler determinanten efter første søjle. Dette giver

$$p(\lambda) = (-1)^n(-1)^{n+1}F(\lambda)(-1)^{n-1}$$

eller

$$p(\lambda) = (-1)^n(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)$$

Egenværdierne for matricen **A** er altså samtlige rødder i polynomiet $p(\lambda)$. Dette polynomium er præcis det samme, som optræder i afsnit B.

Skal man herefter bestemme den eller de egenvektorer, som svarer til den fundne egenværdi, skal man jo finde samtlige vektorer, som opfylder

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = 0.$$

Dette giver følgende sammenhørende ligninger

$$-\lambda x_1 + x_2 = 0 \quad , \quad -\lambda x_2 + x_3 = 0$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$- a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots. - a_{n-2}x_{n-1} - (a_{n-1} - \lambda)x_n = 0.$$

Disse ligninger kan omskrives til

$$x_2 = \lambda x_1 \quad , \quad x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1 \quad ,$$
$$x_4 = \lambda x_3 = \lambda^3 x_1 \quad , \ldots , \quad x_n = \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-1}x_1,$$

og den sidste ligning på forrige side omskrives herefter til

$$-x_1(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) = 0$$

eller

$$-x_1 p(\lambda) = 0.$$

Da λ er rod i det karakteristiske polynomium, er $p(\lambda) = 0$, og vi kan derfor vælge x_1 frit fx til $x_1 = 1$. Da bliver egenrummet svarende til egenværdien λ

$$E_\lambda = \mathrm{Sp}\{(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-2}, \lambda^{n-1})^T\},$$

dvs uanset hvilken algebraisk multiplicitet λ har, er $\mathrm{gm}(\lambda) = 1$. Derfor vil matricen **A** transformere til en jordanmatrix med 1-taller over diagonalen netop for alle de egenværdier, som har algebraisk multiplicitet større end 1.

I sådanne tilfælde skal man altså bestemme en vektor $\mathbf{v}_2$, som opfylder

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

hvor jo $\mathbf{v}_1 = (1,\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^{n-1})^T$. Man får da de sammenhørende ligninger

$$-\lambda x_1 + x_2 = 1 \quad , \qquad -\lambda x_2 + x_3 = \lambda$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$-a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots - (a_{n-1} - \lambda)x_n = \lambda^{n-1}$$

Disse ligninger kan nu omskrives til

$$x_2 = 1 + \lambda x_1 \quad , \quad x_3 = \lambda + \lambda x_2 = 2\lambda + \lambda^2 x_1$$

$$x_4 = \lambda^2 + \lambda x_3 = 3\lambda^2 + \lambda^3 x_1 \quad , \quad \ldots\ldots$$

$$x_n = \lambda^{n-2} + \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-2} + \lambda^{n-2}(n-2 + \lambda x_1) = (n-1)\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}x_1,$$

og den sidste ligning ovenfor omskrives herefter til

$$\begin{aligned}&- x_1(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)\\ - &(a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1}) = 0\end{aligned}$$

eller

$$-x_1p(\lambda) - p'(\lambda) = 0.$$

Er $\text{algm}(\lambda) \geq 2$, dvs når såvel $p(\lambda) = 0$ som $p'(\lambda) = 0$ kan en "syntetisk" vektor fx vælges til

$$\mathbf{v}_2 = (0,1,2\lambda,3\lambda^2,\ldots,(n-1)\lambda^{n-2})^T,$$

(hvor man har sat $x_1 = 0$). **Bemærk**, at vektoren $\mathbf{v}_2$ også kan fremkomme af vektoren $\mathbf{v}_1$ ved differentiation mht λ.

Er $\text{algm}(\lambda) \geq 3$ kan man tilsvarende bestemme en vektor $\mathbf{v}_3$ af

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

En sådan vektor er fx

$$\mathbf{v}_3 = (0,0,2,6\lambda,12\lambda^2,\ldots,(n-1)(n-2)\lambda^{n-3})^T$$

Bemærk, at vektoren $\mathbf{v}_3$ også kan fremkomme af $\mathbf{v}_2$ ved differentiation mht λ.

Når transformationsmatricen $\mathbf{S}$ er færdigkonstrueret efter denne recept, kan vi overgå til løsning af differentialligningssystemet $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{Af}(t)$. Bemærk, at vi udelukkende er interesseret i at finde f_1 (første koordinat i $\mathbf{f}$). Benyttes som sædvanlig transformationen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{Sg}(t)$, vil differentialligningssystemet blive overført i

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t)$$

hvor **J** er en jordanmatrix med 1-taller lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i **S** står en "syntetisk" vektor.

Er ξ en egenværdi for **A** med algm(ξ) = k (> 1), vil som før vist gm(ξ) = 1, og derfor vil den kxk-delmatrix $\mathbf{J}_\xi$ af **J**, som svarer til ξ, have formen

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

og den del af differentialligningssystemet, som skal løses svarende til ξ, bliver derfor

$$g_1'(t) = \xi g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = \xi g_2(t) + g_3(t)$$

$$\dots .$$

$$g_{k-1}'(t) = \xi g_{k-1}(t) + g_k(t) \quad , \quad g_k'(t) = \xi g_k(t)$$

Løses dette differentialligningssystem bagfra, finder vi at

$$g_k(t) = c_k e^{\xi t}$$

$$g_{k-1}(t) = c_k t e^{\xi t} + c_{k-1} e^{\xi t}$$

$$\dots .$$

$$g_2(t) = \frac{c_k}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\xi t} + \dots + c_2 e^{\xi t}$$

$$g_1(t) = \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\xi t} + \dots + c_2 t e^{\xi t} + c_1 e^{\xi t}.$$

Da imidlertid den del af transformationsmatricen **S**, som er knyttet til egenværdien ξ, er en nedre trekantmatrix med et 1-tal på første plads i første søjle (jfr udregningen af $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ osv), vil man af transformationen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$ få, at

$$f_1(t) = g_1(t) + \text{bidrag fra øvrige egenværdier}$$

dvs nulrummet for differentialoperatoren

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 D^0$$

vil - svarende til egenværdien ξ - have følgende basis

$$\{e^{\xi t}, te^{\xi t}, \dots, t^{k-1}e^{\xi t}\}.$$

Dette resultat er identisk med resultatet midt på side 6.

Afsnit E: Supplerende opgaver

1. C^0 er rummet af alle reelle, kontinuerte funktioner. Der er givet følgende delmængder

$$F_1 = \{ f \in C^0 \mid f(1) = 0 \}$$
$$F_2 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 1 \}$$
$$F_3 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0 \}$$

Hvilke af disse mængder vil være underrum i C^0?

2. C^p er rummet af alle reelle, p gange kontinuerte, differentiable funktioner. Idet f' betyder den afledede af f, defineres følgende delmængder

$$G_1 = \{ f \in C^1 \mid f' + af = 0 \}$$
$$G_2 = \{ f \in C^1 \mid f' + f^2 = 0 \}$$
$$G_3 = \{ f \in C^2 \mid f'' + af' + bf = 0 \}$$

hvor a og b er reelle tal. Hvilke af disse mængder vil være underrum i C^1?

3. Fastlæg samtlige reelle 2x2-matricer B, der vil kommutere med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(dvs AB = BA). Vis, at mængden af sådanne matricer B vil være et underrum i $M_{2,2}$, og bestem underrummets dimension.

4. Idet P_2 er rummet af alle reelle polynomier af højst anden grad betragtes de fire polynomier

$$p_0(t) = 2t^2 + t, \qquad p_1(t) = t^2$$
$$p_2(t) = t^2 - t - 1, \qquad p_3(t) = t + 1$$

Vis, at disse fire er lineært afhængige, og bestem et lineært uafhængigt sæt af tre af disse polynomier.

Vis endelig, at ethvert element i P_2 kan skrives som linearkombination af disse tre polynomier.

5. Man betragter vektorrummet $\mathbb{C}^3$ over $\mathbb{C}$. Der er givet følgende sæt af vektorer

$$S_1 = \{ (1,0,0);\ (0,1,i);\ (1,i,-1) \}$$
$$S_2 = \{ (1,-1,i);\ (i,0,1);\ (0,1,i) \}$$
$$S_3 = \{ (i,i,i);\ (1,1,-1);\ (1,i,0) \}$$

Hvilke af disse mængder er lineært uafhængige, og bestem koordinaterne til vektoren $(1,2i,-3)$ med hensyn til S_2.

6. Vis, at hvert af følgende sæt af polynomier i P_3 (rummet af alle reelle polynomier af grad ≤ 3) vil udgøre en basis for P_3.

$$\{ 1,\ 1+t,\ t+t^2,\ t^2+t^3 \}$$
$$\{ 1,\ 1+t,\ 1+t^2,\ 1+t^3 \}$$

og fastlæg koordinaterne til polynomiet $p(t) = t^3 - t^2$ i forhold til hver af baserne.

7. Betragt vektorrummet $\mathbb{C}^3$ over $\mathbb{R}$. Hvilken dimension har dette vektorrum?

8. Angiv for hver værdi af det reelle tal a mængden af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + z + aw &= 1 \\ x + y + z \phantom{{}+aw} &= 1 \\ y + z - w &= 1 \\ x + y \phantom{{}+z} - w &= 1 \end{aligned}$$

9. Bestem det reelle tal b således, at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 1 \\ y + z + w &= 0 \\ -x + y - 4z + 5w &= b + 4 \\ 2x - 2y + 5z + bw &= 1 \end{aligned}$$

har mindst en løsning, og fastlæg for hvert sådant b samtlige løsninger til systemet.

10. Angiv en basis for løsningsrummet for ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \qquad & -x - 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 8y - 12z &= 0 \qquad & x - y + 5z &= 0, \end{aligned}$$

og bestem de talsæt $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= b_1 \qquad & -x - 2y + 3z &= b_2 \\ 4x + 8y - 12z &= b_3 \qquad & x - y + 5z &= b_4 \end{aligned}$$

har mindst én løsning.

11. Bestem det reelle tal b således at ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x - 5y - 2z + 3w &= 3 \\ 3x - 2y - 5z + 4w &= 4 \\ 2x - 5y + 4z - w &= b \end{aligned}$$

har mindst én løsning. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet med dette valg af b.

12. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 3. \end{aligned}$$

13. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem løsningsmængden til ligningssystemet $Ax = 0$.

Fastlæg derpå vektoren b, således at ligningssystemet $Ax = b$ har mindst én løsning.

14. Angiv for alle talpar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ antallet af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z - 2w &= -1 \\ x \quad + 2z - w &= 2 \\ y + z + 2w &= a \\ -x + y - z + bw &= 1 \end{aligned}$$

og løs derpå ligningssystemet for $(a,b) = (3,2)$.

15. Når $M_{3,3}$ er rummet af alle reelle 3x3-matricer, defineres en lineær afbildning $f: M_{3,3} \to M_{3,3}$ ved, at $f(X) = M \cdot X$, idet matricen M er fastlagt ved

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem nulrum og billedrum for afbildningen f.

16. Idet P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredie grad, defineres operatorerne Q_1, Q_2: $P_3 \to P_3$ ved

$$\begin{aligned} Q_1p(t) &= t^2p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t) \\ Q_2p(t) &= t^2p''(t) - 2tp'(t) + 3p(t) \end{aligned}$$

for alle reelle t. Bestem nulrum og billedrum for begge operatorer.

17. Lad de lineære afbildninger $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ og $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ i en passende valgt basis være givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$, og fastlæg på denne baggrund $B(gf)$.

18. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for B(f), N(f) samt for B(f) $\cap$ N(f), og benyt dette til at bestemme en basis for B(f^2).

19. En lineær afbildning g: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for såvel B(g) som for N(g). Godtgør, at B(g) = N(g), og bestem på denne baggrund B(g^2).

20. Lad U og V betegne henholdsvis nulrum og billedrum for en lineær afbildning g: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en basis for hvert af rummene U, V og U $\cap$ V. Fastlæg på denne baggrund en basis for billedrummet for g^2.

21. De lineære afbildninger f,g: $R^4 \to R^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & -10 \\ -3 & -5 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at B(f) = N(g) og at B(g) $\cap$ N(f) = $\{0\}$, og bestem B(gf) og B(fg).

22. Lad U og V være nulrum og billedrum for den lineære af-

bildning $f: R^4 \to R^4$, der er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en parameterfremstilling for hvert af rummene U, V og $U \cap V$, og fastlæg endelig billedrummet for afbildningen f^2.

23. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i standardbasen fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestem en basis for såvel nulrummet - N(f) - som billedrummet - B(f) - for denne afbildning.

Bestem tillige en basis for $N(f) \cap B(f)$ samt en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2.

24. Den lineære afbildning $g: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ har med hensyn til standardbasen matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & 4 & 2-2i \\ i & 0 & 2 \\ 3i & 2i & 6+i \end{pmatrix}$$

hvor $c \in \mathbb{C}$.

a) Vis, at $\mathbf{A}$ er invertibel for $c \neq 1$.

b) Bestem for ethvert c nulrummet N(g) og billedrummet B(g) for afbildning g.

c) Vis, at $N(g) \cap B(g) = \{0\}$, og bestem billedrummet $B(g^2)$ for afbildningen g^2.

25. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, er de fire differentialoperatorer $L_1, L_2, L_3, L_4: C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$L_1 f = f'' - 2f' - 3f$$
$$L_2 f = f'' - 2f' + f$$
$$L_3 f = f'' - 2f' + 5f$$
$$L_4 f = f' + f$$

Bestem en basis for hvert af nulrummene $N(L_1)$, $N(L_2)$ og $N(L_3)$. Fastlæg dernæst en basis for hvert af nulrummene $N(L_2 \circ L_2)$ og $N(L_4 \circ L_1)$.

26. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L\colon C^\infty \to C^\infty$ er for alle tal $a, b \in \mathbb{R}$ givet ved

$$Lf = f'' + af' + bf.$$

Bestem tallene a og b, når funktionerne

$$\phi_1(t) = e^{-t} \quad \text{og} \quad \phi_2(t) = e^{2t}$$

er basis for nulrummet $N(L)$. Bestem tillige en basis for nulrummet, hvis $a = 7$ og $b = 10$.

27. En lineær afbildning $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er i standardbasen givet ved matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis, at de tre vektorer

$$u_1 = (1,-1,0) \ , \ u_2 = (2,-1,-1) \ , \ u_3 = (0,0,-1)$$

kan vælges som basis i $\mathbb{R}^3$.

Et element $x \in \mathbb{R}^3$ har i standardbasen et koordinatsæt x_s og i u-basen - $\{u_1, u_2, u_3\}$ et koordinatsæt x_u. Fastlæg koordinatskiftematricen P, således at

$$x_u = Px_s$$

Fastlæg endelig den til g svarende matrix i u-basen.

28. Vis, at vektorerne

$$b_1 = (1,1,1) \quad , \quad b_2 = (-1,0,1) \quad , \quad b_3 = (2,1,-1)$$

vil være en basis for $\mathbb{R}^3$.

En lineær afbildning g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er i standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ givet ved

$$\begin{aligned} g(e_1) &= \phantom{e_1 +{}} 2e_2 + e_3 \\ g(e_2) &= e_1 \phantom{{}+ 2e_2} + 3e_3 \\ g(e_3) &= e_1 + e_2 . \end{aligned}$$

Opskriv den til g svarende matrix i standardbasen, og fastlæg tillige den til g svarende matrix i forhold til b-basen - $\{b_1, b_2, b_3\}$.

29. I $\mathbb{R}^4$ er der udtrykt i standardbasis givet fire vektorer

$$v_1 = (0,2,2,0) \qquad v_2 = (1,0,0,-1)$$
$$v_3 = (0,2,-2,0) \qquad v_4 = (1,0,0,1)$$

Vis, at $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kan vælges som basis for $\mathbb{R}^4$.

En lineær afbildning G: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i denne v-basis fastlagt ved

$$G(v_1) = -2v_1 \qquad G(v_3) = 4v_3$$
$$G(v_2) = -2v_2 + v_1 \qquad G(v_4) = 4v_4 + v_3$$

Opskriv den til G svarende matrix i v-basen, og find dernæst den til G svarende matrix i standardbasen.

30. Fastlæg det reelle tal a, således at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & a \end{pmatrix}$$

vil have egenværdien -1.

31. Lad $A_{s,t}$ betegne matricen

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Bestem tallene s og t, når vektoren (1,1,1) er egenvektor for matricen $A_{s,t}$, find derpå samtlige egenværdier for matricen. Er det muligt at bestemme en basis for $\mathbb{R}^3$ af egenvektorer for matricen?

32. Bestem samtlige egenværdier til matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og bestem de tilhørende egenvektorer. Kan man fastlægge en basis af egenvektorer for B?

33. Der er givet en lineær afbildning L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + 4D + D^0)f.$$

Vis, at funktionen $\phi(t) = te^{-2t}$ tilhører egenrummet svarende til egenværdien -3, og bestem derpå en basis for dette rum.

34. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren L: $C^\infty \to C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^3 - 3D - 2D^0)f.$$

Fastlæg en basis for nulrummet N(L) samt en basis for egenrummet svarende til -4.

35. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren L: $C^\infty \to C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f.$$

Vis, at det tilhørende polynomium vil have rødderne i og $-i$

med multiplicitet 2, og fastlæg derpå en basis for nulrummet - N(L) - af reelle funktioner.

36. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Bestem a og b således at funktionen

$$\alpha: t \to te^{-2t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien 8, og fastlæg endelig en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien 8.

37. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. Vis, at funktionen

$$\alpha: t \to t\cos t$$

tilhører nulrummet for operatoren $L: C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f,$$

og fastlæg herefter en basis for nulrummet. Fastlæg tillige en basis for egenrummet svarende til egenværdien 1.

38. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle talpar (a,b) en lineære operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f.$$

Fastlæg talparret (a,b), således at funktionen

$$\beta: t \to e^{-t}\cos 2t$$

tilhører nulrummet for L, og bestem derpå en basis for nulrummet, samt en basis for egenrummet svarende til egenværdien -10.

39. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en lineær operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lg = (D^3 - 3D + 2D^0)g.$$

Fastlæg en basis for nulrummet for L. Da funktionen

$$\alpha: t \to te^{-t}$$

tilhører et egenrum for L, bestem så den tilhørende egenværdi samt en basis for egenrummet.

40. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle $a,b \in \mathbb{R}$ en operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + aD + bD^0)f.$$

Bestem tallene a og b, således at funktionen

$$\beta: t \to te^{-t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien -4, og fastlæg derpå en basis for nulrummet for L - N(L).

En anden operator $M: C^\infty \to C^\infty$ er defineret ved

$$Mf = (D + 3D^0)f$$

Bestem endelig en basis for nulrummet svarende til den sammensatte operator $M \circ L$.

41. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. En lineær differentialoperator L på dette rum er givet ved

$$L = D^2 - 2D + D^0.$$

Bestem en basis for nulrummet - N(L), samt en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien -4.

Bestem endelig en basis for egenrummet for operatoren $L \circ L$ svarende til egenværdien 16.

42. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. På dette rum er givet en fjerde ordens lineær differentialoperator L, ved

$$L = D^4 + a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0D^0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Om denne operator L oplyses, at

a) funktionen α: $t \to t$ tilhører egenrummet for L svarende til egenværdien $4/3$, og

b) funktionen β: $t \to te^t$ tilhører nulrummet for L.

Fastlæg på denne baggrund differentialoperatoren L.

43. P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredie grad På dette rum defineres for alle heltallige værdier af n en lineær operator L_n ved

$$L_np(t) = (1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t) + np(t).$$

Bestem de til L_n svarende egenværdier og egenpolynomier, og fastlæg de værdier af n, for hvilke L_n vil være invertibel.

Bestem endelig for n = 6 og for n = 8 - om muligt - et polynomium p, der opfylder ligningen

$$L_np(t) = 5t^3 + 3t^2.$$

[Vink: Man kan med fordel benytte en til L_n svarende matrixrepræsentation].

44. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle tal a og b den lineære operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$L = (D^2 + aD + bD^0) \circ D.$$

Funktionerne $f: t \to te^{-t}$ og $g: t \to e^{-2t}$ er egenfunktioner for L. Bestem den tilhørende egenværdi samt konstanterne a og b.

Fastlæg endelig en basis (af reelle funktioner) svarende til nulrummet for L - N(L).

45. Med C^∞ betegnes vektorrummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineret på $\mathbb{R}$. For alle reelle tal a og b defineres en operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$L = D^3 + aD^2 + 5D + bD^0.$$

Det oplyses, at funktionen ϕ givet ved $\phi(t) = te^{-t}$ tilhører nulrummet N(L).

a) Vis, at a = 4 og b = 2.

b) Bestem for a = 4 og b = 2 en basis for egenrummet for L hørende til egenværdien 2.

46. Bestem det reelle tal s således, at matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & s & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenværdien -1. Bestem i dette tilfælde alle egenværdier og egenvektorer. Kan matricen diagonaliseres?

47. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fastlæg en basis for $\mathbb{R}^4$, som består udelukkende af egenvektorer for f.

48. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi og én egenvektor, og bestem derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

49. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi med to lineært uafhængige egenvektorer, og bestem derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

50. En lineær afbildning g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -11 & 1 & 2 \\ 4 & -11 & -4 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vis, at g kun vil have én egenværdi, samt at den til g svarende matrix ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så den til g svarende matrix i denne basis vil være en jordanmatrix, og opskriv endelig denne jordanmatrix.

51. De to matricer $\mathbf{V}$ og $\mathbf{U}$ er givet ved

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bevis, at $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^3$, $\quad \mathbf{U}^4 = \mathbf{V}^4 = \mathbf{0}$

og $\mathbf{UV} = \mathbf{VU} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$.

Sætter vi $\mathbf{A}_t = \mathbf{E} + t\mathbf{V}$ og $\mathbf{B}_t = \mathbf{E} + t\mathbf{U}$

vis da, at $\mathbf{B}_1^{-1} = \mathbf{A}_{-1}$.

Vis endelig, at det for alle reelle $t \neq 0$ gælder, at $\mathbf{A}_1$ er jordans normalform for $\mathbf{B}_t$, og bestem en matrix $\mathbf{S}_t$, så

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{S}_t\mathbf{A}_1\mathbf{S}_t^{-1}.$$

52. Den lineære afbildning $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at afbildningen F vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)^2$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres, og fastlæg endelig en basis i $\mathbb{R}^4$, således at den til F svarende matrix i denne basis vil være på Jordans normalform.

53. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2,$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres, og foretag et basisskifte, så matricen vil transformere til en jordanmatrix.

54. Den lineære afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -5 & -6 \\ 6 & -7 & -5 & -6 \\ -11 & 10 & 8 & 11 \\ 11 & -10 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at $\mathbf{A}$ har det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2)^2.$$

b) Vis, at $\mathbf{A}$ ikke kan diagonaliseres.

c) Bestem en basis for $\mathbb{R}^4$, så matricen for f med hensyn til denne basis er på Jordans normalform.

55. Bestem den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned} f_1' &= 2f_1 + f_2 - f_3 \\ f_2' &= f_1 + f_2 - f_3 \\ f_3' &= f_1 + f_2 \end{aligned}$$

som opfylder, at $\mathbf{f}(0) = (3,2,1)$.

56. Bestem den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\begin{aligned} g_1' &= -11g_1 + g_2 + 2g_3 \\ g_2' &= 4g_1 - 11g_2 - 4g_3 \\ g_3' &= -4g_1 + 2g_2 - 5g_3 \end{aligned}$$

som opfylder, at $\mathbf{g}(0) = (1,2,-1)$.

57. Bestem samtlige egenværdier for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis for $\mathbb{R}^3$ således, at den til $\mathbf{A}$ svarende matrix i denne basis vil være en jordanmatrix, og benyt fx det ovenfor viste til at bestemme den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t), \quad \text{hvor} \quad \mathbf{f}(0) = (0,1,2)^T.$$

58. Der er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at $\mathbf{A}$ ikke kan diagonaliseres.

Vis dernæst, at $\mathbf{A}$ ved et passende basisskifte kan bringes på jordans normalform.

Benyt fx dette til at løse differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{Af}(t), \quad \text{med } \mathbf{f}(0) = (1,1,1,1).$$

59. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu + 4)(\mu + 2)^3,$$

og vis tillige, at egenrummet svarende til egenværdien -2 vil have dimension 2.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen $\mathbf{A}$ vil transformere til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at bestemme løsningen til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{Af}(t), \quad \text{hvor} \quad \mathbf{f}(0) = (0,1,2,0).$$

60. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^3$$

og vis endvidere, at matricen **A** ikke kan diagonaliseres.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen **A** transformeres til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at vise, at samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) \quad \text{vil konvergere mod } \mathbf{0} \text{ for } t \to \infty.$$

61. Bestem samtlige egenværdier inden for $\mathbb{C}$ for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at **A** kan diagonaliseres inden for $\mathbb{C}$, og benyt fx dette til at bestemme den <u>reelle</u> løsning til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) \;, \quad \mathbf{f}(0) = (1,-1,1,0).$$

62. Bestem samtlige egenværdier for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen **A** ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis i $\mathbb{R}^4$ således, at den til **A** svarende matrix i denne basis vil være på jordans normalform.

Benyt fx dette til at bestemme den løsning til det lineære differentialligningssystem

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t) \quad \text{med} \quad \mathbf{f}(0) = (1,2,0,-1).$$

63. Lad **A** være matricen givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad f og g være de lineære afbildninger svarende til henholdsvis **A** og $\mathbf{A}^T$.

Bestem ortogonale baser for nulrummet for f - N(f) - og for billedrummet for g - B(g). Vis, at disse to baser udgør en ortogonal basis for $\mathbb{R}^5$.

64. Lad **B** betegne matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

hvor (a,b,c) er et sæt af komplekse tal, hvorom det gælder, at (1,1,1) er en egenvektor for **B**. Find samtlige egenværdier for **B**.

Afgør hvornår **B** er regulær, og vis, at nulrummet i modsat fald har dimension 1.

Begrund, at enhver basis bestående af egenvektorer vil være ortogonal, hvis a, b og c er reelle tal.

65. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestem en ortogonal basis for både billedrummet - B(f) - og nulrummet - N(f) - for denne afbildning.

Vis, at disse baser tilsammen vil udgøre en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$, og fastlæg endelig en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2.

66. I $\mathbb{R}^5$ er de to underrum U og V givet ved

$$U = \mathrm{Sp}\{(1,0,1,0,-2);(2,0,0,1,-3);(p,1,0,0,-4)\}$$
$$V = \mathrm{Sp}\{(-1,3,1,2,0);(-3,1,-1,0,q)\}$$

Fastlæg konstanterne p og q, således at $U \perp V$. De her fundne værdier af p og q anvendes i det følgende, og bestem derpå en ortogonal basis for såvel U som V.

Fastlæg endelig en mulig matrix for en lineær afbildning $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$, hvor $V = B(F)$ - billedrummet for F - og en matrix for en lineær afbildning $G: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, hvor $U = N(G)$ - nulrummet for G.

67. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ er i det følgende forsynet med det sædvanlige indre produkt. Vis da, at $N(f) \perp B(f)$ - dvs at nulrum og billedrum for f vil være ortogonale.

Fastlæg derpå en ortogonal basis for såvel $N(f)$ som $B(f)$, og vis at disse baser tilsammen vil være en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

Fastlæg tilslut en ortogonal basis for $B(f^2)$ - billedrummet for afbildningen $f \circ f$.

68. Rummet $\mathbb{R}^4$ tænkes forsynet med standardbasen. I $\mathbb{R}^4$ er givet underrummene

$$U = Sp\{(1,2,-1,1);(3,1,0,2)\}$$
$$V = Sp\{(1,1,1,-2);(3,0,2,-1)\}$$

Vis, at $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg en basis for $U \cap V$. Fastlæg dernæst en ortogonal basis $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ i $\mathbb{R}^4$, således at $b_1, b_2 \in U$ og $b_2, b_3 \in V$.

Om en lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vides, at

$$N(f) = U \quad \text{og} \quad B(f) = V$$

Fastlæg på denne baggrund en mulig matrixrepræsentation for f i B-basen, og bestem endelig med den valgte matrix en basis for $B(f^2)$.

69. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i standardbasen givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5/2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestem en basis for nulrummet $N(f)$ og billedrummet $B(f)$, og vis at $\dim(N(f) \cap B(f)) = 1$.

Fastlæg dernæst ortogonale baser for såvel $N(f)$ som $B(f)$, (benyt fx at $\dim(N(f) \cap B(f)) = 1$), og fremstil endelig en ortogonal basis for hele $\mathbb{R}^4$, som indeholder ortogonale baser for $N(f)$ og $B(f)$.

70. $P_3[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 3. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt.$$

Fastlæg en ortogonal basis for underrummet

$$Q = \{ p \in P_3 \mid p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0 \}.$$

Beskriv dernæst de polynomier, der tilhører $Q^\perp$ (det ortogonale komplement til Q) og vis, at polynomierne

$$\alpha(t) = 5t^2 - 1 \quad , \qquad \beta(t) = 7t^3 - 3t$$

er en ortogonal basis for $Q^\perp$.

De ortogonale baser i Q og $Q^\perp$ vælges nu som basis for P_3. Bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 + 3.$$

71. $P_2[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$<p,q> = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Med Q betegnes det underrum, der udspændes af polynomierne

$$\alpha(t) = t + 1 \qquad , \qquad ß(t) = t^2 - t.$$

Vis, at $\{\alpha, ß\}$ er en ortogonal basis for Q.

Bestem derpå en basis for det ortogonale komplement til Q - kaldet $Q^{\perp}$.

Man vælger nu disse baser for Q og $Q^{\perp}$ som basis for hele P_2, og bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 - 3.$$

72. Med $P_2[-1,1]$ betegnes vektorrummet af alle reelle polynomier af højst 2. grad, defineret på intervallet $[-1,1]$. Rummet $P_2[-1,1]$ forsynes med det sædvanlige indre produkt givet ved

$$<p,q> = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Polynomierne p_1, p_2 og p_3 defineres ved

$$p_1(t) = 2t-1, \qquad p_2(t) = t^2+3, \qquad p_3(t) = 5t^2-8t-7.$$

a) Vis, at $\{p_1,p_2,p_3\}$ er en basis for $P_2[-1,1]$.

b) Bestem koordinaterne for polynomiet $p(t) = 3t^2-2t-3$ med hensyn til basen $\{p_1,p_2,p_3\}$.

c) Lad U være underrummet $U = Sp\{p_3\}$ af $P_2[-1,1]$. Bestem en basis for underrummet

$$V = \{ q \in P_2[-1;1] \mid q(½) = 0 \},$$

og vis, at $V = U^{\perp}$, dvs at V er det ortogonale komplement til U.

d) Bestem endelig ortogonalprojektionen af p_2 på $U^{\perp}$.

Opgave A1.

Lad U og W betegne endelig-dimensionale underrum af et reelt underrum V og lad $u_1,\dots,u_k$ og $w_1,\dots,w_m$ betegne baser i henholdsvis U og W. Betragt delmængden L af det reelle talrum $\mathbb{R}^{k+m}$ givet ved

$$L = \{(a_1,\dots,a_k,b_1,\dots b_m) \in \mathbb{R}^{k+m} \mid a_1u_1+\dots+a_ku_k = b_1w_1+\dots+b_kw_k\}$$

og lad afbildningen T: $\mathbb{R}^{k+m} \to V$ være defineret ved

$$T(a_1,\dots,a_k,b_1,\dots b_m) = a_1u_1+\dots+a_ku_k \quad \text{for} \quad (a_1,\dots,a_k,b_1,\dots b_m) \in \mathbb{R}^{k+m}$$

a) Vis, at L er et underrum af $\mathbb{R}^{k+m}$.

b) Vis, at T er en lineær afbildning.

c) Vis, at T afbilder L bijektivt på $U \cap W$.

d) Vis, at hvis $x_1,\dots,x_n$ er en basis for L, da er $T(x_1),\dots,T(x_n)$ en basis for $U \cap W$.

e) Betragt de lineære afbildninger L_A, L_B: $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestem baserne for billedrummene $R(L_A)$ og $R(L_B)$ samt for deres fællesmængde $R(L_A) \cap R(L_B)$.

Opgave A2.

Betragt for ethvert $a \in \mathbb{R}$ matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ a & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Idet a repræsenteres på formen $a = 2c^2 - 6$, hvor $c \in \mathbb{C}$, skal det vises, at A har det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4 + 2c)(\lambda - 4 - 2c).$$

Angiv de værdier af a, hvor $p(\lambda)$ faktoriserer helt over $\mathbb{R}$.

b) Bestem de værdier af a, for hvilke A er diagonaliserbar.

c) Bestem for de værdier af a - hvor det er muligt - en ortogonal matrix Q og en diagonalmatrix D, således at $Q^tAQ = D$.

d) Bestem for enhver ikke-negativ reel værdi af parameteren c en Jordan normalform af A (men ikke en tilhørende Jordan basis).

e) Bestem for c = 1 en invertibel reel matrix Q, således at $J = Q^{-1}AQ$ er en Jordan normalform af A.

f) Bestem for c = 1 de funktioner, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, der er fastlagt ved

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bestem endvidere den, der tillige opfylder $f(0) = (-1,6,-5,0)$.

Opgave A3.

Lad vektorrummet $C([-1,1])$ af alle kontinuerte funktioner på intervallet $[-1,1]$ være forsynet med det indre produkt

$$\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Lad endvidere afbildningen $S: C([-1,1]) \to C([-1,1])$ være defineret ved

$$(Sf)(x) = f(-x) \quad \text{for alle } f \in C([-1,1]) \text{ og } x \in [-1,1]$$

og lad L og U betegne delmængderne af $C([-1,1])$ givet ved

$$L = \{f \in C([-1,1]) \mid f(-x) = f(x) \text{ for alle } x \in [-1,1]\}$$

og

$$U = \{f \in C([-1,1]) \mid f(-x) = -f(x) \text{ for alle } x \in [-1,1]\}.$$

a) Gør rede for, at S er lineær, og bestem S^2.

b) Bestem samtlige egenværdier for S, og beskriv de tilhørende egenrum.

c) Vis, at L og U vil være uendelig-dimensionale underrum af $C([-1,1])$, og gør rede for, at $L \perp U$ - dvs $\langle f,g \rangle = 0$ for alle $f \in L$ og $g \in U$.

d) Vis, at $C([-1,1]) = L \oplus U$ - den direkte sum af L og U.

e) Vis, at $L^\perp = U$ og $U^\perp = L$.

f) Vis, at afbildningerne

$$P_1 = (I + S)/2 \quad \text{og} \quad P_2 = (I - S)/2$$

er ortogonale projektioner af C([-1,1]) på henholdsvis L og U.

Opgave A4.

Lad $P_n(\mathbb{C})$ betegne det komplekse vektorrum bestående af alle polynomielle funktioner fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{C}$ af grad højst n.

Lad $p_0, p_1, \ldots, p_n \in P_n(\mathbb{C})$ og betragt funktionen w: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ defineret ved

$$w(t) = \det(M(t)) \quad \text{for alle} \quad t \in \mathbb{R},$$

hvor $\mathbf{M}(t)$ betegner $(n+1)\times(n+1)$ matricen givet ved

$$M(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \ldots & p_n(t) \\ p_0'(t) & p_1'(t) & p_2'(t) & \ldots & p_n'(t) \\ p_0''(t) & p_1''(t) & p_2''(t) & \ldots & p_n''(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_0^{(n)}(t) & p_1^{(n)}(t) & p_2^{(n)}(t) & \ldots & p_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

Her betegner $p^{(n)}$ den n'te afledede af polynomiet p.

a) Gør rede for, at hvis $p_0, p_1, \ldots, p_n$ ikke er en basis for $P_n(\mathbb{C})$, da er $w(t) = 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestem funktionen w i det tilfælde, hvor $p_0, p_1, \ldots, p_n$ er lig standardbasen for $P_n(\mathbb{C})$, dvs i tilfældet, hvor $p_k(t) = t^k$ for $k = 0,1,2,\ldots,n$.

c) Sæt $q_k(t) = t^k$ for $k = 0,1,2,\ldots,n$. Gør rede for, at der eksisterer en matrix $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$, således at

$$\begin{pmatrix} p_0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_0(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{for alle} \quad t \in \mathbb{R}$$

d) Vis, at hvis sættet $p_0, p_1, \ldots, p_n$ er en basis fot $P_n(\mathbb{C})$, så er funktionen w konstant med værdi forskellig fra nul.

Opgave B1.

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ a & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor a er et reelt tal.

a) Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A for alle værdier af a er givet ved

$$p(\lambda) = (2 - \lambda)^3(3 - \lambda).$$

b) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.

c) Bestem for hver værdi af a en til A svarende jordanmatrix J.

I det følgende antages, at a = -2.

d) Bestem en invertibel matrix Q, således at $J = Q^{-1}AQ$.

e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \text{ for alle } t \in \mathbb{R} \text{ og } f(0) = (3,-3,-2,2).$$

Opgave B2.

På $C^\infty(\mathbb{R})$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner - er den lineære afbildning D defineret ved

$$Df = f'$$

Den identiske afbildning benævnes D^0.

På $C^\infty(\mathbb{R})$ betragtes underrummet

$$V = N((D-D^0)^4)$$

dvs nulrummet for den lineære afbildning $(D - D^0)^4$.

a) Bestem en basis $\mathcal{B}$ for V.

På V defineres de lineære afbildninger U,T: $V \to V$ givet ved

$$U = D^2 - D^0 \text{ og } T = D^2 + D^0.$$

b) Vis, at U ikke vil være injektiv, men at T er injektiv.

c) Bestem den til T svarende matrix i forhold til den fundne basis β.

d) Fastlæg en basis γ for V, således at den til T svarende matrix i forhold til denne basis γ vil være en jordanmatrix.

Opgave B3.

Man betragter $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ - rummet af alle n×n matricer over $\mathbb{C}$.

En reel matrix M kaldes en **stokastisk matrix** hvis

- $M_{ij} \geq 0$ for alle i,j = 1,2,..,n (dvs alle elementer i M er ikke negative), og

- $M_{1j} + M_{2j} + \dots + M_{nj} = 1$ for alle j = 1,2,..,n (dvs summen af elementerne i hver søjle bliver lig 1).

Lad u være søjlevektoren, hvor alle n elementer er 1, og vis da følgende tre udsagn:

a) Når M er en reel matrix med ikke negative elementer, da er M en stokastisk matrix hvis og kun hvis $M^t u = u$.

b) Hvis M og N er stokastiske matricer, da vil også MN og M^p (p er et naturligt tal) være stokastiske matricer.

c) $\lambda = 1$ vil altid være egenværdi for en stokastisk matrix.

For en matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ defineres en **norm** af A ved

$$\|A\| = \max\{|A_{ij}| : i,j = 1,2,..,n\}.$$

Vis, at normen opfylder følgende fire betingelser

d1) $\|A\| \geq 0$ og $\|A\| = 0$ hvis og kun hvis $A = O$

d2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ hvor $c \in \mathbb{C}$

d3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

d4) $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$

e) Er M igen en stokastisk matrix, skal man vise, at $\|M\| \leq 1$ og at $\|M^p\| \leq 1$ for alle naturlige tal p.

Da en reel matrix M kan opfattes som defineret over $\mathbb{C}$, vil det karakteristiske polynomium for M faktorisere helt, og M vil derfor altid være similar med en jordanmatrix J, dvs der findes en invertibel matrix Q så

$$J = Q^{-1}MQ.$$

f) Vis da, at $J^p = Q^{-1}M^pQ$, samt at der vil findes et positivt tal c, således at

$$\|J^p\| \leq c \quad \text{for alle naturlige tal p.}$$

g) Vis da, at enhver jordanblok i J svarende til egenværdien 1 vil være 1×1, og

h) at alle egenværdier λ for M (og J) vil opfylde $|\lambda| \leq 1$.

Opgave B4.

Vi betragter $C^\infty([-\pi,\pi])$ - rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner på intervallet $[-\pi,\pi]$.

a) Er $h \in C^\infty([-\pi,\pi])$ vis da, at

hvis h er en ulige funktion, er $\int_{-\pi}^{\pi} h(t)dt = 0,$

På $C^\infty([-\pi,\pi])$ defineres det sædvanlige indre produkt

$$<f,g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

Endvidere betragter vi underrummet

$$M = \text{span}\{ \cos(t), \sin(t), t\cos(t), t\sin(t) \}$$

b) Undersøg om disse fire funktioner er parvis ortogonale.

c) Bestem en ortogonal basis for det underrum, der er udspændt af de tre første funktioner.

d) Udvid derpå denne ortogonale basis til en ortogonal basis for M.

Vi definerer den lineære afbildning $T: C^\infty([-\pi,\pi]) \to C^\infty([-\pi,\pi])$ ved

$$T = D^2 + D^0$$

(den samme afbildning som i opgave 2).

e) Vis, at M vil være et T-invariant underrum i $C^{\infty}([-\pi,\pi])$.

f) Vis, at M indeholder to T-cykliske underrum af dimension 2.

g) Kaldes disse to T-cykliske underrum M_1 og M_2, vis da at

$$M_2 \perp M_1 \quad \text{og} \quad M = M_1 \oplus M_2.$$

h) Bestem endelig den ortogonale projektion af funktionen $h(t) = t$ på hvert af underrummene M_1 og M_2.

Opgave C1.

Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -1 & 4 \\ -4 & 7 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 20 & 18 & -13 \end{pmatrix}$$

a) Vis, at det karakteristiske polynomium $p(\lambda)$ svarende til A er givet ved

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)^2(3 + \lambda)^2.$$

b) Vis, at A ikke er diagonaliserbar.

c) Bestem en til A svarende jordanmatrix J.

d) Bestem en invertibel matrix Q, således at $J = Q^{-1}AQ$.

e) Fastlæg den differentiable funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$f'(t) = Af(t) \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R} \text{ og } f(0) = (3,-3,-2,2).$$

Opgave C2.

I det følgende betragtes et endelig-dimensionalt vektorrum V. To lineære afbildninger T og U på V kaldes **samtidigt** diagonaliserbare, hvis der findes en ordnet basis α for V, således at

$$[T]_\alpha \quad \text{og} \quad [U]_\alpha$$

er diagonalmatricer.

a) Antag nu, at afbildningerne T og U er samtidigt diagonaliserbare, og vis da at

$UT = TU$.

I det følgende antages det, at afbildningerne T og U er diagonaliserbare og endvidere at $UT = TU$. (Og vi skal vise, at T og U er samtidigt diagonaliserbare).

b) Betragt nu et vilkårligt egenrum E_λ **for** T, og vis, at dette egenrum vil være U-invariant.

c) Lad W være et U-invariant underrum i V, og lad $v_1, v_2, \ldots, v_k$ være egenvektorer for U svarende til **forskellige** egenværdier. Er nu

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k \in W$$

vis da, at $v_i \in W$ for alle $i = 1, 2, \ldots, k$. (Det kan med fordel vises ved induktion efter k).

d) U er som bekendt diagonaliserbar, vis da, at U_W - dvs U's restriktion til det U-invariante underrum W - også vil være diagonaliserbar. (Benyt fx de karakteristiske polynomier for U og U_W samt resultatet fra punkt c).

e) Vis nu, at man kan bestemme en basis for E_λ af egenvektorer **for** U, samt at T og U hermed er samtidigt diagonaliserbare.

f) Der er givet følgende to matricer

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Undersøg om de vil være samtidigt diagonaliserbare. (Hvorfor kan resultatet fra punkt e benyttes i denne sammenhæng?).

Opgave C3.

Rummet $\mathbb{R}^4$ er forsynet med standardbasen. For ethvert reelt tal p defineres følgende to underrum i $\mathbb{R}^4$

$$U = \text{span}\{(1,2,-1,p);(3,1,0,2)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,1,p,-2);(3,0,2,-1)\}$$

a) Bestem de tal p for hvilke $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg i hvert enkelt tilfælde en basis for $U \cap V$.

Rummet $\mathbb{R}^4$ er endvidere forsynet med det sædvanlige indre produkt. I det følgende benyttes kun én af de fundne værdier for p - vælg selv.

b) Fastlæg nu en ortogonal basis $b = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$ for $\mathbb{R}^4$, således at elementerne i basis opfylder

$$b_1, b_2 \in U \quad \text{og} \quad b_2, b_3 \in V.$$

c) Om en lineær afbildning $S: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ oplyses det, at

$$B(S) = V \quad \text{og} \quad N(S) = U$$

hvor $B(S)$ er billedrummet og $N(S)$ er nulrummet for S. Endvidere oplyses det om afbildningen S, at

$$S(b_3) = -2b_3 \quad \text{og} \quad S(b_4) = b_2 - b_3$$

Fastlæg på denne baggrund en matrixrepræsentation for S i b-basen.

d) Redegør for at S ikke kan diagonaliseres, og bestem den til S svarende jordanmatrix samt en jordanbasis udtrykt i b-basen.

e) Fastlæg endvidere en matrixrepræsentation for S i standardbasen. (Benyt fx en ortonormal basis, der svarer til b-basis).

f) Bestem endelig en basis for billedrummet af S^2.

Opgave C4.

Betragt vektorrummet $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ - dvs rummet af alle reelle 3×3 matricer.

a) Vis, at der ved $\langle A,B \rangle = tr(B^T A)$

er defineret et indre produkt på $M_{3\times3}(\mathbb{R})$. (B^T betegner den transponerede matrix til B).

b) Betragt derpå delmængderne

$$S = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

og

$$T = \{A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$$

Vis at S og T er underrum i $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ og at $M_{3\times3}(\mathbb{R}) = S \oplus T$. Hvad er dimensionen af S?

c) I rummet S er nu givet de to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fastlæg da $<A,B>$, $\|A\|$ og $\|B\|$.

d) I rummet S betragter vi $U = \text{span}\{A,B\}$ og $U^\perp$. Fastlæg de krav som elementerne i $U^\perp$ nødvendigvis skal opfylde. Hvad er dimensionen af $U^\perp$?

e) Fastlæg på denne baggrund en ortogonal basis for $U^\perp$.

f) Vis endvidere, at $T = S^\perp$.

g) Fastlæg endelig fourierkoefficienterne for matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: http://mmf.ruc.dk eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerappoprt af: Stine Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre

336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss

342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschlæger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning
Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen

358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen

359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)

360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhelm Booß-Bavnbek, Kenro Furutani

362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen

363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen

364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup

365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege

366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

368/99 Kvartvejsraport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen

369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen

370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter tekst nr. 350/98

371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:
Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen

373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki

374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen

375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik

376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder

377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen

378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and termal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski

386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen

388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen

390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System#: Thomas Engberg Pedersen##, Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2#: Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen*, Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Morthorst, Lotte Schleisner, RUC: Finn Sørensen**, Bent Sørensen
#Indtil 1/1-2000 Elkraft, ## fra 1/5-2000 Cowi Consult
* Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ** fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram

391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen

392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.

393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.

395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipiddobbeltlag

2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann

Vejleder: Dorthe Posselt