TEKST NR 393 2001

Hilberts matematikfilosofi

Specialerapport af:
Jesper Hasmark Andersen
Vejleder:
Stig Andur Pedersen
September 2000

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA - Roskilde Universitetscenter - Postboks 260 - DK-4000 Roskilde

TITEL: Hilberts matematikfilosofi. Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen. Vejleder: Stig Andur Pedersen.

IMFUFA tekst nr. 393/2001 104 sider ISSN 0206-6242

Abstract:

This thesis examines David Hilbert's philosophy of mathematics, that is the philosophical position that lies behind Hilbert's finitistic programme.
In the interpretation of Hilbert's philosophy special emphasis is laid on his concept of ideal elements. Hilbert's ideal elements are then compared with Kant's ideas of reason.
Consequently two interpretations are considered: an instrumentalist interpretation, in which ideal elements are introduced solely with the aim of improving the epistemic efficiency with regard to finitistic objects, and a more Kantian interpretation in which ideal elements are introduced as a means to achieve a higher systematic unity.
The conclusion is that the latter interpretation is more in line with what Hilbert was aiming at.
The thesis ends with a discussion of the reasonableness of Hilbert's position in light of Gödels incompleteness results and the mathematical practice end experience in general.

Indhold

Kapitel 1

Indledning

1.1 Motivation

Denne rapport omhandler filosofiske aspekter af matematikken. En filosofisk og videnskabsteoretisk behandling af matematikken bidrager i de fleste tilfælde ikke med ny matematisk viden, men er derimod en undersøgelse og refleksion over matematikken og den matematiske praksis. Selvom formålet med sådanne undersøgelser således ikke er at fremkomme med egentlig ny matematisk viden, så er det dog ambitionen at opnå indsigt i hvad matematik er og derigennem også – om muligt – at korrigere forkerte fortolkninger af matematikken.

Filosofiske betragtninger om matematikken har en lang historie som går tilbage til starten af den vestlige filosofis historie. Således havde både Platon og Aristoteles overvejelser over matematikkens natur.[1]

I det tyvende århundrede har et af de helt centrale spørgsmål været, hvorvidt vi kan skabe et sikkert grundlag for matematikken. Forsøget på at besvare dette spørgsmål skabte tre forskellige grundlagsprogrammer: *logicismen*, *intuitionismen* og endeligt *Hilberts program*, hvis filosofiske baggrund denne rapport omhandler.

Formålet med Hilberts program var at sikre matematikkens modsigelsesfrihed, og midlet til at opnå dette var at formalisere matematikken for dermed at kunne bevise det formaliserede systems konsistens med uproblematiske midler. Dette træk ved Hilberts program har gjort, at hans navn traditionelt set er blevet tilknyttet til den filosofiske position som kaldes *formalisme*. Formalisme er en betegnelse som bliver brugt lidt forskelligt, men centralt er en

[1] Se f.eks. [Körner, 1971].

tese om at matematikken består af formler som ikke refererer til noget. Matematikken kan således forstås som omhandlende formelle systemer, og den matematiske aktivitet som bestående i at vise, at en formel kan bevises i et bestemt formelt system. Ifølge en sådan karikeret formalistisk position har vi opnået en tilstrækkelig forståelse af matematikken, når den er formaliseret, og som sådan kan matematikken fuldt ud forstås som et meningsløst spil, eller som en undersøgelse af dette spil.

Selvom David Hilbert som nævnt ofte forbindes en en formalistisk position, er der dog samtidigt bred enighed om, at Hilberts position var mere nuanceret end en sådan simpel formalisme, som vi lige har skitseret, og dette projekt er et forsøg på at præcisere hvad der nærmere karakteriserer Hilberts filosofiske position.

Som de fleste sikkert ved viste Kurt Gödels ufuldstændighedsresultater desværre, at Hilberts program i dets oprindelige udformning ikke lader sig gennemfører, og da de andre grundlagsskoler heller ikke synes at give acceptable løsninger, er spørgsmålet om matematikkens grundlag forblevet uforløst frem til idag.

De tre grundlagsskoler var i lang tid – og er tildels stadigvæk i generaliserede former – dominerende i den filosofiske diskussion af matematikkens natur.

I starten af 80'erne[2] opstår der dog fra forskellige sider en kritik af denne søgen efter et sikkert grundlag. Eksempler på dette er Morris Kline's *Mathematics. The Loss of Certainty* (1980), Davis og Hersh's *The Mathematical Experience* (1983), Philip Kitcher's *The Nature of Mathematical Knowledge* (1984)og Penelope Maddy's *Naturalism in Mathematics* (1997).

Fælles for disse såkaldte »Maverick«-filosoffer er, at de betragter grundlagsskolernes søgen efter et sikkert grundlag for matematikken, som et håbløst eller i det mindste for snævert mål for en filosofisk undersøgelse af matematikken.

Grundlagsskolerne og specielt Hilberts program anses mere præcist som foretagende en reduktion af matematikken til en symbolmanipulerende aktivitet, og dermed ses de som begrænsende hvilken type af filosofiske problemstillinger man undersøger. Således giver grundlagsskolerne ifølge deres nyere kritikere ikke et fyldestgørende billede af hvad matematik er, idet der ses bort fra at matematikken er en menneskelig aktivitet med en historisk udvikling, og at matematikken udspilles i en social og kulturel praksis. Dette forsøger disse »nye« teoretikere at rode bod på ved i høj grad at fokusere på mate-

[2]Med Quines naturalisme og Lakatos' videnskabsteori som forløbere og vigtige inspirationskilder.

matikkens historiske udvikling og praksis istedet for at se på spørgsmålet om matematikkens eventuelle sikkerhed.

»Marverick«-filosofferne har helt sikkert en god pointe. For selvom matematikken synes at besidde en ganske særlig grad af stabilitet og sikkerhed i forhold til de empiriske videnskaber, synes den ikke udelukkende at kunne forstås udfra f.eks. et formalistisk synspunkt. Det at lave matematik er jo ikke kun at beregne og foretage formelle slutninger, men jo f.eks. også at kunne finde frem til tydeligt forståelige beviser, at kunne introducere »passende« nye begreber og at kunne fremsætte begrundede hypoteser. Herudover afslører matematikkens historie klart store kontroverser, forvirring og modsigelsesfyldte antagelser. Matematikken synes således også at indeholde et aspekt af fallibilitet og kulturafhængighed, som en god matematikfilosofi også må kunne kunne redegøre for.

Alligevel er det dog spørgsmålet om ikke »Maverick«-filosofferne har tegnet en for grov karikatur af de oprindelige grundlagsskoler og selvfølgelig specielt af Hilberts filosofiske position? Det vil være en af denne rapports centrale pointer at vise, at dette faktisk er tilfældet, og at Hilberts matematikfilosofi er mere sofistikeret og brugbar end det ofte antages.

1.2 Afgrænsning

Jeg vil i rapporten koncentrere mig om den filosofiske position bag Hilberts program, og vil derfor ikke gå dybere ind i de tekniske sider af programmet[3]. Herudover vil begrænse mig til det, man kan kalde Hilberts *finitistiske* program, som det blev fremsat i 1920'erne.

1.3 Problemformulering

På baggrund af det ovenstående har jeg stillet følgende spørgsmål:

Hvad er den bagvedliggende filosofiske position for Hilberts program?

Jeg vil specielt se nærmere på Hilberts forståelse af »det uendelige«, og dermed fokusere på spørgsmålet om de såkaldte ideale elementers status og funktion. Endelig må man selvfølgelig også stille sig det ret naturlige spørgsmål: *er Hilberts position en fornuftig matematikfilosofi?*

[3] Sådanne gennemgange findes f.eks. i [Sieg, 1988] og [Kreisel, 1983].

1.4 Målgruppe og læsevejledning

Projektet henvender sig både til matematik-interesserede filosoffer og til filosofi-interesserede matematikere. Med denne dobbelte målgruppe i baghoved har jeg forsøgt at »holde øjnene på bolden« i den forstand, at matematikken i projektet har til formål at illustrere filosofiske pointer, og filosofien har til formål at belyse spørgsmålet om matematikkens natur. Med denne dobbelte målgruppe løber man selvfølgelig den risiko, at ingen føler sig ordentligt tilfredsstillet, men det må briste eller bære.

Rapporten begynder med to korte kapitler som præsenterer en del af den historiske baggrund for Hilberts program. Herefter præsenteres Hilberts finitistiske program, og vi ser nærmere på Hilberts finitisme og de ideale elementers metode. Herefter kommer der en redegørelse for, hvad en regulativ idé er i Kants forstand, og dette sammenlignes med Hilberts ideale elementer. Endelige ser vi på Hilberts syn på den matematiske begrebsdannelse. Rapporten afsluttes med en diskussion af Hilberts filosofiske position.

1.5 Formalia

Specialet er skrevet som et integreret projekt mellem Matematik og Filosofi & Videnskabsteori.

På Filosofi & Videnskabsteori-uddannelsen skal projekt opfylde den teoretiske dimension. Om denne dimension står der i studieordningen:

> Et projektarbejde indenfor den teoretiske dimension undersøger enten en problemstilling indenfor teoretisk filosofi, herunder erkendelsesteori, ontologi, videnskabsfilosofi, logik, bevidsthedsfilosofi og sprogfilosofi, eller en almen eller fagspecifik videnskabsteoretisk problemstilling der vedrører den videnskabelige erkendelse.[4]

På Matematik-uddannelsen er projektet et såkaldt professionsprojekt af forskervarianten. Om denne variant står der i studieordningen:

> Projektet skal beskæftige sig med faget matematik således som det optræder og opfattes i matematiske forskningssammenhænge. Hovedindholdet i projektarbejdet kan bestå i at udføre egentlig matematisk forskning eller videnskabsteoretiske eller -historiske undersøgelser.[5]

[4] Studieordning for Filosofi & Videnskabsteori, sep. 1998.
[5] Studieordningen for Matematik, sep. 1996.

Projektet kan overordnet siges at være en videnskabsteoretisk undersøgelse af en problemstilling vedrørende den matematiske erkendelse.

1.6 Tak

Jeg vil gerne takke min vejleder Stig Andur Pedersen, der har ydet en stor indsats. Også en speciel tak til Frederik Voetmann Christensen for gennemlæsning og kommentarer.

Kapitel 2

David Hilbert

Ser man på de af Hilberts artikler, som kan siges at omhandle spørgsmålet om matematikkens grundlag, samler disse sig hovedsageligt omkring to perioder fra 1900 til 1905 og igen fra 1918 til 1934[1]. Man kan således med en vis ret tale om to forskellige »programmer«, et tidligt og et sent, som dog har en del lighedspunkter.

Jeg vil i denne rapport koncentrere mig om det sene såkaldte *finitistiske program* og den filosofiske position, som ligger bag dette, og vil således hovedsageligt benytte mig af tekster fra perioden 1918-1934. Det endelige finitistiske program blev første gang præsenteret i artiklen *Neubegründung der Mathematik* (1922). En artikel som bygger på foredrag Hilbert afholdte i Hamburg og København i 1921.

Et par yderligere kommentarer til mit valg af kilder til belysning af det finitistiske program er på sin plads. Det er misvisende, at se Hilberts program som resultatet af én mands arbejde. I Volker Peckhaus' udmærkede bog *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*[2] beskrives det, hvordan Hilbert arbejdede på at få forskellige folk til instituttet i Göttingen, heriblandt filosoffen Leonard Nelson (1882-1927), for at arbejde med forskellige aspekter af programmet. Programmet var altså mere end et enmands projekt, og kan måske bedre beskrives som en mere kollektiv indsats, hvor Hilbert udstak de overordnede retningslinier, men også i høj grad var afhængig af andres deltagelse og bidrag. I denne sammenhæng var den vigtigste deltager i udarbejdelsen af det finitistiske program uden tvivl Hilberts nære medarbejder: Paul Isaak Bernays (1888-1977).

[1] I den mellemliggende periode afholdte Hilbert dog næsten hvert år foredrag om matematikkens grundlag, se [Sieg, 1999b].

[2] [Peckhaus, 1990]

Paul Bernays blev hentet til Göttingen omkring 1918 for at arbejde som Hilberts assistent. Dette skete specielt med det formål for øje, at arbejde med Hilbert på spørgsmålet om matematikkens grundlag. En grundene til at det netop var Bernays, som blev udset til dette, var hans filosofiske skoling[3]. I løbet af 1920'erne skrev han flere artikler, som loyalt uddyber og præciserer Hilberts position. Derfor vil jeg udover tekster af Hilbert også benytte mig af Bernays artikler til at belyse den hilbertske position.

2.1 Hvem var David Hilbert?

På trods af at jeg i dette projekt hovedsageligt vil beskæftige mig med Hilberts syn på matematikkens filosofi, må man ikke glemme at han først og fremmest var matematiker, og det vil derfor være passende at sige et par ord om Hilberts karriere som matematiker.

David Hilbert (1862-1943) blev født og voksede op i den øst-preussiske by Königsberg og var en af sin generations vigtigste matematikere. Hilbert var uhyre produktiv, og han bidrog med vigtige resultater indenfor mange dele af matematikken. Han fik sin første ansættelse ved universitetet i Königsberg i året 1885 som *Privatdozent*, en titel som gav retten til at undervise ved universitetet og modtage betaling fra de studerende, som fulgte hans kurser. Nogle år senere blev han udnævnt til *Ordentlicher Professor* og fik hermed en fast gage. Universitet i Königsberg var dog på dette tidspunkt ikke noget ideelt sted at være for en matematiker, idet der var få elever og kollegaer. Forholdene var langt bedre i Berlin, hvor store matematikere som Kronecker (1823-1891) og Weierstraß (1815-1897) havde hjemme, eller i Göttingen, hvor Felix Klein (1849-1925) var den ledende skikkelse; og det gik da hverken værre eller bedre end at Hilbert i 1895 blev hentet til det matematiske institut i Göttingen af Felix Klein personligt. Her forblev han resten af sin karriere[4] og var med til at gøre det matematiske institut i Göttingen til Tysklands førende[5].

Selvom Hilbert publicerede resultater indenfor mange dele af matematikken, var hovedparten af hans vigtigste resultater dog algebraiske.

Noget af det første Hilbert arbejdede med var invariansteori. I 1888 beviste han, at der af ren logiske nødvendighed må eksistere en endelig basis til

[3]Se [Reid, 1970, s. 151].

[4]Hilbert gik officielt på pension i 1930, men var dog tilknyttet til instituttet i nogle år herefter.

[5]Se [Reid, 1970].

ethvert system af invarianter. Beviset skabte en del røre i samtiden, da det ikke gav nogen metode til at konstruere en sådan endelig basis, og ikke alle matematikere var villige til at acceptere beviset[6]. Kritikken forstummede dog da Hilbert i 1890 gave et konstruktivt bevis for teoremet. Hilberts undersøgelser af invariansteorien kulminerede i *Über die vollen Invariantensysteme* (1893)[7].

I 1897 udgiver han det såkaldte *Zahlberichte*, et værk som blev bestilt af *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*. Værket samler og systematiserer på en elegant måde tidligere resultater i algebraisk talteori[8].

I 1899 udkommer endnu et af Hilberts hovedværker *Grundlagen der Geometrie*. *Grundlagen der Geometrie* blev skrevet på Kleins opfordring i anledningen af offentliggørelsen af et mindesmærke for Carl Friedrich Gauss (1777-1855) og Wilhelm Weber (1804-1891) i Göttingen. Værket har haft en stor indflydelse på den moderne matematiks fokusering på aksiomatisering, og det er derfor passende med et par bemærkninger om dette aspekt af værket. Hilberts opfattelse af den aksiomatiske metode adskiller sig fra den, som vi finder i Euklids berømte *Elementer*, hvor aksiomerne kort fortalt forstås som indlysende sandheder. *Grundlagen der Geometrie* er en aksiomatisk undersøgelse af geometrien, men istedet for at forudsætte en almen forståelse af begreberne punkt, linie og plan, går Hilbert mere generelt og abstrakt til værks. Hilbert beder os betragte tre systemer af objekter og tre relationer, og det er vores aksiomer alene, som bestemmer hvordan disse relationer sammenknytter vores objekter. Den abstrakte opfattelse af de geometriske aksiomer i *Grundlagen der Geometrie* belyses meget godt af følgende citater fra Bernays:

> [...] the axioms are in no way judgments that can be said to be true or false; they have a sense only in the context of the whole axiom system.

Og lidt senere:

> Thus the axiom system itself does not express something factual; rather, it presents only a possible form of a system of connections that must be investigated mathematically according to its internal properties.[9]

[6][Reid, 1970, s. 34]
[7]Se [Rowe, 1999].
[8]Se [Corry, 1996, s. 148].
[9][Bernays, 1922, s. 192]

Man kan let få den opfattelse at Hilberts aksiomatisering er udtryk for en ren »formalistisk« tilgang til geometrien. Dette er dog tildels en misforståelse. Den abstrakte aksiomatiserings dyder ligger for Hilbert først og fremmest i, at vi ved hjælp af denne opnår ny viden om eksisterende matematiske teorier, f.eks. hvilke forudsætninger forskellige teoremer har, og mindst lige så vigtigt, hvilke de ikke har. Herudover skal man også huske på at aksiomerne ikke er vilkårligt opstillede, men udledt fra en allerede eksisterende (uformel) matematisk teori[10].

Hilbert stillede tre krav som aksiomssystemet burde opfylde: fuldstændighed, (på dette tidspunkt har fuldstændighed en mindre teknisk og præcis betydning end i dag, nemlig at aksiomer skulle kunne bevise, hvad man tidligere havde kunne bevise i den »uformelle« teori), simpelhed, (antallet af aksiomer skulle være så få som muligt, de enkelte aksiomer skulle således helt være uafhængige af hinanden), og endelig, som et sidste krav, skulle aksiomerne være indbyrdes modsigelsesfrie – konsistente.

I *Grundlagen der Geometrie* undersøgte Hilbert uafhængigheden af de forskellige aksiomer. Dette gjorde han ved at konstruere modeller hvori alle aksiomerne gælder, på nær det, hvis uafhængighed skulle vises. Udover dette viste Hilbert at konsistensen af hans aksiomssystem er *relativ* til teorien for de reelle tal $\mathbf{R}$. Det vil sige, at hvis vores aksiomer for de reelle tal er indbyrdes modsigelsesfrie, så er geometriens aksiomer det også.

I 1900 holder Hilbert et foredrag med titlen *Mathematische Probleme* ved den matematiske verdenskongres i Paris. I foredraget fremsætter Hilbert 23 problemer, som han mente ville være centrale for matematikken i det tyvende århundrede. Problemerne fordeler sig indenfor mange forskellige områder, men det er interessant at se, at de to første problemer, som Hilbert nævner, vedrører nogle af de problemer som er centrale i Hilberts senere undersøgelser af matematikkens grundlag.

Det første problem på Hilberts liste var Cantors kontinuumshypotese ($|\mathbf{R}| = \aleph_1$)[11].

Det andet problem på Hilberts liste var at undersøge konsistensen af aksiomerne for de reelle tals aritmetik[12], som han havde beskrevet dem i *Über den Zahlbegriff* (1900). Hilbert havde som nævnt vist konsistensen aksiomerne i *Grundlagen der Geometrie* relativt til de reelle tal, og han påpeger derfor i sine kommentarer nødvendigheden i at finde et konsistensbevis, som ikke

[10]Se f.eks. [Rowe, 1999] og [Corry, 1996, s. 160-163].

[11][Hilbert, 1900, s. 298]. $\aleph_1$ er det første kardinaltal efter $\aleph_0$, hvor $\aleph_0 = |\omega|$, hvor ω er den første uendelige ordinal.

[12]Se [Hilbert, 1900, s. 299].

er relativt, men »direkte« i en eller anden forstand. Det er dette problem, Hilbert forsøger at løse med det finitistiske program.

Udover disse matematiske arbejder, havde Hilbert også en stor interesse for fysikken. Han arbejdede blandt andet med den matematiske formulering af relativitetsteorien og med aksiomatiseringer af forskellig andre fysiske teorier. Herudover forsøgte Hilbert at udforme en såkaldt *unified field theory*[13].

Hilbert fejrede store triumfer i løbet af sin karriere, men hans forsøg på løsning af spørgsmålet om matematikkens grundlag kan ikke siges at være en af disse. Han forsøgte første gang at takle problemet i artiklen *Über die Grundlagen der Logik und Aritmetik* (1905), og det tages op igen i *Neubegründung der Mathematik* (1922).

Hvad der motiverede Hilbert til at tage dette spørgsmål op, skal vi se på i det følgende.

[13] Se [Hilbert, 1924] og [Mehra, 1974].

Kapitel 3

Grundlagskrisen – det uendelige som problem

Ved starten af det tyvende århundrede opstår der en såkaldt grundlagskrise i matematikken. Dette manifesterer sig som en usikkerhed omkring sikkerheden af de matematiske slutninger, specielt hvad angår uendelige objekter, og sandheden af de matematiske domme. En sådan krisestemning opstår selvfølgelig ikke ud af den blå luft. Et fyldestgørende billede af hvordan dette sker må omfatte samspillet mellem mange forskellige faktorer over en længere periode, både internt matematiske faktorer som eksterne, og et sådant fuldstændigt billede vil jeg ikke forsøge at give her. Men resultatet af krisestemningen var, at man fra forskellige sider søgte efter et sikkert grundlag for matematikken for dermed at få klarhed over den matematiske videns epistemiske status.

Af disse anstrengelser opstår der tre »skoler«, som har domineret diskussionen af matematikkens filosofi frem til i dag. Udover Hilberts program, drejer det sig om logicismen og intuitionismen, som alle har til formål at redegøre for sikkerheden af de matematiske domme. De forskellige skolers løsningsforslag er dog vidt forskellige.

For at forstå baggrunden for Hilberts finitistiske program, vil jeg derfor i det følgende kort opridse nogle af de faktorer, som havde indflydelse på dets udformning. Jeg vil mere præcist se på Russells paradoks, som opstår ved uforsigtig brug af uendelige mængder, og henholdsvis logicismens og intuitionismens forskellige forslag til et sikkert grundlag for matematikken.

3.1 Paradokserne i mængdelæren

Georg Cantors (1845-1918) mængdelære syntes at kunne give en vej til studiet af uendelige objekter. Således fremkom Cantor med flere højst interessante resultater. Af disse kan nævnes, at det blev vist, at mængden af rationelle tal er tællelig, men at mængden af reelle tal ikke er tællelig[1].

Cantor benyttede sig af den mest generelle form af det såkaldte komprehensionsprincip. Princippet siger, at der til en given egenskab $P(x)$, eksisterer en mængde A bestående af alle de mængder, som opfylder egenskaben $P(x)$, altså $A = \{x : P(x)\}$. At benytte dette generelle princip viste sig dog at medføre paradokser[2].

Det vel nok mest kendte er Russells paradoks fra 1901, som fremkommer når man ser på den mængde, som via komprehensionsprincippet er givet ved egenskaben: x ikke er element i sig selv, dvs. mængden $T = \{x : x \notin x\}$[3]. Det synes nu naturligt at spørge om hvorvidt T er element i sig selv eller ej?

Hvis T er element i sig selv, altså $T \in T$, så gælder det jfr. T's definition at $T \notin T$.

Hvis T derimod ikke er element i sig selv, har vi fra definitionen af T at $\neg(T \notin T)$, men dette er jo ækvivalent med $T \in T$, og vi har et paradoks![4]

Dette paradoks og andre lignende er med til at puste liv i en diskussion af hvorvidt matematikken er gået for langt, og til at intensivere jagten på et sikkert grundlag for matematikken.

Zermelo (1871-1953) formåede med sin aksiomatisering af mængdelæren at udgå denne type af paradokser, ved kun at tillade visse konstruktioner af mængder. Mere præcist indskrænkede Zermelo »komprehensionen«, således at princippet kun gælder, når der på forhånd er givet en mængde M sammen med en egenskab $P(x)$. Kun hvis dette er tilfældet findes der en mængde A, for hvilket det gælder at $A = \{x \in M | P(x)\}$.

Men dermed var diskussionen ikke afsluttet. Blandt andet indfører Zermelo et nyt postulat, nemlig det såkaldte udvalgsaksiom, for at kunne vise at alle mængder kan velordnes. Udvalgsaksiomet siger, at hvis A er en mængde bestående af parvis disjunkte ikke tomme delmængder, så eksisterer der en mængde M, som består af præcist et element fra hver af A's elementer. Aksiomet er desuden nødvendigt for at kunne vise, at også uendelige vektorrum

[1] Se f.eks. [Moschovakis, 1994].
[2] Cantor var selv opmærksom på dette.
[3] Se [Kleene, 1971, s. 37].
[4] Se f.eks. [Fraenkel et. al., 1973].

har en basis, og at følge-konvergens er ækvivalent med topologisk konvergens. Således synes aksiomet umiddelbart at være en rimelig antagelse, men det har også visse »kontra-intuitive« konsekvenser.

Vi kan nemlig ved hjælp af udvalgsaksiomet skabe en opdeling af en kugleoverflade K i parvis disjunkte delmængder, således at $K = N \cup A \cup B \cup C$, hvor N er tællelig, og A, B, C er parvis kongruente. To punktmængder på kugleoverfladen kaldes kongruente, hvis de kan bringes til at dække hinanden ved en drejning omkring kuglens centrum.

At en sådan opdeling eksisterer lyder måske ikke særligt overraskende, men vi kan samtidigt vise at A, udover at være kongruent med henholdsvis B og C, desuden er kongruent med $B \cup C$!

Det er nu endog meget svært, at forstille sig hvordan A kan ser ud, endsige hvordan man skulle konstruere sig frem til den, men udvalgsaksiomet giver os på trods af dette, eksistensen af en funktion som kan udvælge en sådan mængde A[5].

Det er senere blevet vist, at udvalgsaksiomet er uafhængigt af de øvrige mængdeteoretiske aksiomer. Kort fortalt viste Kurt Gödel i 1938 at udvalgsaksiomet er konsistent med de øvrige aksiomer i Zermelo-Freankel mængdelæren, og i 1964 viste Paul Cohen at negationen af udvalgsaksiomet også er konsistent med de øvrige aksiomer[6].

Ser vi bort fra diskussion af udvalgsaksiomet, står vi stadigvæk tilbage med spørgsmålet om, hvordan kan vi være sikker på, at vi ikke senere løber ind i andre paradokser end de som Zermelos mængdelære sikre os imod. Umiddelbart er det eneste man ved, at det ikke er sket endnu; godt nok synes aksiomerne at være »rimelige« antagelser, men det gjorde komprehensionsantagelsen jo også i første omgang. Af disse grunde blev nødvendigheden af at give matematikken et sikkert grundlag endnu mere åbenlys og påtrængende.

3.2 Russell og Whiteheads logicisme

Russell (1872-1970) og Whitehead (1861-1947) forsøgte i deres *Principia Mathematica*[7] at undgå paradokserne og samtidigt at give matematikken et sikkert grundlag. Deres logicistiske tese var, at matematikken er en del

[5] Se [Meschkowski, 1969].
[6] Se [Mostowski, 1966].
[7] Udgivet i tre bind mellem 1910-1913.

af logikken. Russell og Whitehead var ikke de første til at foreslå noget sådan, specielt bør man nævne Gottlob Frege (1848-1925), som var en vigtig inspirationskilde for Russells logicistiske program.

Ifølge den logicistiske tese skulle matematiske begreber kunne defineres ved hjælp af logiske begreber, på en sådan måde at al matematik kunne udledes udfra selvindlysende logiske aksiomer; hvis dette kunne lade sig gøre, kunne matematikken ikke være andet end sand.

For at undgå paradokserne fremsætter Russell en såkaldt type-teori.[8] Aksiomerne for type-teorien skulle være indlysende sandheder. Dette viste sig dog at være et umuligt krav at opfylde, idet Russell for at opnå en brugbar matematik måtte postulere aksiomer, som ikke med rimelighed kunne siges at være logiske og selvindlysende.

Den type-teori Russell fremsætter undgår meget kort fortalt de sædvanlige paradokser, ved at skelne mellem mængder på forskellige niveauer, niveau 1, niveau 2 etc.. En mængde på niveau 1 er defineret ved hjælp af variable som kun løber over simple grundlæggende elementer kaldet individer. En mængde på niveau 2 er defineret v.h.a. variable som kun løber over individer *og* mængder på niveau 1, og så videre.

For at kunne lave en bare nogenlunde kompleks matematik i denne typeteori, er det nødvendigt at antage et aksiom, som postulerer eksistensen af uendelig mange primitive individer. For Russell havde dette aksiom status af en hypotese om verden.

Men udover dette uendeligheds-aksiom, postuleres der også et såkaldt reducibility-aksiom, som er nødvendigt for at kunne konstruere den sædvanlige analyse i Russells version af type-teorien[9]. Reduciablility-aksiomet siger, at der til en hver mængde M på et niveau over niveau 1 eksisterer en co-ekstensiv mængde på niveau 1, – en antagelse der ligesom uendeligheds-aksiomet ikke kan karakteriseres som rent logisk.

Den ønskede reduktion af matematik til logik, lod sig altså ikke gennemføre, og således havde man ikke fået nogen endelige garanti for konsistensen af den klassiske matematik.

[8]Se [Feferman, 1998].

[9]Paradokser kan undgås ved en simple type-teori, hvori der blot skelnes mellem mængde af individer (type 1), mængder af sådanne mængder (type 2), etc., og i en sådan er der ikke behov for et reduciability-aksiom.

3.3 Intuitionismens kritik

Udover paradokserne i mængdelæren og logicismens foreslåede løsning af grundlagsproblemet er en anden udvikling central for udviklingen af Hilberts program. Dette er den hollandske matematiker Brouwers (1881-1966) intuitionisme, og dennes kritik af den klassiske matematiks brug af den logiske slutning tertium non datur, eller som den kaldes på dansk: *det udelukkede tredjes princip.*

Brouwer er hverken den eneste eller den første som har kritiseret den klassiske matematik. Af andre navne kan nævnes den tyske matematiker Kronecker, franskmanden Emile Borel (1871-1956) og Hermann Weyl (1885-1955). Weyl, som var en af Hilberts mest begavede elever, fremlægger sin egne unikke position i *Das Kontinuum* (1918), men senere tilslutter han sig Brouwers intuitionisme, som han dog delvist forlader igen til fordel for en slags gylden middelvej mellem intuitionismen og Hilberts program.[10]

Ifølge intuitionismen er matematikken en konstruktion i matematikerens bevidsthed, og vi kan kun hævde sandheden af et matematisk udsagn, hvis vi kan anvise en metode af simple og indlysende konstruktionstrin, som i princippet gør det muligt at vise udsagnet. Et eksistensudsagn er kun sandt, for så vidt som at vi har en metode til at konstruere det objekt, hvis eksistens hævdes. Da vi ikke kan foretage aktuelt uendelige konstruktioner, kan vi ikke hævde eksistensen af afsluttede uendelige objekter. Således kan vi ifølge intuitionisten kun tale meningsfuldt om det endelige og det potentielt uendelige.

Dette får den konsekvens, at der er klassiske logiske slutninger som mister deres absolutte gyldighed, eksempelvis det udelukkede tredjes princip.

Hvorfor nu det? Jo, det udelukkede tredjes princip fortæller os, at der for enhver sætning S kun er to muligheder, enten gælder S eller også gælder negationen af S.

Lad nu A være en egenskab ved objekter i domænet D. Vi ser på sætningen: $\forall x A(x)$. Benyttes det udelukkede tredjes princip på dette udtryk, får vi udsagnet: enten $\forall x A(x)$ eller $\exists x \neg A(x)$. Når domænet D er endeligt, er princippet ifølge intuitionisterne gyldigt, da vi principielt kan løbe igennem alle de mulige kandidater og for hver enkel afgøre, om de har egenskaben A, eller om der eksisterer et x, for hvilket det gælder at $\neg A(x)$. Selvfølgelig kan dette rent praktisk være meget besværligt, når D er meget stort, men selv for et sådan domæne ville det i princippet være muligt at tjekke kandidaterne i domænet for egenskaben A.

[10] Se [Mancuso, 1998] og [Feferman, 1998].

Men hvis domænet er uendeligt, er en sådan procedure derimod ikke mulig. For selvom vi ikke finder en kandidat i domænet med egenskaben $\neg A(x)$, så kan vi ikke heraf slutte at $\forall x A(x)$, da vi på grund af det uendelige domæne aldrig får afsluttet vores undersøgelse.

Når vi ukritisk benytte det udelukkede tredjes princip på udsagn som løber over uendelige domæner, forudsætter vi, at vi har tilgang til det uendelige objekt som en afsluttet enhed, hvilket vi ifølge intuitionisterne ikke har. Hermann Weyl beskriver det således:

> Nur muss[11] man sich durchaus vor der Vorstellung hüten, dass, wenn eine unendliche Menge definiert ist, man nicht bloss die für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft kenne, sondern diese Elemente selber sozusagen ausgebreitet vor sich liegen habe und man sie nur der Reihe nach durchzugehen brauche, wie ein Beamter auf dem Polizeibüro seine Register, um ausfindig zu machen, ob in der Menge ein Element von dieser oder jener Art existiert. Das ist gegenüber einer unendlichen Menge sinnlos.[12]

Den uendelige mængde ligger altså ikke allerede klar foran os til gennemsyn. Derfor er det udelukkede tredjes princip ifølge intuitionismen ikke universelt gyldigt – det kan ikke benyttes på alle udsagn. Dette kan yderligere belyses ved et af Brouwers modeksempler til den klassiske matematiks brug af det udelukkede tredjes princip[13].

Brouwer beder os se på decimalekspansionen af det transcendente tal π og indføre følgende notation: $3, d_1 d_2 d_3 \ldots = 3,141592\ldots$. Vi har selvfølgelig en algoritme til i princippet at beregne d_k for så store k, som vi har lyst til.

Men lad nu $P(k)$ være følgende udsagn: der eksisterer et mindste naturligt tal $s \leq k$, således at talfølgen 9999999999 forekommer lige efter d_s i decimalekspansionen af π.

Hvorvidt denne talfølgen $9\ldots9$ findes i π er »accidentielt«, forstået på den måde, at vores eneste mulighed, for finde ud af om den forekommer i π, er ved selv at tjekke efter i vores udregning af decimalekspansionen.

Herefter definerer vi en følge:

$$a_k = \begin{cases} (-1)^k(r_k) & \text{for de } k \text{ hvor } \neg P(k) \\ (-1)^s(r_s) & \text{for de } k \text{ hvor } P(k) \end{cases}$$

[11] I teksten, som er trykt i USA, skrives »ß« som »ss«.
[12] [Weyl, 1921, s. 212-213]
[13] Se [van Dalen, 1999].

hvor $r_k = 0,\underbrace{00\ldots0}_{k-1}d_k$.

Denne følge er fra et klassiske synspunkt konvergent, det vil sige der eksisterer et a, således at $\lim(a_k) = a$. Hvis vores »accidentale« følge $9\ldots9$ ikke findes i decimalekspansionen af π, er $\lim(a_k) = 0$. Findes derimod $9\ldots9$ et sted i decimalekspansionen af π, så har følgen en konstant hale r_s, og den er altså igen konvergent, selvom vi ikke ved om det tal a følgen konvergerer mod er negativt eller positivt, førend vi har fundet det sted s, hvor følgen 9999999999 forekommer.

Set fra et klassisk synspunkt er udsagnet $P(k)$ jfr. det udelukkende tredjes princip altid enten sandt eller falsk, og vi kan derfor uden problemer hævde, at enten er $a = 0$ eller $a \neq 0$, og selvfølgelig ydermere at: $a = 0$, $a < 0$ eller $a > 0$. Intuitionisten mener derimod udfra eksemplet at kunne tilbagevise gyldighed af disse udsagn. Vi kan kun hævde f.eks. at enten $a = 0$ eller $a \neq 0$, hvis vi har bevis for, at der vil være en følge af ti 9'ere i π, eller at det er logisk absurd, at der eksisterer er en sådan følge. Men noget sådan bevis har vi ikke, og vi har således ikke noget grundlag for at hævde at enten er $a = 0$ tilfældet, eller også er $a \neq 0$.

Det som den klassiske matematik, ifølge intuitionisten, fejlagtigt forudsætter, når den hævder at $\lim(a_k)$ er enten positiv, negativ eller 0, uafhængigt af om vi nogen sinde kan få at vide, hvad der er tilfældet, er at π allerede eksisterer som et afsluttet objekt, men det gør det ifølge intuitionisten ikke. Det eneste som eksisterer, er det, som vi har tilgang til: en altid endelige, men dog potentielt uendelig, decimalekspansion - a er ikke 0 eller forskellig fra 0, førend vi har fundet et sted i decimalekspansionen med ti 9-taller, og vi har ingen sikkerhed for at vi nogensinde vil finde et sådan sted.

Dette får omfattende konsekvenser for eksempelvis analysen. Et eksempel på dette er Bolzano's (1781-1845) teorem:

Sætning 3.1 (Bolzano's teorem)
Lad f være en kontinuert funktion på intervallet $[u, v]$, for hvilket det gælder at $f(u) \cdot f(v) \leq 0$, så eksisterer der et w således at $f(w) = 0$.

Fra et intuitionistisk synspunkt kan vi ikke hævde eksistens af et sådan w for enhver kontinuert funktion af denne type. For at forstå dette, kan vi se på funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1+a)x - 1 & \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1/3 \\ a & \text{for} \quad 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 3(1-a)x - 2 + 3a & \text{for} \quad 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

hvor $a = \lim(a_k)$.

Funktionen er klart kontinuert på intervallet, og så giver Bolzano's teorem eksistensen af et tal, for hvilket det gælder at $f(w) = 0$. Men vi har ingen mulighed for at beregne dette tal, så længe vi ikke har fundet ti 9'ere, og således gælder denne sætning ikke for intuitionisten.

For at et matematisk eksistensudsagn for intuitionisten kan være meningsfuldt, må vi altså kunne give en metode til i princippet at kunne konstruere objektet, eller alternativt skal det være muligt, at vise at det er logisk absurd. Det giver således ikke mening at tale om f.eks. mængden af alle naturlige tal som et afsluttet objekt, men kan vi tale om at der er potentielt uendeligt mange naturlige tal, da vi altid vil kunne skabe et nyt. Dette får som antydet store konsekvenser. Mange vigtige og generelt accepterede matematiske resultater er netop blevet bevist ved at benytte ikke-konstruktive metoder.

Brouwer og hans tilhængere tog konsekvensen af dette – lod falde hvad ikke kunne stå – og begyndte herefter at genopbygge »matematikkens hus« på intuitionismens sikre grundlag.

3.4 Hvor står Hilbert i denne diskussion?

Hilbert ønskede som både logicisterne og intuitionisterne, at skabe et sikkert grundlag for matematikken.

Hilbert havde store sympati for det logicistiske program, ikke mindst på grund af dets formalisering af logikken, og den matematiske stringens som opnås herved. I 1918 argumenterede Hilbert endda for en logicistisk løsning af problemet om matematikkens grundlag[14], hvilket han dog hurtigt forlader igen, idet han bliver overbevist om at matematikken ikke kan reduceres til ren logik. På samme tid tog han intuitionisternes kritik alvorligt; tilsyneladende udtaler den klassiske matematik sig om mere end hvad der er evidens for. Men Hilbert var ikke villig til at betale den efter hans mening alt for store pris, som intuitionismen kræver. Hilbert kunne simpelthen ikke acceptere en sådan amputering af matematikken, som kræver at en stor del af den alment accepterede og skattede matematik kastes bort:

> Was Weyl und Brouwer tun, kommt im Prinzip darauf hinaus, daß sie die einstigen Pfade Kronecker wandlen: sie suchen die Mathematik dadurch zu begründen, daß sie alles ihnen unbequem

[14] Se [Hilbert, 1918, s. 153].

> Erscheinende über Bord werfen und eine Verbotsdiktatur á la Kronecker errichten. Dies heißt aber, unsere Wissenschaft zerstücklen und verstümmeln, und wir laufen Gefahr, eine großen Teil unserer wertvollsten Schätze zu verlieren, wenn wir solchen Reformatoren folgen.[15]

Man bør heller ikke undervurdere det personlige element i dette. Når man læser Hilberts artikler, er noget af det, som springer en i øjnene, hans sprogbrug i visse passager. Det følgende citat fra *Zahlberichte* er et typisk eksempel på Hilberts retorik om matematikkens fortræffeligheder:

> Die Theori der Zahlkörper ist wie ein Bauwerk von wunderbarer Schönheit und Harmoni; [...] Die tiefen Einblick, welche die Arbeiten dieser bei den Mathematiker in die genannte Theori gewähren, zeigen uns zugleich, daß in diesem Wissensgebeite eine Fülle der kostbarsten Schätze noch verborgen liegt, winkend als reichen Lohn dem Forscher, der den Wert solcher Schätze kennt und die Kunst, sie zu gewinnen, mit Liebe betreibt. [16]

Citatet viser Hilberts store kærlighed til matematikken, og den noget bombastiske stil vidner om det store personlige engagement Hilbert følte.

Men udover dette, må man ikke glemme, at Hilbert samtidigt var en af de ledende skikkelser blandt matematikerne i Tyskland, såvel som i resten af Europa. Dette var en position, hvis medfølgende indflydelse og ansvar han selv tog alvorligt. Hilbert så sig selv som en leder, og var ikke tilbøjelig til at føje andre. Videnskabshistorikeren David Rowe formulerer det således: »Hilbert had no need for heroes...«[17], noget som skinner igennem i mange af Hilbert artikler.

Hilbert så således også sig selv, som arbejdende i en højere sags tjeneste, med det formål at genoprette matematikkens – ja, hele den menneskelige erkendevnes – ære. Som han skriver i *Über das Unendliche*:

> Durch diese Bemerkungen wollte ich nur datun, daß die endgültige Aufklärung über das *Wesen des Unendlichen* weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur *Ehre des menschlichen Verstandes* selbst notwendig geworden ist.[18]

---

[15] [Hilbert, 1922, s. 159]
[16] Her citeret fra [Rowe, 1999].
[17] [Rowe, 1994, s. 192]
[18] [Hilbert 1926, s. 163] m. forfatterens egne fremhævelser.

Det er i rummet mellem på den ene side den skeptiske holdning til det matematiske begrebsdannelser, og på den anden side den »skeptiske« løsnings uspiselige radikalitet, som kræver at vi opgiver eller reformulerer dele af den klassiske matematiks resultater, at vi finder Hilbert.

På den ene side anerkender han intuitionismens kritik, og han ser det som nødvendigt at få styr på, hvad vi kan tillade os i matematikken, men på den anden side er han ikke parat til at »smide barnet ud med badevandet«:

> Aus dem Paradis, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.[19]

Det Hilbert søgte var altså at kunne redegøre for sikkerheden af de matematiske domme, uden at begrænse matematikerens frihed til at bruge de frugtbare, men problematiske dele, af matematikken.

Dette mente han at kunne opnå ved hjælp af hans bevisteori og det finitistiske program, som vi nu skal se nærmere på.

[19] [Hilbert 1926, s. 170]

Kapitel 4

Hilberts finitistiske program

En af de vel nok bedste introduktioner til en forståelse Hilberts finitistiske program, og den filosofiske position som ligger bag dette, er Hilberts klassiske artikel *Über das Unendliche* fra 1926. I artiklen problematiserer Hilbert specielt brugen af aktuelt uendelige mængder i matematikken, hvorefter han fremlægger, hvorfor »det uendelige« efter hans mening alligevel har en nødvendig plads i matematikken. At tage stilling til dette var, som vi tidligere har set, blandt andet blevet aktuelt med fremkomsten af intuitionismens kritik og paradokserne i mængdelæren. Hilbert beskriver situationen på følgende måde:

> Man war in der Freude über die neuen und reichen Resultate hinsichlich der Zulässigkeit der Schlußweisen offenbar zu wenig kritisch verfahren; denn es stellten sich bei bloßer Anwendung der allmählich üblich gewordenen Begriffbildungen und Schlußweisen Widersprüche heraus, [...][1]

Hilbert analyserer yderligere problemstillingen således, at det, som det er nødvendigt at få styr på, er brugen af uendelige mængder i matematikken.

Hilbert stiller derfor spørgsmålet, om der kan være noget i den fysiske verden som svarer til matematikkens uendelige mængder. Selvom Hilbert ikke direkte nævner det, er det naturligt at se dette, som et svar til Russells forståelse af uendelighedsaksiomet som en hypotese om verden. Til at besvare spørgsmålet henholder Hilbert sig til den samtidige fysiks verdensbillede[2].

[1] [Hilbert, 1926, s. 169]

[2] Se også [Hilbert, 1931, s. 488].

Det første Hilbert ser på er et uendeligt deleligt kontinuum. Findes noget sådant? Atomteorien fortæller at alt stof er bygget op af små byggesten, og at stof således ikke er uendeligt deleligt. Det samme gælder for energi, som kommer i kvanter. Den uendelige delelighed af kontinuumet er altså kun noget, som findes i vore tanker. Findes der så noget uendeligt stort i universet?

Her fremdrager Hilbert Einstein, der udfra sin teori om gravitationen havde påvist, at vores astronomiske observationer kan stemme overens med en elliptisk rum-tid, som er ubegrænset, men endelig.

Ifølge fysikken er verden altså – i det store og i det små – endelig, hvilket i endnu højere grad sætter spørgsmålstegn ved matematikkens uendelige mængder, da disse tilsyneladende ikke referer til noget i verden.

Hilbert, som på den ene side ønsker at undgå paradokserne, men på den anden side også ønsker, at undgå intuitionismens restriktioner af matematikerens råderum, går herefter over til at spørge om hvorvidt det uendelige, på trods af at det ikke forefindes i verden, kan have en velbegrundet plads i vores matematiske tænkning, uden at dette kompromitterer sikkerheden af de matematiske domme. Hilberts ambition er følgende:

> Ich möchte nämlich die Grundlagenfrage in der Mathematik als solche endgüldig aus der Welt schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkrete aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch die mathematischen Begriffsbildungen und Schlüsse in eine solche Fassung bringe, daß sie unwiderleglich sind und doch ein Bild der gesamten Wissenschaft liefen. [3]

Dette er netop hvad Hilbert forsøger ved hjælp af hans bevisteori, eller mere præcist det som kaldes Hilberts program. Ideen med Hilberts bevisteori er at undersøge de matematiske beviser indenfor et formelt system, for dermed at vise, at der indenfor et sådan formelt system ikke kan bevises to modstridende udsagn.

Set lidt fra oven, består Hilberts program kort fortalt af tre komponenter.

- For det første skelnes der mellem de problematiske og uproblematiske dele af den klassiske matematik.

[3] [Hilbert, 1931, s. 489]

Det uproblematiske er de finitistiske dele af matematikken. Hilberts finitisme, eller som han selv kalder den: »die finite Einstellung«, er en begrænset metodologi, som tager højde for intuitionismens kritik. Den er tilstrækkelig til at opbygge en elementær tal-teori og til elementære manipulationer af endelige strenge af symboler, men der er i finitismen ingen referencer til nogen form for aktuelt uendelige totaliteter, man behandler kun endelige objekter.

- Den anden del af Hilberts program består i at repræsentere de problematiske og uproblematiske dele af en given matematisk teori, inklusive de logiske slutningsregler, i et rent formelt aksiomatisk system T.

Her er det i første omgang en underforstået antagelse, at formaliseringen er *fuldstændig*, således at alt, som kan bevises i den uformelle teori, kan bevises i det formelle system.

Det formelle aksiomatiske system T skabes ved at præcisere regler for hvordan man skaber velformede sætninger udfra et antal grundlæggende primitive symboler. Herefter udvælges visse af disse velformede sætninger til aksiomer. Disse aksiomer kan være både »matematiske« og »logiske«. Herudover specificeres hvilke regler, vi kan benytte os af til at drage slutninger udfra de fastlagte aksiomer.

Når T er konstrueret på denne måde, er en sætning t beviselig i T, hvis der til t eksisterer en endelig følge af velformede sætninger, som afsluttes med t, og hvor hver sætning i følgen er et aksiom eller resultatet af en af de beskrevne slutningsregler.

- Programmets tredje del består i at give et finitistisk og dermed uproblematisk konsistensbevis for det formelle system T.

Til dette benytter Hilbert sig af, at det formelle system T »programmatisk« kan opfattes som blot et spil med formler udfra formelle regler, hvor formlerne blot opfattes som strenge af symboler. Det formelle system består udfra denne synsvinkel af en samling velformede sætninger, og alle beviser i systemet, også de beviser som repræsenterer »problematiske« beviser, er nu blot *endelige* følger af formler – altså endelige objekter. Gevinsten ved dette er, at de endelige følger af formler nu kan studeres som selvstændige matematiske objekter ved hjælp af uproblematiske finitistiske midler.

Denne egenskab ved det formelle system, ville Hilbert benytte til at udføre et finitistisk korrekt konsistensbevis for det formelle system. Det formelle system T er konsistent, hvis der ikke findes nogen modstrid $(P \wedge \neg P)$, som kan bevises i det. Dette kan nu gøres ved at vise, at der udfra de fastlagt aksiomer og slutningsregler ikke kan skabes et endeligt objekt, bestående af endeligt mange velformede sætninger, som ender med en sætning på formen $1 \neq 1$. At vise dette er en opgave for meta-matematikken, som kun må benytte uproblematiske midler for hermed at sikre konsistensbevisets sikkerhed.

Såfremt dette program var muligt at gennemføre, mente Hilbert at have skabt et sikkert grundlag for matematikken.

Denne skitse af Hilberts program kræver uddybninger på forskellige niveauer, og det er naturligt at stille følgende spørgsmål. Hvad karakteriserer Hilberts finitisme, og hvoraf kommer dennes sikkerhed? Hvorfor dropper Hilbert ikke bare de dele af matematikken, som han selv har dømt som problematiske? Har Hilbert i sin søgen efter et sikkert grundlag for matematikken reduceret den til et tomt spil?

Det første jeg gør er at forsøge at præcisere hvad Hilberts finitisme indeholder og hvilken epistemologi som ligger bag denne. Herefter vil vi se på det mest interessante spørgsmål: hvordan redegører Hilbert for brugen af »det uendelige« i matematikken?

4.1 Hilberts finitisme: Die finite Einstellung

4.1.1 Hvad er finitistisk tilladeligt?

Vi vil nu se nærmere på, hvad det er Hilbert betegner som de sikre og dermed uproblematiske dele af matematikken. Desværre har hverken Hilbert eller hans nærmeste medarbejdere givet nogen helt præcis karakterisering af hvad, denne uproblematiske del indeholder. Men følgende er i hvert fald sikkert.

Finitismen er tildels motiveret af intuitionisternes og Kroneckers kritik og deres argumenter for kun at tillade »konstruktive« metoder. Herudover mente Hilbert i modsætning til logicisterne[4] ikke at det er muligt, at reducere matematikken til ren logik. Tværtimod må der, før vi med sikkerhed kan benytte de klassiske logiske slutninger, være givet nogle »konkrete« objekter. Dette er Hilberts udgangspunkt. I det følgende citat fra *Über das Unendliche* uddyber Hilbert sin grundlæggende antagelse af hvad, der må antages som sikkert[5]:

[4]Med undtagelse af en kort periode omkring 1918, se [Sieg, 1999a] og [Hilbert, 1818].

[5]Citatet gentages ofte næste ordret, når Hilbert skal redegøre for sit finitistiske udgangspunkt. Se f.eks. [Hilbert, 1931].

> Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse außer-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken sind. Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf. Dies ist die philosophische Grundeinstellung, die ich für die Mathematik wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen für erforderlich halte. Und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist.[6]

Hilbert mente altså, at vi må gå ud fra, at vi har en basal sikker og umiddelbar given viden om visse »konkrete« objekter, som vi altid kan genkende igen, og disse »konkrete« objekter er *tegn*. Sammen med de enkelte tegn er det desuden givet, hvordan disse adskiller sig fra hinanden, og hvordan de følger af hinanden.

I citatet skriver Hilbert, at det er de »konkrete tegn« som er matematikkens genstande. Men hvordan skal man egentligt forstå dette?

For at komme en forståelse nærmere, kan det være nyttigt at indføre en moderne distinktion mellem *token* og *type*. En token er et konkret eksemplar eller instantiering af en bestemt type. Således er de tre forskellige tokens **a**, *a* og a af den samme type, nemlig den fonetiske type »a«.

Spørgsmål er nu, om de konkrete tegn, Hilbert omtaler, er tegn som tokens eller tegn som types? Det står umiddelbart ikke lysende klart i det han skriver. Men hvis han talte om tegn som tokens, og ikke som types, så ville vores matematiske viden omhandler de konkrete instantieringer, og ville dermed være afhængig af eksistensen af fysiske objekter. Herudover ville »|||« og »|||« være forskellige objekter, og hvis man ville vise at »|||« har en bestemt egenskab, ville man strengt taget skulle gentage beviset for hver enkel instantiering. Hertil kommer at det bliver svært at forklare, hvordan man kan skelne mellem de mange forskellige tokens som eksempelvis • og |, idet man

[6] [Hilbert, 1926, s. 171]

kan opstille en række af tokens fra | til •, på en sådan måde, at vi ikke kan kende forskel på to tokens som står ved siden af hinanden i rækken.

En mere barmhjertig tolkning er derfor, at det er tegn som typer, vi kan omtale med præcision, og at det altså er disse, som for Hilbert er matematikkens genstande.

Når Hilbert taler om »konkrete« tegn, som vi kan have sikker viden om, vil jeg derfor i det følgende forstå det således, at vi kan have sikker viden om de »konkret« tegn, hvis form (tysk: *Gestalt*), eller som vi vil sige det: *hvis type*, altid kan genkendes. Det er altså de »konkrete« tegn som typer, som vi kan have sikker viden om, og som er matematikkens genstande.

Dette er altså det finite udgangspunkt, som vi ifølge Hilbert kan regne med er sikkert og uproblematisk. De objekter, som vi kan operere med i den uproblematiske del af matematikken, er de »konkrete« tegn som typer. Et tegn er et »konkret« objekt, som umiddelbart er givet for os, og som vi kan erkende alle relevant aspekter af, og vi erkender dermed at det er af en bestemt type. Således kan vi altså erkende om to konkret tegn-tokens er af samme type eller af to forskellige typer.

Et par eksempler på nogle af de objekter, som Hilbert i første omgang har i tankerne, når han taler om »konkrete« tegn, kunne være 1 , 11111 eller $1+1+1$.

Mere generelt er et finitistisk argument, et argument hvori man kun benytter endelige objekter og funktioner, vis værdier vi entydigt kan beregne; man kan ikke hævde eksistensen af et objekt, før man har indikeret en metode til at konstruere det. Dette *udelukker* aktuelt uendelige objekter som objekter i den uproblematiske del af matematikken, da vi kun har tilgang til potentielt uendeligt mange endelige objekter – eller hvad man også kunne kalde en aldrig afsluttet endelig mængde af objekter. Man opererer altså aldrig med aktuelt uendelige mængder. Dette betyder også, at når man i den uproblematiske del af matematikken siger, at et udsagn gælder for alle objekter $\mathfrak{a}$, betyder dette, som vi skal se senere, at vi for et vilkårligt »konkret« objekt $\mathfrak{a}$ har et *bevis-skema* for udsagnet.

Hilberts finitisme kan yderligere belyses, ved at betragte hans redegørelse for hvor langt man på et rent finitistisk grundlag, kan komme i konstruktionen af en elementær talteori[7].

Den elementære talteori er den del af talteorien som skabes udfra det, som Hilbert kalder »inhaltliche« betragtninger, hvilket vi i det følgende vil kalde indholdsmæssige betragtninger.

[7]Se f.eks. [Hilbert, 1626] eller [Hilbert, 1931].

De indholdsmæssig betragtninger, som Hilbert tager som udgangspunkt for den elementære talteori, omhandler tegn som 1, $1+1$, $1+1+1$, hvilke han kalder tal. Tegn som disse begynder og slutter med tegnet 1 og imellem disse efterfølges + altid af tegnet 1, og 1 af +. Disse kan vi ifølge Hilbert altid genkende og skelne fra hinanden.

Det er, som allerede nævnt, principielt lige meget hvilken fysisk fremtrædelsesform de konkret tegn har. Vi kunne lige så godt have benyttet os af tegn som • eller |, (og undlade + ind imellem), istedet for tegnet 1, hvilket er hvad Hilbert mener, når han skriver, at vi har en erkendelse af alle de relevante aspekter af tegnet.

Fordelen ved disse »tal-tegn« er, at de kan studeres som »konkrete« objekter i kraft af, at vi umiddelbart kan erkende deres form, (altså hvilken type de tilhører). Tal-tegnene er desuden primitive i den forstand, at de ikke referer til noget. Der er ikke tale om at tal-tegnene referer til »platonisk« tal, som eksisterer uafhængigt af os og hvis epistemiske tilgængelighed, det er svært at argumentere for. Dette kommer vi tilbage til lidt senere.

Udover de primitive tal-tegn bruger vi også symboler, som refererer til noget og som bruges til kommunikation. F.eks. er symbolet 2 en forkortelse som referer til tegnet $1+1$. Herudover bruger vi også symbolerne $=$ og $>$ til kommunikation. $2+3=3+2$ kommunikerer at $2+3$ og $3+2$ refererer til »tal-tegn« af samme længde, og $3>2$ kommunikerer at taltegnet, som 3 refererer til, er længere end det taltegn, som 2 referer til. Udsagn af denne slags kalder Hilbert »indholdsmæssige« udsagn, idet de kommunikerer konkret viden om tegnene, og kan tilskrives en sandhedsværdi på baggrund af deres indhold – en sandhedsværdi vi, i henhold til Hilberts finite udgangspunkt, kan afgøre med sikkerhed. Herudover benytter vi bogstaver ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ osv.) til at betegne vilkårlige konkrete taltegn.

Indenfor det finitistiske standpunkt kan vi kun tillade en begrænset brug af kvantorer[8]. Hvordan man med et finitistisk udgangspunkt skal forstå brugen af kvantorer må forklares lidt nærmere.

Tag eksempelvis udsagnet: $\exists \mathfrak{a} : P(\mathfrak{a}) \wedge (\mathfrak{a} > \mathfrak{p})$, (hvor $\mathfrak{p}$ er et primtal, og $P(x)$ er prædikatet: x er et primtal). I en klassisk forståelse af dette udsagn, kan det forstås som en »uendelig disjunktion«, dvs.:

$$P(\mathfrak{p}+1) \vee P(\mathfrak{p}+2) \vee \ldots$$

Det er det sidste tre prikker $(\ldots)$ som fra et finitistisk standpunkt er problemet, da de skal forstås som osv. i det uendelige. Udsagnet er altså en

[8]Se [Hilbert, 1926, s. 173].

samling af uendelig mange indholdsmæssige udsagn, men noget sådan kan vi imidlertid ikke med rimelighed sige, at vi har tilgang til udfra et finitistisk synspunkt.

For at et sådant rent eksistensudsagn skal have en finitistisk mening, må der noget mere til: en øvre grænse for antallet af de kandidater udsagnet udtaler sig om. Således har udsagnet: $\exists \mathfrak{a} : P(\mathfrak{a}) \wedge ((\mathfrak{a} > \mathfrak{p}) \wedge (\mathfrak{a} \leq \mathfrak{p}! + 1))$, hvor $\mathfrak{p}$ er et primtal, en klar finitistisk mening. Dette udsagn kan nemlig opdeles i endelig mange indholdsmæssige udsagn:

$$P(\mathfrak{p}+1) \vee P(\mathfrak{p}+2) \vee \ldots \vee P(\mathfrak{p}!+1)$$

Et rent eksistensudsagn af typen $\exists \mathfrak{a} : P(\mathfrak{a}) \wedge (\mathfrak{a} > \mathfrak{p})$ kan altså kun gives finitistisk mening, hvis vi opfatter det som et partielt udsagn, hvor specificeringen af et endeligt domæne er underforstået.

For universelle udsagn, som eksempelvis $\forall \mathfrak{a}(\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a})$, gælder det, at de udfra det finitistiske synspunkt kun skal forstås som »hypotetiske« udsagn[9]. Det vil sige at ovenstående udsagn skal forstås som følgende: givet et »konkret« taltegn $\mathfrak{a}$, så gælder det at $\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}$.

Et bevis for udsagnet $\forall \mathfrak{a}(\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a})$, vil være et bevisskema med en fri variabel, således at vi for ethvert »konkret« $\mathfrak{a}$ i et endeligt antal skridt kan verificere at $\mathfrak{a} + 1 = 1 + \mathfrak{a}$.

Med dette udgangspunkt er det klart, at Hilbert samme med intuitionisterne i første omgang må benægte det udelukkede tredjes princip, som værende alment gyldigt. Den sædvanlige negation af udsagnet $\forall \mathfrak{a}(\mathfrak{a}+1 = 1+\mathfrak{a})$, som jo er $\exists \mathfrak{a}(\mathfrak{a} + 1 \neq 1 + \mathfrak{a})$, er ikke umiddelbart finitistisk meningsfuld, da det ikke kan opskrives som en endelig følge af indholdsmæssige udsagn.

At fastholde det udelukkede tredjes princip ville være at fastholde, at der kun er to muligheder: enten kan altid finde et tal-tegn med en bestemt egenskab, eller også har vi opnået indsigt i en almen lov for tal-tegn. At enten den ene eller den anden af disse muligheder er tilfældet er finitistisk set ikke umiddelbart nødvendigt.

Indenfor finitismens rammer, er vi i talteorien stort set begrænset til at foretage almindelige numeriske beregninger, og allerede den almindelige talteori bevæger sig udenfor disse, blandt andet i sin benyttelse af det udelukkedes tredjes princip, og således er der allerede i denne indeholdt noget problematisk, som bør retfærdiggøres.

W. Tait[10] har overbevisende argumenteret for at Hilberts finitisme svarer til

[9]Se [Hilbert, 1926, s. 173].
[10][Tait, 1981]

den primitive rekursive aritmetik (PRA).

I den primitive rekursive aritmetik er de basale objekter vi ser på k-tupler af tal, (for fast k). Herudover tillader vi kun primitivt rekursivt definerede funktioner.

En funktion er primitiv rekursiv, hvis den kan dannes udfra nogle simple initialfunktioner ved substitution eller rekursion.

De basale intialfunktioner er: efterfølgerfunktionen $s(x) = x + 1$, nulfunktionen $z(x) = 0$ og projektion $f(x_1, ..., x_n) = x_i$, (hvor $1 \leq i \leq n$). Disse er finitistisk set uproblematiske, eksempelvis er efterfølgerfunktionen en beskrivelse af at vi altid kan udvide et tal-tegn med »1«

De sædvanlige regneoperationer (addition og multiplikation osv.) kan defineres som primitivt rekursive funktioner. Lad os tage addition, som et eksempel. Vi definerer $f(n, m) = n + m$ ved rekursionen:

$$f(0, n) = n,$$
$$f(x + 1, n) = s(f(x, n)) = (f(x, n)) + 1$$

Definition har, som vi kan se, to dele. Først gives værdien $f(0)$, og herefter gives for ethvert x værdien $f(x+1)$, udtrykt ved x og $f(x)$. Definitionens to dele gør os istand til at beregne $f(x)$ hver gang vi har et x[11].

Set fra et finitistisk synspunkt skal funktioner ($f : a \to b$) af denne type ikke forstås som funktioner i klassiske forstand, men derimod som en procedure til at konstruere et b fra et vilkårligt a.

Hilberts eksempler på finitistisk tænkning er næsten udelukkede aritmetiske, og man kunne således forledes til at tro, at geometrisk og aritmetisk tænkning er to forskellige epistemologisk adskilte områder[12]. Dette var dog med al overvejende sandsynlighed ikke Hilberts holdning. PRA indfanger finitismens styrke, men man kunne sagtens tænke sig, at man kunne skabe en elementær geometri fra et finitistisk udgangspunkt. Eksempelvis skriver Bernays:

> Zu beachten ist auch, daß die ursprüngliche anschauliche Auffassung der elementaren Euklidischen Geometri eine Vorstellung von unendlichen Gebilden gar nicht erfordert.[13]

[11] For en ordens skyld må det bemærkes, at ikke alle rekursivt definerede funktioner kan defineres ved *primitiv* rekursion, et eksempel på dette er Ackermann's funktion, se [Kleene, 1971, s. 330] og appendiks A.

[12] Hvilket var tendensen i f.eks. Freges og Dedekinds logicisme.

[13] [Bernays, 1930, s. 38].

I en sådan finitistisk geometri ville man selvfølgelig kun kunne operere med endeligt udstrakte figurer, og man kan ikke tillade sig en antagelse om at et liniestykke består af uendelig mange punkter; og når der i den finitistiske geometri f.eks. siges, at ethvert liniestykke har et midtpunkt, betyder dette ikke andet end at et sådant midtpunkt kan konstrueres.

Spørgsmålet er nu, hvorfor finitismen giver sikker viden?

4.1.2 Finitismens epistemologi

Vi skal kort diskutere hvorfor Hilbert og hans nære medarbejder Bernays mente, at det finitistiske udgangspunkt giver sikker viden. Det, som vi spørger til, er den bagvedliggende epistemologi. I Hilberts artikel *Neubegründung der Mathematik* (1922), som giver den første egentlige formulering at det endelige bevisteoretiske program, er finitismens bagvedliggende epistemologi ikke eksplicit formuleret, og en mere præcis formulering af denne får vi først i slutningen 1920'erne.

Fra og med slutningen af 1920'erne[14] fremlægger Hilbert og Bernays et grundlæggende kantiansk synspunkt. Det kantianske udgangspunkt for finitismen ses første gang antydet i Bernays (1923). Hos Hilbert selv skal vi frem til 1930, førend vi finder det eksplicit udtrykt i en udgivet artikel. I ikke-publicerede forelæsninger findes det dog så tidligt som i 1923[15]. Denne tilbageholdenhed kan skylde flere ting. Det mest sandsynlige er, for mig at se, at Hilbert og Bernays anså at finitismen som metodologi burde kunne accepteres af alle, og at de derfor ikke ønskede at fremprovokere en konflikt om hvordan den filosofisk set burde begrundes. En anden mulighed er selvfølgelig at de ikke endeligt havde lagt deres position fast, eller at de ikke var enige om hvilken vej, man skulle gå[16].

I 1931 melder Hilbert dog klart ud, idet han skriver følgende:

> Nun gebe ich zu, daß schon zum Aufbau der theoretischen Fachwerke gewisse apriorische Einsichten nötig sind und daß stets den Zustandekommen unserer Erkentnisse solche zugrund liegen. Ich glaube, daß auch die mathematische Erkenntnis letzen Endes auf einer Art solcher anschaulicher Einsicht beruhht. [...] Das Apriori

[14] Senere diskuterer Bernays dog en revision af finitismen set i lyset af Gödels resultater, se [Bernays, 1976].

[15] Se [Mancuso, 1998, s. 181, n. 29].

[16] For yderligere uddybning af denne diskussion se f.eks. [Sieg, 1999b], [Rowe, 1999] og [Mancuso, 1998, s. 168-171].

> ist dabei nichts mehr und nichts weniger als eine Grundeinstellung oder der Ausdruck für gewisse unerläßliche vorbedingungen des Denkens und Erfahrens.[17]
>
> Og lidt senere i samme artikel:
>
> [Das Apriori] ist im wesentlichen die von mir in verschiedenen Abhandlungen charakterisierte finite Einstellung.[18]

Hvad Hilbert skriver her er, at det, som er fastlagt i finitismen, udgør nogle *a priori* mulighedsbetingelser for vor erkendelse[19]. At mulighedsbetingelserne er *a priori* betyder, at de går forud for enhver sanseerfaring.

Følgende citat fra Bernays (1923) kan uddyber dette:

> ...the objects of intuitive number theory, the number signs, are, according to Hilbert also not »created by thought«. But this does not mean that they exist independently of their *intuitive construction*, to use the Kantian term that is quite appropriate here.[20]

De finitistiske objekter eksisterer altså ikke uafhængigt af os og vores konstruktion af dem, men på den anden side er de heller ikke rene fiktioner. Vores sanseerfaring er altid struktureret i en finitistisk ramme, som fastlægger vores sanseerfarings grundlæggende form, hvilket gør at de finitistiske objekter på en og samme tid kan kaldes »konkrete« og a priori.

Det er interessant at se, at dette forbindes med den aksiomatiske metode, som specielt Hilbert ser som en almen metode for enhver videnskabelig forskning[21]. Om dette siger Bernays:

> Das Erfordernis einer derartigen Erkenntnisgrundlage ist an sich noch unabhängig von der besonderen Art des Hilbertschen Ansatzes; es besteht für jede Begründung der Mathematik. Für die Hilbertsche Grundlegung ist aber kennzeichnend, daß hier der *finite Standpunkt in zusammenhang gebracht* wird *mit der axiomatischen Begründung der theoretische Wissenschaften.* Dadurch stellen sich die Vorausstetzungen der finiten Einstellung zugleich

[17] [Hilbert, 1931, s. 383]
[18] [Hilbert, 1931, s. 385]
[19] Angående omfanget af det som er *a priori* skriver Hilbert, at Kant i sin fastlæggelse gik for langt; dette vil jeg kort komme tilbage til i et senere afsnit.
[20] [Bernays, 1923] citeret fra [Mancuso, 1998].
[21] Se f.eks. [Hilbert, 1918].

> als *Bedingungen* dar *für die Möglichkeit theoretischer Naturerkenntnis*, ganz im Sinne der Kantischen Problemstellung.[22]

Hilbert og Bernays mener altså at finitismen er en nødvendig betingelse for benyttelsen af den aksiomatisk metode, og uden denne kan vi ifølge Hilbert og Bernays ikke danne nok så simple aksiomatiske systemer.

For at opsummere det overstående, kan man mere grundlæggende udlægge det som skrives sådan, at betingelsen for at vi kan have en sikker erfaring af de finitistiske objekter er, at vi i princippet altid kan afgøre om et token er af den ene eller den anden type. Hilbert og Bernays mener, at vi har en sådan sikkerhed og at denne sikkerhed kommer af den måde vores erkendeapparat strukturerer de sansedata vi modtager.

Uden denne evne ville vi ikke kunne have en sikker matematisk viden, og da vi synes at have en sådan sikker erkendelse, må dens mulighedsbetingelser være givet a priori.

Hilbert og Bernays forudsætter gennem alt dette, at deres finitisme giver absolut sikker viden. Denne antagelse er blevet problematiseret på mange forskellige måder, og jeg vil her nævne to af disse. For det første er der blevet sat spørgsmålstegn ved, om det i det hele taget er en rimelig antagelse, at vi har absolut sikker viden om noget som helst. For det andet har eksempelvis Tait (1980) kritiseret Hilbert for, at selvom vi medgiver, at vi tilsyneladende har noget sikker viden, så det ikke er alle de finitistiske objekter, vi kan erkende med sikkerhed.

Lad os tage det sidste først. Kritikken af dette går på, at det ikke er alle de finitistiske objekter finitismen giver os, som vi rent faktisk kan forstille os.

Et stort tal som $10^{10^{1000}}$ kan jo ikke direkte repræsenteres i en anskuelse, og det er spørgsmålet om et sådan tal overhovedet er fysisk realiserbart. Bernays er selv opmærksom på dette:

> ... die von Hilbert als methodische Grundlage geforderte »finite Einstellung« muß erkenntnistheoretisch als eine Art von *reiner Anschauung* charakterisiert werden. Denn sie ist einerseits Anschaulich und geht anderseits jedenfalls über das eigentlich Erfahrbare hinaus.[23]

Når Bernays taler om at finitismen går udover det egentlige erfarbare, er det de store tal han hentyder til, og W. Tait (1980) og P. Kitcher (1976) har begge grebet fat i dette problem i en kritik af finitismens sikkerhed.

[22] [Bernays, 1928, s. 145] m. forfatterens egne fremhævelser.
[23] [Bernays, 1928b, s. 145]

Bernays[24] og Hilbert mener sådanne store tal er finitistiske objekter, idet vi kan anvise en simpel metode til i *princippet* at konstruere dem. Konstruktionen, som Bernays har i tankerne, bygger at på forestillingen om at vi til et vilkårligt tal »1...1«, (hvor midten er ubestemt), altid kan tilføje endnu et »1«.

Dette argument kritiserer Tait på følgende måde: førend vi kan danne forestillingen om et vilkårligt »1...1«, må vi have en erkendelse af den iteration, som der ligger i at konstruerer et taltegn, og den erkendelse er ikke er noget, vi kan aflede af vores anskuelser, men er en forudsætning for at vi overhovedet kan erkende objekter som »1111« som et taltegn.

Tait kritiserer Hilbert for ikke at have indset dette. Spørgsmålet er om det er rimeligt, og om Tait ikke har misforstået Hilbert, for han skriver jo faktisk om de finitistiske objekter at:

> ... ihr Aufeinanderfolgen ... ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt oder einer Reduktion bedarf.[25]

At vi har tilgang til de finitistiske objekter opbygning, (og altså den iteration som ligger heri), er for Hilbert indeholdt i de finitistiske mulighedsbetingelser for vor erfaring. Men Tait har alligevel en pointe, for hverken Hilbert eller Bernays har givet nogen grundig argumentation for at finitismen generelt set danner erfaringens mulighedsbetingelser.

Dette binder an til den anden del af kritikken af Hilberts finitismes bagvedliggende epistemologi, nemlig spørgsmål om det overhovedet er muligt at have nogen absolut sikker erkendelse. For Tait har jo ret, når han skriver at Hilbert, eller for den sags skyld Bernays, ikke argumenterer for at en sådan iteration altid er mulig, endsige sikker. Det kunne jo være at Decartes' dæmon sidder et eller andet sted og driller os, og at alt viden fundamentalt set er fallibel[26].

En yderligere diskussion af dette vil føre for langt ind i en diskussion af det generelle skepticisme problem, og altså om hvorvidt vi overhovedet kan have nogen sikker viden. Dette er selvfølgelig en relevant diskussion at tage, og et helt projekt værdigt, men det er for omfattende i forhold til det nærværende. Jeg vil derfor tillade mig at suspendere denne diskussion i følgende. Dog vil jeg vove skinnet så langt, som til at sige, at finitismens underliggende

[24]Se [Bernays, 1930].
[25][Hilbert, 1926, s. 171]
[26]Et sådant synspunkt fremlægge f.eks. i [Kitcher, 1984].

antagelse om at vi i princippet altid kan afgøre, om et token er af den ene eller den anden type, ikke synes helt urimelige, idet vi i vores daglig omgang med sproget synes at gøre noget sådan.

Det, som man må anerkende, hvis man skal finde Hilberts filosofiske position interessant er i første omgang, at der er et fundamentalt epistemisk skel mellem »det uendelige« og »det endelige«. Dette er det centrale problem, som set i lyset af intuitionismens kritik synes yderst relevant.

Anerkender man dette skel bliver det brugen af »det uendelige« i matematikken, som fremstår som det centrale spørgsmål man må redegøre for. Og det er dette spørgsmål, som Hilbert forsøger at besvare.

Vender vi tilbage til situation som den var i 1920'erne for Hilbert og Bernays, så var finitismen som metodologi et udgangspunkt som alle deltagere i grundlags-diskussionen umiddelbart kunne være enige om, hvilket jo gør det til et strategisk godt udgangspunkt.

Hilbert og Bernays mente i begyndelsen af 1920'erne at deres finitisme svarende til Kronecker og Brouwers metodologiske restriktioner[27]. Først senere bliver de opmærksomme på at Brouwers intuitionisme går udover det, som kan indeholdes i finitismen[28].

I finitismen ligger altså en begrænsning på de objekter man undersøger, og de konstruktioner og slutninger vi kan foretage. Hilberts finitisme kan ses som tagende højde for intuitionismens kritik af den manglende evidens bag den klassiske matematiks begreber og slutninger. Hilberts meta-matematiske konsistensbeviser skulle være finitistiske og »indholdsmæssige« beviser, som dermed måtte kunne siges at have den højeste grad af sikkerhed.

For Hilbert er det »det uendelige«, som han ønsker at redde ud af kløerne på intuitionisterne:

> Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir, wo immer nur geringste Aussicht bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.[29]

Men hvorfor, kære Hilbert, skal vi ikke lade os drive ud af Cantors paradis?

[27] Se [Sieg, 1999b].
[28] Se [Bernays og Hilbert, 1934, s. 43].
[29] [Hilbert, 1926, s. 170]

4.2 De ideale elementers metode

For at forklare, hvorfor vi ikke skal lade os drive ud af Cantors paradis, vender Hilbert sig mod en metode som allerede eksisterer i den matematiske praksis, nemlig: *de ideale elementers metode.*

Kort sagt består metoden i at tilføje nye såkaldte ideale elementer til en allerede eksisterende teori. Hilbert beskriver det således:

> Genau genommen besteht das Verfahren darin, daß man von einem ursprünglichen System, welches sich in Hinsicht auf gewisse zu behandelnde Fragen kompliziert verhält, zu einem neuen System übergeht, bei welchem sich jene Verhältnisse einfacher gestalten und welches außerdem die Eigenschaft hat, ein Teilsystem zu enthalten, daß mit dem ursprünglichen System isomorph ist (d. h. mit diesem in allen darin vorliegenden Beziehungen übereinstimmt).[30]

Og lidt senere:

> Und der Vorteil dabei ist, daß die Ausführung der Beweise nun innerhalb des neuen Systems geschieht, wo alles viel übersichtlicher wird.[31]

For at uddybe fordelene ved brugen af de ideale elementers metode, kommer Hilbert med flere eksempler på brugen af den.

Et af disse eksempler er tilføjelsen af punkter i det uendelige til den euklidiske geometri, hvorved man opnår en såkaldt projektiv geometri.

I den euklidiske plan-geometri er det sådan, at to linier skærer hinanden i ét og kun ét punkt, medmindre de er parallelle. I den projektive geometri fjernes undtagelsen for de parallelle linier ved at tilføje visse ideale elementer:

1. alle linier har et idealt punkt i det uendelige
2. to parallelle linier har det samme ideale punkt
3. skærende linier har forskellige ideale punkter
4. alle ideale punkter ligger på en og samme ideale linie i det uendelige

[30] [Hilbert, 1919-20, s. 90-91]
[31] [Hilbert, 1919-20, s. 91]

Når disse nye elementer er tilføjet til det oprindelige system, har vi et nyt udvidet system, som det er mere »simpelt« at operere i. Eksempelvis er det i den projektive geometri, således at udsagnet, om at to rette linier mødes i et og kun et punkt, er universelt gyldig.

I en mere formel udgave af den projektive geometri kan man vise et dualitetsprincip, som siger, at hvis vi har bevist en sætning, så gælder denne sætning også, hvis man udskifter alle »punkter« med »linier« og omvendt[32]. Et simpelt eksempel på dette kunne være sætning: *givet to linier* l_1 *og* l_2 $(l_1 \neq l_2)$, *så eksisterer der ét og kun ét punkt* p *for hvilket det gælder, at* p *ligger på* l_1 *og* l_2. Gælder denne sætning, så giver dualitets-princippet os straks følgende sætning: *givet to punkter* p_1 *og* p_2 $(p_1 \neq p_2)$, *så eksisterer der én og kun én linie* l *for hvilket det gælder, at* l *indeholder* p_1 og p_2.

Dualitets-princippet bidrager hermed til »frugtbarheden« af det nye system, og vi kan på en mere elegant måde vise sætninger i den projektive geometri, som så kan overføres til den euklidiske geometri.

Et andet eksempel på brugen af de ideale elementers metode kommer fra talteorien. Vi ved at ethvert heltal kan opløses entydigt til et produkt af primtal, eksempelvis kan tallet 6 entydigt opløses til et produkt af de to primtal 2 og 3: $6 = 2 \cdot 3$. At et tal er et primtal og dermed irreducibelt kan naturligvis generaliseres til andre domæner end mængde af alle heltal.

Ser vi på domænet $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$, som består af »polynomierne« på formen $a + b\sqrt{-5}$, hvor $a, b \in \mathbf{Z}$, så har vi ikke en entydig opløsning af ethvert tal til et produkt af irreducible.

Eksempelvis har vi at $6 = 2 \cdot 3$ og $6 = (1 - \sqrt{-5}) \cdot (1 + \sqrt{-5})$[33]. Dette komplicerer selvfølgelig eventuelle videre undersøgelser[34].

Vi kan dog genoprette den entydige faktorisering ved at tilføje nye »ideale« irreducible tal til domænet. Dette blev først gjort af Ernst Kummer (1810-1893). Meget kort fortalt tilføjede Kummer nogle ideale irreducible til $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$, således at $2 = \alpha \cdot \alpha$, $3 = \beta \cdot \gamma$, $(1 - \sqrt{-5}) = \beta \cdot \alpha$, $(1 + \sqrt{-5}) = \gamma \cdot \alpha$[35].

På denne måde genoprettes den entydige faktorisering i det udvidede system. For tallet 6's vedkommende fås således den entydige opløsning:

$$6 = \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

[32] Se [Hilbert, 1919-20].
[33] $2, 3, (1 - \sqrt{-5}), (1 + \sqrt{-5})$ er irreducible i $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.
[34] [Hilbert, 1919-20, s. 96]
[35] Se f.eks. [Bordogna, 1996].

Dedekind tager senere Kummers overvejelse op igen og behandler spørgsmålet langt mere generelt, hvilket bliver starten til teorien om idealer. Således medførte indførelse af de »fremmedartede« ideale elementer, at der opstod en ny interessant matematiske teori.

Hilbert pointerer desuden at indførelsen af sådanne ideale elementer i matematikken har været effektiv til at løse forskellige matematiske problemer – problemer som man inden indførelsen havde haft stort besvær med[36].

Når de nye elementer kaldes »ideale«, har dette i første omgang kun sin berettigelse relativt til det oprindelige system, som man går ud fra. I det udvidede system skelner man ikke mellem hvad der er ideale og oprindelige elementer, og der forligger til stadighed den mulighed, at det udvidede system i sig selv kan udvides.

Den store gevinst ved de ideale elementers metode er, at man opnår en større *simpelhed* i systemet og en større *generalitet* af dets lovmæssighed, og hermed opnås også en øget epistemisk *effektivitet* og *frugtbarhed* i forhold løsningen og opdagelsen af relevante matematiske problemer.

Nu forstår vi, hvorfor Hilbert ikke mener, at vi ikke skal smide de problematiske dele af den klassiske matematik væk. De dele af den klassiske matematik, som går udover finitismen, fungerer som ideale elementer, idet de bidrager med noget værdifuldt.

Går vi tilbage til Hilberts finitistiske talteori, så har denne den ulempe, at det udelukkede tredjes princip ikke er universel gyldigt. Nu foreslår Hilbert at vi ganske parallelt til den velkendte brug af de ideale elementers metode »genopretter« det udelukkede tredjes princips universelle gyldighed ved at tilføje den uproblematiske finite talteori et række ideale udsagn.

Rent teknisk gøres dette ved at tilføje følgende aksiom: $A(n) \rightarrow A(\epsilon_x A(x))$.

For at forklare hvad den transfinite ϵ_x-operator gør, forstiller vi os, at vi har tilgang til alle tallene som et afsluttet objekt[37]:

Vi har alle tallene liggende klar foran os, og vi har direkte tilgang til dem alle. Hvis dette er tilfældet er det udelukkede tredjes princip er gyldigt. I så fald vil der for enhver egenskab $A(x)$ gælde en af to ting: enten eksisterer der et n_0 som har egenskaben A, eller også findes et sådant ikke.

I begge tilfælde vil der eksistere et r, således at det for alle n gælder at $A(n) \rightarrow A(r)$. ϵ_x-operatoren kan altså forstås som en funktion som udvælger et sådan r i denne »idealiserede« situation.

[36]Se [Hilbert, 1919-20, s. 98].

[37]Se [Tiles, 1991, s. 106] og [Kreisel, 1983].

Hvis der findes et r med egenskaben A udvælges et sådant, ellers udvælges et vilkårligt r. ϵ_x-operatoren udfører således en »over-endelig« operation, der går udover hvad vi egentligt kan retfærdiggøre finitistisk.

Ved hjælp af ϵ_x-operatoren kan Hilbert definere al- og eksistenskvantorerne: $\forall x A(x) \equiv A(\epsilon_x \neg A(x))$ og $\exists x A(x) \equiv A(\epsilon_x A(x))$, og heraf indføres tertium non datur.

Men vi må i vores glæde over dette ikke glemme, at vi med det ideale element samtidigt har indført en problematisk størrelse – vi må retfærdiggøre dets tilføjelse til den uproblematiske del af vores matematiske teorien.

For Hilbert består dette i at vise, at tilføjelsen ikke medfører nogen modstrid med den sikre finitistiske viden. Vi må derfor undersøge de beviser, som benytter de problematiske dele til at vise finitistiske udsagn, og for at kunne gøre dette, er det nødvendigt med en formaliseret teori, som gør beviser til håndterlige størrelser.

Hilbert og hans medarbejderes formodning var at ϵ_x-operatorerne med finitistiske midler kunne elimineres fra disse »problematiske« beviser af finitistiske sætninger. Hvis dette kunne lade sig gøre, ville man altid kunne reducere de »ideale« beviser til finitistiske beviser, og dermed ville beviser af finitistiske meningsfulde udsagn, som går via »det uendelige«, kunne reduceres til indholdsmæssige uproblematiske beviser.

Prisen for at tilføje noget til det uproblematiske system er altså at give et finitistisk konsistensbevis for det udvidede system. Hilberts pointe er, at den »ideale« overbygning på finitismen er nyttig, men at retfærdiggørelsen af denne skal ske indenfor den sikre finitistiske ramme. Som han skriver:

> Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden.[38]

Tilføjelsen af den ideale struktur må ikke føre til udsagn, som er i modstrid med det, som vi har fastlagt indenfor den finitistiske ramme. Konsistensbevisets gyldighed og matematikkens grundlag afhænger således af finitismens ufejlbarlighed.

Set i lyset af det ovenstående synes Brouwers karakterisering af Hilbert filosofiske position som en formalisme, hvori matematikken er reduceret til et tomt spil, at være misvisende. Weyl formulerer denne kritik af Hilberts program på følgende måde:

[38][Hilbert, 1926, s. 190]

> [...] he [Hilbert] succeded in saving classical mathematics *by a radical reinterpretation of its meaning* without reducing its inventory, namely, by formalizing it, thus transforming it in principle from a system of intuitive results into a game with formulas that proceeds according to fixed rules[39].

Kritikken synes ikke at ramme plet. Matematikken er ikke blevet »tom«. Tværtimod indeholder matematikken indholdsmæssige udsagn, og herudover er indførelsen af ideale elementer ikke vilkårlig. Man indfører ikke nye ideale elementer uden videre, blot fordi udvidelsen er konsistent med det gamle system, der skal mere til, idet tilføjelsen af ideale elementer er betinget af, at det udvidede system i det mindste potentielt har nogle bedre egenskaber end det oprindelige.

Det store spørgsmål er nu, hvordan vi skal forstå de ideal elementers erkendelsesteoretiske status. Ser vi på det formelle system, så opdeles dets sætninger i i to grupper: udsagn som svarer til kommunikationer af indholdsmæssige udsagn, og ideale udsagn som ikke omhandler finitistiske objekter, og som altså ikke er »indholdsmæssige«, men som er tilføjet for at give systemet nogle bedre egenskaber.

Man kan vælge at sige, at de ideale elementer og udsagn om ideale elementer blot har en ren instrumentel funktion: det vil sige, at de blot er epistemisk effektive syntaktiske værktøjer, til at opnå erkendelse om matematikkens »virkelige« genstandsområde (de finite tegn), og at det kun er i forhold til dette, at vi kan tale om, at et system har »bedre egenskaber«. En sådan tolkning fremlægges for eksempel af Michael Detlefsen og Philip Kitcher[40]. Kitcher skriver f.eks.:

> This position is just that of a simple instrumentalist philosophy of science, with Hilbert's notion of intuition playing the role of direct observation.[41]

Hvis dette er rigtigt, så er eksempelvis Cantors mængdelære strengt taget kun interessant, hvis den har en gavnlig indflydelse på vores erkendelse af de finitistiske objekter.

Man kan godt finde opbakning for en sådan tolkning hos Hilbert, for han skriver jo at »[...] in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung

[39] [Weyl, 1927, s. 483] m. forfatterens egen fremhævelser.
[40] Se f.eks. [Detlefsen, 1986] og [Kitcher, 1976].
[41] [Kitcher, 1976, s. 105]

die konkreten Zeichen selbst«[42], men på den anden side synes en sådan streng instrumentalisme ikke helt at være, hvad Hilbert havde i tankerne:

> Aber die mathematische Wissenschaft ist keineswegs durch Zahlengleichungen erschöpft und auch nicht allein auf solche reduzierbar. Wohl aber kann man behaupten, daß sie ein Apparat sei, der in seiner Anwendung auf ganze Zahlen stets richtige Zahlengleichungen liefen muß.[43]

En del af svaret på spørgsmålet, kan vi måske finde i Hilberts afsluttende bemærkninger i *Über das Unendliche*:

> Die Rolle, die dem Unendliche bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee – wenn man, nach den Worten Kants, unter einer Idee einen Vernunftbegriff versteht, der alle Erfahrung übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird – einer Idee überdies, der wir unbedenklich vertrauen dürfen im dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat.[44]

Her sammenligner Hilbert altså »det uendelige« i matematikken med en idé i Kants forstand. Hvad en idé er for Kant, vil jeg se nærmere på i det følgende.

[42][Hilbert, 1926, s. 171]
[43][Hilbert, 1926, s. 171] [behaupten = hævde]
[44][Hilbert, 1926, s. 190]

Kapitel 5

Hilbert og Kant – ideale elementer og regulative ideer

Immanuel Kant (1724-1804) blev – ligesom Hilbert – født i den øst-preussiske by Königsberg. Som vi har set, ligger der bag Hilberts finitisme en kantiansk inspireret epistemologi, og Hilbert skriver herudover at »det uendelige« i matematikken skal forstås, som en idé i Kants forstand.

Generelt set var Hilbert glad for at citere og henvise til Kant, eksempelvis begynder Hilbert *Grundlagen der Geometrie* (1899) med følgende citat fra Kants *Kritik der reinen Vernunft*[1]:

> So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen, und endigt mit Ideen.[2]

Citatet er både interessant og mystisk. Det viser at Hilbert allerede i 1899 så på Kants filosofi med interesse, men det er dog ikke helt let at lokalisere, hvor i KdrV citatet stammer fra.

I *Grundlagen der Geometrie* henvises der meget upræcist og delvist fejlagtigt til »*KdrV, Elementar Lehre, T.2., Abt. 2.*«. Interessant nok findes citatet i KdrV's *Anhang zur transzendentalen Dialektik*, anden del, andet »afsnit«: (B730/A702). I dette appendiks uddyber Kant de regulative ideers funktion og status. Anhang'et bliver ofte overset i gennemgange af KdrV hovedlinier, men det er centralt, hvis man ønsker at forstå, hvad Kant forstår ved en idé, og det vil derfor have en fremtrædende plads i det følgende.

[1] I det følgende forkortet til KdrV.
[2] [Hilbert, 1899]

Når dette er sagt, bør man selvfølgelig være forsigtig med at lægge for meget i Hilberts valg af et citat fra Anhang'et allerede i 1899. Det er ikke noget der tyder på, at han på dette tidspunkt skulle have været af den opfattelse, at »det uendelige« skal forstås som en regulativ idé, men på den anden side indikerer det, at Hilbert kan have læst i denne del af KdrV.

Spørgsmålet er, hvor stor vægt man i det hele taget skal lægge på, at matematikeren Hilbert henviser til filosoffen Kant. Nogle, eksempelvis Peckhaus og Fang, mener ikke, at man bør taget det for alvorligt, sidstnævnte skriver endda at:

> Hilbert merely liked to quote Kant, the most famous and greatest of all Königsbergers – that was all[3].

Derfor er det på sin plads, at undersøge om Hilberts sammenligning af de ideale elementer med Kants regulative idéer overhovedet holder vand, eller om Hilbert har fået Kants transcendentalfilosofi galt i halsen.

Det skal allerede nu nævnes, for at rydde eventuelle misforståelser af vejen, at Hilbert ikke direkte overtager Kants specifikke matematiksyn, men at det derimod er Kants generelle erkendelsesteori som tiltaler ham, hvilket citatet fra *Grundlagen der Geometrie* da også peger hen imod.

5.1 Regulative ideer hos Kant

Da Kants filosofi er et stort og sammenhængende »spindelvæv«, er det nødvendigt meget kort, at skitsere i hvert fald delområder af denne, for at få et klarere billede af hvad idéer er, og hvilken sammenhæng de indgår i. For ikke at sidde fast i »spindelvævet« bliver skitseringen dog kort, og redegørelsen vil så vidt muligt koncentrere sig om, hvad en ide er for Kant, med henblik på at udrede, hvad dette kan lære os.

Kant ville med sin filosofi skabe en kopernikansk vending i filosofien. Med dette mente Kant, at vi skal vende opmærksomheden væk fra de erfarede genstande og istedet rette den ind imod selve erfaringen, og undersøge hvordan erkendelse overhovedet er mulig.

Kant mente at kunne vise, at der findes visse transcendentale[4] former, som udgør mulighedsbetingelserne for enhver erfaring, og at disse former er noget

[3][Fang, 1970, s. 84], her citeret fra [Peckhaus, 1990, s. 14].

[4]Det transcendentale er det, som er nødvendigt, for at vi kan have erfaring; det transcendente er det, som går udover vores erfaring.

som kommer fra det erfarende subjekt selv. Kants filosofi er på den ene side et svar til de empiriske skepticister (specielt David Hume), der mente at al erkendelse kommer fra empirien, men på den anden side også en kritik af rationalisternes metafysik, idet han samtidigt mener at kunne vise hvilke begrænsninger erkendelsen er underlagt.

For at skære det ud i pap mener Kant, at der er egenskaber som tilsyneladende er tilknyttet vores omverden, som reelt skyldes den måde vi erfarer på, og som endda er mulighedsbetingelser for, at vi overhovedet kan erfare noget. Vi kan altså ikke erkende verden, som den er i sig selv[5], uafhængigt af de betingelser vores sanseevne fastsætter, men til gengæld kan vi have *a priori* viden om de former som vores erfaring er underlagt, og vi kan have en objektiv erkendelse af tingene som de fremstår for os.

Kant opdeler vores »erkendeevne« i tre dele, - nemlig anskuelse (Anschauung), forstand (Verstand) og fornuft (Vernunft). Jeg vil i det følgende give en relativt kort beskrivelse af anskuelsen og forstanden, for at bruge noget mere tid på fornuften, idet Kants ideer er tilknytte denne.

I anskuelsen dannes en syntese mellem sansematerialet (som må antages at komme fra »tingen i sig selv«) og anskuelsesformerne tid og rum. Dette skaber fænomenerne. Tid og rum er nødvendige for at vi overhovedet kan anskue fænomenerne. Ifølge Kant kan vi simpelthen ikke tænke et fænomen, uden at det er givet i tid og rum. Derimod kan vi godt tænke os en tom tid og et tomt rum. Derfor må tid og rum være givet a priori, og således kommer anskuelsesformerne tid og rum fra det sansende subjekt selv[6]. Kant mente lidt firkantet sagt[7], at den euklidiske geometri beskriver rummet, som det fremstår for os, og at vi har en a priori anskuelse af rummet som aktuelt uendeligt[8].

Som vi har set er anskuelsen hos Hilbert mere rudimentær, og ikke overraskende mener Hilbert, at Kant er gået for langt i hvad der kan antages at være givet a priori:

> In der Kantschen Apriori-Theori sind noch antropomorfe Schlacken enthalten, von denen sie befreit werden muß und nach deren Entfernung nur diejenige apriorische Einstellung übrigbleibt, die auch der rein mathematischen Erkenntnis zugrunde liegt: es ist

[5] Kant opererer med et grundlæggende skel mellem tingen, som den fremstår for os, og tingen, som den er i sig selv.

[6] Se KdrV (B45/A31).

[7] Se f.eks. [Friedman, 1992] og [Posy, 2000].

[8] KdrV (B39/A25)

im wesentlichen die von mir in verschiedenen Abhandlungen charakterisierte finite Einstellung.[9]

Der hvor Hilbert mener, at Kant er gået for langt, er når Kant hævder, at rummets aktuelle uendelighed er givet a priori.

Vender vi tilbage til Kant, så mener han, at der skal mere til end anskuelse, før vi kan have en egentlig erkendelse. For Kant er det at have erkendt noget ensbetydende med at kunne afsige erfaringsdomme[10]. Det som mangler, før vi kan afsige erfaringsdomme, er nogle begreber, som kan skabe en ordning af fænomenerne, da fænomenerne er givet i en ustruktureret mangfoldighed. Kant mener, at der findes visse begreber som er nødvendige, for at det er muligt at fælde domme og dermed have erkendelse.

Disse begreber er forstandens bidrag til erkendelsen. Forstanden er evnen til at fælde domme, og dens grundmateriale er de af anskuelsen givne fænomener, som syntetiseres med forstandensbegreber. Da disse forstandsbegreber ikke kan udledes af vor erfaring, men er nødvendige for at vi kan have erfaring, må de komme fra forstanden selv.

Det er disse nødvendige forstandsbegreber, som Kant kalder kategorierne, og det er ved hjælp af disse, at fænomenerne repræsenteres og forstås som erfaringsgenstande, der kan fældes domme om. For at komme frem til hvilke begreber, der tilhører kategorierne, ser Kant på strukturen af de logiske domsformer som forstanden (hos alle rationelle væsner) benytter sig af.

Efter en undersøgelse af disse, mener Kant at kunne lave en udtømmende[11] inddeling af domsformerne i fire klasser. De fire klasser betegner henholdsvis dommens: kvantitet, kvalitet, relation og modalitet, og hver af disse klasser indeholder tre undergrupper af domsformer. Formen af forstandens domme opdeles således i tolv grupper. Da Kant som sagt mener, at erkendelse er ensbetydende med muligheden for domfældelse, må der til hver af de logiske domsformer svare et a priori forstandsbegreb, altså en kategori. Hvordan han mere præcist kommer frem til de forskellige kategorier udfra dommene, vil vi ikke går ind i her, men resultatet bliver at en tavle med tolv kategorier[12],

[9][Hilbert, 1931, s. 385]

[10]For Kant er det, at have erkendt noget ensbetydende med, at kunne afsige en subjekt-prædikat dom.

[11]Her kan man kritisere Kant for at have en kraftig antagelse om den logik fornuftsvæsner benytter.

[12]KdrV (B106/A80)

som han igen mener er udtømmende:

Kvantitet
Enhed
Flerhed
Totalitet

Kvalitet
Realitet
Negation
Begrænsning

Relation
Substans og accidens
Årsag-virkning
Vekselvirkning

Modalitet
Mulighed-umulighed
Eksistens-ikke eksistens
Nødvendighed-tilfældighed

Kategorierne er *rene* begreber, hvilket vil sige at de er tomme for indhold. Udover disse findes også *empiriske* begreber som er synteser af anskuelser og forstand; eksempelvis er vores begreb om dette papir, fremkommet af en syntese af anskuelser og kategorierne, og er dermed et empirisk begreb.

Kant giver en transcendental deduktion af kategoriernes nødvendighed, ved kort fortalt at vise, at den erfaring vi har kun er mulig, hvis kategorierne kan anvendes på fænomenerne. Uden kategorierne ville det ifølge Kant ikke være muligt, at afsige de domme, vi rent faktisk afsiger. Han mener dermed at have vist kategoriernes objektive gyldighed.

Kant mangler dog stadigvæk at redegøre for, hvordan det rent praktisk er muligt, at anvende kategoriernes rene begreber på det i anskuelsen givne[13]. Formidlingen mellem de rene forstandsbegreber og fænomenerne sker via en »skematisering« af forstandsbegrebet; et skema (schema) skabes af det Kant kalder dømmekraften[14], som har sit udgangspunkt i det i anskuelsen givne, men dog kan forholde sig frit til dette i henhold til kategorierne. Dømmekraften har således et ben i hver af disse to dele af vores erkende-evne. Et skema er tilknyttet et bestemt forstandsbegreb og giver en »repræsentation« af hvorledes dette forstandsbegreb kan syntetisere med fænomenerne. Lad os uddybe dette med et lille eksempel.

Ser vi i første omgang på det empiriske begreb »hund«, så skal vi for at kunne anvende det, skabe et »skematiseret« billede af et firbenet pattedyr, som kan forbinde begrebet med det sansede, og det er begrebet hund's skema som giver

[13] Se også [Körner, 1974, s. 70-75].
[14] Tysk: Einbildungskraft.

os en regel, som muliggør at vi kan skabe et sådan »skematiseret« billede[15]. Nu kommer vi til skemaets dobbelte status, for med hensyn til den regel, som begrebets skema giver, er skemaet tilknytte til forstanden, hvorimod skemaet som »billedskabende« er tilknyttet til anskuelsen, og skemaet kan således skabe den ønskede forbindelse mellem det i anskuelsen givne og forstandens begreber. Hvad angår kategorierne, som er rene forstandsbegreber, er det mindre klar hvordan skemaerne fungerer, da der ikke kan skabes billeder af disse begreber, og Kants redegørelse herfor gør ikke sagen meget klarere. Det skal dog siges at kategoriernes skemaer, på samme måde som for de empiriske begreber, giver regler for kategoriernes anvendelse.

Foreløbigt kan vi altså sige, at erkendelsesprocessen hos Kant beskrives på følgende måde: det erkendende subjekt får gennem anskuelsen ubearbejdede fænomener i de nødvendige former rum og tid, og via ligeledes nødvendige forstandskategorier skabes en »form« eller »enhed« i dette materiale, således at vi har mulighed for at fælde erfaringsdomme. Da anskuelsens former og kategorierne er mulighedsbetingelser for erfaring, kan vi have objektiv erkendelse om tingene, som de fremstår for os. Både anskuelsen og forstanden er nødvendige for erkendelse, da anskuelsen uden forstand er blind, og forstanden uden anskuelsen er tom[16].

Det tilbageværende spørgsmål er nu, hvilken rolle fornuften spiller?

Fornuften[17] er menneskets evne til at drage logiske slutninger udfra de af forstanden givne domme. Overordnet kan man sige at fornuften søger at ordne og systematisere vor erkendelse, for på denne måde at søge en »helhedsopfattelse« af verden. Forholdet mellem forstanden og fornuften er altså overordnet set analogt til det forhold, vi finder mellem anskuelsen og forstanden; forstanden skaber en orden i det af anskuelsen givne, hvorved den empiriske erkendelse skabes, mens fornuften søger at arrangere og ordne den opnående erkendelse, for dermed at danne en enhed og systematik i denne.

Fornuften benytter såkaldte fornuftsbegreber, til at arrangere og ordne forstandens erkendelse, og det er disse fornuftsbegreber, som også kaldes *idéer*. Dette sker ved at forskellige forstandsbegreber og domme »samles« under et fornuftsbegreb (en idé), hvorved der opnås en systematisering af forstandserkendelsen. Således er ideerne på en vis måde analoge til forstandens kategorier. Men der en vigtig forskel:

[15]Se KdrV (B179/A140).

[16]KdrV (B75/A51)

[17]Kant skelner mellem den teoretiske og den praktiske fornuft; den teoretiske fornuft søger at finde frem til, hvad som er, mens den praktiske fornuft søger at finde frem til, hvordan det bør være.

> Ein Begriff aus Notionen, der die Möglichkeit der Erfahrung übersteigt, ist die Idee, oder Vernunftbegriff.[18]

Citatet siger at ideer er begreber, som overstiger den mulige erfaring, de er altså begreber om »noget«, vi ingen mulighed har for at erfare.

For at uddybe hvordan ideer opstår, ser Kant på fornuftens slutningsformer. Disse mener han er syllogistiske slutninger[19]. Fornuftens syllogismer kan ifølge Kant opdeles i præcis tre klasser: *kategoriske*, *hypotetiske* eller *disjunktive*[20]. Sådanne syllogistiske slutninger består af to præmisser og en konklusion, eksempelvis har vi den kategoriske syllogisme: (1) alle grækere er rationelle, (2) alle athenianere er grækere, (3) alle athenianere er rationelle.

Konklusionen er selvfølgelig betinget af præmisserne, og disse må selv være betinget af noget andet. Man kan derfor opstille nye syllogismer med disse præmisser som konklusion, som så igen har betingede præmisser. På denne måde får vi en række af betingelser bundet sammen af syllogismer. Da fornuften søger at ordne forstandserkendelsen, søger den efter den sidste ubetingede præmis, og på denne måde opstår ideerne. Kant mener at der findes tre transcendentale ideer, svarende til hver af de tre klasser af syllogismer, disse er: »jeg'et«, »kosmos« og »Gud«[21]. Ideerne er altså en konsekvens af fornuftens stræben efter enhed og systematisering af vores forstandserkendelse.

Ud over disse transcendentale ideer, findes der også en række »mindre« ideer, som man kan kalde teoretiske fornuftsbegreber[22], som bruges i de enkelte videnskaber.

Om både de transcendentale ideer og de teoretiske fornuftsbegreber, må vi imidlertid ikke glemme, at de går udover den egentlige erfaring, og Kant viser i den transcendentale dialektik, at hvis de benyttes på samme måde som forstandsbegreber, vil vi foretage fejlslutninger, hvilket er hvad der sker for den rationalistiske metafysik.

Fornuften benytter sig således af ikke-empiriske transcendente begreber i sin evige søgen efter den absolutte forklaring. Men hvis vi opfatter ideerne som udtryk for noget eksisterende, det vil sige bruger dem *konstitutivt*, vil vi løbe ind i selvmodsigelser.

Når idéer alligevel er vigtige, skal det ses i sammenhæng med fornuftens overordnede fordring om at søge enhed i erkendelse. Fornuftens grundsætning

[18] KdrV (B377/A320)

[19] Igen må man bemærke den kraftige antagelse om den menneskelige tænknings logik.

[20] Se KdrV (B361/A304).

[21] Se KdrV (B391/A334).

[22] Se [Wartenberg, 1992, s. 229].

er at søge en forsat udvidelse af erfaringen[23]. Bag denne grundsætning ligger en idé om erkendelsen som en fuldstændig og systematisk enhed. Denne idé lader sig bedst beskrive ved at fremdrage de tre principper som fornuften benytter sig af i sin stræben efter at opnå den.

Disse er principperne om ensartethed (Gleichartigkeit), specifikation (Varietät) og kontinuitet (Affinität)[24]. Når fornuften følger princippet om ensartethed forsøger den at systematisere de empiriske genstande under mere og mere generelle begreber (»arts«-betegnelser), hvorimod den, når den benytter princippet om specifikation, søger efter den største mangfoldighed blandt genstandene (forskellige »slægts«-betegnelser), og sammen med det sidste princip om kontinuitet, som søger at skabe en glidende overgang mellem forskellige »arter«, dannes der således et billede af erkendelsen, som en uendeligt finmasket og fuldstændig enhed.

Hvis vi fejlagtigt betragter disse principper og den bagved liggende transcendente idé, som værende konstitutive, synes det oplagt, at vi må løbe ind i antinomier, da principperne betegner åbenlyst modstridende interesser. Vi kan dog stadig gøre brug af ideerne, hvis vi opfatter dem regulativt, idet idéer i så fald kan have en *positiv* funktion. Når man benytter fornuftens idéer regulativt, må man altså ikke tro, at de henviser til konkrete objekter givet i erfaringen, men de kan alligevel bidrage med noget positivt:

> Man kann eigentlich nicht sagen, daß diese Idee [ideen om den systematisk enhed af erkendelsen] ein begriff vom Objekte sei, sondern von der durchgängigen Einheit dieser Begriffe, so fern dieselbe dem Verstande zur Regel dient. Dergleichen Vernunftbegriffe werden nicht aus der Natur geschöpft, vielmehr befragen wir die Natur nach diesen Ideen, und halten unsere Erkenntis für mangelhaft, so lange sie denselben nicht adäquat ist.[25]

Idéer har altså også en positiv funktion, idet vi ved hjælp af disse »udspørger« naturen, og idéerne giver dermed en rettethed af vores undersøgelser. Idéerne repræsenterer noget »idealt« og »perfekt« og fungerer dermed som et *focus imaginarius*, et fikspunkt som ligger udenfor vores mulig erfaring, men som vi kan benytte til en systematisering og udvidelse af erkendelse, da vi kan holde vores foreløbige empiriske erkendelse op imod det ideal som idéen repræsenterer. Hvor de to ikke stemmer overens, betragter vi erkendelsen som ufuldkommen eller mangelfuld i forhold til vores ideal om den, og

[23]Se KdrV (B537/A509).
[24]Se KdrV (B685-6/A657-8).
[25]KdrV (B673-4/A645-46)

vi har dermed opnået et spor, vi kan følge i vores videre undersøgelser. Den regulative brug af ideerne er altså at lade dem anspore til nye undersøgelser, og ikke misforstå dem, som det endelige svar.

Kant fremhæver altså to aspekter af fornuftens idéer – et negativt aspekt; ideerne betegner ikke ting som eksisterer, de er noget ikke-empirisk afledt af fornuften, – og et positivt aspekt; ideerne fungerer som et focus imaginarius, idet de retter fornuftens undersøgelser mod et ideal. Lad os igen se lidt nærmere på det sidste aspekt.

Kant bruger følgende billede til at anskueliggøre hvorledes idéer kan have en positiv betydning for opnåelsen af erkendelse, på trods af at de er ikke selv refererer til erfaringsobjekter. Når vi kigger ind i et spejl ser genstandene ud til at være bag spejlet, og indfanges vi af denne illusion, kan det lede os til at drage forkerte konklusioner, men er vi klar over at spejlbilledet er en illusion, kan spejlbilledet være med til at øge vores erkendelse[26]. Et måske mere illustrativt eksempel på den positive brug af idéer, er det teoretiske fornuftsbegreb om »rent vand«[27], her forstået som et »rent grundstof«. Det er næppe sandsynligt, at vi nogen sinde vil stå over for noget sådan. Men ideen om rent vand kan benyttes til at systematisere vores erfaringer med vandet i vandhanen, vandpytten eller kaffekoppen, og dermed afdække nogle underliggende mekanismer.

Brugen af idéer er altså nyttig som et metodologisk værktøj til at skabe en enhed i erkendelsen, men den er samtidig problematisk. Problemet er at retfærdiggøre fornuftens brug af de ikke-empiriske ideer, som et middel til at opnå erkendelse. I udgangspunktet kan man sige at fornuften bruger ideer til at »holde orden i eget hus«, altså skabe en orden i erkendelsen. Hvis det blot er på grund af fornuftens egen interesse, at vi søger at skabe enhed i vor erkendelse, vil princippet om erkendelsens enhed blot have en subjektiv gyldighed. Det vil være et metodologisk princip, som fornuften påtvinger sig selv, men det vil ikke nødvendigvis være tilfældet, at systematikken gælder for genstandene, som de er givet for os, og dermed ville ideernes retningsgivende funktion være problematisk. Dette er Kant ikke tilfreds med.

> [...] ob man diese a priori, auch ohne Rücksicht auf ein solches Interesse der Vernunft in gewisser Maße postulieren, und also sagen könne: alle möglichen Verstanderkenntnisse [...] haben Vernunfteinheit [...]: das würde ein Transzendentaler Grundsatz der Vernunft sein, welcher die systematische Einheit nicht bloß subjektiv-

[26] Se KdrV (B673/A645).
[27] Se KdrV (B674/A646).

> und logische-, als Methode, sodern objektiv notwendig machen würde.[28]

Hvad han skriver i dette citat er, at hvis den systematisering fornuften foretager skal stemme overens med verden, er vi nødt til at antage systematiseringen som et transcendentalt princip.

En sådan antagelse kræver en begrundelse, dvs. en deduktion. Kant forsøger at give en sådan deduktion ved først at argumentere for at det metodologiske princip ikke ville være muligt uden antagelse af det transcendentale princip.

Argumentet for dette går som følger. Hvis vi benyttede det metodologiske princip uden en transcendental forudsætning, hvordan kan fornuften så hævde erkendelsens systematiske enhed, og dermed komme med udsagn om naturens systematiske enhed. Uden en transcendental antagelse ville sådanne udsagn være meningsløse, da fornuften på forhånd må medgive, at det lige så godt kunne forholde sig anderledes. Således giver antagelse af det metodologiske princip ifølge Kant ikke mening uden en transcendental »opbakning«.

Udover dette kommer Kant med følgende argument for nødvendigheden af at antage det transcendentale princip:

> Denn das Gesetz [systematisk enhed] der Vernunft, sie zu suchen, ist notwendig, weil wir ohne dasselbe gar keine Vernunft, ohne diese aber keinen zusammenhangenden Verstandgebrauch, und in dessen Ermangelung kein zureichendes Merkmal empirische Wahrheit haben würde, und wir also in Ansehung des lezteren die systematische Einheit der Natur durchaus als objektivgültig und notwendig voraussetzen müssen.[29]

Kant siger altså, at vi uden antagelsen af det transcendentale princip om den systematiske enhed ikke ville have nogen fornuft, og dermed ingen sammenhængende forstandsbrug. Vi ville blot have de forskellige spredte erfaringer, men ingen systematik, da vi ikke ville have et kriterium for sandheden af systematiseringen. Kant mener altså at have vist, at vi må antage at naturen er en systematisk ordnet enhed, idet det er nødvendigt, at vi i vores undersøgelser går frem *som om* denne enhed er objektiv, men han har ikke nogen mulighed for at argumentere for antagelsens objektiv gyldighed, da dette ville være at gå ud over enhver erfaring.

[28]KdrV (B676/A648)
[29]KdrV (B679/A651)

Ligesom det er nødvendigt, at have et skema til at mediere mellem forstanden og anskuelse, er det nødvendigt at have noget som kan skabe en forbindelse mellem forstandens erkendelse og fornuftens ideerne. Vi har altså brug for en regel, som kan muliggøre forstandsbegrebernes systematisering under en ide. Det medierende kan dog ikke være et skema, idet ideer jo per definition er begreber om noget som ligger udenfor vores erfaring, eksempelvis kan vi ikke forestille os den fuldstændige systematiske enhed[30]. I stedet må vi ifølge Kant have noget analogt hertil. Dette er ideen om et *maksimum*, som giver anledning til et princip om maksimal opdeling og forening af forstandserkendelse. Ideen om et maksimum giver en *regel*, vi godt kan følge. En anden ting skal nævnes i denne forbindelse. Hvor et skema mellem anskuelsen og forstanden gav en regel for hvordan forstandsbegreber kan anvendes på fænomenerne, så går reglen om maksimum »den anden vej«, idet den foreskriver hvordan forstandsbegreberne kan anvendes på ideerne[31].

Ideerne er altså idealer (eller fokuspunkter) som vi forsøger at tilnærme os, så vidt det er muligt i forhold til den forstandserkendelse vi har. Dette er ideens regulative funktion, som Kant skriver:

> Sondern er [brugen af ideen] ist nur regulativ, um dadurch, so weit als es möglich ist, Einheit in die besonderen Erkenntnisse zu bringen, und die Regel dadurch der Allgemeinheit zu nähern.[32]

Opsummerende kan vi sige, at ideer er begreber, som ikke svarer til noget i vores erfaringsverden, men de har en vigtig funktion, idet de systematiserer vores erkendelse, og giver vores videre undersøgelser en rettethed. Denne rettethed kommer af at ideer er udtryk for et ideal for vor erkendelse, som vi sammenligner vores egentlige erkendelse med, et ideal som vi dog ikke kan give nogen endegyldig retfærdiggørelse af.

5.2 Sammenligning af de regulative ideer og de ideale elementer

Lad os nu vende tilbage til Hilbert, og sammenligne det Kant siger om idéer med Hilberts forståelse af matematikkens uendelige objekter.

[30] Se KdrV (B693/A665).
[31] Se [Caimi, 1995, s. 318].
[32] KdrV (B674/A646)

For det første bør det bemærkes, at både Kant og Hilbert mener, at vor erkendelse har en sikker syntetisk a priori og således ikke-empirisk kerne. For Kant består denne kerne af anskuelsesformerne tid og rum og forstandens kategorier, for Hilbert er kernen det, som indfanges af det finitistiske udgangspunkt. Kant mente, at vi kunne have en a priori anskuelse af det uendelige rum. Her mente Hilbert, at Kant var gået for langt. Specielt mente han at fremkomsten af den ikke-euklidiske geometri[33] tilbageviste, at den euklidiske geometri kunne være a priori[34]. Samtidigt er han dog fundamentalt set enige med Kant i, at der findes visse bestemte mulighedbetingelser for vor erfaring.

Det store spørgsmål for os er, i hvor høj grad Hilberts ideale elementer kan sammenlignes med idéer i Kants forstand?

Som vi har set tidligere skriver Hilbert følgende:

> Die Rolle, die dem Unendliche bleibt, ist vielmehr lediglich die einer Idee – wenn man, nach den Worten Kants, unter einer Idee einen Vernunftbegriff versteht, der alle Erfarhrungen übersteigt und durch den das Konkrete im Sinne der Totalität ergänzt wird – einer Idee überdies, der wir unbedenklich vertrauen dürfen im dem Rahmen, den die von mir hier skizzierte und vertretene Theorie gesteckt hat.[35]

Første må vi sige, at Hilberts ideale elementer ikke synes at besidde samme grad af nødvendighed og specielle status, som Kant tilskriver de *transcendentale* ideer, så hvis vi skal lave en sammenligning, må det være med de »mindre« idéer – de teoretiske fornuftsbegreber. Men mellem disse og Hilberts ideale elementer findes der til gengæld også mange lighedpunkter.

Eksempelvis gælder det negative aspekt ved Kants ideer også for de »transfinite« ideale elementer, idet de overskrider den mulige erfaring.

Her kunne man komme med den indvendig, at Hilbert i de matematiske systemer han opstiller, rent faktisk hævder eksistensen af de ideale elementer, og at han således bruger dem konstitutivt og dermed fejlagtigt ifølge Kant. Men her skal man være opmærksom på, at det ifølge Hilbert er sådan, at man i matematikken taler om eksistens på bestemt måde. Matematiske eksistensudsagn er altid relative til et bestemt system:

[33] Bolyais og Lobachewskis hyperbolske geometrier.

[34] For en uddybning af denne diskussion se [Friedman, 1992].

[35] [Hilbert, 1926, s. 190]

> Sieht man näher zu, so findet man, daß von Existens immer mit Bezug auf ein bestimmtes *zugrunde gelegtes System* gesprochen wird.[36]

For Kants betød idéernes transcendens, at vi må være forsigtig med vores brug af dem, for hvis vi uden videre bruger dem, som vi bruger forstandsbegreber, løber vi ind i selvmodsigelser.

På samme måde siger Hilbert, at vi skal være forsigtige i omgangen med det, som går ud over det finitistiske standpunkt. Som vi allerede har set, gælder det eksempelvis brugen af det udelukkede tredjes princip, men et måske mere let forståeligt eksempel på dette[37], er håndteringen af uendelige summer, som f.eks.:

$$1-1+1-1+1-1+\dots$$

Behandler vi ukritisk denne sum på samme måde, som vi ville behandle en endelig sum, går vi uden videre udfra, at summe er lig et bestemt tal a. For at beregne denne værdi, kunne vi så f.eks. se på differensen $1-a$:

$$\begin{aligned} 1-a &= 1-(1-1+1-1+\dots) \\ &= 1-1+1-1+1-\dots \\ &= a \end{aligned}$$

Således slutter vi at $a=\frac{1}{2}$. Men på denne anden side kunne vi lige så godt have gjort følgende:

$$\begin{aligned} a &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \\ &= 0+0+0+\dots \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Manipulerer vi således med den uendelige sum på samme måde, som vi ville manipulere en endelig, opstår der en modstrid.

Der findes således en klar analogi mellem ideer og de »transfinite« ideale elementer. Vi skal være varsomme i vores brug af dem. Fornuftens begreber må kun benyttes regulativt i forhold til den objektive forstandserkendelse, og Hilbert kræver på samme måde forsigtighed ved tilføjelsen af nye ideale elementer til et bestående system, idet han kræver at tilføjelsen ikke må

[36][Hilbert, 1919-20, s. 90] m. forfatterens egne fremhævelser.

[37][Hilbert, 1919-20, s. 20-21]

medføre modsigelser af vores finitistiske viden. Det er påkrævet, at vi sikre os at det udvidede system er konsistent.

For Hilbert refererer antagelser, som går udover finitismen selvfølgelig ikke til noget, som vi kan give en »finitistisk« betydning, men som ideale elementer har de en *positiv* funktion, idet tilføjelsen giver systemet en større *simpelhed* og en øget *generalitet* af dets lovmæssigheder, og udover dette øges den epistemisk *effektivitet* og *frugtbarhed.* »Det uendelige« som et idealt element, er altså ikke noget vilkårligt tilføjet.

Dette stemmer fint overens med det, at ideer hos Kant skaber en større »systematik« og »enhed« i forstandserkendelsen.

Både Kant og Hilbert skelner altså mellem begreber som refererer til objekter i vor erkendelse, og som vi derfor kan have en objektiv sikkert viden om, og begreber, som har en anden funktion, nemlig at skabe »enhed« og »systematik« i denne erkendelse. Hos begge skal disse ideer eller ideale elementer behandles varsomt.

Overordnet set er der således nogle klare strukturelle ligheder mellem hvad henholdsvis Kant og Hilbert foretager sig. Hilbert er selv bevidst om, at der er sådanne ligheder, og han sammenligner ligefrem målet med hans bevisteori med filosofiens kritik af fornuften:

> [...] – den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Untersuchung machen, gerade wie ja der Astronom die Bewegung seines Standort berücksichtigen, der Physiker sich um die Theorie seines Apparates kümmern muß und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert.[38]

Hilberts projekt er altså, på samme måde som Kants, en *kritik* – ikke forstået som en negativ dom – men som en efterprøvelse og retfærdiggørelse af vor erkendelse.

Alt i alt synes det svært at fastholde, at Hilbert bare godt kunne lide at citere Kant. Tværtimod danner der sig et klart billede af Hilberts filosofiske position, som er slags ny-kantianisme, og af at Hilbert har haft et godt kendskab til Kants filosofi. Om han så har fået dette ved selv at læse Kants skrifter, eller om han har opnået det gennem de personer han omgav sig med (specielt Bernays), er så selvfølgelig et interessant historisk spørgsmål, men det rokker ikke ved, at Hilberts filosofi spiller på et grundlæggende *kantiansk* tema.

[38][Hilbert, 1918, s. 155]

Et tilbageværende spørgsmål er dog om Hilbert ville gå så langt som til at sige, at der med introduktionen af ideale elementer også tilføres vores undersøgelser en rettethed mod et »fokuspunkt« eller et ideal, eller om »det uendelige« som et idealt element for Hilbert blot er et metodologisk værktøj, hvis højeste formål er at øge den epistemiske effektivitet i forhold til matematikkens »indholdsmæssige« udsagn?

5.3 Diskussion af de ideale elementers metode

Noget af det, som stadigvæk er åbent for diskussion, er om tilføjelser af »transfinite« ideale elementer er nødvendige, eller er denne slags tilføjelser blot er nyttige værktøjer?

Hilbert synes i hvert fald at tilskrive dem en subjektiv nødvendig:

> [...] niemand, auch wenn er mit Engelszungen redete, wird die Menschen davon abhalte, beliebige Behauptungen zu negieren, Partielurteile zu bilden und das Tertium non datur anzuwenden.[39]

Tilsyneladende mener Hilbert altså, at selv ikke den mest veltalende engel kunne får os mennesker til ikke at foretage ideale konstruktioner, hvilket historisk set ikke synes at være helt forkert, idet intuitionismen endnu ikke har sejret. Men hvordan kan det være? En mulighed er, at vi psykologisk set er skruet sådan sammen, det være sig ved en tilfældighed, eller fordi det epistemisk set er den mest optimale måde at tænke på. En sådan tolkning af de ideale elementers metode, finder man hos Detlefsen (1986)[40].

Dette er selvfølgelig en forklaring, og bag denne ligger der den *instrumentalistiske* forestilling om at målet med vores tænkning er at komme frem til nye »indholdsmæssige« domme.

Men spørgsmålet er, om dette er det eneste mål vores tænkning har.

Hilbert skriver i *Naturerkennen und Logik* (1930) at vores tænkning søger at skabe »enhed« i erkendelsen:

> [...] unser Denken geht auf Einheit aus und suchen Einheit zu bilden.[41]

[39] [Hilbert, 1926, s. 174], [beliebige = »vilkårlige«].
[40] [Detlefsen, 1986, s. 8-9]
[41] [Hilbert, 1930a, s. 381]

Dette passer fint ind i det Kant siger om fornuftens stræben efter systematisk enhed i vor erkendelse og hans idé om maksimum. På den anden side, skal man også være forsigtig med at drage for entydige konklusioner udfra et sådant enkeltstående citat. Det er dog andre steder, hvor noget sådan antydes. f.eks. skriver Hilbert, at der er en indre tendens til systematik i matematikken:

> [...] eine innere Tendenz der Mathematik zur Systematik, welche teils einem bewußten Streben nach logischer Geschlossenheit besteht und teils darauf beruht, daß die Verfolgung der naheliegenden mathematischen Fragestellungen von selbst zu einer systematischen Ausbildung der Wissenschaft nötigt. [42]

En anden mulig tolkning af det Hilbert skriver er altså at vores tænkning, udover at søge nye indholdsmæssige domme også søger efter enhed og systematik, og at de ideale elementer kan ses som et nødvendigt middel til at opnå dette mål.

Dette leder videre henimod en bredere diskussion af de ideale elementers funktion og status i matematikken. Opsummerende kan man altså vælge mellem to mulige tolkninger af de ideale elementers filosofiske status.

Man kan vælge at sige, at det ideale element hos Hilbert blot har en ren instrumentel funktion, det vil sige at de ideale elementers metode er en epistemisk effektiv metode til at opnå erkendelse om matematikken »virkelige« genstandsområde, de finite tegn, dvs. en effektiv og frugtbar metode til afgøre indholdsmæssige udsagn. En sådan tolkning vælger f.eks. Detlefsen (1986).

Eller man kan vælge en »bredere« og mere kantiansk tolkning, som siger at de ideale elementer udover deres instrumentielle funktion, tilføjer noget mere, idet deres tilføjelser er udtryk for normative idealer, som vi har for vores matematiske teorier, så som simpelhed, generalitet. En sådan tolkning står Mary Tiles (1990) som repræsentant for.

Spørgsmålet er altså om de ideale elementers metode blot er et værktøj, eller om metoden underforstået bygger på en (ikke begrundet) hypotese om den matematikkens systematiske enhed.

Den første tolkning siger, at de ideale elementers metode er epistemisk effektiv og frugtbar i forhold til den egentlige indholdsmæssige erkendelse, den anden siger at den udover at være effektiv og frugtbar, også er udtryk for en søgen efter et »ideal«.

[42] [Hilbert, 1919-1920, s. 11]

De to forskellige fortolkninger har selvfølgelig forskellige konsekvenser for vores forståelse af matematikkens »transfinite« objekter. Er de »transfinite« ideale elementer skruenøgler, som bliver skabt for at passe til vores finite genstandsområde. Eller er de udtryk for »rationelle« normative standarder (eller idealer), som bliver »påtvunget« genstandsområdet. Sat på spidsen bliver dette til følgende spørgsmål: Er de ideale elementer blot meningsløse, men effektive, syntaktiske værktøjer til at udlede indholdsmæssige udsagn, eller er de meningsfulde, men »transcendente« og dermed problematiske begreber, om ideale størrelser, som vi benytter, fordi vi forudsætter og stræber efter erkendelsens systematiske enhed.

Udover at finde ud af hvad Hilbert mente om dette, er det selvfølgelig mindst lige så interessant, at undersøge hvilken tolkning, som bedst forklarer den matematiske praksis. Disse spørgsmål vil jeg undersøge i det følgende, når vi skal se nærmere på Hilberts syn på dannelsen af matematikkens begreber.

Kapitel 6

Den matematiske begrebsdannelse hos Hilbert

For Hilbert er al videnskab et produkt af et samspil mellem »tænkning« og »iagttagelse«, og matematikken fungerer som et bindeled mellem disse to verdener[1]. Dermed er dannelsen af de matematiske begreber under indflydelse af både indre og ydre faktorer.

Ifølge Hilbert findes der tre kilder til videnskabelig erkendelse:

- *die finite Einstellung – det finitistiske udgangspunkt*
- *logik*
- *erfaring*

Som vi har set, danner det finitistiske udgangspunkt ifølge Hilbert mulighedsbetingelserne for vor erkendelse, og det er således grundlaget for de logiske deduktioner, for de almindelige iagttagelser og selvfølgelig også for de mere generelle erfaringer opnået ved eksempelvis gentagne eksperimenter.

At matematikken fungerer som et bindeled mellem tænkning og iagttagelse understreges af Hilbert i følgende citat:

> Wir beherrschen nicht eher eine naturwissenschaftliche Theori, als bis wir ihren mathematischen Kern herausgeschält und völlig enthüllt haben.[2]

[1] Se [Hilbert, 1930a, s. 385], [Hilbert, 1919-20] og [Rowe, 1999].
[2] [Hilbert, 1930a, s. 385]

For Hilbert er det altså sådan, at vi først behersker en videnskabelig teori, når den er blevet »matematiseret«. Dette gør at der, udover de fordele der, som vi allerede har set, er ved indførelse af de ideale elementer, er andre grunde til, at vi må gå ud over det finitistisk udgangspunkt, da fysiske teorier ofte benytter forsimplede idealiseringer af det egentligt erfarbare:

> [...] in der Wissenschaft, wenn nicht durchweg, so doch vorweigend mit solchen Theorien zu tun haben, die gar nicht volkommen den wirklichen Sachverhalt wiedergeben, sondern eine *vereinfachende Idealisierung* des Sachverhaltes dastellen und darin ihre Bedeutung haben.[3]

Matematikkens funktion som bindeled mellem iagttagelsen og tænkning, giver matematikken en udvikling to retninger. På den ene side er matematikken ekspansiv og er dermed *progressiv*, og på den anden side går den i dybden og hvormed den er *regressiv*[4].

Matematikken er *progressiv*, når den udvikler systemer af relationer og undersøger disse systemers logiske konsekvenser, sådan som det sker, i det der normalt karakteriseres som »ren matematik«; denne progressive udvikling tager selvfølgeligt sit udgangspunkt i finitismen, men den fortsætter, som vi har set, udover denne ved introduktionen af ideale elementer.

Matematikkens *regressive* udvikling finder Hilbert udtrykt i *den aksiomatiske metode.* Den aksiomatiske metode benyttes til at give en fra erfaring og anskuelse opbygget teori en fast struktur og et simpelt grundlag. Et nærliggende eksempel på dette er selvfølgelig Hilberts *Grundlagen der Geometrie.*

Matematikkens regressive udvikling er således en udvikling mod præcision og sikkerhed. Dette opnås ved at afdække hvilke forudsætninger teorien har, og undersøge hvad som er forudsætninger og hvad som følger af disse for derigennem at opdage eventuelle skjulte eller underforståede antagelser. En sådan undersøgelse giver således også klarhed over rækkevidden af de forskellige antagelser. Dermed ser man hvilke konsekvenser det får, hvis man af den ene eller den anden grund på et senere tidspunkt må opgive en af antagelserne, eller hvor der er mulighed for nye tilføjelser, og man opnår derigennem en dybere forståelse af det udbyggende system.

En del af den regressive bestræbelse går således ud på at komme nærmere et dybere, mere præcist og sikkert grundlag. Da vi ønsker sikkerhed og præcision, opstiller vi stadigt mere formaliserede systemer for tilsidst at forsøge

[3] [Bernays og Hilbert, 1934, s. 2-3] m. forfatternes egne fremhævelser.
[4] Se [Hilbert, 1919-20, s. 17-18].

at vise, at de antagelser som går udover det finitistiske udgangspunkt ikke medfører modsigelser.

Alt dette kan selvfølgelig synes meget abstrakt, og vi vil derfor se nærmere på et konkret eksempel på udviklingen af et matematiske begreb. Et sådant gav Hilbert i forelæsningsrækken *Natur und mathematisches Erkennen* (1919-20)[5]. Eksemplet omhandler dannelsen af det matematiske begreb om kontinuumet.

6.1 Dannelsen af det matematiske begreb om kontinuumet

Begrebet om kontinuumet har ifølge Hilbert sit udgangspunkt i iagttagelser af »det flydende«, det som til stadighed ændres. Det er udfra sådanne iagttagelser at det matematiske begreb udvikles.

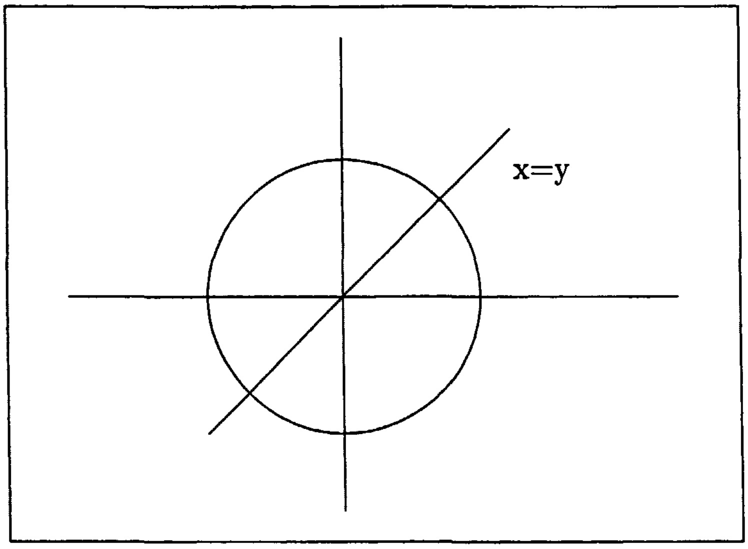
Vi begynder med simple iagttagelser af ændringer. Denne almindelige erfaring beskrives af Hilbert, som den oplevelse man har, når man trækker en tynd nål over sin egen hud. Når vi gør noget sådant, oplever vi, at der mellem to tidsligt og mærkbart forskellige steder hvor nålespidsen rører (A og C) er et sted B. På et tidspunkt vil man iagttage, at man kan skelne A fra C, men at man ikke kan skelne midtpunktet B fra hverken A eller C. Altså kan sagsforholdene ved disse iagttagelser udtrykkes gennem formlerne:

$$A = B, \; B = C, \; A \neq C$$

Logisk set indeholder disse formler en modstrid, og vi slutter derfor at punktet B må være forskellig fra både A og C. Herefter benytter vi forskellige hjælpemidler, mikroskoper osv., hvilket får os til hele tiden at indsætte flere og flere punkter langs nålens bevægelseslinie. Med sådanne erfaringer i baghovedet er det nu naturligt at antage, at bevægelseslinien har uendelig mange punkter.

Med denne antagelse har vi bevæget os udover det finitistiske udgangspunkt og foretaget den første idealisering af vores iagttagelser. Dette fører os til et matematisk kontinuum, som vi kan kalde *det første kontinuum*, og som kan repræsenteres ved hjælp af de rationelle tal, idet disse har den egenskab, at der to forskellige tal altid ligger endnu et tal.

[5][Hilbert, 1919-20, s. 5-14]



Figur 6.1 En enhedscirkel og en skærende linie.

Dette første kontinuumsbegreb indfanger dog ikke alt ved forestillingen om det »uafbrudt sammenhængende«. For hvis vi lader punkterne på en plan beskrives af rationelle koordinater, så kommer vi i modstrid med »almindelige« iagtagelser, når vi betragter en simpel situation som på Figur 6.1.

På figuren ser vi en enhedscirkel (beskrevet af $x^2 + y^2 = 1$) og den rette linie gennem $(0, 0)$ og $(1, 1)$ (beskrevet af $x = y$). Vores erfaring siger os, at linien må skærer cirklen i et bestemte punkter. Men når vi beregner skæringspunkterne, får vi følgende koordinater:

$$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Men disse er jo ikke rationelle tal, og hvis vi holder fast i vores første begreb om kontinuumet, bliver vi nød til at konkludere, at skæringspunkterne ikke findes, hvilket er i klar modstrid med hvad, vi ville mene er tilfældet. Derfor ønsker vi at udvikle vores begreb om kontinuumet yderligere, og vi udvider derfor systemet af de rationelle tal.

Hilbert foretager denne udvidelse ved hjælp af Dedekind-snit. Disse giver os en metode til at »indskyde« nye tal. Metoden beskriver Hilbert på følgende vis: vi betragter en opdeling af alle de rationelle tal i to mængder K og G, hvorom det gælder, at alle tal i K er mindre end alle tal i G. Nu er der to situationer: hvis K har et største element eller G har et mindste elementer, har vi indfanget et rationelt tal; men hvis K ikke har et største element og G intet mindste element har, så »indsættes« nu et irrationelle tal, som per definition bliver et tal, der er større end alle de tal i K og mindre end alle tal i G.

På denne måde kan vi »indskyde« alle de irrationelle tal, og vi når derved frem til systemet af de reelle tal **R**. I dette nye system kan vi selvfølgelig vise at alle de sædvanlige regneregler gælder, og vi er altså nået frem til et kontinuum, vi kan kalde *det andet kontinuum.*

Spørgsmålet er nu, om det er muligt at gå videre med indskydelse af nye tal?

Det ikke særligt overraskende svar er, at det er det!

Vi kan udvide **R** på en sådan måde, at vi f.eks. har tal som ligger mellem 0 og følgen: $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$, altså en en slags infinitesimaler. Vi opnår således et nyt talsystem af hyper-reelle tal – *et tredje kontinuum.* I det følgende vil jeg benytte en moderne metode til at foretage en sådan udvidelse, idet jeg vil konstruere en ikke-standard model for de reelle tal.

Den moderne tilgangen har den fordel, at den samtidigt kan ses som et nydeligt eksempel på de ideale elementers metode.

6.1.1 De hyper-reelle tal

I konstruktionen af vores ikke-standard model tager vi udgangspunkt i mængden af de reelle tal **R**. Lad desuden I være en indeksmængde ($I = \{0, 1, 2, \ldots\}$). Vi ser nu på mængden af alle funktioner fra indeksmængden ind i mængden af reelle tal:

$$\mathbf{R}^I = \{a | a : I \to \mathbf{R}\}$$

.

Vi vil gerne have opdelt $\mathbf{R}^I$ i ækvivalensklasser, og vi definerer derfor en ækvivalensrelation på $\mathbf{R}^I$. Dette gøres ved hjælp af et *ultrafilter.*

Hvad er et ultrafilter? Et *filter* $\mathcal{F}$ på I er en ikke-tom mængde bestående af delmængder af indeksmængden I, ($\mathcal{F} \subset P(I)$). For filteret $\mathcal{F}$ skal det gælde at:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}, \mathcal{F} \neq \emptyset$. Den tomme mængde er ikke med i filteret, og filtret er ikke tomt.

2. Hvis $A, B \in \mathcal{F}$, så er $A \cap B \in \mathcal{F}$. Dvs. $\mathcal{F}$ skal være lukket under endelige mange fællesmængde operationer.
3. Endelig skal det gælde, at hvis $A \in \mathcal{F}$ og $A \subset B \subset I$, så er $B \in \mathcal{F}$.

Af dette følger at $I \in \mathcal{F}$ for ethvert filter. Som et eksempel på et filter kan vi tage mængden af co-endelige delmængder af indeksmængden: $\mathcal{F}_0 = \{A \subset I : (I \setminus A) \text{ er endelig}\}$, som vi iøvrigt skal benytte senere. $\mathcal{F}_0$ opfylder de tre filter-egenskaber:

- da $I \in \mathcal{F}_0$, så er $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$, og da $I \setminus \emptyset = I$ er uendelig, så er $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$.
- Hvis $A, B \in \mathcal{F}_0$, så er $(I \setminus A)$ og $(I \setminus B)$ endelige, da må $(I \setminus A) \cup (I \setminus B) = I \setminus (A \cap B)$ også være endelig, og så har vi, at $A \cap B \in \mathcal{F}_0$.
- Hvis $A \in \mathcal{F}_0$ og $A \subset B \subset I$, så er $I \setminus B \subset I \setminus A$, og så må $(I \setminus B)$ ligesom $(I \setminus A)$ være endelig, og således er $B \in \mathcal{F}_0$.

Mængde af alle co-endelige delmængder af I er altså et *filter* på I.

Et filer $\mathcal{F}$ kaldes desuden et maksimalt filter eller et *ultra-filter*, hvis der ikke findes et andet filter på I, som indeholder $\mathcal{F}$ – eller mere præcist formuleret: $\mathcal{F}$ er et *ultra-filter*, når $\mathcal{F}$ er et filter på I, og hvis det for ethvert filter $\mathcal{G}$ på I gælder, at hvis $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, så er $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Selvom vi vil benytte et ultra-filter til at skabe det tredje kontinuum, er et ultra-filter ikke lige sådan til at konstruere, men vi kan heldigvis bevise følgende sætning, der sikrer eksistensen af et ultrafilter. Sætningen vises ved hjælp af *Zorns lemma* som er ækvivalent med udvalgsaksiomet[6]:

Sætning 6.1
Til ethvert filter $\mathcal{F}_0$ på en indeksmængde I eksisterer der et ultrafilter $\mathcal{U}$, for hvilket det gælder at $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{U}$.

Bevis for Sætning 6.1:
Vi lader $\mathcal{F}_0$ være et filter på I og ser herefter på mængden af de filtre på I, hvor $\mathcal{F}_0$ er en delmængde af filtret, altså $X = \{\mathcal{F} \subset P(I) : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}\}$.

Beviset for sætningen går ud på at vise, at X indeholder et største element, og at et største element for X er et ultrafilter på I, (som jo nu per definition indeholder $\mathcal{F}_0$).

Beviset benytte som nævnt *Zorns lemma*:

Lad $(X, \leq)$ være en partielt ordnet mængde, for hvilken det gælder, at enhver ikke-tom totalt ordnet mængde $K \subset X$ har en øvre grænse[7]*. Så har X et*

[6]Se f.eks. [Devlin, 1993, s. 60].
[7]$y \in X$ er en *øvre grænse* for K, hvis $x \leq y$ for alle $x \in K$.

største element[8].

Man kan temmelig let overbevise sig om at $(X, \subset)$ er en partielt ordnet mængde, og *Zorns lemma* giver os eksistensen af et største element for X, hvis enhver ikke-tom totalt ordnet delmængde $K \subset X$ har en øvre grænse.

Vores kandidat til en øvre grænse for X er mængden $\mathcal{H} = \bigcup_{\mathcal{F} \in K} \mathcal{F} = \{A : A \in \mathcal{F} | \mathcal{F} \in K\}$, hvor K er en vilkårlig totalt ordnet delmængde af X.

For at afgøre om $\mathcal{H}$ er en øvre grænse, er det nok at vise, at $\mathcal{H}$ er et filter. Hvis dette er tilfældet, så er $\mathcal{H} \in X$, (da $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{H}$), og det vil for alle $\mathcal{F} \in K$ gælde at $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, dvs. $\mathcal{H}$ er en øvre grænse for K.

Vi skal altså vise at $\mathcal{H}$ har de tre filter-egenskaber:

- $\mathcal{H}$ er ikke tom, da $I \in \mathcal{F}_0$ og $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{H}$. Og $\emptyset \notin \mathcal{H}$, da $\emptyset \notin \mathcal{F}$ for alle $\mathcal{F} \in K$.
- Den anden egenskab er også opfyldt, for hvis $A, B \in \mathcal{H}$, så eksisterer der $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in K$, hvor $A \in \mathcal{F}_1$ og $B \in \mathcal{F}_2$. Da K er totalt ordnet, følger det, at $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ eller $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$, hvilket igen betyder, at $A, B \in \mathcal{F}_1$ eller $A, B \in \mathcal{F}_2$. Da $\mathcal{F}_1$ og $\mathcal{F}_2$ er filtre, følger det, at $A \cap B \in \mathcal{F}_1$ eller $A \cap B \in \mathcal{F}_2$, og dermed er $A \cap B \in \mathcal{H}$.
- Vi mangler nu blot at vise, at hvis $A \in \mathcal{H}$ og $A \subset B \subset I$, så er $B \in \mathcal{H}$. Dette er også opfyldt, for hvis $A \in \mathcal{H}$, så er $A \in \mathcal{F}$ for et $\mathcal{F} \in K$, og da $\mathcal{F} \in K$ er et filter på I, så er $B \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, og vi har altså at $B \in \mathcal{H}$.

$\mathcal{H}$ er altså et filter og en øvre grænse for K, og vi har som en følge af *Zorns lemma* et største element i X.

Spørgsmålet er nu, om vores største element i X også er et *ultrafilter*?

Vi lader $\mathcal{U}$ være et største element i X. Da $\mathcal{U} \in X$ er $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{U}$. Lad nu $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ filter på I), så er $\mathcal{G} \in X$, og da $\mathcal{U}$ er et største element i X, så følger det, at $\mathcal{G} = \mathcal{U}$.

Således er $\mathcal{U}$ et *ultrafilter*, for hvilket det gælder at $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{U}$. □

Vi er nu færdige med vores forberedelser og vender tilbage til konstruktionen af vores ikke-standard model.

For fremtiden vil $\mathcal{U}$ være det til $\mathcal{F}_0 = \{A \subset I | I \setminus A \text{ er endelig}\}$ tilhørende ultrafilter.

[8] $m \in X$ er ***et største element***, hvis det for alle $x \in X$ gælder at $m \leq x \Rightarrow m = x$.

Vi vil nu benytte $\mathcal{U}$ til at skabe en ækvivalensrelation på $\mathbf{R}^I$. For $a, b \in \mathbf{R}^I$, siger vi at:

$$a \sim_{\mathcal{U}} b \Leftrightarrow \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}.$$

»Intuitivt« kan dette forstås således, at relationen siger, at de to funktion stemmer overens »*næsten overalt*«.

At $\sim_{\mathcal{U}}$ er en ækvivalensrelation[9] kan tjekkes relativt let, og vi undlader således at vise det her, men pointen er, at da $\sim_{\mathcal{U}}$ er en ækvivalensrelation, så opdeles $\mathbf{R}^I$ i parvist disjunkte ækvivalensklasser.

For alle $\alpha \in \mathbf{R}^I$ tilknytter vi ækvivalensklassen:

$$*\alpha = \{\beta \in \mathbf{R}^I | \beta \sim_{\mathcal{U}} \alpha\}.$$

Vores ikke-standard model af de reelle tal $*R$ er så mængde af disse ækvivalensklasser:

$$*R = \{*a : a \in \mathbf{R}^I\}.$$

Træder vi et skridt tilbage, ses det at ethvert $a \in \mathbf{R}$ har en naturlig indlejring i $\mathbf{R}^I$ – nemlig den konstante afbildning defineret ved $a(i) \equiv a$ for alle $i \in I$.

$*R$ indeholder altså en kopi af $\mathbf{R}$ nemlig ækvivalensklasserne til de konstante funktioner, og det er således naturligt at sige at $\mathbf{R} := \{*a : a(i) = a, \text{ for alle } i \in I\}$.

Men $*R$ indeholder, som vi straks skal se, også andre tal end de oprindelige reelle tal!

6.1.2 Et nærmere blik på $*R$

Vi har altså nu en mængde af tal $*R$, som på en naturlig måde kan siges at indeholde de reelle tal. På denne kan vi definere en ordensrelation samt en additive og en multiplikation operation.

Vi definerer naturligt nok $*a =_{\mathcal{U}} *b \Leftrightarrow \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$ og $*a \leq_{\mathcal{U}} *b \Leftrightarrow \{i \in I : a(i) \leq b(i)\} \in \mathcal{U}$, og for $a, b \in \mathbf{R}^I$ siger vi at $a(i) = b(i)$ *næste overalt*, når $\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$.

[9] En relation er en ækvivalensrelation på en mængde A, hvis den er: refleksiv ($a \sim a$), symmetriske ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$) og transitiv ($a \sim b$ *og* $b \sim c \Rightarrow a \sim c$) på A.

For $a, b \in \mathbf{R}^I$ definerer vi $*a + *b = *(a+b)$ og $*a \cdot *b = *(a \cdot b)$ udfra addition og multiplikation på $\mathbf{R}^I$. Man kan relativt let vise, at $*R$ med disse relationer og operationer er et ordnet legeme.

Nu kan vi vise, at $*\mathbf{R}$ udover en kopi af de reelle tal også indeholder infinitesimaler og »uendelige« tal. Vi siger at:

1. $|*a|$[10] er *endelig*, hvis er eksisterer et n således at $|*a| \leq n$, hvor n er standardkopien af et $n \in \mathbf{N}$.

2. $|*a|$ er *uendelig*, hvis $|*a| \geq n$ for alle standardkopier af $n \in \mathbf{N}$.

3. $|*a|$ er *infinitesimal*, hvis $|*a| \leq 1/n$, for alle standardkopier af $n \in \mathbf{N}$.

Ved denne definition er standardkopien af 0 infinitesimal, men der findes også andre infinitesimaler i $*R$.

Ser vi f.eks. på funktionen $\alpha(i) = 1/i$ med den tilhørende ækvivalensklasse $*\alpha$, så er det klart at $*\alpha \neq *0$. For et fast vilkårligt $n \in \mathbf{N}$ gælder det desuden at $|\alpha(i)| \leq 1/n$ for endeligt mange $i \in I$.

Da vores ultrafilter $\mathcal{U}$ indeholder alle co-endelige delmængder af I, så er $|\alpha(i)| \leq 1/n$ *næsten overalt*, og vi har altså at $|*\alpha| \leq_{\mathcal{U}} 1/n$ for alle $n \in \mathbf{N}$.

Eksistensen af infinitesimaler har dog den konsekvens, at $*\mathbf{R}$ er et ikke-archimedisk legeme. Hvis $*\mathbf{R}$ var et archimedisk legeme, ville der for alle $a, b \in *\mathbf{R} : a, b \geq 0$, eksisterer et $n \in \mathbf{N}$, således at $na > b$. Men for det føromtalte $*\alpha$ har vi at: for alle $n \in \mathbf{N}$ gælder, det at $|\alpha(i)| < {}^{b}/_{n}$ for endeligt mange $i \in I$.

Nu er det sådan, at vi ifølge Hilbert helst ikke vil opgive kontinuumets archimediske egenskab, for hvis vi gør dette kan »afstanden« mellem 0 og infinitesimalerne ikke på sædvanligvis sammenlignes med afstanden fra 0 til et af vores gamle reelle tal. Så hvis vi tager systemet af de hyper-reelle tal som vores kontinuum, må vi opgive at sammenligne de forskellige afstande i kontinuumet med hinanden. Men, skriver Hilbert[11], fra vores omgang med verden har vi jo almindeligvis den erfaring, at vi kan sammenligne alle afstande med hinanden, og derfor bliver vi ved $\mathbf{R}$, som vores matematiske begreb om kontinuumet, på trods af at det nye talsystem er en interessant matematisk udvidelse. Hilbert skriver om dette:

[10] Vi definerer $|*a| = *a$ for $*a \geq 0$ og $|*a| = -*a$ for $*a < 0$.
[11] [Hilbert, 1919-20, s. 10]

> So sehen wir [...], wie die mathematische Begriffsbildung durch die Anschauung angeregt und von der Erfahrung geleitet wird.[12]

Dannelsen af matematiske begreber tager altså sit udgangspunkt vores anskuelse, men bliver siden hen i høj grad motiveret og styret af vores erfaringer og generelle betragtninger. Der findes således eksterne faktorer som bidrager til udviklingen af matematikken. Dette vender vi tilbage til senere, men først skal vi se på en attraktiv egenskab ved vores ikke-standard model.

6.1.3 Det frugtbare *transfer*-princip

Selvom $*R$ ikke er et archimedisk legeme, har det dog andre attraktive egenskaber, som ikke var kendt af Hilbert, idet de først blev formuleret i en stringent form i 50'erne og 60'erne, som resultat af f.eks. Abraham Robinsons arbejder[13].

Man kan nemlig vise et teorem kaldet Łoś' teorem[14], og som en konsekvens af dette, har vi følgende *transfer*-princip:

$$*\mathbf{R} \models *\alpha \Leftrightarrow \mathbf{R} \models \alpha,$$

hvor α er en formel i et sprog tilknyttet $\mathbf{R}$-universet, og $*\alpha$ er den tilsvarende formel i et sprog til knyttet til $*\mathbf{R}$-universet. Princippet siger, at en formel α er sand i standard universet, hvis og kun hvis $*\alpha$ er sand i ikke-standard universet.

Tager vi eksempelvis følgende sande udtryk: $\forall a, b \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N} : (|na| > |b|)$, så giver *transfer*-princippet os: $\forall a, b \in *R\ \exists n \in *N : (|na| > |b|)$[15].

Hvis vi ønsker at vise α i $\mathbf{R}$-universet, kan vi altså istedet vise $*\alpha$ i $*R$-universet, hvilket kan være lettere i visse tilfælde. Et lille eksempel på hvordan $*R$ kan være lettere at operere i er vel på sin plads.

Normalt definerer vi en følges grænse på denne ikke særligt elegante måde:

Følgen s_n har grænsen L ($\lim_{n\to\infty}(s_n) = L$), hvis der til hvert positivt ε eksisterer et positivt tal n_0, således at $|s_n - L| < \varepsilon$ for alle $n \geq n_0$.

[12] [Hilbert, 1919-20, s. 11]

[13] Se evt. [Robinson, 1974].

[14] Resultatet gælder dog kun for første ordens formler, hvilket begrænser nytten af resultatet. Derfor introducerer man en såkaldt superstruktur på $\mathbf{R}$, som man så efterfølgende skaber en ikke-standard model af, se Appendiks B.

[15] Man kan således sige, at $*R$ er $*$-archimedisk.

Dette er en noget kompliceret definition. Men ved hjælp af vores udvidede system har vi at[16]:

Sætning 6.2

$$\lim_{n\to\infty}(s_n) = L \Leftrightarrow s_n =_{\mathcal{U}} L \textit{ for alle uendelige } n \in *N.$$

Beviset for dette går på følgende måde:

Bevis

»⇒«:

Lad s_n være en følge med grænsen L, og vælg et positivt $\varepsilon \in R$, så eksisterer der et $n_0 \in \mathbf{N}$ således at: $\forall n \in \mathbf{N}(n > n_0 \to |s_n - L| < \varepsilon)$.

Ved *transfer*-princippet får vi, at for ethvert $n \in *N : (n > n_0)$ gælder det at $|s_n - L| < \varepsilon$. Da n_0 er *endelig*, gælder denne ulighed for alle $n \in *N \setminus \mathbf{N}$. Men da ε var et vilkårligt valgt positivt reelt tal, må vi have at $|s_n - L| =_{\mathcal{U}} 0$, hvilket betyder at $s_n =_{\mathcal{U}} L$ for alle *uendelige* $n \in *N$.

»⇐«:

Vi forudsætter at $s_n =_{\mathcal{U}} L$ for alle uendelige heltal n, og herefter vælger vi et positivt reelt tal ε. Da $s_n =_{\mathcal{U}} L$ for alle uendelige n så må $|s_n - L| < \varepsilon$ for alle *uendelige* n.

Specielt har vi at $(\exists n_0 \in *N)(\forall n \in *N)(n > n_0 \to |s_n - L| < \epsilon)$, og ved *transfer*-princippet får vi den sædvanlige definition af $\lim_{n\to\infty} s_n = L$. □

Det er værd at bemærke, at det der siges i Sætning 6.2, om hvad det betyder for en følge at have en grænse, minder en del om hvordan man vel i første omgang tænker over dette – nemlig at følgen antager en fast værdi »i det uendelige«, hvilket også er hvad der ligger bag skrivemåden $\lim_{n\to\infty} s_n = L$.

Det, at $*R$ kan være lettere at operer i, giver sammen med *transfer*-princippet systemet af de hyper-reelle tal en – i det mindste potentielt set – større frugtbarhed med hensyn til løsningen af matematiske problemer.

Træder vi et skridt tilbage, kan vi se hver af de udvidelser, vi har foretaget som en udnyttelse af de ideale elementers metode, idet nye elementer tilføjes for at opnå nye attraktive egenskaber, og for at »fuldstændiggøre« det forrige system.

Vi ser altså en fremadskridende udvikling, hvor talsystemerne udvides ét efter ét, og gennem disse udvidelser uddybes vores forståelse af den oprindelige problemstillingen.

[16]Vi skriver i det følgende s_n for både s_n og $*s(n)$, også selv om denne løber over $*N$.

6.2 Dannelsen af matematikkens begreber

Hvad er det, Hilbert vil fortælle os om udviklingen af matematiske begreber?

Jo, matematikken udvikles på den ene side ved en *progressiv* udvidelse af vores matematiske systemer til stadigt mere rige systemer, men på den anden side udvikles matematikken også ved en *regressiv* fordybelse, som har til formål at opnå præcision og en dybere forståelse af de udviklede systemers grundlag.

I eksemplet med kontinuumet ser vi matematikkens dobbelte bevægelse ret tydeligt. Det progressive aspekt ligger konstruktionen af matematiske strukturer og undersøgelsen af deres sammenhænge, og det regressive ligger i undersøger af i hvor høj grad de stemmer overens med det vi ønsker at modellere, nemlig vores »naive« teori om kontinuumet.

Endnu mere end dette viser eksemplet at udviklingen af matematikkens begreber *ikke* er vilkårlig, men at den derimod er styret af både interne og eksterne faktorer. Dette er et svar til både logicisternes tese om at al matematik kan reduceres til logik, og til de af Hilbert kritikere som mente, at hans position reducerer matematikken til et »tomt spil«.

I eksemplet med kontinuumet så vi hvordan eksterne faktorer har en betydelige indflydelse på dannelsen af det matematiske begreb. Vi ønsker ikke at opgive den archimediske egenskab i kontinuumet, på trods af at de hyperreelle tal egentlig er en ganske »naturlig« matematisk udvidelse.

Men, påpeger Hilbert, der findes også indre faktorer, som er styrende for den matematiske begrebsdannelse. Disse beskriver han, som vi tidligere har nævnt, overordnet som en i matematikken *iboende tendens til systematik*[17].

I *Natur und mathematisches Erkennen* uddyber han kort, hvad han mener med dette, idet han skriver, at tendensen til systematik er resultatet af i det mindste to bestræbelser. På den ene side bliver vi drevet mod systematik, fordi vi bevidst stræber efter hvad, han kalder »logischer Geschlossenheit«, og på den anden siden drives vi mod systematik, da systematik synes at være en forudsætning for, at vi kan løse visse matematiske problemer.

Når Hilbert fremhæver matematiske problemer, som en indre faktor der påvirker den matematiske begrebsdannelse, hentyder han til, at matematiske problemer synes at »kræve« bestemte begrebsdannelser og bevismetoder for at kunne løses, som han skriver:

[17][Hilbert, 1919-20, s. 11-12]

> Es bilden also die verschiedenen vorliegenden mathematischen Disziplinen notwendige Glieder im Aufbau einer systematischen Gedankenentwicklung, welche von einfachen, naturgemäß sich bietenden Fragen anhebend, auf einem durch den Zwang innerer Gründe im wesentlichen vorgezeichneten Wege fortschreitet. Von Willkür ist hier keine Rede.[18]

Set i dette lys, vedbliver systemet af de hyper-reelle tal med at være interessant, idet det muligvis er »frugtbart« med hensyn til løsningen af matematiske problemer.

Matematikkens stræben efter »logischer Geschlossenheit« findes også i dannelsen af kontinuumsbegrebet, idet vi gerne vil have et »fuldstændigt« system[19]. Et system af objekter, som står i bestemte relationer til hinanden, er »fuldstændigt« med hensyn til bestemte centrale egenskaber, såfremt en udvidelse af systemet ikke er mulig uden tab af en eller flere af disse egenskaber.

Hver af de udvidelser vi foretog kan ses som værende et forsøg på at på at opnå en sådan »afsluttethed«. *Det første kontinuum* er ikke »fuldstændigt«, da det lader sig udvide uden tab af dets centrale egenskaber, hvorimod *det andet kontinuum* er fuldstændigt, da det ikke lader sig udvide uden at den archimediske egenskab går tabt, og *det andet kontinuum* har dermed en attraktiv »afsluttethed«.

Nu er det klart, at hvis vi ikke medtager den archimediske egenskab som en af de centrale egenskaber, så vil det andet kontinuum ikke være fuldstændigt, idet en udvidelse så ville være mulig uden tab af centrale egenskaber.

Man kunne herefter tænke sig, at vi efter en ny udvidelse ville komme til et andet system, der ikke kan udvides yderligere uden tab af dette begrænsede sæt af centrale egenskaber. Dette er dog ikke tilfældet: ethvert system S hvori de almindelige regneregler gælder kan udvides på en sådan måde, at vi opnår nyt system som indeholder S som et delsystem, og hvori de almindelig regneregler gælder[20]. Så hvis vi opgiver den archimediske egenskab som en central egenskab, kan vi ifølge Hilbert ikke længere snakke om »fuldstændighed«, hvilket for Hilbert er et »internt« argument for at holde fast i den archimediske egenskab som en central egenskab, og altså et argument

[18] [Hilbert, 1919-20, s. 14][Glieder = led, lem].

[19] Fuldstændighed i denne betydning må ikke forveksles med det bevisteoretiske begreb om fuldstændighed.

[20] [Hilbert, 1919-20, s. 13]

for at vi bliver ved *det andet kontinuum* som vores matematiske begreb om det sammenhængende.

Lad os vende tilbage til det spørgsmål, vi stillede i slutningen af sidste kapitel. Hvordan skal vi forstå matematikkens ideale elementer? Er de blot meningsløse, men effektive syntaktiske værktøjer til at bevise indholdsmæssige udsagn? Eller er de meningsfulde, men »transcendente« og dermed problematiske begreber om ideale størrelser som vi benytter, fordi vi søger efter en større systematiske enhed?

Hvis man følger en streng instrumentalistisk tolkning, så kan man sige at Hilbert forsøgte at eliminere »det uendelige« fra matematikken. Dag Prawitz (1972) formulerer det på følgende måde:

> [...] Hilbert formulated his program roughly af follows: The goal of proof theory is to eliminate the infinite from mathematics.[21]
>
> The program was certainly grand and if carried out, it would in a clear sense have achieved a reduction of mathematics to what Hilbert called finitary mathematics; mathematics could be understood constructively as being about real propositions with ideal propositions functioning as tools for deriving results about real propositions.[22]

Til den sådan tolkning er der det at sige, at det godt nok er rigtigt, at Hilbert rent teknisk i sine udkast til konsistensbeviser forsøgte at eliminere de transfinite ε_x-operatorer fra beviser af indholdsmæssige udsagn, men dette betyder ikke nødvendigvis, at Hilbert argumenterede for en streng instrumentalistisk tolkning af matematikkens ideale elementer. Tværtimod synes Hilbert, når vi tager hans redegørelse for dannelsen af matematikkens begreber med i betragtning at sige noget andet, idet kontinuumsbegrebet ikke kun er indført for at skabe en større epistemisk effektivt og frugtbarhed med hensyn til de »indholdsmæssige« udsagn.

Dette bakkes op af følgende citat fra Bernays (1930), hvori han kommenterer den samtidige filosof Vaihingers instrumentalisme:

> Vaihingers Betrachtung ist ausschießlich auf die wissenschaftliche Heuristik eingestellt. Er kennt nur »Fiktionen« die als bloß vorübergehende Hilfmittel des Denkens sich Gewalt antut und deren widerspruchsvoller Charakter (wenn es um »echte Fiktionen«

[21] [Prawitz, 1972, s. 127]
[22] [Prawitz, 1972, s. 129]

> handelt) nur durch geschickte Kompensation der Widersprüche unschädlich gemacht wird.
>
> Die Ideebildungen in unserem Sinne sind bleibendes Eigentum des Geistes. Sie sind ausgezeichnete Formen der systematischen Extrapolation und der idealisierenden Annäherung an das Tätsächliche. Sie sind auch keineswegs etwas Willkürliches noch auch dem Denken Aufgezwungenes; im Gegenteil: sie bilden eine Welt, in der sich unser Denken heimlich fühlt und aus welcher der Menschengeist, der sich in sie versenkt, Befriedigung und Freude schöpft.[23]

Det Bernays siger her er, at idéer – som eksempelvis kontinuumsbegrebet – ikke blot er nyttige værktøjer, men at de derimod er ganske naturlige *systematiske ekstrapolationer* eller *idealiserede tilnærmelser* af det, som er givet for os. Kontinuumsbegrebet er altså meningsfuldt på trods af, at det ikke refererer til et objekt, som vi har tilgang til.

Vi går således udover det sikre finitistiske grundlag for at opnå forskellige attraktive egenskaber:

- *effektivitet* – vi vil gerne have kortere beviser.
- *frugtbarhed* – ideale konstruktioner kan hjælpe med til at løse gamle problemer.
- vi søger efter *generelle lovmæssigheder* og *fuldstændige systemer.*
- Herudover er de fysiske teorier, som vi forsøger at give et matematisk grundlag, *forsimplede idealiseringer*, og matematikken selv benytter sig af *systematiske ekstrapolationer*, som tvinger os udover det finitistiske udgangspunkt.

Alt i alt synes den mest rimelige tolkning af Hilbert og Bernays at være, at de ideale elementer i høj grad tilføjes for at opnå en større *systematik* i vor erkendelse. Men der er en pris vi må betale, vi kan kun gå frem *som om* de ideale elementer eksisterer, sålænge dette ikke bringer os i modstrid med den finitistiske erkendelse.

Matematikkens mål er dermed ikke blot at opnå ny erkendelse om de finitistiske objekter, men det er også at skabe en systematik i denne erkendelse.

[23] [Bernays, 1930, s. 60]

Således bør vi også acceptere ideale elementer som ikke har noget gunstig indvirkning på vores erkendelse af finitistiske objekter, såfremt de bidrager til en yderligere systematisering af den eksisterende matematik. Selvom hverken Bernays eller Hilbert skriver det direkte, synes de at give Kant ret, når han skriver, at vi stræber efter et ideal, vi har om *erkendelsens systematiske enhed.*

Vi står dog stadigvæk tilbage med spørgsmålet om, hvilken grad af nødvendighed brugen af de ideale elementers metode kan tilskrives?

Som vi tidligere har set, mener Hilbert og Bernays, at menneskets natur er således, at ikke ti vilde heste kan forhindre os i at gå udover den finitistiske kerne. Ser vi igen på slutningen af citatet fra Bernays (1930), svinger den ellers altid saglige Bernays sig op i et højere retoriske rit for at understrege ideernes tiltrækningskraft for os mennesker:

> Sie sind auch keineswegs etwas Willkürliches noch auch dem Denken Aufgezwungenes; im Gegenteil: sie bilden eine Welt, in der sich unser Denken heimlich fühlt und aus welcher der Menschengeist, der sich in sie versenkt, Befriedigung und Freude schöpft.[24]

Ideerne giver altså en befrielse og glæde, og kan dermed tilskrives en vis psykologisk nødvendighed som ikke er påtvunget men derimod er »naturlig« for os. Dermed kunne man med god ret kritisere Hilbert og Bernays for at tillade det problematiske af ren bekvemmelighed, og at det dermed i sidste ende er et spørgsmål om personlig »smag«, hvorvidt vi skal tillade de transfinite begreber og slutninger i matematikken. Men måske kan der er også gives andre begrundelser, som kan give de ideale elementers metode en i hvert fald »pragmatisk« nødvendighed.

Vender vi tilbage til Kant, skrev han, som vi tidligere har set[25], at det er nødvendigt at antage fornuftens systematisering som et transcendentalt princip. Han gav to argumenter for dette. Det ene er at systematisering som et metodologisk princip kun giver mening, hvis vi antager at det som et transcendentalt princip. Set i lyst af en streng instrumentel tolkning er det spørgsmålet, om dette er rigtigt, for som vi har set kan systematisering være frugtbar i forhold til de indholdsmæssige udsagn, og man kan således sige at systematisering giver god mening som et metodologisk princip.

Hans andet argument er, at vi uden systematisering ikke ville have noget systematiske forstandsbrug. Så kryptisk som dette lyder, kan vi måske heri

[24][Bernays, 1930, s. 60]
[25]Se side 54.

finde kimen til et andet pragmatisk argument for nødvendigheden af ideer i matematikken, som bl.a. tager udgangspunkt i den rettethed ideerne giver vores undersøgelser.

For hvordan ville matematikken og muligheden af matematisk fremskridt se ud, hvis vi ikke benyttede os af idéer?

Den simpelhed, en systematik opnået ved tilføjelsen af ideale elementer giver de matematiske beviser, er måske ikke kun en bekvemmelighed, vi strengt taget godt kan undvære. For hvis vi i videst mulig omfang undgår at benytte de ideale elementer, vil kompleksiteten af en stor del af vores beviser stige stærkt.

Men hvad gør vi, hvis kun én eller to matematikere kan verificere disse komplekse beviser? Er dette nok til at man vil accepterer disse beviser? Dette kunne være et argument for nødvendigheden af at benyttet antagelser, som går udover det, som er fastlagt i Hilberts finitisme.

Herudover må man også tage den rettethed som ideér giver vores undersøgelser med i betragtning. Hvordan ville matematik være uden idealer at stræbe mod? For hvor langt ville vi komme, hvis vi ikke havde disse fokuspunkter til at regulere vores videre undersøgelser, og vi istedet »famlede rundt i blinde«?

Kapitel 7

Diskussion

Generelt set har der været en tendens til at fokusere på det, Hilbert skriver om den tekniske side af hans program. Dette er sådan set forståeligt nok, da Hilberts artikler generelt fokuserer på disse disse tekniske aspekter, men det har desværre givet et forvrænget billede af Hilberts overordnede filosofiske position.

Det, jeg har forsøgt i denne rapport, er at give et mere fuldstændigt billede af Hilberts filosofiske position.

Hilbert var i sit hjerte først og fremmest matematiker, og hans ambition var at sikre den klassiske matematiks konsistens for dermed at kunne forsvare matematikerens frihed imod intuitionismens »Verbotsdiktatur«. I 1930 citerer Hilbert Georg Cantor for følgende:

> [...] das Wesen der Mathematik besteht in ihrer Freiheit.[1]

Dette er et udsagn, som Hilbert var enig i, hvilket ikke er overraskende set i lyset af de resultater, han selv havde opnået i løbet af sin karriere, og Hilberts program kan således siges at være et forsvar for den kreative frihed i matematikken.

7.1 Sikkerheden?

Et af omdrejningspunkterne for enhver matematikfilosofi må være at kunne redegøre for sikkerheden af de matematiske domme, det være sig positivt eller negativt, og dette gælder selvfølgelig også for Hilberts position.

[1][Hilbert, 1930b, s. 9]

Hos Hilbert forudsættes det som en mulighedsbetingelse for al videnskabelig erkendelse, at vi kan erkende, om et token er af den ene eller den anden type, og at vi kan foretage en elementære iteration. Dette giver os sikker viden om eksempelvis de naturlige tal og deres elementære operationer, og vi kan konstruere simple geometriske figurer, så som linier, trekanter, cirkler, grafer osv.

Antagelsen, om at vi kan have sikker viden, kan, som vi har antydet, problematiseres af skeptikeren, for hvordan kan vi være sikre på, at vi der ikke sidder en ond dæmon og driller os?

Det er et af filosofiens største problemer at forsvarer sig mod en sådan kritik, og som filosofihistorien vidner om, er det utroligt svært at argumentere for hvordan det kan være, at vi besidder en kompetance som eksempelvis »die finite Einstellung«, der giver sikker viden.

Et skridt på vejen kunne være at tage udgangspunkt i det faktum, at vi behersker et sprog og kan bruge sproget til at kommunikere med hinanden. En sådan sproglig kompetance synes nemlig at forudsætte, at vi kan skelne mellem type og token ganske uproblematisk, og at det derfor ikke er urimeligt at forudsætte en stærk stabilitet af vores finitistiske viden.

Når dette er sagt, skal det samtidigt også bemærkes, at det ikke er let at afgøre, præcist hvor grænsen mellem det problematiske og det uproblematiske går, og på dette område er der altså behov for nærmere undersøgelser.

Vender vi tilbage til Hilbert, så siger han, at matematikeren udover de sikre finitistiske objekter også benytter sig også af problematiske ideale objekter og konstruktioner, som vi ikke har tilgang til, men som tilføjes for at opnå nogle attraktive egenskaber.

Disse ideale tilføjelser fungerer som ideer i Kants forstand: de er ikke finitistisk meningsfulde begreber, men dette betyder ikke at de er uden mening, idet de er tilføjet med et formål. Formålet kan være at opnå systematik, orden, enhed, »fuldstændighed«, en øget generalitet af de lovmæssigheder som gælder i systemet, en større frugtbarhed, (dvs. at tilføjelsen genererer nye beviser), eller en større effektivitet, dvs. kortere og mere overskuelige beviser.

Som vi har set, er de »transfinite« begreber ikke blot produktet af overvejelser omkring effektivitet og frugtbarhed i forhold til indholdsmæssige udsagn, idet de ofte er fuldstændiggørelser eller systematiske ekstrapolationer som tillader en ny systematisk enhed at opstå. Ifølge Hilbert stræber altså vi overordnet efter erkendelsens systematisk enhed, men idealet om matematikkens systematiske enhed har dog kun en regulativ funktion, idet det giver en retning på vores undersøgelser. Vi kan går frem *som om* en sådan systematisk enhed eksisterer, sålænge dette ikke bringer os i modstrid med over finitistiske erkendelse.

De nye transfinite antagelser er altså ikke vilkårlige, og de må vurderes udfra deres effektivitet, frugtbarhed, deres evnes til at skabe systematik – og selvfølgelig deres konsistens! For tilføjelserne *er* problematiske, og vi må forsøge at sikre at tilføjelserne ikke er i modstrid med vores finitistiske viden. Det er her, at formaliseringen af de matematiske systemer kommer ind som et middel til at opnå en sådan sikkerhed.

Hilberts idé var, at vi »programmatisk« kan opfatte en matematisk teori som et spil med tegn efter bestemte regler, og at dette muliggører et konsistensbevis udført med uproblematiske finitistiske midler.

Det sidste viste sig dog desværre ikke at være tilfældet...

7.2 Hilberts program efter Gödel

Hovedformålet med Hilberts program var at retfærdiggøre bruge af »ideal« tænkning i matematikken, eller for at være mere præcis, at vise den ideale tænknings legitimitet, ved at vise dens modsigelsesfrihed. Det er netop dette mål for bevisteorien som Kurt Gödels (1907-1978) ufuldstændighedssætninger fra 1931 sætter et stort spørgsmålstegn ved![2]

Gödels ufuldstændighedssætninger gælder for ethvert formelt system T, som indeholder nok aritmetik til at foretage en såkaldt Gödel-nummerering. En Gödel-nummerering foretages med primitive rekursive funktioner, og således gælder ufuldstændighedssætningerne for et hver formelt system T som indeholder den primitive rekursive aritmetik (PRA), der som tidligere nævnt er den naturlige formalisering af Hilberts finitisme. Ved hjælp af Gödelnummereringen kan vi give ethvert symbol, enhver følge af symboler og dermed ethvert bevis i det formelle aksiomatiske system T et entydigt bestemt Gödel-tal, og vi kan herudover konstruerer en bevis-relation, $Bev_T(x, y)$, der siger at x er et bevis i T for formlen y. På denne genialt simple måde skabte Gödel et værktøj til at undersøge et formelt system T's fuldstændighed[3] og konsistens.

Resultatet af de efterfølgende undersøgelser var desværre nedslående; Gödels første ufuldstændighedssætning fortæller os nemlig, at hvis T er konsistent,

[2]Det følgende bygger på [Mostowski, 1966, s. 18-26] og [Feferman, 1998].

[3]Et formelt aksiomatisk system siges at være fuldstændig, hvis det for alle formler α gælder at α eller $\neg\alpha$ er beviselig i T.

så findes der en sætning g i T, således at hverken g eller $\neg g$ kan bevises i T. Vi kan altså ikke, som Hilbert ellers forudsatte, skabe en fuldstændig formalisering af en bare rimelige kompliceret matematisk teori.

Gödels anden ufuldstændighedssætning er endnu mere ødelæggende for Hilberts program, idet den fortæller os, at vi kan formulere en sætning i T, som vi vælger at kalde Kon_T[4], som udtrykker at T's konsistens, og om hvilken det samtidigt kan vises, at Kon_T ikke kan bevises i T.

Således gælder det for ethvert »idealt« system I, som indeholder PRA, at dets konsistens ikke kan vises i systemet selv og således heller ikke udelukkende ved hjælp af PRA. Derfor kan Hilberts endelige retfærdiggørelse af »ideal« tænkning ikke gennemføres i dens oprindelige form.

Hermed umuliggøres Hilberts oprindelige program, men dette betyder dog ikke at bevisteorien som en matematisk disciplin er død.

En måde at omgå Gödels anden ufuldstændighedssætning på er at argumentere for, at der findes typer af finitistisk tænkning som ikke kan formaliseres indenfor det system, hvis konsistens man forsøger at vise, men som alligevel kan betegnes som sikre. Sådanne uproblematiske midler vil kunne gøre det muligt at bevise konsistensen af det pågældende systemet.

Denne mulighed synes oplagt, da den første ufuldstændighedssætning synes at medføre, at Hilberts finitisme ikke kan indfanges af ét enkelt formelt system.

Udfra denne tankegang beviste Gentzen (1909-1945) i 1936 konsistensen af den formaliserede Peano-aritmetik (PA), ved at benytte en velordning af ordinaltallene op til ε_0[5]. Problemet ligger naturligvis i at argumentere for, at de midler, Gentzen brugte til at vise velordningen, er uproblematiske og sikre, hvilket er en filosofisk opgave. Hvorvidt man kan argumenterer for, at det Gentzen gjorde ligger indenfor Hilberts finitisme, vil jeg dog ikke gå ind på her[6].

Herudover bør man også nævne Stephen Simpson og Harvey Friedmans undersøgelser af, hvor langt man kan komme med en konservativ udvidelse af PRA, et projekt eller program Simpson kalder *reversed mathematics*[7]. Simpson opstiller et system WKL_0[8] som adskiller sig fra den almindelige analyse

[4]»Intuitivt« siger Kon_T, at der ikke findes noget formelt bevis i T for formlen $0 = 1$.

[5]$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} \}$ ω gange.

[6]Se evt. [Andersen et al., 1996].

[7]Se [Simpson, 1988].

[8]WKL står for *Weak König's Lemma*, som er en temmelig kraftig »ikke-konstruktiv« antagelse.

på to punkter: induktion er kun tilladt over formler af formen $\exists x\alpha$, hvor α ikke indeholder ubegrænsede kvantorer, og $\exists$ er en 1. ordens kvantor.

For WKL_0 viser Simpson at en bestemt mængde formler i WKL_0 er konservativ over PRA. Pointen med dette er, at vi kan faktisk lave en del matematik indenfor WKL_0. Man kan altså retfærdiggøre en del af den klassiske matematik, og Simpson og Friedman har således opnået en delvis realisering af Hilberts program.

Herudover er bevisteoretiske teknikker blevet brugt til at vise mange andre interessante ting. Eksempelvis har Harvey Friedman vist der findes visse temmelig »elementære« sætninger om grafer og funktioner, som ikke kan bevises i ZFC-mængdelæren, med mindre man også antager et aksiom som hævder eksistensen af visse såkaldte *large cardinals*[9].

Men på trods af disse efterfølgende bestræbelser, kan vi altså ikke opnå den sikkerhed Hilbert stræbte efter, og hvis vi vil forbeholde os retten til benytte os af den højere matematik, må vi efter alt at dømme acceptere en vis grad af fejlbarlighed i matematikken.

Hvad betyder dette for så for Hilberts *filosofiske* position?

Jo, det er ikke sådan at ufuldstændighedsresultaterne tvinger os til at opgive positionen, men den hilbertske position står overfor et ubehageligt valg: vi kan vælge at begrænse os til at benytte konservative udvidelser af PRA og dermed bevare matematikkens sikkerhed, eller vi kan acceptere at vores matematiske viden besidder et vist mål af fallibilitet, for dermed at bevare det transfinite's attraktive egenskaber.

Ånden i Hilberts position er at vælge den sidste mulighed, og som vi skitserede i slutningen af sidste kapitel kan der give udmærkede argumenter for, at dette er det pragmatisk set bedste valg, hvis vi ønsker en fortsat udvikling af matematikken.

7.3 Hilbert og »the mathematical experience«

En tilfredsstillende matematikfilosofi må kunne redegøre for den matematiske praksis og give et realistisk billede af den. En matematikfilosofi må altså kunne fortælle matematikeren noget væsentligt om den videnskab, han er engageret i, og den må kunne fortælle matematikeren noget, om hvad det er han gør, når han laver matematik.

[9] Se evt. [Friedman, 1998].

Hilberts position bør altså kunne redegøre for væsentlige aspekter af den oplevelse matematikeren har – det som på engelsk kaldes »the mathematical experience«.

Jeg vil her fremdrage to aspekter, hvortil Hilberts position muligvis kan bidrage med en sådan afklaring. Spørgsmålet er altså, om Hilberts bud på hvad der karakteriserer matematisk tænkning svarer til den oplevelse matematikeren har, når han laver matematik?

Først og fremmest er det en central pointe i Hilberts filosofi, at eksempelvis aktuelt uendelige mængder ikke er noget, som vi har en erkendelsesmæssig tilgang til.

En del matematikere vil sandsynligvis have det lidt svært med denne form for anti-realisme med hensyn til aktuelt uendelige objekter, idet de har en oplevelse af, at de i hvert fald delvist kan danne sig billeder af sådanne objekter – en oplevelse der svarer til en form for realisme[10].

Hvordan kan dette passes sammen med en hilbertsk position? Bernays giver faktisk et bud på dette:

> Unendliche Mannigfaltigkeiten sind uns demnach nur durch das *Denken* zugänglich. Dieses Denken ist zwar auch eine Art des Vorstellens, aber es wird dadurch nichts die Mannigfaltigkeit als Gegenstand vorgestellt, sondern es werden Bedingungen vorgestellt, denen eine Mannigfaltigkeit genügt (bzw. zu genügen hat).[11]

Det, Bernays skriver, er at aktuelt uendelige objekter ikke »forestilles« direkte, men at vi kan danne os en forestilling om dem gennem de betingelser eller regler, som de opfylder.

Dette minder ikke overraskende om hvad Kant skriver, når han skal forklare, hvad der skal til for at skabe en forbindelse mellem fornuft og forstand – nemlig en »regel« vi kan følge.

Et andet aspekt af »den matematiske oplevelse« som Hilberts position måske kan kaste lys over er oplevelsen af skønhed i matematikken.

De fleste matematikere er enige om, at der findes smukke matematiske teoremer og beviser, selvom de måske ikke altid er helt enige om, hvilke der er de smukkeste. I foråret 1988 blev der gennem tidsskriftet *Mathematical Intelligencer* gennemført en lille undersøgelse af hvilke teoremer tidsskriftets læsere

[10] Se f.eks. [Maddy, 1996, s. 492].

[11] [Bernays, 1930, s. 39-40] m. forfatterens egen fremhævelse.

fandt smukke. Topscoren blev følgende teorem[12], som viser en sammenhæng mellem fem af de mest grundlæggende matematiske entiteter:

$$e^{i\pi} - 1 = 0$$

De deltagende matematikere blev også bedt om at beskrive, hvorfor de fandt dette og andre teoremer smukke. De mest almindelige begrundelser var, at smukke teoremer er »simple«, »korte«, »dybe« og endeligt »overraskende«.

Der er ikke så langt fra anerkendelsen af, at der findes æstetiske idealer i den matematiske praksis, til det synspunkt at disse idealer er styrende faktorer i den matematiske udvikling. Noget sådan mente eksempelvis en anden af det forrige århundrede største matematikere John von Neumann (1903-1957):

> I think that it is a relatively good approximation to the truth – [...] – that mathematical ideas originate in empirics, although the genealogy is sometimes long and obscure. But, once the are so conceived, the subject begins to live a peculiar life of its own and is better compared to a creative one, governed by almost entirely aesthetical motivations, than to anything else and, in particular, to an empirical science.[13]

Fra en hilbertsk position er det oplagt at se disse æstetiske idealer som udtryk for en søgen efter systematiske enhed, og således kan den æstetiske motivation von Neumann omtaler siges at have et rationelt element, qua idéernes retningsgivende funktion.

Dermed afmystificeres den æstetiske dimension i matematikken delvist, for udfra en hilbertsk position er det ikke så overraskende at umiddelbart uventede sammenhænge skabes, da de matematiske teorier i hvert fald delvist er opbygget for at netop at opnå en sådan systematisk enhed.

7.4 Afsluttende bemærkninger om frihed og sikkerhed

Afsluttende må man selvfølgelig stille spørgsmålet om hvorvidt Hilberts position en fornuftig matematikfilosofi?

[12] Se [Wells, 1990].

[13] [von Neumann, 1947] citeret fra [Maddy, 1996]. Når von Neumann her taler om »ideas«, tænker han ikke specifikt på idéer i Kants forstand.

Som det fremgår af det ovenstående, mener jeg at Hilberts position er en ganske fornuftig matematikfilosofi. Centralt for positionen er at matematikken har en sikker kerne, men at den samtidigt bevæger sig ud over denne. Hermann Weyl er inden på dette i følgende citat fra 1927:

> If Hilbert's views prevails over intuitionism, as appears to be the case, *then I see in this a decisive defeat of the philosophical attitude of pure phenomenology*, which thus proves to be insufficient for the understanding of creative science even in the area of cognition that os most primal and most readily open to evidence – mathematics.[14]

Paul Bernays er i 1930 inde på noget af det samme, når han skriver:

> [...] daß wir dem, was in der Mathematik vorliegt, von dem Standpunkt der Evidenz allein nichts gerecht werden können, sondern hier *dem Denken eine eigene Rolle zuerkennen* müssen.[15]

For at kunne give en tilfredsstillede redegørelse for matematikkens natur og praksis, må vi altså gå udover det egentlige sikre og give plads til matematikerens kreativitet.

Herudover er der ingen tvivl om at matematikken udvikler sig, og at der skabes nye, banebrydende teorier, som forbedre vor forståelse af matematikken. Men selvom matematikken ifølge Hilbert har en sikker kerne, medfører dette ikke et statisk billede matematikken, for matematikken udvikles netop gennem matematikerens frihed til at overskride det sikre. Vores udvidelse af de matematiske systemer er »reguleret« af visse idealer, som ligger indlejret i den matematiske praksis. Herigennem opnås en frihed eller åbenhed og dermed også en kreativ kraft som skaber ny matematik.

En vigtig drivkraft for den matematiske kreativitet er altså, at udviklingen er reguleret af idealer om hvorledes en matematisk teori bør se ud, heriblandt den overordnede idé om matematikkens systematiske enhed. Udviklingen er dog ikke bestemt på forhånd, for idéen om matematikkens systematisk enhed dikterer ikke detaljerne i systematiseringen.

Denne frihed har dog en pris, idet vi tilsyneladende må acceptere, at den kreative frihed, når den overskrider det sikre, giver vores matematiske viden en delvis fallibilitet.

[14][Weyl, 1927, s. 484] m. forfatterens egne fremhævelser.
[15][Bernays, 1930, s. 44] m. forfatterens egne fremhævelser.

Hilberts position synes alt i alt at være et levedygtigt alternativ, og et godt udgangspunkt når man leder efter en filosofisk redegørelse for matematikkens natur og matematikerens praksis – et alternativ som burde tages mere alvorligt i den nuværende debat.

Appendiks A

Den primitive rekursive aritmetik (PRA)

Den primitive rekursive aritmetik kan kort beskrives på følgende måde[1]:

(1) Det grundliggende logiske system er den sædvanlige prædikatlogik men med begrænsede kvantorer.

(2) De definerende ligninger for de primitivt rekursive funktioner tages som aksiomer.

(3) Vi tillader induktion over formler med begrænsede kvantorer.

Det er ikke alle rekursivt definerede funktioner, som er primitivt rekursive. Et klassisk eksempel på dette er Ackermann's funktion[2], som defineres ved følgende uskyldigt udseende »dobbelte« rekursion:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{for } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{for } n = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{ellers} \end{cases}$$

Funktionen vokser skræmmende hurtigt. Det første par skridt ser ikke så farlige ud: $A(0,0) = 1$, $A(2,2) = 7$, $A(3,3) = 61$, men herefter begynder funktionen at stige kraftigt:

$$A(4,4) = 2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}} .$$

[1]Se [Troelstra og Schwichtenberg, 1996, s.97-99].
[2]Se også [Kleene, 1971, s. 271-272].

Appendiks B

De hyper-reelle tal og superstrukturen

I dette appendiks vil jeg kort skitsere[1], hvordan man kan konstruere en superstruktur på de reelle tal for dermed at få det fulde udbytte af Łoś' teorem.

Vi tager udgangspunkt i mængden af de reelle tal **R**. Udfra denne vil vi skabe en superstruktur $\hat{R}$ på **R**. Til dette skal vi bruge følgende mængder, som vi definerer ved induktion:

$$\begin{aligned} R_0 &= \mathbf{R}, \\ R_{n+1} &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n} R_k\right) \end{aligned}$$

–hvor P er den sædvanlige potensmængde operator.

Det er foreningen af disse mængder $\hat{R}$, som er vores superstruktur på **R**:

$$\hat{R} = \bigcup_{n \leq 0}^{\infty} R_n$$

Elementerne i $\hat{R}$ kaldes superstrukturens entiteter, og elementerne i $R_0 = \mathbf{R}$ kaldes desuden ofte for superstrukturens individer.

Vi husker nu, at vi definerer et ordnet par som $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ og n-tupler ved induktion: $(a) = a, (a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_{n-1})$. De algebraiske operationer på **R** i mængdenlæren kan således defineres ved hjælp af 3-plads relationer, og disse er entiteter i $\hat{R}$, ser vi eksempelvis på addition, kan vi definere denne som: $S = \{(a, b, c), a, b, c \in R_0 : a + b = c\}$, og vi har $S \in \hat{R}$.

[1]For de nærmere detaljer henvises til [Landers og Rogge, 1994] og [Davis, 1977].

Bemærk således at *alle* relationer, der er defineret som mængder via n-tupler er entiteter i $\hat{R}$, hvilket er den store fordel ved superstrukturen, da Łoś' teorem kun gælder for første ordens formler.

For at vise Łoś' teorem, indfører vi et formelt sprog L, som vi vil kæde samme med strukturen. Dette sprog indeholder:

1. de logiske konnektiver: $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
2. variable: $x, y, \ldots$
3. kvantorer: $\forall, \exists$.
4. parenteser: $()$.
5. prædikatet: $\in$.
6. *konstanter*. Denne mængde af konstanter er stor nok til at skabe en en-til-en korrespondance med strukturens entiteter.

Vi antager nu, at vi en sådan en-til-en korrespondance mellem entiteterne i $\hat{R}$ og konstanterne i L. Således kan vi sige at $\hat{R}$ er en del af L, og vi kalder $\hat{R}$ en L-struktur. Vi identificerer L's prædikat med mængdelærens $\in$.

Vi vil gerne danne en ny struktur $*(\hat{R})$, som kan siges at indeholde $\hat{R}$. Til dette benytter vi os af et ultra-filter og mængden $\hat{R}^I$.

Vi ser først på $\hat{R}^I$, som er mængde af alle afbildninger fra indeksmængden I ind i $\hat{R}$.

Vi antager, at vi har et δ-ufuldstændigt[2] ultra-filter $\mathcal{U}$ på I. Ved hjælp af dette ultra-filter definerer vi relationerne $=_\mathcal{U}$ og $\in_\mathcal{U}$ på $\hat{R}^I$:

$$a =_\mathcal{U} b \Leftrightarrow \{i : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}; (a, b \in \hat{R}^I)$$

$$a \in_\mathcal{U} b \Leftrightarrow \{i : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}; (a, b \in \hat{R}^I)$$

Disse kan ses udvidelser af $\in$ og $=$ til $\hat{R}^I$. I det følgende vil vi således kun skrive fodtegnet i de sammenhænge, hvor det er vigtigt.

$=_\mathcal{U}$ er en ækvivalensrelation på $\hat{R}^I$ hvilket relativt let kan vises, og således opdeles $\hat{R}^I$ i ækvivalensklasser.

[2]Et filter $\mathcal{F}$ kaldes desuden δ-ufuldstændig, hvis der eksisterer en uendelig følge af elementer i det $(F_n \in \mathcal{F}), (n = 1, 2, \ldots)$, således at $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \notin \mathcal{F}$.

Der findes en naturlige »indlejring« ($a \to *a$) fra $\hat{R}$ ind i $\hat{R}^I$, idet det er naturligt at identificere elementer i $\hat{R}$ med de konstante afbildninger i $\hat{R}^I$: $*a(i) \equiv a$, for alle $i \in I$. Man kan vise, at vores $*$-indlejring blandt andet har følgende egenskaber[3]:

1. $*\emptyset = \emptyset$.
2. For $a, b \in \hat{R}$, så $a \subset b \Rightarrow *a \subset *b$.
3. For $a, b \in \hat{R}$, $a \in b \Leftrightarrow *a \in *b$.
4. $*$-indlejringen bevarer endelig mængder, for $a_1, \dots, a_n \in \hat{R}, s * \{a\} = \{*a\}, *\{a_1, \dots, a_n\} = \{*a_1, \dots, *a_n\}$.
5. $*$-indlejringen bevarer de sædvanlige mængde operationer: for $a_1, \dots, a_n \in \hat{R}$, så $*(\bigcup_{i=1}^n a_i) = \bigcup_{i=1}^n *a_i, *(\bigcap_{i=1}^n a_i) = \bigcap_{i=1}^n *a_i$.
6. $*(a_1 \times \dots \times a_n) = *a_1 \times \dots \times *a_n$.
7. $\forall a, b, \in \hat{R} : *(a \setminus b) = *a \setminus *b$.
8. $*$-indlejringen bevarer domæne og billedet af n-ære relationer i $\hat{R}$: $*dom(b) = dom(*b), *ran(b) = ran(*b)$, således har vi at $*(b(a)) = *b(*a)$.

En entitet a i $\hat{R}^I$ kaldes internt, når der eksisterer et naturligt tal $n \geq 0$ således at $a \in_{\mathcal{U}} *R_n$. Hvis dette ikke er tilfældet kaldes entiteten ekstern. Herudover kalder vi naturligt nok en intern entitet a for en standard entitet, hvis der eksisterer en entitet $b \in \hat{R}$, således at $a = *b$.

B.1 Łoś teorem

Et af vores mål er at vise, at »sub-strukturen« $*(\hat{R})$ i $\hat{R}^I$, i en vis forstand har de samme egenskaber som $\hat{R}$. For at opnå dette, antager vi at $\hat{R}^I$'s elementer er sat i en en-til-en korrespondance med konstanterne i et formelt sprog $*L$.

Mere præcist skal vi vise, at en bestemt typer af sætninger $V \in K(L)$ gælder i $\hat{R}$, hvis og kun hvis sætningen $*V$ gælder i $*(\hat{R})$.

$K(L)$ er mængden af de velformede formler i L hvor kvantorerne er på følgende form: $\forall x((x \in A) \Rightarrow \dots)$ og $\exists x((x \in A) \wedge \dots)$, altså de formler, hvor domænet for kvantorer er en entitet i $\hat{R}$.

[3] Se [Luxemburg, 1973, s. 44].

Mængde af de formler hvorom det samtidigt gælder, at de er sande i $\hat{R}$, kalder vi K_0. Tilsvarende har vi for vores $*L$-struktur en mængde $*K(L)$ og en mængde $*K_0$. Formlerne i $K(L)$ kan på grund af superstrukturens opbygning udtrykke meget interessant matematik, som vi ikke havde fået med, hvis vi blot have skabt en ikke-standard model af mængden $\mathbf{R}$, sådan som vi gjorde i selv rapporten.

Łoś' teorem siger at for $V \in K(L)$, så er $V \in K_0$ hvis og kun hvis $*V \in *K_0$. $*V$ er sætningen V, hvor konstanterne i V $(a_1, \ldots, a_p)$ er skiftet ud med deres standard modparter i $*L$: $(*a_1, \ldots, *a_p)$.

Til at bevise teoremet, skal vi bruge følgende sætning om vores $*$-indlejring:

Sætning B.1
Lad $V = V(x_1, \ldots, x_p)$ være element i $K(L)$ hvor $x_1, \ldots, x_p$ er frie variable, og lad $A = \{(x_1, \ldots, x_p) : (x_1, \ldots, x_p) \in a \text{ og } V(x_1, \ldots, x_p)\}$, hvor a er en vilkårlig entitet i $\hat{R}$. Så er $A \in \hat{R}$ og

$$*A = \{(y_1, \ldots, y_p) : (y_1, \ldots, y_p) \in *a \text{ og } *V(y_1, \ldots, y_p)\}.$$

Bevis
At $A \in \hat{R}$, følger af at $A \subset a$, og da vi har at $a \in \hat{R}$, så må $A \in \hat{R}$. Resten af sætningen vises ved induktion over antallet af kvantorer i V.

Først viser vi sætningen for formler uden kvantorer.

Hvis $V = V(x_1, \ldots, x_p, a_1, \ldots, a_q)$ er »atomar«, er V en formel på formen $\alpha \in \beta$, eksempelvis: $(x_1, \ldots, x_p, a_1, \ldots, a_{q-1}) \in a_q$ eller $(x_1, \ldots, x_{p-1}, a_1, \ldots, a_q) \in x_p$, og så følger resultatet direkte af den måde, vi definerede $\in_{\mathcal{U}}$ på, idet vi husker at $a \in b$, hvis og kun hvis $*a \in_{\mathcal{U}} *b$.

Da resten af vores formler (uden kvantorer) som bekendt kan konstrueres ved brug af konnektiverne $\neg$ og $\wedge$, skal vi nu kun vise følgende:

Hvis sætningen gælder for formlerne V og W, så gælder den også for $(V \wedge W)$ og $\neg V$.

Jeg vil kun vise det første her. Vi lader $V = V(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ og $W = W(x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_r)$ være formler for hvilke sætning gælder, og $A = \{(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_r) : (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_r) \in a \text{ og } (V \wedge W)\}$.

Vi kan splitte A op, så vi får at: $A = \{(x_1, \ldots, z_r) : (x_1, \ldots, z_r) \in a \text{ og } V\} \cap \{(x_1, \ldots, z_r) : (x_1, \ldots, z_r) \in a \text{ og } W\}$.

Vi kan nu benytte sætningen på de to dele, og da vores $*$-indlejring har egenskaben, at: $*(A_1 \cap A_2)$ medfører $*A_1 \cap *A_2$, så får vi at

$A = \{(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_r) : (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_r) \in *a$ og $*\,(V \wedge W)\}$, hvilket var, hvad vi ville vise.

Nu vil vi se på de formler i $K(L)$ som indeholder kvantorer. Her går vi i gang med vores induktion over antallet af kvantorer k. Vi tager udgangspunkt i det, vi lige har vist, nemlig at sætningen gælder for formler i $K(L)$, hvor antallet af kvantorer er $k = 0$.

Vores induktionsantagelse er, at sætningen gælder for formler, hvor antallet af kvantorer er $k = n$, dvs. at sætningen gælder for formler af formen:

$V = (qx_n)\ldots(qx_1)W(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_q)$, hvor W ikke har kvantorer og $y_1, \ldots, y_q$ er frie variable.

Vi skal nu vise, at sætningen gælder for $k = n + 1$.

Lad $V \in K(L)$ være en formel med $(n + 1)$ kvantorer på formen: $(qx_{n+1})\ldots(qx_1)W(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_q)$, og antag at qx_{n+1} er eksistenskvantoren $(\exists x_{n+1})$. Vi kalder $\exists x_{n+1}$'s domæne for b, og da $V \in K(L)$ er b pr. definition element i $\hat{R}$. Vi ser nu på den binære relation:

$$B =$$

$$\{((y_1, \ldots, y_{q-1}), x_{n+1}) : ((y_1, \ldots, y_{q-1}), x_{n+1}) \in (a \times b) \text{ og } (qx_n)\ldots(qx_1)W\}.$$

Ved vores induktionsantagelse har vi at:

$$*B =$$

$$\{((y_1, \ldots, y_{q-1}), x_{n+1}) : ((y_1, \ldots, y_{q-1}), x_{n+1}) \in *(a \times b) \text{ og } (qx_n)\ldots(qx_1)*W\}$$

og da $*(A \times B) = *A \times *B$, har vi at:

$$*B =$$

$$\{((y_1, \ldots, y_{q-1}), x_{n+1}) : ((y_1, \ldots, y_{q-1}), x_{n+1}) \in *a \times *b \text{ og } (qx_n)\ldots(qx_1)*W\}.$$

Vi ser nu på B's domæne, som vi kalder A:

$dom(B) = A = \{(y_1, \ldots, y_p) \in a$ og $(\exists x_{n+1} : (x_{n+1} \in b) \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)W)\}$, hvilket også kan skrives som:

$$A = \{(y_1, \ldots, y_p) : (y_1, \ldots, y_p) \in a \text{ og } V(y_1, \ldots, y_p)\}.$$

Mængden A er altså den mængde, som er tilknyttet til formler med $(n + 1)$ kvantorer.

For at vise at $*A$ har den ønskede form, benytter vi os af at vores $*$-indlejring »bevarer« domæner: $dom(*B) = *dom(B) = *A$.

Domænet for $*B$ er altså:

$$*A =$$

$$\{(y_1, \ldots, y_p) : (y_1, \ldots, y_p) \in *a \text{ og } (\exists x_{n+1} : (x_{n+1} \in *b) \wedge (qx_n) \ldots (qx_1) * W)\}$$

$$= \{(y_1, \ldots, y_p) : (y_1, \ldots, y_p) \in *a \text{ og } * V(y_1, \ldots, y_p)\}$$

Hvilket var, hvad vi skulle vise. Sætning B.1 gælder altså for alle $V \in K(L)$.
□

Vi er nu i stand til at skitsere beviset for Łoś' teorem:

Sætning B.2 (Łoś' teorem)
Hvis $V \in L(K)$ *så er* $V \in K_0 \Leftrightarrow *V \in K_0$.

For V uden kvantorer følger Łoś' teorem af definitionen af $\in_{\mathcal{U}}$, som giver at $a \in b$ hvis og kun hvis $*a \in_{\mathcal{U}} *b$.

For V med kvantorer på normal formen $(qx_n) \ldots (qx_1)W$, hvor W er kvantorfri og qx_n er $\exists x_n$ gælder teoremet også.

For at sige, at V gælder i $\hat{R}$, det svarer til at sige at mængden $A = \{x_n : x_n \in \hat{R} \text{ og } (qx_{n-1})(qx_1)W\}$ ikke er tom, dvs. $A \neq \emptyset$.

Nu benytter vi sætning B.1 og at $\emptyset = *\emptyset$. Dette giver os at:

$$*A = \{x_n : x_n \in \hat{R} \text{ og } (qx_{n-1})(qx_1) * W\} \neq \emptyset.$$

Vi har altså at $*A \neq *\emptyset$, hvilket svarer til at $*V \in *K_0$.

Litteraturliste

Andersen, G. et al. (1996): *Bevisteori. Eksemplificeret ved Gentzens bevis for konsistensen af teorien om de naturlige tal*, Tekster fra IMFUFA, nr. 326, Roskilde Universitetscenter.

Bernays, Paul (1922): *Hilbert's Significance for the Philosophy of Mathematics* i: Mancosu, Paolo (1998): *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics i the 1920s*, Oxford University Press.

Bernays, Paul (1923): *Reply to the Note by Mr. Aloys Müller, »On the Numbers as Signs«* i: Mancosu, Paolo (1998): *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics i the 1920s*, Oxford University Press.

Bernays, Paul (1928): *Über Nelsons Stellungsnahme in der Philosophie der Mathematik*, Die Naturwissensschaften, Wochenschrift für die forschritte der Naturwissenschaft, der Medizin und der Technik, Heft 9, s. 142-45, Berlin Springer.

Bernays, Paul (1930): *Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie* i: Bernays, Paul (1976): *Abhandlungen zur Philosophie der mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Bernays, Paul (1976): *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Bernays og Hilbert, P. og D. (1934): *Grundlagen der Mathematik vol. I*, 2. udg., Springer Verlag, 1968.

Bernays og Hilbert, P. og D. (1939): *Grundlagen der Mathematik vol. II*, 2. udg., Springer Verlag, 1968.

Bondeli, Martin (1996): *Zu Kants Behauptung der Unentbahrlichkeit der Vernunftideen*, Kant-Studien 87, s. 166-183.

Bordogna, Francesca, (1996): *Interpreting the Ideal: Embedding Ideal Numbers in the Mathematical Programs of Kummer, Dedekind and Klein*, Preprint 47, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte.

Caimi, Mario (1995): *Über eine wenig beachtete Deduktion der regulativen Ideen*, Kant-Studien 86, s. 308-320.

Corry, Leo (1996): *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, s. 138-172, Birkhäuser Verlag.

Davis, Martin (1977): *Applied nonstandard analysis*, John Wiley and Sons.

Davis, Philip (1992): *The Human Face of Mathematics* i: Ormell, C. (ed.): *New thinking about the nature of mathematics*, Mathematics Applicable Group, 1992.

Davis og Hersh, P og R. (1983): *The Mathematical Experience*, Penguin Books.

Delvin, Kevin (1993): *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory*, 2. udg., Springer Verlag.

Detlefsen, Michael (1986): *Hilbert's Program. An Essay on Mathematical Instrumentalism*, D. Reidel Publishing Company.

Detlefsen, Michael (1996):*Philosophy of Mathematics in the twentieth century* i: Shanker, S. (ed.) (1996): *Philosophy of Science, Logic an Mathematics in the Twentieth Century*, Routledge History of Philosophy, vol. IX, s. 50-124, Routledge.

Feferman, Solomon (1988): *Hilbert's program relativized: Proof-theoretical and foundational reductions*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 53, nr. 2, s. 364-385.

Feferman, Solomon (1998): *In the Light of Logic*, Oxford University Press.

Feferman, Solomon (1999): *Highlights in Proof Theory* i: Hendricks, Frovin og Pedersen, H., K. og S. A. (ed.): *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, PREPRINT (1999).

Fraenkel, Bar-Hillel og Levy, A., Y. og A. (1973): *Foundations of Set Theory. Second revised edition with the collaboration of Dirk van Dalen*, North-Holland Publishing Company.

Friedman, Harvey (1998): *Finite trees and the necessary use of large cardinals*, findes på Friedmans hjemmeside: www.math.ohio-state.edu/~friedman/ .

Friedman, Michael (1992): *Kant and the Exact Sciences*, Harvard University Press.

Hendricks, Frovin og Pedersen, V., K. og S. A. (ed.) (1999): *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, PREPRINT. Udkommer i foråret 2000 i Synthese library Series på Kluwer Academic Publishers.

Hendricks, Frovin og Pedersen, V., K. og S. A. (1999): *Introduction* i: Hendricks, Frovin og Pedersen, V., K. og S. A. (ed.) (1999): *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, PREPRINT 1999.

Hilbert, David (1899): *Grundlagen der Geometrie*, 11. udg., B. G. Teubner, (1968).

Hilbert, David (1900): *Mathematische Probleme* i: Hilbert, David (1935): *Gesammelte Abhandlungen* bd. III, s. 290-330, Springer Verlag.

Hilbert, David (1918): *Axiomatisches Denken* i: Hilbert, David (1935): *Gesammelte Abhandlungen* bd. III, s. 146-156, Springer Verlag.

Hilbert, David (1919-20): *Natur und mathematisches Erkennen: Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen. Nach der Ausarbeitung von Paul Bernays*, Birkhäuser Verlag, 1992.

Hilbert, David (1922): *Neubegründung der Mathematik* i: Hilbert, David (1935): *Gesammelte Abhandlungen* bd. III, s. 157-178, Springer Verlag.

Hilbert, David (1924): *Die Grundlagen der Physik* i: Hilbert, David (1935): *Gesammelte Abhandlungen* bd. III, s. 258-289, Springer Verlag.

Hilbert, David (1926): *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen, vol. 95, Berlin Springer.

Hilbert, David (1930a): *Naturerkennen und Logik* i: Hilbert, David (1935): *Gesammelte Abhandlungen* bd. III, s. 378-388, Springer Verlag.

Hilbert, David (1930b): *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, Mathematische Annalen, vol. 102, Berlin Springer.

Hilbert, David (1931): *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*, Mathematische Annalen, vol. 104, Berlin Springer.

Hilbert, David (1935): *Gesammelte Abhandlungen* bd. III, Springer Verlag.

Höffe, Otfried (1993): *Immanuel Kant*, i Höffe, O. (ed.): *Filosofi. Nyere tid fra Bacon til Nietzsche*, Politikens Forlag, 1993.

Kant, Immanuel (1781/1787): *Kritik der reinen Vernunft, herausg. von Wilhelm Weischedel*, Suhrkamp, (1974).

Kitcher, Philip (1976): *Hilberts epistemology*, Philosophy of Science, 43, s. 99-115.

Kitcher, Philip (1984): *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press.

Kleene, Stephen (1971): *Introduction to Metamathematics*, Wolters-Noordhoff Publishing and North-Holland Publishing Company.

Kreisel, Georg (1983): *Hilbert's programme* i: Benacerraf og Putnam, P. og H. (1983): *Philosophy of Mathematics*, 2.udg., Cambridge University Press.

Körner, S. (1971): *The Philosophy of Mathematics: an introductory essay*, Hutchinson University Library.

Körner, S. (1974):*Kant*, Penguin.

Landers og Rogge, D. og L. (1994): *Nichtstandard Analysis*, Springer-Verlag.

Larsen, Jørgen (1999): *LaTeX for forfattere. En introduktion til LaTeX og IMFUFA-LaTeX*, Tekster fra IMFUFA, nr. 366, Roskilde Universitetscenter.

Maddy, Penelope (1996): *Set Theoretic Naturalism*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 61, nr. 2, s. 490-514.

Maddy, Penelope (1997): *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press.

Majer, Ulrich (1993a): *Hilberts methode der Idealen Elemente und Kants regulativer Gebrauch der Ideen*, Kant-Studien 84, Heft 1, s. 50-77.

Majer, Ulrich (1993b): *Das Unendliche – eine blosse Idee*, Revue Internationale de Philosophie, vol. 47, nr. 4/1993, s. 319-342.

Mancosu, Paolo (1998): *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press.

Mehra, Jagdish (1974): *Einstein, Hilbert and The Theory of Gravitation*, (s. 17-35), D. Reidel Publishing Company.

Moschovakis, Yiannis N. (1994): *Notes on Set Theory*, Springer-Verlag.

Mostowski, Andzej (1966): *Thirty Years of Foundational Studies*, Acta Philosophica Fennica fasc. XVII, Basil Blackwell.

Nielsen, M. et al. (1997): *Fornuft og videnskab*, RUC-projekt.

Peckhaus, Volker (1990): *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*, Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht.

Peckhaus, Volker (1994): *Hilbert's Axiomatic Programme and Philosophy* i: Knobloch og Rowe, E. og D. (ed.) (1994): *The History of Modern Mathematics, vol. III: Images, Ideas, and Communities*, Academic Press.

Peckhaus, Volker (1999): *On Deepening Foundations: Hilbert's Axiomatic Program Between Pragmatism and Naturalism*, PREPRINT, manuskript til foredrag ved *11th international congress of logic, methodology and philosophy of science* i Krakow, Polen, d. 20-26/8-99.

Posy, Carl (2000): *Immediacy and the Birth of Reference in Kant: The Case for Space* i: Sher og Tieszen, G. og R. (ed.): *Between Logic and Intuition. Essays in Honor of Charles Parsons*, Cambridge University Press, 2000.

Prawitz, Dag (1972): *The Philosophical Position of Proof Theory* i: Olsen og Paul, R. og A. (ed.) (1972): *Contemporary Philosophy in Scandinavia*, The Johns Hopkins Press.

Reid, Constance (1970): *Hilbert*, Springer Verlag.

Robinson, Abraham (1974): *Non-standard Analysis*, revised edition, North-Holland Publishing.

Rowe, David (1994): *the Philosophical Views of Klein and Hilbert* i: Dauben, J. W., et. al. (ed.) (1994): *The Intersection of History and Mathematics*, Birkhäuser Verlag.

Rowe, David (1999): *The Empiricist Roots of Hilbert's Axiomatic Approach* i: Hendricks, Frovin og Pedersen, H., K. og S. A. (ed.): *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, PREPRINT (1999).

Tait, W. (1980): *Finitism*, The Journal of Philosophy, 78, s. 542-46.

Tiles, Mary (1991): *Mathematics and the image of reason*, Routledge.

Sieg, Wilfried (1988): *Hilbert's program sixty years later*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 53, nr. 2, s. 338-349.

Sieg, Wilfried (1999a): *Toward Finitist Proof Theory* i: Hendricks, Frovin og Pedersen, H., K. og S. A. (ed.): *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, PREPRINT (1999).

Sieg, Wilfried (1999b): *Hilbert's Programs: 1917-1922*, The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 5, nr. 1.

Simpson, Stephen (1988): *Partial realizations of Hilbert's program*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 53, nr. 2, s. 349-364.

van Dalen, Dirk (1999): *The Development of Brouwer's Intuitionism* i: Hendricks, Frovin og Pedersen, H., K. og S. A.: *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, PREPRINT, (1999).

von Neumann, John (1947): *The Mathematician* i: *Collected Works*, Vol. I, Pergamon Press, 1961.

Wartenberg, Thomas (1992): *Reason and the practice of science* i: Guyer, Paul (ed.) (1992): *The Cambridge Companion to Kant*, s. 228-279, Cambridge University Press.

Wells, David (1990): *Are These the Most Beautiful?*, Mathematical Intelligencer, Vol. 12, no. 3, s. 37-41.

Weyl, Hermann (1921): *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* i: Weyl, H. (1956): *Selecta*, Birkhäuser Verlag, s. 211-248.

Weyl, Hermann (1927): *Comments on Hilberts second lecture on the foundations of mathematics* i: Heijenoort, J. (1977): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, s. 480-484.

Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: http://mmf.ruc.dk eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

332/97	ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG Specialerappoprt af: Stine Korremann Vejleder: Dorthe Posselt
333/97	Biodiversity Matters an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity by: Bernd Kuemmel
334/97	LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
335/97	Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids by: Jeppe C. Dyre
336/97	Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University by: Kathrine Legge
337/97	Verdensbankens globale befolkningsprognose - et projekt om matematisk modellering af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
338/97	Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne Første modul fysikprojekt af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss, Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup Vejleder: Tage Christensen
339/97	Defining Discipline by: Wolfgang Coy
340/97	Prime ends revisited - a geometric point of view - by: Carsten Lunde Petersen
341/97	Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry by: Mogens Niss
342/97	A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY
343/97	IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen
344/97	Puzzles and Siegel disks by: Carsten Lunde-Petersen

345/98	Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator Ph.D. Thesis by: Mette Sofie Olufsen
346/98	Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces af: Sebastian Horst Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
347/98	Verificering af Matematiske Modeller - en analyse af Den Danske Eulerske Model af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschlæger Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
348/98	Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark by: Stefan Krüger Nielsen project leader: Bent Sørensen
349/98	Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
350/98	OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998 Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96
351/98	Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education by: Mogens Niss
352/98	The Herman-Swiatec Theorem with applications by: Carsten Lunde Petersen
353/98	Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen
354/98	A Global Renewable Energy Scenario by: Bent Sørensen and Peter Meibom
355/98	Convergence of rational rays in parameter spaces by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen

358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen

359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)

360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhelm Booß-Bavnbek, Kenro Furutani

362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen

363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen

364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup

365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege

366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

368/99 Kvartvejsraport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen

369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen

370/99 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter tekst nr. 350/98

371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering: Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen

373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki

374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen

375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik

376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder

377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen

378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and termal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovaskulære system
af: Gitte Andersen (3.moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski

386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen

388/00 Behandling af impuls ved kilder og dræn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
by: Johnny Ottesen

390/01 Endnu ikke udkommet

391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gøtzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen

392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.

393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.

395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege