# TEKST NR 386 2000

# NEUTRALE MANDATFORDELINGSMETODER

# - EN ILLUSION?

**Et modelprojekt af**

**Hans Henrik Brok-Kristensen**
**Knud Dyrberg**
**Tove Oxager**
**Jens Sveistrup**

**Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek**

**TEKSTER fra**

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, DK-4000 Roskilde

Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?

Modelprojekt af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup

Vejleder Bernhelm Booss-Bavnbek

IMFUFA tekst nr. 386/00 45 sider ISSN 0106-6242

*Abstrakt*

Beskrivelse af valgmodeller set fra et matematisk synspunkt. Valgmodeller har sin anvendelse ved fastlæggelsen af mandatfordelingen ved valg, dvs. hvor mange mandater hvert enkelt parti skal have. Flere mandatfordelingsmetoder beskrives: Adams's, Deans, Hills, Websters og Jeffersons metoder, der er mandatprismetoder, og d'Hondts og Sainte-Lagües metoder, der er divisormetoder. En matematisk model for mandatfordelingsmetoder opstilles og uddybes. Aksiomer indenfor denne model beskrives. Neutraliteten af mandatfordelingsmetoder defineres og vurderes.

# NEUTRALE MANDATFORDELINGSMETODER
# - EN ILLUSION?

**Indhold:**

# 1. Indledning

I et samfund med en demokratisk kultur spiller afstemningen en central rolle. Afstemningen er det redskab ved hvis hjælp menigmand kan øve indflydelse på sammensætningen af kompetente forsamlinger, det være sig landets parlament eller bestyrelsen i den lokale fodboldklub.
Uanset om det drejer sig om det ene eller det andet er det naturligvis nødvendigt at have regler for afholdelse af valg, herunder også for, hvorledes man fordeler mandater i henhold til de afgivne stemmer, og i den forbindelse anvender man ofte matematisk funderede regler.
For den demokratiske kulturs fortsatte beståen er det vigtigt at sådanne regler forekommer de involverede parter ( såvel vælgere som kandidater og partier) rimelige og retfærdige. Retfærdighed er imidlertid ikke et entydigt og urokkeligt begreb; følelsen af at blive behandlet retfærdigt eller uretfærdigt er i høj grad afhængig af tradition og kultur. Ved et dansk folketingsvalg sker det for eksempel ofte, at ganske få stemmer er afgørende for om et givet mandat tilfalder det ene eller det andet parti, og det er tankevækkende, at det ikke afføder en offentlig debat om mandatfordelingsmetoder, men blot vag kritik af eventuelle sofavælgere.
Når man ikke anfægter metoden skyldes det måske, at matematikken – i modsætning til f.eks historie og litteraturvidenskab – for den almindelige borger fremstår som den helt objektive videnskab, der ved sin blotte forbindelse med valghandlingen forlener denne med en aura af neutralitet.
Det er naturligvis et spørgsmål i hvor høj grad en sådan opfatttelse stemmer overens med virkeligheden. I praksis er fuldstændig proportionalitet mellem stemmetal og repræsentation umulig at opnå, og historien viser gennem fremkomsten af de mange forskellige mandatfordelingsmetoder, at dette problem til alle tider har været genstand for en levende interesse.
Som en naturlig konsekvens af denne interesse melder sig spørgsmålet, om man matematisk kan bevise, at nogle metoder er bedre end andre, ja måske endda, at én metode er bedre end alle andre, eller sagt på en anden måde, om man ved hjælp af formelle matematiske metoder kan opnå en indsigt i emnet, som man ikke kan erhverve sig med almindelig sund fornuft.

## 1.1 Problemformulering og -afgrænsning

Det overordnede udgangspunkt for projektet har været en interesse for det repræsentative demokrati. Ideelt set skal en valgt forsamling jo afspejle vælgernes ønsker retfærdigt, men hvis den anvendte valgmetode i et givet land kan betragtes som et udtryk for den officielle løsning på dette problem, må man sige, at der fra land til land er stærkt divergerende opfattelser af, hvad der er en god løsning. Det er således svært at se, at forholdstalsvalg og valg i enkeltmandskredse (det er naturligvis også muligt at praktisere en mellemting mellem de to metoder) skulle repræsentere de samme forestillinger om retfærdighed. Vi har valgt ikke at beskæftige os med valg i enkeltmandskredse. Dels er selve fordelingen af mandater uinteressant (det ville derimod være interessant at se, hvilken virkning det ville have at ændre på grænserne mellem de enkelte valgkredse), dels anvender man forholdstalsvalg i Danmark.
Hvadenten man praktiserer den ene eller den anden metode, må man imidlertid tage visse praktisk politiske hensyn (f.eks. på forhånd udelukke partier med meget beskeden vælgertilslutning (spærregrænse)), og her er det i et demokrati meget vigtigt, at der i vælgerbefolkningen er konsensus med hensyn til de begrænsninger, man pålægger metoden.
Et andet udgangspunkt af mere underordnet art var konstateringen af, at forskellige mandatfordelingsmetoder ved samme valg også gav forskellige mandatfordelinger, og da disse jo netop var **eksempler,** ønskede vi at gå fra det specielle til det almene, dvs. undersøge, om det var muligt at finde en "neutral" mandatfordelingsmetode. Kan man, som ovenfor berørt, overhovedet finde en neutral mandatfordelingsmetode, og hvilke krav skal den honorere for at kunne retfærdiggøre betegnelsen "neutral"? Et svar på disse spørgsmål kunne være opstillingen af en matematisk model.
Vi er derfor nået frem til følgende problemformulering:

**I hvor høj grad kan matematikken via en matematisk model bidrage til valg af den mest neutrale mandatfordelingsmetode?**

Når man i almindelighed beskæftiger sig med matematisk modellering til løsning af et givet problem, må man gøre sig klart, at de mennesker, som skal betjene sig af modellen,"brugerne", vil stille visse spørgsmål for at få klarhed over modellens anvendelighed.

Brugerens første spørgsmål vil normalt være :

- Kan det emne og de problemer, jeg beskæftiger mig med formuleres matematisk? Dvs. kan man beskrive det verbalt formulerede i matematisk sprog?

Hvis svaret er ja, vil det næste spørgsmål være:

- Hvilken **type** spørgsmål inden for problemstillingen kan matematikken besvare, og hvor kan den ikke hjælpe?

Hvis matematikken kan svare på brugerens spørgsmål, vil det tredje spørgsmål være:

- Hvor **gode** er svarene? Vil f.eks. små variationer i data eller forudsætninger give ændrede resultater?

For det specifikke emne, der behandles i dette projekt, må brugerens spørgsmål være:

1. Kan politisk vedtagne valgregler, f.eks. mandatfordelingsmetoder formuleres matematisk, og, ikke mindst, kan de alle formuleres inden for samme ramme?
2. Kan man inden for denne ramme formulere nogle krav/kvalitetskriterier, og kan matematikken bidrage med yderligere præciserende spørgsmål?
3. Kan modellen bruges til at vurdere den uretfærdighed, der uundgåelig begås, altså f.eks. vurdere hvilken mandatfordelingsmetode, der er mest retfærdig?

Stiller man disse spørgsmål til en matematiker, der først og fremmest interesserer sig for matematikkens praktiske anvendelsesmuligheder kunne svarene blive som følger:

Ad 1: **Ja.** Man kan opstille en matematisk model ud fra politisk bestemte metoder, men det kræver at man foretager en forenkling af den politiske virkelighed. Hvis man forenkler og konkretiserer de mange forskellige valgmetoder, der findes i "den virkelige verden" kan man godt nå frem til en matematisk model. Eksempler på, hvad vi ikke vil inddrage i modellen er spærregrænser og geografiske favoriseringer (at et bestemt område garanteres flere mandater, end dets befolkningstal berettiger til). Derudover regnes alle afgivne stemmer som listestemmer (partistemmer) mens begrebet personlige stemmer lades ude af betragtning. Problemet består altså i, at vi ud fra et givet sæt af stemmer på et givet antal partier skal finde en mandatfordeling for disse partier. Hvis antallet af partier betegnes *N*, og det samlede antal mandater betegnes *M*, kan de afgivne stemmer på de *N* partier opfattes som en *N*-dimensional vektor, hvor et element $s_i$ betegner antallet af stemmer på parti *i*. Vores model er da en afbildning af en (*N*+1)-vektor ind i en *N*-vektor:

$$m : Z_+^N \times Z_+ \to Z_+^N$$

af formen

$$m : (s_a, s_b, \ldots, s_N, M) \to (m_a, m_b, \ldots m_N)$$

Ad 2: **Ja.** Inden for rammen kan man godt opstille krav/kvalitetskriterier til/for modellen med hensyn til dennes egenskaber, Når man præciserer disse krav matematisk kan det blive nødvendigt at stille yderligere opklarende spørgsmål. Der er f.eks. flere forskellige måder at beskrive monotoni på:

- Hvis $s_i$ stiger (resten uændret) så må $m_i$ ikke falde.

- Hvis kvota $k_i$ ($k_i = s_i \frac{M}{S}, S = \sum s_i$) stiger, så må $m_i$ ikke falde.

- hvis $s_i$ stiger og $s_j$ falder ($i \neq j$, resten uændret), så må parti $i$ ikke få færre og parti $j$ ikke flere mandater.

Ad 3. **Ja.** Det er muligt inden for modellen at vurdere retfærdigheden i mandatfordelingen, men det kræver, at man definerer begrebet "uretfærdighed." Hvem er det, der behandles uretfærdigt, er det vælgerne, partierne eller kandidaterne? Atter her er det nødvendigt at stille yderligere præciserende spørgsmål.

Når den verbale formulering af mandatfordelingsproblemet er omsat til en matematisk formulering opstår et matematisk problem: At drage konsekvenser til belysning af modellen udfra det givne sæt af definitioner og aksiomer(kvalitetskrav).
Til rådighed har man et arsenal af velafprøvede matematiske formler, ligninger og metoder. Først må man imidlertid undersøge a) om aksiomerne er kompatible (da man kan være kommet til at stille for mange eller for store krav til modellen) b) om nogle aksiomer er overflødige (dvs. at de kan udledes af de øvrige aksiomer).
Dernæst må man undersøge, hvor robuste de opnåede resultater er for ændringer i aksiomerne, dvs. foretage en sensitivitetsanalyse.
Dette fører til sammenligninger mellem de forskellige aksiomsystemer. Den matematiske sikkerhed ligger i de matematiske metoder til at udlede resultater af aksiomer. Værdien af resultaterne ligger i de antagelser, afgrænsninger og approksimationer man har foretaget i forbindelse med formuleringen af modellen. For valgmodeller er der kun én parameter, nemlig det samlede antal mandater, der skal fordeles, og det behøves der ingen approksimationer til.
Derimod har vi gjort visse observationer og antagelser:
I demokratiet foreligger der fuld information (bortset fra at selve valghandlingen er hemmelig).
Sensitivitetsanalyse kan for eksempel være parvise sammenligninger udfra ulighedsdefinition. Neutralitet kan betragtes udfra vælger, kandidat og partisynspunkt.

## 1.2 Anvendte symboler og betegnelser

- Partier betegnes med bogstaverne *A, B, C, ..., N,* evt. $P_1, P_2, P_3, ...P_N$.
- Et tilfældigt parti kan betegnes med *i;* to tilfældige med *i* og *j*.
- Stemmetallene for partierne *A, B, C, ..., N* betegnes: $s_A, s_B, s_C, ..., s_N$.
  Stemmetal opnået ved andre valg kan betegnes $s_i'$, evt. $s_i^*$.
  Med *s* betegnes vektoren med koordinaterne $(s_A, s_B, s_C, ..., s_N)$
- Antallet af vælgere (eller rettere antallet af afgivne stemmer):

  $$S = s_A + s_B + s_C + ... + s_N = \sum_i s_i.$$
- Mandattallene for partierne *A, B, C, ..., N* betegnes $m_A, m_B, m_C, ..., m_N$.
  Tilsvarende indføres vektoren $\boldsymbol{m} = (m_A, m_B, m_C, ..., m_N)$.
- Husets størrelse (det samlede mandattal): $M = m_A + m_B + m_C + ... + m_N = \sum_i m_i$.
- Kvota for parti *i* er defineret som: $k_i = M \cdot \frac{s_i}{S}$
- Den samlede gennemsnitlige pris for ét mandat, mandatprisen: $x = \frac{S}{M}$

  Pr. parti gælder: $x_i = \frac{s_i}{m_i}$
- Den gennemsnitlige vælgerrepræsentation: $\frac{M}{S} = \frac{1}{x}$.

  Og pr. parti: $\frac{m_i}{s_i} = \frac{1}{x_i}$
- Mængden af reelle tal betegnes R;
  Mængden af rationale tal betegnes Q;
  Mængden af hele tal betegnes Z;
  Mængden af naturlige tal betegnes N eller $Z_+$.

## 2. Beskrivelse af model for mandatfordelingsmetoder.

Tilgangen fra "den virkelige verden" ser således ud: Vi betragter et valg, f.eks. et dansk folketingsvalg, dvs. vi har et antal vælgere, en række opstillede partier og et antal mandater som skal vælges. Hovedproblemet - fordelingen af mandaterne mellem partierne efter at vælgerne har tilkendegivet hvilket parti de foretrækker - kan løses på mange forskellige måder, altså efter forskellige mandatfordelingsmetoder.

I konstruktionen af modellen vil der være foretaget en række afgrænsninger og forenklinger:

- *Hvem kan stemme?* Altså hvordan forholder gruppen af vælgere sig til hele befolkningen. Er den begrænset aldersmæssigt, socialt eller på anden måde? Til det danske folketingsvalg skal man som bekendt være 18 år for at have stemmeret og derudover være dansk statsborger. Disse forhold vil ikke blive beskrevet i modellen. Vælgerne er dem, der fra politisk hånd er udvalgt som vælgere. (Hvem der kan stemme vil givetvis have indflydelse på resultatet. F.eks. ville en nedsættelse af aldersgrænsen for deltagende i afstemningerne om mandatfordelingen til det danske folketingsvalg sikkert betyde en forskydning af den politiske balance)

- *Hvilke partier kan stille op?* Er der partier der ikke har lov til at stille op, og hvordan er mulighederne for at få et nyt parti opstillet til valget (hvor mange underskrifter skal indsamles osv.). Dette forhold vil der heller ikke blive taget stilling til i modellen. De opstillede partier er dem der efter gældende lov har mulighed for at opstille.

- *Vælgernes ligeberettigelse.* Tæller nogle stemmer mere end andre? Stemmer man efter f.eks. "høveder eller hoveder", eller er det antallet af aktier der er bestemmende? I modellen forudsættes at alle stemmer tæller lige meget.

- *Geografiske favoriseringer?* Tages der i mandatfordelingen f.eks. positivt hensyn når det gælder repræsentation af tyndt befolkede områder? Sådanne betragtninger er ligeledes ikke medregnet i modellen.

- *Spærregrænse?* I modellen regnes ikke med en eventuel spærregrænse. Til det danske folketingsvalg er der en spærregrænse for partier på 2%. En ophævelse eller forandring af denne må siges at kunne have stor indflydelse på resultatet.

Modellen skal være en afbildning, som til hvert sæt af $S$ vælgere, $N$ partier $A, B, \ldots, N$ og $M$ mandater tildeles hvert parti et antal mandater. Lad $s_A, s_B, \ldots, s_N$ betegne partiernes opnåede stemmetal, $m_A, m_B, \ldots, m_N$ betegne partiernes opnåede mandatantal og lad $m$ betegne en vilkårlig mandatfordelingsfunktion. (Selvom der ikke er tale om en funktion da værdierne er vektorer, vil vi alligevel betegne $m$ som en mandatfordelingsfunktion). Afbildningen $m$ skal altså gå fra en ($N$+1)-tuppel over i en $N$-tuppel:

$$m : (s_A, s_B, \ldots, s_N, M) \to (m_A, m_B, \ldots, m_N).$$

$(s_A, s_B, \ldots, s_N)$ betegner en $N$-dimensional vektor, eller et punkt i en $N$-dimensionalt rum, som vi vil betegne $s$, og ligeledes vil vi betegne vektoren eller punktet $(m_A, m_B, \ldots, m_N)$ med $\boldsymbol{m}$.

Koordinaterne i $\boldsymbol{s}$ og $\boldsymbol{m}$ vil være hele positive tal (eller eventuelt 0), lige som $M$ vil være et helt positivt tal. Dvs. $m$ får følgende udformning:

$$m : \mathbb{Z}_+^N \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+^N$$

En mandatfordelingsfunktion $m$ er altså en funktion som til hver vektor $s$ og hvert M, giver en vektor $\boldsymbol{m}$, hvor summen af koordinaterne i $\boldsymbol{m}$ er M.

DEFINITION: MANDATFORDELINGSMODELLEN:
Mandatfordelingsmodellen er en overordnet karakteristik af en mængde af mandatfordelingsfunktioner $m$, hvorom det gælder at:

$$m: \mathbb{Z}_+^N \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+^N \ , \ (s_A, s_B, \ldots, s_N, M) \to (m_A, m_B, \ldots, m_N)$$

hvor $s_A, s_B, \ldots, s_N$ betegner partiernes opnåede stemmetal, $M$ er det samlede antal mandater og $m_A, m_B, \ldots, m_N$ betegner partiernes opnåede mandatantal.

Normalt vil S være meget større end $M$, og man må sige at funktionen ingen mening giver, hvis M er større end S (måske lige undtaget hvor M er et multiplum af S).

*Modellens type:* Ifølge Ebbe Thue Poulsens "Matematiske modeller" eksisterer der følgende hovedtyper af modeller:

- Beskrivende eller forklarende modeller.
- Kinematiske eller dynamiske modeller.
- Modeller for beslutninger eller for erkendelse.
- Modeller for kontrol og styring.
- Modeller for design.

Vi vil karakterisere mandatfordelingsmodellen som først og fremmest en beskrivende model. Mandatfordelingsfunktionerne $m$ er en indtil videre meget åben og betingelsesløs beskrivelse af hvad der sker når mandaterne skal fordeles efter et valg. Man kan dog også tolke modellen som hørende under andre typer. Projektets problemformulering lægger f.eks. op til en vurdering af, hvorvidt modellen kan bruges som grundlag for en vurdering af, hvilken mandatfordelingmetode der er den mest neutrale – dvs. at bruge modellen som grundlag for beslutning om hvilken metode der skal vælges. Eller modellen kunne måske bruges som grundlag for en politisk vurdering af hvilken fordelingsmetode man ønsker: En mandatfordelingsmetode der favoriserer store partier kunne f.eks. af nogle partier foretrækkes frem for en der gør det modsatte.

**Er *m* en entydigt defineret funktion?**

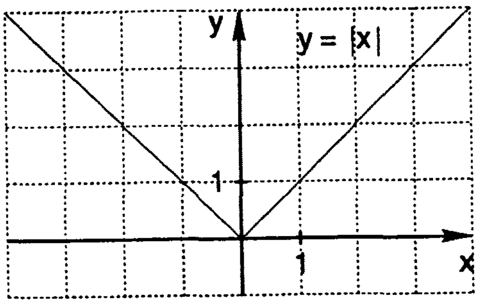
Det første man må spørge sig selv om er: Er denne mandatfordelingsfunktion overhovedet en funktion? Indtil videre er der ingen tvivl om at svaret er nej. Betragt situationen med to partier A og B, M=3, og $s_A = s_B$ Her vil fordelingen (2,1), to mandater til parti A og et til parti B, være nøjagtig lige så god som fordelingen (1,2). En sådan kombination af en vektor $\boldsymbol{S}$ og mandattal M hvorom det ikke kan afgøres hvilken mandatfordeling der i henhold til en mandatfordelingsmetode er den rigtige, vil vi betegne som et ligevægtspunkt. Man kan vælge at betragte situationen på to forskellige måder:

1: Mandatfordelingsfunktionerne er ikke defineret på hele definitionsmængden $\mathbb{Z}_+^N \times \mathbb{Z}_+$. I definitionsmængden er netop undtaget de omtalte ligevægtspunkter.

2: Mandatfordelingsfunktionerne har i en mængde af punkter i definitionsmængden "flere funktionsværdier", Et sådant ligevægtspunkt afbildes over i en mængde af vektorer. Denne betragtningsmåde anlægges i Balinski & Young.
Vi vil under gennemgangen af aksiomerne komme tilbage til en nærmere beskrivelse af disse ligevægtspunkter.

Eksempel:

Situationen kan genfindes indenfor andre områder af matematikken: Betragt f.eks. funktionen $f(x) = |x|$, og find den første afledede af denne funktion, $f'(x)$.




$f'$(x) har et kritisk punkt for $x = 0$. Man kan i lighed med ovenstående betragte det på to måder:
1: $f'$(x) er ikke defineret i dette punkt,

2: $f'$(x) kan bestemmes for $x \rightarrow 0^+$ og for $x \rightarrow 0^-$, og kan lidt løst siges at have to lige gyldige funktionsværdier i $x = 0$.

## 2.1 Karakterisering af mandatfordelingsmetoder

I det følgende skal vi se nærmere på en karakterisering af de forskellige mandatfordelingsmetoder. Metoderne kan karakteriseres i overensstemmelse med to hovedtyper.

**Oversigt over metoder**

Mandatfordelingsmetoder kan ifølge Balinski &Young, inddeles i to hovedtyper:

1. Hamilton-typen, og
2. Mandatprismetoder.

Type 2, mandatprismetoder, omtales i Balinski &Young som 'divisor methods', der oversat direkte til dansk betyder 'divisormetoder'. Vi vil dog, som i Ebbe Thue Poulsen, benytte ordet mandatprismetoder. Ordet divisormetoder benyttes i en anden sammenhæng, se afsnit 2.4.

I det følgende betegner $k_i$ et partis kvota, altså $k_i = M \cdot \frac{s_i}{S}$. Ikke at forveksle hermed benyttes ved mandatprismetoder betegnelsen $q_i^x$ for kvotienten givet ved $q_i^x = \frac{s_i}{x}$, hvor $x > 0$, som stemmer overens med $k_i$ når $x = S/M$ som på s. 6.

## 2.2 Hamilton-typen

Det antal stemmer ét mandat i gennemsnit koster sættes til $x$, der er givet ved forholdet $S/M$, $M > 0$. Herefter findes de enkelte partiers kvota, $k_i = \frac{s_i}{x}$, $i$ = A,...,N.

Ved en mandatfordeling ifølge *Hamiltons* metode tildeles partierne heltalsdelen af $k_i$, der betegnes $[k_i]$. Hvad der måtte blive tilovers af ufordelte mandater efter dette, dvs. $M - \sum_i [k_i]$, gives til de partier med den højeste rest $r_i = k_i - [k_i]$ indtil $\sum_i m_i = M$. (Højst ét ekstra mandat til hvert parti). Da metoden netop tildeler partier med den højeste rest, eller brøkdel, eventuelle ufordelte mandater kaldes metoden også for *største brøks metode.*

En anden lignende metode er Lowndes's metode. I denne metode tildeles de partier med den største justerede rest eventuelle ufordelte mandater. Denne justering af resten $r_i$ foretages i forhold til det enkelte parti, ved at resten deles med heltalsdelen af kvota: $r_i/[k_i]$. Herefter fortsættetes som ved Hamiltons metode, dvs. de partier med den højeste værdi af $r_i/[k_i]$ tildeles (højest) ét mandat indtil $\sum_i m_i = M$.

## 2.3 Mandatprismetoder

Det antal stemmer ét mandat i gennemsnit skal koste sættes til $x > 0$. Herefter benyttes $x$ som divisor til for hvert parti i at bestemme kvotienten $q_i^x = \frac{s_i}{x}$.

Måden $q_i^x$ afrundes på til et heltal (et mandattal) karakteriserer den valgte mandatprismetode. Bliver det samlede mandattal for partierne for stort, vælges blot et større $x$, og tilsvarende vælges et mindre $x$, hvis de tildelte mandater ikke summer op til det ønskede.

*Websters* metode er også meget enkel. Her afrundes $q_i^x$ til nærmeste heltal. Særlige regler må så gælde, hvis resten af $q_i^x$ er ½. Igen reguleres $x$ så det samlede antal tildelte mandater er lig antallet af mandater der skal vælges.

*Generelt*: Enhver afrundingsmetode består i en funktion

$d$: $\mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ så $\forall m \in \mathbb{Z}_+$: $m \leq d(m) \leq m + 1$

Har et parti, $i$, kvotienten $q_i^x$, vil der findes netop ét

$m \in \mathbb{Z}_+$: $d(m - 1) \leq q_i^x \leq d(m)$ (undtaget for $q_i^x = d(0)$)

Eksempler på afrunding er anført i figur 2.1.

```
 d(0)          d(1)    d(2)
+⊥--+--⊥+-⊥-+ ---+--> x-akse
0    1    2    3    4
```

*Figur 2.1*

For $d(m) = q_i^x$ er der dog to mulige afrundinger idet

$d(m - 1) \leq q_i^x \leq d(m)$ og $d(m) \leq q_i^x \leq d(m + 1)$.

Disse særlige tilfælde ses der bort fra her. Det er naturligt at forudsætte, at

$\forall m \in \mathbb{Z}_+$: $d(m) < d(m + 1)$.

Herved sikres der imod ligevægt mellem mere end to mandatfordelinger.

I tabel 2.1 angives fem historisk vigtige mandatprismetoder med deres karakteristiske afrundingsfunktioner *d*.

| Metode | Adams | Dean | Hill | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|---|
| $d(m)$ | $m$ | $\frac{m(m+1)}{m+½}$ | $\sqrt{m(m+1)}$ | $m + ½$ | $m + 1$ |

*Tabel 2.1*

Med kvotienten $q_i^x$ opnår parti i altså det mandattal *m* så $d(m - 1) \leq q_i^x \leq d(m)$. Dette tal kaldes $q_i^x$'s *d*-afrunding.

Den samlede mandatfordeling ***m*** kan da beskrives på følgende måde: Idet det samlede antal af mandater, *M*, ved afrundingsmetoden *d*: $\boldsymbol{m} = (m_A, m_B, \ldots, m_N)$ hvor $\sum_{i=A}^{N} m_i = M$ og $\forall$i: A, ..., N, :

$m_i = \left[\frac{s_i}{x}\right]_d$, for et eller andet $x > 0$.

Med den givne *d*-funktion kan en mandatfordeling ved en mandatprismetode karakteriseres ved at der findes et $x > 0$ så for alle *i* hvor $m_i > 0$ : $\frac{s_i}{d(m_i - 1)} \geq x \geq \frac{s_i}{d(m_i)}$.

Altså $\min_{m_i > 0} \frac{s_i}{d(m_i - 1)} \geq \max_{m_j \geq 0} \frac{s_j}{d(m_j)}$

for $m = 0$ er $d(m - 1)$ ikke defineret, så i dette tilfælde skal kun den anden ulighed være opfyldt. Her regnes med $s/0$ som defineret og $s_i > s_j \Rightarrow s_i/0 > s_j/0$.

Men disse specialtilfælde vil vi ellers ikke komme nærmere ind på.

Mandatprismetoden $\boldsymbol{m} : \mathsf{R}_+^N \times \mathsf{Z}_+ \rightarrow \mathsf{Z}_+^N$ kan defineres rekursivt (udvidelsen af definitionsmængden for ***m*** redegøres der for senere).

a) $\boldsymbol{m}(s, 0) = \mathbf{o}$ (**o** betegner nulvektoren)

b) Hvis $\boldsymbol{m}^* = \boldsymbol{m}(s, M)$ og for $k \in \{A, \ldots, N\}$ så $\frac{s_k}{d(m_k^*)} = \max_{A \leq i \leq N} \frac{s_i}{d(m_i^*)}$

så $(\boldsymbol{m}(s, M + 1))_k = m_k^* + 1$.

Altså det "næste" mandat placeres hos det parti med den største kvotient, der ikke allerede har givet mandat. Heraf fremgår at en mandatprismetode kan opfattes som en divisormetode. Vi regner i det følgende med at divisormetoder også kan betragtes som mandatprismetoder, som vi herefter hovedsagelig vil beskæftige os med.

### 2.4 Divisormetoder

Divisormetoder defineres ifølge Ebbe Thue Poulsen s. 9 som:

**Definition:** En divisormetode er bestemt ved en følge af positive tal $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$, som kaldes divisorer. Partiernes stemmetal skrives op i en kolonne, og derefter udfyldes et tilstrækkeligt antal kolonner med de tal der fremkommer ved division af stemmetallene $d_1$, $d_2$, $d_3$, osv. For at fordele $M$ mandater markerer man de $M$ største af de således fremkomne tal, og hvert parti tildeles et mandat for hvert af de markerede tal, der står ud for partiet.

En oversigt over divisormetoder er givet i tabel 2.2.

| *metode* | *divisorrække* |
|---|---|
| D'Hondts metode | 1, 2, 3, 4, ... |
| D'Hondts modsætning | "0", 1, 2, 3, ... |
| Sainte-Lagües metode | 1, 3, 5, 7, ... |

*Tabel 2.2*

I d'Hondts modsætning forekommer divisoren 0, som blot betyder at alle partier forlods tildeles ét mandat.

Det kan vises [Ebbe Thue Poulsen s. 14 & 49] at en mandatfordeling ifølge d'Hondts metode er identisk med en mandatfordeling ifølge Jeffersons metode, og en fordeling ifølge Sainte-Lagües metode svarer til Websters metode.

### 2.5 Sammenfatning

I ovenstående fik vi beskrevet to hovedtyper af mandatfordelingsmetoder, Hamilton-typen og mandatprismetoder. Det blev vist at en mandatprismetode giver en mandatfordeling der er identisk med en divisormetodes, fx svarer Websters metode, der er beskrevet som en mandatprismetode, til Sainte-Lagües metode, som er en divisormetode. Endvidere blev det vist at den model vi beskæftiger os med kan bruges som fælles ramme for mandatprismetoder.

Der findes flere typer af mandatfordelingsmetoder, som dog ikke har nogen praktisk betydning. I Balinski & Young s. 66 nævnes fx en roulette-metode hvor der spilles om mandaterne. Overført til danske forhold, inddeles en roulette således at et felts størrelse er proportional med det antal stemmer et parti opnåede, $s_i$. Derefter spilles der roulette med et antal kugler svarende til antallet af mandater, $M$. Denne metode kan ikke anklages for at diskriminere de enkelte partier, men har dog næppe nogen praktisk betydning.

# 3. Første vinkel på neutralitet: To sæt aksiomer for modellen

Foreløbig rummer modellen ingen information om de forskellige mandatfordelingsmetoder, endsige om hvordan man kan vurdere neutralitet. I de følgende tre kapitler vil vi anlægge tre forskellige synsvinkler på neutralitet. Først vil vi give modellen indhold ved at stille nogle krav til de mandatfordelingsfunktioner vi betragter, dvs. opstille nogle aksiomer for hvilke egenskaber en fordelingsmetode bør have.
Vi vil se på to sæt af aksiomer, så vidt muligt analysere dem udfra modellen: Hvilke ønsker har man til mandatfordelingsfunktionerne og hvordan kan man præcisere disse ønsker v.h.a. modellen og hvilke muligheder og begrænsninger i modellen der fremkommer udfra aksiomerne, dvs. kan vi få opfyldt alle vores ønsker, eller må vi vælge og prioritere blandt dem. Derudover vil vi vurdere aksiomernes forhold til "virkeligheden"; beskriver aksiomerne situationer som (ofte) opstår, eller er der andre grunde til at medtage dem?

## 3.1 Aksiomer fra Balinski & Young: "Fair Representation".

Problemet der behandles i Balinski & Young er fordeling af pladserne i Repræsentanternes Hus i forhold til antallet af indbyggere i staterne. Udgangspunktet i Balinski & Young er altså på sin vis meget mekanisk og har umiddelbart intet at gøre med f.eks. et dansk folketingsvalg, hvor det er en befolknings holdning til politik det drejer sig om. Ikke desto mindre kan denne situation nemt overføres: Staterne er her partierne, og befolkningstallene er partiernes stemmetal og problemet er at fordele stolene i folketinget mellem partierne i forhold til deres stemmetal.
Som modtræk til denne mekaniske overførsel til et valg, vil vi som nævnt i appendiks beskrive en meget anderledes tilgang som umiddelbart måske mere ligner situationen ved et valg. Den tager nemlig udgangspunkt i folks præferencer, og foretager ud fra det en mandatfordeling.

Udgangpunktet for Balinski & Young er: Hvorledes fordeler man antallet af kongresmedlemmer proportionalt i forhold til befolkningstal? Dette spørgsmål er helt åbent, men konkretiseres gennem de følgende aksiomer (indholdet er taget direkte fra Balinski & Young, mens diskussionen af aksiomerne, eksemplerne og "oversættelsen" til sproget i modellen er egen produktion.):

*1: Homogenitet*
En metode kaldes homogen hvis den giver uændrede mandattildelinger ved samme forholdsvise ændringer i alle partiernes stemmetal. Altså for en given $s$, og en given $\lambda$ (hvor $\lambda \in Q_+$) skal $m(s, M) = m(\lambda s, M)$.
Homogenitetskravet virker umiddelbart retfærdigt, og et manglende homogenitetskrav ville føre til absurde resultater:
Eksempel:
Betragt to partier A og B, og antag at vi har fire mandater der skal fordeles, og betragt to forskellige valg med forskelligt antal vælgere. Manglende homogenitet ville kunne tillade en mandatfordelingsfunktion med følgende funktionsværdier:

Valg 1: $\boldsymbol{S} = (6,6)$: $\boldsymbol{M} = (2,2)$
Valg 2: $\boldsymbol{S} = (4,4)$: $\boldsymbol{M} = (3,1)$

Homogenitetskravet har yderligere som konsekvens at vi nu kan operere med en vektor $\boldsymbol{S}$ hvor $s_A, s_B, \ldots, s_N$ kan antage alle positive rationale værdier. Mandatfordelingsfunktionen ser altså nu således ud:

$$m : \mathbb{Q}_+^N \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+^N$$

Giver denne udvidelse en yderligere beskrivelse af virkeligheden? Man kan sige at stemmetal der ikke tilhører de naturlige tal ingen fortolkningsmulighed har i virkeligheden. På den anden side er det som oftest den relative ændring i et partis stemmetal – og ikke mindst ændringerne partierne indbyrdes – der har betydning, og ikke ændringen givet i absolutte tal, og det giver udvidelsen et konkret indhold.

*2: Symmetri*

En metode kaldes symmetrisk, hvis en permutation af stemmetallene i $\boldsymbol{S}$ giver en mandatfordeling, der er den samme permutation af mandattallene i $\boldsymbol{M}$. Dvs. betragt mandatfordelingsfunktionen $m$ og permutationen $\pi$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_+^N \times \mathbb{Z}_+ & \xrightarrow{m} & \mathbb{Z}_+^N \\ \downarrow \pi \times Id & & \downarrow \pi \\ \mathbb{Q}_+^N \times \mathbb{Z}_+ & \xrightarrow{m} & \mathbb{Z}_+^N \end{array}$$

Hvis symmetri ikke var en betingelse kunne man opnå følgende mandatfordelinger:

Eksempel:

Betragt partierne A, B og C, antag at $M = 6$, og betragt to forskellige valg:

Valg 1: $\boldsymbol{S} = (6,4,2)$: $\boldsymbol{M} = (3,2,1)$

Valg 2: $\boldsymbol{S} = (4,6,2)$: $\boldsymbol{M} = (1,3,2)$

Uden en symmetribetingelse ville partierne ikke være ligestillede: F.eks. kan Parti B for 1/3 af stemmerne opnå 1/3 af mandaterne (valg 1), mens parti A for en lignende del af stemmerne kun kan opnå 1/6 af mandaterne (valg 2).

*3: Svag proportionalitet*

En metode kaldes svagt proportional, hvis det forholder sig således, at når en mandatfordeling $\boldsymbol{m}$ er proportional med $\boldsymbol{s}$, så eksisterer der kun denne ene måde at fordele mandaterne på. Dvs. hvis det netop forholder sig således, at for alle partier er deres relative andel af stemmerne multipliceret med $M$ netop et heltal:

$$\forall i \in \{A,B,\dots,N\} : \frac{s_i}{S} \cdot M \in \mathbb{N},$$

så må fordelingsmetoden $m$ ikke kunne komme med flere vektorer $\boldsymbol{m}$ som løsning på mandatfordelingen, dvs. vi må ikke befinde os i et ligevægtspunkt.

Hvis vi betragter ovenstående eksempel endnu engang, partierne A, B og C, $M = 6$ og $\boldsymbol{s} = (6,4,2)$, vil kvota være henholdsvis 3, 2 og 1, og kravet om svag proportionalitet siger så at $\boldsymbol{m} = (3,2,1)$. Til store valg som f.eks. det danske folketingsvalg er der kun en hypotetisk mulighed for at alle kvota netop er hele tal. Matematisk set må kravet om svag proportionalitet siges at give nogle helt faste holdepunkter for funktionerne $m$, nogle punkter i $\boldsymbol{s}$ hvor de alle skal give den samme funktionsværdi.

*4: Proportionalitet*

En metode kaldes proportional, hvis den er svagt proportional, og den samtidig opfylder følgende: Hvis $\boldsymbol{m}$ er en mandatfordelingsvektor for en mandatfordelingsfunktion $m$, med en tilhørende stemmefordelingsvektor $\boldsymbol{s}$, og $\boldsymbol{m}^*$ er en mandatfordelingsvektor som er (heltallig og) proportional med $\boldsymbol{m}$, og der gælder at $M^*$ er mindre end $M$, så skal $m(s,M^*) = \boldsymbol{m}^*$.

Hvis f.eks. $M = 6$, $\boldsymbol{m} = (3,3)$, og $M^* = 4$, så er $\boldsymbol{m}^* = (2,2)$ den eneste løsning på $m(s,M^*)$.
Dette ville f.eks. i teorien kunne opstå hvis folketinget – uden et folketingsvalg – fik færre medlemmer, og det netop passede således at alle partiernes mandattal ved multiplikation med en fælles faktor netop gav hele tal, da skulle det ny folketing netop bestå af denne sammensætning.

Proportionalitetskravet må være et udtryk for at mandatfordelingen for et større antal mandater anses for mindst lige så neutral som enhver mandatfordeling man ville kunne finde for et mindre antal mandater, eller sagt på en anden måde, jo større $M$ er, jo nærmere kommer man til kunne fordele mandaterne i forhold til kvota.
Når antallet af mandater der skal fordeles, $M$, vokser, vil mandatprismetoder føre til mandatfordelinger udfra den givne stemmevektor, der nærmer sig proportionalvalg, fordi kvota vil få større vægt ved mandatfordelingen.

*5: Ligevægtspunkter*

Ligevægtspunkter er kendetegnet ved at vilkårligt små forskydninger i stemmevektoren $\boldsymbol{s}$ kan give forskellige mandatfordelinger.

Eksempel:
Et simpelt eksempel på et ligestillingspunkt vil være situationen hvor man betragter to partier A og B, $M = 3$ og $\boldsymbol{s} = (2,2)$. Her vil $\boldsymbol{m} = (2,1)$ umiddelbart være en lige så god løsning som $\boldsymbol{m} = (1,2)$. Ændres stemmevektoren imidlertid til $\boldsymbol{s} = (3,1)$, vil den eneste oplagt rigtige løsning for mandatfordelingsfunktionen være $\boldsymbol{m} = (2,1)$

Et ligevægtspunkt er altså som tidligere nævnt en kombination af en stemmefordelingsvektor og et mandattal, hvor mandatfordelingsmetoden ikke giver noget svar på hvilken fordeling der er den rigtige. Fordelingen kan i sådanne punkter afgøres i praksis f.eks. v.h.a. lodtrækning, men dette er naturligvis ikke indarbejdet i modellen. I modellen må man bare konstatere at man på anden måde må afgøre hvilken mandatfordeling man foretrækker.

Ligevægtspunkter vil have størst interesse teoretisk, da det i praksis ved f.eks. folketingsvalg kun i teorien vil være muligt at opnå sådanne situationer. Ligeledes må man sige at det i virkelighedens verden ikke er ønskværdigt at stå i en situation med ligevægtspunkter.

Matematisk får ligevægtspunkterne en vigtig rolle hos Balinski & Young, idet de kan forekomme for vektorer $\boldsymbol{S}$ med irrationale værdier, og Balinski &Young udvider derfor endnu engang modellens definitionsmængde: $m: \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+^N$

Man kan diskutere om denne udvidelse er en styrkelse af modellen. Formålet med udvidelsen er at kunne finde ligevægtspunkterne da disse angiver punkter hvor mandatfordelingsvektoren ændres, men i en konkret situation er man netop ikke interesseret i ligevægtspunkterne, og de forekommer som nævnt praktisk taget aldrig.
Udfra et matematisk synspunkt er udvidelsen dog meget givende, for idet funktionens definitionsmængde udvides fra Q til R, kan man indføre og analysere modellen v.h.a. matematiske begreber som f.eks. grænseværdi. Udvidelsen gør det altså muligt at anvende mere matematik på modellen, og dette kan vise sig at bidrage yderligere til modellens beskrivende kvaliteter.

*6: Fuldstændige metoder*
En metode siges at være fuldstændig hvis følgende gælder: For en følge $s_n$ af stemmefordelingsvektorer, der konvergerer mod $s$, hvor $\boldsymbol{m}$ er mandatfordelingsvektor for alle elementer i følgen, og $s$ er grænseværdi for $s_n$, skal der gælde at $\boldsymbol{m}$ er mandatfordelingsvektor for $s$, altså:

$s_n \to s > 0$ for $n \to \infty$, og $m(s_n,M) = \boldsymbol{m}$ for alle $n$
så $m(s, \mathrm{M}) = \boldsymbol{m}$.

Dette giver os at mængden $\{(s,M) \mid m(S,M) = \boldsymbol{m}\}$, der er en afsluttet mængde, og da kan nogle punkter komme til at ligge i flere mængder hørende til forskellige mandatfordelinger. Disse punkter er netop ligevægtspunkterne.

Fuldstændigheden kan ikke umiddelbart tolkes i den virkelige verden. Den må siges at udgøre et matematisk redskab, som kan inddrage mere matematik i behandlingen af fordelingsmetoderne. Brugen af fuldstændighed må senere vise, hvorvidt begrebet har et konkret indhold.

*7: Fuldstændiggjorte metoder*
Hvis $\boldsymbol{m}$ er mandatfordeling for $m(s,\mathrm{M})$ er $m$ fuldstændiggjort hvis og kun hvis der findes en følge $s_n$ der konvergerer mod $s$, hvor $\boldsymbol{m}$ er mandatfordeling hørende til alle leddene i følgen. Man skal her igen huske at stemmevektorens koordinater kommer fra R, hvilket gør disse infinitesimale betragtninger mulige. Begrebet har igen ingen umiddelbar tolkning i virkelighedens verden.

*8: Befolkningsmonotoni*
Balinski & Young diskuterer tre forskellige definitioner af befolkningsmonotoni:

1. Hvis et parti A's stemmetal stiger, mens de øvrige partiers stemmetal er konstante, må A's mandattal ikke falde. Balinski & Young afviser denne definition, da situationen ikke forekommer i virkeligheden.
2. Hvis et partis kvota stiger, må dets mandattal ikke falde. Balinski & Young afviser også denne definition, idet den er for stærk: Der findes ikke nogen mandatfordelingsmetode der i alle tilfælde kan opfylde dette aksiom. Balinski & Young beviser, at hvis antallet af partier $N > 2$, og $M \neq 0$, og $N \neq M$, så findes der ikke nogen partiel fordelingsmetode, som tilfredsstiller dette krav (se teorem 4.1, side 107).
3. Hvis vi ikke befinder os i et ligevægtspunkt skal følgende gælde: Hvis parti i's stemmetal stiger, og parti $j$'s stemmetal falder, så må parti i ikke få færre mandater og parti j må ikke få flere. Balinski & Young vælger definition 3 som definition af befolkningsmonotoni.

*9: M- monotoni*

En metode er $M$-monoton hvis for alle $s$ og $M$:
$m(s, M) = \boldsymbol{m}$ medfører at $m(s, M+1) = \boldsymbol{m}'$, hvor $M' \geq M$ og $m_i' \geq m_i$, $i \in$ A, B, ..., N.
Dvs. hvis antallet at mandater der skal vælges øges med 1, må de enkelte partiers mandattal ikke kunne falde.

Balinski & Young beviser, at hvis en metode er befolkningsmonoton er den også $M$-monoton.

*10: Respekt for kvota*

Fordelingsmetoden skal respektere kvota, dvs. for ethvert parti skal gælde at mandattallet fremkommer ved at runde ned, dvs. slette decimalerne, eller runde op til nærmeste hele tal, hvor kvota som tidligere er defineret som $k_i = \frac{s_i}{S} \cdot M$

I modellen vil det se således ud:

$$m(s_A, s_B, ..., s_N, M) = (m_A, m_B, ..., m_N), \text{ hvor}$$

$$m_i = k_i \text{ for } k_i \in \mathrm{N}$$

$$k_i - 1 < m_i < k_i + 1, (m_i \in \mathrm{Z}_+), \text{for } k_i \notin \mathrm{N}$$

(behandles yderligere under Ebbe Thue Poulsens aksiomer).

*11: Uniformitet*

Betragt en restriktion af mandatfordelingsfunktionen til et mindre antal partier. Da vil summen af disse partiers mandater ved den fulde mandatfordelingsfunktion fordelt efter restriktionen have den samme fordeling, som ved den fulde mandatfordelingsfunktion.
Balinski & Young viser at en metode er uniform hvis og kun hvis den er $M$-monoton (teorem 8.3 side 144).

**Konsistens?**

Efter gennemgangen af Balinski & Young's aksiomer må de næste spørgsmål være:

> *Er det muligt at afgøre om systemet er konsistent?*
> *Er der fordelingsmetoder der opfylder alle aksiomer?.*

Balinski & Young behandler først dette spørgsmål for aksiomerne 1 – 7.
Følgende sætninger er ifølge Balinski & Young sande (s. 98) :

1. Hamilton, Jefferson, Lowndes, Webster, Adams, Dean og Hills metoder er homogene, symmetriske, proportionale og fuldstændige.
2. Hvis en mandatfordelingsmetode er fuldstændiggjort er den også fuldstændig og arver homogenitet, symmetri og proportionalitet.

Dvs. der eksisterer fordelingsmetoder med disse egenskaber.

For aksiomerne 8 – 11 er dette derimod ikke tilfældet. Et bevis for dette vender vi tilbage til efter aksiomerne fra Ebbe Thue Poulsen.

**3.2 Aksiomer fra Ebbe Thue Poulsen: Matematik og retfærdighed:**

Udgangspunktet for Ebbe Thue Poulsen bog er et ganske andet. Bogen er nemlig skrevet til danske gymnasieelever, og sproget og matematikken er derfor ganske anderledes. Aksiomerne er i langt højere grad forklaret sprogligt, og sværhedsgraden af matematikken er en anden end i Balinski & Young. Ebbe Thue Poulsens aksiomerne bygger for en dels vedkommende på Balinski & Young .Vores mål med at medtage begge sæt aksiomer er at undersøge modellens evne til præcist at kunne beskrive forskelle i aksiomer der umiddelbart ligner hinanden meget. Hvilke forskelle og ligheder er der mellem de to aksiomsæt? Aksiomerne er gengivet så godt som ordret, men vi har selv bidraget med eksempler, tolkning indenfor modellen og enkelte beviser.

*1: Mandaterne skal fordeles blandt partierne i forhold til deres stemmetal.*

Som Ebbe Thue Poulsen bemærker er dette krav, som umiddelbart lyder retfærdigt, svært at konkretisere. Kunne man beskrive dette princip udfra vores model? Umiddelbart må man svare nej. Princippet har flere tolkningsmuligheder. Den mest nærliggende er efter vores mening, at aksiomet må opfattes som en tilkendegivelse af, at vi beskæftiger os med proportionalfordelingsmetoder, forstået på den måde at f.eks. $m(4,2,3)$ ikke kan blive (1,2). (Dette vil vi vende tilbage til under aksiom 6).

*2: Vælgerne skal være ligeberettigede.*
Dvs. at hver vælgers stemme skal tillægges lige megen vægt, eller alle har kun én stemme. Dette er som tidligere nævnt underforstået i modellen, idet der ikke er indlagt nogen mulighed for vægtning af stemmerne.

*3: Partierne skal være ligeberettigede.*
Som eksempel herpå nævner Ebbe Thue Poulsen regimers magt til at forhindre konkurrerende partier i at opstille. Denne diskussion ligger som tidligere nævnt udenfor hele modellen, og kan altså heller ikke umiddelbart udtrykkes i denne.

*4: Hvis to partiers stemmetal byttes om, mens alle andre partiers stemmetal forbliver uændrede, skal fordelingsmetoden resultere i at de to partiers mandattal byttes om. (Symmetri).*

Det vil sige at hvis vi har en mandatfordelingsmetode $m$: $\mathbb{Z}_+^N \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+^N$, og man derefter laver en transposition $\pi$ af to partiers stemmetal $s_i$ og $s_j$, da skal mandatfordelingen fremkomme ved en tilsvarende transposition $\pi$ af de to partiers mandattal $m_i$ og $m_j$. Dette svarer til Balinski &Youngs symmetribegreb, hvor Balinski & Youngs symmetri er en gentagen anvendelse af dette princip (Enhver permutation kan opfattes som en sammensætning af transpositioner).

*5: Hvis en given mandatfordeligsmetode resulterer i at to partier står lige i konkurrencen om et mandat, og stemmetallet for et af disse partier derefter ændres, så skal det enten resultere i at partiet vinder mandatet, eller at det helt mister sin andel i det.*
Dvs. hvis vi befinder os i en ligevægtssituation mellem to partier skal bare én stemmes ændring bringe os væk fra denne ligevægtssituation. (I dette aksiomsæt er koordinaterne i stemmevektoren jo naturlige tal) Ligevægtssituationer skal altså – når to partiers indbyrdes forhold betragtes isoleret – forekomme i punkter. I

modellen kræver det at hvis $m(s_A, s_B, ..., s_N, M)$ giver en ligevægtssituation mellem parti A og B, så skal $m(s_A+1, s_B, ..., s_i-1, ..., s_N, M)$ ikke give en ligevægtssituation mellem parti A og B.

Man kan dog godt komme i den situation hvor man går ud fra en ligevægtssituation mellem to partier, derefter ændrer et af de to partiers stemmetal med én, og så kommer til en anden ligevægtssituation mellem et af de to oprindelige partier og et tredje parti. Betragt følgende situation:

Eksempel:
Tre partier med følgende stemmevektor: $s = (3,3,6)$, og $M = 6$. Dette vil give følgende kvoter (3/2, 3/2, 3). Udfra denne fordeling vil man (hvis fordelingsmetoden skal respektere kvote, se aksiom 12) mindst tildele partier følgende mandater $m = (1,1,3)$. Det sidste mandat vil parti A og B kunne kræve med lige stor ret, altså en ligevægtssituation. Betragt nu et nyt valg med følgende stemmevektor: $s = (4,3,5)$, $M = 6$. Kvoterne vil nu være (2, 3/2, 5/2), hvilken altså giver et mindste mandattal på (2,1,2). Det sidste mandat vil parti B og C kunne kræve med lige stor ret, altså igen en ligevægtssituation.

*6: Monotonikrav 1*

Hvis et parti får flere stemmer end et andet, må en mandatfordelingsmetode ikke tildele det færre mandater:

$$s_i > s_j \Rightarrow m_i \geq m_j$$

Dvs. for $m: (s_A, s_B, .. s_i, s_j, ..., s_N, M) \rightarrow (m_A, m_B, .. m_i, m_j, ..., m_N)$, skal ovenstående gælde.

Uligheden kan også opfattes relativt:

$$\frac{s_i}{s} > \frac{s_j}{s} \Rightarrow m_i \geq m_j,$$

eller udtrykt ved kvota:

$$\frac{s_i}{s} \cdot M > \frac{s_j}{s} \cdot M \Leftrightarrow k_i > k_j \Rightarrow m_i \geq m_j$$

Dette krav kan anses for at være det basale for proportionalvalg, og en mulig tolkning af dette aksiomssæts 1. aksiom. Vi beskæftiger os med andre ord ikke med fordelingsmetoder hvor følgende mandatfordeling kunne forekomme:

Eksempel:
$m(3,1,3) = (1,2)$, men man kan altså godt have at $m(3,1,2) = (1,1)$.

Ved andre mandatfordelingsmetoder kunne der imidlertid godt forekomme situationer hvor dette monotonikrav ikke opfyldes:

Eksempel:
Betragt et valg, hvor der er tale om valg i enkeltmandskredse. Vi forestiller os kandidater fra to partier A og B og 3 kredse med følgende stemmetal:

| | Parti A | Parti B | Mandat går til parti... |
|---|---|---|---|
| Kreds 1 | 100 | 1 | A |
| Kreds 2 | 9 | 10 | B |
| Kreds 3 | 9 | 10 | B |
| I alt | 118 | 21 | (1, 2) |

*7: Monotonikrav 2:*

Hvis et parti forøger sit stemmetal fra et valg til en andet, medens alle andre partiers stemmetal er uændrede, så må dette parti ikke miste mandater. Dette må indebære at det samlede stemmetal $S$ (og eventuelt det samlede mandattal $M$) forøges fra det første valg til det andet. I modellen ville det se således ud (idet stemmetallet $S$ forøges med $n$, og mandattallet $M$ evt. forøges med $\alpha$):

Valg 1: $m:(s_A,s_B,...,s_N,M)\rightarrow(m_A,m_B,...m_N)$

Valg 2:

$m:(s_A+n,s_B,...,s_N,M+\alpha)\rightarrow(m_A+t,m_B+\alpha_B,...m_N+\alpha_N)$, for $n\in \mathrm{N}\wedge t\in \mathrm{N}\cup\{0\}$

og $\alpha=t+\alpha_B+...+\alpha_N$, for $\alpha_i\geq 0, i\in\{B,...,N\}, \alpha\in \mathrm{Z}\ \cup\{0\}$

*8: Monotonikrav 3*

Hvis et parti forøger sit stemmetal fra et valg til et andet, medens alle andre partiers stemmetal er uændrede, må ingen af de øvrige partier vinde mandater herved. Dette må igen indebære at det samlede stemmetal forøges (fra $S$ til $S + n$), men samtidig at det samlede mandattal ikke forøges.

Valg 1: $m:(s_A,s_B,...,s_N,M)\rightarrow(m_A,m_B,...,m_N)$

Valg 2: $m:(s_A+n,s_B,...,s_N,M)\rightarrow(m_A+t,m_B^*,...,m_N^*)$, når $n\in \mathrm{N}\wedge t\in \mathrm{N}\cup\{0\}$

hvor $m_i^*\leq m_i, i\in\{B,....,N\}$

*9.*

Hvis eneste ændring fra et valg til en andet er fremkomsten af et nyt parti, må ingen af de oprindelige partier vinde mandater derved. Det forudsættes altså at $M$ samt alle partiernes stemmetal er konstante, mens $S$ forøges. I modellen vil det se således ud:

Valg 1: $m(s_A,s_B,...,s_N,M)=(m_A,m_B,...,m_N)$

Valg 2: $m(s_A,s_B,...,s_N,s_P,M)=(m_A^*,m_B^*,...,m_N^*,m_P)$, hvor $\forall i\in\{A,...,N\}: m_i^*\leq m_i$

Ved et lignende argument som i aksiom 8 ses det at aksiom 9 er en konsekvens af monotonikrav 1. Desuden er aksiom 9 en konsekvens af aksiom 8, idet det nyopstillede parti kan opfattes som et parti som til valg 1 stiller op uden at opnå nogen stemmer, og derefter ved valg 2 opnår et vist antal stemmer.

*10: Monotonikrav 4*

Hvis et parti A vinder stemmer til et valg (i forhold til sidste valg) og et andet parti B taber stemmer, og der ikke gøres antagelser om de øvrige partier, så må parti A ikke tabe mandater og parti B ikke vinde mandater.

Monotonikrav 4 er mere almen gyldigt end krav 2 og 3, idet det ikke er et krav, at kun stemme/mandattal for to betragtede partier ændrer sig.

I modellen ser monotonikrav 4 således ud:

Valg 1: $m(s_A,s_B,...,s_N,M)=(m_A,m_B,...,m_N)$

Valg 2: $m(s_A+n,s_B\div m,s_C^*,...,s_N^*,M)=(m_A+p,m_B\div q,m_C^*,...,m_N^*)$, hvor $n, m \in N \wedge p, q \in N \cup \{0\}$

*11: Monotonikrav 5:*
Hvis mandatantallet øges så må ingen partier tabe mandater derved. Her må det forudsættes at vi taler om to valg med ens stemmetal, men altså med flere mandater på valg, eller at vi taler om at antallet af mandater øges uden nyvalg.

I modellen ser det således ud:
$m(s_A, s_B, \dots, s_N, M) = (m_A, m_B, \dots, m_N) \Rightarrow$
$m(s_A, s_B, \dots, s_N, M + n) = (m_A{}^*, m_B{}^*, \dots, m_N{}^*)$, hvor $n$ er et naturligt tal, og $m_i{}^* \geq m_i, \forall i \in A, \dots N$

Kravet har som Ebbe Thue Poulsen bemærker ikke den store relevans i forhold til et dansk folketingsvalg, men kan absolut være relevant efter amerikanske forhold. Dette aksiom svarer til Balinski & Youngs aksiom 9.

*12: Fordelingsmetoden skal respektere kvota.*
Dette defineres som hos Balinski & Young.
Dette krav lægger stramme bånd på mandatfordelingsmetoderne. Betragt følgende eksempel:

> Tre partier, $M = 6$, $S = (3,4,5)$, vil resultere i følgende kvoter: (3/2, 2, 5/2). Dette tillader ifølge dette aksiom følgende mandatfordelinger: A: 1 eller 2, B: 2 , C: 2 eller 3, hvilket giver følgende muligheder for mandatfordeling: (1,2,3) eller (2,2,2).

Monotonikrav 1 ville i samme eksempel give følgende muligheder for mandatfordeling:
$m(3,4,5,6)$ tilhører ((0,0,6), (0,1,5), (0,2,4), (0,3,3) (1,1,4), (1,2,3), (2,2,2))

Dvs. for en mandatfordelingsmetode som skal opfylde aksiomerne 6 og 12 er der kun to muligheder:
$m(3,4,5,6) = (1,2,3)$ eller $m(3,4,5,6) = (2,2,2)$

*13: Proportionale stemmefordelinger skal give samme mandatfordeling.*
I modellen vil dette sige:
$m(s_A, s_B, \dots, s_N, M) = (m_A, m_B, \dots, m_N) \Rightarrow m(\lambda s_A, \lambda s_B, \dots, \lambda s_N) = (m_A, m_B, \dots, m_N), \lambda \in Q$
Når modellen ikke er udvidet til at omfatte rationale stemmetal, vil dette aksiom kun have betydning når det forholder sig sådan at $(\lambda s_A, \dots, \lambda s_N)$ netop er hele tal, hvilket i praksis vil sige at $\lambda \in \mathrm{N}$.

*14:*
Hvis to vælgergrupper er enige om en bestemt mandatfordeling, skal et valg i den samlede vælgergruppe ligeledes resultere i denne mandatfordeling.
I modellen vil det se således ud:
Hvis $m(s_A, s_B, \dots, s_N, M) = (m_A, m_B, \dots, m_N)$, og $m(s_A^*, s_B^*, \dots, s_N^*, M) = (m_A, m_B, \dots, m_N)$,
så skal $m(s_A + s_A^*, s_B + s_B^*, \dots, s_N + s_N^*, M) = (m_A, m_B, \dots, m_N)$

Dette medfører at der ved addition (og multiplikation) ikke kan fremkomme et ligevægtspunkt. F.eks.: $m(3,3,1) = (0,1)$ og $m(6,6,1) = (0,1)$. Så er situationen (9,9,1) ikke en ligevægtssituation, men har kun mandatfordelingen (0,1) som løsning.

For $\lambda \in N$ er princip 13 er en konsekvens af princip 14:
Hvis $\left(s_A^*, s_B^*, \ldots, s_N^*\right)$ er $N$ gange så stor som $\left(s_A, s_B, \ldots, s_N\right)$ dvs. de er proportionale, kan den første vælgergruppe tænkes fremkommet ved at N vælgergrupper med den sidste stemmefordeling har sluttet sig sammen. Ifølge princip 14 vil to stemmefordelinger der giver den samme mandatfordeling tilsammen også give denne mandatfordeling. Benyttes dette princip $N$ gange fremkommer det ønskede resultat.

*15:*
Dette aksiom omhandler opsplitning og sammenslutning. Man betragter to valg hvor følgende partier stiller op:

| | |
|---|---|
| Valg 1: A, B, ...,L ,..., N | I alt $N$ partier |
| Valg 2: A, B, ... ,L', L*, ..., N | I alt $N$+1 partier |

Stemmetallene ved de to valg er som følger:
Valg 1: $\left(s_A, s_B, \ldots, s_L, \ldots, s_N\right)$
Valg 2: $\left(s_A, s_B, \ldots, s_{L'}, s_{L^*}, \ldots, s_N\right)$, hvor $s_{L'} + s_{L^*} = s_L$ og alle andre stemmetal er uændrede.

Da skal der om mandatfordelingerne gælde følgende:

A: $m_{L'} + m_{L^*} \leq m_L$
B: $m_{L'} + m_{L^*} \leq m_L + 1$

Punkt A omhandler situationen hvor to partier slutter sig sammen til ét parti (her kommer valg 2 så før valg 1). Det siger, at to partier der slutter sig sammen ikke må kunne tabe mandater derved.
Punkt B omhandler situationen hvor et parti splittes op i to. Her må de to nydannede partier tilsammen ikke vinde mere end ét mandat i forhold til det oprindelige parti.

Dette vil umiddelbart tilskynde partier til at splitte sig op, måske få flere mandater og derefter lave et politisk fællesskab. Denne snedige metode er måske ikke så holdbar i virkeligheden: Hvis et stort parti pludselig delte sig og dannede to partier med (næsten) enslydende partiprogrammer, ville det givet virke politisk utroværdigt. Helt modsat ser man faktisk til danske kommunalvalg at små partier stiller op på listeforbund (altså situation A). For disse partier gælder det om overhovedet at opnå repræsentation, og dermed undgå stemmespild.

*16. Uafhængighed af små ændringer:*
For et givet parti A (hvorom det gælder at det ikke befinder sig i en ligevægtssituation med noget andet parti) skal gælde, at der findes et positivt tal $a$ således, at såfremt stemmetallene ændres så lidt, at intet partis procentvise andel i stemmerne forøges eller formindskes med mere end $a$, ændres parti A's mandattal ikke.

I modellen vil dette se således ud:

Valg 1: $m(s_A, s_B, ..., s_N, M) = (m_A, m_B, ..., m_N)$

Valg 2: $m(s_A^*, s_B^*, ..., s_N^*, M) = (m_A, m_B^*, ..., m_N^*)$, hvor $\frac{|s_i^* - s_i|}{s_i} \cdot 100\% \in [0; a], i \in A, ..., N$

Hvis det gælder for alle partier at de ikke befinder sig i en ligevægtssituation med noget andet parti, må aksiom 16 altså gælde for alle partier, og det vil være muligt at finde et $a$ for hvert parti. Det vil altså være muligt at finde et $a$ (det mindste af alle $a$'erne) så mandatfordelingen ikke ændres hvis stemmetallet i procent ikke for nogen partier forøges eller formindskes med mere end $a$. Altså for enhver stemmevektor $s$ (hvor vi ikke befinder os i en ligevægtssituation), er det muligt at finde en stemmevektor $s^*$ hvis man går vilkårligt (hele tal) tæt på $s$, så $s$ og $s^*$ giver den samme mandatfordeling.

Eksempel:
Betragt 3 partier A, B, C, hvor stemmevektoren $s = (3,4,6)$ og $M = 6$. Mandatfordelingsvektoren $m = (1,2,3)$, hvilket er i overensstemmelse med de hidtil opstillede aksiomer. Opgaven er så at bestemme $a$, så mandatfordelingen bliver den samme hvis stemmeabdelen ikke ændres med mere end $a$. (Vi vælger for nemheds skyld at betragte $a$ som en brøk, og ikke som en procentdel.)

$a < 1/6$: Her vil der ikke kunne ske nogen stemmeændring.

$a = 1/6$: Her vil kun parti C kunne ændre stemmetal, og da S skal være konstant er det ikke muligt at ændre stemmevektoren.

$1/6 < a < 1/4$: Samme situation som ovenstående.

$a = ¼$: Parti A kan stadig ikke ændre stemmetal. Parti B kan ændre stemmetal til 3 eller 5, og parti C kan ændre stemmetal til 5 eller 7. Følgende stemmevektorer er altså mulige inden for en ændring på højst ¼: (3,3,7) og (3,5,5). Begge disse stemmefordelinger vil kunne give mandatfordelingen (1,2,3) i overensstemmelse med de øvrige aksiomer, men $m$(3,3,7,6) vil også kunne give (1,1,4), igen i overensstemmelse med de øvrige aksiomer. Om denne situation falder indenfor aksiom 16 er ikke helt klart.

$¼ < a < 1/3$: Som for $a = ¼$.

$a = 1/3$: Parti A kan ændre stemmetal til 2 og 4. Parti B kan ændre stemmetal til 3 eller 5. Parti C kan ændre stemmetal til 4, 5, 7 eller 8. Følgende stemmevektor er altså en mulig indenfor en ændring på 1/3: (4,5,4). Men $m$(4,5,4,6) kan ikke give (1,2,3) uden at bryde med monotonikrav 1.

Løsningen for $a$ er altså ikke ganske klar. Dette skyldes sikkert at stemmetallene er så beskedne. For større værdier er det givet muligt at finde "skudsikre" løsninger for $a$.

Aksiom 16 lægger sig op af B alinski & Youngs begreb 'fuldstændiggjort'. Såfremt man har identificeret $S^*$, må det være muligt at konstruere en følge af stemmevektorer, som ligger mellem $S^*$ og $S$, og som har $S$ som grænseværdi, og dermed er $m$ fuldstændiggjort.

**Konsistens?**
Er dette system af aksiomer konsistent? Er det muligt at finde en mandatfordelingsmetode der opfylder alle de 16 aksiomer? Nej, må man konstatere, af flere årsager:
- Når aksiom 1 ikke er præcist defineret, kan man ikke tale om at det er opfyldt.
- Aksiom 10 og 12 kan ikke opfyldes samtidig, dvs. det 4. monotonikrav og respekten for kvota kan ikke opfyldes samtidig. Beviset for dette er taget fra Balinski og Young:

**Sætning:** Respekt for kvota og monotonikrav 4 kan ikke i alle tilfælde opfyldes samtidig.
Bevis: Antag at antallet af partier, *N*, er større eller lig med 4, og at antallet af mandater *M* der skal fordeles er større eller lig med *N*+3. Betragt et valg med en fordelingsmetode m som antages både at opfylde princip 12 og 10. *m* giver følgende kvota: $\left(5+\varepsilon, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}-\varepsilon, k_5, \ldots, k_N\right)$ hvor $k_5, \ldots, k_N$ er positive heltal hvis sum er $M-7$, og hvor $\varepsilon$ er et lille positivt rationalt tal. Da $P_I$ i følge princippet om kvota skal have mindst 5 mandater, og da $k_5, \ldots, k_N$ er heltal og derfor skal have mandater svarende til kvota, vil der til parti 2,3 og 4 være *M*– 5 – (*M*– 7) = 2 mandater. Dvs. at mindst eet af de tre partier ikke får nogen mandater, og ifølge monotoniprincippet bliver det parti 4.

Betragt nu et nyt valg (markeret med *) med den samme fordelingsmetode og samme antal partier og mandater. Kvota for det nye valg er: $\left(4-\varepsilon, 2-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon, k_5, \ldots, k_N\right)$, hvor $k_5, \ldots, k_N$ er positive heltal hvis sum igen er lig *M* - 7. Ifølge princippet om kvota skal parti 1 have højst 4 mandater, parti 2 højst 2 og partierne 5 til *N* skal have mandater svarende til kvota. Til parti 3 og 4 bliver der mindst et mandat, og dvs. at parti 4 ifølge monotoniprincippet får et mandat. Dvs. at parti 4 får flere mandater ved 2. valg og parti 1 får færre: $m_1^* < m_1 \wedge m_4^* > m_4$ Dette skal ifølge monotoniprincippet give sig udslag i, at $\frac{k_1^*}{k_4^*} < \frac{k_1}{k_4}$ (da kvota er entydigt afhængig af partiernes stemmetal når det samlede antal stemmer og *M* er bestemt), dvs. at $\frac{4-\varepsilon}{\frac{1}{2}+\varepsilon} < \frac{5+\varepsilon}{\frac{2}{3}\div\varepsilon}$. Dette er kun opfyldt for $\varepsilon > \frac{1}{61}$, dvs. ikke for et vilkårligt lille $\varepsilon$.

## 3.3 Opsamling:

Sammenligning af Balinski & Youngs og Ebbe Thue Poulsens aksiomsæt.
De to fremstillinger er – grundet deres forskellige formål – forskellige i udtryk: Ebbe Thue Poulsens er sprogligt forklarende og aksiomerne ligger hovedsagelig i forlængelse af virkeligheden, mens Balinski & Youngs er matematisk baserede og har til formål at konstruere et matematisk system, hvorfra man kan bevise sætninger. F.eks. giver udvidelsen af definitionsmængden et glimrende værktøj til at bevise yderligere sætninger. På den anden side må man sige at aksiomernes sammenhæng med den virkelige verden bliver noget mere perifér, f.eks. udvidelsen af definitionsmængden til at omfatte de irrationale tal, på grundlag af et ønske om at kunne bestemme ligevægtspunkter.
Modellens evne til at beskrive og bearbejde aksiomerne:
- Modellen formår i høj grad at hjælpe til at præcisere det faktiske indhold i aksiomerne, undtagen de

(ikke uvæsentlige) aspekter som omtales i beskrivelsen af modellens begrænsninger.
- Forskelle mellem nærtliggende aksiomer klargøres, f.eks. forskellen mellem Balinski & Youngs begreb "fuldstændiggjort" og Ebbe Thue Poulsens "Uafhængighed af små ændringer", hvor forskellen i definitionsmængde bliver afgørende, eller Balinski & Youngs 3 definitioner af befolknings-monotoniaksiomet, som vil have meget forskellige konsekvenser: Et får ikke rigtig nogen konsekvens p.g.a. manglende tilknytning til virkeligheden, et andet får den meget vidtrækkende konsekvens at ingen metode vil kunne opfylde det i alle tilfælde.
- Matematikken viser også at nogle aksiomer er ens selvom de er formuleret forskelligt, f.eks. er der to måder at definere "symmetri" på, som matematisk er ens.
- Modellen gør det ligeledes muligt at undersøge hvorvidt nogle aksiomer rent faktisk har et enslydende indhold, eller er indbyrdes afhængige (som f.eks. Ebbe Thue Poulsens monotonikrav, og Balinski & Youngs befolkningsmonotoni, House-monotoni og uniformitet).
- Den matematiske beskrivelse giver nogle resultater, som ikke umiddelbart er indlysende – f.eks. at respekten for kvota og monotonikrav 4 ikke altid kan opfyldes samtidig – og som er meget essentielle for bestemmelsen af neutralitet for fordelingsmetoderne.

Man må altså sige at man kan stille nogle verbale krav til neutralitet, derefter have gode muligheden for at omsætte dem til "modelsprog", og derefter til en vis grad nærmere analysere deres virkninger og muligheden for at få opfyldt alle kravene.
Balinski & Young og Ebbe Thue Poulsen går derefter skridtet videre og analyserer hvilke specifikke fordelingsmetoder der opfylder hvilke aksiomer. Dette vil igen skabe en yderligere grundlag for at beslutte sig for en metode – hvor beslutningen vel at mærke sker på baggrund af en subjektiv/politisk udvælgelse af aksiomer.

## 4. Anden vinkel på neutralitet: Fordelingsproblemet – et eksempel

Når en ideel løsning på fordelingsproblemet ikke er mulig (og det er den aldrig i praksis) må man betragte afvigelserne fra idealet. Forskellige fordelingsmetoder giver forskellige afvigelser , og man må derfor spørge sig selv, om det er muligt at kvalitetsbedømme en fordelingsmetode ved at se på, hvorledes den løser problemet med afvigelserne. Disse er imidlertid, selv ved anvendelse af én bestemt metode ikke entydige, men ændrer sig alt efter hvordan man betragter dem, idet en given løsning kan betragtes fra hhv. **vælgerens, partiets** eller **mandatets** synspunkt. I det følgende afsnit vil vi beskæftige os med dette.

En nærliggende tanke er at betragte afvigelserne som afstande fra idealløsningen og således benytte afstandsformlen som et mål for den samlede uretfærdighed (Ebbe Thue Poulsen). Betragtet fra et vælgersynspunkt i et valg hvor N partier opstiller vil det se således ud:

$$U_v = \sqrt{s_a\left(\frac{M}{S} \div \frac{m_a}{s_a}\right)^2 + s_b\left(\frac{M}{S} \div \frac{m_b}{s_b}\right)^2 + \ldots + s_N\left(\frac{M}{S} \div \frac{m_N}{s_N}\right)^2}$$

For at uretfærdigheden skal blive så lille som muligt skal summen under rodtegnet være så lille som muligt. Denne sum kan omskrives til:

$$\left(s_a\left(\frac{M}{S}\right)^2 + \ldots. + s_N\left(\frac{M}{S}\right)^2\right) \div \left(2s_a\frac{M\cdot m_a}{S\cdot s_a} + \ldots. + 2s_N\frac{M\cdot m_N}{S\cdot s_N}\right) + \left(s_a\left(\frac{m_a}{s_a}\right)^2 + \ldots. + s_N\left(\frac{m_N}{s_N}\right)^2\right)$$

Første led i denne sum svarer til:

$$s_a\left(\frac{M}{S}\right)^2 + \ldots. + s_N\left(\frac{M}{S}\right)^2 = (s_a + \ldots. + s_N)\cdot\left(\frac{M}{S}\right)^2 = S\left(\frac{M}{S}\right)^2 = \frac{M^2}{S}$$

Andet led:

$$2s_a\frac{M\cdot m_a}{S\cdot s_a} + \ldots. + 2s_N\frac{M\cdot m_N}{S\cdot s_N} = 2\frac{M}{S}(m_a + \ldots. + m_N) = 2\frac{M^2}{S}$$

Og tredje led kan omskrives til:

$$s_a\left(\frac{m_a}{s_a}\right)^2 + \ldots. + s_N\left(\frac{m_N}{s_N}\right)^2 = \frac{m_a^2}{s_a} + \ldots. + \frac{m_N^2}{s_N} = \sum_i \frac{m_i^2}{s_i}$$

De tre led samles:

$$\frac{M^2}{S} \div 2\frac{M^2}{S} + \sum_i \frac{m_i^2}{s_i} = \sum_i \frac{m_i^2}{s_i} \div \frac{M^2}{S}$$

Da sidste led er en konstant skal første led være så lille som muligt. Antager vi, at det er tilfældet, så vil flytning af ét mandat fra et parti til et andet resultere i følgende ulighed:

$$\frac{(m_i \div 1)^2}{s_i} + \frac{(m_j + 1)^2}{s_j} \geq \frac{m_i^2}{s_i} + \frac{m_j^2}{s_j} \quad \text{,for alle heltallige } m_i, m_j, i \neq j \text{ og } m_i > 0$$

Denne ulighed kan omskrives til:

$$\frac{m_i^2}{s_i} \div \frac{2m_i}{s_i} + \frac{1}{s_i} + \frac{m_j^2}{s_j} + \frac{2m_j}{s_j} + \frac{1}{s_j} \geq \frac{m_i^2}{s_i} + \frac{m_j^2}{s_j}$$

Og videre til:

$$\frac{1 \div 2m_i}{s_i} \geq \div \frac{1 + 2m_j}{s_j}$$

og

$$\frac{s_i}{1 \div 2m_i} \leq \div \frac{s_j}{2m_j + 1}$$

hvilket giver:

$$\frac{s_i}{m_i \div ½} \geq \frac{s_j}{m_j + ½}$$

Denne ulighed er opfyldt ved en mandatfordeling svarende til Websters ( Sainte – Lagues) metode.
I kapitel 5 vil afvigelserne, set fra et vælgersynspunkt, yderligere blive uddybet

Man kan anvende samme formel ved at betragte problemet set fra **partiernes** synspunkt. Afvigelsen fra idealet bliver så:

$$U_p = \sqrt{(k_a \div m_a)^2 + (k_b \div m_b)^2 + .... + (k_N \div m_N)^2}$$

Anvender man dette mål for "uretfærdighed" føres man ikke til den ovennævnte metode, men derimod til Største brøks metode ( Hamiltons metode).

Til anskueliggørelse af problemstillingen bringes her et taleksempel:
Fire partier P1, P2, P3, P4 opstiller til et valg, hvor 10 mandater skal vælges. Der afgives 181 stemmer, som ved anvendelse af fire forskellige mandafordelingsmetoder giver disse resultater:

| Partier | P1 | P2 | P3 | P4 | Sum |
|---|---|---|---|---|---|
| Stemmetal | 101 | 46 | 30 | 4 | 10 |
| Største brøks metode<br>Mandater | 6 | 2 | 2 | 0 | 10 |
| D'Hondts metode<br>Mandater | 6 | 3 | 1 | 0 | 10 |
| D'Hondts modsætning<br>Mandater | 5 | 2 | 2 | 1 | 10 |
| Sainte – Lagues metode<br>Mandater | 5 | 3 | 2 | 0 | 10 |

**Skema 4.1.** Mandatfordeling ved anvendelse af fire forskellige metoder (Glaven).

De fire metoder giver som det fremgår af skemaet fire forskellige mandatfordelinger. Disses afvigelser fra idealløsningen betragtes nu på forskellige måder.

**1.** Problemet anskues fra **vælgerens** synspunkt – bliver denne retfærdigt behandlet? M.a.o: får vælgeren indflydelse svarende til sin stemmes vægt? Den enkelte vælgers kvote vil være:

$$k = \frac{M}{S}$$

For ( alle vælgere i) partiet i vil kvoten være:

$$k_i = \frac{s_i}{S} M$$

$$= s_i \cdot k$$

Vælgerrepræsentationen for ovennævnte taleksempel efter de fire metoder ( Største brøks, d'Hondts, d'Hondts modsætning og Sainte – Lagues metoder) er opstillet skematisk nedenfor. I eksemplet er den enkelte vælgers kvote $k = 0{,}05525$ .

| Partier | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| Største brøk | 0,05941 | 0,04348 | 0,06667 | 0,0000 |
| afvigelse | **+0,00416** | **- 0,01177** | **+0,01142** | **- 0,05525** |
| d'Hondt | 0,05941 | 0,06522 | 0,03333 | 0,0000 |
| afvigelse | **+0,00416** | **+0,00997** | **- 0,02182** | **- 0,05525** |
| d'Hondts mods. | 0,04950 | 0,04348 | 0,06667 | 0,25000 |
| afvigelse | **- 0,00575** | **- 0,01177** | **+0,01142** | **+0,19475** |
| Sainte – Lague | 0,04950 | 0,06522 | 0,06667 | 0,0000 |
| afvigelse | **- 0,00575** | **+ 0,00997** | **+0,01142** | **- 0,05525** |

**Skema 4.2.** Vælgerindflydelse angivet som afvigelse ( fed skrift ) fra idealkvoten 0,05525/vælger.+ betyder større indflydelse end berettiget, - betyder mindre indflydelse end berettiget.

Disse tal kan vurderes på forskellige måder:

- Man kan finde summen for for afvigelserne ( vel at mærke disses numeriske værdi, da positive og negative afvigelser er lige uønskværdige udfra et retfærdighedskriterium), idet afvigelsen for hvert enkelt partis vælger ganges med partiets stemmetal ( uretfærdigheden begås mod alle partiets vælgere), dvs. afvigelsen for partiet i's vælgere bliver:

$$U_{v_i} = S \cdot \sum |\Delta_i| \qquad \text{hvor } \Delta_i = \frac{m_i}{s_i} \div k$$

$$= S \cdot \sum \left| \frac{m_i}{s_i} \div k \right|$$

$$= S \cdot \sum \left| \frac{m_i \cdot k}{k_i} \div k \right|$$

$$= k \cdot S \cdot \sum \left| \frac{m \div k_i}{k_i} \right|$$

$$= M \sum \left| \frac{m_i \div k_i}{k_i} \right|$$

Det giver for de fire metoder:

| | |
|---|---|
| Største brøks metode: | 1,525 |
| D'Hondts metode: | 1,754 |
| D'Hondts mods. | 2,244 |
| Sainte – Lagues metode: | 1,603 |

Da afvigelsen skal være så lille som mulig er Største brøks metode altså i dette tilfælde den bedste.

- Man kan anvende den i begyndelsen af kapitlet nævnte formel, hvor man finder kvadratroden af summen af afvigelsernes kvadrater ( atter multipliceret med stemmetallet). Det giver:

| | |
|---|---|
| Største brøks metode: | 0,05779 |
| D'Hondts metode: | 0,06377 |
| D'Hondts modsætning: | 0,16534 |
| Sainte – Lagues metode: | 0,05758 |

Her viser, som også omtalt i begyndelsen af kapitlet, Sainte – Lagues metode sig som den bedste, idet dog Største brøks metode dog er næsten lige så god med resultatets tre første decimaler identiske med Sainte – Lagues.

- Man kan vælge at udregne den største positive afvigelse fra idealet ,dvs

$\max\{m_i \div k_i\}$ hvor $m_i > k_i$

og så foretrække den metode, hvor denne afvigelse er mindst, idet man tilsyneladende tilstræber, at intet enkelt partis vælgere begunstiges i større omfang.

Som tallene nedenfor viser, peger det på d'Hondts metode:

| | |
|---|---|
| Største brøks metode: | 0,01142 |
| D'Hondts metode: | 0,00997 |
| D'Hondts modsætning: | 0,19475 |
| Sainte – Lagues metode: | 0,01142 |

- En fjerde metode er at registrere den største numeriske værdi af den største **negative** afvigelse. Tankegangen bag denne fremgangsmåde synes at være,at man finder det uheldigt, hvis et eller måske flere partier groft underrepræsenteres. Enhver underrepræsentation vil uvægerlig medføre over-repræsentation andetsteds, og man kan sige, at man ved denne metode interesserer sig for dem der lider tab, og ikke for dem der begunstiges, hvorfor man kræver at:

$\max |m_i \div k_i|$

hvor $k_i > m_i$ skal være så lille som mulig.

Med de tidligere benyttede tal (skema 4.2)giver det:

| | |
|---|---|
| Største brøks metode: | 0,05525 |
| D'Hondts metode: | 0,05525 |
| D'Hondts modsætning: | 0,01177 |
| Sainte-Lagues metode: | 0,05525 |

Som det fremgår peger de fire fremgangsmåder på hver deres metode som den bedste, vel at mærke udfra det valgte talmateriale.

**2.** I ovenstående betragter man som nævnt den uret, der begås mod **vælgeren**, men man kunne også se på, hvorledes **partierne** behandles. Ideelt set bør ethvert parti opnå en repræsentation der svarer til partiets stemmeandel. For partiet i må man således kræve at:

$$\frac{m_i}{M} = \frac{s_i}{S}$$

$$når \frac{m_i}{M} \neq \frac{s_i}{S} fås$$

$$\frac{m_i}{M} \div \frac{s_i}{S} = \frac{m_i}{M} \div \frac{s_i \cdot k}{M} = \frac{1}{M}\left(m_i \div k_i\right)$$

Partirepræsentation opstillet med standardeksemplets tal giver følgende:

| Partier | P1 | P2 | P3 | P4 | sum |
|---|---|---|---|---|---|
| Ideel | 0, 5580 | 0,2541 | 0,1657 | 0,0221 | 1,0 |
| Største brøks metode<br>afvigelse | 0,6000<br>**+0,0420** | 0,2000<br>**- 0,0541** | 0,2000<br>**+0,0343** | 0,0000<br>**- 0,0221** | 1,0 |
| D'Hondts metode<br>afvigelse | 0,6000<br>**+0,0420** | 0,3000<br>**+0,0459** | 0,1000<br>**- 0,0657** | 0,0000<br>**- 0,0221** | 1,0 |
| D'Hondts modsætning<br>afvigelse | 0,5000<br>**- 0,0580** | 0,3000<br>**+0,0459** | 0,2000<br>**+0,0343** | 0,1000<br>**+0,0779** | 1,0 |
| Sainte – Lagues metode<br>afvigelse | 0,5000<br>**- 0,0580** | 0,3000<br>**+0,0459** | 0,2000<br>**+0,0343** | 0,0000<br>**- 0,0221** | 1,0 |

**Skema 4.3.** Partirepræsentation for de fire partier angivet som afvigelse ( fed skrift) fra det ideelle. + betegner overrepræsentation, - betegner underrepræsentation.

Anlægger man de tidligere gennemgåede vurderingskriterier på ovenstående eksempel får man følgende resultater, når man søger at bestemme den bedste metode:

| | |
|---|---|
| Summen af afvigelserne | Største brøks metode |
| Kvadratroden af summen af afvigelsernes kvadrat | samme |
| Minimum for største positive afvigelse | samme |
| Minimum for numerisk største negative afvigelse | samme |

**Skema 4.4.** Bedste mandatfordelingsmetode bedømt i forhold til **partirepræsentationen**

Det valgte taleksempel viser, i overensstemmelse med hvad der tidligere er nævnt, Største brøks metode som den bedste metode i denne forbindelse.

**3.**Man kan også betragte problemet udfra de valgte **mandaters** synspunkt, altså se på det antal stemmer en kandidat har skullet opnå for at blive valgt - man kan forestille sig at hver enkelt opstillet kandidat personlig skal "betale" for sin plads med stemmer. Denne "betaling" bør ideelt set være den samme i alle de partier, der opnår repræsentation. Afvigelsen ("uretfærdigheden") fra idealet kan udtrykkes således:

$$\frac{S}{M} \div \frac{s_i}{m_i} = \frac{1}{k} \div \frac{k_i}{m_i \cdot k} = \frac{1}{k}\left(\frac{m_i \div k_i}{m_i}\right)$$

Med standardeksemplets tal ser en skematisk opstilling således ud:

| Parti | P1 | P2 | P3 | P4 |
|---|---|---|---|---|
| Ideel pris/mandat ( S:M) | 18,1 | 18,1 | 18,1 | 18,1 |
| Største brøks metode | 16,83 | 23 | 15 | - |
| afvigelse | **+1,27** | **- 4,90** | **+2,90** | - |
| D'Hondts metode | 16,83 | 15,33 | 30 | - |
| Afvigelse | **+1,27** | **+2,77** | **- 11,9** | - |
| D'Hondts modsætning | 20,20 | 23 | 15 | 4 |
| Afvigelse | **- 2,10** | **- 4,90** | **+2,90** | **+14,10** |
| Sainte – Lagues metode | 20,20 | 15,33 | 15 | - |
| Afvigelse | **- 2,10** | **+2,77** | **+2,90** | - |

**Skema 4.5.** Mandatrepræsentation for de fire partier angivet som afvigelse ( fed skrift) fra det ideelle. + betegner overrepræsentation, - betegner underrepræsentation.

De fire metoder anvendt til bedømmelse af afvigelser anvendt på ovenstående giver følgende resultat med hensyn til bedste metode:

| | |
|---|---|
| Summen af afvigelserne | Sainte – Lague |
| Kvadratroden af summen af afvigelsernes kvadrat | Sainte - Lague |
| Minimum for største positive afvigelse | d'Hondt |
| Minimum for numerisk største negative afvigelse | Sainte - Lague |

**Skema 4.6.** Bedste mandatfordelingsmetode bedømt i forhold til **mandatrepræsentationen.**

Som illustreret af ovenstående taleksempel og andetsteds omtalt findes der ikke én mandatfordelingsmetode som samtidig kan tilgodese både vælger, parti og mandat. Det er derfor nødvendigt, at man ved valg af metode gør sig klart, hvilke hensyn man ønsker fremmet, og hvilke man lægger mindre vægt på. Matematikken kan bistå ved at bringe klarhed over de enkelte metoders egenskaber og således medvirke til, at den politiske beslutning om valg af mandatfordelingsmetode tages på et kvalificeret grundlag.

## 5. Tredje vinkel på neutralitet: Parvise sammenligninger og løsning af optimeringsproblem

I det følgende ser vi på ulighedsbegrebet ved parvise sammenligninger mellem partierne. Dernæst ser vi på mål for ulighed. Det er allerede vist at ét bestemt mål for uretfærdighed peger på Websters metode som den eneste der *kan* minimere dette. Nu vises at Websters metode rent faktisk er en løsning på dette problem.

Spørgsmålet om, hvordan man skal vælge mellem de uendelig mange mandatprismetoder, fører til stabilitetsbegrebet ved parvise sammenligninger mellem partierne. For at en mandatprismetode er stabil, må der til ingen stemmefordeling mellem partierne knyttes en mandatfordeling, som har den egenskab, at uligheden bliver mindre ved at flytte et mandat fra et parti til et andet.

Uligheden i mandatfordelingen mellem to partier kan måles ved $|m_i/s_i - m_j/s_j|$.

For at $\boldsymbol{m}$ skal være stabil, må altså nødvendigvis kræves
$|(m_i - 1)/s_i - (m_j + 1)/s_j| \geq |m_i/s_i - m_j/s_j|$.

Dette opnås ved:

Hvis $m_i/s_i \geq m_j/s_j$ : $m_i/s_i - m_j/s_j \leq (m_j + 1)/s_j - (m_i - 1)/s_i \Leftrightarrow \dfrac{s_i}{m_i - \frac{1}{2}} \geq \dfrac{s_j}{m_j + \frac{1}{2}}$

og omvendt, altså netop ved Websters metode.

Imidlertid kan uligheden i mandattildeling mellem to partier også måles ved enhver differens, der kan opnås ved omformning af uligheden: $m_i/s_i \geq m_j/s_j$.
For eksempel ved $m_i \geq (m_j/s_j) \cdot s_i$.

I alt er der 16 forskellige udtryk af denne art til parvist mål af uligheden, idet $16 = 2^4$, således at forstå at hver af de fire størrelser $m_i$, $m_j$, $s_i$, $s_j$ kan optræde i enten tæller eller nævner.

For nogle mål af ulighed er der problemer, hvor hver mandattildeling er ustabil. Enhver anden $m$-funktion fører til en af de fem nævnte mandatprismetoder.

En anden problemstilling er at i stedet for de absolutte udtryk $|y - z|$, må det relative mål:
$|y - z|/\min(y, z)$ (når $\min(y, z) \neq 0$),

være at foretrække. Så får man for alle 16 absolutte mål det relative $\dfrac{m_i s_j}{m_j s_i} - 1$, som fører til Hills metode.

Også ved parvise sammenligninger kunne der tages højde for en eventuel spærregrænse. Dette vil ikke ske her.

Tabel der viser hvordan forskellige mål for uligheden fører til valg af forskellige metoder:

| Metode | Adams | Dean | Hill | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|---|
| Mål | $m_i - \dfrac{m_j}{s_i/s_j}$ | $\dfrac{s_j}{m_j} - \dfrac{s_i}{m_i}$ | $\dfrac{m_i/s_i}{m_j/s_j}$ | $\dfrac{m_i}{s_i} - \dfrac{m_j}{s_j}$ | $m_i \dfrac{s_i}{s_j} - m_j$ |

### 5.1 Optimering under bibetingelser

En anden måde at angribe spørgsmålet om ulighed på er optimering under bibetingelser. Til en given stemmefordeling $\mathbf{s}$ skal man finde den mandatfordeling $\mathbf{m} \in Z_+^N$, som minimerer et mål for uligheden under bibetingelsen $\sum_{i=A}^{N} m_i = M$, hvor $M$ er det antal mandater, der skal fordeles.

Hvis man sætter $\sum_{i=A}^{N} s_i = S$ og $k_i = \frac{s_i}{S} \cdot M$

kunne man for eksempel ønske at minimere $\sum_{i=A}^{N} |m_i - k_i|$ eller $\sum_{i=A}^{N} (m_i - k_i)^2$,
eller en hvilken som helst $l_p$ -norm af $\mathbf{m} - \mathbf{k}$.

Det viser sig i alle tilfælde at føre til Hamiltons metode som den bedste.

Den går ud på at for hvert parti i bestemmes heltalsdelen af $k_i$. Det eventuelt resterende antal mandater fordeles med 1 hver til partierne med den største rest. Hamiltons metode er altså ikke en mandatprismetode. Man kan også betragte $s_i/m_i$, $m_i > 0$, altså "prisen" parti i må betale for et mandat og sammenligne den med "landsgennemsnittet" $S/M$, og få udtryk til minimering som

$$\sum_{i=A}^{N} \left| \frac{s_i}{m_i} - \frac{S}{M} \right| \text{ eller } \sum_{i=A}^{N} \left( \frac{s_i}{m_i} - \frac{S}{M} \right)^2 \quad (m_i > 0) \text{ o.s.v.}$$

Dette giver ikke Hamiltons metode. Lige så godt kunne man vælge udtryk som "stemmekraft" for de forskellige partier, altså hvor mange mandater de opnår per stemme. Det fører til udtryk som

$$\sum_{i=A}^{N} \left| \frac{m_i}{s_i} - \frac{M}{S} \right|, \sum_{i=A}^{N} \left( \frac{m_i}{s_i} - \frac{M}{S} \right)^2 \quad \text{o.s.v.}$$

### 5.2 Ulighed udfra vælgersynspunkt

Her skal vi se nærmere på målet $\sum_{i=A}^{N} s_i \cdot \left( \frac{m_i}{s_i} - \frac{M}{S} \right)^2$, som blev fremhævet af Sainte-Lagüe og Owens. Her vejer man kvadratet på afvigelsen i stemmekraft fra landsgennemsnittet med partiernes stemmetal.

**Sætning:** Websters metode er den metode, der minimerer $\sum_{i=A}^{N} s_i \cdot \left( \frac{m_i}{s_i} - \frac{M}{S} \right)^2$.

Dette bliver der gjort rede for i det følgende.

Først ses at udtrykket, som før nævnt, kan forenkles:

$$\sum_{i=A}^{N} s_i \cdot \left( \frac{m_i}{s_i} - \frac{M}{S} \right)^2 = \sum_{i=A}^{N} \frac{m_i^2}{s_i} - \frac{2M}{S} \cdot \sum_{i=A}^{N} m_i + \frac{M^2}{S^2} \cdot \sum_{i=A}^{N} s_i = \sum_{i=A}^{N} \frac{m_i^2}{s_i} - \frac{M^2}{S},$$

idet der ses bort fra konstanten $M^2/S$ skal man altså minimere

$\sum_{i=A}^{N} \frac{m_i^2}{s_i}$ hvor $\sum_{i=A}^{N} m_i = M$ $m_i \geq 0$, $i$ = A, …, N.

Det skal nu vises, at Webster er en løsning til problemet. Man går ud fra en mandatfordeling $\boldsymbol{m} = (m_A, m_B, \ldots, m_N)$ bestemt ved Webster metoden ud fra en stemmefordeling $\boldsymbol{s} = (s_A, s_B, \ldots, s_N)$

Da gælder for alle $i, j$: $\frac{2m_i + 1}{s_i} \geq \frac{2m_j - 1}{s_j}, i, j \in \{A, B, \ldots, N\}$

Det forudsættes at $m_i \geq 0$, $m_j \geq 0$, $s_i \geq 0$, $s_j \geq 0$.

Lad $\boldsymbol{n}$ være en anden mandatfordeling ved de givne stemmetal.

Lad $S^+ = \{i \mid n_i > m_i\}$ og $S^- = \{j \mid n_j < m_j\}$. Så $\forall i \in S^+ : n_i = m_i + \delta_i$ og $\forall j \in S^- : m_j = n_j + \lambda_j$, hvor $\delta_i > 0$ og $\lambda_j > 0$.

Man får $\sum_{i \in S^+} \delta_i = \sum_{j \in S^-} \lambda_j = \alpha > 0$.

Ved indsættelse fås, idet $S^+ : \delta_i = n_i - m_i \geq 1$ og $S^- : \lambda_j = m_j - n_j \geq 1$ når $i \in S^+, j \in S^-$,

$$\frac{2m_i + \delta_i}{s_i} \geq \frac{2m_i + 1}{s_i} \geq \frac{2m_j - 1}{s_j} \geq \frac{2m_j - \lambda}{s_j}.$$

Nu fås

$$\sum_i \frac{n_i^2}{s_i} - \sum_i \frac{m_i^2}{s_i} = \sum_{i \in S^+} \frac{1}{s_i}(n_i - m_i)(n_i + m_i) - \sum_{j \in S^-} \frac{1}{s_j}(-n_j + m_j)(n_j + m_j)$$

$$= \sum_{i \in S^+} \frac{1}{s_i}(2m_i + \delta_i)\delta_i - \sum_{j \in S^-} \frac{1}{s_j}(2m_j - \lambda_j)\lambda_j \geq 0$$

Idet den sidste ulighed kan deles op i $\alpha$ uligheder af formen

$$\frac{2m_i + \delta_i}{s_i} \geq \frac{2m_j - \lambda_j}{s_j}$$

der alle gælder, når blot $i \in S^+$ og $j \in S^-$, så uligheden (uretfærdigheden) ved det valgte mål bliver altså mindst lige så stor ved enhver anden mandatfordeling end den Websters metode giver.

Hvis man som mål for uligheden vælger kvadratet på afvigelsen i mandatpris fra landsgennemsnittet vejet med mandattallet, fås udtrykket $\sum_{i=A}^{N} m_i \cdot \left( \frac{s_i}{m_i} - \frac{S}{M} \right)^2$.

Dette fører til Hills metode.

Man kan også se på, at den største afvigelse i mandatpris mellem partierne skal være så lille som muligt. Altså skal bestemmes $\min_{m} \max_{i,j} \left| \frac{s_i}{m_i} - \frac{s_j}{m_j} \right|$ så den største fejl bliver så lille som muligt, eller også det uheldigste partis uheld skal være så lille som muligt, altså finde $\min_{m} \max_{i} \frac{s_i}{m_i}$.

Sidstnævnte fører til Adams metode, mens Jeffersons metode kommer ud af $\min_{m} \max_{i} \frac{m_i}{s_i}$.
Altså ingen metoder er perfekte. De nævnte mandatprismetoder har alle deres fordele og ulemper.

# 6. Konklusion

Vi har opstillet en beskrivende matematisk model for en mandatfordelingsfunktion. Vi har nærmere søgt at diskutere hvilke krav man kan stille til en sådan funktion, altså hvilke aksiomer den skal opfylde. Vi har fundet at de fleste aksiomer kan rummes inden for modellens rammer, men ikke nødvendigvis samtidig. Udrustet med aksiomerne var vi klar til en nærmere undersøgelse af begrebet neutralitet – "retfærdighed". I appendiks vil vi se på en alternativ model hvor to af fire aksiomer er klart forskellige fra de hidtil nævnte.

Matematikken satte os i stand til at undersøge mandatprismetoder under ét, og vi viste at disse kan betragtes som divisormetoder. Denne generelle behandling af mandatprismetoder gjorde det muligt at drage matematisk funderede konklusioner hvad angår spørgsmålet om hvilken mandatfordelingsmetode der er at foretrække under givne betingelser, her valg af metrik og aksiomer. Som supplement har vi set på konkrete taleksempler for at få en antydning af de forskellige metoders fordele og ulemper i forbindelse med valg af metrik.
Dette belyser hvor robust valget af mandatfordelingsmetode er ved ændringer i metrikken (en form for sensitivitetsanalyse). Sådanne ændringer kunne f.eks. forekomme ved skiftevis at betragte neutralitet ud fra et parti-, et vælger- eller et mandatsynspunkt. Vor konklusion er at forskellige kriterier ofte fører til valg af forskellige metoder.

Et andet begreb vi har med er stabilitet. Konklusionen er at de fem mandatprismetoder nævnt i Balinski & Young, er de eneste der fører til stabilitet blandt mandatprismetoder.

Det har som nævnt vist sig muligt at matematisere de verbale krav til valgmodellen. Derved har vi også nået resultater som langt fra er umiddelbart indlysende. For eksempel i afsnittet om aksiomer: At respekten for kvota og monotonikrav 4 ikke samtidig kan være opfyldt. Senere vises at Websters metode netop er den metode der minimerer et mål for uretfærdigheden set fra et vælgersynspunkt.

Alt i alt kan det med fast grund under fødderne siges, at ingen metode er den bedste udfra såvel et vælger-, et parti- som et mandatsynspunkt. Dette har matematikken ført os til. Vi har med diskussion af definitioner og aksiomer og de resultater vi har udledt fået vendt og drejet mandatfordelingsspørgsmålet på et eksakt grundlag.

## 6.1 Er projektets problemstillinger eksemplariske for matematikken?

Modellens hovedproblem er velkendt i matematikken: Hvad gør man når tingene ikke går op – specifikt i denne model: Hvordan deler man et antal mandater imellem nogle partier i forhold til en række stemmetal, hvor det ikke er muligt at lave en præcis proportional fordeling? Man laver en model som er en forenkling af den politiske virkelighed. Man gør en uhåndterlig virkelighed overskuelig ved en række forenklinger og konkretiseringer.
I modellen står man med et problem, som ikke har nogen løsning der objektivt set altid er den rigtige. Man kan vælge en løsning som udfra nogle givne kriterier er den rigtige, eller valget kan ske udfra hvilken holdning man har til problemstillingen – og det ene valg kan så ikke rent matematisk siges at være bedre end det andet.

Problemstillingen i modellen kan betragtes som hørende til en kategori indenfor matematikken - nemlig projektioner:

Lad $X = \mathbb{Q}_+^P$ og et punkt i $X$ betegne den $P$-dimensionale vektor der består af de forskellige partiers kvoter.

Lad $U = \mathbb{Z}_+^P$ og et punkt i $U$ betegne den $P$-dimensionale vektor der består af de forskellige partiers tildelte mandater.
Mandatfordelingsfunktionerne m vil kunne karakteriseres som projektioner fra $X$ ind i $U$. Problemerne i denne proces er beskrevet i projektet, men er ikke unikke for denne model eller denne del af matematikken.

Vi vil give tre eksempler fra andre dele af matematikken, hvor problemet er af lignende art:

1:Betragt en projektion fra $X$, det almindelige 2-dimensionale rum, på $U$, et vektorunderrum af X (nærmere en ret linje gennem origo).

Opgaven er nu: Lav en projektion af $X$ på $U$. Dette kan gøres på utallige forskellige måder: Ortogonal projektion, projektion parallel med 1. aksen/2. aksen, osv. Der er ingen af disse måder der objektivt kan siges at være bedre eller mere rigtig end de andre. Man kan, i lighed man beviset i kapitel 5, udfra nogle på forhånd givne kriterier udvælge en metode som så i den sammenhæng er den rigtige.

2: Opgaven er at tegne en landkort – at brede jordkloden ud på en plan flade. Vi opstiller nogle krav til denne proces for at vi mener at resultatet bliver korrekt: Kortet skal relativt være arealbevarende og det skal være vinkelbevarende. To indlysende krav at stille til en kort. Problemet er bare at det matematisk kan bevises at disse to krav ikke kan opfyldes samtidigt - i lighed med at monotonikravet og kravet om respekt for kvota ikke kan opfyldes samtidig. Projektet er som bekendt altså ikke muligt med de givne krav: En kugle kan ikke under de nævnte forudsætninger projiceres ned på en plan, således at projektionen samtidig er areal- og vinkeltro.

3: Dette eksempel stammer fra kodningsteoriens verden:
$X$ = mængden af kodeord med max. én fejl
$U$ = mængden af kodeord.
Korrektion af fejlene i $X$ vil være en projektion fra $X$ ind i $U$. Denne korrektion er dog ikke entydig (for minimalafstanden $\delta(U) \leq 2$). Hvis man modtager en kode som ikke er et kodeord, vil man måske kunne lave fejlkorrektion på flere forskellige måder og dermed opnå flere forskellige kodeord – og det vil ikke være muligt at konstatere hvilken af korrektionerne der var den korrekte, og dermed hvilket kodeord der blev afsendt.

# 7. Appendix: En anden model

Ved flertalsvalgreglen forstås at den kandidat eller de kandidater der får flest stemmer bliver valgt.
I det følgende vises at denne valgregel er unik med en række særlige egenskaber. Dette er et eksempel på en anden måde at opstille aksiomer for valgregler på.
Først gives en række definitioner og aksiomer, så opstilles og vises et lemma der så bruges i den sætning det hele går ud på at vise: At flertalsvalgreglen på en unik måde opfylder de nedenfor omtalte aksiomer.

Lad der være givet en endelig mængde af mulige kandidater C, hvor $|C| = c$. Lad $\hat{C}$ betegne mængden af ikke-tomme delmængder af C, altså $\hat{C}$ er potensmængden af C bortset fra den tomme mængde $\varnothing$. Lad N være mængden af mulige vælgere. Til hver vælger hører altså et nummer (naturligt tal) således, at to forskellige vælgere har forskellige numre. Hermed er der ikke gjort nogen forudsætning om vælgerkorpsets størrelse, når det blot antages at være en endelig delmængde $N \neq \varnothing$ af N. Det antages, at $|N| = n \in N$ og N $\in \hat{N}$, hvor $\hat{N}$ er mængden af ikke-tomme endelige delmængder af N.

Enhver vælger $i \in$ N er udstyret med en præferencerelation $P_i$ i C. $P_i \subseteq C \times C$ er dermed refleksiv, transitiv og total. Det betyder, at vælger $i$ udfra $P_i$ kan opstille valgkandidaterne i (en endelig) rækkefølge på netop én måde, således at den mest foretrukne kandidat kommer først, den næstmest foretrukne som nr 2 i rækken o.s.v. med den mindst ønskede kandidat som rækkens nummer sidst. Mængden af alle mulige præferencerelationer for vælger i betegnes $\hat{P}_i$.

Lad vælgerkorpset være N $\in \hat{N}$. Ved $\hat{P}_N$ skal forstås mængden af mulige præference-profiler for N altså $\hat{P} = \prod_{i \in N} \hat{P}_i$. Et element $P_N \in \hat{P}_N$ er da en $n$-dimensional vektor, hvis $i$'te koordinat er $P_i \in \hat{P}_i$, altså en præferencerelation hørende til vælger $i$.

Ved en *valgregel* skal forstås en afbildning $f : \left(\bigcup_{N \in \hat{N}} \hat{P}_N\right) \times \hat{C} \to \hat{C}$. Således for givet N $\in \hat{N}$ at for enhver af vælgernes præferenceprofiler $P_N \in \hat{P}_N$ udvælges fra enhver kandidatliste $C' \in \hat{C}$ en delmængde af denne $\varnothing \neq f(P_N, C') \subseteq C'$.

Lad $\Sigma$ betegne mængden af permutationer: $C \to C$ og lad $\sigma \in \Sigma$. Når $P_i$ er en præferencerelation for vælger $i \in$ N, skal $\sigma(P_i)$ betegne præferencerelationen bestemt ved $\forall a_h, a_k \in C : a_h P_i a_k \Rightarrow \sigma(a_h)\sigma(P_i)\sigma(a_k)$.

(P's egenskaber som præferencerelation overføres til $\sigma(P_i)$). Man sætter $\sigma(P_N) = (\sigma(P_i))_{i\in N}$ svarende til at $P_N = (P_i)_{i\in N}$.

En valgregel *f* siges at være *neutral*, hvis en permutation $\sigma$ af kandidatmængden C, der jo svarer til en ændring af hver af præferencerelationerne $P_i$, $i\in N$ (således at $P_i$ bliver til $\sigma(P_i)$) fører til et valg ved *f* der er billedet ved permutationen $\sigma$ af det oprindelige valg.

Altså: $\forall P_N \in \hat{P}_N \forall \sigma \in \Sigma : f(\sigma(P_N), \sigma(C)) = \sigma(f(P_N, C))$

En neutral valgregel er altså kun afhængig af hvilke præferencer vælgerne har og ikke af kandidaternes numre. Ingen kandidat har på forhånd en fordel fremfor andre.

Givet $N \in \hat{N}$

Lad $\Pi$ være mængden af permutationer: N → N og $\pi \in \Pi$. Givet $P_N \in \hat{P}_N$ og lad $P_{\pi(N)} = (P_{\pi(i)})$ $(i \in N)$.

Ved $\pi$ er der således blot sket en ændring af nummereringen af vælgerne.

Valgreglen f siges at være anonym, hvis $\forall P_N \in \hat{P}_N : \forall \pi \in \Pi : f(P_{\pi(N)}, C) = f(P_N, C)$.

Dette sikrer, at valgreglen er "ligeglad" med, hvordan det givne sæt af præferencer er fordelt på vælgerne. Der hersker anonymitet.

Valgreglen f er uafhængig af dominerede kandidater, hvis det gælder, at når en kandidat $a_h$ af alle vælgere prioriteres lavere end en vis anden kandidat $a_k$, så bliver $a_h$ i hvert fald ikke valgt.

Dette kan udtrykkes således:

$$\forall P_N \in \hat{P}_N : \forall a_h \in C : (\exists a_k \in C : a_k \neq a_h \wedge \forall i \in N : a_k P_i a_h) \Rightarrow f(P_N, C \ \{a_h\}) = f(P_N, C)$$

Det er nødvendigt at forudsætte, at $a_k \neq a_h$, for alle i $\in$ N : $a_h P_i a_h$, sådan som præferencerelationen er defineret.

En valgregel f har forstærkningsegenskaben, hvis foreningsmængden af to disjunkte vælgermængder N og N' ($N \cap N' = \emptyset$) giver valg til f $(P_N, P_{N'}, C) =$ f $(P_N, C) \cap f(P_{N'}, C)$ når denne fællesmængde er ikke-tom.

Altså hvis vælgerkorpset er delt i to disjunkte dele, som begge giver valg ved valgreglen f til en kandidat a, så vil a også blive valgt af det samlede vælgerkorps.

Altså:

Givet N, N' $\in \widehat{N}$ hvor N$\cap$N'=Ø, og givet

$P_N \in \hat{P}_N, P_{N'} \in \hat{P}_{N'} : f(P_N, C) \cap f(P_{N'}, C) \neq \emptyset \Rightarrow f(P_N, P_{N'}, C) = f(P_N, C) \cap f(P_{N'}, C)$ når $N \cup N'$ er hele valgkredsen.

Altså hvis en kandidat "vinder" ved hvert optællingssted, så vinder vedkommende også i hele valgkredsen.

For $P_i \in \hat{P}_i$ lad p$( P_i, C ) \in C$ være den af vælger i $\in$ N foretrukne kandidat i C. For

$a_h \in C, hvor P_N \in \hat{P}_N, lad\ N_h(P_N, C) = \{i \in N | p(P_i, C) = a_h\}$

$N_h$ er altså delmængden af $N$ som består af de vælgere der har $a_h \in C$ som den foretrukne kandidat i C.

Lad $n_h(P_N, C) = |N_h(P_N, C)|$;

p kaldes da en flertalsvalgregel, når for ethvert givet

$P_N \in \hat{P}_N : P(P_N, C) = \{a_h \in C | \forall a_k \in C : n_h( P_N, C ) \geq n_k(P_N, C)\}$

Ved P vælges altså den kandidat eller de kandidater, der foretrækkes af det største antal vælgere i N.

**Sætning:** Flertalsvalg er den eneste valgregel, som opfylder neutralitet, anonymitet, uafhængighed af dominerede kandidater og forstærkning.

Først vises et **lemma:** At hvis en valgregel opfylder de 4 aksiomer og at ethvert par forskellige vælgere har forskellige mest foretrukne kandidater, da er alle de af blot én vælger foretrukne kandidater valgt. Dette forudsætter $n \leq c$ .Givet $P_N \in \hat{P}_N$, lad p$(P_N, C) = (p(P_i, C))$, i$\in$N

p($P_N, C$) er da listen af kandidater, der foretrækkes af vælgerne ved valgregel f, som opfylder de 4 aksiomer.

Lemmaet siger, at hvis

$\forall i_1, i_2 \in N : i_1 \neq i_2 \Rightarrow p(P_{i1}, C) \neq p(P_{i2}, C)$ så er $f(P_N, C) = \{p(P_i, C) | i \in N\}$ for alle $P_N \in \hat{P}_N$

**Bevis:**

Lad $P_N \in \hat{P}_N$ være givet, hvor $p( P_i, C )$ i $\in$ N, alle er forskellige. Altså må antallet af vælgere være mindre end eller lig med antallet af kandidater.

Beviset føres ved induktion efter $|N|$

1) $|N| = 1$ kun én vælger i = 1 $P_N = P_1 : a_1, \ldots\ldots a_h \ldots\ldots$

$a_1$ er da den eneste kandidat, der ikke falder for aksiomet om uafhængighed af dominerede kandidater.

$a_2, \ldots\ldots a_k, \ldots$ domineres alle af $a_1$. Så $f(P_N, C) \subseteq \{a_1\}$, og da $f(P_N, C) \neq \emptyset$, fås f $(P_N, C) = \{a_1\}$ og lemmaet er vist for N = 1.

2) Givet $n \in N, så |N| = n$. Antag at lemmaet er opfyldt for 1, ..., $n$-1. Da kan P beskrives ved

$P_1 : a_1, \ldots\ldots$
$P_2 : a_2, \ldots\ldots$
$\vdots$
$P_{n-1} : a_{n-1}, \ldots\ldots$
$P_n : a_{h1}, a_{h2}, \ldots a_{hc}$

hvor $a_{h1} = a_n$

hvor $a_{i1} \neq a_{i2}$ når $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 : 1, \ldots, n$

Af induktionshypotesen fås $f(P_1, \ldots\ldots, P_{n-1}, C) = \{a_1, \ldots\ldots\ldots, a_{n-1}\}$

Lad nu $N' = \{n+1, \ldots\ldots, n+c \div 1\}$

og lad $P_{N'} \in \hat{P}_{N'}$ være valgt så præferenceprofilen ($P_n, P_{N'}$) er symmetrisk i følgende forstand (når P er som før givet)

$P_{n+1} : a_{h2}, a_{h3}, \ldots\ldots a_{hc}, a_{h1}$

$P_{n+2} : a_{h3}, a_{h4}, \ldots\ldots a_{hc}, a_{h1}, a_{h2}$

$\vdots$

$P_{n+c-1} : a_{hc}, a_{h1}, \ldots\ldots a_{hc-2}, a_{hc-1}$

Det ses, at $P_{n+k}$ fremkommer af $P_{n+k-1}$ ved den samme permutation $\sigma$ : af kandidaterne ( når k = 1,2,......c-1) og at man kommer hele vejen rundt. Så

$f(\sigma(P_n, P_{N'}), C) = \sigma(f(P_n, P_{N'}, C))$ p.g.a. neutraliteten og anonymiteten af f.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{anonymitet}}}{f(P_n, P_{N'}, C) =} f(\sigma(P_n, P_{N'}), C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{neutralitet}}}{=} \sigma(f(P_n, P_{N'}, C)), \text{ men så } f(P_n, P_{N'}, C) = C$$

Af forstærkningsaksiomet fås nu

$$f(P_N, P_{N'}, C) = f(P_1,...P_{n-1}, C) \cap f(P_n, P_{N'}, C) = \{a_1,...,a_{n-1}\} \cap C = \{a_1,...,a_{n-1}\}$$

Da $\forall i \in N'$, $a_{hc} P_i a_{h1} (= a_n)$ gælder p.g.a. uafhængighed af dominerede kandidater og neutralitet og anonymitet:

$$f(P_{N'}, C) = f(P_{N'}, C \setminus \{a_n\}) = C \setminus \{a_n\}.$$

Da $f(P_N, P_{N'}, C) = f(P_N, C) \cap f(P_{N'}, C) = \begin{cases} f(P_N, C \setminus \{a_n\}), c > 1 \\ f(P_N, C), c = 1 \end{cases}$ eller

Deraf fås 3 muligheder $f(P_N, C) = \begin{cases} \{a_1,.....,a_{n-1}\} \; eller \\ \{a_1,.........,a_n\} \; eller \\ \{a_n\} \end{cases}$

Hvis man i stedet konstruerer N'' så profilen $(P_{n-1}, P_{N''})$ er symmetrisk( man har altså byttet om på vælger n - 1 og vælger n i forhold til tidligere) fås tilsvarende:

$$f(P_n, C) = \begin{cases} \{a_{n-1}\} \; eller \\ \{a_1,......a_{n-2}, a_n\} \; eller \\ \{a_1,....,a_n\} \end{cases}$$

så alt i alt må $f(P_N, C) = \{a_1,............a_n\}$ og induktionen er gennemført.

Nu kan sætningen bevises.

**Bevis for sætningen:**

a) Ved eftersyn ses at flertalsreglen opfylder de 4 aksiomer. Dette sikrer aksiomernes kompatibilitet.

b) Antag at valgreglen opfylder de 4 aksiomer.

Givet $P_N \in \hat{P}_N$

Antag at kandidaterne er nummeret efter stemmetal, altså $n_1(P_N, C) \le n_2(P_N, C) \le ..... \le n_C(P_N, C)$.
Lad $P_{N_1},...,P_{N_C}$ være konstrueret til lejligheden så $P_N = (P_{N_1},...,P_{N_C})$ og

$\forall h: 1,....,c \quad n_h(P_{N_h}, C) = n_{h+1}(P_{N_h}, C) = ..... = n_C(P_{N_h}, C) = n_h(P_N, C) \div n_{h+1}(P_N, C)$

Hvor $n_0(P_N, C) = 0$. Det kan ske fordi

1) $n_h(P_N, C) \div n_{h+1}(P_N, C) \ge 0$

$$\begin{aligned} 2)\quad & n = n_1(P_N, C) + \ldots + n_C(P_N, C) \\ & = c(n_1(P_N, C) \div n_0(P_{N_1}, C)) + (C \div 1)(n_2 \div n_1) + \ldots + 1 \cdot (n_C \div n_{C+1}) \\ & |N_h| = n_1(P_{N_h}, C) + n_2(P_{N_h}, C) + \ldots + n_C(P_{N_h}, C) = 0 + \ldots + 0 + n_h(P_{N_h}, C) + \ldots = \\ & (c \div h + 1)(n_h(P_N, C) \div n_{h-1}(P_N, C)) \end{aligned}$$

så $\sum_{h=1}^{C} |N_h| = |N|$ og $\sum_{h=1}^{C} n_k(P_{N_h}, C) = n_k(P_N, C)$

$N_h$'erne kan for nogle h være tomme, men udgør i øvrigt en klassedeling af N, således at de enkelte kandidaters "stemmetal" summerer op, som de skal.

For $n_h(P_{N_h}, C) > 0$, h=1,...,C. $N_h$ deles nu yderligere op i $N_h^1, \ldots, N_h^{n_h \div n_{h+1}}$ således at hvert $N_h^i : i = 1, \ldots, n_h(P_N, C) \div n_{h+1}(P_N, C)$ består af vælgere med hver sin foretrukne kandidat så $f(P_{N_h^i}, C) = \{h, h+1, \ldots, c\}$ og ved gentagen brug af forstærkningssætningen får

$$f(P_{N_h}, C) = f(P_{N_h^1}, C) \cap \ldots \cap f(P_{N_h^{n_h \div n_{h+1}}}, C) = \{h, \ldots, c\}$$

Lad $h^* = \min\langle h = 1, \ldots, c \,|\, n_h(P_N, C) = \ldots = n_C(P_N, C)\rangle$. Altså $h^*$ er det største $h \le C$ så $n_h(P_{N_h}, C) > 0$, idet $n_{h^*}(P_N, C) > n_{h^*+1}(P_N, C)$. Umiddelbart $f(P_{N_k}, C) = f(P_{N_{h^*}}, C)$, når $C \ge k \ge h^*$. Dette fås ved ombytning af kandidat $k \ge h^*$ med $h^*$.

Ved gentagen forstærkning fås:

$f(P_N, C) = f(P_N, C) \cap \ldots . \cap f(P_{N_C}, C) = \{h^*, \ldots\ldots, c\}$ hvorved f er vist at være flertalsreglen P.

$(1 \le h < h^* : f(N_h, C) \supseteq f(N_{h^*}, C))$

Når c=2 d.v.s. der kun er to kandidater, bliver flertalsreglen til den absolutte flertalsregel og uafhængigheden af dominerede kandidater erstattes af individualitet:

$$\forall i \in N : \forall P_i \in \hat{P}_i : f(P_i, C) = p(P_i, C)$$

**Korrollar:** Den absolutte flertalsregel er den eneste valgregel, der opfylder neutralitet, anonymitet, individualitet og forstærkning, når der kun er to kandidater.

**Litteraturliste**

BALINSKI, MICHEL L., OG H. PEYTON YOUNG:
*Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote.*
Yale University Press,
New Haven and London 1982.

CHING, STEPHEN:
'A Simple Characterization of Plurality Rule,'
*Journal of Economic Theory* **71**, 298-302 (1996).

GLAVEN, FREDERIK:
*Om metoder for afstemninger og valg.*
Dansk videnskabs forlag A/S,
København 1955.

POULSEN, EBBE THUE:
*Matematiske modeller.*
Aarhus Universitet, Matematisk afdeling,
Aarhus 1997.

POULSEN, EBBE THUE:
*Matematik og retfærdighed. Mandatfordelingsproblemet*
(Ufærdigt manuskript af 17. februar 1999).
Aarhus Universitet.
Aarhus 1999.

Liste over tidligere udsendte tekster kan rekvireres
på IMFUFA's sekretariat, tlf. 4674 2263 eller
e-mail: bs@ruc.dk

332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerapport af:
Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt

333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel

334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen

335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre

336/97 PROBLEM-ORIENTATED GROUP PROJECT WORK AT ROSKILDE UNIVERSITY
by: Kathrine Legge

337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen,
Per Pauli Petersen
Vejleder: Jørgen Larsen

338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen

339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy

340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen

341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by Mogens Niss

342/97 LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY
A global clean fossil scenario discussion paper
prepared by Bernd Kuemmel
Project leader: Bent Sørensen

343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

344/97 Puzzles and Siegel disks
by Carsten Lunde Petersen

---

345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anestesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen

346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen

347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann,
Lisbet Øhlenschlæger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
Project leader: Bent Sørensen

349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege

350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96

351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications

by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

Vejleder: Morten Blomhøj

354/98 A GLOBAL RENEWABLE ENERGY SCENARIO

by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces

by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 *Cayleys Problem*
*En historisk analyse af arbejdet med Cayley problem fra 1870 til 1918*
*Et matematisk videnskabsfagsprojekt af:*
*Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff*
*Vejleder: Jesper Larsen*

358/98 *Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models*
*Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen*

359/99 *Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios*
*by: Bent Sørensen*

360/99 ***SYMMETRI I FYSIK***
*En Meta-projektrapport af: Martin Niss. Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné*
*Vejleder: Peder Voetmann Christiansen*

361/99 *Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants*
*by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani*

362/99 *Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen*
*En videnskabsfagsprojekt-rapport af Martin Niss*
*Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen*

363/99 ***EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION***
*by: Donald T. Campbell, MArk H. Bickhard and Peder V. Christiansen*

364/99 *Illustrationens kraft*
*Visuel formidling af fysik*
*Integreret speciale i fysik og kommunikation*
*af: Sebastian Horst*
*Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup*

365/99 *To know - or not to know - mathematics, that is a question of context*
*by: Tine Wedege*

366/99 ***LATEX FOR FORFATTERE***
*En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX*
*af: Jørgen Larsen*

367/99 **Boundary Reduction of Spectral invariants and Unique Continuation Property**
**by Bernhelm Booss-Bavnbek**

368/99 Kvartalsrapport for projektet
Scenarier for samlet udnyttelse af brint som energibærer i Danmarks fremtidige energisystem
Projektleder: Bent Sørensen
Opdateret til halvvejsrapport. Den nye udgave Tekst 368bis" kan hentes ned fra internettet fra adressen
http://mmf.ruc.dk/energy/report

369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob Jalving

370/99 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 – 1999
(erstatter tekst nr. 350/98)

371/99 Bevisets stilling -
beviser og bevisførelse i en gymnasial matematikundervisning
Matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke lineær programmering: Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen

373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yosida-Nicolaescu Theorem
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki

374/99 Det hydrauliske spring
Et eksperimentelt studie af polygoner
Og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard og Bent C. Jørgensen

375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen
i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-1914
Historie-speciale af: Henrik Andreassen

376/99 Universality of AC conduction in
disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder

377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in
Nonlinear Programming:
A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen

..............................................................................

378/00 Solar energy preprints:
Renewable energy sources and thermal energy storage
Integration of photovoltaic cells into the global
Energy system
by: Bent Sørensen

379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet
over for den moderne
En tredjesemesters projektrapport på den
naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller
Pedersen, Maja Bagge Petersen
Vejleder: Jørgen Larsen

380/00 Matematisk Modellering af Hjertefunktionen
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og
udpumpning til det cardiovaskulære system
Speciale/3.moduls-rapport
af: Gitte Andersen, Jakob Hilmer, Stine Weisbjerg
Vejleder: Johnny Ottesen

381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos
kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i
grænselandet mellem matematikkens
didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph.d.-afhandling af Tine Wedege

382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skimminge
Vejledere: John Villumsen, Viggo Andreassen

383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M.Jensen,
Jesper Thrane, Karen L.A.W.Wille,
Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss

384/00 Hopping in Disordered Media:
A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.d. thesis by Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre

385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, K. Furutani,
K.P. Wojciechowski