TEKST NR 379 2000

EULERS DIFFERENTIALREGNING

Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne

—

en tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse

Uffe Thomas Volmer Jankvist,
Rie Rose Møller Pedersen,
Maja Bagge Petersen.

Vejleder: Jørgen Larsen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA · Roskilde Universitetscenter · Postboks 260 · DK-4000 Roskilde

Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Petersen:
EULERS DIFFERENTIALREGNING. Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne – en tredjesemesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse.

IMFUFA tekst nr. 379/2000 94 sider ISSN 0106-6242

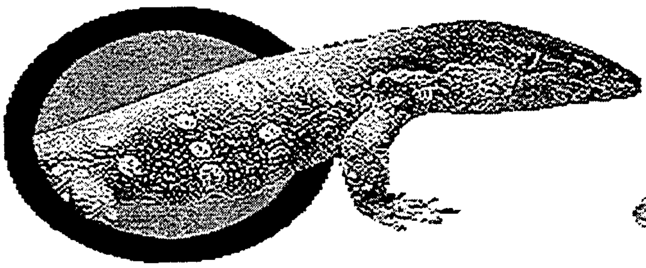
Formålet med projektet er at belyse hvordan Eulers indførelse af differentialregningen adskiller sig fra den moderne indførelse af differentialregningen. Desuden at undersøge i hvilken grad Eulers indførelse var præget af samtiden.

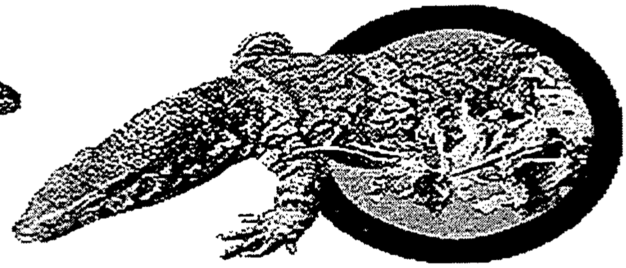
På baggrund af en beskrivelse af funktionsbegrebet, kontinuitetsbegrebet og grænseværdibegrebet for henholdsvis Euler og den moderne matematik sammenligner vi de to indførelser af differentialregningen. Ud fra en gennemgang af matematikkens problemer i 1700-tallet undersøger vi hvilke mulige årsager der kan ligge til grund for problemerne i Eulers indførelse af differentialregningen.

Vores konklusion blev at Eulers og den moderne indførelse adskiller sig fra hinanden på den del områder. Eulers indførelse af differentialregningen er bl.a. udelukkende baseret på den algebraiske analyse, hvorimod den moderne tager udgangspunkt i geometrien. Eulers indførelse adskiller sig også fra den moderne i form af hans definitioner, begreber og forudsætninger.

Yderligere konkluderer vi at Eulers indførelse til dels kan forklares ud fra hans samtid. Matematikken i 1700-tallet var bl.a. præget af et pragmatisk syn samt manglende stringens i metoden.

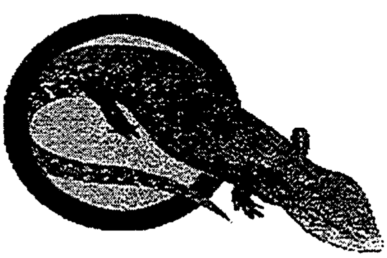
Eulers differentialregning





Naturvidenskabelig Basisuddannelse efteråret 1999

Roskilde Universitetscenter Hus 14.2



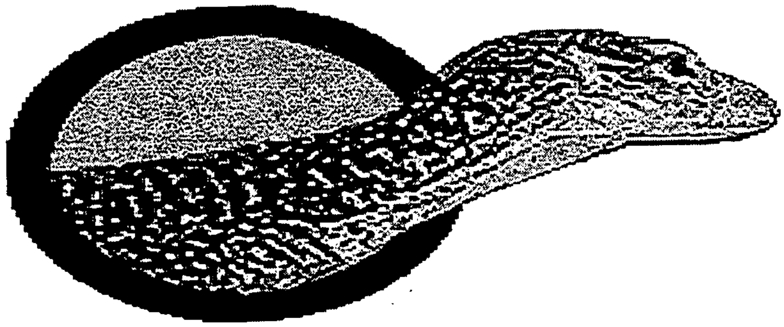
Gruppe Ø

Uffe Thomas Volmer Jankvist

Rie Rose Møller Pedersen

Maja Bagge Petersen

Vejledning ved Jørgen "Lademann" Larsen



Forord

Dette historiske matematikprojekt er udfærdiget af Gruppe Ø, som består af følgende personer:

Uffe Thomas Volmer Jankvist

Rie Rose Stehr Møller Pedersen

Maja Bagge Petersen

Projektet er skrevet i efteråret 1999 på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse ved Roskilde Universitetscenter (RUC).
Målgruppen for dette projekt er medstuderende med særlig interesse for (historisk) matematik, og de filosofiske aspekter man heri kan diskutere.

Gruppe Ø vil gerne have lov at takke følgende personer og institutioner for deres delagtiggørelse i processen af den projektskrivende fase:

- Blinky, Pinky, Inky og Sue for at bringe konkurrencekonceptet ind i projektforløbet.
- Vores vejleder Jørgen "Lademann" Larsen for god og engageret vejledning samt den umådelige mængde af tålmod, som han har udvist igennem hele forløbet.
- Vores opponentgruppe; Gruppe $1{,}0 \cdot 10^9 \alpha$ for husly og kaffe i hele 3. semester samt en yderst konstruktiv midtvejsevaluering.
- Pacman!
- Jens Møller Pedersen og Lissi Rose Stehr for deres eksterne hjælp, når lokummet brændte på.
- Lasse og Kit Jankvist for lån af computer og printer i den projektintensive periode.
- Tommy Jankvist for lån af en Hewlett Packard LaserJet 5L printer ligeledes i den projektintensive periode.

- Eugene Rachlis!
- Og sidst men ikke mindst Kong Volmers Røvklubben for dens blotte eksistens.

Gruppe Ø er for seje!

1 Indledning

Gruppe Ø blev dannet på baggrund af en fælles interesse for projektskrivning i matematik. Den personlige motivering udsprang af lysten til at prøve kræfter med matematiske problemstillinger samt få en forståelse for den matematiske projektskrivning på overbygningen. Vi var klar over, at projektskrivningen på hhv. basisuddannelsen og overbygningen er vidt forskellige. Alligevel mente vi, at dele af processen og nogle af problemstillingerne ville være sammenlignelige på trods af, at vores projekt befinder sig på et fagligt lavere niveau.

Valg af emneområde og problemstillinger foregik på baggrund af samtaler med Tinne Hoff Kjeldsen, matematikhistoriker på IMFUFA, som ledte os i retning af integral- og differentialregningen i 1700-tallet. Da dette semester lægger op til refleksion over problemstillinger i naturvidenskaben mente vi, at en refleksiv filosofisk vinkel ville kunne belyse nogle af matematikkens problemer i 1700-tallet. Valg af filosofiske vinkler og aspekter foregik på baggrund af en samtale med Stig Andur Pedersen, matematiker og professor i videnskabsteori på RUC.

1.1 Formål

Med udgangspunkt i en grundig gennemgang af indførelsen af differentialer, med henblik på den eulerske og den moderne, er formålet med projektet at undersøge, hvorledes Eulers metode til indførelsen af differentialregningen adskiller sig fra den moderne. Desuden at undersøge om Eulers indførelse medfører problemer, – og hvis dette er tilfældet, hvilke problemer er der da tale om? På baggrund af dette vil vi belyse hvilke grunde, der kan tænkes at være årsag til Eulers eventuelle problemer. Det er i denne forbindelse, at de historiske og filosofiske aspekter kommer ind i billedet.

1.2 Projektets opbygning

For at få en ordentlig indførelse i emnet – differentialregningen – har vi fundet det relevant at gennemgå de vigtigste punkter i grundlaget for denne. Med udgangspunkt i den moderne matematik har vi løbende sammenlignet og diskuteret Eulers forudsætninger for indførelsen med den moderne matematiks forudsætninger. På trods af faren for at afvige fra den gængse projektdisposition har vi dog fundet denne opbygning mest praktisk, da begreberne præsenteres et af gangen og umiddelbart derefter sammenholdes. Det er i det store hele også afsnittene med sammenligninger der udgør diskussionen i vores projekt. Da vores teoriafsnit er forholdsvis langt, og det derfor kan være svært at holde styr på de enkelte dele, har vi fundet en "løbende diskussion" yderst hensigtsmæssig.
På baggrund af sammenligningerne følger en konklusion, hvor vi har søgt at besvare de to første dele af problemformuleringen. Herefter indføres læseren i de historiske og filosofiske problemstillinger, og også her har vi løbende diskuteret Euler, hvor vi har fundet det passende. Udfra dette afsnit drages endnu en konklusion, hvor den sidste del af problemformuleringen besvares. Antallet af konklusioner (to) kan ses som et produkt af, at projektet falder i to dele, og vi fandt det derfor mest naturligt at konkludere umiddelbart efter hver enkelt del.

1.3 Læsevejledning

Opsummeringen i teoriafsnittet er ment som en hjælp til at genopfriske det væsentlige af indholdet i det lange teoriafsnit men kan også benyttes af den læser, som ikke gider at læse hele afsnittet.

Når vi i projektet direkte har citeret eller taget specifikke oplysninger, forekommer kildehenvisningerne i afsnittet på følgende måde; [Rachils, 1966 side 17]. Ved at slå "Rachils, 1966" op i litteraturlisten fremgår det, at oplysningen stammer fra Eugene Rachlils' bog *Prærieindianerne* fra 1966 – nærmere betegnet fra side 17.
Det til afsnittet benyttede litteratur er angivet i [...........] til sidst i det pågældende afsnit.

Henvisningerne i projektet som figurerer på følgende måde; **[17]** betyder, at man kan slå op i appendiks under det pågældende afsnits nummer f.eks. **Appendiks 17.4**. Her kan man finde originalteksten til det vi selv har oversat til dansk, en matematisk argumentation eller et bevis.

2 Problemformulering og teser

2.1 Problemformulering

1. Hvordan adskiller Eulers indførelse af differentialregningen sig fra indførelsen af differentialregningen i den moderne matematik?

2. Medfører Eulers metode til indførelsen af differentialregningen nogen problemer?, hvis ja – hvilke?

3. Hvilke mulige årsager kan ligge til grund for Eulers problemer i hans indførelse af differentialregningen med henblik på hans samtid og filosofien som prægede denne?

2.2 Teser

Allerede fra starten af forløbet havde vi nogle idéer om, hvordan svarene på spørgsmålene i problemformuleringen ville komme til at forme sig. Efter den første gennemlæsning af den sekundære litteratur havde vi dannet os et endnu klarere billede af problemstillingerne. På baggrund af dette gjorde vi os endnu nogle tanker. Vore teser afspejler selvfølgelig i en vis forstand spørgsmålene i problemformuleringen, men skal ikke ses som dækkende for disse.

1. Eulers indførelse adskiller sig fra den moderne ved hans manglende forudsætninger. Dette ses i form af hans manglende teori og anderledes definitioner af visse nøglebegreber, som i den moderne matematik danner grundlaget for indførelsen af differentialregningen.

2. Ovenstående fører til visse problemer i Eulers indførelse af differentialregningen – set med moderne øjne. I sammenligning med den moderne matematik er Eulers indførelse præget af manglende eller induktive argumentationer og til dels for vage definitioner.

3. Matematikken i 1700-tallet var et produkt af den rasende udvikling i de foregående 150 år og må derfor ses som en slags "fordøjelse" af de nye teorier og metoder. Samtidig var perioden præget af manglende stringens i metoden og var i det hele taget anlagt på langt mere pragmatisk vis end i dag.

3 Euler kontra moderne matematik

3.1 Biografi af Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) er en af de mest produktive matematikere i historien med en produktion på ca. 800 sider om året. Han blev født i Basel i Schweiz og har ikke kun ydet store bidrag til matematikken men også til fysikken, mekanikken og astronomien.

Faderen var præst og selv matematikinteresseret, han havde taget klasser hos Jacob I Bernoulli (1654-1705), og gav sønnen sin basale grunduddannelse herunder i matematik. Euler blev optaget på universitetet i Basel, hvor han fattede interesse for matematik og læste komplicerede værker samt konsulterede hos Jacobs lillebroder Johannes I Bernoulli (1667-1748). Bernoullifamilien kom også fra Basel og ydede i tre generationer mærkbare bidrag til matematikken. Først med brødrene Jacob I, Nikolaus I (1662-1716) og Johannes I. Senere med Nikolaus I's søn Nikolaus II (1687-1759) og Johannes I's tre sønner Nikolaus III (1795-1726), Daniel (1700-1782) og Johannes II (1710-1790). Til sidst igen Johannes II's to sønner Johannes III (1744-1807) og Jacob II (1759-1789).

I en alder af 15 år afsluttede Euler sin uddannelse på universitetet i Basel. Allerede som 18-årig begyndte han at publicere, og året efter vandt han en pris fra det franske naturvidenskabelige akademi om placeringen af skibsmaster – til trods for at han aldrig havde set et skib. I 1726 tog Euler til det, af Peter den store, nyoprettede videnskabsakademi i St. Petersborg, hvor Nikolaus III og Daniel Bernoulli arbejdede. Her blev han i 1727 udnævnt til professer i medicin og fysiologi, eftersom der ingen ledige stillinger var i matematik.

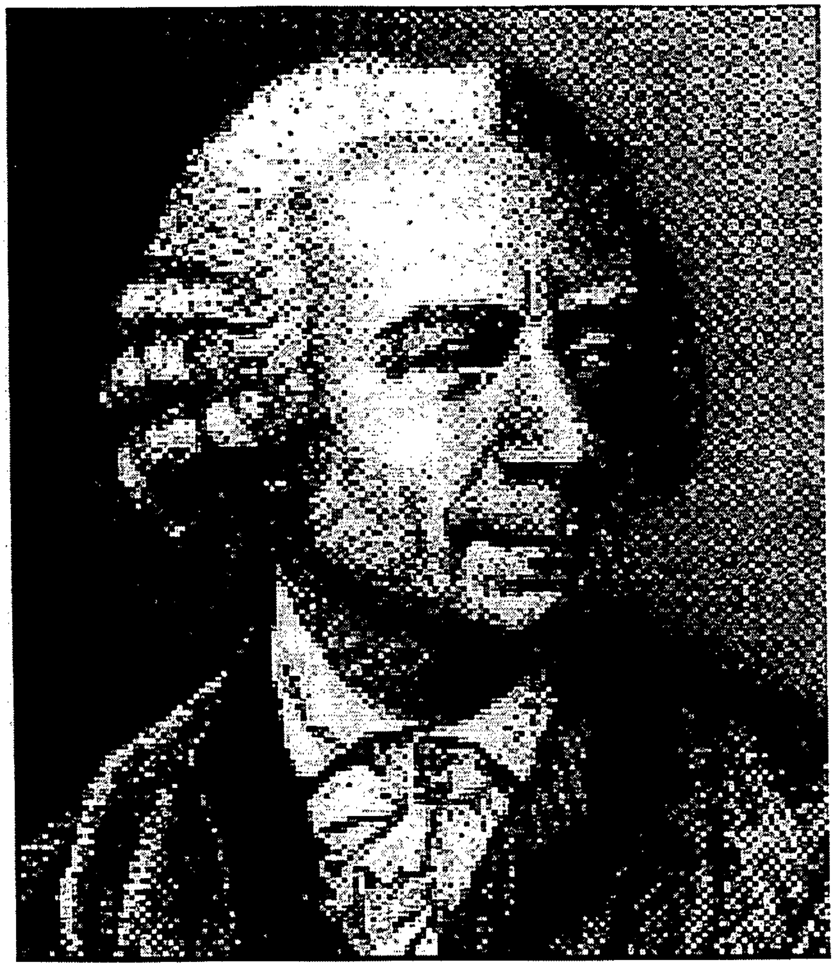
Grundet urolighederne i Rusland, efter hhv. Peter den stores død i 1725 og Kejserinde Annes død i 1740, modtog Euler tilbuddet, fra Frederik den store, om at blive medlem af Berlins videnskabelig akademi, hvor han boede i perioden fra 1741-66. Denne periode refereres ofte til som Eulers mest produktive periode med 380 værker og arbejder, hvoraf 275 blev udgivet – heriblandt *Introductio in analysin infinitorum* (1748) og *Institutiones calculi differentialis* (1755). Andre værker fra denne periode omhandler navigation, skibsbygning, hydrodynamik og mekanik, hvilket kan ses som et eksempel på datidens mere udflydende linier mellem fagområderne eller opfattelsen af, at matematikken retfærdiggjordes gennem dens anvendelser. En anden forklaring på den brede interessesfære kunne også være, at datidens naturvidenskab ikke var nær så kompliceret, og at forskerne derfor havde mere tid til deres rådighed.

Euler blev aldrig den spirituelle hofmand, som Frederik den store havde ønsket sig, og efter tiltagende uoverensstemmelser rejste Euler i 1762 tilbage til Rusland, som atter havde fået en stabil regent i Katarina den store. Euler blev blind på det ene øje i 1735, og i 1771 mistede han også synet på det andet. Han fortsatte dog sin produktion – bl.a. af *Instutuiones calculi integralis* – ved at diktere til bl.a. sine sønner, og produktionen forblev uændret (de ca. 800 sider årligt) frem til hans død.

Den 27. december 1733 giftede Euler sig med Katarina Gsell fra St. Gallen, som var datter af kunstmaleren og direktøren for St. Petersborg Kunstakademi; Georg Gsell. Katarina fødte i årenes løb 13 børn, hvoraf kun de fem overlevede – tre sønner og to døtre.

I 1773, efter 40 års ægteskab, døde Eulers hustru Katarina. Euler giftede sig på ny i 1776 med sin afdøde hustrus halvsøster Salome Abigael Gsell, som dermed blev hans anden og sidste hustru. Salome plejede den til stadighed svækkede Euler frem til hans død den 18. september 1783.

Euler opdagede/opfandt/udviklede (alt efter hvilken filosofisk overbevisning læseren har valgt at indtage) ikke nogen nye områder inden for matematikken men kom med bemærkelsesværdigt mange resultater inden for de givne rammer. Han var således med til at etablere teorien om differentialligninger og teorien om funktioner af komplekse variable. Mange af de i dag anvendte symboler er indført af Euler f.eks. grundtallet e, brugen af symbolet $f(x)$ for en funktion af x, Δy for endelige differenser og i for $\sqrt{-1}$ ved begregning med imaginære tal. Ydermere er en lang række sætninger, formler og metoder opkaldt efter ham.



Figur 3.1.A. Leonhard Euler (1707-1783).

[Euler, 1885 side 91, Fueter, 1948 side 2-23, Kline, 1972 side 400-411, Lindstrøm, 1995 side 657 og Unenge, 1997 side 61-70]

3.2 Funktionsbegrebet

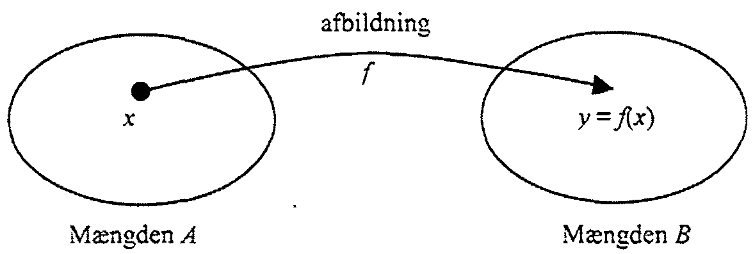
3.2.1 Funktionsbegrebet i moderne matematik

Kortfattet kan vort billede af en funktion, som det foreligger i dag, formuleres således:

Lad A og B være to mængder. Hvis der til ethvert element x i A svarer ét og kun ét element f(x) i B, da siges f at være en funktion fra A ind i B [Lützen, 1978 side 5].

Det kan forstås på den måde, at en funktion beskriver en sammenhæng mellem variable, men det er måske lige kortfattet nok. Lad os prøve at gå lidt mere i dybden.

Man kan beskrive funktionsbegrebet på flere måder, hvilket ofte kan være nyttigt i forskellige sammenhænge. Først og fremmest er der altså tale om en afbildning af en mængde A ind i en mængde B (skrives $f : A \rightarrow B$). Hvis x er et element i A (skrives $x \in A$) siges funktionen at *afbilde x over i dets billede* $y = f(x)$.



Figur 3.2.1.A. Når f er en funktion fra A ind i B, og $x \in A$, så betegner $f(x)$ det med x forbundne element i B; $f(x)$ er funktionens værdi i x, og x er argumentet for $f(x)$.

En funktion $f : A \to B$ kan også opfattes som en mængde ordnede par (x, y), hvor $x \in A$ og $y \in B$, samt der for hvert $x \in A$ hører nøjagtigt ét par. For at finde frem til en værdi for $f(x)$ benytter man det entydigt bestemte par (x, y) og sætter $f(x) = y$. Man kan også tænke på det som en samling elementpar (x, y), hvor x gennemløber A, og y er det element i B, som er knyttet til x. Mængden af elementpar (x, y) kaldes da funktionens *graf*. En funktion i tabelform, f.eks. en tabel over kvadrattal, er en liste over sådanne sammenhørende elementpar, og dens afbildning f er $y = f(x) = x^2$.

Det er måske værd at nævne, at man refererer til x som den *uafhængige* variabel og til y som den *afhængige*. Man siger gerne, at y er en funktion af x. Idéen med dette er, at x's værdi kan vælges vilkårligt (inden for funktionens definitionsmængde), hvor y's værdi afhænger af værdien af x, og når denne er valgt er y derfor fastlagt.

Ønsker man at fastholde forskellen mellem funktionen f og funktionsværdien $f(x)$, bruges den før anvendte skrivemåde, hvor man i stedet for f.eks. $f(x) = x^2 + 2$ skriver $f : x \mapsto x^2 + 2$. Symbolet "$\mapsto$" opfattes og kan læses som *en afbildning over i.*

Mht. vores føromtalte mængder A og B kan man sige, at en funktion f afbilder A ind i B, og benytter vi ovennævnte skrivemåde, får vi; $f : A \to B$. Mængden A kaldes funktionens definitionsmængde D_f, og mængden af de elementer som f afbilder ind i B, altså mængden af samtlige funktionsværdier, kaldes værdimængden V_f. Vi vender tilbage til disse begreber i afsnittet om kontinuitet.

[Binmore, 1987 side 65, Karush, 1995 side 83-84, Lindstrøm, 1995 side 216 og Lützen, 1978 side 5]

3.2.2 Det eulerske funktionsbegreb

Før vi kan tale om Eulers funktionsbegreb, må vi først have defineret, hvad Euler mener med konstante og variable størrelser. Euler skriver i kap. 1 i *Introductio in analysin infinitorum* fra 1748:

§ 1. *En konstant størrelse er en bestemt størrelse, som altid beholder samme værdi* [Euler, 1885 side 3 og Euler, 1988 side 2]. [1]

§ 2. *En variabel størrelse er en ubestemt eller universel størrelse, som kan antage enhver værdi* [Euler, 1885 side 3 og Euler, 1988 side 2-3]. [2]

Om de variable størrelser fortsætter Euler:

§ 3. *En variabel størrelse er bestemt, når en bestemt værdi knyttes til den. Derfor kan en variabel størrelse bestemmes på uendelig mange måder, da absolut alle tal kan substitueres for det. Ej heller er symbolet for den variable størrelse "fuldstændigt opbrugt" før alle bestemte tal er knyttet til det.*

Dette forklares nærmere:

En variabel størrelse omfatter dermed alle mulige tal, de positive og de negative, de hele og de brudne, de rationelle og de irrationale og transcendente; ja selv nul og de imaginære er ikke udelukket fra betydningen af en variabel størrelse
[Euler, 1885 side 4 og Euler, 1988 side 3]. [3]

Det første, som umiddelbart falder én i øjnene ved Eulers definition af den variable størrelse, er hans opremsning af tal i flæng. I dag ville man nok mene, at man ved at sige *de hele tal* ($\mathbb{Z}$) havde dækket både de positive, de negative og nul. På samme måde ville man ved at nævne *de rationale* ($\mathbb{Q}$)

også have dækket *de brudne* $\left(\frac{a}{b}\right)$. Under alle omstændigheder ville man nok i moderne matematik blot have nævnt *de reelle tal* ($\mathbb{R}$), som også dækker *de transcendente tal* (f.eks. π).

Om Euler mener andet med sin udførlige forklaring end, at den variable størrelse ikke er ét bestemt tal men i princippet alle tal substitueret for det, foreligger ikke klart.

I § 4. defineres så funktionsbegrebet:

En funktion af en variabel størrelse er et analytisk udtryk, som på en eller anden måde er sammensat af denne variable størrelse og af tal eller konstante størrelser [Euler, 1885 side 4 og Euler, 1988 side 3]. [4]

Det er værd at bemærke, at denne definition i alt sin væsentlighed nedstammer fra Johannes I Bernoullis definition anno 1718, som var blevet brugt i stigende grad af bl.a. Euler selv, indtil han nedfældede den endeligt i *Introductio in analysin infinitorum.*

Euler definerer ikke helt præcist, hvad han mener med et *analytisk udtryk*, men det er dog klart, at han tænker på formler af forskellige typer. Lützen skriver i sin artikel, at Euler med analytiske udtryk mener; dels de basale analytiske udtryk og dels de transcendente analytiske udtryk. De basale analytiske udtryk dækker over de algebraiske udtryk, dvs. dem der er dannet ved benyttelse af operationerne; +, –, ·, /, potensopløftning og uddragning af rødder. De transcendente analytiske udtryk er dem, som dækker over a^x, $\log x$, $\sin x$ og $\cos x$. Endvidere omfatter Eulers analytiske udtryk sammensætninger af disse udtryk vha. de algebraiske operationer, funktionssammensætning, implicit givne udtryk, invertering, differentiation og integration. Euler opfatter også uendelige summer, produkter og kædebrøker som analytiske udtryk og dermed også som funktioner.

I *Introductio in analysin infinitorum* tillader Euler ikke funktioner med delt forskrift, f.eks. funktioner af typen: $f(x) = \{\sin x \text{ for } x \geq 0,\ x \text{ for } x < 0\}$, som er defineret af forskellige funktioner i forskellige områder.

Euler ændrer dog senere opfattelse på dette punkt i diskussionen med d'Alemberts om den svingende streng – en diskussion vi ikke vil komme ind på.

[Euler, 1885 side 3-4, Euler, 1988 side 2-3, Lindstrøm, 1995 side 211-215 og Lützen, 1978 side 6-11]

3.2.3 Sammenligning af funktionsbegreber

Euler opfatter, ligesom man gør i dag, den variable størrelse som et generisk element (generisk betyder vilkårligt, ved f.eks. x^3 er x både den variable og det vilkårlige element). I modsætning til vor tids opfattelse skal Eulers variable kunne antage samtlige imaginære (komplekse) værdier, og kan derfor ikke være indskrænket til f.eks. et interval. Euler indskrænker dog, ifølge Lützen, af og til de variable til de reelle tal, men en yderligere indskrænkning ville han formentlig have betragtet som et brud på de variable størrelsers natur. Dette kan ses som et produkt af den tids opfattelse af den variables generalitet, og i det hele taget matematikken som værende generel. Denne idé om, at den variable skulle kunne antage alle værdier (den variables generalitet) fører til – i moderne terminologi, at funktioner er defineret overalt, hvilket de åbenlyst ikke er. Tag f.eks. $\ln x$ som kun er defineret for $x > 0$.
Eulers analytiske udtryk (og dermed også hans funktioner) må gerne til samme x-værdi knytte flere y-værdier. F.eks. ville Euler have betragtet udtrykket $y^2 = x^2 + 1$, som en funktion med to værdier $y = \pm\sqrt{x^2 + 1}$.

En anden markant forskel på det eulerske og det moderne funktionsbegreb er lighedsrelationen. Efter vor opfattelse er to funktioner f og g ens, hvis $f(x) = g(x)$ for x tilhørende samme definitionsmængde. For Euler er lighed mellem funktioner et spørgsmål om *omformning af funktioner*.

Han angiver i kap. 2 i *Introductio in analysin infinitorum* to måder, hvorpå man kan omdanne funktioner. Ved den første ændres den variable (ved substitution), og ved den anden bibeholdes den variable. Euler giver to eksempler på hhv. den første og den anden måde;

1. den irrationale funktion $f(z) = \sqrt{aa + zz}$ (aa var datidens skrivemåde for a^2) som ved substitution $z = \frac{(aa - yy)}{2y}$ bliver til den rationale funktion $g(y) = \frac{(aa + yy)}{2y}$. [5]
2. $f(z) = (1 - z) \cdot (2 - z)$ bliver til $f(z) = zz - 3z + 2$.

Efter moderne opfattelse er det andet eksempel helt i orden, mens det første ikke går an. Dette skyldes, at den irrationale og den rationale funktion er to forskellige funktioner og dermed to vidt forskellige grafiske afbildninger.

Inden for Eulers funktionsbegreb svarer der en kurve (den grafiske afbildning) til enhver funktion. Euler udvider senere dette, så der også til enhver kurve svarer en forskrift (funktionen) og opnår derved en bijektiv korrespondance:

$$\textit{funktion} \leftrightarrow \textit{kurve}.$$

Dette vil vi se nærmere på, samt det førnævnte problem med den delte forskrift, i afsnittet om Eulers kontinuitetsbegreb.

Selv om Euler i praksis blev ved med at anvende funktionsbegrebet fra *Introductio in analysin infinitorum*, gav han dog i *Institutiones calculi differentialis* en mere generel definition – set med vores øjne.

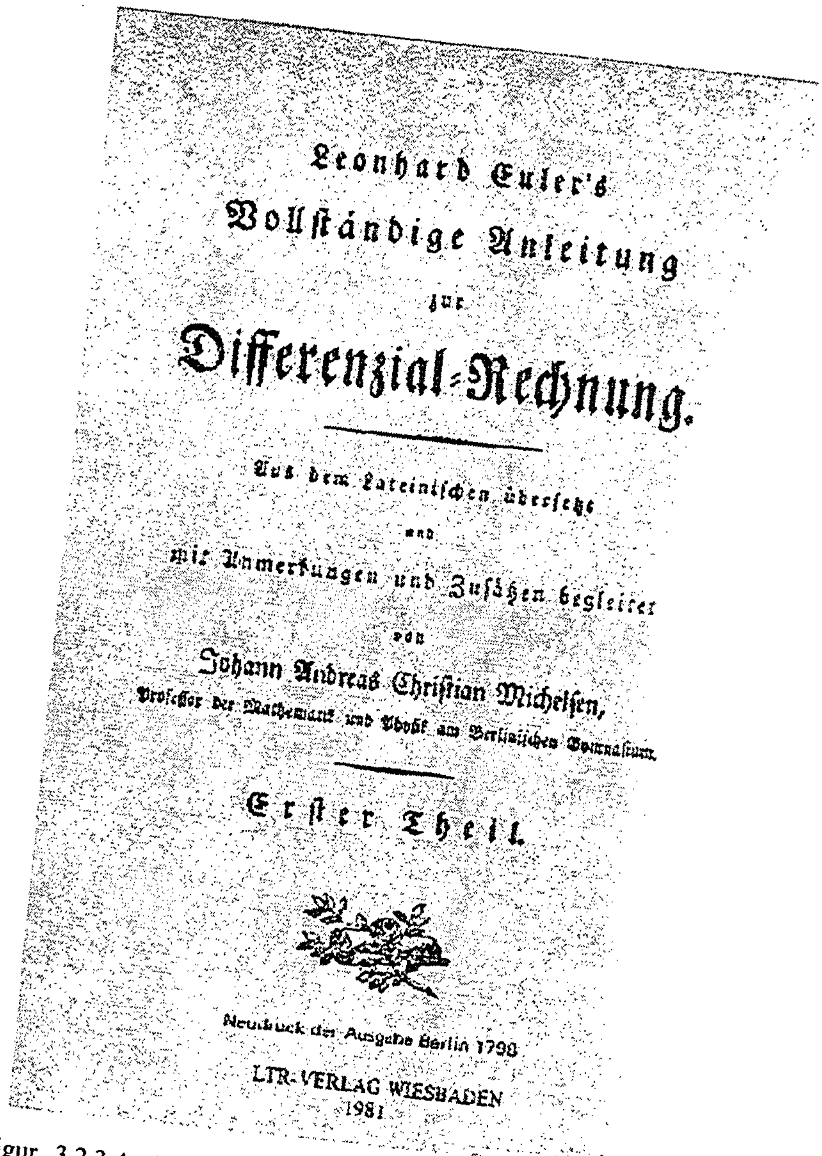
Når x således betyder en variabel størrelse, så hedder alle størrelser, der på en eller anden måde afhænger af x eller bestemmes deraf, funktioner af x [Euler, 1755 side 4]. [6]

Ser man bort fra, at en variabel størrelse for Euler er en generel størrelse, altså at funktionen er defineret over alt (i hele $\mathbb{R}$), så angiver Euler her – filosofisk set – en formulering af det i moderne matematik nu anerkendte funktionsbegreb.

Euler kommer selv med et eksempel på en sådan sammenhæng, idet han betragter en kanonkugles afskydning: Hvis to af følgende størrelser; krudtmængden, løbets retning, kastelængden og den dertil brugte tid betragtes som konstante, da er de to øvrige størrelser funktioner af hinanden. Denne ændring af funktionsdefinitionen sættes ofte i sammenhæng med striden om det svingende streng, da denne var på sit højeste ved udgivelsen af *Institutiones calculi differentialis*. Eksempelet med kanonkuglen tyder da også på ifølge Lützen, at Euler har haft andre end kun de analytiske udtryk i tankerne. Alligevel modargumenterer Lützen:

Det er dog værd at bemærke, at Euler intetsteds i artiklerne om den svingende streng sætter de E-diskontinuerte funktioner i forbindelse med vilkårlige variabelsammenhænge. Ja, selv i "De usu...", der er affattet efter "Institutiones calc. diff." bliver de E-diskontinuerte funktioner karakteriseret ved deres skiftende analytiske udtryk og ikke ved hjælp af variabelsammenhænge. Af denne grund mener jeg (Lützen) *at det er mere sandsynligt, at Eulers funktionsdefinition i "Institutiones calc. diff." ikke udspringer af striden om den svingende streng, men blot er ment som værende ækvivalent med Introductio-definitionen. Kanoneksemplet kan så forklares ved, at Euler med sin viden om ballistik har ment at kunne udtrykke de omtalte sammenhænge analytisk* [Lützen, 1978 side 20].

Uanset hvad Euler – i filosofisk forstand – har ment med denne "nye" funktionsdefinition, så benytter hverken han eller samtidens matematikere den i praksis. Dette kan også ses som et vægtigt argument for, at han ikke opfatter sin nye definition som værende væsentligt forskellig fra den gamle. I *Institutiones calculi differentialis* forekommer der kun funktioner, som er givet ved analytiske udtryk, og idéerne fra *Introductio in analysin* *infinitorum* benyttes flittigt – specielt idéen om, at alle funktioner skal kunne rækkeudvikles.


Leonhard Euler's
Vollständige Anleitung
zur
Differenzial-Rechnung.

Aus dem Lateinischen übersetzt
und
mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet
von
Johann Andreas Christian Michelsen,
Professor der Mathematik und Physik am Berlinischen Gymnasium.

Erster Theil.

Neudruck der Ausgabe Berlin 1798

LTR-VERLAG WIESBADEN
1981

Figur 3.2.3.A. Forside fra Johan Andreas Christian Michelsens oversættelse af *Institutiones calculi differentialis* anno 1798.

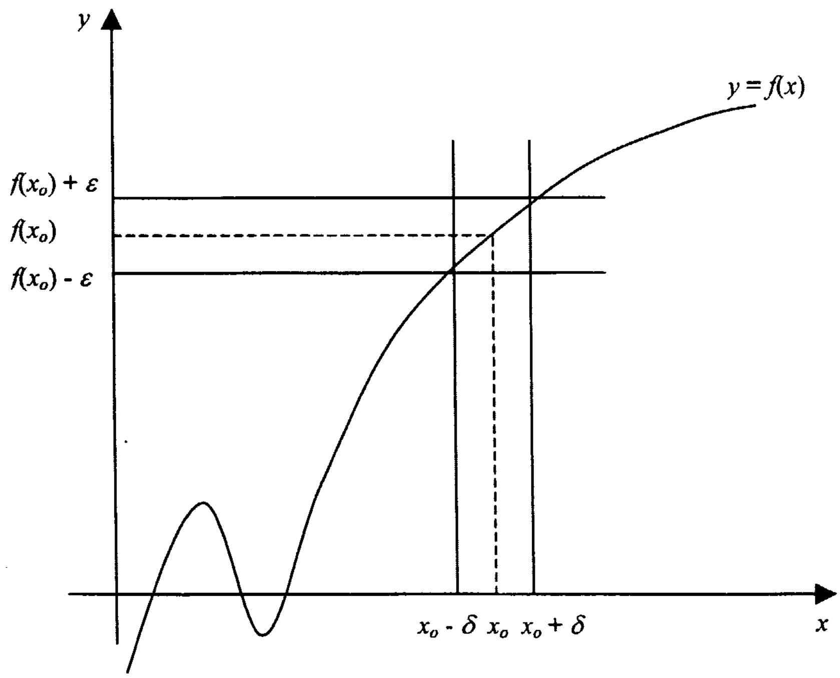
[Euler, 1755 side 4, Lindstrøm, 1995 side 213 og Lützen, 1978 side 6-15 og side 19-20]

3.3 Kontinuitetsbegrebet

3.3.1 Kontinuitet i moderne matematik

I vores definition af kontinuitet vil vi koncentrere os om de funktioner f, som er defineret på en delmængde A af de reelle tal og, som kan tage værdier $f(x)$ af de reelle tal; f: $A \rightarrow \mathbb{R}$. Mængden A er da definitionsmængden til f. Værdimængden til f er defineret ved; $B_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$.

At en funktion f er kontinuert i et punkt x_o betyder intuitivt, at funktionsværdierne $f(x)$ går mod $f(x_o)$, når x nærmer sig x_o. For at undgå misforståelser er det nødvendigt at give en præcis definition af kontinuitet.



Figur 3.3.1.A. Samspillet mellem ε og δ; uanset hvor lille ε er, skal det være muligt at finde et δ sådan, at hele funktionens graf over intervallet $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ holdes inden for de to vandrette linier med højde $f(x_o) - \varepsilon$ og $f(x_o) + \varepsilon$.

Definition af kontinuitet

En funktion f er kontinuert i et punkt $x_o \in D_f$, hvis følgende gælder: For et hvert $\varepsilon > 0$, skal der findes et $\delta > 0$ sådan, at når $x \in D_f$ og $|x - x_o| < \delta$, så er $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Udfra definitionen af kontinuitet kan vi også beskrive, hvad det vil sige, at en funktion er diskontinuert. Dette er vigtigt for rigtigt at kunne forstå kontinuitetsbegrebet. For at undgå misforståelser skal der gøres opmærksom på, at en funktion i et givet punkt x_o *enten* er kontinuert *eller* diskontinuert, da kontinuitet og diskontinuitet er hinandens modsætninger.

Diskontinuitet

En funktion f er diskontinuert i et punkt x_o, hvis der findes et $\varepsilon > 0$ sådan, at uanset hvor lille vi vælger $\delta > 0$, så kan vi finde en x-værdi sådan, at $|x - x_o| < \delta$ og $|f(x) - f(x_o)| \geq \varepsilon$.

Nedenstående sætning sammenkæder *kontinuitet af funktioner* med *konvergens af følger* og kan være nyttig i studiet af kontinuitetsbegrebet.

Sætning

1. Antag at f er kontinuert i punktet x_o, og at $\{x_n\}$ er en følge af punkter fra D_f, som konvergerer mod x_o. Da konvergerer følgen $\{f(x_n)\}$ mod $f(x_o)$.

2. Antag at f ikke er kontinuert i punktet x_o. Da findes der en følge $\{x_n\}$ af punkter i D_f sådan at $\{x_n\}$ konvergerer mod x_o, men $\{f(x_n)\}$ ikke konvergerer mod $f(x_o)$.

For bevis af hhv. 1 og 2 se [7].

Kortere udtrykt siger ovenstående sætning, at f er kontinuert i x_o hvis og kun hvis $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_o)$ for *alle* følger $\{x_n\}$ fra D_f, som konvergerer mod x_o.

Dette er en præcisering af vor føromtalte intuitive forstilling om, at f er kontinuert i x_o, hvis $f(x)$ nærmer sig $f(x_o)$, når x går mod x_o.
Ofte er man ikke kun interesseret i finde ud af, om en funktion er kontinuert i et punkt x_o, men vil gerne vide om funktionen er kontinuert i alle (eller næsten alle) punkter. Til dette bruges følgende definition.

Definition af en kontinuert funktion

En funktion $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes kontinuert, hvis f er kontinuert i alle punkterne $x_o \in D_f$.

I og med at ovenstående definition kan virke omstændig, siger mange, at en funktion er kontinuert, hvis dens graf er sammenhængende. Det viser sig imidlertid langt vanskeligere at give en klar og præcis definition af hvad det vil sige, at en graf er sammenhængende end at definere kontinuitet. En anden ulempe ved at basere kontinuitet på sammenhængsbegrebet er, at det bliver vanskeligt at definere kontinuitet i et punkt.

[Jensen og Sørensen, 1989 side 33-43 og Lindstrøm, 1995 side 180-185]

3.3.2 E-kontinuitet og E-diskontinuitet

Euler definerer i *Introductio in analysin infinitorum* (bind II), hvad han mener med hhv. kontinuerte og diskontinuerte funktioner. I bind II, hvor Euler hovedsageligt beskæftiger sig med plane kurver, erkender han også, at der er andre måder at opfatte funktioner på.

§ 8. Selvom mange forskellige kurver kan beskrives mekanisk som et kontinuerligt flyttende punkt, og når dette er gjort og hele kurven kan ses med øjet, vil vi stadig betragte disse kurver som stammende fra funktioner, da de derved bliver mere egnede for analytisk behandling. Enhver funktion

af x giver en kurve eller en ret linie, og omvendt en kurve kan definere en funktion [Euler, 1990 side 5-6]. [8]

Det er studiet af de plane kurver, der leder til en definition af kontinuitet og diskontinuitet.

§ 9. Fra en sådan opdeling af kurver følger umiddelbart deres opdeling i kontinuerte og diskontinuerte eller blandede (mixed). En kontinuert kurve er en, hvis natur er af en sådan beskaffenhed, at den kan udtrykkes ved en enkelt funktion af x. Hvis kurven er af en sådan natur, at man til (beskrivelse) af dens forskellige dele, BM, MD, DM, etc. skal bruge forskellige funktioner, dvs. efter stykket BM er defineret ved en funktion af x så kræves en anden funktion til at udtrykke stykket MD, da kalder vi en sådan kurve diskontinuert eller mixed og irregulær. Det er fordi en sådan kurve ikke kan udtrykkes ved én konstant lov, men er sammensat fra flere kontinuerte dele[Euler, 1990 side 6]. [9]

Det ses i § 8., at hvad der gælder for kurver også må gælde for funktioner og omvendt – altså den føromtalte bijektive korrespondance. I § 9. optræder opdelingen af funktioner i hhv. kontinuerte og diskontinuerte som et nyt funktionsbegreb! Dette er en udvidelse af det føromtalte eulerske funktionsbegreb fra bind I. Der er altså i *Introductio in analysin infinitorum* tale om to funktionsbegreber. Selv om bind I og bind II udkom samtidigt, mener flere i dag, at der tidmæssigt er forskel på, hvornår Euler formulerede begreberne i dem.

Lützen beskriver Eulers kontinuitetsbegreb, på baggrund af Eulers udsagn i *De usu functionum discontinuarum in analysi* fra 1763, således:

De funktioner, som var beskrevet ved ét analytisk udtryk, kaldte Euler kontinuerte og de øvrige diskontinuerte [Lützen, 1978 side 14].

Ergo ville den føromtalte $f(x) = \{\sin x \text{ for } x \geq 0,\ x \text{ for } x < 0\ \}$ nu, ifølge Euler, være en funktion blot en diskontinuert funktion.
Herefter indfører Lützen betegnelserne E-kontinuert og E-diskontinuert for at skelne mellem Eulers definition af begrebet og den moderne. Lützen fortsætter:

En funktion kan ifølge Euler være diskontinuert på to måder:

1. *Den kan svare til en mixed kurve, dvs. en kurve, der i forskellige intervaller er beskrevet ved forskellige analytiske udtryk.*
2. *Den kan svare til en helt frihåndstegnet kurve, hvor kurveforløbet ikke engang er beskrevet ved analytiske udtryk i små intervaller, men hvor udtrykket så at sige skifter fra punkt til punkt* [Lützen, 1978 side 15].

Dette er altså en udvidelse af funktionsbegrebet, idet Euler udvider omfanget af de diskontinuerte funktioner til også at omfatte helt frihåndstegnede kurver.

[Euler, 1885 side 3-6, Euler, 1988 side 2-6, Lindstrøm, 1995 side 212-214 og Lützen, 1978 side 14-16]

3.3.3 Sammenligning af kontinuitetsbegreber

Eulers opfattelse af kontinuitet adskiller sig i høj grad fra den moderne opfattelse. For Euler er der tale om, at selve funktionen er bestemt ved ét sammenhængende udtryk - det latinske ord "continuus" betyder da også "sammenhængende". En diskontinuert funktion bliver altså i den eulerske terminologi til en funktion, der er bestemt ved flere forskellige udtryk og dermed ikke "hænger sammen".
Den russiske matematiker Youschkevitch skriver om det eulerske kontinuitetsbegreb:

Eulers kontinuitetsbegreb betød invariabilitet, uforanderlighed af den analytiske lov – af den ligning der fastlægger funktionen over hele den uafhængige variabels domæne, mens diskontinuitet af en funktion betød en forandring af den analytiske lov, en eksistens af forskellige love på to eller flere intervaller i domænet [Youschkevitch, 1976 side 64]. **[10]**

Meget tyder på, at det er disse egenskaber, som Euler tillagde E-kontinuitet i sin definition fra 1748, selvom der ikke gøres explicit opmærksomt på det i *Introductio in analysin infinitorum.*

Lützen påpeger i sin artikel, at Euler udmærket vidste, at hans definition af kontinuitet ikke havde noget at gøre med det, vi i dag forstår ved begrebet. Dette forkommer os i det store hele at være en smule besynderligt - nok var Euler genial men, hvordan kan han dog have været *så* fremsynet. Til trods for det fortsætter Lützen:

Han (Euler) *anførte explicit, at en funktions kontinuitetsforhold ikke kan aflæses af dens grafiske billedes sammenhængsforhold og angav som eksempel, at det grafiske billede af $\frac{1}{x}$ ikke er sammenhængende, medens funktionen er ét analytisk udtryk og altså E-kontinuert*
[Lützen, 1978 side 15].

Umiddelbart er det altså ikke til at afgøre, hvorvidt en kurve repræsenterer en E-kontinuert eller en E-diskontinuert kurve. Youschkevitch formulerer det således:

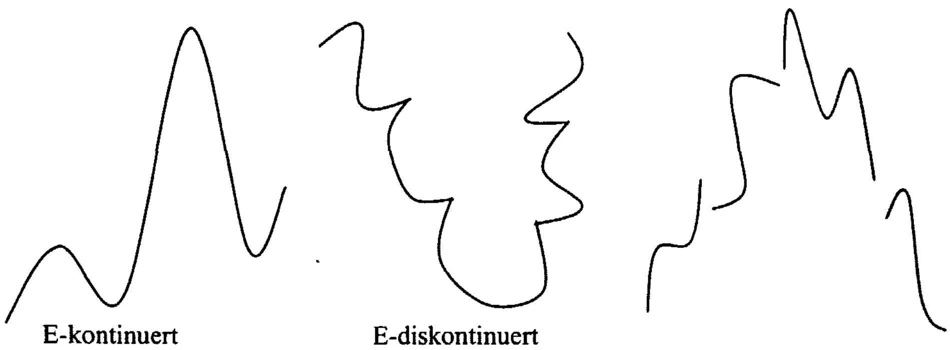
Han (Euler) *fremhæver at, hvad han mener er ikke sammenhængen eller kontinuiteten af forløbet af kurven, men udelukkende enkeltheden af den analytiske lov. Således fastlægger de to grene af hyperbelen f.eks. én kontinuert kurve* [Youschkevitch, 1976 side 67-68]. **[11]**

I modsætning til i dag hvor man udfra en funktions grafiske afbildning kan afgøre, om den er kontinuert eller ej, er det altså centralt for det eulerske kontinuitetsbegreb, at det ikke umiddelbart kan afgøres ud fra kurven, om funktionen er E-kontinuert eller E-diskontinuert. En sådan afgørelse kan være en yderst kompliceret sag, da den må tage udgangspunkt i en særdeles grundig undersøgelse af, hvorvidt den grafiske afbildning er et produkt af ét eller flere analytiske udtryk.

Noget tyder på, at Euler opfatter kontinuiteten som værende noget globalt, hvorimod vi i dag, med udgangspunkt i kontinuiteten i et punkt, opfatter den som værende først og fremmest lokal.

Til illustration af Eulers opfattelser kontra de moderne fremhæver Grattan-Guinness meget konkret:

Eulers benævnelse "kontinuert" er synonym med vores "differentiabilitet" og refererer til den gamle funktionsteori; men hans "diskontinuitet" svarer til vores "kontinuitet", og inkulderer de nye funktioner, der hver var sammensat af algebraiske udtryk i henførelse til deres "kontinuerte" dele [Gratten-Guinness 1970 side 6-7]. **[12]**



E-kontinuert | E-diskontinuert |
Moderne: Differentiabel | Moderne: Kontinuert | Moderne: Diskontinuet

Figur 3.3.3.A. Grattan-Guinness illustration til sammenligning af begrebsapperater.

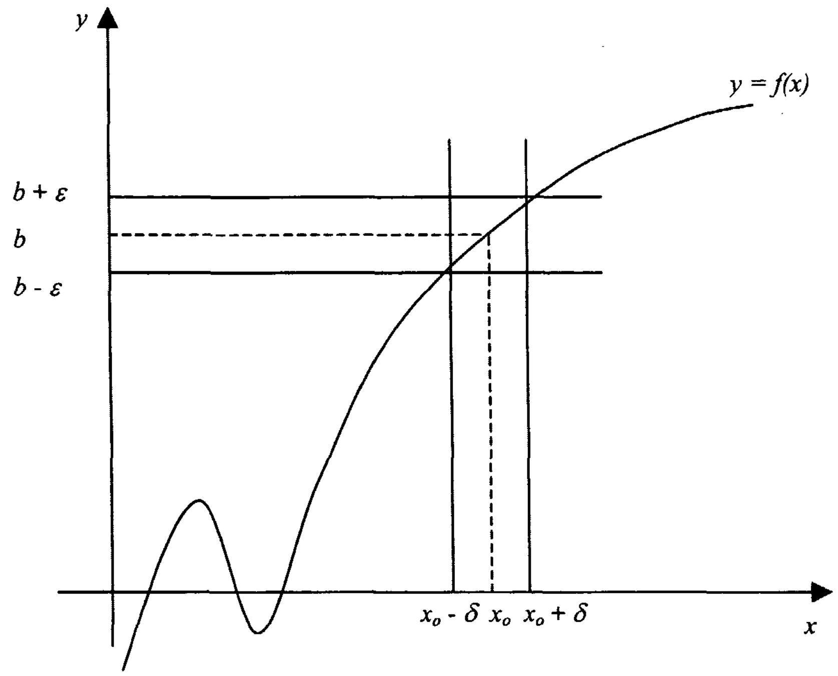
Der bør knyttes en bemærkning til den ovenstående figur, idet Gratten-Guiness må forudsætte, at ét analytisk udtryk ikke kan have denne kurve som graf. Gratten-Guiness bemærker i øvrigt også, at diskontinuerte funktioner (i moderne forstand) *tilsyneladende* slet ikke indgår i Eulers funktionsbegreb.

[Gratten-Guinness, 1970 side 6-7, Lützen, 1978 side 15 og Youschkevitch, 1976 side 64-68]

3.4 Grænseværdibegrebet

3.4.1 Grænseværdier i moderne matematik

Man siger, at f er defineret i en omegn af x_o, hvis der findes et tal $c > 0$ sådan, at $f(x)$ er defineret for alle x i intervallet $(x_o - c, c + x_o)$ *undtagen i* x_o *selv*. Er f defineret i en omegn af x_o, siger man, at $f(x)$ nærmer sig b, når x går mod x_o, hvis vi kan få afstanden mellem $f(x)$ og b så lille, vi måtte ønske ved at vælge x tilstrækkelig nær (men ikke lig) x_o.



Figur 3.4.1.A. Samspillet mellem ε og δ; uanset hvor lille ε er, skal det være muligt at finde et δ sådan, at hele funktionens graf over intervallerne $(x_o - \delta, x_o)$ og $(x_o, x_o + \delta)$ holdes inden for de to vandrette linier med højde $b - \varepsilon$ og $b + \varepsilon$.

Definition af grænseværdi

Antag at f er defineret i en omegn af x_o. Man siger, at $f(x)$ nærmer sig b som grænseværdi, når x går mod x_o, hvis følgende gælder:

For ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$ sådan, at $|f(x) - b| < \varepsilon$ for alle x sådan, at $0 < |x - x_o| < \delta$. Man skriver: $\lim_{x \to x_o} f(x) = b$

I definitionen af kontinuitet spillede funktionsværdien $f(x_o)$ en vigtig rolle, da det var den, vi forsøgte at tilnærme så godt som muligt. I definitionen af grænseværdi spiller $f(x_o)$ ingen rolle. Kravet om at $|f(x) - b| < \varepsilon$ når $0 < |x - x_o| < \delta$ sætter ingen betingelser for, hvad $f(x_o)$ skal være (tilfældet omfatter ikke x lig x_o, da $|x - x_o| = 0$, når $x = x_o$).

Før vi ser på sammenhængen mellem grænseværdi og kontinuitet, skal vi have defineret begrebet ensidige grænser.

Definition af ensidige grænser

Man siger, at $f(x)$ *går mod b, når x nærmer sig x_o fra højre* (den positive side af førsteaksen), hvis der for ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$ sådan, at $|f(x) - b| < \varepsilon$ for alle x sådan, at $x_o < x < x_o + \delta$. Man skriver: $\lim_{x \to x_o +} f(x) = b$.

Tilsvarende siger man, at $f(x)$ *går mod b, når x nærmer sig x_o fra venstre* (den negative side af førsteaksen), hvis der for ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$ sådan, at $|f(x) - b| < \varepsilon$ for alle x sådan, at $x_o - \delta < x < x_o$. Man skriver: $\lim_{x \to x_o -} f(x) = b$.

Af denne definition følger, at den tosidige grænseværdi $\lim_{x \to x_o} f(x)$ eksisterer og er lig b, hvis og kun hvis begge de ensidige grænser $\lim_{x \to x_o +} f(x)$ og $\lim_{x \to x_o -} f(x)$ eksisterer og er lig b.

Ved sammenligning af definitionerne for hhv. grænseværdi og kontinuitet fås følgende sammenhæng.

Sammenhæng mellem grænseværdi og kontinuitet

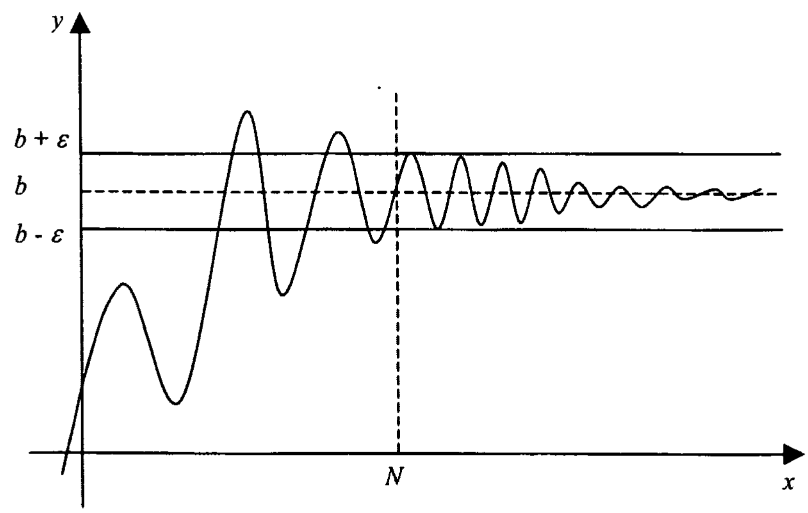
En funktion f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert i et indre punkt $c \in (a,b)$, hvis og kun hvis $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Yderligere er f kontinuert i det venstre endepunkt a, hvis og kun hvis $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, og den er kontinuert i højre endepunkt, hvis og kun hvis $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.

De tre næste definitioner omhandler grænsesituationer med uendelige størrelser.

Definition af grænseværdi for $x \to \infty$ og $-\infty$

Man siger, at $f(x)$ *går mod b som grænseværdi, når x går mod* ∞, hvis der til ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{R}$ sådan, at $|f(x) - b| < \varepsilon$ for alle $x \geq N$. Man skriver: $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$.

Tilsvarende siger man, at $f(x)$ nærmer sig b som grænseværdi, når x går mod $-\infty$, hvis der til ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{R}$ sådan, at $|f(x) - b| < \varepsilon$ for alle $x \leq N$. Man skriver: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.



Figur 3.4.1.B. For $x \geq N$ holder f sig inden for $b + \varepsilon$ og $b - \varepsilon$ og $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Definition af grænseværdi for $f(x) \to \infty$ og $-\infty$

Man siger, at $f(x)$ *går mod uendelig, når x nærmer sig* $a \in \mathbb{R}$, hvis der for ethvert $N \in \mathbb{R}$ findes et $\delta > 0$ sådan, at $f(x) > N$ når $0 < |x - a| < \delta$. Man skriver: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Tilsvarende siger man, at $f(x)$ *går mod minus uendelig*, hvis der for ethvert $N \in \mathbb{R}$ findes et δ sådan, at $f(x) < N$ når $0 < |x - a| < \delta$. Man skriver: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

På lignende måde kan man definere de ensidige grænser $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$.

Definition af grænseværdi for $f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$

Man siger, at $f(x)$ går mod ∞ når x går mod ∞, hvis der for ethvert $N \in$ findes et $M \in \mathbb{R}$ sådan, at $f(x) \geq N$ når $x \geq M$. Man skriver: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

De andre varianter af denne situation (f.eks. $f(x) \to -\infty$ når $x \to -\infty$) defineres på tilsvarende måde.

[Jensen og Sørensen, 1989 side 9-25 og Lindstrøm, 1995 side 198-205]

3.4.2 Eulers indirekte brug af grænseværdier

I forbindelse med Eulers matematiske metoder benytter han ikke direkte grænseværdi- eller konvergensbegrebet, som vi kender dem i dag. Det bemærkelsesværdige er Eulers brug af uendeligt små og store størrelser samt, at han regner med uendelige tal, som var de endelige. Dette illustreres af hans fremgangsmåde med henblik på rækkeudvikling af eksponential- og logaritmefunktionerne i *Introductio in analysin infinitorum*. Her kommer Euler frem til rækker for henholdsvis b^z (dermed også e^z når $b = 2{,}71828....$) og $\log(1 + x)$, som vi vil beskæftige os med.

§ 114. Da $a^0 = 1$, *og da værdien af potensen vokser når eksponenten vokser, forudsat at a er et tal større end* 1, *så følger at hvis eksponenten er uendeligt lille og positiv, så vil værdien også overstige* 1 *med en uendelig lille størrelse. Lad* ω *være et uendeligt lille tal, eller en brøk så lille at selvom den stadig ikke er lig 0, vil det stadig gælde, at* $a^{\omega} = 1 + \psi$, *hvor* ψ *også er et uendeligt lille tal. Fra det forgående kapitel ved vi, at hvis* ψ *ikke var uendeligt lille, så ville* ω *heller ikke være uendelig lille. Det følger, at* $\psi = \omega$, *eller* $\psi > \omega$, *eller* $\psi < \omega$. *Hvilken af disse der er sand, afhænger af værdien af a, som stadig er ukendt, så vi sætter* $\psi = k\omega$. *Så har vi* $a^{\omega} = 1 + k\omega$, *og med a som grundtallet for logaritmen, har vi* $\omega = \log(1 + k\omega)$ [Euler, 1885 side 86 og Euler, 1990 side 92]. **[13]**

Euler fastslår derfor, som grundlag for sine videre overvejelser, at hvis ω er et uendeligt lille tal så gælder, at $a^{\omega} = 1 + k\omega$, og hvis a er grundtallet for logaritmen $(\log a = 1)$ gælder, at $\omega = \log(1 + k\omega)$.

På baggrund af disse to udtryk, samt en tidligere bestemmelse af værdien for k når $a = 10$ (værdien for k bliver 2.30258), finder Euler rækken for eksponentialfunktionen b^z.

Ved opløftning af approksimationen for a^{ω} til j'te potens $a^{j\omega} = (1 + k\omega)^j$, får Euler vha. binomialformlen **[14]** følgende udtryk:

$$a^{j\omega} = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{j(j-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots.$$

Herefter argumenterer Euler videre i § 115.:

... *Hvis nu vi lader* $j = \frac{z}{\omega}$, *hvor z er et vilkårligt endeligt tal, da* ω *er uendeligt lille, er j uendeligt stort. Vi har så* $\omega = \frac{z}{j}$, *hvor* ω *er repræsenteret af en brøk med en uendelig nævner, sådan at* ω *er uendelig lille, som den skulle være* [Euler, 1885 side 87 og Euler, 1990 side 93]. **[15]**

Euler substituerer $\frac{z}{j}$ for ω, og han får følgende række:

$$a^z = \left(1+\frac{kz}{j}\right)^j = 1+\frac{1}{1}kz+\frac{1(j-1)}{1\cdot 2j}k^2z^2+\frac{1(j-1)(j-2)}{1\cdot 2j\cdot 3j}k^3z^3+$$
$$\frac{1(j-1)(j-2)(j-3)}{1\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j}k^4z^4+\cdots$$

Euler gør sig nu følgende overvejelser:

§ 116. Da j er uendelig stor, er $\frac{j-1}{j}=1$, *og jo større tal vi substituerer for j, jo tættere kommer værdien af brøken* $\frac{j-1}{j}$ *til* 1. *Derfor, hvis j er et tal større end ethvert tænkeligt tal, så er* $\frac{j-1}{j}$ *lig med* 1. *Af samme grund er* $\frac{j-2}{j}=1$, $\frac{j-3}{j}=1$ *osv. Det følger, at* $\frac{j-1}{2j}=\frac{1}{2}$, $\frac{j-2}{3j}=\frac{1}{3}$, $\frac{j-3}{4j}=\frac{1}{4}$, *osv.*

[Euler, 1885 side 87-88 og Euler, 1990 side 93-94]. **[16]**

På baggrund af disse overvejelser forkorter Euler nu sin rækkeudvikling og får: $a^z = 1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$.

Herefter sættes $b=a^n$, hvor a vælges som grundtallet for logaritmen således, at $\log b = n$. Da $b^z = a^{nz}$ fås rækken:

$$b^z = 1+\frac{knz}{1}+\frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4n^3z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$$

Euler substituerer nu $\log b$ for n og får:

$$b^z = 1+\frac{kz}{1}\log b+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}(\log b)^2+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(\log b)^3+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\log b)^4+\cdots.$$

Euler konkluderer:

... Da vi kender værdien af k, fra den givne værdi af grundtallet a, kan den generelle eksponentialfunktion b^z *udtrykkes ved en uendelig række hvis led udvikler sig med potenserne af z*

[Euler, 1885 side 86 og Euler, 1990 side 94]. **[17]**

Euler finder nu rækken for $\log(1+x)$:

Fra forrige rækkeudvikling vides, at $\omega = \log(1+k\omega)$, og følgelig er $j\omega = \log(1+k\omega)^j$. Herefter gør Euler antagelsen: $(1+k\omega)^j = 1+x$ og får $j\omega = \log(1+x)$. Hermed fastsætter Euler en bestemt sammenhæng mellem det uendelige store tal j og det uendelige lille tal ω.

Når $(1+k\omega)^j = 1+x$ er $1+k\omega = (1+x)^{\frac{1}{j}}$ og $k\omega = (1+x)^{\frac{1}{j}} - 1$ således, at $j\omega = \frac{j}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{j}} - 1\right)$. Da $j\omega = \log(1+x)$ følger det at

$\log(1+x) = \frac{j}{k}(1+x)^{\frac{1}{j}} - \frac{j}{k}$, hvor j er et uendeligt stort tal.

Euler rækkeudvikler nu $(1+x)^{\frac{1}{j}}$ ved hjælp af binomialformlen [**14**]:

$$(1+x)^{\frac{1}{j}} = 1 + \frac{1}{j}x - \frac{1(j-1)}{j\cdot 2j}x^2 + \frac{1(j-1)(2j-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j}x^3 - \frac{1(j-1)(2j-1)(3j-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j\cdot 4j}x^4 + \cdots$$

Da j er et uendeligt tal, er $\frac{j-1}{2j} = \frac{1}{2}$, $\frac{2j-1}{3j} = \frac{2}{3}$, $\frac{3j-1}{4j} = \frac{3}{4}$ osv.

Heraf følger, at $(1+x)^{\frac{1}{j}} = 1 + \frac{1}{j}x - \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{j}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}x^4 + \cdots$

og $(1+x)^{\frac{1}{j}} = 1 + \frac{x}{j} - \frac{x^2}{2j} + \frac{x^3}{3j} - \frac{x^4}{4j} + \cdots$.

Ved at gange med j på begge sider af lighedstegnet fås: $j(1+x)^{\frac{1}{j}} = j + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$.

Rækken indsættes i: $\log(1+x) = \frac{j}{k}(1+x)^{\frac{1}{j}} - \frac{j}{k}$ og man får

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right].$$

Ved at sætte $1+x = a$ og $\log a = 1$ får Euler:

$\log a = 1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \cdots\right)$ hvoraf følger, at

$$k = \frac{a-1}{2} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \cdots.$$

Herefter indsætter Euler den tidligere fundne værdi for k, når a = 10 og får:

$$2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \cdots.$$

Til dette resultat noterer Euler i §120.:

... det er vanskeligt at se hvordan dette kan lade sig gøre, da leddene i denne række er stadigt voksende, og summen af adskillige led ikke synes at nærme sig nogen grænse. Vi vil snart have et svar på dette paradoks
[Euler, 1885 side 90 og Euler, 1990 side 95-96]. [**18**]

Euler substituerer $-x$ for x i rækken $\log(1+x) = \frac{1}{k}\left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right]$

og får: $\log(1-x) = -\frac{1}{k}\left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right]$, da $x^{2p} = (-x)^{2p}$ og $x^{2p+1} = -(-x)^{2p+1}$, hvor $p \in \mathbb{N}_0$.

Herefter trækker Euler de to ovenstående udtryk fra hinanden:
$\log(1+x) - \log(1-x) = \left[\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots\right)\right] - \left[-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots\right)\right]$ og

får $\log(1+x) - \log(1-x) = \frac{2}{k}\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right]$.

Ved at sætte $\frac{1+x}{1-x} = a$ sådan, at $x(a+1) = a-1$ og $x = \frac{a-1}{a+1}$, og da $\log a = 1$ får Euler: $k = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \cdots\right]$.

Udfra denne ligning finder Euler værdien for k, når a er givet. For eksempel hvis $a = 10$, så er $k = 2\left[\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + \cdots\right]$.

Med dette resultat er Euler tilfreds og afslutter § 121. med:

... leddene i denne række aftager på fornuftig vis, således at en tilfredsstillende approksimation for k hurtig kan opnås
[Euler, 1885 side 90-91 og Euler, 1988 side 96]. **[19]**

[Euler, 1885 side 86-95 og Euler, 1988 side 92-101]

3.4.3 Sammenligning af grænseværdibegreber

Euler benytter ikke direkte grænseværdibegrebet som tidligere nævnt, hvilket kan skyldes, at det stadig var på udviklingsstadiet på hans tid. Hermed ikke sagt at grænser på Eulers tid var helt ukendte – den engelske matematiker Benjamin Robins (1707-1751) skrev allerede i 1735:

Vi kan definere en sidste værdi til at være en grænse, til hvilken en variabel størrelse kan nærme sig så meget det skal være, selvom den variable aldrig nogensinde kan blive lig grænsen [Thomsen og Spangsberg, 1988 side 29].

I § 114. benytter Euler indirekte grænseværdibegrebet i sin regning med uendeligt små størrelser. Set fra et moderne synspunkt argumenterer han derfor ikke tilfredsstillende for holdbarheden af approksimation for a^{ω}. Det er dog værd at bemærke, at han alligevel drager den rette konklusion. En moderne begrundelse for, at approksimationen gælder kunne ved brug af rækkeudviklingen af e^x være følgende:

$$a^z = e^{z\ln(a)} = 1 + \frac{z\ln(a)}{1!} + \frac{(z\ln(a))^2}{2!} + \cdots$$

$$= 1 + z(\ln(a))^2 + \left(\frac{z(\ln(a))^2}{2!} + \frac{z^2(\ln(a))^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + z(\ln(a)) + O(z^2).$$

$O(z^2)$ er restleddet. Når $z^2 \to 0$, går O også mod 0 med samme hastighed som z^2. Ved en sådan *O-notation* veksles mellem brug af "store" $O(h)$, – hvor O går mod 0 med samme hastighed som h – og "lille" $o(h)$, – hvor o går mod 0 med større hastighed end h.

Det vil sige, at $a^z = 1 + z(\ln(a))$ for $z \to 0$. Sættes $\ln(a) = k$ får man approksimationen $a^z = 1 + kz$ for $z \to 0$.
Denne approksimation svarer derfor til Eulers, hvor ω er uendelig lille, og da $z(\ln(a))$ bliver uendelig lille, når z er uendelig lille, er der ligeledes redegjort for at $a^\omega = 1 + \psi$.

I § 115. ses det, hvordan Euler ikke skelner mellem endelige og uendelige rækker. Han benytter således den endelige binomialformel i sin manipulering med de uendelige rækker. Dette er i overensstemmelse med, hvad vi bemærkede i afsnittet om Eulers grænseværdibegreb, nemlig at han regner med uendelige tal som var de endelige.

Eulers indirekte konvergensbegreb kommer ligeledes til udtryk i § 115. I moderne terminologi ønsker Euler at vise, at rækkeudviklingen af $a^z = \left(1 + \frac{kz}{j}\right)^j$ konvergerer mod $1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$.

I moderne matematik gøres dette ved at finde grænseværdien for $j \to \infty$ af samtlige led. Med udgangspunkt i fjerde led får vi:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2j \cdot 3j} k^3 z^3 = \lim_{j\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{j}\right)\left(1-\frac{2}{j}\right)}{3!} (kz)^3 = \frac{1}{3!}(kz)^3.$$

Grænseværdien for de andre led findes på samme måde. Imidlertid kan man ikke slutte, at summen af samtlige led konvergerer udfra at have vist, at hvert enkelt led konvergerer, selvom det i ovenstående er tilfældet. Generelt benytter man sig af sætningen om majoriseret konvergens, hvilket vi har undladt grundet sværhedsgraden.

Euler kommer til samme resultat ved at gøre sig nogle overvejelser omkring uendeligt store tals dominans i forhold til endelige. Han argumenterer således: $\frac{j-1}{2j}=\frac{1}{2}$, hvor j er et uendeligt stort tal – i tælleren fås $j-1=j$, hvorefter brøken forkortes med j og giver en halv. I moderne notation ville argumentationen være følgende: $\lim_{j\to\infty}\frac{j-1}{2j}=\lim_{j\to\infty}\frac{1-\frac{1}{j}}{2}=\frac{1}{2}$.

Man kan hermed påstå, at Euler har nogle indirekte konvergensovervejelser, som i dette tilfælde er tilstrækkelige til at opnå det "rigtige" resultat. Efter at have vist, at den 1. række konvergerer mod den 2., når j er et uendeligt stort tal, og da den 2. række er konvergent!, mener Euler at have bevis nok for, at den 1. række er konvergent!. Imidlertid er det ingen garanti for konvergens, dvs. at de enkelte led i rækken konvergerer. Man må vise, at leddene hver for sig domineres af leddene i den konvergente række (den 2. række). Til dette benyttes majorantkriteriet [**20**]: Antag at den 2. række konvergerer, og at der findes et tal c sådan, at c ganget med det n'te led i den 2. række er større end eller lig med det n'te led i den 1. række, da konvergerer den 1. række også.

For $c=1$ skal følgende altså gælde: $\frac{1\left(1-\frac{1}{j}\right)\left(1-\frac{2}{j}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{j}\right)}{n!}\leq 1\cdot\frac{1}{n!}$.

Dette er sandt thi $1\geq\left|\left(1-\frac{1}{j}\right)\left(1-\frac{2}{j}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{j}\right)\right|$, når j er positiv – hvilket det er, da j er et uendeligt stort tal. Følgelig konvergerer 1. række.

Eulers "paradoks" opstår, da han efterprøver rækken:

$\log(1+x)=\frac{1}{k}\left[\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right]$, med værdien $x=9$, der ligger udenfor rækkens konvergensinterval, nemlig]-1, 1] (se næste side). Euler får en divergent række som udtryk for $\log(10)$. Faktummet at Euler refererer til denne fejl som værende et paradoks viser tydeligt, at hans konvergensbegreb ikke er fuldstændigt. Han fastholder, i overensstemmelse med datidens ukritiske brug af uendelige rækker, at rækken *skal* tillægges en mening.

Dog mener Euler at få løst paradokset, når han ved manipulation med udtrykket $\left(\frac{1+x}{1-x} = a \Leftrightarrow x = \frac{a-1}{a+1}\right)$ automatisk får x til at ligge indenfor konvergensintervallet. Euler får altså indirekte skabt et konvergensinterval, hvilket ikke kan siges at være en løsning på problemet, da han ikke benytter det fundne til at forklare ovenstående uoverensstemmelse.

Rækkens begrænsede konvergensinterval opstår, da Euler rækkeudvikler udtrykket $(1+x)^{\frac{1}{j}}$ vha. binomialformlen. Vi finder ved hjælp af **[21]** konvergensradius: Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en række og antag, at grænsen $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$ eksisterer, da gælder, at når $a < 1$ konvergerer rækken absolut.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{(j-1)(2j-1)\ldots(nj-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j\ldots(n+1)j}\cdot x^{n+1}\right)}{\left(\frac{(j-1)(2j-1)\ldots((n-1)j-1)}{j\cdot 2j\cdot 3j\ldots nj}\cdot x^{n}\right)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{(j-1)(2j-1)\ldots(nj-1)}{j^{n+1}(1\cdot 2\ldots(n+1))}\cdot x^{n+1}\right)}{\left(\frac{(j-1)(2j-1)\ldots((n-1)j-1)}{j^{n}(1\cdot 2\ldots n)}\cdot x^{n}\right)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(j-1)(2j-1)\ldots((n-1)j-1)(nj-1)}{(j-1)(2j-1)\ldots((n-1)j-1)}\cdot\frac{j^{n}(1\cdot 2\ldots n)}{j^{n+1}(1\cdot 2\ldots(n+1))}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(nj-1)}{j(n+1)}\cdot x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot(j-\frac{1}{n})}{n\cdot j(1+\frac{1}{n})}\cdot x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(j-\frac{1}{n})}{j(1+\frac{1}{n})}\cdot x\right| \to |x| \text{ for } n\to\infty.$$

Det vil sige, at konvergensradius er $|x|<1$. Dette kunne Euler af gode grunde ikke uden et grænseværdi- og konvergensbegreb.

En anden ting man må undres over, er Eulers generelt manglende argumentation for korrektheden i hans metode. Der er ikke nødvendigvis tale om deciderede fejl, men set i lyset af, at *Introductio in analysin* *infinitorum* oprindelig var ment som en lærebog, virker denne mangel påfaldende. Det først beskrevne i dette afsnit, om holdbarheden af approksimation for a^{ω}, er et eksempel på dette.

Et andet eksempel er, hvor Euler sætter $(1+k\omega)^j$ lig med $1+x$ i rækkeudviklingen af $\log(1+x)$ under forudsætning af, at $z = j\omega$ er endelig uden at argumentere for, hvorfor dette er korrekt. En moderne argumentation er som følger:

$$\lim_{j\to\infty}(1+k\omega)^j = \lim_{j\to\infty}\left(1+\frac{kz}{j}\right)^j = e^{(kz)} \text{ [22].}$$

Det vil sige, at $e^{(kz)} = a^z$, hvor a^z kan rækkeudvikles:

$$a^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kz)^n}{n!} = 1 + \frac{kz}{1!} + \frac{(kz)^2}{2!} + \frac{(kz)^3}{3!} + \cdots = 1 + x \text{, hvor } x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kz)^n}{n!}.$$

Hvis z er endelig, konvergerer summen og giver således et endeligt x.

På trods af Eulers indirekte brug af grænseværdi- og konvergensbegrebet, har hans matematiske metoder mange paralleller til den moderne matematik. Eksempelvis med hensyn til infinitesimalregningen kan de overvejelser, han gør sig omkring funktioners udvikling i det uendelige, oversættes direkte til O-notation. Desuden fik han som regel flotte resultater, hvilket kan antyde, at han havde en intuitiv forståelse for endnu ikke definerede begreber. Der må dog tages det forbehold, at eventuelt mislykkede beregninger sandsynligvis ikke vil optræde i hans lærebøger.

[Thomsen og Spangsberg, 1988 side 29]

3.5 Indførelse af differentialregningen

3.5.1 Differentialregning i moderne matematik

Først vil vi se på, hvordan man i den moderne matematik definerer, at en funktion er differentiabel.

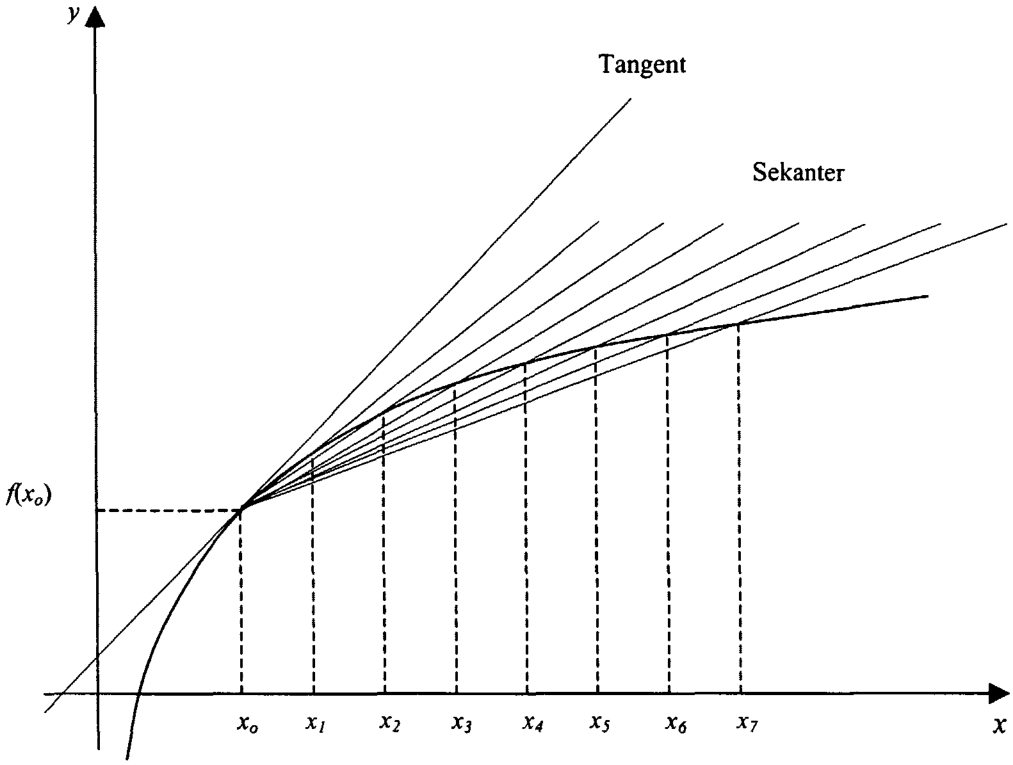
Definition af differentiabilitet

Antag at f er defineret i en omegn af punktet x_0 (det betyder, at der findes et interval $(x_o - c, x_o + c)$ sådan, at $f(x)$ er defineret for alle x i intervallet *også i x selv*). Hvis grænseværdien $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ eksisterer, siger man, at f er *differentiabel* i x_o. Man skriver $f'(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, og kalder denne størrelse for *differentialkvotienten* til f i punktet x_o.

Ofte benyttes andre varianter for differentialkvotienten af f i x_o. To eksempler på dette er $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta) - f(x_o)}{\Delta x}$ og $f'(x_o) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$, hvor man ganske enkelt erstatter x med hhv. $x_o + \Delta x$ og $x_o + h$.

Man benytter gerne forskellige skrivemåder for selve differentialkvotienten $f'(x_o)$, f.eks. $\frac{df}{dx}(x)$, $D[f(x)], y'$ og $\frac{dy}{dx}$.

Den geometriske tolkning af differentiation som man oftest benytter i lærerbøger er, at man tænker på differentialkvotienten $f'(x_o)$ som værende hældningskoefficienten til tangenten til kurven $y = f(x)$ i punktet $(x_o, f(x_o))$. Figur 3.5.1.A. illustrerer denne tolkning.



Figur 3.5.1.A. $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ er hældningskoefficienten til sekanten gennem punkterne $(x_o, f(x_o))$ og $(x, f(x))$, og når x nærmer sig x_o, nærmer sekanten sig mere og mere tangenten i $(x_o, f(x_o))$. (En sekant er et liniestykke, som går gennem to punkter på en kurve - i dette tilfælde punkterne $(x_o, f(x_o))$ og $(x, f(x))$. I modsætning til sekanten "rører" tangenten netop kurven i ét punkt – i dette tilfælde punktet $(x_o, f(x_o))$.

Her kan det måske være nyttigt at nævne tangentens ligning, som er $y = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o)$. Denne kendes også som det approksimerede førstegradspolynomium, når y udskiftes med p(x). Det ses, at tangentens ligning er en forskrift for en ret linie $(y = ax + b)$ med hældningen $a = f'(x_o)$.

En af de teoretiske konsekvenser af definitionen af differentiabilitet er sammenhængen mellem denne og kontinuitetsbegrebet.

Sætning

Hvis en funktion f er differentiabel i punktet x_o, så er den også kontinuert i punktet x_o.

Bevis 1

Da f er differentiabel i x_o, ved vi, at $f'(x_o)$ eksisterer og $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o)$ for $x \to x_o$. Når vi skal undersøge kontinuiteten, må vi betragte $f(x)-f(x_o) = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \cdot (x-x_o)$.

For $x \to x_o$ går første faktor i dette produkt mod tallet $f'(x_o)$, mens den anden faktor går mod nul, altså vil produktet også gå mod nul. Det vil sige: $f(x)-f(x_o) \to 0$ for $x \to x_o$ eller $f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o$, hvilket netop er betingelsen for , at f er kontinuert i x_o.

Dermed er sætningen bevist. ∎

Læg mærke til at sætningen ikke gælder den anden vej, – en funktion kan sagtens være kontinuert i et punkt uden også at være differentiabel i punktet. Et eksempel på dette er funktionen $|x|$, som er kontinuert men ikke differentiabel i 0.
En anderledes måde at bevise ovenstående sætning på er ved at tage udgangspunkt i en anden sætning (en hjælpesætning eller et lemma).

Lemma

Antag at f er differentiabel i punktet x_o. Da findes der en funktion η sådan, at $f(x_o+h) = f(x_o) + f'(x_o)h + \eta(h)h$ og $\lim_{h\to 0}\eta(h) = 0$ og $\eta(0) = 0$.

For bevis se [**23**].

Bevis 2

Man skal igen vise, at $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Ifølge ovenstående sætning er

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_o + h) = \lim_{h \to 0} [f(x_o) + f'(x_o)h + \eta(h)h] = f(x_o).$$

Dermed er sætningen bevist. ∎

3.5.1.2 Nogle regneregler for differentiation og deres beviser

Når man i praksis arbejder med den moderne differentialregning, kan det somme tider være behjælpeligt at gå frem efter det, man kalder tre-trins-reglen. Dens hovedformål er at opsætte definitionen på differentiabilitet på en mere overskuelig måde sådan, at for eksempel beviser for regneregler til differentiation kan deles op i tre trin.

Tre-trins-reglen

Lad $f(x)$ være en funktion som er defineret i et interval omkring x_o.
Dens *mulige* differentialkvotient findes da på følgende måde:

Trin 1

Først opskrives differenskvotienten $\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ for funktionen $f(x)$.

Trin 2

Hernæst reduceres og/eller omskrives differenskvotienten til et "passende" udtryk. Med "passende" menes der et udtryk, som vi kan tillade at lave grænseovergang på, uden noget drastisk vil forekomme som for eksempel brøken $\frac{0}{0}$.

Trin 3

Til sidst lader vi nu x gå mod x_o for at undersøge om funktionen $f(x)$'s differenskvotient har en grænseværdi for x gående mod x_o.

Hvis det er tilfældet siger vi, at $f(x)$ er differentiabel i punktet x_o.

På baggrund af ovenstående vil vi nu se på nogle få regneregler for differentiation.

Sætning

Funktionen $f(x)=x^2$ er differentiabel i ethvert tal x_o med differentialkvotienten $f'(x_o) = 2 \cdot x_o$.

x_o vil i denne sammenhæng gælde for ethvert tal, da definitionsmængden for funktionen $f(x)=x^2$ netop er hele $\mathbb{R}$.

Bevis ud fra tre-trins-reglen

Trin 1

Først opskriver vi differenskvotienten $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ for funktionen $f(x)=x^2$:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{x^2-x_o^2}{x-x_o}$$

Trin 2

Hernæst reducerer vi differenskvotienten:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{x^2-x_o^2}{x-x_o} = \frac{(x-x_o)\cdot(x+x_o)}{x-x_o} = x+x_o$$

Trin 3

Til sidst lader vi nu x gå mod x_o og ser, at

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x^2-x_o^2}{x-x_o} = 2 \cdot x_o$$

Hermed er sætningen bevist. ■

På samme måde kan man finde differentialkvotienterne for funktionerne $f(x) = x^{(1,2,3,4,etc.)}$.

Der findes dog et smartere bevis således, at man kan undgå de mange omgange af tre-trins-reglen. Beviset gennemgås senere i afsnittet.

Hvis funktionen er på formen $f(x) = ax + b$, er det ikke overraskende, at når man differentierer denne fås $f'(x) = a$.
Grafen for $f(x)$ er netop en ret linie, og derfor er alle sekanter og tangenter sammenfaldende med grafen. Beviset for funktionen $f(x) = ax + b$ er analog med det ovenstående bevis, dog vil reduceringen se anderledes ud.

Tre-trins-reglen kan også bruges til at bevise regneregler for mere generelle funktioner som for eksempel $f(x)$ og $g(x)$ for henholdsvis deres produkt, sum/differens eller division. Der skal dog lige påpeges, at en forudsætning for disse beviser er, at både $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable funktioner.

Sætning

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er differentiable funktioner gælder:

$$(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g'(x_o)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o) \cdot g(x_o) - f(x_o) \cdot g'(x_o)}{(g(x_o))^2}, \text{ forudsat at } g(x_o) \neq 0$$

Her vil vi kun bevise reglen for et produkt. Beviset for division kan gennemføres på tilsvarende måde.

Bevis ud fra tre-trins-reglen

Trin 1

Vi opskriver differenskvotienten for funktionen $h(x) = (f \cdot g)(x)$:

$$\frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_o) \cdot g(x_o)}{x - x_o}$$

Trin 2

For at omskrive denne differenskvotient benytter vi:

$f(x) = (f(x) - f(x_o)) + f(x_o)$.

Herefter får man:

$$\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_o)\cdot g(x_o)}{x - x_o} = \frac{(f(x) - f(x_o))\cdot g(x) + f(x_o)\cdot g(x) - f(x_o)\cdot g(x_o)}{x - x_o}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_o)\cdot g(x_o)}{x - x_o} = \frac{(f(x) - f(x_o))\cdot g(x) + f(x_o)\cdot (g(x) - g(x_o))}{x - x_o}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_o)\cdot g(x_o)}{x - x_o} = \frac{(f(x) - f(x_o))}{x - x_o}\cdot g(x) + f(x_o)\cdot \frac{(g(x) - g(x_o))}{x - x_o}$$

Trin 3

Her ved vi, at den første brøk går mod $f'(x_o)$ for x gående mod x_o, og den sidste brøk går mod $g'(x_o)$ for x gående mod x_o. Endvidere gælder, at $g(x) \to g(x_o)$ for $x \to x_o$. Dette følger af, at $g(x)$ er differentiabel og derfor også er kontinuert. Alt i alt viser dette, at

$$\lim_{x\to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)\cdot g(x_o) + f(x_o)\cdot g'(x_o)$$

Hermed er sætningen bevist. ∎

Ud fra beviset ses også, at hvis vi lader enten $f(x)$ eller $g(x)$ være en konstant k vil vi i trin tre få

$\lim_{x\to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} = k\cdot f'(x_o)$, hvor $g(x)$ her er konstanten og $h(x) = k\cdot f(x)$

Disse små beviser og den sidste overvejelse fører os frem til det induktive bevis for funktionen $f(x) = x^n$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

Sætning

For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathbb{R}$ er funktionen $f(x) = x^n$ differentiabel i ethvert x og $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Bevis

Vi skrev, at man kunne vise sætningen for $n = 1,2,3,4, etc.$ udfra tre-trins-reglen. Vi forestiller os nu, at vi har vist sætningen for $n = 1,2,\ldots,p$. Vi mangler derfor at vise, at sætningen gælder for $n = p+1$. Hertil benytter vi at $x^{p+1} = x^p \cdot x$ og bruger produktreglen:

$$\left(x^{p+1}\right)' = \left(x \cdot x^p\right)' = 1 \cdot x^p + x \cdot p \cdot x^{p-1} = \left(p+1\right) \cdot x^p$$

Hermed er sætningen bevist. ∎

Denne bevismetode kaldes induktion efter *n*.

En anden metode til at finde differentialkvotienten på er ved hjælp af ledvis differentiation af en rækkeudvikling af $f(x)$ med konvergensradius $R \neq 0$. Metoden bliver dog ikke brugt i gymnasiet eller på HF, men eftersom den ligger meget tæt opad, hvordan Euler differentierede (som vi senere vil komme ind på), må det være relevant at beskrive denne og afslutte med et regneeksempel. Vi vil dog ikke gennemføre beviset.

Ledvis differentiation

Antag at funktionen $f(x)$ er repræsenteret som rækkeudviklingen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ med konvergensradius } R \neq 0.$$

Da er funktionen $f(x)$ differentiabel på $(-R, R)$ og

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots.$$

Eksempel

Vi ved, at funktionen $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$

Dette udtryk kan omformes til:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \cdots.$$

Ud fra formlen ledvis differentiation må der gælde:

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{2!} \cdot x + \frac{3}{3!} \cdot x^2 + \frac{4}{4!} \cdot x^3 + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots.$$

Denne rækkeudvikling er lig med rækkeudviklingen, som vi startede med. Ergo må der udfra ledvis differentiation for rækkeudviklingen af e^x gælde, at både den oprindelige række og den differentierede række konvergerer mod e^x indenfor førnævnte konvergensradius R.
Dette stemmer også overens med, at vi ved, at differentialkvotienten for e^x, netop er det samme; e^x.

Eksemplet var lidt heldigt, da vi sluttede med det udtryk vi startede med. Tit går det ikke så nemt til, da man ikke sådan uden videre kan se, hvad en rækkeudvikling af en funktion konvergerer imod, selvom den behandles inden for dens konvergensradius.

Når man i moderne matematik differentierer i praksis, vil man selvfølgelig ikke hver gang gennemgå tre-trins-reglen og ledvis differentiation for nemme og kendte funktioner men bruge regnereglerne for differentiation i en "håndevending". Dette lille afsnit argumenterer for, hvad vi i dag gør i praksis. Yderligere skulle der gerne ses, at selvom man bruger reglen for ledvis differentiation, vil man stadig ende med et konvergensspørgsmål, hvor man må gøre sig overvejelsen om, hvorvidt rækkeudviklingen af funktionen konvergerer eller divergerer.

[Binmore, 1987 side 92-101, Edwards og Penny, 1998 side 682-691, Hebsgaard et. al., 1992 side 89-101, Jensen og Sørensen, 1989 side 43-71 og side 75, Karush, 1995 side 51-53 og 289-290 og Lindstrøm, 1995 side 219-227]

3.5.2 Eulers indførelse af differentialregningen

I sit andet hovedværk *Institutiones calculi differentialis* indfører Euler differentialregningen ved hjælp af rækkeudvikling af funktioner. Hovedværket er indtil nu kun blevet oversat til tysk i 1798 – i alt fire bind. Med Leonhard Euler forlod den matematiske analyse geometrien. For ham var det derfor studiet af allerede kendte funktioner, som var relevant, dog uden brug af geometriske fortolkninger. Førhen havde infinitesimalregningen især handlet om kurver, men med Euler handlede det nu om funktioner (som tidligere nævnt tillagde Euler begrebet *funktioner* en anderledes betydning, end hvad vi i den moderne matematik i dag gør).
I forordet til *Institutiones calculi differentialis* skriver han:

... dette værk holder sig helt og holdent indenfor den rene analyses område, så jeg har tilmed ikke engang haft brug for at medtage en eneste figur til illustration [Thomsen og Spangsberg, 1987 side 21].

3.5.2.1 Eulers rækkeudvikling af funktioner

Hvad Euler egentlig mente med sin rækkeudvikling af funktioner beskrives i hans første hovedværk *Introductio in analysin infitinium.*

Her anvender Euler rækkeudvikling på en del funktioner blandt andet de trigonometriske funktioner, eksponentialfunktionen og logaritmefunktionen. Denne udvikling skete mere eller mindre på baggrund af antagelsen:

§ 59. ... Der kan i alle tilfælde ikke være tvivl om, at enhver funktion af z kan udtrykkes ved den "uendelige" række $Az^{\alpha} + Bz^{\gamma} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + ect.$, *hvor* α, β, γ *og* δ, *etc. kan antage alle talværdier* [Euler, 1885, side 49]. **[24]**

For Euler betød det for eksempel, at $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots$

var regneudtrykket for eksponentialfunktionen. For en moderne læser stemmer denne rækkeudvikling også overens med det faktum, at den konvergerer mod e^x, og Euler må da også have været godt tilfreds, da den samtidig opretholdte idéen om den variables generalitet.

Ved første indtryk vil Euler alligevel komme ud i problemer med sin antagelse om rækkeudvikling af funktioner. Moderne set vil for eksempel højre side af ligningen $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$ kun være defineret for $|x|<1$, og Euler vil derfor ikke kunne opretholde idéen om den variables generalitet. Euler kommer alligevel uden om problemet ved at definere en rækkes sum. I Lars C. Mejlbos bog *Uendelige rækker en historisk fremstilling* er § 102.-111. fra *Institutiones calculi differentialis* blevet oversat til dansk. Euler diskuterer her problemet med summationen af de divergente rækker og kommer til en endelig definition. For at belyse hvordan han kommer uden om problemet med de divergente række, er det relevante fra § 102.-111. af Lars C. Mejlbos oversættelser gengivet her.

§ 102. Man kan gå videre med summation af uendelige rækker, hvorved man helt kan udrydde forskellige tvivlsspørgsmål, der er opstået i den

sammenhæng. Betragter vi først rækken af ens led $1+1+1+1+1+1+1+1+1+etc.$, *og løber den videre uden ende, det vil sige i det uendelige, så kan det ikke betvivles, at summen af alle disse led er større end et ethvert angiveligt tal, og den må derfor være uendelig.*
Det bekræftes også af rækkens oprindelse, idet den er udviklingen af brøken $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+etc.$, *når man sætter* $x=1$. *Deraf fås*

$$\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+etc.\ \textit{og summen}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\textit{det uendelige}$$

[Mejlbo, 1983, side 177].

I § 102. kan man se, at Euler accepterede division med nul og samtidig tillagde brøken $\frac{1}{0}$ værdien; det uendelige. Det uendelige blev altså for Euler en endelig størrelse (Eulers opfattelse af det uendelige som noget endeligt fremgår også af afsnittet om Eulers indirekte grænseværdibegreb), og vi vil senere komme ind på hans manipulation med nuller. En anden ting som er vigtig at lægge mærke til er, at Euler kalder højre side i udviklingsligningen for *rækkens oprindelse*. I § 103. opstår der problemer, idet han nu indsætter tallene 2, 3, 4, etc. på *x*'s plads og slutter, at rækkeudviklingen $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$ fører til "vigtige" vanskeligheder.

§ 103. Selvom der her ikke kan opstå tvivl om, at et og samme endelige tal taget uendelig mange gange nødvendigvis må gå over i et uendeligt tal synes dog oprindelsen fra den almene række

$$\frac{1}{1-x}=1+x=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+etc.$$

også at føre til meget vigtige vanskeligheder. For sætter man efterhånden tallene 1, 2, 3, etc. ind for x, så får man følgende rækker:

A. $\frac{1}{1-1}=1+1+1+1+1+1+etc.=\frac{1}{0}=\textit{det uendelige}$

B. $\frac{1}{1-2}=1+2+4+8+16+32+etc.=-1$

$C. \quad \frac{1}{1-3} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + etc. = -\tfrac{1}{2}$

$D. \quad \frac{1}{1-4} = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + etc. = -\tfrac{1}{3}$

Da alle led i rækken B bortset fra det første er større end leddene i rækken A, så skulle summen af rækken B nødvendigvis være større end summen af rækken A; men udregningen giver, at summen af A er uendelig stor, og summen af B er negativ, det vil sige mindre end intet, og det kan ikke forenes. Endnu mindre kan man forene sædvanlige begreber med, at summen af denne og alle de følgende rækker er negative, selvom alle led er positive [Mejlbo, 1983, side 177-179].

§ 105. ... Vi ser os derfor nødsaget til at hævde, at de summer, som de almene formler giver, ikke er sande summer. Da disse rækker opstår ved en fortsat division, hvor resten stadig bliver delt på ny, og resten stadig vokser, jo længere man går frem, så er man aldrig berettiget til at undlade resten, og allermindst den sidste rest, det vil sige den, der bliver tilovers, efter man har delt uendelig mange gange, fordi den sidste rest er uendelig stor. Men da man ved de ovenstående rækker slet ikke har agtet på denne rest, så er det intet under, at man ved summationen er forfalden til urimeligheder. Og dette svar er helt sikkert sandheden, da det beror på rækkens oprindelse, og det udrydder altså al tvivl [Mejlbo, 1983, side 179].

§ 106. For at gøre dette endnu tydeligere, så vil vi betragte udviklingen af brøken $\frac{1}{1-x}$ *i de første led. Der gælder:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$$

etc.

Den der sætter summen af den endelige række

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1}{1-x}$$

begår altså en fejl på $\frac{x^4}{1-x}$*....etc.* [Mejlbo, 1983, side 179-180].

§ 110. Efter min mening ligger hele vanskeligheden i ordet SUM. Thi når man bruger ordet SUM af rækken i den sædvanlige forstand, hvor man mener samlingen af alle led forenet, så er der ingen tvivl om, at man kun virkelig kan fremstille summen af de rækker, der konvergerer, og hvor værdien af rækken mere og mere nærmer sig til en fast værdi, jo flere led man faktisk samler sammen. Derimod har de divergente rækker, hvis led ikke aftager mod 0, hvad enten + og - veksler eller ej, ikke nogen bestemt sum, når man tager dette ord i betydningen af samlingen af alle led.
Men når det dog som fremhævet gælder, at man af disse falske summer kan udlede sandheder, så sker dette ikke fordi det endelige udtryk for eksempel $\frac{1}{1-x}$ *er summen af rækken* $1 + x + x^2 + x^3 + etc.$*, men kun fordi dette udtryk giver rækken når det udvikles. På den måde kunne man helt lade være med at bruge ordet sum* [Mejlbo, 1983, side 181-182].

§ 111. Vi kan altså helt afskaffe disse vanskeligheder og tilsyneladende selvmodsigelser, hvis vi giver ordet SUM en anden betydning end det sædvanligvis har. Vi siger derfor at ***SUMMEN af en uendelig række er det endelige udtryk, hvis udvikling er rækkens oprindelse.***

I den forstand er $\frac{1}{1-x}$ *faktisk SUMMEN af rækken* $1 + x + x^2 + x^3 + etc.$*, fordi rækken opstår ved udvikling af brøken, og man kan indsætte hvilke tal man vil for x. Hvis rækken er konvergent stemmer den nye definition af sum overens med den gamle, og hvad angår de divergente, som ikke har nogen* *sum i sædvanlig forstand, så opstår der ingen vanskeligheder ved den nye betegnelse. Endelig tillader definitionen os at hævde nytten af de divergente rækker og forsvare dem mod alle indvendinger* [Mejlbo, 1983, side 182].

Her ser vi, hvordan Euler argumenterede for, at en divergent række ikke kan have noget, som ligner en sum i den sædvanlige betydning af ordet, der blandt andet indebærer, at summen af positive tal skal være positiv.
Han udvider derfor betydningen af ordet "sum" til ordet "SUM", der for konvergente rækker stadig betyder det samme, men som noget nyt nu også kan bruges på divergente rækker. En anden ting Euler lægger vægt på i paragrafferne, er hvor rækkeudviklingen oprindeligt stammer fra.
Set fra et eulersk synspunkt vil det altså sige, at hvis bare de matematiske beregninger var korrekte i for eksempel udviklingen af brøken $\frac{1}{1-x}$, var selve udviklingen også korrekt for hvilken som helst værdi af x.
Han påpeger altså, at SUMMEN af en uendelig række er det endelige udtryk, hvis udviklingen er rækkens oprindelse.
Ved at indføre definitionen "SUM" og vigtigheden ved rækkens oprindelse, får han opretholdt idéen om den variables generalitet. Denne tankegang kan fra et moderne synspunkt virke en smule absurd, da vi for det første kun opererer med ordet "sum" i én forstand, og for det andet ikke kun ser én vigtighed ved selve rækkens oprindelse, men også ser på det samlede udtryk som helhed.
Euler har nødvendigvis måtte bygge definitionen på sin egen opfattelse af funktionslæren (se afsnittet om Eulers funktionsbegreb), og i det omfang denne har vist sig utilstrækkelig, bliver definitionen "SUM" og vigtigheden ved rækkens oprindelse dermed nødvendigvis også utilstrækkelig.

Eulers definition af en rækkes sum åbner nu spørgsmålet: Hvad mente Euler med rækkeudvikling af en funktion? Han kan ikke have ment, at rækkeudviklingen er den potensrække, som konvergerer mod funktionen (den moderne definition på en rækkeudvikling af en funktion), for så bider

definitionen sig selv i halen. Han må i stedet have ment, at funktionen og potensrækken blot er ens, det vil sige, at funktionen ved algebraisk manipulation kan omformes til den givne potensrække.
Rækkeudvikling var altså for Euler et algebraisk fænomen og ikke et spørgsmål om konvergens.

4.5.2.2 Eulers tolkning af de endelige og uendelige små størrelser

Euler forsøgte at undgå de problemer, som opstod ved anvendelsen af de endelige og uendelige små størrelser. Dengang repræsenterede en uendelig lille størrelse alle tilstande omkring nul, som var mindre end alle almindelige positive tal. Alt dette var efter Eulers mening for upræcist og al for præget af filosofiske betragtninger. I stedet for at arbejde med små størrelser valgte han at sige, at alle tilvækster som anvendes i differentialregningen skal betragtes som rene nuller.

Konsekvensen af Eulers betragtninger blev; idet y er en funktion af x, kan x gives tilvæksten dx, hvorved y får tilvæksten dy, - men dx og dy var jo nul! Differentialregningens mål blev nu ifølge Euler at bestemme forholdet mellem dy og dx, der i virkeligheden var bestemt som $\frac{0}{0}$ og afhængig af, hvordan y var givet ved x.
Det meningsfulde ved at arbejde med forholdet $\frac{0}{0}$ argumenterede Euler for således:

§ 85. ... Vi kan starte med den indlysende sande ligning $n \cdot 0 = 1 \cdot 0$, hvor n for eksempel er et helt positivt tal. [Thomsen og Spangsberg, 1988 side 23].

Heraf udledte Euler ved simpel division $\frac{n}{1} = \frac{0}{0}$ og drog den konklusion, at ikke alene var udtrykket $\frac{0}{0}$ meningsfuldt, men det kunne antage alle former for værdier.

Selvom alle tilvæksterne dx og dy var nul, blev forholdene $\frac{dx}{dy}$ alligevel interessante, da de kunne antage alle former for værdier.

Man kan derfor heller ikke slutte, at $0 = 0$ med mindre, at man har en viden om, hvor disse nuller stammer fra. For eksempel er dy og dx som regel ikke lig hinanden, men i Eulers tilfælde var nu både dy og dx hver især altid nul. Symbolet "0" kom altså til at dække over uendelig mange indbyrdes forskellige nuller. Euler talte om nuller af forskellig størrelsesorden.
For eksempel var $2 \cdot 0 = 0$ men dog stadig dobbelt så stort som $1 \cdot 0$.

4.5.2.3 Eulers Differentiation i praksis

Eulers rækkeudvikling af funktioner og manipulation med nuller gjorde det muligt at finde det, han kaldte et udtryk for $\frac{dy}{dx}$. Dette udtryk er det samme, som det vi i dag kalder differentialkvotienten.
Metoden til at finde $\frac{dy}{dx}$ var dog helt anderledes og uden geometriske overvejelser, hvilket vi skal se nærmere på.

I fjerde kapitel af *Institutiones calculi differentialis*, fra § 112.-150., introduceres grundredskaberne til differentialregning såsom skrivemåde og betydningen af disse.
Indledende starter Euler med at præsentere funktionen $\Delta y(\Delta x)$ som en rækkeudvikling med funktioner P, Q, R, S, *etc.*, hvor P, Q, R, S, *etc.* er funktioner af x og Δx, sådan at lighedstegnet gælder:
$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \cdots$, hvor $\Delta y = y_1 - y$, og y_1 skal opfattes som det faste punkt.
Videre sætter han $\Delta x = \omega = x_1 - x$, hvor ω skal opfattes som en numerisk meget lille størrelse og x_1 som det faste punkt. Eftersom Euler ikke var tilfreds med de små numeriske størrelser, fik han $\omega = dx \Rightarrow \omega = 0$ da

$dx = 0$. Det at ω er lig dx gør, at Euler i § 118. nu antager, at Δy må være lig med dy ud fra det argument, at y jo er en funktion af x [Euler, 1798 side 105].

Ud fra vores opfattelse af kontinuitet vil det altså sige, at hvis man tager en lille tilvækst dx ud af x-aksen på en kontinuert graf, vil man derfor automatisk få en lille tilvækst dy. Antagelsen virker derfor meget moderne i forhold til kontinuitetsbegrebet i dag, men i og med at Euler ikke havde en korrekt definition af kontinuitetsbegrebet, kan den korte bemærkning i § 118. alligevel ikke klargøre fuldstændig, hvad han egentlig mente.

Herefter findes endelig rækkeudviklingen for funktionen Δy:

$$\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \cdots$$

$$dy = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \cdots$$

$$dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + Sdx^4 + \cdots$$

$$dy = Pdx$$

$\frac{dy}{dx} = P$, hvor P er en funktion af x.

De sidste to ligningsudtryk får han ud fra overvejelsen, at når dx er uendelig lille, vil leddene $Qdx^2, Rdx^3, Sdx^4, etc.$ forsvinde og det resterende led, funktionen P, blive det eneste, der er tilovers i rækkeudviklingen [Euler, 1798, side 106-107].

Moderne sagt ønsker Euler at vise nedenstående ligninger, hvor han umiddelbart ikke ville have haft noget imod den første omskrivning:

$$\Delta y = P_1\Delta x^1 + P_2\Delta x^2 + P_3\Delta x^3 + \dots\dots\dots + P_n\Delta x^n + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = P_1 + P_2\Delta x^1 + P_3\Delta x^2 + \dots\dots\dots + P_n\Delta x^{(n-1)} + \cdots$$

Grænseværdien for den uendelige række bliver da $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = P_1$.

For Euler blev formålet nu at finde et udtryk for funktionen $P = \frac{dy}{dx}$.

Ud fra disse forudsætninger må det være passende at se på, hvordan Euler i praksis fandt udtrykket $\frac{dy}{dx} = P$.

Eksempel 1

Metode A

Vi har funktionen $y = x$ og det faste punkt $y_1 = (x_1)$.

Ifølge Euler må der gælde:

$dx = x_1 - x$ og $dy = y_1 - y$

$y_1 = x_1 \Leftrightarrow dy + y = dx + x \Leftrightarrow dy = dx + x - y$

og da $y_1 = (x_1)$ får vi:

$dy = dx + x - x \Leftrightarrow dy = dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 1$.

Eksempel 2

Metode B

Vi har funktionen $y = x^2$ og det faste punkt $y_1 = (x_1)^2$.

Ifølge Euler må der gælde:

$dx = x_1 - x$ og $dy = y_1 - y$

$y_1 = (x_1)^2 \Leftrightarrow dy + y = (dx + x)^2 \Leftrightarrow$

$dy = (dx + x)^2 - y \Leftrightarrow dy = (dx + x)^2 - x^2 \Leftrightarrow dy = dx^2 + 2xdx$

Ifølge Euler står der blot $0 = 2 \cdot x \cdot 0 + 0^2$.

Da hans mål var at finde forholdet $\frac{dy}{dx}$, endte udtrykket op i at:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2xdx + (dx)^2)}{dx} = 2x + dx$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 0$$

Det sidste dx forsvinder i sammenligning med $2x$, som er et endeligt tal.

Ved mere komplicerede funktioner klarede Euler problemerne med rækkeudvikling af disse.

Eksempel 3

Lad $y = \ln(x)$, $y_1 = \ln(x_1)$, $dy = y_1 - y$ og $dx = x_1 - x$.

$$dy + y = \ln(dx + x)$$

$$\Updownarrow$$

$$dy = \ln(dx + x) - \ln(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$dy = \ln\left(\frac{dx + x}{x}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$dy = \ln\left(\frac{dx}{x} + 1\right)$$

Herefter tager han rækkeudviklingen for $\ln\left(\frac{dx}{x} + 1\right)$ ved først at sætte

$z = \frac{dx}{x}$, det vil sige:

$$\ln\left(\frac{dx}{x} + 1\right) = \ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots.$$

Da z jo er lig med $\frac{dx}{x}$, må $dy = \ln\left(\frac{dx}{x} + 1\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x} + \frac{dx^3}{3x} - \frac{dx^4}{4x} + \cdots$,

og det fører ham videre til, at $dy = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Endnu en gang benytter han overvejelsen, at når dx er uendelig lille, vil leddene $\frac{dx^2}{2x}$, $\frac{dx^3}{3x}$, $\frac{dx^4}{3x}$ etc. forsvinde og det resterende led $\frac{dx}{x}$ blive det eneste, som er tilovers i rækkeudviklingen [Euler, 1755, side 378].

Moderne sagt ønsker Euler at vise:

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x} + \frac{\Delta x^3}{3x} - \frac{\Delta x^4}{4x} + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{2x} + \frac{\Delta x^2}{3x} - \frac{\Delta x^3}{4x} + \cdots$$

Grænseværdien for den uendelige række bliver da:

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$, hvor han endnu en gang umiddelbart ikke ville have haft noget imod omskrivningen i starten.

De samme rækkeudviklingsmanipulationer vil gælde for andre funktioner, som for eksempel $y = x^n$, som Euler ved hjælp af binomialformlen [15] lavede en rækkeudvikling for.

Euler var fremragende til at lave rækkeudviklinger af funktioner, som vi har set det i eksempel 3, og han benyttede det flittigt hele vejen igennem *Institutiones calculi differentialis*. Nogle af hans operationer var dog lidt suspekte, men da han som regel nåede frem til de korrekte resultater, blev de alligevel accepteret af samtidens matematikere.

[Andersen et. al., 1987 side 7, 17-18 og 82-117, Euler, 1755 side 16-143, Euler, 1798 side 3-179, Euler, 1885 side 49-62, Lützen, 1978 side 5-28, Mejlbo, 1983 side 137-190 og Thomsen og Spangsberg, 1987 side 21-26]

3.5.3 Sammenligning af differentialregning

I dag introducerer vi differentialregningen på baggrund af geometriske overvejelser, hvor formålet er at finde differentialkvotienten $\frac{dy}{dx}$.
Differentialkvotienten ses i dag som et samlet udtryk og tolkes geometrisk som hældningen for tangenten til funktionen $f(x)$ i punktet x_o, hvor man indledende har sekantens hældning, og derefter lader x gå mod x_o.
De geometriske overvejelser af sekanter og tangent fører til definitionen på differentiabilitet, hvor der skal overvejes, hvorvidt der er en grænseværdi tilstede for differenskvotienten, når x går mod x_o.
I praksis, som for eksempel ved brug af de såkaldte regneregler for differentiation eller ved ledvis differentiation, ligger der *stadig* geometriske beviser til grund for disse. Der er altså intet, som undslipper geometrien, hvilket er det basale grundlag for, at vi i dag kan differentiere, integrere og løse differentialligninger.
Det kan derfor virke påfaldende, at Euler uden brug af geometriske overvejelser tit kom frem til det rigtige udtryk for differentialkvotienten. Desuden kan hans forudsætninger virke påfaldende. Nogle få eksempler på disse kunne være:

- *paragrafformuleringer* såsom .... hvis j er et tal større end ethvert tænkeligt tal .... vi kan hermed udrydde alle tvivlsspørgsmål .... dette vil forsvare dem mod alle indvendinger, der kunne være.

- *forståelse for rækkens oprindelse* ved for eksempel rækkeudviklingen af funktionen $\frac{1}{1-x}$. Til trods for det konkluderer Euler i § 103. i *Institutiones calculi differentialis*, at rækkens oprindelse kan føre til det, han kalder "meget vigtige vanskeligheder". Det skyldes, at han afprøver idéen om den variables generalitet på rækkeudviklingen af funktionen $\frac{1}{1-x}$.

- *nye begreber* som for eksempel "SUM" og definitionen på denne, som efter hans mening tillod ham at udvikle funktioner til divergente rækker. Dette nye begreb får, ifølge Euler, også løst paradokset dels ved *rækkens oprindelse* og dels idéen om den variables generalitet.

- *algebraiske manipulationer* som for eksempel hans idé om at uendelige små størrelser var tallet/tallene nul.
Dette gav ham derefter lov til at dividere med det/dem udfra den "indlysende sande" ligning: $n \cdot 0 = 1 \cdot 0 \Leftrightarrow \frac{n}{1} = \frac{0}{0}$.

Euler så derfor udtrykket $\frac{dy}{dx}$ som $\frac{0}{0}$. Dette var nødvendigvis ikke et samlet udtryk, men et udtryk hvor dy og dx stod hver for sig i selve rækkeudviklingen af funktionen $f(x)$, for så derefter at dividere igennem med dx.

At udtrykket $\frac{dy}{dx}$ gav mening for Euler, var dels på baggrund af den "indlysende sande ligning" samt hans algebraiske manipulation af rækkeudviklingen: $\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \cdots$.
Denne manipulation førte ham frem til ligningen $dy = Pdx$, der blev til $\frac{dy}{dx} = P$, hvor P er en funktion af x.

Samlet kunne $\frac{dy}{dx}$ altså antage alle mulige værdier beskrevet som en funktion P af x. Eulers mål med differentialregningen blev derfor at finde et udtryk for P ud fra en given funktion $f(x)$. Dette mål stemmer til dels overens med, hvordan vi i dag angriber differentialregningen i praksis.
Når man i dag skal løse differentialregningsopgaver, vil man typisk få en funktion præsenteret for derefter at finde dens differentialkvotient – enten som en konstant eller som en anden funktion.

En af de afgørende forskelle ved Eulers differentialregning og ved den moderne må derfor ligge i, hvordan man opfatter udtrykket $\frac{dy}{dx}$, og i det hele taget hvor dette stammer fra. For Euler blev udtrykkets oprindelse forklaret udfra et algebraisk analytisk udtryk uden brug af geometriske overvejelser. Udtrykket $\frac{dy}{dx}$ opstod ud fra hans rækkeudvikling af funktioner, der også var et algebraisk fænomen og ikke et spørgsmål om konvergens.

I dag opfatter vi, som tidligere beskrevet, udtrykket $\frac{dy}{dx}$ som et samlet udtryk, hvor det kan ses ud fra geometriske overvejelser.

På trods af denne afgørende forskel kan der vist alligevel ikke være nogen tvivl om, hvad Euler mente, når han først og fremmest talte om at opløfte dx til en højere og højere potens, så disse resterende led i rækkeudviklingen blev "ubetydelige", eller når han talte om et uendeligt stort tal større end noget andet tænkeligt tal . Problemet må ligge i, at der på det tidspunkt ikke fandtes, hvad vi i dag kalder grænseovergange. Man kan derfor stille spørgsmålet, om han var en smule foran sin samtid?

Der kan heller ikke være tvivl om, at Euler i § 118. i *Institutiones calculi differentialis* nærmede sig vores moderne kontinuitetsbegreb. Her gør han antagelsen, at hvis x får en lille tilvækst dx, da vil y også få den lille tilvækst dy.

Yderligere minder Eulers differentiation af rækkeudvikling meget om metoden kaldet leddelt differentiation. Dette kan skyldes, at han først koncentrerede sig om hvert enkelt led i rækkeudviklingen af funktionen $f(x)$, hvorefter han til tider gjorde alle led "ubetydelige" for det endelige udtryk $\frac{dy}{dx}$ - undtagen funktionen P.

Endnu engang må forskellen være, at vi i leddelt differentiation overvejer om den uendelige række konvergerer, hvorimod Euler enten havde et andet udtryk for rækken $dy = Pdx + Qdx^2 + Rdx^3 + Sdx^4 + \cdots$ eller gjorde leddene "ubetydelige" for det endelige udtryk – undtagen P.

3.6 Opsummering

I dette afsnit vil vi kort opridse det mest relevante i indholdet fra de foregående afsnit.

Funktionsbegrebet

Det eulerske funktionsbegreb adskiller sig markant fra det nutidige, hvilket skyldes hans definition af den variable størrelse. Ifølge Euler er den variable størrelse en ubestemt eller universel størrelse, som kan antage enhver værdi – herunder samtlige imaginære værdier, hvilket kendes som idéen om den variables generalitet. Dette betyder, at den variable ikke kan være indskrænket til f.eks. et interval, og derfor er defineret overalt, - hvilket den ikke er!

Lighedsrelationen er en anden forskel på det eulerske og det moderne funktionsbegreb, da denne for Euler er et spørgsmål om omformning af funktioner.

Euler formulerede i 1755 en ny funktionsdefinition, som i det store hele minder om den nutidige. Til trods for denne nye formulering benytter han i sine senere værker konsekvent sit gamle funktionsbegreb.

Kontinuitetsbegrebet

Euler tillægger begrebet kontinuitet en ganske anden betydning end matematikken gør i dag. For Euler er *kontinuitet* et spørgsmål om sammenhængen af det analytiske udtryk. En funktion bestemt ved ét sammenhængende udtryk er en E-kontinuert funktion, hvorimod en funktion bestemt ved flere forskellige udtryk – en funktion med delt forskrift – er en E-diskontinuert funktion.

Med udgangspunkt i kontinuiteten i et punkt opfattes kontinuitet i den moderne matematik som noget lokalt, hvorimod Euler må have opfattet kontinuitet som noget globalt.

Ifølge Grattan-Guiness svarer en E-kontinuert funktion til vores opfattelse af en differentiabel funktion – og dermed også en kontinuert, – hvorimod en E-diskontinuert funktion svarer til, hvad vi i dag vil opfatte som en kontinuert funktion.

Grænseværdibegrebet

Euler har ikke noget direkte formuleret grænseværdi- og konvergensbegreb, men alligevel benytter han begge begreber i sine værker – om end på indirekte vis.

I forbindelse med studiet af Eulers brug af grænseværdibegrebet kan man ikke undgå at lægge mærke til, hvordan han i sin manipulering med rækker ikke skelner mellem endelige og uendelige rækker. Euler regner da også med uendelige tal, som var de endelige.

Trods sin begrebsbegrænsning og sine manipulationer med udtryk, kom Euler bemærkelsesværdigt tit frem til de korrekte resultater.

Indførelse af differentialregningen

I moderne matematik introduceres differentialregningen på baggrund af geometriske overvejelser, hvorimod Euler indførte differentialregningen udelukkende ved hjælp af den algebraiske analyse samt hans forudsætninger.

På baggrund af sine forudsætninger så Euler udtrykket $\frac{dy}{dx}$ som $\frac{0}{0}$. Dette var ikke nødvendigvis et samlet udtryk, hvilket det er for os i dag, da det bl.a. er en skrivemåde for det samlede udtryk $f'(x)$. Udtrykket $\frac{dy}{dx}$ kunne for Euler derfor antage alle former for værdier, der var beskrevet som en funktion P af x. For Euler blev formålet nu at finde et udtryk for P udfra en given funktion $f(x)$.

Eulers differentialregning adskiller sig netop fra den moderne med hensyn til, hvordan man opfatter udtrykket $\frac{dy}{dx}$. Til trods for det minder Eulers metode meget om den metode, man i dag benytter i praksis.

3.7 Gruppe Ø anbefaler

en kaffepause!

4 Konklusion

På baggrund af sammenligningerne i de foregående afsnit vil vi her søge at besvare de første to dele af problemformuleringen.

Eulers indførelse af differentialregningen adskiller sig fra indførelsen i den moderne matematik ved udelukkende at være baseret på den algebraiske analyse, hvorimod den moderne tager udgangspunkt i geometrien.
Eulers indførelse adskiller sig også fra den moderne i form af hans funktionsbegreb og definitionen af en variabel størrelse samt hans kontinuitetsbegreb og definitionerne af E-kontinuitet og E-diskontinuitet.
Desuden på området om grænseværdi- og konvergensbegrebet hvor Euler uden en definition af disse begreber benytter dem indirekte.
Adskillelsen ligger også i Eulers forudsætninger såsom hans uklare formuleringer, forståelsen for rækkens oprindelse, nye begreber og hans algebraiske manipulationer.

Med henblik på det andet spørgsmål i problemformuleringen medfører Eulers indførelse af differentialregningen visse problemer.
Besvarelsen falder i tre dele: Problemer i Eulers indførelse af differentialregningen ifølge os, problemer ifølge Euler og problemer som Euler *burde* have haft ifølge os.

Set i lyset af den moderne matematik er Eulers indførelse af differentialregningen, på baggrund af ovenstående besvarelse, præget af uklare og manglende argumentationer.

Ifølge Euler ligger hans problemer ved indførelsen af differentialregningen i hans vanskelighed med idéen om den variables generalitet samt i hans "paradokser" bl.a. vanskeligheden med de divergente rækker.

Problemer Euler *burde* have haft ifølge os ved indførelsen af differentialregningen: Det mest påfaldende er Eulers division med nul i hans beregninger med infinitesimalerne. På trods af Eulers argumentation for betydningen af udtrykket $\frac{0}{0}$, kan dette umiddelbart forekomme en smule besynderligt. Faktummet at Euler pludselig tillægger ordet *sum* en anden betydning end den vante er også ejendommeligt, selvom han kalder det "SUM".

I forbindelse med den første del af projektet vil vi gerne pointere, at vi ikke mener, man bør bebrejde Euler al for meget til trods for hans til tider uklare argumenter. Set med både datidens og nutidens øjne var Euler mildest talt en genial matematiker, og hans bidrag til matematikken var enestående. Oprindelig talt dividerer man jo også i dag ind imellem med 0 eller ∞ for forståelsens skyld (eller man tænker på det sådan), selvom man strengt taget ikke må! F.eks. når man har givet en brøk, hvor nævneren går mod 0 eller ∞ og i særdeleshed ved brug af L'Hospitals regel.
Man kan altså til en vis grad retfærdiggøre Eulers brøk $\frac{0}{0}$ blot man, som ved brug af L'Hospitals regel, gør sig nogle overvejelser om den hastighed, hvormed hhv. tæller og nævner går mod 0, $+\infty$ eller $-\infty$.

5 Refleksion over de historiske og filosofiske aspekter i 1700-tallet

5.1 Matematikken op til og i 1700-tallet

Frem til midten af 1500-tallet havde matematikken taget sit udgangspunkt i geometrien, som vi kender den fra Euclid (ca. 350 f.v.t.). Dermed udgjorde geometrien også selve grundlaget for matematikken på daværende tidspunkt.

Med udgangspunkt i Keplers (1571-1630) astronomi og Galileis (1564-1642) opdagelser inden for mekanikken dannes og videreudvikles *funktionsbegrebet* op gennem 1600-tallet med bl.a. Descartes' (1569-1650) indførelse af den analytiske geometri.
I kølvandet på matematikkens adoption af funktionsbegrebet følger udviklingen af *den matematiske analyse* (calculus), hvilket i dag er grundlaget for den moderne matematik. De ansvarlige for tilvejebringelsen af analysen var Newton (1642-1727) og Leipniz (1646-1716) med deres indførelse af differentialregningen, (hvilken de i øvrigt opfandt/opdagede uafhængigt af hinanden).
Interessen for og udbredelsen af matematikken steg markant op igennem 1600-tallet, samtidig med at antallet af mennesker som beskæftigede sig med den steg. Førhen havde matematikken ikke haft sine egne fakulteter på forskningsakademierne – de eneste "rigtige" videnskaber var teologi, medicin og jura – derfor var matematikken også hovedsageligt forbeholdt samfundets mere velstillede, som så den som et interessant tidsfordriv. Den stigende udbredelse skal nok ses som værende et produkt af det stigende uddannelsesniveau, der førte til oprettelsen af flere forskningsakademier i

datidens ledende europæiske lande (Italien, Frankrig, Holland, England, Prøjsen, Rusland m.fl.). Desuden som et produkt af bogtrykkerkunstens fremskridt der muliggjorde det at delagtiggøre flere mennesker i sine tanker og idéer.

1700-tallets matematik var præget af den rivende udvikling, som havde fundet sted fra midten af 1500-tallet og til slutningen af 1600-tallet. Matematikken op igennem første halvdel af 1700-tallet må derfor ses som et forsøg på at tolke og forstå den nytænkning, der havde præget matematikkens udvikling i de forgangne år – og om muligt videreudvikle teorierne.

Matematikkens emneområder blev også udvidet markant. Interessen for nye felter var stærkt tiltagende, og denne bredere fokusering medførte en ombytning af geometriens og algebraens roller. Den euklidske geometri blev sat i skyggen af algebraen, da denne var og stadig er langt mere anvendelig. Algebraen, og dermed også indirekte analysen, blev dermed det bærende element i al matematisk tænkning og matematikkens nye grundlag.

Talbegrebet måtte også stå for skud i denne periode. Fra kun at omfatte de positive og rationale tal, måtte det udvides til også at omfatte negative, irrationale og imaginære (komplekse) tal. Indførelsen af integral- og differentialregningen tvang datidens matematikere til at reflektere over den matematiske disciplin; infinitesimalregningen (regning med uendelig små og uendelig store størrelser; infinitesimaler).

Matematikken går i denne periode fra at tage sit udgangspunkt i virkeligheden, som indebar forsøg på at regne og systematisere denne, til et langt højere abstraktionsniveau, hvor den intuitivt klare forbindelse med de virkelige forhold ikke længere kan fastholdes som det eneste acceptable. Denne overgang skyldes til dels det nye talbegreb, som med de imaginære tal introducerer en i højere grad konstrueret matematik. De ubesvarede spørgsmål var mange og problemerne ikke ligefremt løselige. F.eks. spørgsmålet om hvad den umiddelbare betydning af integralregningens sum af uendelig mange uendelig små arealstykker er? Noget uendelig stort fordi der er uendelig mange stykker? Eller noget uendelig småt fordi alle stykkerne er uendelig små? Om ikke andet havde 1700-tallets matematiske abstraktionsniveau i al fald distanceret sig "uendeligt" fra udgangspunktet, blot et par hundrede år forinden.

[Burton, 1985 side 325-405, Kline, 1972 side 335-340 og Thomsen og Spangsberg, 1988 side 10-21]

5.2 Matematikkens problemer i 1700-tallet

I 1700-tallet var det især uenigheden om infinitesimalbegrebet, der gav anledning til forskellige opfattelser af differentialregningen. Dengang var man ikke klar over, at netop operationer med infinitesimaler udgjorde det grundlæggende problem for differentialregningen, og også adskilte den kvalitativt fra de hidtil kendte regnemetoder.
Infinitesimalerne var et nyttigt regneredskab, der gjorde det muligt at udvikle teknikker, som hurtigt og effektivt gav løsningen på mange praktiske problemer. Teoretisk var de langt mere ubehagelige, og hverken Leibniz eller hans efterfølgere kunne forklare hvad infinitesimaler egentlig var, eller hvordan de adskilte sig fra de andre tal. Eftersom et reelt tal er det samme som et decimaltal, hvordan er da decimaludviklingen til et infinitesimale?
Det er også karakteristisk for denne periode, at både Newton og Leibniz havde forskellige måder at begrunde og håndtere deres arbejde på med de vilkårligt små tal. I Newtons værk (*Philosophiae naturalis principia mathematica*) er han omhyggelig med at forklare, at for ham er al snak om infinitesimaler bare talemåder, og det han egentlig tænker sig er en grænseovergang, hvor de forskellige størrelser går mod nul. Euler opfatter infinitesimaler som eksisterende i en absolut forstand. Det skyldes som tidligere nævnt, at han regner med infinitesimaler som var de reelle tal, hvorimod man i dag ville benytte sig af grænseværdibegrebet.

I 1734 publicerede filosoffen George Berkeley (1685-1753) en kraftig kritik af integral- og differentialregningen. Berkeley havde først og fremmest et religiøst sigtemål med sit angreb. Han ville overbevise videnskabsmænd om, at matematikken var mindst lige så fuld af mysterier og selvmodsigelser som teologien. Efter at have vist en del af infinitesimalbegrebets absurditeter, med størrelser som af og til var lig nul og andre gange ikke, afsluttede han med at sige, at en person som kunne fordøje alt dette ikke samtidig kunne være kræsen i teologiske spørgsmål.
Grunden til uenighederne omkring differentialregningen skyldtes ikke kun, at en del matematiske begreber var uafklarede og stod til diskussion. Det skyldtes også, at kommunikationen mellem matematikerne blev vanskeliggjort ved, at nationale og personlige stridigheder ofte blev overført til det videnskabelige arbejde. Man mente f.eks. i mange år, at Leibniz havde stjålet differentialregningen fra Newton. Således nægtede engelske matematikere i mange år at anvende differentialregningen udviklet på kontinentet (Europa) omkring år 1700 – og omvendt. Resultatet blev, at engelske matematikere helt op til midten af 1800-tallet i en vis grad var isolerede og afskåret fra at bruge resultater skabt på kontinentet, ligesom de udviklede deres egne symboler, metoder og teorier.

Udgangspunktet i den græske matematik var indførelsen af den deduktive metode, hvor man udfra en række ubeviste aksiomer og matematiske grundsætninger – det generelle – udledte lovmæssigheder gældende i mere specielle tilfælde.
I midten af 1600-tallet blev den deduktive metode til dels erstattet af den induktive metode. Udgangspunktet var stadig det samme, men selve praksisen var ændret. Udfra en masse regneeksempler som gav et fornuftigt resultat – det specielle, – udledte man mere generelle gyldige lovmæssigheder. Denne induktive metode var en konsekvens af de mange nye uafklarede begreber, som var vanskelige at føre tilbage til nogle indlysende grundsætninger.

... *når de* (matematikerne) *introducerede begreber der ikke længere idealiserede umiddelbar erfaring som de irrationale, negative og komplekse tal og differentialer og integraler, manglede de at indse, at disse begreber var af anderledes karakter, og de erkendte derfor heller ikke, at den aksiomatiske udvikling krævede et andet grundlag end selvindlysende sandheder* [Kline, 1972 side 393-394].

Desuden var de mange fornuftige og anvendelige resultater med til at grundlægge den induktive metode. Der var intet incitament til at beskæftige sig med problemer angående grundlaget så længe, at matematikken var produktiv og resultaterne anvendelige.
Problemet med den induktive metode og dermed matematikken i 1700-tallet var begrundelsen af generelle lovmæssigheder udfra en masse regneeksempler.

På baggrund af den rivende udvikling med mange nye områder og begreber indenfor matematikken var 1700-tallet kendetegnet ved mangel på en generel metode samt almene regler for udøvelse af matematikken. Til trods for dette er der nogle fælles karaktertræk for perioden, som kan tillægges den formalistiske traditions metode.
Dengang var matematikere ikke rene matematikere, som vi kender dem i dag. De beskæftigede sig også med andre fagområder og var mere en slags ingeniører. Dette gjorde, at de som regel producerede matematikken med henblik på at løse praktiske problemer, ofte i relation til konkrete opgaver. På den måde var perioden præget af filosofien; at hvis det kunne anvendes og fungerede i praksis, så var det i orden. Der er altså tale om en såkaldt *anvendt* matematik – eller pigtrådsmatematik, hvis man vil være grov. Perioden var tillige kendetegnet ved manglende begreber og for løse definitioner på de eksisterende. Dette var også gældende for Euler med henblik på hans indirekte brug af grænseværdibegrebet samt hans løse definition af funktionsbegrebet. Yderligere var perioden også præget af manglende stringens i beviserne eller direkte udeladelse af bevisførelse.

Berkeley kritiserede netop matematikerne for at være induktive frem for deduktive i deres metode. Eksempelvis tager Euler udgangspunkt i konkrete eksempler, hvorimod en moderne lærebog indeholder sætninger, definitioner og bevisførelse. Et andet kritikpunkt, ifølge Berkeley, var den manglende logik eller begrundelse i bevisførelsen. I Eulers funktioner udtrykt gennem rækker optræder en del idéer, der umiddelbart virker som grebet ud af den blå luft. Idéerne er måske holdbare, men i moderne matematik kræver de en yderligere argumentation. Dette kritikpunkt omfatter også periodens brug af adhoc-løsninger. En adhoc-løsning dannes til at løse ét bestemt problem uden, at den kan afprøves (testes) på anden måde. Et eksempel herpå er Eulers måde at komme uden om sit tidligere nævnte paradoks, hvor han manipulerer med udtrykket $\left(\frac{1+x}{1-x}=a \Leftrightarrow x=\frac{a-1}{a+1}\right)$, og får x til at ligge indenfor konvergensintervallet. Dette illustrerer tydeligt den manglende stringens, da han efter brug af denne adhoc-løsning ikke går tilbage og undersøger den inkonsistens, der er i hans teori. Det viser tydeligt, at Euler interesserede sig for resultaterne og ikke for metoden. Til trods for Berkeleys kritik kan man hævde, at datidens matematikere sjældent kom ud i problemerne omkring streng notation og bevisførelse. Det skyldes, at tilknytningen til de praktiske problemer gjorde, at de matematiske objekter som regel var simple algebraiske udtryk – såsom polynomier og rationale funktioner.

Det var karakteristisk for matematikerne i 1700-tallet, at de opfattede matematikken som værende generel. Et eksempel herpå er diskussionen mellem Leibniz og Johannes I Bernoulli om logaritmerne af negative og komplekse tal. I en artikel af Leibniz fra 1712 samt i en senere brevveksling med Bernoulli hævdede han, at logaritmerme til et negativt tal var ikke-eksisterende. Modsat prøvede Bernoulli at bevise, at de måtte eksistere.
Senere opstod diskussionen på ny – denne gang mellem Bernoulli og Euler. Bernoulli mente stadig, at logaritmerne til et negativt tal måtte tillægges en betydning. Euler var uenig med ham i hans argumentation, men havde ikke

selv noget fast standpunkt. Til trods for det var de begge overbeviste om, at logaritmerne til et negativt tal skulle tillægges en eller anden betydning.

[Kline, 1972 side 393-394 og 408, Lindstrøm, 1995 side 263 og Thomsen og Spangsberg, 1988 side 10-21]

6 Konklusion

Med udgangspunkt i det foregående afsnit, vil vi her søge at besvare den sidste del af problemformuleringen.

Matematikken i 1700-tallet var tydeligt præget af et pragmatisk syn, hvilket gjorde, at man ikke bekymrede sig om metodens stringens.
Nedenstående citat af Clairaut fra 1741 giver et godt billede af den generelle holdning i perioden:

Det er ikke overraskende, at Euclid tager besværet med at bevise, at to cirkler der skærer hinanden, ikke har samme centrum og at summen af siderne i en trekant, der er indeholdt i en anden trekant, er mindre end den samme sum af den yderste af trekanterne. Denne geometer (Euclid) *var nødt til at overbevise de obsternasige sofister, der glorificerede enhver fornægtelse af de mest indlysende sandheder. Geometrien måtte derfor, ligesom logikken, hvile på formel ræssonneren for at kunne tilbagevise ordkløveren ... Men situationen har ændret sig: alle overvejelser om, hvor langt man kan komme med sund fornuft, tjener kun til at skjule sandheden og bekymre læseren. Disse overvejelser ser man derfor bort fra nu om dage* [Christensen og Thomsen, 1983 side 136].

Denne holdning er en af de årsager, der ligger til grund for Eulers problemer i hans indførelse af differentialregningen. Et eksempel herpå er Eulers førnævnte adhoc-løsning, hvor han lagde mere vægt på resultatet end teorien bag dette. Desuden hans vanskeligheder med de divergente rækker, hvor han i stedet for at koncentrere sig om teorien, indførte det nye begreb "SUM" som en løsning på dette.

Det var også karakteristisk for perioden, at matematikken blev opfattet som værende generel, hvilket muligvis er årsag til Eulers definition af den variables generalitet.
På baggrund af de mange nye uafklarede begreber blev den induktive metode indført. Denne metode benyttede Euler tildels, hvilket fremgår af hans værker – hovedsageligt *Introductio in analysin infinitorum*, da denne var ment som en lærebog. Problemet med den induktive metode var som tidligere nævnt, at man begrundede generelle lovmæssigheder udfra en masse regneeksempler. Dette resulterede i manglende bevisførelser, hvilket også kan ses som årsag til problemerne i Eulers indførelse af differentialregningen, da den moderne matematik i dag ligger hovedvægten på bevisførelsen.
Desuden var matematikken kendetegnet ved manglen på en generel metode og alment anerkendte regler for dens udøvelse. Man havde derfor forskellige måder at håndtere arbejdet på. Dette har selvfølgelig også været gældende for Euler, hvilket måske forklarer nogle af hans lidt "suspekte" metoder.
Alt tyder på at Euler formentligt har set den algebraiske analyse som noget nyt og exceptionelt. Netop derfor har han måske fundet forsøget på at forklare matematikken udfra den algebraiske analyse revolutionerende. Dette er muligvis årsagen til, at Euler i sin indførelse af differentialregningen ikke anvendte den euclidiske geometri.

7 Perspektivering

I forbindelse med vores beskrivelse af Eulers indførelse af differentialregningen benyttede vi de tyske og engelske oversættelser af hans værker. Med udgangspunkt i de første to spørgsmål i problemformulering havde en gennemgang af de originale tekster (de latinske) formentlig givet en mere fyldestgørende besvarelse, da oversættelserne kan være mangelfulde. Et eksempel herpå er § 3. i den engelske oversættelse af *Introductio in analysin infinitorum*, hvor "de brudne" ikke er nævnt.

Til besvarelse af det sidste spørgsmål i problemformuleringen ville det have været relevant at inddrage andre matematikere fra 1700-tallet f.eks. L'Hospital eller Johannes I Bernoulli samt en beskrivelse af naturfilosofien i denne periode.

8 Litteraturliste

Den henvisning som er benyttet i projektet er understreget.
Titlen på den benyttede litteratur er skrevet med *kursiv*.

Andersen, Kirsti, Bos, Henrik og Lützen, Jesper
Træk af den matematiske analyses historie
-En antologi af kilder og sekundær litteratur
Institut for de eksakte videnskabers historie, Aarhus Universit, 1987
Andersen et. al., 1987

Binmore, K. G.
Mathematical Analysis – A Straightforward Approach
Cambrigde University Press, 2nd edition 1987
Binmore, 1987

Burton, M. Davis
The History of Mathematics – An Introduction
Allyn and Bacon, Inc. 1985
Burton, 1985

Christensen, Asger Spangsberg og Thomsen, Klaus
Matematikken i Tyskland i det 19. århundrede
Speciale i videnskabshistorie
Aarhus Universitet, 1983
Christensen og Thomsen, 1983

Edwards, Henry C. og Penny, David E.
Calculus with Analytic Geometry
Prentice-Hall, Inc., 1998
Edwards og Penny, 1998

Euler, Leonhard
Einleitung in die Analysis des Unendlichen Erster Teil
Springer-Verlag Berlin/Heidelberg 1983
Genoptryk af Professer Dr. rer. nat. Wolfgang Walters
tyske oversættelse fra 1885
Euler, 1885

Euler, Leonhard
Introduction to Analysis of the Infinite Book I
Springer-Verlag New York Inc. 1988
Oversat af John D. Blanton
Euler, 1988

Euler, Leonhard
Introduction to Analysis of the Infinite Book II
Springer-Verlag New York Inc. 1990
Oversat af John D. Blanton
Euler, 1990

Euler, Leonhard
Differenzial Rechnung Erster Teil
Ltr- Verlag Wiesbaden 1981
Genoptryk af Johann Andreas Christian Michelsens
tyske (gotiske) oversættelse fra 1798
Euler, 1798

Euleri, Leonhardi
Instututiones calcule differentialis
Opera Omnia, Series Prima Vol. X 1755
Euler, 1755

Fueter, Dr. Rudolf
Kurze mathematiker-biographien: Leonhard Euler
Verlag Birkhäuser Basel 1948
Fueter, 1948

Gratten-Guinness
The Development of the foundations of Mathematical Analysis
from Euler to Rieman
The Massachusetts Institute of Technology 1970
Gratten-Guinness, 1970

Hebsgaard, Thomas, Schultz, Jonny og Sloth, Hans
Matematik Tilvalgsfag
Forlaget Trip, 1992
Hebsgaard et. al., 1992

Jensen, Steffen og Sørensen, Karin
Teori og Redskab 3 Differentialregning
Christian Ejlers' Forlag, København 1989
Jensen og Sørensen, 1989

Karush, William
Matematisk opslagsbog
Politikens Forlag, 2 udgave, 1 oplag 1995
Karush, 1995

Kline, Morris
Mathematical Thought from Acient to Modern Times
Oxford University Press 1972
Kline, 1972

Lindstrøm, Tom
Kalkulus
Universitetsforlaget AS Oslo 1995 (2 udgave 1996)
Lindstrøm, 1995

Lützen, Jesper
Funktionsbegrebets udvikling fra Euler til Dirichlet
Nordisk Matematisk Tidsskrift Bind 25/26 Hefte 1 Oslo 1978
Lützen, 1978

Mejlbo, Lars C.
Uendelige rækker en historisk fremstilling
Matematikinstituttet Aarhus Universitet 1983
Mejlbo, 1983

Rachlis, Eugene
Prærieindianere
Forlaget Skrifola, København 1966
Rachlis, 1966

Thomsen, Klaus og Spangsberg, Asger
Differentialregningen i historisk perspektiv
Aarhus Universitetsforlag 1988
Thomsen og Spangsberg, 1988

Unenge, Jan
Människorna bakom matematiken
Studenterlitteratur Lund 1997
Unenge, 1997

Youschkevitch, A. P.
The Concept of Function
Archive for History of Exact Sciences Volume 16, Nr. 1 1976/77
Youschkevitch, 1976

9 Appendiks

Appendiks 3.2.2

[1]

§ 1. Eine constante Zahlgrösse ist eine bestimmte Zahlgrösse, welche beständig denselben Wert behält.

§ 1. A constant quantity is a determined quantity, which always keeps the same value.

[2]

§ 2. Eine veränderliche Zahlgrösse ist eine unbestimmte oder eine allgemeine Zahlgrösse, welche alle bestimmten Werte ohne Ausnahme in sich begreift.

§ 2. A variable quantity is one, which is not determined or is universal, which can take on any value.

[3]

§ 3. Eine veränderliche Zahlgrösse wird zu einer bestimmten, wenn ihr irgend ein bestimmter Wert beigelegt wird.
Es kann daher eine veränderliche Zahlgrösse auf unzählig viele Arten zu einer bestimmten werden, da man für sie jede beliebige Zahl setzen kann. Die Bedeutung einer veränderlichen Zahlgrösse ist noch nicht erschöpft, so lange nicht sämtliche bestimmten Werte für sie gesetzt worden sind. Eine veränderliche Zahlgrösse begreift daher alle nur denkbaren Zahlen in sich, die positiven sowhol die negativen, die ganzen sowie die gebrochenen, die

rationalen sowie die irrationalen und die transcendenten. Ja auch die Null und die imaginären Zahlen sind davon nicht ausgeschlossen.

§ 3. A variable quantity is determined when some definite value is assigned to it.

Hence a variable quantity can be determined in infinitely many ways, since absolutely all numbers can be substituted for it. Nor is the symbol of the variable quantity exhausted until all definite numbers have been assigned to it. Thus the variable quantity encompasses within itself absolutely all numbers, both positive and negative, integers and rationals, irrationals and trancendentals. Even zero and complex numbers are not excluded from the signification of a variable quantity.

[4]

§ 4. Eine Function einer veränderlichen Zahlgrösse ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgrösse und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrössen zusammengesetzt ist.

§ 4. A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities.

[5]

Eulers omformning af $f(z)=\sqrt{aa+zz}$ til $g(y)=\frac{(aa+yy)}{2y}$ når $\frac{(aa-yy)}{2y}$ substitueres for z:

$$\sqrt{a^2+z^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{(a^2-y^2)}{2y}\right)^2}=\sqrt{a^2+\frac{(a^2-y^2)^2}{4y^2}}=\sqrt{\frac{4a^2y^2+(a^2-y^2)^2}{4y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2y^2 + a^4 + y^4 - 2a^2y^2}{4y^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + y^4 + 2a^2y^2}{4y^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + y^2)^2}{(2y)^2}}$$

$$= \frac{(a^2 + y^2)}{2y}$$

[6]

... Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates quae uteunque ab x dendent seu per eam determinantur, eius functiones vocantur.

Appendiks 3.3.1

[7]

Bevis for 1

Givet et $\varepsilon > 0$, må vi finde et $N \in \mathbb{N}$ sådan at $|f(x_n) - f(x_o)| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

Siden f er kontinuert i x_o, findes der et $\delta > 0$ sådan at $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ for alle $x \in D_f$ med $|x - x_o| < \delta$.

Siden $\{x_n\}$ konvergerer mod x_o, findes der et $N \in \mathbb{N}$ sådan at $|x_n - x_o| < \delta$ når $n \geq N$.

Dermed er $|f(x_n) - f(x_o)| < \varepsilon$ når $n \geq N$ og sætningen er bevist. ■

Bevis for 2

Siden f ikke er kontinuert i x_o, findes der et $\varepsilon > 0$ sådan at uanset hvor lille vi vælger $\delta > 0$, findes der et $x \in D_f$ sådan at $|x - x_o| < \delta$ og $|f(x) - f(x_o)| \geq \varepsilon$.

Sætter vi $\delta = (\frac{1}{n})$ udvælger vi på denne måde et punkt x_n sådan at $|x_n - x_o| < (\frac{1}{n})$ og $|f(x_n) - f(x_o)| \geq \varepsilon$.

Følgen $\{x_n\}$ konvergerer da mod x_o, men følgen $\{f(x_n)\}$kan ikke konvergere mod $f(x_o)$ siden $|f(x_n) - f(x_o)| \geq \varepsilon$ for alle n. ∎

Appendiks 3.3.2

[8]

§ 8. Although many different curves can be described mechanically as a continuously moving point, and when this is done the whole curve can be seen by the eye, still we will consider these curves as having their origin in functions, since then they will be more apt for analytic treatment and more adapted to calculus. Any function of x gives a curve or a straight line, and conversely a curve can define a function.

[9]

§ 9. From this concept of a curve, there follows immediately a division into continuous and discontinuous or mixed. A continuous curve is one such that its nature can be expressed by a single function of x. If the curve is of such a nature that for its various parts, BM, MD, DM, etc. different functions of x are required to express the part MD, then we call such a curve discontinuous or mixed and irregular. This is because such a curve cannot be expressed by one constant law, but is formed from several continuous parts.

[10]

In Euler's sense continuity meant invariability, immutability of the law – of the equation determining the function over all the domain of values of the independent variable, while discontinuity of a function meant a change of the analytical law, an existence of different laws on two or more intervals of the domain.

[11]

Euler emphasises that what he means is not the connectedness, or continuity of the course, or run, of the curve *(continuitas tractu)*, but, exclusively, the singleness of the corresponding analytical law. Thus, the two conjugate branches of a hyperbola constitute one *continuous* curve.

[12]

Euler's term "continuos" is synonymous with our "differentiable", and refers to the old theory of functions; but his "discontinuous" corresponds to our "continuous", and includes the new functions each of which was to be considered as being composed of the algebraic expressions appropriate to their "continuous" portions.

Appendiks 3.4.2

[13]

§114. Da $a^0 = 1$ ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt, falls a eine Zahl grösser als 1 ist, so folgt daraus, dass, wenn der Exponent unendlich wenig grösser ist als 0,auch die Potenz die Einheit nur um unendlig wenig übersteigen wird. Ist daher ω eine unendlich kleine Zahl oder ein beliebig kleiner, jedoch von 0 verschiedener Bruch, so wird $a^{\omega} = 1 + \psi$, wenn ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl bedeutet; denn aus dem vorhergehenden Capital ist bekannt, dass, wenn nicht ψ uendlich klein sein würde, es auch ω nicht sein könnte. Es ist somit entweder $\psi = \omega$, oder $\psi > \omega$, oder $\psi < \omega$, und zwar wird dies offenbar von der Grösse von a abhängen. Da nun a noch unbekannt ist, so wollen wir $\psi = k\omega$ setzen. Alsdann wird: $a^{\omega} = 1 + k\omega$, oder wenn wir a als Basis der Logarithmen nehmen: $\omega = \log(1 + k\omega)$.

§ 114. Since $a^0 = 1$, when the exponent on a increases, the power itself increases, provideed a is greater than 1. It follows that if the exponent is infinitely small and positive, then the power also exceeds 1 by an infinite small number. Let ω be an unfinitely small number, or a fraction so small that, although not equal to zero, still $a^\omega = 1 + \psi$, where ψ is also an infinitely small number. From the preceding chapter we know that unless ψ were infinitely small, then neither would ω be infinitely small. It follows that $\psi = \omega$, or $\psi > \omega$, or $\psi < \omega$. Which of these is true depends on the value of a, whidh is not now known, so we let $\psi = k\omega$. Then we have $a^\omega = 1 + k\omega$, and with a as the base for logarithms, we have $\omega = \log(1 + k\omega)$.

[14]

Binomialformlen for positive værdier af *n*:

For $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

[15]

... Setzt man nun $i = \frac{z}{\omega}$, wobei z irgend eine endliche Zahl bedeuten soll, so wird i, weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, unendlich gross, und da hieraus $\omega = \frac{z}{i}$ folgt, so wird ω gleich einem Bruche mit unendlich grossem Nenner, also, wie angenommen, unendlich klein sein. ...

... If now we let $j = \frac{z}{\omega}$, where z denotes any infinite number, since ω is infinitely small, then j is infinitely large. Then we have $\omega = \frac{z}{j}$, where ω is represented by a fraction with an infinite denominator, so that ω is infinitely small, as it should be.

[16]

§ 116. Da aber i eine unendlich grosse Zahl ist, so wird $\frac{i-1}{i}=1$; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches $\frac{i-1}{i}$ immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für i setzt; es wird daher, wenn i eine Zahl bedeutet, die grösser ist als jede nur denkbare Zahl, der Bruch $\frac{i-1}{i}$ gegerade gleich der Einheit werden. Aus demselben Grunde aber wird $\frac{i-2}{i}=1$, $\frac{i-3}{i}=1$ u.s.w. Folglich wird: $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}$, $\frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$ u.s.w. …

§116. Since j is infinitely large, $\frac{j-1}{j}=1$, and the larger the number we substitute for j, the closer the value of the fraction $\frac{j-1}{j}$ comes to 1. Therefore, if j is a number larger than any assignable number, then $\frac{j-1}{j}$ is equal to 1. For the same reason $\frac{j-2}{j}=1$, $\frac{j-3}{j}=1$, and so forth. It follows that $\frac{j-1}{2j}=\frac{1}{2}$, $\frac{j-2}{3j}=\frac{1}{3}$, $\frac{j-3}{4j}=\frac{1}{4}$, and so forth. …

[17]

… Ist also der Wert von k für einen gegebenen Wert der Basis a bekannt, so lässt sich jede beliebige Exponentialgrösse b^z durch eine unendliche Reihe dar stellen, deren Glieder nach den Potenzen von z fortschreiten. …

…Since we know the value of k from the given value of the base a, the general exponential b^z can be expressed in an infinite series whose terms proceed with the powers of z.

[18]

… da doch die Glieder dieser Reihe fortwährend grösser werden, und man daher die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, dass man nur einige Glieder davon berechnet und mit einander vereinigt. Indessen wird sich bald ein Mittel darbieten, diesem Üabelstande abzuhelfen.

... but it is difficult to see how this can be since the terms of this series continually grow larger and the sum of several terms does not seem to approach any limit. We will soon have an answer to this paradox.

[19]

Da die Glieder dieser Reihe sehr merklich abnehmen, so kann man durch Addition einiger Glieder sehr bald einen hinlänglich genauen Wert von k erhalten.

... the terms of this series decrease in a reasonable way so that soon a satisfactory approximation for k can be obtained.

[20]

Majorantkriteriet

Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rækker:

Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og at der findes et tal c sådan, at $b_n \leq ca_n$ for alle n. Da konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og at der findes et positivt tal d sådan, at $b_n \geq ca_n$ for alle n. Da divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

[21]

Forholdstesten for generelle rækker

Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en række og antag, at grænsen $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$ eksisterer (den kan godt være lig ∞). Da gælder:

Hvis $a < 1$, konvergerer rækken absolut.

Hvis $a > 1$, divergerer rækken.

Hvis $a = 1$, giver testen ingen konklusion.

[22]

Argumentation for at $\left(1+\frac{x}{j}\right)^j \to e^x$ når $j \to \infty$:

$\left(1+\frac{x}{j}\right)^j \to e^x \Leftrightarrow j \cdot \ln\left(1+\frac{x}{j}\right) \to x$. Ved omformning får vi: $j \cdot \ln\left(1+\frac{x}{j}\right) =$

$x \cdot \left[\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{j}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{j}}\right]$. Udtrykket i [....] ligner $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, hvor

$f = \ln$, $a = 1$ og $h = \frac{x}{j}$.

Derfor er $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Da $f(a) = \ln(a)$ er $f'(a) = \frac{1}{a}$, og vi

får: $j \cdot \ln\left(1+\frac{x}{j}\right) \to x$, da $x \cdot \left[\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{j}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{j}}\right] \to \frac{1}{a} = 1$. ■

Appendiks 3.5.1

[23]

Bevis

Definer en funktion η ved: $\eta(h) = \dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} - f'(x_o)^{(*)}$ for $h \neq 0$

og sæt $\eta(0) = 0$.

Siden $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o)$, så er $\lim\limits_{h\to 0}\eta(h) = 0$.

Løser vi (*) mht. $f(x_o + h)$, får vi $f(x_o + h) = f(x_o) + f'(x_o)h + \eta(h)h$ og sætningen er dermed bevist. ■

Appendiks 3.5.2

[24]

§ 59. ... Alsdann dürfte es zweifellos sein, dass sich jede Function von z in einen ins Unendliche fortlaufenden Ausdruck von der Form $Az^{\alpha} + Bz^{\gamma} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \cdots$, in welcher die Exponenten α, β, γ, δ, ... igrend welche Zahlen bedeutet, werwandeln lässt.

§ 59. ... In order that the following explanation be rather general, besides positive integral powers of z we will allow the exponents to be any real number. Thus there is no doubt that any function of z can be given of the form $Az^{\alpha} + Bz^{\gamma} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} + \cdots$, where the exponents α, β, γ, δ, etc. are any real numbers.

Appendiks 5.2

[25]

... as they introduced concepts that no longer idealized immediate experiences, such as the irrational, negative, and complex numbers and the derivative and integral, they failed to recognize that these concepts were different in character, and so failed to realize that a basis for the axiomatic development other than self-evident truths was needed.