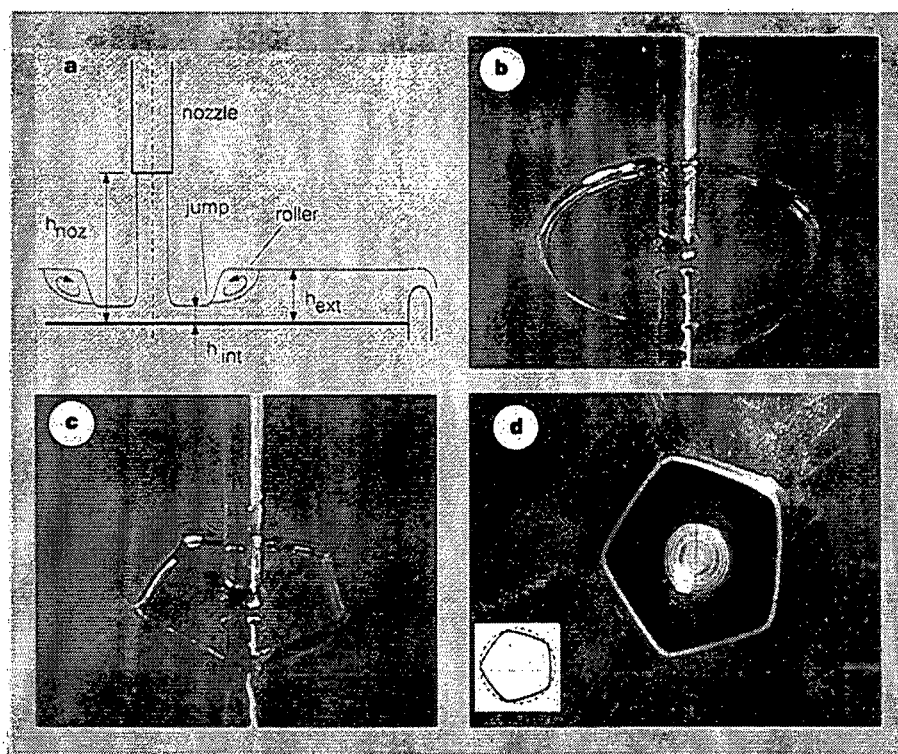


Det hydrauliske spring Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler



Specialeafhandling af
Anders Marcussen†

Vejledere:
Tomas Bohr†
Clive Ellegaard†
Bent C. Jørgensen†

1999

†IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde
‡CATS, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, 2100 København

TEKSTER fra

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

Det hydrauliske spring
Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler

Specialeafhandling af Anders Marcussen

IMFUFA tekst nr. 374/1999

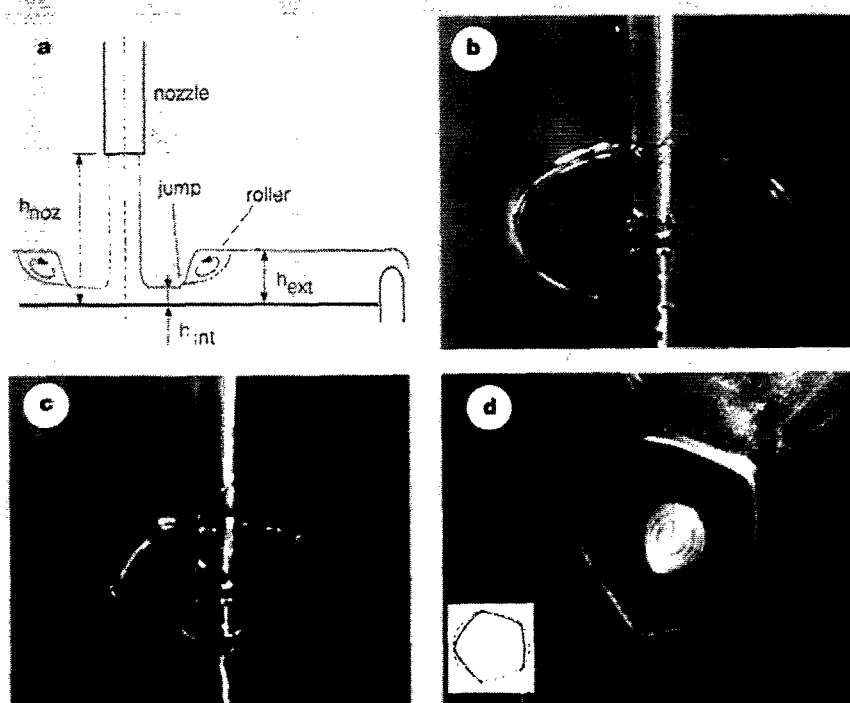
116 sider

ISSN 0106-6242

Abstrakt

Når en vertikal væskestråle af ethylen-glycol rammer et kars bundplade, stiger væskelagets tykkelse signifikant ved en karakteristisk afstand r , fra strålens nedslagspunkt. Denne stigning kaldes det hydrauliske spring. I begyndelsen antager væsken en cirkulær form, der kan gives en rimelig matematisk beskrivelse af fra en afstand r_0 (model type I). Tæt på strålen er væskelaget tyndt $h_{in} \sim 1$ mm, og væskebevægelsen er hurtig $\sim 1 - 2$ m/s. Længere væk fra strålen er væskelaget tykkere $h_{ext} \sim 3 - 4$ mm, hvor væskebevægelsen tilsvarende er langsommere. På figur(b)¹ ses det hydrauliske spring antage en cirkulær form, der observeres ved en lav væskehøjde h_{ext} . I denne afhandling er der foretaget hastighedsmålinger i det tynde væskelag h_{in} . Hastighedsmålingerne er foretaget for at undersøge, om det er rimeligt og antage, at model type I gælder fra r_0 . Det konkluderes, at denne antagelse ikke er rimelig.

Når væskehøjden h_{ext} overskrider en kritisk væskehøjde $h_{kritisk}$, brydes den cirkulære form og erstattes af en polygonform. Figur(c) viser en femkantet polygonform. På figur(d) er polygonformen vist nedefra, hvor den lyse ring i centrum er strålen, der rammer karet's bundplade der her er en glasplade. Figur(a) viser et tværsnit igennem en typisk polygon, hvor det ses, at i overfladen af springet "ligger" en roller, der omgiver hele springet og roterer som skitseret. Polygonformerne er dårligt forstået, og derfor er en eksperimentel undersøgelse af disse foretaget. På baggrund af denne undersøgelse er en polygonmodel (model type II) fremstillet. Indsætningen på figur(d) viser en modelløsning. I denne afhandling analyseres, om polygonmodellen kan beskrive polygonformen tilfredsstillende. Det konkluderes, at den kun er et skridt på vejen til en tilfredsstillende beskrivelse af polygonformerne.



¹Ellegaard, Clive; Hansen, Adam E.; Haaning, Anders; Hansen, Kim; Marcussen, Anders; Bohr, Tomas; Hansen, Jonas L.; Watanabe, Shinya, (1998) *Creating corners in kitchen sinks*, Nature, scientific correspondence, vol. 392, 767-768.

Denne afhandling er tilegnet min morfar Johannes Witt-Hansen

Abstrakt

Når en vertikal væskestråle af ethylen-glycol rammer et kars bundplade, stiger væskelagets tykkelse signifikant ved en karakteristisk afstand r_s fra strålens nedslagspunkt. Denne stigning kaldes det hydrauliske spring. I begyndelsen antager væsken en cirkulær form, der kan gives en rimelig matematisk beskrivelse af fra en afstand r_0 (model type I). Tæt på strålen er væskelaget tyndt $h_{in} \sim 1$ mm, og væskebevægelsen er hurtig $\sim 1 - 2$ m/s. Længere væk fra strålen er væskelaget tykkere $h_{ext} \sim 3 - 4$ mm, hvor væskebevægelsen tilsvarende er langsommere. På forsidefotoet taget fra [23] ses på figur(b) det hydrauliske spring antage en cirkulær form, der observeres ved en lav væskehøjde h_{ext} . I denne afhandling er der foretaget hastighedsmålinger i det tynde væskelag h_{in} . Hastighedsmålingerne er foretaget for at undersøge, om det er rimeligt og antage, at model type I gælder fra r_0 . Det konkluderes, at denne antagelse ikke er rimelig.

Når væskehøjden h_{ext} overskrider en kritisk væskehøjde $h_{kritisk}$, brydes den cirkulære form og erstattes af en polygonform. På forsidefotoet er vist en polygonform på figur(c) ovenfra. På figur(d) er polygonformen vist nedefra, hvor den lyse ring i centrum er strålen, der rammer karets bundplade der her er en glasplade. Figur(a) viser et tværsnit igennem en typisk polygon, hvor det ses, at i overfladen af springet "ligger" en roller, der omgiver hele springet og roterer som skitseret. Polygonformerne er dårligt forstået, og derfor er en eksperimentel undersøgelse af disse foretaget. På baggrund af denne undersøgelse er en polygonmodel (model type II) fremstillet. Indsætningen på figur(d) viser en model-løsning. I denne afhandling analyseres, om polygonmodellen kan beskrive polygonformen tilfredsstillende. Det konkluderes, at den kun er et skridt på vejen til en tilfredsstillende beskrivelse af polygonformerne.

Forord

Dette eksperimentelle speciale er udført ved Niels Bohr Institutets *Center for Chaos And Turbulence Studies* (CATS), og jeg ønsker i den forbindelse at udtrykke min taknemmelighed overfor CATS, Niels Bohr Institutet og institutbestyrer Mogens Olesen for at have givet mig den mulighed.

Specielt vil jeg takke *Kim Hansen* for uvurderlig hjælp med computerprogrammerne til de eksperimentelle forsøg, samt et godt samarbejde i forbindelse med selve eksperimenterne. *Clive Ellegaard* og *Tomas Bohr* for et enormt engagement og faglig opbakning gennem hele forløbet. Det har specielt været berigende, at Clive og Tomas har givet mig lejlighed til at arbejde i et større team med henblik på en såvel eksperimentel som teoretisk undersøgelse af det hydrauliske spring, samt at deltage i arbejdet med publikationerne til *Nature* og *Nonlinearity*. Desuden har alle specialestuderende indenfor CATS taget godt imod mig, og *Ken Haste Andersen* gav mig god opbakning i forbindelse med min start på specialet.

En tak til min vejleder fra Institut for studiet af Matematik og Fysik samt deres Funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelser (IMFUFA) på RUC, *Bent C. Jørgensen*.

Endelig en tak til *Jesper Larsen*, Ph.D., Math-Tech for dels hjælp til at give et overblik over model type II og dels anbefaling af litteratur om variationsregning. Desuden takker jeg *Per Mørkegaard Hansen* for god og nyttig kritisk gennemlæsning af rapporten.

I forbindelse med/under selve rapportskrivningen ønsker jeg at takke for stor hjælp af *Elisabeth Bruun Hansen*, *Tom Juul Andersen* og *min familie* for gode råd, diskussioner og opmuntring gennem hele forløbet.

Anders Marcussen, Roskilde den 26. februar 1999

Efterskrift

Efter afleveringen af specialet har jeg opdaget en meningsforstyrrende fejl i rapporten og en mindre fejl. De bringes her for god ordensskyld. Jeg har på side 12 tilføjet en internetadresse til min egen hjemmeside man kan klikke ind på. Her kan man få en masse oplysninger om det hydrauliske spring. Jeg har ikke lavet andre rettelser end denne side og tilføjelsen på side 12. Denne IMFUFA tekst er derfor identisk med den afhandling jeg afleverede tirsdag den 2 marts 1999.

- Side 60, linie 6 her står $k = \tan \theta_{luft} / \tan \theta_{ethylenglycol} = 14.04^0 / 9.77^0 = 1.45$. Det skal rettes til $k = \tan \theta_{luft} / \tan \theta_{ethylenglycol} = 0.25 / 0.17 = 1.45$
- Side 73, anden linie i afsnit 6.3.1 står: Den fuldt optrukne linie indikerer profilen foretaget midt mellem to hjørner og den stiplede linie indikerer profilen foretaget gennem hjørnet på polygonen. Det skal rettes til: Den stiplede linie indikerer profilen foretaget midt mellem to hjørner og den fuldt optrukne linie indikerer profilen foretaget gennem hjørnet på polygonen

Indhold

1	Introduktion til det hydrauliske spring	1
1.1	Eksperimentelt studie af det hydrauliske spring	3
1.2	Teoretisk studie af det hydrauliske spring	8
1.3	Hvad præsenteres i denne rapport ?	10
1.3.1	Problemformulering	11
1.3.2	Opbygning af rapport	11
1.3.3	Er der noget spændende ved det hydrauliske spring ?	12
1.3.4	Småting	12
2	Udledning af Prandtls grænselagapproximation (P_{ga})	13
2.1	Navier-Stokes ligning	13
2.1.1	P_{ga}	15
2.1.2	Grænsebetingelser for væsker med fri overflade	17
2.2	Bevarelseslove henover springet	20
2.2.1	Bevarelseslovene	21
2.3	Opsamling	23
2.3.1	Er det rimeligt at beskrive det hydrauliske spring ved anvendelse af P_{ga} ?	23
3	Model type I	25
3.1	Den simple model	25
3.1.1	Midlings metode af Karman & Pohlhausen	27
3.2	Den udbyggede model	32
3.2.1	Beskrivelse af separation i det hydrauliske spring	33
3.3	Opsamling	38
4	Den eksperimentelle opstilling	41
4.1	Den cirkulære konstruktion	41
4.2	Væskesystemet	41
4.2.1	Dysen	44
4.3	Skanningssystem til måling af højdeprofiler	44

4.4	Måling af flux og viskositet	46
5	Måling af hastighedsprofiler med Laser Doppler Velocimetri (LDV)	47
5.1	Laser Doppler princippet	47
5.1.1	Den relativistiske dopplereffekt	48
5.1.2	To laserstråler med samme frekvens krydses	51
5.2	LDV opstilling	54
5.2.1	Det optiske system	54
5.2.2	Den cirkulære konstruktion og væskesystemet	55
5.2.3	Den elektroniske processor og PC	56
5.3	Manuel bestemmelse af væskehøjde etc.	56
5.3.1	Hvordan den bedste datarate opnås.	58
5.4	Hvordan en måling udføres	58
5.5	Præsentation af data	59
5.5.1	Hvordan data leveres fra software	59
5.5.2	Databehandling	59
5.5.3	Præsentation og tolkning af måling ved faldhøjde 4 cm	61
5.5.4	Præsentation og tolkning af måling ved faldhøjde 10 cm	66
6	Hvordan hjørner og polygoner skabes	69
6.1	Overvejelse og udførelse af polygonmålinger	69
6.1.1	Kriterie for målinger	70
6.1.2	Hvordan en måling udføres	70
6.2	Fasediagrammer	71
6.2.1	Polygonens parameterafhængighed	71
6.3	Fænomenologisk beskrivelse af polygoner	73
6.3.1	Polygonens højdeprofil	73
6.3.2	Polygonens udseende	74
6.3.3	Visualisering af type I og type II	75
6.3.4	Hvordan væsken transporteres væk fra polygonspringet	76
6.3.5	Polygonernes afhængighed af faldhøjden	77
6.4	Hjørne undersøgelser for fastholdte ydre væskehøjder (h_{ext})	80
6.4.1	Kriterie for hjørnemålinger	80
6.4.2	Hvordan en måling udføres	80
6.4.3	Præsentation af data for hjørne undersøgelser	80
6.5	Hvilke kriterier en simpel polygonmodel skal opfylde	84
7	Model type II	85
7.1	Modelovervejelser	85
7.2	Karakteristiske egenskaber ved polygoner	86
7.2.1	Antagelser i model type II	86

7.3	Modelresultater	90
7.4	Opsamling	92
8	Diskussion	93
8.1	Type I	94
8.1.1	Eksperimentelle observationer	94
8.1.2	Modelovervejelser og formål med model type I	94
8.1.3	Eksperimentel undersøgelse af udvikling af grænselag	97
8.2	Overgang fra type I til type II	98
8.3	Type II	98
8.3.1	Eksperimentelle observationer	98
8.3.2	Modelovervejelser og formål med model type II	99
8.4	Samlet model	100
8.5	Konklusion	101
8.6	Videre arbejde	102
	Litteratur	103

Kapitel 1

Introduktion til det hydrauliske spring

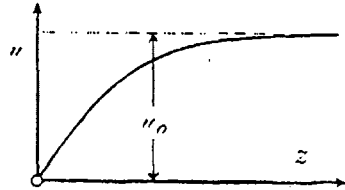
I august 1904 talte den tyske fysiker Ludwig Prandtl ved den tredje internationale matematiske kongres, der blev afholdt i Heidelberg. Han havde ikke fået mere end ti minutters taletid, men hans foredrag skulle vise sig at få vidtrækkende konsekvenser indenfor studiet af væsker. Han præsenterede indholdet af sit arbejde i en kort artikel, med illustrative figurer, under overskriften *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr Kleiner Reibung*¹ [31].

Artiklen omhandlede resultaterne af hans studier af væsker med lille viskositet, der bevægede sig tæt på et fast legeme. For at kunne beskrive en væske med lille viskositet opdelte Prandtl den i to. I den øverste del af væsken var det muligt at se bort fra de viskose kræfter i beskrivelsen, der kaldes en *potential-strømning*. I den nederste del af væsken var viskose kræfter af stor betydning, og måtte derfor indgå i beskrivelsen af væsken. Væskelaget hvor viskose kræfter er af stor betydning, er et tyndt væskelag tæt på det faste legeme, og kaldes et *grænselag*. Ligningen der kan beskrive alle væskefænomener kendes som *Navier-Stokes ligning*. Beskrivelsen af væsker hvor der kan ses bort fra viskose kræfter, kendes under navnet *Euler-ligningen*, der er en yderst kraftig simplificering af Navier-Stokes ligning da de viskose kræfter ikke indgår. Denne ligning kan ikke anvendes til beskrivelse af grænselaget.

I sit arbejde angav Prandtl en ligning, der ikke var så kraftigt forsimplet som Euler ligningen, men den kunne beskrive grænselaget. Denne ligning kaldes idag for *Prandtls grænselagapproximation*, og tager netop højde for de viskose kræfters betydning i grænselaget. De viskose kræfter er proportional med gradienten af hastighedsgradienten ganget med viskositetskoefficienten. Prandtl viste, at man ikke kan se bort fra de viskose kræfter i grænselaget, fordi hastighedsgradienten op igennem grænselaget er langt større her end i den øvrige del af væsken, på trods af at viskositeten (viskositetskoefficienten) er lille. Ændringen af væskens hastighed op igennem grænselaget illustrerede Prandtl i sit figurmateriale, se figur 1.1. På figuren vises væskens hastighed som funktion af grænselagets tykkelse. Det ses, at væskens hastighed er identisk nul for $z = 0$, dvs. på det faste legeme.

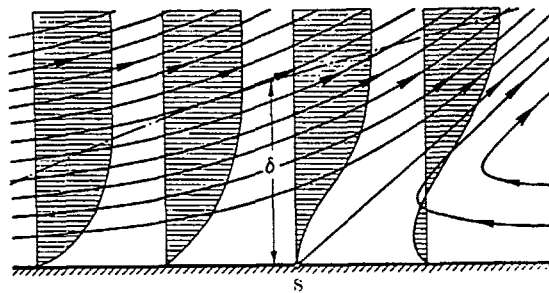
¹Jeg har anvendt en engelsk oversættelse af artiklen i uddrag der kan findes i [1], kapitel 8, og hedder *On the motion of fluids of very small viscosity*.

Dette kaldes *no-slip* betingelsen. Ændringen af væskens hastighed op igennem grænselaget kaldes en *hastighedsprofil*. Figuren viser, at når man bevæger sig væk fra det faste legeme (op igennem væsken), vokser hastigheden markant fra nul, indtil den største hastighed u_0 opnås. Et vigtigt, måske det vigtigste resultat af Prandtls eksperimentelle observationer



Figur 1.1 Figuren i Prandtls artikel viser hvorledes hastigheden af væsken ændrer sig som funktion af grænselagets tykkelse. Figur taget fra [31].

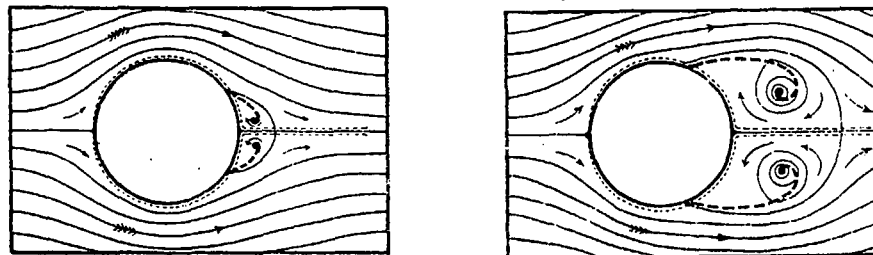
var, at i specielle tilfælde kan væsken separere ved det faste legeme. Dette illustrerer han på figur 1.2, hvor det ses at der i grænselaget tæt på det faste legeme, findes steder hvor væsken skifter retning. Dette fænomen kaldes *grænselagseparation*. På figuren er skitseret fire forskellige hastighedsprofiler i fire forskellige punkter i en væske. På figuren ses at væskens hovedstrømning bevæger sig fra venstre mod højre, angivet ved de viste skematiske strømningslinier. Ved den fjerde hastighedsprofil til højre på figuren ses, at noget af væsken bevæger sig modsat hovedstrømmen. Den fuldt optrukne linie begyndende fra separationspunktet² S , kaldes en *separationslinie*, der deler væsken mellem den væske der bevæger sig med eller mod hovedstrømmen. Over separationslinien bevæger væsken sig med hovedstrømmen, og under separationslinien bevæger væsken sig modsat hovedstrømmen (back-flow). På figuren ses desuden at tykkelsen af grænselaget er δ . I sin artikel angiver Prandtl at: ... separation kun kan opstå hvis trykket stiger langs det faste legeme i strømningsretningen...[31].



Figur 1.2 Figuren viser grænselagseparation. Under separationslinien ses at væsken bevæger sig modsat hovedstrømmen (back-flow). Figur taget fra [33] s. 33.

²Definitionen på et separationspunkt er at der skal gælde at hastighedsgradienten normalt til det faste legeme er nul: $(\frac{\partial u}{\partial z})_{z=0} = 0$.

Prandtl gav i sin artikel, se figur 1.3, et eksempel på at separation kan observeres, f.eks hvis en cylinder bevæges igennem en væske. Separationen vil da opstå bagved cylinderen. Figuren viser en skitse af den bevægede cylinder til to forskellige tidspunkter. Figuren til højre er taget til et senere tidspunkt end figuren til venstre. Det ses, at der bliver genereret hvirvler i væsken, og at disse hvirvler bliver større med tiden. Prandtls observationer af væsker med lille viskositet har dannet grundlaget for hvad der idag indenfor hydrodynamik kaldes *grænselag-teori*.



Figur 1.3 Figuren fra Prandtls artikel viser en skitse af den bevægede cylinder til to forskellige tidspunkter. Separation opstår, når cylinderen bevæges i en væske. Det ses at væsken separerer bagved cylinderen, og at væsken genererer hvirvler, og at disse hvirvler bliver større med tiden. Figur taget fra [31].

Studiet af viskose væsker med en fri væskeoverflade indeholder stadig mange uløste problemer selv under laminare betingelser³. De viskose væsker beskrives, som nævnt ved Navier-Stokes ligning og passende grænsebetingelser⁴, men i mange tilfælde er selv numeriske løsninger ikke tilgængelige. Årsagen til dette er, at singulære strukturer i mange tilfælde opstår i disse væsker, dvs. separation.

Et eksempel på en væske med en fri overflade der indeholder separation, er det cirkulære hydrauliske spring. Det cirkulære hydrauliske spring opstår, når en vertikal væskestråle rammer en horisontal plade f.eks i en køkkenvask. Tæt på strålen er væskelaget tyndt og væskebevægelsen hurtig. Længere væk fra strålen ved en karakteristisk radius r_s stiger væskelaget pludseligt og væsken bevæger sig herefter langsommere. Det er springet i væskelagstykkelsen, der benævnes *det hydrauliske spring*. Separation af væsken sker ved springet. Nært beslægtet med det hydrauliske spring er en *river bore*, der er en bevæget form for et hydraulisk spring.

1.1 Eksperimentelt studie af det hydrauliske spring

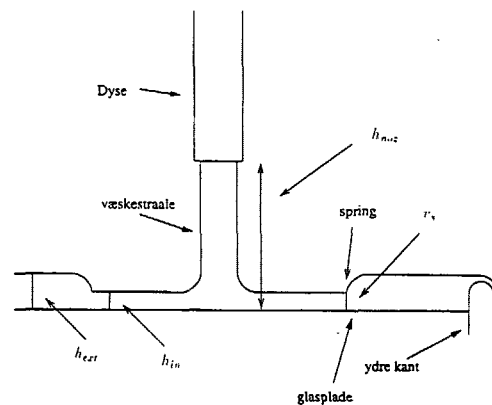
På Niels Bohr Institutet (NBI), Blegdamsvej 17 i København ved Center for Chaos And Turbulens Studies (CATS) er det hydrauliske spring blevet studeret i en årrække, både

³I [10], kan man få en definition på hvad en laminar væske er. Der står (af lat.: *lamina* tynd plade) om væskes bevægelse når væskpartiklerne bevæger sig i tynde lag der glider forbi hinanden uden at blandes og uden at danne hvirvler (mods. turbulent).

⁴I kapitel 2 bliver grænsebetingelser defineret.

teoretisk og eksperimentelt. Det hydrauliske spring er kun en af mange ikke-lineære fænomener, der bliver studeret på CATS. Af andre ting der studeres kan nævnes turbulens, akustik, sandriller (ripples), granulært flow, med mere. Ved at udføre eksperimenter fås et kendskab til disse fænomener, og på den teoretiske side udvikles modeller, hvis formål naturligvis er at beskrive det observerede.

For at studere det hydrauliske spring er en specialdesignet opstilling konstrueret. Desuden anvendes en mere viskos væske end vand, for at kunne studere det hydrauliske spring både under laminare og stationære forhold, hvilket vil sige at springet ikke ændrer form i tid. Figur 1.4 viser et forenklet skematisk, vertikalt tværsnit af denne opstilling. Den specialdesignede opstilling består af en dyse (nozzle), en glasplade, et væskesystem og et skanningssystem. Væskesystemet og skanningssystemet ses ikke på figur 1.4, men på figuren ses at væskestrålen forlader dysen og lander på glaspladen, hvor den spredes homogent ud langs pladen i radial retning. Når væskestrålen rammer glaspladen, har den en konkav form som skitseret på figuren. Ved afstanden r_s dannes springet. Rundt om glaspladen er en kant, **den ydre kant**, der via en motor kan hæves eller sænkes. Væskehøjden efter springet kan på denne måde både reguleres og fastholdes på en bestemt værdi. Når væsken bevæger sig henover den ydre kant, bliver væsken recirkuleret via væskesystemet. Det ses desuden på figur 1.4, at faldhøjden er den lodrette afstand fra dysen til glaspladen. Denne afstand er defineret som h_{noz} . På figur 1.5 ses et foto taget af det cirkulære hydrauliske



Figur 1.4 På figuren ses en skitse af opstillingen der er specialdesignet for et detaljeret studie af det hydrauliske spring.

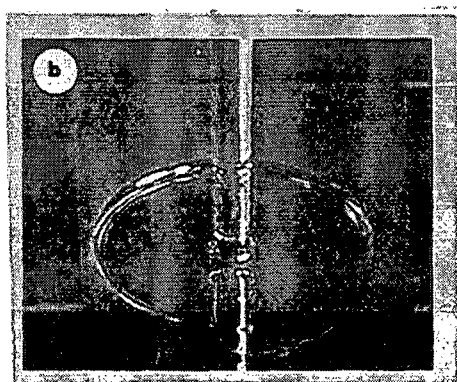
spring, som det ses i laboratoriet. Springet der dannes i afstanden r_s fra væskestrålen, der ses som den lyse cirkulære ring. Ved at anvende en mere viskos væske end vand fås som det ses, et pænt cirkulært spring der har en yderst veldefineret radius. På fotoet ses at tæt på strålen er væskelaget tyndere end efter springet. Højden af væskelaget, **det tynde væskelag**, tæt på strålen kaldes h_{in} , *inner height*, og efter springet, **den ydre væskehøjde**, kaldes h_{ext} , *external height*.

To typer hydraulisk spring

I 1995 publicerede A.E. Hansen og A. Haaning [26] et eksperimentelt bachelorprojekt om det hydrauliske spring. De undersøgte det cirkulære hydrauliske spring, ved at variere den ydre væskehøjde. Igennem undersøgelsen anvendte de en væske, som der var mere viskos end vand. Væsken var en blanding af ethylen-glycol og vand, og dens viskositet lå mellem 10 til 12 gange vands. Ved at øge den ydre væskehøjde ændredes, foruden springets form strømmingen ved springet. Karakteristisk for springets form er, at ved og øge den ydre væskehøjde bliver springet mere og mere stejlt, indtil en vis kritisk værdi $h_{kritisk}$ af den ydre væskehøjde hvor springet får overbalance, der kan sammenlignes med bølgebrydning (*wavebreaking*), og en ny tilstand opstår. Desuden skrumper springet ind, når den ydre væskehøjde øges, helt analogt til hvad der sker når der er prop i køkkenvasken, og den fyldes op med vand.

Karakteristisk for den nye tilstand er, at foruden separationen i væsken er en hvirvel i overfladen af spinget dannet. De to typer spring blev defineret *type I*, når den ydre væskehøjde var under $h_{kritisk}$, *type II* når den ydre væskehøjde var over $h_{kritisk}$.

Figur 1.6 viser en skitse af hvordan strømningsmønsteret for de to typer spring ser ud. Figuren viser et vertikalt tværsnit igennem det hydrauliske spring. På figur(a) ses at i type I, separerer væsken ved springet. Figur(b) viser type II, hvor der foruden separationen i væsken, er dannet en hvirvel i overfladen af springet. Denne hvirvel kaldes en *roller*, hvis geometri kan karakteriseres som en flydende torus, der omgiver det nye spring. I tilstand type II kan springets cirkelsymmetri brydes, og istedet dannes et spring, der er polygonformet og stadig under laminare forhold. På figur 1.7 ses et foto af et fem-kantet polygonspring i tilstand type II. Bemærk hvor skarpe hjørnerne i polygonen er. Ændringen fra det cirkulære spring til polygonspringet, er et resultat af variationen af kun een parameter, nemlig den ydre kant og dermed den ydre væskehøjde. Den ydre væskehøjde er således øget fra det cirkulære spring som det ses på figur 1.5 til polygonspringet som det ses på figur 1.7. På figurskitse 1.6 ses desuden at type II springet generelt er mere



Figur 1.5 Et foto taget af det cirkulære hydrauliske spring. Tæt på strålen er væskelaget tyndere end efter springet. Figur taget fra [23].

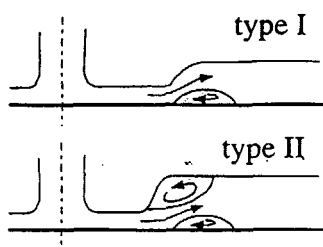
stejlt i modstætning til type I springet.

A.E Hansen og A. Haaning opdagede blot eksistensen af polygonerne, så et nyt og interessant fænomen var opdaget, men hvorledes variationen af de indgående parametre viskositet, flux, faldhøjde og den ydre væskehøjde, invirkede på polygonerne blev ikke undersøgt. En nærmere undersøgelse af polygonerne vil indgå som en del af nærværende arbejde.

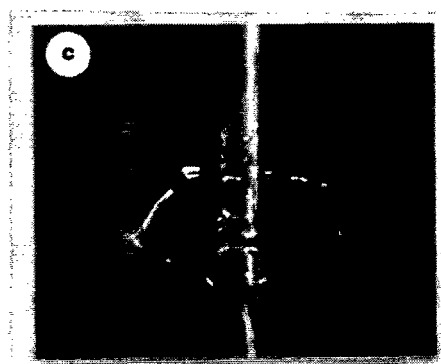
Højdeprofil af det hydrauliske spring

Skanningssystemet bliver brugt til at måle højdeprofilen af springet, dvs. variationen af væskelagets tykkelse som funktion af den radiale afstand fra væskestrålen. Typisk vil målingen starte tæt på væskestrålen og slutte efter springet, da det er profilen af springet, man er interesseret i. Skanningssystemet består af en nål, der er monteret på en vogn der bevæges radiale, og er computerstyret. Profilen måles ved, at nålen i hvert punkt automatisk bevæges nedad, indtil den får elektrisk kontakt med væsken som er ioniseret. Når væskehøjden er registreret, bevæges nålen op igen, og vognen bevæges radiale hen til næste målepunkt og så fremdeles.

På figur 1.8 ses en måleserie af tolv typiske højdeprofiler af det hydrauliske spring. Hver

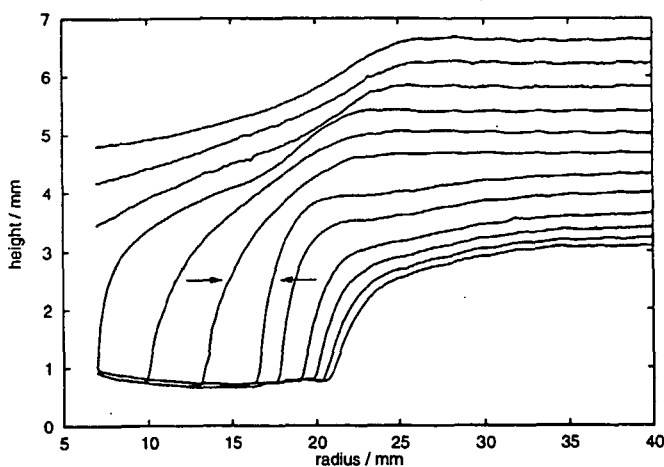


Figur 1.6 På figuren ses en skitse af hvordan strømningmønsteret for type I og type II tilstanden er ved springet. Figur taget fra [4].



Figur 1.7 Figuren viser et foto af et fem-kantet polygonspring. Bemærk at hjørnerne i polygonen er meget skarpe og markerede. Den ydre væskehøjde er øget fra figur 1.5 til figur 1.7. Figur taget fra [23].

kurve angiver en højdeprofil foretaget ved en specifik ydre væskehøjde. Ved hver måleserie startes altid ved den laveste ydre væskehøjde, der er kurven længst til højre på figuren. Alle tolv højdeprofiler er startet omkring 7 mm fra centrum af væskestrålen, hvilket er tæt på væskestrålen idet radius af væskestrålen typisk er 3-4 mm, hvilket vil sige, at målingen starter 4-3 mm fra strålen. Det ses, at radius af springet for den laveste ydre væskehøjde er omkring 20.9 mm. Det ses, at det tynde væskelag h_{in} før springet stort set er konstant for de første ni målinger. Tykkelsen af det tynde væskelag, før springet, for denne måleserie er på omtrent en millimeter. Det ses desuden, at væskehøjden stiger voldsomt, henover springet, hvorefter den ydre væskehøjde stort set er konstant for alle tolv højdeprofiler. Den ydre væskehøjde øges fra kurve til kurve, og ændres fra første måling (laveste ydre væskehøjde) på omkring 3 mm til sidste måling (største ydre væskehøjde) på omkring 6.5 mm. To karakteristiske ting sker, når den ydre væskehøjde øges. For det første ses, at radius af springet bliver mindre og mindre. For det andet bliver springet som tidligere omtalt mere og mere stejlt indtil det tilsidst får overbalance. Overgangen fra type I til type II er angivet ved pilene, og her ses at radius af springet drastisk mindskes fra før overgangen, dvs. type I, hvor radius er omkring 16.4 mm til efter overgangen, dvs. type II hvor radius af springet er omkring 13.2 mm. Det ses, at når den ydre væskehøjde øges yderligere, i type II, mindskes radius af springet helt ned til 7 mm. Herefter "lukkes" springet hvilket vil sige, at det tynde væskelag ikke længere eksisterer, idet springet nu "rammer" væskestrålen. Tilsidst skal bemærkes, at lige før springet stiger væskehøjden i det tynde lag en ganske lille smule, hvilket er en *ripple*.



Figur 1.8 På figuren ses at overgangen fra type I til type II sker ved de markerede pile. Figur taget fra [5].

1.2 Teoretisk studie af det hydrauliske spring

For ca. fem år siden begyndte CATS gruppen et teoretisk studium af type I dvs. det cirkulære hydrauliske spring. Udgangspunktet for studiet var, at fremstille en så simpel model der samtidig kunne give et estimat af springets radius. Denne model benævnes i denne afhandling *den simple model*.

Ved fremstillingen af den simple model blev nogle centrale idéer, i en artikel af Lord Rayleigh fra 1914 der omhandlede riverbores (flodbølger) [32], anvendt. I denne beskrivelse negligeres viskositet. Det vises, at massebevarelse og impulsbevarelse henover springet er nok til at bestemme hastigheden v af væsken, der bevæger sig langs en kanal, og væskehøjden h efter springet hvis de kendes før springet. I artiklen antages massebevarelse og impulsbevarelse at gælde henover springet, men dette har som konsekvens, at energien ikke er en bevaret størrelse henover springet. Dette hænger sammen med, at ligningerne for masse, impuls og energibevarelse allesammen kun afhænger af to ubekendte, nemlig v og h , dvs. to ligninger er tilstrækkeligt til at bestemme disse ubekendte⁵. Idéen om at ovenstående bevarelsessætninger gjaldt henover springet, blev brugt ved fremstillingen af den simple model.

Den simple model er fremlagt i artiklen *Shallow-water approach to the circular hydraulic jump*, [9] hvor CATS gruppen fandt, at det ikke var muligt at give et estimat for springets radius r_s , uden at tage hensyn til væskens viskositet. Viskositet skulle derfor på afgørende måde indgå i den simple model, for at kunne give et estimat af radius af springet. Den simple model er så simpel, at der ses bort fra separationen, og selve springet betragtes blot som et stationært *shock* også kaldet en *diskontinuitet*⁶, hvor de to sider af diskontinuiteten forbindes ved antagelsen om, at masse og impulsbevarelse henover den gælder. Der blev set bort fra separation i den simple model, da det helt primære formål med modellen var at den var, så simpel og overskuelig som mulig. De fandt derved ud af, at viskositet var en afgørende parameter i modellen for, at kunne give et estimat for radius af springet. Da der imidlertid er separation ved springet, må dette naturligvis indgå i modellen for, at den kan siges, at kunne beskrive det hydrauliske spring. Den simple model blev således modificeret til at kunne beskrive separation. I nærværende afhandling kaldes denne model for *den udbyggede model*. Den udbyggede model kan f.eks. ses i artiklen *Averaging theory for the structure of hydraulic jumps and separation in laminar free-surface flows* [6], hvor det vises, at denne model kan redegøre for separation ved springet⁷. Kendetegnende for både den simple og den udbyggede model er at de er fænomenologiske modeller, hvor diverse approksimationer i begge modeller er foretaget på baggrund af eksperimentelle observationer af det hydrauliske spring.

Som nævnt tidligere, ved vi fra eksperimentelle observationer at det hydrauliske spring

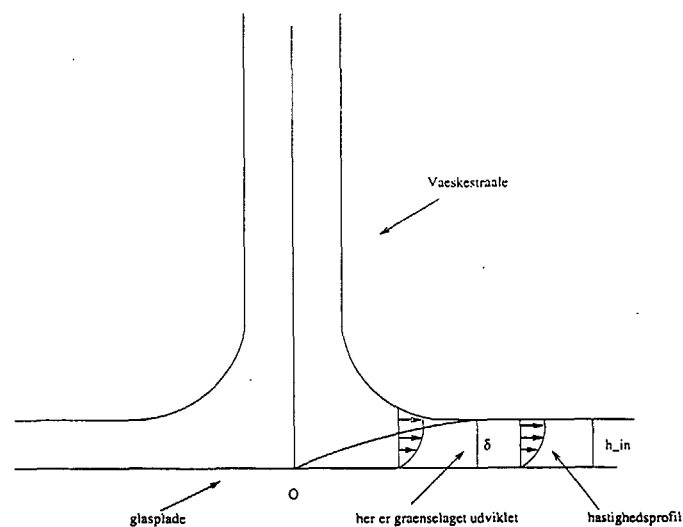
⁵Lord Rayleighs idéer gennemgås i kapitel 2.

⁶Definitionen på en diskontinuitet er at $\frac{dh}{dr} = \infty$, hvor h er væskehøjden og r er den horisontale afstand fra centrum.

⁷I kapitel 3 gennemgås både den simple model og den udbyggede model.

består af et tyndt væskelag, specielt væskelaget før springet, og at væsken bevæger sig tæt ved et fast legeme (glaspladen). Det er derfor nærliggende at anvende Prandtls grænselagapproximation som en grundlæggende ligning til beskrivelse af det hydrauliske spring. Både den simple og den udbyggede model tager udgangspunkt i Prandtls grænselagapproximation. Der er dog nogle vanskeligheder, der skal overvindes, inden den udbyggede model kan beskrive separation. Vanskeligheden består i at Prandtls grænselagapproximation generelt er singular ved et separations punkt. I artikel [6] fremlægger CATS gruppen en midlingsmetode introduceret af to fysikere Karman & Pohlhausen der er angivet i [33]. Ved at anvende denne metode på Prandtls grænselagapproximation kan singulariteten ved separations punktet undgås, og strømningsmønstret ved springet kan beskrives.

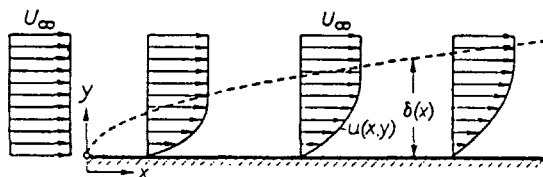
Forudsætningen for at kunne anvende Prandtls grænselagapproximation som grundlæggende ligning til beskrivelse af det hydrauliske spring gør det nødvendigt, at det hydrauliske spring kan betragtes som et grænselag. Der skal gælde, at grænselaget er af samme størrelsesorden som væskelaget h_{in} . På figur 1.9 ses væskestrålen, også kaldet en *jet*, der rammer glaspladen og spredes ud langs den. Væskestrålen har, som nævnt tidligere, en konkav form når den spredes ud på glaspladen. Punktet O kaldes et *stagnations punkt*, og er et punkt, hvor hastigheden af væsken er nul. Man ved, til dags dato, ikke så meget om hvordan væsken bevæger sig tæt på stagnationspunktet, men det antages at grænselaget udvikles fra punktet O og til det har størrelsen δ , dvs. hele væskelaget er et grænselag [44] s. 481. Prandtls grænselagapproximation gælder derfor først når $\delta \approx h_{in}$.



Figur 1.9 På figuren ses at væskestrålen rammer glaspladen, og væsken spredes ud her. På figuren er skitseret, hvornår grænselaget er udviklet.

Da Prandtls grænselagapproximation kun gælder når $\delta \approx h_{in}$, er det derfor vigtigt, at undersøge om det tynde væskelag faktisk kan betragtes som et grænselag. Figur 1.10 viser en skitse, der er forstørret af et grænselag, der udvikles når en væske bevæger sig parallelt

forbi langs en horisontal plade. Figuren viser tre hastighedsprofiler tre forskellige steder i væsken, hvor pilenes længde angiver størrelsen af væskens hastighed. Det antages at væsken til, lad os sige, tiden $t = 0$ har en jævn hastighedsfordeling, inden den bevæger sig forbi pladen, angivet som profilen yderst til venstre. På figuren ses dernæst, at tykkelsen δ af grænselaget øges langs pladen, dvs. grænselaget udvikles. Udviklingen af grænselaget er markeret ved den stiplede linie. Den stiplede linie angiver samtidig grænsen mellem, hvor de viskose kræfter er af betydning dvs. i grænselaget (under linien), og hvor de er af mindre betydning dvs. potential-strømning (over linien). Det ses på hastighedsprofilerne, at væskens hastighed er nul på pladen (no-slip), og øges op igennem væskelaget til den største hastighed U_∞ opnås. Tykkelsen af grænselaget kan således findes ved at studere hastighedsprofilen, idet grænselaget ophører, når den største hastighed U_∞ er opnået, hvilket netop er angivet, der hvor den stiplede linie skær profilerne. Ved at studere hastighedsprofilerne forskellige steder i det tynde væskelag kan man således i princippet afgøre, hvornår grænselaget er udviklet.



Figur 1.10 Figuren viser en skitse af tre hastighedsprofiler i tre forskellige punkter i en væske. Det ses, at grænselaget udvikles langs pladen. Udviklingen af grænselaget er markeret ved den stiplede linie. Figur taget fra [33] s. 25.

Den simple og udbyggede model, der under ét benævnes *model type I*, er yderligere forsimplet ved at, væskestrålen (jetten) er negligeret, men istedet er en hastighedsprofil som begyndelsesbetingelse antaget gældende fra et givent r_0 hvor $r_j < r_0 \ll r_s$, dvs. r_0 er større end radius af jetten, og meget mindre end radius af springet. Da Prandtl's grænselagapproximation anvendes som den grundlæggende ligning i model type I, skal grænselaget være udviklet ved r_0 .

I nærværende afhandling undersøges foruden polygonfænomenet, hvornår grænselaget er udviklet og dermed om det er rimeligt at antage at model type I gælder fra r_0 . Til dette formål anvendes en teknik der kaldes Laser Doppler Velocimetri, og anvendes til at måle væskers hastigheder.

1.3 Hvad præsenteres i denne rapport ?

Denne specialeafhandling består af to eksperimentelle undersøgelser. I den første undersøgelse har jeg udført målinger af hastighedsprofiler i det tynde væskelag før springet. Formålet med målingerne er at afgøre, om det er rimeligt og antage at model type I

gælder fra r_0 , dvs. grænselaget skal her være fuldt udviklet for at anvende Prandtls grænselagapproximation, som model type I bygger på.

I den anden eksperimentelle undersøgelse er indsamlet eksperimentelle data for polygoner i type II. Jeg har været med til at lægge nogle få brikker af mange indenfor et stort parameterområde, men disse få vil forhåbentlig føre til en øget forståelse af polygonfænomenet. På baggrund af de eksperimentelle data for polygoner har CATS gruppen udviklet en simpel model for polygoner. Denne model kaldes i denne afhandling *model type II* eller *polygonmodellen*, hvis formål i første omgang er, at kunne identificere relevante parametre og kvalitativt kunne beskrive polygonfænomenet. Det har på baggrund af den foretagne eksperimentelle undersøgelse af polygoner, der præsenteres i denne afhandling, resulteret i to publikationer som er publiceret i Nature [23] og Nonlinearity [24].

Ovenstående to undersøgelser har ført til følgende to problemformuleringer:

1.3.1 Problemformulering

1. Ved anvendelse af Laser Doppler Velocimetri teknikken undersøges, om det er rimeligt og antage at, den af CATS udviklede, model type I gælder fra r_0 .
2. På baggrund af den foretagne eksperimentelle undersøgelse af type II analyseres om den, af CATS udviklede, polygonmodel kan beskrive polygonfænomenet tilfredstillende.

1.3.2 Opbygning af rapport

Det centrale i denne specialeafhandling er det eksperimentelle arbejde, der er præsenteret i kapitel 5 og 6. I kapitel 5 præsenteres målingerne foretaget i det tynde væskelag før springet og i kapitel 6, præsenteres den eksperimentelle undersøgelse af polygoner. Inden præsentationen af det eksperimentelle arbejde har jeg i kapitel 4 redegjort for den specialdesignede opstilling. Jeg har sat det eksperimentelle arbejde ind i en sammenhængende kontekst, hvilket har været nødvendigt for at kunne besvare problemformuleringerne. Det har derfor været nødvendigt med en præsentation af model type I og model type II. Præsentationen af model type I strækker sig over to kapitler for overskuelighedens skyld. Først udledes Prandtls grænselagapproximation i kapitel 2, og de grænsebetingelser der skal gælde for en væske med fri overflade. Dernæst præsenteres, på baggrund af kapitel 2, model type I i kapitel 3. Model type II præsenteres i kapitel 7. I kapitel 8 diskuteres, fra de forrige kapitler, hvad vi nu ved om type I, overgangen og type II og hvilke konklusioner vi kan drage af modelresultaterne. Desuden skitseres en mulig idé, CATS gruppen arbejder på, til fremstillingen af en *samlet model*, der både skal kunne beskrive type I, overgangen og type II.

1.3.3 Er der noget spændende ved det hydrauliske spring ?

Det hydrauliske spring er et spændende fænomen af to grunde. For det første er det fascinerende, at det hydrauliske spring er et fænomen som kan observeres under meget enkle forhold. Tilgængæld er strømningsmønsteret i væsken yderst kompleks selv det cirkulære spring, og at beskrivelsen af det ligeledes er yderst vanskelig og kompliceret. For det andet er det yderst fascinerende og smukt, at en væske under bestemte forhold danner meget skarpe hjørner.

1.3.4 Småting

Jeg har forsøgt, at holde fodnoter på et absolut minimum og hellere forklare og introducere i teksten. Fodnoter er kun brugt, når det ville være forstyrrende at skrive i teksten.

Der er mulighed for at "gå på nettet" og få oplysninger om det hydrauliske spring på min hjemmeside <http://www.nbi.dk/~marcusse>.

Kapitel 2

Udledning af Prandtls grænselagapproximation (Pga)

Formålet med dette kapitel er at udlede Prandtls grænselagapproximation (Pga), fra Navier-Stokes ligning. Desuden redegøres for de grænsebetingelser, der skal være fastlagt for en væske med fri overflade (f.eks det hydrauliske spring). Sidst i kapitlet skitseres kort Lord Rayleighs centrale idéer om riverbores. Resultatet af disse udledninger anvendes i kapitel 3, hvor den simple og den udbyggede model (model type I) præsenteres. Ved skrivningen af dette kapitel er følgende litteratur anvendt [1, 7, 11, 29, 32, 38, 45].

2.1 Navier-Stokes ligning

Navier-Stokes ligning der gælder for en inkompressibel væske (konstant densitet), er givet ved

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{f}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

I hydrodynamik opfattes en væske som et kontinuert *kontinuum* af væskepartikler, hvor der ses bort fra, at væsken består af molekyler. Hver enkelt væskepartikel antages at bevæge sig med middelhastigheden, af de molekyler som opbygger den.

Inkompressibilitet, betyder at ligning 2.2 skal være opfyldt. Ligningen kaldes *kontinuitetsligningen*, og udtrykker at massen af en væske er bevaret. Hvis væsken ikke var inkompressibel ville kontinuitetsligningen ikke gælde, og Navier-Stokes ligning ville blive langt mere kompliceret. Vi skal i dette arbejde kun betragte en inkompressibel væske og dermed ligningerne 2.1 og 2.2. For at vurdere om en væske kan antages inkompressibel, sammenlignes væskens hastighed med lydets udbredelseshastighed i væsken. Hvis væskens hastighed er meget lille i forhold til lydets udbredelseshastighed i væsken, så er væsken

med god tilnærmelse inkompressibel. De største væskehastigheder vi har målt med LDV, er i det tynde væskelag h_{in} , og er målt til $u \approx 2$ m/s og lydets hastighed i en væske ved 20°C er $V_{lyd} \approx 1000$ m/s. Det er derfor en god antagelse, at væsken vi betragter er inkompressibel, idet væskepartiklernes hastighed er meget mindre end lydets udbredelses hastighed i væsken.

Ligning 2.1 udtrykker, at ændringen af væskens impuls pr. masseenhed er lig med de kræfter pr. masseenhed, som virker på den, hvilket er bevægelses ligningen for en væske med konstant densitet, dvs. Newtons anden lov. Det hydrauliske spring er cirkulært, når den ydre væskehøjde er under $h_{kritisk}$, og derfor indføres cylinderkoordinater. I ligning 2.1 og 2.2 indgår hastigheden $\vec{v}(\vec{x}, t)$, der er en funktion af både stedkoordinaten \vec{x} og tiden t hvor $\vec{x} = (r, \theta, z)$, der betegner hastigheden af en væskepartikel, der bevæger sig gennem \vec{x} til tiden t . Koordinaten r angiver den radiale koordinat dvs. afstanden fra væskestrålen, z angiver den vertikale koordinat dvs. højden af væskelaget, og vinklen θ kaldes azimuthhalvinklen hvis definitionsområde er $0 \leq \theta \leq 2\pi$. På venstre side af ligning 2.1 står den såkaldte materiale afledede med hensyn til hastigheden \vec{v} , der består af to led. Det første led $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ udtrykker hvor hurtigt hastigheden ændres i et fast punkt, dvs. \vec{x} er fastholdt. Det andet led $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ udtrykker hvor hurtigt hastigheden ændres, når en væskepartikel følges igennem \vec{x} , hvor ∇ betegner den sædvanlige differentialoperator. Konstanterne ν og ρ er henholdsvis væskens *kinematiske viskositet* og dens *densitet*. På højre side af ligning 2.1 står summen af de kræfter pr. masseenhed, som virker på væsken, der består af tre led. Det første led $\frac{1}{\rho} \nabla p$ beskriver de trykkræfter som virker i væsken pr. masseenhed, hvor $p = p(\vec{x}, t)$ er trykket. Det andet led $\nu \nabla^2 \vec{v}$ beskriver de viskose kræfter pr. masseenhed, hvor ∇^2 betegner laplaceoperatoren, og det sidste led \vec{f} beskriver eventuelle ydre kræfter pr. masseenhed. I sidste kapitel så vi at ved og anvende en viskos væske kan det hydrauliske spring blive helt symmetrisk cirkulært, når den ydre væskehøjde er under $h_{kritisk}$. Hastigheden \vec{v} bliver således uafhængig af vinklen θ da $\vec{x} = (r, z)$. Hastigheden afhænger således af $\vec{v} = \vec{v}(r, z, t)$. Den horisontale og vertikale hastighedskomponent defineres u og w . Navier-Stokes ligning er ifølge [29] s. 48 for en inkompressibel væske i cylinderkoordinater i henholdsvis horisontal og vertikal retning r og z , givet ved

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

hvor 2.3 og 2.4 er Navier-Stokes ligning i henholdsvis r og z retningen, hvor $\vec{f} = (0, -g)$ og g er tyngdeaccelerationen. Ligning 2.5 er kontinuitetsligningen. Vi kan med fordel trække

ligning 2.4 sammen, idet vi indfører $P = p + \rho gz$ og dermed fås

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.6)$$

Det skal her bemærkes, at P også kan erstatte p i ligning 2.3 da $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r}$.

2.1.1 Pga

Vi så i kapitel 1, at Prandtl fandt at hastighedsændringen i grænselaget, giver så betydelige effekter, at der ikke kan ses bort fra dem på trods af at viskositeten er lille. Dvs. det viskose led (andet led) på højre side i ligning 2.3 og 2.4 ikke kan negligeres selvom $\nu \ll 1$. Dette kan udtrykkes ved

$$\frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.7)$$

Dvs. ændringer primært foregår i vertikal retning. Da grænselaget desuden er tyndt, bevæger væsken sig primært parallelt langs det faste legeme (glaspladen), dvs. væskehastigheden i r retningen er meget større end i z retningen dvs.

$$u \gg w \quad (2.8)$$

Lad U_0 betegne en typisk værdi af u og lad u ændre sig med en størrelse af orden U_0 over en afstand r af orden L . En typisk værdi for tykkelsen af grænselaget angives som δ . Fra ligning 2.7 gælder at

$$\frac{\partial u}{\partial z} \gg \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.9)$$

Størrelsesordenen af venstre og højre side i 2.9 giver at $\frac{U_0}{\delta} \gg \frac{U_0}{L}$ hvilket giver at

$$L \gg \delta \quad (2.10)$$

Det vil sige, at en typisk tykkelse af grænselaget er meget mindre end en typisk længde i horisontal retning. Fra eksperimentelle data er en typisk værdi for radius af springet, $L \approx 25$ mm. En typisk værdi for tykkelsen af det tynde væskelag før springet, $\delta \approx 1$ mm. Det ses, at 2.10 ud fra eksperimentelle værdier er en rimelig approksimation. I sin artikel [31] angav Prandtl, at tykkelsen af grænselaget var proportionalt med

$$\delta \propto \sqrt{\left(\frac{\mu L}{\rho U}\right)} \quad (2.11)$$

Hvor μ kaldes den *dynamiske viskositet*, L er en typisk længde, og U er en typisk hastighed. Sammenhængen mellem den dynamiske viskositet og den kinematiske viskositet er givet ved $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Vi kan ved at indføre det dimensionsløse tal *Reynolds tallet* med fordel

skrive 2.11 lidt om. Reynoldstallet er defineret ved $R = \frac{UL}{\nu}$, hvor U angiver en karakteristisk hastighed, og L angiver en karakteristisk længde. I ligning 2.11 ganges med L i tæller og nævner under kvadratrodtegnet, og Reynoldstallet indsættes, hvilket giver

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{R}} \quad (2.12)$$

Vi kan se at $L \gg \delta$ direkte følger af 2.12, da $\nu \ll 1$ i grænselaget, hvilket ud fra Reynoldstallet medfører at $R \gg 1$, og dermed følger $L \gg \delta$. Vi har dermed udledt denne betingelse på to forskellige måder.

Ud fra eksperimentelle observationer som nævnt i sidste kapitel, fremgår det, at det hydrauliske springs radius i tilstand type I er meget stabil, og konstant når en viskos væske anvendes. Vi betragter derfor et stationært flow, hvilket matematisk udtrykkes ved $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$. Vi skal nu vurdere hvilke led i Navier-Stokes ligning, der har betydning i grænselaget. For at kunne vurdere dette skaleres Navier-Stokes ligning. Disse skaleringer er f.eks angivet i [11] s. 74-76, og givet ved

$$r' = r, \quad z' = \frac{z}{\delta}, \quad u' = u, \quad w' = \frac{w}{\delta}, \quad P' = P \quad (2.13)$$

Det ses at skaleringen bygger på ligning 2.7, 2.8 og 2.10. Ligning 2.3 og 2.4 kan skrives på dimensionsløs form ved at indføre Reynoldstallet. Denne skrivemåde er standard for at kunne vurdere hvilke led i ligningerne, der har betydning, og hvilke der kan negligeres. Ligning 2.3 og 2.4 kan derfor skrives som

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (2.14)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.15)$$

Hvor $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$, og $P = p + \rho g z$ er anvendt i ligning 2.14 og 2.15. Skaleringen 2.13 indsættes i ligning 2.14 og 2.15. I ligning 2.15 ganges med δ på begge sider af lighedstegnet, og derefter fås at

$$u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{\partial P'}{\partial r'} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial u'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \frac{1}{\delta^2} - \frac{u'}{r'^2} \right), \quad (2.16)$$

$$\left(u' \frac{\partial w'}{\partial r'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \delta^2 = -\frac{\partial P'}{\partial z'} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial w'}{\partial r'} \delta^2 + \frac{\partial^2 w'}{\partial r'^2} \delta^2 + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right), \quad (2.17)$$

For at vurdere hvilke led der kan ses bort fra, og hvilke der har betydning, anvendes at $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{R}}$ hvilket indsættes i ligning 2.16 og 2.17. Herfter anvendes at der gælder $R \gg 1$, hvilket giver

$$u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{\partial P'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}, \quad (2.18)$$

$$0 = -\frac{\partial P'}{\partial z'}, \quad (2.19)$$

Da vi nu ved, hvilke led der er af betydning, kan vi gå tilbage til de non-dimensionsløse ligninger, der er

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (2.20)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial z}, \quad (2.21)$$

Vi kan umiddelbart integrere ligning 2.21, og anvende at trykket er $p = p_0$ på væskeoverfladen, $z = h(r)$. Hvor p_0 er det atmosfæriske tryk væskeoverfladen vil være påvirket af. Ligning 2.21 giver

$$p = p_0 + \rho g (h(r) - z) \quad (2.22)$$

Ved at differentiere trykket i ligning 2.22 med hensyn til r fås

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho g \frac{dh}{dr} \quad (2.23)$$

Udtrykket 2.23 indsættes i ligning 2.20, idet der gælder at $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r}$, og sammen med kontinuitetsligningen 2.5, fås ligningerne

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{dh}{dr} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

Det skal bemærkes, at kontinuitetsligningen ikke ændres ved skaleringen dvs. er invariant. Ligningerne 2.24 og 2.25 vi har udledt, er Pga. Det skal bemærkes, at vi ikke ville få Pga udfra ligning 2.14 og 2.15, hvis vi blot her så bort fra de viskose led, selvom der gælder at $R \gg 1$. Istedet ville vi få Euler-ligningerne, som nævnt i sidste kapitel, der beskriver non-viskose væsker, dvs. potential-strømninger.

2.1.2 Grænsebetingelser for væsker med fri overflade

Løsningerne til Navier-Stokes ligning, der er en ikke-lineær partiel differentiaalligning, kan fuldstændigt bestemmes, når grænsebetingelserne og begyndelsesbetingelserne til den er specificeret. Grænsebetingelserne til et givent problem afhænger af, hvilke omgivelser væsken bevæger sig i. Eksempelvis har en væske, der bevæger sig i en cylinder, og en væske der bevæger sig i et langt lige rør forskellige grænsebetingelser. Vi skal i dette afsnit fastlægge grænsebetingelserne til problemet, det hydrauliske spring.

En væske der bevæger sig tæt på glaspladen (det faste legeme), og har en fri overflade, skal være underlagt en grænsebetingelse på glaspladen, der kaldes for *no-slip* betingelsen, og to betingelser skal gælde på overfladen, $z = h(r)$. De to grænsebetingelser der skal gælde her, kaldes *den kinematiske grænsebetingelse* og *den dynamiske grænsebetingelse*. No-slip betingelsen betyder, at alle hastigheder på bunden (glaspladen), $z = 0$ skal være nul

$$\vec{v} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (2.26)$$

Den kinematiske grænsebetingelse

Den kinematiske grænsebetingelse udtrykker, at en væskepartikel på overfladen vil forblive der. Det vil sige, at en partikel der befinder sig på overfladen til positionen r_1 , vil være på overfladen for alle r . Hvis vi definerer funktionen

$$F(r, z) = z - h(r) \quad (2.27)$$

gælder at F på overfladen er identisk nul når $z = h(r)$. For enhver væskepartikel på den frie væskeoverflade gælder da at $\frac{DF}{Dt} = 0$ når $z = h(r)$, [1] s. 65-66. Vi får

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F = u \frac{\partial F}{\partial r} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

hvor 2.28, som nævnt tidligere, er den materiale afledede og hvor $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, eftersom vi betragter et stationært flow. Vi kan nu udregne, hvad den kinematiske grænsebetingelse 2.28 er, ved at indsætte 2.27 i 2.28, hvilket giver

$$u \left(-\frac{dh}{dr} \right) + w = 0 \quad (2.29)$$

⇕

$$w = u \frac{dh}{dr} = uh' \quad (2.30)$$

Den kinematiske grænsebetingelses rigtighed kan kontrolleres på to måder. Hvis væskeoverfladen er horisontal gælder, at der ingen bevægelse i vertikal retning er. Dette kan netop ses ud fra ligning 2.30, at når $\frac{dh}{dr} = 0$ er $w = 0$. Desuden ses det ud fra ligning 2.30, at $\frac{w}{u} = \frac{dh}{dr}$. Denne udtrykker, at hældningen af overfladen $\frac{dh}{dr}$ netop er lig med $\frac{w}{u}$, der også er hældningen af overfladen.

Den dynamiske grænsebetingelse

Den dynamiske grænsebetingelse, udtrykker at kraften $F_i = -\sum_k \sigma_{ik} n_k$ pr. enhedsareal, er lig med det atmosfæriske tryk p_0 , der kun virker vinkelret på væskeoverfladen, hvilket giver

$$\sum_k \sigma_{ik} n_k = -p_0 n_i \quad (2.31)$$

Hvor σ_{ik} , kaldes *stress tensoren* [29] s. 47-48, givet ved

$$\sum_k \sigma_{ik} n_k = -p_{total} \delta_{ik} + \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.32)$$

hvor kroneckers δ_{ik} , har værdien $\delta_{ik} = 1$ hvis $i=k$, og nul ellers. Indeks i i ligning 2.32 repræsenterer enten r eller z retningen, og hvor der summeres over $k = r, z$ der angiver de kræfter pr. enhedsareal, der virker i henholdsvis r og z -retningen. Vi anvender vektoren \vec{n} , der er normalvektor til væskeoverfladen, givet ved $\vec{n} = (-h', 1)$. Vi kan nu opstille den dynamiske grænsebetingelse 2.31, der giver

$$\begin{pmatrix} (-p_{total} + 2\nu\rho \frac{\partial u}{\partial r}) & \nu\rho \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \nu\rho \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & (-p_{total} + 2\nu\rho \frac{\partial w}{\partial z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h' \\ 1 \end{pmatrix} = -p_0 \begin{pmatrix} -h' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Udregningen af 2.33 giver to ligninger som er

$$\left(-p_{total} + 2\nu\rho \frac{\partial u}{\partial r} \right) (-h') + \nu\rho \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = p_0 h' \quad (2.34)$$

$$\nu\rho \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) (-h') + \left(-p_{total} + 2\nu\rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -p_0 \quad (2.35)$$

Ligning 2.34 og 2.35 repræsenterer de kræfter pr. enhedsareal, der virker i henholdsvis r og z -retningen. Ligning 2.35 ganges med h' , og lægges sammen med 2.34 for at eliminere $p_0 h'$, hvilket giver ligning 2.36. Ligning 2.35 kan reduceres ved at anvende den kinematiske grænsebetingelse $\frac{\partial w}{\partial z} = h' \frac{\partial u}{\partial z}$, der er partielt differentieret med hensyn til z , hvilket giver ligning 2.37

$$2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) h' + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) (1 - h'^2) = 0 \quad (2.36)$$

$$((p + \Gamma) - p_0) = \rho \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) h' \quad (2.37)$$

hvor $p_{total} = p + \Gamma$ og Γ angiver overfladespændingen, der afhænger af den lokale krumning, og er angivet i [45] s. 452. Overfladespændingen angivet i cylinderkoordinater er

$$\Gamma = -\kappa \left(\frac{h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} + \frac{h'}{(1 + h'^2)^{1/2}} \right) \quad (2.38)$$

hvor κ er en konstant. Det er nødvendigt at forsimpler den dynamiske grænsebetingelse, der nu består af ligningerne 2.36 og 2.37, så den kan blive mere håndterlig. Forsimplingen udføres på baggrund af eksperimentelle data. I kapitel 1 side 7 figur 1.8 så vi, at h_{in} og h_{ext}

stort set er konstant. Dette betyder at $h' \approx 0$ før og efter springet. Desuden gælder det, at lufts viskositet sammemlignet med en væskes er meget mindre. Ligning 2.36 og 2.37 kan derfor reduceres mærkbart ved at anvende disse approksimationer. Ligningerne bliver da

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (2.39)$$

$$p + \Gamma - p_0 = 0 \quad (2.40)$$

Der er dog et sted, hvor approksimationen $h' \approx 0$ ikke kan siges at være særlig fremragende, nemlig henover springet. Forsimplingen af den dynamiske grænsebetingelse gøres dog trods dette. Ligning 2.39 og 2.40 kan reduceres yderligere, idet der dels gælder at $u \gg w$ samtidig med, at overfladespændingen Γ kan negligeres idet $h' \approx 0$. Den dynamiske grænsebetingelse reduceres til

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2.41)$$

$$p = p_0 \quad (2.42)$$

Af ligning 2.41 ses, at hastigheden u er uafhængig af z -koordinaten på væskeoverfladen. I et zu -koordinatsystem betyder dette, at hastighedsprofilens hældning er konstant. Dette ses på figur 1.1 i kapitel 1 side 2, hvor det netop ses, at når profilen flader ud er hældningen konstant. Normalt bliver hastighedsprofiler, som vi også så i kapitel 1, aftegnet i et uz -koordinatsystem. Dette betyder, at forudsat der eksisterer en invers funktion til u , gælder at når et uz -koordinatsystem betragtes, skal der for ligning 2.41 istedet gælde at

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\partial z}{\partial u} = \infty \quad (2.43)$$

Hvilket betyder, at profilerne har en lodret hældning, der eksempelvis kan ses på figur 1.2 side 2 og figur 1.10 side 10. Denne viden anvendes, i kapitel 5 hvor tolkningen af de målte hastighedsprofiler foretages. Desuden udtrykker 2.42, at det eneste tryk der virker på overfladen, er det atmosfæriske tryk, hvilket vi blot tillod os at antage på side 17 da udtrykket for trykket 2.22 blev udledt. Denne antagelse vi her gjorde på side 17, da vi ikke kendte resultatet af den dynamiske grænsebetingelse, har dog ingen betydning for udledningen af Pga.

2.2 Bevarelseslove henover springet

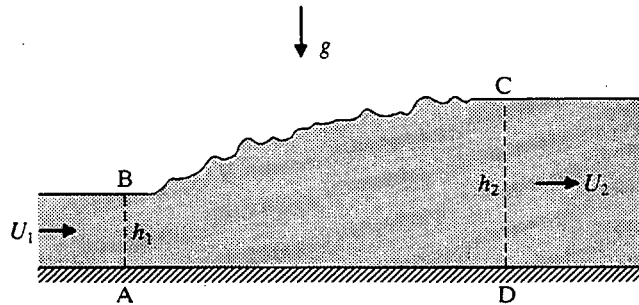
I kapitel 3 gennemgås hovedpointerne i artikel *Shallow-Water approach to the circular hydraulic jump* [9]. I denne artikel betragtes det hydrauliske spring som en diskontinuitet, hvor de to sider af diskontinuiteten forbindes ved, antagelsen om at masse og impulsbevarelse henover den gælder. Ved at antage at disse bevarelsessætninger gælder henover

springet, kan et udtryk for radius r_s af springet findes. I dette afsnit gennemgås Lord Rayleighs centrale idéer, der omhandler riverbores. En diskontinuitet der også kaldes for et shock, defineres som en pludselig ændring af væskehøjden h over en kort afstand r ($\frac{dh}{dr} = \infty$). Man kan derfor ud fra denne definition, betragte springet som et shock. Lord Rayleigh udarbejdede i 1914 en meget simpel teori for *river bores*, (flodbølger) i artiklen *On the theory of long waves and bores* [32]. Forskellen på det hydrauliske spring og en river bore er, at "diskontinuiteten" bevæger sig med en hastighed U og dermed ændrer position, hvorimod det hydrauliske spring er stationært og befinder sig på samme position.

Vi skal derfor udlede de bevarelseslove, der skal gælde henover springet ved at vælge et referencesystem, som følger med flodbølgen, dvs. når $U = 0$. Referencesystemet der betragtes er et rektangulært koordinatsystem. Som nævnt i kapitel 1, betagtede Lord Rayleigh en non-viskos inkompressibel væske.

2.2.1 Bevarelseslovene

Lord Rayleigh betragtede flodbølgen som en overgang med væskehøjden h_1 og hastigheden U_1 til væskehøjden h_2 og hastigheden U_2 , hvor $h_2 > h_1$ og $U_1 > U_2$. På figur 2.1 bevæger væsken sig fra venstre mod højre. Væsken bevæger sig hurtigt i det tynde lag hvor højden er h_1 , og langsommere i det tykke lag hvor højden er h_2 . Sammenhængen



Figur 2.1 På figuren ses en skitse af flodbølge springet. Figur taget fra [1] s. 100.

mellem disse fire størrelser giver kontinuitetsligningen, der er

$$\rho U_1 h_1 = \rho U_2 h_2 \quad (2.44)$$

Ligning 2.44 udtrykker massebevarelse dvs. massen $\rho U_1 h_1$ af den væske der bevæger sig igennem AB pr. tidsenhed, er den samme som den væskemængde $\rho U_2 h_2$ der bevæger sig igennem CD pr. tidsenhed. Den anden relation som gælder henover springet, er at impulsen skal være bevaret. "Impulsligningen" (*momentum flux*) er givet ved

$$\rho h_1 U_1^2 - \rho h_2 U_2^2 = \frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \quad (2.45)$$

Denne ligning fås, ved at betragte hvad den resulterende kraft momentant er på en væske i volumenet $ABCD$. Denne kraft er lig med impulsændringen. Impulsændringen er lig

med hvor meget væske der bevæges igennem CD minus AB . Det antages, at trykket der virker på væsken er hydrostatisk, hvor det atmosfæriske tryk p_0 på væskeoverfladen sættes til nul. Først udregnes, hvad den resulterende trykkraft på AB er, hvilket giver

$$\int_0^{h_1} p dz = \int_0^{h_1} \rho g (h_1 - z) dz = \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \quad (2.46)$$

En analog udregning for den resulterende kraft henover CD giver $\frac{1}{2} \rho g h_2^2$. Den resulterende kraft i flow retningen giver da højresiden af ligning 2.45. Igennem CD bevæges massen $\rho h_2 U_2$ pr. tidsenhed, så væskens impuls pr. tidsenhed der bevæges igennem CD er $\rho h_2 U_2^2$. Et tilsvarende udtryk for væskens impuls pr. tidsenhed der bevæges igennem AB er $\rho h_1 U_1^2$. Den resulterende impuls pr. tidsenhed i flow retningen giver da venstresiden af ligning 2.45.

Ved hjælp af disse bevarelseslove kan hastighederne U_1^2 og U_2^2 bestemmes, så de kun afhænger af h_1 og h_2 . Hastigheden U_1^2 fås ved at eliminere U_2^2 i ligning 2.45 ved indsættelse af 2.44. Hastigheden U_2^2 findes på samme måde som for U_1^2 , hvilket giver

$$U_1^2 = \frac{1}{2} g (h_1 + h_2) \frac{h_2}{h_1} \quad (2.47)$$

$$U_2^2 = \frac{1}{2} g (h_1 + h_2) \frac{h_1}{h_2} \quad (2.48)$$

Lord Rayleigh udregnede nu udtrykket for energien henover springet. Først udregnes ændringen af arbejdet¹ udført af trykket på væsken før og efter springet, hvilket giver

$$A = (p_1 - p_2) U_1 h_1 = \left(\frac{1}{2} \rho g h_1 - \frac{1}{2} \rho g h_2 \right) U_1 h_1 \quad (2.49)$$

Hvor $\frac{1}{2} \rho g h_1$ og $\frac{1}{2} \rho g h_2$ er gennemsnitstrykket henover væskelaget AB og CD . Ændringen af den kinetiske energi henover springet er

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \rho U_1 h_1 (U_1^2 - U_2^2) \quad (2.50)$$

Den potentielle energi af væsken ændres, når den bevæger sig henover springet. Ændringen af den potentielle energi er

$$\Delta E_{pot} = \rho U_1 h_1 \left(\frac{1}{2} g h_2 - \frac{1}{2} g h_1 \right) \quad (2.51)$$

Energiudtrykket henover springet giver

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} - A \\ &= \frac{1}{2} \rho U_1 h_1 \left((U_1^2 - U_2^2) + (g h_2 - g h_1) - (g h_1 - g h_2) \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$= -\rho U_1 h_1 g \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2} \quad (2.53)$$

¹Både arbejde og energi angives her i joule pr. tidsenhed · pr. længdeenhed.

Hvor værdierne for U_1^2 og U_2^2 givet ved ligningerne 2.47 og 2.48 er indsat i 2.52. Det ses at der er et energitab henover springet, idet der gælder at $h_1 < h_2$, og derfor bliver ΔE negativ. Energiudtrykket 2.53 er udledt ved at antage, at der er massebevarelse og impulsbevarelse henover springet, og at væsken er inkompressibel og non-viskos. Hvordan kan energi så tabes henover springet? Den eneste måde hvorpå der kan tabes energi henover springet, er fordi væsken ikke er non-viskos, men viskos. Med andre ord: Viskositet er en vigtig forudsætning for, at springet kan opstå [19].

2.3 Opsamling

I afsnit 2.1 har vi indtil nu udledt Pga og de grænsebetingelser, der skal være fastlagt for et problem med en fri væskeoverflade. Et grænselag kan enten være laminart eller turbulent. I sidste kapitel så vi, at ved at anvende en viskos væske bliver det hydrauliske spring en yderst stabil og laminar strømning. Pga er beregnet til kun at beskrive et tyndt laminart væskelag nær et fast legeme, dvs. et grænselag, hvor viskose kræfter er dominerende. Andet led efter lighedstegnet i ligning 2.24 side 17, er netop det viskose led. I udledningen så vi, at dette led ikke kan negligeres, når et grænselag skal beskrives, hvilket hænger sammen med at der i grænselaget opstår betragtelige hastighedsgradienter, selvom viskositeten af den væske der betragtes er lille.

Grænsebetingelserne der skal være fastlagt, for et problem med en fri væskeoverflade bestod af no-slip betingelsen 2.26 gældende for $z = 0$, den kinematiske grænsebetingelse 2.30 og den dynamiske grænsebetingelse 2.41 og 2.42, gældende på væskeoverfladen. Desuden mangler en begyndelsesbetingelse at blive angivet. For ikke at komplicere både den simple model og udbyggede modelbeskrivelse i unødigt grad er jetten i begge modelbeskrivelser negligeret, og blevet erstattet af en antaget hastighedsprofil som begyndelsesbetingelse. I modellerne er begyndelsesbetingelsen antaget at gælde fra r_0 . Da Pga anvendes som grundlæggende ligning til beskrivelse af det hydrauliske spring, må det kunne betragtes som et grænselag. Desuden skal grænselaget ved r_0 være udviklet. I kapitel 5 skal vi ved anvendelse af LDV, afgøre om grænselaget udvikles tæt på eller længere væk fra jetten, og dermed om den antagede størrelsesorden af r_0 i model type I er rimelig.

2.3.1 Er det rimeligt at beskrive det hydrauliske spring ved anvendelse af Pga?

I dette afsnit redegøres ud fra [5, 6, 8, 9, 39, 40] hvad argumenterne for at anvende Pga, til beskrivelse af det hydrauliske spring, har været.

En helt grundlæggende observation, af det hydrauliske spring er, at væskelagstykkelsen er lille især før springet. En værdi for tykkelsen af laget før springet er $h_{in} \approx 1$ mm, og udenfor springet er h_{ext} mellem tre og fire millimeter. Disse værdier er små i forhold til en

typisk længde for radius af springet $r_s \approx 25$ mm. Det er desuden eksperimentelt observeret

1. At den radiale hastighed u er stor i det tynde væskelag, dvs. væskepartiklernes hastighed er $u \approx 1 - 2$ m/s.
2. At springet er stabilt hvis en viskos væske anvendes, eksempelvis ethylen-glycol (99 %). Dette giver en meget veldefineret radius af springet.
3. At der ved springet opstår separation.
4. At væskehøjderne h_{in} og h_{ext} med god tilnærmelse er konstante.

På baggrund af ovenstående eksperimentelle observationer er der gjort tre rimelige teoretiske antagelser i den simple og udbyggede model for at forsimpler modelbeskrivelsen væsentligt. Disse antagelser er angivet i [40] s. 11, og er

1. At væsken er stationær.
2. At det hydrauliske spring er perfekt radiale symmetrisk.
3. At væsken kan betragtes som et grænselag.

Pga, opfylder alle tre teoretiske antagelser. Det hydrauliske spring er et stationært flow, hvis en viskos væske anvendes. Det er derfor en yderst rimelig approksimation at anvende Pga, der beskriver et stationært flow. Dette udtrykkes matematisk ved at $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ skal gælde, hvilket er en stor forsimpelse af Pga. At det hydrauliske spring kan betragtes som et perfekt radiale symmetrisk spring, er også en yderst rimelig approksimation når en viskos væske anvendes, da springet er perfekt symmetrisk cirkulært i type I. Dette beskrives teoretisk ved at udlede Pga i cylinderkoordinater. For at anvende Pga må antagelsen i punkt tre gøres. Det hydrauliske spring skal derfor kunne betragtes som et grænselag. Vi har set at for at et væskelag kan betragtes som et grænselag, skal det opfylde dels at det er et tyndt væskelag, og dels at væsken bevæger sig parallelt med glaspladen med en stor fart. Dette resulterer i store hastighedsgradienter i det tynde væskelag, hvilket Pga netop tager højde for. Dette opfylder det hydrauliske spring. Desuden er separation studeret mest i forbindelse med grænselag-teori [6], hvilket yderligere er et argument for at anvende Pga.

I afsnit 2.2 blev det udledt, hvilke bevarelsesætninger der gælder henover et shock. Henover springet er der både masse og impulsbevarelse, hvilket er givet ved ligningerne 2.44 og 2.45. Disse ligninger 2.44 og 2.45 gælder for et spring beskrevet i rektangulære koordinater. Det viser sig, at de ligninger der er bevaret henover springet for et problem i cylinderkoordinater, er analoge til 2.44 og 2.45.

Kapitel 3

Model type I

I dette kapitel præsenteres både den simple model og den udbyggede model. Præsentationen af modellerne er primært baseret på to artikler, CATS gruppen har fået publiceret om dem. Præsentationen af den simple model og den udbyggede model er primært baseret på artiklerne henholdsvis *Shallow-water approach to the circular hydraulic jump* [9] og *Averaging theory for the structure of hydraulic jumps and separation in laminar free-surface flows* [6]. Desuden er følgende sekundærlitteratur anvendt [3, 5, 7, 8, 26, 29, 33, 36, 39, 40, 44]. Udgangspunktet for begge modelbeskrivelser er Pga og de tilhørende grænsebetingelser præsenteret i sidste kapitel.

3.1 Den simple model

I artikel [9] redegøres for, at et estimat af radius r_s af springet ikke kan findes, hvis væsken i modelbeskrivelsen betragtes som non-viskos. Det blev derfor tolket som afgørende, at viskositet skal indgå i modelbeskrivelsen. Fra kapitel 2 side 17 fandt vi, at Pga i cylinderkoordinater var

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{dh}{dr} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2)$$

Grænsebetingelserne er

$$u = w = 0 \quad \text{for} \quad z = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{og} \quad p = p_0, \quad r \int_0^{h(r)} u(r, z) dz = q \quad \text{for} \quad z = h(r) \quad (3.4)$$

Hvor ligning 3.3 er no-slip betingelsen. Ligning 3.4 er henholdsvis den dynamiske og den kinematiske grænsebetingelse. Det skal bemærkes, at den kinematiske grænsebetingelse enten kan skrives som ligningen til højre i 3.4, hvor $q = \frac{Q}{2\pi}$ angiver den lokale flux og Q

angiver den totale flux, eller som ligning 2.30 side 18. Det er lidt omstændigt at vise denne ækvivalens, og dette undlades derfor, men kan ses i [7].

For at give et estimat af radius af springet, skal Pga sammem med grænsebetingelserne løses. Grænsebetingelserne 3.3 og 3.4 er imidlertid ikke komplette. For at de kan blive dette, skal en begyndelsesbetingelse specificeres. Begyndelsesbetingelsen angives at gælde fra en afstand $r = r_0 \approx 5$ mm, der er større end væskestrålens radius, der er mellem tre og fire millimeter. Ved mindre radier vil flowet blive markant påvirket af den vertikale bevægelse fra væskestrålen hvor approksimationen $u \gg w$ ikke gælder, og derved gælder Pga heller ikke. Der ses derfor i modelbeskrivelsen bort fra hvad, der sker før r_0 i flowet. Den antagede begyndelsesbetingelse er en hastighedsprofil, der er gældende fra $r = r_0$, givet ved

$$u(r_0, z) = u_0(z) \text{ hvor tykkelsen af det tynde væskelag her er } h(r_0) = h_0 \quad (3.5)$$

For at løse Pga med de tilhørende grænsebetingelser gøres to ting: For det første sættes Pga og grænsebetingelserne på dimensionsløs form, for det andet anvendes en midlings metode på Pga og grænsebetingelserne introduceret af fysikerne Karman & Pohlhausen, se afsnit 3.1.1. Pga og grænsebetingelserne sættes på dimensionsløs form ved at skalere u , w , r og z med:

$$u = \alpha \tilde{u}, \quad \alpha = q^{\frac{1}{8}} \nu^{\frac{1}{8}} g^{\frac{3}{8}} \quad (3.6)$$

$$w = \beta \tilde{w}, \quad \beta = q^{-\frac{1}{4}} \nu^{\frac{3}{4}} g^{\frac{1}{4}} \quad (3.7)$$

$$r = \gamma \tilde{r}, \quad \gamma = q^{\frac{5}{8}} \nu^{-\frac{5}{8}} g^{-\frac{1}{8}} \quad (3.8)$$

$$z = \delta \tilde{z}, \quad \delta = q^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{4}} \quad (3.9)$$

hvor \tilde{u} , \tilde{w} , \tilde{r} og \tilde{z} er dimensions løse. Til anvendelsen af skaleringerne 3.6, 3.7, 3.8 og 3.9 skal knyttes to kommentarer. Den første er, at eksponenterne i skaleringerne er entydigt bestemt hvis Pga skal sættes på dimensionsløs form. Den anden kommentar er, at skaleringerne afhænger af fluxen q , viskositeten ν og tyngdeaccelerationen g ud fra den betragtning, at disse tre fysiske størrelser er vigtige for springets opståen og dets radius. Springets radius afhænger kraftigt af fluxen, idet en stor flux resulterer i en stor radius af springet modsat en mindre flux, der resulterer i en mindre radius. En stor viskositet resulterer i en lille radius af springet modsat en lille viskositet, der resulterer i en større radius for samme flux. Årsagen er, at den indre gnidning i en meget viskos væske, er større end den er i en mindre viskos væske. Da væskelaget befinder sig i tyngdefeltet må tyngdeaccelerationen naturligvis indgå i skaleringen.

Ved at indsætte 3.6, 3.7, 3.8 og 3.9 i Pga fås

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{dh}{dr} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.11)$$

Skaleringerne indsættes ligeledes i grænsebetingelserne, hvilket giver

$$u = w = 0 \quad \text{for} \quad z = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad r \int_0^{h(r)} u dz = 1, \quad \text{for} \quad z = h(r) \quad (3.13)$$

Skaleringen af begyndelsesbetingelsen giver

$$u(r_0, z) = \frac{u_0(z)}{\alpha} \quad (3.14)$$

Hvor tegnet \sim (tilde) er udeladt i ligningerne, selvom de stadig er på dimensionsløs form. Grænsebetingelserne afhænger nu kun af en parameter $\Lambda = \frac{u_0}{\alpha}$. Trykket $p = p_0$ indgår ikke i skaleringen.

3.1.1 Midlings metode af Karman & Pohlhausen

Selvom Pga er en stor forenkling af Navier-Stokes ligning, er den stadig så matematisk vanskelig, at yderligere forenklinger er nødvendige for, at den er mulig at løse. Generelt er det kun meget få problemer, der kan løses eksakt. Fysikerne Karman & Pohlhausen har imidlertid udviklet en midlings metode, der forenkler Pga yderligere, så en løsning er tilgængelig. Denne metode består i at tilfredsstille Pga som en midling over væskepartiklernes grænsebetingelser henover grænselaget istedet for at prøve at tilfredsstille grænsebetingelserne for hver enkelt væskepartikel. Denne midling foretages henover grænselaget der har tykkelsen $\delta = h$. Metoden består konkret i dels at integrere Pga med hensyn til den vertikale retning z fra $z = 0$ til $z = h(r)$, og dels antage at hastighedsprofilen er approksimeret som et lavere ordens polynomium [33] kap. 10. Udledningen af den simple model er foretaget på samme måde som ovenstående med den undtagelse, at den antagede hastighedsprofil ikke er et lavere ordens polynomium. I gennemgangen af den udbyggede model skal vi se, at ved at antage ovenstående lavere ordens polynomium kan separationen ved springet beskrives.

I forbindelse med integrationen af Pga anvendes en identitet, der eliminerer den vertikale hastighed w . Identiteten er givet ved

$$\int_0^{h(r)} w \frac{\partial u}{\partial z} dz = \frac{dh}{dr} u^2 \Big|_{z=h(r)} + \int_0^{h(r)} u \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) dz \quad (3.15)$$

For at vise identiteten 3.15, vises at venstresiden, er identisk med højresiden. Til dette formål anvendes kontinuitetsligningen 3.11 og den kinematiske grænsebetingelse 2.30 side 18. Vi udfører partiel integration på venstre side af ligning 3.15, hvilket giver

$$\int_0^{h(r)} w \frac{\partial u}{\partial z} dz = [wu]_0^{h(r)} - \int_0^{h(r)} \frac{\partial w}{\partial z} u dz \quad (3.16)$$

$$= [wu]_0^{h(r)} - \int_0^{h(r)} u \left(-\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) dz \quad (3.17)$$

$$= h' u^2 \Big|_{z=h(r)} + \int_0^{h(r)} u \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) dz \quad (3.18)$$

Kontinuitetsligningen er anvendt i integralet i 3.17 for at eliminere w . I første led i 3.18 er den kinematiske grænsebetingelse 2.30 anvendt. Det skal yderligere bemærkes at u^2 er nul for $z = 0$ jævnfør no-slip betingelsen. Identiteten 3.15 er dermed vist.

Ligning 3.10 integreres over z fra $z = 0$ til $z = h(r)$ hvilket giver

$$\int_0^{h(r)} u \frac{\partial u}{\partial r} dz + \int_0^{h(r)} w \frac{\partial u}{\partial z} dz = \int_0^{h(r)} -h' dz + \int_0^{h(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \quad (3.19)$$

⇕

$$\int_0^{h(r)} u \frac{\partial u}{\partial r} dz + \left(h' u^2 \Big|_{z=h(r)} + \int_0^{h(r)} u \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) dz \right) = \quad (3.20)$$

$$\int_0^{h(r)} 2u \frac{\partial u}{\partial r} dz + h' u^2 \Big|_{z=h(r)} + \int_0^{h(r)} \frac{u^2}{r} dz = \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_0^{h(r)} u^2 dz = \int_0^{h(r)} -h' dz + \int_0^{h(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \quad (3.22)$$

På venstre side af ligning 3.19 er identiteten 3.15 anvendt, hvilket giver 3.20. Desuden kan 3.21 reduceres til venstre siden af 3.22, hvor det skal bemærkes, at det er et integrale med den variable grænse $h(r)$. Den midlede Pga giver

$$\frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial r} rh \left(\frac{1}{h} \int_0^{h(r)} u^2 dz \right) = \frac{1}{h} \int_0^{h(r)} -h' dz + \frac{1}{h} \int_0^{h(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \quad (3.23)$$

⇕

$$\frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial r} rh (\bar{u}^2) = -h' - \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (3.24)$$

hvor middelværdien af en funktion $f(r, z)$ er $\bar{f}(r) = \frac{1}{h} \int_0^h f(r, z) dz$. Desuden gælder, at øvre grænse $z = h(r)$ indsat i sidste led i 3.24 er nul jævnfør den dynamiske grænsebetingelse. Sidst skal bemærkes at Pga som før bestod af 3.10 og 3.11 nu er reduceret til een ligning 3.24, idet kontinuitetsligningen indgår i 3.24.

En nyttig relation der senere anvendes er, at midle den kinematiske grænsebetingelse, fås en sammenhæng mellem middelhastighed, højde og radius. Midlingen giver

$$rh \left(\frac{1}{h} \int_0^{h(r)} u dz \right) = 1 \quad (3.25)$$

⇕

$$rhv = 1 \quad (3.26)$$

Hvor $v = v(r)$ angiver middelhastigheden.

Indtil nu er P_{ga} og grænsebetingelserne sat på dimensionsløs form. Desuden har anvendelsen af Karman og Pohlhausen midlings metode på P_{ga} resulteret i ligningen 3.24, der er den ligning, der ønskes løst. Imidlertid indeholder den stadig en del vanskeligheder, for at den kan løses. Der må derfor gøres endnu nogle approksimationer, og disse er følgende

$$\bar{u}^2 = av^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = b \frac{v}{h} \quad (3.27)$$

Det er svært at afgøre, om disse approksimationer er gode eller dårlige, men de er nødvendige for at komme videre i problemløsningen. Derimod kan man godt give et kvalitativt bud på, hvad \bar{u}^2 og $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$ er proportionale med. Når den kvadrerede radiale hastighed u midles, er den pr. definition lig med den kvadrerede middelværdi ganget med en konstant a , der indeholder information om den valgte hastighedsprofil for u . Approksimationen af $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$ er lidt vanskeligere at give et bud på, men en grov approksimation er at angive størrelsesordenen af udtrykket, og da vi anvender en middelteori, er det nærliggende blot at angive hastigheden u som middelhastigheden v ganget med konstanten b , der indeholder information om den valgte hastighedsprofil. Den vertikale koordiant z kan maksimalt blive h , der er højden af grænselaget.

Vi kan nu indsætte approksimationerne 3.27 i 3.24. Desuden anvendes den midlede kinematiske grænsebetingelse 3.26, hvilket reducerer 3.24 til

$$av \frac{dv}{dr} = -\frac{dh}{dr} - b \frac{v}{h^2} \quad (3.28)$$

hvor konstanterne a og b er af størrelsesorden 1. Ligning 3.28 reskaleres så konstanterne a og b elimineres. Det skal her bemærkes, at den kvalitative opførsel af ligning 3.28 ikke ændres ved at disse konstanter a og b elimineres ved reskaleringen [40] s. 13. Skaleringen er $v \rightarrow a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} v$, $r \rightarrow a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{8}} r$ og $h \rightarrow b^{\frac{1}{4}} h$. Når skaleringen indsættes i ligning 3.28 fås

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{dh}{dr} - \frac{v}{h^2} \quad (3.29)$$

Ved anvendelse af den midlede kinematiske grænsebetingelse 3.26 kan $\frac{dh}{dr}$ i 3.29 udregnes, og derved fås en sædvanlig differentiaalligning af første orden der er

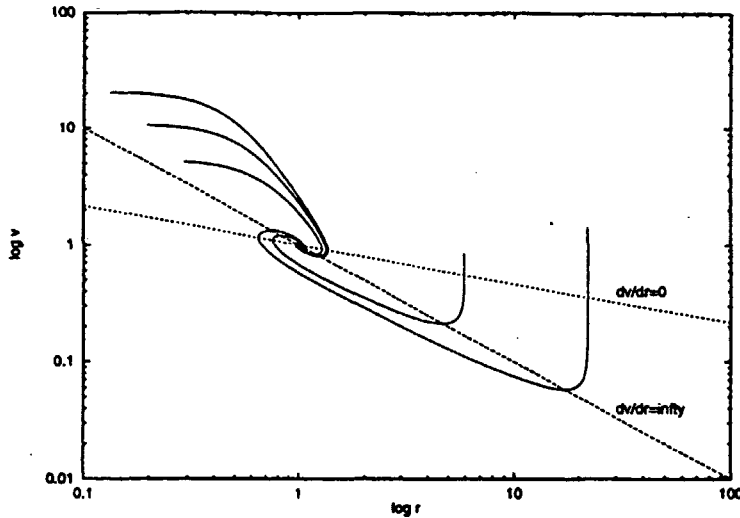
$$v \frac{dv}{dr} = -\left(-\frac{1}{r^2 v} - \frac{1}{v^2 r} \frac{dv}{dr} \right) - v v^2 r^2 \quad (3.30)$$

⇕

$$\frac{dv}{dr} \left(v - \frac{1}{v^2 r} \right) = \frac{1}{v r^2} - v^3 r^2 \quad (3.31)$$

Det centrale er, som nævnt tidligere, at give et estimat af radius af springet. I princippet skal ligning 3.31 blot løses eksakt under antagelse af, at de approksimationer der er gjort

undervejs er acceptable. Det er imidlertid kun muligt at løse ligning 3.31 numerisk, hvilket giver følgende typiske integralkurver (løsningskurver) på figur 3.1, der er de fuldt optrukne kurver. På figur 3.1 ses, at integralkurverne snor sig ind mod punktet $(r, v) = (1, 1)$, der



Figur 3.1 De fuldt optrukne kurver der ses på figur 3.1 er typiske integralkurver (løsningskurver), der fås når ligning 3.31 løses numerisk. De to prikkede linier findes når henholdsvis $\frac{dv}{dr} = 0$ og $\frac{dv}{dr} = \infty$ i ligning 3.31. Figur taget fra [39] s. 26.

er et stabilt *fokal punkt*. Dette punkt er skæringen mellem to kurver, der på figur 3.1 er angivet som de to prikkede linier. Disse kurver findes ved at løse 3.31 når $\frac{dv}{dr} = 0$ og $\frac{dv}{dr} = \infty$. Når $\frac{dv}{dr} = 0$ fås

$$\frac{1}{vr^2} - v^3 r^2 = 0 \quad (3.32)$$

⇕

$$v = r^{-1} \quad (3.33)$$

Når $\frac{dv}{dr} = \infty$ fås

$$v - \frac{1}{v^2 r} = 0 \quad (3.34)$$

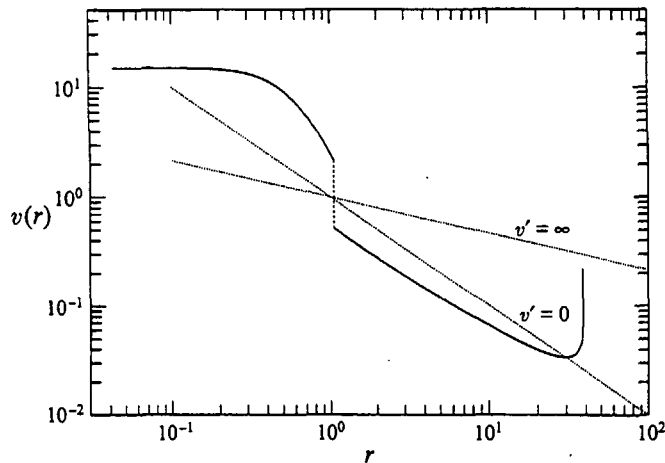
⇕

$$v = r^{-\frac{1}{3}} \quad (3.35)$$

På figur 3.1 ses, at for store værdier af r stiger hastigheden voldsomt. Dette strider umiddelbart, mod hvad der observeres. Når de eksperimentelle data betragtes, gælder at for store værdier af r dvs. efter springet er hastigheden af væskepartiklerne små. Det vises i [9], at ligning 3.31 imidlertid ikke har nogle løsninger for store værdier af r . Ligningen bryder sammen når $r = r_*$, hvor ligningen er singular, og herefter ikke længere er defineret. I artiklen vises, at det at ligning 3.31 ikke har løsninger efter r_* , ikke er en konsekvens af

den foretagne midling af Pga. Det vises desuden, at før $r = r_*$ er højden h af væskelaget stort set konstant, indtil $r = r_*$ hvor $h \rightarrow 0$. Ved at anvende ligning 3.26 ses, at når h nærmer sig nul bliver middelhastigheden v vilkårligt stor.

I kapitel 1 så vi, at det cirkulære hydrauliske spring fremkommer ved at en væskestråle rammer en horisontal plade, og ved en karakteristisk radius r_s dannes springet. Efter springet bevæger væsken sig med en langsommere hastighed end før springet for til sidst at falde ud over den ydre kant, og væsken recirkuleres herefter. I artikel [9] tolkes singulariteten der opstår ved $r = r_*$ som den ydre kant, hvor væsken falder udover og recirkuleres. Singulariteten på figur 3.1 er således angivet for værdien af r , hvor hastigheden stiger voldsomt. Når denne tolkning gøres kan den voldsomme stigning af væskens hastighed således forstås, idet når væsken falder ud over den ydre kant, accelereres den af tyndefeltet. Ligning 3.31 er således veldefineret for $r_* \gg r \gg 1$, hvor højden h af væskelaget i dette område stort set er konstant, hvilket er hvad der forventes, se figur 1.8 side 7. Løsningerne i området $r \ll 1$ benævnes de indre løsninger, og for $r \gg 1$ benævnes de ydre løsninger. Det virker nu fornuftigt at bestemme positionen af springet ved at forbinde de indre og ydre løsninger med et shock som angivet på figur 3.2. De to sider af shocket forbindes ved antagelsen om at ligningerne 2.44 og 2.45 for henholdsvis masse og impulsbevarelse henover det gælder. Dette shock tolkes da som springet. Det ses på figur 3.1, at uafhængig

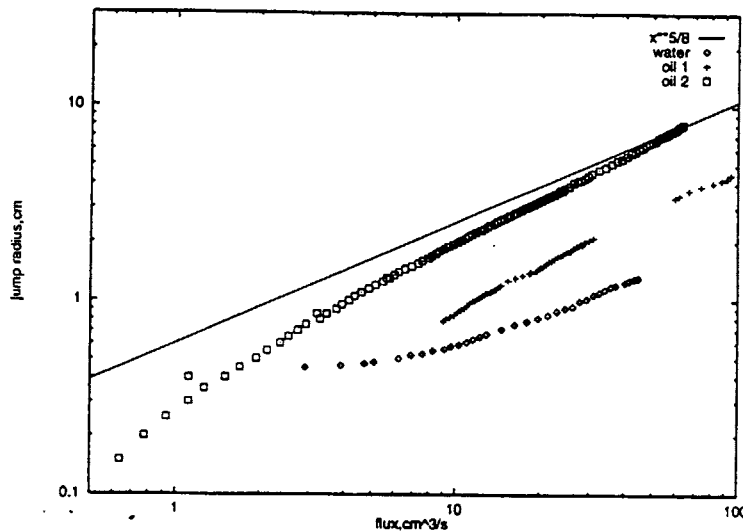


Figur 3.2 På figuren ses, at løsningerne for $r \ll 1$ og $r \gg 1$ er forbundet med et shock. Springet tolkes som et shock, der er markeret som den stiplede linie. Springet går ikke igennem fokalt punktet, selvom det ser sådan ud. Figur taget fra [9].

af de valgte (tre) begyndelsesbetingelser opstår springet altid tæt på $\tilde{r} = 1$, og springet vil da skalere som 3.8, hvilket giver

$$r_s \sim q^{\frac{5}{8}} \nu^{-\frac{3}{8}} g^{-\frac{1}{8}} \quad (3.36)$$

Det skal, inden præsentationen af den udbyggede model, vises hvordan den simple model stemmer overens med eksperimentelle data. På figur 3.3 ses modelresultaterne og målinger foretaget med tre forskellige væsker med hver en forskellig viskositet. Den rette linie angiver modelresultatet dvs. $r_s \sim q^{5/8}$. På figuren ses, at radius af springet er proportional med fluxen som angivet i 3.36, men at de eksperimentelle data viser at eksponenten skal være større end $5/8 = 0.625$ som angivet i 3.36. På figur 3.4 ses højdeprofilen af det hy-



Figur 3.3 På figur 3.3 ses målingerne af, hvordan radius afhænger af variationen af fluxen. Der er foretaget målinger med tre forskellige væsker og dermed forskellig viskositet. Den rette linie er model resultatet dvs. $r_s \sim q^{5/8}$. Figur taget fra [39] s. 27.

drauliske spring, som den simple model 3.31 kan reproducere. Det ses, at selvom der ikke er nogen glat løsning fra små værdier af r til store værdier af r , stemmer højdeprofilens form kvalitativt med den observerede.

3.2 Den udbyggede model

Det er en kendsgerning at der på bunden $z = 0$ er separation ved springet. I artiklen *The circular hydraulic jump* [12] redegøres der for, at det hydrauliske spring separerer, og i det eksperimentelle arbejde som kan læses i *Hvirvler i det Cirkulære Hydrauliske Spring* [26], er der foretaget målinger, som også påviser dette. Det er derfor klart, at hvis model type I skal kunne beskrive det cirkulære hydrauliske spring tilfredsstillende, må den derfor kunne beskrive strømningsmønstret i væsken og ikke mindst separationen. Desuden skal modellen kunne reproducere en mere præcis højdeprofil, end den simple model på figur 3.4 kunne frembringe. Den simple model modificeres derfor, så model type I kan beskrive flere karakteristika af det hydrauliske spring.

3.2.1 Beskrivelse af separation i det hydrauliske spring

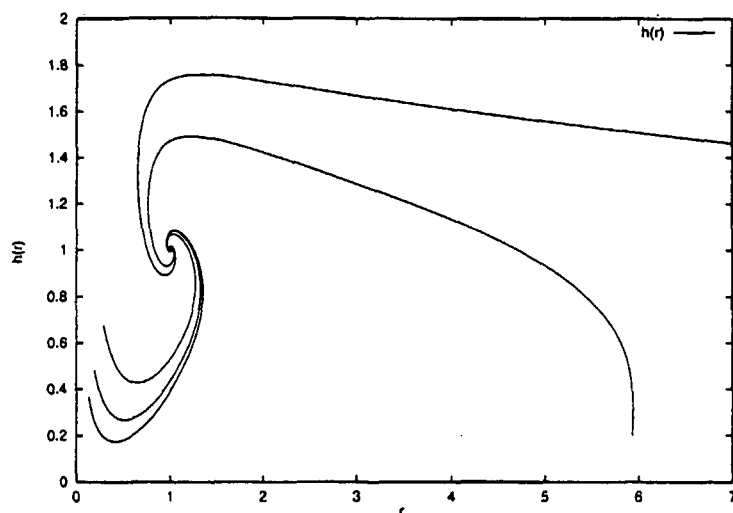
Ligningerne der anvendes i den udbyggede modelbeskrivelse, er de samme, som blev anvendt i den simple modelbeskrivelse. Der tages derfor udgangspunkt i den midlede P_{ga} givet ved 3.23 på side 28. Grænsebetingelserne er stadig no-slip for $z = 0$, den dynamiske og kinematiske grænsebetingelse gældende på den fri væskeoverflade $z = h(r)$ givet ved ligningerne 3.12 og 3.13 på side 27. Det nye der gøres i den udbyggede modelbeskrivelse, er at antage en anden hastighedsprofil, end den der blev antaget som begyndelsesbetingelse i den simple modelbeskrivelse der var 3.5. Den nye begyndelsesbetingelse der nu antages at gælde, er en hastighedsprofil hvis koefficienter afhænger af r .

For at kunne beskrive separationen ved springet, og få løsninger der ikke er singulære, må et væsentligt problem først overvindes, idet P_{ga} generelt er singulær ved et separationspunkt og derfor kan ligningerne 3.10 og 3.11 ikke integreres henover springet. Det har imidlertid vist sig, at denne singularitet kan undgås ved anvendelse af Karman & Pohlhausen's midlingsmetode, og antage at hastighedsprofilen kan beskrives ved et lavere ordens polynomium som angivet i afsnit 3.1.1. Derved kan strømningsmønsteret ved springet beskrives [5, 6, 39].

Hastighedsprofilen antages igen at gælde fra r_0 , og er givet ved et tredjegradspolynomium. Profilen ser således ud

$$u(r, z) = v(r) (a(r)\eta + b(r)\eta^2 + c(r)\eta^3) \quad (3.37)$$

Hvor $\eta = z/h(r)$, og hvor $v(r)$ er middelhastigheden. Det virker som en rimelig approksimation at tilnærme formen af hastighedsprofilen, som den ses på figur 1.10 side 10 med et lavere ordens polynomium.



Figur 3.4 På figur 3.4 ses, hvilken højdeprofil den simple model 3.31 kan reproducere. Figuret taget fra [39] s. 28.

Det ses at no-slip betingelsen umiddelbart er opfyldt da $z = 0$ giver $u = 0$. Vi husker, at den vertikale hastighed w ikke indgår i 3.23, og betragtes derfor ikke yderligere. Koefficienterne a , b og c i den antagede hastighedsprofil bestemmes ved at anvende den dynamiske og den kinematiske grænsebetingelse, hvilket giver følgende ligninger

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h(r)} = \frac{v(r)}{h} (a + 2b + 3c) = 0 \quad (3.38)$$

⇕

$$a + 2b + 3c = 0 \quad (3.39)$$

og

$$r \int_0^{h(r)} u(r, z) dz = r \int_0^{h(r)} v(r) \left(a \frac{z}{h} + b \frac{z^2}{h^2} + c \frac{z^3}{h^3} \right) dz = 1 \quad (3.40)$$

⇕

$$rv(r)h \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c \right) = 1 \quad (3.41)$$

⇕

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = 1 \quad (3.42)$$

Hvor 3.26 er anvendt i 3.41. Det ses at 3.39 og 3.42 er et system af to ligninger med tre ubekendte. Koefficienterne a , b og c udtrykkes da i forhold til en parameter $\lambda(r)$, der beskriver ændringen af hastighedsprofilen [39] s. 28. Værdierne for a , b og c kan nu bestemmes ud fra ligning 3.39 og 3.42 hvor parameteren λ indgår. Værdierne er

$$a = (\lambda + 3), \quad b = -(5\lambda + 3)/2 \quad \text{og} \quad c = 4\lambda/3 \quad (3.43)$$

Det skal her bemærkes, at c kunne vælges anderledes, men er valgt så a giver en "pæn" værdi. Det ses at hastighedsprofilen bliver parabolisk hvis $\lambda = 0$ da $c = 0$. Separation beskrives iforhold til et separationspunkt. Et separationspunkt er defineret, som grænsen mellem henholdsvis den væske der bevæger sig med og mod hovedstrømmen i nærheden af bunden $z = 0$, eller

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.44)$$

Ved eks. at betragte figur 1.2 side 2 ses, at når væsken bevæger sig med hovedstrømmen dvs. til venstre for separationslinien gælder betingelsen at $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} > 0$ og når væsken bevæger sig modsat hovedstrømmen dvs. til højre for separationslinien, gælder betingelsen at $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} < 0$. I separationspunktet S gælder at $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$.

Ved at udregne 3.44 fås at separation med den antagede hastighedsprofil 3.37 opstår når $a = 0$, hvilket er identisk med at $\lambda = -3$. Ved at anvende den antagede hastighedsprofil 3.37 og 3.43 omskrives den midlede Pga igen til en sædvanlig differentialligning af

første orden. Den midlede Pga var

$$\frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial r} rh \left(\frac{1}{h} \int_0^{h(r)} u^2 dz \right) = \frac{1}{h} \int_0^{h(r)} -h' dz + \frac{1}{h} \int_0^{h(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \quad (3.45)$$

⇕

$$\frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial r} rh \left(\frac{1}{h} \int_0^{h(r)} u^2 dz \right) = -h' + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h(r)} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) \quad (3.46)$$

⇕

$$\frac{1}{rh} \left(\frac{\partial}{\partial r} rh (F(\lambda)v^2) \right) = -h' + \frac{1}{h} \left(0 - \frac{v}{h} a \right) \quad (3.47)$$

Hvor $F(\lambda) = (\int_0^{h(r)} u^2 dz)/(hv^2) = 6/5 - \lambda/15 + \lambda^2/105$ er indsat på venstre side af 3.47 og på højre side er $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h(r)} = 0$ og $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{v}{h} a$. Ved at anvende $v = 1/hr$ og $a = (\lambda + 3)$, kan ligning 3.47 endelig skrives som

$$\frac{1}{rh} \left(F(\lambda) \frac{1}{rh} \right)' = -h' - (\lambda + 3) \frac{1}{rh^3} \quad (3.48)$$

I ligning 3.48 indgår to ubekendte $\lambda(r)$ og $h(r)$. Der mangles derfor yderligere en ligning til bestemmelse af de to ubekendte. I Karman & Pohlhausen midlingsteorien findes denne ligning ved at evaluere ligning 3.10 for $z = 0$ [5, 6]. Når $z = 0$ gælder no-slip betingelserne. Dette reducerer ligning 3.10 til

$$0 = -h' + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \quad (3.49)$$

Sidste led i 3.49 udregnes ved at differentiere hastighedsprofilen 3.37 og dernæst sætte $z = 0$ og anvende $v = 1/rh$, hvilket giver

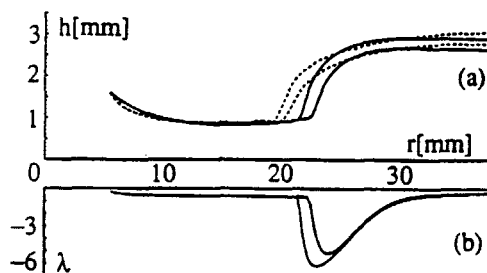
$$h' = - (5\lambda + 3) \frac{1}{rh^3} \quad (3.50)$$

Inden præsentationen af den udbyggede models resultater der er givet ved ligningerne 3.48 og 3.50, skal kort redegøres for, hvilken sammenhæng disse ligninger giver. Det bemærkes først, at h' der indgår i den midlede Pga 3.48, er trykgradienten, da trykket er antaget hydrostatisk. Når trykket antages hydrostatisk, kan det forstås, hvad der observeres. Væskepartiklernes hastigheder før springet er større end efter springet, og årsagen er at de bremses ned på grund af væskens indre gnidning (viskositet), hvilket således ændrer hastighedsprofilen. Sammenhængen mellem ændringen af hastighedsprofilen og ændringen af trykket giver ligning 3.50.

De to koblede differentiaalligninger 3.48 og 3.50 for $h(r)$ og $\lambda(r)$ er netop det ligningssystem, der ønskes løst. Det kan løses ved, at specificere to grænsebetingelser for forskellige værdier af r der er

$$h(r)|_{r=r_1} = h_1, \quad h(r)|_{r=r_2} = h_2 \quad (3.51)$$

Grænsebetingelserne 3.51 er eksperimentelle værdier taget fra [8] hvor $r_1 < r_2$. Resultatet af løsning af ligningssystemet 3.48 og 3.50 kan ses på figur 3.5. På figur 3.5(a) ses model-

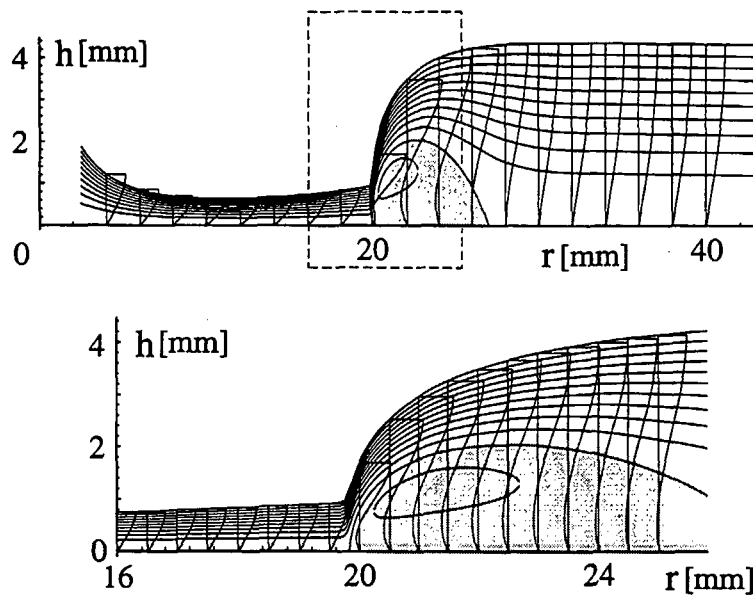


Figur 3.5 Figur(a) viser henholdsvis den målte højdeprofil de stiplede kurver, og den udbyggede models højdeprofiler der er de fuldt optrukne kurver. Væsken der er anvendt, er ethylen-glycol 50%, $Q = 27$ ml/s og $\nu = 7.6 \cdot 10^{-6}$ m²/s. På figur(b) ses de beregnede værdier for λ , der viser, at hastighedsprofilen ved springet drastisk ændres. Figur taget fra [6].

resultater kontra eksperimentelle data. De fuldt optrukne kurver er modelresultaterne, og de stiplede kurver er eksperimentelle data. Af figuren fremgår at den udbyggede model antages at gælde fra $r_0 \approx 5$ mm. Det ses, at den udbyggede model kan reproducere de kvalitative træk ved det hydrauliske spring, da radius af springet skrumper ind når den ydre væskehøjde øges, hvilket er i overensstemmelse med eksperimentelle data. Det ses, at selvom h_{ext} øges, forbliver h_{in} uforandret, hvilket ligeledes stemmer med den målte højdeprofil se figur 1.8 side 7. På figur(a) ses desuden, at modellen kan reproducere den voldsomme stigning af væskelaget henover springet, hvilket også er i overensstemmelse med den målte højdeprofil af springet. Det ses dog, at den udbyggede model forudsiger, at springet opstår ved større værdier af r end observeret. Modellen forudsiger, som angivet på figuren, at springet opstår ved $r_s = 24$ mm hvor de målte data viser, at det opstår ved $r_s \approx 20$ mm. På figur 3.5(b) ses dels, at for $\lambda < -3$ opstår et separationsområde lige bagved springet og, at hastighedsprofilen ændres voldsomt ved springet, hvilket er i god overensstemmelse med de eksperimentelle data.

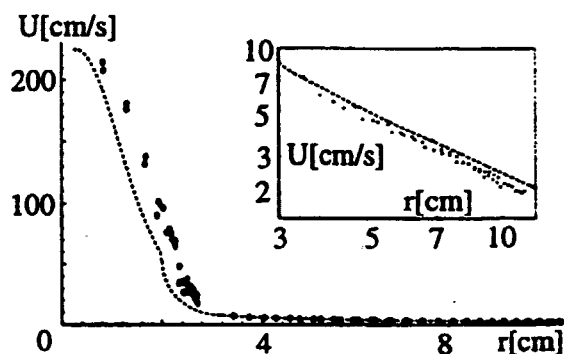
Strømningslinierne og hastighedsprofilerne bestemmes ud fra λ [6], hvilket giver en grafisk repræsentation som angivet på figur 3.6. På figur 3.6 er angivet 19 hastighedsprofiler for forskellige værdier af r . På hastighedsprofilerne i det gråtonede område ses, at der er separation (back-flow) tæt på bunden lige efter springet. **Dette er separationsområdet.** Modellen reproducerer således i god overensstemmelse med eksperimentelle data, at der opstår separation (back-flow) ved springet. Figuren viser desuden, hvordan strømningslinierne før, henover og efter springet er.

På figur 3.7 er angivet målte data af overfladehastigheder $U(r) = u(r, h(r))$ og modellens beregnede resultater. Modellens resultater er angivet som den stiplede kurve og de målte data er angivet som prikker. Modellen kan reproducere som de målte data viser, at før springet falder væskepartiklernes hastighed næsten lineært, men ved springet falder



Figur 3.6 Den nederste figur er en forstørrelse af det stiplede kvadrat, der ses på den øvre figur. På den øvre figur ses 19 hastighedsprofiler for 19 forskellige værdier af r , hvoraf de 8 hastighedsprofiler er angivet før springet. På figuren er separationsområdet angivet som gråtonet og forstørret på nedre figur. Det ses på hastighedsprofilerne i separationsområdet, at der er back-flow. Figuren viser desuden strøminigslinierne før, henover og efter springet. Figur taget fra [39] s. 32.

hastigheden meget drastisk. Efter springet er partikelhastigheden svagt aftagende hvilket også kan ses ud fra $U(r) = 1/hr \sim 1/r$. Dog er modellens beregnede overfladehastigheder generelt mindre i forhold til de målte for samme værdier af r .



Figur 3.7 Den prikkede kontinuerte linie er modeldata, og prikkerne er målte data. Væsken der er anvendt er en 80% ethylen-glycon, $Q = 34$ ml/s, og $\nu = 14.4 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Figur taget fra [6].

3.3 Opsamling

I kapitlet blev der taget udgangspunkt i Pga og grænsebetingelserne, der blev udledt i sidste kapitel. Pga blev sat på dimensionsløs form ved de angivne skaleringer side 26. I disse skaleringer indgik fysiske størrelser der er vigtige for springets opståen. Selvom Pga er en kraftig forsimpning af Navier-Stokes ligning, er den stadig for kompliceret hvorfor, en yderligere forenkling var nødvendig. Forenklingen bestod i at anvende en midlingsmetode oprindeligt introduceret af fysikerne Karman & Pohlhausen. Metoden bestod i, at Pga blev midlet henover grænselaget istedet for, at grænsebetingelserne skulle tilfredstilles for hver individuel væskepartikel. Desuden blev det antaget, at hastighedsprofilen kunne approksimeres med et lavere ordens polynomium. Midlingen af den dimensionsløse Pga gav ligning 3.23, side 28. Udgangspunktet for både den simple og den udbyggede model var ligning 3.23.

Den simple models begyndelsesbetingelse var, at antage hastighedsprofilen ligning 3.5, gældende fra $r_0 \approx 5$ mm, der var større end strålens radius, der typisk er mellem tre og fire millimeter. Modellen gav efter yderligere approksimationer ligning 3.31, side 29. Løsningen af ligning 3.31 gav løsningskurverne angivet på figur 3.1, side 30. Det fremgik af løsningskurverne, at der skete en pludselig stigning af hastigheden v for store værdier af r , hvorefter ligning 3.31 ikke længere var defineret. Ligningens løsning var i umiddelbar modstrid med de eksperimentelle data, der angav at for store r dvs. efter springet, var partikelhastigheden asymptotisk aftagende, hvilket kunne ses ved $v = 1/rh \sim 1/r$. Hvis den pludselige stigning af væskepartiklernes hastighed blev tolket som der, hvor væsken faldt ud over den ydre kant og accelereret, kunne løsningskurverne forstås. De indre og

ydre løsninger blev adskilt af fokuspunktet. Ved at forbinde indre og ydre løsninger med et shock kunne et estimat for radius af springet findes givet ved 3.36. De eksperimentelle data viste at springet var proportionalt med fluxen som angivet i 3.36, men at eksponenten skulle have en større værdi end angivet i 3.36.

Den simple model kunne ikke beskrive separation, der opstår ved springet, så derfor skulle den udbygges. Den udbyggede models begyndelsesbetingelse var, at antage at hastighedsprofilen kunne approksimeres med et lavere ordens polynomium, antaget gældende fra $r_0 \approx 5$ mm. Modellens ligninger var givet ved 3.48 og 3.50. Løsningen af disse ligninger gav resultater, der generelt var i overensstemmelse med de eksperimentelle data. Den udbyggede model kan reproducere en højdeprofil som den målte, og at der opstår separation ved springet. Dog gav modelresultaterne en større radius af springet end observeret, og de beregnede overfladehastigheder gav ligeledes for samme r mindre værdier end observeret.

Kapitel 4

Den eksperimentelle opstilling

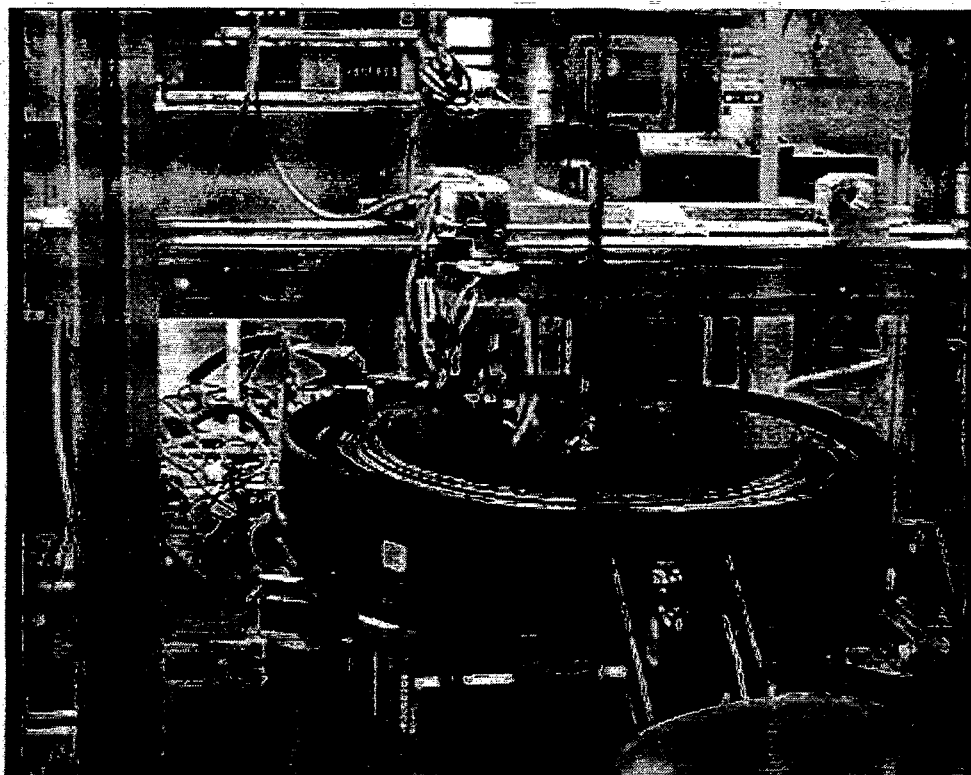
Den eksperimentelle opstilling, der er anvendt i dette arbejde, er specielt designet til frembringelse af det hydrauliske spring. Den består som nævnt i kapitel 1, basalt set af en cirkulær glasplade, en dyse, et væskesystem og et skanningssystem hvor væskesystemet har til formål, at recirkulere væsken og skanningssystemet anvendes til måling af det hydrauliske spring's højdeprofil.

4.1 Den cirkulære konstruktion

På figur 4.1 ses den cirkulære konstruktion. Den cirkulære konstruktion består af en cirkulær glasplade, den ydre kant, et rendesystem, en aluminiumskappe og en slidske. Glaspladen er 36 cm i diameter, som er omsluttet af den ydre kant. Den ydre kant kan hæves og sænkes vertikalt i forhold til glaspladen via en motor, der er computerstyret. Motoren er placeret under den cirkulære konstruktion, og kraftoverførslen fra motoren til den ydre kant sker via en drivrem. Aluminiumskappen er 50 cm i diameter, og omslutter den ydre kant og glaspladen. Imellem aluminiumskappen og den ydre kant anes et mellemrum, der er renden hvor væsken opsamles, når den flyder over den ydre kant. Væsken løber videre ned ad slidsken og recirkuleres herefter. Den cirkulære konstruktion har tre magnetfødder som står på en massiv jernplade, så de kan fastlåses. Den massive jernplade hviler på fire cementfødder. Dette mindsker forstyrrelser fra omgivelserne, f.eks. når man går på gulvet. På figur 4.1 ses endvidere dysen placeret over glaspladens centrum. Desuden ses skanningssystemet, der ligeledes er computerstyret bestående af en nål monteret på en vogn, der bevæges radiale på skinner.

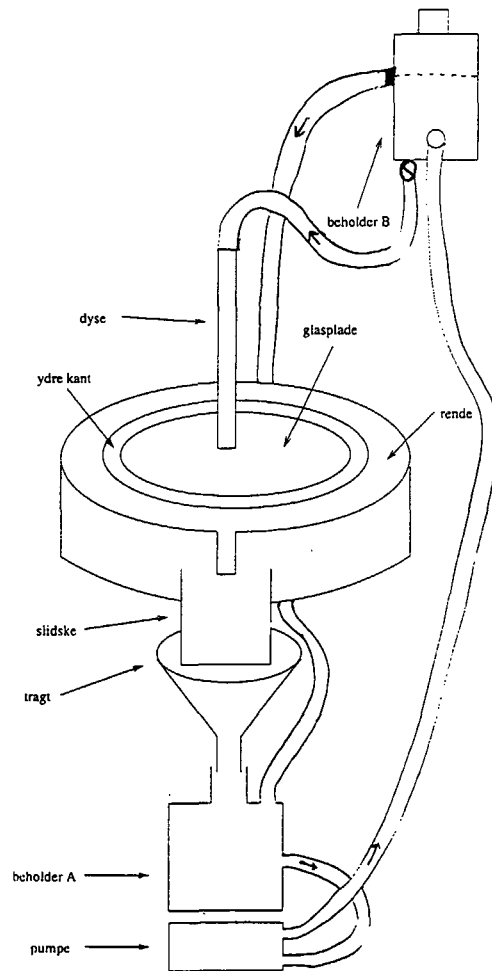
4.2 Væskesystemet

Væskesystemet består af to væskebeholdere, en tragt og en pumpe, der pumper væsken rundt i systemet via gummislanger. De to væskebeholdere er placeret på en platform, der



Figur 4.1 På figuren ses den cirkulære konstruktion. Endvidere ses dels dysen placeret over glaspladens centrum og dels skanningssystemet.

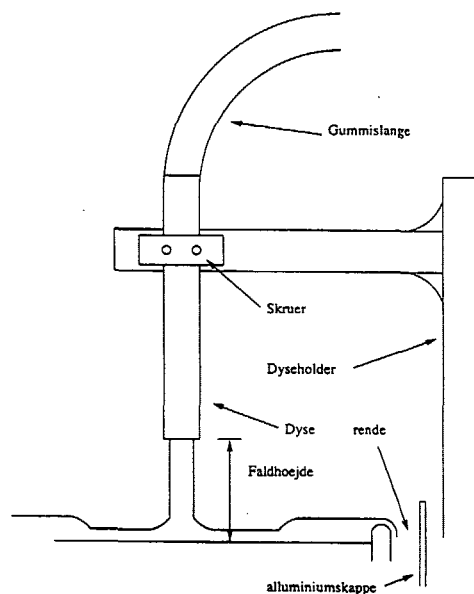
er isoleret fra, men placeret ved siden af den cirkulære konstruktion. I øverste beholder holdes væskeoverfladen i en konstant højde over glaspladen for at give et konstant tryk. Pumpen er placeret på gulvet, for at undgå, at den ikke kommer i direkte kontakt med den cirkulære konstruktion, da dette ellers ville give forstyrrelser af væsken på glaspladen. På figur 4.2 ses en skitse af væskesystemet. Væsken bliver via pumpen pumpet op i beholder *B*, og fra et udløb i beholderens bund løber væsken ud i en gummislange ind i dysen og ned på glaspladen. Væsken flyder over den ydre kant og ned i renden, hvor den via slidsken og tragten løber ned i beholder *A*. Herfra løber væsken ned til pumpen, og bliver herfra pumpet op i beholder *B* og så fremdeles. Det konstante tryk opretholdes i væskesystemet ved, at overskydende væske via et dræn fra beholder *B* løber ned til beholder *A*. Fluxen kan ændres ved at dreje på hanen placeret under beholder *B*.



Figur 4.2 Figuren viser en skitse af væskesystemet. Væsken bliver pumpet op til beholder *B* for herefter at løbe ind i dysen via gummislangen og ned på glaspladen. Den overskydende væske løber ned ad slidsken, og recirkuleres herefter.

4.2.1 Dysen

På figur 4.3 ses, at dysen er fastspændt af en dyseholder. Faldhøjden reguleres ved at løsne skruerne. Aflæsningsusikkerheden er ± 0.1 cm. Dyseholderen er heller ikke i direkte kontakt med den cirkulære konstruktion. For at undgå turbulens i væsken når den rammer glaspladen, er dysen 46 cm lang. Dysen er cirkulær og blankpoleret med en ydre diameter på 1.3 cm og en indre diameter på 1.1 cm. For at væskestrålen rammer lodret på glaspladen, så væsken spredes symmetrisk radiale ud langs pladen, skal dysen justeres, så den er lodret over glaspladen. Metoden der anvendes er enkel og præcis. En møtrik hænges i en snor ned langs dysen, og herefter justeres dysen til den er helt lodret. Præcisionen af denne metode er $\pm 0.2^\circ$.



Figur 4.3 På figuren ses en skitse af dyseholderen, der holder dysen fast. Faldhøjden kan reguleres ved at løsne skruerne.

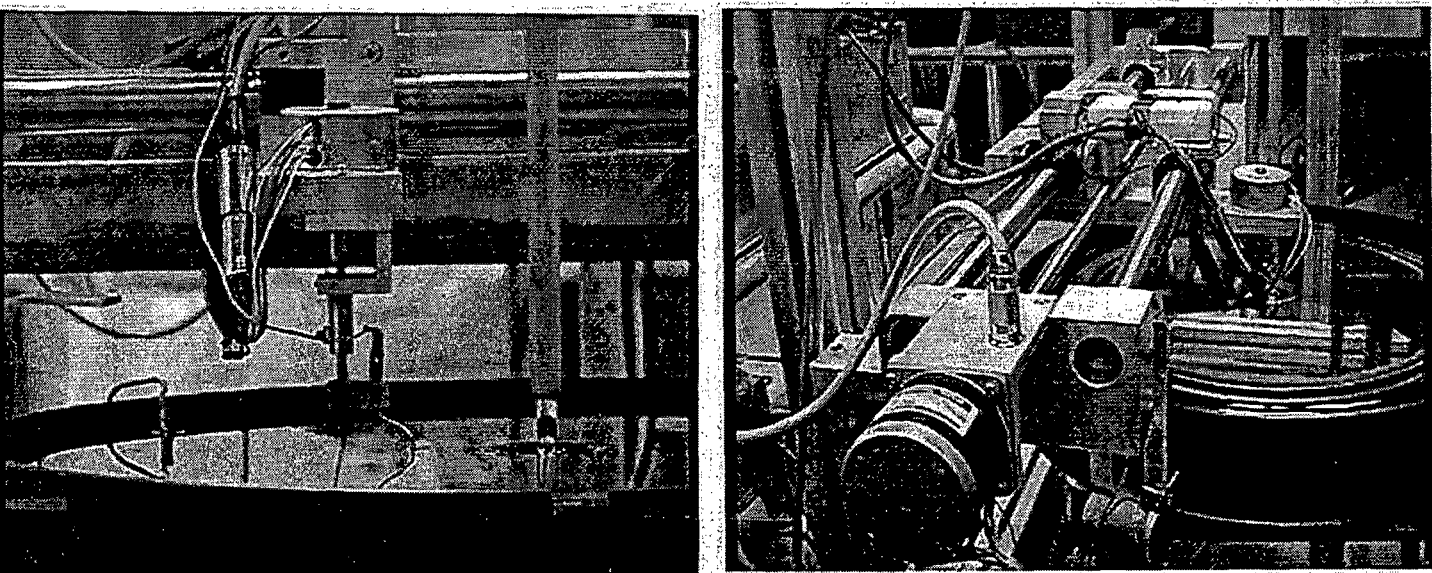
4.3 Skanningssystem til måling af højdeprofiler

Skanningssystemet består af en nål, der sidder på et vognsystem, som kører på skinner, og er computerstyret. I kapitel 1 side 7 sås et eksempel på en typisk højdeprofil af det hydrauliske spring. Forudsætningen for at måle en højdeprofil er, at nålen kan registrere væskeoverfladen. Dette gøres ved, at en mængde salt er opløst i væsken, så den ioniseres. Når nålen således rører væskeoverfladen, fås elektrisk kontakt og væskehøjden, og den radiale position registreres i et computerprogram¹. Væskehøjden måles i forhold til glas-

¹Dette program er udarbejdet af Kim Hansen, NBI.

pladen og den radiale position måles i forhold til glaspladens centrum. En typisk måling af højdeprofilen foregår, automatisk og starter mellem tre og fire millimeter fra væskestrålen, og slutter typisk 20 mm efter springet. Efter at en væskehøjde, og radial position er registreret, løftes nålen op, og vognen bevæges til næste målepunkt, hvor nålen sænkes til den rammer væskeoverfladen, så den nye radiale position og væskehøjde registreres, og så fremdeles til målingen er færdig. Højdeprofilen fås således ved at plote de registrerede væskehøjder og de radiale positioner. Programmet kan desuden anvendes manuelt, når måling af specifikke væskehøjder skal foretages. Dette er især praktisk ved måling på polygoner. Måleusikkerheden på væskehøjden er ± 0.03 mm. Når den ydre væskehøjde ønskes reguleret, gøres dette via computerprogrammet ved at regulere den ydre kant i forhold til glaspladen dvs. den ydre kanthøjde. Usikkerheden på den ydre kanthøjde er ± 0.025 mm.

På figur 4.4(a) ses vognen i midten af billedet. Nålen er på dette billede nede og røre væskeoverfladen. Til højre i billedet ses væsken, der forlader dysen og rammer glaspladen. På figur 4.4(b) ses, at vognen holdes på plads af tre cylindriske skinner. Vognen kører på de to yderste skinner. Den midterste skinner ene ende er fastmonteret en motor, der drejer denne skinne rundt, og vognen bevæges herved horisontalt. Motoren ses nederst til venstre på billedet.



Figur 4.4 På figur(a) ses, at nålen rammer væskeoverfladen. Væskehøjden og den radiale position registreres. Herefter løftes nålen, og vognen bevæges et stykke, til nålen igen sænkes, og rammer væskeoverfladen så højden, og positionen registreres og så fremdeles. På figur(b) ses skinneresystemet, som vognen kører på.

Væsken der er anvendt til alle målinger i denne afhandling, er ethylen-glycol 99%. Væskens viskositet var typisk mellem $(10 - 15) \cdot 10^{-6}$ m²/s dvs. mellem ti og femten gange

vands viskositet. Vi skal fremover angive ethylen-glycol's viskositet i forhold til vands viskositet. Ethylen-glycols densitet ved 20°C er $\rho \approx 1113 \text{ kg/m}^3$.

4.4 Måling af flux og viskositet

- En fluxmåling foregår ved at registrere den tid, det tager at fylde et millimeterbære fra slidsken med ethylen-glycol. Fluxen bestemmes ved $Q = \frac{\text{vskemngde}}{\text{tid}}$, og usikkerheden på en fluxmåling er $\pm 0.2 \text{ ml/s}$.
- Viskositeten måles ved at fylde et pipette glasrør med ethylen-glycol og sætte det lodret i et stativ og herefter lade en stålkugle falde ned i røret. To afmærkninger på pipetterørret angiver en afstand A . Viskositeten er udregnet i forhold til vands viskositet ved stuetemperatur og er bestemt ved $\nu = \frac{T_{eg}}{T_v} = k \cdot T_{eg}$, hvor T_{eg} og T_v angiver den tid det tager kuglen at falde den kendte afstand A i pipetterøret i henholdsvis ethylen-glycol og vand. Usikkerheden på en viskositets måling er ± 0.02 gange vands.

Kapitel 5

Måling af hastighedsprofiler med Laser Doppler Velocimetri (LDV)

I kapitel 2 og 3 har jeg dels udledt P_{ga} , som model type I bygger på, og dels præsenteret modellens resultater. Det fremgik her at model type I er antaget at gælde fra $r_0 \approx 5$ mm. I dette kapitel undersøges om, dette er en rimelig antagelse. Til dette formål anvendes måleteknikken Laser Doppler Velocimetri (LDV) og et apparat udviklet af det danske firma Dantec¹. Måleteknikken anvendes til at måle hastigheder i en væske. Vi skal i dette kapitel kun betragte et 1D LDV system, der måler hastigheder i én retning. LDV består af et optisk system og en elektronisk processor. Det optiske system deler en laserstråle i to, som krydses i væsken der ønskes målt på. Lys der spredes fra små partikler, der bevæges med væsken gennem krydset, detekteres af det optiske system. Frekvensen af det spredte lys er forskellig fra laserlysets frekvens, og denne forskel er netop dopplerforskydningen, der er direkte proportional med hastigheden af væsken [15]. Fordelen ved at anvende LDV er, at hastigheden af væsken kan måles uden at forstyrre strømmingen i målepunktet. For at undersøge af om det er en rimelig antagelse, at model type I gælder fra r_0 , er typisk fem hastighedsprofiler målt ved forskellige radier i det tynde væskelag h_{in} . Målet er derved, at afgøre hvornår grænselaget er udviklet, da modellen først kan gælde herfra da den bygger på Prandtls grænselagapproximation.

5.1 Laser Doppler princippet

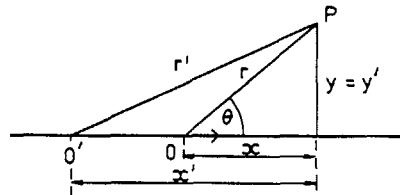
I dette afsnit udledes den frekvens der detekteres af det optiske system, når en partikel passerer igennem laserkrydset. Til afsnittet er primært anvendt [20, 21, 28] og sekundært [14, 15, 16, 17, 18]

¹Dantec anvender en anden betegnelse end LDV, der er Laser Doppler Anemometri (LDA), idet denne måleteknik oprindeligt blev anvendt til at måle hastigheder i gasser.

5.1.1 Den relativistiske dopplereffekt

Når en kilde udsender elektromagnetisk stråling, og bevæger sig relativt til en observatør, vil observatøren observere en frekvens, der er forskudt relativt til den frekvens, der observeres i en referenceramme der er i hvile i forhold til kilden. For at kunne beskrive dette korrekt, anvendes den specielle relativitets teori.

Vi betragter en observatørs position og den elektromagnetiske stråling i forhold til to referencerammer. I den ene referenceramme R' er observatøren i hvile, og placeret i origo O' . Det er herfra frekvensen, og bølgelængden fra den elektromagnetiske stråling observeres. I den anden referenceramme R er kilden i hvile og placeret i O . Det er herfra den elektromagnetiske stråling udsendes. Vi betragter et punkt P , hvis koordinater i forhold til de to referencerammer kan ses på figur 5.1. Det antages, at en elektromag-



Figur 5.1 På figuren ses de to referencerammer. I referencerammen R med origo O er kilden i hvile. I referencerammen R' med origo O' er observatøren i hvile. Punktet P betragtes i forhold til de to referencerammer. Figur taget fra [20] s. 39.

netisk bølge kan beskrives som en plan bølge. En elektromagnetisk bølge involverer både fluktuationer af det elektriske felt og det magnetiske felt. I gennemgangen betragtes kun det elektriske felt der bevæger sig med med lyshastigheden c (i vakuum) og udsendes fra referencerammen R . Bølgen repræsenteres ved

$$E(r, t) = E_0 \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (5.1)$$

Hvor E er det elektriske felt i punktet (x, y) til tiden t i forhold til referencerammen R . E_0 er amplituden af bølgen, ν er frekvensen, og r angiver afstanden i den retning hvori det elektriske felt udsendes. Hvis θ angiver vinklen mellem den retning bølgen udsendes og x -aksen, kan det fra figur 5.1 findes at $r = x \cos \theta + y \sin \theta$ der ved indsættelse i 5.1 giver

$$E(x, y, t) = E_0 \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{x \cos \theta}{c} - \frac{y \sin \theta}{c} \right) \quad (5.2)$$

Det antages nu, at referencerammen R bevæges med hastigheden v i x -retningen i forhold til referencerammen R' , hvor koordinaterne er givet ved x', y' og t' . Koordinaterne i de to referencerammer knyttes sammen ved Lorentz-transformationen

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad y = y'; \quad t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (5.3)$$

Det antages, at de to origo O og O' sammenfalder til tiden $t = t' = 0$. Ved indsættelse af Lorentz-transformationen 5.3 i ligning 5.2 fås

$$E(x', y', t') = E_0 \cos 2\pi\nu' \left(t' - \frac{x' \cos \theta'}{c} - \frac{y' \sin \theta'}{c} \right) \quad (5.4)$$

hvor ν' er

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) \quad (5.5)$$

og hvor θ' er

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \quad (5.6)$$

Ligning 5.4 repræsenterer en elektromagnetisk bølge i referencerammen R' . Denne elektromagnetiske bølge har frekvens ν' , hvor dens udbredelsesretning danner vinklen θ' med x' akse. Dopplerforskydningen som den observeres i referenceramme R' er

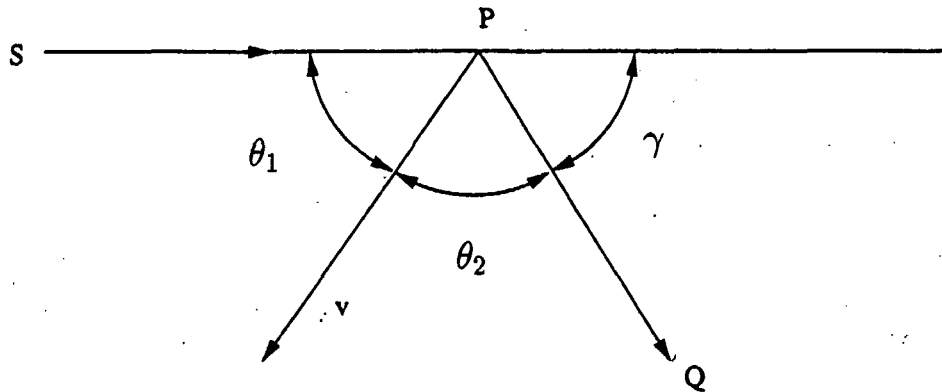
$$\Delta\nu = \nu' - \nu = \nu \left(\frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) \quad (5.7)$$

Frekvensen ν' i 5.5 kan også udtrykkes ved vinklen θ' , som den observeres i referencerammen R' . I ligning 5.6 isoleres med hensyn til $\cos \theta$, og indsættes i 5.5, hvilket efter en smule algebra giver

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta'} \quad (5.8)$$

I laboratoriet udsendes elektromagnetisk stråling fra en lyskilde, dvs. en laser der er i hvile i laboratoriet. Dette laserlys spredes af en partikel, der bevæger sig. Lys der spredes fra partiklen registreres af en detektor ("observatøren"), der ligeledes er i hvile i laboratoriet. Denne detektor kaldes en *fotomultiplier*. Fotomultiplieren og laseren er i hvile i forhold til hinanden i laboratoriet. Dette kan betragtes som en dobbelt dopplerforskydning dvs. fra lyskilde (laser) til bevæget objekt (partikel i væsken) og fra bevæget partikel til fotomultiplier ("observatør"). Vi er således interesseret i, at bestemme den frekvens der registreres af fotomultiplieren. På figur 5.2 er situationen skitseret. På figur 5.2 er skitseret at laserlys med frekvensen ν udsendes fra S . P angiver en partikel, der til en given tid T har hastigheden v . Det spredte laserlys fra partiklen i P registreres af fotomultiplieren i Q . Vinkel θ_1 angiver vinklen mellem partiklens bevægelsesretning og retningen

PS. Vinklen θ_2 angiver vinklen mellem partikkelens bevægelsesretning og retningen PQ . Partiklen i P vil "observere" frekvensen givet ved 5.5,



Figur 5.2 Figuren viser laseren der er placeret ved S , og P der angiver en partiklens position til et bestemt tidspunkt T der har hastigheden v . I Q registreres det spredte lys fra partiklen i fotomultiplieren.

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_1\right) \quad (5.9)$$

hvor vinklen θ nu er θ_1 som i 5.9. Lys med denne frekvens ν' udsendes fra P og modtages af fotomultiplieren givet ved frekvensen ν'' . Denne frekvens er givet ved 5.8,

$$\nu'' = \nu' \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_2} \quad (5.10)$$

hvor vinklen θ' nu er θ_2 som i 5.10. Frekvensen 5.10 kan udtrykkes ved vinklerne θ_1 og θ_2 og laserlysets frekvens ν ved at indsætte ligning 5.9 i 5.10, hvilket giver

$$\nu'' = \nu \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \theta_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_2} \quad (5.11)$$

Dopplerforskydningen som den registreres af fotomultiplieren er

$$\Delta\nu = \nu'' - \nu = \nu \frac{\frac{v}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta_2} \quad (5.12)$$

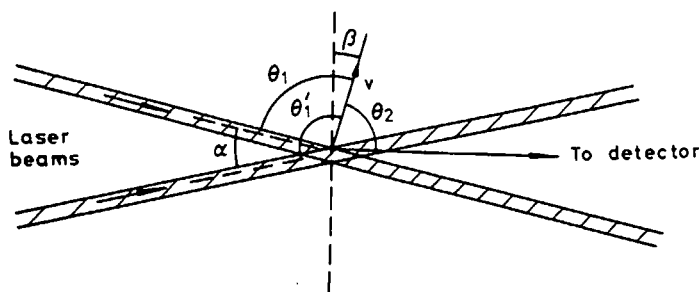
hvor frekvensen 5.11 er indsat i 5.12. Vi kan foretage en rækkeudvikling af ligning 5.12 til første orden i $\frac{v}{c}$, idet der for partiklernes hastigheder i væsken gælder at $v \ll c$. Rækkeudviklingen af 5.12 giver

$$\Delta\nu = \nu'' - \nu = \frac{\nu v}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (5.13)$$

Vi har således udledt den frekvens (dopplerforskydning) fotomultiplieren i Q registrerer, når en partikel bevæges med hastigheden v .

5.1.2 To laserstråler med samme frekvens krydses

I praksis vil dopplerforskydningen 5.13 være for lille til, at den kan måles direkte. Typiske værdier er 10kHz-10MHz, hvilket ikke kan måles ved optiske spektrometre [20] s. 53. Andre teknikker anvendes derfor, hvoraf teknikken der kaldes *The Differential Doppler Technique*, skal omtales her, da LDV bygger på denne. Teknikken består i, at to laserstråler



Figur 5.3 På figuren ses to laserstråler med samme frekvens krydse hinanden. En partikel bevæger sig igennem krydset med vinklen β i forhold til krydsets "normal". Vinklen mellem laserstrålerne er α . Figur taget fra [20] s. 86.

med samme frekvens krydses. På figur 5.3 ses situationen skitseret. Det ses her, at de to krydsede laserstråler danner vinklen α mellem sig. En partikel der passerer igennem krydset med hastigheden v , danner vinklen β i forhold til krydsets "normal" (den stiplede linie). Vi er interesserede i at finde frekvensen fotomultiplieren registrerer, som følge af at partiklen passerer igennem krydset. Når partiklen passerer igennem krydset spredes lyset fra begge laserstråler. Lad θ_1 og θ'_1 være vinklerne partiklens udbredelses retning danner med laserstrålerne, og lad θ_2 være vinklen mellem partiklens bevægelses retning og den retning hvor det hele observeres fra. Når en partikel passerer igennem krydset, giver dette anledning til to dopplerforskydninger fra de to laserstråler af formen 5.13

$$\Delta\nu = \frac{\nu v}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (5.14)$$

og

$$\Delta\nu' = \frac{\nu v}{c} (\cos \theta'_1 + \cos \theta_2) \quad (5.15)$$

Frekvensen fotomultiplieren registrerer er forskellen mellem 5.14 og 5.15, hvilket giver

$$f = \Delta\nu - \Delta\nu' = \frac{\nu v}{c} (\cos \theta_1 - \cos \theta'_1) \quad (5.16)$$

Frekvensen kan udtrykkes udelukkende ved vinklerne α og β . På figur 5.3 ses at $\frac{\alpha}{2} + \theta_1 - \beta = \frac{\pi}{2}$ og $\theta'_1 - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\pi}{2}$. Vinklerne α og β kan findes ud fra disse to udtryk, hvilket

giver $\alpha = \theta'_1 - \theta_1$ og $\beta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta'_1 - \pi)$. En logaritmisk formel² anvendes på 5.16, hvilket giver

$$f = \Delta\nu - \Delta\nu' = \frac{\nu v}{c} \left(2 \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta'_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta'_1 - \theta_1}{2} \right) \right) \quad (5.17)$$

Vinklerne for α og β indsættes i ligning 5.17, hvilket giver

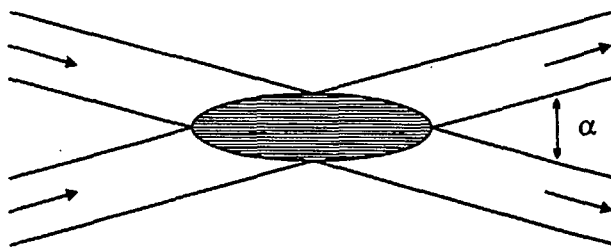
$$f = \frac{\nu v}{c} 2 \cos(\beta) \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{v}{\lambda} 2 \cos(\beta) \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (5.18)$$

hvor λ angiver bølgelængden af laserlyset. Af 5.18 fremgår det, at frekvensen er proportional med hastigheden v . Det skal desuden bemærkes, at signalet fotomultiplieren modtager er retningsuafhængigt, idet vinklen θ_2 ikke indgår i udtrykket for frekvensen. Hastighedsprofilerne der er målt i det tynde væskelag h_{in} , er foretaget ved $\beta = 0$, hvilket giver

$$f = \frac{v}{\lambda} 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (5.19)$$

Interferensmønster modellen

Vi kan intuitivt forstå den frekvens, der registreres af fotomultiplieren når en partikel passerer igennem krydset, ved at betragte det interferensmønster der opstår når laserstrålerne krydses. Interferensmønsteret består skiftevis af konstruktiv og destruktiv interferens. Dette danner i krydset (måleområdet) lyse og mørke striber. På figur 5.4 ses måleområdet skitseret. Afstanden mellem striberne er proportional med laserlysets bølge-



Figur 5.4 På figuren ses en skitse af de to laserstråler med samme frekvens krydse hinanden. Dette danner et interferensmønster bestående af lyse og mørke striber. Figur taget fra [28] s. 36.

længde λ og omvendt proportional med den halve vinkel mellem laserstrålerne [20] s. 10. Afstanden er

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \quad (5.20)$$

² $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$

Når en partikel passerer igennem krydset med hastighed v , vil dette resultere i en modulation af lysintensiteten [20] s. 86 givet ved frekvensen

$$f = \frac{v}{\Delta x} = \frac{v}{\lambda} 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5.21)$$

Det ses, at denne frekvens er identisk med 5.19. Frekvensen 5.19 registreret af fotomultiplieren, kan forstås som en modulation af lysintensiteten af det spredte lys, når en partikel passerer igennem krydset [16] s. 9.

Normalt opererer lasere i TEM₀₀ mode. Dette betyder, at et tværsnit igennem laserstrålen resulterer i en intensitet, der er gaussfordelt [16] s. 8. I et bestemt punkt, der kaldes for *the beam waist*, er intensiteten faldet til $1/e^2$. Laserstrålen kan bestemmes unikt ud fra størrelsen og positionen af *the beam waist*. Intensitetsprofilen i måleområdet har gaussisk amplitudeafhængighed. The beam waist anvendes til at definere udstrækningen af måleområdet, dvs. når lysintensiteten er faldet til $1/e^2$. Måleområdets form er elliptisk [21] s. 109, og størrelsen af måleområdet er af Dantec angivet til $0.1 \times 0.1 \times 0.4 \text{ mm}^3$, hvor det bredeste stykke er vinkelret på retningen af en partikel, der passerer igennem måleområdet, se figur 5.4.

Fotomultiplieren opfanger det optiske signal, dvs. ændringer af lysintensiteten der opstår når en partikel passerer igennem laserkrydset. Output signalet fra fotomultiplieren kaldes et *burst*. På figur 5.5 ses et ideal burst, som følge af at en partikel har passeret igennem måleområdet. Dette burst har en gaussisk form, og indeholder netop information om frekvensen 5.19 og derved af partiklens hastighed. Burstet på figur 5.5 skal fortolkes ved, at lysintensiteten er størst i midten af krydset og mindre ellers. Når en partikel bevæger sig ind i krydset, er lysintensiteten lav, og stiger indtil den er maksimal, hvor partiklen befinder sig i midten af krydset. Herefter falder lysintensiteten igen, svarende til at partiklen bevæger sig væk fra midten af krydset og til sidst ud af det angivet som den laveste lysintensitet. Partikelburstet sendes videre til den elektroniske processor (sort boks) patenteret af Dantec, og outputtet fra den sorte boks er hastigheden af den pågældende partikel der har passeret igennem krydset.

Jeg skal kort skitsere, at helt afgørende for at kunne anvende LDV er, at der er partikler i væsken, som kan sprede lys, der kan registreres af fotomultiplieren. Hvis der ikke var partikler i væsken, ville hastighedsmålinger være umulige. Disse partikler skal ikke forveksles med molekyler, da de er for små til at blive registreret. I en væske er der imidlertid en naturlig forekomst af partikler, der følger med væsken, og eksempelvis typisk kan være små luftbobler eller urenheder som støv etc. Derimod skal der "tilsættes" partikler i en gas, hvis man ønsker at lave hastighedsmålinger her [20] s. 182.

Retningsbestemt hastighed

Indtil nu er kun skitseret, hvordan størrelsen af partiklernes hastigheder bestemmes, men ikke retningen. Det er ikke muligt ud fra partikelburstet at bestemme, i hvilken retning

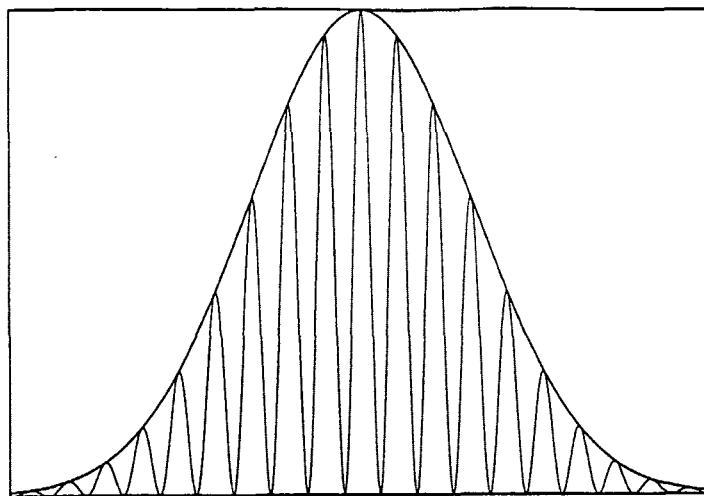
partiklen har bevæget sig. Der findes en enkel metode til at bestemme retningen af partiklers bevægelse i væsken. Metoden består i at "addere" et signal til en af laserstrålerne. Dette signal er et 40 MHz signal. Interferensmønsteret i måleområdet er nu ikke længere et stationært mønster, men bevæges. En partikel der bevæger sig i samme retning, som mønsteret bevæger sig, vil resultere i en mindre dopplerforskydning end uden det adderede signal. Hvis partiklen bevæger sig i modsat retning af mønsteret, vil dette resultere i en større dopplerforskydning end uden det adderede 40 MHz signal. Det er således muligt, foruden bestemmelsen af størrelsen af hastigheden, at bestemme i hvilken retning partiklen bevæger sig.

5.2 LDV opstilling

I dette afsnit gennemgås, hvordan måleområdet skabes af det optiske system. Det skal her bemærkes at på grund af praktiske problemer, har det ikke været muligt at bruge LDV og skanningssystemet samtidigt. Det har bevirket, at det ikke har været muligt at måle væskehøjden som beskrevet i kapitel 4. I afsnit 5.3 redegøres for en anden metode der istedet er anvendt.

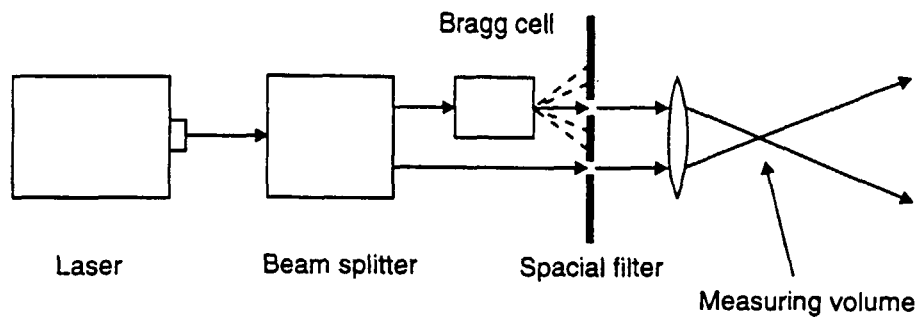
5.2.1 Det optiske system

Det optiske system er placeret på et optisk bord, og består af en laser, en beamsplitter, en braggcelle, et spatial filter (spalte) og en samlelinse. Laseren er en model 5500 A, en Argon-Ion laser med 200 mW output og en gaussisk strålediameter på 0.82 mm, og laserstrålen der udsendes har en bølgelængde på $\lambda = 514.5$ nm. Beamsplitteren er en model 55X28, og braggcellen er en model 55X29, der er bygget sammen til en enhed. På figur 5.6 ses en



Figur 5.5 Figuren viser en ideal gaussiskfordeling (burst) af en partikel der passerer igennem måleområdet. Figur taget fra [28] s. 37.

skitse af hvordan måleområdet skabes. Efter passagen af beamsplitter-braggcelle enheden er laserstrålen delt i to stråler, og det omtalte 40 MHz signal er adderet på en af strålerne. I beamsplitter-braggcelle enheden er desuden et prismearrangement, hvis funktion er at laserstrålerne gøres parallelle indbyrdes og med det optiske bords plan. Når laserstrålerne har forladt beamsplitter-braggcelle enheden krydses de ved hjælp af samlelinsen, der har en brændvidde på 120 mm, og måleområdet dannes. Fotomultiplieren der ikke er vist på figuren, er fokuseret ned på krydset imellem laserstrålerne, så den kun registrerer intensitets ændringerne i krydset, når en partikel passerer igennem det.



Figur 5.6 På figurskitzen ses hvordan måleområdet skabes. Figur taget fra [28] s. 51.

5.2.2 Den cirkulære konstruktion og væskesystemet

Den cirkulære konstruktion er placeret på det optiske bord modsat laser og beamsplitter-braggcelle enheden. Den cirkulære konstruktion og væskesystemet er indbyrdes placeret på samme måde som beskrevet i kapitel 4.

Samlelinsen er placeret under den cirkulære konstruktion på det optiske bord. Samlelinsen står på et xy -bord, der gør det muligt meget præcist at bevæge linsen så brændpunktets position kan ændres. Under den cirkulære konstruktion står desuden et spejl, der er drejet 45 grader i forhold til glaspladens plan. Spejlet er placeret efter samlelinsen, og dets funktion er at dreje laserkrydset, fra at ligge i det optiske bords plan til at stå vinkelret på dette, så laserkrydset kan placeres i væsken. Laserstrålerne går igennem glaspladen og krydses i væsken, hvor vi ønsker at måle.

På figurskitzen 5.7 ses måleområdet placeret i det tynde væskelag før springet, hvor vi ønsker at måle hastighedsprofiler. Ændringen af krydsets (måleområdets) vertikale position ændres ved at ændre positionen af linsens brændpunkt via linsens xy -bord. På figuren ses hvor fotomultiplieren var placeret under målingerne.

5.2.3 Den elektroniske processor og PC

Den elektroniske processor, der er en model 58N20, har andre funktioner udover at omsætte partiklernes burst signaler til hastigheder. Den kontrollerer hvor meget påtrykt spænding fotomultiplieren kan klare. Desuden sørger den elektroniske processor for, at der konstant er påtrykt det omtalte 40 MHz signal på braggcellen.

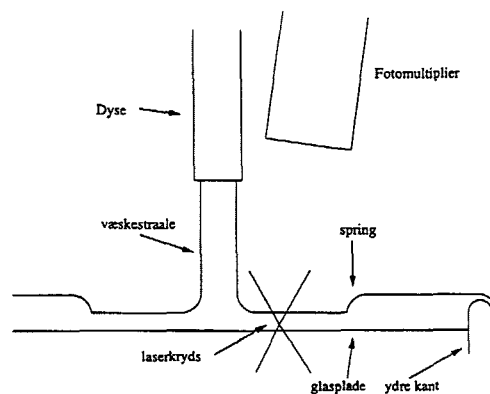
For at LDV systemet kan styres er det tilkoblet en almindelig PC, hvor der er installeret software, der gør det muligt at starte LDV systemet op. Fotomultiplieren er forbundet til den elektroniske processor, der igen er forbundet til PC'en. Det er på PC'en, man f.eks. kan regulere hvor meget spænding, der skal påtrykkes fotomultiplieren.

5.3 Manuel bestemmelse af væskehøjde etc.

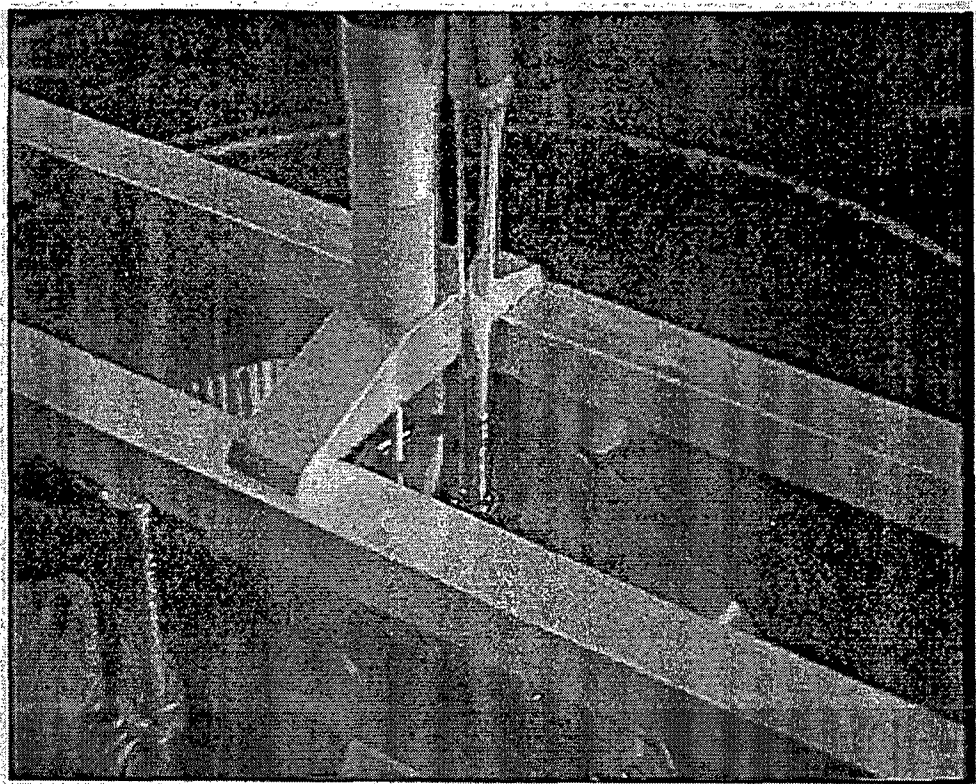
- 1 Manuel bestemmelse af den ydre kanthøjde. Mærker er afsat på drivremmen for hver millimeter, den ydre kant er hævet i forhold til glaspladen. Derved kan den ydre kanthøjde let indstilles.

Væskehøjden h_{in} og h_{ext} bestemmes ved den angivne manuelle metode, vist på figur 5.8, og forklaringen af den står i figurteksten.

- 2 Bestemmelse af springets diameter $= 2 \cdot r_s$ foretages ved aflæsning på en lineal, der lægges på tværs af aluminiumsstængerne, se figur 5.8. Aflæsnings usikkerheden ved denne metode er ± 0.5 mm.
- 3 Aflæsning af måleradius, laserkrydsets radiale position, foregår ved at iføre sig beskyttelsesbriller og sætte laseren i run mode. Krydset kan derved antydes, og herefter



Figur 5.7 På figurskitzen ses, at krydset er placeret i det tynde lag før springet, hvor vi ønsker at måle. For at bevæge krydset vertikalt enten op eller ned i væsken kan dette gøres via linsens xy -bord, hvor positionen af linsens brændpunkt ændres.



Figur 5.8 På figuren ses, hvordan væskehøjden er målt. På figuren ses, at millimeterskruen er placeret på to aluminiumsstænger. Måling af væskehøjden foregår ved præcis at se, hvornår millimeterskruens stift rammer væskeoverfladen og glaspladen. Forskellen mellem de to aflæste positioner giver væskehøjden. Måleusikkerheden af denne målemetode er ± 0.03 mm.

foretages aflæsningen. Aflæsningsusikkerheden er ± 0.5 mm.

- Bestemmelse af glaspladens (bundens) position og h_{ext} via LDV. Til dette formål anvendes de refleksioner, der kommer fra henholdsvis glaspladen og væskeoverfladen. Metodens pålidelighed testes ved, med det "blotte øje" at se, hvornår laserkrydset er i væskeoverfladen eller bunden, og sammenholde dette med refleksionen der kommer fra væskeoverfladen og bunden. Forudsætningen for at kunne anvende denne metode til bestemmelse af højden af væskelaget er, at væskeoverfladen er horisontal. Metoden er god til bestemmelse af bundens position, og til bestemmelse af væskeoverfladens position efter springet, hvor væskeoverfladen er horisontal. I det tynde væskelag h_{in} kan metoden ikke anvendes til at bestemme væskeoverfladens position, fordi væskeoverfladen her krummer ganske lidt, se figur 1.8 i kapitel 1, hvilket giver refleksioner der ikke kan anvendes til at bestemme overfladepositionen. Det skal her bemærkes, at den ydre væskehøjde ikke blot er differensen mellem væskeoverfladens og bundens position, idet der skal tages højde for brydningseffekter. Dette gennemgås i afsnit 5.5.2.

5.3.1 Hvordan den bedste datarate opnås.

Det er vigtigt at få den bedste *datarate*, dvs. hvor mange samples³ der registreres af fotomultiplieren pr. sekund. Dette opfyldes ved, dels at fotomultiplieren er fokuseret på krydset kombineret med den rette påtrykte spænding på fotomultiplieren. Fotomultiplieren fokuseres ved først at tænde laseren, så den kan rettes ind på krydset, og herefter slukkes laseren. Dernæst rettes en halogenlampe, på det sted fotomultiplieren skal fokusere. Et stykke metaltråd lægges på glaspladen så fotomultiplieren lettere kan fokusere. På PC'en kontrolleres, hvornår den bedste data rate er opnået. Den opnås ved at finjustere fotomultiplieren mod krydset og regulere den påtrykte spænding på fotomultiplieren.

5.4 Hvordan en måling udføres

Her angives hvordan en typisk måling, for fastholdt radius, er udført i det tynde væskelag. Linsepositionen, dvs. positionen af linsens brændpunkt, aflæses på xy -bordet for hvert vertikale målepunkt. Linsepositionen ændres successivt fra væskebunden op igennem væsken indtil væskeoverfladen nås, hvorefter målingen er færdig, og en ny kan startes.

I praksis er valgt, at målepunkternes vertikale afstand er på 0.1 mm. Denne afstand mellem målepunkterne er tilstrækkelig for at kunne se en ændring af væskehastighederne op igennem væsken. Det skal her bemærkes, at når brændpunktet ændres med 0.1 mm på xy -bordet, flyttes brændpunktet med en anden værdi i væsken på grund af brydningseffekter. Dette beskrives i detalje i næste afsnit. Hver måling består af mellem 10 og 15

³Definitionen på en sample er en partikel, der har passeret igennem krydset.

vertikale målepunkter, hvor hvert vertikale målepunkt resulterer i data, der opsamles i en datafil.

5.5 Præsentation af data

5.5.1 Hvordan data leveres fra software

En datafil består af tre forskellige slags data.

- 1 Hastighed for hver sample.
- 2 Transit time for hver sample
- 3 Arrival time for hver sample

Når der har bevæget sig N partikler igennem måleområdet, består datafilen af N samples. Datafilen indeholder derved N hastigheder, N transit times og N arrival times. Definitionen på **transit time** er hvor lang tid det tager en partikel at passere igennem krydset, og **arrival time** angiver, til hvilket tidspunkt partiklen ankommer til krydset.

5.5.2 Databehandling

Der er lavet fem måleserier i det tynde væskelag før springet ved to forskellige faldhøjder. Hver måleserie består af M vertikale målepunkter, og dermed M datafiler der indeholder N samples. Der er udarbejdet et databehandlingsprogram⁴, der som output giver den ønskede hastighedsprofil. Input til databehandlingsprogram, for hver måleserie, er

- 1 M datafiler som måleserien består af.
- 2 **Linsedata** der består af M vertikale positioner der er målt i væsken.
- 3 **Transformations datafil** består af den afæste position for bunden (glaspladen) og en transformationsfaktor. Transformationsfaktoren tager hensyn til brydningseffekter. Disse brydningseffekter opstår, når laserkrydset går fra luft igennem glaspladen og op i væsken. Laserkrydset brydes i glasset, men man kan se bort fra dette ved udregning af transformationsfaktoren, idet laserstrålerne blot parallelforskydes. Når væskehøjden h_{ext} måles med LDV, fås en mindre værdi, end når der måles manuelt med millimeterskruen. Når linsens brændpunkt ændres med en bestemt værdi på xy -bordet flyttes krydset med en anden værdi i væsken, hvilket skyldes brydnings-effekter. Transformationsfaktoren findes via Snells brydningslov

$$n_{luft} \sin \theta_{luft} = n_{ethylenglycol} \sin \theta_{ethylenglycol} \quad (5.22)$$

⁴Programmet er udarbejdet af Kim Hansen, NBI.

Transformationsfaktoren der skal udregnes, er $k = \tan \theta_{luft} / \tan \theta_{ethylenglycol}$. Først udregnes vinklen θ_{luft} ud fra, at brændvidden af samlelinsen er 120 mm og, at afstanden mellem laserstrålerne er 60 mm. Vi får $\theta_{luft} = \tan^{-1}(1/4) = 14.04^\circ$. Brydningsindekset for ethylenglycol og for luft er $n_{ethylenglycol} = 1.43$ og $n_{luft} = 1.00$. Dernæst udregnes $\theta_{ethylenglycol}$, hvilket giver $\theta_{ethylenglycol} = 9.77^\circ$. Transformationsfaktoren er da $k = \tan \theta_{luft} / \tan \theta_{ethylenglycol} = 14.04^\circ / 9.77^\circ = 1.45$. Vi får da, at den ydre væskehøjde bestemmes ved

$$h_{ext} = k \cdot h_{maalt} \pm 0.05 \text{ mm} = 1.45 \cdot h_{maalt} \pm 0.05 \text{ mm} \quad (5.23)$$

Hvor h_{maalt} betegner differensen mellem væskeoverfladens og bundens position, og måleusikkerheden er ± 0.05 mm.

Output fra databehandlingsprogram er

- En vægtet middelhastighed og spredning for hver M vertikale målepunkter. Dette giver som resultat vores ønskede hastighedsprofil afbildet i et uz -koordinatsystem, med målepunkterne afsat ud af anden akse og den vægtede middelhastighed afsat ud af første akse.
- Histogrammer for hvert målepunkt, der viser spredningen i hastigheder.

Vægtet middelhastighed og spredning

Vi har valgt at tage en vægtet middelhastighed fremfor en uvægtet middelhastighed. Argumentet følger af nedenstående:

På figur 5.5 side 54 så vi, hvordan et partikelburst ser ud når en partikel passerer igennem krydset. Den største frekvensmodulation fås når partiklen bevæger sig igennem det bredeste sted af krydset, hvilket ses på figur 5.5 som et frekvenspeak. Når en partikel passerer igennem andre steder af krydset, fås en mindre frekvens svarende til de to "haler" af burstet. Vi ønsker en middelhastighed, der vægtes med de hastigheder af de partikler, der passerer midten af krydset. Dette kan opnås ved at middelhastigheden afhænger af transit time. Dette kan forklares ved at antage, at to partikler har samme hastighed, men den ene partikel passerer midten af krydset, og den anden partikel passerer et andet sted af krydset. Partiklen der passerer midten af krydset, har en større transit time end den anden partikel. Ved at lade middelhastigheden afhænge af transit time bliver de partikler, der passerer midten af krydset vægtet mest, hvilket er det vi ønsker. Den vægtede middelhastighed findes i [20] s. 137, givet ved

$$\bar{u}_{vgtet} = \frac{\sum_N^1 u_N \tau_N}{\sum_N^1 \tau_N} \quad (5.24)$$

hvor τ_N angiver transittid for den N 'te partikel, der passerer igennem krydset, og u_N angiver den N 'te partikels hastighed. Spredningen af den vægtede middelhastighed er

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_N^1 (u_N - \bar{u}_{vgtet})^2 \tau_N}{\sum_N^1 \tau_N}} \quad (5.25)$$

5.5.3 Præsentation og tolkning af måling ved faldhøjde 4 cm

Graf 5.9 og 5.10 viser resultatet af to måleserier foretaget ved hver deres radius med parametrene

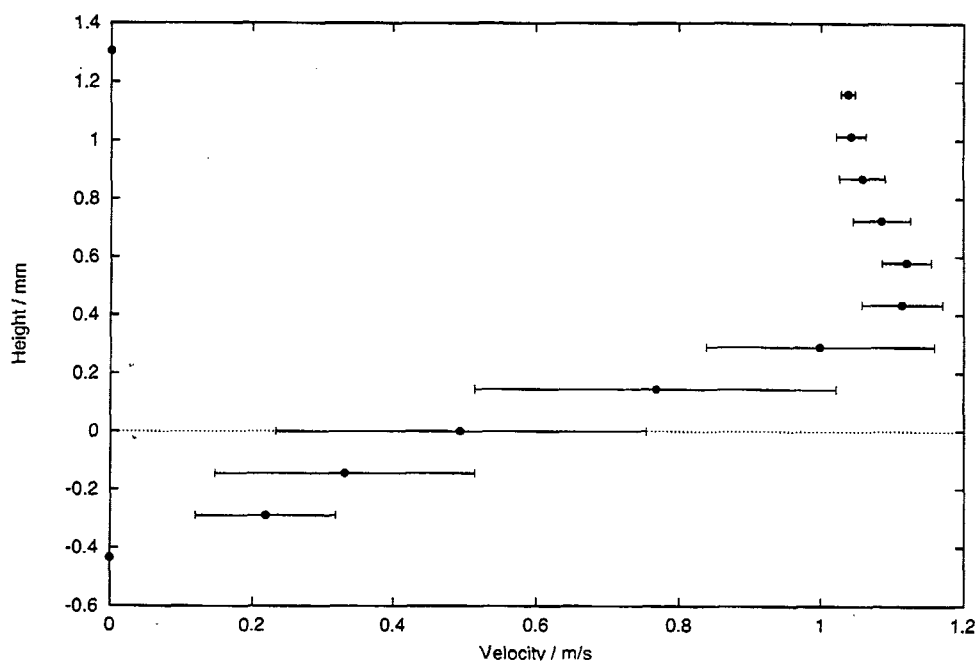
- Flux = 40.7 ± 0.2 ml/s
- Faldhøjde = 4.0 ± 0.1 cm
- Viskositet = 10.20 ± 0.02 gange vand
- Ydre kanthøjde = 2.500 ± 0.025 mm, Type I
- Væskestråle diameter målt til 7.0 ± 0.5 mm
- Radius af spring $r_s = 22.5 \pm 0.5$ mm
- Væskehøjde h_{in} målt med millimeterskrue til 0.84 ± 0.03 mm
- Væskehøjde h_{ext} målt med millimeterskrue til 3.93 ± 0.03 mm. Væskehøjde h_{ext} målt med LDV er $h_{ext} = 1.45 \cdot 2.70 \pm 0.05$ mm = 3.92 ± 0.05 mm.

Hastighedsprofil målt 6.5 mm fra centrum af spring, (3.0 mm fra væskestrålen)

Måleserien på graf 5.9 er målt ved radius 6.5 mm og består af 13 målepunkter. Nullinien på grafen angiver den målte position af glaspladen, dvs. hvor laserkrydsets bredeste del flugter med glaspladens overflade. I kapitel 2 blev beskrevet, at for en laminar strømning skal no-slip betingelsen på bunden gælde (nullinien), hvilket tilsyneladende ikke her er tilfældet. Den store spredning på middelhastigheden er ikke en usikkerhed ved målingerne, men er en direkte konsekvens af krydsets udstrækning der i væsken er $0.14 \times 0.14 \times 0.58$ mm³ hvor den ene halvdel, ved nullinien, er placeret i glaspladen, og den anden halvdel er placeret i væsken. Partikler der passerer igennem krydset tæt på bunden, har hastigheder tæt på nul, men de partikler der passerer krydsets udstrækning på 0.29 mm fra bunden ("spidsen" af krydset), har hastigheder forskellig fra nul, og disse tælles med i middelhastigheden. De to målinger under nullinien (i glaspladen) kan ligeledes forklares, idet de er en konsekvens af krydsets udstrækning, og er således ikke fejlmålinger. Det skal bemærkes, at de to målinger under nullinien har en mindre spredning end målingen ved nullinien. Forklaringen er, at disse to målinger er målt med et mindre vertikalt måleområde ("spidsen" af krydset)

i væsken, end ved nullinien hvor måleområdet er større (halvdelen af krydset), hvilket således giver en mindre spredning på partiklernes hastighed i væsken.

Det ses på grafen, at middelhastigheden af partiklerne stiger mærkbart op igennem væsken, indtil væskeoverfladen nås. Som tidligere nævnt har vi ikke kunnet bestemme overfladens position via LDV i det tynde væskelag, men med millimeter skruemetoden er den målt til 0.84 ± 0.03 mm fra glaspladen. På grafen ses, at efter denne værdi fås stadig hastigheds bidrag, hvilket igen er en konsekvens af krydsets udstrækning.



Figur 5.9 Grafen viser hastighedsprofilen, målt ved radius 6.5 mm, dvs. 3.0 mm fra strålen.

Hastighedsprofil målt 10.0 mm fra centrum af spring, (6.5 mm fra væskestrålen)

Måleserien på graf 5.10 er målt ved radius 10.0 mm, og består af 14 målepunkter. Der gælder de samme kommentarer som ved forrige måleserie. Dog adskiller denne måleserie sig på et punkt, ved at spredningen på det niende målepunkt fra nullinien har en stor spredning. Partiklernes hastighed er i dette målepunkt målt med en lille del af måleområdet ("spidsen" af krydset), og skulle således give en lille spredning på hastigheden som tilsvarende på graf 5.9. Den store spredning på det niende målepunkt er således en usikkerhed på målingen der kan skyldes, at væskeoverfladen har været en smule urolig.

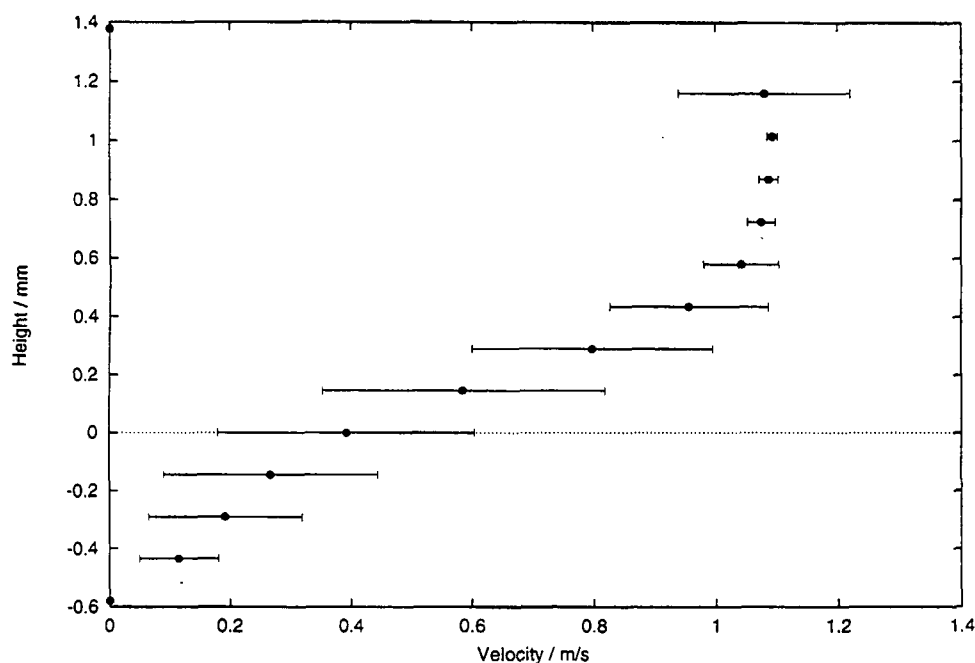
Histogrammer for måleserie målt 10.0 mm fra centrum af spring, (6.5 mm fra væskestrålen)

På figur 5.11 ses to histogrammer, der angiver spredningen i hastigheder i to forskellige målepunkter i henholdsvis målepunktet på glaspladen (nullinien) og det femte målepunkt (0.58 mm) fra nullinien angivet på graf 5.10. Det venstre histogram (hist.000) angiver partikel hastigheder målt ved bunden. Det ses at partiklernes hastigheder varierer fra omkring 0 m/s, dvs. partikler ved bunden (hvor no-slip betingelsen med god tilnærmelse er opfyldt) og op til omkring 1 m/s, dvs. partikler der passerer igennem måleområdet længere væk fra bunden 0.29 mm, (krydsets vertikale udstrækning fra bunden i væsken).

Det højre histogram (hist.008) angiver partikelhastigheder målt ved det femte målepunkt fra nullinien dvs. 0.58 mm fra glaspladen. På figur 5.10 ses, at spredningen for dette målepunkt er lille i forhold til spredningen på hastighederne ved bunden. Årsagen er, som det ses, at 25000 partikler har samme hastighed på omkring 1.08 m/s.

Graf med hastighedsprofiler for alle fem måleserier

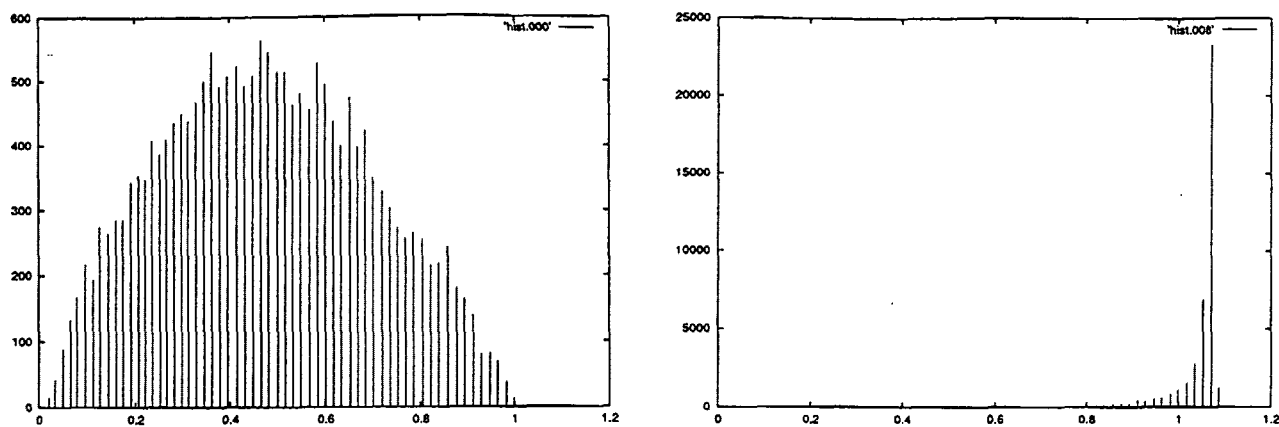
På graf 5.12 ses alle fem måleserier målt i det tynde væskelag. Det ses, at middelhastighederne generelt bliver mærkbart mindre væk fra væskestrålen mod springet. Grunden til dette er væskens indre gnidning (viskositeten), der er årsagen til nedbremsningen af partiklerne. Det skal her bemærkes, at spredningen på målingerne er udeladt, idet det



Figur 5.10 Grafen viser hastighedsprofilen, målt ved radius 10.0 mm, dvs. 6.5 mm fra strålen.

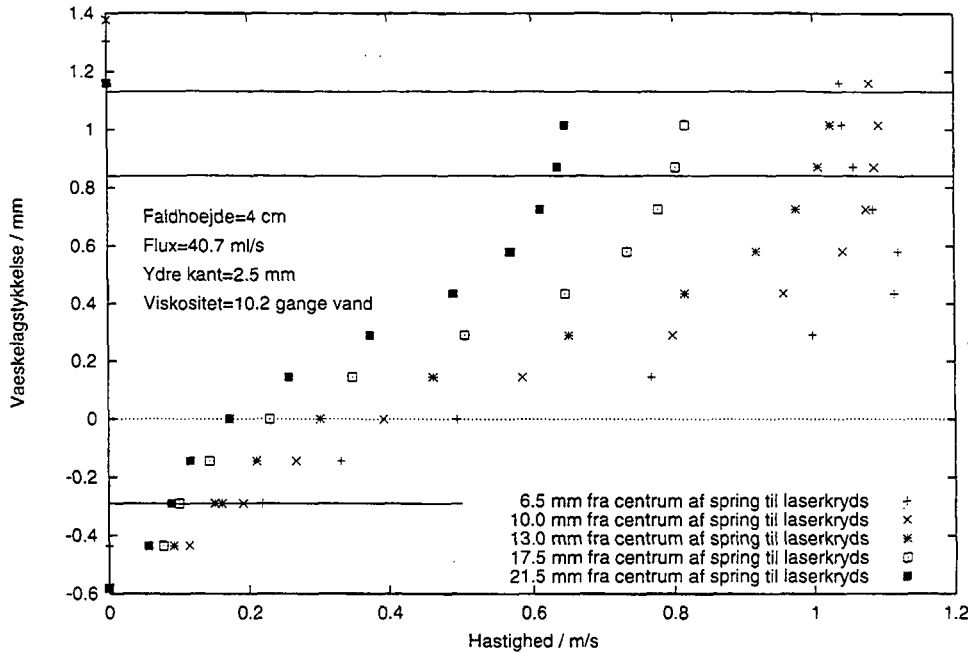
ville gøre grafen unødigt uoverskuelig. På grafen er angivet den målte væskehøjde markeret fra nullinien til væskeoverfladen 0.84 ± 0.03 mm fra glaspladen. Det ses, at vi får målinger der rækker ud over dette område. Årsagen er som før beskrevet at måleområdet (krydset) har en udstrækning hvilket gør, at den "målte væskehøjde" med LDV bliver større end den fysiske væskehøjde (0.84 ± 0.03 mm). Der skal således lægges halvdelen af krydsets udstrækning til både bund og væskeoverflade. Dette er markeret med de vandrette linier ved -0.29 mm og 1.13 mm. Når hastighedsprofilerne skal vurderes er det den "målte væskehøjde", der skal tages i betragtning og ikke den fysiske væskehøjde. Vi kan nu på denne baggrund vurdere, om den dynamiske grænsebetingelse er opfyldt. I kapitel 2 side 20 blev den dynamiske grænsebetingelse gældende i et uz -koordinatsystem efter adskillige approksimationer angivet til $\frac{\partial z}{\partial u} = \infty$, hvilket udtrykte, at hældningen af hastighedsprofilerne ved overfladen skulle være lodret, som angivet på figur 1.10 side 10. Vi ser, at alle fem hastighedsprofiler på graf 5.12 opfylder denne betingelse.

Til sidst skal bemærkes, at der er registreret samples ved -0.43 mm, hvilket er en afstand, der rækker ud over måleområdets definerede udstrækning i væsken. Størrelsen af måleområdet der blev beskrevet på side 53, er imidlertid valgt som standard, men i praksis kan størrelsen af måleområdet godt være større eller mindre end den definerede værdi alt afhængig af systemets følsomhed. De registrerede samples ved -0.43 mm er således et resultat af at måleområdet, i dette tilfælde har været større end den definerede værdi. Den registrerede måling ved 1.16 mm for radius 10.0 mm forklares ligeledes ved måleområdets større udstrækning. Derimod er den registrerede måling ved 1.16 mm for radius 6.5 mm, et resultat af at væskehøjden her er en smule større, da der er målt i det



Figur 5.11 På figuren ses to histogrammer der angiver spredningen i hastigheder i to forskellige målepunkter på graf 5.10, der henholdsvis er nulpositionen og det femte målepunkt (0.58 mm). Histogram (hist.000) viser partikernes hastighed i positionen nul. Det ses, at partiklerne har en meget spredt hastighedsfordeling. På histogram (hist.008) ses, at omkring 25000 partikler har en hastighed på omkring 1.08 m/s, hvilket giver en lille spredning.

konkave område tæt på væskestrålen.



Figur 5.12 Grafen viser de fem måleserier målt i det tynde væskelag før springet ved fem forskellige radier.

Udvikling af hastighedsprofil

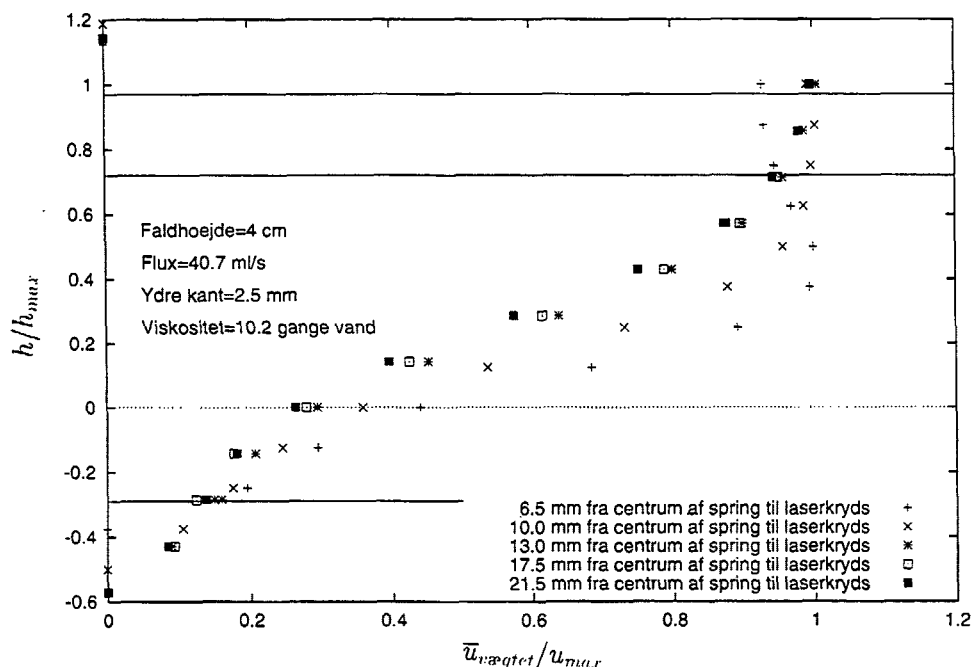
For at vurdere om hastighedsprofilen udvikles skaleres den vægtede middelhastighed og højden på graf 5.12 med \bar{u}_{vgtet}/u_{max} og h/h_{max} , og hvor der på den "målte væskeoverflade" gælder $\bar{u}_{vgtet}/u_{max} = 1$ og $h/h_{max} = 1$. Dette giver 5.13. Det kan derved på grafen afgøres om hastighedsprofilen udvikles. Hvis den ikke udvikles, vil alle hastighedsprofiler ligge oven i hinanden. Hvis derimod der sker en udvikling af hastighedsprofilen vil de ikke ligge oven i hinanden.

På graf 5.13 ses, at hastighedsprofilen med sikkerhed udvikles mellem 6.5 mm og 10.0 mm fra centrum af spring. Vi kan desuden se, at hastighedsprofilen med sikkerhed er fuldt udviklet 13.0 mm fra centrum af spring. Derimod kan vi ikke præcis afgøre, for hvilken radius hastighedsprofilen er udviklet, og kan heller ikke afgøre, om udviklingen af grænselaget sker hurtigt eller langsomt mellem 10.0 mm og 13.0 mm. Dette kunne dog afgøres ved flere radiale målepunkter mellem 10.0 mm og 13.0 mm. Efter 13.0 mm er hastighedsprofilen fuldt udviklet og dermed grænselaget ligeså, hvilket ses ved at de resterende tre hastighedsprofiler ligger oven i hinanden indenfor en aflæst maksimal usikkerhed på ± 0.06 .

5.5.4 Præsentation og tolkning af måling ved faldhøjde 10 cm

Graf 5.14 viser de fem måleserier målt i det tynde væskelag, og graf 5.15 viser den skalerede graf af 5.14.

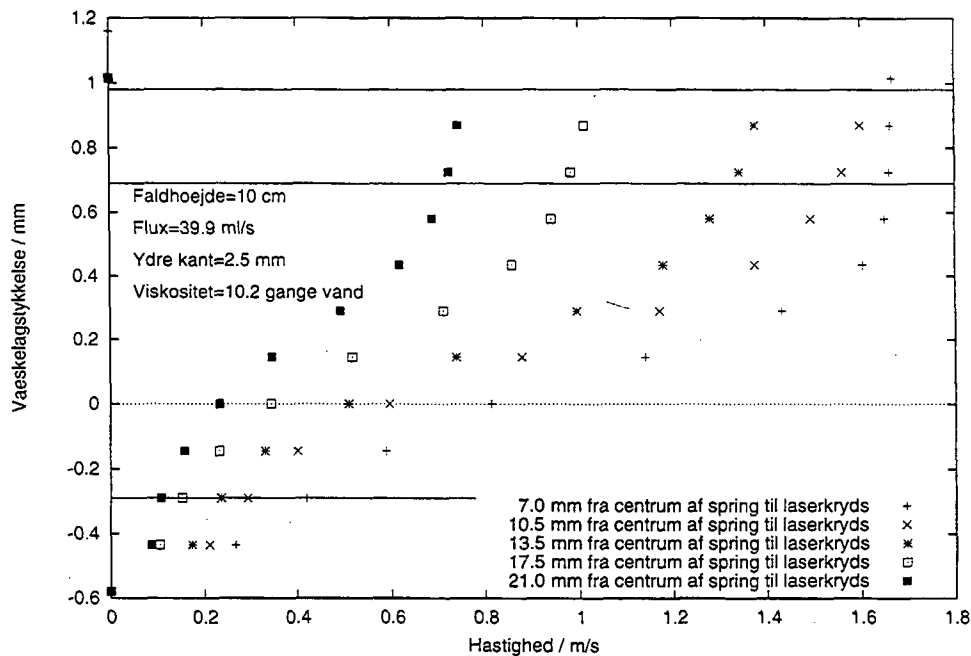
- Flux= 39.9 ± 0.2 ml/s
- Faldhøjde= 10.0 ± 0.1 cm
- Viskositet= 10.20 ± 0.02 gange vand
- Ydre kanthøjde= 2.500 ± 0.025 mm, Type I
- Væskestråle diameter målt til 6.0 ± 0.5 mm
- Radius af spring $r_s = 24.0 \pm 0.5$ mm
- Væskehøjde h_{in} målt med millimeterskrue til 0.69 ± 0.03 mm
- Væskehøjde h_{ext} målt med millimeterskrue til 3.86 ± 0.03 mm. Væskehøjde h_{ext} målt med LDV er $h_{ext} = 1.45 \cdot 2.65 \pm 0.05$ mm = 3.84 ± 0.05 mm.



Figur 5.13 Figuren viser de fem skalerede måleserier.

Graf med hastighedsprofiler af alle fem måleserier.

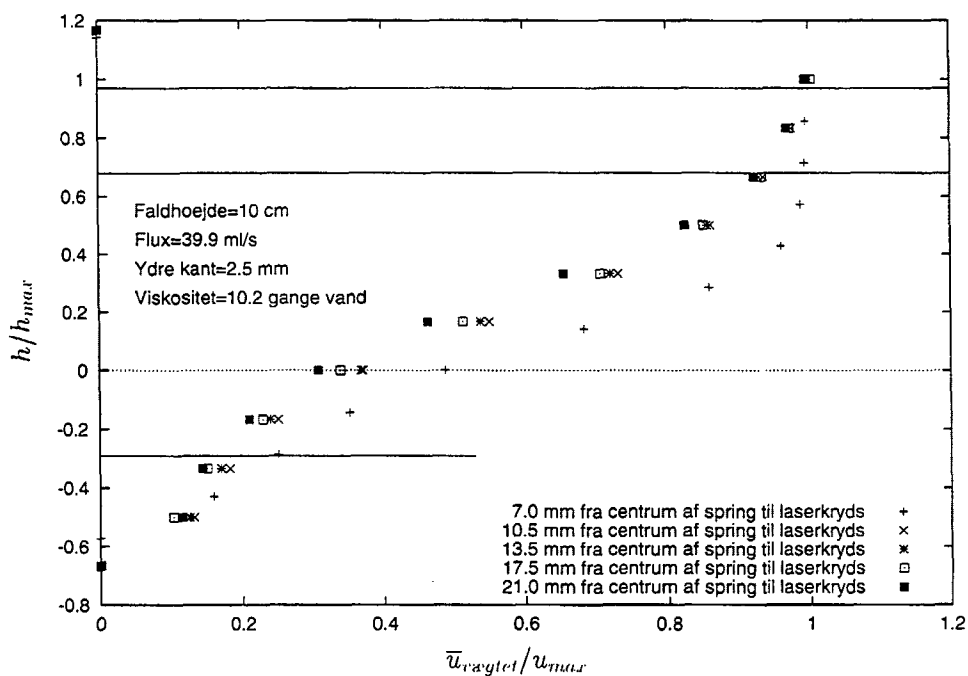
På graf 5.14 ses de fem måleserier målt i det tynde væskelag før springet. Det ses, ligesom på graf 5.12, at partikelhastighederne ligeledes, som følge af den indre gnidning, generelt bliver mindre mod springet. Det ses desuden, at partiklerne generelt har en større hastighed tæt på strålen end ved målingerne foretaget ved faldhøjde 4 cm. Dette er en direkte konsekvens af, at faldhøjden her er større hvilket giver partiklerne en tilsvarende større kinetisk energi, når de rammer glaspladen.



Figur 5.14 Grafen viser alle fem måleserier målt i det tynde væskelag.

Udvikling af hastighedsprofil

Den vægtede middelhastighed og højden er på graf 5.14 skaleret på samme måde som i afsnit 5.5.3, hvilket giver graf 5.15. På graf 5.15 ses, at hastighedsprofilen med sikkerhed er fuldt udviklet ved 10.5 mm fra centrum af spring, og udvikles mellem 7.0 mm og 10.5 mm fra centrum af spring. Det kan, ligesom forrige måleserie, ikke afgøres hvornår grænselaget er udviklet mellem 7.0 mm og 10.5 mm, men kunne afgøres ved flere radiale målepunkter mellem 7.0 mm og 10.5 mm. Efter 10.5 mm er hastighedsprofilen fuldt udviklet og dermed grænselaget ligeså, hvilket igen konstateres ved, at de resterende fire hastighedsprofiler ligger oven i hinanden indenfor en aflæst maksimal usikkerhed på ± 0.09 .



Figur 5.15 Grafen viser de fem skalerede måleserier.

Kapitel 6

Hvordan hjørner og polygoner skabes

I dette kapitel præsenteres de observationer, vi har gjort af type II området. Vi startede med at undersøge, hvordan polygonerne var parameter afhængige. Disse observationer præsenteres i afsnit 6.2. Under dette studie af polygoner opdagede vi, at de havde mange karakteristika, såsom hvordan væske transporteres væk fra polygon springet, primært sker gennem dens hjørner, samt ved variation af faldhøjden ændredes polygonens udseende væsentligt, hvilket præsenteres i afsnit 6.3. Under studiet af polygonens parameter afhængighed fandt vi desuden, at polygoner enten havde lige, konkave eller konvekse sider. For at forstå denne mekanisme undersøgte vi hvor mange forskellige stabile polygoner der kunne eksistere for hver fastholdt h_{ext} . Idéen med denne undersøgelse var, at se om hjørnerne havde samme form på polygonerne. Dette arbejde præsenteres i afsnit 6.4.

6.1 Overvejelse og udførelse af polygonmålinger

Type II området undersøges for at finde parameter afhængigheden af polygonerne. Da vi gik igang med at måle på polygoner, vidste vi ikke, hvordan vi skulle gribe undersøgelsen an. Vi fandt dog hurtigt ud af at

... En standardbetingelse for ethvert forsøg er, at man kun må ændre én betingelse ad gangen, ellers vil der opstå forvirring, og det vil være umuligt at tilskrive den fundne forskel en bestemt grund..., [37].

Den eneste betingelse vi således ændrede ved hver måling, var den ydre kant, hvor de resterende tre parametre (flux, viskositet, og faldhøjde) blev holdt konstant. Vi valgte, at lave måleserier der bestod af flere målinger. Hver måleserie karakteriseredes ved, at en af de resterende tre parametres værdi blev ændret gennem måleserien. Vi ville således kunne afbilde måleserien som et fasediagram. Vi startede med at holde viskositeten konstant¹,

¹Der var problemer med at holde viskositeten på en konstant værdi gennem hele måleserien. Jeg skal senere redegøre for, om dette har betydning for måleserien.

og tidligere forsøg har vist at variationen af faldhøjden ikke ændrede positionen af springet væsentligt. Vi tog det derfor for pålydende, at faldhøjden ikke havde nævneværdig betydning for dannelsen og stabiliteten af polygoner. Vi foretog derfor det valg, at lave en måleserie hvor fluxen blev varieret. Efter at have lavet denne måleserie opdagede vi nærmest tilfældigt, at polygonernes stabilitet og udseende ændredes væsentligt, når man varierede faldhøjden mellem 2 cm til 40 cm. I den anden måleserie vi lavede, var det derfor, faldhøjden der blev varieret.

6.1.1 Kriterie for målinger

De observable der blev registreret var

- For hvilken h_{ext} overgangen fra type I til type II skete.
- Antallet af hjørner i polygonen for hver givne h_{ext} .
- For hvilken h_{ext} springet lukkede sig omkring væskestrålen.

6.1.2 Hvordan en måling udføres

Målingen kunne begynde, når systemet var kalibreret, dvs. når den ydre kant og glaspladen flugtede med hinanden. For hver ydre kanthøjde blev den målte værdi for h_{ext} , typen af spring, og antallet af hjørner polygonen havde nedskrevet. For at få et hurtigt overblik over målingen, blev den ydre kant øget med 0.5 mm af gangen, indtil springet lukkede sig omkring strålen. Formålet med at "løbe igennem parameterområdet" var at observere, for hvilken h_{ext} overgangen mellem type I og type II skete, og dermed hvor målingen skulle starte. Når vi vidste, hvor en måling skulle starte fra, forstyrrede vi for hver h_{ext} væskestrålen fem gange. Efter hver forstyrrelse ventede vi i ca. 20 minutter, hvilket for det meste var tid nok til at være sikker på at polygonen var stabil, dvs. havde det samme antal kanter (hjørner), og resultatet af disse fem forstyrrelser blev skrevet ned. Efterhånden som vi fik mere erfaring med type II området, kunne vi alt afhængig af parametrene vurdere, hvor lang tid vi skulle vente for at være sikker på, at polygonerne var stabile. Vi fik den erfaring at ved små faldhøjder 1 – 3 cm, var polygonerne generelt meget stabile, og vi behøvede derfor ikke vente lang tid for at være sikre. Derimod tog målinger udført ved faldhøjder fra 3 cm til 5 cm længere tid, da polygoner for her var længere tid om at blive stabile. Det kunne nogen gange godt tage op til en time efter en forstyrrelse af væskestrålen, før vi var rimeligt sikre på at polygonerne var stabile. En måling tog derfor typisk en hel dag.

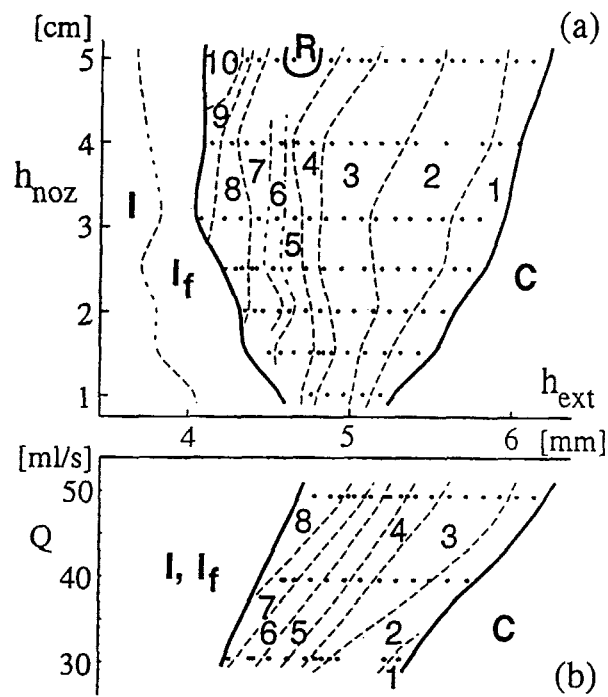
6.2 Fasediagrammer

Eksperimentet har en begrænsning for hvor stor, henholdsvis lille fluxen kan være. Den mindste fluxværdi eksperimentet tillod var ca. 10 ml/s, og den største fluxværdi var ca. 60 ml/s. Vi foretog det valg at lave en måleserie på tre målinger, hvor fluxen var på henholdsvis $Q \approx 30, 40, 50$ ml/s. I anden måleserie foretog vi det valg at holde fluxen på den konstante værdi $Q \approx 40$ ml/s men variere faldhøjden. Det skal understreges at ovenstående parameter værdier blot var et valg, og at vi ligeså godt kunne have valgt andre værdier for disse to måleserier. Vi fandt ud af, for hvilke faldhøjder vi skulle lave målinger, ved at lave små pilotforsøg der udelukkede havde til formål at fastsætte øvre og nedre grænse for faldhøjden. Den øvre grænse for faldhøjden ved den valgte flux, hvor der eksisterede polygoner, var ≈ 5 cm. Den nedre grænse var ≈ 1 cm, hvor dysens udmundning for mindre faldhøjder ville røre væskeoverfladen.

Under målingerne opdagede vi, at polygoner generelt var meget følsomme overfor små skævheder i opstillingen, dvs. glaspladen skulle være helt vandret. Den eneste måde glaspladen kunne instilles helt vandret på var efter polygonerne selv. Pladen var helt vandret når hjørnerne i polygonen var ækvidistante. Et vatterpas kunne ikke bruges i denne sammenhæng, det var ikke præcist nok!

6.2.1 Polygonens parameterafhængighed

På figur 6.1 ses de to måleserier opstillet i to fasediagrammer. Fasediagram(a) på figur 6.1 er en måleserie bestående af syv målinger. De syv målinger er lavet ved en faldhøjde på henholdsvis (1, 1.5, 2, 2.5, 3.1, 4.0, og 5.0) cm. De fastholdte parametre gennem hele måleserien var $\nu \approx 10$ gange vands viskositet og $Q \approx 40$ ml/s. Fasediagram(b) er en måleserie bestående af tre målinger. Disse tre målinger er lavet ved $Q \approx 30, 40, 50$ ml/s. De fastholdte parametre gennem hele måleserien var $h_{noz}=2$ cm og $\nu \approx 11$ gange vands viskositet. På figur 6.1 ses at når h_{ext} er lille, observeres det cirkulære type I spring markeret ved I. Når h_{ext} øges, er springet stadig cirkulært, men her er væskeoverfladen fluktuerende. Dette område er markeret med I_f . For store værdier af h_{ext} er springet tæt på eller "rammer" væskestrålen. Dette er markeret med C, der står for closed. Imellem I_f og C ses de polygoner der er observeret. Det ses på fasediagrammerne, at vi endelig har observeret polygoner der har to eller et hjørne. Dette er muligt, fordi vi tæller antallet af radiale væskejets. Hver polygon har det samme antal væskejets som antallet af hjørner, da den primære væsketransport sker igennem polygonens hjørner. Dette beskrives mere detaljeret i afsnit 6.3. Polygonerne er for det meste helt stabile i området mellem I_f og C. Ved store h_{ext} , det vil sige tæt på området C, begynder polygoner (1 – 3 hjørner), dog alt afhængig af viskositeten, at fluktuerer i tid. Viskositeten skal dog under 10 gange vands værdi for at de fluktuerer i tid. Området R på fasediagram(a) er et område, hvor polygoner ikke er stabile. Ved at vente op til en time rettes hjørnerne i polygonen ud, så den til sidst er en cirkulær stationær type II. Udseendet af et type I og type II spring er det samme,



Figur 6.1 Figur(a) viser faldhøjden som funktion af den h_{ext} . Den kinematiske viskositet $\nu \approx 10$ gange vands viskositet og flux $Q \approx 40$ ml/s er fastholdt på samme værdi gennem hele måleserien. Figur(b) viser Q som funktion af h_{ext} for fastholdt viskositet $\nu \approx 11$ gange vands viskositet og faldhøjde $h_{noz}=2$ cm.

men forskellen er, at det cirkulære type II spring har en rolle i overfladen af springet.

Ved hver h_{ext} kan der eksistere flere polygoner, f.eks. et fem og et seks kantet polygonspring er muligt, og er begge lige stabile. Fasediagrammerne på figur 6.1 viser ikke denne hysteresis men for hver h_{ext} , er væskestrålen forstyrret fem gange med en pind, for at finde den mest hyppige polygon. I fasediagrammerne er det således den mest hyppige polygon for hver h_{ext} , der er markeret ved de sorte målepunkter. De stiplede linier er grænsekurver (der ikke er målt, men sat skønsmæssigt) mellem de mest hyppige polygoner. Den generelle tolkning af diagrammerne er

- Polygonens afhængighed af h_{noz} er lille da grænsekurverne ved 4 – 8 hjørner, i fasediagram(a), stort set er vertikale, hvorimod..
- polygonens afhængighed af fluxen Q er stor idet grænsekurverne ved 4 – 8 hjørner, fasediagram(b), ikke er vertikale men skrå.

Variation af viskositeten gennem måleserierne

Gennem hele måleperioden har viskositeten af væsken (ethylen-glycol) varieret mellem ca. 11.5 til 9.1 gange vands viskositet. Der er to årsager til dette. For det første har væsken "suget" vand fra luften. Resultatet af dette er, at viskositeten er faldet. Den anden grund er, at måleperioden har forløbet fra maj måned til slutningen af juni måned 97. Temperaturen har derfor været svingende i denne periode og derfor også svingende i laboratoriet, og resultatet af dette har været at viskositeten ligeledes har været svingende. Der er taget højde for variationen af viskositeten ved at målingerne blev lavet i tilfældig rækkefølge. Hvis ændringen af viskositeten havde en afgørende betydning på målingerne, ville fasediagrammerne ikke være så relativt velordnede, som de faktisk er. Velordnetheden af diagrammerne er derfor et godt indicium på at faldet af viskositeten på to gange vands viskositet, ikke har haft den store indflydelse på målingerne.

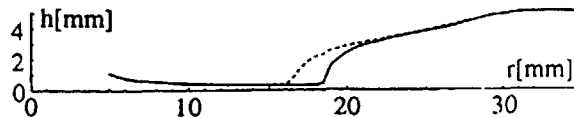
6.3 Fænomenologisk beskrivelse af polygoner

I dette afsnit beskrives, de karakteristiske egenskaber polygoner har. For at vise hvordan polygonerne ser ud og hvordan deres udseende afhænger af parametrene, præsenteres et billedmateriale af disse polygoner. Billederne af polygoner er taget i forbindelse med målingerne med et videokamera, gemt på videobånd og herefter skannet ind på computer og udprintet.

6.3.1 Polygonens højdeprofil

På figur 6.2 ses en typisk højdeprofil $h(r, \theta)$ foretaget på en fem-kantet polygon i to θ -retninger. Den optrukne linie indikerer profilen foretaget midt imellem to hjørner og den stiplede linie indikerer profilen foretaget gennem hjørnet på polygonen. Det ses at profilen

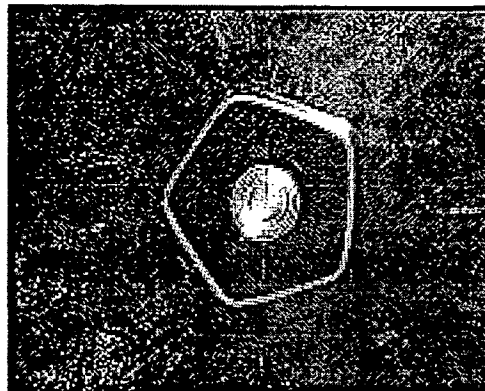
før og efter springet er uafhængig af azimutalvinklen θ bortset fra nær springet, hvor profilen er afhængig af vinklen θ .



Figur 6.2 figuren viser en målt højdeprofil, i to θ -retninger fra væskestrålen, af en fem-kantet polygon. Den stiplede kurve indikerer profilen foretaget gennem et hjørne på polygonen, og den fuldt optrukne kurve indikerer profilen foretaget midt mellem to hjørner.

6.3.2 Polygonens udseende

Figur 6.3 viser en 5-kantet polygon set nedefra. Faldhøjden er 4 cm, $Q = 40.7$ ml/s og $h_{ext} = 4.71$ mm. Den lyse ring i midten af billedet er væskestrålen, der rammer glaspladen. På figur 6.4 ses en 5-kantet polygon ovenfra. Parametrene for denne polygon er



Figur 6.3 På figuren ses et 5-kantet polygon spring nedefra. Den lyse ring i midten af billedet er væskestrålen, der rammer glaspladen.

de samme som polygonen på figur 6.3. En polygon har generelt en ydre radius, der tilnærmelsesvis er cirkulær. Den ydre radius af polygonen ses som en lys ring, der omslutter

polygonens 5-kanter. Gennem studiet af polygoner er det observeret, at polygonens ydre radius generelt forbliver konstant ved variation af h_{ext} . Den ydre radius af polygonen har samme værdi som radius af det cirkulære spring når systemet er kalibreret, dvs. den ydre kant flugter med glaspladen, hvor væsken løber frit af glaspladen.

6.3.3 Visualisering af type I og type II

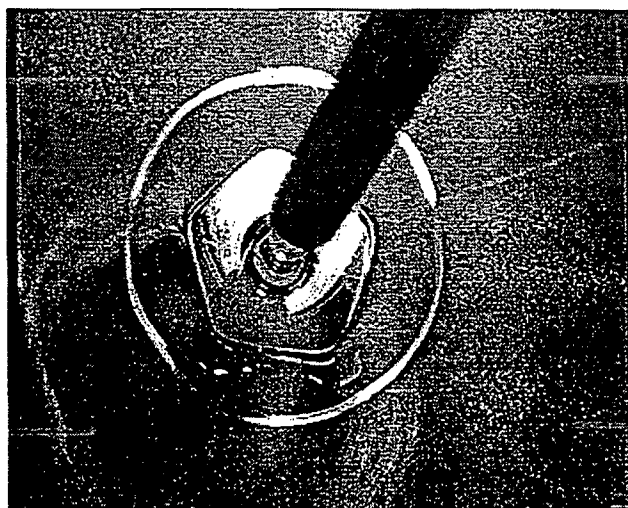
Strømningsmønsteret i og omkring springet er yderst kompliceret, men det er muligt at visualisere de generelle træk ved strømningen. For at observere strømningsmønsteret blev en halogenlampe rettet ned mod polygonen. Glimmer med en gennemsnits størrelse på ca. $25\mu\text{m}$, der fulgte med strømningen, blev tilsat. Man kunne således let se strømningsmønsteret i og omkring springet.

Visualisering af type I

- separationen tæt på glaspladens overflade ses ved at lægge glimmer på bunden (glaspladen). Det ses tydeligt, at væsken tæt på bunden bevæger sig i modsat retning af hovedstrømningen som skitseret på figur 1.6 side 6.

Visualisering af type II

- separationen ses stadig som beskrevet ovenfor, og rolleren observeres ved at "lægge" glimmer i overfladen af springet. Det ses tydeligt at, rolleren roterer ind mod springet.



Figur 6.4 På figuren ses en 5-kantet polygon ovenfra.

i overfladen og væk fra springet ved bunden som skitseret på figur 1.6 side 6.

Separationen observeres ved den ydre radius af polygonen. Under målingerne har det enkelte gange været vanskeligt at se separationen. Grunden er, at væsken generelt ikke roterer særlig hurtigt, og derfor kan det være svært at se nogen form for bevægelse.

6.3.4 Hvordan væsken transporteres væk fra polygonspringet

Som nævnt i afsnit 6.3.3 er strømningsmønsteret yderst kompliceret for polygoner. Det ses især, når man observerer, hvordan væsken ledes væk fra polygonen. Der er dog både ligheder og forskelle ved et type I spring og et polygon spring. Ligheden er, at før springet spredes væsken *homogent* og radialt ud langs den horisontale glasplade fra væskestrålen. Forskellen på et type I spring og et type II spring er, hvordan væsken ledes væk fra springet. I type I ledes væsken homogent og radialt væk fra springet. Derimod ledes væsken *inhomogent* væk fra et polygon spring. Generelt gælder for polygoner, at væsken primært transporteres væk via dens hjørner. Dette sker med en relativ stor fart sammenlignet med den sekundære væsketransport, der sker med en langt mindre fart langs polygonens sider.

Figur 6.5 viser et billede af den samme polygon som vist på figur 6.3, men denne gang er der lagt glimmer i overfladen midt mellem to af polygonens hjørner. I mellem hjørnerne på polygonen er en helix, hvis funktion er, at rotere væske hen til hjørnerne. Dette indikerer et meget komplekst tre-dimensionelt strømningsmønster. Rolleren har således en helixformet struktur, der fylder hele omkredsen af polygonen. Rolleren kan dermed betragtes som en flydende torus. Karakteristisk for rolleren er, at den "knækker" ved hjørnerne. Rolleren har den største radius midt mellem to hjørner på polygonen, og mindskes symmetrisk fra midten af dens sider ud til de respektive hjørner. Ved at visualisere rolleren ses, at rotationshastigheden af den øges fra midten af polygonens sider ud til de respektive hjørner hvor væsken slynges ud med stor fart. På figur 6.5 er en 1/5-del af rolleren visualiseret med glimmer. På billedet ses, at væsken bliver slynget ud af polygonens hjørner iform af kraftige væskejets. Disse væskejets går altid radialt ud fra polygonens hjørner, og der gælder generelt at

- Hver polygon har det samme antal væskejets, som polygonen har hjørner.

Naturligvis skulle man på dette billede kunne se alle fem jets og dermed hele rolleren, men vi har kun været i stand til at visualisere en helix ad gangen.

Figur 6.6 viser et hjørne af en 6-kantet polygon nedefra. På figur 6.6 ses, en stiplede linie der markerer den ydre radius af polygonen, der samtidig angiver positionen af separationen. Rolleren der ligger i overfladen af springet, ligger imellem den stiplede linie og polygonens sider (de lyse liniestykker). Hovedstrømmen der kommer fra det tynde væskelag, bevæger sig ind under rolleren, og dette får rolleren til at rotere. Væskeudledningen af et hjørne er mere kompliceret end visualiseret på figur 6.5, idet to helixer støder op til hvert hjørne. Der er således to helixer, som hver transporterer væske hen til

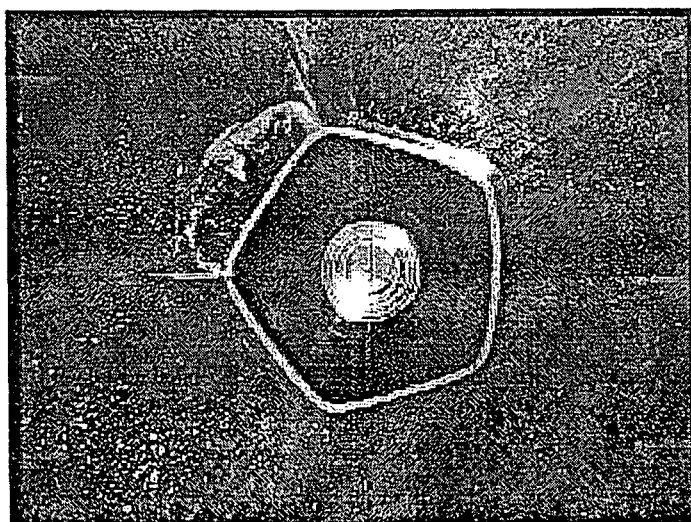
det samme hjørne, hvilket giver hjørnets yderst komplicerede tre-dimensionelle struktur. Som nævnt tidligere, ledes væsken primært ud af polygonens hjørner iform af væskejets. Ved at "drysse" glimmer på overfladen af polygonen er det observeret, at der i forbindelse med væskeudledningen af hjørnerne "ligger" en roterende hvirvel på "hver side" af hvert hjørne. Disse hvirvler roterer "ind mod" hvert hjørne. Væsken, fra rolleren, ledes "hen til" disse hvirvler på overfladen af polygonen, og væsken slynges via disse hvirvler væk fra polygonen. På billedet ses disse hvirvler ved hjørnet.

6.3.5 Polygonernes afhængighed af faldhøjden

Indtil nu er kun vist hvordan en typisk polygon ser ud, og beskrevet hvordan væsketransporten væk fra polygonen sker. I dette afsnit beskrives, hvilken indflydelse faldhøjden har på polygonen. Igennem vores studie af polygoner, har det vist sig, at faldhøjden har stor indflydelse på hvordan polygonen ser ud, når denne parameter varieres.

Mindre markerede hjørner

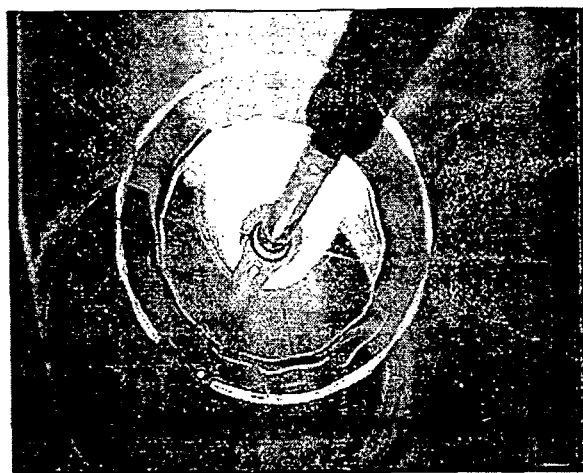
Polygoner får generelt mindre markerede hjørner, når faldhøjden øges. På figur 6.7 ses, ovenfra en 13-kantet polygon der er observeret ved faldhøjde 10 cm. Det ses, at denne polygon har langt mindre markerede hjørner end den viste 5-kantede polygon på figur 6.4, som var observeret ved faldhøjde 4 cm. På figur 6.8 ses en 5-kantet polygon observeret ved faldhøjde 1.5 cm. På denne polygon ses, at hjørnerne er meget skarpt markeret i



Figur 6.5 Figuren viser samme polygon som på figur 6.3. På figuren ses rolleren visualiseret med glimmer, mellem to af polygonens hjørner.

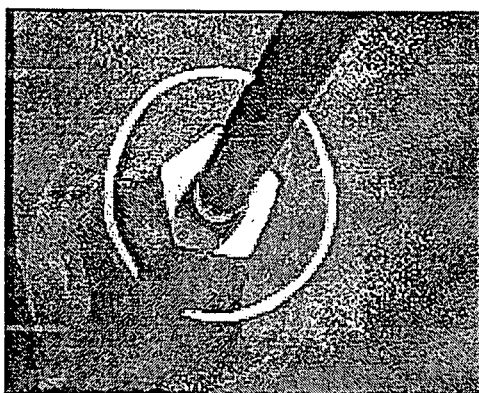


Figur 6.6 På figuren ses en 6-kantet polygon nedefra. Det ses at rolleren "knækker" ved hjørnet. Den primære transport af væske sker gennem polygonens hjørner.



Figur 6.7 Figuren viser en 13-kantet polygon der er observeret ved faldhøjde 10 cm.

modsatning til polygonerne vist på figur 6.4 og 6.7. Det ses, at når faldhøjden øges, bliver polygonernes hjørner mindre markerede.



Figur 6.8 På figuren ses en 5-kantet polygon observeret ved faldhøjde 1.5 cm. Det ses, at hjørnerne på denne polygon er klart skarpere, end de var på polygonerne vist på figur 6.4 og 6.7

Flere hjørner

Generelt øges det maksimale antal hjørner i polygonen når faldhøjden øges. Det ses på fasediagrammet 6.1(a), at når faldhøjden er lav (1 cm), er der kun observeret polygoner med op til 5 hjørner. Når derimod faldhøjden er stor (5 cm), er observeret polygoner med op til 10 hjørner.

Stabilitet af polygoner

Faldhøjden er afgørende for polygonernes stabilitet. Polygoner er kun stabile, når faldhøjden er mellem 1 cm og 5 cm undtaget området **R**. Faldhøjde 5 cm betegnes som *boaderline*, idet efter denne faldhøjde begynder polygoner generelt at blive ustabile. Mellem 5 cm og 10 cm er området semistabil, dvs. polygoner er stabile ved få h_{ext} . Når faldhøjden er over 10 cm, er alle polygoner ustabile for alle h_{ext} . Hvis fasediagrammet 6.1(a) blev "forlænget" til f.eks faldhøjde 15 cm, ville området **R** blive større og større for faldhøjder større end boaderline.

6.4 Hjørne undersøgelser for fastholdte ydre væskehøjder (h_{ext})

Under målingerne, til fasediagrammerne, observerede vi polygoner der enten havde konkave, lige eller konvekse sider. Vi undersøgte derfor om hjørnernes form var parameterafhængige, dvs. at hjørnets form (krumning) blev ændret, når h_{ext} blev varieret eller/og konstant ved samme h_{ext} . Man kunne nemlig forestille sig, at hvis hjørnet af en eller anden grund skulle have en konstant form (krumning) for samme h_{ext} , var der i princippet ikke noget i vejen for, at der kunne eksistere flere polygoner hvis blot polygonernes sider blev "indstillet" sådan, at hjørnernes form hele tiden var den samme. Derved ville hysteresen kunne forklares, og dermed eksistensen af de konkave og konvekse polygoner. Der blev lavet undersøgelser for faldhøjde (1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0) cm. Disse seks målinger er ligeledes foretaget i tilfældig rækkefølge. Viskositeten var $\nu = 13.2$ gange vands viskositet, og $Q \approx 40$ ml/s. Desuden blev en måling ved $h_{noz} = 2$ cm, $Q \approx 50$ ml/s og $\nu = 13.2$ gange vands viskositet lavet.

6.4.1 Kriterie for hjørnemålinger

Det primære var at undersøge, hvor mange polygoner der kunne eksistere for hver fastholdt h_{ext} . Kriteriet for målingerne var

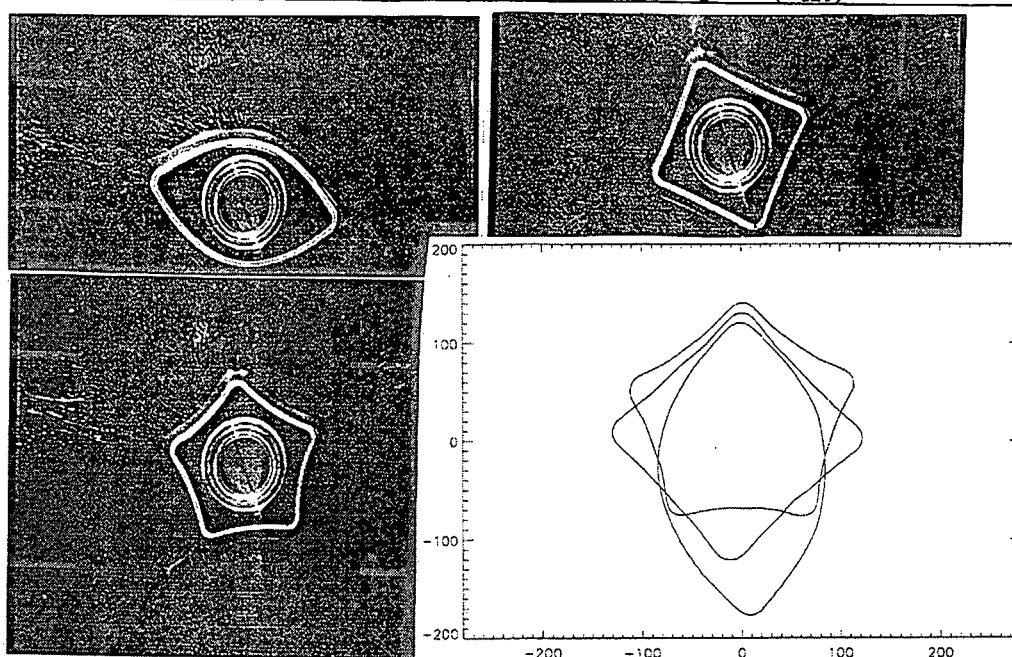
- at undersøge det maksimale antal polygoner der kunne eksistere for hver givne h_{ext}
- at optage alle polygoner på video for hver givne h_{ext} til senere databehandling

6.4.2 Hvordan en måling udføres

Fremgangsmåden for at finde ud af hvor mange polygoner der kunne eksistere, var at anvende en pind, der blev brugt til at skabe (tilføje) eller fjerne hjørner i polygonen med. Et hjørne skabes på en polygon ved at "trække" i en af dens sider. Lige når et nyt hjørne var skabt var afstanden mellem hjørnerne ikke ækvidistant, men efter et kort stykke tid reorganiseres hjørnerne på polygonen så afstanden mellem hjørnerne igen blev ækvidistant. Ved hver h_{ext} optog vi polygonerne på videomaskine.

6.4.3 Præsentation af data for hjørne undersøgelser

Undersøgelsen af om hjørnerne i polygonen er parameterafhængige består basalt set i, at sammenligne om hjørnerne har samme form for samme h_{ext} og forskellig form ved varieret h_{ext} . For at lave denne undersøgelse er alle polygoner blevet skannet ind på computer, så de kan databehandles herfra. Her præsenteres databehandlingen foretaget på polygoner observeret ved faldhøjde 2 cm, $Q \approx 40$ ml/s og $\nu = 13.2$ gange vands viskositet. På figur 6.9 ses tre polygoner observeret ved samme $h_{ext} = 5.29$ mm, hvor der på to-kanten



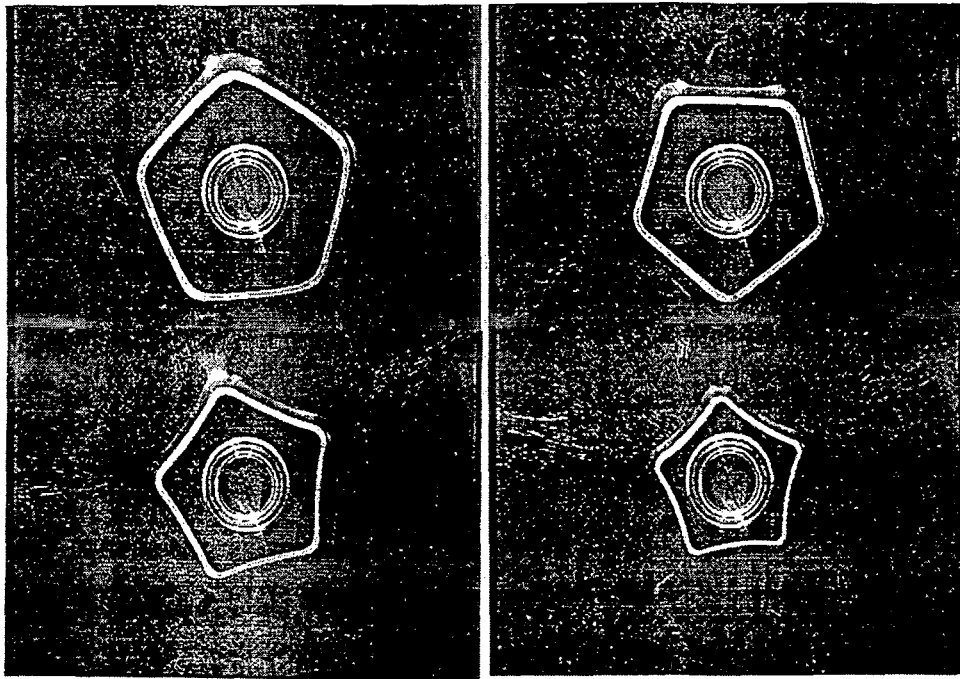
Figur 6.9 På figuren ses tre polygoner der er taget for samme $h_{ext} = 5.29$ mm. På figurskitserne ses det at hjørnernes form ligner hinanden. Ophavsret til figurskitse Jonas L. Hansen, NBI.

øverst til venstre er trukket i siderne og således henholdsvis tilføjet to hjørner (4-kantede polygon) og tre hjørner (5-kantede polygon). På figurskitserne til højre er den overflødig information på de tre polygonbilleder fjernet. Dette kan gøres i et standard billedbehandlingsprogram. På figurskitserne ses hjørnerne umiddelbart at have samme form.

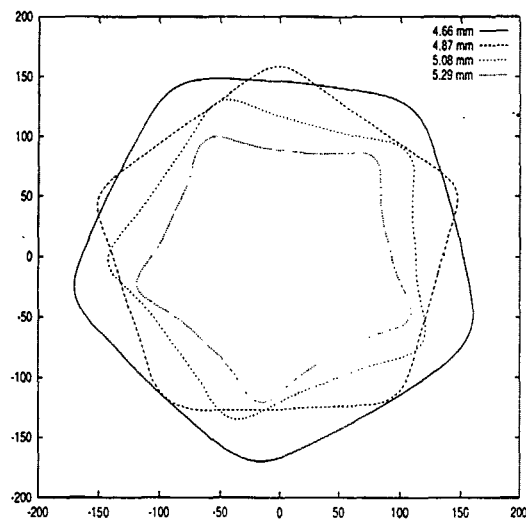
På figur 6.10 ses fire 5-kantede polygoner observeret ved fire forskellige h_{ext} angivet i figurteksten. På figur 6.11 ses de fire polygoner fra figur 6.10. På denne figur er alt den overflødig information fjernet fra billederne. Det ses her, at hjørnernes form ikke umiddelbart er den samme når polygonerne observeres ved forskellige h_{ext} .

For at få et mere kvantitativt mål for hvornår hjørner ligner hinanden, er et program fremstillet², der kan sammenligne hjørner. Den overflødig information på billederne fjernes ligesom på figurskitserne 6.11. Figurskitserne består af $m \times m$ punkter (pixels), hvor hvert punkt har et specifikt koordinatsæt. Det interessante udsnit undersøges (to hjørner overlappes). Udsnittet der kaldes *vinduesbredden* består af n pixels, hvor $n < m$. Princippet i programmet er at udregne forskellen på to hjørners koordinatsæt. Forskellen på disse koordinatsæt kvadreres. Der defineres en fejl, der er middelværdien af de kvadrerede forskelle. Idéen med at indføre denne fejl er, at hvis fejlen har en stor værdi, tolkes dette som, at hjørnernes form ikke er den samme, men hvis fejlen er lille tolkes dette som, at hjørnernes form er den samme. For en given vinduesbredde roterer programmet hjørnerne for at minimere fejlen så meget som muligt. Fejlen udregnes for forskellige vinduesbredder dvs. varierende områder omkring de overlappede hjørner. Fejlen som funktion af vindu-

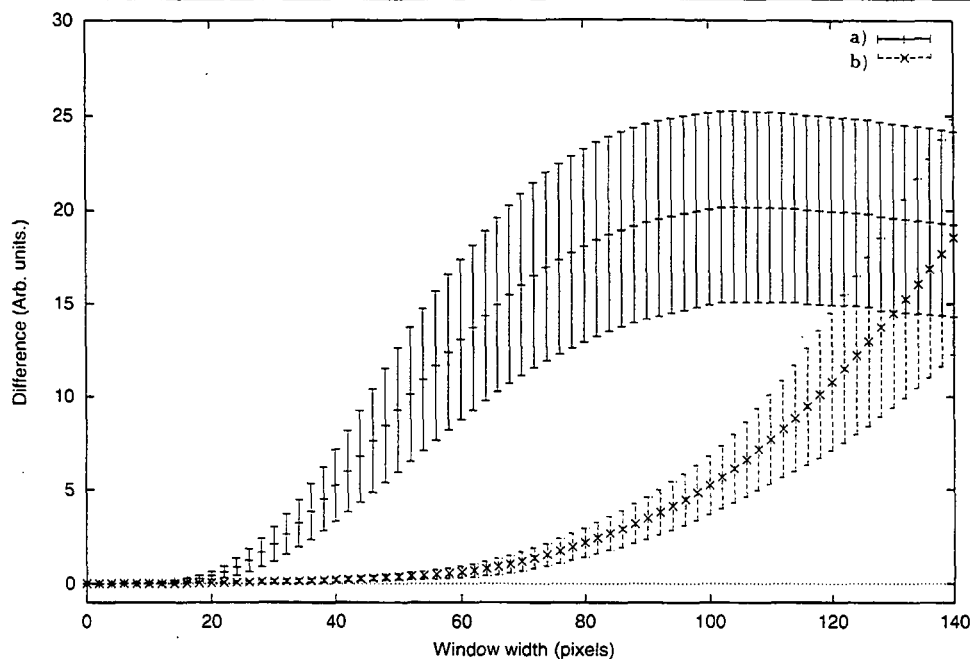
²Dette program er udarbejdet af Jonas Lundbek Hansen, NBI.



Figur 6.10 På figuren ses fire 5-kantede polygoner, der er observeret ved fire forskellige h_{ext} . Polygonen i henholdsvis venstre øverste hjørne, i højre øverste hjørne, i nederste venstre hjørne og i højre nederste hjørne er observeret ved h_{ext} 4.66 mm, 4.87 mm, 5.08 mm og 5.29 mm.



Figur 6.11 På figuren ses de fire polygoner fra figur 6.10, hvor den overflødige information er fjernet fra billederne. Det ses, at hjørnernes form ikke ser ud til at være den samme. Ophavsret til figurskitse Jonas L. Hansen, NBI.



Figur 6.12 På figuren ses fejlen som funktion af vinduesbredden. Det ses på figuren, at polygoner observeret ved samme h_{ext} , imodsætning til polygoner ved forskellig h_{ext} , har samme hjørneform. Ophavsret til figur Jonas L. Hansen, NBI.

esbredden kan da vise hvor stort et område omkring hjørnerne af to eller flere polygoner der er vellignende. Figur 6.12 viser sammenligningen af de to 5-kantede polygonhjørner observeret ved $h_{ext} = 4.87$ mm og $h_{ext} = 5.29$ mm. Dette er på figuren angivet ved (a). Desuden sammenlignes den 4-kantede og 5-kantede polygons hjørner, observeret ved samme $h_{ext} = 5.29$ mm. Dette er på figuren angivet ved (b). Det ses, at fejlen på (b) helt ud til omkring 60 pixels, er lille i modsætning til (a) hvor fejlen allerede vokser ved 20 pixels. Alle hjørner vil naturligvis altid ligne hinanden ved meget små vinduesbredder dvs. et lille område omkring hjørnerne, hvilket naturligvis ikke er særlig interessant. Det interessante er derimod, hvor stort et område (vinduesbredde) omkring to eller flere polygoners hjørner der er vellignende (lille fejl). Hjørneundersøgelsen giver således et godt indicium for, at forskellige polygoners hjørner ved samme h_{ext} har samme form mens polygoner, observeret ved forskellige h_{ext} har forskellig form.

Afslutningsvis skal bemærkes at det, at hjørnerne har samme form for samme h_{ext} betyder, at det udelukkende er formen af hjørnet, der er det afgørende i type II. Det betyder således, at blot formen af hjørnet i polygonen er den samme, er der ikke noget i vejen for, at der kan eksistere flere polygoner for samme h_{ext} . Da formen af hjørnet skal være det samme i polygonen, betyder det at siderne i polygonen må indrette sig efter det, og derfor kan eksistensen af konkave og konvekse polygoner forklares. Det skal bemærkes, at denne undersøgelse ikke har givet noget svar på **hvorfor** hjørnet skal have samme form (krumning) for samme h_{ext} .

6.5 Hvilke kriterier en simpel polygonmodel skal opfylde

Kravet til en simpel polygonmodel er, at den skal kunne reproducere de to helt basale træk ved type II. For det første skal en model kunne reproducere at hjørner i en polygon reduceres en efter en, når h_{ext} øges gradvist se fasediagram 6.1 på side 72. For det andet skal modellen kunne reproducere, at for samme h_{ext} er hjørneformen på polygoner konstant, hvilket gør eksistensen af konkave og konvekse polygoner mulige.

Kapitel 7

Model type II

Der findes på nuværende tidspunkt hverken analytiske eller numeriske løsninger, der beskriver type II, der er karakteriseret ved en roller liggende i overfladen af springet. Derfor er polygonmodellen konstrueret, der har til formål at identificere de parametre, der måtte være relevante, så polygonfænomenet kan forklares kvalitativt. De to modeller, model type I og model type II, er derfor ikke på samme matematiske niveau, og kan derfor ikke sammenlignes, men må behandles hver for sig, idet de beskriver to helt forskellige tilstande af det hydrauliske spring. Det skal indledningsvis præciseres, at der til dato hverken eksisterer nogen model, der kan beskrive overgangen mellem type I og type II, eller om det er muligt at model type I og type II eventuelt kan samles i en model.

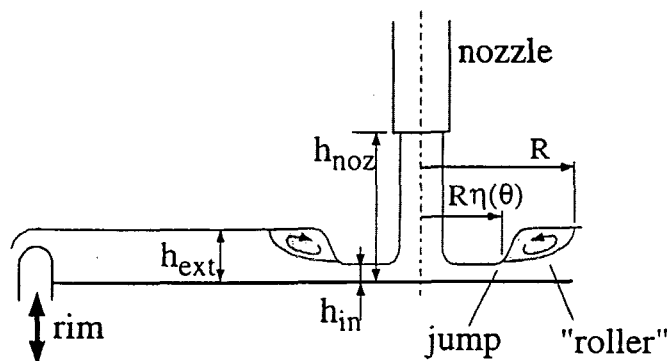
7.1 Modelovervejelser

Præsentationen af model type II er primært baseret på et artikeludkast, vores publicerede artikler, samt interne håndskrevne noter [4, 23, 24, 41, 42, 43]. I dette afsnit redegøres for de overvejelser, der er gjort ved konstruktionen af model type II. Disse overvejelser bygger på de eksperimentelle observationer, der er gjort af polygoner, som blev præsenteret i forrige kapitel. Det er kun i type II tilstanden, at der observeres polygoner. Derfor må forklaringen på deres eksistens søges i tilstedeværelsen af rolleren, der først skabes efter overgangen fra type I. Det er derimod ikke indlysende, hvordan man præcis skal modellere, hvilken indflydelse rolleren har for skabelsen af polygonspringet. En idé er baseret på, at polygoner med et lille antal hjørner har en mindre gennemsnits radius. Hvis det antages, at rolleren har tilbøjelighed til at have en foretrukket længde, da ville den given radius bestemme, hvor mange hjørner der kunne passe ind. Det er naturligvis ikke klart, hvad der kunne bestemme en sådan længde, og om dette "billede" overhovedet er fysisk. En anden idé er, at betragte rolleren som en elastisk stang, der laver et skarpt knæk, når den bøjes over en vis kritisk krumning, men hvor krumningen må introduceres ad hoc. Idéen i at betragte rolleren som et elastisk medium er udelukkende baseret på, at det eksperimentelt er observeret, at en polygon er karakteriseret ved at bestå af meget

markerede hjørner. Man kan således betragte eks. en 5-kantet polygon som opstået ved, at rolleren er "knækket" 5 steder, hvor "knækkene" således danner hjørnerne på polygonen. At rolleren optræder som et elastisk medium, kan således være den direkte årsag til, at polygonstrukturen opstår. Da rolleren ikke eksisterer i type I, er der således ingen steder hvor springet "knækker", og derfor vil man aldrig observere polygoner her men kun et cirkulært spring. I næste afsnit introduceres polygonmodellen. Den er ikke mere rigoristisk, end de to ovenstående nævnte idéer til modeller, men kan løses og forklarer en kvalitativ afhængighed af de eksperimentelle parametre der indgår.

7.2 Karakteristiske egenskaber ved polygoner

Inden jeg skal præsentere model type II, vil jeg kort opsummere, hvad der var karakteristisk ved polygoner. På figur 7.1 ses en skitse af et polygonspring set fra siden. Det ses, at rolleren er beliggende rundt omkring springet. Det ses, at radius af polygonspringet er givet ved $r = R\eta(\theta)$, hvor det bemærkes, at radius er blevet afhængig af azimuthhalvinklen θ . Polygonens ydre radius er givet ved $r = R$ der med god tilnærmelse er cirkulær og markerer positionen af separationen, der ikke er vist på figurskitzen.

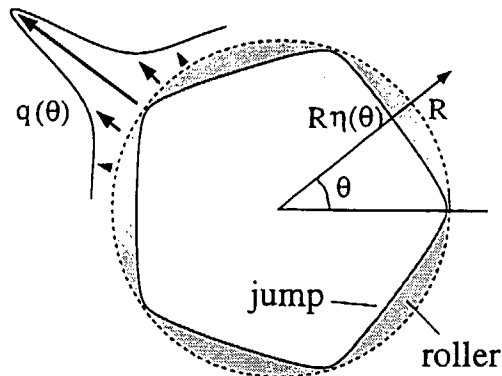


Figur 7.1 Figuren viser en skitse af et polygonspring set fra siden, hvor rolleren ses liggende i overfladen af springet. Figuren viser ikke separationen. Den ydre radius ligger i afstanden R fra centrum, og radius af polygonspringet er $R\eta(\theta)$, der er blevet afhængig af azimuthhalvinklen θ . Figur frit efter [4].

7.2.1 Antagelser i model type II

Som nævnt i forrige kapitel bevæger hovedstrømmen sig under rolleren, hvilket resulterer i en gnidningskraft mellem roller og hovedstrøm. Hovedstrømmen der bevæger sig under rolleren, er netop årsag til, at rolleren roterer ind mod springet. Jo bredere rolleren er des

større gnidningskraft. Dette bekræftes netop fra eksperimentelle data, idet den største væsketransport sker igennem hjørnerne, hvor rollerens bredde er lille (lille gnidningskraft) og lille væsketransport mellem hjørnerne, hvor rolleren er bredere (stor gnidningskraft). Det betyder derfor at den radiale og homogene flux der kommer fra væskestrålen, omfordeles fra polygonens sider til hjørner. Hvilket gør at den lokale flux q , nu afhænger af azimutalvinklen θ , som skitseret på figur 7.2. Størrelsen $\eta(\theta)$ er en dimensionsløs funktion,



Figur 7.2 Figuren viser, en skitse af en 5-kantet polygon set ovenfra. Figuren viser, hvad der eksperimentelt er observeret, nemlig at den største væsketransport foregår igennem polygonens hjørner og i mindre grad mellem hjørnerne. Desuden ses, at polygonens radius $r = R\eta(\theta)$ er blevet afhængig af vinklen θ . Figur taget fra [4].

der gælder i intervallet $0 < \eta(\theta) < 1$. Væskehøjderne h_{in} og h_{ext} ses at være uafhængige af vinklen θ . Rolleren antages at være et væskelegeme, der ligger på samme position i springet med en indre rotations energi og separeret fra den øvrige del af væsken. Det er naturligvis ikke korrekt, men til dato kendes det præcise strømnings mønster for polygoner ikke, og for det andet er det blot hensigten at få en så simpel model som mulig. Derfor disse, til tider meget grove antagelser som har til formål at modellen bliver så simpel som mulig, da hensigten med denne polygonmodel kun er at identificere relevante parametre og kvalitativt forklare mekanismerne i type II.

Kræfter på rolleren

Det er opgaven at forbinde den lokale flux $q(\theta)$ med $\eta(\theta)$. Det gøres ved at betragte den radiale kraftbalance på rolleren. Rolleren er påvirket af en trykkraft der kommer fra den væske der ligger udenfor springet. Denne trykkraft pr. enhedsvinkel θ er indadrettet og antages hydrostatisk. Desuden er rolleren påvirket af en shearkraft, der kommer fra den væske, der bevæger sig under rolleren. Shearkraften pr. endhedsvinkel θ er udadrettet, men estimeret af den er mere besværlig, og er derfor nødvendigvis baseret på et groft skøn.

Den estimerede trykkraft pr. enhedsvinkel varierer op igennem rolleren, og udregnes ved

$$F_{hydrostatisk} = R \int_{h_{in}}^{h_{ext}} p(z) dz \quad (7.1)$$

$$= R \int_{h_{in}}^{h_{ext}} \rho g (h_{ext} - z) dz$$

$$= \frac{1}{2} \rho g R (h_{ext} - h_{in})^2 \quad (7.2)$$

hvor ρ er densiteten af væsken, g er tyngdeaccelerationen, og R er den ydre radius på polygonen.

For at give et estimat af shearkraften, antages det, at en typisk radial hastighedsgradient ved springet kan skrives som (v^*/h^*) . Det antages at shearkraften er proportional med denne hastighedsgradient og med rollerens bundareal A . Shearkraften pr. enhedsvinkel θ kan derfor skrives som

$$F_{shear} = \mu \left(k \frac{v^*}{h^*} \right) A \quad (7.3)$$

$$= \mu k \frac{v^*}{h^*} \left(R - \left(\frac{R - R\eta}{2} \right) \right) (R - R\eta) \quad (7.4)$$

$$= \mu k \frac{v^*}{h^*} R^2 \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) (1 - \eta) \quad (7.5)$$

hvor k er en konstant der indgår i hastighedsgradienten, og hvor μ er den dynamiske viskositet. Da rolleren ligger på samme position i springet, er den resulterende kraft pr. enhedsvinkel på rolleren nul

$$F_{roller} = F_{shear} - F_{hydrostatisk} = 0 \quad (7.6)$$

⇕

$$F_{roller} = F_{shear} - F_{hydrostatisk} \quad (7.7)$$

$$= \mu k \frac{v^*}{h^*} R^2 \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) (1 - \eta) - \frac{1}{2} \rho g R (h_{ext} - h_{in})^2 = 0 \quad (7.8)$$

hvor 7.2 og 7.5 er indsat i ligning 7.6. Positionen og højden af springet angives som gennemsnitsværdier, og er $r^* = R(1 + \eta)/2$ og $h^* = (h_{ext} + h_{in})/2$. En typisk værdi for den lokale flux er $q = r^* v^* h^*$. Vi indsætter $v^* = q/r^* h^*$, r^* og h^* i 7.8 og får

$$\mu k \frac{q}{\left(\frac{h_{ext} + h_{in}}{2} \right)^2 \left(\frac{R(1 + \eta)}{2} \right)} R^2 \left(\frac{1 + \eta}{2} \right) (1 - \eta) = \frac{1}{2} \rho g R (h_{ext} - h_{in})^2 \quad (7.9)$$

Hvor ligning 7.9 efter en smule algebra reduceres til

$$q(1 - \eta) = \frac{g}{8\nu k} \left((h_{ext})^2 - (h_{in})^2 \right)^2 = \text{konstant} \quad (7.10)$$

hvor relationen mellem den dynamiske og kinematiske viskositet $\nu = \mu/\rho$ er anvendt.

Vi bemærker, at ligning 7.10 ikke afhænger af radius R , og bemærker desuden, at fluxen $q(\theta) \propto 1/(1 - \eta(\theta))$ er omvendt proportional med den dimensionsløse bredde af rolleren $(1 - \eta(\theta))$. Når η er tæt på 1, dvs. ved polygonens hjørner, kan den lokale flux blive vilkårligt stor, hvilket er i fuld overensstemmelse med eksperimentelle data. Vi skal desuden bemærke, at ligning 7.10 angiver en endelig konstant værdi, idet alle størrelser på højresiden er endelige størrelser.

Variationsmodel

Fra ligning 7.10 så vi, at den lokale flux q ved polygonens hjørner kunne blive vilkårligt stor. Der gælder imidlertid ud fra princippet om fluxbevarelse, at den totale flux $Q = \int_0^{2\pi} q d\theta$ er konstant og dette sætter en betingelse. Denne betingelse udregnes ved indsættelse af q i Q hvilket giver

$$Q = \int_0^{2\pi} q d\theta \quad (7.11)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{g \left((h_{ext})^2 - (h_{in})^2 \right)^2}{8k\nu} \frac{1}{1 - \eta} d\theta \quad (7.12)$$

⇕

$$\frac{8k\nu Q}{g \left((h_{ext})^2 - (h_{in})^2 \right)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \eta} d\theta \quad (7.13)$$

Vi definerer nu $1/(1 - \eta) = G(\eta)$ og

$$\phi = \frac{8k\nu Q}{g \left((h_{ext})^2 - (h_{in})^2 \right)^2} \approx \frac{\nu Q}{gh_{ext}^4} \quad (7.14)$$

hvor typiske eksperimentelle værdier giver at forholdet $h_{in}/h_{ext} \approx 1/10$, og k er af størrelsesorden $O(1)$. Betingelsen 7.11 der giver 7.13 kan nu efter substitution af $G(\eta)$, og ϕ skrives som

$$\phi = \int_0^{2\pi} G(\eta) d\theta \quad (7.15)$$

hvor ϕ angiver den dimensionsløse flux. Der er stadig mange η , der tilfredsstiller 7.15. Der mangler derfor yderligere et kriterie for, at en bestemt form (af springet) kan vælges.

Det er eksperimentelt observeret, at når man forstyrrer en side i en polygon med en pind, opfører dens form sig, som var den en elastisk "streng" der genfinder sin oprindelige form, den havde før forstyrrelsen, via svage dæmpede svingninger. Det er derfor naturligt at postulere eksistensen af en svag *line tension*, så springet langsomt udvikles mod en stationær form med minimal omkreds. Ved at postulere denne line tension fås en model, der kan løses som et variationsproblem under en bibetingelse. Variationsproblemet, der er løst numerisk¹, er at bestemme den mindste omkreds af en polygons spring under bibetingelsen 7.15. I næste afsnit præsenteres modelresultaterne, da det ligger udenfor denne afhandlings rammer, at beskrive hvordan dette variationsproblem løses.

7.3 Modelresultater

Resultaterne af at løse model type II kan ses på figur 7.3, hvor fire forskellige polygoner ses. Billederne viser en 8, 5, 3 og 2-kantet polygon. I hvert nedre venstre hjørne af hvert billede ses den numeriske løsning (beregnete former af springet) af model type II. Det ses, at modellens løsninger kvalitativt ligner godt. Dog er modellens løsning af 2-kanten ikke helt i overensstemmelse med den observerede. Det skal bemærkes, at funktionen η er antaget glat, men ændrer sig voldsomt nær "hjørnerne" i god overensstemmelse med observationerne. Modellen kan reproducere alle observerede polygoner fra 2 til 14-kanter. Dog kan modellen **kun** reproducere polygoner med lige sider, men hverken konkave eller konvekse polygoner. Her skal modellen modificeres så disse fænomenologiske træk af polygoner kan beskrives.

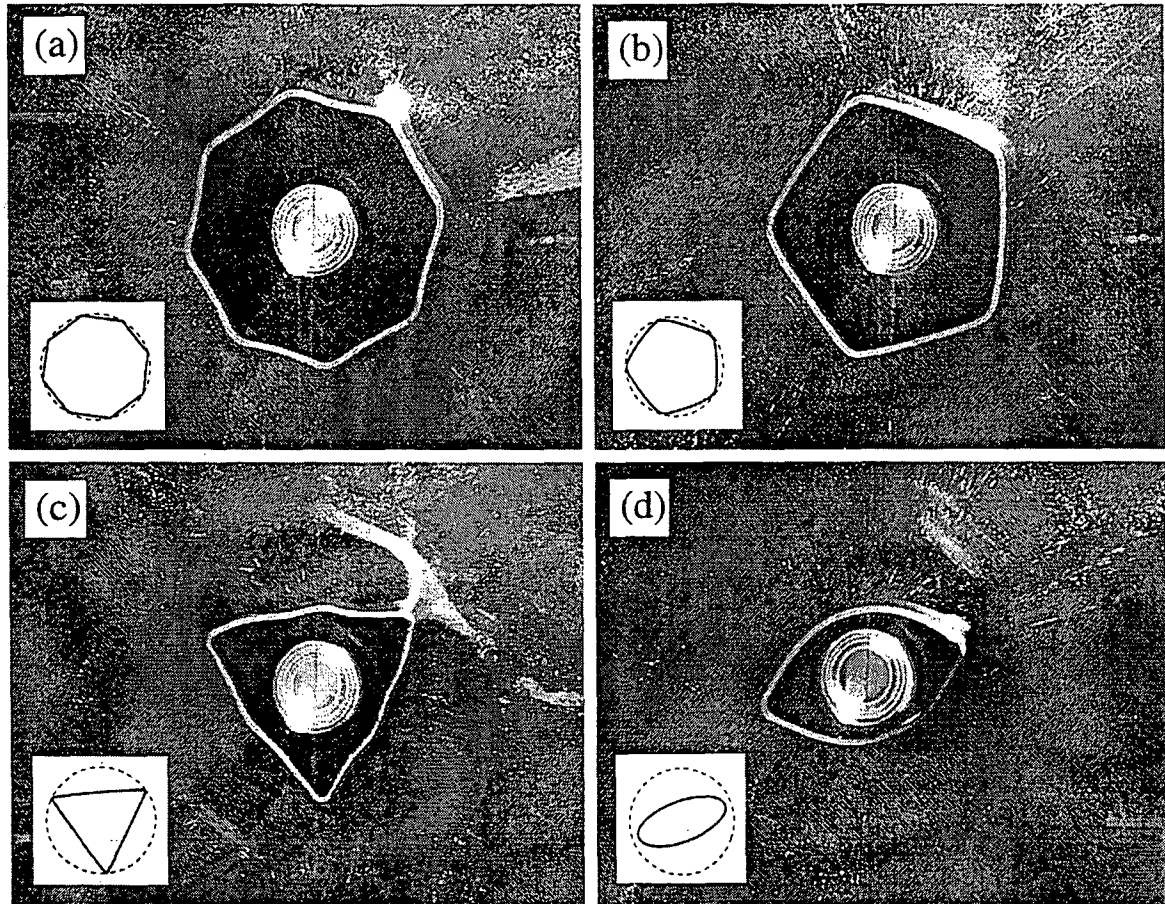
Modellens løsninger angives ud fra modellens dimensionsløse parameter ϕ . Ud fra denne parameter kan vi i detaljer checke, om modellens øvrige resultater stemmer overens med de eksperimentelle data. Modellens løsninger er

- 1 Det cirkulære hydrauliske spring eksisterer for alle ϕ , og dette er den eneste løsning for små ϕ .
- 2 Et polygon spring med et givent antal hjørner findes kun i et interval af ϕ ; flere hjørner i polygonen fås når ϕ vokser.
- 3 Intervallerne overlapper, så flere polygoner kan være løsninger for samme værdi ϕ .

Modellens resultater og de eksperimentelle data sammenlignes via den dimensionsløse flux ϕ , der var givet ved $\phi \approx \frac{\nu Q}{g h_{ext}^4}$.

- 1 Ifølge eksperimentelle data gælder, at når ν er lille (eks. væsken vand), eksisterer der ikke stabile polygoner men derimod det cirkulære spring. Dette kan modellen redegøre for, da det cirkulære spring netop kun eksisterer for små ϕ dvs. små ν .

¹Den numeriske løsning af problemet er udført af Shinya Watanabe samt en yderligere detaljeringsgrad for dette problem er skitseret i [4].



Figur 7.3 Figuren viser en 8, 5, 3, 2 kantet polygon med modellens løsninger indsat i hvert billedes venstre nedre hjørne. Figur taget fra [24].

- 2 Ifølge de eksperimentelle data, se fasediagram 6.1 side 72, gælder at for aftagende h_{ext} øges antallet af hjørner i polygonen en efter en. Dette kan modellen redegøre for, da flere hjørner i polygonen netop fås for store ϕ dvs. for små h_{ext} .
- 3 Ifølge eksperimentelle data gælder at for en fast værdi af h_{ext} , eksisterer der flere polygoner (hysteresse). Dette kan modellen også redegøre for, idet dens løsninger giver, at der for samme ϕ eksisterer flere løsninger ("polygonformer").

Det skal her afslutningsvis bemærkes, at faldhøjden ikke indgår direkte i modellen, men indirekte via h_{in} . Fra eksperimentelle data gælder, at tykkelsen af det tynde væskelag afhænger af faldhøjden, da en stor faldhøjde for de øvrige parametre fastholdt, gør værdien af h_{in} mindre. Ud fra modellens dimensionsløse flux ϕ ses at h_{in} ikke indgår men derimod Q . Der gælder derfor, at ϕ afhænger direkte af Q , hvorimod ϕ ikke afhænger af h_{in} dvs. h_{noz} hvilket ligeledes er i overensstemmelse med de eksperimentelle data, se tolkning af fasediagrammer side 73.

7.4 Opsamling

På baggrund af undersøgelsen af type II præsenteret i sidste kapitel, er en polygonmodel fremstillet, der i høj grad er en fænomenologisk model, ligesom model type I er. Det primære i polygonmodellen var, at betragte rolleren som central i modelbeskrivelsen. At betragte den radiale kraftbalance på rolleren resulterede i en omvendt proportionalitet mellem flux og rollerens bredde ($1 - \eta(\theta)$). Der var mange η , der tilfredsstillede denne kraftbalance. For at vælge en særlig form af springet ("polygonformer") var endnu et kriterie nødvendigt. Der blev introduceret en line tension på baggrund af observationerne. Dette resulterede i en model der kunne løses som et variationsproblem. Det bestod i at finde den mindste omkreds for polygonspringet under bibetingelsen 7.15 (for en given "påtrykt" flux). Modellens resultater viste, at den kan beskrive mange kvalitative træk ved polygonfænomenet, men kan imidlertid ikke reproducere konkave og konvekse polygoner som observeret.

Kapitel 8

Diskussion

Den videnskabelige metode sigter mod en forståelse af, de fænomener der observeres. Fænomenet er forstået, når man har en teori, der kan redegøre for det observerede. Indenfor hydrodynamik er hovedhjørnestenen Navier-Stokes ligning, der kan beskrive alle væskefænomener. Problemet med denne ligning er dog, at den er uløselig i mange tilfælde, selv numeriske løsninger er ikke tilgængelige [4]. For at udvikle en model der kan beskrive et fænomen, vil man i mange tilfælde forsøge, at isolere de væsentlige parametre for det fænomen man undersøger. En god model er således en model, der kan beskrive væsentlige karakteristika ved fænomenet samtidig med, at den er så simpel, at man forstår, hvad der er det væsentlige for fænomenet.

CATS formål med at studere det hydrauliske spring er, at udvikle en samlet teori der kan beskrive hele parameterområdet dvs. type I, type II og overgangen mellem type I og type II. Denne teori eksisterer ikke i skrivende stund, men for at kunne udvikle denne teori er et kendskab til parameterområdet nødvendig, hvilket er grunden til, at det hydrauliske spring studeres på NBI. Indtil videre er målet langt fra nået. Det grundlæggende problem har indtil nu været, at model type I ikke kan redegøre for rolleren, der som bekendt opstår når $h_{ext} > h_{kritisk}$. Studiet af det hydrauliske spring foregår således ved, som præsenteret i kapitel 3 og 7, i første omgang at udvikle simple modeller for henholdsvis type I og type II, og derigennem prøve at forstå hvad de væsentlige parametre er.

I dette kapitel skitseres, hvor langt vi er i forståelsen af det hydrauliske springs parameterområde. Fremgangsmåden i dette kapitel er, at opsummere hvad vi nu ved om parameterområdet og hvilke konklusioner vi kan drage af modelresultaterne samt, at skitsere den idé CATS gruppen har til en samlet model.

8.1 Type I

8.1.1 Eksperimentelle observationer

I nogle af de første eksperimenter blev vand anvendt i studiet af det hydrauliske spring. Det hydrauliske spring er dog meget følsomt overfor forstyrrelser og derfor uegnet til studier af stationære tilstande. I gennem studiet af det hydrauliske spring har det været hensigten at studere det under stationære betingelser. Der blev derfor anvendt en mere viskos væske (ethylen-glycol 99%), hvor springet er yderst veldefineret og perfekt cirkulært. Det hydrauliske spring kan således studeres under stationære betingelser.

På figur 1.8 side 7 så vi, at springets radius gravist mindskes ved gradvis øgning af h_{ext} . Som følge af at h_{ext} øges, mindskes springets radius, men springet bliver også stejlere. Desuden ses, at væskehøjderne h_{in} og h_{ext} med god tilnærmelse er konstante, hvor h_{in} dog først er konstant et stykke væk fra strålen, idet væskelaget tæt på strålen har en konkav form, se figurskitse på side 9. I kapitel 5 så vi, at h_{in} mindskes når h_{noz} øges.

At der ved springet opstår separation er f.eks. beskrevet i [12, 26, 36]. Ved at putte aluminiumsglimmer i væsken visualiseres separationen, hvis position er ved springet tæt på bunden. Glimmeret anvendes også til at vise den kvalitative forskel på partikelhastighederne før og efter springet. Her ses tydeligt, at partiklerne har en større fart før springet og mindre efter springet.

Man kan desuden let observere at springets radius afhænger kraftigt af fluxen, idet en større (mindre) flux resulterer i en større (mindre) radius af springet.

8.1.2 Modelovervejelser og formål med model type I

At model type I tager udgangspunkt i Prandtl's grænselagapproximation (Pga) 2.24 og kontinuitetsligningen 2.25, præsenteret på side 17 og grænsebetingelserne i afsnit 2.1.2, er baseret på en implicit antagelse. Den implicitte antagelse er, at det hydrauliske spring kan beskrives som et radiale flow med nogle specificerede grænsebetingelser for en given radius [40] s. 3–4. Udover den implicitte antagelse skal desuden gælde, at det hydrauliske spring opfylder de betingelser, som ligning 2.24, 2.25 og grænsebetingelserne er udledt under. I kapitel 2 så vi, at de betingelser, som 2.24 og 2.25 var beregnet til at beskrive, var et tyndt væskelag tæt på et fast legeme, hvor viskose kræfter var af stor betydning, da hastighedsgradienterne her var store. Disse krav kunne med god ret opfyldes for det hydrauliske spring.

Fra eksperimentelle observationer vides, at udover at væskelaget er tyndt, har partiklerne i det tynde væskelag en "stor" fart ($u \approx 1 - 2$ m/s), hvilket resulterer i store hastighedsgradienter, hvilket ligning 2.24 netop tager højde for. Desuden skal det hydrauliske spring kunne betragtes som et stationært flow, for at Pga kan anvendes. Ved anvendelse af væsken ethylen-glycol blev springet yderst veldefineret, og det kunne derfor

antages stationært, hvilket reducerede Navier-Stokes ligning 2.3 og 2.4 til 2.14 og 2.15 da $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$

En anden vigtig approksimation der skal være opfyldt for at ligning 2.24 kunne anvendes var at $u \gg w$. Dette gælder ikke tæt på væskestrålen, men hvornår $u \gg w$ gælder er ikke indlysende [9]. I princippet kunne det afklares for hvilken radius relationen gælder ved at anvende LDV, hvor det ville være "nemtest" at anvende et 2D LDV, så måling af u og w kunne foretages på samme tid. Ved anvendelse af 1D LDV kræves imidlertid, at laserkrydset bliver drejet halvfems grader, så vertikale hastigheder kan måles, men dette har på grund af praktiske problemer ikke været muligt.

Løsningen af Pga rummer stadig vanskeligheder, så en yderligere forenkling er nødvendig. En approksimations metode der forenkler Pga væsentligt, var Karman & Pohlhausens midlingsmetode. Vi så i kapitel 3 at ved at anvende midlingsmetoden og negligere w i ligning 3.10 side 26, ved anvendelse af kontinuitetsligningen 3.11, blev Pga reduceret væsentligt til ligning 3.23 på side 28. I [33] kap. 10 vises, at et godt indicium på at Karman & Pohlhausens midlingsmetode er en god approksimation er, at den er anvendt på et problem, der kan løses eksakt. Afvigelsen på den eksakte og den approksimative løsning er af størrelsesorden 5%.

I model type I indgik væskestrålen ikke i beskrivelsen idet, dels sammenhængen mellem den vertikale væskestråle og grænsebetingelserne for det radiale flow langt fra er simpel [40] s. 4 og dels, at model type I i første omgang ville blive unødigt kompliceret. Væskestrålen blev i model type I erstattet af en begyndelsesbetingelse. I den simple modelbeskrivelse blev en simpel hastighedsprofil som begyndelsesbetingelse antaget. I den udbyggede modelbeskrivelse blev hastighedsprofilen antaget som et lavere ordens polynomium. Fælles for disse begyndelsesbetingelser var, at de blev antaget gældende fra $r_0 \approx 5$ mm, og dermed at Model type I gjaldt herfra.

Den kinematiske og dynamiske grænsebetingelse, der blev udledt i kapitel 2, blev ligeledes udledt ved at betragte det hydrauliske spring som et stationært flow. Desuden blev den dynamiske grænsebetingelse stærkt forsimplet fra de komplekse grænsebetingelser givet ved 2.36 og 2.37 til ligningerne 2.41 og 2.42, idet $h' \approx 0$ gjaldt, dvs. konstant væskelags tykkelse. Dette kunne, ud fra eksperimentelle data, med god tilnærmelse retfærdiggøres før og efter springet. Forsimplingen af den dynamiske grænsebetingelse betød, at man kunne se bort fra overfladespændingseffekter i model type I.

Forsimplingen af den dynamiske grænsebetingelse til ligningerne 2.41 og 2.42 henover springet er derimod mere problematisk, idet der her gælder at $h' \neq 0$, da væskelaget vokser kraftigt henover springet. Trods det at approksimationen er problematisk henover springet, blev den alligevel gjort for at forsimple grænsebetingelserne.

De præcise grænsebetingelser ved den ydre kant kendes ikke særlig godt, men der er taget højde for dette ved konstruktionen af den specialdesignede opstilling. Afstanden mellem den ydre kant og positionen af springet er ≈ 200 mm. Derved er effekten af den ydre kant begrænset til kun, at kontrollere h_{ext} uden at forstyrre flowet nær springet [4].

Den simple modelbeskrivelse

Formålet med den simple modelbeskrivelse var primært, dels at isolere de fysiske parametre der havde betydning for springets opståen, og dels at give et estimat af springets radius. I artikel [9] blev vist, at den non-viskose teori var for simpel til at estimere et udtryk for radius af springet. Udgangspunktet var dernæst at anvende en simpel viskos teori dvs. den midlede Pga. Begyndelsesbetingelsen var at antage en hastighedsprofil gældende fra r_0 . Værdien for $r_0 \approx 5$ mm var valgt tæt på den vertikale væskestråle.

Resultaterne fra den simple model ligning 3.31 på side 29 gav integralkurverne på figur 3.1. Som vi så snoede integralkurverne sig omkring punktet $(r,v)=(1,1)$. Det er blevet undersøgt om nogle af de centrale approksimationer i den simple modelbeskrivelse var direkte/indirekte årsag til integralkurvernes snoede egenskaber. Viskositetsleddet givet ved

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (8.1)$$

der ved udledningen af Pga ikke havde betydning ved beskrivelse af et grænselag, kan inkluderes i den simple model. Dette ændrer imidlertid ikke på integralkurvernes snoede egenskaber, der er årsag til, at de indre løsninger bryder sammen. Integralkurvernes snoede egenskaber forsvinder heller ikke, hvis overfladespændingseffekter inkluderes [9] i den simple model, givet ved ligning 2.38 side 19. Derved har viskositetsleddet 8.1 og overfladespændingseffekter ikke nogen betydning for resultatet.

I modelbeskrivelsen blev der set bort fra, hvordan strømningens mønsteret ved springet var, og der blev udelukkende betragtet som et shock for at simplificere modellen yderligere. Ved at viskositet indgår i modelbeskrivelsen kan der gives et estimat for radius af springet. Viskositet er således en vigtig fysisk parameter, der skal indgå i modelbeskrivelsen.

Modelresultaterne, angivet på graf 3.1 gav ikke mening før singulariteten, der opstod ved $r = r_*$ blev tolket som den ydre kant. Derved kunne løsningen forstås, idet den voldsomme hastighedsstigning blev tolket som væsken der flød over den ydre kant og derved blev accelereret. Under antagelse af at approksimationerne, der er gjort undervejs, er fornuftige, og at det hydrauliske spring kan beskrives via Pga, kan det ud fra modelresultaterne konkluderes, at springet ikke kan opstå på en uendelig plade, idet der ikke eksisterer løsninger efter $r = r_*$. Når derimod $r = r_*$ blev tolket som den ydre kant, dvs. en endelighed i modellen, kunne løsningerne forstås, og et estimat af springets radius kunne gives.

Samlet kan siges at: ...Resultaterne er overraskende gode i betragtning af de mange approksimationer der er gjort undervejs for at opnå ligning 3.31 [9].

Den udbyggede modelbeskrivelse

Selvom den simple model kunne reproducere en del træk af det hydrauliske spring, var den stadig for simpel idet, separationen der opstår ved springet, blev negligeret og blot

erstattet med et shock. Dette må model type I nødvendigvis kunne redegøre for. Den simple model blev derfor modificeret til den udbyggede modelbeskrivelse, så den var istand til at beskrive endnu et vigtigt træk ved det hydrauliske spring. Der var imidlertid et problem, der skulle overvindes, før Pga kunne anvendes til at beskrive separation, idet Pga generelt er singularær ved separationspunkter [29]. I CATS gruppen har man fundet en metode til hvordan, man alligevel kunne anvende Pga til beskrivelse af separation i en væske med fri overflade. Ved anvendelse af Karman & Pohlhausens midlingsmetode samtidig med at hastighedsprofilen blev antaget at være givet ved et polynomium gældende fra r_0 , forsvandt singulariteten ved separationen, og strømningsmønsteret ved springet kunne beskrives.

I kapitel 3 side 36 og 38 blev resultaterne for modellen præsenteret. På figur 3.5 så vi, at modelresultaternes højdeprofil var i god overensstemmelse med den målte. Dog gav modellens resultater en større værdi for radius af springet end den målte. Desuden var modellens beregnede overfladehastigheder i modsætning til de målte for samme værdier af r , generelt mindre. Til sidst er det vigtigt at bemærke, at model type I er en fænomenologisk model, idet dens input består af eksperimentelle data.

Samlet kan siges at model type I er en god model, da den kan beskrive væsentlige karakteristika ved det cirkulære hydrauliske spring. Det kan uddrages, at overfladespændingseffekter ikke er essentielt i forståelsen af det cirkulære hydrauliske spring, men derimod at viskositet er af afgørende betydning for springets opståen og er derved en afgørende parameter der skal indgå i en modelbeskrivelse.

8.1.3 Eksperimentel undersøgelse af udvikling af grænselag

I kapitel 5 blev undersøgt, hvornår grænselaget var udviklet i det tynde væskelag h_{in} . De centrale grafer der viser, hvornår grænselaget er udviklet er 5.13 på side 66 og 5.15 på side 68. På graf 5.13 ses, at grænselaget med sikkerhed udvikles mellem 6.5 mm og 10.0 mm og mellem 10.0 mm og 13.0 mm. Vi kan med sikkerhed fastslå, at grænselaget er fuldt udviklet ved $r_{udviklet} = 13.0$ mm. Det kan dog, ud fra målingerne, ikke yderligere præciseres om grænselaget udvikles langsomt eller hurtigt mellem 10.0 mm og 13.0 mm, eller præcist for hvilken værdi af r grænselaget udvikles. Det ville kræve flere målepunkter mellem 10.0 mm og 13.0 mm at afgøre dette.

På graf 5.15 ses, at grænselaget med sikkerhed udvikles mellem 7.0 mm og 10.5 mm. Vi kan med sikkerhed fastslå, at grænselaget er fuldt udviklet ved $r_{udviklet} = 10.5$ mm. Det kan dog, ud fra målingerne, heller ikke her præciseres yderligere om grænselaget udvikles langsomt eller hurtigt mellem 7.0 mm og 10.5 mm, eller præcist for hvilken værdi af r grænselaget udvikles. Dette ville også her kræve flere målepunkter mellem 7.0 mm og 10.5 mm at afgøre dette.

Samlet kan siges ud fra disse målinger, at grænselaget ikke er udviklet ved $r_0 \approx 5$ mm, og det er derfor ikke rimeligt at antage at model type I gælder herfra.

8.2 Overgang fra type I til type II

Overgangen mellem type I og type II er den af parameterområdet, der er mindst undersøgt og desuden det område, vi ved mindst om, og der er kun idéer til en model, der kan beskrive dette parameterområde. Den primære grund til at en model ikke eksisterer for overgangen er, at der skal anvendes en non-stationær teori dvs. $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ da overfladen her fluktuerer og er urolig. Denne non-stationære teori eksisterer ikke i skrivende stund, men det er målet for CATS gruppen at forsøge at udvikle denne teori, se også afsnit 8.4.

Under vores undersøgelse af type II har vi dog fået et lille kendskab til overgangen mellem type I og type II, idet vi for hver måling vi foretog, gik igennem hele parameterområdet. Dette blev præsenteret i fasediagrammerne 6.1 i side 72. Overgangen mellem type I og type II blev på fasediagrammerne angivet som I_f . I dette område kan væsken ikke betragtes som et stationært flow. Væskeoverfladen er urolig og fluktuerer. Desuden ses at det før så stabile cirkulære spring bliver et fluktuerende spring, der "omstruktureres" til et polygonspring. Dette ses ved, at springet ændres til et svagt "mangekantet" fluktuerende spring.

Omstruktureringen af flowet i overgangen har absolut en betydning for dannelsen af rolleren. Dannelsen af rolleren kan forstås ved at betragte omstruktureringen af springet analogt til bølge brydning. På højdeprofilen 1.8 side 7 så vi, at springet bliver mere og mere stejlt i overgangen. I overgangen ses at jo mere stejlt springet bliver, des mere fluktuerende og uroligt. Til sidst er springet lodret for til sidst at få overbalance ("bølgen brydes"), og den nye laminare tilstand type II opstår, hvor rolleren er dannet og holdes på plads af shearkraften.

8.3 Type II

8.3.1 Eksperimentelle observationer

Vi har undersøgt polygonernes afhængighed af parametrene h_{ext} , h_{noz} og Q . Undersøgelserne resulterede i fasediagrammerne på figur 6.1 i kapitel 6 på side 72. En vanskelighed ved at udarbejde disse fasediagrammer var, at der for hver ydre væskehøjde kunne eksistere flere polygoner med hvert et forskelligt antal hjørner, der alle var lige stabile. Hvert punkt i fasediagrammet angav derfor en "middelværdi" af den polygon, der forekom hyppigst. Fasediagrammerne tager således ikke højde for hysteresen i systemet. Tolkningen af disse fasediagrammer var: På fasediagram(a) er polygonens afhængighed af h_{noz} lille da grænsekurverne ved 4–8 hjørner, stort set er vertikale hvorimod polygonens afhængighed af fluxen Q er stor idet grænsekurverne ved 4–8 hjørner, fasediagram(b), ikke er vertikale men skrå.

Under måleserierne til disse fasediagrammer konstaterede vi, som nævnt ovenfor, at der generelt var flere forskellige polygoner for samme parameterværdier der var lige stabile, og at nogle af disse polygoner havde konkave eller konvekse sider. Hysteresen blev

da undersøgt for at "afdække", under hvilke forhold de konkave og konvekse polygoner forekom. Vi fandt, at der var et godt mål for, at hjørnernes form var konstant for fast h_{ext} , hvilket betød, at der godt kunne eksistere flere polygoner indenfor samme h_{ext} , blot alle polygonernes hjørner havde samme krumning. Dette kan kun lade sig gøre hvis polygonernes sider "rettes ind", så den samme krumning af hjørnerne opnås, og derved opstår konkave og konvekse polygoner. Undersøgelsen har imidlertid ikke givet svar på, hvorfor krumningen af polygonens hjørner for samme h_{ext} skal være konstant, og heller ikke hvilken indflydelse det har i type II.

En anden vigtig forskel på springene i type I og type II er, at den lokale flux q er uafhængig af azimuthalvinklen θ i type I men afhængig af θ i type II.

8.3.2 Modelovervejelser og formål med model type II

På baggrund af type II undersøgelsen er polygonmodellen fremstillet. Formålet med den er dels, at den skal være så simpel som mulig og dels, at identificere hvilke parametre der er vigtige i type II. Udgangspunktet for at fremstille model type II var at betragte rolleren som væsentlig i modelbeskrivelsen, idet forskellen på type I og type II netop er denne roller. Vi så i kapitel 7, at udgangspunktet for model type II var at betragte rolleren som en flydende torus beliggende samme sted i overfladen og omkring polygonspringet. Der virker to kræfter på rolleren, hvoraf den ene er det hydrostatiske tryk og den anden shear kraften. Estimatet af shearkraften var baseret på, at den var proportional med hastighedsgradienten som i ligning 7.3 side 88. Dette er rimeligt, at antage da de fleste væsker opfylder dette [1] s. 26. Disse kræfter antoges lige store og modsat rettede. Dette gav en relation mellem bredden af rolleren og den radiale flux for en given azimuthalvinkel θ , der var i overensstemmelse med eksperimentelle data. Der blev desuden postuleret en line tension, da springet "vælger" den form med minimal omkreds. Modellen kunne derved betragtes og løses som et variationsproblem.

Modellen kan reproducere, at når h_{ext} mindskes øges antallet af hjørner en efter en i polygonen. Det fremgår desuden af den dimensionsløse flux 7.14, på side 89, at faldhøjden h_{noz} ikke indgår. Faldhøjden er indirekte inkluderet i modellen, idet der er en sammenhæng mellem faldhøjden og væskehøjden h_{in} . Vi så i kapitel 5, at væskelaget h_{in} mindskes når h_{noz} øges. I modellen kunne vi imidlertid se bort fra h_{in} da $h_{in}/h_{ext} \approx 1/10$ og dermed h_{noz} . Det ses, at den dimensionsløse flux 7.14 afhænger kraftigt af Q , og h_{ext} hvorimod ϕ ikke afhænger nævneværdigt af h_{noz} , idet h_{in} er negligeret i udtrykket. Dette er i overensstemmelse med det observerede, se tolkning af fasediagrammer.

Modellen kan desuden reproducere, at der eksisterer flere polygoner for samme h_{ext} , men der indgår i modellen ikke specielle forhold for hjørnerne. Dette betyder, at den ikke kan redegøre for konvekse og konkave polygoner. Som vi har set, er der gode indicier for, at hjørnernes konstante form for samme h_{ext} er universel i type II området, og derfor må en decideret hjørnebeskrivelse på afgørende vis indgå i model type II. Desuden kan polygonmodellen heller ikke redegøre for separationen på bunden.

De teoretiske tiltag der i nærmeste fremtid skal gøres, for at forbedre polygonmodellen er at indføje rollerens "knækkende" egenskaber og at beskrive azimuthål kraftbalancen, så det fænomenologiske minimerings kriterie (line tension) kan erstattes. Overfladespændings effekter er formodentlig vigtige nær hjørnerne, men er heller ikke indføjet i polygonmodellen [4].

Samlet kan siges, at polygonmodellen kan beskrive mange væsentlige karakteristika ved polygonfænomenet som angivet i de tre punkter på siderne 90 og 92. Den kan dog ikke redegøre for konkave og konvekse polygoner, og den kan heller ikke redegøre for separationen. Det er derfor en model der skal modificeres før den kan siges at være en god model.

8.4 Samlet model

Et relevant spørgsmål er nu; hvornår er det hydrauliske spring forstået? Det er forstået når der eksisterer en *samlet model*, der kan reproducere de typiske karakteristika, der opstår ved variation af h_{ext} og fastholdelse af de resterende tre parametre. En samlet model skal således primært kunne reproducere, at strømningsmønsteret ændres, som observeret, når h_{ext} øges.

Idag (1999) er der en idé til en samlet modelbeskrivelse. En idé er at forsøge og beskrive type II som en ustabilitet af det cirkulære hydrauliske spring. Problemet er dog, at til dags dato er ... CATS temmelig overbevist om, at der ved løsning af model type I ikke eksisterer to forskellige typer af løsninger... [39] s. 44, dvs. beskrivelse af separation og roller (ny separation) når $h_{ext} > h_{kritisk}$. Målet er derfor at forsøge at udvide Prandtls grænselagapproximation, da det i første omgang er målet at forsøge at anvende Prandtls grænselagapproximation i en samlet modelbeskrivelse. En udvidelse af Prandtls grænselagapproximation er det som CATS gruppen forsøger [4].

8.5 Konklusion

Med de foregående kapitler og diskussion er vi klar til at konkludere

- På baggrund af målingerne, præsenteret på graf 5.13 side 66 og 5.15 side 68, kan det konkluderes, at grænselaget ikke er fuldt udviklet ved $r = 5$ mm, men ifølge 5.13 og 5.15, først med sikkerhed er fuldt udviklet ved henholdsvis 13.0 mm og 10.5 mm. Det konkluderes derfor at det **ikke** er rimeligt at antage at model type I gælder fra $r_0 \approx 5$ mm.
- På baggrund af den eksperimentelle undersøgelse af type II kan det konkluderes, at polygonmodellen kan beskrive mange karakteristika ved polygonfænomenet. Polygonmodellen kan reproducere polygonformer fra 2 til 14 kanter. Ved anvendelse af den dimensionsløse flux $\phi \approx \frac{\nu Q}{g h_{ext}^4}$ kan redegøres for, hvilke karakteristika af polygonfænomenet polygonmodellen kan beskrive.

Modellens løsninger var

- 1 at det cirkulære spring kun eksisterer for små ϕ dvs. små ν . Dette er i overensstemmelse med eksperimentelle data, idet når ν er lille (eks. væsken vand), kan der **ikke** eksistere stabile polygoner men derimod kun det cirkulære spring.
- 2 at flere hjørner i polygonen fås for store ϕ dvs. for små h_{ext} . Dette er i overensstemmelse med eksperimentelle data, se fasediagram 6.1 side 72, at for aftagende h_{ext} øges antallet af hjørner i polygonen en efter en.
- 3 at der for samme ϕ eksisterer flere løsninger (polygonformer). Dette er ligeledes i overensstemmelse med eksperimentelle data, da der for en fast værdi af h_{ext} , eksisterer flere polygoner (hysterese).

Polygonmodellen kan derimod **ikke** redegøre for separationen på bunden. Polygonmodellen kan heller **ikke** reproducere konkave og konvekse polygoner. Da de eksperimentelle undersøgelser, fremlagt i kapitel 6, viste at hjørnets form i polygoner tilsyneladende er en afgørende mekanisme i type II, og hjørnebeskrivelsen ikke indgår i polygonmodellen, konkluderes det derfor samlet, at den kun er et skridt på vejen til en tilfredsstillende beskrivelse af polygonfænomenet.

8.6 Videre arbejde

Polygonfænomenet er stadig et nyopdaget fænomen, og der er af den grund kun lavet undersøgelser i væsken ethylen-glycol (99%). Det vides således i skrivende stund, ikke om polygonfænomenet er et mere generelt fænomen, dvs. kan eksistere i **alle** væsker, der er tilstrækkelig viskose. Et videre arbejde vil således være at anvende andre væsker på lignende vis som beskrevet i denne afhandling. Til dette formål er der p.t. fremstillet to nye mindre eksperimentelle opstillinger, hvor det er hensigten, først at undersøge om polygonfænomenet kan eksistere i olier.

Litteratur

- [1] Acheson, D. J., (1995), 1. udg. 1990, *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Guildford og King's Lynn.
- [2] Alonso, Marcelo; Finn, Edward J., (1980), 1. udg. 1967, *Fundamental University Physics*, vol. 1, Mechanics and Thermodynamics, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [3] Bloom, C., (1997) *The Circular Hydraulic Jump, pursuit of analytic predictions*, University of Texas, (25. April), hentet på Internet, (20 sider).
- [4] Bohr, Tomas, and Seven Dwarfs (sic!), (1998) *The Long Polygon Song*, upubliceret, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København, (28. januar), 1-13.
- [5] Bohr, Tomas; Ellegaard, Clive; Hansen, Adam E.; Hansen, Kim; Haaning, Anders; Putkaradze, Vachtang; Wanatabe, Shinya, (1998) *Separation and pattern formation in hydraulic jumps*, PHYSICA A, 249, (7 sider).
- [6] Bohr, Tomas; Putkaradze, Vachtang; Watanabe, Shinya, (1997) *Averaging theory for the structure of hydraulic jumps and separation in laminar free-surface flows*. Denne artikel indgår i [39], Physical Review Letters, vol. 79, no.6, 1038-1041.
- [7] Bohr, Tomas, (1997) *Free Surface Flows. Notes for the course "Nonlinear and Chaotic Fields"*, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København, 1-35.
- [8] Bohr, Tomas; Ellegaard, Clive; Hansen, Adam E.; Haaning, Anders, (1996) *Hydraulic jumps, flow separation and wavebreaking: An experimental study*, PHYSICA B, 228, 1-10.
- [9] Bohr, Tomas; Dimon, Peter; Putkaradze, Vachtang, (1993) *Shallow-water approach to the circular hydraulic jump*, J. Fluid Mech., vol. 254, 635-648.
- [10] Brüel, Sven; Nielsen, Niels Åge, (1987) *Fremmedordbog*, Gyldendals Røde Ordbøger, Gyldendal, Haslev, 331.
- [11] Chorin, Alexandre J.; Marsden, Jerrold E., (1993), 1. udg. 1979, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Ann Arbor, MI.

- [12] Craik, A. D. D.; Latham, R. C.; Fawkes, M. J.; Gribbon, P. W. F., (1981) *The circular hydraulic jump*, J. Fluid Mech., vol. 112, 347-362.
- [13] Dantec, (1994) *FLOware. FVA enhanced. Installation & User's guide*, Dantec Measurement Technology, Skovlunde.
- [14] Dantec, (1993) *Dantec Information. Measurement Technology February 1993*, Dantec Measurement Technology, Skovlunde.
- [15] Dantec, (1990) *Dantec*, Dantec Elektronik, Skovlunde.
- [16] Dantec, (1983) *Laser Doppler Anemometry*, Dantec Elektronik, Skovlunde.
- [17] Dantec, (u.å.) *LDA Signal Processors*, (u.st.).
- [18] Dantec, (u.å.) *Particle Dynamics Analyser. Sizing with certainty*, Dantec Measurement Technology, Skovlunde.
- [19] Dimon, Peter, (u.å.) *Hydraulic Jump*, upubliceret paper, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København, 1-4.
- [20] Drain, L. E., (1980) *The Laser Doppler Technique*, John Wiley & Sons, Norwich.
- [21] Durst, F.; Melling, A.; Whitelaw, J. H., (1976) *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*, Academic Press, Bath.
- [22] Dyke, Milton Van, (1982) *An album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Ann Arbor, MI.
- [23] Ellegaard, Clive; Hansen, Adam E.; Haaning, Anders; Hansen, Kim; Marcussen, Anders; Bohr, Tomas; Hansen, Jonas L.; Watanabe, Shinya, (1998) *Creating corners in kitchen sinks*, Nature, scientific correspondence, vol. 392, 767-768,
- [24] Ellegaard, Clive; Hansen, Adam E.; Haaning, Anders; Hansen, Kim; Marcussen, Anders; Bohr, Tomas; Hansen, Jonas L.; Watanabe, Shinya, (1999) *Cover illustration: Polygonal hydraulic jumps*, Nonlinearity, vol. 12, no. 1, 1-7.
- [25] Feynman, Richard, (1989), oprindeligt udgivet 1963-1965, *The Feynman Lectures on Physics: Commemorative Issue*, vol. II, kap. 40-41, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [26] Hansen, Adam E.; Haaning, Anders, (1995) *Bachelorprojekt Fysik 1995. Hvirvler i det Cirkulære Hydrauliske Spring*, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København.

-
- [27] Hansen, Erik B., (1993), 1. udg. 1969, *Variationsregning*, Polyteknisk Forlag, Odense.
- [28] Johansen, Morten Stoklund, (1997) *Velocity correlations in a grid generated turbulent pipe flow measured by LDA*, cand. scient. speciale, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København.
- [29] Landau, L.D.; Lifshitz, E.M., (1995), 1. udg. 1959, *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, Exeter.
- [30] LeVeque, Randell J., (1994), 1. udg. 1992, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser Verlag, u.st. (Tyskland).
- [31] Prandtl, L., (1905) *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr Kleiner Reibung*, Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, Leipzig 1905, 484-491 og to plancher.
- [32] Rayleigh, O. M. Lord, (1914) *On the Theory of Long Waves and Bores*, Proc. Roy. Soc. A 90, 324-328.
- [33] Schlichting, Hermann, (1968), 1. udg., tysk, 1951, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company, u.st. (USA).
- [34] Spiegel, Murray R., (1968) *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, (Schaum's Outline Series), McGraw-Hill Book Company, u.st. (USA).
- [35] Svendsen, Ib A.; Jonsson, Ivar G., (1982), 1. udg. 1976, *Hydrodynamics of Coastal Regions*, Den Private Ingeniørfond, Danmarks Tekniske Universitet, København.
- [36] Tani, Itrio, (1949) *Water Jump in the Boundary Layer*, J. Phys. Soc. Japan, vol. 4, 212-215.
- [37] Thomson, Sir George, (1964), 1. udg., engelsk, 1961, *Hvordan tænker Fysikerne ?*, Det Schönbergske Forlag, København, 121.
- [38] Tritton, D. J., (1995), 1. udg. 1977, *Physical Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Bury St Edmunds Suffolk.
- [39] Vachtang, Putkaradze, (1997) *Local Structures in Extended Systems*, Ph. D. afhandling, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København.
- [40] Vachtang, Putkaradze, (u.å. 1992 ?) *Asymptotic Properties of the Circular Hydraulic Jump*, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København og Moscow Physico-Technical Institute.

- [41] Watanabe, Shinya, (1997) *Redo polygon modeling*, håndskrevne upublicerede noter, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København, (1 side).
- [42] Watanabe, Shinya, (1997) *Toy model of polygons*, håndskrevne upublicerede noter, Niels Bohr Institutet, Blegdamsvej 17, København, (21 sider).
- [43] Watanabe, Shinya. (1997) *Polygon. failed trial: phenomenological description*, håndskrevne upublicerede noter, Niels Bohr Intstitutet, Blegdamsvej 17, København, (8 sider).
- [44] Watson, E. J., (1964) *The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane*, J. Fluid Mech., vol. 20, part 3, 481-499.
- [45] Wehausen, John V.; Laitone, Edmund V., (1960), *Surface Waves*, Encyclopedia of Physics, vol. IX, Flügge, S. ed., Fluid Dynamics III, Springer-Verlag, u.st. (Tyskland), 446-455.

Liste over tidligere udsendte tekster kan rekvireres
på IMFUFA's sekretariat, tlf. 4674 2263 eller
e-mail: bs@ruc.dk

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerapport af:
Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthé Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature
on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH
ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 PROBLEM-ORIENTATED GROUP PROJECT WORK AT
ROSKILDE UNIVERSITY
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen,
Per Pauli Petersen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske
ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point
of view -
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and
assessment of geometry
by: Mogens Niss
- 342/97 LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY
DEMAND AND SUPPLY
A global clean fossil scenario discussion paper
prepared by Bernd Kuemmel
Project leader: Bent Sørensen
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET
UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen
- 344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde Petersen
-
- 345/98 Modeling the Arterial System with Reference to
an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen
- 346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
- 347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann,
Lisbet Øhlenschläger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 348/98 Case study of the environmental permission
procedure and the environmental impact assessment
for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
Project leader: Bent Sørensen
- 349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal
og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
- 350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96
- 351/98 Aspects of the Nature and State of Research in
Mathematics Education
by: Mogens Niss

- 352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen
- 353/98 Problemløsning og modellering i en almindelig matematikundervisning
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen
Vejleder: Morten Blomhøj
- 354/98 A GLOBAL RENEWABLE ENERGY SCENARIO
by: Bent Sørensen and Peter Meibom
- 355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd
- 356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 *Cayleys Problem*
En historisk analyse af arbejdet med Cayley problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af:
Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 *Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models*
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
- 359/98 *Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios*
by: Bent Sørensen
- 360/98 **SYMMETRI I FYSIK**
En Meta-projektrapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 361/98 *Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants*
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani
- 362/98 *Er matematik en naturvidenskab? - en udspejling af diskussionen*
En videnskabsfagsprojekt-rapport af Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/98 **EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION**
by: Donald T. Campbell, Mark H. Bickhard and Peder V. Christiansen
- 364/98 *Illustrationens kraft*
Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af: Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjörup
- 365/98 *To know - or not to know - mathematics, that is a question of context*
by: Tine Wedege
- 366/98 **LATEX FOR FORFATTERE**
En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen
- 367/98 **Boundary Reduction of Spectral invariants and Unique Continuation Property**
by Bernhelm Booss-Bavnbek
- 368/98 Kvartalsrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/98 DYNAMICS OF Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob Jalving
- 370/98 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
(erstatte tekst nr. 350/98)
- 370/98 Bevisets stilling
- beviser og bevisførelse i en gymnasial matematikundervisning
Matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss