TEKST NR 371 1999

Bevisets stilling

- beviser og bevisførelse i en gymnasial matematikundervisning

Et matematikspeciale af:
Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss

TEKSTER fra

IMFUFA **ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA , Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematikundervisning

Et matematikspeciale af:
Maria Hermannsson

Vejleder: Mogens Niss
IMFUFA tekst nr. 271/99 229 sider ISSN 0160-6242

Abstract

I dette speciale diskuteres *begrundelser* for at lade beviser og bevisførelse indgå i matematikundervisningen på gymnasieniveau og *muligheden* for at gøre det. Denne diskussion er didaktisk: hvilke vanskeligheder er der forbundet med at forstå beviser og med at gennemføre en bevisførelsesproces, men den er i høj grad også videnskabsteoretisk. Navnlig overvejelser omkring hvorfor man skal undervise i beviser og bevisførelse hænger på overvejelser om, hvorfor beviser er så vigtige i matematikfaget. Dette spørgsmål tages derfor også op i rapporten.

Specialet falder i tre dele. Den førte del udgøres af et litteraturstudie, hvor hovedtrækkene i udvalgt litteratur trækkes frem og det undersøges, hvad man der har at sige om, hvorfor man skal undervise i beviser og bevisførelse og om det er muligt at inddrage beviser og bevisførelse på meningsfuld vis. Den anden del af specialet er baseret på interviews med 5 new zealandske og 5 danske matematiklærere, der underviser i matematik på gymnasieniveau. Hvad mener matematikundervisere, der skal prioritere beviser og bevisførelse i forhold til elevernes kunne og pensumkrav om disse elementer i matematikundervisningen? Her bidrager de danske og new zealandske lærere med meget forskellige synspunkter, der tydeligvis skyldes meget forskellige syn på, hvad formålet med matematikundervisningen er.

Den tredie del af specialet er mit selvstændige bidrag til diskussionen af muligheden for at indføre beviser og bevisførelse i matematikundervisningen og begrundelserne for at gøre det.

Indhold

Forord

Denne specialerapport dækker 3. modul på RUC's matematikuddannelse. Rapporten handler om muligheder og begrundelser for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen på gymnasieniveau. Den er dels blevet til under et studieophold på New Zealand på henholdsvis University of Waikato og Massey University, med Andy Begg og Michael Carter som vejledere. Hertil kommer så et år på Roskilde Universitetscenter, hvor jeg er blevet vejledt af Mogens Niss.

Jeg vil gerne takke Michael Carter og Andy Begg, ikke blot for vejledning, men også for at muliggøre et givende udlandsophold. Jeg vil også gerne takke min danske vejleder Mogens Niss for at være en god støtte under den sidste, seje del af specialeskrivningsprocessen. Jeg vil ligeledes gerne takke de new zealandske og danske matematiklærere, jeg har fået lov at interviewe om deres synspunkter på beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

1 Indledning

Jeg tror mange vil nikke genkendende til min oplevelse af beviser i matematikundervisningen i gymnasiet: Et særligt ritual, gennemført i de fleste matematiktimer. Sætning, bevis, sætning, bevis...Et ritual uden sammenhæng med det at danne sig en forestilling om de matematiske begreber, der var i spil og uden forbindelse med opgaveregningen. Hvorfor var de der egentlig? Hvad var det meningen, jeg skulle lære af det?

Som matematikstuderende finder jeg ikke anledning til at stille spørgsmålstegn ved at skulle lære at forstå og føre beviser. Det er en del af at udvikle sig til en matematiker. Men mit udgangspunkt var, at min forståelse af *hvorfor* beviser og bevisførelse er så vigtige komponenter i "faget matematik" ikke var blevet helt så god, som jeg kunne ønske mig. Det er mit afsæt til den første del af min problemformulering:

> Hvilke særlige træk ved matematik som fag kan beviser og bevisførelse siges at repræsentere?

Hvis jeg ser på beviser og bevisførelse ikke bare som matematik-studerende men som forhåbentlig kommende gymnasielærer, er mine interesser lidt bredere. Jeg vil gerne blive i stand til på kvalificeret vis at diskutere hvilken betydning beviser og bevisførelse bør have i matematikundervisningen på gymnasieniveau. Dette er det egentlige *formål* med specialet.

Jeg mener ikke, at jeg skyder over målet ved ikke blot at vælge at diskutere beviser men også bevisførelse. Umiddelbart tænkte jeg selv på bevisførelse som en ting, der hører mere hjemme på universitets- end gymnasieniveau. Men der er jo også tale om bevisførelse, hvis man argumenterer for løsningen til et matematisk problem - noget også gymnasieelever har brug for. Bevisførelse er en del af det at løse et matematisk problem. Der er tale om bevisførelse i det øjeblik, hvor eleven selv skal få ideen til og selv udvikle et argument for løsningen til problemet. Jeg betragter altså bevisførelse som en aktivitet, der er karakteriseret ved at det bliver krævet af eleven, at han eller hun selvstændigt skal udvikle en strategi for at argumentere for løsningen til et problem.

Et eksempel - som også er et eksempel på, at argumenter i et bevis ikke nødvendigvis behøver at være formelle og symboltunge - er følgende problemstilling: Hvis man har 31 dominobrikker, der hver dækker to felter på et skakbræt, er det så muligt fjerne to hjørner, der ligger diagonalt overfor hinanden på brættet og dække de resterende felter med domino-brikker? Umiddelbart er der mulighed for det, fordi domino-brikkerne netop dækker de felter, der er tilbage på skakbrættet. Men da dominobrikkerne dækker et sort og et hvidt felt, skal det også være sådan, at der er lige mange sorte og hvide felter. Men ved at fjerne to hjørner, der ligger diagonalt, fjerner man enten to sorte eller to hvide hjørner. Derved opstår et overskud af sorte/hvide felter - det kan ikke lade sig gøre at dække brættet med dominobrikker.

Som det fremgår, så opfatter jeg ikke kun et bevis, som man ser det defineret i mange leksika: En kæde af logiske udsagn i formel-symbolsk form bundet sammen af slutningsregler, der starter med antagelserne og slutter med den sætning, man ønskede at bevise. Denne definition er for snæver og er f.eks. en dårlig beskrivelse af mit skakbræt-bevis. Jeg vælger at definere bevis således: *Et argument, der følger aftalte ræsonnementsformer og hviler på et aftalt grundlag.*

Skønt jeg for at fremme klarheden i min beskrivelse af min problemstilling omtaler beviser og bevisførelse under et, så anser jeg dem for at være om ikke fuldstændigt adskilte, så dog væsentlig forskellige og noget jeg skal konkludere selvstændigt på. Beviser er *produktet* af bevisførelsesprocessen. Didaktisk set, er beviser noget færdigt eleverne præsenteres for, mens bevisførelse er en aktivitet, hvor elever selv udvikler beviser.

Jeg vender nu tilbage til at udvikle min problemstilling yderligere. Jeg formulerede mit formål med specialet som jeg at gerne vil blive i stand til på kvalificeret vis at diskutere betydningen af beviser og bevisførelse for matematikundervisningen på gymnasieniveau. Det betyder, at jeg må gøre mig klart på hvilke måder beviser og bevisførelse kan tænkes at bidrage til matematikundervisningen i det almene gymnasium[1], dvs se på *begrundelser* for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Jeg må imidlertid også overveje, om det overhovedet er muligt på meningsfuld vis at inddrage beviser og bevisførelse i en matematikundervisning på dette niveau.

Specialet falder altså på sin vis i to dele: En del hvor jeg gør rede for - og tager stilling til - hvilke bidrag beviser og bevisførelse kan give til matematikundervisningen og en del hvor jeg diskuterer, i hvilket omfang det er muligt at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

Jeg har valgt at inddrage tre typer overvejelser i min fremstilling af diskussionen om, hvorvidt der skal være beviser og bevisførelse i matematikundervisningen: Generelle begrundelser for at undervise i matematik, litteraturen på feltet og endelig et empirisk materiale, baseret på gymnasielæreres mening om betydningen af beviser og bevisførelse. Det fører frem til problemformuleringens 2. del.

[1]fremover refereret til som matematikundervisningen.

Hvilke begrundelser er der givet for at undervise i beviser og bevisførelse set i relation til generelle begrundelser for at undervise i matematik når man ser på:

- Begrundelser for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, som kommer til udtryk i litteraturen.
- Læreres opfattelse af, hvilken betydning beviser og bevisførelse har i matematikundervisningen.

Hvilke begrundelser - om nogen - for at undervise i beviser og bevisførelse er efter min vurdering rimelige at give?

Der er litteratur på feltet, hvor såvel videnskabsteoretiske som didaktiske problemstillinger omkring beviser og bevisførelse behandles. Men som det vil fremgå, er der en række mangler og uklarheder i den. En af manglerne består i, at det kun er matematikdidaktikeres og matematikeres ideer om betydningen af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, der kommer til udtryk, mens matematiklæreres ideer om samme sag, ikke er noget, der - med forbehold for at jeg ikke har set alt - er blevet gjort til genstand for undersøgelse. Da jeg har afgrænset mig til at se på beviser og bevisførelse i gymnasiematematikken, er det matematiklærere, der underviser på gymnasieniveau, jeg har interviewet.

Jeg mangler nu at uddybe den del af diskussionen, der drejer sig om muligheden for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Hvad er der sagt og hvad kan der siges om hvilke vanskeligheder eleverne møder, når de forsøger at forstå beviser og gennemføre en bevisførelsesproces og er det vanskeligheder, der er til at overkomme? Denne diskussion er til dels et prioriterings-spørgsmål. Hvordan skal man afveje betydningen af beviser i forhold til de andre komponenter, der indgår i matematikundervisningen?

Også her er der mangel på empirisk materiale. Er det lærernes erfaring, at beviser og bevisførelse ikke på en meningsfuld måde kan indgå i matematikundervisningen på gymnasieniveauet? Har lærerne vanskeligt ved at se *relevansen* af de beviser og de bevisførelsesaktiviteter, deres undervisning måtte indeholde? I sidstnævnte tilfælde er det lærernes *matematikopfattelse*, der spiller ind på vurderingen af muligheden for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

Hvis lærerne anser beviser og bevisførelse for at være irrelevante inden for matematikken selv, så er det noget der kunne ændres, hvis lærernes matematiksyn blev ændret. Hvis det derimod er elevernes vanskeligheder med at forstå beviser og gennemføre bevisførelse, der er det dominerende, så er det af mindre betydning om læreren anser beviser og bevisførelse for relevant eller ej.

Den tredie - og sidste - del af min problemformulering ser således ud:

Hvad kan man sige om muligheden for at lade beviser og bevisførelse indgå i matematikundervisningen på gymnasieniveau, når man ser på

- Arten af de vanskeligheder elever møder, når de søger at forstå beviser og gennemføre en bevisførelsesproces.
- Om det - set fra matematiklæreres synspunkt - i princippet er muligt at gennemføre en matematikundervisning, hvori beviser og bevisførelse indgår.

Hvordan er muligheden for at lade beviser og bevisførelse indgå i matematikundervisningen, som jeg ser det?

Mit empiriske materiale

For at kaste lys over min problemstilling skal jeg have indsigt i matematiklæreres forestillinger om beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Dertil behøver jeg "nogens" mening. Jeg har indsamlet materiale i form af interviews med danske og New Zealandske lærere[2], der indeholder betragtninger om den betydning beviser og bevisførelse rent faktisk *har* i matematikundervisningen - men også om hvilken betydning den *burde* have. Jeg finder at mit udvalg af lærere, som ikke blot har en forskellig uddannelsesmæssig baggrund, men også skal manøvrere i to forskellige uddannelses-systemer, giver mig adgang til et bredt spektrum af opfattelser af betydningen af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

Mit empiriske materiale er ikke kun brugbart til at beskrive læreres opfattelse af betydningen af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Det vil også kunne afspejle *forskelle* i danske og new zealandske læreres holdning til relevansen af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Forskelle der blandt andet kan føres tilbage til forskellige matematiksyn og forskelligt syn på, hvad formålet med matematikundervisningen er.

Specialets relation til den samlede diskussion af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen

Man kan vælge at anskue matematikkens didaktik som bestående af følgende tre grundproblemstillinger: (1) Begrundelsesproblemet - hvorfor skal man undervise i matematik? (2) Mulighedsdiskussionen - hvad er det muligt at undervise i og (3) implementationsproblemet: Hvordan skal man undervise i matematik?

[2]Der er naturligvis forskel på de to skolesystemer. Jeg har interviewet lærerne med henblik på at afdække deres opfattelser af beviser og bevisførelse i den matematikundervisning, der finder sted henholdsvis på den matematiske gren i gymnasiet og den new zealandske 6th form og 7th form. Pensum på disse trin overlapper i store træk pensum i 1.,2. og 3.g på matematisk linie.

Dette gøres af Niss i [47] og [48]. Mit bidrag til diskussionen af beviser og bevisførelse knytter sig til begrundelsesproblemet og mulighedsproblemet. Det betyder, at jeg ikke i nogen særlig grad vil berøre implementationsproblemet, dvs spørgsmålet om, hvordan man bør undervise i beviser og bevisførelse og hvordan undervisningen af beviser og bevisførelse ser ud i praksis. Samtidig holder jeg mig til den *normative* del af begrundelses- og mulighedsproblemet. Det betyder, at jeg vil diskutere, hvorvidt man bør undervise i beviser og bevisførelse og - givet at det er ønskeligt - om det så er muligt at gøre det ideelt set, dvs uden hensyntagen til de vilkår beviser og bevisførelse aktuelt har i matematikundervisningen. Selvom min overordnede problemstilling er normativ, så indeholder mit arbejde i høj grad også et analytisk/deskriptivt element i kraft af, at jeg leverer en fremstilling og analyse af de synspunkter på beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, man finder hos de matematiklærere, jeg har interviewet og i litteraturen.

Målgruppe

Det er først og fremmest matematiklærere og matematikdidaktikere, der udgør min målgruppe. Jeg tror, at de betragtninger jeg gør mig i nærværende rapport, vil være af interesse for alle lærere, der enten underviser i matematik på et niveau, hvor der bliver undervist i beviser og bevisførelse eller på et niveau, hvor beviser og bevisførelse *kunne* indgå. Måske finder de her et materiale, der kan give stof til mere nuancerede overvejelser omkring hvorfor man skal undervise i beviser og bevisførelse og om mulighederne for at gøre det. Men matematikstuderende der som jeg selv har undret sig over, hvad der er så specielt ved beviser i matematikken, vil også have glæde af at læse rapporten.

Hvordan indgår emnekredsene?

Den mere formelle del af indledningen består i at redegøre for på hvilken måde emnekredsene E8 (matematik af videregående præg) og E7 (matematikkens grundlag) indgår. I specialet indgår overvejelser og litteraturstudier af bevisets videnskabsteoretiske status, hvilket jeg mener dækker en E7-emnekreds, mens E8 dækkes af de litteraturstudier jeg har gjort mig om beviser og bevisførelse didaktisk set. Jeg har herudover også fulgt og bestået henholdsvis et E7 og E8-kursus: E7-kurset omhandlede primært mængdelære, mens E8 var en studiekreds i matematikkens didaktik.

2 Kortlægning af elementerne i en diskussion af beviser og bevisførelse

I dette kapitel formulerer jeg de temaer, som jeg anser for at være centrale i en diskussion af beviser og bevisførelse. Formålet er at jeg skaffer mig - og videreformidler - et overblik, der gør det nemmere at kortlægge litteraturens bidrag og gør det nemmere for mig at forklare, på hvilken måde jeg selv bidrager til debatten.

Litteraturen på feltet har naturligvis været en inspirationskilde til kortlægningen af hovedtemaer. Set fra mit synspunkt er der imidlertid en række mangler og uklarheder. Et af mine egne bidrag er derfor - udover at give overblik over litteraturen - at pege på faktorer der gør, at især undersøgelserne af den videnskabsteoretiske status af beviser og bevisførelse ikke er så klar.

Det er oplagt at inddele diskussionen i en videnskabsteoretisk og didaktisk del. I den videnskabsteoretiske diskussion handler det om hvilken rolle beviser og bevisførelse spiller i faget matematik, mens det i den didaktiske del handler om relationen mellem beviser, bevisførelse og matematik som undervisningsfag.

2.1 Den videnskabsteoretiske diskussion

2.1.1 Videnskabsteoretiske spørgsmål, der angår beviser

Universelle træk ved beviser

Med "universelle træk" mener jeg træk ved beviser, der er uafhængige af, hvilken matematik-filosofisk position, man indtager. Generelt kan man sige, at der er uenighed om, hvornår et argument kan siges at være et bevis, mens ingen stiller spørgsmålstegn ved nødvendigheden af at have beviser i matematikken.

Man kan anskue beviser som et middel til at godtgøre påstande i matematik. Der knytter sig to universelle træk til dette (1) Beviset giver mulighed for at *godtgøre* påstande. Denne mulighed har man ikke på samme måde indenfor andre fagområder, hvor man kun kan *sandsynliggøre* påstande, dvs underbygge påstande med empiriske data; eksperimenter og undersøgelser. (2) I matematik finder man særlige påstandstyper, der er unikke for matematikfaget. Påstande som ikke har et modstykke indenfor andre fagområder.

En redegørelse for universelle træk ved beviser vil derfor indbefatte at man uddyber og eksemplificerer hvad forskellen er på at sandsynliggøre og godtgøre påstande og at man beskriver og eksemplificerer påstandstyper, der er unikke for matematikken.

Et eksempel på en type påstand, der er unik, er umulighedssætninger. Påstanden i mit skakbræt-problem om, at det ikke kan lade sig gøre at anbringe dominobrikker på et skakbræt, hvorfra der er fjernet to ensfarvede hjørner er en umulighedssætning. Med et matematisk argument kan man garantere, at det er umuligt at anbringe dominobrikkerne *uden* at undersøge samtlige tilfælde. Det er smart i tilfældet med skakbrættet, hvor det vil det være en overordentlig kompliceret opgave at finde frem til samtlige mulige måder at lægge dominobrikker på brættet på. Beviser i forbindelse med umulighedssætninger kommer dog særlig til deres ret, når der kræves inspektion af uendelig mange tilfælde, for her er det virkelig kun muligt at godtgøre påstanden ved brug af et bevis.

Beviser som sociologisk og matematik-filosofisk fænomen

De overvejelser der angår hvilke krav en argumentation skal opfylde for at være et bevis, falder i to forskellige kategorier. Overvejelser, der bygger på at beviser anskues som et sociologisk fænomen og overvejelser, der er af matematik-filosofisk art.

De matematik-filosofiske overvejelser angår spørgsmålet om, hvilke *bevisopfattelser* forskellige matematikfilosofiske retninger giver anledning til. Hvad har de at sige om, hvilke krav der skal stilles til et matematisk argument for at det kan siges at være et bevis? Der er ikke tale om et entydigt sæt af krav, men om flere parallelle sæt af krav.

De matematik-filosofiske overvejelser adskiller sig fra de sociologiske, fordi matematiske argumenter matematik-filosofisk set udelukkende bedømmes på deres evne til at godtgøre påstanden så komplet og præcist som muligt. Det er ikke tilfældet, når man anlægger den sociologiske vinkel, fordi den angår de kriterier man i "matematisk praksis"[1] bruger til at afgøre, om et argument er godt nok til at kunne siges at være et bevis. Andre faktorer gør sig gældende. Først og fremmest fordi beviset nu ikke blot skal verificere en påstand så godt som muligt, men også har andre funktioner, f.eks. som en måde at kommunikere og argumentere med andre matematikere.

Når man ser på beviser som et sociologisk fænomen har det funktioner, der ligger udover den verificerende. Hvilke kriterier, man anvender i sin bedømmelse af et argument, vil derfor afhænge af, hvilken *funktion* det har. Som jeg ser det, er der derfor her to spørgsmål at stille. (1) Hvilke funktioner har beviset i "matematisk praksis"? (2) Hvad er kriterierne for et godt argument i "matematisk praksis"?

Kriterierne for hvad der er et godt argument i "matematisk praksis" og matematikfilosofisk set, kan være højst forskellige. Skal man bruge et argument til at argumentere for en påstand i "matematisk praksis", vil der ofte blive lagt vægt på, at argumentet i princippet er *overskueligt.* Et kriterium, der er i modstrid med det matematik-filosofiske krav om komplette beviser.

Masons et al's skelnen mellem at bevise og overbevise: Overbevise sig selv - overbevise en ven - overbevise en fjende [40], kan bruges til yderligere at uddybe forskellen på beviser som sociologisk og matematik-filosofisk fænomen. Når man overbeviser andre matematikere om gyldigheden af et argument foregår det sædvaneligvis på "overbevise en ven"-planet, mens man når man sætter matematik-filosofiske kriterier op for et "godt argument", stræber efter at skabe et argument, der er i stand til at overbevise en "fjende".

Bevisets funktion er ikke at overbevise

Med til den videnskabsteoretiske diskussion af, hvad man skal forstå ved et bevis hører at tydeliggøre forskellen på at "bevise" og "overbevise". Der er to ting, man skal holde sig for øje (1) Det er to helt forskellige ting at bevise en sætning og føle sig *overbevist* om at sætningen er sand. (2) Når man taler om, at et bevis virker "overbevisende", så refererer "overbevisende" i reglen ikke til selve sætningen, men derimod til at *argumentet* i beviset er overbevisende.

I en del beviser bygger beviset ikke på selve sætningen og f.eks kan man i beviset gøre brug af helt andre begreber, end dem sætningen trækker på. Et

[1] "Matematisk praksis" skal her forstås som den praksis der eksisterer i samfundet af professionelle matematikere, der beskæftiger sig med at udvikle ny matematik.

eksempel er modstridsbeviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Sætningen kan man vælge at fortolke som et geometrisk udsagn: Siderne og diagonalen i et kvadrat er inkommensurable. Beviset er derimod rent algebraisk og hviler på betragtninger om lige/ulige tal. Sådan et bevis vil ikke nødvendigvis overbevise læseren om at *sætningen* er sand. Derimod kan det godt være, at man som læser føler sig overbevist om *argumentets* rigtighed.

2.1.2 Videnskabsteoretiske spørgsmål, der angår bevisførelse

Når man diskuterer bevisførelse videnskabsteoretisk set, skal man skelne mellem de spørgsmål, der knytter sig til det at få bevisideer, dvs den eller de bærende ideer i et bevis og de spørgsmål, der knytter sig til, hvordan bevisideerne *gennemføres*.

Det første er et spørgsmål om at kortlægge en *heuristik*. Hvordan og under hvilke omstændigheder opstår en beviside? Hvilke strategier anvendes for at få ideer til beviser?

Det andet er et spørgsmål om *metoder* til at gennemføre bevisideer med. Hvilke midler kan man gøre brug af for at gennemføre en beviside? Beviser og bevisførelse er to tæt knyttede størrelser på dette punkt, fordi spørgsmålet om hvilke midler, man vil acceptere for at gennemføre bevisideen til dels vil afhænge af, hvad man anser for at være et bevis.

Brugen af computere i udviklingen af beviser rejser to nye metodemæssige spørgsmål. Det ene er, om man, hvis man undersøger tilstrækkelig mange tilfælde, kan anse en påstand for at være bevist, fordi man med computeren kan undersøge så mange tilfælde, som det skal være - dog kun endelig mange. Grænsen mellem *empirisk evidens*, der f.eks kan være undersøgelse af matematiske strukturer ved brug af taleksempler og et bevis for en påstand bliver smal. Med "empirisk evidens" refererer jeg til en argumentation der trækker på et antal enkelteksempler. Det kan f.eks. være at man ser på syvkanters egenskaber og drager konklusioner angående n-kanters egenskaber, målinger på geometriske konstruktioner for at påvise en egenskab ved konstruktionen eller en serie tegninger af grafer for kontinuerte, differentiable funktioner, der skal illustrere, at det er rimeligt at formode at $f'(x)=0$ i et ekstremum for en funktion.

Det andet spørgsmål er, om computerberegninger som *erstatning* for beregninger foretaget i hånden - f.eks. algebraiske manipulationer i et meget langt bevis - kan siges at være en gyldig metode til at bevise sætningen.

2.2 Den didaktiske diskussion

Som udgangspunkt vil jeg inddele den didaktiske diskussion efter tre grundproblemstillinger, som man kan vælge at anskue matematikkens didaktik ud fra [47]. Der er: *Begrundelsesproblemet* Skal der være beviser og bevisførelse i matematikundervisningen? Hvorfor - og for hvem? *Mulighedsproblemet* Kan det overhovedet lade sig gøre at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen? Hvilke omkostninger er der forbundet med det og hvad kan man tænkes at opnå? Endelig er der *Implementationsproblemet*: Givet at det er ønskeligt og muligt at inddrage beviser/bevisførelse i matematikundervisningen; hvordan er den nuværende praksis, hvilke ændringer skal der ske, for at en undervisning i beviser og bevisførelse sker på en hensigtsmæssig måde og hvordan får man det gennemført?

Man kan have henholdsvis en deskriptiv/analytisk tilgang: hvordan er det og en normativ tilgang: hvordan bør det være til de tre problemstillinger. Jeg inddeler derfor den didaktiske diskussion yderligere og ender med de nedenstående 6 spørgsmål, som jeg efterfølgende vil detaljere.

- Bliver der undervist i beviser/bevisførelse, hvorfor/hvorfor ikke?
- Bør man undervise i beviser/bevisførelse - og i givet fald hvorfor?
- Hvilke muligheder er der for at indføre beviser og bevisførelse i matematikundervisningen? Hvilke omkostninger vil der være forbundet med det?
- Vil man være villig til at betale hvad det koster for at indføre beviser og bevisførelse i matematikundervisningen?
- Hvordan bør man undervise i beviser og bevisførelse?
- Hvordan bliver der undervist i beviser og bevisførelse?

Jeg deler som i den videnskabsteoretiske diskussion op i beviser og bevisførelse.

2.2.1 Beviser i matematikundervisningen

Begrundelsesproblemet

Hvorfor - eller hvorfor ikke - bør man undervise i beviser?

Der vil være forskelligt syn på dette spørgsmål alt efter, hvad der anses for at være de generelle formål med matematikundervisningen. På hvilken måde kan beviser tænkes at bidrage til - eller siges at være nødvendige for - at gennemføre de målsætninger, man har sat for matematikundervisningen - eller i modsætning til dem?

Man kunne f.eks. tænke sig, at man ønskede at eleverne skulle blive mere kritiske, dvs forbedre deres evne til at bedømme argumenter i matematik såvel som i andre sammenhænge og at arbejde med matematiske beviser kunne give sig udslag i dette. [2].

Hvorfor - eller hvorfor ikke - bliver der undervist i beviser?

Dette spørgsmål handler om hvilke forestillinger lærere og folk, der har at gøre med at udvikle og tilrettelægge de mere overordnede rammer for matematikundervisningen, gør sig om formålet med dem.

Mulighedsproblemet

Hvilke muligheder eksisterer der faktisk for at have beviser i matematikundervisningen? Hvilke omkostninger er der forbundet med det?

Hovedspørgsmålene er her: Hvilke vilkår anses beviser for at have i den faktiske matematikundervisning og på hvilken måde prioriteres beviser i forhold til andre komponenter i matematikundervisningen? Hvilket udbytte får eleverne faktisk? Hvilke vanskeligheder bereder en undervisning i beviser eleverne?

Når man kortlægger hvilke vanskeligheder eleverne kan tænkes at støde på i forbindelse med de beviser, de møder i matematikundervisningen kan man man foranstalte såvel empiriske, som teoretiske undersøgelser af elevers vanskeligheder med forskellige konkrete beviser. I sådanne undersøgelser mener jeg, at man skal skelne mellem to typer vanskeligheder. Den ene type vanskelighed (type 1), skyldes et *utilstrækkeligt bevisbegreb* hos eleverne og er f.eks betinget af, at eleven ikke kan se relevansen af beviset og hvad det vil sige, at man har bevist en sætning. Vanskeligheder af type 2, er vanskeligheder med at forstå *selve argumentet* i det konkrete bevis.

Begge typer undersøgelser fordrer, at man analyserer elevers vanskeligheder i relation til mange forskellige beviser, da vanskeligheder af både type 1 og 2 kan tænkes at være domæne-specifikke, dvs afhænge af det valgte matematiske emne.

Hvilket udbytte kan man tænkes at opnå ved at have beviser i matematikundervisningen? Bør man have beviser set i lyset af de omkostninger, der er?

[2]Det finder man faktisk beskrevet som et formål i en kilde af noget ældre dato (1938) i [22].

Spørgsmålet er her, hvilke indsigter beviser i matematikundervisningen kan give eleverne, som de ikke kan få ad anden vej og om disse indsigter er så vigtige, at man skal prioritere at have beviser i matematikundervisningen, set i lyset af de omkostninger, der er.

Med omkostninger tænker jeg på de vanskeligheder beviser volder eleverne, men også på at den tid man vælger at bruge på beviser i matematikundervisningen skal tages fra andre elementer i matematikundervisningen. Beviser kan imidlertid ikke betragtes som en isoleret komponent og som en "ren" tidrøver. Man skal også overveje, hvilke relationer beviser har til andre elementer i matematikundervisningen - f.eks. problemløsning og anvendelse af matematik - og på hvilke måder viden om beviser kan støtte/underbygge disse.

Implementationsproblemet

Hvordan bliver der undervist i beviser?

Dette implicerer at man undersøger faktisk forekommende matematikundervisning for at afdække, hvordan beviser fremstilles i matematikundervisningen, dvs hvilke træk ved beviser, der lægges vægt på og hvad der konkret gøres for at sikre sig, at eleverne forstår beviserne. Også her kan man dele beskrivelsen op i om det er elevernes bevisbegreb, der søges udviklet, eller om det er elevernes forståelse af argumentet i beviset, der lægges vægt på.

Hvordan bør man undervise i beviser?

Denne del af diskussionen drejer sig om at opstille - og argumentere for - nogle principper for en "god matematikundervisning" i beviser.

Også her vil det være hensigtsmæssigt at gøre sig klart, om man søger at forbedre elevernes forståelse af argumentet i et bevis, eller om man søger at udbygge eller ændre elevernes bevisbegreb.

Er målet at forbedre elevernes forståelse af argumenterne i beviser kan et tiltag være forslag til anderledes måder at fremstille beviser på - såvel i lærebøgerne som i undervisningen - så eleverne oplever beviserne som lettere tilgængelige. Dette rejser et spørgsmål af videnskabsteoretisk karakter: Hvordan kan man fremstille beviser, således at de er (let)tilgængelige for eleverne uden at præcision og stringens går tabt i en sådan grad, at argumentet ikke længere kan anses for at være et bevis?

Hvis man tænker i at udvikle elevernes bevisbegreb, vil man overveje, hvilke typer erfaringer eleverne skal gøre sig, for at udviklingen understøttes.

Endelig skal man overveje, hvordan principperne for god undervisning i beviser kan føres ud i livet og altså foreslå velegnede undervisningsmetoder og - former.

2.2.2 Bevisførelse i matematikundervisningen

Begrundelsesproblemet

Hvorfor er der bevisførelsesaktiviteter i matematikundervisningen?

Spørgsmålet er her, hvilke forestillinger lærere og folk, der tilrettelægger mere overordnede rammer for en matematikundervisning, hvori der indgår bevisførelsesaktiviteter, gør sig om formålet med dem.

Hvorfor bør der være bevisførelsesaktiviteter i matematikundervisningen?

Hvorfor skal elever udvikle bevisførelseskompetencer? Dette skal ses i relation til andre kompetencer - specielt problemløsning - som man i øvrigt prøver at udvikle i matematikundervisningen og også i forhold til de generelle målsætninger for matematikundervisningen. Man kan også formulere det som målsætning, at eleverne skal lære selv at fremsætte og argumentere for påstande i matematik.

Mulighedsproblemet

Hvilke muligheder er der for at have bevisførelsesaktiviteter i matematikundervisningen? Hvilke vanskeligheder er der forbundet med det?

Fordi bevisførelsesaktiviteter kan knytte sig til problemløsning, er det oplagt at se på, om undervisere eller folk, der har at gøre med at tilrettelægge matematikundervisning, opfatter problemløsning som en anledning til at lade eleverne føre beviser. Det er også interessant at undersøge i hvor høj grad bevisførelse anses for at være noget, der kan lade sig gøre og om bevisførelse prioriteres som en selvstændig komponent i matematikundervisningen.

Overvejelser omkring hvilket udbytte eleverne kan anses at få af bevisførelsesaktitiviteter og hvilke vanskeligheder, de kan tænkes at støde på her hører også med. I begge tilfælde vil det være nyttigt at skelne mellem de to dele af bevisførelsesprocessen: at få en beviside og efterfølgende gennemføre den.

At få en beviside ligner den første del af problemløsningsprocessen: at finde på et bud på en løsning meget. Det drejer sig om at få en god ide og vanskelighederne vil her være forbundet med at få tilegnet sig en passende heuristik. At eleven får en beviside der er "god nok" er betinget af, at eleven har et tilstrækkelig godt bevisbegreb, f.eks. nytter det ikke noget at få "ideen" til at bevise en generel påstand med et taleksempel.

Når det drejer sig om at gennemføre bevisideen, vil der - især hvis der er tale om, at eleven fører et formelt bevis - være vanskeligheder med brug af matematisk formalisme, fordi ideerne skal udformes i "matematisk kode". Der vil også være vanskeligheder betinget af, at eleverne aktivt skal beherske logisk tankegang og forskellige former for logiske strukturer i forskellige bevistyper.

Hvad kan man tænkes at opnå med at have bevisførelsesaktiviteter i matematikundervisningen? Bør man - omkostningerne taget i betragtning - inddrage dem?

Det, der her er på dagsordenen, er at få formuleret hvilke erfaringer bevisførelsesaktiviteter kan give eleverne, som andre elementer i matematikundervisningen ikke kan give og om disse erfaringer er så vigtige, at man skal prioritere at have bevisførelsesaktiviteter i matematikundervisningen.

Implementationsproblemet

Hvordan bliver der undervist i bevisførelse?

Her kan man undersøge hvilke aspekter af bevisførelsesprocessen, der lægges vægt på i den aktuelle matematikundervisning. Hvordan - hvis overhovedet - undervises der i bevisheuristikker og i at gennemføre bevisideer?

Man kan også spørge, hvilke argumenter, der tillades og opmuntres i matematikundervisningen. Accepteres mere uformelle beviser, som let vil kunne formaliseres, f.eks. skakbræt-argumentet i indledningen? Hvordan bidrager de bevisførelsesaktiviteter der konkret findes i matematik-undervisningen til udviklingen af elevernes bevisbegreb?

Hvordan bør man undervise i bevisførelse?

Her er spørgsmålet, hvordan man på hensigtsmæssig vis kan lægge op til bevisførelsesaktiviteter i undervisningen og altså *motivere* eleverne for at føre beviser. Det er også spørgsmålet om hvilke tiltag, der udvikler elevernes bevisheuristik og giver dem forudsætninger for at gennemføre bevisideer.

Spørgsmålet om, hvordan man på hensigtsmæssig måde underviser i bevisførelse er også diskussionen om, hvilke argumenter, man kan forlange fra elever, der kun i utilstrækkelig grad behersker matematisk formalisme.

2.3 Om resten af rapportens indhold

Jeg har nu skitseret det, jeg anser for at være hovedpunkterne i diskussionen omkring beviser og bevisførelse og kan nu bedre forklare, hvordan de enkelte afsnit i rapporten vil bidrage til at kaste lys over min problemstilling.

Det er den samlede diskussion omkring beviser og bevisførelse, der har min interesse, når jeg i det næste kapitel ser nærmere på litteraturen på feltet. Det implicerer naturligvis, at jeg ser på hvilke spørgsmål, der behandles, men også at jeg trækker de resultater og konklusioner, man finder i litteraturen, op og forholder det til, hvad der så bliver sagt om muligheder og begrundelser for at have beviser i matematikundervisningen. Når jeg medtager litteraturens bidrag til implementationsproblemet i form af at beskrive forslag til en matematikundervisning, hvor elevernes vanskeligheder med beviser og bevisførelse søges imødekommet, så er det fordi jeg ønsker et overblik over litteraturen i bred almindelighed, men også fordi forslagene afspejler forestillinger om grunde til- og muligheder for at inddrage beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

Udover en beskrivelse af litteraturens indhold ligger der også en opgave i at afdække nogle af årsagerne til, at den gennemgående sine steder er uklar og mangelfuld. Den opgave kan kapitlet her bruges som redskab til at løse.

I kapitel 4 ser jeg nærmere på matematiklæreres begrundelser for at have beviser i matematikundervisningen. Det kan ses som en udvidelse af det udvalg af begrundelser, man finder i litteraturen og som noget, der yderligere leverer et grundlag for, at jeg kan danne mig min egen mening om hvorfor - eller hvorfor ikke - man skal undervise i beviser og bevisførelse.

Jeg vil udover at give en fremstilling af mit materiale analysere det med henblik på at finde ud af i hvor høj grad det er lærernes matematiksyn og i hvor høj grad, det er didaktiske overvejelser, der er bestemmende for deres holdning til muligheden for at have beviser i matematikundervisningen. Også her kan jeg håbe på at hente et materiale, der kan danne basis for, at jeg kan danne mig min egen mening.

Jeg har først og fremmest interviewet lærerne med henblik på at undersøge, hvilke begrundelser de finder for at man skal have - eller ikke have - beviser og bevisførelse i undervisningen og om det er muligt at have det. Hvordan man i praksis underviser i beviser og bevisførelse, har jeg kun interesseret mig for i det omfang at jeg har syntes, det har kunnet bidrage til dette spørgsmål.

3 Oversigt over udvalgt litteratur

I det følgende vil den debat omkring beviser og bevisførelse, der udspiller sig i litteraturen, være på programmet. For at give et indtryk af, hvordan debatten konkret foregår, vil jeg - inden jeg går over til at gøre rede for de store linier - indledningsvis referere 7 artikler, som jeg anser for at være repræsentative. Når man ser bort fra mine kommentarer i kapitel 3.4, tilstræber jeg her at give en neutral og nøgtern fremstilling af *andres* synspunkter på beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

Inden da vil jeg imidlertid for at sætte debatten i perspektiv, give et kort historisk rids af den position beviser og bevisførelse har haft indenfor matematikkens didaktik fra 1980'erne og frem.

3.0.1 Beviser og bevisførelse i matematikkens didaktik - historisk set

Hovedparten af de forholdsvis nutidige kilder, jeg har valgt ud, afspejler en modreaktion mod den centrale position beviser og bevisførelse i havde i "new math"-bevægelsen. De fleste artikler, jeg har læst, søger at kortlægge og kommentere træk ved matematisk praksis, der viser, at matematik er andet og mere end formelle beviser. Formålet er at argumentere for, at der skal gives plads til andre elementer end beviser og bevisførelse i matematikundervisningen: Når også matematisk praksis er andet og mere end beviser og bevisførelse, skal det afspejles i matematikundervisningen.

Artiklerne daterer sig stort set fra midten af 1980'erne og frem. Inden da har beviser og bevisførelse stort set ikke været debatteret, hvad man kan se som udtryk for, at der indtil da ikke har været behov for overhovedet at begrunde eller sætte spørgsmålstegn ved disse elementers tilstedeværelse i matematikundervisningen. Det kan man blandt andet se i ICMI's[1] beretninger, hvor der i 1980 kun er en enkelt artikel, hvor emnet beviser tages op [17], mens der i 1984 er en hel session, der handler om beviser og bevisførelse i matematikundervisningen [51].

I de nyeste artikler blandt andet [27] lyder der andre toner, fordi kritikken af den megen vægt på beviser og bevisførelse i matematikundervisningen har

[1] International commission on Mathematical Instruction

medført, at beviser og bevisførelse nu er nedtonet eller ligefrem forsvundet fra såvel undervisning som læseplaner. Nu påpeges uheldige konsekvenser af at *udelade* beviser og bevisførelse i matematikundervisningen og at man altså ikke kan forsvare at gøre det.

3.1 Syv centrale artikler

Jeg har valgt følgende 7 artikler ud, der er hentet fra følgende kategorier: 1) Den videnskabsteoretiske debat omkring beviser, dvs hvilken rolle beviser spiller i matematikfaget 2) Den videnskabsteoretiske debat omkring bevisførelse, dvs hvilken rolle bevisførelse spiller i matematikfaget 3) Elevers vanskeligheder med at omgås beviser 4) Undervisningsmetoder/tiltag, der kan forberede elevers udbytte af beviser i matematikundervisningen 5) Elevers vanskeligheder med at gennemføre en bevisførelsesproces 6) Undervisningsmetoder/tiltag, der kan hjælpe elever med at gennemføre bevisførelsesprocessen.

Endelig har jeg valgt at tage en oversigtsartikel, Gila Hannas og Niels Jahnkes "Proof and proving in Mathematics Education", med. De berører og kommenterer de fleste af de temaer, de andre artikler tager op.

Et bidrag til den videnskabsteoretiske diskussion af beviser

Min valgte artikel er her Michael De Villiers: "The role and function of proof in Mathematics"[18]. Den er ikke en rent videnskabsteoretisk artikel, da det videnskabsteoretiske indhold drages frem med et didaktisk sigte, men den udgør på trods heraf et væsentligt bidrag til den videnskabsteoretiske debat af beviser.

Michael De Villiers' udgangspunkt er, at et af de væsentligste problemer med beviser i matematikundervisningen er, at eleverne har vanskeligt ved at se *formålet* med dem og det skyldes, at den begrundelse, der gives for at have beviser i matematikundervisningen ofte er, at de overbeviser eleverne om, at sætningen er sand. Noget der ofte ikke er tilfældet. Andre begrundelser for at have beviser i matematikundervisningen kan findes ved en større indsigt i de roller beviser spiller i "matematisk praksis". Noget kunne tyde på, at denne indsigt ikke er til stede hos undervisere i matematik. Det sidste bygger De Villiers på resultaterne af en undersøgelse fra sydafrikanske universiteter blandt studerende, der fulgte kurser i matematikkens didaktik. Her erklærede over halvdelen sig enige i, at beviser *udelukkende* har til formål at verificere.

De Villiers finder, at denne problematik går igen i analysen af bevisets rolle i "matematisk praksis", dvs der har mest været fokus på bevisets evne til at verificere påstande. De Villiers argumenterer for, at det *ikke* forholder sig sådan. Først og fremmest er beviser ikke nødvendigvis overbevisende. En matematiker har i reglen overbevist sig om sandheden af en sætning længe inden et egentligt bevis foreligger og overbevisningen om sætningens rigtighed er snarere en *forudsætning* for konstruktionen af et formelt bevis, end et produkt af det. Det fuldstændigt komplette bevis for en sætning, er desuden et ideal - ikke en realitet og et "logisk" bevis kombineret med intuition og quasi-empirisk verifikation[2] gør at en matematiker er parat til at acceptere en sætning. Herudover er de formelle beviser - også publicerede beviser - ikke nødvendigvis fejlfri, hvilket De Villiers ser som udtryk for at *andre* faktorer end det formelle bevis er af større betydning. Der er *også* behov for beviset som verifikationsmiddel, specielt i de tilfælde, hvor sætningen er kontra-intuitiv, men det at sætninger accepteres *uden* at der eksisterer formelle beviser for dem peger på, at beviset også må spille andre roller:

De Villiers beskriver efterfølgende 4 andre roller, beviser også spiller og som - i modsætning til når beviset har en verificerende funktion - ikke kan erstattes af quasi-empirisk verifikation. Beviser kan være *forklarende*, *systematiserende*, *kommunikerende* og *bidrage til skabelsen af ny matematiske sætninger.*

Ideelt er et bevis *forklarende*, dvs at beviset *udover* at verificere *forklarer*, hvorfor en sætningen er sand. Et bevis kan også være *systematiserende* i form af at bidrage til organiseringen af kendte sætninger og definitioner. Man kan ved at foretage en *lokal systematisering*, dvs ved at skabe en aksiomatisk struktur, kontrollere om der er cirkulære argumenter og inkonsistenser indenfor en matematisk teoribygning. Man kan også foretage en *global systematisering.* Der er nogle beviser, der bidrager til at forene og simplificere teoribygninger. Der er også tale om global systematisering, når en aksiomatisering fører til at en sætning, fordi den "passer ind" i systemet, er en der kan anvendes med særlig tiltro til dens rigtighed. Endelig er det en del af den globale systematisering, at man ved at lave en aksiomatisering kan få ideer til ny aksiomsæt. Ny aksiomatiske systemer kan blive skabt som konsekvens.

Beviser i f.eks. Euklidisk geometri er et matematikhistorisk eksempel på en systematisering, hvor allerede kendte sætninger bliver samlet i en teoribygning. Det er et eksempel på en matematisk disciplin, hvor det er misvisende, at begrunde beviserne med, at de skal overbevise eleverne om sætningerne, da beviserne slet ikke er udviklet med det formål for øje.

De Villiers kritiserer også at "færdige" beviser opfattes som færdige i den forstand, at de ikke har nogen betydning i opdagelsen af ny, matematiske resultater. Han påpeger, at der er sætninger i matematik, der er så abstrakte, at de ikke ville være kommet frem, medmindre man havde deduceret sig frem til dem og at man altså via beviser kan få adgang til at skabe ny matematiske sætninger. Som eksempel nævner han hele den ikke-Euklidiske geometri.

[2] De Villiers refererer her til, at man fremsætter og underbygger påstande ved at gøre brug af et computerprogram, der kan lave målinger af geometriske konstruktioner. "Empirisk verifikation" er altså her en række målinger i/på forskellige geometriske konstruktioner, som kan bruges til at sandsynliggøre en matematisk sætning. Begrebet dækker dog formentlig bredere og indbefatter også f.eks. at sætninger sandsynliggøres ved at generalisere taleksempler.

De Villiers giver et eksempel, som dog nok mere er et eksempel på at beviser bidrager til at en sætning generaliseres. Man ønsker at bevise at man, når man forbinder midtpunkterne i drageformet figur (dvs en firkant med par af sider der er lige lange og par af vinkler, der er lige store) får et rektangel. Når man søger at bevise påstanden vil man opdage, at den eneste betingelse for at generere et rektangel, er at diagonalerne står vinkelret på hinanden. Sætningen er altså gældende for enhver firkant, der har diagonaler, der står vinkelret på hinanden.

De Villiers ser også beviser som en måde at kommunikere matematiske resultater på. Han underbygger dette med, at man i "matematisk praksis" fremlægger, diskuterer og ændrer beviser og eventuelt finder modeksempler til sætningen. Denne proces er den måde ny matematisk viden udbredes i samfundet af matematikere og i realiteten er det den, snarere end det enkelte bevis, der sikrer at de sætninger, der anses for gyldige, i reglen også er det.

De Villiers konkluderer, at beviser kan virke kommunikerende, forklarende og systematiserende og altså spiller roller, som ikke kan udfyldes ved brug af quasiempirisk verifikation.

I matematikundervisningen skal man stræbe efter at afspejle de træk ved matematikken, som den professionelle matematiker oplever som centrale. Når man har beviser i matematikundervisningen, mener De Villiers, at man skal lægge vægt på bevisets *forklarende* rolle og at man særlig i de tilfælde, hvor sætningen er intuitivt indlysende, skal undgå at betone bevisets verificerende rolle. Beviset som i dets kommunikerende rolle og beviset som led i at komme frem til ny matematiske sætninger, skal også indgå, mens bevisets systematiserende rolle undlades, da det er noget, der hører til den højere matematik.

Et bidrag til den videnskabsteoretiske diskussion omkring bevisførelse

Jeg har her valgt: John Horgans "The death of proof" [32].

Denne artikel beskriver forskellige aspekter af bevisførelse i matematisk praksis og har karakter af at være en reportage, hvor forskellige ny metoder til at godtgøre påstande i "matematisk praksis", som alternativer til det formelle bevis, beskrives. Forskellige matematikeres forsvar for- og kritik af de ny metoder fremlægges også.

Opkomsten af de ny metoder giver i følge Horgan anledning til, at man stiller spørgsmålstegn ved betydningen af det formelle bevis som hovedmiddel til at godtgøre matematiske påstande. Lange beviser er uundgåelige i den matematik, der udvikles i dag, fordi der så at sige ikke er nogen (eller ret mange) matematiske sætninger "tilbage", som der findes korte, simple beviser for og det skaber et behov for alternativer fordi (1) Det tager lang tid at tjekke beviserne og det vil i mange tilfælde kun være muligt for en matematiker indenfor samme felt at gøre det. (2) Lange beviser er ikke indsigtsgivende, fordi det ikke er muligt at have overblik over dem.

Horgan beskriver to kategorier af metoder. Den ene kategori er metoder, der involverer computergrafik og computersimuleringer. Sådanne redskaber bruges blandt andet til at skabe ny matematik som led i modelleringen af fænomener, der ikke er matematiske men f.eks. fysiske. Ny matematiske sætninger fremsættes og illustreres i denne sammenhæng ved hjælp af computergrafik og -simuleringer og nogle finder at matematik udviklet i en sådan sammenhæng verificeres bedre ved at bedømme hvor effektiv den er til at beskrive fænomenerne, end ved at konstruere formelle beviser for sætningerne. Man kan stille spørgsmålstegn ved behovet for formelle beviser i den sammenhæng.

Computergrafik og simuleringer kan dog også danne basis for en efterfølgende udvikling af formelle beviser. Computergrafik er blevet brugt til at visualisere et matematisk objekt, hvis eksistens man hidtil ikke har været sikker på og efterfølgende er eksistens-sætningen blevet bevist, dvs computergrafikken er blevet brugt som redskab til at overbevise om matematikeren om, at det ønskede objekt faktisk eksisterede.

Der er indvendinger mod, at man udelukkende bruger computersimuleringer og -grafik som en måde at sandsynliggøre sætninger på. Det er ikke tilstrækkeligt at "se" sætningerne - der er stadigvæk et behov for at verificere dem. Et eksempel på en situation, hvor det kan gå galt at sandsynliggøre en sætning ved brug af computersimuleringer er, at afrundingsfejl på computeren har vist at give anledning til forkerte resultater.

En anden type metode er computerbaserede beviser, dvs beviser, der helt eller delvist gennemføres ved brug af computerprogrammer, der kan udføre symbolmanipulation. Horgan ser computerbaserede beviser som en modsætning til den funktion computergrafik og simuleringer har. Det er ikke forståelse og indsigt i matematiske strukturer, der vægtes i konstruktionen af computerbaserede beviser og der stilles heller ikke spørgsmålstegn ved relevansen af formelle beviser. Tværtimod giver computerbaserede beviser en mulighed for at gennemføre et formelt bevis helt i detalje.

Horgan fremhæver beviset for Firfarve-sætningen: Når man farvelægger et kort, kan man ved brug af højst fire farver sikre at ingen lande, der grænser op til hinanden har samme farve, som et eksempel på et computerbaseret bevis, hvor en ellers uoverkommelig undersøgelse af specialtilfælde gennemføres vha en computer.

Et eksempel på en anden type computerbaserede beviser er, at der er udviklet en metode til ved hjælp af en computer at kontrollere meget lange beviser. Det holografiske bevis er en konstruktion, hvor man omskriver et (langt) bevis, så man har mulighed for at spottjekke det og minimere - men ikke fjerne - sandsynligheden for fejl.

Ulempen ved computerbaserede beviser er dels, at sandsynligheden for fejl ikke elimineres og at man kun kan kontrollere beviset ved at køre det på andre computere. Fejl i computerprogrammer er svære at finde og computerbaserede beviser og holografiske beviser er ikke "gode beviser" i traditionel forstand, fordi matematikeren ikke har adgang til selv at overskue og tjekke det. På den anden side så giver det en verifikationsmulighed, man ikke ellers ville have haft.

Beviser didaktisk set - vanskeligheder med at forstå beviser

Jeg har her valgt E. Fischbein: "Intuition and proof" [24].

Denne artikel er valgt, fordi den indeholder interessante resultater, som der ofte bliver refereret til i senere artikler. Den er repræsentativ for kategorien af artikler, der behandler elevernes vanskeligheder med at forstå matematiske beviser.

I artiklen fremlægges en undersøgelse, der viser at elever kan forstå et bevis formelt, dvs er i stand til at følge udledningen. Tilsyneladende accepterer de altså beviset for sætningen. Alligevel anser de det for nødvendigt efterfølgende at underkaste sætningen yderligere empiriske tjek, i det nævnte tilfælde undersøgelser af taleksempler. Det er dette resultat artiklen er sat op for at forklare.

Som udgangspunkt gør Fischbein sig nogle overvejelser om, hvad det i matematik-sammenhæng vil sige, at forstå noget intuitivt. Han nævner to former for evner til at forstå en sætning intuitivt: (1) Evnen til at "se" løsningen på et matematisk problem længe inden man er i stand til at formulere den og argumentere for den og (2) evnen til at "se" rigtigheden af matematiske sætninger. Et eksempel på en sætning, der umiddelbart kan "ses" intuitivt er "to linier, der skærer hinanden, danner to par af kongruente vinkler".

At "se" en sætning intuitivt er en måde at overbevise sig om rigtigheden af den. Men ikke alle sætninger kan "ses" intuitivt - det gælder f.eks. Pythagoras' sætning. Man har her behov for et formelt bevis til at overbevise sig om sandheden af den. Til gengæld føles beviset overflødigt, når sætningen er intuitivt indlysende.

Fischbein nævner tre forskellige måder, hvorpå man kan overbevise sig om gyldigheden af en sætning: (1) via formelle argumenter (2) via empiriske fund, f.eks. taleksempler[3] (3) via "Intuitiv" overbevisning, hvor man kan "se" sætningen og føler sig overbevist om sandheden af den på det grundlag.

Fischbein mener, at der er to forskellige typer matematisk viden: Analytisk viden og intuitiv viden. Analytisk viden er alt, hvad der formuleres formelt og

[3] Fischbein refererer kun til "empiriske fund", men det fremgår af beskrivelsen af det empiriske arbejde, at han også anser målinger på geometriske konstruktioner og taleksempler for at være "empiriske fund"

eksplicit, evt. ved hjælp af symboler. Det kan f.eks. være kendskab til en matematisk sætning og evnen til at manipulere med den. Intuitiv viden er, når man er i stand til at "se" noget. Det kan f.eks. være evnen til at fortolke en matematisk sætning og forstå rækkevidden af den. Fischbein mener, at de to typer viden supplerer hinanden og at den intuitive viden er en vigtig komponent, når man skal forstå matematik. Det er nødvendigt at forstå såvel matematiske som sætninger både intuitivt og analytisk.

Fischbein går herefter over til at konstatere, at det kun er i nogle få beviser, at der er overensstemmelse mellem den formelle måde beviset gennemføres på og den måde man intuitivt forstår sætningen på.

Det empiriske materiale udgøres af en spørgeskemaundersøgelse blandt en gruppe gymnasie-elever, der har det højeste niveau (dvs den mest omfattende undervisning) i matematik. De præsenteres for sætningen "$n^3 - n$ er deleligt med 6" og bliver spurgt 1) Om de anser sætningen for at være gyldig 2) Om de anser beviset for sætningen for gyldigt 3) Om de finder, at sætningen gælder generelt.

Eleverne præsenteres herefter for (1) Et taleksempel, der påstås at vise, at sætningen for n=2357 ikke er sand (2) Om de mener det vil bidrage til sætningens troværdighed at indsætte yderligere talværdier. Skønt undersøgelsen også viser, at en meget lille del af eleverne anser taleksempler for at kunne godtgøre en sætning i sig selv, så tror en stor del af eleverne på påstanden i (1) til trods for at de har set sætningen bevist og en stor del mener også, at sætningens troværdighed øges ved fremstilling af flere taleksempler.

Det er kun 14,5% af eleverne, der har helt konsistente svar, hvilket man kunne vælge at fortolke som at det kun er denne lille del, der udviser tegn på at have et "korrekt" bevisbegreb.

Fischbein mener ikke at denne konklusion er decideret forkert, men forsøger at nuancere fortolkningen. For det første adskiller matematiske beviser sig fra, hvordan man normalt vil søge at vise en påstand, hvor man jo netop vil betjene sig af en eller anden form for eksperimenter og matematik er også det eneste fag, hvor yderligere eksperimenter kan siges at være overflødige. Herudover indgår sådanne undersøgelser i en bevisførelsesproces: Indtil man når frem til et bevis betjener man sig rent faktisk af taleksempler eller andet. Det er først i det øjeblik, man har fundet et gyldigt bevis, at der ikke længere behov for empirisk verifikation.

Fischbein konkluderer, at der altså skal særlige forholdsregler til for at sikre, at eleverne ikke bare forstår det formelle argument i beviser, men også forstår bevisets evne til universelt at godtgøre påstande. Han mener, at det der mangler er, at eleverne også opnår en intuitiv forståelse af beviset. De skal kunne "se" hvorfor beviset rent faktisk viser sætningen. Fischbein har tidligere været inde på, at man i nogle tilfælde kan "se" beviset for en sætning (to linier der krydser hinanden danner to par af kongruente vinkler) og præsenterer et bevis, der har den egenskab, at man kan "se" det. Han viser også et argument for at vinkelsummen i en trekant er 180 grader, hvor det ikke er tilfældet: Her klippes hjørnerne af trekanten og man sætter dem sammen og viser, at de til sammen giver en ret linie. Det forklarer ikke hvorfor det er sandt at vinkelsummen i en trekant er 180 grader uanset trekantens proportioner.

Fischbein beskriver tre niveauer af "intuitiv accept" af beviser
1) At man - uanset om man føler sig overbevist om sætningen eller ej, forstår hvad det er der påstås i sætningen. 2) At man forstår beviset for sætningen intuitivt, dvs har en forståelse, der ligger udover at de enkelte trin i beviset er forstået. 3) At man forstår at beviset for sætningen garanterer at sætningen er sand i kraft af, at *beviset* er gyldigt.

Principielt er der ingen forskel på at forstå et bevis og forstå bevisets universalitet - det ene følger af det andet, men det er ikke sikkert, at dette gælder en elev. Det at have en forståelse af bevisets evne til at garantere påstande er et selvstændigt element i forståelsesprocessen. Det kræver analytisk viden at følge et bevis, men intuitiv viden at forstå "bevisets universalitet". Når elever ikke anser et bevis for endegyldigt at godtgøre udsagn, så er det et udtryk for, at eleven ikke har en tilstrækkelig god intuitiv viden om, hvad et bevis er.

Beviser didaktisk set - et bud på, hvordan man kan sikre, at eleverne lettere forstår beviser

Jeg har her valgt Uri Lerons: "Structured proofs"[37].

Leron tager fat på spørgsmålet om, hvad man konkret kan gøre for at forbedre elevers forståelse af beviser. Den tradition der er for at fremstille beviser, gør det svært for eleverne at fange ideen i beviset og frister eleverne til blot at tjekke argumentationen skridt for skridt. Leron mener, at man ved at omstrukturere og udvide allerede eksisterende beviser kan gøre det lettere for eleverne at fange ideen i beviset.

Han observerer, at et karakteristisk træk ved beviser i såvel lærebøger som tidsskrifter er, at de er skrevet i en "lineær stil", dvs således at argumentationsrækken fra hypotese til sætning er kortest mulig. Sådan et bevis inddrager så få, så komprimerede og så simple argumenter som muligt.

Leron mener, at de fleste beviser indeholder en "løftestang" - et matematisk objekt, der er konstrueret med henblik på at muliggøre at beviset kan gennemføres. Et eksempel er tallet $M = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$ i modstridsbeviset for, at der er uendelig mange primtal. M er her designet, så et nyt primtal genereres udfra de primtal, man før har fundet. Modstriden med antagelsen (der er endelig mange primtal) fremkommer ved at vise, at M selv er et primtal og at der altså er et primtal udover de endeligt mange primtal, man antog eksisterede. Da man altid kan konstruere et sådan tal M må der være uendelig mange primtal.

Det er ofte overladt til læseren selv at gennemskue konstruktionen af "løftestangen". Beviset kan godt gennemføres uden at konstruktionen forklares, så længe "løftestangens" egenskaber blot defineres. Set i lyset af, at beviser skal være korte og indeholde så få argumenter som muligt, er en forklaring af løftestangens funktion overflødig.

En anden ting, der karakteriserer lineære beviser, er at hjælpesætninger bevises i begyndelsen af beviset. Læseren kan da ikke se, hvorfor det er nødvendigt at bevise lemmaerne og vil være nødt til at "backtracke" beviset, når der er brug for hjælpesætningerne.

På denne baggrund konkluderer Leron, at beviser må kunne gøres mere lettilgængeligt ved at udvide beviset således at "løftestangens" konstruktion forklares og omstrukturere det, således at beviserne for hjælpesætningerne optræder, når der er brug for dem. Generelt ser Leron beviser som en række af ideer og hans forslag er at tage dem en ad gangen i det han betegner "strukturerede beviser".

Sådanne beviser arrangeres i niveauer med stadig højere grad af formalisme. På topniveauet bliver løftestangens betydning i forhold til at nå frem til den sætning, man vil vise forklaret, således at man får et overblik over ideen i beviset. [4]. På de lavere niveauer bliver løftestangen beskrevet mere detaljeret og argumentet udvikles, hjælpesætninger bliver introduceret og bevist på endnu lavere niveauer.

Bevisførelse didaktisk set - vanskeligheder med at gennemføre bevisførelsesprocessen

Jeg har her valgt Nicolas Balacheff's artikel: "Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics"[5].

Balacheff undersøger her, hvordan elever bærer sig ad med at overbevise sig om, at løsningen til et matematisk problem er gyldig og hvordan dette forholder sig til en model af forskellige niveauer i forståelsen af, hvad det vil sige at have ført et bevis. Som udgangspunkt betegner han enhver form for argumentation som et bevis.

Balacheff beskriver fire argumentations-niveauer. Det første er "Naiv empiriscisme" hvor et eller flere specialtilfælde bruges som argumentation. Det andet er "Det afgørende eksperiment" hvor der stadigvæk argumenteres med et eller flere eksempler, men hvor eleven eksplicit overvejer, at argumentationen skal gælde generelt. Det tredie niveau er "Fællestræk-eksemplet", hvor der trækkes på et eksempel, men hvor eksemplet anses for at være repræsentativt for en klasse af eksempler. Det fjerde niveau er "Tanke-eksperimentet", hvor der argumenteres generelt, men uformelt: "It is still coloured by an anecdotal temporal development, but the operations and the proof are indicated in some other way

[4] **I tilfælde af meget simple beviser - f.eks. beviset for at der er uendelig mange primtal er der kun et niveau.**

than by the result of their use, something which is the case for the generic example".

Balacheff ser på, hvordan 13-14-årige elever argumenterer for såvel sande som falske udsagn for hvor mange diagonaler, der er i en n-polygon[5]. Det påvises, at man finder argumenter på alle fire niveauer.

Balacheff konkluderer, at det afgørende fremskridt i bevisførelsesprocessen sker, når et argument er et "Eksempel med fællestræk" eller et "Tanke-eksperiment" frem for et "naivt eksempel" eller et "afgørende eksempel". Det er det, fordi man går fra eksempelprægede overvejelser til generelle overvejelser og argumenter. ("truth asserted on the basis of a statement or fact to one of an assertion based on reasons"). De andre overgange er mindre drastiske: At gå fra naive eksempler til det afgørende eksempel er ikke så stort et skridt, fordi det er oplagt at overveje et enkelt eller flere eksempler måske ikke er nok til at sikre at hypotesen gælder generelt.

Udover dette mener Balacheff, at det afgørende eksempel spiller en selvstændig rolle og bliver ved med at have betydning, selvom der argumenteres på højere niveauer. Det er afgørende eksempler, der benyttes ved valg mellem to hypoteser eller til at afgøre gyldigheden af en antagelse, der fremsættes som led i at udvikle argumentet.

Endelig siges det, at den type problemløsning eleverne her har gennemført, stiller større krav, end problemer der kan løses "praktisk"[6] og kræver stringente argumenter. Eleverne skal på samme tid trække på deres matematiske viden for at løse problemet og samtidig trække på deres evne til at argumentere.

Bevisførelse didaktisk set - et bud på, hvordan man kan motivere eleverne for at selv at føre beviser

Her er det "Towards new customs in the classroom" af Daniel Alibert, jeg har valgt.

Aliberts artikel beskriver en undervisningsmetode, "scientific debate", i hans scenario lavet til førsteårsstuderende på universitetet.

Metoden består i, at eleverne fører beviser for påstande, som de selv har været med til at fremsætte og dermed ikke ved om er sande eller falske. Hermed motiveres eleverne for at søge at bevise eller modbevise matematiske hypoteser på en anden og bedre måde, end hvis de præsenteres for en sætning de på forhånd ved er sand. Man undgår at eleven opfatter bevisførelse som en formel eksercits, hvor der fokuseres på formen frem for indholdet af argumentet.

[5] Der er $\frac{n(n-3)}{2}$, da der fra hvert af de n hjørner kan trækkes n-3 diagonaler. Da man således trækker diagonaler begge veje, skal man dividere med 2.

[6] Dette uddybes ikke, men jeg formoder, at der er tale om mere rutineprægede opgaver, hvor der i praksis ikke er behov for en argumentation.

Målet er at eleverne oplever beviser som et middel til at verificere eller forkaste matematiske hypoteser. Aliberts påstand er, at det gør de ikke medmindre eleverne bliver sat i en situation, hvor de på egen krop oplever ikke at vide, om sætningen er sand eller falsk.

Alibert beskriver tre forskellige varianter af "videnskabelig debat" [7]

I den første variant lægger læreren op til en debat ved at fremlægge en definition af et nyt matematisk objekt og ved at søge at få de studerende til at komme med bud på, hvad der kan gælde.

I eksemplet i artiklen er det matematiske objekt en stamfunktion. Eleverne præsenteres for sætningen:

Hvis I er et interval bestående af reelle tal, hvor a er et tal, der er element i i I og x er et element i I, kan vi for f integrabel på I sætte:

$$F(X) = \int_a^x f(t)dt$$

Eleverne bliver så spurgt: "Kan du fremsætte hypoteser af formen: hvis f..så F?" (pp. 32).

Der er tre faser i en videnskabelig debat (1) Debatten frembragt af læreren, hvor eleverne fremsætter hypoteser. (2) De studerende viser eller modbeviser de fremkomne hypoteser. (3) Hypoteserne klassificeres som teoremer, når det er muligt at finde et bevis og falske påstande, når det er muligt at finde modeksempler.

Version 2 - som ifølge Alibert er meget forskellig fra den første - er en hvor eleverne i fase (2) søger at overbevise hinanden fremfor læreren om gyldigheden - eller mangel på samme - af sætningerne. Her skal der være rum for overbevisende argumenter, dvs argumenter, der kan overbevise de andre elever om, at sætningen er sand udover mere formelle beviser.

Alibert finder, at eleverne faktisk ændrer syn på nødvendigheden af at beviser sætninger og han finder også, at eleverne får en bedre begrebsforståelse i kraft af at begreberne under hypotesefremsættelsen diskuteres og misforståelser kommer frem. Han finder også at de studerende foretrækker den videnskabelige debat frem for almindelige forelæsninger, men at det ikke er en undervisningsmetode, der kan stå alene. Der er behov for nogle strukturerende forelæsninger, for at give de studerende et overblik over, hvad det er de har lært.

[7] jeg vil dog undlade den sidste i min beskrivelse, da den handler om, hvordan man kan bruge samme metode til at introducere nye matematiske begreber.

En oversigtsartikel

Dette er Gila Hannas og Niels Jahnkes "Proof and proving in Mathematics Education" [27]. Deres tilgang er, at matematikundervisningen bør afspejle matematisk praksis, dvs at elever i høj så grad som muligt skal få den samme oplevelse af "faget matematik", som den professionelle matematiker har.

Som udgangspunkt argumenterer de for, at dette ikke nødvendigvis betyder, at eleven skal føre formelle beviser. Det formelle bevis' betydning for matematisk praksis er overvurderet og undersøgelser viser at følgende faktorer er af større betydning end eksistens af et gyldigt formelt bevis: (1) sætningens betydning matematisk set, (2) sætningen er konsistent med andre sætninger indenfor teoribygningen, (3) matematikerens ry som ekspert indenfor feltet og (4) at der er brugt en almindelig kendt type argument.

Herefter refereres den matematik-filosofiske debat omkring, hvad man kan anse for at være et bevis. Hanna og Jahnke er uenige i, at opkomsten af alternative bevisformer og metoder betyder, at det formelle beviset som institution i matematisk praksis er ved at forsvinde og at man derfor kan tillade sig at undlade beviser i matematikundervisningen. Der er et behov for at verificere påstande i matematikken som ikke forsvinder med opkomsten af ny bevisformer - disse er snarere udtryk for at behovet stadigvæk er der. Herudover er det først og fremmest de dominerende læringsteorier, der har konsekvenser for hvordan matematikundervisningen i beviser tilrettelægges og udføres - ikke den videnskabsteoretiske debat omkring beviser.

Når man ser bort fra "new-math"-bevægelsen, så indeholder mange nyere læringsteorier principper, der ikke stemmer overens med matematik-didaktikeres undersøgelser af, hvad en god matematikundervisning i beviser og bevisførelse kræver. Undersøgelserne viser, at læreren er af altafgørende betydning "in helping the students to identify the structure of a proof, to present arguments and to distinguish between correct and incorrect arguments" (p. 885). Specielt visse fortolkninger af det konstruktivistiske læringssyn anbefaler imidlertid, at læreren griber mindst mulig ind og f.eks ikke blander sig når eleverne forsøger at argumentere for løsningen til et matematisk problem. Bevisførelse forudsætter imidlertid viden om hvilke måder at argumentere på, der er gyldige og det er kun læreren, der kvalificeret kan bedømme om argumenterne er gode nok. De forskellige bevismetoder er desuden komplicerede konstruktioner, som man ikke kan forvente eleverne selv udvikler. "It would seem unrealistic to expect students to rediscover sophisticated mathematical methods or even the accepted modes of argumentation" (s.887)

Hanna og Jahnke kommenterer også Lakatos' beskrivelse af bevisførelsesprocessen[8]. Mens det oprindelig gav en ny vinkel på, hvordan matematik udvikles, så

[8]Lakatos har skrevet bogen "Proof and refutations, som er et langt replikskifte mellem en lærer og nogle elever, hvor klassifikationssætningen for polyedre udvikles. Pointen er, at bevisførelsesprocessen foregår som en vekselvirkning mellem opsætning af hypoteser, argument

finder Hanna og Jahnke, at "Lakatos's" model[9] bruges ukritisk og tages ukritisk til efterretning. Den afspejler kun et særligt aspekt af bevisførelsesprocessen: Opsætningen af tilstrækkelig præcise definitioner og præcisering af forudsætninger. Når først dette er gjort, forløber bevisførelsesprocessen ikke som Lakatos beskriver den. Det emne Lakatos har valgt gør desuden, at det er let at konstruere uformelle modeksempler. Modeksempler kan imidlertid være af meget formel art og vanskelige at udvikle - f.eks. er det højst formelle bevis for Gödels sætning et modeksempel til den tese at alle matematiske påstande kan bevises. Lakatos' metode kritiseres desuden for at give eleverne det indtryk, at man ikke er i stand til at garantere, at der ikke findes yderligere modeksempler, hvilket et korrekt formelt bevis jo netop gør.

Hanna og Jahnke kritiserer også, at beviser opfattes som en måde at sætte et autoritært matematiksyn igennem på, dvs retfærdiggøre at eleverne får et ukritisk syn på matematikken, fordi de præsenteres for påstande, der vises at være uigendriveligt sande. De indvender, at beviser jo netop er argumenter, der er åbne overfor inspektion, dvs man har arbejdet på at gøre argumentationen så tydelig, at enhver i princippet har tilgang til at sætte sig ind i og kritisere det. Beviser er derfor snarere et *antiautoritært* element i matematikundervisningen, en mulighed for eleverne for at "se selv".

Herefter går Hanna og Jahnke over til at gøre rede for, hvilke roller beviser spiller indenfor matematikken selv - og hvilke roller beviser bør spille i matematikundervisningen. Ofte tages der ikke højde for, at beviser spiller *forskellige roller* alt efter om de optræder i færdige teoribygninger eller teoribygninger under opbygning og alt efter om der er tale om beviser i ren eller anvendt matematik.

Klassiske beviser kan opfattes som *sandhedsoverførere*. Et bevis godtgør en sætning på basis af aksiomer, der tages som et indiskutabelt udgangspunkt, og allerede beviste teoremer. Beviser er her et forbindelsesled mellem aksiomer og teoremer. Sådan forholder det sig imidlertid ikke, hvis der er tale om en matematisk teoribygning under konstruktion. Hvis et bevis giver anledning til sætninger, der ser "fornuftige" ud og der ikke opstår inkonsistenser, så viser det, at aksiomerne i så henseende er fornuftigt valgte. Beviserne bidrager snarere til at godtgøre aksiomerne i dette tilfælde.

Et eksempel på sådan et bevis finder man indenfor den klassiske mekanik: udledningen af Keplers love - dvs kendte, empirisk underbyggede lovmæssigheder - fra gravitationsloven. Dette bevis kan kun gennemføres, hvis man antager at det fysiske princip: action-at-a-distance er gældende og da man får to kendte lovmæssigheder forbundet, må man antage at det princip er et godt valg. Beviset virker ikke kun som et middel til at sandsynliggøre antagelserne her. Det

for hypoteserne, konstruktion af modeksempler, fremsætning af ny hypoteser i tilfælde af, at der findes et modeksempel.

[9] At se bevisførelsesprocessen som en aktivitet, der foregår ved at man accepterer en sætning på basis af at det ikke er muligt at finde et modeksempel til det.

bruges også til at inkorporere et sæt velkendte sætninger - Keplers love - i en ny teori.

Når man ser på beviser i ren versus anvendt matematik, så er den måde matematikken evalueres på, forskellig. Når man anvender matematik og bygger matematiske modeller, så er det afgørende at modeldata og empiriske data stemmer overens. Beviser for de sætninger, der er brugt i modellen garanterer at modellen er matematisk korrekt, men modellen *vurderes* på sin evne til at fitte data. I denne sammenhæng er status af empiriske facts mere lig de empiriske facts i andre fag, fordi det når matematik anvendes til at bygge matematiske modeller, er de empiriske facts, der ligger til grund for verificeringen.

Hanna og Jahnke udvider deres beskrivelse af de roller, beviser spiller yderligere med Michael De Villiers beskrivelse af beviser som verificerende, forklarende, systematiserende, kommunikerende og førende frem til ny matematiske sætninger.[10].

Set i lyset af at beviser kan spille mange forskellige roller "internt-matematisk", er det ikke så mærkeligt, at forskellige studier af elevers forhold til beviser viser forskellige resultater. Nogle undersøgelser viser, at elever har vanskeligt ved at se relevansen af beviser i tilfælde, hvor sætningen enten er intuitivt indlysende eller udtaler sig om geometriske konstruktioner, hvor man via målinger kan overbevise sig om, at påstanden er sand. Her foretrækker elever ofte yderligere empirisk evidens selvom de mener at have forstået beviset for sætningen. Andre undersøgelser viser imidlertid, at elever foretrækker formelle, symboltunge beviser for geometriske/visuelle argumenter som middel til at verificere en påstand.

Ideelt set bør de roller beviser spiller i matematikken afspejle sig i matematikundervisningen. I så henseende har matematiklæreren et mere krævende job end matematikere, der "bare" skal sikre sig, at hans eller hendes resultater er korrekte. Matematiklæreren skal have indsigt i de forskellige roller beviser spiller og det er krævende, fordi der i skolematematik-sammenhæng ikke er tradition for at tænke i de baner.

Det er selvfølgelig sådan, at nogle af de roller beviser spiller er vigtigere end andre. Hanna og Jahnke finder, at beviset i matematikundervisningssammenhæng først og fremmest er en forklaring på *hvorfor* sætningen er sand og at man af denne grund skal foretrække beviser, der er *forklarende*."..In the educational domain, then, it is natural to view proof first and foremost as explanation and in consequence to value those proofs which best help to explain.", (pp. 903).

Hanna og Jahnke forklarer i den sidste del af artiklen, hvad man skal forstå ved et "forklarende" bevis. Et forklarende bevis er et bevis, hvor "the evidence which it presents derives from the phenomenon itself"(pp.904). Et eksempel

[10] Jeg vil ikke gå nærmere ind i at beskrive dem, da jeg har gjort det i mit referat af Michael de Villiers artikel på s.26

på et forklarende bevis er følgende bevis for at summen af de n første heltal er $\frac{n(n+1)}{2}$. Det føres ved at udnytte af summen af hvert par af termer er den samme: n+1, hvis man lægger talrækken sammen med samme talrække vendt om.

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \ 2...............+n \\
S &= n + \ (n-1)...........+1 \\
2S &= (n+1)+(n+1)+.....(n+1)
\end{aligned}
$$

Der laves her ingen nye konstruktioner for at gennemføre beviset, som der f.eks. gør i beviset for at der er uendelig mange primtal. Man tager i stedet udgangspunkt i talrækken og udnytter, at den vendt om har en symmetriegenskab: Hvert led i rækken og dens "omvendte" summer til det samme tal.

Et eksempel på en hel klasse af beviser, der *ikke* er forklarende er induktionsbeviser, en metode man også kunne bruge til at vise sætningen med.

Hanna og Jahnkes pointerer, at det ikke altid er muligt at konstruere et forklarende bevis for en sætning, men at man i matematikundervisningen skal *vælge* de forklarende beviser i de tilfælde, hvor det er muligt.

3.2 Resultater og konklusioner

Artikel-kategorier

I det følgende fremlægges det jeg ser som værende hovedtemaerne i debatten om beviser og bevisførelse. Artiklerne indenfor feltet falder i hovedsagen i 3 kategorier:

Kategori 1 består af artiklerne [8], [10], der er rent videnskabsfilosofiske og principielt intet har med matematikundervisning af gøre. Her diskuteres det, hvad man matematikfilosofisk set skal forstå ved et matematisk bevis. Da det falder udenfor min problemstilling, vil jeg blot påpege kategoriens eksistens.

Kategori 2 består af artikler, der hovedsagelig - eller udelukkende - gør rede for den videnskabsteoretiske status af beviser og bevisførelse, men oftest motiverer og perspektiverer deres arbejde i forhold til didaktiske problemstillinger.

Kategori 3 består af artikler, hvor det diskuteres, hvilken rolle beviser og bevisførelse i matematikundervisningen bør spille og har spillet. Denne kategori kan man underopdele yderligere i artikler, der indeholder empirisk arbejde hvor elevers vanskeligheder med beviser og bevisførelse forsøges kortlagt og artikler, der indeholder forslag til hvordan man kan undervise i beviser og bevisførelse på en "god måde".

I min beskrivelse af diskussionen af beviser og bevisførelse, som den tager sig ud i litteraturen, skelner jeg mellem beviser og bevisførelse, didaktisk og videnskabsteoretisk set. Der er dog et vist overlap mellem beviser og bevisførelse i den videnskabsteoretiske diskussion, da diskussionen af, hvad et bevis er uundgåeligt også har betydning for spørgsmålet om bevisførelse.

3.2.1 Beviser i "matematisk praksis"

Artiklerne om beviser i matematisk praksis falder i kategori 2, da det hovedsagelig er beviser i matematisk praksis, der beskrives i artiklerne [6], [7], [13], [15], [27], [28], [29], [30], [31], [43], [2], [57], [18] og [59]. Det er matematikere, der reflekterer over egen praksis og matematikdidaktikere, der review'er andres reflektioner. Matematikhistorikeres arbejde spiller også en rolle, da der også optræder historiske eksempler til belysning af matematisk praksis i diverse historiske perioder.

Et af formålene med at sætte "matematisk praksis" under lup er at gøre op med en række *myter* omkring bevisers rolle i matematisk praksis. Myterne er de stiltiende antagelser om bevisets rolle i matematik, som er basis for de begrundelser, der gives for at beviser skal have en central position i matematikundervisningen.

Myter om beviser i "matematisk praksis"

Myte nr. 1 er, at beviser i matematisk praksis er *fejlfrie og fuldstændige*. Dette ser man blandt andet formuleret af Hanna i [30] s. 8, [31] s.59, [29] s.42 og af Wittmann i [59] s. 18. Mange af de beviser der i dag publiceres, er behæftede med fejl ifølge en kilde, der citeres af Hanna i [31], s. 59 (hvorefter andre citerer hende) og kan altså ikke siges at være fejlfrie. Der er ydermere ingen garanti for, at beviserne overhovedet bliver undersøgt. Historisk set er der mange eksempler på, at beviser for selv betydningsfulde sætninger, har vist sig at være fejlbehæftede. Noget blandet andet Chazan er inde på [15]. Beviser i matematisk praksis er heller ikke fuldstændige, fordi de så vil blive meget lange og svære at sætte sig ind i. F.eks. refereres der af Michael De Villiers til at beviset for Pythagoras' sætning antages at ville fylde i omegnen af 80 sider [18], s.19, hvis det skulle være fuldstændigt.

Myte nr. 2 er, at der i matematisk praksis er *entydige standarder for beviser*. At det ikke forholder sig sådan, argumenteres der både for med eksempler fra nutidig matematik og matematikhistorien. Thurston [57], s.33 pointerer, at beviser først og fremmest lever op til en social standard for præcision og formalitetsgrad, der endog varierer fra gren til gren af matematikken. Hanna postulerer i [29], at beviser med forskellig grader af formalitet opnår den samme grad af accept.

Der er også konklusionen på undersøgelser af bevisopfattelser, som de giver sig udtryk i forskellige matematik-filosofiske retninger og/eller i forskellige historiske perioder eller forskellige kulturer. Klassikeren indenfor feltet matematikfilosofisk set er Gila Hannas "Rigorous proof in mathematics Education" [28], men også andre bidrager med eksempler på at det formelle bevis har haft forskellig status [42], [15]. Barbin [7] leverer en matematikhistorisk analyse, der viser at man matematikhistorisk set skiftevis har lagt vægt på "bevise" og "overbevise"-aspektet med den konsekvens, at det formelle bevis i visse perioder ikke har været af den store betydning i matematisk praksis. Endelig konstaterer Joseph og Wheeler, at den matematiske praksis hos inderne og kineserne og ægypterne ikke har indbefattet formelle beviser [35], [58]. Dette tjener blandt andet til at vise, at beviser ikke er en forudsætning for eksistensen og brugen af matematiske sætninger.

Myte nr. 3 består i, at beviser er en *altafgørende faktor for accepten af en matematisk sætning* i matematisk praksis. Imidlertid argumenteres der for, at andre faktorer er mindst lige så vigtige eller endog vigtigere. Hanna - som de andre i reglen refererer til - fremhæver (1) forfatterens ry som dygtig matematiker, (2) forståeligheden af argumentet (3) at sætningen er betydningsfuld matematisk set, (4) at der eksisterer et plausibelt argument for sætningen [31]. Man finder lignende argumenter i [6]. Et af argumenterne består i, at der er mange beviser, der publiceres, men aldrig tjekkes, fordi de opfylder de øvrige "sociale krav". Det er faktisk kun i det øjeblik at en sætning bliver anset for at være meget central eller den er egentlig overraskende, at man bekymrer sig om at tjekke et bevis for den i detalje.

Denne myte tilbagevises også i forhold til ikke blot, hvad der skal til for at en sætning kan begå sig i "samfundet" af matematikere, men også i forhold til, hvad der skal til for at en matematiker personligt accepterer en sætning, dvs er parat til at bruge den i sit eget arbejde. De Villiers og Barbeau [18], [6] fremhæver, at matematikerens "intuitive" fornemmelse af, at resultatet er rigtigt, evt. bekræftet gennem undersøgelser af specialtilfælde spiller en større rolle end et bevis i accepten af en matematisk sætning.

Myte nr. 4 er, at beviser i matematisk praksis *udelukkende har til formål at godtgøre matematiske sætninger.* Her konstateres det, at beviser ikke kun verificerer, men også har betydning i andre sammenhænge. Blandt andet De Villiers [18], Hanna og Jahnke [27] og Carter [13] mener at beviser er andet og mere end et verifikationsmiddel. Det er også et middel til at kommunikere matematiske ideer, til at systematisere allerede kendte sætninger og kan være direkte årsag til at der fremkommer ny, matematiske sætninger.

Bevisers egentlige rolle i matematisk praksis

De Villiers beskriver i [18] fire forskellige roller et matematisk bevis kan spille: Det kan være verificerende, kommunikerende eller systematiserende eller føre til ny opdagelser, som beskrevet på s. 27. Et *verificerende* bevis udfylder den rolle beviser traditionelt tillægges, dvs det godtgør, at sætningen er sand. Et forklarende bevis godtgør at sætningen er sand, men det forklarer herudover *hvorfor* sætningen er sand. Hanna beskriver blandt andet i [29], s. 10, hvad man skal forstå ved forklarende beviser. Jeg har været inde på det i mit referat af Gila Hannas og Niels Jahnkes "Proof and proving in Mathematics education" se side 38. Det er den forklarende funktion af beviset, der anses for at være den dominerende i "matematisk praksis" og også den det anses for at være centralt at betone i undervisningsmæssig sammenhæng.

Hanna og Jahnke udvider listen af roller i [27] s.896-897 og fremhæver, at man bør skelne mellem den rolle beviser spiller i færdige teoribygninger og den rolle beviser spiller, når en matematisk teoribygning er under opbygning. Når en teoribygning er under opbygning vil der netop foregå en test af om de valgte aksiomer giver anledning til inkonsistenser og i hvert fald i så henseende er et godt valg. I en færdigbygget teoribygning, hvor også andre krav til et godt sæt af aksiomer er opfyldt, (f.eks. at der skal være så få aksiomer som muligt), vil beviset derimod være verificerende.

3.2.2 Bevisførelse i matematisk praksis

Den videnskabsteoretiske diskussion omkring bevisførelse handler om, hvilke metoder, man må anse som gyldige at bruge til at godtgøre matematiske påstande. Også her gøres der i litteraturen op med en myte; at det logisk-deduktive bevis er den eneste acceptable bevismetode.

Det logisk-deduktive bevis er ikke den eneste acceptable bevismetode

At det logisk-deduktive bevis ikke er den eneste acceptable bevismetode argumenteres der blandt andet for ved at referere til konklusionen på den videnskabsteoretiske debat omkring beviser: Det formelle bevis i matematisk praksis er hverken fuldstændigt eller fejlfrit og mange andre faktorer end lige netop det formelle bevis har betydning for accepten af en matematisk sætning.

Dette er argumentet for at andre bevisformer og dermed også andre bevismetoder *burde* accepteres som gyldige bevisformer.

Det er først og fremmet visuelle beviser og computerbaserede beviser, der fremhæves. Man finder dog også en mindre skov af andre bevisformer, der især er beskrevet i detalje af Hanna og Jahnke i [27], s. 880-884, men også af f.eks.

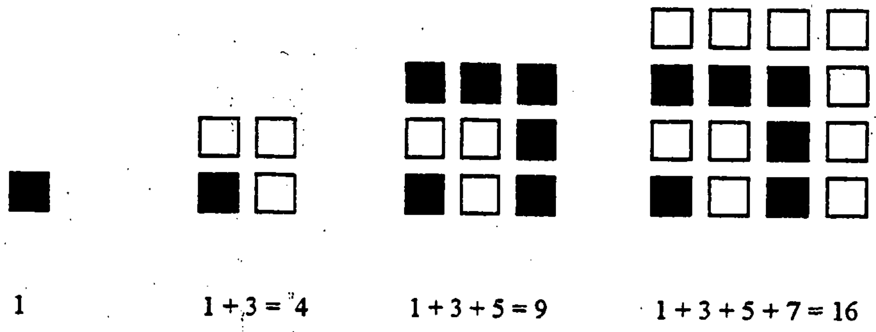
Moshovits i [42], s. 23. Et eksempel på en sådan bevisform er holografiske beviser, der er struktureret således, at man kan spottjekke dem og få beviser, der med meget høj sandsynlighed er korrekte og hvor man altså accepterer en vis - omend meget lille sandsynlighed - for fejl i beviset. Argumentet for at tillade disse bevisformer er, at man jo også accepterer sætninger baseret på formelle beviser, som der er fejl i.

En anden tilgang til debatten er, at man i stedet for at argumentere for metoderne søger at påvise, at alternative bevisformer faktisk *bliver* brugt i matematisk praksis og at der er nogen, der accepterer sætninger på denne basis.

Visuelle beviser som verifikationsmiddel

Et visuelt bevis er en tegning eller en serie af tegninger, som man kan bruge til at overbevise sig om rigtigheden af en matematisk sætning.

Et eksempel på et visuelt bevis ses på figur 3.1, som man kan bruge til at overbevise sig om, at summen af de n første ulige positive heltal er n^2.



Figur 3.1 Figur der illustrerer at summen af de n første ulige positive heltal er n^2

Et andet klassisk eksempel på et visuelt bevis er en trekant, hvor hjørnerne klippes af, samles og vises at danne en ret linie og altså viser at vinkelsummen er 180 grader. Sådanne udklipsbeviser er typisk for den matematik kineserne lavede. Eksempler på flere visuelle beviser kan findes i [45].

Blandt andet Joseph [35] anser visuelle beviser for at være en fuldt gyldig bevismetode, der blot er underkendt i forhold til den deduktivt-logiske metode udviklet af grækerne og videreudviklet i "vestlig" matematik. Argumentationsformer udviklet af indere og kinesere er lige så sofistikerede som det deduktive bevis [36], [55] og andre bevisformer end det logisk-deduktive bevis *burde* anerkendes.

Hos Barbin [7] finder man et interessant historisk perspektiv. Hun søger at dokumentere, at der historisk har været skiftende vægt på "bevise" og "overbevise"-aspektet i matematisk argumentation. Set fra denne vinkel er genkomsten af visuelle beviser og mindre vægt på formelle beviser blot udtryk for, at den herskende "trend" er overbevisningsaspektet.

Computerbaserede beviser som verifikationsmiddel

Computerbaserede beviser er beviser hvor man gør brug af computerprogrammer, der har de relativt mekaniske regler for symbolsk algebra indprogrammeret. Det giver mulighed for at lave nogle beregninger, man ellers ville bliver nødt til at lave i hånden og gør det muligt at gennemføre en argumentation i tilfælde, hvor det ville være uoverkommeligt for et menneske selv at gennemføre alle beregningerne.

Diskussionen omkring computerbaserede beviser er mest detaljeret hos Horgan i [32], men omtales også af Moshovits i [42]. Kan computerbaserede argumenter anses for at være verificerende? For taler det faktum, at man sandsynligvis aldrig ville kunne finde et mere simpelt bevis for visse sætninger som f.eks. firfarve-teoremet og at alternativet til et computerbaseret argument er intet argument. Ydermere er matematisk praksis i dag så specialiseret, at det alligevel kun er et fåtal, der kan forstå, endsige kontrollere et bevis indenfor "frontforskningsmatematik", så argumentet er alligevel ikke åbent for inspektion for ret mange.

Computerbaserede beviser er kun aktuelle, når man har meget lange beviser og en af de ting, der diskuteres, er, om det er sådan, at det kun er et fåtal af de interessante teoremer i matematikken, der har korte og simple beviser og man derfor er nødt til at acceptere computerbaserede beviser. Dette tages også op af Moshovits og Horgan [42], [32].

Et andet eksempel på brug af computere i konstruktionen af beviser, er eksistensbeviser i talteori, hvor man gør brug af computere til systematisk at søge efter et tal med bestemte egenskaber. Man kan f.eks. undersøge, om der findes et primtal p, således at p^2 går op i $2^{p-1} - 1$ (Wieferich'ske primtal) [53]. Her kan man bruge en computer til at godtgøre, at der før $6 \cdot 10^9$ findes to sådanne p, blandt andet p=1093. Dette adskiller sig fra firfarve-teoremet ved at man, når først computeren har fundet tallet, har mulighed for selv at tjekke om det fundne tal virkelig har de efterspurgte egenskaber.

Endelig er der computerprogrammer, der ikke blot kan udføre symbolske manipulationer, men også tjekke om bevisernes logiske struktur er korrekt og eksempelvis om et udsagn, der omskrives, er ækvivalent med et oprindelige udsagn efter omskrivningerne.

De, der ikke anser computerbaserede beviser for at være gyldige, mener at det er problematisk at beviset ikke er principielt tilgængeligt for kontrol - et argument, man blandt andet ser formuleret af Horgan i [32]. I modsætning til beviser lavet i hånden, publiceres det computerprogram, der har været anvendt til et computerbaseret bevis normalt ikke. Som sådan er computerbaserede beviser altså ikke offentligt tilgængelige. Muligheden for forekomsten af programmeringsfejl er naturligvis også til stede og her er problemet, at programmeringsfejl kan være mindst lige så svære at påvise fejl i beviser, der er konstrueret i hånden.

Et modargument af mere sociologisk art er, at computerbaserede beviser udelukkende (hvis man ellers kan leve med forbeholdene) er *verificerende* beviser og at de ikke er "gode beviser" i den forstand, at de ikke er forklarende. Dette fremføres af både Moshovits [42] og Horgan [32].

Ændrer de ny bevisformer bevisidealet?

Diskussionen af ny bevismetoder følges af diskussion om, hvorvidt opkomsten - og for de visuelle bevisers vedkommende genkomsten - af alternative bevisformer er udtryk for, at bevisidealet er ved at ændre sig. Med dette følger ifølge Horgan [32], at det formelle bevis bliver af mindre betydning.

Den overordnede diskussion drejer sig ikke om beviser som verifikationsmiddel, men om hvad man kan anse for at være matematisk viden. Spørgsmålet er, om man kan anse en sætning for at være "matematisk viden", før der foreligger et formelt-deduktivt bevis for den. Her mener nogle, at opkomsten af alternative måder at sandsynliggøre sætninger på gør, at man skal udvide sin opfattelse af, hvad man skal forstå ved matematisk viden. Et eksempel finder man hos Davis [16], der mener, at geometriske strukturer, f.eks. fraktaler visualiseret vha computergrafik, burde anses for at være teoremer på linie med teoremer udledt via logisk-deduktive beviser og at visualiseringen på sin vis er et bevis.

I diskussionen af, hvad man kan anse for at være matematisk viden søger blandt andet Davis, De Villiers og Horgan [16], [18], [32] også at gøre op med en myte: at matematisk viden udvikles uafhængig af induktion og eksperimenter med matematiske strukturer og altså udelukkende ved brug af logisk-deduktiv tænkning. Myten tilbagevises med beretninger om den afgørende rolle intuition og undersøgelser af specialtilfælde spiller for matematikeren, når han/hun får bevisideer.

3.2.3 Artikler af didaktisk karakter - beviser

I de didaktisk orienterede artikler diskuteres det blandt andet, hvad formålet med beviser i matematikundervisningen kan/skal være på baggrund af de konklusioner, man kan drage af undersøgelserne af matematisk praksis. Men konklusionerne bruges også til at kritisere den måde beviser indgår - eller har indgået - i matematikundervisningen.

Matematisk praksis - implikationer for matematikundervisningen i beviser

Det er først og fremmest dem, der selv foretager undersøgelser af matematisk praksis, der drager direkte konklusioner af didaktisk karakter, dvs fremkommer med betragtninger over, hvilke betydning de fundnu træk ved "matematisk praksis" bør have for matematikundervisningen. Det gælder f.eks. Hanna og Jahnke og De Villiers [27], [18]. Folk som Wheeler og Neubrand [58], [46] trækker dog i højere grad på andres undersøgelser. Det er imidlertid ikke så meget direkte didaktiske konklusioner, de drager, som konklusioner der angår matematisk viden. Resultaterne bruges først og fremmest til at kritisere den dominerende rolle det formelle bevis tidligere har haft i matematikundervisningen, dvs til at gøre op med "new math"-idealer for matematikundervisningen.

De Villiers, Hanna og Jahnke og Thurston konkluderer, at beviset i matematisk praksis primært bruges som et *middel til at kommunikere matematiske ideer* [18], [27], [57] og at beviser *ikke* - i hvertfald ikke udelukkende - bør fremstilles som noget, der på mere eller mindre mystisk vis verificerer en sætning. Man bør - hvis det kan lade sig gøre - foretrække forklarende beviser fremfor verificerende beviser og lade eleverne se beviser som en måde at forklare *hvorfor* en sætning er sand.

Det konkluderes også, at man skal være klar over at det at *overbevise* sig om en sætning adskiller sig fra at *bevise* en sætning. Andre faktorer end lige netop beviset; tegninger, taleksempler, kan være mere velegnede, når man skal overbevise sig om en sætnings rigtighed [18].

Joseph [35] ser ligefrem fraværet af andre bevisformer end det deduktive bevis i matematikundervisningen som et udtryk for en art kulturimperialisme i form af en manglende accept af andre bevisformer end den vestlige kulturs deduktive beviser. Særlig visuelle beviser tilgodeser i højere grad end det deduktive bevis kommunikationsaspektet, men generelt bør man også medtage andre bevisformer for at give eleverne et bredere bevisbegreb.

Vanskeligheder med bevisbegrebet

Det er først og fremmest elevernes *bevisbegreb*, der er blevet gjort til genstand for empiriske studier. Den klassiske problemstilling er deduktive beviser versus empirisk evidens, hvor det undersøges i hvor høj grad eleverne forstår at et deduktivt bevis overflødiggør empirisk evidens.

Sådanne studier beskæftiger Chazan, Fischbein og Hoyles sig med [14], [24], [33]. Et meget citeret og diskuteret resultat finder man hos Fischbein [24]. Elever, der erklærer at de forstår de enkelte trin i et deduktivt bevis, mener at yderligere empiriske tjek af beviset er nødvendige.

Vi befinder os her lidt i gråzonen mellem beviser og bevisførelse, fordi det at iagttage en elev føre beviser kan bruges til at konkludere på tilstanden af elevens bevisbegreb. Elevens bevisbegreb vil både vil være af betydning, når eleven forsøger at føre og forstå beviser. Der er derfor tale om en form for fælles teoriapparat her. Både hos Dormolen og Balacheff [19], [5], der undersøger henholdvis elevers forståelse af "færdige" beviser som forsøg på selv at føre beviser, opstilles modeller som man kan betragte som beskrivelser af forskellige niveauer af bevisbegrebsforståelse.

Udover "deduktivt bevis-empirisk evidens" problemstillingen finder man de følgende vanskeligheder med bevisbegrebet nævnt i noget spredt fægtning. De fleste artikler holder sig til en eller et par af vanskelighederne, mens Galbraith [26] dækker det meste. De vanskeligheder, der nævnes er (1) Manglende forståelse for nødvendigheden af at sikre sig, at man har "fået det hele med", i de situationer hvor man har et utilstrækkeligt antal specialtilfælde til sin rådighed [26], [7] (2) Manglende forståelse for den status modeksempler har, dvs at et modeksempel er et eksempel, der opfylder sætningens antagelser, men er i modstrid med den og at ét modeksempel er tilstrækkeligt til at modbevise en sætning. [14], [26]. (3) Manglende evne til at identificere en sætnings gyldighedsområde, dvs til at forstå at sætningen er gældende for matematiske objekter, der opfylder sætningens antagelser [26], [14]. (4) Manglende forståelse af status af implikationer og biimplikationer [26] (5) Manglende evne til at skelne mellem givne forudsætninger og hypoteser [26].

Som det ses er der tale om mange forskellige typer vanskeligheder. Der er problemer med bevisets logik (4), og problemer med at forstå status af beviset (1), (2), (3) og status af elementerne i beviset (5).

Vanskeligheder med at forstå argumentet i beviser

Den eneste artikel jeg har, hvor det, der behandles, er elevernes vanskeligheder med at tilegne sig argumentet i et bevis, er en artikel af Fischbein [25]. Her kortlægges elevers vanskeligheder med at forstå status af induktionshypotesen i induktionsbeviser. De andre artikler retter sig mere mod elevers vanskeligheder med at forstå konsekvenserne af at have bevist en sætning.

Konkrete tiltag for at forbedre undervisningen i beviser

Her er der disse aktører på scenen: Moshovits [43], [44], Leron[37], [38], [39] og Blum og Kirsch [9]. Moshovits beskæftiger sig med, hvordan man motiverer eleverne til at sætte sig ind i et bevis og forstå nødvendigheden af det, mens Blum og Kirsch og Leron har forslag til hvordan konkrete beviser kan ændres, således at de bliver mere tilgængelige for eleverne.

Moshovitz foreslår, at man lægger op til et bevis i matematikundervisningen ved at sætte eleverne til at lave forskellige øvelser, der gerne skulle motivere eleverne for at se beviset for sætningen. F.eks. kan man lade eleverne "opdage", at Pythagoras sætning gælder for retvinklede trekanter ved at lade dem undersøge, hvilke vilkårlige trekanter, der opfylder Pythagoras' sætning. Eleverne vil herefter være motiverede for at se beviset for, at det rent faktisk forholder sig sådan for samtlige retvinklede trekanter. Moshovits' tese er, at alle matematiske sætninger rummer en eller anden form for overraskelses-moment - i dette tilfælde, at en hel klasse af trekanter besidder en umiddelbart "sær" egenskab. Disse overraskelsesmomenter kan man udnytte i matematikundervisningen til at motivere eleverne for at sætte sig ind i beviserne. Mere matematik-politisk er hendes budskab, at man ikke behøver at udvide pensum til f.eks. at indbefatte emner beviser fra frontforskningsmatematik for at gøre beviser interessante for eleverne.

Lerons artikler handler om "strukturerede beviser", der er en metode til at omskrive og udvide traditionelle fremstillinger af beviser. Han mener at stort set alle beviser rummer en konstruktion, et matematisk objekt, der muliggør, at man kan gennemføre beviset. Beviser bliver mere let tilgængelige, hvis man gør meget ud af at forklare konstruktionen af denne "løftestang" og hvordan dette fører frem til sætningen og først herefter går i detaljer med argumentet. Et struktureret bevis er bygget op i niveauer, således at de nederste niveauer indeholder de formelle argumenter, mens de øvre motiverer dem. [39] handler om hvordan man strukturerer modstridsbeviser. Den form for logik et modstridsbevis rummer anser Leron for at være så kompliceret for eleverne, at man skal stræbe efter at skrive beviset om til et direkte bevis.

Blum og Kirsch mener at en af grundene til at beviser volder elever vanskeligheder er, at de begreber og sætninger, der trækkes på i beviser ofte er nogle eleverne ikke har en tilstrækkelig dyb forståelse af. De foreslår derfor, at man i hvad de betegner som "præformelle beviser" erstatter de elementer beviserne trækker på med mere simple begreber og sætninger, f.eks. simple geometriske begreber, som eleverne har en bedre forståelse af.

3.2.4 Artikler af didaktisk karakter - bevisførelse

Også her er hovedtemaet empirisk evidens versus deduktive beviser. Hos Porteus og Wu [52], [60] finder man betragtninger over konsekvenserne af at tillade brugen af empirisk evidens til at argumentere for løsninger til matematiske problemer. De har en anden tilgang end f.eks. Balacheff, der anser empirisk evidens af nogle for at være et nødvendigt stade på elevens vej til at være i stand til at gennemføre en bevisførelsesproces med argumenter af mere generel karakter.

Bevisførelse versus "investigations" som led i problemløsning

"Investigations", også kaldet mønstergenkendelse betegner systematiske undersøgelser af en række specialtilfælde, der i generaliseret form kan bruges til at opstille eller sandsynliggøre en hypotese. F.eks kan man sandsynliggøre at de n første ulige tal summer til n^2 ved at udføre følgende "investigation": 1+3 = 4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16 og observere, at ved to led fås $4 = 2^2$, ved tre led fås $9 = 3^2$ osv. En anden type "investigations" er målinger på geometriske konstruktioner.

Problemløsning er et element, man ønsker at have som element i matematikundervisningen også længe inden man kan forvente af eleverne, at de er i stand til at producere formelle argumenter. Porteus [52] foreslår, at man forventer af eleverne, at de forklarer, hvorfor mønstret er som det er enten visuelt eller verbalt. Et eksempel på en sådan argumentation er det visuelle bevis på figur 3.2 for at $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

$$\begin{array}{ccc} x\ x & & \\ x\ x & & x\ x\ x \\ x\ x & & x\ x\ x \end{array}$$

Figur 3.2 Visuelt bevis for at $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

Dette stiller imidlertid krav til de problemer eleverne arbejder med. Porteus peger på at mange af de problemer som man normalt løser ved brug af "investigations", har løsninger, der er så svære at argumentere for formelt, at man ikke kan forvente af eleverne, at de er i stand til at gøre det [52], s. 3. Eleverne kan med andre ord godt gætte løsningen på opgaven, men de kan ikke argumentere for løsningen. Denne problemstilling genfinder man hos Wu [60], der leverer en række eksempler på matematiske problemer, som elever kan løse men ikke argumentere kvalificeret for.

Porteus og Wu [60], [52] finder, at kravet om en form for argumentation er nødvendig, fordi eleverne ellers får et misvisende billede af faget matematik. Eleverne lærer da at acceptere matematiske hypoteser på et forkert grundlag [52], s. 3 og de får indtryk af, at matematik er et fag, hvor påstande godtgøres via eksperimenter og på den vis ikke adskiller sig fra andre naturvidenskabelige fag med eksperimentel metode.

Underviserens hovedbekymring er ifølge Porteus imidlertid ikke, om eleverne får et forkert billede af faget matematik [52], s. 3. Det er snarere, at eleven først vil føle sig fuldstændig overbevist om sætningens rigtighed i det øjeblik at han/hun har set et argument for det. Det at forlange et argument handler altså også om at sikre en tilstrækkelig "dyb" accept af sætningen. Eleverne er ikke i stand til at anvende sætningen korrekt, hvis ikke de har den form for accept af sætningen. Her henvises til et fund i Fischbein [24]: Man ser ofte at elever, der har opdaget en sætning ved brug af "investigations" ikke bruger den fundne sætning, men i stedet hvis de bliver præsenteret for en opgave, hvor den kan bruges, benytter den som en yderligere kontrolmulighed.

Vanskeligheder med bevisførelsesprocessen

I denne kategori af artikler søger man at identificere de "stopklodser" eleverne møder, når de søger at gennemføre en bevisførelsesproces. Galbraith [26] beskæftiger sig bredt med "stopklodser" i bevisførelses-processen, mens de undersøgelser Balacheff og Dormolen [5] [19] foretager søger at afdække utilstrækkeligheder i elevernes bevisbegreb. Når man ser bort fra Moore [41], som ser på elevers vanskeligheder med at konstruere formelle beviser, er samtlige af de studierne baseret på observationer af af elever, der søger at konstruere beviser som en del af at løse matematiske problemer.

En af de ting de empiriske studier retter sig imod er at identificere stadier i bevisførelsesprocessen. Elevernes argumenter, der ikke nødvendigvis er formelle, klassificeres i forhold til, hvor tæt de er på at være korrekt matematisk argumentation. Forskellige stadier i evnen til at føre et bevis beskrives - f.eks opstiller Balacheff en model [5], der er beskrevet på s.3.1. I forhold til at lære eleverne bevisførelse anser han det for afgørende, at det centrale skift sker mellem den helt naive tilgang til bevisførelsen og den hvor eleven anerkender, at der er tale om, at man skal forsøge at vise noget om en klasse af objekter.

Moores studie [41] adskiller sig som sagt fra de andre. Han ser på hvilke vanskeligheder studerende, der skal lave korte, formelle beviser, støder på. Det, der ses som hovedproblemet er gabet mellem de billeder de studerende har af de indgående begreber og definitioner og de formelle definitioner og sætninger, de studerende forventes at kunne håndtere. Billederne er en forudsætning for at kunne få definitioner og sætninger til at give mening og for at kunne få *ideer* til beviset. Når eleverne skal *gennemføre bevisideen* opstår der imidlertid problemer, fordi der opstår et "gab" mellem billederne og den formelle repræsentation. En anden vanskelighed består i, at eleverne ikke selv evner at producere eksempler indenfor den matematiske struktur de arbejder med og derfor ikke har noget at prøve deres ideer af på.

Hvordan overkommes vanskelighederne i bevisførelsesprocessen?

Mens de øvrige artikler indeholdende empirisk arbejde har haft at gøre med de vanskeligheder elever møder, når de søger at gennemføre en bevisførelsesproces, så er artiklerne af Boero og Alibert [11], [1] eksempler på tiltag, der letter elevernes forsøg på at gennemføre bevisførelsesprocessen.

Boero undersøger i [11], om det er en hjælp for eleverne, at de har et konkret fysisk billede (en pind der kaster skygger i sollys) at holde sig til, når de skal have bevisideer og gennemføre den.

Alibert præsenterer i [1] en undervisningsmetode kaldet "videnskabelig debat"[11], som han mener giver mulighed for at inddrage beviser i matematikundervisningen på en meningsfyldt måde. Det er centralt, at eleverne bringes i en situation, hvor de selv opstiller hypoteser og ikke ved, om hypotesen er gyldig eller ej og derfor er ægte motiverede for at bevise eller modbevise hypotesen.

[11] En mere grundig beskrivelse findes på side 34

3.3 Mangler og uklarheder i litteraturen

Jeg har nu redegjort for, hvad jeg anser for at være de væsentligste problemstillinger, der bliver behandlet i litteraturen og hvad der bliver sagt om dem. Tilbage står at rede de mangler og uklarheder ud, som jeg finder der er i litteraturen. Det kan jeg blandt andet kan gøre på baggrund af at sammenholde min oversigt over litteraturen med kapitel 2.

I det væsentlige er afsnittet her struktureret således: (1) Mangler og uklarheder i diskussionen af "bevisets stilling" videnskabsteoretisk set (2) Mangler og uklarheder i den videnskabsteoretiske diskussion af bevisførelse (3) Mangler og uklarheder i den didaktiske diskussion af beviser og bevisførelse.

Den videnskabsteoretiske diskussion af beviser

Det er især i den videnskabsteoretiske diskussion af *beviser*, at jeg finder, der er mangler og uklarheder. Det har imidlertid stor betydning, da det i høj grad er overvejelserne omkring bevisers videnskabsteoretiske status, der bliver gjort brug af, når der argumenteres for, hvilken rolle beviser bør spille i matematikundervisningen. Som jeg ser det er hovedproblemet at:
(1) Der ikke bliver skelnet mellem beviset som sociologisk fænomen og beviser som matematik-filsofisk fænomen.
(2) Der næsten udelukkende fokuseres på beviser som sociologisk fænomen, dvs beviser i "matematisk praksis". Det gør, at det grundlag man har for at drage konklusioner angående bevisets stilling i matematikundervisningen, er mangelfuldt, blandt andet fordi man godt kan stille sprøgsmålstegn ved, hvor relevant viden om beviser i "matematisk praksis" er i denne sammenhæng.

Et af tyngdepunkterne i debatten om bevisets videnskabsteoretiske status er kritikken af den megen vægt på formelle beviser i matematikundervisningen, baseret på at formelle beviser reelt ikke er af så stor betydning i "matematisk praksis". Her synes jeg ikke, at det gøres klart, at det man kritiserer er det formelle bevis som *sociologisk fænomen.*

Matematik-filosofisk er det formelle bevis en bevistype, hvor grundlaget principielt skal være beskrevet så klart som muligt og hvor argumenterne skal formuleres i strengt præcise, logiske termer. Set fra mit synspunkt er det at betragte som et "bedste bud" på kriterier for, hvornår et matematisk argument er et bevis.

Når andre bevistyper fremhæves som alternativer til det formelle bevis, så er det fordi det formelle bevis *bedømmes* som et sociologisk fænomen. Og her er kritikken berettiget, da det formelle bevis nok har det klarest beskrevne grundlag, men lider under at være en "tung" form for argumentation.

Når man formulerer som ideal, at man i matematikundervisningen skal reflektere de roller beviser spiller i "matematisk praksis" og på det grundlag afviser, at beviser bør spille en væsentlig rolle i matematikundervisningen, så er det udelukkende beviser som sociologisk fænomen, man har i tankerne. For mig at se er dette ideal ikke brugbart i forhold til at bedømme i hvilket omfang beviser skal indgå i matematikundervisningen. Det er snarere et argument for at have *bevisførelse* i matematikundervisningen, hvor man jo netop udvikler "ny" matematiske sætninger. Overvejelserne melder altså ikke noget om de "færdige" beviser i matematikundervisningen.

Man kan formulere problemet på en lidt anden måde: der er forskel på bevisets rolle i "skolematematik" og "frontforskningsmatematik". Et eksempel på en ting, der er højst relevant i "frontforskningsmatematik", men ikke i "skolematematik" er fejlbehæftede beviser. Hvis man hævder, at der er tale om et træk, man bør fremhæve i undervisningssammenhæng, så overskrider man grænsen mellem "frontforskningsmatematik" og "skolematematik". I et traditionelt valgt pensum, er beviserne i "skolematematik" beviser for resultater, der er så centrale matematikhistorisk set, at de har været igennem en ret omhyggelig kontrolproces.[12] Endvidere er de ikke så lange, at risikoen for fejl pga uoverskuelighed - ihvertfald ikke uoverskueligt set fra en professionel matematikers synspunkt - opstår.

Til gengæld er beviser også på "skolematematik -niveau" *mangelfulde*, dvs der er ikke redegjort i detaljer for alle argumenter og antagelser og det kunne der godt være en pointe i at diskutere, hvordan man skal håndtere.

En faktor der bidrager til at debatten bliver mindre klar, end den kunne være er, at de konklusioner, som angår bevisets rolle og funktion i matematisk praksis, ofte bruges til at drage konklusioner om karakteren af "matematisk viden", se f.eks. [29]. Udover at denne term ikke er veldefineret og at der findes et hav af fortolkninger af, hvad man skal forstå ved "matematisk viden", så er denne type konklusioner for vage til at at kunne bruges til at drage meningsfulde konklusioner, der angår beviser i matematikundervisningen. Man går en unødvendig omvej, når der først redegøres for træk ved bevisets status i matematisk praksis, derefter konkluderer, hvad man kan sige om "matematisk viden" og så på basis af dette drager konklusioner angående bevisets rolle i matematikundervisningen.

Den videnskabsteoretiske diskussion af bevisførelse

En af de ting, der her gør diskussionen uklar er, at der ikke skelnes tilstrækkeligt mellem bevisførelse og skabelsen af ny "matematisk viden". Det betyder, at det er vanskeligt at skille det, der vedrører bevisførelse ud fra en generel

[12] Det garanterer dog ikke, at der kan være fejl i beviserne i lærebøgerne, men det betyder, at der eksisterer korrekte udgaver af beviserne.

diskussion om, hvordan matematisk viden skabes. For mig at se falder diskussionen af, hvordan ny matematisk viden fremkommer i tre dele (1) Hvad fører til fremsættelsen af ny matematiske hypoteser (2) Hvad fremmer/stimulerer bevisideer (3) Hvordan gennemføres bevisideerne. Det er kun punkt (2) og (3), der er relevante for debatten omkring bevisførelse, men ofte inddrages alle tre ting samtidigt, f.eks. hos Horgan i [32].

Et eksempel på den manglende skelnen finder man i beskrivelsen af computerbaserede beviser. Computergrafik og computersimuleringer fremhæves i deres egenskab af at stimulere fremsættelsen af ny matematiske hypoteser ved at give adgang til visualisering af ihvertfald visse matematiske strukturer og hører altså under (1), dvs det har ikke noget at gøre med egentlig bevisførelse.

Grunden til at denne skelnen ikke foretages er formentlig, at undersøgelserne af bevisets funktion i "matematisk praksis" i et vist omfang foretages med det formål at underbygge påstanden om, at formelle beviser er af svindende betydning i "matematisk praksis" - og at man kan dermed forsvare at nedtone formelle beviser også i matematikundervisningen. Alternative bevismetoder, f.eks. computerbaserede beviser bruges imidlertid i situationer hvor man ikke har mulighed for at konstruere et formelt bevis og de supplerer derfor det formelle bevis. Matematik-filosofisk set - og det er den vinkel, man anlægger, når man diskuterer om de ny metoder er rimelige at bruge - har alternativerne til det formelle bevis ikke det samme veletablerede grundlag.

Udover at jeg ikke mener, der er hold i påstanden om, at det formelle bevis er af svindende betydning i "matematisk praksis", så mener jeg også man kan stille spørgsmålstegn ved, hvor relevant diskussionen af nye bevismetoder er, hvis formålet er at sige noget om beviser og/eller bevisførelse i matematikundervisningen. Også her skal man skelne mellem "frontforskningsmatematik" og "skolematematik". Diskussionen af hvorvidt betydningen af det formelle bevis er svindende i "matematisk praksis" er ganske enkelt ikke relevant i skolematematiksammenhæng, hvor man jo f.eks. ikke har brug for computerbaserede beviser, fordi beviserne er ikke lange og komplicerede.

Den didaktiske debat

Jeg har valgt at slå beviser og bevisførelse sammen her, fordi de kritikpunkter, jeg har, er sammenfaldende.

I de artikler, hvor der laves empiriske undersøgelser af elevers vanskeligheder med at tilegne sig beviser, refereres der med forskelligt sprogbrug til empirisk evidens. Det gælder f.eks Chazan, Fischbein og De Villiers [14], [24], [18]. De opfatter "empirisk evidens" som at man søger at sandsynliggøre en påstand ved at foretage målinger på geometriske objekter eller ved ved brug af et antal taleksempler.

Der er for det første behov for at få adskilt den status taleksempler og målinger på geometriske konstruktioner har. Målinger af geometriske figurer har at gøre med, at man undersøger om den fysiske repræsentation af det matematiske objekt nu også er en god model. Dette adskiller sig fra undersøgelser af specialtilfælde ved hjælp af taleksempler, hvor man undersøger om sætningen er gældende i et specialtilfælde og man altså holder sig indenfor matematikken selv.

For det andet er den problemstilling, der i reglen undersøges, elevernes problemer med at forstå forskellen på at sandsynliggøre en påstand empirisk og have et deduktivt bevis for den. Eftersom "empirisk evidens" opfattes som taleksempler og målinger på geometriske konstruktioner udgør den type beviser, der refereres til et meget begrænset udvalg af beviser: de beviser, hvor man har adgang til taleksempler og tegninger.

Herudover er der for mig at se er der tale om en art pseudoproblemstilling, når man skelner mellem at *bevise*, dvs godtgøre en sætning og *overbevise*, dvs sandsynliggøre at en sætning er sand. Fischbein [24] er lidt inde på det, men ellers finder jeg, at undersøgelsernes udgangspunkt er, at eleverne, når de har forstået et givent bevis og har fået et tilstrækkeligt godt bevisbegreb, kan bruge beviset som grundlag for at føle sig *overbevist* om sandheden af en sætning. Jeg mener ikke, man skal forvente, at det sker. Derimod skal man forvente, at eleverne føler sig overbevist om *argumentets* rigtighed. Empirisk evidens er ikke nødvendigvis af det onde, tværtimod er det formentlig af afgørende betydning, når eleverne skal overbevise sig om rigtigheden af sætningen.

Udover at jeg finder, at der fokuseres på meget på "empirisk evidens" versus deduktive beviser, så mangler der en beskrivelse af den sammenhæng problemstillingen indgår i. Det mere overordnede spørgsmål er hvilke vanskeligheder, det volder elever at *forstå* beviser. Det indebærer meget mere end blot at eleven føler sig overbevist om sætningens rigtighed og overbevist om rigtigheden af argumentet. Man kunne ønske sig, at det som udgangspunkt blev defineret, hvad man skal forstå med "at forstå et bevis". Dette gør jeg selv et forsøg på i kapitel 4.

At man ikke finder nogle overvejelser, der angår elevers vanskeligheder med at forstå beviser, bortset fra Fischbeins artikel om elevernes forståelsesvanskeligheder i forbindelse med induktionsbeviser [25], er formentlig årsagen til, at forslagene til, hvordan man på en hensigtsmæssig måde kan undervise i beviser ikke trækker ikke på empirisk underbyggede facts omkring forståelsesvanskeligheder. De vanskeligheder forfatterne søger at imødekomme er dem, de selv mener, der er. Forslagene er altså baseret på egne forestillinger om og egne oplevelser af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

Litteraturen og mit empiriske arbejde

Jeg mener, at jeg med min gennemgang af hovedtemaerne i litteraturen har vist, at min kortlægning af læreres forestillinger om, hvilken betydning beviser og bevisførelse har i matematikundervisningen udgør et nyt bidrag til diskussionen af betydningen af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Jeg må konstatere, at lærerne ganske enkelt ikke er blevet "hørt" i spørgsmålet om hvilken rolle beviser og bevisførelse spiller - og bør spille - i matematikundervisningen. Diskussionen føres af matematikdidaktikere og herudover af professionelle matematikere og læreres egen opfattelse af betydningen af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen kommer ikke til udtryk.

Man finder dog enkelte kommentarer, der angår underviserens rolle. I [59] refereres der til et studie, der viser, at lærere har en meget formalistisk bevisopfattelse og derfor ikke er så åbne overfor at opfatte andre bevisformer og mere uformelle beviser, som eleverne selv kunne tænkes at fremkomme med, som egentlige beviser. I [18] refereres der til en undersøgelse, der viser, at mange lærere udelukkende opfatter beviser som verificerende og potentielt kan mene, at formålet med beviser i matematikundervisningen er at overbevise eleverne om sandheden af sætningen. I [27] konstateres det, at matematiklærere er nødt til at vide en hel del om bevisets videnskabsteoretiske position for at kunne undervise i beviser og bevisførelse på kvalificeret vis.

Jeg forventer, at interviewene med danske og NZske lærere om betydningen af beviser og bevisførelse i matematikundervisningen - udover at være en type empirisk undersøgelse, der ikke før er foretaget - kan bidrage med nyt til projektets problemstilling. Som jeg har været inde på, så giver lærernes erfaringer baggrund for at kommentere mulighedsproblemet, dvs om det er muligt at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Samtidig udvides mit repetoire af begrundelser for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

I det næste kapitel præsenteres beskrives mit empiriske arbejde i detalje og resultaterne fremlægges.

4 Beviser og bevisførelse set fra et matematiklærersynspunkt

I indledningen satte jeg mig for at finde ud af, hvilke forestillinger matematiklærere gør sig om grunden til at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Jeg satte mig også for at finde ud af, hvilke vilkår lærere anser beviser og bevisførelse for at have i matematikundervisningen, og hvad det siger om mulighederne for at gennemføre en matematikundervisning, hvori beviser og bevisførelse indgår.

I dette afsnit præsenteres resultaterne og konklusionerne fra interviews med 5 new zealandske og 5 danske matematiklærere lavet i henholdsvis efteråret 1997 (dvs i foråret 1997 på New Zealand) og foråret 1998. Et referat af interviewene kan findes i Appendix B og D i rapporten.

4.1 Baggrund

For at jeg kan argumentere for rimeligheden af at sammenligne mit danske og new zealandske materiale og for at nogle af de senere kommentarer skal være forståelige, er det på sin plads med et par kommentarer om det new zealandske skolesystem.

Det new zealandske skolesystem er delt op i en "primary school" og "secondary school", hvor primary school dækker 7 år og secondary school 5 år. De sidste 5 år betegnes 3rd, 4th, 5th, 6th og 7th form[1]. Skolegangen er obligatorisk til og med 5th form. I modsætning til det danske gymnasium skal "secondary school" levere undervisningstilbud til alle elevgrupper i en årgang.

Det sidste kunne man forestille sig give anledning til problemer i en sammenligning. Jeg har imidlertid set på matematikundervisningen i 6th og 7th form, altså den ikke-obligatoriske matematikundervisning. Eleverne kan her vælge mellem såkaldt anvendelsesorienterede matematikkurser og mere akademisk orienterede matematikkurser. Det er de sidstnævnte, jeg har set på og der er et betragteligt pensummæssigt overlap med det pensum man finder i matematisk 1.g, 2.g og

[1] Nummereringen forekommer måske en smule mærkelig. Den skyldes, at man nogle steder yderligere har en "intermediate school", der dækker de to sidste år af den tid, man ellers går i "primary school".

3.g her. I 6th form er pensum hovedsagelig analyse, mens eleverne i 7th form i reglen vælger mellem et statistik-kursus og et videregående analyse-kursus. Der er et vist overlap mellem de to kurser, da der ikke udelukkende er statistik og sandsynlighedsregning på statistik- og sandsynlighedsregning-kurset, ligesom der på analysekurset er lidt sandsynlighedsregning.

Evalueringen af såvel 7th som 6th form foregår ved en eventuel skriftlig eksamen (der er ingen mundtlige eksaminer overhovedet før man forsvarer sin Ph.D.-afhandling). I 6th form kan skolen vælge selv at foretage eksaminerne - altså en slags intern evaluering, men der findes også en landsdækkende skriftlig eksamen, som det blot er frivilligt for skolerne, om de vil vælge at benytte eller ej. I 7th form er der tradition for, at man har en ekstern, landsdækkende skriftlig prøve af såvel statistik-, som analysekurset.

Jeg lavede to interviews med hver af de new zealandske lærere. En af de ting jeg fandt ud af i den første interview-runde var, at de sætninger med tilhørende beviser, som jeg valgte at trække frem i interviewene, findes i de mest anvendte lærebøger. De indgår ikke i listen af de såkaldte "prescription proofs" - af mig fremover betegnet *obligatoriske beviser* - dvs beviser opført i en særlig pensumliste, der angiver hvilke beviser eleverne kan blive blive bedt om at gengive helt eller delvist til eksamen. Denne liste kan findes i [50]. Der er ikke flere obligatoriske beviser, end at jeg kan nævne dem her:

- Beviserne for rest- og faktorteoremet for polynomier

  a) Restteoremet: $p(x) = q(x)(x-a) + r \Rightarrow r = p(a)$ hvis grad r< grad (x-a)
  p(x) er et polynomium, der divideres med (x-a), q(x) er kvotienten og r er resten.

  b) Faktorteoremet: $p(x) = (x-a)q(x) \Leftrightarrow p(a) = 0$

- Beviset for løsningsformlen til 2. gradsligningen

- Beviserne for additionsformlerne
  sin(A+B)=sin(A)cos(B) + cos(A)sin(B)
  sin(A-B)=sin(A)cos(B) - cos(A)sin(B)
  cos(A+B)=cos(A)cos(B) - sin(A)sin(B)
  cos(A-B)=cos(A)cos(B) + sin(A)sin(B)
  $tan(A+B) = \frac{tan(A)+tan(B)}{1-tan(A)tan(B)}$
  $tan(A-B) = \frac{tan(A)-tan(B)}{1+tan(A)tan(B)}$

- Beviserne for sum- og differensformlerne:
  2 sin(A)cos(B)=sin(A+B)+sin(A-B)
  2 cos(A)sin(B)=sin(A+B)-sin(A-B)
  2 cos(A)cos(B)=cos(A+B)+cos(A-B)
  2 sin(A)sin(B)=cos(A-B)-cos(A+B)

- Beviserne for dobbeltvinkelformlerne:
sin(2A) = 2sin(A)cos(A)
$cos(2A) = cos^2(A) - sin^2(A) = 2cos^2(A) - 1 = 1 - 2sin^2(A)$
$tan(2A) = \frac{2tan(A)}{1-tan^2(A)}$

- Udledning af diverse trigonometriske identiteter, f.eks. $cot(A) - tan(B) = \frac{cos(A+B)}{sin(A)cos(B)}$ [2]

- Udledning af identiteten $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = \Sigma x_i{}^2 - n(\bar{x})^2$, hvor n er antallet af elementer i en stikprøve, x_i er stikprøvens i'te element og $\bar{x}$ er middelværdien af elementerne i stikprøven.

- Udledning af identiteten $E(X-\mu) = E(X^2) - \mu^2$, hvor μ er middelværdien af den stokastiske variabel X, E(X).

4.2 Interviewenes indhold og tilrettelæggelse

De 5 new zealandske lærere, jeg har interviewet kom fra hver sin secondary school i Palmerston North[3] og er alle erfarne undervisere, men også "ganske almindelige matematiklærere".

De danske lærere er fra københavnsområdet og valgt lidt spredt alders- og erfaringsmæssigt udfra det kriterium, at de skulle være "ganske almindelige matematiklærere", dvs ikke specielt matematikpolitisk aktive.

Jeg har med begge grupper af lærere benyttet mig af inden interviewet at give dem interview-spørgsmålene skriftligt, således at de på forhånd havde tænkt over dem. Interviewene blev optaget på bånd og transskriberet efterfølgende.

Meget af interview-materialet har jeg af hensyn til sammenhængen i selve rapporten valgt at sætte i appendix. I appendix A findes det spørgeskema, jeg brugte til de new zealandske lærere og i appendix B interview-referater. I appendix C findes det spørgeskema, jeg brugte til de danske lærere og i appendix D er der interview-referater af de danske interviews. Appendix'ene kan læses som et selvstændigt afsnit i rapporten.

Jeg brugte spørgeskemaet i Appendix A som udgangspunkt for interviewet med de new zealandske lærere. På basis af deres svar tegnede jeg så de enkelte læreres "profiler" bestående af påstande omkring beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Dette (appendix C) præsenterede jeg så de danske lærere for. Det er klart, at jeg med denne fremgangsmåde har fået nogle asymmetriske data, fordi de danske lærere netop udtaler sig på baggrund af, hvad jeg har ment har været de væsentligste træk ved de new zealandske læreres udtalelser.

[2] Her er ikke angivet hvilke trigonometriske identiteter.

[3] New Zealands 7. største by, beliggende på Nordøen, 1 1/2 times kørsel fra hovedstaden Wellington.

4.2.1 Spørgsmål i de new zealandske interviews

Det giver i de fleste tilfælde ikke megen mening blot at spørge "Skal der være beviser og bevisførelse i matematikundervisningen? Hvorfor/hvorfor ikke?" og "Hvilke vilkår har beviser og bevisførelse i matematikundervisningen?". Der er behov for noget mere konkret.

Jeg valgte derfor at lade interviewspørgsmålene til de new zealandske lærere indeholde tre matematiske sætninger, som der så efterfølgende blev argumenteret for på forskellig vis. Jeg bad dem om at udpege, hvilke af argumenterne, der mest lignede det, de ville give i deres undervisning. Det gav mig mulighed for at kortlægge på hvilken måde, de new zealandske lærere finder det er passende at argumentere for sætningerne i undervisningen, uanset om de anså det for at være et bevis eller ej. Udover at jeg interviewede lærerne, overværede jeg også en lektion hos hver lærer, hvor der blev undervist i et bevis. Jeg har dog valgt ikke at inddrage dette i rapporten, men det har givet mig et indtryk af praksis.

Eksempel-sætninger

Jeg valgte mine eksempler udfra det princip, at de skulle være eksempler på meget forskellige sætninger og repræsentative for beviser, der matematisk set er af meget forskellig karakter. Herudover havde jeg et praktisk hensyn at tage, idet new zealandske matematiklærere i reglen specialiserer sig i enten analyse eller statistik/sandsynlighedsregning-kurset i 7th form. Jeg var nødt til at sørge for et udbud af sætninger både fra statistik/sandsynlighedsregningen og fra analyse.

Mit valg faldt på (1) sætningen vedrørende sandsynligheden af foreningsmængden af to vilkårlige hændelser $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ fra sandsynlighedsregningen (2) reglen for differentation af et produkt i differentialregningen. (3) sætningen: $\sqrt{2}$ er ikke er et rationalt tal.

Jeg gav tre forskellige argumenter for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ -sætningen. I det første argument finder man ved optælling sandsynligheden for at få point i et spil hvor man, når man kaster to terninger, får summen 10 og/eller får ens øjental, og viser at det stemmer overens med $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - sætningen. Det andet argument er en generel argumentation, hvor man argumenterer med at man, når man vil finde foreningsmængden af A og B i det tilfælde hvor A og B ikke nødvendigvis er disjunkte, medtager sandsynligheden af $(A \cap B)$ to gange, hvis blot sandsynligheden for A og B adderes. I det tredie argument viser man sætningen på basis af en konstruktion, hvor $A \cup B$ udtrykkes som $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ og dette bruges så til at omskrive til $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Jeg gav to argumenter for reglen for differentation af et produkt - fremover betegnet "produktreglen". Et hvor man argumenterer for, at der jo ihvertfald må gælde noget andet, end man kunne forvente, hvis man kender til reglen for differentation af sum og differens: at de to faktorer differentieres for sig og ganges sammen. Man giver et modeksempel, hvor man benytter sig af, at eleverne kender til reglen for at differentiere x^n: x^5 differentieret ikke giver det samme som $x^2 \cdot x^3$ differentieret. Hvis man anvender den "givne" produktregel anvendt på $x^2 \cdot x^3$ får man det rigtige resultat. I det andet argument bruges definitionen på differentialkvotient til at opskrive differentialkvotienten for produktet af funktionerne. Ved at omskrive dette kommer man frem til produktreglen.

Jeg gav ligeledes to argumenter relateret til sætningen: Det første argument er det klassiske modstridsbevis, hvor man viser, at $\sqrt{2}$ ikke kan udtrykkes som en brøk af to heltal. Det andet argument: En geometrisk argument, der illustrerer, at der er behov for andre tal end de irrationale er følgende: Hvis man tager en retvinklet trekant med kateterne af længde 1 - og altså har en trekant med en hypotenuse af længden $\sqrt{2}$, så kan man, hvis man kun har de rationale tal til sin rådighed ikke måle længden af hypotenusen. Sagt på en anden måde, så vil man, hvis man har en tallinie, der kun består af rationale tal og hypotenusen lægges, så den starter i 0, ramme et "hul" i tallinien.

$\sqrt{2}$-sætningen valgte jeg specielt fordi det *ikke* var en "regneregel" og hvis relevans som sådan *ikke* kunne begrundes med at være direkte relevant for regningen af (eksamens)opgaver.

Eksempler på bevisførelsesopgaver

Da jeg spurgte til status af bevisførelse i undervisningen, tog jeg ligeledes udgangspunkt i nogle eksempler: Opgaver som jeg mener kræver, at eleverne selv får bevisideer og selv gennemfører dem.

Polygonopgaven

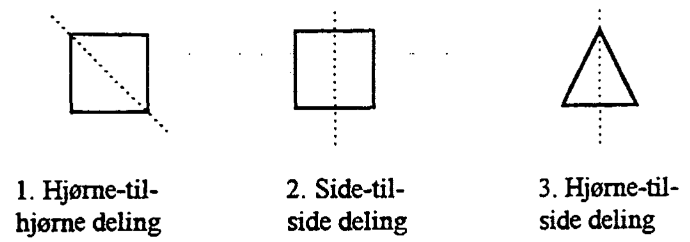
Jeg medtog dels følgende polygonopgave, hentet fra John Mason's "Mathematical thinking and problem solving"[40]: For hvilke n-polygoner kan man danne to nye n-polygoner ved at dele en n-polygon langs en symmetrilinie.[4]. Det viser sig, at det kun er en trekant og en firkant, der opfylder kravet. Jeg har selv følgende bud på en argumentation:

Definér "symmetrilinie" som en deling af en polygon således, at hver del af den opdelte polygon kan fås ved spejling af den anden. De har så lige mange hjørner og sider. Med denne definition får man tre typer opdelinger: (1) Hjørne til hjørne-deling (2) side til side-deling (3) hjørne-til-side deling. [5]

Opdeling 1 og 2 er kun mulig, hvis polygonen har et *lige* antal sider og opdeling 3 er kun mulig, hvis polygonen har et *ulige* antal sider. Se figur 4.1.

[4] Det er en del af opgaven at præcisere problemstillingen

[5] Man ser her, at det i tilfældet med en firkant delt med en side til side-deling, der giver to firkanter.



Figur 4.1 Fra venstre mod højre vises (1) Hjørne til hjørne-deling (2) side til side-deling (3) hjørne-til-side deling.

Det er nu muligt at opstille tre ligninger.

På venstresiden angives antallet af sider i de to ny polygoner, man får ved opdelingen af polygonen. Hvis de hver skal være en n-polygon, skal det være $2n$. På højresiden angives det antal sider i de to ny polygoner, som man finder ved at tælle op hvor mange ny sider, delingen af den oprindelige n-polygon giver anledning til.

Man kan herefter observere at at: deling 1 tilføjer 2 sider i forhold til antallet af sider i den oprindelige polygon, fordi skærings-siden udgør en side i hver af de ny polygoner. Deling 2 bidrager med 4 sider, fordi 2 sider i polygonen - udover at der kommer skærings-sider - deles i 2. Deling 3 bidrager med 3 sider, fordi en side deles i to og der er to skærings-sider. Vi får derfor følgende 3 ligninger.

1. Deling 1, polygon med lige antal sider (n lige), 2 sider tilføjes:
   $2n = n + 2 \Leftrightarrow n = 2$ (ikke en polygon)
2. Deling 2, polygon med lige antal sider (n lige), 4 sider tilføjes:
   $2n = n + 4 \Leftrightarrow n = 4$ (en firkant)
3. Deling 3, polygon med ulige antal sider (n ulige), 3 sider tilføjes:
   $2n = n + 3 \Leftrightarrow n = 3$ (en trekant)

Vi kan hermed konkludere, at de eneste n-polygoner, der også giver n-polygoner, når man folder dem langs en symmetri-linie er en trekant og en firkant delt med en side-til-side deling.

Bevisførelsesopgaver fra new zealandske eksamenssæt
Herudover valgte jeg følgende tre opgaver, der optræder i new zealandsk skriftlige eksamenssæt. De to første opgaver er fra et 1994-"Calculus" eksamenssæt og den sidste er fra et 1996-"Calculus"-eksamenssæt. De svar jeg har angivet her, er dem der er angivet som pointgivende facit i facitlisten.

1. Antag at q er et rationalt tal og at $p+q$ er et irrationalt tal. Er p rational, irrational eller begge dele? Begrund svaret.
(Antag at p er rational. Summen af to rationale tal er rationalt. Derfor er $p+q$ rational. Dette er i modstrid med antagelsen om at $p+q$ er irrational og derfor må p være irrational.)

2. Forklar uden at løse ligningen, $z^3 = i$, (z et komplekst tal) hvorfor den ikke har nogen reelle løsninger.
(Fordi et reelt tal sat i tredie er et reelt tal)[6].

3. Forklar hvorfor 3 er en faktor i $n(n-1)(n-2)$

   (Forslag 1: n,$n+1$ og $n+2$ er tre på hinanden følgende heltal. Hvert tredie heltal har 3 som faktor. Derfor må et af tallene have 3 som faktor og dermed må produktet $n(n+1)(n+2)$ også have 3 som faktor
   Forslag 2: Der er følgende tre måder n kan skrives på: $n = 3k - 2 \Leftrightarrow n + 2 = 3k$, $n = 3k - 1 \Leftrightarrow n + 1 = 3k$, n=3k. Derfor har et af tallene n,$n+1$,$n+2$ 3 som faktor. Dermed har $n(n+1)(n+2)$ også 3 som faktor.)

Ved polygon-opgaven spurgte jeg om *lignende opgaver* indgik i undervisningen og hvorfor/hvorfor ikke. De andre opgaver, der jo er eksamensopgaver, spurgte jeg hvad der blev gjort for at forberede eleverne på at kunne regne dem.

4.2.2 Spørgsmål i de danske interviews

Som sagt valgte jeg at præsentere de danske lærere for de new zealandske læreres "profiler", dvs deres karakteristiske meninger om beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Detaljerne kan findes i appendix C. I hovedtræk var det følgende, der blev diskuteret.

- Om en gennemsnitlig elev evner at forstå beviser og gennemføre bevisførelsesopgaver.
- Hvilken viden/hvilke færdigheder beviser og bevisførelse udvikler hos eleverne.
- Koblingen - eller mangel på samme - mellem anvendt matematik og beviser.
- Hvordan beviser/løse argumenter/udeladelse af beviser håndteres i matematikundervisningen.
- I hvilket omfang bevisførelsesopgaver optræder i matematikundervisningen.

[6]Her vil jeg mene, at man bør udbygge argumentationen lidt. Et reelt tal ganget med et reelt tal vil altid give et reelt tal. Det er derfor ikke muligt at finde et reelt tal, der sat i tredie giver et komplekst tal.

4.2.3 Præsentation af interviewmaterialet

I det følgende præsenterer jeg et sammendrag af henholdsvis de danske og new zealandske læreres udtalelser om beviser og bevisførelse i matematikundervisningen og kommenterer, hvad det siger om *begrundelserne* for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen og hvad det siger om *mulighederne*. I det sidste tilfælde kommenterer jeg desuden, om det er et *fagsynsbegrundet* eller *didaktisk begrundet* synspunkt.

4.3 Interviews med de new zealandske lærere

I dette afsnit fremlægger jeg det, jeg anser for at være de væsentligste træk ved indholdet af de interviews jeg lavede med de new zealandske lærere. Det betyder, at jeg vil gøre rede for hvilke begrundelser de new zealandske lærere konkret (i deres kommentarer til eksempelsætningerne) og generelt giver for fravalg/tilvalg af beviser i deres undervisning og om disse begrundelser kan siges at være fagsyns- eller didaktisk betingede. Der er naturligvis forskelle fra lærer til lærer, men der er så mange gennemgående træk, at jeg har valgt at fremlægge begrundelserne samlet og blot angive, hvem der mener hvad. Jeg betegner i det følgende de fem new zealandske lærere med initialerne T1, T2, T3, T4 og T5.

Betragtningerne skal naturligvis ses i lyset af, hvad de new zealandske lærere forstår ved "bevis". Jeg har ikke spurgt dem direkte, da jeg mente, at det ville være et for "tungt" spørgsmål, men jeg mener at det fremgår af interviewreferaterne i Appendix B, at de new zealandske lærere har en relativt *formalistisk* bevisopfattelse. Generelt er det sådan, at f.eks. visuelle argumenter kan bruges til at overbevise eleverne om noget, men ikke til at bevise noget for eleverne. Jeg vil tro at de new zealandske lærere ikke vil anse mere uformelle argumenter som f.eks. mit skakbræt-argument eller visuelle beviser for at være egentlige beviser.

At de new zealandske lærere har et forholdsvis formalistisk bevisbegreb mener jeg man blandt andet kan ses af deres kommentarer til brugen af et Venn-diagram i argumentationen for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Venn-diagrammet kombineret med en argumentation i generelle termer anses *ikke* for at være et bevis, men som noget, der kan bruges til at forklare eleverne, hvorfor formlen må gælde. En sådan forklaring anses - blandt andet i følge T2 - ikke for at være et bevis. Samtidig er det kun det relativt symboltunge bevis for produktreglen, der betegnes "bevis". Beviser er "noget med symboler", hvilket jeg blandt andet mener kan ses af, at en af begrundelserne for at beviser volder eleverne store vanskeligheder er, at de har meget svært ved at håndtere matematisk formalisme.

En del af interview-materialet består af de new zealandske læreres kommentarer til eksempelsætningerne. Da det er de mest konkrete og illustrative kommentarer der bliver givet for fravalg og tilvalg af beviser, har jeg valgt at referere dem selvstændigt.

4.3.1 Kommentarer til eksempelsætningerne

$\sqrt{2}$ er ikke et rationalt tal

Der er ingen af de new zealandske lærere, der underviser i beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Beviset inddrages ikke, fordi det anses for at være for svært for eleverne (T4, T1). T1 siger ligefrem, at eleverne ikke vil ane, hvad hun taler om. T2, T3 og T5 fravælger dog først og fremmest beviset med den begrundelse, at *sætningen* ikke er relevant for eleverne. Det er særlig tydeligt hos T2, der udtaler, at sætningen er "pretty trivial" og T1, T2 og T5 mener blot, at det er tilstrækkeligt, at eleverne tidligere har fået at vide, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.

Hvis man insisterer på at føre beviset, så støder man i følge T5 på det problem, at man beviser noget, eleverne føler, de godt ved i forvejen: At $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. T1 og T2 er også inde på, at det virker demotiverende på eleverne, at de fra tidligere ved, hvad et irrationalt tal er. T1 mener, at det er tilstrækkeligt, at eleverne ved, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal og at de kan manipulere med rodtal.

At der ikke undervises i sætningen begrundes også med ydre forhold. Først og fremmest skal eleverne ikke til eksamen i beviset (T4). Beviset ligger desuden inden for et meget lille emneområde i pensum: rationale/irrationale tal og er ikke væsentligt i forhold til det, eleverne ellers skal kunne. T4 nævner, at hun i stedet vil bruge tiden på at udvikle elevernes regnetekniske færdigheder og f.eks. lære dem at differentiere et produkt.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - sætningen

Pånær T4, der ikke underviser i statistik, så argumenterer de resterende lærere for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - sætningen i deres undervisning og T1 beviser sætningen mere formelt, men supplerer med en uformel argumentation for sætningen. Alle benytter sig i den uformelle argumentation af at præsentere eleverne for et konkret tilfælde, hvor de skal beregne sandsynligheden for foreningsmængden af to ikke nødvendigvis disjunkte hændelser ved at tælle antal gunstige og antal mulige udfald op i udfaldsrummet. Her vil eleverne på basis af kendskab til sandsynligheden for to ikke-disjunkte hændelser forvente, at sandsynlighederne vil være summen af sandsynlighederne for foreningsmængden af de to hændelser. Det konkrete tilfælde bruges til at illustrere, at det ikke altid er sådan. T3 bruger som konkret eksempel beregningen af sandsynligheden for enten at få en konge eller et rødt kort.

De new zealandske lærere vælger dels at bruge flere taleksempler til at sandsynliggøre, at det er fællesmængden, det er nødvendigt at trække fra, dels at bruge et Venn-diagram til at illustrere, at det netop er fællesmængden, der bliver talt med to gange, hvis man blot adderer sandsynlighederne. Jeg betragter selv argumentationen med Venn-diagrammet som lidt "ad hoc", fordi Venn-diagrammet ikke repræsenterer sandsynligheder, men mængder af hændelser, hvortil der er knyttet sandsynligheder.

Sætningen anses for at være relevant, fordi eleverne har brug for den til at regne opgaver (T1) og fordi den er nyttig, når eleverne senere hen skal lære om uafhængige hændelser (T2, T5). T1 mener beviset er relevant i denne sammenhæng, fordi argumentationen styrker elevernes forståelse af de indgående begreber.

Produktreglen

Det er lidt blandet, om der bliver undervist i beviset for produktreglen eller ej. Det er et bevis, der ryger ud, hvis der er tidmangel (T1, T2) eller også er det et fravalg/tilvalg, der afhænger af klassens niveau (T3, T4, T5). Det er lidt forskelligt, om der argumenteres ved brug af definitionen på en differentialkvotient eller ved hjælp af differentialer[7] Det sidste bevis fremhæves som mindre algebraisk kompliceret og derfor lettere for eleverne at forstå.

Hovedbegrundelsen for at føre beviset er, at eleverne skal få en forståelse af "hvor formlen kommer fra" (T2, T3, T5).

Hvis beviset fravælges, så vælger T1 helt at undlade at argumentere for sætningen og "give eleverne formlen". T3 vil se på et tilfælde, hvor eleverne kan gange paranteser ud og bruge reglen for sum/differens samt x^n f.eks. $x(x+1)$ for at illustrere at "reglen virker", dvs er konsistent med de regneregler for differentation af funktioner, eleverne kender til fra tidligere.

[7]Bevis med differentialer: En funktion y(x) er produktet af funktionerne u(x) og v(x). Lad δx betegne en lille tilvækst i x-værdien. δy,δv og δu betegner de tilvækster funktionerne tilsvarende får. Man har altså

$$y + \delta y = (v + \delta v)(u + \delta u)$$

Da uv=y er:

$$uv + \delta y = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v$$

Dividerer man med δx på begge sider og reducerer fås:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u\delta v}{\delta x}$$

Lader man $\delta x \longrightarrow 0$ fås produktreglen:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

4.3.2 Beviser

Forekomst af beviser i den new zealandske matematikundervisning

De new zealandske lærere giver alle udtryk for, at de i høj grad fravælger de beviser, der står i lærebøgerne og at det kun er obligatoriske beviser[8], der ikke er i risiko-zonen for at blive fravalgt og T4 og T3 opererer decideret med en "bevisfri" basisdel af matematikundervisningen. Beviser er i den sammenhæng et overskudsfænomen. Noget der inddrages, hvis der er tid til det - og det er ikke alle lærere der da vil prioritere beviser.

Det er lidt forskelligt, hvordan lærerne håndterer fravalget af et bevis for en sætning. T1 er på sin vis den mest konsekvente, da hun enten beviser sætningen eller "giver eleverne formlen", dvs slet ikke giver indtryk af, at hun har argumenteret for sætningen.

Ellers støder man på beskrivelser af forskellige alternativer til at bevise sætningerne. Det ene er *generalisering af taleksempler.* Det kan f.eks. bruges i tilfældet med $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ -sætningen. T2 bruger her generalisering udfra taleksempler som et redskab for eleverne til selv at "opdage" formlen. Det andet er, at eleverne i tilfældet med produktreglen i et specialtilfælde kan "se" at "reglen virker", dvs at et specialtilfælde er konsistent med allerede kendte regneregler for differentialkvotienter. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ -sætningen udgør et interessant tilfælde, fordi de new zealandske lærere ikke anser det for tilstrækkeligt at generalisere udfra taleksempler her, mens de gør det i andre tilfælde. Min teori er, at generalisationen ikke *forklarer* at man tæller fællesmængden med to gange, når man adderer sandsynligheden for de to hændelser og dermed ikke virker "formelforklarende".

De obligatoriske beviser

De obligatoriske beviser bliver opfattet som en rent eksamensteknisk størrelse, som man som lærer underviser i for at gøre eleverne i stand til at overleve eksamen. Beskrivelserne af hvordan der undervises i de obligatoriske beviser (T1,T2,T4,T5) afspejler, at det der vægtes er at *eleverne lærer at gengive beviset korrekt.* Eleverne skal forstå de enkelte trin i beviset og gangen i det og være fortrolige med den *form* et formelt bevis har; man slutter med at angive, at man nu har vist det man ville osv (T2, T4).

Som jeg tolker beskrivelserne, opfattes de obligatoriske beviser af de new zealandske lærere som en isoleret komponent i undervisningen. Der er ikke noget egentligt formål med dem og derfor er beviser ikke et element i matematikundervisningen eleverne har glæde af. Det ses særlig tydeligt hos T3. Hun vægter

[8] De beviser, der optræder i "the prescriptions" og som eleverne kan blive spurgt om til den skriftlige eksamen, se s. 58.

nemlig på den ene side, at eleverne kender de obligatoriske beviser tilstrækkelig godt og i denne forbindelse ved, at det *ikke* er tilstrækkeligt at argumentere ved hjælp af et/flere taleksempler. Det er imidlertid ikke sådan at de skal vide de i alle situationer, da T3 i opgaveregningen accepterer, at eleverne ikke er klar over forskellen på at føre et bevis for løsningen og argumentere for løsningen af en opgave ved hjælp af "investigations".

4.3.3 Begrundelser for fravalg af beviser

De new zealandske lærere finder, at beviser spiller en meget lille rolle i den aktuelle matematikundervisning, fordi eleverne kun eksamineres i de obligatoriske beviser (T1, T2, T3, T4, T5).

Det er i hovedsagen tre typer begrundelser for fravalg af beviser: (1) At beviser er for svære til at den gennemsnitlige elev får et udbytte af at beskæftige sig med dem (2) At forståelse af beviser reelt ikke er et krav fra "systemets" side (3) At beviser er irrelevante i forhold til det, eleverne ellers skal lære af matematikundervisningen. Det sidste betragter jeg som en fagsynsbetinget begrundelse for fravalg, fordi vægtningen af andre elementer - særlig opgaveregningen - jo netop er et udtryk for et matematiksyn, hvor beviser anses for at være mindre væsentlige.

Den gennemsnitlige elev får ikke et udbytte af at beskæftige sig med beviser

Samtlige new zealandske lærere siger direkte eller indirekte, at den gennemsnitlige elev ikke er i stand til at få noget ud af at arbejde med beviser og at de er nødt til at lære de obligatoriske beviser udenad. T5 og T1 er så overbeviste om, at beviserne er for svære for eleverne, at de ligefrem mener, at man skal undgå at lægge for megen vægt på beviser, fordi det kan skade elevernes selvtillid overfor matematik, hvis de bliver mødt med sådanne krav.

Beviser er ikke et "system"-krav

T4 anser det i højere grad for at være en grund til at nedprioritere alle andre end de obligatoriske beviser, at det ikke er noget, eleverne skal til eksamen i. Det er noget, de andre lærere også er inde på.

Beviser er ikke relevante for for den gennemsnitlige elev

Det er først og fremmest bevisers manglende relevans for opgaveregningen og anvendelse af matematik, der fremhæves som en grund til at fravælge beviser. De new zealandske lærere er "anvendt matematik-orienterede" eller måske rettere "opgaveregnings-fikserede", da det at anvende matematik af nogle nærmest anses som synonymt med at regne opgaver. F.eks. anses differentation af et produkt ved brug af produktreglen for at være en "anvendelse". Nogle af lærerne mener dog, at eleverne i andet end skolesammenhæng, skal kunne bruge den matematik de lærer (T5, T4) og T4 mener at det er vigtigt, at eleverne oplever, at den matematik de lærer, kan bruges til noget uden for matematikken selv.

Et eksempel på at et bevis afvises, fordi det er irrelevant i opgaveregningssammenhæng finder man hos T1, der mener, at eleverne skal vide så meget om rationale/irrationale tal, at de er i stand til at manipulere med rodtal. Det tilstrækkeligt, at eleverne "ved" at $\sqrt{2}$ er irrational.

Udover, at det næsten er sådan at matematik opfattes som synonymt med at regne opgave, anser de new zealandske lærere også ren matematik og særlig rent matematiske problemstillinger for at være irrelevante for deres elever. Jeg anser f.eks. dette, for at være den egentlige grund til at samtlige new zealandske lærere fravælger beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal, mens de prioriterer argumentere for "regnereglerne". Det er kun T3, der direkte markerer, at hun anser "ren matematik" og problemstillinger inden for ren matematik for at være irrelevant for eleverne, men de andre lærere giver gennem at lægge vægt på opgaveregning og anvendelse af matematik indirekte udtryk for det.

4.3.4 Begrundelser for tilvalg af beviser

Samtlige new zealandske matematiklærere begrunder tilvalg af alt andet end obligatoriske beviser med hensynet til de dygtigste elever. Begrundelserne i det følgende er altså *ikke* gældende for den gennemsnitlige elev. Hvis vi ser på konkrete begrundelser, så leverer lærernes kommentarer til produktreglen materiale. I følge T2 og T5 forklarer beviset "hvor formlen kommer fra". T3 formulerer det mere generelt (og negativt), som at selv de gode elever ikke er interesserede i at vide, hvor formlen kommer fra. Beviser er altså først og fremmest relevante i kraft af at være *formelforklarende*.

De øvrige begrundelser for beviser i matematikundervisningen er mere spredte. T1 finder, at beviset for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ -sætningen understøtter begrebsdannelsen og at beviser i det omfang, de inddrages, skal tjene til at understrege sætningerne og de involverede begreber. T2 finder, at der er en generel morale knyttet til beviser; et signal om at man i matematik såvel som i andre fag, bør argumentere for sine påstande. T5 mener, at man burde give de dygtigste elever et kursus i Euklidisk geometri og her blandt andet illustrere, at beviser her fungerer som et bindeled mellem sætninger og aksiomer i en aksiomatisk teoribygning. Beviser bidrager da til at give et billede af matematik som sammenhængende. Den nuværende new zealandske matematikundervisning og det nuværende pensum giver ikke den mulighed. Endelig mener T3, at der skal være beviser i matematikundervisningen for at give de elever, der senere får brug for - og har evner for - selv at føre beviser, forudsætninger for at kunne gøre det.

T3 pointerer med det sidste beviser som studieforberedende element i matematikundervisningen. Som hun formulerer det, er beviserne relevante for de elever, der er kommende professionelle matematikere. De skal kende til beviser, fordi de senere hen skal blive i stand til selv at konstruere beviser. T2 finder, at de elever, der i deres senere uddannelsesforløb vil støde på "bevisholdig" matematik, skal møde beviser på gymnasieniveauet, fordi disse elever netop nu er i stand til at forstå beviserne og skal forberedes på, at det senere hen vil være et element i matematikundervisningen.

4.3.5 Bevisførelse

Forekomst af bevisførelse i den new zealandske matematikundervisning

Selvom der er bevisførelsesopgaver i nogle new zealandske eksamensopgavesæt og eleverne altså potentielt kan blive eksamineret i at føre beviser selv, så er det ikke ensbetydende med, at bevisførelsesopgaver og bevisførelse indgår i den daglige undervisning. De bevisførelsesopgaver, jeg har medtaget, anser de new zealandske lærere for at være alt for svære for eleverne. Da de samtidig ikke giver særlig mange points til eksamen anses den tid, man i givet fald ville bruge på dem, for at være dårligt givet ud. Den bliver derfor anvendt på andre, simplere opgaver, der giver lettere points. De dygtigste elever vil dog blive præsenteret for bevisførelsesopgaverne i eksamenssættene (T1, T2, T3, T4, T5).

T4 skiller sig ud ved at nævne, at hun især med de yngre elever (dvs på trinene inden 6th og 7th form) prioriterer at bruge tid på at lade eleverne argumentere uformelt for matematiske sætninger selv. T4 giver som eksempel, at hun lader sine elever argumentere uformelt for formlen for arealet af et trapez. Som sådan *har* T4 bevisførelse i sin daglige undervisning, men interessant nok ikke på 6th og 7th form niveau, hvor der går mere tid med at nå pensum og vænne eleverne til at håndtere matematisk formalisme i opgaveregningen.

Gennemgående anses bevisførelse for at være noget, der udelukkende er relevant for de allerdygtigste elever og måske endda kun de kommende professionelle matematikere. T5 mener, at de dygtigste elever ved at bevise sætninger inden for Euklidisk geometri, som tillægsgevinst kan opnå, at deres generelle problemløsningskompetence forbedres. De får et bredere erfaringsgrundlag og en forståelse af, at der er andre måder at løse problemer på, end at simplificere en tekstproblemstilling - noget de new zealandske opgaver ellers ofte drejer sig om.

Begrundelser for fravalg af bevisførelsesopgaver

Didaktiske begrundelser
Kommentarerne til polygonopgaven (se s.61) og de eksempler på eksamensopgaver, jeg har givet (se s.62) er ret entydige. Alle bortset fra T4 mener at polygonopgaven er alt for svær for eleverne og afviser, at lignende opgaver forekommer i deres undervisning. T5, T3 og T1 mener, at man godt kan forvente,

at eleverne - også elever på lavere niveauer end 6th og 7th form - *løser opgaven* (dvs finder frem til at det er en trekant og en firkant, der kan deles langs en symmetriline og blive til to trekanter og to firkanter). Man kan bare ikke forvente, at de *argumenterer for*, at det netop er en trekant og en firkant, der er løsninger. At opgaven anses for at være passende for yngre elever skyldes formentlig, at geometri og dermed også geometriske problemstillinger indgår i pensum på dette niveau. Jeg har eksplicit gjort opmærksom på, at jeg ikke har spurgt om den konkrete opgave indgår, men om *lignende* opgaver indgår, men det er muligt, de new zealandske lærere ikke har været i stand til at abstrahere fra at den konkrete opgave ikke ligger indenfor pensum.

Man ser flere eksempler på forestillingen om, at eleverne muligvis vil kunne løse opgaven, men ikke være i stand til at argumentere for den i lærernes kommentarer til bevisførelsesopgaverne i eksamenssættene og særlig T3 betoner, at opgaven "Vis uden at løse ligningen at $z^3 = i$ er et komplekst tal" kun er tilgængelig for eleverne, hvis man forlanger, at de løser ligningen.

Det eleverne forventes at kunne stille op i forbindelse med opgaver som polygonopgaven er at fremsætte en løsning ved brug af "investigations". Der forlanges altså ikke en egentlig argumentation. Det ser nærmest ud som det, der sker mellem 3rd form og 6th og 7th form er, at ikke-trivielle opgaver forsvinder og erstattes af typeopgaver. I bevismæssig sammenhæng er taleksempler/tegninger nu ikke længere gyldige matematiske argumenter - men der sættes i praksis ikke noget i stedet - eleverne lærer i stedet standardargumenterne udenad.

Fagsynsbetonede begrundelser

Man skal ikke underkende, at bevisførelsesopgaverne afvises, fordi de er "rent matematiske" problemstillinger. Et af T3's begrundelser for, at opgaven med de rationale/irrationale tal ikke er relevante for hendes elever er, at det jo er en "ren matematik"-opgave.

4.4 Interviews med de danske lærere

Jeg er nu nået til at fremlægge de væsentligste træk ved de interview, jeg lavede med de danske lærere. Som tidligere nævnt så præsenterede jeg de danske lærere for de new zealandske læreres "profiler"[9] i form af udsagn om beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Også her er så mange gennemgående træk, at jeg gør opmærksom på, hvem der mener hvad og betegner de enkelte lærere med initialerne L1, L2, L3, L4 og L5.

Jeg lægger ud med at referere de danske læreres kommentarer til de new zealandske læreres kommentarer til eksempelsætningerne.

4.4.1 Eksempelsætningerne

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

Alle danske lærere mener, at man kan og bør undervise i beviset og at man i hvert fald i 3.g kan forvente, at eleverne er i stand til at forstå det. L3 og L2 mener dog, at det er problematisk, at man pt. har beviset placeret i 1.g. Her bruges det mere som et eksempel på en problemstilling og et abstraktionsniveau, eleverne vil møde, hvis de vælger matematik på højt niveau og kan derfor bruges af eleverne til at afgøre, hvilket niveau de senere i forløbet (2.g og 3.g) ønsker at læse matematik på. L4 og L3 mener at beviset er specielt svært og ikke er et bevis alle elever har glæde af. Man inddrager det i matematikundervisningen for de dygtigste elevers skyld.

De begrundelser, som de new zealanske lærere i øvrigt giver for at undlade beviset, afvises. L1, L3, L4 og L5 (L2 udtaler sig ikke) mener ikke, at det er rigtigt, at eleverne godt ved, hvad et irrationalt tal er og at beviset derfor er overflødigt. Eleverne har måske hørt ordet før (L1, L5), men det betyder ikke, at de har en forståelse af, hvad et irrationalt tal er. L4 mener ligefrem, at beviset kan være nyttigt for *netop* at få eleverne til at reflektere over forskellen på rationale og irrationale tal.

At problemstillingen er abstrakt anses ikke for problematisk, tværtimod anser særlig L4 det for en styrke, at det er et anderledes bevis og *ikke* er et "kedeligt" bevis for en regneregel og repræsenterer en problemstilling inden for ren matematik. Hvis man undlader sådan et bevis videreformidler man et for snævert billede af hvad matematik er til eleverne. (L1, L4, L5)

Det er heller ikke rigtigt, at beviset er et, som eleverne ikke kan motiveres for at sætte sig ind i. L4 finder, at der netop er en elevgruppe, der fascineres af abstrakte problemstillinger - og altså også af problemstillingen omkring at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Man finder det formuleret mere generelt hos L3, L1, der

[9] Profilerne kan findes i Appendix C

begge giver eksempler på, at elever fascineres af abstrakte og tilsyneladende "ubrugelige" problemstillinger i matematikken.

L2 og L3 anser i højere grad bevisets logiske struktur som det, det er vigtigt at fremhæve ved netop dette bevis og L2 mener ligefrem, at man godt kan fremvise beviset som et eksempel på den særlige logiske struktur man finder i modstridsbeviser *uden* at interessere sig for selve problemstillingen og sætningens konsekvenser.

4.4.2 Beviser

Forekomst af beviser i matematikundervisningen

I det store og hele gennemgås de beviser, der optræder i lærebøgerne i matematikundervisningen. Det sker naturligvis af hensyn til, at eleverne skal til eksamen i dem, men som jeg vil komme ind på, er det bestemt ikke de danske læreres eneste begrundelse.

Det forekommer naturligvis også hos de danske lærere, at man af tidhensyn opgiver at gennemgå beviser. L1 giver blandt andet et eksempel på et bevis, som han fravælger at tidsmæssige hensyn. Det drejer sig om beviset for at krydsproduktet af to vektorer med koordinaterne (a_1, a_2, a_3) og (b_1, b_2, b_3) er givet ved:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Han mener ikke, at elevernes udbytte står mål med den tid, han i givet fald vil være nødt til at investere.

Fravalg af beviser sker imidlertid ved, at man som lærer gør eleverne opmærksom på, hvis beviser undlades eller erstattes af mere løse argumenter (L1, L3 og L5).

4.4.3 Begrundelser for tilvalg af beviser

Man finder 4 typer begrundelser for tilvalg af beviser: (1) Beviser er et krav fra "systemets" side (2) Beviser er et væsentligt element i matematikundervisningen i kraft af at være centralt i "faget matematik" (3) Beviser er ganske vist "svært stof", men også udfordrende og noget, der på forskellig vis kan gavne eleverne (4) Andre begrundelser.

Beviser er et krav fra "systemets side"
En af grundene til at beviser indgår i matematikundervisningen er naturligvis, at eleverne skal til eksamen i beviser (L3, L4). Lærernes opfattelse er klart,

at der stilles krav om forståelse af beviserne fra "systemets" side, da der er så mange beviser, at eleverne ikke kan nå at lære dem udenad.

De danske lærere begrunder dog kun i meget ringe grad beviserne i matematikundervisningen med, at eleverne skal til eksamen i dem.

Beviser er centrale i "faget matematik" og derfor også i matematikundervisningen
L1, L4 og L5 anser det for at være hovedformålet med matematikundervisningen, at eleverne udvikler et billede af matematikfaget. Det kan man ikke sikre, hvis beviserne udelades.

Eleverne skal have et så nuanceret billede af matematik som muligt. Det er grunden til, at det anses for utænkeligt at bortprioritere beviser til fordel for opgaveregningen. Man skal ikke give eleverne indtryk af, at matematik drejer sig om at regne opgaver.

L4 anser ligefrem opgaveregningen for at være den lidt kedelige del af matematikundervisningen og finder, at det er et problem, at den nuværende matematikundervisning indirekte er "opgaveregnings-orienteret", fordi den mest indeholder beviser for regneregler. Han mener at "ren matematik" - som han ser visse beviser som f.eks. $\sqrt{2}$ - beviset som en eksponent for - er det, der er den egentlige motivationsfaktor for eleverne. Eleverne er fascinerede af, at matematik er et "rent" fag, med (som jeg fortolker det) klare, entydige påstande, som man i modsætning til påstande inden for andre fagområder ikke sådan kan ændre og diskutere.

Man støder også på det argument, at beviser i matematikundervisningen signalerer til eleverne, at man skal argumentere for sine påstande i matematik såvel som i andre fag. Nogle finder, at det er et plot matematik har til fælles med andre fag (L1, L2, L3) og L4 finder ligefrem, at det er et hovedargument for at have beviser i matematikundervisningen og at matematik er et fag, hvor man netop kan stille særligt store krav til kvaliteten af elevernes argumentation og hvor argumentation er særligt i fokus.

Beviser er svært stof - men stiller også krav, som det er nyttigt at eleverne prøver kræfter med
Bortset fra L4, der mener, at de fleste elever mere eller mindre lærer beviserne udenad og at især beviserne i "ren matematik" er der for de dygtigste elevers skyld, så mener de danske lærere, at beviser er for alle elever, ikke blot de dygtigste. Selvom ikke alle elever forstår alle beviser i alle detaljer - og det gør de ikke - så er det vigtigt, at de *forsøger* at opnå en sådan forståelse. Anstrengelserne, at gøre forsøget er i sig selv vigtigt. L5 mener ganske enkelt, at eleverne alligevel ikke lærer pensum, men bliver bedre til stof, de tidligere har forsøgt at tilegne sig.

L2, L3 og L4 mener, at beviserne forbedrer elevernes evne til at forstå abstrakte og generelle problemstillinger. I følge L3 bidrager kravet om at eleverne skal forstå beviser i højere grad end andre elementer i matematikundervisningen, f.eks. opgaveregningen til at eleverne bliver bedre til at forstå abstrakte og generelle problemstillinger. L4 anser dette for at have et studieforberedende formål. Eleverne har generelt også når de skal tilegne sig stof indenfor andre fagområder, glæde af denne træning.

En forestilling om bevisers nyttevirkning er også, at eleverne ved at arbejde med beviser forbedrer deres problemløsningskompetence. L3 fremhæver, at man kan formode, at eleverne som konsekvens af at have arbejdet med beviser, bliver mere uforfærdede over for at give sig i kast med svære opgaver og at de kan overskue selv at udvikle længere argumenter. L1 mener, at beviser i sig selv er eksempler på løsninger af mere generelle problemer og på den måde udgør et eksempelmateriale for eleverne, når de skal løse opgaver.

Lige bortset fra L5 er der ingen, der mener, at elevernes evne til at anvende en sætning i opgaveregnings-sammenhæng har nogen direkte forbindelse med et eventuelt kendskab til et bevis for sætningen. L2 nævner som eksempel, at der ikke er nogen sammenhæng mellem ens evne til at bruge løsningsformlen for 2.gradsligninger og ens kendskab til beviset for den.

Andre begrundelser

At beviser er eksempler på forskellige logiske strukturer og kan indeholde geniale ideer, er noget, især L2 fremhæver som essentielt ved beviser. Hun ser beviser som en mulighed for at give eleverne "gode oplevelser". Beviser er er eksempler på "smuk matematik", som eleverne ikke skal snydes for at opleve. Det gælder især de elever, der ikke senere hen vælger at beskæftige sig med matematik. Hun ser desuden beviserne som eksempler på forskellige typer af logik, som det er vigtigt, at eleverne præsenteres for.

De andre lærere er mere beherskede; L5 mener at nogle elever godt kan se det smukke og smarte i beviser, L1 mener, at man som lærer giver eleverne et indtryk af, at det er sådan man selv oplever *nogle* beviser.

Spørgsmålet om, hvorvidt beviser bør indgå som et eksempel på "bindeled" mellem de enkelte sætninger i en aksiomatisk struktur er et, hvor de danske lærere erklærer sig enige i, at det er en vigtig pointe, der er knyttet til beviser. Jeg tror imidlertid ikke, at man skal fortolke det på den måde, at det er et perspektiv, der *faktisk* inddrages i undervisningen. Der er nok snarere tale om et, der *kunne inddrages*, hvis hele eller dele af gymnasiematematikken blev fremstillet aksiomatisk, hvad den pt. ikke gør. Jeg vil derfor blot konstatere, at det anses for at være en mulig begrundelse for at inddrage beviser i matematikundervisningen.

Eleverne beskrives som ukritiske over for matematiske sætninger. Man kan altså ikke begrunde beviser i matematikundervisningen med, at man skal overbevise eleverne om sætningernes rigtighed. Nogle lærere konstaterer blot elevernes manglende skepsis (L1, L3, L4), mens L5 bemærker, at det eleverne burde være kritiske over for, ikke er om sætningerne er rigtige, men om de antagelser sætningerne hviler på passer med de sammenhænge sætningerne bliver brugt

i. L2 mener at det netop er et mål med matematikundervisningen, at eleverne *lærer* at forholde sig kritisk til sætninger i matematikken.

4.4.4 Bevisførelse

Forekomst af bevisførelsesopgaver i matematikundervisningen

De danske matematiklærere finder ikke, at bevisførelsesopgaver optræder i noget særligt omfang i deres undervisning - hvis overhovedet. L1 inddrager ikke bevisførelsesopgaver, fordi der ikke er krav om det fra "systemets" side. L2 mener, at nogle af opgaverne i 3.årsopgaverne i matematik kan have karakter af at være bevisførelsesopgaver, mens L4 nævner, at mens han generelt ikke inddrager bevisførelsesopgaver, så er der et enkelt undervisningsforløb, der skal illustrere matematikkens indre struktur, hvor han lader sine elever fremsætte hypoteser og forsøge at bevise dem. L5 lader sådanne opgaver indgå i sin daglige undervisning, men mener til gengæld ikke, at det er noget, man kan stille eleverne til regnskab for til eksamen.

Kommentarer til polygonopgaven

L4 og L1 finder, at polygonopgaven[10] er for svær, fordi det både er ikke-trivielt for eleverne at fremsætte en hypotese og efterfølgende godtgøre den. Det bør være sådan, at sætningen enten er givet (L1) eller at eleverne forholdsvis let kan fremsætte hypotesen (L4) og som sådan ikke skal gennemføre bevisførelsesprocessen "fra bunden".

Alle fremhæver, at eleverne har gavn af at *forsøge* sig med opgaven. Det er ikke samtlige elever, der vil være i stand til selv at finde frem til løsningen og argumentere for den, men de vil efterfølgende være i stand til at forstå, hvordan man kommer frem til løsningen og argumenterer for den.

Formål bevisførelse potentielt kunne have
Der er forskellige forestillinger om, hvad bevisførelse kan og skal gøre godt for. L1 fremhæver procesindsigten: Hvis eleverne selv gør sig erfaringer med bevisførelse, får de forståelse for, at der ligger mange fejlslagne forsøg på at bevise påstande til grund for de "færdige" sætninger, de møder i matematikundervisningen. Beviserne er ikke - heller ikke for en matematiker - selvfølgelige og trivielle at finde frem til. L5 mener - som det også ses af hans kommentar til polygonopgaven - at bevisførelsesopgaver repræsenterer en type udfordring, som eleverne har godt af at tage op - også selvom de ikke nødvendigvis får gennemført argumenterne selv. Dette tilslutter L2 og L3 sig. L4 mener, at eleverne skal have en *ide* om, hvad det vil sige at bevise en sætning og at det kan gøre dem bedre til at vurdere, om de har argumenteret tilstrækkelig godt for svaret

[10] Se side 61 for forklaring og løsning af opgaven

på en opgave og at det er nyttigt, hvis eleverne lærer *selv* at argumentere. L2 finder at bevisførelsesopgaver - i lighed med beviser - giver eleverne mulighed for nogle "gode oplevelser" med matematik.

4.5 Kommentarer til det empiriske materiale

Selvom den måde, jeg har foretaget indsamlingen af empirisk materiale på, gør, at de danske læreres udtalelser naturligt kontrasterer de new zealandskes, er der behov for, at der lidt mere systematisk gøres rede for forskelle og ligheder og at de bliver sat i perspektiv. Endelig kommenterer jeg de mangler og begrænsninger, jeg mener mit materiale har og som man må tage forbehold for.

4.5.1 Sammenligning af den danske og new zealandske del af materialet

Jeg har i min fremstilling af det empiriske materiale søgt at redegøre for de didaktiske og fagsynsbetonede overvejelser omkring beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, der ligger *udover* betragtninger omkring eksamen. Undervisernes fortolkning af "system-kravene" har dog en vis relevans, fordi de fortæller noget om, hvor selvstændigt lærerne forholder sig til dem.

Generelt fokuserer de new zealandske lærere meget på at forberede deres elever på eksamen. Alt hvad der ikke betragtes som en støtte for opgaveregningen, som eleverne netop testes i til eksamen, anses for at være irrelevant for eleverne. De obligatoriske beviser opfattes desuden som et isoleret element i matematikundervisningen og gør reelt ikke gør eleverne klogere. Tilsvarende er hovedbegrundelsen for at fravælge bevisførelsesopgaver af eksamensteknisk art. De nedprioriteres bevidst, fordi de giver så få point til eksamen, at de af denne grund ikke er værd at bruge tid på.

De danske lærere mener naturligvis at en af grundene til, at der er beviser på tapetet i matematikundervisningen er, at eleverne skal til eksamen i dem - men det er ikke den eneste grund og ikke den dominerende begrundelse. Overvejelserne omkring bevisførelse præges ligeledes ikke af, at det er noget, eleverne ikke skal til eksamen i.

Beviser

Set fra de danske læreres synspunkt, så har beviserne har en plads i matematikundervisningen, fordi de er en del af faget matematik og som sådan bidrager til det billede af matematik eleverne danner sig. En sådan formulering og forestilling - at eleverne skal danne sig et billede af matematik - finder man slet ikke hos de new zealandske lærere. Samtidig mener de danske lærere ikke, at eleverne skal forstå beviserne i detaljer for at få et udbytte. Det synes de new zealandske lærere at forudsætte.

De new zealandske lærere fokuserer langt mere på "anvendt matematik", i reglen forstået som at eleverne skal lære at anvende sætningerne til at løse (eksamens)opgaver. Dette fokus gør, at de new zealandske læreres bedømmelse af relevansen af alle andre elementer i matematikundervisningen afhænger af, om de *understøtter* dette formål. Da de new zealandske lærere ikke mener, at opgaveregningen og beviserne har noget med hinanden at gøre, anses beviser i det store og hele for at være irrelevante og de omtales da også netop sådan. De obligatoriske beviser ses som et isoleret element i pensum, der skal gennemgås, fordi eleverne skal kunne dem til eksamen. Alt andet har karakter af at være frivilligt og "for sjov" og uden egentligt formål. Her udgør beviser for "regneregler" dog en undtagelse, fordi beviser her kan virke som en forklaring på, hvor regnereglen "kommer fra". Her understreges en pointe, som de danske og new zealandske lærere er enige om: Matematik må ikke fremstå som et fag, hvor påstande er ubegrundede. Jeg vil dog hævde, at det sker af to forskellige årsager. De danske lærere gør det for at udbygge elevernes billede af matematik, mens de new zealandske lærere i højere grad gør det for at afmystificere "formlerne".

De new zealandske lærere begrunder det delvise fravær af beviser didaktisk: beviser er så svære, at det ikke kan nytte at forlange af en gennemsnitlig elev, at han/hun skal andet og mere end at lære beviserne udenad. Nogle mener ligefrem, at man jo ikke skal udsætte eleverne for ting, man på forhånd anser for at være meget svært for dem at kapere - så ødelægger man deres selvtillid. Udover at de new zealandske lærere mener, at eleverne ikke helt kan gennemskue eller forstå beviser og ikke mener eleverne får noget ud af at *forsøge* på at forstå beviser, så afspejler det for mig at se også en anderledes forestilling om, hvilke *krav* man kan tillade sig at stille til eleverne generelt. De danske lærere skelner i højere grad mellem de krav eleverne møder til eksamen og de krav man kan stille til eleverne i den daglige undervisning og mener, at man kan stille højere krav i den daglige undervisning, end man kan til eksamen - og at man også skal gøre det.

Hos de danske lærere finder man en mangfoldighed af begrundelser for at have beviser i matematikundervisningen. Især ser de danske lærere ikke beviser som en entydig størrelse og har på den måde et mere bredt bevisbegreb. Det er *nogle* beviser, der egner sig til at vise at matematik er et "smukt fag", *nogle* beviser der kan vise sammenhængen mellem de antagelser, man har gjort sig og sætningen, *nogle* beviser, der kan tjene til at være eksempler på forskellige former for logik osv.

Der er ikke den samme mangfoldighed blandt de new zealandske lærere. Beviser anses først og fremmest for at være relevante for de dygtigste elever i kraft af at forklare "hvor formlen kommer fra". Det gør, som jeg ser det, at de new zealandske lærere har en forkærlighed en bestemt slags beviser: beviser for diverse sætninger, der kan bruges i opgaveregningen.

Endelig er der en klar modsætning i de danske og new zealandske læreres holdning til det abstraktionsniveau hos eleverne, som forståelsen af beviser kræver. De new zealandske lærere finder, at en af grundene til at *fravælge* beviser, er det krævede abstraktionsniveau. De danske lærere anser det derimod for at være en *kvalitet* ved beviserne, at de indgår i en generel struktur og er abstrakte af natur.

Een af de få ting, som jeg finder, der er fælles, er forestillingen om, at det enkelte bevis for en sætning og anvendelsen af den, ikke har noget med hinanden at gøre. Dog er L5 inde på, at eleverne bør forholde sig kritisk til grundlaget/antagelserne for en sætning, når de bruger den. Herudover er alle - bortset fra L5 og til dels L2 - enige om, at beviser gør eleverne bedre til at tænke logisk. De danske lærere mener dog, at når eleverne gør sig erfaringer med at forstå beviser, så har det som sideeffekt, at de også bliver bedre problemløsere.

Bevisførelse

På New Zealand kan man i nogle skriftlige eksamenssæt finde eksempler på bevisførelsesopgaver, mens dette ikke optræder i det danske system. I så henseende ser det ud til, at bevisførelse er lavere prioriteret i det danske system. Interviewmaterialet viser imidlertid, at de new zealandske lærere ignorerer de få bevisførelsesopgaver, der er, fordi de anses for at være for svære for eleverne.

For de danske lærere er bevisførelsesopgaver "frivillige" i og med, at det er noget, eleverne ikke eksamineres i. De danske lærere, der faktisk angiver at bruge bevisførelsesopgaver, bruger dem i den daglige undervisning, hvor man kan tillade sig at stille langt større krav end til eksamen. Læreren er der som hjælper og rådgiver og kan skubbe på, når eleverne "kører fast". De danske lærere skelner - som jeg ser det - også her i højere grad mellem den daglige undervisning og eksamen.

De danske lærere er imidlertid enige med de new zealandske i, at polygonopgaven er for svær for eleverne. Her hører enigheden dog også op, da de danske lærere finder, at opgaven ville være mere tilgængelig, hvis *sætningen på forhånd er formuleret,* således at argumentationen for sætningen er i fokus. De new zealandske lærere finder derimod, at man måske nok kan forestille sig, at eleverne er i stand til ved regning/tegning/eksperimenteren at gætte sætningen, mens det er urimeligt at forlange, at de argumenterer for den.

4.5.2 Perspektivering af sammenligningen

Det er på sin plads at kommentere forskellene og lighederne, set i forhold til nogle af de ydre forhold, der gør sig gældende. En af de helt oplagte, som jeg allerede har kommenteret, er forskellene i evalueringskrav. Der kræves ganske enkelt ikke så meget fra "systemets side" mht til især beviser i New Zealand, som der gør i Danmark. Men de danske lærere opererer også langt mere autonomt i forhold til kravene og er langt mere insisterende på, at matematikundervisningen - også i forhold til beviser - bør opfylde andre formål end at gøre eleverne i stand til at bestå eksamen.

En af grundene til dette skal formentlig findes i den forskel, der er på danske og new zealandske læreres uddannelsesmæssige baggrund. Danske lærere har typisk et længere uddannelsesforløb bag sig end de new zealandske, da man i Danmark normalt ikke kan blive gymnasielærer uden at have en kandidatgrad indeholdende to fag. En dansk matematiklærer har derfor mindst sidefagsniveau[11] (dvs har læst matematik mindst 1 1/2 år regnet som fuld tid) i matematik. De new zealandske lærere har typisk en bachelorgrad som baggrund og så yderligere et års "teacher training" (et praktisk og teoretisk pædagogikum) bag sig. Man underviser som "secondary school"-lærer normalt kun i et fag, men ofte bevirker mangel på matematiklærere, at lærere der har et andet undervisningsfag også underviser i matematik. Minimumskravet i den situation er, at man har taget et første- og et andetårskursus i et matematisk emne - f.eks. analyse. De fleste af de lærere, der underviser i matematik på højere niveauer, dvs i 6th og 7th form, har dog typisk fulgt flere matematikkurser og har en BSc "major" i matematik.

Det faktum at danske lærere samlet set har et længere uddannelsesforløb bag sig, mener jeg bidrager til en større faglig selvtillid og til at de i højere grad når at blive kritiske og i højere grad selvstændigt tager stilling til - og selvstændigt fortolker - faglige krav fra systemside. Der er også fra systemets side lagt op til en mere selvstændig stillingtagen, idet den new zealandske læseplan (der fylder det meste af en bog) er langt mere detaljeret end den danske, der fylder ganske få sider og essentielt set er en pensumliste. I det danske system er dette dog suppleret af en undervisningsvejledning.

En af de andre observationer er forskellen i, hvad der anses for at være målet med matematikundervisningen. De new zealandske lærere betoner det anvendelsesmæssige aspekt, mens de danske læreres betoner, at eleverne skal udvikle et billede af "faget matematik".

Dette mener jeg kan skyldes, at de new zealandske lærere betragter matematik som et *skolefag*, dvs som et fag, hvis primære formål er at ruste eleverne til livet udenfor skolen og i matematiksammenhæng gøre dem bedre i stand til at håndtere situationer i dagligdagen og jobsituationer, hvor de har brug for at anvende matematik. Et sådant syn på matematikundervisningens rolle vil naturligt føre til, at det anvendelsesmæssige aspekt af matematikken betones.

De danske lærere ser i højere grad sig selv som *repræsentanter for faget* - L1 beskriver ligefrem sig selv som "kulturbærende" - der har til opgave af at give eleverne et billede af de centrale træk ved matematikken. De fortolker

[11] Dvs alle der har bestået deres kandidatkeksamen efter 1/9 1998 skal nu faglig supplere i deres sidefag 1/2 år og får således et 2-årigt sidefag

"systemkravene" i forhold hertil. Jeg tror det skal ses som forklaringen på, at de danske lærere ikke er så opgaveregnings-orienterede, som de new zealandske. Opgaveregning eller måske rettere anvendelse af matematik er et træk ved matematikken, som de danske lærere vil søge at tilgodese i undervisningen. Til gengæld har beviserne så en mere naturlig plads og der undervises bestemt ikke kun i dem, fordi eleverne skal til eksamen i dem, men snarere fordi de er en væsentlig del af "faget matematik".

Særlig hos L4, men også til dels hos de andre, danske lærere, kan man se, at et sådant syn på matematikundervisningen kan bevirke - og det har måske i tidligere tider bevirket - et noget elitært syn på matematikundervisningen. I sin yderste konsekvens vil en undervisning med dette mål sætte hensynet til at formidle faget så "autentisk" som muligt højere end hensynet til at undervisningen i indhold, metode og abstraktionsniveau er relevant og tilgængeligt for eleverne.

4.5.3 Mangler i materialet

Jeg ser det selv som den alvorligste mangel, at jeg ikke har gjort mere ud af at spørge til den mundtlige dimension af bevisførelse, dvs elevernes argumentation for matematiske påstande fremsat i undervisningen. Det har gjort, at mit materiale er lidt tyndt på dette punkt. Det kan godt være, at eleverne i større omfang, end det fremgår, faktisk deltager i at argumentere for matematiske påstande i den matematikundervisningen.

Der er også nogle af de anvendte termer, hvor jeg ikke har præciseret nok - og forlangt af mine interview-personer, at de gjorde det. Det gælder især "anvendt matematik". Ved "anvendt matematik" forstås lige fra "sæt-tal-ind-i-en-formel" til at eleverne er i stand til at bruge matematik i mere eller mindre virkelighedsrelaterede situationer.

Herudover må jeg påpege, at jeg finder at min metode med interview-spørgeskemaerne ikke har været så velegnet. Mit emne er noget "tungt" og mere velovervejede udtalelser kunne måske være opnået ved at lave en undersøgelse, der var baseret på skriftlige svar.

4.5.4 Bidraget fra det empiriske materiale til projektet

Til trods for at mit materiale kvantitativt er lille, så viser det markante forskelle i fagsyn og forestillinger om formålet med matematikundervisningen hos de danske og new zealandske lærere.

Jeg mangler nu at se på, hvad det empiriske materiale leverer af svarmateriale til min problemstilling samt at kommentere, hvor velegnet det er til formålet.

Den del af problemformuleringen, der angik lærerne indeholdt følgende spørgsmål: (1) Hvilke begrundelser er der givet for at undervise i beviser og bevisførelse, når man ser på læreres opfattelse af hvilken betydning beviser og bevisførelse har i matematikundervisningen? (2) Hvad kan man sige om muligheden for at lade beviser og bevisførelse indgå i matematikundervisningen på gymnasieniveau på baggrund af matematiklærernes holdninger til beviser og bevisførelse i matematikundervisningen.

Begrundelser for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen

Hvis man ser på det første spørgsmål, så finder jeg, at lærernes begrundelser for at have beviser i matematikundervisningen er lidt vage. Dette gælder både begrundelser fremsat af de danske og new zealandske matematiklærere, men der er forskellige grunde til det. De new zealandske læreres begrundelser er præget af, at de blander, hvad de anser for at være manglende muligheder for at have beviser i matematikundervisningen sammen med spørgsmålet om, hvad beviser kunne tænkes at bidrage med. I det omfang at man finder egentlige begrundelser, antages de kun at være gældende for de dygtigste elever.

De danske lærere blander på sin vis også deres syn på muligheder for at have beviser i matematikundervisningen sammen med begrundelserne for at have det. Bevisernes tilstedeværelse i matematikundervisningen er så selvfølgelig, at der ikke er nogen grund til at give begrundelser for, at de skal indgå i matematikundervisningen. De danske lærere fremhæver, at matematikundervisningen skal være *repræsentativ*, dvs afspejle centrale træk ved matematikfaget, men følger det ikke op med begrundelser, der peger på særlige indsigter, arbejdet med beviser giver eleverne. Det er som om bevisets tilstedeværelse i matematikundervisningen - i princippet uden at eleverne forstår beviserne i detalje - er tilstrækkelig. F.eks. fremhæves det, at man ved at præsentere eleverne for beviser understreger, at man i matematik såvel som i andre fag argumenterer for sine påstande. Det forklarer for mig at se ikke, hvorfor det så er nødvendigt for eleverne at forstå beviserne. De indsigter, som arbejdet med beviser angives at have, er ikke "faget matematik"-indsigter, men derimod indsigter, der støtter udviklingen af andre matematiske kompetencer hos eleverne, f.eks. evnen til at løse matematiske problemer. Man kan sige, at de danske lærere giver to typer begrundelser (1) Bevisers tilstedeværelse i matematikundervisningen giver i sig selv eleverne ny indsigter i matematikfaget. (2) Det at eleverne arbejder med at forstå beviserne bidrager til at *andre* af elevernes matematiske kompetencer udvikles.

I forhold til at diskutere begrundelser for at have *beviser* i matematikundervisningen synes jeg materialet kan bruges til at give et overblik over, hvad man *kunne* give af begrundelser. De kan ses som et udpluk af de begrundelser, der bliver givet i den faktiske matematikundervisning. Selv anser jeg dem imidlertid for at være mangelfulde, fordi mit udgangspunkt er, at beviser har en berettigelse i matematikundervisningen i kraft af at være repræsentative for særlige træk ved matematikfaget. Som jeg har været inde på, så rummer mit materiale ikke sådanne begrundelser.

Hvis man ser på de begrundelser, som de danske og new zealandske lærere giver for at have *bevisførelse* i matematikundervisningen, så kan man observere det samme mønster. De new zealandske læreres eventuelle begrundelser overskygges af deres holdning til mulighedsproblemet i en sådan grad, at de stort set ikke giver nogen begrundelser for at inddrage bevisførelsesaktiviteter i matematikundervisningen. De danske lærere ser først og fremmest bevisførelse som et element, der på den ene eller anden måde kan støtte forståelsen af de "færdige" beviser og er dermed mere en støttedisciplin end en aktivitet, der i sig selv er værd at inddrage i undervisningen.

Jeg er sådan set ikke uenig i de få begrundelser, der er givet her, men jeg synes der er behov for at supplere dem. Som jeg ser det - og det vender jeg tilbage til i konklusionen - skal man først og fremmest begrunde bevisførelse med det udbytte, man ønsker eleverne skal få af at gennemføre en bevisførelsesproces og med at bevisførelse er et nødvendigt redskab, når man skal argumentere for påstande i matematik. Materialet bidrager, som jeg ser det, ikke afgørende her.

Muligheder for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen

Forholder man materialet til det andet spørgsmål i problemformuleringen, der angår mulighederne for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, så bidrager det klart med et eksempel på, at to forskellige fagsyn og to forskellige opfattelser af, hvad de egentlige formål med matematikundervisningen er, er udslagsgivende for, hvad det anses for muligt at inddrage i matematikundervisningen.

Der er påvist en kontrast mellem de danske og new zealandske læreres syn på muligheden for at have beviser i matematikundervisningen. De danske lærere mener, det er muligt og det er noget de nærmest underforstår. De new zealandske lærere anser det for umuligt og holder sig til nødvendigheden af at prioritere andre eksamensrelevante elementer i matematikundervisningen - især opgaveregningen og til at fremhæve, at beviser må betragtes som irrelevante for den gennemsnitlige elev.

Materialet er her brugbart til at konkludere, at undervisernes fagsyn kan være udslagsgivende for, om det anses for muligt at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Jeg kan dog ikke uden videre konkludere, at det er sådan, at det forholder sig anderledes med mulighederne for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, hvis undervisernes fagsyn ændres. Materialet har den mangel, at det ikke uddybes hvilke vanskeligheder eleverne møder, når de søger at tilegne sig beviser og søger at gennemføre en bevisførelsesproces og hvad man kan gøre ved det. Herudover har materialet den mangel, at bevisførelse og beviser betragtes som et isoleret element i matematikundervisningen. Muligheden for at arbejdet med beviser og bevisførelse kan støtte udviklingen af andre matematiske kompetencer overvejes kun i begrænset omfang.

5 Diskussion og konklusion

Jeg er nu nået til at sammenholde de betragtninger omkring beviser og bevisførelse, som jeg er stødt på i litteraturen og i mit empiriske materiale med min problemformulering og mine egne betragtninger. Kapitlet er disponeret således, at det følger problemformuleringen. Dog deler jeg - som i resten af projektet - hvert punkt op i beviser og bevisførelse. Jeg minder først om min problemformulering:

1. Hvilke særlige træk ved matematik som fag kan beviser og bevisførelse siges at repræsentere?

2. Hvilke begrundelser er der givet for at undervise i beviser og bevisførelse set i relation til generelle begrundelser for at undervise i matematik, når man ser på:

- Begrundelser for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, som kommer til udtryk i litteraturen.
- Læreres opfattelse af, hvilken betydning beviser og bevisførelse har i matematikundervisningen.

Hvilke begrundelser - om nogen - for at undervise i beviser og bevisførelse er efter min vurdering rimelige at give?

3. Hvad kan man sige om muligheden for at lade beviser og bevisførelse indgå i matematikundervisningen på gymnasieniveau, når man ser på

- Arten af de vanskeligheder elever møder, når de søger at forstå beviser og gennemføre en bevisførelsesproces.
- Om det - set fra matematiklæreres synspunkt - i princippet er muligt at gennemføre en matematikundervisning, hvori beviser og bevisførelse indgår.

Hvordan er muligheden for at lade beviser og bevisførelse indgå i matematikundervisningen, som jeg ser det?

5.1 Beviser og bevisførelse som repræsentative for "faget matematik"

I denne del af besvarelsen af min problemformuleringen vil jeg diskutere hvilke særlige træk ved matematik som fag, beviser og bevisførelse kan siges at repræsentere.

Set fra et videnskabsteoretisk synspunkt er beviser og bevisførelse to tæt knyttede størrelser. Spørgsmålet om *bevisførelse*: hvilke metoder, man kan gøre brug af for at godtgøre påstande indenfor matematikken følger naturligt af spørgsmålet om behovet *beviser*, dvs for at godtgøre påstande og hvilke muligheder man har for at gøre det sammenlignet med andre fagområder. Jeg vil her holde mig til at diskutere beviser.

Overvejelser omkring hvilke træk ved beviser, der er særegne for matematikken er ganske vist et rent videnskabsteoretisk spørgsmål. Det er imidlertid af undervisningsmæssig relevans, fordi sådanne overvejelser giver basis for nogle bud på, hvilke træk ved beviser og bevisførelse, man skal søge at fremhæve i matematikundervisningen, hvis man mener, den skal være *repræsentativ*, dvs give eleverne erfaringer med væsentlige træk ved matematikfaget.

Hverken mit empiriske materiale eller - måske mest overraskende - mine litteraturstudier har leveret noget afgørende materiale til besvarelsen af denne del af problemformuleringen. I litteraturen bliver det i de fleste artikler blot konstateret, at beviser er centrale i matematikfaget, men der bliver ikke gjort noget ud af at pointere hvorfor og på hvilken måde og altså hvilke træk ved beviser, der gør dem repræsentative. Som jeg har været inde på, så peger heller ikke lærerne på særlige træk ved beviser, der gør dem centrale i matematikfaget.

Det er derfor først og fremmest mine egne betragtninger, der er at finde i det følgende. En grundig behandling af spørgsmålet kunne udgøre et projekt i sig selv og bidraget her skal derfor ikke betragtes som andet end et kort og ufuldstændigt indlæg.

Som jeg ser det, er matematiske beviser af særlig betydning, når man (1) skal godtgøre umulighedssætninger og visse eksistens-sætninger (2) søger at validere matematiske modeller, hvor empiriske data er et utilstrækkelige til alene at danne basis for en vurdering af, om modellens konklusioner er gode nok.

Beviser for umuligheds- og eksistenssætninger

Alle matematiske sætninger er i en eller anden forstand hvis-så-sætninger, dvs sætninger, der formulerer konsekvenser af allerede udviklede matematiske begreber og definitioner på basis af forudsætninger og antagelser. "Hvis-så"-sætninger er imidlertid ikke unikke for matematikken og kan også findes inden for andre fagområder. Et eksempel fra fysikken: Hvis en potteplante falder ned fra en vindueskarm, så vil den falde ned og ramme gulvet med mindre noget står i vejen.

Når man opstiller hvis-så-sætninger indenfor andre fagområder, vil man imidlertid udelukkende kunne sandsynliggøre sætningerne ved brug af *empirisk verifikation*, dvs på basis af empiriske data. Ved at foranstalte undersøgelser/eksperimenter, kan man sandsynliggøre, at sætningen er sand. I mit eksempel vil man undersøge om genstande, der bliver bragt til at falde frit i tyngdefeltet, nu også bevæger sig i tyngdekraftens retning. Har man en mere samfundsvidenskabelig tese: Hvis børn ser fjernsyn i mere end fire timer om dagen, så klarer de sig dårligt i skolen, består den empiriske verifikation i en undersøgelse, hvor man kortlægger hvor lang tid om dagen en gruppe børn ser fjernsyn og interviews med deres lærere om deres standpunkt i skolesammenhæng - eller måske blot deres karakterer i forskellige fag.

Beviser fremstår i den sammenhæng som en mulighed for at godtgøre påstande *uden* at der foreligger empiriske data. Det giver mulighed for ikke blot at sandsynliggøre, men godtgøre påstande. Samtidig så har man mulighed for at fremsætte og godtgøre en art påstande, der ikke vil kunne fremsættes indenfor andre fagområder, fordi de vil kræve inspektion af uendelig mange elementer. Jeg giver nu to eksempler på sådanne påstande, der er henholdsvis en umuligheds- og en eksistenssætning.

Sætningen "vinkelsummen i en plan trekant er 180 grader" kan opfattes som en umulighedssætning: Det er ikke muligt at konstruere en plan trekant med vinkelsum forskellig fra 180 grader. Den kan - fordi man så ville skulle måle vinkelsummen i uendelig mange trekanter - ikke godtgøres fuldt ud på anden måde end ved at gennemføre et bevis for sætningen.

Der er også visse eksistens-sætninger, der kun kan godtgøres ved at gennemføre et bevis for dem. Et eksempel på en sådan sætning er "alle højderne i en trekant skærer hinanden i et punkt". Det kan man opfatte som en eksistens-sætning: For enhver given trekant eksisterer et og kun et punkt, hvor trekantens højder skærer hinanden. Også her er der uendelig mange tilfælde, man skal undersøge. Man kan altså ikke påvise eksistensen af sådan et punkt i alle tilfælde uden at gennemføre et bevis for det.

Det er ikke alle eksistens-sætninger, der er af den karakter. Når man f.eks. undersøger, om der eksisterer et primtal p, således at p^2 går op i $2^{p-1} - 1$ (Wieferich'ske primtal) (se også s. 44), så er sætningen godtgjort i det øjeblik, at man har fundet et sådant primtal og det er noget, man netop kan gøre empirisk.

Umuligheds- og i visse tilfælde også eksistens-sætninger er altså påstandstyper, som man ikke kan godtgøre uden brug af matematiske beviser.

Bevisers rolle i anvendt matematik

Når man anvender matematik, så "arver" man i visse tilfælde verifikationsproblematikken fra den rene matematik. Det sker i tilfælde hvor empirisk verifikation ikke er tilstrækkelige til at godtgøre de konklusioner, man ønsker at drage på basis af modellen. Det kommer derfor til at spille en afgørende rolle om modellens konklusioner er matematisk korrekte. Har man en ligningsmodel, så vil ens tiltro til modellens konklusion - løsningen til ligningerne - som f.eks. kan være fundet ved brug af lineær algebra - blandt andet afhænge af, om modellen er matematisk korrekt, dvs at de matematiske sætninger, man har gjort brug af, for at komme frem til at ligningens løsninger - modellens konklusioner - er sikre, dvs beviste.

Situationer hvor empirisk verifikation ikke udgør et tilstrækkeligt grundlag for at man kan stole på modellens konklusioner, optræder blandt andet, når man med udgangspunkt i matematiske modeller designer, forudsiger og laver indgreb. Jeg vil i det følgende give nogle eksempler, hvor matematiske modeller bruges som udgangspunkt for at designe, forudsige og lave indgreb og dermed også give nogle konkrete eksempler på, at empiriske data ikke alene giver et tilstrækkeligt grundlag for at stole på modellernes konklusioner.

Designmodeller:
Hvis man ønsker at designe bropiller med en brudstyrke, der er tilstrækkelig høj til at de kan modstå de belastninger, de forventes at blive udsat for, så skaber man en model, hvor man ikke på forhånd har mulighed for - ihvertfald ikke i fuld skala - at indhente data for under hvilke forhold bropillerne knækker. En del af ens grundlag for at stole på modellens konklusioner (f.eks. hvor tykke bropillerne skal være og hvilken facon der er optimal i forhold til brudstyrke og materialeforbrug) er derfor, at modellen udover at være fysisk korrekt, også er matematisk korrekt.

Når man laver designs, kan man ofte - og ihvertfald i dette tilfælde - bygge skalamodeller og derigennem få en forestilling om hvorvidt designet har de ønskede egenskaber. Men man har ikke mulighed for med fuldstændig sikkerhed for at vide det - de empiriske data er ikke tilstrækkelige til at godtgøre modellen. At "oversætte" hvad der sker fra en dimension til en anden indebærer faktisk i sig selv en modeldannelse. Fordi man ikke har denne mulighed har det betydning, at konklusionerne er draget på et matematisk korrekt grundlag. Hvis modellens konklusioner *ikke* er matematisk korrekte, så vil det føre til at man forkaster dem.

Forudsigelsesmodeller:
Verifikationsproblematikken består her i, at man har brug for modellens forudsigelser inden man har adgang til de data, der kan bruges til vurdere modellens konklusioner. Hvis man vil lave en beregning af sandsynligheden for forskellige typer uheld på et atomkraftværk, så har man (forhåbentlig da) ikke et forudgående tidsforløb med diverse mindre og større uheld til sin rådighed, når man

skal vurdere, om modellens konklusioner er rimelige. Om man kan argumentere godt for sit valg af parametre er naturligvis afgørende for ens tro på modellens konklusioner, men det er også afgørende, om modellens konklusioner bliver draget på et matematisk korrekt grundlag. Hvis de ikke gør, så vil man på det grundlag forkaste modellens konklusioner.

Mindre dramatisk kan man se på produktion af tændstikker, hvor man ønsker at forudsige antallet af fusere i hver æske. Her kan man vanskeligt kontrollere modellens forudsigelser, da man jo i det øjeblik man tænder tændstikken, har brugt den. Man har mulighed for at tage en stikprøve, men man kan ikke tjekke samtlige tændstikker. Velvalgte parametre spiller også en rolle her, men det samme som før gør sig gældende. Hvis modellens konklusioner ikke er draget på et matematisk korrekt grundlag, så er der basis for at forkaste modellens konklusioner.

Et eksempel på en deterministisk forudsigelsesmodel er en befolkningsmodel, hvor man på basis af estimater af indvandring, udvandring, fødsels- og dødsrater søger at forudsige befolkningsstørrelsen efter en given tid. En sådan model består i princippet af en enkelt ligning: Den samme for hver tidsperiode:

$$b_{n+1} = f \cdot b_n - d \cdot b_n - u + i$$

d er dødsraten og angiver, hvor stor en procentdel af befolkningen, der dør i løbet af en tidsperiode, der f.eks. kan være et år, f er fødselsraten, der er sammensat af to faktorer: en faktor, der angiver hvor stor en andel af befolkningen, der udgøres af fødedygtige kvinder og en faktor, der angiver sandsynligheden for at en kvinde føder et barn (eller flere hvis perioden er lang nok) i løbet af tidsperioden. u angiver størrelsen af udvandringen i perioden og i angiver størrelsen af indvandringen. Endelig angiver b_n befolkningsstørrelsen efter n perioder og b_{n+1} befolkningens størrelse efter $n+1$ perioder. Vil man finde størrelsen af befolkningen efter flere perioder må man først beregne b_{n+1} og indsætte dette i stedet for b_n for at finde b_{n+2} osv.

Også her spiller det en rolle, at modellens konklusioner kan siges at være draget på et matematisk korrekt grundlag. Verifikationsproblematikken består her i, at man højst har forudgående udviklinger i befolkningstal at holde modellen op imod og at man ønsker at beregne et fremtidigt befolkningstal.

Valideringen af modellen vil selvfølgelig dels bestå i overvejelser omkring hvorvidt modellens parametre er fornuftigt valgt og af om f, d, u og i kan siges at være konstanter, der er uafhængige af antallet af tidsskridt, n. Matematisk set kan man ved hjælp af simuleringer sige noget om, hvor følsom modellen er overfor skift i de forskellige parametre og ændringer i størrelsen af tidsskridt.

Under alle omstændigheder er det sådan, at det vil være afgørende for ens grundlag for at stole på modellens konklusioner, at de er draget på et korrekt matematisk grundlag. I dette - matematisk set - meget simple tilfælde vil konklusionerne være "matematisk korrekte", hvis (1) antagelsen om at koefficienterne er konstante holder og (2) rækkefølgen af regneoperationerne plus, minus og gange er korrekt ved fremskrivningen af befolkningstallet. Hvis der er fejl i dette, så er det et grundlag for at forkaste modellens konklusioner. Derimod er det faktum, at konklusionerne er draget på et matematisk korrekt grundlag ikke alene tilstrækkeligt til at verificere modellen.

Et andet eksempel på en deterministisk forudsigelsesmodel er formlen for kapitalfremskrivning fra rentesregningen $K_n = K_0(1+r)^n$, hvor K_0 er startkapitalen, K_n er slutkapitalen, r er rentefoden pr. termin og n er antallet af terminer. Også her støder man på det problem, at man ønsker at kunne drage konklusioner, inden man har empiriske data til rådighed, der kan bruges til at vurdere rimeligheden af modellens konklusioner. Konklusionerne vil også her være matematisk korrekte, hvis rækkefølgen af regneoperationerne +, gange og opløfte til n'te potens er korrekt.

Modeller brugt som basis for indgreb:
En variant af forudsigelsesmodeller er modeller, hvor modeldataene bruges som argument for en eller anden for form indgreb og hvor det man forudsiger er effekten af indgrebet. Ens tiltro til dette vil (udover at være baseret på at antagelserne i modellen er fornuftige) være baseret på, at modellens konklusioner er draget på et matematisk korrekt grundlag. Et eksempel er her økonomiske modeller, som man f.eks. bruger til at forudsige, hvilken effekt en devaluering af et lands valuta vil have på landets betalingsbalance. Vælger man at devaluere på dette grundlag vil det ske i tillid til at modellens forudsigelser - og dermed også modellens matematiske grundlag - er korrekt.

Et par afsluttende bemærkninger

Efter at jeg nu har givet en række eksempler på situationer, hvor jeg finder at beviser spiller en rolle, når matematik anvendes, synes jeg det passende at fremhæve, at der naturligvis også er situationer, hvor man har god adgang til empiriske data og hvor beviser ikke er af helt så stor betydning.

Det gælder blandt andet beskrivelsesmodeller, hvor man modellerer sammenhængen mellem to eller flere størrelser. Har man f.eks. en model for væksten af en bestemt stamme bakterier, vil man søge at validere modellens konklusioner - her størrelsen af en bakteriepopulation til en given tid, det kunne være løsninger til en differentialligning - med målinger af bakterievæksten. Om modellen i første omgang anses for at være "god nok" vil i høj grad afhænge af, om den stemmer overens med dataene.

I forhold til resten af projektet og i forhold til min problemformulering synes jeg det er værd at bemærke, at beviser i nogle sammenhænge har betydning for anvendelsen af matematik og derfor ikke udelukkende er et anliggende, der har at gøre med ren matematik. Når matematik anvendes til at opstille forudsigelsesmodeller og andre modeller, hvor verifikation via empiriske data ikke er tilstrækkeligt til at validere modellen, så er det af væsentlig betydning for ens tiltro til modellens konklusioner, at de matematiske sætninger, der anvendes til at drage konklusionerne er sikre, dvs beviste.

Jeg vil også fremhæve, at man i matematik er i stand til at udstede garantier af en karakter, som man ikke har mulighed for at udstede indenfor andre fag.

5.2 Begrundelser for at undervise i beviser og bevisførelse

I dette afsnit ser jeg på de begrundelser for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen, der gives af lærerne og i litteraturen. Herefter tager jeg selv stilling til, hvilke begrundelser man med rimelighed kan give. Jeg deler op i beviser og bevisførelse.

5.2.1 Overblik over begrundelser, man kan give for at undervise i beviser

Jeg har for at strukturere de begrundelser, jeg er stødt på, valgt at forholde såvel lærernes overvejelser, som de begrundelser, man støder på i litteraturen til generelle begrundelser for overhovedet at undervise i matematik. Min kilde til at få et overblik over generelle begrundelser for at undervise i matematik er [34]. Det er en projektrapport, der giver en fremstilling af de begrundelser, der er gennem tiderne er givet for at undervise i matematik i det danske gymnasium og er som sådan en pendant til den del af min rapport, der angår begrundelser for at undervise i beviser. Det er blot en mere bred diskussion, hvor udgangspunktet ikke er relevansen af et enkelte element i matematikundervisningen, men spørgsmålet om, hvorfor man helt generelt skal undervise i matematik.

Som jeg ser det, falder begrundelserne jeg er stødt på i litteraturen - og især hos lærerne - for at have beviser i matematikundervisningen i følgende kategorier: (1) Formaldannende begrundelser, dvs begrundelser der er baseret på en forestilling om, at man kan overføre færdigheder og tænkemåder indenfor matematik til andre sammenhænge. (2) Begrundelser, der er baseret på en forestilling om at eleverne ved at beskæftige sig med beviser styrker andre matematiske færdigheder, navnlig kompetencen til at løse matematiske problemer. (3) Æstetikbegrundelser - dvs at eleverne skal beskæftige sig med beviser, fordi de er eksempler på "smuk og smart" matematik. (4) Begrundelser, der er baseret på studieforberedende hensyn, dvs forestillinger om at beviser forbereder eleverne på studier, hvor der optræder matematikkurser og krav om, at de skal kunne forstå beviser. (5) Beviser som signal, dvs begrundelser baseret på at beviser i kraft af deres tilstedeværelse i matematikundervisningen - uanset om eleverne forstår detaljerne eller ej - kan give anledning til at understrege nogle træk ved matematikfaget. (6) Repræsentativitetsbegrundelser, dvs begrundelser, der er baseret på at eleverne skal gøre sig erfaringer med at forstå beviser, fordi de afspejler karakteristiske træk ved "faget matematik". (7) Forståelsesbegrundelser: Begrundelser baseret på, at det at forstå beviser giver eleverne en dybere forståelse af den matematiske struktur, de beskæftiger sig med.

Formaldannende begrundelser
Hos nogle lærere støder man på forestillingen om, at eleverne via at beskæftige sig med beviser (1) bliver bedre til at tænke logisk (2) bliver bedre til at tænke abstrakt og sætte sig ind i abstrakte problemstillinger - også inden for andre fagområder end matematik. Herudover støder man i en enkelt kilde i litteraturen [22] på forestillingen om, at beviser virker formaldannende i kraft af at være personlighedsudviklende. Eleverne bliver ideelt kritiske overfor argumenter af såvel matematisk som ikke-matematisk art og bliver derigennem bedre i stand til at håndtere situationer, hvor de har brug for sådanne færdigheder. I kilden undersøges det, om det er muligt at undervise i Euklidisk geometri på en sådan måde, at eleverne ikke blot lærer sætningerne udenad, men også bliver mere kritiske og bedre til at tænke logisk i både matematiske og ikke-matematiske sammenhænge. Formaldannende argumenter er didaktisk set noget forældede og min kilde i litteraturen er da også fra 1938.

Beviser understøtter elevernes matematiske problemløsningskompetence
Denne begrundelse er en "ren" lærerbegrundelse. De danske lærere mener, at eleverne via at beskæftige sig med beviser, forbedrer deres matematiske problemløsningskompetence. Erfaringer med at forstå beviser gør eleverne til bedre problemløsere, fordi de her gør sig erfaringer med at skulle sætte sig ind i abstrakte problemstillinger og argumenter. Nogle mener desuden, at beviser virker selvtillidsskabende: Eleverne gør sig erfaringer med at "svært stof" med træning og tilvænning kan vise sig at være tilgængeligt. Det er noget de har gavn af i problemløsnings-situationer, hvor problemets løsning umiddelbart kan forekomme utilgængelig.

Begrundelser af æstetisk art
Man finder også, at beviser begrundes med *æstetikargumentet*, i [34], s. 91 defineret som: "Begrundelser, der er baseret på fascination af matematikkens indre skønhed og harmoni samt de oplevelser af umiddelbar glæde/personlig tilfredsstillelse, som løsning af et bestemt matematisk problem giver".

Dette har ligeledes karakter af at være en "ren" lærerbegrundelse. Beviser beskrives af nogle lærere som et element i matematikundervisningen, der er eksempler på "smuk og smart" matematik. Mere konkret fremhæves geniale/smarte bevisideer og en elegant argumentation/logik og at matematik er et "rent" fag, hvor de påstande, der fremsættes er indiskutable og rigtige i kraft af, at der findes beviser for dem. Man kan som lærer ønske sig, at også eleverne oplever beviser - og dermed også matematik - som "smukt og smart". Gennemgående mener lærerne dog ikke, at man kan bruge æstetikbegrundelser alene som argument for at have beviser i matematikundervisningen. Først og fremmest, fordi det kun er en begrænset gruppe af elever, man kan håbe på oplever beviser som "smukke".

Beviser som studieforberedende
Man kan forstå "studieforberedende" som at matematikundervisningen indeholder studieforberedende matematik. Det kan være at man ønsker at matematikundervisningen skal indeholde bestemte discipliner. f.eks. differentialregning, fordi eleverne herigennem udvikler bestemte matematiske kompetencer og får matematisk viden, som de får brug for i et videre uddannelsesforløb [34], s. 21. Begrundelser af denne karakter er ligeledes noget, man kun finder hos lærerne.

Nu er beviser ikke en bestemt matematisk disciplin, men noget der går på tværs af disciplinerne og argumentet er derfor mere generelt. Matematikundervisningen på gymnasieniveauet skal indeholde beviser, fordi det er noget nogle elever vil møde på matematikkurser på videregående uddannelser og man sikrer ved at inddrage beviser i matematikundervisningen, at eleverne har stiftet bekendtskab med *fænomenet* beviser. Nogle mener ligefrem, at man giver eleverne et indtryk af, hvad højere matematik "går ud på", dvs hvilke krav der stilles og hvad man skal synes er spændende.

Hverken de danske eller new zealandske lærere anser begrundelsen for at være central, hvilket nok mest hænger sammen med, at begge grupper - ganske vist på højst forskellig vis - søger at tilrettelægge en undervisning, der retter sig mod alle elever og ikke kun de dygtigste eller specielt interesserede.

Herudover finder man også den mere snævre begrundelse: Kommende professionelle matematikere får brug for at kunne *føre* beviser og kendskab til "færdige" beviser er en forudsætning for at kunne lære at føre beviser.

Beviset har særlige signalværdier
Dette vil jeg gerne adskille fra repræsentativitetsbegrundelser, fordi "signalværdi-begrundelser" ikke forudsætter detalje-forståelse - eller måske rettere: forståelse af argumentet i beviset. Også dette er en "ren" lærerbegrundelse.

Der er f.eks. tale om signalværdi-begrundelser, når beviser begrundes med, at eleverne kan "se", at der er en forbindelse mellem begreber, antagelser og sætninger, men ikke nødvendigvis hvori forbindelsen består. Det gør sig også gældende, når det fremhæves, at beviser signalerer, at man i matematik såvel som i andre fag skal argumentere for sine påstande. Endelig kan man også anse den meget generelle begrundelse med at beviser er en central del af matematikken og at eleverne skal præsenteres for beviser uanset, om de forstår dem eller ej, for at være en signalværdi-begrundelse.

Signalværdi-begrundelser giver rum for, at der ikke nødvendigvis stilles krav til eleverne om, at de skal forstå *argumenterne* i beviserne i matematikundervisningen[1] og at beviser er vigtige i kraft af deres blotte tilstedeværelse i matematikundervisningen.

Repræsentativitetsbegrundelser

Beviser fremhæves af lærerne som repræsentative i to henseender. Visse beviser anses for at være gode eksempler på forskellige former for logik, som er karakteristiske for matematikfaget. Det er ikke nødvendigvis formaldannende, dvs det er ikke sikkert, at eleverne lærer selv at tænke sådan, men de skal stifte bekendtskab med eksempler på ikke-dagligdags logikker, som f.eks. logikken i et modstridsbevis. Et "sådan kan man også tænke" illustration. Det fremhæves også af nogle lærere, at beviser i nogle situationer - det er især produktreglen, der fremhæves - repræsenterer beviset i dets klassiske rolle, dvs som forbindelsesled mellem antagelser og den endelige sætning.

I nogle artikler i litteraturen finder man en noget anden vinkel: Matematikundervisningen skal afspejle "matematisk praksis" og derfor skal de centrale aktiviteter og træk ved matematisk praksis søges afspejlet i undervisningen. Her er det især beviser som kommunikationsmiddel, dvs som en måde at formidle matematiske ideer og argumenter på, der fremhæves. Eleverne skal opleve, at beviser faktisk kan spille den rolle.

Endelig finder man i [22] forestillingen om, at det at studere beviser kan udgøre eksempler på slutproduktet af bevisførelsesprocessen. Eleverne kan via studiet af "færdige" beviser udvikle deres bevisbegreb og skaffe sig forudsætninger for selv at bevise sætninger.

Beviser giver indsigt i den matematiske struktur, de er en del af

De fleste af lærerne mener, at nogle beviser kan forklare eleverne "hvor formlen kommer fra" og som sådan kan virke som en *forklaring*. På den måde undgår man at sætningen sætning fremstår ubegrundet. Samtidig giver man eleverne en oplevelse af en lokal matematisk struktur, fordi eleven kan se sammenhængen mellem antagelserne, egenskaberne ved de matematiske begreber og sætninger, der er i anvendelse.

I litteraturen er det først og fremmest beviset som forklaring, der lægges vægt på. Men i modsætning til hos lærerne udpeges der i nogle artikler bestemte beviser, der anses for at være forklarende og det forsøges analyseret, hvorfor de er det. Der skelnes mellem "beviser-der-beviser" og "beviser-der-forklarer" i blandt andet [29]. Beviser-der-beviser er formelt korrekte, men det argument, der tages i brug i beviset, er ikke nødvendigvis gennemskueligt og gør det ikke nødvendigvis klart for læseren, hvorfor sætningen må være sand. I "beviser-der-forklarer" er argumentet derimod - udover at være korrekt - gennemskueligt og

[1] Dette er ikke det samme som at de ikke skal forstå beviser overhovedet. Som jeg vil komme ind på lidt senere, så er det at forstå argumentet i beviset kun en del af det at forstå et bevis.

oplysende. Jeg ser det som en erkendelse af, at formålet med beviser i matematikundervisningen ikke er at overbevise eleven om sætningens rigtighed, men derimod at overbevise eleven om argumentets rigtighed.

5.2.2 Hvorfor der - som jeg ser det - skal være beviser i matematikundervisningen

Som jeg har været inde på, så finder jeg ikke, at de begrundelser, jeg er stødt på, er fyldestgørende. Måske kan jeg bedst udtrykke det, som at jeg ikke anser dem for at være egentlige begrundelser, dvs mente begrundelser.

Selv mener jeg, at beviser er relevante og nødvendige i matematikundervisningen, da (1) Arbejdet med nogle beviser giver eleverne nogle erfaringer med matematik, der giver dem indsigter i, hvad matematikfaget er og "kan" (2) Fordi beviser ikke altid kan erstattes af plausibilitetsbetragtninger, hvis eleverne skal have en tilstrækkelig dyb forståelse af de matematiske sætninger, når det drejer sig om påstande, der angår uendelig mange elementer (3) Fordi en forståelse af eksempler på anvendelser af matematik ikke er komplet uden en forståelse for beviserne for de anvendte sætninger i de tilfælde, hvor det er utilstrækkeligt at basere modellens konklusioner på empirisk evidens.

Når jeg i det følgende omtaler plausibilitetsbetragtninger, så mener jeg betragtninger, der giver anledning til at eleverne føler sig overbevist om en sætnings rigtighed. Det kan f.eks. være tegninger, målinger af geometriske konstruktioner og taleksempler. Et eksempel på en plausibilitetsbetragtning er, at man på baggrund af en række målinger på vinklerne i forskellige trekanter, konkluderer at vinkelsummen i en trekant er 180 grader.

Beviser er vigtige i en matematikundervisning, der har til formål at give eleverne et billede af "faget matematik"

Mit syn på hvad formålet med beviser er i matematikundervisningen er præget af, at jeg mener, at matematikundervisningen skal give eleverne repræsentative erfaringer med forskellige sider af matematikfaget og at beviser besidder træk, der er unikke.

Som jeg allerede har været inde på i første del af konklusionen, så er beviser for eksistens- og umulighedssætninger gode eksempler på, hvad matematikfaget "kan" til forskel fra andre fag og jeg mener altså at en af grundene til at undervise i beviser er, at man giver eleverne adgang til at gøre sig erfaringer med, at man i beviser til forskel fra andre fag har mulighed for at godtgøre påstande på anden vis.

Det er imidlertid ikke den eneste repræsentative værdi, jeg anser beviser for at have. Der er en kategori af beviser, der har en berettigelse i kraft af at være beviser for "nære" hvis-så-sætninger, det vil sige sætninger, der følger umiddelbart af de begreber og definitioner, man arbejder med. Her forbinder beviset begreber, definitioner og sætninger. Beviser for "nære" hvis-så-sætninger kan altså bruges til at illustrere det lokalt-deduktive aspekt af matematikken og til at illustrere et trin i opbygningen af en matematisk teoribygning. Denne type beviser forklarer, hvorfor "formlen ser ud som den gør" og giver eleven indsigt i, hvorfor sætningen rigtig. Beviset for produktreglen er et eksempel på sådan en sætning, da produktreglen jo følger umiddelbart af definitionen på en differentialkvotient med forholdsvis få, simple regninger.

Beviser kan ikke altid erstattes af plausibilitetsbetragtninger
Plausibilitetsbetragtninger gives - eller udvikles af eleverne selv - med det formål, at de overbeviser sig om rigtigheden af en matematisk sætning. For mig at se, er det en del af at få en matematisk sætning til at give mening. Man har forstået den "intuitivt".

Plausibilitetsbetragtninger kan - måske undtaget de tilfælde, hvor der er tale om kontraintuitive sætninger - være bedre til at overbevise eleverne om gyldigheden af en sætning, end beviset for sætningen. Beviser *supplerer* derfor, som jeg ser det, i nogle tilfælde elevens forståelse af en sætning. Det gør de, fordi eleven i nogle situationer får bedre mulighed for at forstå sætningens rækkevidde.

Det er - vil jeg hævde - først når man ser et bevis for at vinkelsummen i en plan trekant er 180 grader - og har overbevist sig om, at det kun trækker på egenskaber alle trekanter har - at man kan forstå *rækkevidden* af sætningen: At det *ikke* er muligt at konstruere plane trekanter, der har en vinkelsum forskellig fra 180 grader. Plausibilitetsbetragtninger - her i form af trekantsmålinger - kan nok godtgøre, at plane trekanter sandsynligvis har vinkelsummen 180 (og at den matematiske trekantsmodel er en "god model" for fysiske trekanter), men det er ikke helt så indlysende, at det er umuligt at konstruere en trekant, der har en vinkelsum forskellig fra 180 grader.

Beviser har betydning for elevens forståelse af anvendelser af matematik
Når man taler om anvendt matematik i matematikundervisningen, kan man dels tænke på, at (1) eleverne præsenteres for eksempler på anvendt matematik, dvs for matematiske modeller, (2) at eleverne *selv* anvender matematik i (simple) modelbygnings-situationer.

I det første tilfælde mener jeg, at når eleven får indsigt i det eller de beviser, der er basis for modellens konklusioner, så kan det på afgørende vis bidrage til elevens forståelse af modellen og dens rækkevidde.

Lad mig vende tilbage til eksemplet med formlen for kapitalfremskrivning fra rentesregningen $K_n = K_0(1+r)^n$, hvor K_0 er startkapitalen, K_n er slutkapitalen, r er rentefoden pr. termin og n er antallet af terminer. Beviset kan ses som et redskab til at kunne huske og fortolke sætningen: Hvordan er det nu antallet af terminer skal tælles - Skal man starte optællingen ved terminens start eller slutning? Hvornår opgøres kapitalen: i starten eller slutningen af en termin? Sætningen og det tilhørende bevis er for mig et også et eksempel på, at eleverne vil have glæde af at se et bevis for sætningen for at kunne forstå, hvordan modellen valideres. Her vurderer man netop ikke modellen eller dens konklusioner på basis af empiriske data - man sætter sig ikke ned og venter et antal år og ser efter, hvad beløbet i banken er vokset til. Det er beviset for at K_0 efter n terminer er vokset til $K = K_0(1+r)^n$, der er det grundlag, modellen valideres på.

Hvis man vælger blot at sandsynliggøre formlen ved at foretage en generalisering af observationerne: ved 1 termin vokser K_0 til $K_0(1+r)$, ved 2 terminer til $K_0(1+r)^2$, så får man ikke garanteret, at sætningen er sand for et hvilket som helst n. Der må et bevis - f.eks. et induktionsbevis - til. Mekanismen i generaliseringen er dog her tæt på at være selve beviset. En forståelse af beviset kræver dels, at man forstår hvorfor man ganger med $1 + r$ for at fremskrive kapitalen hver termin. Dels at man forstår, at man ved herefter at gange med $1 + r$ et passende antal gange kan opnå at få kapitalen efter n terminer. I modsætning til plausibilitetsbetragtninger, hvor man man f.eks. argumenterer udfra konkrete beløb og et konkret antal terminer, giver forståelse af selve beviset eleven adgang til den fulde indsigt i på hvilket grundlag de konklusioner, man drager på basis af modellen, kan siges at være sande.

En anden situation opstår, når eleverne selv anvender matematik. "Anvender" skal her forstås som at eleverne gør brug af kendte matematiske sætninger og begreber i (simple) modelbygningssituationer, hvor empiriske data ikke udgør et tilstrækkeligt grundlag til at validere modellens konklusioner. At de anvendte sætninger vides at være beviste - og at eleven forstår betydningen af det, er afgørende for, at eleven forstår, om modellen er "god nok" matematisk set og at det, når der ikke er adgang til data, er den eneste mulighed, man har for at sikre sig, at de konklusioner man drager på grundlag af modellen er rimelige.

Et simpelt eksempel er, at man beder eleverne om at opstille en funktionsforskrift, der beskriver omkostninger og omsætning som funktion af prissætningen på en vare og herefter optimere profitten. Man kan selvfølgelig afprøve dette i praksis, men tilliden til at konklusionen mht til hvilken pris, der er den optimale vil - indtil andet er prøvet - afhænge af, at det er rigtigt at det maksimum man finder rent faktisk er et maksimum - og tilliden til modellens konklusioner baseres altså på, at modellens konklusioner er draget på et matematisk korrekt grundlag.

Afrunding

Jeg mener først og fremmest man skal undervise i beviser både fordi beviser besidder træk, der er karakteristiske for matematik som fag og er unikke, men altså også fordi beviser kan bidrage til forståelsen af anvendt matematik og have betydning, når elever selv vurderer egen anvendelse af matematik i modelbygnings-situationer. Heri adskiller mit eget bud sig meget fra de bud, der er givet i litteraturen og af lærerne, hvis begrundelser er af anden art.

5.2.3 Overblik over begrundelser, man kan give for at undervise i bevisførelse

Også her vil jeg forholde de begrundelser, jeg er stødt på for at inddrage bevisførelse i matematikundervisningen til begrundelser, der generelt er givet for overhovedet at undervise i matematik.

De begrundelser man støder på, falder som jeg ser det i følgende kategorier: (1) Begrundelser baseret på, at bevisførelsesaktiviteter er studieforberedende. (2) Signalværdibegrundelser, dvs at bevisførelse i matematikundervisningen skal give eleverne indsigt i bevisførelsesprocessen uden at det er et mål at eleverne bliver i stand til selvstændigt at gennemføre en bevisførelsesproces. (3) Beviser og bevisførelse er to sider af samme sag. (4) Begrundelser baseret på, at bevisførelse er så tæt knyttet til problemløsning, at bevisførelseskompetencen er uløseligt knyttet til evnen til at løse matematiske problemer.

Begrundelser baseret på studieforberedende hensyn
Dette er en begrundelse, man kun ser fremsat af nogle lærere: Bevisførelse i matematikundervisningen er forbeholdt de dygtigste elever, der senere skal være kommende professionelle matematikere.

Signalværdibegrundelser
Nogle lærere forestiller sig, at eleverne får en bedre forståelse af "færdige" beviser ved selv at forsøge sig med at føre beviser. Sådan en forståelse kan bestå i, at eleverne får en ide om, at beviser har en historie og at andres tankearbejde og overvejelser omkring, hvordan man skal argumentere for sætningen ligger til grund for det "færdige" bevis. Dette er på sin vis en "signalværdi-begrundelse", da det ikke nødvendigvis implicerer andet end at eleverne forsøger sig med at føre beviser. Vægten lægges ikke på, at det rent faktisk lykkes eleverne selvstændigt at gennemføre processen.

Dette finder man også i, at eleverne skal have en ide om, hvad vil det sige at føre et bevis og altså har en ide om de enkelte elementer i bevisførelsesprocessen.

Beviser og bevisførelse er to sider af samme sag
At bevisførelse og beviser naturligt hører sammen og at man så at sige ikke kan have beviser i matematikundervisningen uden også at have bevisførelse er en forestilling, man indirekte finder artikuleret i litteraturen. Det ser man hos Daniel Alibert [1], hvis undervisningsmetode jo netop baserer sig på, at eleverne selv opstiller og beviser sætninger og altså selv udvikler beviser. Bevisførelse hører her naturligt hjemme i matematikundervisningen som led i at argumentere for de sætninger, man opstiller.

Bevisførelse er en kompetence eleverne skal udvikle for at blive gode problemløsere
I de artikler, der behandler forholdet mellem problemløsning og bevisførelse argumenteres der for at bevisførelseskompetence er en nødvendig evne at besidde, hvis man skal være en god problemløser. Bevisførelse er en nødvendig

kompetence, fordi en væsentlig del af at løse matematiske problemer er at argumentere for, at den løsning, man er nået frem til nu også er god nok og at der ikke er flere løsninger, end dem man har fundet frem til. Det sidste gør sig gældende i polygonopgaven (se s. 61), hvor man skal argumentere for at en trekant og en firkant, der er delt side-til-side er løsninger, men også at de er de eneste løsninger.

5.2.4 Hvorfor der - som jeg ser det - skal være bevisførelse i matematikundervisningen

De begrundelser, der fremkommer her, har karakter af at være supplerende. Jeg er ikke specielt uenig med de begrundelser, man finder hos lærerne eller i litteraturen, men jeg finder dem ikke udtømmende. Der er mere at sige om sagen.

For mig at se er et hovedformål med at have bevisførelse i matematikundervisningen, at man udvikler elevernes evne til at kommunikere indenfor det matematiske univers; forklare og forsvare deres ideer til såvel løsning af problemer, såvel som i en diskussion af om egne eller andres hypoteser er sande/falske.

Samtidig mener jeg, at de krav man i den sammenhæng stiller til eleverne, adskiller sig meget fra de krav, man ellers stiller til dem. Dermed giver de også adgang til, at eleverne erhverver sig nogle andre typer erfaringer med at arbejde med matematik. En ting, der er helt unik ved bevisførelsesprocessen i forhold til de andre elementer i matematikundervisningen er, at eleven bliver tvunget til selv at udvikle en beviside der "virker" og en strategi for at gennemføre den. At eleven lærer at håndtere sådan en situation tror jeg giver en selvtillid, der er vigtig.

Samtidig er der tale om, at der typisk er mange forskellige måder hvorpå man kan gennemføre et bevis. Derfor vil eleverne ikke få en oplevelse af at "opfinde den dybe tallerken een gang til", en oplevelse man måske ellers godt kan beskylde megen matematikundervisning for at give. Jeg tror også, at man tilfører problemløsningsprocessen en ekstra dimension. Eleverne vil ikke blot opnå tilfredsstillelsen ved at finde løsningen, men også tilfredsstillelsen ved at vide, at løsningen er rigtig og vide hvorfor den er det.

Herudover tror jeg også, at eleverne kan opnå en bedre forståelse af, hvorfor beviser er nødvendige, hvis de bevisførelsesopgaver, de gør sig erfaringer med gør, at de oplever verifikationsproblematikken på egen krop og skal søge at vise - eller modbevise - sætninger, som de faktisk ikke ved om er sande eller falske. Jeg mener også, at eleverne tænker mere aktivt over de matematiske begreber, når de selv forsøger at føre beviser og at bevisførelse på den vis er et endnu bedre redskab til at tænke over de matematiske begreber end opgaveregning, hvor man "bare" skal finde frem til løsningen.

5.3 Muligheder for at undervise i beviser og bevisførelse

5.3.1 Lærernes og litteraturens bidrag til diskussionen af muligheden for at have beviser i matematikundervisningen

Lærernes udtalelser bidrager, som jeg tidligere har været inde på ikke med noget afgørende materiale til mulighedsdiskussionen.

Litteraturen bidrager først og fremmest til diskussionen af muligheden for at undervise i beviser med studier af de vanskeligheder eleverne møder, når de søger at forstå beviser.

I de artikler hvor der foreslås alternative måder at gribe beviser an på i matematikundervisningen og peges på faktorer, der vanskeliggør elevernes forståelse af beviser [37], [9] er grundantagelsen, at beviser godt kan give mening i matematikundervisningen, forudsat at man tilrettelægger undervisningen, så man forsøger at imødegå de vanskeligheder eleverne har med at forstå beviserne.

5.3.2 Muligheden for at have beviser i matematikundervisningen set fra mit synspunkt

Hvad vil det sige at forstå et bevis?

En ting, der vanskeliggør diskussionen, er manglen på overvejelser omkring, hvad det egentlig indebærer at forstå et bevis. Dermed er det ikke formuleret, hvad det er man forestiller sig eleverne skal kunne. Der er et enkelt bud i litteraturen på, hvad man skal forstå ved at forstå et bevis [22], men jeg finder det utilstrækkeligt. Det bliver dermed min opgave at gøre forsøget, som jeg har kunne hente en del inspiration til rundt omkring i litteraturen. Dels i beskrivelser af forståelsesvanskeligheder beviser kan give anledning til og dels tiltag, der skulle gøre det lettere for eleverne at tilegne sig beviser.

For at "forstå" et bevis skal man:

1. Have en forståelse af, hvad det er for en type påstand, der søges godtgjort og altså kunne gennemskue, om der f.eks. er tale om en eksistens- eller umuligheds-sætning. Man skal ligeledes have forstået, hvad sætningen bidrager med af ny information til det emneområde, den ligger indenfor.

2. Kende til og forstå sætningens antagelser og forstå bevisideen, dvs den eller de ideer, der gør at beviset kan gennemføres.

3. Have en forståelse af bevisets logiske struktur.

4. Have en forståelse af samspillet mellem detaljerne i beviset og bevisideen.

5. Føle sig overbevist om argumentets rigtighed og at yderligere tiltag ikke er nødvendige for at godtgøre sætningen.

Lad mig illustrere det med en af mine eksempel-sætninger: At $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal.

Punkt 1:
Her skal man kunne gennemskue, at der er tale om et bevis for en umulighedssætning: Det er ikke muligt at skrive $\sqrt{2}$ som en brøk af to heltal. Det er overraskende i og med, at man kunne tro, at man indenfor de uendelig mange rationale tals univers kunne finde et tal, der beskriver længden af diagonalen i et kvadrat med sidelængderne 1.

Punkt 2 & 3:
Man antager i beviset, at der findes to heltal m og n, således at $(\frac{m}{n})^2 = 2$ og at $\frac{m}{n}$ er en uforkortelig brøk. Bevis-ideen består i, at man viser, at m og n begge må være lige og at $\frac{m}{n}$ altså er forkortelig: en modstrid, som konsekvens af at $(\frac{m}{n})^2 = 2$. For at kunne se, hvorfor det fører til at man kan konkludere, at man altså ikke kan skrive $\sqrt{2}$ som en brøk af to heltal, skal man have forstået logikken i et modstridsbevis. At hvis en påstand giver anledning til en modstrid med noget kendt, så må den negerede påstand være gældende.

Punkt 4:
Indsigt i samspillet mellem bevis-ideen og detaljerne i beviset[2] kan man f.eks. få ved at se på beviset som en række niveauer, hvor der gradvist inddrages flere detaljer.

På den øverste niveau (kasse 1) har man bevisideen formuleret. På det næste niveau (kasse 2) begynder man så på at gennemføre bevisideen: En måde at vise, at $\frac{m}{n}$ er forkortelig, er at vise at både m og n er lige tal, som konsekvens af at $(\frac{m}{n})^2 = 2$.

På niveau 3 (kasse 3) manipulerer man med ligningen, således at man ved brug af definitionen på et lige tal kan se, at m^2 er et lige tal.

På niveau 4 viser man (kasse 4) at når m^2 er lige, så medfører det at m er lige og at når m er lige kan $m = 2k$ og man kan herefter vise ved brug af de samme betragtning som i (a), at n også er lige (kasse 5).

[2] Jeg har her trukket på Leron's ide [37] om et "struktureret bevis", hvor man starter med bevisideen og derefter går i detaljer, netop for at man lettere kan se samspillet

(1) Vis at $\frac{m^2}{n^2} = 2$ medfører at $\frac{m}{n}$ kan forkortes og dermed medfører en modstrid

$\downarrow$

(2) Vis at m og n er lige

$\downarrow$

(3) Vis at $m^2 = 2n^2 \rightarrow$ m er lige

$\downarrow$

(4) Vis at m^2 lige $\rightarrow m$ lige

(5) $m = 2k$: $2n^2 = 4k^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2 \rightarrow n$ lige

Punkt 5:
Man vil efter at have forstået beviset vide, at forsøg på at identificere $\sqrt{2}$ med en brøk, aldrig vil lykkes.

Mulighederne for at have beviser i matematikundervisningen, som jeg ser det

Forudsætningen for at det er muligt at have beviser i matematikundervisningen er naturligvis, at eleverne kan bringes til at forstå dem. Mine overvejelser omkring, hvad det vil sige at forstå et bevis, synes jeg viser, at forståelsen af de enkelte dele af beviset og dets logiske struktur ganske vist er nødvendig, men det væsentligste er at forstå, *hvorfor* sætningen er værd at bevise og hvori bevisideen består.

Spørgsmålet er så, om det kan lade sig gøre, at få elever til at forstå beviser i min forstand. Jeg tror det, da hovedproblemet som jeg ser det, er at få eleven til at indse nødvendigheden af beviset. Det er noget, man som lærer kan gøre en hel del for at fremme i sin tilrettelæggelse af undervisningen - se her f.eks [44] - forudsat, at man selv som underviser kan se nødvendigheden af beviset. Hvis først eleven er motiveret for at sætte sig ind i beviset, så vil han/hun i mange tilfælde også være i stand til det. Samtidig tror jeg, det er vigtigt, at eleverne oplever at beviser giver mening til trods for de barrierer - som regel et "tungt" symbolsprog - der er.

Men at inddrage beviser i matematikundervisningen på en måde, der sikrer, at eleverne opnår en egentlig forståelse af dem, er umiddelbart meget tidkrævende. Spørgsmålet er, om man kan opnå en slags synergi-effekt, hvor eleverne efter at have forstået et antal beviser efterfølgende opnår samme forståelsesgrad af andre beviser i matematikundervisningen uden at det er helt så tidkrævende. Det er ikke et spørgsmål, jeg umiddelbart finder mig i stand til at besvare og som jeg derfor vil lade stå åbent.

Set fra mit synspunkt er der to ekstreme modeller, som man kan bruge som grundlag for at vælge i hvilket omfang beviser bør indgå i matematikundervisningen. Et valg, der vil afhænge af, i hvor høj grad man tror på det er muligt at inddrage beviser. Det er naturligvis ikke sådan, at alle beviser er tilgængelige for alle elever - heller ikke alle de beviser, der knytter sig til sætningerne i gymnasiepensummet. Nogle beviser trækker på matematiske begreber og sætninger, som eleverne (endnu) ikke har indsigt i.

I den ene ende af skalaen finder man "alt skal bevises"-modellen. Der skal være egentlige beviser for samtlige sætninger, der indgår i matematikundervisningen og de sætninger, hvis beviser tydeligvis er for komplicerede, vil så optræde som aksiomer.

I den anden ende af skalaen finder man "minimal-modellen". Udgangspunktet er her, at man skal have så få beviser som det er muligt, men ønsker at sikre at beviser indgår i et sådant omfang, at undervisningen stadigvæk er repræsentativ. Set fra dette synspunkt kan man her nøjes med at præsentere eleverne for et eksempel på et bevis for en umulighedssætning, et bevis for en eksistenssætning, der ikke kan verificeres empirisk, et bevis for en "nær" hvis-så-sætning. Hertil kommer et eller flere beviser for sætninger, der bruges som grundlag for at drage konklusioner i en matematisk model, hvor empirisk verifikation er utilstrækkelig til at man stole på konklusionerne.

Som jeg ser det, så har man i gymnasiematematikken i Danmark i dag valgt en mellemvej, hvor man i nogle tilfælde helt undlader at bevise visse sætninger, som man tidligere har valgt at føre egentlige beviser for. Mange af argumenterne er desuden semi-beviser, dvs at man argumenterer for en sætning i det omfang, elevernes matematiske forudsætninger tillader det. I [4] findes et bevis for formlen for toppunktet af en parabel, som bygger på den ændring, forskriften for en parabel med toppunkt i (0,0) undergår, når den forskydes vilkårligt i x- og y-aksens retning. At en forskrift for en funktion af en variabel ved en forskydning, s, af funktionens graf i x-aksens retning ændres til f(x-s) og ved en forskydning t i y-aksens ændres til f(x)+t, argumenteres der for med plausibilitetsbetragtninger. Det burde man ud fra et "alt skal bevises"-synspunkt også bevise, men eleverne har ikke på dette niveau (HF tilvalgsfag) den matematiske viden til at man kan gøre det.

Argumentet for at vælge en "alt-skal-bevises model" er, at man dermed markerer - og eleverne ideelt set vænner sig til og får forståelse for - at man i matematik argumenterer for de påstande, man fremsætter. At gennemføre modellen i praksis kræver imidlertid, at man bruger så meget tid på hvert enkelt bevis, at eleverne forstår dem og med både lang tid til det enkelte bevis og mange beviser kræver det, at man anser beviser for at være et element i matematikundervisningen, som det er værd at bruge meget tid på. Hvis man blot vælger ikke at gøre så meget ud af det enkelte bevis havner man i den situation, at eleverne ikke oplever, beviserne giver mening.

Minimal-modellen giver anledning til overvejelser omkring, hvor mange eksempler, der skal til, for at eleverne får et indtryk af bevisets rolle og funktion i matematikken. Den rejser også spørgsmålet om, hvad man skal gøre ved de sætninger, man vælger ikke at bevise. Set fra mit synspunkt er det under alle omstændigheder nødvendigt at gøre brug af plausibilitetsbetragtninger for at sandsynliggøre sætningerne. Omkostningen ved minimalmodellen er, at eleverne ikke får understreget, at det er nødvendigt at bevise samtlige sætninger i matematikken og måske især at de få beviser, de faktisk møder, fremstår som et isoleret element og ikke som et centralt element i matematikfaget.

Ingen af modellerne er i en ren form realistiske og jeg finder ikke, at kompromiset med at erstatte nogle egentlige beviser med semibeviser er ønskeligt. Blandt andet fordi man så skal lære eleverne at skelne mellem egentlige beviser og semibeviser og man risikerer, at eleverne får deres opfattelse af, hvad man skal forstå ved et bevis, forplumret. Selv hælder jeg til til en variant af "alt-skal-bevises"-modellen under forudsætning af, at man har et forholdsvis lille pensum. Jeg mener det er vigtigt at vælge de beviser fra, som eleverne tydeligvis ikke har de matematiske forudsætninger for at forstå, men jeg mener ikke, at der reelt er særlig mange beviser, der er af den type, så tror jeg det er muligt - hvis man bruger tid nok på det - at hjælpe eleverne til at forstå de fleste beviser.

Der er selvfølgelig omkostninger ved at have et lille pensum, men spørgsmålet er, hvad man anser for målet med matematikundervisningen. Hvis det er, at eleverne skal have kendskab til en række matematiske discipliner, så skal pensum være af et vist omfang. Er målet - og det mener jeg, det bør være - at udvikle elevernes matematiske forståelse, så de dels behersker det pensum, de har været igennem på et højt niveau og dels at de får gode forudsætninger for at tilegne sig anden matematik, så er det ikke nødvendigvis et stort pensum, der er løsenet. I forhold til at have beviser i matematikundervisningen betyder det, at de beviser, man vælger at inddrage skal være nogle eleverne forstår og at eleverne skal kunne sætte sig ind i andre beviser efterfølgende. Når man ikke bare kan "nøjes" med ganske få beviser til det formål, er det fordi eleverne så ikke når at gøre sig den erfaring, at beviser er noget, det er muligt at få til at give mening og de ikke får tilstrækkelig træning i selv at forstå dem.

5.3.3 Lærernes og litteraturens bidrag til diskussionen af muligheden for at have bevisførelse i matematikundervisningen

Heller ikke her bidrager lærerne i nogen særlig grad. Det konstateres blot af de new zealandske lærere, at det ikke er muligt at have bevisførelse i matematikundervisningen, hvis man undtager de dygtigste elever - men der argumenteres ikke for det. De danske lærere mener nok, at eleverne kan føre beviser i simple situationer, men argumenterer heller ikke for det. For begge parter gælder, at diskussionen har et noget hypotetisk præg - bevisførelsesaktiviteter indgår enten slet ikke eller i meget ringe omfang i matematikundervisningen.

Hvis vi ser på litteraturen - der ganske vist er noget sparsom på dette punkt - så finder man undersøgelser, der tyder på, at det er muligt at få elever til at føre beviser også på lavere niveauer end gymnasieniveauet, hvis man er villig til at prioritere det i undervisningen.

I [12] finder man en bemærkning om, at det tilsyneladende er muligt at inddrage bevisførelse i matematikundervisningen på en sådan måde, at elever på selv folkeskole-niveauet er i stand til at fremsætte og bevise matematiske sætninger. Tesen synes her at være, at motivations- og tidsfaktoren er afgørende for elevernes evne for at være i stand til at gennemføre bevisførelsesprocessen.

5.3.4 Muligheder for at have bevisførelse i matematikundervisningen som jeg ser det

Selv hæfter jeg mig ved, at motivationsfaktoren tilsyneladende har stor betydning for elevernes evne til at gennemføre et bevis og at det det tilsyneladende ikke er så afgørende, hvilket niveau man fører beviser på, så længe man på "lave" niveauer accepterer argumenter, der er ikke er meget formelle. Jeg må på basis af litteraturen konkludere, at de vanskeligheder, der er forbundet med at gennemføre en bevisførelsesproces, tilsyneladende er til at overkomme.

I den sammenhæng mener jeg, at man ikke skal undervurdere *mundtlig bevisførelse*, hvor eleverne gennemfører bevisførelsesprocessen i samspil med hinanden og en lærer. Læreren og de andre elever er hele tiden til stede og kan hjælpe med at bedømme de argumenter, der kommer frem. Derfor letter en "kollektiv" bevisførelse processen. Det er måske en mulighed for at gennemføre sværere beviser og færre problemer med at gøre brug af matematisk formalisme.

Omkostningerne ved at have bevisførelse i matematikundervisningen vil være tilstedeværelsen af et element, der kræver tid og måske reelt en reduktion i pensum-mængden. Det gælder f.eks. hvis man ønsker at gøre brug af Alibert's "videnskabelige debat"-metode, for man når selvfølgelig igennem mindre stof-ihvertfald i begyndelsen - hvis eleverne selv skal udvikle nogle af beviserne og selv fremsætte sætninger som led i stofgennemgangen.

Jeg mener under alle omstændigheder, at en pensumreduktion er en forudsætning, da det ikke er tilstrækkeligt, at eleverne i enkeltstående tilfælde forsøger sig med bevisførelse. Eleverne bliver mødt med nogle nye krav og en af pointerne er, at de når at opleve, at de godt kan opfylde dem. Man kan dog her indvende, at hvis eleverne i en tidligere matematikundervisning havde gjort sig erfaring med bevisførelse, så er bevisførelse på gymnasieniveauet mere et spørgsmål om at vænne eleverne til at argumentere mere formelt.

5.4 Nogle betragtninger om mit udbytte af specialearbejdet

Man kan sige, at jeg i udgangspunktet havde nogle lidt naive forestillinger om såvel begrundelser for, såvel som mulighederne for at have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Her vil jeg søge at formulere, hvilke ændringer der er sket. Herefter vil jeg kort trække op, hvilke opgaver jeg har løst i forbindelse med specialearbejde og på hvilken måde de har været lette/svære at arbejde med.

Ny indsigter

Hvis vi starter med de indsigter, jeg har fået i forbindelse med beviser i matematikundervisningen, så var et af mine udgangspunkter en undren over, hvorfor det didaktisk set ikke er tilstrækkeligt med plausibilitetsbetragtninger til at sandsynliggøre påstande i matematikundervisningen. Jeg har set - og selv givet eksempler på - at beviser videnskabsteoretisk set er plausibilitetsbetragtninger overlegne i forhold til at godtgøre påstande og arbejdet med projektet har givet mig anledning til at indse, at matematik er et fag karakteriseret ved, at man har mulighed for med fuldstændig sikkerhed at godtgøre påstande og at dette er fagets styrke i forhold til andre fag, hvor man netop kun har adgang til plausibilitetsbetragtninger. Samtidig har jeg overvejet, at det faktisk har betydning for elevernes evne til især at forstå eksempler på anvendt matematik, at de er i stand til at forstå beviser.

Samtidig har jeg fået en forståelse af, hvorfor man i matematikundervisningen umiddelbart kan fristes til at erstatte beviser med plausibilitetsbetragtninger: En af de ting, man ønsker at opnå er at få sætningerne i matematikundervisningen til at give mening for eleverne og altså blandt andet at overbevise dem om, at de er rimelige. Til dette formål er plausibilitetsbetragtninger i de fleste tilfælde tilstrækkelige. Jeg har også fået en forståelse af, hvorfor plausibilitetsbetragtninger ikke er nok og at beviser og plausibilitetsbetragtninger er to elementer i matematikundervisningen, der i de fleste tilfælde har to forskellige formål og derfor supplerer hinanden.

Jeg har også fået klarhed over, at der er en forbindelse mellem beviser og anvendt matematik. Beviser er ikke et rent teoretisk og "ren matematik"-anliggende i matematikundervisningen, men har i nogle situationer betydning, når man skal forstå eksempler på anvendelse af matematik og selv skal anvende matematik.

I forhold til bevisførelse har jeg ændret opfattelse af, hvad det vil sige at have bevisførelse i matematikundervisningen og er stødt på det synspunkt at bevisførelse ikke nødvendigvis er en avanceret aktivitet forbeholdt de dygtigste og mest interesserede elever. Dette gælder både min opfattelse af, hvad man skal forstå ved bevisførelse - argumenter behøver ikke nødvendigvis at være symboltunge og formelle, men også min opfattelse af, om det er rimeligt at kræve af eleverne, at de fører beviser selv. Det er nok først og fremmest de - for mig - lidt overraskende resultater i litteraturen, der viser at elever selv på folkeskoleniveauet er i stand til føre uformelle beviser, der har gjort forskellen, men også den mere videnskabsteoretisk prægede indsigt: bevisførelse er en naturlig del af at formidle matematik og argumentere for sine påstande.

Min ændrede opfattelse har haft betydning for mit syn på forholdet mellem beviser og bevisførelse i matematikundervisningen. Jeg opfattede som udgangspunkt et kendskab til beviser som en forudsætning for, at man senere blev i stand til at gennemføre beviser selv. Jeg opfatter nu de to ting som selvstændige elementer i matematikundervisningen. Studiet af beviser som eksempler på bevisproduktet er ikke nær så essentielle - og måske ikke engang en forudsætning - for at lære at føre beviser selv. Der er det mere afgørende, at man prøver kræfter med selv at argumentere med passende råd og vejledning om, hvornår et argument kan siges at være godt nok.

Lette og svære elementer i specialearbejdet

Jeg undervejs tumlet med fire større opgaver 1) at indsamle, læse og analysere, hvad jeg håber er et - omend ikke komplet, så dog repræsentativt - udvalg af den nyere litteratur på feltet 2) at indsamle og analysere et empirisk materiale med henblik på at finde frem til underviseres syn på beviser og bevisførelse i matematikundervisningen og sammenhængen mellem dette og deres fagsyn. 3) at redegøre for bevisets videnskabsteoretiske status i forhold til at være repræsentativt for "faget matematik". 4) Selvstændigt at tage stilling til hvorfor man skal have beviser og bevisførelse i matematikundervisningen og om det er muligt at have det.

Den første opgave har især været lidt vanskelig, fordi klarheden i de fleste artikler på feltet lader noget tilbage at ønske. Det udbytte, jeg vil pege på, er da også en forståelse af, hvorfor de ikke er klare og dermed, hvorfor jeg selv har følt mig lidt skuffet under læsningen af dem. Måske kan mit forsøg på at forklare det bidrage til at andre også får en sådan forståelse.

Den anden opgave har egentlig - bortset fra at databehandlingen har udgjort et omfattende arbejde - været en, hvor jeg har følt, at jeg har fået meget foræerende, fordi kontrasterne mellem de danske og new zealandske læreres holdninger har været så tydelige til trods for at materialet er så forholdsvis lille. Jeg har med al ønskelig tydelighed fået demonstreret - det kan man vel kalde en slags sideudbytte - at undervisernes fagsyn i høj grad kan influere på, hvad de mener om konkrete elementer i matematikundervisningen og at forskelligt fagsyn giver anledning til forskellige holdninger og forskellig praksis.

Det er måske især den tredie opgave: at gøre rede for på hvilken måde beviser og bevisførelse kan siges at være repræsentative for særlige træk ved faget matematik, der har været den sværeste at løse. Som jeg har påpeget har der ikke været meget at hente i litteraturen og heller ikke hos lærerne og jeg har derfor været henvist til eget tankearbejde. Muligvis er disse træk så selvfølgelige, at de er underforståede i litteraturen - men jeg tror snarere, at der er tale om en mangel, som man godt kunne gøre meget mere ud af at udbedre, end jeg har fået gjort her. I forhold til især de danske læreres syn på formålet med matematikundervisningen: at eleverne skal erhverve sig indsigter i karakteristika ved "faget matematik" leverer sådanne overvejelser materiale til begrundelser for bevisers tilstedeværelse i matematikundervisningen. At have begrundelser og eksplicit kunne formulere dem er, som jeg ser det, fundamentet for at kunne undervise i beviser på en god måde.

Den fjerde opgave: selvstændigt at tage stilling til begrundelser og muligheder for at have beviser i matematikundervisningen, har måske mest været en vanskelig opgave fordi jeg med en naturvidenskabelig baggrund ikke er så vant til selvstændigt at skulle skabe egne synspunkter og argumentere for dem.

A Spørgeskema til de new zealandske lærere

Interview Questionnaire

The interview questionnaire is divided into three parts:

Part 1 In this section I will refer to some examples of proofs that could potentially be taught at 6th and 7th form level. I have given more or less formal versions of each of these and would like to discuss with you in which way they differ or are similar to the way you verify theorems at this level.

Part 2 Here you will find some examples of proving activities. I would like to discuss with you whether you think similar things can be found in mathematics teaching at 6th and 7th form level..

Part 3 Some questions of a more general nature.

Verifying theorems in the classroom

The questions in this section refer to proofs and arguments for 4 theorems. They are placed in the appendix to the interview questionnaire. I have given 2-3 arguments for each of the theorems. These range from being very informal arguments to arguments which in their nature are more like a formal proof.

It might be that you do not teach all of the example proofs. Just comment on the ones you actually do teach. The examples are

Ex 1 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	[Usually taught in the 7th form Statistics]
Ex 2 - Differentiation, the product rule	[Usually taught in the 7th form Calculus]
Ex 3 - Series, sum of uneven numbers	[Usually taught in the 7th form Calculus]
Ex 4 - $\sqrt{2}$ is an irrational number	[Usually taught in the 7th form Calculus]

2. Do you consider the theorem a mathematically important and interesting result? Why\why not?

3. Do you consider the proof of this theorem interesting for the students in itself?

4 Which of the factors listed below would you mention as reasons for proving or arguing for the theorem? If you have more than one - which is the more significant?

   a) The argument is in the textbook or a resource book
   b) The argument convinces the student of the truth of the theorem
   c) The argument explains to the student why the theorem is true
   d) Other reasons

5. How would you introduce the theorem?

6. Which one of the presented versions comes closest to the way you present the theorem?
Ex 1: Version 1 2 3 *Ex 2: Version 1 2 3*
Ex 3: Version 1 2 3 *Ex 4: Version 1 2*
(Please circle the preferred version)

7. In which way do you consider your argument for the theorem different? Is there:

a) More or less use of symbols and formal definitions
b) A longer or shorter argument
c) More or less extensive use of drawings and figures
d) More or less extensive use of number examples
e) Differences in other ways, please indicate:

8. Would you describe the version you present as a proof? Why/why not?

9. Would it make the formal versions more acceptable for you to teach if the words "theorem" and "proof" were removed from them? Why/why not?

10. Version 1 of the arguments (except for ex 4) is the theorem argued for by referring directly to a number example. If this version is the best one in your opinion: How come that you find the number example sufficient?

11. What is the difference between the way the theorem is presented in the textbook and the way you present it - if any? When you teach proofs or arguments for theorems, which other sources of inspiration than the textbook do you use, if any?

Proving activities

12. Below I have given some examples of different types of proving activities. Please indicate for each example if you make your students do similar activities in class and supply me with *examples* of such activities if you do.

a) *Type 1*: An exercise where the students are explicitly asked to prove a theorem and can do so by using definitions and rewriting the original expression.

"Show that $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z^2|}, z = x + iy$"

(Delta Mathematics p. 95)

b) *Type 2*: An example where proof by induction is required

"Prove this result by induction: $1^2+2^2+\ldots n^2=\frac{n(2n=1)(n+1)}{6}$ for all $n \in N$"

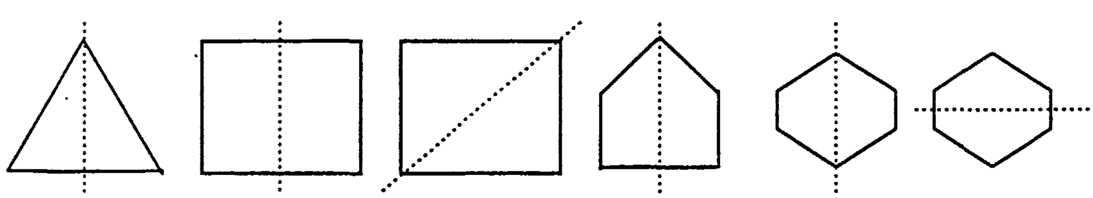
(Delta Mathematics p. 273)

c) *Type 3:* An example where the students refute a theorem by producing a coun terexample or an argument that show the theorem cannot possibly be true.

"Prove or refute that n^2-n+41 is prime for n = 0, 1, 2...."
(Mathematics in the New Zealand Curriculum p 162)

d) *Type 4:* An example where the students are not explicitly asked to prove any thing, but the students have to give a proof in order to solve the problem.

"Which n-polygons can be folded along a line as shown in the diagram so that the resulting polygon are n-polygons as well?"
(Revised version of a problem in J. Mason's "Thinking mathematically" p.196)



e) *Type 5:* An example where the students do a proof in order to understand the reasoning involved in a textbook proof.

"Prove as for √2 that√3 is irrational. Why does the proof break down if we try to show that √4 is irrational?"
(Delta Mathematics p. 83)

General questions

By "formal proof" I mean proofs that are explicitly termed "proof" in the textbooks.

13. Do you generally go over the formal proofs in the textbooks when you teach?

If you *do* is it among your main reasons that working with formal proofs:

a) The proofs is in the textbook and/or is part of the material you usually make use of in your teaching.
b) Enhances the students ability to follow logical deductions
c) Are necessary because proofs possesses features which are unique to mathematics as a subject
d) That the knowledge of proof and a feeling for what constitutes a correct mathematical argument is a useful and necessary tool in problem solving
e) Other reasons, please indicate them:

If you *do not* is it among your main reasons that working with formal proofs:

a) Is not relevant for the average student learning mathematics at 6th and 7th form level - only for the gifted students who might potentially study mathematics or related subjects.
b) Other activities (which?) are more rewarding for the student's understanding of mathematics.
c) Understanding of formal proofs is not required in the 6th form certificate exam and the bursary exam.
d) Other reasons, please indicate them:

14. Do you spend less time going over formal proofs now that you did previously? If so, what other activities have replaced this time?

15. Do you find that less emphasis is placed on proof, proving and rigor in the New Zealand mathematics teaching at 6th and 7th form level compared to when you started teaching? If so, do you find it a good or a bad thing?

16. Do you find that the new curriculum (the 1993 curriculum) places more or less emphasis on proof and proving than the previous one?

17. Why should students be exposed to proof and proving at all in your opinion?

Appendix

This appendix contains four proof examples each with theorems that could potentially be proved at 6th and 7th form level.

Example 1: Probability theory

If A and B are not disjoint then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

An introductory number example

All the versions of arguments/proofs for this theorem are preceded by this number example.

A dice game
Two dice are thrown. In order to get a point in this game you ought to have dice where you get

- A total of 10 or more
- or: throw a double

We would like to calculate the probability for getting a point throwing the dice once. Looking at the outcomes set up in a scheme it can be seen that there are 36 possible outcomes. We

	1	2	3	4	5	6
1	#					
2		#				
3			#			
4				#		*
5					* #	*
6				*	*	* #

observe that there are:

- 6 outcomes where the total score is 10 or more (*)
- 6 outcomes which are doubles (#)

However, as can be seen from the figure some of the outcomes are identical. The two outcomes (6,6), (5,5) are both doubles and with a score of 10 or more. As can be seen from the figure there are 10 different outcomes, which will give a point. Hence the probability of getting a point is: $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

The events: "the score is 10 or more" and "doubles" are not disjoint, that is, they have common outcomes. In order to find the probability of the two events we will have to take the common outcomes into account. Finding the probability of the two events individually: $\frac{6}{36} + \frac{6}{36}$ we count the two common outcomes twice - there are only 10 different outcomes. In order to calculate the correct probability we have to subtract the probability of the common outcomes: $\frac{2}{36}$. We can find the probability of getting a point as:

$$\frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{10}{36}$$

Version 1

In the number example we have two events: "the score is 10 or more" and "doubles". Terming these two events A and B what we wanted to do in the number example was to calculate $P(A \cup B)$. We had to subtract the probability of the common outcomes - this is $P(A \cap B)$ from the probability of the events $P(A)$ and $P(B)$. Hence

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Version 2

As can be seen from the number example we can not get away with just adding the probabilities of two events to get the probability of the union of the two events, because they may not be disjoint. Looking at two arbitrary non-disjoint events A and B we will prove that the probability is given by: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

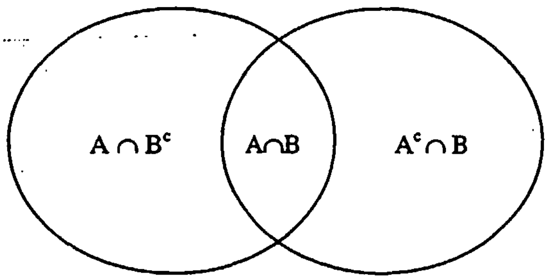
Proof[1]
$P(A) + P(B)$ is the sum of the probability for all the events in A and B. However, the probability of the events in $A \cap B$ is counted twice. If the probability of these events is subtracted from $P(A) + P(B)$ we must get the sum of the probabilities in $A \cup B$. Hence $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Version 3

In the number example we found the probability of the union of two events, which are not disjoint. We will now prove that the probability of the union of two arbitrary events A and B is given by $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proof[2]:
The event $A \cup B$ can be partitioned into three events:

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$



Additivity then gives

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= [P(A \cap B^c) + P(A \cap B)] + [P(A^c \cap B) + P(A \cap B)] - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

[1] From Carstensen "matematik 2", p. 200
[2] From Fraser "Probability and statistics" p. 30

Example 2: Differentiation - the product rule

Theorem for differentiation of a product of two functions:

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$$

An introductory number example

Applying the rule for differentiating x^n to x^5 we get $5x^4$. However, x^5 can be seen as a product of for instance $x^2 \cdot x^3$. How do we differentiate a product? Knowing the rule for differentiating a sum, one could be tempted to think that what we had to do was to differentiate each term in the product. But this yields: $2x \cdot 3x^2 = 6x^3$.

Version 1

The rule for differentiating a product of two functions f(x) and g(x) is:

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

where f and g are short for $f(x)$ and $g(x)$ and f' and g' are short for $f'(x)$ and $g'(x)$. Looking at the number example we term x^5 h(x). $h(x)$ is the product of the two functions x^2 and x^3. Set $f = x^2$ and $g = x^3$. We will need the derivatives $f' = 2x$, $g' = 3x^2$. Using the rule for differentiating products we have

$$(f \cdot g)' = x^2 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$$

that is the rule yields the same result as the rule for differentiating x^n.

Version 2

The rule for differentiating a product of two functions f(x) and g(x) is:

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

where f and g are short for $f(x)$ and $g(x)$ and f' and g' are short for $f'(x)$ and $g'(x)$.

Proof:[3]

Assuming that f(x) and g(x) are continuous functions and differentiating from first principles:

$$(f \cdot g)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Adding and subtracting $g(x)f(x+h)$ does not impose any changes on the expression. Writing it up and rearranging:

$$(f \cdot g) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + g(x)f(x+h) - g(x)f(x+h)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

By definition of the derivative of f(x) and g(x) and the fact that f(x) is continuous.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

[3] From Tom Apostol: Calculus vol 1, p. 165

Applying the rules for the limits of sums and differences we can write the expression as:

$$(f \cdot g)' = \lim_{h \to 0} \left[g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$g(x) \cdot f'(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Q.E.D

Example 3: $\sqrt{2}$ is an irrational number

The motivation is intended to proceed the versions of the arguments for that $\sqrt{2}$ is an irrational number.

Motivation

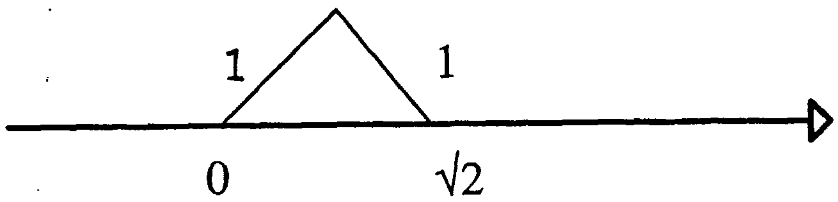
The various subsets of numbers can be motivated by operations we want to perform. We have got positive numbers in order to be able to add numbers, negative numbers in order to be able to subtract numbers and rational numbers in order to be able to divide numbers.

We want to be able to perform yet another operation: Take the square root in order to solve equations of the form $x^2 = a$, $a \geq 0$. If a is not a perfect square, this equation is not solvable unless we permit the existence of irrational numbers.

Irrational numbers are numbers that cannot be written as fractions. Examples are π, e and $\sqrt{2}$. They are characterized by being infinite non-periodic decimal numbers.

Imaginary numbers are yet another extension with respect to performing operations. With imaginary numbers we are able to solve equations of the form $x^2 = a$ when $a < 0$.

Version 1



If we construct a right angled triangle with sides 1 and 1 on a number axis and irrational numbers do not exist we face a paradox, since the length of the side lying on the number axis is $\sqrt{2}$. If $\sqrt{2}$ do not exist we have a "hole" in the number axis which are presumably continuous. We need some numbers to fill these holes - irrational numbers.

Irrational numbers are numbers which can not be written as fractions. Examples are π, e and $\sqrt{2}$. They are characterized by being infinite non-periodic decimal numbers.

Version 2

Proof:[4]
We can prove that $\sqrt{2}$ is an irrational number by proving the equivalent negation: $\sqrt{2}$ is not a rational number. If $\sqrt{2}$ is not a rational number $\frac{c}{a}$, c and a being positive integers, then there is no solution to:

$$\sqrt{2} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow 2a^2 = c^2 \tag{1}$$

Assume that $\frac{c}{a}$ is a solution and that c and a have no common divisor. c^2 must be an even number, since any number multiplied by 2 is an even number. c^2 being an even number implies that c is an even number. This can be seen from the fact that if c is odd, say $c = 2m + 1$, then $c^2 = (4m^2 + 4m) + 1$ is also odd; therefore if c^2 is even, c must be even, say $c = 2m$.

Writing $c = 2m$ in equation (1)

$$2a^2 = 4m^2 \Leftrightarrow a^2 = 2m^2 \tag{2}$$

This implies that a is also even. Since a and c are both even numbers they have a common divisor in contradiction with the statement that a and c do not have a common divisor. Since there is a contradiction it must be true that $\sqrt{2}$ is not a rational number. One could choose to term it an irrational number.

[4] From Barton: "Delta Mathematics", p.82.

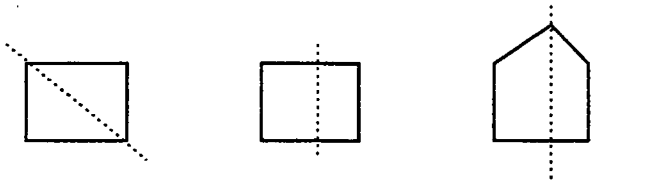
Further questions

There are two things, I would like to discuss further. One is the extent to which proving is taught and valued in your classroom. The other is if you think of and teach proof as being representative for features of a class of proofs.

Proving

The n-polygon problem: "Which polygons folded along a line of symmetry becomes n-polygons?" can be solved by in this way:

Define a ''line of symmetry'' to be a cut of a polygon so that each side of the cut holds the same numbers of lines and corners. With respect to the resulting numbers of sides there are three kinds of cuts: Cut 1: Corner to corner, cut 2: side to side and cut 3: corner to side.



cut 1: corner to corner

cut 2: side to side

cut 3: corner to side

Cut 1 and 2 along a line of symmetry is only possible when the polygon has got an even number of sides and cut 3 is only possible when the polygon has got an uneven number of sides.

The problem can be solved by setting up three equations. To the left side put the number of sides in the two new polygons created by cut 1,2 or 3. Asking for a cut which creates an n-polygon this divided by 2 must equal n. Observe that cut 1 contributes 2 sides to the new polygons since a cut-side constitutes a side in a new polygon. Cut 2 contributes 4 sides since in addition to the cut-sides there are two sides in the original polygon which are divided and contributes 2. Cut 3 contributes 3 sides with one side divided. We are now in a position to set up the three equations.

(1) Cut 1 and a polygon with an *even* number of side. This cut contributes 2 sides to the two new n-polygons.

$n= (n+2)/2 \Leftrightarrow n=2$ (not a polygon)

(2) Cut 2 and a polygon with an *even* number of sides. This cut contributes 4 sides to the two new n-polygons.

$n=(n+4)/2 \Leftrightarrow n=4$ (a quadrilateral)

(3) Cut 3 and a polygon with an *uneven* number of sides. This cut contributes 3 sides to the original polygon.

$n=(n+3)/2 \Leftrightarrow n=3$ (a triangle)

From this it can be concluded that the only n-polygons folded along a line of symmetry giving n-polygons are a triangle and a quadrilateral.

This task is characterised by that
1) the student doesn't know the answer
2) *there is no obvious strategy for how to argue for the answer and it can be done in many ways*
The student has to be able to set up a hypothesis and has to be able to argue for the correctness of it - for instance by setting up the equations showing that only a triangle and a quadrilateral out of the infinitely many possible n-polygons are subject to the criteria mentioned in the problem.

Question 1
Is the ability to produce such argument without having an idea of what the argument should *look like* beforehand something you value in your classroom? Should your students be able to discern between "convince yourself", "convince a friend", "convince an enemy"?

Question 2
Can you think of any examples?

Question 3
Is it something you consider important personally - is it something you consider important for the student?

Question 4
If the example is something you consider "too complicated" for the student: how do you prepare your students for problems like these in the exam?

"prove that n(n-1)(n-2) is divisible by 3"
(proof by induction)

"Given that z^3=i explain without actually solving the equation why the none of the solutions can be real"
(In order for a real number to be a solution to the equation it should be possible to cube a real number and get a complex number)

"For two numbers p and q, suppose that p is rational and that p+q is irrational. Is q rational or irrational, or could it be either? Justify your answer."
(If q is rational then p+q is rational since the sum of two rational numbers is a rational number. Since p+q is irrational q must be irrational)

Question 5
Would you be teaching prescription proofs, other proofs or solving problems, emphasise in your class:
a) that number examples can not be used to prove a general statement, but they can disprove a false one.
b) that it is not enough to investigate a couple of cases (find the pattern) and draw the conclusion if one want to argue for a statement/a solution to a problem.

Question 6
Which features about the proof do you emphasise, when you do the prescription proofs (e.g. trigrules, area of triangle) in order to help your students being able to prove them at the exam?

Proofs as "representatives"

Question 7
Which *features* about the proof do you emphasise, when you do the prescription proofs (e.g. trigrules, area of triangle) in order to help your students to be able to do it at the exam?

Question 8
One way of viewing proofs are to see them as representatives for a certain class of proofs . By proving something you are able to tell that something is possible or impossible, that an object with certain desired features exists or do not exist, that a "rule" has to be the way it is in order to maintain consistency:

- existence/non-existence proofs (that the squareroot of two can not possibly be a rational number is a non-existence proof. There does not exist a rational number equal to the squareroot of 2)
- possibility/impossibility theorems (it is not possible to find an n-polygon with n different from 3 and 4 which folded along a line of symmetry gives an n-polygon).
- rules that govern a "new" mathematical operation in order to be consistent with the already defined operations (the product rule)
- relations between "new" mathematical objects (trigonometric functions) - as a consequence of the basic properties of the trigonometric functions.

Are such perspectives something you would include when teaching proofs?

B Interviews med de new zealandske lærere

B.1 Interview med T1

B.1.1 Beviseksemplerne

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

T1 introducerer til teoremet med et eksempel på to ikke-disjunkte hændelser; fangst af en bestemt farve fisk i et tilfælde, hvor der optræder tofarvede og ensfarvede fisk.

I like to use concrete objects like, you know, colours of fish, fish in different colours, that sort of thing and have one (set) with blue and red fish and in the intersection I use blue fish with a red tail or something like that, so that they can actually see exactly what that means rather than using numbers.

T1 giver teoremet en forholdsvis grundig behandling, idet hun både argumenterer uformelt for det og - som den eneste - fører et formelt bevis[1]

I would actually do the formal part, but I wouldn't introduce it as such with the formal part straight away.

T1 finder, at sætningen er særdeles vigtig og begrunder det med dens relevans for opgaveregningen:

..it is important for them to know (the theorem) so that they can actually solve problems.

I think it is important for them to know that theorem because a lot of - especially in 7th form - a lot of the probability questions requires them to understand exactly what disjoint and..mutually exclusive sets means og it provides sort of a focus for them. Once they understand the theorem they don't actually have

[1]Beviset for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ som det er fremstillet i version 3 i spørgeskemaet

to memorize that. They can actually use it for all sorts of things..for solving different probability questions.

Selv T1 mener, at man også bør argumentere mere formelt for sætningen, så finder hun, at det er centralt, at eleverne forstår sætningen og de indgående begreber, dvs forstår forskellen på ikke-disjunkte og disjunkte hændelser. Dette har en højere prioritet end at de kender til beviset for sætningen.

It is important for them to know (the theorem) so that they can actually solve problems..it happens quite often in the exam that this comes up, that the application of that theorem...not proving it..that's why it is important for them to know the concepts rather than just knowing the theorem. Or just a proof of the theorem.

I det sidste kontrasterer hun efter min mening *udenadslære* af såvel bevis som sætning ("knowing the theorem") med forståelsen af begreberne. Det er måske underforstået, at eleverne ikke er i stand til andet og mere end at lære beviset udenad.

Produktreglen

T1 fører ikke dette bevis og begrunder det med tidmangel.

Differentiation, the product rule I don't actually teach. I don't actually go over the proof for the product rule with my students...at this level.... quite often I am pushed for time to fit in what we need to finish before the exams and in calculus I was just put in that position that I had to rush through to get it done.

Eleverne bliver præsenteret for produktreglen som en hurtig måde at differentiere et produkt, som ellers ville kræve at man gangede parenteser ud og herefter brugte reglerne for differentation af sum/differens.[2] T1 forsøger ikke at overbevise eleverne om, at reglen "virker", ved at se på et tilfælde, hvor man både kan bruge reglerne for sum/differens og produktreglen. Skal man argumentere, skal det være ved hjælp af et formelt bevis.

MH:.. What are you doing, when you don't do a proof?
T1: Well, that's simple. You give them the rule.
MH: How do you "give them the rule"? T1: I give the rule as..that's just the rule, the product rule, you know...I would explain to them for a start, at the 6th form they have actually done some differentiation and up until then, if they were given a product they had to expand it out before they could differentiate. Now we have the rule to use. So you just give them the rule and they apply it.
MH: OK, so it would be...perhaps a bit like my version 1, then? .. T1:..I will not, if I have to prove it I would not just use that...I will actually prove it with the actual more formal proof

[2]Eleverne må her dels have haft kendskab til reglen for differentation af x^n og dels have set på meget specielle tilfælde, hvor koefficienten til x er 1 også i produktet og f.eks. have differentieret x(x+1)

Udover tidmangel begrunder T1 fravalget af produktreglen med, at eleverne ikke er motiverede for "beviser for bevisets skyld". T1 finder personligt beviset interessant, men mener ikke, at det nødvendigvis er det for eleverne. Herudover er det meget vanskeligt at motivere eleverne for beviser, hvis det ikke indgår i eksamenspensum.

Yeah, to me it is. I have to admit that, even at that level interest does not come in.....If it is a proof and if it is in bursary I will get the whole class' attention. If it is a proof for interests' sake: no.

Det er interessant, at T1 finder det nødvendigt og relevant at inddrage beviset for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i sin undervisning, da $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ heller ikke er et obligatorisk bevis. Jeg mener årsagen til det er, at hun kan opnå et ønsket udbytte - bedre begrebsforståelse - ved at argumentere uformelt og mener, at hvis man skal argumentere, så skal man gå linen ud. Brugen af $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i opgaveregningen kræver at eleverne har forstået, hvad sætningen handler om og de indgående begreber. Det finder T1 tilsyneladende ikke er tilfældet med produktreglen.

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal
Dette bevis fører T1 ikke - og det gælder samtlige af mine new zealandske interviewpersoner. T1 begrunder fravalget med, at beviset i sig selv er for svært for eleverne og de vil have svært ved at se betydningen af det.

the majority of the students I teach would not be able to really understand how to go about doing it. For what they see, the don't see the need of having to do it. And when (if) I do it, it is really over their top, probably the time would be wasted, too, in that they would not be able to fully understand the significance or (of) what I am trying to do, when I prove things like that with them.

Da T1 bliver spurgt, om man i forbindelse med at udvide talmængden til irrationale tal, da blot skal anføre, at $\sqrt{2}$ er rational "pr. definition" siger hun:

By definition - I mean they are 6th formers. I would introduce them to irrational numbers when we do, you know, sets of different numbers, that we sort of talk about. All the different types of numbers. They will be familiar with counting numbers, you know, natural, whole..talk about that and when it comes to rational numbers, they very often don't know what rational numbers are so you say, you know, this is a number that can be written as a ratio. Then there is a set of numbers which are irrational, you know. They would not have met the word π before, but they would have come across $\sqrt{2}$. So you know, what is the $\sqrt{2}$, you know and then they start.

Jeg tror det T1 her refererer til er, at eleverne kender til det irrationale tal $\sqrt{2}$ og at "and then they start" refererer til at netop dette tal bruges som udgangspunkt for at eleverne "undersøger" et irrationalt tal og "opdager" at det ikke kan lade sig gøre at skrive det som en brøk.

T1 anser det vigtigste for at være, at eleverne bliver så fortrolige med irrationale tal, at de kan regne med dem. Det er som jeg ser det den egentlige årsag til, at T1 finder beviset irrelevant.

What they need to know about irrational numbers? They have to be able to work with surds...manipulate surds.

B.1.2 T1's holdning til beviser i matematikundervisningen

Hvis T1 vælger at gennemgå et bevis, så er det imidlertid tilsyneladende sådan, at hun vælger enten at "gå hele vejen", dvs argumenterer formelt for teoremerne eller blot "giver eleverne formlen" og lærer dem at anvende dem.

Beviser er relevante for eleverne, hvis de er relevante for opgaveregningen

Jeg synes, det er ret tydeligt, at T1 mener, at beviser i undervisningen på den ene eller anden måde skal være relevante for udviklingen af "skills" - elevernes evne til at regne opgaver. Enten i form af at "formlen" kommer til at fremstå mindre mystisk eller i form af at arbejdet med beviset tilfører eleverne en forståelse af de begreber, der er i spil og hvor begrebsforståelsen er nyttig i forhold til at kunne anvende sætningen.

Beviser kan virke overbevisende og forklarende

Adspurgt finder T1, at et generelt argument for at have beviser i matematikundervisningen er, at de bidrager til at at forklare eleven hvorfor sætningen gælder.

b) would be the one that sticks out "the argument convinces the students of the truth of the theorem" and then second I would say that "the argument explains why the theorem is true. Rather than accept theorems as being true I would like them to actually see why it is true and that they can actually think of ways of disproving it."

Eleverne bør forholde sig kritisk til matematiske sætninger

Det ovenstående citat afspejler også, at T1 vægter, at eleverne forholder sig "kritisk" til matematik. Hun vil gerne undgå, at give eleverne et billede af matematik som en række sætninger, som eleverne kritikløst kan - og skal - acceptere. Ideelt set møder eleverne matematiske sætninger med skepsis - og forsøger at selv at modbevise dem. Beviser har så en forklarende/overbevisende funktion.

At eleverne får en forståelse for beviset for en given sætning har ingen sammenhæng med deres evne til at anvende sætningen

En af årsagerne til at det er vanskeligt at motivere eleverne for beviser - og at det som lærer er svært at forsvare bevisers tilstedeværelse i undervisningen - er at der ikke er nogen sammenhæng mellem at eleverne forstår sætningerne og begreberne og at de kender til beviserne for dem.

I mean, let us face it. After you have done the proof you don't touch it again, but you apply it (the theorem) to solve problems. So they don't really see the point in learning the proof, when there is no use for it, I mean, you know, well there is a formula for it anyway. So they don't actually see the importance of the proof behind it.

Beviser kan opøve elevernes evne til at tænke logisk

T1 erklærer sig enig i, at beviser kan støtte elevernes evne til at følge logiske udledninger. Det anses dog for perifert i forhold til elevernes evne til at løse matematiske problemer - det er sådan jeg fortolker "the way they approach things".

MH: It is perhaps the reason why you think that the students should have them (proofs), that it "enhances the students ability to follow logical deductions"? T1: I think the process is important, rather than the actual proof itself..it is actually getting..the way they approach things is interesting..the way they approach things and do things is much more important than the proof itself.

Jeg tolker "things" som problemløsnings-situationer og selvom det ikke er det T1 bliver spurgt om, så er det hun giver udtryk for, at det er vigtigere at eleverne støder på problemløsnings-situationer end at der er beviser i matematikundervisningen.

Det kræves ikke at eleverne er i stand til at forstå beviser

..for the prescriptions[3] they don't really need to know the proofs. It has been taken out. So, in previous years when you are really pushed for time we just went over the things in the course, which are important, the revision of the 6th form work and they do exercises, they do a type problem...

Det T1 giver udtryk for i det ovenstående er, at det der bliver kontrolleret til den skriftlige eksamen er elevernes evne til at regne opgaver, så beviser er (udover de beviser eleverne kan risikere at blive eksamineret i) ikke eksamensrelevante og kun noget, der er plads til, hvis der af en eller anden grund er et overskud af tid. Beviser i matematikundervisningen er som sådan et "overskudsfænomen", set fra T1's synspunkt. Det er noget man vælger at bruge tid på, hvis der er et overskud af tid eller sammen med særlig dygtige elever.

If I had time, definitely!..I would push them over proofs that we may not necessarily be using, but if it is interesting and related to what we are doing, I would do them.

...So this year, I will have some time before the test. That is when I would go over the formal proof of it...

Beviser er i de fleste tilfælde for svære for eleverne

Udover at beviser anses for at være irrelevante i forhold til elevernes evne til at anvende sætningerne, så argumenterer T1 for, at beviser ganske enkelt er (for) svære for flertallet af eleverne. Beviser er ganske enkelt spild af tid og kan være direkte skadelige, hvis de præsenteres for eleverne som noget "man" bør kunne lære og forstå - i den forstand, at det giver eleverne nederlagsfølelse overfor matematik.

..if I feel that the majority of the students - the majority could be the whole class - they probably would not be able to follow it. And not only are they very frustrated; they actually feel..it lowers their self-esteem when.. when they feel this is the level that they should (be) learning at ...they get deflated and get...discouraged very easily when that is the case.

Hun finder, at eleverne ganske enkelt ikke vil forstå, hvad det hele går ud på - beviser er for abstrakte til at man kan forvente at de kan forstå og sætte pris på beviser.

Det T1 opfatter som hovedproblemet er, at beviser er meget symboltunge og det blokerer eleverne overfor. Som hun siger om beviset for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

[3]The prescriptions er en pensumliste for de skriftlige eksaminer skolerne kan vælge at lade eleverne i 6th og 7th form tage - 6th form kan dog også laves som en intern eksamen

I will always introduce them, you know from my experience, it's just that.. the students can be turned off and turned on. Turned on and turned off very quickly and...anything to do with algebra and letters straight away, straight on, I would probably have lost them within the first five minutes .

og de føler sig mere overbevist, hvis man bruger taleksempler

Most of them are less turned off by numbers. It is, you know, even at 4th and 6th form level, given the unique case they are more able to accept it, but when you talk about general cases, that's when you start loosing them .

Beviser er forbeholdt "særligt dygtige elever"
Beviser er forbeholdt "særligt dygtige elever" uden at det dog står klart, hvad de gør godt for, udover at de særlig dygtige elever ikke oplever et nederlag, fordi de rent faktisk kan følge beviset.

Well, I will do it, if it is definitely prescribed so...if it is definite. I will do it if I have time and it is of interest to me and the students. I would do it if, say like (with) 3rd form I would do some proofs with them that is not required at all, because they are actually able to follow it and to actually get some...get some satisfaction out of doing it.

Opsamling

T1 underviser i beviset for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ men ikke i beviset for produktreglen og beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Mens problemet i forbindelse med produktreglen først og fremmest er tidmangel, så finder T1, at beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal, ikke vil give mening for eleverne. Det eleverne skal lære omkring rationale/irrationale tal er at manipulere med rodudtryk og i denne sammenhæng er det tilstrækkeligt at vide at $\sqrt{2}$ er irrationalt.

T1 finder at hvis man vælger at argumentere for en sætning, så skal man også bevise den med, hvad T1 opfatter som et formelt bevis. Hvis ikke man giver et bevis, så skal man helt *undlade* at argumentere for sætningen - formentlig for ikke at give eleverne et billede af, at man rent faktisk har argumenteret "ordentligt" for sætningen. I det sidste tilfælde bliver det tale om at "give eleverne formlen".

Gennemgående finder T1, at mens hun godt personligt kan finde beviser interessante og meget kvikke elever kan finde beviser morsomme, så er det lidt perifert. Matematik først og fremmest er noget, man anvender og beviser har ingen betydning for elevernes evne til at gøre det.

Når T1 prioriterer at give beviser for sætninger, er det sætninger, der er anvendelige, forstået som anvendelige for at regne opgaver. Beviser har en plads i matematikundervisningen i kraft af, at man ved at arbejde med at forstå beviset også styrker forståelsen af de indgående begreber i sætningen og i kraft af at overbevise eleverne om rigtigheden af resultatet.

Mens det er rimeligt at forlange, at eleverne tilegner sig en forståelse af de indgående matematiske begreber - det er jo en forudsætning for at kunne regne opgaver - så er beviser generelt for abstrakte og for svære til at man kan forvente at gennemsnitlige elever forstår dem. Beviser er generelt noget, man kan gøre med/præsentere for den særlige gruppe af elever, der synes at "ren" matematik er sjovt.

B.1.3 Bevisførelse

Kommentarer til polygonopgaven

T1's kommentarer til polygon-opgaven er interessant nok, at det er en problemstilling, hun vil præsentere for sin særlig dygtige 3rd form klasse - ikke de ældre elever!

..that sort, I would like to give it to the 3rd formers.

Dette begrunder hun med, at hun her har et overskud af tid her, fordi eleverne her meget hurtigt er i stand til at tilegne sig "basispensum".

I have a topstreamed[4] *3rd form, so all the skills and so on are learned very quickly which gives me a lot of time to play around with other things*

Det viser sig imidlertid, at det er *problemstillingen* hun finder interessant og relevant for eleverne og at hun ikke vil forlange, at eleverne selv argumenterer for svaret på opgaven (det er kun en trekant og en firkant, der opfylder kravene). Hun anser det for tilstrækkeligt at at eleverne fremsætter løsningsforslag og argumenterer for dem vha taleksempler (nok snarere tegninger i dette tilfælde). Det er sædvaneligvis ikke eleverne selv, der argumenterer for sådanne opgavers løsning, men T1 selv.

I do let them prove in their own way. And at that level most of their proving is done by showing lots of different numerical examples, rather than the general one. And quite often, when I do the show-up, the debriefing, that's when I show them one way of coming to a general proof of what they are doing, unless someone has actually done it.

Herudover er der formentlig tale om en art "pensum-fiksering". Polygon-opgaven er - på overfladen - en rent geometrisk problemstilling og geometri indgår i pensum på de lavere trin i det NZske skolesystem.

[4]Der er tradition for især på de lavere klassetrin og i visse fag at dele eleverne efter evner også på folkeskoleniveau.

Det er ikke i nævneværdig grad et krav fra "systemets side", at eleverne bliver i stand til at føre beviser

Bevisførelse er - i lighed med inddragelse af beviser i undervisningen - noget man gør, hvis der er et overskud af tid, noget man gør "for sjov". Snarere end at være noget, der anses for at være vigtigt for eleverne, er det "matematik for matematikkens skyld". Opgaver af en type, der kunne bruges til at motivere eleverne for at føre beviser forsvinder ganske enkelt i 6th og 7th form, hvor eleverne bliver meget eksamensorienterede og ikke vil "købe" undervisning i noget, der er "for sjov".

....in 6th and 7th form there are certain proofs they have to learn and that is where I spend time doing the proofs, but I have not got that extra time...to do proving and activity, proving for the sake of it, proving for the fun of it.

Foreholdt nogle bevisopgaverne fra eksamenssættet - og adspurgt, hvad hun gør for at forberede sine elever på sådanne opgavetyper, siger T1, at disse opgaver ikke giver ret mange point og at kræfterne er bedre anvendt på mere basale ting, dvs lettere opgaver.

I do not spend (time on) the especially the first and the third one. I wouldn't have spent time and troubles going through that.

For the majority of the students to be able to do that sort of questions is a lot less and the mark that you can get from any exam on those are.. I would say that most teachers are happy to forgo those marks and make sure they get all the simpler marks.

I det omfang, at bevisførelsesopgaver fra eksamenssættene overhovedet indgår i undervisningen er det som et led i undervisningsdifferentiering - det er opgaver særlig dygtige elever bliver sat til at løse.

I mean, with one or two students I would point those questions out to do.

Det kan kun lade sig gøre at lære "almindelige" elever mere mekaniske færdigheder så som at føre induktionsbeviser

En interessant iagttagelse, der igen underbygger, at T1 i almindelighed finder bevisførelse for svært er, at hun beklager, at induktionsbeviser er taget ud af pensum. Hun ser induktionsbeviser, som noget det er let at lære eleverne (dvs man undgår at give dem nederlag) at føre og "se", hvornår kan bruges.

I thought, things like induction is a very good tool for the students

Det er i og for sig ikke så mærkeligt, at T1 finder induktionsbeviser tiltrækkende, da de færdigheder eleverne skal tilegne sig i forbindelse med induktionsbeviser er meget lig den, de har i den "almindelige" opgaveregning, dvs de skal kende og kunne indsætte i "formlen" og kunne se, hvornår man kan anvende den. Her skal eleverne i stedet blive fortrolige med algoritmen for et induktionsbevis og lære at "se", hvornår man kan bruge induktionsbeviser.

it's just some formal thing they can latch on to. I mean, it gives them a tool...right now none of the 7th formers would have heard about induction. They wouldn't know how to apply it, they wouldn't know when to use it. They haven't even tried to use it...I mean all the proofs that they have got now are formal proofs that follow a certain method. And..just like that, they have another tool to use, you know. It is not really hard to learn at this stage.

Induktionsbeviser anses for at være en mulighed for at give eleverne en erfaring i formel bevisførelse. Det er at vise dem at beviser også er noget, hvor man gør brug af en bestemt fremgangsmåde og at der også i beviser ligger strukturer og algoritmer, som det kan lade sig gøre at tilegne sig. På den måde bliver induktionsbeviser i kraft at være let tilgængelige forstået som lette at lære at føre, noget, der kan give eleverne erfaringer med ting med mærkaten "bevis" og "bevisførelse", som eleverne føler, at de kender til og kan.

B.1.4 Opsamling

Polygonopgaven synes T1 er interessant, men den er det i kraft af problemstillingen og i kraft af at være en "sjov" opgave. Man kan godt forlange - også af yngre elever - at de fremsætter en hypotese om opgavens løsning, men man kan ikke forvente, at de er i stand til at argumentere for det med andet end taleksempler og tegninger.

Generelt anser T1 bevisførelsesopgaver for at være for svære for eleverne, men først og fremmest er det ikke noget, der er tid til. Bevisførelsesopgaverne er ganske enkelt irrelevante - de giver alligevel så få point til eksamen. T1 kunne dog godt tænke sig, at eleverne - som det tidligere har været - lærte at føre induktionsbeviser. Dette er efter T1's opfattelse let at lære eleverne.

I forhold til andre aktiviteter i matematikundervisningen fremstår bevisførelse i næsten endnu højere grad end beviser, som noget T1 ikke anser for at give et brugbart/måleligt/vigtigt udbytte og som noget, som det ikke er afgørende, at eleverne kan eller kommer til at prøve kræfter med.

B.2 Interview med T2

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

T2 introducerer eleverne til sætningen ved at lade dem regne på et passende valgt taleksempel, således at de kan "opdage" sætningen.

T2: How I would introduce it? I would use number examples first and do..introduce it that way and then go to a formal proof. I would like them to try and discover the pattern first. To discover the proof.
MH: What do you mean by pattern? That they do a lot of examples? T2: For example with dice, we will have a look at..finding the probability getting a 3 on a red dice and the probability of getting a 3 on a blue dice, and then what is the probability of getting a 3? And you can work out from all the possible outcomes that it is 11 out of 3, which is $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}$ *so, you discover the rule, discover the theorem basically by looking at examples and then that moves to prove it formally.*

T2 skelner knap nok mellem at opdage sætningen og opdage beviset for det. Det er ikke så mærkeligt her, eftersom argumentet i beviset i min version 2 og det at generalisere observationen af, at fællesmængden af de to hændelser bliver trukket fra hinanden ligger meget tæt op ad hinanden. Det er da også denne mere generelle argumentation T2 refererer til som "formal proof", som han dog supplerer med et Venn-diagram.

T2 skelner mellem at eleverne forstår *problemet* og at de føler sig ovebevist om sætningens rigtighed. De skal have en forståelse for, at man hvis man blot adderer sandsynlighederne, som man ville gøre med disjunkte hændelser, så får man talt sandsynligheden for fællesmængden for de to hændelser med to gange. Taleksempler egner sig til at overbevise eleverne om sætningens rigtighed, mens problemet ved blot at addere sandsynligheder og nødvendigheden af at trække fællesmængden fra bedst illustreres ved brug af et Venn-diagram.

T2: I would use a Venn diagram to explain that, the problem. And I would use number examples sometimes like the dice, just to show them that it does work..I would probably try and convince them about the area of the Venn diagram and work from that
MH: You would simply be looking at the area and "see" that one of them are counted twice?
T2: Yes.

Selvom T2 betegner argumentationen som "do it formally", så mener han ikke, at argumentet udgør et egentligt bevis:

MH: Would you describe it as a proof?
T2: No, I probably wouldn't. For that one I would probably just say it is an explanation of how we get the formula. I would still go through that formal process of showing it.

I modsætning til T1 finder T2, at den mindre formelle argumentation er tilstrækkelig for eleverne. Som det fremgår af citaterne, så argumenterer T2 for sætningen, for at forklare eleverne, hvordan man når frem til formlen. Taleksemplet overbeviser dem til gengæld bedre om, at sætningen "virker".

Produktreglen

T2 introducerer til teoremet på samme vis som det er foreslået i interviewspørgeskemaet, hvor det med et taleksempel modbevises, at et produkt differentieres med hver faktor for sig.

Basically your version 1 is what I would use to introduce it as an example and they can see that the derivative of x^5 is not the same as the derivative of $x^2 \cdot x^3$

Men han beviser sætningen efterfølgende.

MH: So you would do the full formal proof?
T2: Yes

T2 foretrækker egentlig - selvom han ikke lige kan huske detaljerne - at argumentere ved brug af du/dx-notationen, fremfor funktionalnotationen. *The students seem to have more difficulties with functional notation. OK? So that is why I would be using du/dx so that they would find it easier. It is not important for the (proof)*

Jeg minder lige om at gangen i denne version er følgende:

En funktion y(x) er produktet af funktionerne u(x) og v(x). Lad δx betegne en lille tilvækst i x-værdien. δy,δv og δv betegner de tilvækster funktionerne tilsvarende får. Man har altså

$$y + \delta y = (v + \delta v)(u + \delta u)$$

Da uv=y er:

$$uv + \delta y = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v$$

Dividerer man med δx på begge sider og reducerer fås:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u\delta v}{\delta x}$$

Lader man $\delta x \longrightarrow 0$ fås produktreglen:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Dette er en symbolsk set simplere måde at argumentere for, at produktreglen følger af definitionen på en differentialkvotient. Jeg ikke er enig med T2 i, at det ikke har betydning for selve beviset - det er jo forskellige argumenter, der er brugt - men denne kommentar skal nok snarere fortolkes som at han anser to de forskellige beviserne for at være "lige gode" til hans formål.

En forståelse af at produktreglen følger som konsekvens af overvejelser omkring tilvækster i funktionsværdier er imidlertid ikke noget, T2 mener er alle elever forundt. Beviset er for "særlig dygtige elever". Målet for de mindre dygtige er, at de bliver i stand til at "bruge reglen". Her formentlig forstået som at være i stand til at genkende de situationer, hvor de har brug for at differentiere et produkt og være i stand til at gøre det.

MH: Do you think the proof in itself is interesting for the students?
T2: Yeah..for some students, yes.
MH: Who are "some students"?
T2: Top students. Less able students are blown away. They won't understand... I would say (the proof) is nice to know. That is the words I use "nice to know" and "need to know". It is nice to know, but they need to know how to use the rule

Dette understøttes af at T2 finder produktreglen betydningsfuld i kraft af at være en formulering af en regneteknik.
MH: Is this an important result?
T2: Yes..It is an essential skill, differentiating, being able to differentiate a product.

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

Dette bevis har T2 slet ikke i sin undervisning og det er tydeligt, at han spontant slet ikke har overvejet, at beviset kunne have indgået.

I didn't use that. It is probably an oversight on my part. So we didn't talk about it. We just assumed that $\sqrt{2}$ is irrational, because it has come up in earlier years, so I didn't actually prove it this year in one way or another

Han synes da heller ikke, at sætningen er videre interessant, den får kommentaren *"pretty trivial"* med på vejen.

MH: Do you think it is an interesting result?
T2: Pretty trivial.. I don't think the students would find it that interesting. It is perhaps not the result that is interesting. I think that it is the process that is interesting. I think it is the process of the proof that is interesting for that one.

Jeg tolker "process" som bevisets logiske struktur, dvs det er beviset som modbevis, der er interessant - ikke selve sætningen.

B.2.1 T2s holdning til beviser

Beviser forklarer, hvorfor sætningen er sand
T2 anser det for vigtigt, at man argumenterer for sætningerne i matematikundervisningen, så eleverne får mulighed for at indse hvorfor sætningen er sand. Derimod ser han *ikke* beviserne som en måde at overbevise eleverne om, at sætningen er sand.

"the argument explains to the students why the theorem is true", that is why I would do it...It is the main one and it is the main one I would use for all proofs. That basically exaplains my rationale for teaching proofs in the first place.

I would rather think of my job as explaining rather than convincing

Jeg mener dog, at man skal forstå forklarende på en ganske bestemt måde - som forklaring af "formlerne", regnereglerne i matematikundervisningen. De dygtigste elever skal have en forståelse af "hvor formlerne kommer fra".

I prefer to at least for some of them to know where the formula comes from.

Dette kan være en af forklaringerne på, at T2 ikke anser beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal for at være interessant. Det falder udenfor hans formål med at undervise i beviser.

Beviser som studieforberedende
Som jeg har været inde på anser T2 beviser for at være et anliggende, der kun angår de dygtigste elever. Gruppen indsnævres vel i virkeligheden yderligere, når han fremhæver, at beviser først og fremmest fungerer som en art forberedelse for de elever, der møder matematik på en videregående uddannelse og dermed også beviser. I 6th og 7th form har disse elever nået et niveau, hvor man kan forvente, at eleverne kan forstå simple beviser.

I think they (the proofs) should be there, because it is a formal mathematical process. If they are going to study mathematics further on they will meet proof at some stage and now is probably a good tog to meet it

Sammenholdt med at T2 mener, at brugen af symboler er det, der volder de fleste elever problemer, så kan man næsten se hans formål med at have beviser som at vænne eleverne til symbolbrug. Det er ihvertfald sådan jeg fortolker "formal mathematical process".

T2 finder umiddelbart ikke at de elever, der ikke fremover skal beskæftige sig med matematik, har nogen glæde af beviserne.

MH: What about the students who are not going further on to study mathematics
T2: Well, that is their problem.

Beviser skal være i matematikundervisningen for at understrege, at man i matematik såvel som i andre fag skal argumentere for sine påstande

Selvom T2 umiddelbart mener, at beviser kun er af relevans for de dygtigste elever, finder han ved nærmere eftertanke at beviser for mere gennemsnitlige elever har en berettigelse i at vise eleverne at der - også i matematik - argumenteres for fremsatte påstande. Dette er et signal han mener ikke bare er af værdi i matematikundervisningen, men er et alment aspekt, som også andre fag bør betone.

It is still good in that it shows them a way of formally proving something and by that I just don't mean mathematically, that by following a logical process they can...they realise that they just can't make statements without having to justify them. I think that is an important concept.

Beviser kan ikke bruges til at overbevise eleverne om rigtigheden af en sætning

Beviser virker efter T2's mening kun overbevisende, hvis eleverne møder matematiske udsagn med skepsis. Denne skepsis mener T2 ganske enkelt ikke findes hos eleverne. De er - ihvertfald i matematikundervisningen - villige til at acceptere hvad som helst.

I don't necessarily want to convince the students, because the students.. you tell them anything and they are convinced, all-right? They believe anything you say

Man kan måske sige, at han ihvertfald ikke ser det som sin opgave at lære eleverne at være kritiske.

Det vigtigste er, at elever kan bruge sætningerne i opgaveregningen - ikke at de forstår beviserne

I forbindelse med at T2 formulerer, at beviser er noget man skal inddrage i i matematikundervisningen for de dygtigste elevers skyld, beskriver han også, hvad jeg vil opfatte som minimumskravet. Eleverne skal være i stand til at "bruge reglen", formentlig skal det forstås som at de kan bruge sætningerne til at regne (eksamens)opgaver, uanset om de forstår den dybere mening med sætningerne eller ej.

I would say this is nice to know. That is the words I use "nice to know" and "need to know". It is nice to know the proofs, but they need to know how to use the rule.

Beviser, kun hvis der er tid

I lighed med T1 nedprioriterer T2 beviserne, hvis han er presset for tid:

If we have not got a lot of time left, then the number of proofs I do will be reduced. I will tell them "this is the result", so I won't tell them why is the result.

Som et eksempel på et bevis, der i givet fald vil ryge ud, nævner T2 produktreglen.

B.2.2 Opsamling

T2 underviser ikke i beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Sætningen er ikke interessant, omend beviset kan tænkes at være det i kraft af at være et modstridsbevis. Derimod underviser han i beviset for produktreglen, hvis der er tid til det og han argumenterer altid for at sandsynligheden af foreningsmængden af to ikke-disjunkte hændelser er $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Når man ser bort fra at beviser har betydning for alle elever i kraft af at signalere til eleverne, at man skal argumentere for sine påstande i matematik såvel som i andre fag, så er beviser primært for de dygtigste elever. Det er et element i matematikundervisningen af studieforberedende art, møntet på at forberede de elever, der senere hen vil møde beviser i anden sammenhæng.

Beviser kan have betydning for de dygtige elever i kraft af at give eleverne en forklaring på, hvorfor sætningen er sand, således at matematik fremstår som et fag, hvor sætningerne kan forklares. Mere snævert formuleret, så skal eleverne have en forståelse af, hvor "formlerne kommer fra", underforstået de formler, som de bruger i opgaveregningen. En af grundene til at T2 ikke prioriterer $\sqrt{2}$ - beviset er formentlig, at sætningen ikke er en "formel", men repræsenterer en mere intern-matematisk problemstilling.

Beviser egner sig ikke til at overbevise eleverne om rigtigheden af en sætning. Eleverne accepterer ukritisk matematiske sætninger.

T2 finder, at man principielt bør bevise sætningerne, inden man sætter eleverne til at bruge dem. Det er dog ofte af tidsmæssige hensyn nødvendigt at prioritere helt at undlade bevise medmindre det er et af de obligatoriske beviser.

B.2.3 T2's holdning til bevisførelse

Kommentarer til polygonopgaven

T2 er i princippet positivt stemt og finder at (bevis)opgaver - i lighed med polygonopgaven rummer elementer af noget, der har berettigelse i matematikundervisningen. Men det er (for) svært for eleverne. Han kommenterer polygonopgaven med:

that sort of thinking is certainly valid - and they are not particularly good at it....I guess we are looking for a bit of that in everything

Eleverne kan lære at gengive hele/dele af et "færdigt" bevis, men de er ikke i stand til at udvikle dem selv

T2 tillægger ikke bevisførelse i matematikundervisningen nogen særlig vægt. Den eneste form for bevisførelse, der forekommer er ifølge T2 (det er det ikke i min forstand) er når eleverne løser opgaver, hvor man manipulerer med en side af en ligning og viser den bliver lig den anden side af ligningen. Samtidig skelner T2 ikke mellem at gengive et bevis og føre et bevis - han formulerer det som at eleverne skal lære at gengive de obligatoriske beviser, som at de skal lære at føre dem.

In trig we have to, as one of the subjects, one of the topics, where they have got to learn to prove things for themselves...I would probably do one and let hem work through the rest. For example. If I did $sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$*, then I might expect them to do the next one themselves, the* $sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$*... the first proof will introduce the ideas that the will need to do the second. It just reinforces their understanding of it....of going through a proof process. They have got to be able to do a proof.*

Bevisførelse er for svært for eleverne - og er ikke et "systemkrav"

T2 finder ikke, at bevisførelse er et "systemkrav", forstået på den måde, at man sagtens kan bestå eksamen uden.

Den gennemsnitlige elev er efter T2's opfattelse ikke i stand til andet end at lære et passende antal algoritmer og at bruge dem i de rigtige situationer. Opgaven "Given that $z^3 = i$ explain without actually solving the equation why none of the solutions can be real" er derfor for svær. Den kræver andet og mere end brug af en algoritme. Han uddyber dette.

..a lot of our 7th form students are very mechanical. They remember the way to do things and then they try to apply those ways to everything. When you

ask a question like that you require higher level thinking, you require greater understanding and a lot of our students don't have that..they can survive in the bursary exam at 7th form level without that level of thinking

At bevisførelsesopgaver rent faktisk optræder i eksamensopgaverne og dermed som "system-krav" ignorerer han i lighed med de andre new zealandske lærere. Opgaverne er ganske enkelt for svære for almindelige elever. Nogle af hans elever har netop haft til opgave at vise at 3 går op i $(n+1)(n+2)(n+3)$ i en test og langt de fleste har ikke kunnet finde ud af det på trods af, at de tidligere har haft en lignende opgave:

..they had that question and.....noone got it completely correct. And that is after they have been asked a similar question at mid-year. We gave them (the task) to show them that 2 is a factor of $(n+1)(n+2)$[5]*, but they are still very weak on that*

Selvom han mener, at der principielt er er noget rigtigt i at stille sådanne opgaver, så finder han altså ikke, at det er noget, det er rimeligt at forlange af eleverne og at der er andre ting, det er vigtigere, at eleverne lærer.

But if they can't cope with it and they are struggling with something simpler then I will spend the time on the simpler things

Hvad man skal forstå ved "simpler things" er et åbent spørgsmål, men en ting som T2 nævner i forbindelse med, at han kun forventer at de dygtigste e elever forstår beviserne er at det er et minimumskrav, at eleverne er i stand til at "bruge reglen", dvs bruge sætningerne de bliver præsenteret for i matematikundervisningen i opgaveregningen.

B.2.4 Opsamling

T2 finder at bevisførelse forstået som at eleverne selvstændigt skal udvikle en strategi for løsningen til et problem i princippet er en god ide. Men han finder at det dels ikke er noget, der reelt er krav om fra "systemets" side. Bevisførelsesopgaverne i de skriftlige sæt tæller så lidt, at eleverne sagtens kan bestå eksamen uden og T2 gør derfor ikke noget særligt for at forberede eleverne på sådanne opgaver. De fleste elever er ikke i stand til andet og mere end at lære et antal algoritmer og genkende de sammenhænge, de skal bruges i, og derfor er tiden bedre anvendt på andre ting end bevisførelse.

[5]Dette er et noget simplere spørgsmål, da man her kan argumentere med at uanset om n er lige eller ulige, så får man et produkt af et lige og et ulige tal, hvilket giver et lige tal. I facitlisten til den anden opgave er imidlertid et lignende argument. (n+1)(n+2)(n+3) er tre på hinanden følgende tal og der vil altid optræde en faktor 3 i dette udtryk.

B.3 Interview med T3

Beviset for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

T3 argumenterer uformelt for sætningen. Hun regner på sandsynligheden for en hændelse i et overskueligt udfaldsrum, dvs et udfaldsrum hvor man har mulighed for at tælle sig frem til sandsynligheden af foreningsmængden af to ikke-disjunkte hændelser. Eleverne skal finde sandsynligheden for at få enten et rødt kort eller en konge, når man trækker et kort. T3 argumenterer herefter for det generelle tilfælde ved brug af et Venn-diagram.

I don't tend to use a particular one of your things[6], *it seems to be more of a combination, but I use - as an example of it - I use a pack of cards and a red card and a king...I tend to do it by your Venn diagram and "you have got the probability of A", "you have got the probability of B". "you put that version twice. OK, so you gonna take it away".*

Min version 3 anser hun for at være for svær, ihvertfald for de elever, hun underviser [7]

You know..I wouldn't do this one. I found what you have got here is probably too difficult for most of them to understand, because it has got numbers which are too difficult..we don't put little Bc's or anything like that, we just call them A and B and the intersection .....this part I found would be far too complicated for them to understand, so therefore you just do it by a simple diagram, or as I said I just did with the card and worked through that. And you do two or three examples and eventually get it through.

Produktreglen

T3 beviser sætningen, hvis klassen er god nok.

For a couple of years I have done 6th form bursary calculus class and those you can do it with. You wouldn't do it with an ordinary class.

Der er dog tale om, at hun foretrækker at bruge differentialer fremfor at bruge definitionen på en differentialkvotient, som hun - formentlig fordi beviset er mere symboltungt - finder er sværere for eleverne.

[6] T3 refererer her til de forskellige versioner af argumenter for sætningen, man finder i interview-spørgeskemaet.

[7] På T3's skole er matematikundervisningen niveaudelt, selvom der sigtes på den samme eksamen. T3 refererer til en "scholarship-class". Dette er en klasse, hvor man stiler efter udover at forberede eleverne til den normale eksamen at forberede dem til en særlig svær privat eksamen, hvor de elever, der klarer sig bedst får legater til videreuddannelse.

Doing it by first principles, students find extremely difficult, especially in 6th form and by 7th form they are still not accepting it. So I tend to use dy/dx more than the dash, because it makes it a little bit more sensible to them.

Hvis T3 har en klasse, hvor hun vælger *ikke* at give et bevis, viser hun de studerende at "reglen virker".

You just ehm..differentiate that out. You multiply it out and differentiate it out and then you would do it by the rule and say: "Ok, it works".

Det kan kun lade sig gøre uden brug af den produktregel, som man jo skal vise, hvis T3 har et eksempel som f.eks. $x(x+1)$, der kan differentieres både ved brug af produktreglen og ved brug af reglen for differentation af sum/differens og ved brug af reglen for differentation af x^n.

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

T3 mener ikke, at beviset er et der skal inddrages i en undervisning, der er rettet mod den gennemsnitlige elev. Det er kun for de særligt dygtige elever. Hun har - fremgår det af citaterne - tidligere ført beviset, men fundet det for vanskeligt for eleverne. Hun fravælger nu ikke udelukkende beviset af hensyn til eleverne, men også fordi hun ikke selv føler sig fagligt sikker.

Irrational number..yes, we teach it to the top ones in calculus, but you wouldn't worry about the general students.

Again, that is, a scholarship (class) would perhaps do it, yes, but the ordinary students won't. And I usually don't bother with it. It's perhaps because I am not too keen on irrational numbers.

T3 mener at man, når man udelader beviset blot skal fortælle eleverne, at $\sqrt{2}$ er irrational og give eleverne en ide om, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal i lighed med andre irrationale tal, eleverne tidligere er stødt på. Man definerer at $\sqrt{2}$ er irrational. Eleverne kan "se" at $\sqrt{2}$ er irrational, ved at se tallet repræsenteret på lommeregneren som et decimaltal, hvor der ikke er et mønster, der gentages i decimalerne (!).

Yes, I do it in calculus, I have tried it, but..no again, we usually just tell them what's irrational. You say: "OK π is irrational, e is irrational..look put it on your calculator. You can't get $\sqrt{2}$ with any repeating pattern, so therefore we are defining an irrational (number) rather than proving it.

B.3.1 T3's holdning til beviser

Beviser er af meget lille betydning i matematikundervisningen

T3 understreger ved flere lejligheder, at hun anser beviser for at have en perifer position i matematikundervisningen.

I was trying to say here before that proofs are not an important part of our teaching in schools.

we do very few proofs, we really do.

Grunden til at der er beviser i undervisningen er dels, at nogle af dem er obligatoriske og dels at de dygtigste elever skal lære selv at føre beviser

T3 finder at grunden til, at der er beviser i matematikundervisningen er, at det bliver forlangt fra "systemets" side i form af de obligatoriske beviser, men hun mener også at der skal være nogle beviser for de dygtigste elevers skyld. Det at de ser nogle beviser er en *forudsætning* for at de bliver i stand til selv at føre beviser. Det kunne pege på, at de "særligt dygtige elever" T3 har i tankerne er kommende, professionelle matematikere.

..we do some proofs because they are in the syllabus, but generally they are only for the best of the better kids who can learn to do proof for themselves.

At beviser er for de "særligt dygtige elever" understøttes af, at T3 mener beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal kun er noget, der hører hjemme i "scholarship"-klassen.

Som erstatning for at bevise en sætning kan man vise eleverne at "reglen virker" eller generalisere udfra taleksempler

T3 udtaler sig i det følgende om, hvad hun gør, når hun vælger ikke at bevise en sætning. Hun viser enten at "reglen virker" eller - i hvert fald som jeg fortolker det - generaliserer udfra taleksempler.

I don't do them very often, because the students just don't see any point in it. So, it varies. Sometimes you state the theorem and then you go about showing or proving it. Other times you ..just show how it works. You know, you just use it and show that it actually works rather than proving it...And the other way is to gradually work up to it by examples.

Med "show that it works" mener T3 formentlig, at man i et specialtilfælde kan argumentere for, at sætningen er konsistent med de sætninger, eleverne tidligere er blevet præsenteret for eller på anden vis kan argumentere for resultatets rigtighed. Med produktreglen kan man se på specialtilfældet hvor man vil finde differentialkvotienten af $x \cdot (x+1)$, hvor man kan bruge produktreglen, men man kan også gange parantesen ud og bruge en kombination af reglen for differentation af sum og reglen for differentation af x^n. I tilfældet med $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ kan man vise, at man når man bruger sætningen får samme resultat, som hvis man tæller sig frem til sandsynligheden for at få en rød konge ved at trække et kort i et spil kort.

I tilfældet med $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$sætningen argumenterer hun blandt andet for den ved at generalisere udfra taleksempler.

...so therefore you just do it by a simple (Venn)-diagram and you do two or three number examples and eventually you get it through.

Netop denne sætning er dog lidt anderledes og T3 finder, at det er nødvendigt også at argumentere på anden vis. Det er nødvendigt, at eleverne har en forståelse af, at man tæller sandsynligheden for hændelserne i fællesmængden med to gange, hvis man blot adderer sandsynlighederne. Til gengæld finder T3, at det er fuldt tilstrækkeligt, at man argumenterer for at summen af de n første termer af de ulige tal $(1 + 3 + ...)$ er n^2

MH: And you have actually said that in the series and in the probability example you would prefer number examples as a means of introducing it (the theorem). How come you find it sufficient? T3: Ah, sometimes you don't. Definitely for the series (example) it is sufficient. For the probability one you have got to go over explaining, that you have got an intersection here, so yeah, it (giving a number example) is not completely sufficient.

En af grundene til at T3 finder, at det ikke er tilstrækkeligt at argumentere for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ udfra generalisering af taleksempler er, at fortolkningen af "overlappet" giver anledning til at formulere, hvad man skal forstå ved ikke-disjunkte hændelser. Selvom T3 ikke direkte formulerer det, er det formentlig hendes erfaring, at eleverne ved at få denne forståelse, får lettere ved at regne opgaverne, hvor man gør brug af $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Beviser kan være med til at give eleverne en bedre forståelse af stoffet

T3 mener, at beviser muligvis kan bidrage til elevernes forståelse af stoffet og at de dermed har en berettigelse i matematikundervisningen. Hun uddyber imidlertid ikke på hvilken måde.

if it helps some, you have got to know, you have got to try everything to help their understanding, so you do some proofs, but it is not..the major part of it.

"(The) argument convinces the students of the truth of the theorem". No it doesn't usually. "Explaining to the students why it is true". That's more likely. Convinces them of the truth of it. No. But explaining to the students why the theorem is true, yes sometimes it can do it.

T3 er dels ikke i stand til at formulere på hvilken måde beviser kan bidrage til elevernes forståelse af stoffet og dels så er hun i tvivl om, hvorvidt det forholder sig sådan, hvilket hendes sprogbrug "that's more likely", "sometimes it can do it" understreger. Hun understreger da også, at beviser højst kan fungere som et *supplement* til de øvrige aktiviteter. At eleverne får en bedre forståelse skal muligvis forstås som at T3 oplever at elever efter at have arbejdet med beviset for en sætning er bedre i stand til at bruge den.

I matematikundervisningen skal man prioritere, at eleverne bliver i stand til at regne (eksamens)opgaver

T3 anser hovedformålet med matematikundervisningen for at være, at eleverne bliver i stand til at løse (eksamens)opgaver og at de forstår, hvad de gør. Hvad hun mener med det sidste står ikke helt klart.

You know, the whole aim is to get them to understand what they are doing. Failing that you get them to be able to do the problems. So..you know the first aim is to get them to understand, but if they can't understand you just opt for them to be able to do the problems.

Eleverne - med undtagelse af de dygtigste - er ikke motiverede for beviser

Dette er noget T3 vender tilbage til mange gange i løbet af interviewet og det gør hun blandt andet, fordi det er hendes hovedbegrundelse for at fravælge beviser. I starten af det første interview siger hun

I don't do them (proofs) very often, because...the students just don't see any point in it.

Eleverne er ikke motiverede for at sætte sig ind i "hvor formlen kommer fra", dvs for at kende til grundlaget for sætningen.

Even bright 7th formers see no point whatsoever in learning where it comes from. They are quite happy to use it, but they don't really want to know where it comes from.

En variant optræder i forbindelse med $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - beviset, hvor det netop nævnes, at de dygtige elever vil interessere sig for beviset.

It's interesting, it's probably important, but for the average student..they don't find it interesting. They don't find it..important to know. All they do is use the rule. For brighter pupils, yes, they will get into it and say "OK, it's important, it's interesting".

Eleverne er så lidt motiverede for at sætte sig ind i beviser, at eleverne reagerer negativt blot man benytter et "bevissprogbrug".

..usually if you say "proof" or "it's a theorem" they are turned off.

Evnen til at regne opgaver er uden sammenhæng med forståelse af/kendskab til beviser for de sætninger, der anvendes

T3 kan godt forstå, at eleverne ikke er motiverede for at lære beviserne, da det der forlanges af eleverne er, at de er i stand til at regne (eksamens)opgaverne. Dette er uden sammenhæng med at de har en forståelse af beviserne for de sætninger, de bruger.

Usually when you are doing a proof of something you are still aiming at getting to a practical end and the proof is not what they are aiming at as far as I am concerned. They are aiming at getting to an answer that is going to get them marks.

Beviser er "højere matematik" og er kun nyttige for den lille gruppe af elever, der senere skal beskæftige sig med matematik

T3 mener, at man i den new zealandske matematikundervisning lægger mindre vægt på beviser nu end tidligere:

I think proofs have gone out, their days have run out and it is shown by our syllabuses now.

Hun anser det for at være positivt, eftersom det tilgodeser den gennemsnitlige elev, der ikke skal beskæftige sig med "teoretisk matematik", hvor det er nødvendigt at kende til beviser. Som sådan anser hun beviser for at være et *studieforberedende element* i matematikundervisningen.

But the amount of proving which was done before was..it is only leading to theoretical maths which, you know, in the general run the students aren't going into high-level theoretical maths..

So, yeah, they need to be exposed to proof a bit, especially as one or two will use them, but...

MH: Do you find there is less emphasis on proof?
T3: Yes, I think it is probably good...I don't think they need it. I don't think they need the amount of proof that they did do. We need to leave some. We need to leave some of it in, but you didn't need to do the amount of proofs we were doing.

Det betyder dog ikke, at beviserne helt skal undlades. Som tidligere nævnt, så mener T3 at beviser muligvis kan forbedre elevernes forståelse af stoffet.

De dygtigste elever skal lære lidt flere beviser - men først og fremmest flere regneteknikker

Man kan undre sig lidt over, hvad der foregår i matematikundervisningen i scholarship-klassen. For mig ser følgende beskrivelse ud til, at det mest drejer sig om, at pensum udvides med krav om at eleverne først og fremmest skal tilegne sig flere regneteknikker, men også se nogle af de sværere beviser.

MH: And "all sort of extras" would usually include an extra amount of proof as well?
T3:..you see, he will do integration by parts, he will seperate into partial fractions and such, he does lots of extras in the scholarship class, so it (the $\sqrt{2}$-proof) would be done at scholarship level.

Opsamling

Generelt anser T3 beviser for at være irrelevante for den gennemsnitlige elev. De dygtigste elever kan dog på en ikke nærmere defineret måde have glæde af beviserne, der kan forbedre deres forståelse af stoffet - formentlig forstået som at eleverne bliver bedre i stand til at regne opgaver.

T3 er meget eksamensorienteret, omend det i nogen grad er "gemt" bag hendes udsagn om, hvad det er *eleverne* forventer af undervisningen. Hvis de ikke kan se nogen forbindelse mellem det, der foregår i undervisningen og hvrodan det kan hjælpe dem med at nå frem til at svare på (eksamens)opgaver, ja så er de ikke motiverede. De er kun interesserede i at "bruge reglen" - ikke i hvorfor reglen er, som den er.

T3 forsøger ikke at formulere, hvad det er eleverne kan tænkes at forstå i matematikundervisningen generelt, evt. med beviser som løftestang. Formålet med matematikundervisningen er tydeligvis at forberede eleven til eksamen og - noget mere nedtonet - at forberede dem til en videregående uddannelse, hvori der indgår matematik.

B.3.2 T3's holdning til bevisførelse

T3's kommentar til polygonopgaven

T3 afviser i første omgang blankt, at eleverne er i stand til at løse polygonopgaven. Generelt kan man ikke forestille sig, at elever er i stand til selv at føre beviser. Citatet viser også, at T3 anser såvel beviser som bevisførelse som noget, der er forbeholdt de allerdygtigste elever og at kendskab til beviser er en forudsætning for, at eleverne kan lære at føre beviser selv og at de primært er i matematikundervisningen af den grund.

OK, this is really going into something that I don't do. I was trying to say here before, that proofs are not an important part of our teaching in schools. That we do some proofs, because they are in the syllabus, but generally they are only for the best of the better kids who can learn to do proofs for themselves...so I am not sure what the relevance would be of this sort of thing.

Eleverne vil være i stand til at give bud på løsningen af ikke-trivielle opgaver, men ikke i stand til at argumentere for løsningen

Dette finder jeg dels underbygges af T3's kommentar til polygon-opgaven, dels på hendes kommentarer til en anden bevisførelsesopgave.

T3 synes polygonopgaven er sjov i sig selv, men hun finder at den ikke er relevant for elever på 6th og 7th form niveauet. Pensummæssigt hører problemstillingen hjemme på 3rd og 4th form-niveau og T3 mener da også godt, at man her kunne forestille sig at eleverne kunne *løse* opgaven - de vil bare ikke være i stand til at argumentere for løsningen.

This sort of thing, the polygons is quite interesting for them. You could run it with 3rd og 4th formers, even to, you know, be able to cut things up and do something mecanically and perhaps discover *something. But as far as going to the formal math of it - no. We are not going to be doing it.*

T3's kommentar til (eksamens)opgaven "Vis uden at løse ligningen $z^3 = i$, at ligningen ikke har nogen reelle løsninger" er dels at den er for svær og teoretisk og hun kun vil lade de de dygtigste elever forsøge sig med den, men hun bemærker også at en gennemsnitselev vil være i stand til at *løse ligningen*, men ikke til at svare spørgsmålet.

So $z^3 = i$ ..You probably put z equal to $a + ib$ and cube it and it is still..mmm..OK. That is quite intersting, no I wouldn't have followed..I wouldn't have covered it through like that..again, it would probably have been left for them to sort out, because it is the last part of the question...OK, they will be able to get them complex root of $z^3 = i$, but explaining about it, they probably wouldn't be able to do no... we would have looked at where the roots of $z^3 = i$ go to and they would probably have come across that thing. It is a fairly easy one to have done, but no we wouldn't have gone into that as a theoretical exercise.

Det er ikke relevant for eleverne at arbejde med problemstillinger, der er rent matematiske

Dette fremgår af det foregående citat, at T3 mener at en opgaven "vis at $z^3 = i$ ikke har nogen reelle løsninger" er for teoretisk. Den angår en rent matematisk problemstilling og opfattes derfor som irrelevant for eleverne at forsøge sig med. T3 afviser i lige så høj grad opgaven på grund af problemstillingens manglende relevans for eleverne som på grund af dens sværhedsgrad.

Dette går igen i T3's kommentar til opgaven "Antag af tallet p er rational og at $p+q$ er irrational. Er q rational, irrational eller kan q være begge dele? Begrund svaret". Det er en opgave, som T3 opfatter som "matematik for matematikkens skyld" og en problemstilling som hun tydeligvis opfatter som irrelevant. Ren matematik bruges her nærmest som et skældsord.

I agree in a way that formal proving has gone. That explanations of what is going on, discovering what is going on is there and that is fine. We are building on that. But..ehm..just math for maths sake which is these sorts of numbers, you know, like proving that they are irrational. I have..I have got to say for a *start "who cares now" whether they are rational or irrational. You know, what is the consequence of it? That is pure maths..*

Opgaven adskiller sig fra de andre ved at være en som T3 opfatter som klart for svær. Hendes umiddelbare reaktion på opgaven er, at hun generelt undgår at komme ind på rationale/irrationale tal i sin undervisning.

Oh, yeah, these irrational ones, I just do not like, so I have carefully stayed clear of those. I **really** *do not like them...so yeah, I would pass on that one.*

Bevisførelsesopgaver - også de der optræder i eksamens-sættene er irrelevante og inddrages ikke i den daglige undervisning med mindre, der er tale om særligt dygtige elever

Generelt undlades bevisførelsesopgaver - også dem der er i eksamenssættene af strategiske hensyn. Det er ikke opgaver, der tæller ret meget i det samlede regnskab og eleverne kan klare sig igennem uden at kunne dem.

And that one, yeah, I have gone through it and I went through it with the schol(arship) students and when they actually had that question and we thought. "OK, what are they asking, how would you get there? and we would sort it out. Again, with ordinary 7th formers we would just say most of those are one mark and we wouldn't worry about it.

Bevisførelse i form af at argumentere for løsninger til opgaver er ikke noget, der vægtes, fra "systemets" side

T3 mener, at der lægges megen vægt på problemløsning i den new zealandske matematikundervisning, men at det man tester primært er eleverne evne til at finde den matematiske problemstilling i tekstopgaver. Den tid der tidligere blev brugt på beviser bruges nu på dette.

And it has gone a lot more into word problems, which you have got to sort out to get the math problems, before you can even do the maths! And so that has taken over where the proofs have been left out.

Når eleverne løser ikke-trivielle opgaver anses det for tilstrækkeligt, at elever løser opgaven ved at generalisere udfra taleksempler

T3 mener, at der lægges her mere vægt på, at eleverne når frem til et svar, end på elevernes argumentationen - det anses for tilstrækkeligt, at eleverne kontrollerer resulatet med numeriske eksempler.

In NZ more and more problem solving are more guess and check. So the guess-and-check method is becoming more common than using some sort of proof to get there.

Som eksempel beskrives følgende opgave, hvor eleverne kan "nøjes" med at foretage en "investigation" og gætte sig til formlen ved at generalisere. T3 finder, at eleverne før de forsøgte at lave en sådan opgave skulle kende til aritmetriske rækker og dermed havde et teoretisk bagland, der muliggjorde, at de kunne lave opgaven ved at genkende strukturen og henvise til formlen for summen af en aritmetrisk række.

You have got two teams in a competition. And so you have got one game. When you add two teams to a competition you have got A and B and C, three games and you know, you build up the pattern for that. [8]

	A	*B*	*C*
A	*X*	*X*	*X*
B		*X*	*X*
C			*X*

So that - although I would have probably just gone and used an arithmetic sequence or something like that to find the answer, they were expected just to follow the pattern through..you couldn't actually give them an explanation either (of) how to get there. It's just "Oh, yeah, this might work. Try that and plug it in".

Det er dog ikke - som man kunne tro - at T3 er betænkelig ved sådanne opgaver, fordi eleverne kunne forledes til at tro, at "guess and check"-metoden er en gyldig måde at argumentere på. Hun foretrækker opgaver, som man kan løse ved at bruge allerede kendte formler, dvs problemstillinger som eleverne i realiteten har set før og som de har en algoritme til at løse. I denne type opgaver findes der ikke en algoritme. Det er nyt hver gang og dermed meget svært at lære eleverne.

You say to a kid. Find a general formula and you sort of..."Oh, help", you know...we actually try and get them to do that, but we don't have that much success and it is a hard thing to teach, because you can teach them to look at the pattern, you can try and teach them to sort of finding a formula, but you know, each one is different..

Der bør ikke lægges speciel vægt på at lære eleverne om forskellen på at lave "investigations" og føre et egenligt bevis

Man kunne tro at T3 så en pointe i at gøre det klart for eleverne, at man netop ikke har løst en opgave helt, når man blot generaliserer udfra taleksempler. T3 opfatter det imidlertid ikke som et "systemkrav". Der lægges ganske enkelt ikke op til at man skelner.

emphasising the differences doesn't actually help them in the exam, you know, in 5th form..the large majority in 6th and 7th form..if any method goes. So

[8]Hvis man har en turnering, hvor alle skal spille mod alle, vil der være 1 kamp i en turnering med to hold, 3 (1+2) kampe med tre hold, 5 (1+2+3) kampe med 4 hold osv. En aritmetrisk række er en række, hvor der er samme numeriske difference mellem hver term i det her tilfælde en. For n termer er summen $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$, hvor a er rækkens første term og l er den sidste

what is the point in emphasising that you have got a difference between finding a pattern and doing a proof? There is no real point, OK. Because it (the point) is to find an answer, in general you aim to find an answer. Whether it is by proof or whether it is by a pattern doesn't really matter.

Eleverne bør kende forskel på et taleksempel og et bevis

T3 er ikke helt konsistent, da hun på den ene side ikke mener, at det er vigtigt, at eleverne får indsigt i forskellen på at generalisere udfra taleksempler og bevise, men på den anden side skal vide, at man ikke kan bruge taleksempler til at argumentere for en sætning.

Eleverne får ifølge T3 ikke points, hvis de i en opgave, hvor de foreventes at argumentere for en sætning ved at gengive et obligatorisk bevis, forsøger at argumentere med et taleksempel.

You would say: "All-right, you know, you just can't prove it by just numbers. If you can OK, say, it is not right by numbers, you just can't do it by numbers, but (and) you should definitely use some other method of proving it and we have done some of those...we mark them wrong, if they didn't..It was a trig-proof, one of the trig-proofs where they just put numbers in both sides and we said "oh, no you gonna prove it more than by showing that..".

Jeg synes det siger noget om, at T3 først og fremmest tænker i, hvad "systemet" forlanger fremfor en selvstændig stillingtagen til, hvad eleverne bør lære.

Opsamling

T3 mener i lighed med T1 at polygon-opgaven er sjov og interessant, men at man skal kun forlange af eleverne, at de kommer frem til et svar - ikke at de argumenterer for det.

T3 mener ikke, at bevisførelsesøvelser eller i det hele taget det at lære at føre beviser er relevant for hendes elever. Det bidrager ikke til deres "forståelse" - det formuleres igen ikke af hvad - det er for svært og navnlig anser hun det ikke for relevant at eleverne lærer at bevise. Det er jo kun noget kommende, professionelle matematikere får brug for.

Bevisførelse i form af selvstændigt at argumentere for løsninger af problemer er simpelthen ikke er på dagsordenen i det NZske skolesystem ifølge T3. Det accepteres, at man laver "pattern recognition" og ikke underbygger med forklaringer af hvordan og hvorfor mønsteret fremkommer. Hun anser det for problematisk, at det ikke er det, men det er nok nærmere begrundet i, at matematikundervisningen så ikke kun er et spørgsmål om at lære eleverne at bruge formlen, end at hun synes evnen til at evnen til at føre beviser er en egenskab, man bør udvikle hos eleverne. Bevisførelse er for T3 noget, der er knyttet til såkaldt "teoretiske problemstillinger", hvis anvendelighed og relevans er tvivlsom - uden at det dog helt fremgår hvorfor.

Bevisførelse er derfor lidt et sidespor, noget man gør "for sjov" og de få bevisførelsesopgaver, der er til eksamen kan man roligt ignorere. Dog mener T3, at man skal søge at få eleverne til at kende forskel på gyldigheden af et udsagn underbygget ved hjælp af et taleksempel og et udsagn underbygget ved hjælp af bevis.

B.4 Interview med T4

B.4.1 Eksempelbeviserne

T4 underviser ikke i statistik og mener derfor ikke noget om $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Produktreglen

Hvordan T4 vælger at argumentere for produktreglen afhænger meget af, hvordan hun synes klassens niveau er. Om mine to versioner af at argumentere for produktreglen siger hun:

I have done all of these at different times, depending on my..my group of kids.

Hun ville i tilfælde af hun rent faktisk fører det formelle bevis bruge differentation "by first principles"[9]. Efter hendes mening bygger det udmærket oven på, at hun introducerer "differentation by first principles" i første omgang.

I would be really happy with something like that..we would probably start off looking at how to differentiate by first principles anyway, so it's just an extension.

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

T4 underviser ikke i beviset. Det er hendes erfaring, at beviset er for svært og ikke giver mening for eleverne.

Some of the others..like when I have taught, looked at this one, before the irrational numbers:..they have got no idea..and you just loose them..I would nine out of ten times leave it out...I would leave it out.

Udover at T4 anser beviset for at være for svært for eleverne, anser hun det også for irrelevant at bruge tid på avanceret stof, når flertallet af eleverne kæmper med at tilegne sig basale (regne)færdigheder. Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et irrationalt tal beskrives som overflødigt i denne sammenhæng.

Particularly in calculus..they have got lots of, you, know, they need to know their algebra before they can do differentiation, using the chain rule, the product rule, whatever. They have got to be very sound on their algebraic skills...and therefore something like this is superflous to them at this stage..

[9] Man differentierer produktet ved brug af definitionen på en differentialkvotient

Selv de dygtige elever vil ikke anse beviset for at være interessant, mest fordi de er meget eksamens-fikserede - og $\sqrt{2}$ - beviset er ikke et "prescription proof", dvs et bevis eleverne skal kunne til eksamen.

and we have some very able students here and even some of those, you know..they are not really interested in the proof. All they are interested in is: is this going to be in the exam.

If I am looking at it from a time point of view and a prescription point of view..it is not often required in an exam situation from the prescription point of view.

T4 fravælger altså både beviset fordi det er for svært for eleverne, fordi tiden kan bruges bedre på andre ting i matematikundervisningen og fordi det ikke forlanges af eleverne, at de kan beviset til eksamen.

B.4.2 T4's holdning til beviser

Beviser kan vise eleverne "hvor sætningen kommer fra" Som jeg vil underbygge videre frem, så er det en del af T4's grundfilosofi, at undgå at give et billede af matematik som et fag hvor formlerne er ubegrundede. Beviser kan i den sammenhæng for nogle studerende og i visse tilfælde være en hjælp.

I think it (proof) is important, I think for some students, so that they can understand where it is coming from.

If we look at that one..the compound-angle formula..they know..they have seen it on their formula sheet all year, but it hasn't meant anything to them..it is very easy to take values and plug them in and therefore they can do that, but they don't know why or what it is showing.

Beviser og argumenter for en sætning virker mere overbevisende end taleksempler

Eleverne bliver bedre overbevist om en sætning, når man argumenterer for den med andet end taleksempler og påstande om, at "formlen virker".

I think it convinces them. Instead of saying you have these values and you can put them in here.. and it always works...it shows them that I am not just making it up, that it has been proved before.

Det er vigtigere for eleverne at se eksempler på anvendelser af den matematik, de laver, end at se beviserne for sætningerne

T4 finder, at det absolut vigtigste er at lære eleverne at anvende matematikken og give indtryk af at matematik rent faktisk kan anvendes og bliver anvendt. Man kan som lærer godt gøre beviser interessante for eleverne, men det er ikke her vægten skal lægges.

I think you can make them (the proofs) interesting but I...for them it is more intersting to find a practical use for whatever they are learning in the classroom.

En variant af dette er, at beviset skal være så let tilgængeligt, at de studerende kan fokusere på det egentlige - anvendelsen af sætningen.

If I felt that they wouldn't understand it, I wouldn't do it...If I thought it was just going to cloud the issue and they would focus on it and only that and would not be able to apply it I couldn't see the point of doing it...if they can focus in on it and say "ah, yes, that is why that works", then I would use that and then apply it.

Hermed giver T4 udtryk for, at evnen til at anvende et teorem og forståelsen af et bevis for sætningen udelukkende har noget med hinanden at gøre, hvis beviset er så let tilgængeligt, at det overbeviser eleverne om sætningen og hjælper dem til at acceptere det.

Det er kun vigtigt at argumentere for "formler" - ikke for mere internt-matematiske egenskaber

T4 anser først og fremmest en uformel argumentation som vigtig i forhold til at begrunde *udseendet* af "formelerne". Det bygger jeg blandt andet på, at mens T4 vægter, at man inddrager eleverne i at argumentere for det rimelige i, at Trapezsummen[10] giver et tilnærmet areal under en graf (dette sker ved at lave en slags semigenerel argumentation for arealstørrelsen, hvor der gøres brug af generelle termer, men få intervaller. Herefter generaliseres udsagnet). T4 anser det derimod ikke for interessant at diskutere og vise, at Trapezsummen *konvergerer* mod værdien af et givent integrale og altså er en brugbar numerisk metode. Det er formlens *udseende* hun sætter ud mod at forklare.

MH: You could perhaps discuss whether it is..discuss whether it is a proof or not because what is really the problem is whether it (the Trapezium sum) really converges to the area under the curve using that method. I mean that is really what you want a guarantee of as a mathematician. And that is just something where you said it is that way.
T4: Oh, I think that investigating was all we did...I do agree that it is not enough. I don't know whether I actually emphasise that in class, because like I say, I don't spend that much time on proof.

Jeg synes dette meget fint illustrerer, at T4 som "anvendelsesorienteret" vægter det "formelforklarende", fremfor en mere internt-matematisk problemstiling. For hende er en sådan problemstilling formentlig et eksempel på "matematik for matematikkens skyld" og som sådan ikke interessant for hendes elever.

Beviser skal kun inddrages hvis de er umiddelbart forståelige

T4 synes kun, at beviser skal inddrages, hvis de er umiddelbart forståelige for eleverne. Enten fordi eleverne er kvikke - eller fordi beviserne er lette,

[10] Trapezsummen er givet ved $T = \frac{h}{2}(y_0+2y_1+....2y_{n-1}+y_n)$, hvor y_0..er funktionsværdien i startpunktet og y_n er funktionsværdien i slutpunktet og h er intervallængden.

I prove the theorem because it is something that I think they can cope with.

I mean, I go over the proofs, if I think it is going to help the students, if they are going to understand it. If I think they will get totally lost I won't touch it.

Det er vigtigt at have en ide om, hvad et korrekt matematisk argument er

Dette er et aspekt, som T4 finder burde indgå, men dog kun for de gode elever.

I also think it is important that they have got an idea of what is a correct mathematical argument and I particularly find that, you know, in the 7th form, so that is another reason for doing it, but again, you know if it is one out of 20 students who is going to cope with that...

Beviser er ikke relevante for de svageste elever
T4 opererer - i lighed med de andre lærere - med en bevisfri basisdel af undervisningen - "the skills part", der går ud på at introducere sætningerne uden bevis og lære eleverne at bruge dem.

That is the skills part, that is saying "OK, this will always work for you".

Kendskab til et bevis for en sætning er uden sammenhæng med evnen til at kunne anvende sætningen

En af grundene til at T4 betragter beviser som perifere er, at hun ikke mener, at der er nogen sammenhæng mellem elevernes evne til at anvende en sætning og at de kender til og forstår et bevis for de sætninger, de anvender.

..some people might think it is vitally important to do all the proofs, but being able to do the proof doesn't mean you can apply the knowledge.

De obligatoriske beviser kan bruges til at gøre eleverne fortrolige med formen på et formelt bevis

Hvis man ser på T4's beskrivelser af, hvordan hun underviser i de obligatoriske beviser, står det klart, at hun bruger dem som en anledning til at gøre eleverne fortrolige med den *form* et formelt bevis har.

here is the trig-identity..I have pointed out quite clearly to them that if they don't put this down at them bottom: QED, then it is not a..they haven't actually finished with the proof or they have to say "as required" or something along those lines. They have got to do it in, you know, in a logical sequence. And I would also say to them that they have got to have an explanation at the side..

Beviser bidrager ikke afgørende til elevernes forståelse af stoffet

It is not a lot in the exam..it is not a lot that relies on proof. So I do what is important for their understanding.

Opsamling

T4 underviser ikke i statistik, hvorfor $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ er ude af betragtning. Beviset for produktreglen inddrager hun, hvis hun synes klassen er dygtig nok. Hun beviser ikke at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal. Det er ganske enkelt for svært for eleverne, eleverne bliver desuden ikke eksamineret i beviset og de krav de i øvrigt møder er det vigtigere at sørge for at de kan imødekomme.

For T4 er hovedformålet med matematikundervisningen, at eleverne forstår sætningerne i matematikundervisningen og lærer at anvende dem. I den sammenhæng anser hun beviser for at spille en perifér rolle, fordi kendskab til/forståelse af beviset ikke har noget at gøre med elevernes evne til at anvende sætningerne.

For de dygtigste elever kan beviser fungere som forklaring på "hvor formlen kommer fra", men det kræver, at beviset er så let og gennemskueligt, at eleverne fanger pointen og ikke bruger kræfterne på at forstå argumentationen. Det må heller ikke være sådan, at eleverne bliver forvirrede af beviset og ligefrem får vanskeligere ved at anvende sætningen.

For den gennemsnitlige elev er det vigtige, at de forstår og lærer at gengive de obligatoriske beviser korrekt. Der er ikke tid til - og T4 er ikke indstillet på - at prioritere beviser udover de obligatoriske. Det er vigtigere, at eleverne ser eksempler på anvendt matematik, end at de f.eks. ser beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal.

T4 tror gennemgående på sine elevers evne til at gøre andet og mere end blot at tilegne sig regneteknikker og anser ikke beviser for at være "didaktisk umulige" og hun finder ikke at det er tilstrækkeligt at præsentere formlerne for eleverne og gennemgå et antal taleksempler. Hun arbejder med at eleverne selv "ser" formlen og indser, hvorfor den er sand - man kunne kalde det en slags uformel bevisførelse. Det tjener for T4 til, at eleverne forstår sætningerne. Hovedprioriteten er dog, at eleverne tilegner sig regne-teknikker af hensyn til, at de kan overleve eksamen.

B.4.3 T4's holdning til bevisførelse

T4's reaktion på polygonopgaven er, at den er så svær, at hun selv vil være nødt til at tænke sig om for at løse den og at det højst er noget hun vil gøre i starten af året, hvor der er god tid.

I have to say, if I was going to do it I have to believe that.. I have to be able to see it myself, if I can't see it myself, then there is no point in..having this..unless I am particularly brave and think, OK, I am going to have a a go this and we will discover it together

T4 anser bevisførelse i form af at føre formelle beviser for at være en meget avanceret aktivitet, der bestemt ikke har plads i matematikundervisningen på 6th og 7th form niveau.

So I think if we gonna look at real, real proofs and people...proving something for themselves...I think that might be for the intellectuals and not for every ordinary Joe Bloggs from the street.

Men som det vil frem, så indgår uformel bevisførelse i T4's undervisning.

Eleverne skal ideelt selv argumentere uformelt for de "formler" de senere hen skal anvende

T4 lægger vægt på, at eleverne i hvertfald nogen gange selv forsøger på uformelt at argumentere for formlerne i matematikundervisningen.

T4: I try to get af fourth form class to tell me, to prove to me, why the area of a Trapezium is 1/2(a+b)h.
MH: Could they do it?
T4: They..it wasn't a formal proof, but they could convince me, that they knew why, you know.

Det gør hun blandt andet for at eleverne ikke opfatter "formlerne" som smarte konstruktioner nogen uden videre har fundet på. Der ligger overvejelser omkring hvorvidt den fremsatte påstand nu også er sand til grund for sætningen. Samtidig så vil hun gerne have at eleverne opfatter formler som arbejdsbesparende konstruktioner, forstået på den måde, at de slipper for selv at skulle argumentere for dem i detalje og at de kun kan tillade sig at bruge formlerne, fordi andre har argumenteret for dem.

I think some of the stuff I have done over the last couple of years has been so valueable for once I am not giving a kid something and saying "here, this is the formula. Now, do it!" giving the exercises. They have actually got an understanding that it isn't just someone who has dreamed up some wonderful ideas. They know that people have spent time and really, you know, argued the point about it and therefore they can... the reason they have got the formula is the result of someone's hard work to make things quicker and easier...

Bevisførelse af "teoretisk" karakter er for svært for eleverne

At T4 primært inddrager beviser og bevisførelse i det omfang, at det tjener til at være "formelforklarende underbygges også af T4's overvejelser omkring de tre bevisopgaver fra et eksamenssæt. De er ganske enkelt for svære for flertallet af de studerende

I put them in what I have to say the "too complicated" basket, because the majority of the kids are struggling with the mathematics of the basic type anyway, so I don't want to confuse them any more.

Hun opfatter ikke bevisførelse som et "systemkrav" forstået på den måde, at de ganske vist er der, men de giver meget få point og det for alle andre end de aller-dygtigste elever ganske enkelt ikke kan betale sig at bruge tid på "svære" point. Selv disse elever forventer hun ikke vil være i stand til at komme frem til tilstrækkelig gode løsninger på opgaverne.

I am selective...I look at it as part of the exam technique. Some of my those students will never get some of those..those areas, so I don't even bother.

....I would pick on certain students and I have got three or four in that class, that I would say well, I want you to think about it and come back...and you know. On that basis I would actually sit down with them and go through it in detail. And probably with a model type of solution after they had given me their ideas.

Jeg tror imidlertid også det har betydning, at der er tale om interntmatematiske problemstillinger, som T4 ikke anser for at være vigtige og interessante for eleverne.

B.4.4 Opsamling

T4 finder at polygonopgaven er meget tidkrævende og så svær, at hun selv skal tænke sig godt om. Til gengæld forlanger hun af sine elever, at de søger selv at argumentere for sætningerne i matematikundervisningen, så har hun faktisk et element af bevisførelse i sin undervisning.

Som sådan er uformel bevisførelse et nyttigt redskab til at vise eleverne, at der er en grund til at formlerne er der og at det er muligt at argumentere for dem. Formel bevisførelse eller måske rettere at gennemføre bevisideer formelt er imidlertid alt for svært for eleverne.

Bevisførelse som det f.eks. optræder i eksamensopgaverne anser hun for noget hun ikke vil bruge tid og kræfter på. Måske fordi de problemstillinger, der repræsenteres i mine eksempler er "rene" matematiske problemstillinger, som T4 anser for at være irrelevante for eleverne.

B.5 Interview med T5

B.5.1 Beviseksemplerne

Sætningen $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

T5 introducerer til sætningen ved regne på et eksempel med to ikke-diskjunkte hændelser. Formentlig for at gøre eleverne opmærksom på, at der er et problem: man kan ikke blot addere sandsynlighederne for de to hændelser for at finde sandsynligheden af foreningsmængden af dem. Herefter illustrere hun situationen med et Venn-diagram og flere taleksempler og bruger det til at argumentere for sætningen, dvs for at det må være fællesmængden af de to hændelser man får "for meget".

..I throw two dice one red and one blue and we rule up our sample space..And we work through examples like the probability of getting a 2, the probability of getting a 4..the probability of getting a red 2 or a blue 4..And then I would move on to Venn diagrams and they very soon see how it works with numbers and from that I give the general rule..

T5's betragtninger omkring sætningens relevans bygger på, at det er vigtigt i opbygningen af elevernes forståelse af uafhængige hændelser.

It is important for them to know the formula because..whenever one goes on talking about mutual exclusiveness and that sort of things the formula is very important.

Herudover - men det har mere karakter af at være en generel betragtning - betragter hun sætningen som et vigtigt redskab for eleverne til at tænke systematisk over problemstillinger i sandsynlighedsregningen - også problemstillinger, som ikke er så overskuelige, som dem hun har regnet på.

It also helps them to get their thoughts in order, because there are lots of problems which really can't be expressed diagrammatically and they have to get their thoughts in order.

Hun synes derimod ikke, at det er vigtigt at argumentere mere formelt for sætningen. Det er for tidkrævende og eleverne er ikke motiverede for det:

Personally I would consider it interesting, but I wouldn't think it necessarily is for the students. It is very much a time factor and often they tend to be turned off by proofs.

Hun betegner da heller ikke sit argument som et bevis.

T5 vægter ikke præcisionen af argumentet særlig højt. Det vigtigste når man argumenterer for sætningen ved hjælp af Venn-diagrammet er at overbevise eleverne om, at "noget" lapper over.

MH:..You made some notes for me explaining how you argue for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *using a Venn diagram.*
T5: Yes, I remember that.
MH: And I just wonder what you actually use as your argument for that..you have to do the subtraction...
T5: Because it is counted twice..you can do it with numbers..it's the numbers that you are counting twice...it is the probability that you count twice...The kids, you know, at that stage, they are..you are teaching them af visual way of doing a quite difficult thing...And to get them to visualise the argument I don't worry about the finer points of probability of that area, of what that actually represents, because it can represent a number. I mean they can use numbers and work probabilities out from there. It is just to see that they have counted something twice.

Produktreglen

Her fører T5 et bevis, men hun gør brug af differentialer fremfor funktionalnotationen. Hun gør det først og fremmest udfra en betragtning om, at der er en notationsmæssig økonomi i det. Eleverne får alligevel brug for differentialerne i intergralregningen, når de skal arbejde med at beregne arealer og volumener. Derfor kan man lige så godt nøjes med kun at indføre dem i stedet for også at indføre "mærke"-notationen.

And I found that using that type of proof..I think that it gives students a much better idea of calculus and I think it builds up the important concepts needed to understand calculus at advanced level. It helps them see... in particular when they are working on areas, volumes. The usage of delta x, delta y is better able to be understood. I find using this notation - you use f', g', y' and so forth..suddenly there is a new notation and it throws them...

Jeg tror T5' forestilling om, at eleverne "får en bedre ide om analyse" og bedre tilegner sig de vigtige begreber bunder i, at eleverne i kraft af et simplere bevis med de samme grundovervejelser lettere kan se forbindelsen mellem disse og sætningen. Beviset får betydning som en forklaring på noget, der ellers fremtræder som en mystisk formel, der kommer ud af det blå, hvilke følgende udtalelse underbygger.

Because..as a student once said to me: "Hey, this is a whole lot of jigger. You just do something and the answer comes out". And he was right. I think they need to see there is a reason for differentiating. They need to understand how this is derived.

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

Dette er ikke en sætning T5 inddrager i sin undervisning. Eleverne ved fra tidligere, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal - og det er der ingen grund til at gå nærmere ind på.

They know it is an irrational number. I just leave it at that, that $\sqrt{2}$ is irrational. I don't prove it's irrational, because I just feel that by definition it is irrational.

Noget kunne tyde på, at T5 *selv* finder sætningen irrelevant. Hun begrunder dog også sit fravalg med, at problemstillingen er for abstrakt og svær for eleverne og at det skaber motivationsmæssige problemer, at man vil søge at bevise et resultat, eleverne finder er indlysende.

Many of them are not able to think in the abstract and they see the proving of things which they have always taken for granted as being, I suppose, as being a bit..irrelevant, I mean, to them a lot of concepts about numbers are obvious... They simply haven't got the interest..or their cognitive development is not advanced enough for them to actually be interested or aware of the..I don't know..the elegance or..they need to do this.

B.5.2 T5's holdning til beviser

Beviser kan bidrage til at give eleverne et billede af matematik som en sammenhængende teoribygning

T5 finder, at der i den new zealandske matematikundervisning lægges meget vægt på enkeltstående begreber og for lidt vægt på, at matematik fremstår som sammenhængende teoribygninger.

Den aksiomatiske tilgang til matematikken, hvor man bygger en teori op på grundlag af aksiomer og hvor beviserne virker som bindeled mangler.

..at the moment I feel our mathematical learning is very bits and piecy. They do a little bit of this and they do a little bit of that and they do a little bit of something else. And I like most of my senior students to get a holistic view of mathematics..And I feel that doing proofs might help in some small way..to see the connections, to se the pattern, to see the beauty of mathematics

I want them to..get the idea that from one mathematical discovery we can move on to another one to get the idea of..the building blocks of mathematics, the structure of the subject.

Beviser kan bruges til at udvide elevernes repetoire af regneteknikker

T5 finder at en af de ting, eleverne kan få ud af at arbejde med beviser er at se og lære de regnetekniske tricks, der optræder i nogle af beviserne.

But also, there are useful techniques. Most proofs have techniques which are perhaps peculiar to them, but are introducing students to a range of techniques that they can perhaps apply in other work they are doing.

Hun giver et eksempel på en sådan regneteknik:

It's quite fascinating and once again it gives you the idea of..reversing somet-hing and adding the two together..Students find it a little off- putting at first, but once they get it they find..a technique which is useful. It adds to their repetoire of dealing with series.

Hvad T5 helt mener med, at eleverne kan *bruge* de regnetekniske tricks i beviserne til, står ikke helt klart.

For mig er det et tegn på, at T5 i sit forsøg på at finde på grunde til at beviserne optræder i matematikundervisningen også finder på et par pseudobegrundelser og at dette er en af dem.

Beviser/argumenter skal bruges til at forklare "hvorfor formlen ser ud som den gør"

Dette bygger jeg på T5' beskrivelse af, hvordan hun argumenterer for eksempelsætningerne. I sit argument med Venn-diagrammet i $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$fokuserer hun på at få argumenteret for, at der er "noget", der skal trækkes fra, men hvad det egentlig er, der skal trækkes fra anses for at være mindre væsentligt.

I tilfældet med produktreglen, hvor man vanskeligt kan argumentere så direkte som i sandsynlighedsregnings-eksemplet foretrækker hun det symbolsk simple argument, således at eleverne lettere kan se, hvordan "formlen" fremkommer.

Eleverne er ikke motiverede for at beskæftige sig med beviser

Eleverne beskrives som meget lidt motiverede for at beskæftige sig med beviser. De vil helst bare acceptere sætningerne og lære at bruge dem.

Students are quite happy to accept what you tell them. Very few actually want to know how or why it works. They just plug in numbers and off they go..

Beviser er ikke relevante for den gennemsnitlige elev

Et af de kriterier T5 bruger for valg og fravalg af beviser i matematikundervisningen er klassens niveau og hvad elevernes fremtidsudsigter i "systemet" er. Har hun en 6th form klasse, hvor eleverne ikke fortsætter til 7th form [11], vil der blive ført færre beviser. Her "giver hun eleverne formlen" og lader dem regne opgaver med dem.

I would say they are not relevant for the average student...I go on the level of the class, the level of the students....a 6th form class of whom I knew they were not going to go on to the 7th form. Then I would not bother about doing proofs

[11] Hverken 6th form mathematics eller 7th form mathematics er i princippet obligatorisk. Hvor meget eleverne inddeles efter evner svinger fra skole til skole. I dette tilfælde er der altså lavet klasser efter, om eleverne vil fortsætte med 7th form mathematics eller ej.

and so forth with them. I would just give them the formulae, really, and they would pracitise with examples

De obligatoriske beviser er noget, den gennemsnitlige elev må lære udenad og T5 ser det som sin opgave at lære dem at gengive dem korrekt:
MH: What do you emphasise when doing proofs which are in the prescriptions[12] *... When you teach it, what do you emphasise in order to help them cope with the exam?*
T5: Uh, that is a pretty difficult one..I just emphasise that things have to be set up in logical order. And for many students they simply have to learn it.

T5 mener at den nuværende bevisfattige matematikundervisning retter sig mod de gennemsnitlige elev og hun mener, at det er fornuftigt. Bevismanglen går kun ud over de dygtigste elever. Samtidig er anser hun det for at være et af de generelle formål med matematikundervisningen, at eleverne skal lære noget matematik, som de får brug for i jobsituationer. Her har de ikke brug for at kende beviserne.

I think we have a more vocational, at the moment we have got what I call a vocational approach to mathematics. We are teaching them the mathematics that they need to learn to be able to go into certain jobs. And that is good because most students will do that, will benefit from that, but there are still a very few, very able students who will be going on to do great things in mathematics, to do..research and I think that they need a more rigorous approach

Beviser som studieforberedende element

T5 beskriver i det ovenstående et "lokalt" studieforberedende element - hun inddrager beviser i undervisningen i 6th form, hvis eleverne går videre med 7th form-matematik. Dem der får et egentligt udbytte af beviserne og en undervisning, hvor der lægges mere vægt på stringens er kommende, professionelle matematikere. Hun formulerer det mere direkte her:

But I think the able should be doing it, the proofs, because they are the people who need to, we are going to have more discoveries in mathematics, more research in mathematics. We have to have the proofs.

Der er ingen sammenhæng mellem evnen til at gøre brug af sætninger i matematik og kendskab til/ forståelse af beviset for sætningen

T5 mener ikke, at der er nogen forbindelse mellem elevernes even til at anvende matematik og og så beviser i matematikundervisningen. Dette ses blandt andet i hendes begrundelse for, at beviser *ikke* er væsentlige for den gennemsnitlige/svage elev, der blot skal anvende matematik. Hun udtaler sig dog også mere generelt:

[12] Indeholdt i pensum til skriftlig eksamen

..After all, when you go out into the world you use mathematics, you don't have to prove it

Elevernes har et svagt bevisbegreb
T5 oplever at eleverne ikke skelner mellem at løse en ligning og argumentere for at en relation må være sand ved at omskrive et af siderne i et udtryk, i forbindelse med, at hun forsøger at lære eleverne at gengive de obligatoriske beviser. T5 mener at dette skyldes, at eleverne ikke tidligere i deres skoleforløb er stødt på beviser.

They often make the assumption that they can start from the two seperate sides assuming they are equal and continue working down both sides, which I have a battle with the about trying to train them to start from one side and work to the other...They see it as an equation, because they don't do enough proof in their early school years.

B.5.3 Opsamling

T5 argumenterer for $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ i sin undervisning, men ikke særlig præcist. Venn-diagrammet samt taleksempler bruges til at overbevise eleverne om nødvendigheden af at trække "noget" fra. Hun beviser produktreglen ved brug af differential-notation. Sætningen: $\sqrt{2}$ er ikke et rationalt tal bevises ikke. T5 synes problemstillingen er alt for abstrakt og mener ikke, at eleverne vil kunne forstå den overhovedet. På dette niveau er det helt fint at $\sqrt{2}$ er irrational pr. definition. Herudover er det et motivationsproblem - eleverne ved på forhånd at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.

T5 finder, at beviser er et element i matematikundervisningen, der primært er der for de dygtigste elevers skyld, særlig kommende professionelle matematikere. For den gennemsnitlige elev, der senere hen får brug for at *anvende* matematik i jobsammenhæng, er beviser uden relevans. Der er ingen sammenhæng mellem evnen til at anvende en matematisk sætning og kende til beviset for den. Hun finder dog, at det, når man skal lære eleverne at gennemføre de obligatoriske beviser, er et problem at eleverne i så ringe grad har stiftet bekendtskab med beviser, at de ikke kan skelne mellem at løse en ligning og omskrive et udtryk med henblik på at godtgøre en sætning. Eleverne selv er ikke særlig motiverede for at have beviser. For dem er det væsentlige at bruge sætningerne, ikke hvad baggrunden for dem er.

For T5 er det vigtigste træk ved beviser det *formelforklarende* - at eleverne får indsigt i, hvordan man kommer frem til en given regneregel, men hun mener også, at beviser ideelt set er vigtige for at give eleverne et billede af matematik som et sammenhængende fag, der logisk bygges op fra aksiomer via beviser. Men med de rammer der er for den nuværende new zealandske matematikundervisning, er det ikke det billede, man rent faktisk giver eleverne. Matematik fremstår tværtimod som en samling spredte sætninger, der ikke har nogen indbyrdes forbindelse.

T5' holdning til bevisførelse

T5's reaktion på polygonopgaven:

T5's kommentar til polygon-opgaven og spørgsmålet om, hvorvidt hun godt kunne tænke sig at lade lignende opgaver indgå i undervisningen er, at det er urealistisk og højst noget, man kunne lade de dygtigste elever gøre. En opgave som polygonopgaven er kun brugbar, hvis man nøjes med at forlange, at eleverne ved at lave en "investigation", finder frem til en løsning, *uden* at forlange, at de argumenterer yderligere for det.

No, it is not something I do, it is something I would like to be able to do with...very able students, but the practicalities of the classroom situation don't really enable you to do this unless the students themselves are motivated to do it. This sort of thing we would do numerically in what we call an "investigation situation".

Bevisførelsesopgaver er ikke et "systemkrav"

T5 er nærmest overrasket over, at der findes bevisførelsesopgaver i eksamenssættene. Opgaven med at argumentere for at n(n-1)(n-2) er deleligt med 3 bør løses ved induktion[13] og er derfor ikke længere relevant, fordi induktionsbeviser ikke indgår i pensum. Herudover bemærker hun, at det ikke er bevisførelse i min forstand, fordi induktionsbeviser ikke kræver, at eleverne selv skal udvikle en strategi for at bevise sætningen.

Om opgaven, hvor der skal argumenteres for at løsningerne til $z^3 = i$ ikke kan være reelle, siger hun - til trods for at denne opgave faktisk optræder i et eksamenssæt:

I would not do that sort of thing with them..because it is ehm..it is not part of the examination syllabus

T5 afviser også at denne helt specielle type eksamensopgaver skal have særlig meget vægt i matematikundervisningen. I forhold til andre lettere opgaver, kan det ganske enkelt ikke betale sig at bruge tid på det.

The time spent on this would be out of all proportions with the results achieved and furthermore it would simply bamboozle and discourage those students who are going to perhaps get average marks, while those who are above average they

[13]Det er her interessant, at man i facitlisten til eksamensopgaverne har angivet, at den kan løses ved brug af følgende, uformelle argument: Når man har tre på hinanden følgende tal vil der altid være et tal, der indeholder en faktor tre.

are going to do all-rigth, but it would be better for them to spend time on more basic stuff

Bevisførelse er for de særlig dygtige elever Ovenstående citat afspejler, at T5 ikke anser bevisførelsesopgaver for at være relevante for de mindre dygtige elever. Særlig dygtige elever vil få specialbehandling:

I think it is too complicated for most students. I would probably if I had very, very able students spend a bit of time privately with them on this sort of thing

De dygtigste elevers evne til at løse problemer kunne forbedres, hvis Euklidisk geometri indgik i pensum

Mens T5 finder det rimeligt, at der bliver lagt mindre vægt på beviser og bevisførelse end tidligere, så synes hun det er en god ide, at det stadigvæk betones overfor de dygtigste elever. Her ser hun Euklidisk geometri som et særligt velegnet emne.

(I) would rather like one class at each school doing a very traditional mathematics course..I would actually like them doing the traditional courses in Euclidean geometry, because I think that Euclidean geometry proofs, the odd proofs...I really think it helps their problem-solving abilities, because it trains them to think in a particular way

Indsigt i Euklidisk geometri og navnlig at føre beviser indenfor Euklidisk geometri, gør eleverne til bedre problemløsere. I den nuværende matematikundervisning lærer eleverne kun at løse en særlig type opgaver, hvor de skal simplificere en problemstilling - formentlig tænker T5 her ligesom T3 på tekstopgaver, som man skal oversætte til en matematisk problemstilling før man kan løse opgaven.

I Euklidisk geometri bliver eleverne mødt med krav, der adskiller sig fra kravet om at kunne skære en problemstilling til. T5 taler om at eleverne bliver mødt med kravet om at "do a construction" - i det konkrete tilfælde hun giver: eleven skal finde på en geometrisk konstruktion, der kan bruges til at vise, at en ydre vinkel er summen af to indre vinkler i en trekant. Mere generelt kan man opfatte det som et krav om, at eleverne skal være i stand til at få bevisideer. Dette mener T5 er en hjælp, når eleverne skal løse matematiske problemer, fordi de lærer, at man kan takle matematiske problemstillinger på andre måder end ved at simplificere og oversætte.

I really think it helps their problem-solving abilities because it trains them to think in a particular way. I think that when one does proofs, one often has to do a construction. And it trains the students to think "what do I need to add to this problem" in order to..be able to prove the theorem...I think that our current approach is to get kids to simplify something. It is always trying to reduce them..to get them into a simpler form, but direct proofs in constructions I think, trains the students to think of something extra.

Even if you do simple things like proving that the exterior angle of a triangle (is equal to the sum of two interior angles). You draw your triangle and you have your exterior angle and your construction for that proof is to draw a line that is parallel to one of the sides of the triangle and..often you have to tell them, when you first start teaching the students, you have to tell them what to do, but after a while they start thinking in terms of having to do that and I think early training in that is very good, indeed, for later mathematical understanding

T5 finder altså, at bevisførelse og navnlig bevisførelse indenfor Euklidisk geometri har noget at tilbyde, men det er underordnet det egentlige mål med matematikundervisningen. For det første foreslår T5, at Euklidisk geometri burde genindføres for de dygtigste elever *oveni* det allerede eksisterende pensum, hvilket viser, at T5 anser de andre elementer for at være vigtigere, end at der bliver rum til bevisførelse i matematikundervisningen. T5 fremhæver også bevisførelse som noget, der *understøtter* elevernes evne til at løse problemer - ikke som et element i matematikundervisningen, der i sig selv er af betydning.

Opsamling

T5 finder at polygonopgaven er for svær og at man højst kan forlange af eleverne, at de løser den og argumenterer for løsningen den ved brug af "investigations". Bevisopgaverne i eksamenssættene ignorerer hun i sin undervisning. Det ville være spild af tid og ikke noget flertallet af eleverne er i stand til at gebærde sig overfor. Særligt dygtige elever vil dog særskilt blive sat til at arbejde med problemstillinger af denne type.

Generelt prioriterer T5 bevisførelse lavt og mener udelukkende, at det kun er relevant for de særlig dygtige elever. T5 ser gerne, at Euklidisk geometri bliver genindført for de allerdygtigste elever som en udvidelse af det allerede eksisterende pensum. Det vil give eleverne mulighed for at føre beviser indenfor et passende emneområde. De vil forbedre deres evne til at løse matematiske problemer, fordi de oplever at opgaver i matematiksammenhæng ikke blot er et spørgsmål om at simplificere (tekst)problemstillinger, men også et spørgsmål om at få gode ideer.

C Spørgeskema til de danske lærere

Interviewmateriale

Baggrund

Jeg har interviewet 5 new zealandske lærere om deres syn på beviser og bevisførelse i det, der svarer til gymnasiets matematikundervisning i 2. og 3.g, dvs matematik på obligatorisk niveau og højniveau. De to sæt spørgsmål, jeg brugte i mine interviews, kan findes i det vedlagte bilag.[1]

Jeg har i interviewene skelnet mellem "bevis" og "bevisførelse". Mens beviser har karakter af at være noget eleverne præsenteres for af læreren, så er bevisførelse - som jeg forstår det - når eleverne *selv* fremfører matematisk korrekte argumenter for en hypotese. *Bevisførelsesopgaver* er opgaver, hvor det kræves af eleverne, at de selv konstruerer argumenterne for opgavens løsning. Et eksempel er argumentation for svaret på følgende "polygon-opgave"

> Hvilke n-polygoner giver - delt således at der er det samme antal hjørner og kanter på hver side af delingslinien - to nye n-polygoner?[2].

I det new zealandske skolesystem er der ingen mundtlige eksaminer. I såvel "2.g" som "3.g" er der nationale eksaminer, der udarbejdes af NZQA (New Zealand Qualifications Authorities). Nogle få beviser - f.eks. beviserne for additionsformlerne i trigonometri er udpeget som beviser, eleverne kan blive bedt om at gengive helt eller delvist til eksamen. Det har jeg betegnet som *obligatoriske beviser* i materialet. Herudover optræder der i nogle eksamenssæt bevisførelsesopgaver.

[1] I det originale skema er medtaget de spørgeskemaer til de new zealandske lærere, der her udgør appendix A. De er af pladshensyn ikke medtaget her.

[2] Et løsningsforslag kan ses på første side af 2. sæt spørgsmål i bilaget

Om interviewene

Det jeg specielt har interesseret mig for i interviewene, er begrundelserne for at der skal være - eller ikke skal være - undervisning i beviser og bevisførelse i en almendannende matematikundervisning.

I diskussionen af beviser har mit udgangspunkt været tre "eksempelbeviser" og jeg har interesseret mig for, om sætningerne og beviserne for dem anses for at være relevante og hvilke begrundelser, der gives for et fravalg/tilvalg af at inddrage såvel sætninger som beviser i undervisningen. Sætningerne er hentet fra tre forskellige emneområder: Fra sandsynlighedsregningen $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ for to vilkårlige hændelser A og B, fra differentialregningen reglen for differentiation af et produkt $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ og endelig sætningen "$\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal". Jeg har - som det er vist i bilaget på side 1-5 i første sæt spørgsmål - valgt at præsentere forskellige måder at argumentere for sætningerne på.

I diskussionen af bevisførelse har jeg bedt om kommentarer til den føromtalte polygonopgave og til tre andre opgaver, der optræder i to skriftlige eksamenssæt. De tre "bevisførelsesopgaver" (som også kan findes på s. 2 i 2. sæt interviewspørgsmål i bilaget) er disse:

1. Antag at p er et rationalt tal og at $p + q$ er et irrational tal. Følger det heraf, at q rational, irrational eller nogen gange det ene og nogen gange det andet?
2. Forklar uden at løse ligningen $z^3 = i$, hvorfor den ikke har nogen reelle løsninger.[3]
3. Vis at 3 går op i n(n-1)(n-2)

Din opgave

I det følgende giver jeg dels en beskrivelse af de synspunkter, der er gennemgående hos alle de lærere, jeg har interviewet, dels tegner jeg de 5 læreres "profiler". Jeg må gøre opmærksom på, at synspunkterne i de enkelte "profiler" ikke er fuldstændig konsistente, men altså er hvad mit materiale viser. Din opgave bliver at forholde dig til de fremsatte synspunkter. Er du enig/uenig i dem? Hvorfor/hvorfor ikke? Ikke alle synspunkter er direkte relaterede til beviser og bevisførelse, men afspejler mere den enkelte lærers matematiksyn, der naturligvis har konsekvenser for, hvad de mener om beviser og bevisførelse.

[3] z er et komplekst tal - komplekse tal indgår i det new zealandske "3.g"-pensum, der ikke i øvrigt adskiller sig væsentligt fra det danske

Jeg vil herudover gerne bede dig overveje, hvad du selv forstår ved "bevis". Hvis du umiddelbart synes det er for tungt, så giv mig et eksempel på en argumentation for en sætning (indenfor gymnasiepensum), som du vil karakterisere som et bevis og en som du ikke vil kalde for et bevis. Eventuelt kan du tage udgangspunkt i beviseksemplerne i bilaget.

Fællestræk ved lærernes synspunkter på beviser og bevisførelse

- Beviser er uden betydning for den gennemsnitlige elev da:
  - Eleven kan klare sig til eksamen uden at være i stand til at forstå beviser. De obligatoriske beviser må man gennemgå så grundigt, at eleverne mere eller mindre kan dem udenad.
  - Beviser er svært stof. Da den gennemsnitlige elev typisk slås med at få en forståelse af mere basale ting, er der - med den tid, der er til rådighed - ingen grund til at kræve, at de forstår eller forholder sig til beviser udover de obligatoriske beviser.
  - Elevernes evne til at anvende sætningerne er uden sammenhæng med et kendskab til - og en forståelse af - beviset for sætningen. Beviser er derfor blandt andet ikke til nogen hjælp i opgaveregningen.
- Bortset fra de obligatoriske beviser kan man kun forsvare at inddrage beviser i undervisningen, hvis der er et overskud af tid og/eller eleverne er særligt dygtige.
- Beviser for sætninger, der vedrører internt-matematiske problemstillinger - eksempelvis sætningen "$\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal" - bør man ikke bruge tid og kræfter på.
- Hvilken mængde af beviser, der gennemgås har *ikke* nogen sammenhæng med, om de optræder i den anvendte lærebog.
- Bevis*førelse* er for svært for den gennemsnitlige elev. Det er kun realistisk at stille krav om at eleverne kan fremsætte hypoteser for en opgaves løsning - ikke til at de er i stand til at argumentere for den fremsatte hypotese. Dette gælder også polygonopgaven, hvor det anses for realistisk, at eleverne er i stand til at finde frem til svaret (en trekant og en firkant), men man kan ikke forvente eller kræve, at de argumenterer for det.
- Eleverne bør kende til forskellen på at give et taleksempel og på at give et bevis for en sætning.
- Bevisførelsesopgaver som f.eks. de tre eksamensopgaver, kan man roligt ignorere, fordi de ikke giver ret mange point til eksamen og det desuden kun vil være en meget lille del af eleverne, der vil være i stand til at løse dem.

1. profil

Beviser

- En matematisk sætning er enten noget, man beviser eller helt undlader at argumentere for i undervisningen. I så tilfælde vil man blot "give formlen" til eleverne. Løse, intuitive argumenter er kun på sin plads, hvis man giver et bevis for sætningen.
- Matematikundervisningen skal udvikle elevernes evne til at løse opgaver. Eleverne bliver bedre til det, hvis de forstår de matematiske begreber, der indgår i sætningerne. Beviset for en sætning kan da i nogen sammenhænge støtte begrebsdannelsen.
- Sætningen "$\sqrt{2}$ er ikke et rationalt tal" er irrelevant for eleverne af tre grunde:
  1. På det tidspunkt, hvor man kunne vælge at føre beviset ved eleverne godt, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. Beviset bliver derfor til et bevis for noget eleverne godt ved i forvejen.
  2. Eleverne har et tilstrækkeligt kendskab til irrationale tal, hvis de er i stand til at bruge regnereglerne for rødder.
  3. Eksistensen af irrationale tal er en problemstilling, som er for svær og abstrakt for flertallet af eleverne.
- Beviser overbeviser ideelt set eleverne om rigtigheden af resultatet, således at de føler sig trygge ved at bruge sætningen. Hvis beviserne er for svære, skal man undlade dem for ikke at give eleverne et indtryk af, at forståelsen af sådanne beviser er noget, der kræves af dem.
- Granskning af beviser kan give eleverne et billede af matematik som et fag, hvor der - i lighed med andre fag - skal argumenteres for fremsatte påstande.
- Eleverne burde forholde sig kritisk til rigtigheden af sætninger de introduceres for i matematikundervisningen - men de gør det ikke og det er meget vanskeligt at få dem til det.
- Lærebogen har ingen indflydelse på, i hvilket omfang og hvordan, der undervises i beviserne.

Bevisførelse

- Det er let at lære eleverne at føre induktionsbeviser, da man kan give en "opskrift" eleverne kan følge hver gang forudsat at det trick, der skal til at komme fra antagelsen om at sætningen gælder for n til at den gælder for n+1 er det samme hver gang. Induktionsbeviser kunne - hvis de stadigvæk indgik i pensum - bruges som eksempel på en bevismetode og eleverne opleve en bevismetode, som de selv beherskede.

- I forhold til andre aktiviteter i matematikundervisningen fremstår bevisførelsesopgaver f.eks. i form af polygon-opgaven og eksamensopgaverne som noget man kan gøre for sjov med de særlig dygtige og motiverede elever underforstået at sådanne aktiviteter giver ikke et brugbart/måleligt/vigtigt udbytte og er ikke noget, det er afgørende, at en gennemsnitlig elev kan eller kommer til at prøve kræfter med.

2. profil

Beviser

- Beviser spiller en perifer rolle, da hovedformålet med matematikundervisningen er, at eleverne lærer at anvende matematikken og ser eksempler på anvendt matematik.
- Fordi der er fokus på matematikken og dens anvendelser, er "teoretiske" sætninger og problemstillinger, der ikke er umiddelbart anvendelige noget, man bør undlade i matematikundervisningen.
- Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal er så svært, at eleverne ikke vil kunne forstå det.
- De sætninger eleverne lærer i matematikundervisningen må ikke fremstå uforklarede. Beviser kan da i nogle tilfælde kan tjene til at forklare eleverne, hvorfor en sætning er sand. Bortset fra de obligatoriske beviser udelades beviserne, hvis det vurderes, at eleverne ikke får dette udbytte.
- Ideelt set burde eleverne gennem at arbejde med beviser få en forståelse for, hvad der udgør et korrekt matematisk argument. Det kan man imidlertid ikke forvente på dette niveau og de dygtigste elever må få sådanne indsigter senere i deres uddannelsesforløb.
- Beviser burde være i matematikundervisningen for at give eleverne en oplevelse af "matematikkens skønhed".
- Når man som lærer inddrager noget, man selv anser for at være et bevis i undervisningen, skal man også bruge betegnelsen overfor eleverne. Man kan dog med held vente med at sige til eleverne, at man har ført bevis for en given sætning til efter beviset er ført.
- Lærebogen har ingen indflydelse på *om* der undervises i et bevis, men har stor betydning for, hvordan det konkrete bevis gennemgås.

Bevisførelse

- Opgaver hvor eleverne bliver sat til at overveje, hvordan man kan argumentere for en sætning f.eks: "forklar hvorfor arealet af en trapez er $\frac{1}{2}(a+b)h$", anses for at være et nyttigt redskab til at give eleverne indsigt i, at det er muligt at argumentere for de sætninger, de bliver sat til at bruge og navnlig at andre har gjort det hårde arbejde med at garantere sætningernes rigtighed. Sådanne opgaver er specielt vigtige for at sikre, at sætninger ikke fremstår som uforklarede størrelser for eleverne.

- Man kan ikke forlange, at eleverne eksempelvis udleder $\frac{1}{2}(a+b)h$. De er ganske enkelt ikke så dygtige til algebra og til at formalisere deres iagttagelser, at de er i stand til det. Dette gælder også i polygonopgaven, hvor eleverne ikke vil være i stand til at stille ligningerne op.

3. profil

Beviser

- Beviser er irrelevante for almindelige elever og i de tilfælde, hvor man kan give taleksempler er det langt mere effektivt at gøre dette fremfor at give et bevis i forhold til at overbevise eleverne om, at en sætning er sand.

- For de dygtigste elever kan beviserne supplere de øvrige aktiviteter i undervisningen, ved at de får en bedre ide om, hvad de gør, når de bruger sætningerne. For de mindre dygtige elevers vedkommende må man satse på, at de lærer at "bruge reglen".

- Man er bedst tjent med ikke at forsyne beviser eller bevislignende argumenter med mærkaten "bevis", da dette automatisk vil gøre eleverne mindre motiverede, fordi de opfatter beviser som svære. Det er bedre at bruge termen "forklaring" i de tilfælde, hvor beviserne virker forklarende.

- De dygtigste elever skal møde beviser som forberedelse til at beskæftige sig med matematik videre frem.

- Eleverne kan muligvis via at beskæftige sig med beviser blive bedre til at tænke logisk. Dette er noget, de kan bruge, når de regner opgaver.

Bevisførelse

- Bevisførelsesopgaver er kun relevante for kommende, professionelle matematikere, der skal øves i at lære at føre beviser.

- Man kan ikke forlange, at en gennemsnitlig elev er i stand til at løse opgaven "Forklar uden at løse ligningen, $z^3 = i$, hvorfor den ikke har nogen reelle løsninger"[4]. Derimod er det rimeligt at forlange, at eleven er i stand til at løse ligningen.

- Bevisførelsesopgaver er i konflikt med den herskende "trend"i den New Zealandske matematikundervisning, hvor eleverne trænes i på basis af en tekstopgave at finde frem til og formalisere mønstre. Dette og evnen til at oversætte tekstopgaver til en matematisk problemstilling vægtes fra "systemets" side, mens bevisførelsesopgaver ingen særlig rolle spiller. Opgaver, der kan løses ved henvisning til - og manipulation af - en eller flere formler, er mere tilfredsstillende, fordi det er klarere, hvilket grundlag svaret på opgaven hviler på og det derfor er muligt at forklare eleverne, hvordan man når frem til svaret.

4. profil

Beviser

- For elever, der er i stand til at følge beviserne, kan beviser tjene til at forklare, *hvorfor* sætningen er sand. På denne måde kan beviser bruges til at forhindre, at matematik fremstår som et fag hvor sætningerne er ubegrundede.

- Beviser er uegnede til at overbevise eleverne om sandheden af en sætning. I almindelighed godtager eleverne ukritisk matematiske sætninger.

- Ideelt set består forberedelsen til at eleverne ser beviset for en sætning i at de selv "opdager" den og f.eks. selv finder ud af, at $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ må gælde, efter at have set et par taleksempler, hvor man regner på sandsynligheden for foreningsmængden af to ikke-disjunkte hændelser.

- Beviser kan tjene til at vise, at man i matematik - i lighed med andre fag - skal argumentere for sine påstande.

- Lærebogen har ingen indflydelse på, hvordan der undervises i et givent bevis.

- De elever, der skal studere matematik fremover, skal på et eller andet tidspunkt møde beviser som led i at forberede dem til deres studier. "2.g" og "3.g" er et passende tidspunkt.

---

[4] z er et komplekst tal

Bevisførelse

- Evnen til selv at finde på argumenter for en sætning er noget, man burde vægte i matematikundervisningen. Den gennemsnitlige elev er imidlertid ikke i stand til andet og mere end at lære et antal algoritmer og lære at genkende de situationer, hvor de skal bruges. Bevisførelsesopgaver er således ikke i konflikt med, hvad der burde inddrages i matematikundervisningen - det er bare ikke realistisk at forsøge på at gøre det.

5. profil

Beviser

- Beviser i særlig grad relevante for kommende professionelle matematikere, der skal blive fortrolige med beviser for selv at lære at bevise. Der er dog også tale om, at beviser giver et generelt "løft" i abstraktionsniveau, der er brugbart, hvis man senere hen skal beskæftige sig med matematik.

- Beviser kan bruges til at give eleverne et billede af matematik som et fag, hvor sætningerne indenfor for de enkelte discipliner er en del af et hierarki, hvor man bygger ny sætninger på grundlag af aksiomer og tidligere udledte sætninger og hvor beviset tjener som "bindeled". Det er en skam, at Euklidisk geometri ikke længere indgår i pensum for netop Euklidisk geometri egner sig til give eleverne et sådant billede. Matematik kommer uden sådan et eksempel til at fremstå som en samling løsrevne sætninger og begreber.

- Beviser kan bruges til at forklare eleverne, hvorfor sætningen er sand.

- Det er svært at undervise i beviser, fordi de studerende er villige til ukritisk at acceptere sætningerne hvad som helst og er ikke interesserede i at kende til beviserne for sætningerne medmindre det er et obligatorisk bevis.

- Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal er ikke relevant for eleverne, fordi eleverne fra tidligere ved at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal og der er ingen grund til at bevise noget, der forekommer eleverne indlysende.

- Man bør på et eller andet tidspunkt bevise de sætninger eleverne bruger i opgaveregningen, for at "slå formlen fast", selvom man i første omgang vælger blot at "give eleverne formlen".

- Lærebogen har ingen betydning for, hvordan der undervises i et givent bevis.

- Man bør i videst mulige omfang undlade ordene "bevis" og "teorem" i undervisningen - dog ikke i "3.g", da eleverne - fordi de ikke har haft Euklidisk geometri - ikke er rustede til at forstå betydningen af sådan et sprogbrug.

- Træning i at følge udledningerne af beviser styrker elevernes evne til at tænke logisk.

Bevisførelse

- Bevisførelsesopgaver er så svære, at de vil gøre mere skade end gavn, hvis man lader gennemsnitlige elever forsøge sig med dem. Man skal ikke give dem indtryk af, at det er noget, de forventes at kunne.

- Bevisførelsesopgaver indenfor Euklidisk geometri kan forbedre elevernes evne til at løse opgaver generelt. Opgaverne i den NZske matematikundervisning løses ofte ved at man simplificerer den oprindelige opgave. I Euklidisk geometri oplever eleverne, at man somme tider har brug for andre tilgange - eksempelvis i form af at skulle tilføje noget til figuren - for at kunne lave beviser. At eleverne oplever et behov for at tage andre strategier i brug, kan give dem en bredere tilgang til at løse opgaver.

D De danske interviews

D.1 Interview med L1

D.1.1 L1's Bevisbegreb

L1 opfatter beviser som en argumentation for løsninger til generelle matematiske problemer. Med "generelle matematiske problemer", mener L1 problemer, der er af mere generel karakter end numeriske problemer. Som jeg fortolker nedenstående citat, så hentyder han til at et bevis jo ofte resulterer i en formel, som kan bruges til at løse en klasse af numeriske problemer.

MH: Så er der det der modargument mod beviser med at elevernes evne til at anvende sætningerne er uden sammenhæng med, om de har forstået beviserne for sætningerne
L1: Ja, der kan godt være en stor afstand, tror jeg egentlig. Men jeg tror nu også at man, når man læser beviser og sætter sig ind i matematisk tankegang...man ku' jo egentlig i en vis forstand sige, at matematiske sætninger er en løsning på, hvad skal vi sige.. mere komplicerede matematiske opgaver. Og det vil sige, at læse et bevis svarer til at man læser løsningen af en opgave...Det er ofte opgaver af en mere generel struktur og der synes jeg det er vigtigt for matematiklæreren at gøre sig klart, at der er forskel på regning og matematik og at matematik er undersøgelse af strukturer, af fælles strukturer i en lang række opgaver af numerisk karakter.

L1 mener også at beviser er en argumentationsform, der er karakteriseret ved, at blive forudgået af en præcisering af de indgående begreber, mens man i selve argumentationen gør brug af logiske regler og problemløsnings-metoder.

..Hvad jeg selv forstår ved et bevis?..Et bevis er jo i høj grad en metode, synes jeg som..er en væsentlig del af matematikken, af matematikkens metodik. Der er en argumentationsform, der er en præcisering af begreber, der er anvendelse af nogle logiske regler, der - hvad skal vi sige - ligger i sådan et mønster nedenunder...Det handler om strukturer, det handler om metode, det handler om det der med logiske regler..og man kan godt sige, at der indgår bevismetoder i løsningen af matematiske opgaver.

D.1.2 L1's holdning til beviser

Beviser er en vigtig del af "faget matematik" og alle elever - ikke kun de dygtigste - skal danne sig et billede af det

L1 mener at beviser ikke udelukkende er et studieforberedende element, som optræder i matematikundervisningen for de dygtigste elevers skyld.

MH: Der er mange (af de new zealandske lærere) der synes, at det der med beviser, det er først og fremmest for de dygtigste elever. De skal møde dem, fordi de skal forberede sig til at beskæftige sig med matematik videre frem, hvad enten de nu skal være ingeniører eller et eller andet andet.
L1: Det skal de jo...Jo, det synes jeg da absolut de skal, men det er ikke det samme som at sige at de mindre dygtige heller ikke skal møde dem.

MH: ..der er så nogle, der simpelthen mener, at det kan eleverne ikke finde ud af, fordi den gennemsnitlige elev er simpelthen ikke i stand til andet og mere end at lære et antal algoritmer og lære at genkende de situationer, hvor de her algoritmer skal bruges...er det en beskrivelse, du også vil give af nogle af dine elever?
L1: Det er en gruppe elever der findes, jo,.. (men) så handler det jo om at finde en eller anden rimelig balance således at.. de har et minimum af fornemmelse af, hvad faget er. Jeg må indrømme, at de skal præsenteres for faget, også selvom de ikke får fat i det.

L1 mener ikke, at man kan udelade beviserne i matematikundervisningen med den begrundelse at ikke alle eleverne forstår beviserne i detaljer. Han opfatter beviserne som "substansen i matematikken". Beviser er en forudsætning for at man kan give eleverne et billede af faget matematik.

..jeg synes de skal være - for at bruge det udtryk - klædt på til at vide noget om, hvad faget består af. Det indebærer en kobling til beviser. Så kan det godt være, at den gennemsnitlige elev ikke får så meget ud af detaljerne.

Når L1 mener, at eleverne skal vide noget om "faget matematik" er det fordi han anser matematik for at være en den del af elevernes kulturarv.

Jeg er kulturbærende i situationen...så er der også en anden partner og det er så faget matematik. Det er så ikke en person, men det er en kulturel sammenhæng en kulturel arv, som stiller nogle krav for, hvordan vi arbejder med faget. Det er sådan i og for sig min grundholdning og det vil sige, der er grænser for, hvor meget vi kan klippe forbindelsen over til selve faget i retning af at komme i møde..så skrider også det, der er substansen i matematik.

Man skal ikke bortprioritere beviser til fordel for opgaveregningen

L1 mener ikke, at man kan tillade sig at fravælge beviserne - heller ikke for at gøre plads til mere opgaveregning. Hvis man primært satser på opgaveregningen og tillader eleverne at manøvrere efter dette, så bliver konsekvensen at eleverne får, hvad L1 betegner som et "amputeret forhold" til faget.

Den elev, der udelukkende sigter på anvendelsen og på anvendelsen af formler og som siger "væk med den tykke bog, jeg nøjes med formelsamlingen og overskrifterne med rødt"..de får et lidt amputeret forhold til faget matematik.

Beviser og evnen til at anvende matematik har ikke direkte noget med hinanden at gøre, men indsigt i beviser kan forbedre elevernes generelle problemløsningskompetence

L1 opfatter i lighed med de new zealandske lærere opgaveregningen og beviserne som to størrelser, der ikke rigtig har noget med hinanden at gøre. Beviset for en given sætning har ikke betydning for elevens evne til at anvende den pågældende sætning. Til gengæld forbedre elevernes generelle problemløsningskompetence. Beviserne er jo netop - som L1 ser det - eksempler på løsninger af mere generelle problemstillinger. Min fortolkning er, at L1 finder at i lighed med at eleverne kan have udbytte af at se eksempler på opgaveløsninger, hvor problemerne typisk er af numerisk karakter, så kan de lige så vel have glæde af at se løsninger på opgaver, der er mere generelle. Jeg har tidligere haft fat i nedenstående citat, men gentager en del af det her:

L1:..Man ku' jo egentlig i en vis forstand sige, at matematiske sætninger er en løsning på, hvad skal vi sige.. mere komplicerede matematiske opgaver. Og det vil sige, at læse et bevis svarer til at man læser løsningen af en opgave...

Det er et vigtigt træk ved beviser, at de optræder som bindeled mellem sætningerne i en aksiomatisk struktur

Et træk ved beviser, som L1 finder er centralt og som det er vigtigt at understrege er bevisers rolle som bindeled i en teoribygning, hvor man bygger sætninger op fra aksiomer - f.eks. Euklidisk geometri. L1 slår desuden endnu en gang fast, at han nærmest opfatter beviser som synonymt med "faget matematik".

MH: Der er så en, der er inde på, at beviser jo også kan bruges til at give eleverne et billede at matematik som fag. Og det vedkommende specielt lægger vægt på det er..altså det der med, at man kan se matematik blive bygget op (fra aksiomer)
L1: Jamen det er jeg helt enig med vedkommende i..det er jo helt oplagt
MH: Er det et af hovedformålene (med at undervise i beviser), er det en af de væsentligste roller..
L1: ..det er en væsentlig rolle, helt klart, det er faget, havde jeg nær sagt. Ikke nødvendigvis faget i praksis, men det er i høj grad faget.

Det er interessant, at L1 skelner mellem "faget i praksis" og "faget matematik". Jeg fortolker "faget i praksis" som anvendt matematik. L1 ser altså ingen forbindelse mellem det at sætninger bevises og indgår som led i en teoribygning og det at de anvendes.

Visse beviser kan bruges til at give eleverne et billede af matematik som et "smukt fag"

L1 mener at nogle - men ikke alle - beviser kan bruges som eksempler på "smuk matematik". Mere end forvente, at også eleverne synes, beviserne er smukke, tror han at det er vigtigt at signalere, at det synes han er tilfældet.

MH: Så er der den der med, at beviser burde være i matematikundervisningen for at give eleverne en oplevelse "matematikkens skønhed". Det er sådan et eller andet med beviser som æstetisk element.
L1: Jeg vil hellere sige. ..Jeg vil ikke sige, det er alle beviser, der er pæne eller skønne eller hvad det er..når det er der og det er et bevis, der er elegant, så synes jeg det er fint, at læreren signalerer, at det er det han mener og eleverne synes det er mærkeligt at bruge de ord i den forbindelse..men eleverne har godt af at man præsenterer for dem, at det er de ord man ty'r til for at beskrive ens oplevelse af det vi arbejder med.

Beviser kan forbedre elevernes evne til at tænke logisk

L1 er enig i, at man bliver bedre til at tænke logisk af at beskæftige sig med i hvert fald visse beviser.

MH: ..Bliver de (eleverne) bedre til at tænke logisk af at beskæftige sig med beviser?
L1: Ja, det tror jeg da helt bestemt, fordi det er jo et eksempel på strukturen, der ligger under, så det tror jeg da bestemt. Nogle mere oplagt end andre.

Beviser giver eleverne indtryk af at man argumenterer for sine påstande i matematik såvel som i andre fag og understreger vigtigheden af præcision i forudsætninger og argumenter

L1 mener også, at beviser kan være med til at give eleverne et indtryk af at man i matematik såvel som i andre fag skal argumentere for sine synspunkter. Det er dog ikke en pointe, han lægger meget vægt på. Det er mere vigtigt at det fremgår, at det der foregår i et bevis er at de indgående begreber præciseres, hvorefter man kan begynde at argumentere på fornuftig vis.

MH: Så er der den der med at granskning af beviser kan give, altså når eleverne bliver sat til at granske beviser, så giver det eleverne et billede af matematik som et fag, hvor man er nødt til at argumentere for sine påstande, ligesom man er det i andre fag.
L1: Jamen, det er vel i og for sig rigtig nok.
MH: Det synes du også er en rolle beviser kan spille?
L1: Ja, det synes jeg. Det synes jeg. Præcisering af begreber især. Hvad ligger der i det ord? Det er jo en af årsagerne til, at folk bliver uenige. Det er da ofte, fordi de er uenige om, hvad det egentlig er de snakker om. og man ligger forskellige ting i ordene og hvad der ligger i ordene, hvis man ikke rigtig har gjort sig det klart, så sidder man jo og snakker forbi hinanden.

Beviser i lærebogen fravælges i nogle tilfælde

L1 mener ikke, at man ukritisk skal medtage samtlige beviser i lærebogen. I det følgende giver han et eksempel på et bevis, han vil vælge at udelade, fordi det er for tidkrævende i forhold til det udbytte L1 vil vurdere eleverne får.

Jo, jeg er da meget præget af hvordan tingene står i bogen...om jeg så tager et bevis og gennemgår det, det er så en anden ting...ind i mellem springer jeg da beviserne over, fordi..et eksempel er, hvor jeg har haft et vektorprodukt og et krydsprodukt og hvor..i Carstensens og Frandsens bog i bind 3, der står en gennemgang af, at når man krydser de to vektorer, så får man en vektor, som er vinkelret på en plan, der udspændes af de to vektorer. Det bevis er dødssygt at sidde og læse og resultatet er jo rimelig enkelt. Så det vil jeg da klart koncentrere mig om. Og jeg tror i det eksempel, der ville de ikke lære noget, det ville tage for lang tid i forhold til den tid, der er normeret og jeg ville kunne investere den tid bedre.

Hvis beviser fravælges og enten udelades eller erstattes med løsere argumenter, gør man som lærer opmærksom på at argumentet ikke er et bevis

Man skal gøre opmærksom på, når man bruger et løst, intuitivt argument.

..jeg bruger faktisk løsere intuitive argumenter engang i mellem, det må jeg indrømme. Også som..hvad skal vi sige..miniudgaver af - eller erstatninger for - sætninger...Men..så gør jeg selvfølgelig opmærksom på, at det ikke er noget bevis, ikke.

Ligesom en sætning, hvor beviset er udeladt altid vil blive kommenteret:

Jeg vil jo aldrig præsentere en matematisk sætning uden at kommentere den, det ville jo være underligt. Laver man sig et matematisk resultat må man jo på en eller anden måde uddybe indholdet.

Kommentarer til beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal og den tilhørende problemstilling er ikke for svært for eleverne

L1 mener bestemt, at man skal inddrage beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal i matematikundervisningen. Ligesom det generelt ikke er et argument for at udelade beviser, at det er svært for eleverne, så finder han heller ikke at det er et argument i dette tilfælde, hvis man ellers holder sig til at undervise i beviset i 3.g.

Jeg synes ikke, man skal starte med det i 1.g. i de første timer, det ville være fuldstændig vanvittigt, men hen i 3.g. synes jeg det vil være helt fint. Jeg har selv gjort det i forbindelse med talteori..

Han mener, at man ganske enkelt skal forvente og forlange, at eleverne forstår problemstillingen.

MH: Så er der også et modargument med at det der med overhovedet at sætte spørgsmålstegn ved at noget, de har fået at vide, det her er et irrationalt tal, overhovedet at sætte spørgsmålstegn ved sådan et faktum. Altså også bare diskutere om noget eksisterer eller ej, at det er simpelthen er alt for svært eller for abstrakt en problemstilling til at man overhovedet kan udsætte gymnasieelever for det.
L1: Jamen det synes jeg ikke, det er. Især ikke i en 3.g. Det skal de have fat i.

Man kan godt motivere nogle elever for at interessere sig for problemstillingen

Han peger også på, at der jo faktisk også er en elevgruppe, der finder også "ubrugelige" resultater fascinerende. Og han gør også opmærksom på, at man som oftest *ikke* vælger at læse matematik på universitetsniveau med den begrundelse, at matematik kan bruges til noget. Som matematiklærer står man i en kunstig situation, hvis man skal give begrundelser for faget, der ligger meget langt fra den motivation, man selv havde for at læse det.

Så er der også et modargument med at det der med overhovedet at sætte spørgsmålstegn ved at noget, de har fået at vide: det her er et irrationalt tal, overhovedet at sætte spørgsmålstegn ved sådan et "faktum"..at det er simpelthen er alt for svært eller abstrakt problemstilling til at man overhovedet kan udsætte gymnasieelever for det.
L1: Jamen det synes jeg ikke, det er. Især ikke i en 3.g. Det skal de have fat i. For dem det er for svært eller ikke kan lære det og så videre, jamen det er der jo så ikke noget at gøre ved. Sådan noget, så må de blive dårlige på det punkt der. Og...der er jo altså det forunderlige, at jeg har har da folk, der har skrevet 3.årsopgave i tallet π og det fascinerer dem, at man kan sige at decimal nummer 1 milliard er et 7-tal og at det er komplet uanvendelig i funktion, men der er noget fascinerende i det alligevel...Det er jo en af årsagerne til, at der overhovedet er matematik. Der er nogen, der har gidet sidde og spekulere over nogen problemstillinger og de har ved gud i himlen ikke gjort det ud fra anvendelsessynspunkter. Noget helt andet er, at jeg tror virkelig ikke, der er ret mange lærere her i landet..jeg tror ikke der er ret mange professionelle matematikere herhjemme og gymnasielærere, folk der har taget en akademisk matematikuddannelse, som er gået i gang med at læse matematik, fordi det kan anvendes. Det tror jeg sgu ikke. Så bliver man ingeniør, til nød... Så det oven i købet at begrunde hele sin undervisning i matematik på anvendelsen..

Beviset er netop vigtigt i kraft af at være et bevis for en internmatematisk problemstilling

L1 mener netop at beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal er vigtigt at inddrage fordi problemstillingen er teoretisk og abstrakt. Hvis man undlader sådanne teoretiske, abstrakte problemstillinger, så videreformidler man jo netop et for snævert billede af matematik som fag.

..jeg synes at..selve matematikken har en udadvendt, anvendt side og så har den også en abstrakt/filosofisk/teoretisk side og der indgår $\sqrt{2}$ og det der bevis og hvis man kun tænker på anvendelse, så mener jeg det kun er en side man ser på.

Beviset er et godt eksempel på et modstridsbevis

L1 mener herudover, at beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal har eksemplarisk værdi, i kraft af at være et eksempel på et modbevis og i kraft af at være et eksempel på bestemt en form for logik. Eleverne har godt af at blive præsenteret for et eksempel på at "sådan kan man også tænke".

det er et godt eksempel på en bevis-struktur..det er et indirekte bevis, det synes jeg er et godt eksempel... Og det er faktisk en elegant måde at argumentere på, som ikke er umiddelbart klar, synes jeg..det er jo ikke logik for småbørn, der bliver brugt der, det synes jeg ikke. Og det er del af..tror jeg af menneskers udvikling, at lære at tænke på forskellige måder og den måde at tænke på er vi sgu ikke født med. Det er en kulturarv på en eller anden led. Og så synes jeg i øvrigt at netop $\sqrt{2}$ (beviset) er en vigtig kulturarv at forstå, som sådan er de irrationale tal, de rationale tal kulturbærende..

Eleverne ved *ikke* på forhånd, hvad et irrationalt tal er.

Endelig mener L1 bestemt ikke, at eleverne udmærket godt ved, hvad et irrationalt tal er i forvejen og at man på det grundlag kan undlade beviset.

MH: Så er der det med at..denne her lærer mener - nok lidt mere håndfast - at denne her sætning med at kvadratrod 2 ikke er et rationalt tal og argumenterer for at man ikke skal undervise i det. Det første er, at på det tidspunkt, hvor man kunne vælge at at føre det her bevis, der ved eleverne udmærket godt, at kvadratrod 2 er et irrationalt tal.
L1: Det ved de..ja, det kan du fandemig sætte nogle spørgsmålstegn til... Eleverne ved jo også, at π det er $\frac{22}{7}$, det ved de jo godt. Så spørger man dem på et tidspunkt, er det rigtigt eller ej? Jamen halvdelen af dem siger ja, det er rigtigt...De har måske hørt ordet før.

D.1.3 L1's holdning til bevisførelse

Man burde have bevisførelsesopgaver i matematikundervisningen - men der er ikke krav om det fra "systemets" side

L1 bruger ikke bevisførelsesopgaver i sin egen undervisning, men han mener at der *burde* være bevisførelsesopgaver både i den daglige undervisning og til eksamen, fordi der så ville komme en kobling mellem opgaveregningen og beviser i undervisningen. Han anser det som sådan for muligt at have beviser i matematikundervisningen.

Bevisførelsesopgaver...der er ikke den store tradition herhjemme. Det kunne egentlig være meget godt, hvis man måske overvejede det lidt mere... så fik de (eleverne) da noget credit for på den skriftlige side at kunne styre den der tankegang og som det er i øjeblikket, da er det totalt klippet over..det er en anden måde at sætte sig ind i matematisk tankegang, som er fuldt så god som den almindelige mundtlige, så derfor synes jeg det er en oplagt mangelvare i det danske uddannelses-system, at vi ikke gør det her.

L1 afviser, at bevisførelsesopgaver optræder i hans undervisning og gør det med henvisning til, at der ikke er krav om det fra "systemets side".

Det er ikke noget, jeg dyrker.. alene af den grund, at der figurerer ingen opgaver i matematikhæftet fra direktoratet i de sidste 10 års eksamensspørgsmål.

Opgaver som polygonopgaven er for svær for eleverne, fordi problemstillingen er for løst beskrevet

Polygonopgaven synes L1 er lidt barsk, fordi den sætning eleverne skal bevise ikke er formuleret for eleverne på forhånd. Dette er hans reaktion efter at jeg har beskrevet polygonopgaven:

L1:..jo løsere en problemstilling, jo sværere er de at styre, for så skal du til at stille rammer op selv og det er svært. I det øjeblik at situationen på en eller anden måde er strammet op, hvor du forestiller dig at vi beviser - lad os nu bare tage den der med at meridianer i en trekant skærer hinanden i samme punkt - hvis de ikke kender den sætning på forhånd. Jamen, det er en totalt afklaret og ren problemstilling, så må du prøve at etablere en argumentation.

Bevisførelse kan give eleverne indsigt i den proces, der ligger til grund for de færdige sætninger, de støder på i matematikundervisningen

L1 mener, at hovedformålet med at have bevisførelse i matematikundervisningen ville være at give eleverne et indblik i bevisprocessen og det kan være med til at give eleverne en forståelse af, at de sætninger de bliver præsenteret for i undervisningen i øvrigt er finpolerede resultater af en sådan proces.

..det de bliver præsenteret for, når de læser et bevis, det er den forkromede løsning af en opgave og den giver jo ikke noget indblik i processerne eller sproget...et godt eksempel det er sådan nogle geometriopgaver, hvor der tegnes alverdens hjælpelinier og de bliver guidet ind i det som den naturligste ting. At den ide den får man selvfølgelig øjeblikkeligt, efter de første 5 sekunder så tegner man de der fine hjælpelinier og så kan enhver idiot se i formelsamlingen og gu kan man da ej. Det må altså tage endda mange timers overvejelser eller mere. Og på den måde, når man så ser den der forkromede argumentation, så er selve metoden og vejen frem til det bevis man sidder og læser, den fortaber

sig fuldstændigt i tågerne, den er jo ikke-eksisterende. Tværtimod, man gør alt for at skjule den.

Han uddyber yderligere

Det vil dog være spøjst om man altid kommer i gang med den mest elegante måde at bevise noget på hver eneste gang...Og så krøller man det tunge bevis sammen og så præsenterer man det fine forkromede bevis.. og sådan må det godt være i faglige kredse. Man skal bare være klar over processen.

D.2 Interview med KG

D.2.1 L2's bevisbegreb

L2 fremhæver brugen af logiske slutningsregler til at slutte sig frem til en påstand og bestræbelserne på at gøre et minimum af antagelser, som de centrale træk ved et matematisk bevis. Hun lægger med andre ord vægt på det lokalt-deduktive element af beviserne.

Det er for mig en række af overvejelser, der fører til at man udfra et eller andet givet slutter sig frem til nogle nye sætninger og man sådan logisk følger slagets gang..man har en eller anden påstand, man gerne vil have eftervist..man siger at et eller andet skal være givet - men heller ikke mere end højst nødvendigt og så prøver vi udfra, hvad vi kender så at bygge noget op, der fører frem til den påstand, vi synes er rimelig.

D.2.2 L2's holdning til Beviser

Beviser er også af betydning for den gennemsnitlige elev
L2 synes beviser er af betydning for den gennemsnitlige elev. Eleverne får et udbytte af at beskæftige sig med beviser uanset om de forstår dem i detaljer eller ej. Udbyttet består i, at eleverne får en forståelse af, at man ikke bare kan tage sætningerne i matematikken for givet, men er nødt til at argumentere for dem og de får en forståelse for, at man i overensstemmelse med "god matematisk skik" må argumentere for sætningernes rigtighed inden man kan tillade sig at bruge dem.

MH: Den første påstand jeg gerne vil bede dig om at forholde dig til er den der med, at beviser er uden betydning for den gennemsnitlige elev
L2: Det er jeg ikke enig i... Selvom de måske ikke forstår det hele, så tror jeg alligevel, at det der med at de ikke sådan får det hele foræret, at de bliver tvunget til at prøve dog at sidde og overveje, at den sætning de nu om lidt skal bruge, at den nu også er rigtig..det har jeg en ide om er af en vis betydning....jeg tror også godt, at de kan forstå, hvad skal vi sige, selve argumentet: For at kunne bruge denne her sætning, der må vi jo være sikre på, at den er rigtig

Eleverne skal have et billede af matematik som et fag, hvor det er nødvendigt at argumentere for fremsatte påstande
L2 mener da også, at en af begrundelserne for at have beviser i matematikundervisningen er, at man giver eleverne et billede af matematik som fag, hvor der i lighed med andre fag skal argumenteres for fremsatte påstande. Beviser har i den sammenhæng har en funktion, der går på tværs af fagene.

..jeg synes da det er vigtigt i matematik, at når du påstår et eller andet, at du kan underbygge det. Det er det jo også i andre fag. Der er ikke meget grin ved

at komme med en påstand, hvis man ikke er i stand til at forsvare den.. i alle mulige henseender mener jeg, at det er vigtigt, at man lærer, at hvis man har en mening om et eller andet, så kan man også argumentere for den

Eleverne skal lære at forholde sig kritisk til matematiske udsagn

Det er et mål med matematikundervisningen, at eleverne lærer at betragte også matematiske udsagn med skepsis.

MH: ..Så mener læreren her, at eleverne burde forholde sig kritisk til rigtigheden af de sætninger, de bliver introduceret til i matematikundervisningen...men at de ikke gør det og at det er utrolig svært at få dem til det
L2: Det har du nok ret i det sidste der. Det hænger vel lidt sammen med lærerens autoritet..Jeg tror ikke, de har en sund skepsis på forhånd...

Beviser kan måske forbedre elevernes evne til at tænke logisk

L2 har tidligere ment - men er nu i tvivl, fordi hun har set nogle studier, der hævder det modsatte - at beviser forbedrer elevernes evne til at tænke logisk:

MH: Denne her lærer mener også, at de muligvis ved at beskæftige sig med beviser kan blive bedre til at tænke logisk - og det så blandt andet er noget, de kan bruge, når de regner opgaver
L2: Det er noget, der bliver diskuteret meget...jeg kan nemlig huske at der skulle være nogle, der har vist, at man ikke bliver bedre til at tænke logisk af at beskæftige sig med matematik...
MH: Ja, men derfor kan du jo godt have en anden holdning
L2: Ja, jeg har ihvertfald tænkt over det siden. Det slog mig hårdt, fordi jeg nok ihvertfald havde bildt mig selv ind, at hvis mine elever kan forstå tankegangen i et induktionsbevis, for nu at tage det, så vil jeg jo mene, at mine elever bliver bedre til at tænke logisk.

Man bør vise eleverne, at en aksiomatisk struktur skabes på grundlag af et minimum af antagelser

L2 erklærer sig med noget ført hånd enig i, at beviser også kan bruges til at give eleverne et billede af matematik som en aksiomatisk struktur og at bl.a. beviserne i Euklidisk geometri har denne funktion i matematikundervisningen. Hun mener dog først og fremmest at pointen i at præsentere eleverne for Euklidisk geometri er, at vise dem, hvordan en matematisk teorien opbygges på grundlag af et minimum af antagelser.

MH:..Denne her lærer mener så, at beviser skal bruges til at give eleverne et billede af matematik som fag, specielt på den måde, at sætningerne inden for de enkelte discipliner er et eller hierarki, hvor du starter med nogle aksiomer og så bygger man op og får sætning på sætning, på sætning, på sætning...
L2: Det er jo hr. Euklid, ikke altså
MH:Ja, det har ligesom for denne her lærer en eller anden konsekvens.
L2: Jeg kan da altid vældig godt lide, at man tager Euklids elementer med og

så snakker lidt med dem om at han har siddet der og tænkt "hvor lidt kan jeg nøjes med".
MH: Ja, det jeg også gerne vil have dig til at forholde dig til det er det der med at man..at man kan bruge beviser til at give eleverne et billede af matematik som et fag, hvor man bygger op fra nogle aksiomer. Er du enig i det?
L2: Ja, det synes jeg da og..at vi altså har haft et eller andet grundlag og hvor vi så også bruger lidt tid til at snakke med dem om, hvor lidt man så kan nøjes med og der synes jeg nok geometrien er specielt god, fordi man ligesom kan visualisere det. Og så tænke over, hvor lækkert det er, at med de få aksiomer der, så kan vi simpelthen bygge alle mulige store geometrisætninger..

Et kendskab til/forståelse af et bevis for en sætning er uden betydning for elevens evne til at anvende en matematisk sætning

L2 mener ikke, at en forståelse for/kendskab til beviset for en given sætning har betydning for elevernes evne til at anvende sætningen, i hvert fald "anvendelse" forstået som regneteknikker.

MH: Det jeg nok interesserer mig mest for i den forbindelse, det er den påstand (med)..at elevernes evne til at anvende sætningerne er uden sammenhæng med kendskab til og en forståelse for beviserne for sætningerne..
L2: Det..tror jeg egentlig, for det kender vi andre vel også, ikke, at man får et eller andet redskab og får lige at vide, hvordan det fungerer. Og det kan man så. Så det tror jeg egentlig også. Du kan godt lære at løse 2. gradsligninger uden at du måske har forstået beviset, ikke. Det tror jeg er meget rigtigt.

Jeg tror da også, at hvis jeg fik en klasse og fik til opgave kun at lære dem kun at løse de og de opgaver og det er det eneste du skal, hvad i al verden skulle jeg så med beviser.

Det er vigtigt at eleverne forstår, at beviser er skabt på grundlag af geniale ideer og at der ligger et omfattende tænkearbejde til grund for de beviser de møder.

L2 vægter det historiske aspekt højt i sin matematikundervisning. I bevissammenhæng mener hun, at eleverne ved at se beviset i historisk perspektiv kan se de "tricks" visse beviser indeholder som geniale ideer, en matematiker har fået for at få tingene til at gå op. Af den grund lægger hun også netop vægt på de tricks, der indgår i beviserne.

L2: Altså det er jo igen, når man har sit eget bevis, hvis der netop skal et eller andet trick til. Det er jo dødlækkert, at der er nogen, der har været dødgode til matematik og har fundet ud af, at når vi skal have fundet ud af, at hvis vi skal have beviset det og det, så er det rigtig smart at gøre sådan her..det behøver vi ikke selv at finde ud af. Det kunne jeg måske heller ikke siger jeg da tit til eleverne, men der er en, der har lært mig, at gør vi sådan, så er det rigtig smart og nu lærer I også at gøre sådan.

Beviser har æstetiske kvaliteter og kan være med til at give eleverne "gode oplevelser" med matematik

L2 finder også det æstetiske element: det at beviser kan være sjove, smukke og smarte er vigtigt i matematikundervisningen. Det udtrykker hun dels i sin beskrivelse af, hvordan hun vægter "tricks'ene", når hun underviser i beviser. Hun formulerer det også direkte:

MH: Så vender vi tilbage til det her med æstetikken. Og det her med at det (beviser) burde være i matematikundervisningen for at give eleverne en eller anden oplevelse af matematik som et "smukt" fag
L2: Ja, helt afgjort. Det..jeg synes det er lækkert en gang imellem at kunne komme ind i klassen og sige. "nu skal I bare se, I får et dødlækkert bevis her". Og så kunne mærke, at der er en vis forventning.

Det går også igen i hendes beskrivelse af, at hun håber at ihvertfald de dygtige elever får *gode oplevelser* ved at beskæftige sig med beviser og matematik i det hele taget. For talentfulde elever, der senere hen vælger f.eks. at læse jura, mener L2, at det netop er oplevelsen, der er det afgørende. Man kan sige, at L2 på den vis er meget anti-studieforberedende-orienteret, fordi hun mener at beviser måske ligefrem netop skal være der for dem, der ikke skal beskæftige sig med matematik videre frem.

..Det der med at de skal vente med at få sådan nogle gode oplevelser til de måske læser matematik. Det synes jeg..det er da synd. tænk hvis de valgte at læse jura. Det ville da være synd, hvis ikke de havde fået sådan nogle gode matematikoplevelser.

MH: Så er der argumentet med, at beviser skal være der, fordi de dygtigste elever simpelthen skal møde beviser som en forberedelse til, at de skal beskæftige sig med matematik videre frem på den ene eller den anden måde
L2:..Jeg er ikke enig i, at det er derfor. Men de dygtige elever skal møde beviser, og jeg mener også, at det skal de alle sammen, men selvfølgelig får de dygtige mere ud af det. Men det er ikke fordi de så skal beskæftige sig med matematik sidenhen, men forhåbentlig fordi jeg kan give dem en god oplevelse.

Hovedsigtet med matematikundervisningen er ikke at lære eleverne at regne opgaver

L2 er uenig i, at hovedsigtet med matematikundervisningen er at lære eleverne at regne opgaver og at beviserne kun skal inddrages i det omfang, at de kan tænkes at være en støtte i så henseende. Hun mener snarere, at beviserne skal medvirke til, at give eleverne et mere nuanceret billede af matematikken og de skal opleve matematik som et æstetisk fag.

MH: Denne her lærer mener så, at det primære formål med matematikundervisningen, det er at udvikle elevernes evne til at løse opgaver..den påstand er relevant i den sammenhæng at beviser..skal kunne ses som en støtte til opgaveregningen
L2: Ja, det er så ikke min opfattelse af matematik. Jeg håber da egentlig også,

at mine elever oplever matematik som et æstetisk fag. Jeg ville da være meget ked af det hvis ikke mine elever gik ud med en opfattelse af, at matematik det er et dødlækkert fag og ikke kun er et redskabsfag.

De dygtigste elever skal have en ide om, hvad der udgør et korrekt matematisk argument

Ideen om, at eleverne som et af udbytterne af en matematikundervisning, der indeholder beviser, skal have en fornemmelse for, hvad der udgør et korrekt matematisk argument kan L2 godt tilslutte sig, men hun mener ikke, at det er alle elever, der får et sådant udbytte, selvom undervisningen sigter mod det.

MH:..så mener vedkommende også, at ihvertfald ideelt set, så burde eleverne få en eller anden forståelse af, hvad der udgør et korrekt matematisk argument ved at arbejde med beviser
L2: Det kan man da ihvertfald håbe på. At man arbejder sådan med samtlige 28 elever med det, at de får det indtryk..Men sådan til at sige for alle 28 elever og at de forstår det, det er nok..

Lærebogen har ikke nogen særlig indflydelse på tilvalg/fravalg af beviser

L2 synes ikke lærebogen har nogen særlig indflydelse på, om hun vælger at tage et bevis med eller ej. Somme tider medtager hun beviser, der står i bogen, andre gange vælger hun at udelade beviser, der står i bogen.

MH: Så er der lærebogens rolle. Det påstås her, det siger mine NZske lærere, at hvilken mængde af beviser, der gennemgås, det har absolut ingen sammenhæng med om de optræder i den lærebog de anvender.
L2: Det mener jeg også. Det er mig, der bestemmer hvilke beviser, de skal have og tager stilling til udfra min erfaring, om det nu også er værd at bruge tid på det og det. Og så..helt konkret vil jeg sige, at i vore dage med beviser har man jo egentlig ikke ret mange differentationssætninger..Jeg synes f.eks. udmærket godt de kan lære at bevise, at en brøk..at de kan gennemføre beviset for differentialkvotienten. Det er noget, jeg som regel tager med.

Andre måder at argumentere på end lige netop beviser indgår også i matematikundervisningen og erstatter i visse tilfælde beviser

Af og til kan en mere løs argumentation erstatte et bevis og være med til at overbevise eleverne om sætningens rigtighed og dermed tjene til at understrege sætningen, således at eleverne kan huske den. Dette er tilfældet, når beviset er kompliceret og bliver vurderet som for tidkrævende i forhold til det udbytte, det kunne give eleverne.

MH: Den første lærer her har en meget konsekvent holdning til, hvornår man underviser i bevise. Enten så beviser man hele vejen og fuldt formelt, eller også så giver man bare eleverne formlen. Altså det der med løse intuitive argumenter det gør man kun, hvis man også laver beviser...

L2: Der er jeg så ikke enig, fordi det er jo et eller andet med at give eleverne en måde at huske tingene på og hvis jeg skønner at beviset måske nok er for svært til at hele klassen skal have det, så prøver jeg da ihvertfald at tage nogle situationer, der illustrerer sætningen, sådan så de ihvertfald kan huske og også får en fornemmelse af, at når det ser rigtig nok ud det der...hvis nu man har en eller anden brøk, det kunne være meget svært at bestemme grænseværdi af, så.. synes jeg man kan have glæde af, at eleverne på deres lommeregner sidder og sætter nogle talværdier ind, der ligger tæt på x_0 ..sådan noget som $\sin(x)/x$ (x gående mod 0).

Eleverne skal kende forskel på at give taleksempler og på at føre et bevis

L2 forventer at eleverne - i de tilfælde hvor man kan bruge taleksempler som til at overbevise sig om en sætnings rigtighed - i løbet af gymnasietiden får en forståelse for forskellen på et bevis og et taleksempel.

MH: Så er der den der med at ..dog skal eleverne trods alt kende til forskellen på at give et taleksempel og på at give et bevis på for en sætning. Er du enig i det?..
L2: Det skal det og det skal de også vide før 3.g. Det er helt sikkert. Allerede her i 1.g. Det synes jeg, er meget vigtigt.

Kommentarer til at beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

Beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal er for svært for den gennemsnitlige elev i 1.g, men eleverne kan godt få en forståelse, at man er nødt til at udvide talmængden med de irrationale tal

..Men når vi så tager fat på selve beviset, så tror jeg nok, at nogen af dem synes, at det er lidt underligt. Men man skal også somme tider lave noget for de gode i klassen. Så når du lige præcis spørger om bevisets betydning for gennemsnitseleven, så er det nok et af eksemplerne på et bevis, hvor ikke så mange er med.

Mens L2 nok mener at beviser generelt er noget eleverne får et udbytte af, så er beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal lige på kanten af, hvad eleverne kan forstå, ihvertfald i 1.g. Selvom L2 mener, at det ihvertfald i 1.g ikke er meningsfyldt at bruge beviset til at diskutere rationale/irrationale tal på et abstrakt plan, så mener hun dog godt, at man kan motivere eleverne til at sætte sig ind i at man kommer til at mangle de irrationale tal, hvis ikke man udvider talmængden. Men man skal gøre det konkret: Man mangler et tal, der kan angive længden af hypotenusen i en retvinklet trekant med to kateter af længden 1.

MH: Du kan også godt mene noget om selve problemstillingen. Jeg mener, det er en meget teoretisk problemstilling i forhold til sådan noget som produktreglen,

hvor det sådan bare er en regneregel, man skal kunne. Og der kan man så sige, at der er det rart at se et bevis for, at det altså ikke er noget en eller andet syg person har fundet, der er altså også en grund til, at den ser ud, som den gør, ikke? Og man kan sige, det kan man jo ikke rigtig bruge som begrundelse i denne her sammenhæng.
L2: Det, der er lidt uheldigt lige præcis ved denne her sætning det er, at den næsten altid ligger i 1.g stof og der er de ikke modne nok til det. De fleste synes, at det er noget underligt noget og..det var dog besværligt, men hvis man gør et nummer ud af, at man prøver at tegne et kvadrat med siden 1 og snakker lidt med dem om at selvfølgelig har en græker kunne sidde og sige at "jamen, når jeg nu lægger en snor fra det hjørne til det hjørne", så må jeg kunne finde ud af, hvor lang den diagonal er. Men..de må prøve at sætte sig ind i, hvilken opdagelse, det har været for sådan en græker, at han faktisk ikke havde et tal, der kunne sige ham, hvor langt det stykke var, hvis han gerne ville have det helt præcist. Dertil synes jeg, jeg kan få de fleste med.

Beviset kan bruges som et eksempel på et modstridsbevis

L2 lægger meget vægt på de forskellige former for logik, der anvendes i forskellige beviser. Dette er også tilfældet i $\sqrt{2}$-beviset, der efter L2's mening er en glimrende illustration af den form for logik man finder i modstridsbeviser. Til gengæld finder hun ikke, at diskussionen omkring rationale/irrationale tal er så relevant for eleverne, navnlig ikke i 1.g. L2 prioriterer den logiske struktur og nedprioriterer sætningens indhold og konsekvenser. Det sidste har muligvis at gøre med at L2 tilsyneladende ikke ser, at det er en umulighedssætning.

..det er - hvad skal man sige - ikke så meget det at eleven får et bevis for at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, eller rettere: At man lærer dem at det ikke er et rationalt (tal), hvad et irrationalt tal er. Det tror jeg ikke rigtig, de har nogen som helst ide om. Men det jeg synes, der er så godt ved det bevis, det er, at her kan virkelig komme til at snakke logik. Er det ikke det de lærer: Hvad er det, hvad går et indirekte bevis ud på? Det..kan jeg faktisk godt lide.

At L2 i særlig grad lægger vægt på den logiske struktur i beviserne fremgår af det følgende, der er en fortsættelse af citatet ovenfor.

MH:Og det mener du godt, de kan lære?
L2: Ikke dem alle sammen, men mange af dem kan godt se, det er smart. Og så plejer jeg somme tider at kæde det sammen med nogle af sætningerne fra Holbergs komedie. Det er jo lidt af det samme, der går igen, ikke? Med morlille der er en sten osv. ikke? At det er faktisk ret vigtigt, at man kan lære at tænke logisk og at vi gør os klart hele tiden skridt for skridt. Er det rigtigt, det vi slutter nu? Eller begår vi på et eller andet tidspunkt en fejl sådan at den antagelse, vi havde til at begynde med den har ikke været rigtig. Og kommer vi frem til en modstrid eller hvad? Jo, jeg synes, det har faktisk en betydning, så er det næsten lige ved at sige skidt med hvad det er vi beviser - men selve metoden i det bevis der, den synes jeg er vidunderlig.

D.2.3 L2's holdning til bevisførelse

3.g elever kan godt argumentere for svaret til polygonopgaven

L2 mener godt at 3.g-elever kan argumentere for svaret for polygonopgaven:
MH:..de NZske lærere mener, at man måske godt kan forestille sig i tilfælde af f.eks. polygonopgaven, at de kan finde ud af at finde løsningerne, men de kan så ikke gå hele vejen i kraft af at argumentere for dem. Hvad vil du sige om dine elever?
L2: Det kan de heller ikke. ..altså en 3.g.-elev kan, men lige nu sidder jeg konkret og tænker på min 1.g.

Alle bør forsøge sig med polygonopgaven

Hun mener dog, at alle elever vil have glæde af at forsøge sig med opgaven, selvom de ikke nødvendigvis er i stand til at løse den helt.

MH:..nu sådan noget som polygonopgaven..du kan godt forestille dig, den ville forekomme (i undervisningen) og du ville også kræve af dine elever, at de måske ikke ligefrem var i stand til at finde svaret, men de skulle ihvertfald forsøge sig med det?
L2: Ja, det er afgjort.

Dette understøttes af, at L2 mener at alle elever kan have glæde af bevisførelsesopgaver. Det er bare ikke realistisk, at alle får oplevelsen af *selv* at udvikle argumentationen.

MH: Denne her lærer mener at de hersens bevisførelsesopgaver de er meget sjove og kan sådan bruges som en eller anden form for intellektuel underholdning - særlig for de dygtigste elever. Men det er ikke nogle krav man stiller til eleverne, noget de skal opleve. Det er ikke noget, der sådan giver et brugbart eller måleligt udbytte for dem, at de bliver konfronteret med sådan nogle opgaver.
L2: Det er ikke dem alle sammen, der får et stort udbytte af det, det er da rigtigt....Men der er da en glæde ved at...selvom de så måske bliver hjulpet, så tror jeg at det der med, at sådan sidde og arbejde sig frem til en eller anden påstand ihvertfald, det tror jeg for de fleste er meget godt.

Bevisførelsesopgaver er relevante for alle elever

L2 mener - ligesom hun gør med beviser - at bevisførelsesopgaver er relevante for alle elever - ikke kun kommende professionelle matematikere. Igen mener hun, at man især snyder andre dygtige elever, der ikke sidenhen vælger at læse uddannelser, hvori der indgår matematik, for Den Gode Oplevelse.

MH: Det der med bevisførelse er egentlig noget, der kunne være et værdifuldt element i matematikundervisningen, men...denne her lærer mener: Den gennemsnitlige elev er simpelthen ikke i stand til andet og mere end at lære et antal algoritmer og lære at genkende de situationer, hvor de skal bruges. Og af *den grund mener vedkommende, at derfor bør man ikke stille bevisførelsesopgaver. L2:..det synes jeg jo ikke er rigtigt, for altså, man skal også gøre noget for de gode elever og jeg tror man et eller andet sted giver eleverne en oplevelse, selvom de ikke forstår det. Så, nej, jeg ville bestemt ikke springe over beviser og bevisførelsesopgaver. Så kunne det da godt være, at jeg skulle hjælpe eleverne, men..så kan man da håbe på, at de sammen med mig så får en god oplevelse...*

D.3 Referat af interview med L3

D.3.1 L3's bevisbegreb

L3 betoner det logisk-deduktive aspekt og nødvendigheden af at have klare forudsætninger, når hun beskriver, hvad et bevis er.

..det er jo det der med at..jeg har slået det op og formuleret det lidt om "en logisk argumentation for en sætning udfra aksiomer eller udfra udtrykkelig udtalte forudsætninger og tidligere beviste sætninger"

I sin beskrivelse af, hvad beviser skal gøre godt for i matematikundervisningen betoner hun også at beviser er noget, der er af abstrakt og generel natur.

MH: Det første jeg gerne vil vide, det er om du er enig i den der påstand med, at beviser er noget, der er uden betydning for den gennemsnitlige elev.
L3: Nej, det er jeg uenig i. Det er jo sådan set... Nej, slet ikke.... altså for det første er matematik jo også en form for logik, som skal være der og der skal være et vist generalisationsniveau og beviser bibringer jo også en større forståelse...for stoffet

D.3.2 L3's holdning til beviser

Beviser er ikke for svære for den gennemsnitlige elev

L3 mener ikke, at beviser i almindelighed er for svære for eleverne. Beviser er noget man kan præsentere eleverne for og som er fremmed for dem til at starte med, men de vænner sig til at de er der og at der er krav om, at de skal forstå dem. Beviser kræver altså *tilvænning* og *erfaring*, men det er ikke en didaktisk umulig opgave at få eleverne til at forstå beviserne.

MH: Hvad så med det argument med, at beviser er svære og måske også for svære?
L3: Jo altså, det kan da godt være, at de synes det er svært. Altså beviser er svære, men man kan jo så sige ved at de så ser nogle stykker, så er det det er jo også mindre fremmed for dem.

Jeg tror..der er sådan noget med at skåne dem for en masse ting. Man må jo ikke bruge visse ord, for så bliver de forskrækkede og der er visse sætninger, som man ikke kan komme ind på, de undlader det.. fordi så vil man tage selvtilliden fra dem..Jeg mener ikke det er rigtigt, at man undergraver deres selvtillid. Jeg synes lige så godt at man kan sige, at man får eleverne til at indse, jamen der er nogen ting og det var jeg måske ikke så god til og det interesserer jeg mig så ikke så meget for og det er så et valg. Jeg kunne blive bedre til det, hvis jeg ville, men det er besværligt og tager tid.

Beviserne har måske *netop* en plads i matematikundervisningen for at sikre, at der stilles passende store krav til eleverne. L3 opfatter det at "kunne" beviser, som noget der stiller større krav eleverne end opgaveregningen kan byde på.

...det ligger vel i, at vi i en eller anden forstand synes det er finere at kunne nogle beviser og nogle sætninger. Det må være en større forståelse i det med at bevise end bare det at regne opgaver.

Det står ikke klart, hvad L3 mener med, at man skal "kunne" beviser. Som det fremgår af nedenstående citater, så er der i hvertfald ikke tale om at "kunne" er ensbetydende med, at eleverne skal kunne dem udenad. Muligvis skal det forstås som at eleverne er i stand til at gengive beviserne på basis af at kunne huske (og have forstået) hovedideen i beviset.

det vil så sige, at vi opgiver små 200 sider, som selvfølgelig også har meget andet end beviser i sig, men altså hvor det jo er altså er sådan, at for at få en ordentlig karakter, så skal de altså kunne de beviser der og der er for mange til at de kan lære dem udenad.

..altså vores elever skal jo kunne meget mere til en mundtlig eksamen..de skal også kunne drage paralleller fra den ene ide til den anden ide, ikke.

Beviser er eksempler på en abstrakt og generel tænkemåde, som eleverne skal tilegne sig

Beviser skal blandt andet skal indgå i matematikundervisningen, fordi de er eksempler på, at der argumenteres på en generel måde. Det anser hun for afgørende i forhold til at udvikle eleverne. Man forlanger af dem, at de lærer at tænke i generelle strukturer.

..de skal være generelle i deres tankegang, så skal de selvfølgelig kunne nogle velvalgte eksempler, der belyser, at de så har forstået, hvad det er... det mener jeg alle elever har brug for.

Beviserne skal vise elever, at man argumenterer for sine påstande i matematik såvel som i andre fag

Beviser skal også indgå i matematikundervisningen for at eleverne lærer, at man skal argumentere for sine påstande i matematik, såvel som i andre fag.

...det med eksamenssystemet, det er selvfølgelig vigtigt nok, et af mine mål er jo også at eleverne klarer sig godt til eksamen..., men udover det så synes jeg da også, som der også står i materialet, at generelt skal elever lære at argumentere for deres synspunkter, uanset om det er matematik eller historie, geografi eller noget andet. Og det er jo det ambitionsniveau jeg synes vi har i gymnasiet..

Helt i overensstemmelse hermed erklærer L3 sig enig i, at beviser kan bruges som redskab til at forhindre, at matematik fremstår som et fag, hvor sætningerne er ubegrundede.

MH: Hvis en elev er i stand til at følge beviset, så kan sådan et også bruges til at forklare eleverne, hvorfor en sætning er sand. Og man på den måde så kan forhindre, at matematik fremstår som et fag, hvor sætningerne er ubegrundede.
L3: Det syntes jeg var rigtigt.

Beviser - især beviser for kontraintuitive sætninger og beviser, der er svære - kan gøre det lettere for eleverne at huske sætningerne

I tilfælde af kontra-intuitive sætninger, der ellers er svære at huske og i tilfælde hvor der er beviser, som elever opfatter som besværlige og underlige - f.eks. reglen for differentation af et produkt - kan beviser føre til at sætningerne lettere huskes.

MH: Så er der den der påstand med, at elevernes evne til at anvende en sætning er uden sammenhæng med, om de har set beviset for det...
L3: ..Nu kan sætninger være mere eller mindre oplagte og de fleste er jo ret oplagte f.eks., hvordan differentierer man en sum. Der kan de hurtigt æde, at det gør man nok bare hver for sig og så lægger man dem sammen. Men så er det jo, at når man kommer til produktet, at de fleste, hvis ikke man sådan har beskæftiget sig med, at sådan gør man jo ikke bare, jamen så er det da klart at så tager de bare hver enkelt (faktor) og differentierer og tager produktet bagefter. Der mener jeg klart, at det at man har vist sætningen og haft alt det der besvær med med at lægge noget til og trække noget fra bagefter, sådan som de jo synes er dybt godnat, så kan de jo huske, nå, det var jo måske alligevel nok ikke så nemt. Altså, så på den måde hvis sætningerne ikke er meget oplagte og beviserne måske heller ikke er, så tror jeg de bliver bedre til at huske, at der var noget besværligt der...jeg tror ikke på, at den enkelte sætning sådan generelt, har den store betydning og det bevis der hører til den.

Generelt er der ikke nogen direkte forbindelse mellem at kende til beviset for en sætning og ens evne til at anvende den, men beviser kan forbedre elevens generelle problemløsningskompetence

L3 mener, at der er en sammenhæng mellem at eleverne udvikler en evne til at forstå beviser og deres problemløsningsevner. Eleverne forbedrer nogle konkrete færdigheder som symbolmanipulation, men også får mere gå-på-mod i forhold til at gå i gang med opgaver, der - i lighed med beviserne - ser "fremmede" ud. De har også glæde af den evne til at tænke generelt/abstrakt og logisk og overskue længere argumenter, som de efter L3's mening tilegner sig under arbejde med beviser.

Noget andet er, at hvis man hopper ud fra det enkelte bevis og den enkelte sætning og siger: Bliver man bedre til at løse opgaver, hvis man har haft beviser? så tror jeg det, fordi man er bedre til at bygge sit niveau op og overskue nogle konsekvenser, bruge det det matematiske sprog, symboler osv.

..det enkelte bevis tror jeg ikke gør dem bedre til at regne lige den type opgaver, men som sådan det at de er vant til at tænke abstrakt og logisk, vant til at kunne symboler, gør at de bliver bedre til at løse opgaver bredt. Det kan godt

være denne her med at denne her med at differentiere..det her bevis, vi har snakket om nogle gange gør at de bliver bedre til at løse en trekantopgave. De har ingenting med hinanden at gøre, men alligevel en form for manipulation og noget, der ser fremmed ud, som de bliver bedre til at gå til.

Hovedformålet med matematikundervisningen er ikke at lære eleverne at anvende matematikken

Selvom L3 godt mener, at bevisers tilstedeværelse i matematikundervisningen kan begrundes med, at det gør eleverne bedre til at regne opgaver, mener hun ikke, at det er den eneste grund. Matematik er andet og mere end anvendelsesaspektet.

MH: ..beviset spiller en perifer rolle, da hovedformålet med matematikundervisningen er at eleverne lærer at anvende matematikken og ser eksempler på anvendt matematik.
L3: Jamen, det er jo så også det NZske system...Jeg synes ikke det er rigtigt, at det kun handler om at anvende.

Eleverne er ukritiske overfor matematiske sætninger

Beviser som middel til at overbevise eleverne om, at sætningerne er sande, tror L3 ikke rigtig på. Eleverne er ret autoritetstro overfor påstande i matematikfaget og tror med glæde på, hvad læreren siger. Det er illusorisk at tro, at eleverne finder på at betvivle de sætninger, de bliver præsenteret for i matematikundervisningen. Hun nævner blandt andet i forbindelse med sin kommentar til om beviserne har nogen betydning for elevernes evne til at anvende sætningerne. Eleverne vil f.eks. ikke afholde sig fra at anvende en sætning, fordi de ikke har set den bevist

..altså jeg er nok enig med påstanden om beviserne i sig selv for den enkelte oplagte sætning, altså der tror jeg egentlig at eleverne er så autoritetstro, så..de tror jo på, hvad der står i bogen. De tror på hvad jeg siger.

Hun giver også udtryk for det direkte adspurgt:

MH: Ja, men det har lidt.. med det andet at gøre, altså med at eleverne burde forholde sig kritisk til rigtigheden af sætninger, der introduceres i matematikundervisningen. Men det er sådan et ideal og det er meget, meget svært at få dem til det normalt.
L3: Ja, altså det vil jeg sige, det er så nogle få elever, der gør det, ikke? Altså, der tror jeg ambitionsniveauet bliver for højt, de vil bare acceptere det. Ja, det er jo rigtigt man kan jo lave nogle eksperimenter en gang imellem, ved at bevise et eller andet fuldstændig gak og så er det helt forkert. Du kender sikkert også den der med, at man viser at en myg og en elefant vejer det samme. Og de tror jo på den lige indtil de kan se at altså..det kan jo ikke være rigtigt. Og hvis det nu var et eller andet, der for såvidt godt kunne være rigtigt, så ville de slet ikke opdage det, de ville bare acceptere det.

Til gengæld mener L3 godt, at beviser i nogle tilfælde kan virke forklarende, dvs forklare eleverne hvorfor en sætning er sand og hun nævner beviset for produktreglen som eksempel. L3 mener imidlertid ikke, at det kan bruges som begrundelse for fra- eller tilvalg af bestemte beviser, fordi det egentlige formål med beviserne er et andet.

Og så er der det der med, at beviserne kan i nogle tilfælde forklare eleverne hvorfor en sætning er sand. Jo det kan de...godt vil jeg sige. Altså jeg synes stadigvæk ikke eleverne nødvendigvis bliver bedre til at regne opgaver med det, men altså så har man jo eksempelvis at altså netop det der med $f \cdot g$ hvor man differentierer det, altså det kunne jo være alle mulige andre..regler. Hvis du dividerer to funktioner med hinanden, og man differentierer så er det jo en helt..altså besynderlig konstruktion..der kan man godt sige, at beviset forklarer dem hvorfor. Om de så er interesserede i det er så et andet spørgsmål synes jeg. Altså vi har jo ikke det der med obligatoriske beviser At udelade beviser, fordi man ikke tror eleven vil kunne få udbytte.. jo altså der er nogen, som enten virker som gentagelser eller som har sådan nogen indbyggede hurdler.. og som man ikke synes de får nok ud af, der vil jeg (undlade dem)..Jeg tror dem der har kommet med udtalelsen mener noget andet, ikke? Jeg tror de mener sådan bredt, at man udelader beviser, hvis de ikke får noget udbytte af det. Der er jeg nok lidt mere streng i det.

Man kan godt fravælge beviser for sætninger, men man skal gøre eleverne opmærksom på, at man ikke beviser dem

L3 mener ikke nødvendigvis man skal bevise hver eneste sætning i lærebogen og at det i hendes undervisning kan forekomme, at sætninger blot bliver præsenteret og ikke argumenteret for. Hun finder at det er i orden, at man argumenterer intutivit for de sætninger man ikke beviser - man skal bare gøre eleverne opmærksom på, at man netop ikke beviser sætningerne.

MH: Der er en, der mener, at når vedkommende underviser i beviser så er det enten noget, hvor man laver hele beviset eller også så undlader man simpelthen at argumentere for det...sådan så enten så beviser man en sætning hele vejen eller også så siger man "her er en sætning, brug den", altså noget med at mere løse, intuitive argumenter er kun i orden, hvis man også supplerer det med et bevis.
L3: Altså jeg synes, hvis man er klar over forskellen på, om det nu er et bevis man står med eller det er de der intuitive argumenter, så synes jeg det er helt i orden at bruge de intuitive ikke. Det giver da også en fornemmelse af, hvad var tanken. Og det tager jo lang tid, hvis man skal bevise alt muligt fra basis, der kan også være nogle ting, hvor det vil i sig selv kræve masser af tid, det gider vi ikke. Nej, det er altså ideen, der er det væsentlige der. Så hedder det bare ikke et bevis. Så hedder det måske sådan..en løs argumentation..
MH: Du synes det er i orden, så længe man bare gør opmærksom på det og hvis man bare selv er klar over det?

L3: Ja, jeg synes da det er da væsentligt. Der kan der også være sætninger, der bare bliver præsenteret..så er det sådan.

Eleverne skal kende til forskellen på at give et taleksempel og føre et bevis

L3 finder i denne forbindelse, at eleverne - i de tilfælde hvor taleksempler kan illustrere en sætning - skal kende til forskellen på at bevise og på at give et eller flere taleksempler og det er noget som hun gør noget ud af at understrege forskellen på.

MH: Så er der den der med, at eleverne bør kende til forskellen på at give taleksempel og give et bevis.
L3: Ja, det synes jeg er helt rigtigt...det skal de altid vide. Altså, et taleksempel viser noget om at et tal passer i en eller anden given påstand, men det har ikke noget med et bevis at gøre.
MH: Ved de det når de kommer (i gymnasiet)?
L3: Nej, nej overhovedet ikke..tværtimod så er det da en teknik. Altså et tal det kan de godt se, det kan være tilfældigt, men tre tal det er nok som regel godt nok og fem det er ihvertfald godt nok, ikke og når man så når op på ti, så er den helt sikker.

MH: Der er så en, der mener at beviser er gennemgående irrelevante, når man har med almindelige elever at gøre og ihvertfald i det tilfælde med matematik, hvor man kan give taleksempler, for så kan man vise, at sætningen "virker". Det er meget mere effektivt..
L3: Jamen det..det kan godt være det virker effektivt, men det er jo ikke rigtigt for..det er jeg helt uenig i. Det kan godt være, at man beslutter sig til det her vil vi ikke vise. Vi tror på det, vi prøver lige med et par tal og ser vi..jamen det virker jo. Men det er overhovedet på ingen måde rigtigt.
MH: Det vil du så sige til det dine elever?
L3: Ja.

L3 finder på ingen måde, at der er grund til at undlade overfor eleverne, at kalde noget, hun selv synes er et bevis, for et bevis:

L3: Jeg synes man skal kalde tingene, hvad det er. Og netop hvis man skal få dem til at forstå en hvilken som helst løs argumentation er ikke et bevis, så synes jeg man skal bruge ordet bevis, når det er i spil. Og det der med, at man skal skåne dem for det, det synes jeg er en meget mærkelig ting.

Beviser gør eleverne bedre til at tænke logisk

L3 finder, at det er rigtigt, at et af de udbytter eleverne får af at beskæftige sig med beviser er, at de lærer at tænke logisk.

MH: Så er vedkommende også inde på at man kunne håbe på at eleverne blev bedre til at tænke logisk af at arbejde med beviser?
L3: Ja, det tror jeg også er OK.

Beviser kan bruges til at give eleverne et billede af matematik som en aksiomatisk struktur

L3 erklærer sig ligeledes enig i, at beviser i nogen sammenhænge kan bruges til at give eleverne et billede af matematik som en struktur, hvor sætninger via beviser opbygges fra et antal aksiomer. Hun synes dog ikke nødvendigvis, at Euklidisk geometri er det mest velegnede eksempel.

MH: Vedkommende nævner også - sjovt nok som den eneste - at beviser er værdifulde, fordi at det kan være med til at man giver eleverne et billede af et fag som..af matematik som et fag, der har en aksiomatisk struktur og altså den der ide med, at du har nogle aksiomer og bruger så beviser som bindeled mellem aksiomerne og så de sætninger og så bygger du en struktur op på den måde. Synes du også det er en rolle beviser spiller eller bør spille?
L3: Jo, det synes jeg, at det er. så kan man diskutere om det er så stor en skam at Euklidisk geometri ikke er der mere eller om..det har jeg ikke nogen særlig følelse for, men altså, jeg synes det er rigtig nok at..det der med at opdage en struktur og et hierarki..

Beviser har - for "matematisk modne" elever også æstetiske kvaliteter

Det æstetiske element - blandt andet repræsenteret ved beviserne - er noget, som spiller en stor rolle også for eleverne og gør det i stadigt større grad hen igennem gymnasieforløbet efterhånden som eleverne modnes.

MH: Så er der argumentet med, at beviser ihvertfald også skal være i matematikundervisningen, fordi det simpelthen er et godt eksempel på, at matematik kan være smukt og smart.
L3: Nu ved jeg ikke hvor mange..jeg synes det er rigtig nok, at de må gerne se "matematikkens skønhed". Jeg ved bare ikke...hvor mange der synes det er så skønt, men altså jeg tror da nok der..der er alligevel nogle stykker, der efter de der 3 år....i løbet af 3.g, så bliver de alligevel lidt fascinerede af det. Og synes, jamen det er da en smart måde...den der fascination af et eller andet, der ikke umiddelbart gør at man bliver meget bedre til noget, lever sig ind i en ide, det synes jeg de æder mere og mere.

Beviser i matematikundervisningen er der også for kommende, professionelle matematikere - men ikke udelukkende

L3 mener nok at beviser har relevans for kommende professionelle matematikere. Hun ser det imidlertid ikke som et af hovedformålene med at have beviser i matematikundervisningen. Tværtimod mener hun, at matematikundervisningen og beviserne måske er endnu vigtigere fordi elever, der ikke senere kommer til at beskæftige sig med matematik. Det er så at sige "sidste chance" for at få et indtryk af faget matematik. Beviser skal indgå heri, fordi de er en del af matematikken.

L3: .. det er i særlig grad relevant for de kommende professionelle (matematikere), det synes jeg er rigtig nok. ... Det er dem, der skal bruge det senere *hen. Måske er de i virkeligheden endnu mere relevante for dem, der ikke skal bruge dem, fordi det er sidste gang i livet...de bliver præsenteret for sådan noget. De andre får det jo alligevel. De skal have den side af matematikken, af argumentationen, det er OK, sådan skal det jo være.*

Lærebogen er ret styrende for matematikundervisningen - også undervisningen i beviser

L3 mener, at lærebogen - blandt andet fordi det er hvad eleverne har at holde sig til til eksamen - er ret styrende for hendes undervisning i beviser. Hun synes dog ikke, det burde forholde sig således:

MH: Så siger de også..at hvor mange beviser der gennemgås og også hvordan de gennemgås, det har faktisk ikke rigtig nogen sammenhæng med, hvad for en lærebog de bruger eller hvad der egentlig står i lærebogen.
L3: Jeg synes det har en sammenhæng blandt andet fordi de opgiver jo fra en lærebog til eksamen og hvis man sådan konsekvent har valgt noget andet eller valgt at gøre det på en anden måde, så tror jeg det bliver svært for dem at læse til eksamen... Men jeg ved ikke..ideelt set, så synes jeg egentlig ikke man skal lade sig styre af bogen..

Kommentarer til at beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

L3's kommentarer til beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal, illustrerer udmærket på konkret vis nogle af de holdning, hun også har formuleret generelt.

Det er muligt at motivere eleverne til at sætte sig ind i en "ren" matematisk problemstilling

Det er muligt at få mange elever til at fascineres af - og dermed altså også forstå en sætning som denne, selvom den ikke har nogen umiddelbar kobling til anvendelser. Man kan godt forvente, at de fleste elever godt kan forstå og fascineres af rene matematiske problemstillinger.

MH: ..Det er simpelthen en problemstilling, som man på det her niveau ikke kan forvente at ihvertfald den gennemsnitlige elev er i stand til at forstå.
L3: Det synes jeg godt man kan. Det har også noget med fantasi at gøre, synes jeg. Altså udover ren matematik, det der med at forestille sig, at man har nogle regler, som medfører et eller andet, jamen så må der eksistere det og det...Ligesom den der klassiske med to linier, der ikke er lige lange. Hvilken linie indeholder flest punkter. Altså fascinationen af, at de indeholder lige mange punkter er da også enormt underlig.

Set i det lys er det ikke overraskende, at L3 anser det for utilstrækkeligt, at eleverne er eller bliver i stand til at anvende regnereglerne for rødder. Sætningen og beviset er derimod relevant, fordi man får mulighed for at diskutere udvidelser af talmængder og at man kan drage paralleller til indførelsen af de rationale tal.

MH: Så kan man også mene, hvis man sådan er tilstrækkelig regneorienteret, at eleverne har et tilstrækkeligt kendskab til irrationale tal, hvis bare de er i stand til at regne med dem, bruge regnereglerne for rødder, f.eks. sådan noget med at $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$*, bare de ved sådan noget, så ved de egentlig også nok.*
L3: Nej, det mener jeg altså ikke. Jeg mener det er godt at vide, at der er forskellige typer af tal og det er naturligt også at forestille sig at $x^2 = -1$*, at man så finder på noget nyt som man så præsenterer, det bliver så det næste. Man opfinder hele tiden tal. Og vi plejer da også at præsentere de rationale (tal), det er da også nogle regneoperationer, der ikke kan lade sig gøre indenfor den gruppe tal man nu har, så må man udvide.*

Eleverne ved ikke, hvad et irrationalt tal er

Hun mener bestemt ikke, at eleverne på forhånd ved, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. De har måske hørt det, men de forstår ikke og ved ikke hvad forskellen på et rationalt og et irrationalt tal er. Hun mener heller ikke, at man kan sige, eleverne ved at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal, før man har bevist det for dem. At overbevise eleverne om dette er en del af at udvikle deres kritiske sans:

L3: Jo, men der synes jeg det er sjovt, at de påstår at eleverne ved godt, at $\sqrt{2}$ *er et irrationalt tal. Altså, hvor ved de det fra? Det kan de da ikke vide*
MH: Jeg tror deres (de NZske læreres) argument er, at det har de hørt før, ikke? Og så er det et faktum og..
L3: Jamen..den kan jeg ikke acceptere..der er jo masser - altså nu har jeg geografi som mit andet fag og der kan man jo også komme med alle mulige påstande, som de har hørt og endda set på film, men som ikke bliver rigtige af den grund.

MH:... Jeg ved ikke om du allerede har kommenteret den der med at eleverne ved udmærket godt, at $\sqrt{2}$ *er et rationalt tal.*
L3: Den køber jeg jo ikke...der kan vi da være enige om, at udtale sig om at det er det, men det er ikke argumenteret, altså de vil tro på, at jeg siger, at det er det og der er en eller anden påstand om, at det (ikke) er rationalt, så kan vi godt gå videre derfra, men altså de ved det ikke i forvejen.

Beviset er et godt eksempel på et modstridsbevis

Herudover mener L3 også, at beviset i sig selv er et godt eksempel på et modstridsbevis.

Jeg synes det er meget væsentligt at se sådan en sætning, hvor man.. både så selve bevisets teknik med et indirekte bevis, men da også det der med, hvordan argumenterer man sig frem til, at der findes andre tal end dem vi sådan lige sædvaneligvis bruger.

Beviset kan bruges som selektionsmetode

Der er dog forskel på, hvad L3 synes om sætningen og hvad hun gør i praksis. Hun beskriver, hvordan hun i 1.g præsenterer elever for beviset for sætningen, for at de kan få et grundlag for at afgøre, om de skal have det lange højniveau i matematik.[1] Hun bruger som sådan beviset som eksempel på noget af den svære teoretiske matematik. De elever, der slet ikke overvejer højniveau i matematik ser slet ikke beviset.

MH: Jeg tror også lidt det de er inde på det er sådan noget med at det simpelthen er en problemstiling, som det er meget, meget svært at få eleverne til at fatte interesse for. -
L3: Jo, altså og det kan jeg da også godt se. Og nu..det er så også fordi, at jeg haft.. i år har haft en bog, hvor de har mange ting i nogle appendixer, blandt andet det der med $\sqrt{2}$ og der har jeg da også gjort det - nu kan man jo vælge 2-årigt højniveau og 1-årigt højniveau i matematik og det skal man så vælge i 1.g. Og så har jeg så gjort det, at dem der overvejer om de vil have det der 2-årige højniveau, har blandt andet beskæftiget sig lige præcis med den der. Jeg synes at, at hvis de slet ikke kan se, jamen hvad skal vi med det for? Jamen, så er det måske ikke 2-årigt højniveau. Så skal de vælge noget mere anvendelsespræget, ikke? Og derfor har jeg altså også accepteret, at det er altså ikke alle, der har det...Men ideelt set synes jeg det er en smaddergod sætning. Der er bare mange andre ting man sådan også skal..det er lidt mere et tidsspørgsmål.

D.3.3 L3's holdning til bevisførelse

Der er ikke ret mange bevisførelsesopgaver i matematikundervisningen - men der burde måske være det

L3 mener ikke at bevisførelsesopgaver pt. spiller den store rolle i hendes undervisning, udover at der efter hendes mening optræder bevisførelsesopgaver i 3.g.-opgaven i matematik.

L3: Men altså sådan elementer af det..Men så kan man sige, de skriver jo 3.g-opgave, nogle af dem ihvertfald, hvor det i høj grad drejer sig om at de finder noget originalt og bevise på deres egen måde. Og der viser man også, at man har trænet dem i det inden..Det er ikke noget, der fylder meget vil jeg sige. Måske skulle det fylde mere. Det er sådan nogle tanker man begynder..kigge på sådan noget her..orv ja, det skulle jeg nok gøre noget mere ud af...

MH: Så mener vedkommende også, at man under bevisførelse kan bruge små bevisførelsesopgaver som sådan er..måske mere har karakter af tænkeopgaver i retning af "forklar hvorfor arealet af en trapez er $\frac{1}{2}(a+b)h$". ..
L3: Det er udmærket.
MH: Er det noget, du gør så?
L3: Ja, det..ikke meget vil jeg så sige.

[1] Ny ordning i gymnasiets matematikundervisning. Eleverne kan nu vælge at fortsætte med matematik i 2.g, færdiggøre mellemniveauet og herefter evt. gå videre til højniveauet. De kan også vælge at starte på højniveauet med det samme i 2.g. På den sidste type hold forestiller man sig, at der bliver lagt mere vægt på en stringent tilgang til matematikken.

Bevisførelsesopgaver er principielt en god ide

Som jeg har været inde på synes L3 generelt, at bevisførelsesopgaver i stil med polygonopgaven er en god ide.

Men generelt..ja så synes jeg det er en god ting at lade dem gøre det der bevisførelse.

Polygonopgaven er lidt for svær for eleverne - i hvert fald på obligatorisk niveau

L3 finder at polygonopgaven er lidt for svær ihvertfald på obligatorisk niveau.

MH:...Hvis du præsenterer dine elever for en lignende opgave - måske ikke lige denne her (polygonopgaven) - hvordan ville du så have det med det?
L3: Altså lige den der ville jeg også - ihvertfald på obligatorisk niveau - føle var svær. De har ikke noget at have det i, vel.

Det synes som om L3, i det - efter egen angivelse - beskedne antal bevisførelsesopgaver vægter elevernes evne til at finde på et trick - få en god ide. Hun beskriver en bevisførelsesopgave som at eleverne efter at have differentieret x^3, skal give et begrundet bud på, hvad x^4 differentieret så kan være og hvor den "gode ide" kan være at bruge produktreglen, således at man kan udnytte kendskabet til den differentialkvotient, man allerede kender. Hun ser den som en parallel til T4's "forklar hvorfor arealet af en trapez er $\frac{1}{2}(a+b)h$".

MH: Kan du give et eksempel på sådan en opgave?
L3: Jo, men altså det kunne godt have været den der..altså lige direkte. De er der jo altså sådan ind imellem. Jo, men altså så kunne det altså være noget med, at de bliver bedt om, når de differentierer x^3, så bliver det $3x^2$, hvad så med x^4...og så kan de jo stille op ligesom i bogen, men det kan så også være, de så ville bruge produktreglen og sige, jamen x^4 det skriver vi som $x \cdot x^3$. Der er nogen, der gør det og hvad fik vi så ud af det? Altså, det er sådan lidt det. Sådan nogle opgaver synes jeg jeg bruger ret flittigt...og du har så ikke nødvendigvis ville sige til dem "prøv nu med et produkt". Altså de har jo set, hvordan differentierer vi sådan et eller andet lineært og hvad med x^2. Og så gør de det med x^4 og så har de et problem i første omgang. Og hvad så?

Bevisførelsesopgaver kan give eleverne et indblik i processen der har frembragt de "færdige" beviser de præsenteres for

Bevisførelsesopgaver kan give anledning til at eleverne involveres i processen fremfor produktet og dette mener L3 giver anledning til, at man bedre forstår givne beviser.

Udover det så tror jeg da også, at man forstår de givne beviser bedre, hvis man selv har været igennem sådan en proces.

Et eksempel hun mener illustrerer dette, er beviset for løsningsformlen til 2.gradsligningen. Her beder hun eleverne lukke bogen, inspicere ligningen og overveje, hvordan man skal bære sig ad med at få x isoleret. Det kan de gøre på grundlag af at kende til relationen $x^2 + kx = (x + 1/2k)^2 - (1/2k)^2$ - en omskrivning de har erfaring med at bruge. Med "forståelse af processen" mener L3 nok i denne sammenhæng, at eleverne får en oplevelse af selv at have deduceret sig frem til løsningsformlen og dermed en forståelse af gangen i beviset i modsætning til at lære det udenad.

Vi havde f.eks. her i 1.g 2.gradsligningen og hvad er det nu, man rykker rundt på nogle led og hvorfor får man den ide? ..og så tvang jeg til dem at lukke bogen og sagde så "hvad er det så ideen var?". Nå, men det kunne de jo godt se, det var at få det der x isoleret. Hvordan kunne man nu det? Jo, så kunne de jo godt huske, at der var en eller anden regel om, at man kunne putte det hele ind i en parantes og så trække lidt fra.... altså noget med $x^2 + kx$ kunne skrives op som $(x + 1/2k)^2 - (1/2k)^2$..den har de så vist før og den bruger de tit, for den har de også brugt i nogle opgaveregningseksempler og sådan noget med at finde toppunkt og sådan noget. Så den kan de godt huske og kende. Så de kan godt..På den måde kommer det til at fungere rimelig nemt med at få x'erne placeret et sted.

Endelig mener hun, at eleverne gennem øvelser, hvor de selvstændigt tilegner størrelser variabelnavne får en forståelse for, at man kan kalde tingene hvad som helst som udgangspunkt og at eleverne bliver mere "resistente" overfor skift i variabelnavne. De kører f.eks. ikke sur i det, hvis de til den mundtlige eksamen kommer til at navngive et eller andet på en anden måde end det er gjort i bogen og resultatet følgelig ikke kommer til at ligne bogens, fordi de er trænet i selv at deducere sig frem til et resultat.

Det gør jo også i det øjeblik at de f.eks. til mundtlig eksamen går i stå med et eller andet, som f.eks at de er kommet til at kalde trekantens hjørne eller sådan noget andet end bogen gjorde eller bytter rundt på et eller andet. Deres udregninger bliver bare ikke mage til det, de har stående på deres papir. Hvad gør man så?

Bevisførelsesopgaver er ikke kun for de dygtigste elever

L3 mener i lighed med beviser ikke at bevisførelsesopgaver - i det omfang de bruges - kun er for de dygtigste elever. Hun fremhæver især, at alle har godt af at opeleve selv at finde på en strategi for at løse en problemstilling.

MH: Så er der sådan nogle bevisførelsesopgaver. Vedkommende siger, at det er højst noget man kan gøre for sjov med de særligt dygtige elever. Og det er ihvertfald ikke noget efter hendes opfattelse, der giver et brugbart eller måleligt eller et vigtigt udbytte for sådan de almindelige elever.
L3: Det er jeg ikke helt enig i. Det er nok rigtig nok at de er dygtigste elever, der får mest ud af det, men altså..hvis man ikke vælger nogle der er alt for svære, så mener jeg alle har en eller anden gavn af det.....Der er det jo sådan set meget godt at have haft nogen gange, hvor man ud fra et eller andet, man selv har fundet på skal komme videre og der er ikke nogen der har svaret på det

før en selv... det tror jeg kan gavne hvem som helst, uanset hvor god man så er.

D.4 Interview med L4

D.4.1 L4's bevisbegreb

L4 beskriver et bevis som en logisk øvelse, hvor man udfra nogle rammmer (antagelser) viser at "noget", dvs en sætning, er sand.

Jamen, jeg mener et taleksempel er ikke et bevis, vel. Altså..det jo sådan..det er jo en logisk øvelse..indenfor rammerne af det man har givet, der skal man så prøve at påvise at noget passer.

L4 anser imidlertid beviser som de fremstilles i gymnasie-matematikken - dvs beviserne som de er fremstillet i lærebøgerne - for at være "løse"[2], fordi man ikke gør særlig meget ud af at at overveje, hvad man ved i forvejen og hvad man må antage.

..jeg tror nok, at mange af vores beviser er lidt løse. Jeg tror da..der er nok steder, hvor der bliver udeladt nogle særtilfælde og man kunne godt gøre noget mere systematisk for dem og gå mere ned i at sige: her bygger vi faktisk på de og de sætninger...hvilke ting ved man i forvejen og hvilke må man antage..det gør vi ikke så meget ud af.

Selvom L4 ikke anser beviserne i gymnasiematematikken for at være fuldstændige, så vil han alligevel vælge at kalde dem beviser, fordi de er baseret på nogle generelle overvejelser og fordi der ikke argumenteres ud fra (tal)eksempler.

Og det vil jeg så regne det for et bevis, når det er lykkedes mig at.. ved at bruge de ting, jeg allerede ved, at nå til enden. Det er et bevis, mens sådan noget med, at det passer i nogle eksempler og "der kan I jo se, det gik nogenlunde", det er ikke et bevis....Så et bevis er..et bevis. Selvom der sikkert er noget i grundlaget, som de faktisk snyder sig til og faktisk ikke har vist.

Hvem "de" er står ikke klart, men L4 mener formentlig eleverne selv eller lærebogsforfatterne.

D.4.2 L4's holdning til beviser

Beviser er centrale i matematikundervisningen - eleverne bliver bedre til at tænke abstrakt ved at beskæftige sig med beviser

L4 anser beviser for at være en meget vigtig del af en almendannende matematikundervisning. Eleverne skal blive bedre til at tænke abstrakt som led i matematikundervisningen. Her har beviserne en vigtig funktion, fordi det at forsøge at forstå beviserne efter L4's mening træner dem i at tænke abstrakt.

[2] Som jeg vil vende tilbage til så holder L4 sig meget tæt op ad fremstillingen af beviserne i lærebøgerne

MH: ....I forhold til, hvad du synes, de skal have ud af matematikundervisningen, synes du (så) beviser har nogen betydning?
L4: Ja, og det er måske det afgørende..jeg synes personligt...at (det er) selve det helt abstrakte matematik, der er det relevante, det interessante, ikke? Det er et almendannende fag..det er da det tætteste de kommer på en eller anden eksercits i abstrakt tænkning.

Med "almendannede" forstår L4 tilsyneladende, at eleverne udvikler sig og tilegner sig måder at tænke på, som er brugbar, når de skal tilegne sig stof - ikke bare matematik - på et højere abstraktionsniveau end gymnasieniveauet. Som sådan ser L4 beviser som noget, der virker generelt studieforberedende.

..som sagt det er jo et almendannende fag, så de bruger formentlig det de har lært i det her fag..hvis de læser jura eller medicin eller et eller andet.

Det er den abstrakte side af matematikken eleverne synes er sjov

L4 synes også beviserne er vigtige for eleverne i kraft af, at det er den side af matematikken, han oplever interesserer eleverne mest. Eleverne kan godt lide at matematik er abstrakt og ikke umiddelbart har kobling til andet, men udgør et eget univers.

Og det er også det, som eleverne godt kan lide ved det. Det er det rent logiske i det..Det, at de ikke skal vide noget om noget som helst andet..

Han udbygger dette argument i sin argumentation for, at beviserne bør være i matematikundervisningen som et æstetisk element. Æstetikken ligger netop i, at (ren) matematik ikke har noget med noget andet at gøre og at matematik fremstår som et fag, der er præget af entydighed og præcision. Dette er noget i modstrid med L4's beskrivelse af at grundlaget for gymnasiematematikken bliver fremstillet lemfældigt for eleverne.

MH: Så er der sådan noget med et æstetik-argument: at man burde have beviser i matematikundervisningen for at give eleverne en eller anden fornemmelse af, at matematik også er et "smukt fag".
L4: Ja, det er afgørende. Jeg mener, det æstetiske er den afgørende kvalitet - også for eleverne - ved faget matematik...i virkeligheden er det deres glæde ved noget., der er rent og enkelt og præcist og uforanderligt, som lokker dem til matematik. Det er det eneste fag, hvor verden virkelig opfører sig entydigt. De ved der er sandhed og de ved, der er noget, der er forkert. Alle de andre fag er grumset til..i fysik, jamen der passer det jo aldrig, forsøgene passer jo aldrig og de ved godt, at der er alle mulige ting, de ikke kan tage hensyn til..men i matematik, der hænger verden sammen og det har de enorm respekt for.

Det er det almendannende i faget matematik. Det er det perspektiv, at der er tale om et sprogsystem, som er stabilt, altså de når aldrig til sprækkerne i matematikken og for dem ser det fuldstændig sammenhængende og konsistent ud. Og det er meget lærerigt at bevæge sig indenfor sådan et system...matematikken er et idealsprog, som det er meget, meget sundt at beskæftige sig med.

Beviser skal vise eleverne at man skal argumentere for sine påstande i matematik såvel som i andre fag

Beviser skal også være i matematikundervisningen, fordi det er vigtigt at eleverne forstår at man skal argumentere for sine påstande i matematik såvel som i andre fag. Samtidig er matematik et fag, hvor man kan stille særlig store krav til *kvaliteten* af elevernes argumentation.

MH: Så er der "granskning af beviser kan give elever et billede af matematik som et fag, hvor der i lighed med andre fag skal argumenteres for fremsatte påstande
L4:Det er jo et hovedargument for at lave beviser, ikke?..det er jo argumentationsteori og logik og sådan noget..der er jo derfor at matematik er et vigtigt fag, et almendannende fag. Det synes jeg er meget vigtigt og kan bruges almendannende.

.. Det med at argumentere, det med at tænke logisk....det er det eneste fag, hvor det bliver systematiseret. "Du har ikke argumenteret for det". Det er det eneste fag, hvor man siger helt præcist, jamen det der, det er ikke et godt nok argument. I andre fag "jamen, altså jeg synes nu og...jamen...gør han ikke og kan man ikke". Her der kan jeg helt sige "Nix, det er ikke nok, jeg vil have mere".

Beviser indgår som led i at vise eleverne et billede af matematik som en aksiomatisk struktur

L4 mener, at det er vigtigt at eleverne bliver præsenteret for sætninger som led i opbygningen af en matematisk teori fra nogle aksiomer for at vise dem, at matematik er et fag, hvor tingene hænger sammen.

MH: Der er så en, der mener at beviser er almendannende ved at det giver eleverne et billede af matematik som et fag, der hænger sammen, hvor sætningerne hænger sammen og hvor beviserne virker som et bindeled mellem de enkelte sætninger og hvor man kan se, at der er nogle aksiomer og så kan man så bygge sætninger op fra det. Er det også en rolle du mener beviser spiller?
L4: Det er jeg enig i.

De anvendelser af matematik man viser eleverne er pseudoagtige og man kan ikke begrunde matematikundervisningen med at matematik kan anvendes

Anvendelse af matematik i gymnasiet - særlig "anvendt matematik" i eksamensopgaverne - er pseudoagtigt og virker ikke motiverende på eleverne. L4 anser det tydeligvis ikke for relevant, at eleverne er i stand til at gennemskue hvilke matematiske problemstillinger, der gemmer sig i hvad han beskriver som en "urskov" af virkelighedsreferencer, dvs at kunne oversætte en "virkelig" problemstilling til matematik.

Jeg synes regneopgaver er kedelige og uinteressante..opgaverne bliver jo mere og mere praktisk rettede, ingeniøragtige eller virkelige, socialrealistiske. Der er en bro, ikke..og så har man indført nogle konstanter, der er 0.07145..fordi haletudserne formerer sig med den hastighed..nedenunder gemmer sig den matematik, som der altid har gemt sig, men så skal de kravle gennem sådan en eller anden urskov af virkelighedsreferencer for at komme ned til den samme matematik, som de kender i forvejen..

Jeg har sådan en diskussion med fysiklærerne, for de mener jo matematik er et redskabsfag, ikke?...Jeg mener ihvertfald ikke, at det er det. Det kan godt være, at de bruger det som redskab, men det er ikke det, det handler om.

Beviser kan forbedre elevernes problemløsningskompetence

L4 fortolker elevernes evne til at anvende af matematik, som deres evne til at regne (eksamens)opgaver og mener, at beviser kan gøre, at eleverne bliver bedre i stand til at regne visse typer lidt sværere, mere generelt formulerede opgaver.

MH: De NZske lærere de påstår, at elevernes evne til at anvende sætningerne er fuldstændig uden sammenhæng med, om de har set beviset for dem.
L4: Jo, det kan godt for nogle elever være sandt, men..jeg synes vores opgaver er tilrettelagt sådan så de evner, man bruger på at forstå beviser, kan man også bruge for at løse den sidste, svære del af opgaverne..en eksponentialfunktion, pludselig så hedder det ikke mere 0.1714, så hedder det c og det andet hedder K. Så skal de lave det hele igen med c'er og k'er. Der kan man sige, at hvis de er øvet i at lave beviser, så vil de have lettere ved at forstå, hvad det egentlig taget er, de skal lave der.

Med L4's "lave beviser" skal ikke forstås bevisførelse i min forstand, men at eleverne gengiver/arbejder med "færdige" beviser. *...Det vil sige at de selv..Det foregår ved, at jeg gennemgår dem og så bliver de øvet i dem og får dem for til næste gang.*

Selvom L4 finder, at beviser bestemt spiller en rolle i en almendannende matematikundervisning tror han ikke på, at den menige elev får noget særlig udbytte af de enkelte beviser og forstår dem i detaljer. De fremstår som et ritual, noget man "lærer" ved at efterligner læreren.

...når man har denne her disciplin, der hedder mundtlig eksamen, så må man jo af og til øve klassen - øve hele klassen - i at..hvordan beviser man..for flertallet foregår det ved efterligning af lærerens bevægelser.

Der er generelt for få beviser i det nuværende pensum og der burde være flere "ren matematik" beviser og færre beviser for regneregler

L4 finder, at der pt. er for få beviser i matematikundervisningen med den konsekvens, at matematikundervisningen bliver kedelig for de dygtigste elever, specielt dem der sigter på senere at beskæftige sig med matematik. Han finder, at alt for mange af de beviser, der er tilbage i pensum er er beviser for regneregler. Hvis man udelukkende satser på at undervise i anvendelsen af regneregler og beviserne for dem finder L4, at det bliver svært for eleverne at se, hvad det i virkeligheden er matematik "går ud på". Man giver et for snævert billede af, hvad matematik er.

L4: Vi har ikke mange af den slags beviser, altså i vores pensum. De beviser, der er tilbage, det er nogle, der så også kan bruges til noget. Det er sådan noget med regler, regneregler, differentiationsregler og sådan noget, ikke?
MH: Men du mener, dem er der, de skal også være der?
L4: Jeg synes jo, der godt kunne være mere. Jeg synes det er problematisk, at der er for lidt (for få beviser). Og det er problematisk for de dygtige elever, at det man tit stifter bekendtskab med i gymnasiet, er så lidt interessant. At vi har så lidt af det, som i virkeligheden er sjovt for dem, der vil dyrke det siden...siden Kristensen og Rindung[3], der er det gået nedad med antallet af beviser og kontinuitet er gået fra at være noget epsilon-delta til at være noget, der bare går mod et eller andet...det bliver sværere og sværere at se, hvad matematik i virkeligheden går ud på.

Der er vigtigt at pointere forskellen på at give et bevis og et taleksempel - og det er en pointe eleverne fanger

At der er forskel på status af at give et bevis og - i de tilfælde hvor det kan lade sig gøre - give et taleksempel, finder L4, er meget vigtigt at pointere overfor eleverne. De skal være klar over, at der er stor forskel på de to ting og det er også en pointe, han mener eleverne forstår.

MH: Så er der minimumskravet der. Eleverne bør kende til forskellen på et taleksempel og på at give et bevis for en sætning
L4: Ja, det tror jeg også, det prøver vi da ihvertfald at lære dem... De fleste..de har da en periode, hvor det morer at kunne lave den der firkant forneden..se nu har jeg bevist det. Det tror jeg flertallet godt forstår. Hvad det vil sige at bevise i forhold til bare at komme med et eksempel.

Beviser i undervisningen = beviser i lærebogen

For L4 er det at følge lærebogen rimelig tæt en garanti for at han opfylder bekendtgørelsens krav. Dette gør sig også gældende med beviser. Han beskriver næsten beviserne som en rituel remse her.

..jeg hviler mig meget op ad lærebogen.. Vi har simpelthen en kanon af beviser, som sikkert er en den samme rundt om i landet..man stoler vel på at bogen laver et bevis, som censor vil kunne lide.

L4 lader sig således i nogen grad styre af i hvilket omfang bogen beviser sætningerne og undlader beviserne.

[3]Sæt af matematikbøger, hvor gymnasiematematikken bygges aksiomatisk op fra mængdelæren og hvor matematikken er fremstillet relativt stringent med brug af mange beviser.

Også mere løse argumenter betegnes "bevis"

L4 vælger at kalde argumenter, han ikke selv anser for at være et bevis, for beviser, fordi han mener at eleverne ikke kan se det og at det er vigtigt, at eleverne oplever at matematik er noget med sætning-bevis, sætning-bevis.

MH: Så, det som nogen også er inde på er, hvornår man egentlig skal bruge ordet "bevis" og "teorem". Vedkommende her mener så, at når man har noget, man mener er et bevis, så siger man også til at eleverne, at det er et bevis, hvordan har du det med det?
L4: Det gør jeg også. Jeg skriver bare et bevis og så, nogen gange er det jo faktisk ikke et helt bevis, men det kan de i øvrigt ikke helt se og sådan. Så kalder vi det bare et bevis alligevel, fordi vi indfører den rytme, at hvis jeg har en sætning, så prøver jeg altså også at bevise den. Hver gang jeg skriver noget er en sætning - så nogen gange får de fri - men mange gange er man altså nødt til at nedenunder at skrive bevis, kolon og så prøve at udlede, eller sige: Hvordan var det nu vi kom frem til den: Nå, ja det var fordi vi gjorde sådan og sådan og det er det afgørende for dem, rytmen i den almindelige undervisning. At man hele tiden siger sætning-bevis-sætning-bevis.

Beviser overbeviser ikke eleverne om sandheden af en sætning

L4 finder ikke, at beviser kan tjene til at overbevise eleverne om sætningens rigtighed, fordi flertallet af eleverne ikke i forvejen finder grund til at tvivle på det.

MH: Men hvad så med, det der med at de kan i nogle tilfælde tjene til at forklare at en sætning er sand. Oplever du nogen gange, at beviser spiller den rolle i din undervisning?
L4: Altså, jeg tror for de fleste... for de få elever der er det, kan det være et problem. Hvordan kan det dog være, det her. Og dem vil vi godt gøre noget for. Men for flertallet af elever, der har de det sådan, når jeg siger at sætningen er sand, så er de glade og de vil være lykkelige, hvis de slap for at bevise den og bare fik den..jeg tror ikke beviserne overbeviser dem om at det må være, som det er. Jeg tror de skiller de to ting ad. Sådan her var det nu vi anvendte det og hvad var det nu, vi skulle gøre for at bevise det.

Kommentarer til beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal

I overensstemmelse med, at L4 vægter det abstrakte og logiske aspekt af matematikken, finder han at beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal, er et værdifuldt bevis, som han bestemt vil vælge at medtage i undervisningen.

Beviset er netop interessant i kraft af at høre til en teoretisk og abstrakt problemstilling

Han er ikke enig i, at problemstillingen er for teoretisk og abstrakt. Den er netop interessant for eleverne, *fordi* den er teoretisk og abstrakt og giver eleverne et indblik i den "højere matematik". Samtidig finder L4, at han ikke lever op til de formelle krav der stilles til matematikundervisningen, hvis han ikke medtager beviset.

Der står jo i bekendtgørelsen, at de også skal lære noget om matematikkens metoder og om matematikkens indre struktur. Det er måske ikke så meget vi lærer dem, men sådan noget som at $\sqrt{2}$, at det ikke er et rationalt tal, det er da netop et bevis, det er da netop noget, der berører, hvordan matematik er på et højere niveau, ikke.

Det er kun de dygtigste elever, der kan forstå problemstillingen

Mere konkret finder L4, at sætningen er interessant, fordi den spænder problemfeltet omkring forskellen på de rationale og irrationale tal ud. L4 forventer dog kun, at det er noget, de dygtigste elever vil kunne forstå.

MH: ..den tredie påstand er så et mere didaktisk præget argument med at det er en problemstilling, der simpelthen er for svær og for abstrakt til at eleverne kan forstå det.
L4: Det er den for de fleste, for mange af eleverne, men det er jo heller ikke for de mange, at man laver matematik udelukkende...og det med de rationale tal er et udmærket eksempel på noget, som da for nogle elever da er spændende. "Gud er det rigtigt, gud der er også forskel". "Inkommensurable størrelser, det var dog sært".

Eleverne ved ikke, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal - beviset kan netop få dem til at tænke over forskellen på rationale og irrationale tal

Som det fremgår synes L4 ikke, at det er tilstrækkeligt at undlade beviset med den begrundelse, at eleverne ved, at $\sqrt{2}$ er irrationalt. Det ved eleverne netop ikke og beviset kan tjene som redskab til at få eleverne til at tænke over, hvad forskellen på de rationale og de irrationale tal er.

beviset skal jo netop være der for at give dem en fornemmelse af, at der faktisk ER forskel på de rationale og de irrationale tal og for at understrege det der med, at de ikke kan skrives som en brøk - det kan man bevise. Ellers så bliver det jo noget..de ved det jo ihvertfald ikke i forvejen. Det er noget ævl.

..hvis man skal have dem til at tænke over talmængder, så skal man vel lave et eller andet med det, som folk kan spekulere på: Hvad vil det sige, hvad er forskellen (på de rationale og de irrationale tal) egentlig? Og det er det bevis da en meget god indgang til.

D.4.3 L4's holdning til bevisførelse

L4 mener på den ene side ikke, at bevisførelse i form af bevisførelsesopgaver er noget, der optræder eller bør optræde i den daglige undervisning ihvertfald ikke som et krav fra "systemets" side og især er det en opgavetype, som er alt for svær for de svageste elever. På den anden side omtaler han et undervisningsforløb, hvor han mener det netop er relevant at lade eleverne føre beviser selv. De erfaringer eleverne gør sig her, finder han er meget værdifuldt for dem.

Bevisførelsesopgaver er for svære for de svageste elever og bør ikke indgå i den daglige matematikundervisning

L4 opfatter de bevisførelsesopgaver, jeg har præsenteret de new zealandske lærere for, som for svære og som nogen, der i højere grad hører hjemme i matematik-konkurrencer som f.eks. Georg Mohr-konkurrencen, end i den daglige undervisning. Matematikopgaverne i den daglige undervisning skal være struktureret, så de - i modsætning til bevisførelsesopgaverne - er til at gå til for også de svageste elever.

L4: Og så er der det der med at..summen af et rationalt og et irrationalt tal..det tror jeg ikke, de vil kunne finde ud af..Der er ikke tradition for . Det er den der Georg Mohr konkurrence, der får de sådan nogle spørgsmål... Vores spørgsmål de starter altid i noget anvendt matematik, noget de kan.

En ideel matematikopgave er bygget op, således at det i den første del af opgaven er indlysende, hvad man skal gøre. Der skal efter L4's mening være en indgang i en opgave - og det er der ikke i polygonopgaven:

Det er den type opgaver..hvor de svage elever ingen indgang har. Det er det, der er problemet ved denne her. Det er, at de svage elever ingen jordisk chance har.

Jeg vil umiddelbart sige, det ser for svært ud, fordi..sådan leger vi ikke hos os...Der skal være en indgang, der skal være en forholdsvis enkel indgang og så kan man komplicere opgaven til sidst.

Bevisførelse forekommer kun som at eleverne gætter næste skridt i et bevis

Det eneste element af bevisførelse han kan komme på fra den daglige undervisning er, når han lader eleverne forsøge at gætte næste skridt i et bevis.

MH: Så er der sådan nogle bevisførelsesopgaver der. Hende her synes så at det er noget som hvor det ikke er afgørende at de gennemsnitlige elever overhovedet får lov at lave den slags opgaver.
.. L4: Ja, det er det nok heller ikke. Det vil jeg nok også give dem ret i at..Det er skridtet videre, som vi meget sjældent går, som sagt. At de egentlig selv konstruerer beviser, det vil flertallet ikke have nogen speciel..jo, det kan vel lære dem noget og vi prøver også at gøre det af og til. At lave det sådan, jeg

prøver også tit at indrette min undervisning sådan at eleverne selv skal gætte sig til, hvad der kommer ud af det lige om lidt, ikke?

L4's kommentarer til de new zealandske bevisførelsesopgaver skal ikke helt tages for pålydende, da han nok gennemgående vil regne opgaver af den type, han beskriver, med eleverne. De new zealandske bevisopgaver er for svære, fordi eleverne "på bar bund" skal konstruere et bevis.

Eleverne skal prøve kræfter med at føre beviser i et enkelt undervisningsforløb

Mens bevisførelsesopgaver ikke optræder i den daglige undervisning finder L4 at en del af det undervisningsforløb, hvor eleverne skal lære om matematikkens indre struktur, indebærer, at eleverne skal få en ide om, hvad det vil sige at lave beviser. De erfaringer mener han dog godt, man kan gøre sig uden at opgaverne er så svære som de eksempler jeg har givet på bevisførelsesopgaver er.

Der står bekendtgørelsen de skal forstå, hvordan man laver beviser.... Måske ikke, at de selv skal kunne konstruere dem på bar bund, men at de ihvertfald kan forstå, hvad det vil sige og det er så meningen med det projekt.

I det omtalte projekt skal eleverne udforske geometriske konstruktioner og selv opdage sætninger vha af et computerprogram.

jeg har jo lige netop.. lavet det her ganske, ganske korte forløb, det skulle have været længere, men det havde vi ikke tid til, med det program der, hvor de netop skal opdage geometriske sætninger selv og så prøve at bevise dem, ikke. Og det vil jeg ideelt set godt bruge mere tid på, fordi det er, det er sådan det tidsmæssige der gør at man ikke laver så meget af den slags. Fordi der er ingen tvivl om, at det er et nyttigt redskab, at kunne lave sådan nogle argumentationsting.

Eleverne skal så prøve at konstruere beviser, men ikke alle elever forventes at være i stand til at gennemføre konstruktionen uden hjælp og sætningerne kan være mere eller vanskelige at bevise. Eleverne skal her bevise et sætning de på forhånd har formuleret, hvilket jo f.eks. ikke er tilfældet i polygonopgaven. Det man kan forvente ved polygonopgaven er, at eleverne forstår løsningen på opgaven og forstår argumentet.

Jeg kunne godt forklare mine elever, hvordan det hang sammen, men jeg ville ikke kunne sætte dem til selv at komme med et argument for det. Så meget bevis har vi heller ikke. Det er meget sjældent, at der er opgaver, der går ud på at ræsonnere så meget.

Bevisførelsesopgaver kan gøre eleverne bedre til at vurdere, hvornår de har svaret "godt nok" på en opgave

L4 finder, at bevisførelsesopgaver kan give eleverne nogle nyttige erfaringer i kraft at, at de bliver bedre til at vurdere, hvornår de har argumenteret godt nok for et svar på en opgave, når der kræves en argumentation for svaret, der går udover en henvisning til formlen/formlerne.

MH: Ja, og bevisførelse på den måde har noget at bidrage med, så de faktisk bliver bedre til at regne opgaver?
L4: Ja, det gør de. Det gør de. Ofte vil en opgave kræve et svar hos os, en argumentation for svaret, ikke?..De skal jo have en fornemmelse af, hvornår har man argumenteret for, at noget er korrekt...det er jo noget som at noget er et lokalt ekstremumspunkt. Hvor mange ting skal jeg nu have med for at være helt sikker?

D.5 Interview med L5

D.5.1 L5's bevisbegreb

L5 mener, at der er tale om, at man har et bevis, når man på et aftalt grundlag via nogle logiske ræsonnementer, viser en sætning.[4]

D.5.2 L5's holdning til beviser

Beviser er centrale i matematikfaget og skal derfor også være der i matematikundervisningen

L5's begrundelse for at have beviser i matematikundervisningen er, at eleverne skal få en forståelse af, hvad matematik er og eftersom beviser er centrale i matematikfaget har de en naturlig plads i matematikundervisningen. Han er helt uenig med de new zealandske lærere i, at det vigtigste er opgaveregningen. Hovedsigtet er at eleverne får et indtryk af "faget matematik", ikke at de lærer at løse opgaver.

Den gennemsnitlige elev har gavn af at forsøge at forstå beviserne

Den gennemsnitlige elev forstår ikke beviserne i matematikundervisningen i detaljer. Det er det kun de dygtigste elever, der gør og som følgelig er i stand til at gengive dem med stringente argumenter. Selvom den gennemsnitlige elev ikke i detaljer forstår beviserne bidrager beviserne alligevel til elevernes viden om matematik, fordi eleverne ser, at der er en sammenhæng mellem de grundlæggende begreber og antagelser og den udledte sætning.

Herudover skal man gøre sig klart, at det at beviserne er "for svære" for eleverne ikke er et argument for at undlade dem, da det er væsentligt at eleverne *forsøger* at forstå beviserne. Det giver i sig selv eleverne et udbytte. Under alle omstændigheder skal man som underviser gøre sig klart, at eleverne ikke lærer pensum, men snarere får en bedre forståelse af det stof, de tidligere har været præsenteret for.

Beviser er for alle elever - ikke kun de dygtigste

Beviser er noget alle elever skal stifte bekendtskab med og indgår ikke i matematikundervisningen af hensyn til bestemte elevgrupper, som f.eks. kommende professionelle matematikere.

Nogle elever opfatter beviser som smukke/smarte

Det er til en vis grad rigtigt, at man bør have beviser i matematikundervisningen, fordi det giver eleverne et billede af matematik som et "smukt fag".

[4]Desværre var der problemer med båndoptageren i dette interview, så det jeg har skrevet er baseret på noter taget under interviewet

Nogle elever kan rent faktisk se det smukke i smarte og elegante argumenter i beviserne.

Der er en sammenhæng mellem elevernes evne til at anvende sætninger og kende til beviserne for dem
L5 er ikke ubetinget enig i at elevernes evne til at anvende sætningerne er uden sammenhæng med et kendskab til - og en forståelse af - beviset for sætningen. At eleven kender til beviset for sætningen kan have betydning for hvilken forståelse, der ligger i elevens brug af sætningen. Ideelt set gør beviserne, at eleverne forstår eleverne hvilket grundlag sætningen hviler på, når de anvender dem.

L5 mener også, at beviser bidrager til elevernes generelle problemløsningskompetence. De bliver eleverne bliver bedre til at tænke generelt og abstrakt og måske derfor også bedre til at tackle opgaverne.

Eleverne er ikke kritiske overfor sætningernes rigtighed i matematikken
Man skal ikke forvente at eleverne forholder sig kritisk til sætningens rigtighed og bliver overbevist om dette via et bevis for den og det er heller ikke det, man skal forvente. Det eleverne burde være kritiske overfor er, om den sammenhæng de bruger sætningerne i nu også stemmer overens med grundlaget for beviserne.

Beviser lærer ikke eleverne at tænke logisk
At beviserne udvikler elevernes evne til at tænke logisk er en illusion og hviler på en forældet forestilling om, at det at beskæftige sig med matematik i det hele taget lærer een at tænke logisk.

Man kan godt udelade beviser, hvis eleverne gøres opmærksom på det
Visse formler, der primært bruges i omskrivninger - f.eks. additionsformlerne i trigonometrien, der ikke længere optræder som selvstændigt emne i bekendtgørelsen - er et eksempel på en type sætninger, som man sagtens kan forsvare at "give" eleverne.

Beviser er af forskellige karakter og har derfor også forskellig relevans. I nogle beviser er det centralt for forståelsen, at eleverne får et overblik over gangen i beviset. Her kan man med held gennemgå det kurisorisk, så eleverne kan se sammenhængen mellem grundlaget for sætningen og den "færdige" sætning. Andre beviser - eksempelvis reglen for differentation af et produkt - egner sig til at gennemgå i detaljer. I det nævnte bevis bruger man definitionen på en differentialkvotient - et centralt begreb i differentialregningen, som det er vigtigt at eleverne stifter bekendtskab med og ser anvendt. Dette bevis kan gennemgås i detaljer, fordi det er så relativt enkelt, at sammenhængen mellem grundlaget for sætningen og den færdige sætning fremgår trods de mange detaljer.

Taleksempler kan være et godt supplement og en god hjælp, når man skal introducere en sætning og det er fint at gøre brug af dem forudsat at eleverne kender til forskellen på at give et taleksempel og give et bevis og er klare over, at det ikke har samme status.

Ideelt har lærebogen ingen betydning for hvilke beviser, der vælges og hvordan de gennemgås
Hvilken mængde af beviser der gennemgås og hvordan de gennemgås har ikke direkte nogen forbindelse med lærebogen, men man bør tage hensyn til, at bogen er det eleverne har at holde sig til, når de repeterer med henblik på en mundtlig eksamen. Det er dog oplagt at lave beviser, der er anderledes end lærebogens, hvis man finder et bedre bevis eller argument for en sætning, der findes i lærebogen.

Internt-matematiske problemstillinger som at $\sqrt{2}$ ikke er et rationalt tal er vigtige i matematikundervisningen
Internt-matematiske problemstillinger er vitale at inddrage i matematikundervisningen for at illustrere, hvad matematik (også) er. Model- og anvendelsesaspektet er *også* vigtige, men de internt matematiske problemstillinger er af lige så stor betydning. L5 anser derfor sætningen $\sqrt{2}$ er ikke et rationalt tal og det tilhørende bevis for at være relevant for eleverne. Det er ikke korrekt, at eleverne i forvejen ved, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. De har en formel viden, ikke en reel, dvs de har hørt *ordet* før, men kender ikke til *begrebet* irrationale tal.

D.5.3 L5's holdning til bevisførelse

Det vil kun være de dygtigste elever, der er i stand til at håndtere bevisførelsesopgaver - gennemsnitlige elever har typisk en mere mekanisk tilgang til opgaveregningen. Eleverne har imidlertid godt af at *forsøge sig med opgaver*, der egentlig er for svære til, at det er realistisk, at de får løst dem uden hjælp.

Man kan således ikke forvente, at en gennemsnitlig elev bliver i stand til at løse bevisførelsesopgaver. Som sådan er bevisførelsesopgaver en "for sjov"-aktivitet - ikke en man laver med henblik på, at eleverne skal lære selv at føre beviser og udvikle bevisførelsesfærdigheder. Bevisførelsesopgaver virker imidlertid meget engagerende og det er en type udfordringer, der virker godt på eleverne.

I polygonopgaven vil L5 bestemt forlange af eleverne, at de forsøger at argumentere for løsningen. Eleverne får meget ud af at forsøge at løse opgaven og selvom man måske ikke kan forvente, at en gennemsnitlig elev løser opgaven, så kan man forvente at eleven siger "nå, ja", når andre elever eller læreren så giver vedkommende løsningen.

Mens man godt kan have bevisførelsesopgaver i den daglige undervisning og opgaver, der er paralleller til "Forklar hvorfor arealet af en trapez er $\frac{1}{2}(a+b)h$", så skal man ikke sætte elever til at løse sådan en type opgaver til eksamen, fordi sådan en type opgaver i for høj grad kræver at eleven får en god ide, hvilket man ikke kan forlange i den situation.

Litteratur

[1] Alibert, Daniel, "Towards New Customs in the Classroom" For the learning of Mathematics, 8(2), pp.31-35,43, 1988.

[2] Aigner, Martin og Schmidt, A. Vasco, "Good proofs are proofs that makes us wiser - interview with Yuri I. Manin", DMV-Mitteilunger 2, pp.40-44, 1998.

[3] Alibert, Daniel og Thomas, Michael, kap. 13 s. 215-230, "Research on Mathematical proof", i "Advanced mathematical thinking" ed. David Tall, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1991.

[4] Axelsen, Ib; Bøttcher, Lis; Schrøder, Hans Jørgen, "Matematik, HF tilvalg", G.E.C GAD, København 1996.

[5] Balacheff, Nicolas, "Aspects of proof in pupils practice of school mathematics" pp. 216-230 i: "Mathematics, Teaching and Children - a reader", Hodder and Stoughton, London, 1988.

[6] Barbeau, Edward, J., "Three faces of proof", Interchange 21(1), pp. 24-27, 1990.

[7] Barbin, Evelyn, "La demonstration mathematique: significations epistemologiques et questions didactiques", APMEP, 366, pp. 591-620, 1988.

[8] Bendegem, Jean Paul, "Foundations of Mathematics or mathematical practice: Is one forced to choose?" pp. 21-38 i Math Worlds: philosophical and social studies of Mathematics and Mathematics Education. Ed. Sal Restivo, Jean Paul Van Bendegem, Ronald Fischer. State University of New York Press, New York, 1993.

[9] Blum, Werner, Kirsch Arnold "Preformal proving: Examples and reflections", Educational studies in mathematics, 22(2), p.183-203, 1991.

[10] Bloor, David. "What can the Sociologist of Knowledge say About 2+2=4", kap 2, pp.21-32 i "Mathematics education and philosophy - an international perspective", Falmer Press, London 1994.

[11] Boero, P, Rossella Garuti, Mariotti, M.A "Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures". Artikel fundet på internettet.

[12] Bussi, Bartolini Maria, "Italian researhc in innovation - towards a new paradigm?", ICME bulletin 45, 1998.

[13] Carter, Michael, "The nature and role of proof in mathematics", oplæg til et seminar givet på matematisk institut på Massey University, Palmerston North, New Zealand, 25/9 1996.

[14] Chazan, Daniel, "High school geometry students' justifications for their view of empirical evidence and mathematical proof", Educational studies in mathematics, 24(4) pp.174-185, 1993.

[15] Chazan, Daniel "Quasi-empirical Views of Mathematics and Mathematics Teaching", Interchange 21(1), pp.14-21, 1990.

[16] Davis, Philip J., "Visual theorems", Educational studies in Mathematics, 24(4), pp.333-344, 1993.

[17] Davis, Philip J., "The nature of proof", fra "Proceedings of the Fifth international congress on Matematical Education". Ed. Majorie Carss, Birkhauser, 1986.

[18] De Villiers, Michael, "The role and function of proof in Mathematics", Pythagoras, 24, pp. 17-24, 1990.

[19] Dormolen, van J, "Learning to understand what giving af proof really means", Educational studies in Mathematics 4, pp.27-34, 1977.

[20] Dreyfus, Holon; Hadas, Nurit, Rehovot, "Proof as answer to the question why", Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28(1), 1996.

[21] Epp, Susanna S. "The role of proof in problem solving", kap. 7, pp. 257-286 i "Mathematical thinking and problem solving", Lawrence Erlbaum Ass. publishers, Hillsdals, New Jersey, 1994.

[22] Fawcett, Harold P. "The nature of proof", The national council of teachers of mathematics, 13th Yearbook, Burea of Publications, Teacher's college, Columbia University, New York, 1938.

[23] Fitzgerald, J. Franklin. "Proof in mathematics education", journal of Education, 178(1) pp35-45, 1996.

[24] Fischbein, E. "Intution and proof", For the learning of Mathematics 3(2), pp.9-18 og 24, 1982.

[25] Fischbein, E. "Psycological difficulties in understanding the principle of mathematical induction", fra "Proceedings of the 13th international Conference on the psycology of mathematics education" vol. 1., pp.276- 282, 1989

[26] Galbraith, P.L, "Aspects of proving", Educational studies in mathematics, 12(1), pp. 1-18, 1981.

[27] Hanna, Gila og Janke, Niels, "Proof and proving", pp. 877-908 in A.J Bishop "International Handbook of Mathematics Education", 1996.

[28] Hanna, Gila "Rigorous proof in Mathematics Education", Toronto Ontario Inst. Stud. Educ. 1993.

[29] Hanna, Gila, "Challenges to the importance of Proof", For the learning of Mathematics 15(3), pp. 42-49, 1995.

[30] Hanna, Gila, "Some pedagogical aspects of Proof", Interchange 21(1), pp 6-13, 1990.

[31] Hanna, Gila, "Mathematical proof", pp. 54-61 i "Advanced mathematical thinking", editor: David Tall, Kluwer Academics Publishers, Dordrecht, Holland, 1991.

[32] Horgan, John, "The death of proof", Scientific American, 269(4), pp.74-28, 1993.

[33] Hoyles, Celia, "On the curricular shaping of Students' approaches to proof", For the learning of Mathematics 17(1), pp.7-16, 1997.

[34] Jensen, Peter Hauge og Kyndlev, Linda "Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det - gymnasiematematikkens begrundelsesproblem", IMFUFA-tekst 284, IMFUFA, RUC, 1994.

[35] Joseph, George Gheverghese, "Different ways of knowing: Contrasting style of Argument in Indian and Greek Mathematical Traditions, kap.14, pp.194-204 i "Mathematics education and philosophy - an international perspective", Ed. Paul Ernest, The Falmer Press, London, 1994.

[36] Joseph, George Gheverghese, "What is a Square Root? A Study of Geometrical Representation in Different Mathematical Traditions", foredrag givet ved "Canadian Mathematics education conference 1994".

[37] Leron, Uri, "Structuring mathematical proofs", American Mathematical Monthly, 90(3), pp. 174-185, 1983.

[38] Leron, Uri, "A direct approach to indirect proof", Educational studies in Mathematics 16, pp.321-325, 1985.

[39] Leron, Uri, "Heuristic presentations: the Role of Structuring", For the learning of Mathematics 5(3), pp.7-13, 1985.

[40] Mason, John; Buton. Leone og Kaye, Stacey. "Thinking Mathematically", Addison Wesley, New York, 1985.

[41] Moore, Robert C., "Making the transition to formal proof", Educational studies in Mathematics 27, pp. 249-266, 1994.

[42] Moshovits-Hadar, Nitsa og Kleiner, Israel "Proof: a many-splendored thing", The mathematical Intelligencer, 19(1), pp. 16-25, 1997.

[43] Moshovitz-Hadar, Nitsa, "Simulating Presentation of Theorems followed by Responsive Proofs", For the learning of Mathematics 8(2),pp.12-30, 1988.

[44] Moshovitz-Hadar, Nitsa, "School Mathematics Theorems - an Endless source of Surprise", For the learning of Mathematics 8(3),pp.12-30, 1988.

[45] Nelsen, Roger B., "Proof without words", The Mathematical Association of America, MAA, Washington DC, 1993.

[46] Neubrand, Michael, "Remarks on the Acceptance of Proofs: the case of some Recently Tackled Major Theorems", For the learning of Mathematics 9(3), pp. 2-5, 1989.

[47] Niss, Mogens, "Centrale porblemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne", fra: E. Strangaard Andersen: 15. nordiske LMFK-kongres, Århus 1993, LMFK, København, 1994.

[48] Niss, Mogens, "Mathematics in Society", i Biehler et al: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, Kluwer, Dordrecht, 1994, pp. 376-378.

[49] Otte, Michael, "Mathematical knowledge and the problem of proof", Educational studies in Mathematics 26(4), pp. 299-321, 1994.

[50] pp. 602-608 og pp.446-449, i "School qualifications handbook - regulations and prescriptions 1996", udgivet af The New Zealand Qualifications Authorities, 1996.

[51] Pimm, David, "Topic area 7: Proofs, justification and conviction" i "Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education". Ed. Ann & Keith Hirst, Malev, Ungarn, 1984.

[52] Porteous, Keith, "When a truth is seen to be necessary", Mathematics in school 23(5), pp.2-5, 1994.

[53] Riberboim, P. "1093", The Mathematical intelligencer, 5(2), pp. 28-34, 1983.

[54] Schoenfeld, A. "What do we know about mathematics curricula", Journal of mathematical behaviour 13(1), pp.55-80, 1994.

[55] Siu, Man-keung, "Proof and pedagogy in ancient China, examples from Liu Hui's commentary on jiu zhang suan siu", Educational studies in Mathematics, 24(4), pp. 345-357, 1993.

[56] Tall, David, "The nature of mathematical proof". Mathematics teaching, 128, pp. 28-32, 1989.

[57] Thurston P., Williams "On proof and progress in Mathematics", For the learning of Mathematics 15(1), pp.29-37, 1995.

[58] Wheeler, David, "Aspects of Mathematical proof", interchange 21(1), pp. 1-5, 1990.

[59] Wittman, E.C, Mueller G., "When is a proof a proof?", Bulletin de la Societe mathematique de Belgique, 1, pp. 15-40, 1990.

[60] Wu, H. "The role of open-ended problems in Mathematics Education", The journal of mathematical behavior, 13(1), 1994.

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat

tlf. 46 74 22 63

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and
Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251|93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252|93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 Kuglepakning

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 Regressionsanalyse

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED

af: Peter Harremoës

256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-electric Spherical Shell (Preprint)

by: T. Christensen and N.B.Olsen

257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker

af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen

271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel

273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen

274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth Helmgaard
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen

275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)

279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen

280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann

281/94 Modellering af Det Cardiovaskulære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen

282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)

af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen

284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!

Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem

En specialerapport af Peter Hauge Jensen og Linda Kyndlev

Vejleder: Mogens Niss

285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and its diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

286/94 The energy master equation: A low-temperature approximation to Bässler's random walk model

by: Jeppe C. Dyre

287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the Calculation of Time Auto-Correlation Functions

by: Jeppe C. Dyre

288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION

by: Bent Sørensen

289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square Displacement in Extremely Rugged Energy Landscapes with Equal Minima

by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen

290/95 Modellering af uregelmæssige bølger

Et 3.modul matematik projekt

af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson, Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen

Vejleder: Jesper Larsen

291/95 1st Annual Report from the project

LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

an example of using methods developed for the OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study

by: Bent Sørensen

292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3

af: Bent Sørensen

293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?

af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen

Vejleder: Anders Madsen

294/95 Universets udvidelse - et metaprojekt

Af: Jesper Duelund og Birthe Friis

Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen

295/95 A Review of Mathematical Modeling of the Controled Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

296/95 RETIKULER den klassiske mekanik

af: Peder Voetmann Christiansen

297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with bifurcations

by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen

298/95 Mordet på Schrödingers kat - et metaprojekt om to fortolkninger af kvantemekanikken

af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst, Christina Specht

Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen

299/95 ADAM under figenbladet - et kig på en samfundsvidenskabelig matematisk model

Et matematisk modelprojekt

af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Jørgen Larsen

300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation

by: Bent Sørensen

301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning af ozon

af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe Nielsen og Bettina Sørensen

Vejleder: Jesper Larsen

302/95 KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for aksialkompressorer

Projektrapport af: Stine Bøggild, Jakob Hilmer, Pernille Postgaard

Vejleder: Viggo Andreasen

303/95 Masterlignings-modeller af Glasovergangen

Termisk-Mekanisk Relaksation

Specialerapport udarbejdet af:

Johannes K. Nielsen, Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Jeppe C. Dyre, Jørgen Larsen

304a/95 STATISTIKNOTER Simple binomialfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304b/95 STATISTIKNOTER Simple normalfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304c/95 STATISTIKNOTER Simple Poissonfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304d/95 STATISTIKNOTER Simple multinomialfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304e/95 STATISTIKNOTER Mindre matematisk-statistisk opslagsværk indeholdende bl.a. ordforklaringer, resuméer og tabeller

af: Jørgen Larsen

305/95 The Maslov Index:
A Functional Analytical Definition
And The Spectral Flow Formula

By: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani

306/95 Goals of mathematics teaching

Preprint of a chapter for the forth-
comming International Handbook of
Mathematics Education (Alan J.Bishop, ed)

By: Mogens Niss

307/95 Habit Formation and the Thirdness of Signs

Presented at the semiotic symposium

The Emergence of Codes and Intensions as
a Basis of Sign Processes

By: Peder Voetmann Christiansen

308/95 Metaforer i Fysikken

af: Marianne Wilcken Bjerregaard,
Frederik Voetmann Christiansen,
Jørn Skov Hansen, Klaus Dahl Jensen
Ole Schmidt

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og
Petr Viscor

309/95 Tiden og Tanken
En undersøgelse af begrebsverdenen Matematik
udført ved hjælp af en analogi med tid

af: Anita Stark og Randi Petersen

Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

310/96 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra
algebra og analyse" (E1)

af: Mogens Brun Heefelt

311/96 2nd Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH
ENERGY SYSTEM

by: Hélène Connor-Lajambe, Bernd Kuemmel,
Stefan Krüger Nielsen, Bent Sørensen

312/96 Grassmannian and Chiral Anomaly

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

313/96 THE IRREDUCIBILITY OF CHANCE AND
THE OPENNESS OF THE FUTURE
The Logical Function of Idealism in Peirce's
Philosophy of Nature

By: Helmut Pape, University of Hannover

314/96 Feedback Regulation of Mammalian
Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

315/96 a + b "Rejsen til tidens indre" - Udarbejdelse af
et manuskript til en fjernsynsudsendelse
+ manuskript

af: Gunhild Hune og Karina Goyle

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og
Bruno Ingemann

316/96 Plasmaoscillation i natriumklynger

Specialerapport af: Peter Meibom, Mikko Østergård

Vejledere: Jeppe Dyre & Jørn Borggreen

317/96 Poincaré og symplektiske algoritmer

af: Ulla Rasmussen

Vejleder: Anders Madsen

318/96 Modelling the Respiratory System

by: Tine Guldager Christiansen, Claus Dræby

Supervisors: Viggo Andreasen, Michael Danielsen

319/96 Externality Estimation of Greenhouse Warming
Impacts

by: Bent Sørensen

320/96 Grassmannian and Boundary Contribution to the
-Determinant

by: K.P.Wojciechowski et al.

321/96 Modelkompetencer - udvikling og afprøvning
af et begrebsapparat

Specialerapport af: Nina Skov Hansen,
Christine Iversen, Kristin Troels-Smith

Vejleder: Morten Blomhøj

322/96 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1996

323/96 Structure and Dynamics of Symmetric Diblock
Copolymers
PhD Thesis
by: Christine Maria Papadakis

324/96 Non-linearity of Baroreceptor Nerves
by: Johnny T. Ottesen

325/96 Retorik eller realitet ?
Anvendelser af matematik i det danske
Gymnasiums matematikundervisning i
perioden 1903 - 88

Specialerapport af Helle Pilemann
Vejleder: Mogens Niss

326/96 Bevisteori
Eksemplificeret ved Gentzens bevis for
konsistensen af teorien om de naturlige tal

af: Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen,
Klaus Frovin Jørgensen, Ivar Peter Zeck

Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Stig Andur Pedersen

327/96 NON-LINEAR MODELLING OF INTEGRATED ENERGY
SUPPLY AND DEMAND MATCHING SYSTEMS

by: Bent Sørensen

328/96 Calculating Fuel Transport Emissions

by: Bernd Kuemmel

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications

by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning

Specialerapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen

Vejleder: Morten Blomhøj

354/98 A GLOBAL RENEWABLE ENERGY SCENARIO

by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces

by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen

357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayley problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K.W. Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen

358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen

359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen

*360/99 **SYMMETRI I FYSIK***
En Meta-projektrapport af: Martin Niss. Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhelm Booss-Bavnbek, Kenro Furutani

362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen

363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campbell, MArk H. Bickhard and Peder V. Christiansen

364/99 Illustrationens kraft
Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af: Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørup

365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege

366/99 LATEX FOR FORFATTERE
En introduktion til LATEX og IMFUFA-LATEX
af: Jørgen Larsen

367/99 Boundary Reduction of Spectral invariants and Unique Continuation Property
by Bernhelm Booss-Bavnbek

368/99 Kvartalsrapport for projektet
SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISTYSTEM

Projektleder: Bent Sørensen

369/99 DYNAMICS OF Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob Jalving

370/99 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
(erstatter tekst nr. 350/98

370/99 Bevisets stilling
- beviser og bevisførelse i en gymnasial matematikundervisning

Matematikspeciale af: Maria Hermannsson
Vejleder: Mogens Niss