

TEKST NR 357

1998

Cayleys Problem

En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918

**Et matematik videnskabsfagsprojekt af
Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K. W. Hansen,
Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff**

Vejledt af Jesper Larsen

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

Cayleys Problem

En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1920.

En matematik 1. moduls videnskabsfagsprojektrapport af

Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K. W. Hansen, Jesper S. Hansen,

Jesper Udesen og Peter C. Wulff.

Vejledt af Jesper Larsen

IMFUFA tekst nr. 357/98, RUC. 89 sider.

ISSN 0106-6242

ABSTRACT

Denne tekst er en historisk gennemgang af Cayleys problem, dvs. problemerne omkring bestemmelsen af konvergensområderne for Newtons metode anvendt på et komplekst polynomium $f(z)$. Der ses på perioden fra 1870 til 1920, og der redegøres for hvorledes Arthur Cayley og Ernst Schröder i periodens start kun var i stand til at løse problemet for $\text{grad}(f(z)) = 2$. Der gøres rede for den matematiske udvikling, der gjorde Gaston Julia og Pierre Fatou i stand til at behandle tilfældet $\text{grad}(f(z)) > 2$, og det konkluderes, at det var udviklingen af mængdelære og topologi, der dannede grundlaget for Julia og Fatous forståelse af tilfældet $\text{grad}(f(z)) > 2$.

I appendiks findes oversættelse af Cayleys artikel fra 1879, samt dele af artikler skrevet af Koenigs (1884), Fatou (1906 og 1920), og Julia (1918).

Indhold

1 Indledning	1
1.1 Motivation	1
1.2 Problemformulering	3
1.3 Metode	3
1.4 Målgruppe	3
1.5 Læsevejledning	4
1.6 Takkeliste	4
2 Generel teori	5
2.1 Newtons metode på en reel funktion	5
2.2 Kompleks differentiation	6
2.3 Analytiske funktioner og singulariteter	8
2.4 Schröders fikspunktsteori og kompleks iteration	12
3 Schröder	15
3.1 Schröders arbejde	15
3.2 Iteration og funktionalligninger	16
3.3 Det kvadratiske problem	19
3.4 Schröders behandling af $\operatorname{Re}(z_0) = 0$	22
3.5 To sider af samme sag	23
3.6 Afrunding	24
4 Cayley	25
4.1 Cayley's arbejde	25
4.2 Geometrisk konstruktion	26

4.3	Newton's metode	26
4.4	Bevis for lemma	29
4.5	Bassinernes opførsel	32
4.6	Den kubiske ligning	35
4.7	Afrunding	35
5	Mellemliggende periode	37
5.1	Funktionalligninger	37
5.2	Topologi og Fatou's 1906 artikel	39
5.3	Afslutning	43
6	Julia & Fatou	45
6.1	Montels normale familier	45
6.2	Julia- og Fatou-mængder	46
6.3	Julia og Fatous arbejde med Cayleys problem.	49
6.3.1	Fatous arbejde	49
6.3.2	Julias arbejde	50
7	Diskussion	53
	Litteratur	55
A	Definitioner og begreber	57
B	Cayleys artikel fra 1879	61
C	Koenigs' artikel fra 1884	63
D	Fatous note fra 1906	67
E	Julias artikel fra 1918	71
F	Fatous artikel fra 1920	77

Kapitel 1

Indledning

1.1 Motivation

Vi er, efter at have taget udgangspunkt i kaos, endt op med at arbejde med problemet, der går under navnet "Cayleys problem". Problemet opstod omkring 1880, da englænderen Arthur Cayley (1821-1895) arbejdede med Newtons metode.

Newtons metode er en algoritme til at finde nulpunkter for en given funktion $f(x)$. Princippet er, at man kommer med et kvalificeret gæt (x_0) på et nulpunkt ζ for $f(x)$. Dernæst anvender man Newtons metode på x_0 , så man får x_1 , der ligger tættere på nulpunktet ζ end x_0 gjorde, hvis x_0 vel at mærke ligger tæt nok på roden. Hvis man har tålmodighed nok (eller en computer til rådighed), kan man på denne måde komme vilkårligt tæt på nulpunktet ζ .

Det viser sig imidlertid, at Newtons metode ikke altid giver det ønskede resultat, dvs. følgen x_1, x_2, \dots, x_n konvergerer ikke mod ζ . Nogle gange vil man opleve, at følgen x_1, x_2, \dots, x_n går mod uendeligt, andre gange vil følgen hoppe frem og tilbage mellem et endeligt antal forskellige værdier, og endelig kan den gå mod en evt. anden rod. Man kan sågar opleve, at følgen hopper rundt mellem værdier (uendeligt mange), der virker fuldstændig tilfældige.

Resultatet af Newtons metode er således afhængig af det valgte x_0 . Dette fik i slutningen af 1800-tallet en række matematikere til at interessere sig for, hvorledes følgen x_1, x_2, \dots, x_n afhænger af et givet x_0 . Specielt kastede man blikket på Newtons metode for funktioner af formen $z^n - 1 = 0$, $z \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$. Det viser sig, at der her opstår nogle problemer, der er ganske interessante.

Cayley formulerede problemet generelt i to artikler (Cayley, 1879b, 1880). Det er normalt, den første artikel (Cayley, 1879b) man refererer til, da formuleringen her er kort og præcis:

Tag $f(u)$, en given rationel og integral funktion¹ af u , med reelle eller komplekse koefficienter; tag ξ , en given reel eller kompleks værdi og udregn herfra ξ_1 ved formlen $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$, og heraf $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, hver fra den foregående ved samme formel.

En givet kompleks størrelse $x + iy$ kan repræsenteres ved et punkt med koordinaterne (x, y) : rødderne til ligningen er på denne måde repræsenteret ved givne punkter A, B, C, \dots , og værdierne ξ, ξ_1, ξ_2, \dots ved punkterne P, P_1, P_2, \dots , hvor den første værdi antages efter behag, og hvert af de andre fås fra det foregående ved en given geometrisk konstruktion. Problemet er at bestemme områderne af planen således, at vælges P hvor som helst i et område, ender vi til sidst ved punktet A , hvor som helst i et andet område ved punktet B , og således for flere punkter, der repræsenterer rødderne til ligningen. (Cayley, 1879b)

Se også oversættelsen af hele artiklen i appendiks B.

Man kan altså sige, at man har løst Cayleys problem i det øjeblik, man er i stand til at opdele planen i de ovennævnte områder. Hvis det viser sig, at man ikke kan opdele planen, kan man alternativt sige, at man har løst problemet, når man er i stand til at sige, hvilken rod et givet begyndelsespunkt konvergerer mod, uden at foretage selve iterationen.

Den funktionsfamilie, der - i forbindelse med Newtons metode - specielt havde interesse for matematikerne i perioden omkring år 1900, var polynomier. Tyskeren Ernst Schröder (1841-1902) og Cayley opdagede uafhængigt af hinanden en metode til at beskrive følgen z_1, z_2, \dots, z_n for et givet z_0 , når Newtons metode bliver brugt på ligningen $z^2 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, i det følgende betegnet "den kvadratiske ligning". De stødte imidlertid ind i nogle uoverskuelige problemer, da de forsøgte at gøre kunsten efter for "den kubiske ligning": $z^3 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Eller som Cayley siger:

Løsningen er let og elegant i tilfældet med den kvadratiske ligning, men det efterfølgende tilfælde, den kubiske ligning, synes at forvolde anseelige vanskeligheder. (Cayley, 1880)

Der skulle gå ca. tredive år, før nogle kom væsentligt videre med problemet. Den matematiske udvikling gjorde, at de to franske matematikere Pierre Fatou (1878-1929) og Gaston Julia (1893-1978) i begyndelsen af dette århundrede kunne vise, at randen af den mængde af begyndelsesværdier z_0 , der konvergerer mod et nulpunkt, ikke kan beskrives analytisk.

Dette fører os frem til følgende problemformulering:

¹En integral funktion er analytisk i hele det komplekse plan. For definition af en rationel funktion se sidst i afsnittet om generel teori

1.2 Problemformulering

Hvordan løste Cayley og Schröder Cayleys problem for den kvadratiske ligning?

Hvorfor er det så meget sværere at behandle det kubiske tilfælde, end det kvadratiske tilfælde? - og hvilken historisk udvikling ledte frem til svaret på dette?

1.3 Metode

Dette projekt er et matematikhistorisk projekt, der forsøger at belyse, hvorledes en matematisk teori udvikledes over et tidsspænd på ca. 50 år. Vi ønsker at forstå den matematiske udvikling, der i et konkret tilfælde leder frem til udvikling af ny viden.

Vi har valgt at betragte problemerne omkring forståelsen af Newtons metode for den kubiske ligning - i problemets egen kontekst. Vi vil altså ikke kun begrænse os til at gennemgå de præcise problemer matematikerne arbejdede med, men også forsøge at give læseren et indtryk af det matematiske miljø. Derfor vil en del af denne rapport være en gennemgang af personer og matematik, der ved første øjekast kan synes vores problem uvedkommende, men som i sig selv danner en ramme om problemstillingen.

Da dette er et *historisk* matematikprojekt har vi naturligvis bestræbt os på at bruge originaltekster. Desværre var tyskerne og specielt franskmændene forgangsmænd på området, og det har besværliggjort vores arbejde med originalteksterne. Men de steder, hvor teksterne er centrale for vores problem, har vi kastet os over ordbøgerne. Oversættelserne kan findes i appendiks. De steder i teksten, hvor vi citerer eller refererer litteratur, har vi tilpasset citaterne og referaterne, til de af os valgte symboler, tegn og betegnelser. I appendiks er de originale symboler, tegn og betegnelser anvendt. De mere generelle teori afsnit er skrevet på baggrund af moderne lærebøger.

1.4 Målgruppe

Vi har gennem dette projekt stiftet bekendtskab med mange, for os, nye matematiske begreber. Vi har valgt, at denne rapport skal kunne læses af matematikstuderende på et niveau svarende til at have gennemført RUC-kurserne E1, E2 & E3, (lineære strukturer fra algebra og analyse; ikke-lineære strukturer fra algebra og analyse I og II), hvilket vil sige, at man har et fundamentalt kendskab til matematisk analyse. Vi vil, de steder hvor nyt materiale præsenteres, referere relevante sætninger, men ikke nødvendigvis bevise og hele baggrunden for teorien. Dette betyder, at man ikke vil være i stand til at læse rapporten som en lærebog. Bevise vil blive medtaget i det omfang de er knyttet til sætninger, der er centrale for vores problem.

1.5 Læsevejledning

For at give et overblik over indholdet i rapporten er her en kort beskrivelse af de forskellige afsnit.

Generel teori beskriver de generelle egenskaber ved Newtons metode, herunder en generalisering af denne. Vi beskriver desuden, hvorfor Newtons metode også virker i det komplekse tilfælde, samt de dele af den komplekse funktionsteori vi benytter.

Schröder gennemgår Schröders arbejde med Cayleys problem, herunder en grundig gennemgang af hans arbejde med $f(z) = z^2 - 1$. Schröders arbejde med dette problem er spredt rundt i 2 artikler. Vi har i dette afsnit samlet det og forsøgt at kommentere Schröders arbejde, så det bliver væsentligt mere forståeligt.

Cayley gennemgår Cayleys arbejde med problemet, herunder et forsøg på at gøre hans meget svært tilgængelige bevis for det kvadratiske tilfælde forståeligt. Herudover behandles hans overvejelser omkring den kubiske ligning $f(z) = z^3 - 1$.

Mellemliggende periode er en gennemgang af den teori, der blev udviklet i perioden frem til Julia & Fatous arbejde med Cayleys problem. Vi har begrænset os til kun at beskrive den teoriudvikling, der giver Julia & Fatou et skub i den rigtige retning.

Julia & Fatou er en gennemgang af de teorier Julia & Fatou udviklede omkring iterative processer deriblandt Newtons metode. De to herrer er franskmænd, derfor har vi først og fremmest brugt sekundær litteratur til dette afsnit, hvilket gør, at deres arbejder er svære at adskille. Til slut har vi skitseret, hvad henholdsvis Fatou og Julia har sagt om det kvadratiske og det kubiske tilfælde, denne del bygger på originaltekster.

Appendiks A er en forklaring af begreber, der muligvis er fremmede for vores målgruppe. Appendiks B - F er oversættelser af de artikler vi bruger i projektet.

1.6 Takkeliste

Vejleder på dette projekt har været Jesper Larsen. Derudover har vi fået omfattende hjælp til at forstå originalteksternes matematik af Anders Madsen og Carsten Lunde Petersen. Tine Wedege har hjulpet med de franske spidsfindigheder i originalteksterne. Til slut vil vi takke Martin Niss for fremragende opponering.

Kapitel 2

Generel teori

Fra gymnasiet er Newtons metode blevet introduceret som en metode til at finde rødderne i en funktion. I dette kapitel vil vi forsøge at gå lidt dybere i diskussionen af Newtons metode og udvide denne til også at omfatte komplekse funktioner. For at kunne gøre dette er der en række begreber, der skal redegøres for bl.a. singulariteter, og hvad der menes med differentiation af en kompleks funktion. Men først vil vi lige forsøge at genopfriske gymnasiematematikken, og erindre om, hvad vi allerede har lært om Newtons metode.

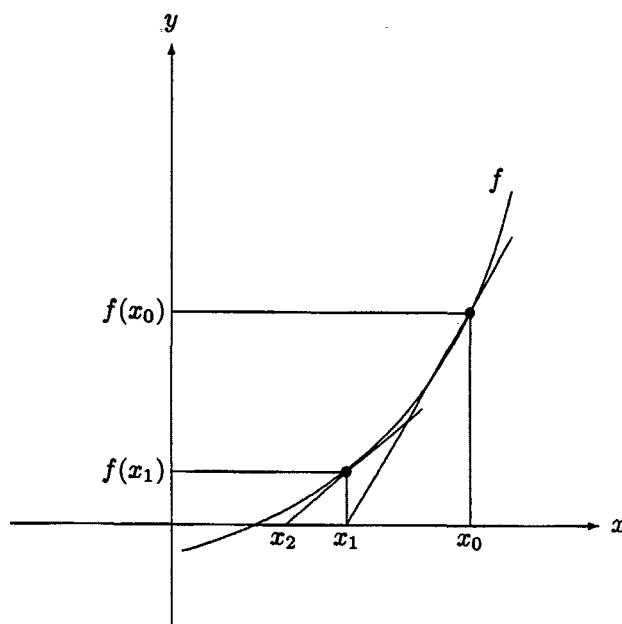
2.1 Newtons metode på en reel funktion

De fleste matematikstuderende har stiftet bekendtskab med Newtons metode. De lærte den at kende som en metode til at finde reelle nulpunkter for en given reel funktion f . Det er nemmest at se grafisk, hvad det egentlig er, der sker, når vi benytter Newtons metode (se figur 2.1).

Vi vælger først et begyndelsespunkt x_0 , der tilhører definitionsmængden for f . Dernæst finder vi tangenten til f gennem punktet $(x_0, f(x_0))$. Der hvor tangenten nu skærer x-aksen, har vi vores nye x_1 , og hvis vi er heldige (eller blot har valgt vores x_0 fornuftigt), vil vi se, at følgen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ konvergerer mod et nulpunkt for f .

Vi kan udtrykke sammenhængen mellem x_n og x_{n+1} . Tangenten gennem punktet $(x_n, f(x_n))$ har ligningen $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. Denne linie skærer x-aksen i punktet x_{n+1} hvor $y = 0$, dvs:

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \implies \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$



Figur 2.1 Figuren viser en geometrisk fortolkning af Newtons metode i det reelle tilfælde.

Denne ligning (2.1.1) kaldes sædvanligvis for rekursionsformlen for Newtons metode. Navnet stammer naturligvis fra Isac Newton, der blandt meget andet har fået denne formel opkaldt efter sig. Der synes imidlertid at herske en del forvirring i faglitteraturen, om hvem man skal tilskrive æren for ligning (2.1.1). Derfor kan man undertiden møde ligningen under betegnelsen Newton-Ramphson-Simpson-metoden eller Newton-Fourier-metoden. Vi vil dog nøjes med at benævne metoden: Newtons metode eller Newtoniteration.

Vi vil i det følgende udvide Newtons metode til komplekse funktioner. Dertil vil det kræve en smule forklaring af nogle essentielle begreber. Det er ikke vores mening at lave en rigoristisk gennemgang af stoffet, men vi har set os nødsaget til at forklare nogle af de helt grundliggende begreber, idet de er meget vigtige for en generel forståelse af udvidelsen.

2.2 Kompleks differentiation

I udtrykket for Newtons metode (2.1.1) indgår differentialkvotienten for f . Vi ønsker at lade $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ og derfor vil vi i dette afsnit se lidt nærmere på, hvad vi forstår ved differentiation af en sådan funktion, og dermed også meget kort forsøge at beskrive, hvad det vil sige, at en funktion er differentiabel i komplekse forstand. Dette afsnit bygger på (Palka, 1991).

Analogt til det reelle tilfælde er man interesseret i at evaluere grænseværdien:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (2.2.1)$$

hvis en sådan eksisterer og er entydigt bestemt. Først en omskrivning: Lad $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ virke på $z = x + iy$, da vil f kunne omskrives til:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Lad $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ afbilde f.eks. $z \mapsto z^2$ da vil $u(x, y) = x^2 - y^2$ og $v(x, y) = 2xy$. Grænseværdien (hvis den eksisterer) i ligning 2.2.1 kan nu evalueres analogt til det reelle tilfælde. Vi vil ikke gennemgå det i detaljer, men blot bringe resultatet, da det er en central del af forståelsen af kompleks differentiation.

Det gælder, at f er differentiabel i punktet (x_0, y_0) hvis:

1. u og v begge er differentiable (som funktioner af to reelle variable x og y), i (x_0, y_0) .
2. Funktionerne opfylder Cauchy-Riemann-ligningerne:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.2)$$

i (x_0, y_0) .

Disse to betingelser er *nødvendige* og *tilstrækkelige* for, at en funktion er differentiabel i kompleks forstand. Differentialkvotienten vil vi benævne: $f'(z_0)$, hvor $z_0 = x_0 + iy_0$.

Som det ses, så ligger der større krav på en funktion, for at den er differentiabel i kompleks forstand end en funktion, der f.eks. afbilder et reelt talrum ind i et reelt talrum: Den skal være differentiabel i ren reel forstand, og samtidig skal den opfylde Cauchy-Riemann-ligningerne.

Man kan ligeledes udtrykke den afledte: $f'(z_0) = a + ib$, hvor a og b er givet ved:

$$a = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad -b = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}$$

Eller via v :

$$b = \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad a = \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}$$

Dvs. der findes flere (ækvivalente) måder at evaluere differentialkvotienten på. Naturligvis findes der også generelle regler for differentiation af komplekse funktioner, og der er en overraskende lighed med det reelle tilfælde. F.eks. kan man vise, at det for følgende funktioner $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gælder, at de er differentiable på deres definitionsmængde med følgende differentialkvotient:

1. Hvis $f(z) = z$ så er $f'(z) \equiv 1$
2. Hvis $f(z) = k$ så er $f'(z) \equiv 0$
3. Hvis $f(z) = z^n$ så er $f'(z) = nz^{n-1}$

Også de sædvanlige regneregler for differentiation af en sum, et produkt og af sammensatte funktioner gælder.

Det gælder derfor, at alle polynomier $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ af formen $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ hvor $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$ er differentiable, med den sædvanlige differentialkvotient, i hele P 's definitionsmængde, typisk \mathbb{C} .

Det viser sig at man ved at forlange lidt mere end punktvis differentiability af en funktion, nemlig at funktionerne er analytiske, kan opnå nogle bemærkelsesværdige resultater.

2.3 Analytiske funktioner og singulariteter

Der findes flere forskellige, men dog ækvivalente, definitioner på, hvad det vil sige, at en funktion er analytisk. Vi har valgt den følgende definition:

Definition 2.3.1

Antag at U er en ikke tom åben delmængde af det komplekse plan, at f er en kompleks funktion, hvis definitionsmængde indeholder U , og at f er differentiable for alle punkter i U . Hvis disse betingelser er opfyldt, betegnes f som analytisk i U .

Denne definition bygger på (Palka, 1991, side 67).

Følgende sætning er en umiddelbar følge af ovenstående definition og regnereglerne for differentiation:

Sætning 2.3.2

Lad f og g begge være analytiske på $U \in \mathbb{C}$, da vil det gælde at $f + g$, $f - g$, og fg også er analytiske. Endvidere vil det gælde generelt, at hvis $g(z_0) \neq 0$ for $z_0 \in U$ så er f/g også analytisk. (Palka, 1991, side 68)

Det kan vises, at hvis f er analytisk på U , så vil f' også være analytisk på U , og dermed vil også f'' være analytisk på U . På denne måde kan man vise, at hvis en funktion er analytisk på U , vil den være uendelig mange gange differentiable på U .

Man kan komme i situationer hvor g er nul, men f/g alligevel er analytisk. Man siger, at f/g har en hævelig singularitet i punktet. Vi vil behandle singulariteter kort i det følgende.

Først en topologisk notation: Vi vil benævne følgende to mængder:

$$\begin{aligned} K(z_0, r) &= \{z : |z - z_0| < r\} \\ K^*(z_0, r) &= \{z : 0 < |z - z_0| < r\} = K(z_0, r) / \{z_0\}, \end{aligned}$$

som henholdsvis en skive og en udprikket skive. Man kan nu definere en isoleret singularitet:

Definition 2.3.3

En funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ siges at have en isoleret singularitet i z_0 , hvis f er analytisk i $K^*(z_0, r)$, men ikke i $K(z_0, r)$.

Denne situation kan forekomme på to forskellige måder: Enten er z_0 ikke med i definitionsmængden, eller også er f diskontinuert i z_0 . Dette kan også blive tilfældet med Newtoniterationen, idet leddet $f(z)/f'(z)$ indgår, der ikke er veldefineret i $f'(z) = 0$. Det er altså disse tilfælde, der udgør diskussionen i dette afsnit.

Der findes tre forskellige typer isolerede singulariteter: En hævelig singularitet, singulariteterne kan have poler, eller der kan være tale om en essentiel singularitet. Klassifikationen af disse involverer Laurent-rækker, som vi ikke vil behandle her. Vi vil begrænse os til at diskutere de hævelige singulariteter, idet de udgør den essentielle del af vores problem, hvilket forhåbentligt bliver klart i det følgende.

Lidt løst måske, kan man definere en hævelig singularitet som:

Definition 2.3.4

Lad $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ have en isoleret singularitet i z_0 . Denne kaldes for en hævelig singularitet hvis og kun hvis man kan definere $f(z_0)$, således at f også bliver analytisk i z_0 (Palka, 1991, side 100)

Der findes to muligheder for at omdefinere en funktion: Enten via Laurent rækkerne (som omtalt ovenfor) eller via "Riemann Extension theorem". Et korollar af denne sætning lyder:

Sætning 2.3.5

Lad $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ have en isoleret singularitet i z_0 . Singulariteten er hævelig, hvis og kun hvis $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ eksisterer. (Palka, 1991, side 311)

Det vil altså sige, at hvis man kan finde en grænseværdi for f i z_0 , er det muligt at definere $f(z_0)$, og derved "fjerne" singulariteten. For $f = h/g$, hvor

$h, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, kan grænseværdien evt. evalueres via L'Hôpitals regel, der også gælder for komplekse funktioner, dvs.:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h'(z)}{g'(z)}, \text{ hvor } h(z_0) = 0 \text{ og } g(z_0) = 0$$

og hvor f, g er analytiske i $K(z_0, r)$. Et af de klassiske eksempler er $f(z) = \sin(z)/z$, der jo ikke umiddelbart giver mening for $z = 0$. Her kan man benytte sig af L'Hôpitals regel, idet både $\sin(z)$ og z er analytiske i hele \mathbf{C} , og begge er nul for $z = 0$. Dvs. vi kan definere $f(0) = 1$.

Vi vil her til sidst behandle singulariteter, der har med Newtoniteration af polynomier at gøre, og vi vil benævne Newtons metode virkende på et polynomium P med N_P . Lad nu $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, da vil:

$$N_P(z) = z - \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n}{a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}}.$$

Der kan nu opstå det tilfælde, at $P'(z)$ har mindst en rod fælles med $P(z)$, kaldet ζ_i hvorved man har et singularitetsproblem. Ved at benytte sig af L'Hôpitals regel opnås imidlertid:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n}{a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}} &= \lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}}{2a_2 + \dots + n(n-1)a_nz^{n-2}} \\ &= \lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{P'(z)}{P''(z)}, \end{aligned}$$

hvor ζ_i er en rod i P og P' . Er $P''(\zeta_i) \neq 0$, da vil grænseværdien gå mod nul, hvorved $\lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{P'(z)}{P''(z)}$ eksisterer, og singulariteten derfor er hævelig.

Man kan komme i situationer, hvor den dobbelte afledte også har fælles rod (eller rødder) med den afledte, og vi derved har en "0/0" situation, da det stadig gælder at $P'(\zeta_i) = 0$. Man benytter sig igen af L'Hôpitals regel. Hvis alle de afledte har rod i samme punkt som P , vil det stadig gælde, at singulariteten er hævelig. Først en omskrivning af P , så gennemregningen bliver mere gennemskuelig:

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = \sum_{m=0}^n a_m z^m$$

Derved kan brugen af L'Hôpitals regel opskrives:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{\sum_{m=0}^n a_m z^m}{\sum_{m=1}^n m a_m z^{m-1}} = \lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{\sum_{m=1}^n m a_m z^{m-1}}{\sum_{m=2}^n m(m-1) a_m z^{(m-2)}} \quad (\text{et } 0/0 \text{ problem})$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{\sum_{m=2}^n m(m-1)a_m z^{m-2}}{\sum_{m=3}^n m(m-1)(m-2)a_m z^{(m-3)}} \quad (\text{et } 0/0 \text{ problem}) \\
&\vdots \\
&= \lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{\sum_{m=n-2}^n m(m-1)\dots(m-(n-3))a_m z^{m-(n-2)}}{\sum_{m=n-1}^n m(m-1)\dots(m-(n-2))a_m z^{m-(n-1)}} \quad (\text{et } 0/0 \text{ problem}) \\
&= \lim_{z \rightarrow \zeta_i} \frac{\sum_{m=n-1}^n m(m-1)\dots(m-(n-2))a_m z^{m-(n-1)}}{n!a_n} = 0
\end{aligned}$$

Tælleren i den sidste brøk er 0, mens nævneren er forskellig fra 0, hvilket betyder, at $\lim_{z \rightarrow \zeta_i} P(z)/P'(z)$ eksisterer. Dette kan føre os frem til følgende sætning:

Sætning 2.3.6

Hvis brøken $P(\zeta)/P'(\zeta)$ har en isoleret singularitet, er denne altid hævelig og har værdien 0.

Denne sætning leder videre frem til et korollar:

Korollar 2.3.7

Hvis N_P er Newtons metode anvendt på et komplekst polynomium P med roden ζ , da gælder det altid at $N_P(\zeta) = \zeta$.

Bevis

Fra sætning 2.3.6 så vi, at det altid gælder at $\lim_{z \rightarrow \zeta} P(z)/P'(z) = 0$. Da $N_P(z) = z - \frac{f}{f'}$, gælder det derfor, at $N_P(\zeta) = \zeta$. \square

Nu har vi redskaberne til at vise følgende sætning:

Sætning 2.3.8

Lad N_P være Newtons metode anvendt på et komplekst polynomium. Da gælder det, at N_P er analytisk overalt i \mathbf{C} og derved også differentiabel.

Bevis

N_P består af to led: z og $P(z)/P'(z)$. Hvis vi kan vise, at begge disse to led er analytiske i hele \mathbf{C} , så har vi ifølge sætning 2.3.2, at N er analytisk i hele \mathbf{C} . Det ses umiddelbart, at z er analytisk. Ledet $P(z)/P'(z)$ er også analytisk, undtagen når $P'(z) = 0$, men ifølge sætning 2.3.6 er dette tilfælde en fjernbar singularitet, og sætningen er hermed bevist. \square

Nu skulle vi have redskaber nok til at gå i gang med udvidelsen af Newtons metode.

2.4 Schröders fikspunktsteori og kompleks iteration

Vi vil nu endelig udvide Newtoniteration til at omfatte det komplekse tilfælde. For det første vil vi definere hvad der forstås ved et fikspunkt. For det andet vil vi se, at Newtoniteration er en metode, der umiddelbart kan benyttes til at bestemme disse. Endelig vil vi også definere bassinerne for fikspunkterne.

Schröder og senere Koenigs formulerede følgende sætning angående fikspunkter.

Sætning 2.4.1 (Schröder - Koenigs' fikspunktsætning)

Lad $\phi(z)$ være en funktion, som er analytisk i en omegn af et punkt ξ , der opfylder $\phi(\xi) = \xi$, med $|\phi'(\xi)| < 1$. Lad $\phi^n(z)$ være den n 'te iteration af $\phi(z)$ med sig selv. Så gælder for alle z i en omegn D af ξ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(z) = \xi$$

I Koenigs' formulering (se appendiks C) præciserer han sætningen yderligere ved at sige, at der i en omegn af z gælder at

$$\left| \frac{\phi(z_1) - \xi}{z_1 - \xi} \right| < H < 1$$

og man kan udlede at

$$|z_p - \xi| < H^p \cdot |z_1 - \xi|,$$

hvor p er antallet af iterationer, og z_p er den p gange itererede.

Man kalder ξ for et tiltrækkende *fikspunkt* til ϕ . Det skal måske nævnes at vi ikke har været helt tro mod den notation som Schröder og Koenigs selv brugte.

Sætning 2.4.2

Lad N_P være Newtons metode anvendt på polynomiet P . Lad ζ være en given rod i P , N_P opfylder da Schröders fikspunktsætning. Dvs. det gælder specielt at: Der eksisterer en omegn D om ζ , så for $z \in D$ gælder det at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_P^n(z) = \zeta$$

Bevis

Vi skal altså vise, at Newtons metode opfylder kravene givet i Schröders fikspunktsteori. Fra sætning 2.3.8 fås det, at N_P er analytisk i hele \mathbf{C} og derfor også i en omegn af ζ . Fra korollar 2.3.7 får vi, at $N_P(\zeta) = \zeta$, hvilket betyder, at ζ er et fikspunkt til N_P .

Nu mangler vi blot at vise, at $|N_P'(\zeta)| < 1$. Først erkender vi, at idet N_P er analytisk i hele \mathbf{C} , er den også differentiabel i hele \mathbf{C} (sætning 2.3.8). Dvs. $N_P'(z)$ giver mening for alle $z \in \mathbf{C}$.

Lad først differentialkvotienten blive udtrykt:

$$N'_P(z) = 1 - \frac{(P'(z))^2 - P(z)P''(z)}{(P'(z))^2} = \frac{P(z)P''(z)}{(P'(z))^2}$$

Hvis ζ er en simpel rod, er ovenstående oplagt nul, da $P(\zeta) = 0$ og $P'(\zeta) \neq 0$, og derfor er $|N'_P(\zeta)| < 1$. Hvis ζ er en multipel rod er der tale om et $0/0$ -udtryk, men dette lader sig omskrive og forkorte på følgende måde:

$$P(z) = (z - \zeta)^p Q(z)$$

Hvor $Q(z)$ er restpolynomiet, og p er multipliciteten af ζ . Hermed bliver N_P efter forkortelse med $(z - \zeta)^{p-1}$

$$N_P(z) = z + \frac{(\zeta - z)Q(z)}{(z - \zeta)Q'(z) + pQ(z)}$$

dermed

$$N'_P(z) = \frac{Q(z) \left((z - \zeta)^2 Q''(z) + p(2(z - \zeta)Q'(z) + (p-1)Q(z)) \right)}{\left((z - \zeta)Q'(z) + pQ(z) \right)^2}$$

Hvilket ved indsættelse af roden ζ giver

$$N'_P(\zeta) = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow |N'_P(\zeta)| < 1$$

Hermed opfylder N_P alle betingelser for sætning 2.4.1, og sætningen er bevist. \square

Schröder gav et bevis for sin fikspunktsætning, men da han muligvis ikke kendte til Weierstrass' delta-epsilon metode, brugte han infinitesimalregning, hvilket gør, at beviset ikke er præcist efter nutidig standard. Sætningen blev endelig bevist i 1880'erne af Koenigs. Schröder fandt i sine studier også andre funktioner, der opfyldte sætningen, så det er altså ikke blot Newtons metode, der kan bestemme fikspunkter.

Princippet for Newtoniteration af et komplekst polynomium er det samme som for et reelt. Lad N_P være Newtons metode anvendt på det komplekse polynomie P . Vælg et $z_0 \in \mathbb{C}$. Sæt $z_1 = N_P(z_0)$ og håb på, at z_1 ligger tættere på et nulpunkt for P end z_0 gjorde. På denne måde får man en følge af komplekse tal z_1, z_2, \dots, z_n , der (hvis vi har valgt z_0 fornuftigt) vil konvergere mod et nulpunkt for P . Det n 'te element i følgen skrives også som $N^n(z_0) = z_n$.

I et polynomium med n rødder findes der altså n fikspunkter. Hvilket af disse fikspunkter $N^n(z)$ vil konvergere mod, kommer an på vores valg af begyndelsesværdi z_0 . Derfor følgende definition:

Definition 2.4.3

Lad ξ være et fikspunkt for funktionen Φ . Vi definerer da mængden A_ξ som:

$$A_\xi = \{z : \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(z) = \xi\}$$

og vi kalder mængden A_ξ for bassinet til fikspunktet ξ , til tider også betegnet: domænet for konvergens mod ξ .

Til slut vil vi nævne, at der findes forskellige typer fikspunkter. Et fikspunkt som beskrevet i Schröders fikspunktsætning kaldes normalt for et tiltrækkende fikspunkt. Et frastødende fikspunkt er et fikspunkt hvor differentialkvotienten i fikspunktet er større end 1. Hvis differentialkvotienten er 1, taler man om et indifferent fikspunkt.

Endelig findes der såkaldte cykler, også kaldet periodiske sfærer. Hvis det for en vilkårlig funktion Φ gælder at

$$\xi_2 = \Phi(\xi_1), \xi_3 = \Phi(\xi_2), \dots, \xi_p = \Phi(\xi_{p-1}), \xi_1 = \Phi(\xi_p)$$

siger man, at den har en p -cykel bestående af ξ_1, \dots, ξ_p . En cykel er en generallisering af et fikspunkt, man taler om tiltrækkende, frastødende og indifferente cykler. Mange generelle resultater vil derfor omhandle cykler, i stedet for fikspunkter, hvor man så tillader 1-cykler.

Man kan vise, at det generelt gælder, at $\Phi'(\xi_1) = \dots = \Phi'(\xi_p)$. Hvis man har en p -cykel, kan man også betragte de p elementer som fikspunkter til Φ^p .

En p -cykel kaldes en grænsecykel for et punkt z , hvis det gælder at følgen $z_1 = \Phi(z), z_2 = \Phi(z_1), \dots$ konvergerer mod cyklen.

I det følgende vil det udover funktionen, som Newtons metode giver, typisk være såkaldte rationelle funktioner som vi undersøger.

Definition 2.4.4

En funktion $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes rationel, hvis og kun hvis den kan skrives på følgende form:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

hvor $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ og er polynomier. Man har desuden at

$$\text{grad } R = \max\{\text{grad } P, \text{grad } Q\}.$$

Kapitel 3

Schröder

Den tyske matematiker Ernst Schröder (1841-1902) var den første til at lave en systematisk gennemgang af Newtons metode for et komplekst polynomium (Alexander, 1994, side 4). Schröder lavede således sit arbejde med "Cayleys problem", før Cayley i 1879 formulerede problemet.

I dette kapitel vil vi gennemgå den del af hans arbejde, der omhandler Newtons metode for den kvadratiske ligning $f(z) = z^2 - 1$, og vi vil gøre rede for hvilke matematiske redskaber, han betjente sig af. For han er - som vi nu skal se - den første til at introducere et helt nyt og effektivt redskab i behandlingen af iterative processer, nemlig funktionalligninger.

3.1 Schröders arbejde

Ernst Schröder's arbejde med Newtons metode fik ikke den opmærksomhed af hans samtid, som det egentlig fortjente. Dette er der flere grunde til. Schröders matematiske stil er flyvsk og upædagogisk. Eller som videnskabshistorikeren D.S Alexander skriver:

...Somme tider syntes han at trække ting ud af den blå luft, men efter grundig overvejelse kan det ses, at han trækker på ting, han har behandlet tidligere i sit arbejde. (Alexander, 1994, side 19)

Det faktum, at Schröder lavede størstedelen af sit arbejde på Teknisk Institut i Karlsruhe - en ingeniørskole langt fra det tyske matematiske miljø - har ydermere bidraget til hans manglende anerkendelse.

Schröders primære arbejdsområde var logik og mængdelære - områder hvor han opnåede nogen anerkendelse i sin samtid. De værker, hvor han beskæftiger sig med Newtoniteration af den kvadratiske ligning, begrænser sig til to artikler trykt i 1870 og 1871 (Schröder, 1870, 1871), og her er det primært iterationsteori og funktionalligninger, han interesserer sig for. Newtons metode bliver nævnt som et eksempel på en interessant iterativ proces.

3.2 Iteration og funktionalligninger

Schröder definerer iterationsbegrebet, som vi forstår det. For en entydig bestemt funktion $F(z)$ betegner han den r gange sammensatte funktion som $F^r(z)$. Han opridser de basale regneregler for itererede funktioner, og måden man skal betragte dem på:

$$F^2(z) = F(F(z)), \quad F^3(z) = F(F(F(z))), \quad \text{o.s.v.} \quad (3.2.1)$$

Denne grundighed tyder på, at iteration og iterativt beskrevne funktioner ikke er hverdagskost i det matematiske miljø, hvor Schröder befinder sig. Denne opfattelse styrkes af, at Schröder begynder teksten med at sige:

Jeg fremlægger hermed en undersøgelse af et område, hvor jeg kun ser få medarbejdere. (Schröder, 1871, side 296)

Schröder opstiller følgende problem for itererede funktioner:

Da selv de letteste udregninger bliver udførlige når antallet [af iterationer] er stort nok, så vil man først bemærke, at det for et temmeligt stort tal r ikke er muligt at finde det endelige resultat til

$$z^{(r)} = F^r(z)$$

på den angivne måde [Ligning (3.2.1)]. (Schröder, 1871, side 297)

Dette er motivationen, der får Schröder til at beskrive en ny opgave; nemlig at man skal finde en ny metode til at udtrykke resultatet af $F^r(z)$. Denne metode skal have følgende egenskaber: Rækkefølgen, naturen og antallet (hvis dette ikke er uendeligt) af de aritmetiske elementaroperationer, af hvilke udregningen er opbygget, skal være uændret uanset r 's størrelse. Schröder finder, at funktional-ligninger er den mest anvendelige metode til løsning af ligning (3.2.1).

Opgaven er altså for en givet funktion F , at finde den r gange sammensatte funktion F^r . Hvis $\zeta_1 = \Phi(\zeta)$ er en funktion, hvor den r gange sammensatte funktion $\zeta_r = \Phi^r(\zeta)$ er kendt, så er opgaven løst, når det er muligt at finde en bijektiv funktion, ψ , så at:

$$z = \psi(\zeta) \quad (3.2.2)$$

svarende til $\zeta = \psi^{-1}(z)$, og som for alle z opfylder

$$z_1 = \psi(\zeta_1) \quad (3.2.3)$$

Dette svarer til, at

$$z_1 = F(z) = \psi(\zeta_1) = \psi(\Phi(\psi^{-1}(z))), \quad (3.2.4)$$

for alle z . Man har da at følgende gælder:

$$F^r = \psi \Phi^r \psi^{-1} \quad (3.2.5)$$

idet $\psi^{-1}\psi = Id$ (identitetsafbildningen), og derfor er

$$F^2 = \psi \Phi \psi^{-1} \psi \Phi \psi^{-1} = \psi \Phi^2 \psi^{-1}$$

og så fremdeles.

En sådan funktion behøver blot at opfylde en funktionalligning, denne kan være på en af følgende former:

$$\begin{aligned} F = \psi \Phi \psi^{-1} & , & F\psi = \psi \Phi & , \\ \psi^{-1}F = \Phi \psi^{-1} & , & \psi^{-1}F\psi = \Phi & \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Schröder formulerer på baggrund af dette følgende:

Sætning 3.2.7

Når det for vilkårlige argumenter gælder at: $F = \psi \Phi \psi^{-1}$, må det også gælde at $F^r = \psi \Phi^r \psi^{-1}$

Schröder bemærker, at det i almindelighed er en meget svær opgave at finde en funktion ψ , når man har givet funktionerne Φ og F . Han foreslår derfor en omvendt angrebsmetode.

For en given funktion Φ , hvor den itererede funktion Φ^r er kendt, vælger man alle mulige funktioner ψ , hvor den omvendte funktion ψ^{-1} kan findes. Da vil ligning (3.2.6) give alle mulige funktioner F , hvor den sammensatte funktion F^r kan udledes fra Φ . Schröder gennemgår et eksempel, som vi vil medtage for illustrationens skyld - vi har dog tilføjet nogle mellemregninger for at lette læsningen lidt:

Eksempel 3.2.8

Sæt

$$\Phi(z) = \alpha z^n$$

Da vil $\Phi^r(z)$ kunne udtrykkes som:

$$\begin{aligned} \Phi^1(z) &= \alpha^1 z^n \\ \Phi^2(z) &= \alpha (\alpha^1 z^n)^n = \alpha^{n+1} z^{n^2} \\ \Phi^{r-1}(z) &= \alpha^{n^{r-2} + \dots + n+1} z^{n^{r-1}} \\ \Phi^r(z) &= \alpha \left(\alpha^{n^{r-2} + \dots + n+1} z^{n^{r-1}} \right)^n = \alpha^{n^{r-1} + \dots + n+1} z^{n^r} \end{aligned}$$

Hvis man benytter ligningen for en endelig kvotientrække $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ og beregner $\sum_{i=0}^{r-1} n^i = \frac{1-n^r}{1-n} = \frac{n^r-1}{n-1}$, fås følgende udtryk

$$\Phi^r(z) = \alpha^{\frac{n^r-1}{n-1}} z^{n^r}$$

Vælger man derefter $\psi(z) = e^z$, og dermed $\psi^{-1}(z) = \log z$, får man følgende funktion

$$F(z) = \psi(\Phi(\psi^{-1}(z))) = e^{\alpha(\log(z))^n}$$

og dermed følgende udtryk for den sammensatte funktion

$$F^r(z) = \psi(\Phi^r(\psi^{-1}(z))) = e^{\alpha^{\frac{n^r-1}{n-1}} (\log(z))^{n^r}}$$

△

Schröder koncentrerer sig herefter om en type funktionalligninger, som ψ opfylder, og han undersøger, hvad denne type funktionalligning medfører for F^r :

Sætning 3.2.9

Hvis man for en funktion $\psi(\zeta)$ har en multiplikationssætning, så funktionen på et produkt $m\zeta$ lader sig udtrykke ved funktionen på den ene af faktorerne ζ , således at

$$\psi(m\zeta) = F(\psi(\zeta)),$$

kan man i alle tilfælde udtrykke den itererede funktion $F^r(z)$ eksplicit ved r

$$\psi(m^r \zeta) = F^r(\psi(\zeta))$$

og dermed

$$F^r(z) = \psi(m^r \psi^{-1}(z))$$

Bevis

Sæt $\Phi(\zeta) = m\zeta$, da vil det gælde at:

$$\Phi(\zeta) = m\zeta, \quad \Phi^2(\zeta) = m^2\zeta, \quad \dots, \quad \Phi^r(\zeta) = m^r\zeta$$

Endvidere gælder det, at $\psi(\Phi(\zeta)) = \psi(m\zeta) = F(\psi(\zeta))$, som kan omskrive via ligning (3.2.6) til:

$$F = \psi\Phi\psi^{-1},$$

hvilket ifølge ligning (3.2.7) giver:

$$F^r(\zeta) = \psi(m^r(\psi^{-1}(\zeta)))$$

□

Det skal nævnes, at Schröder ikke fordybede sig i så små detaljer ved beviset af sætningen, som vi her har gjort. En funktion, der opfylder sætning 3.2.9, d.v.s. opfylder $\psi(m\zeta) = F(\psi(\zeta))$, er $\tan m\zeta$, idet for $m = 2$ gælder:

$$\tan 2\zeta = \frac{2 \tan \zeta}{1 - (\tan \zeta)^2} \quad (3.2.10)$$

Det er netop denne ligning Schröder benytter til sin behandling af det kvadratiske problem. Dette vil vi behandle i næste afsnit.

Schröder fremsætter også en sætning, hvor funktionen opfylder en additionsætning, dvs. $\psi(\zeta + h) = F(\psi(\zeta))$. Beviset for denne sætning er helt analog til beviset for multiplikationssætningen.

3.3 Det kvadratiske problem

Den del af Schröders arbejde, der specielt har vores opmærksomhed, er hans behandling af Newtons metode på den kvadratiske ligning. I dette afsnit vil vi gøre rede for, hvorledes han griber dette an.

Schröder ønsker for et givet $z_0 \in \mathbb{C}$, at finde ud af, hvilket et af nulpunkterne for $f(z) = z^2 - 1$ Newtons metode for $f(z_0)$ vil konvergere imod. Først benytter han en omskrivning af $\tan m\zeta$, der desværre er en trykfejl i. Vi har ikke været i stand til at finde den korrekte ligning, og derfor er det følgende ikke helt tro imod Schröders egen fremstilling. Vi benytter os således ikke af en helt generel ligning for $\tan m\zeta$, men kun ligningen for vinkelfordoblingen (ligning (3.2.10)). Dette er også hvad Schröder til sidst benytter sig af, så vi opnår helt det samme resultat.

Lad $z = \psi(\zeta)$ være givet ved $\psi(\zeta) = \tan \zeta$. Idet $\tan \zeta$ opfylder betingelserne for sætning (3.2.9) fås for $m = 2$:

$$\begin{aligned} \psi(2\zeta) &= \psi(2\psi^{-1}(z)) \\ &= \tan(2 \arctan(z)) \\ &= \frac{2 \tan(\arctan(z))}{1 - (\tan(\arctan(z)))^2} \\ &= \frac{2z}{1 - z^2} = F(z) \end{aligned}$$

Sæt nu $z = iw$, man får da at:

$$\tan(2 \arctan(iw)) = \frac{2iw}{1 + w^2},$$

hvilket er ensbetydende med at

$$\frac{2w}{1 + w^2} = -i \tan(2 \arctan iw)$$

Alt i alt betyder dette, at hvis man sætter $F(w) = \frac{2w}{1+w^2}$, får man i henhold til sætning 3.2.9

$$F^r(w) = -i \tan(2^r \arctan(iw))$$

hvilket er lige præcist, hvad Schröder får brug for.

Schröder viste i sin artikel fra 1870, at man kan konstruere mange forskellige funktioner med samme egenskaber som Newtons metode. Han viste blandt andet, at følgende funktion (den generaliserede Newtons metode) er praktisk, da den i visse situationer konvergerer hurtigere end Newtons metode.

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f'(z_n)}{(f'(z_n))^2 - f(z_n)f''(z_n)}$$

Ved indsættelse kan det ses, at hvis $P = z^2 - 1$, så er

$$z_{n+1} = z_n - \frac{(z_n^2 - 1)2z_n}{(2z_n)^2 - 2(z_n^2 - 1)} = \frac{2z_n}{z_n^2 + 1} \quad (3.3.1)$$

Bassinerne for denne ligning (3.3.1) og den almindelige Newtons metode på den kvadratiske ligning er ens (se afsnit 3.5). Derfor er opgaven omformet til at finde ud af, hvad

$$F^r(z) = -i \tan(2^r \arctan(iz)) \quad (3.3.2)$$

går imod, når $r \rightarrow \infty$.

Schröder benytter nu en omformning af $\arctan(z)$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \arctan(x + iy) \\ = h\pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{(x^2+(y+1)^2)(x^2+(y-1)^2)+x^2+y^2-1}}{2x}\right) + \frac{i}{4} \log\left(\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}\right) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Vi har ikke kunnet verificere real-delen af ligning (3.3.3). Dette er imidlertid heller ikke af stor betydning, idet real-delen (som det forhåbentligt vil fremgå) ikke har betydning for det endelige resultat. Ved passende omskrivning får han, at

$$\arctan(i(x + iy)) = \arctan(ix - y) = h\pi + \xi + i\eta, \quad (3.3.4)$$

hvor

$$\xi = \arctan\left(\frac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{(y^2 + (x+1)^2)(y^2 + (x-1)^2)}}{2y}\right) \quad (3.3.5)$$

og

$$\eta = \frac{1}{4} \log\left(\frac{y^2 + (x+1)^2}{y^2 + (x-1)^2}\right) \quad (3.3.6)$$

h er et helt tal, og \arctan beregnes som den værdi, der ligger i intervallet $]-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi]$.

Ved at kombinere ligning (3.3.4) med ligning (3.3.2) fås følgende udtryk.

$$F^r(z) = z_r = -i \tan(2^r h\pi + 2^r(\xi + i\eta)) \quad (3.3.7)$$

Hvilket pga. tangens periodicitet reduceres til

$$z_r = -i \tan 2^r(\xi + i\eta)$$

Schröder kaster sig herefter over de hyperbolske funktioner og opskriver følgende:

$$\tan(x + iy) = \frac{\tan x + i \tanh y}{1 - i \tan x \tanh y} = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

Dette giver så følgende udtryk:

$$z_r = \frac{\tanh(2^r \eta) - i \tan(2^r \xi)}{1 - i \tan(2^r \xi) \tanh(2^r \eta)} = \frac{\sinh(2^{r+1} \eta) - i \sin(2^{r+1} \xi)}{\cos(2^{r+1} \xi) + \cosh(2^{r+1} \eta)} \quad (3.3.8)$$

Sætter man

$$\sqrt{\frac{y^2 + (x+1)^2}{y^2 + (x-1)^2}} = \zeta, \quad (3.3.9)$$

og tager η defineret som:

$$\eta = \frac{1}{4} \log \frac{y^2 + (x+1)^2}{y^2 + (x-1)^2}$$

fås

$$\eta = \frac{1}{4} \log \zeta^2 = \frac{1}{2} \log \zeta,$$

og dermed er

$$\sinh(2^{r+1} \eta) = \sinh(2^r 2\eta) = \sinh(2^r \log \zeta) = \sinh(\log \zeta^{2^r})$$

Ved omskrivning af \sinh fås

$$\sinh(\log \zeta^{2^r}) = \frac{e^{\log \zeta^{2^r}} - e^{-\log \zeta^{2^r}}}{2} = \frac{\zeta^{2^r} - \zeta^{-2^r}}{2}$$

og tilsvarende for \cosh .

$$\sinh(2^{r+1} \eta) = \frac{\zeta^{2^r} - \zeta^{-2^r}}{2}, \quad \cosh(2^{r+1} \eta) = \frac{\zeta^{2^r} + \zeta^{-2^r}}{2} \quad (3.3.10)$$

Følgende resultater ses direkte ud fra ligning (3.3.9). Hvis $x > 0$, så gælder det for vilkårlige y , at $\zeta > 1$, og dermed er

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta^{2^r} = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \zeta^{-2^r} = 0$$

Dette betyder, at

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh 2^{r+1}\eta = \infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \cosh 2^{r+1}\eta$$

tilsvarende, hvis $x < 0$, så gælder det for vilkårlige y , at $\zeta < 1$, og dermed er

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta^{2^r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \zeta^{-2^r} = \infty$$

Dette betyder, at

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh 2^{r+1}\eta = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \cosh 2^{r+1}\eta = \infty$$

Det ses af ligning (3.3.10), at $\sinh 2^{r+1}\eta$ og $\cosh 2^{r+1}\eta$ konvergerer lige hurtigt, og da \sin og \cos ikke konvergerer mod noget og er begrænsede¹, må ligning (3.3.8), ved hjælp af ovenstående betragtninger, give følgende resultat

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z_r = 1 \quad \text{for } x > 0, \text{ og} \quad (3.3.11)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z_r = -1 \quad \text{for } x < 0 \quad (3.3.12)$$

Heraf ses, at ethvert z_0 i højre halvplan vil konvergere mod $+1$, og et hvert z_0 i venstre halvplan vil konvergere mod -1 .

3.4 Schröders behandling af $\operatorname{Re}(z_0) = 0$

Schröder behandler også tilfældet hvor $\operatorname{Re}(z_0) = 0$, dvs. hvor begyndelsespunktet ligger på den imaginære akse. Da er: $\zeta = 1$, $\tanh(2^r\eta) = 0$, $\sinh(2^{r+1}\eta) = 0$ og $\cosh(2^{r+1}\eta) = 1$. Dermed bliver

$$z_r = -i \tan(2^r \xi)$$

Siden $\xi_{x=0} = \arctan -y$, fås nu

$$z_r = i \tan(2^r \arctan y),$$

hvilket er rent imaginært. Altså vil punkter på den imaginære akse forblive der. Faktisk viser Schröder, at for visse værdier af z , hvor $\operatorname{Re}(z) = 0$, findes cykler. Schröder angiver endvidere cyklernes startværdier eksplicit som:

¹Dette er grunden til, at real-delen (ξ) er uden betydning

$$z = i \tan \left(\frac{h\pi}{2^r - 1} \right), \quad (3.4.1)$$

hvor $h \in \mathbf{Z}$, og $r \in \mathbf{N}$ er cyklens periode. F.eks. hvis $r = 2$, vil der findes en to-cykel, der vil oscillere mellem værdierne $i\sqrt{3}$ og $-i\sqrt{3}$. Schröder diskuterer også, hvad der sker for punkter på den imaginære akse, der ikke opfylder ligning (3.4.1), dvs. punkter, der ikke løber i en endelig cykel. Han siger da:

...I alle andre tilfælde vil z_r gennemløbe uendeligt mange [forskellige] værdier, når r går mod uendeligt. (Schröder, 1871, s.320)

Schröder går ikke videre med denne mængde af punkter, men stiller sig tilfreds med sin konklusion. Som vi senere skal se, er disse punkter imidlertid ganske vigtige, når man vil forstå Newtons metode på et polynomium af grad > 2 .

3.5 To sider af samme sag

Som lovet tidligere, vil vi nu vise, at man kan overføre resultaterne fra den generaliserede Newtons metode, ligning (3.3.1), til den normale Newtons metode. Dette er ikke citeret eller taget fra Schröders artikel, men delvist fra (Alexander, 1994, s. 17-18).

Ved hjælp af den generaliserede Newtons metode kom vi i ligning 3.3.1 frem til følgende ligning

$$M(z) = \frac{2z}{z^2 + 1},$$

som vi derefter har analyseret, når man itererer denne.

Ved at benytte den normale Newtons metode på $f(z) = z^2 - 1$ får man følgende ligning, som skal itereres

$$N(z) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Det ses jo tydeligt at disse to ligninger er nært beslægtede. Hvis man sætter $\psi(z) = \frac{1}{z}$ og dermed $\psi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$, får man følgende sammenhæng:

$$\begin{aligned} \psi(M(\psi^{-1}(z))) &= \left(\frac{2\frac{1}{z}}{\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 1} \right)^{-1} \\ &= \frac{\frac{1}{z} + 1}{2\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1 + z^2}{2z} = N(z), \end{aligned}$$

så

$$N = \psi^{-1}M\psi$$

Dette betyder, at man kan opskrive følgende

$$N^{(r)} = \psi^{-1}M^{(r)}\psi,$$

og dermed må det også gælde, at

$$\lim_{r \rightarrow \infty} N^{(r)}(z) = \psi^{-1} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} M^{(r)}(\psi(z)) \right)$$

Da det gælder, at for et given $z = x + iy$, er

$$\psi(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

kan man se, at et punkt i den ene halvplan føres over i den samme halvplan ved ψ .

Men så må det gælde, at de opnåede resultater for M overføres direkte til N , og dermed er det vist, at bassinerne for N er, som vi ønskede at vise.

3.6 Afrunding

Som vi har set, var Schröder - ved hjælp af sit elegante funktionalligningsredskab - i stand til at beskrive bassinerne for Newtons metode på den kvadratiske ligning $f(z) = z^2 - 1$. Ligeledes var han klar over, at grænsen mellem bassinerne udgøres af den imaginære akse, og at iterationsfølgen her - for visse punkter - udgøres af uordnede elementer (Alexander, 1994, s.19). Det er iøvrigt værd at tilføje, at Schröder også viser, at $f(z) = z^2 - 1$ er repræsentativ for alle kvadratiske ligninger $f(z) = az^2 + bz + c$, dvs., at der findes lineære transformationer således, at alle kvadratiske ligninger kan omformes til $f(z) = z^2 - 1$. Og da konvergens til et fixpunkt er en egenskab, der bevares ved konjugation, viser Schröder således, at $f(z) = z^2 - 1$ er det generelle tilfælde (Alexander, 1994, s.19).

Man kan undre sig over, at Schröder - efter hans succes med den kvadratiske ligning - slet ikke udtaler sig om Newtons metode på den kubiske ligning $z^3 - 1$. Dette hænger formentlig sammen med, at hans primære interesse slet ikke var Newtons metode, men derimod iteration af komplekse funktioner og funktionalligninger. Der skulle gå 10 år før Arthur Cayley i 1879 tog tråden op, og diskuterede Newtons metode på komplekse polynomier.

Kapitel 4

Cayley

Det er den engelske matematiker Arthur Cayley (1821-1895), man oftest fremhæver som ophavsmand til diskussionen om Newtoniteration af et komplekst polynomium. I dette kapitel vil vi først undersøge, hvorledes han behandler den kvadratiske ligning, og dernæst hvordan han diskuterer den kubiske ligning $f(z) = z^3 - 1$.

4.1 Cayley's arbejde

Arthur Cayley var oprindeligt uddannet matematiker, men arbejdede som jurist. Det var dog som "fritids"-matematiker at han skulle gøre sig bemærket. Han nåede - mens han arbejdede som advokat - at få produceret nær ved 300 artikler, og heraf vil specielt hans arbejde vedrørende matricer blive husket af eftertiden. Senere i sin karriere blev han ansat som professor i matematik ved universitetet i Cambridge, hvor han fortsatte sin imponerende produktion af artikler. Således kunne han afslutte sin karriere med næsten 1000 artikler bag sig (Katz, 1998).

Cayleys undersøgelser af Newtons metode for polynomier, tager sig helt anderledes ud end Schröders. Hvor Schröder behandlede det, som et eksempel på det han egentlig interesserede sig for - nemlig funktionalligninger - er Cayleys arbejde målrettet alene mod Newtons metode. I modsætning til Schröder, der benytter sig af et analytisk bevis, går Cayley - som vi nu skal se - den tunge vej, og anvender et geometrisk bevis. I en senere udgivelse antager Cayley en anden angrebsvinkel, men som historikeren Alexander (Alexander, 1994, side 19-20) påpeger, er der ikke væsentlig forskel på de to beviser. Det er Cayley, der - måske noget uretmæssigt - er blevet husket af eftertiden, som den der løste det kvadratiske problem. Og det er da også ham, der har lagt navn til hele problemet omkring Newtons metode anvendt på komplekse polynomier.

Cayley publicerede sine resultater om Newtons metode i 4 artikler udgivet mellem 1870 og 1890. Hans behandling af den kvadratiske ligning udgav han i 1879 (Cayley, 1879a), og det er denne artikel, der danner udgangspunktet for vores

gennemgang af hans arbejde. Artiklen er mildest talt ikke pædagogisk, og vi har derfor valgt ikke at bevare artiklens rækkefølge, i et forsøg på at lette forståelsen af hans behandling af problemet.

4.2 Geometrisk konstruktion

Cayley ser på Newtons metode anvendt på ligningen $z^2 - n^2$. Han starter med at opstille en geometrisk konstruktion af et punkt ud fra 3 andre punkter. Det bevises herefter at denne konstruktion svarer til Newtons metode ud fra et gæt og de 2 rødder.

Cayley benytter sig af, at en cirkel kan opfattes som den geometriske mængde af punkter kendetegnet ved, at forholdet mellem afstanden til to givne antipunkter er konstant. Lad nu punkterne N og N' være sådanne to antipunkter, der ligger på 1.-aksen symmetrisk omkring origo, med N i den højre halvplan. Og lad A_1 være et tredje punkt (det første gæt), der bestemmer k , forholdet mellem afstanden til de to antipunkter. Cirklen C_k kan da udtrykkes algebraisk som:

$$C_k = \left\{ z \in \mathbf{C} : k = \frac{|z - N|}{|z - N'|} \right\}, \quad (4.2.1)$$

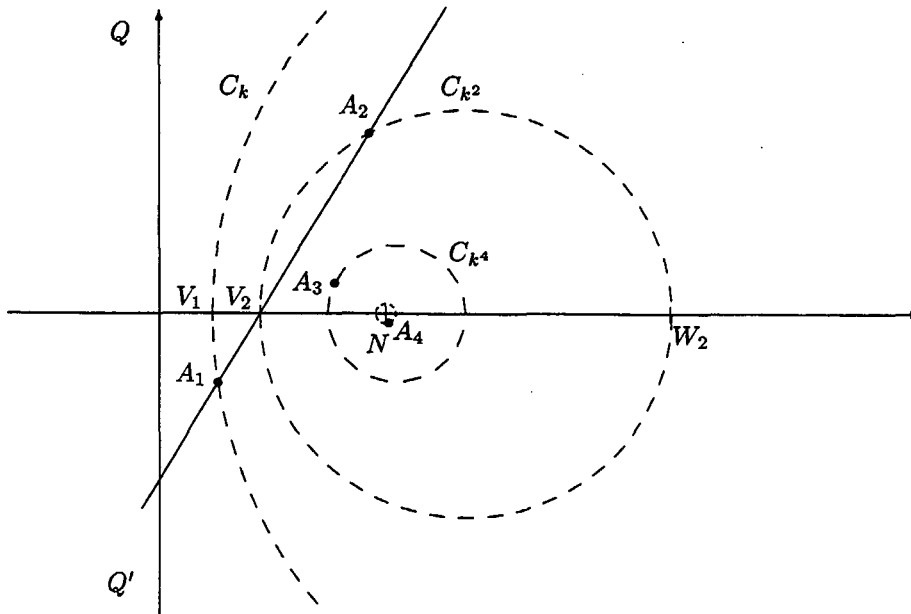
hvor k er konstant. Og da Cayley kun betragter cirkler i den højre halvplan, følger det af ligning (4.2.1), at $k < 1$. For et givet k findes der da en dertil hørende cirkel C_k , med centrum på 1.-aksen og to skæringer med denne: V_1 og W_1 , hvor V_1 er den mindste værdi af disse skæringer (se figur 4.1, W_1 er uden for figuren). Cayley betragter nu en anden cirkel C_{k^2} , stadigvæk givet ved ligning (4.2.1), men nu med forholdet $\frac{|z - N|}{|z - N'|} = k^2$. Dette medfører, at cirklen C_{k^2} ligger inde i cirklen C_k . Han konstruerer da et punkt A_2 liggende på cirklen C_{k^2} , der er givet som skæringen mellem linien A_1V_2 og cirklen C_{k^2} . Ved at tage en ny cirkel C_{k^4} , kan han på samme måde finde punktet A_3 , som skæringen mellem linien A_2V_3 og cirklen C_{k^4} , osv. (se figur 4.1).

4.3 Newtons metode

Cayley beviser nu, at følgen $A_1, A_2 \dots A_n$ fra hans geometriske konstruktion er ækvivalent med følgen $z_1, z_2, \dots z_n$, der fremkommer ved brug af Newtons metode på den kvadratiske ligning, hvor N og N' er rødderne i den komplekse plan.

Først udtrykker han forskellen mellem A_1 og N udtrykt i polære koordinater. Idet N og N' ligger symmetrisk omkring origo, vil $N' = -N$. Heraf fås:

$$A_1 - N = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad (4.3.1)$$



Figur 4.1 Figuren viser, hvorledes punkterne $A_2, A_3 \dots$ bliver konstrueret ud fra punktet A_1 og cirklerne C_k, C_{k^2}

og ligeledes

$$A_1 - N' = A_1 + N = \rho'_1 (\cos \theta'_1 + i \sin \theta'_1) \quad (4.3.2)$$

Forskellen mellem A_2 og N eller N' er analogt givet ved:

$$\begin{aligned} A_2 - N &= \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ A_2 - N' &= A_2 + N \\ &= \rho'_2 (\cos \theta'_2 + i \sin \theta'_2) \end{aligned}$$

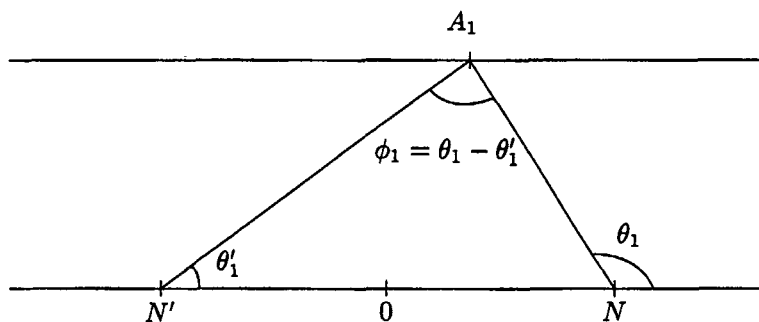
Da er det muligt at finde:

$$\frac{A_1 - N}{A_1 + N} = \frac{\rho_1}{\rho'_1} (\cos(\theta_1 - \theta'_1) + i \sin(\theta_1 - \theta'_1)). \quad (4.3.3)$$

Idet $k = \frac{|A_1 - N|}{|A_1 - N'|}$ er $k = \rho_1 / \rho'_1$. Med $\phi_1 = \theta_1 - \theta'_1$ kan ligning (4.3.3) skrives som:

$$\frac{A_1 - N}{A_1 + N} = k (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \quad (4.3.4)$$

Ud fra figur 4.2 ses, at ϕ_1 svarer til vinklen $N'A_1N$.

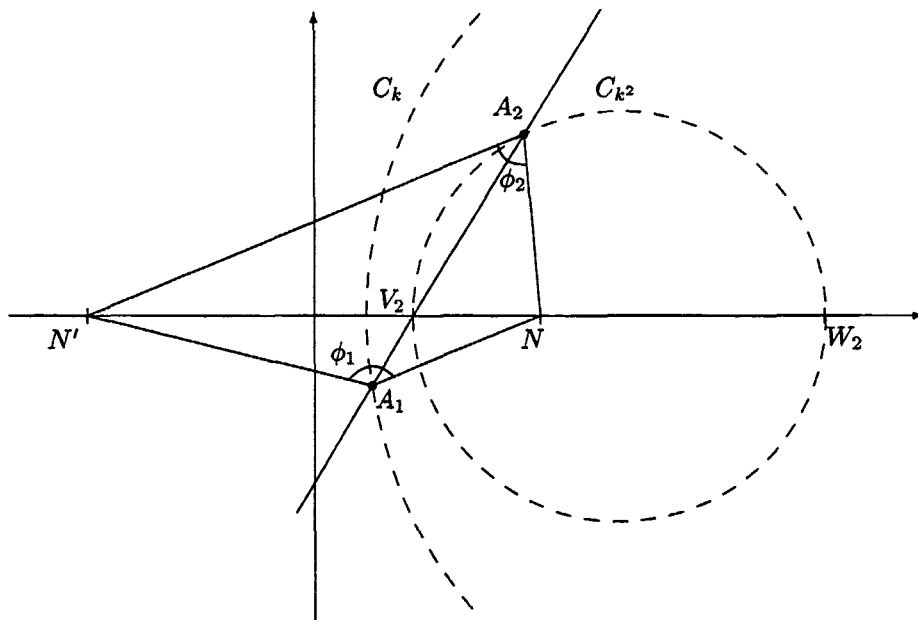


Figur 4.2 Figuren viser at $\phi_1 = \theta_1 - \theta_1'$ er vinklen $N'A_1N$

Cayley ønsker også at udtrykke $\frac{|A_2-N|}{|A_2+N|}$. Derfor vil følgende lemma være nyttigt:

Lemma 4.3.5

Hvis den geometriske metode følges, bliver vinklen $NA_2N' = \phi_2$ det dobbelte af vinklen af $NA_1N' = \phi_1$. Dvs. $\phi_2 = 2\phi_1 + 2p\pi$, $p \in \mathbf{Z}$ (Se figur 4.3)



Figur 4.3 Figuren viser en geometrisk fortolkning af ϕ_1 og ϕ_2

Dette lemma vil vi først bevise i næste afsnit.

Siden $\frac{|A_2-N|}{|A_2-N'|} = \rho_2/\rho_2' = k^2$, giver lemma 4.3.5 nu:

$$\begin{aligned}
 \frac{A_2 - N}{A_2 + N} &= \frac{\rho_2}{\rho_2'} \{ \cos(\theta_2 - \theta_2') + i \sin(\theta_2 - \theta_2') \} \\
 &= k^2 (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\
 &= k^2 (\cos 2\phi_1 + i \sin 2\phi_1)
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Derfor gælder det at:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{A_1 - N}{A_1 + N} \right)^2 &= \frac{A_2 - N}{A_2 + N} \\
 \Downarrow \\
 A_2 &= \frac{A_1^2 + N^2}{2A_1} = A_1 - \frac{A_1^2 - N^2}{2A_1}
 \end{aligned}$$

der svarer til Newtons metode for den kvadratiske ligning.

Cayley har således vist (under antagelse af at lemma 4.3.5 gælder), at den geometriske konstruktion er ækvivalent med Newtons metode på den kvadratiske ligning $z^2 - n^2 = 0$.

Vi kan nu afsløre Cayleys hovedsætning:

Sætning 4.3.7

Følgen z_1, z_2, \dots i Newtons metode på den kvadratiske ligning $z^2 - n^2 = 0$ vil nærme sig den rod, N eller N' , som z_1 ligger tættest på.

Bevis

Følgen af cirklerne C_k, C_{k^2}, \dots nærmer sig N (se figur 4.1), da $k < 1$. På tilsvarende måde vil følgen A_1, A_2, \dots derfor nærme sig N . For punkter på den venstre halvplan kan den tilsvarende konstruktion udføres med samme resultat. Da den geometriske konstruktion og Newtons metode er ækvivalente, er dette et bevis for sætningen. 4.3.7 \square

Dermed mangler vi kun at bevise lemma 4.3.5.

4.4 Bevis for lemma

Cayley forklarer ikke eksplicit, hvad han beviser, ligesom han heller ikke redegør klart for, hvordan han griber beviset an. Derfor er det følgende vores fortolkning af Cayleys bevis. Den første del af beviset er en gennemgang af nogle generelle egenskaber for tre punkter på en ret linie. Derefter kommer selve kernen i beviset.

Bevis for lemma 4.3.5

Cayley starter sit bevis med, at man uden tab af generalitet kan lade x -aksen være sammenfaldende med linien ON , og lade $|ON| = 1$. Han ser altså nu mere specifikt på ligningen $z^2 - 1 = 0$, der har løsningen ± 1 .

Det følger af ligning (4.3.4), side 27, at $\frac{(A_1-1)}{(A_1+1)}$ kan skrives som:

$$\frac{x+iy-1}{x+iy+1} = ke^{i\phi}, \quad (4.4.1)$$

hvor $x+iy = A_1$.

Da cirklen C_k er symmetrisk omkring x-aksen vil punktet A_1 spejlet i x-aksen også ligge på C_k . Derfor:

$$\frac{x-iy-1}{x-iy+1} = ke^{-i\phi} \quad (4.4.2)$$

Man kan nu definere to komplekse tal ud fra ligningerne ovenfor ved:

$$p = ke^{i\phi} \quad \text{og} \quad q = ke^{-i\phi} \quad (4.4.3)$$

Ved hjælp af ovenstående definitioner af p og q og ligningerne 4.4.1 og 4.4.2 gælder nu:

$$pq = k^2, \quad x+iy = \frac{1+p}{1-p} \quad \text{og} \quad x-iy = \frac{1+q}{1-q}$$

Antag at $(p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)$ er tre punkter i planen udtrykt i (p, q) -koordinater. En betingelse for at disse tre punkter ligger på en ret linie, er, at følgende er opfyldt:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1+p_1}{1-p_1} & \frac{1+q_1}{1-q_1} & 1 \\ \frac{1+p_2}{1-p_2} & \frac{1+q_2}{1-q_2} & 1 \\ \frac{1+p_3}{1-p_3} & \frac{1+q_3}{1-q_3} & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4.4)$$

idet, matricen er en omformning af det generelle tilfælde (Spiegel, 1968, Formel 10.10). Det er nu muligt via søjleoperationer at omforme denne determinant til:

$$\det \begin{pmatrix} p_1q_1 - 1 & p_1 - q_1 & p_1 + q_1 - 2 \\ p_2q_2 - 1 & p_2 - q_2 & p_2 + q_2 - 2 \\ p_3q_3 - 1 & p_3 - q_3 & p_3 + q_3 - 2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4.5)$$

Udtrykkes nu p_n og q_n ved den polære form fra ligning 4.4.3 fås:

$$\begin{aligned} p_1 &= le^{i\alpha}, & q_1 &= le^{-i\alpha} \\ p_2 &= me^{i\beta}, & q_2 &= me^{-i\beta} \\ p_3 &= ne^{i\gamma}, & q_3 &= ne^{-i\gamma} \end{aligned}$$

Indsættes dette i matricen i ligning (4.4.5), hvorefter de enkelte elementer omskrives v.h.a. $ke^{i\phi} = k(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$, og matricen reduceres og omformes, får man:

$$\det \begin{pmatrix} l^2 - 1 & l \sin \alpha & l \cos \alpha - 1 \\ m^2 - 1 & m \sin \beta & m \cos \beta - 1 \\ n^2 - 1 & n \sin \gamma & n \cos \gamma - 1 \end{pmatrix} = 0$$

dette kan omskrives til:

$$\det \begin{pmatrix} l^2 - 1 & l \sin \alpha & l \cos \alpha \\ m^2 - 1 & m \sin \beta & m \cos \beta \\ n^2 - 1 & n \sin \gamma & n \cos \gamma \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} l^2 - 1 & l \sin \alpha & 1 \\ m^2 - 1 & m \sin \beta & 1 \\ n^2 - 1 & n \sin \gamma & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Man kan nu (med en smule tålmodighed) finde denne determinant til:

$$(l^2 - 1)mn \sin(\beta - \gamma) + (m^2 - 1)nl \sin(\gamma - \alpha) + (n^2 - 1)lm \sin(\alpha - \beta) \\ + (m^2 - n^2)l \sin \alpha + (n^2 - l^2)m \sin \beta + (l^2 - m^2)n \sin \gamma = 0 \quad (4.4.6)$$

Indtil nu har Cayley blot gjort sig nogle generelle overvejelser over egenskaberne for tre punkter på en ret linie. Nu går han i krig med lemma 4.3.5 og udtrykker de tre punkter (dem fra den geometriske konstruktion) A_1, A_2, V_2 i (k, ϕ) -koordinater, således at:

$$\begin{aligned} A_1 &= (l, \alpha) = (k, \phi_1) \\ A_2 &= (m, \beta) = (k^2, \phi_2) \\ V_2 &= (n, \gamma) = (k^2, \pi), \text{ hvor } \pi \text{ er tallet } \pi \end{aligned}$$

Ved at indsætte dette i ligning (4.4.6) fås:

$$(k^2 - 1)k^4 \sin(\phi_2 - \pi) + (k^4 - 1)k^3 \sin(\pi - \phi_1) \\ + (k^4 - 1)k^3 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (k^4 - k^2)k^2 \sin(\phi_2) = 0, \quad (4.4.7)$$

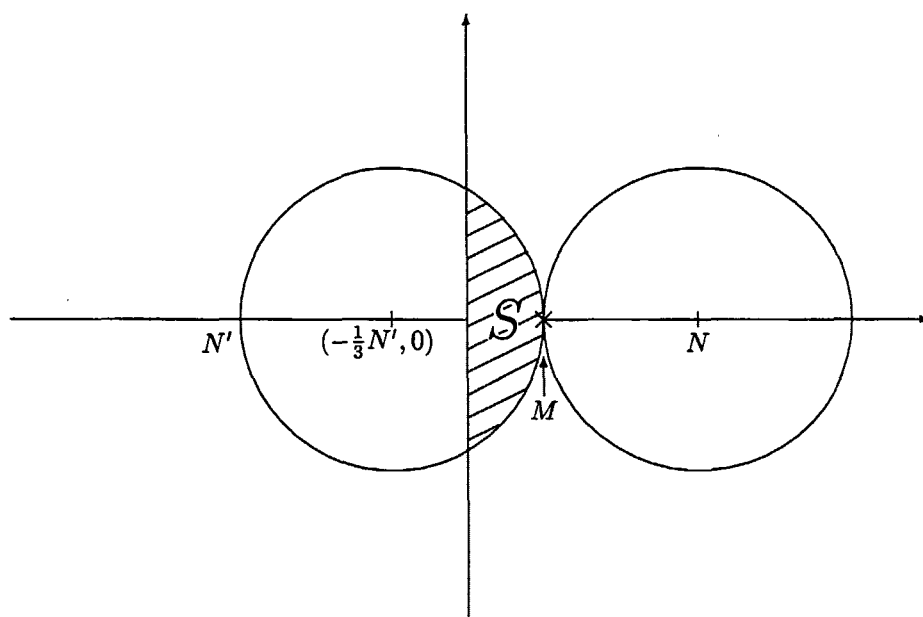
hvilket medfører at:

$$\phi_2 = 2\phi_1 + 2p\pi, \quad p \in \mathbf{Z}$$

Dermed er lemmaet bevist. □

4.5 Bassinernes opførsel

Cayley beskriver iterationsfølgenes egenskaber, og dennes afhængighed af valget af begyndelsepunkt. Lad nu N og N' repræsentere to punkter på 1.-aksen, der ligger symmetrisk om 2.-aksen. Cayley definerer nu punktet M , således at $|OM| = 1/3|ON|$. Derved kan han konstruere to cirkler: En med centrum i N og diameter $2|MN|$ og en med centrum på 1.-aksen og diameter $|N'M|$ (se figur 4.4). Disse to cirkler benævnes henholdsvis cirklen for uegnethed, og cirklen for egnethed. Det skraverede område (se figur 4.4) kalder Cayley tilsvarende for segmentet for uegnethed.



Figur 4.4 Figuren viser konstruktionen af cirklerne for egnethed og uegnethed, og segmentet for uegnethed

Cayley fremsætter følgende sætning:

Sætning 4.5.1

Lad A_1 være et led i følgen genereret ved Newtons metode og liggende i højre halvplan. Lad endvidere segmentet for uegnethed blive betegnet som S . Da vil det gælde at:

- Hvis $A_1 \in \text{int } S$, da vil $|A_2 - N| > |A_1 - N|$
- Hvis $A_1 \in \partial S$, da vil $|A_2 - N| = |A_1 - N|$
- Hvis $A_1 \notin \text{clo } S$, da vil $|A_2 - N| < |A_1 - N|$,

hvor N er roden i den højre halvplan.

Bevis

Først bevises den anden betingelse, og derefter kan de andre udledes analogt.

Lad A_1 have koordinaterne (x_1, y_1) , og lad $N = 1$. Da vil afstanden mellem A_1 og roden N blive udtrykt via Pythagoras:

$$|A_1 - N|^2 = (x_1 - 1)^2 + y_1^2 = (x_1 + iy_1 - 1)(x_1 - iy_1 - 1)$$

Udtrykkes dette i (p, q) -koordinater:

$$\begin{aligned} |A_1 - N|^2 &= \left(\frac{1+p_1}{1-p_1} - 1 \right) \left(\frac{1+q_1}{1-q_1} - 1 \right) \\ &= \frac{4p_1q_1}{(1-p_1)(1-q_1)} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Tilsvarende kan afstanden mellem A_2 og N udtrykkes:

$$|A_2 - N|^2 = \frac{4p_2q_2}{(1-p_2)(1-q_2)}$$

Ifølge lemma 4.3.5 vil $p_2 = p_1^2$ og $q_2 = q_1^2$, dvs.:

$$|A_2 - N|^2 = \frac{4p_1^2q_1^2}{(1-p_1^2)(1-q_1^2)} \quad (4.5.3)$$

Lad nu afstandene mellem A_1 , N og A_2 , N være ens. Da vil ligning (4.5.2) og ligning (4.5.3) være lig hinanden, altså:

$$\frac{4p_1q_1}{(1-p_1)(1-q_1)} = \frac{4p_1^2q_1^2}{(1-p_1^2)(1-q_1^2)} \quad (4.5.4)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} (1+p_1)(1+q_1) &= p_1q_1 \Rightarrow \\ p_1 + q_1 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Nu sættes nu $\xi = x_1 + iy_1$, og $\eta = x_1 - iy_1$, hvorved:

$$p_1 = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad \text{og} \quad q_1 = \frac{\eta - 1}{\eta + 1},$$

og ligning (4.5.4) kan da udtrykkes som:

$$\frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \frac{\eta - 1}{\eta + 1} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3\xi\eta + \xi + \eta - 1 = 0$$

Indsættes udtrykkende for ξ og η fås:

$$(x_1 + 1)(x_1 - \frac{1}{3}) + y_1^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + \frac{1}{3})^2 + y_1^2 = (\frac{2}{3})^2$$

Dette er cirklen med centrum i $(-1/3, 0)$ og radius $2/3$, som netop er cirklen for uegnethed. Det vil altså sige, at hvis $|A_1 - N| = |A_2 - N|$, da vil det være ensbetydende med, at A_1 ligger på cirklen for uegnethed (idet A_1 var udtrykt ved x_1 og y_1).

Man kan nu på tilsvarende måde vise at hvis $|A_1 - N| > |A_2 - N|$, da vil:

$$(x_1 + 1/3)^2 + y_1^2 > (\frac{2}{3})^2,$$

og A_1 ligger da udenfor S . Ligeledes hvis $|A_1 - N| < |A_2 - N|$ vil A_1 ligge i det indre af S . □

Cayley analyserer videre på følgens opførsel. Til dette definerer han følgende:

Definition 4.5.6

Et led i iterationen kaldes regulært, hvis $|A_1 - N| > |A_2 - N|$. Dvs. hvis det efterfølgende led i følgen ligger tættere på roden. Hele følgen kaldes regulær, såfremt det gælder, at alle led i følgen er regulære.

Hvis man lader C_E betegne cirklen for egnethed, vil det nu gælde at:

Sætning 4.5.7

Hvis $A_1 \in \text{clo } C_E$, vil iterationen være regulær. Dette er en tilstrækkelig, men ikke nødvendig betingelse.

Bevis

Ligger A_1 udenfor S gælder det iflg. sætning 4.5.1 at $|A_1 - N| > |A_2 - N|$. Ligger A_1 endvidere indenfor C_E , må A_2 nødvendigvis også ligge i C_E , og tættere på N . □

Cayley fremsætter flere sætninger, hvoraf vi vil medtage en enkelt. Vi vil ikke her gennemgå beviset men blot fremsætte resultatet:

Sætning 4.5.8

Hvis $A_1 \in \text{clo } S$, da vil $A_2 \notin \text{clo } S$

Dette er ikke ensbetydende med, at de efterfølgende led i følgen alle vil ligge udenfor S - hvis A_n ligger udenfor S kan A_{n+1} godt ligge i S .

4.6 Den kubiske ligning

Som vi netop har set, var Cayley i stand til at beskrive bassinerne for Newtoniteration på den kvadratiske ligning $f(z) = z^2 - 1$. Rustet med denne succes, kastede han nu blikket på det kubiske tilfælde $f(z) = z^3 - 1$. Om denne ligning siger han i sin artikel fra 1879:

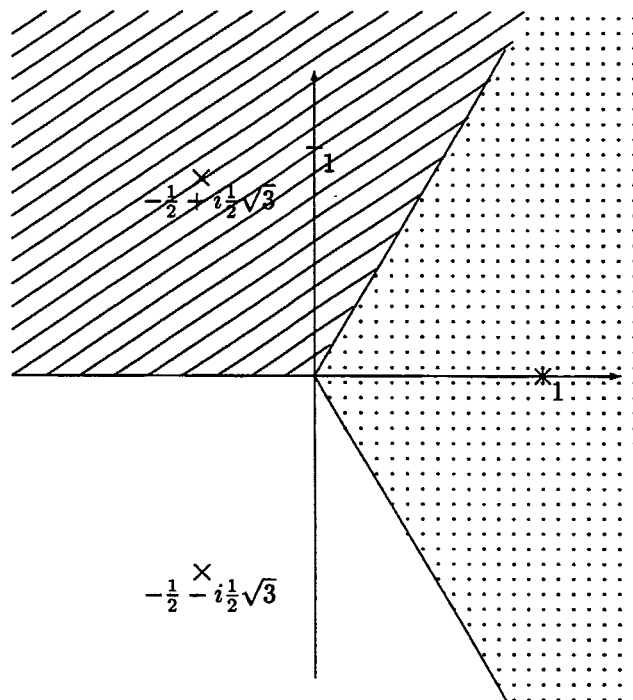
Løsningen er let og elegant i tilfældet med den kvadratiske ligning, men det efterfølgende tilfælde, den kubiske ligning, synes at forvolde anseelige vanskeligheder. (Cayley, 1879a)

Hvilke overvejelser Cayley gjorde sig i denne forbindelse, ved vi ikke - det fremgår ikke noget sted i hans artikler. Men som videnskabshistorikeren Alexander skriver (Alexander, 1994), er det ikke svært at forestille sig, hvilke problemer Cayley løb ind i, for som vi senere skal se, er grænsen mellem bassinerne en ekstremt kompliceret kurve.

Man kan med rimelighed forestille sig, at Cayley først har troet at planen bliver delt ind i tre "pæne" områder som vist i figur 4.5. Da har han formentlig også gjort sig den ulejlighed at prøve at iterere nogle udvalgte punkter i planen, men hvis han har valgt punkter på den negative del af den reelle akse, vil han hurtigt have kunnet konstatere, at figur 4.5 ikke holder. Punkterne her konvergerer nemlig mod den fjerneste rod, roden 1.

4.7 Afrunding

Som vi har set var Cayley i stand til at beskrive planens inddeling i bassiner ved Newtoniteration på den kvadratiske ligning. Hans bevis var - i modsætning til Schröders - et geometrisk bevis, der kan synes noget uelegant. Men ikke desto mindre var han i stand til at udtale sig om fremadskæret for et givet begyndelsespunkt - dvs. hvilken vej iterationsfølgen af et begyndelsespunkt følger ind mod fikspunktet. I modsætning til Schröder beskæftigede Cayley sig stort set ikke med forholdene på den imaginære akse. I sin 1890 artikel nævner han i forbifarten at man ikke kan sige noget om hvorledes punkterne opfører sig på den imaginære akse, men en dybere analyse af dette ellers interessante spørgsmål, der siden hen har optaget mange matematikere - giver han ikke. (Alexander, 1994)



Figur 4.5 Således kunne man forestille sig bassinerne for Newtons metode anvendt på $z^3 - 1 = 0$, dvs. for $N(z) = (2z^3 + 1)/(3z^2)$

Kapitel 5

Mellemliggende periode

I dette kapitel vil vi beskrive den matematiske udvikling, der har interesse for os i perioden 1880 til 1906. Vi vil lægge vægt på de forsøg, der blev gjort på at løse problemet med at dele planen passende op i konvergensområder. I ovennævnte periode var der ikke så mange, som direkte arbejdede med Cayleys problem, men flere der arbejdede med det generelle problem, nemlig iteration af rationelle funktioner. Der blev lagt et stort arbejde i, at forsøge at benytte funktionalligninger til at løse problemet med at dele planen op i konvergensområder. Som vi skal se, kom man rimeligt langt med løsningsteorier for disse.

Både Schröder og Cayley løste problemet for det kvadratiske tilfælde, men ikke generelt. Specielt Schröder gjorde sig overvejelser om en mere generel teori, via hans fikspunktsteorem. Denne teori er dog lokal, dvs. den udtaler sig ikke om hvilket bassin et vilkårligt punkt tilhører. Flere af de involverede personer havde da også et ønske om at generalisere deres lokale løsninger til globale løsninger.

5.1 Funktionalligninger

Størsteparten af det arbejde, der blev udført i perioden mellem ca 1880 og 1906, omhandler forskellige former for analyse af funktionalligninger. Specielt fik den såkaldte Schröderligning stor opmærksomhed:

$$F(\phi(z)) = hF(z)$$

Varianten til denne ligning:

$$F(\phi(z)) = \phi'(\xi)F(z), \quad (5.1.1)$$

hvor ξ er et fikspunkt, blev ligeledes grundigt analyseret.

Især Koenigs (1858-1931) bidrog med præcise resultater. Han beviste bl.a. den før omtalte fikspunktsætning (ligning (2.4.1), side 12). Med udgangspunkt i

denne sætning viste han bl.a., at der findes en løsningsform til ligning (5.1.1). Denne løsning udtrykker, at der i en omegn af et fikspunkt ξ findes en analytisk løsning til den specielle Schröder ligning (5.1.1), når $0 < |\phi'(\xi)| < 1$. Han viste også, at denne løsning gælder når $|\phi'(\xi)| > 1$.

Man kan uden tab af generalitet antage at fikspunktet er $\xi = 0$ (dette kan opnås ved skift af koordinatsystem), funktionalligningen (5.1.1) bliver så:

$$B(\phi(z)) = \phi'(0)B(z) \quad (5.1.2)$$

Koenigs løsning er defineret som

$$B(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n(z)}{(\phi'(0))^n} \quad (5.1.3)$$

Det ses, at (5.1.3) er en løsning til (5.1.2), hvilket følger af at:

$$\begin{aligned} B(\phi(z)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n(\phi(z))}{(\phi'(0))^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^{n+1}(z)}{(\phi'(0))^{n+1}} \phi'(0) \\ &= \phi'(0)B(z) \end{aligned}$$

Problemet er hermed reduceret til at vise, at $B(z)$ konvergerer mod en analytisk funktion i en omegn af 0.

Da Koenigs' resultater alle bygger på hans fikspunktsteori, er det klart, at de må blive lokale. Dette er dog ikke helt tilfredsstillende for Koenigs, som det ses af følgende citat (se også oversættelsen i appendiks C).

Hvis man betragter mængden af punkter i planen, der føres over i det indre af cirklen C_x og følgelig i punktet x , kan man udvide området, der omfattes af de generelle teoremer. Men man ved intet om det generelle i måden denne region er afgrænset på, og man kan ikke vise a priori, at afgrænsningsmåden ikke er af en natur, der begrænser denne udbredelse.

Vigtigheden i opdelingen af planen i områder af punkter, der føres over i grænsepunktet findes altså en gang med stor klarhed. Men man forstår hvilke vanskeligheder, der knytter sig til problemet, når man indser, at der generelt er en uendelighed af grænsecykler, da indekset hørende til disse grupper kan være vilkårligt stort. (Koenigs, 1884, Side 40)

Af dette ses det, at Koenigs var helt klar over de problemer, der kan være ved at forsøge at dele planen op i "pæne" konvergensområder. Han giver også en forklaring på, hvorfor det lykkedes Cayley at dele planen op i det kvadratiske tilfælde. Denne forklaring viser, at det er et ret specielt tilfælde, som Cayley har arbejdet med:

Hr. Cayley har som den første fremsat problemet i tilfældet med Newtons regel; men selv i tilfældet med et simpelt heltalspolynomium kan antallet af grænsecykler være uendeligt, og selvom problemet kan løses i tilfældet med en ligning med grad 2, hænger dette sammen med, at cyklerne af højere orden ikke er grænsecykler, og at cyklerne alle er på den rette linie, hvor punkterne har samme afstand til rodpunkterne, den rette linie, der, det ved man, deler planen i to områder, sådan at alle punkter i et område føres over i det grænsepunkt området indeholder. (Koenigs, 1884, Side40-41)

Det er måske værd at lægge mærke til, at Koenigs ikke kommenterer Schröders arbejde, men fremhæver Cayley som den første, der arbejder med Newtons metode virkende på et komplekst polynomium.

5.2 Topologi og Fatou's 1906 artikel

Det var først med Pierre Fatou's artikel fra 1906, at man virkelig så en metode, som, for en større klasse af komplekse funktioner, udtaler sig om hvordan alle punkter opfører sig under iteration. Fatous arbejde bygger på mængdelæren, hvilket er nyt.

På trods af at Georg Cantor (1845-1918) grundlagde den moderne mængdelære i 1870'erne, og at flere af hans artikler blev oversat til fransk og publiceret i "Acta Mathematica" i 1883, var det franske og tyske matematiske samfund lang tid om at adoptere disse nye tanker. En af de første, som virkelig tog mængdelæren til sig, var Camille Jordan (1832-1922). I hans "Cours d'analyse de l'École Polytechnique" udgivet i tre bind 1893-96 præsenterede han en del mængdelære. Han var med til at gøre bl.a. Henri Lebesgue (1875-1941) bekendt med forskellige notationer inden for mængdelæren. (Katz, 1998, side 732)(Alexander, 1994, 87)

Der var på den tid i Frankrig en konservativ fløj, som ikke brød sig om denne brug af topologi og mængdelære i analysen. Men da Fatou studerede på "École Normale", hvor disse nye tanker blev diskuteret, blev han draget mod dem, bl.a. gennem Lebesgues vejledning. (Alexander, 1994, side 87-88)

Fatou's artikel fra 1906 er den første, som, for en større klasse af funktioner, beskriver det, der senere skal komme til at blive kendt som Julia-mængden. (se også oversættelsen i appendiks D) (Alexander, 1994, side 85)

Artiklen beskæftiger sig med rationelle funktioner, $R(z)$, med grad større end én. Specielt løsning af

$$z - R(z) = 0 \tag{5.2.1}$$

behandles, svarende til at finde fikspunkter til $R(z)$. Artiklen bygger på Schröder-Koenigs fikspunktsætning, og Fatou citerer da også Koenigs. At Fatou er klar over problemerne med at opdele planen efter bassinerne, ses af følgende citat:

Men når man beskriver z ved hele den komplekse plan (\widehat{C}) [appendiks A], er opdelingen af konvergensområder for de enkelte rodpunkter til (5.2.1) generelt svær. Studiet af dette specielle tilfælde viser effektivt, at grænsen generelt er af kompliceret natur. (Fatou, 1906)

Fatou formulerer herefter løst en sætning bestående af en række antagelser og nogle egenskaber, der følger heraf, uden dog at bevise disse, (se appendiks D). Vi vil her gengive Fatou's tekst i en omskrevet og kommenteret form, der forhåbentlig er mere forståelig end originalen.

Lad $R(z)$ være en rationel brøk af grad $q \geq 2$ og $z_n = R(z_{n-1})$, dvs. z_n er den n -gange itererede. Antag at ζ er en rod i

$$z - R(z) = 0, \quad |R'(\zeta)| < 1 \quad (5.2.2)$$

hvilket betyder at ζ er et tiltrækkende fikspunkt for $R(z)$.

Ifølge den skærpede udgave af Schröder-Koenigs fikspunktsætning (2.4.1) eksisterer der derfor en cirkel $C : |z - \zeta| < r$, hvorom det gælder, at for $z \in C$ er

$$|z_1 - \zeta| < k|z - \zeta|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta, \quad k < 1$$

Fatou fortsætter med at antage, at ligning (5.2.2) kun har en rod, ζ , og at denne opfylder betingelsen $|R'(\zeta)| < 1$ og $\zeta \neq 0$. Sidstnævnte er formentlig blot en bevisteknisk indskrænkning. Derudover antages, at C er valgt tilstrækkelig stor til at indeholde alle kritiske punkter til $R(z)$'s inverse algebraiske funktion. Antag at $R(\infty) = 0$ - en betingelse der ifølge Fatou selv er overflødig - og antag at E_n er mængden af punkter z således, at for $z \in E_n$ gælder, at $|z| > r$, $|z_1| > r, \dots, |z_{n-1}| > r$, $|z_n| \geq r$. E_0 er således komplementærmængden til C og E_n er mængden af de punkter, der efter n iterationer ikke er blevet ført ind i C og samtidig originalmængden til E_{n-1} . I Fatou's original er E_n de punkter, der efter netop $n + 1$ iterationer føres over i C , men dette ses der normalt bort fra, da det ikke passer med de af Fatou selv opremsede egenskaber:

- $E_{n+1} \in E_n$
- E_n er mængden af indre punkter i q^n lukkede usammenhængende kurver, Γ_n
- Hver kurve Γ_n indeholder netop q kurver, Γ_{n+1}
- Hvis uligheden

$$|R'(z)| > A > 1$$

er opfyldt for punkterne i Γ_n for et givet n , vil man have at længden af enhver af kurverne går mod nul for n gående mod uendeligt.

- Mængden \mathcal{J} , grænsemængden for E_n for n gående mod uendelig, er en perfekt, totalt usammenhængende mængde

- $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, undtagen når $z \in \mathcal{J}$
- \mathcal{J} indeholder urbilleder og billeder for alle $z \in \mathcal{J}$, og \mathcal{J} indeholder alle periodiske punkter bortset fra nul

Fortolkningen af ovenstående er, at en ligning af den omtalte type, har den egenskab, at alle punkter i den komplekse plan (undtagen en totalt usammenhængende perfekt mængde) ved iteration med $R(z)$, vil blive ført over i nul. En totalt usammenhængende perfekt mængde er en mængde, svarende til en Cantormængde, hvor alle elementer er enkeltpunkter, men der i en vilkårlig lille omegn af et hvert punkt ligger et andet punkt (se appendiks A). Dette betyder således, at man ikke kan beskrive mængden af punkter, der ikke konvergerer, på en simpel måde.

At Fatou ikke giver et bevis for sætningen, kan skyldes, at artiklen er hentet i "Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences", der er et oversigtstidsskrift, som handler om alle mulige videnskaber. Vi har ikke fundet referencer til andre steder, hvor Fatou skulle have udgivet resultatet.

Fatou bruger bl.a. følgende klasse af funktioner som typisk eksempel på funktioner, som opfylder kriterierne for sætningen.

$$\phi_k(z) = \frac{z^k}{z^k + 2}$$

Eksemplet og metoden er inspireret af Fatous formulering, men er af Alexander 1994 blevet formuleret i et langt mere nutidigt og forståeligt sprog.

Betragt funktionen

$$\phi_2(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2}.$$

Man kan vise, at denne funktion har et unikt tiltrækkende fikspunkt i 0, og at alle punkter inden for enhedskuglen $K(0, 1)$ konvergerer mod 0 under iteration.

For alle punkter z på \widehat{C} som konvergerer, må det gælde, at der eksisterer et positivt tal N sådan, at for alle $n > N$ gælder det, at $\phi^n(z) \in K(0, 1)$. Tilsvarende for de punkter, som ikke konvergerer, eksisterer der ikke et $n \geq 0$, så at $\phi^n(z) \in K(0, 1)$.

Der findes altså en metode til at skelne punkter som konvergerer og punkter som ikke konvergerer. Dette udnyttes til at finde mængden af punkter, \mathcal{J} , der ikke konvergerer ved at finde alle de punkter, hvor $\phi^n(z) \notin K(0, 1) \forall n \geq 0$.

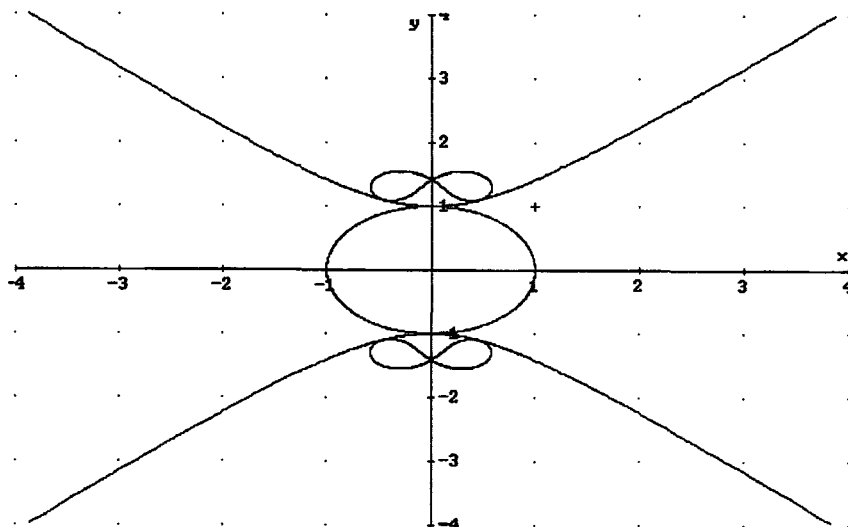
Lad os benævne komplementærmængden til enhedskuglen med E_0 , og lad E_n være originalmængden til E_{n-1} under $\phi_2(z)$

Påstanden er nu, at

$$\mathcal{J} = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

Man kan vise, at originalmængden til enhedscirklen bliver en hyperbel, Γ , grenene på denne hyperbel mødes i ∞ på \widehat{C} , og den kan derfor betragtes som en ottetalsformet figur på \widehat{C} . På grund af $\phi(z)$'s kontinuitet må det gælde, at originalmængden til E_0 er afslutningen af mængden af punkter inden i Γ . Da $\phi(z)$ er en "to til en" afbildning, har alle punkter på Γ to originalpunkter. Man kan vise, at originalmængden til Γ er to ottetalsfigurer γ_1 og γ_2 , en i hver gren af Γ . Mængden E_2 bliver så foreningsmængden af afslutningen af de indre punkter i γ_1 og γ_2 . Hver γ_i har selv to originalmængder, og mængden E_3 bliver altså afgrænset af fire ottetalsfigurer, og så fremdeles. Generelt er E_n for $n > 1$ afgrænset af 2^{n-1} ottetalsfigurer.

På figur 5.1 ses enhedscirklen, Γ og γ_1, γ_2



Figur 5.1 Enhedscirklen, dens originalbillede, og dettes originalbillede

Man kan vise, at diameteren af disse ottetalsformede figurer går mod nul, når n går mod uendeligt, og man kan vise, at \mathcal{J} er en totalt usammenhængende perfekt mængde.

Fatou's arbejde er tilsyneladende bygget stærkt på den antagelse, at der kun er ét tiltrækkende fikspunkt for $\phi(z)$, sætningen kan ikke generaliseres til mere generelle funktioner.

Dette ses også fra dette citat fra slutningen af artiklen.

Antag at der eksisterer adskillige grænsepunkter, man har altså konvergensområder separeret af kurver, generelt er disse kurver ikke analytiske. (Fatou, 1906)

5.3 Afslutning

Fatou skulle senere sammen med Julia få en meget stor indflydelse på udforskningen af denne gren af matematikken.

I denne periode blev der gjort mange forsøg på at løse problemerne med funktionalligninger, og mange af disse forsøg var ganske vellykkede. Udover Koenigs' arbejde er der en række matematikere, som har arbejdet med bl.a. Schröders funktionalligning, ligning (5.1). Man har fundet løsninger omkring mange forskellige typer af fikspunkter, men fælles for dette arbejde er, at det er lokale resultater. Man fornemmer specielt i Koenigs' arbejde, at han ikke er tilfreds med lokale resultater, og dette har øjensynligt været en generel tendens i det matematiske miljø på den tid. Dette mundede ud i, at det Franske videnskaberne akademi i 1918 udskrev en konkurrence, hvor formålet var at få en global beskrivelse af iterationen. Denne konkurrence var sandsynligvis med til at fremskynde fremkomsten af resultaterne, som vi skal se på i næste afsnit. I denne forbindelse blev Julia, Fatou og Montel alle præmieret, med Julia som den helt store vinder ifølge det Franske videnskaberne akademi. Selvom konkurrencen formentlig fremskyndede processen, var den mest betydende faktor sandsynligvis, at topologi og avanceret mængdelære var ved at blive en accepteret del af matematikken.

Kapitel 6

Julia & Fatou

I afsnit 5.2 viste vi, hvordan Fatou var i stand til at beskrive og skelne de punkter, der konvergerede, og dem, der ikke gjorde. Hans metode var noget forskellig fra metoderne Cayley og Schröder brugte, specielt anvendelsen af mængdelæren var ny. Det vil vise, sig at det var sådan en angrebsmetode, der skulle blive nøglen til problemets løsning. Imidlertid skulle først en anden definition benyttes, nemlig Montels normale familier.

Julia og Fatous' arbejde koncentrerede sig ikke om Newtons metode, men mere om generel iteration, og derved også en global beskrivelse af konvergensområderne.

6.1 Montels normale familier

I tidsrummet 1912 til 1916 færdiggjorde Paul Montel (1876-1975) sit arbejde omhandlende de af ham navngivne "normale familier", og som nævnt ovenfor skulle de spille en central rolle for den videre udvikling.

En familie af funktioner er et meget bredt begreb. Man kan faktisk vælge at samle alle mulige typer af funktioner i familier. I det følgende vil vi benytte familien af itererede funktioner, som vi definerer som følgende:

Definition 6.1.1

Lad $f(z)$ være en funktion, man kan da definere familien af itererede funktioner \mathfrak{F} som $\mathfrak{F} = \{f^n(z) | n \in \mathbf{N}\}$

I definitionen af normale familier benyttes begreberne: holomorfe og meromorfe funktioner. Lidt løst kan man definere dem som følgende: En funktion $f : D \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ defineret på et plant domæne D , er holomorf i D , hvis den første afledede f' eksisterer for ethvert punkt i D . En funktion $f : D \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$, er meromorf i D , hvis ethvert punkt i D , har en omegn, hvor f eller $\frac{1}{f}$ er holomorf. (Beardon, 1991)

Det skal bemærkes, at alle rationelle funktioner er meromorfe. (Palka, 1991, side 356)

Nu kan normale familier defineres som:

Definition 6.1.2 (Normale familier)

Lad U være en åben delmængde af $\hat{\mathbb{C}}$ og $\mathfrak{F} = \{f_i \mid i \in I\}$ en familie af meromorfe funktioner defineret på U , med værdier i $\hat{\mathbb{C}}$. Familien \mathfrak{F} er en normal familie, hvis enhver følge, f_n , af elementer fra \mathfrak{F} , indeholder en delfølge f_{n_j} , som er uniformt konvergent på enhver kompakt delmængde af U (Blanchard, 1984, side 89).

Med udgangspunkt i Montels arbejde kom både Fatou og Julia altså frem til en helt række meget generelle resultater angående iteration af rationelle funktioner.

6.2 Julia- og Fatou-mængder

Julia og Fatou studerede iterationen af rationelle afbildninger $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ med den antagelse at $\text{grad}(R) \geq 2$. Løst sagt lagde de deres fokus på at dele $\hat{\mathbb{C}}$ op i to adskilte og komplet invariante delmængder A . Den ene af mængderne kaldes idag Julia-mængden og betegnes her med $\mathcal{J}(R)$ eller \mathcal{J} , hvis funktionen fremgår af sammenhængen. Den anden mængde har forskellige navne, men kaldes ofte Fatou-mængden og betegnes her med $\mathcal{F}(R)$ eller \mathcal{F} . Måden man bestemmer om et givent punkt ligger i \mathcal{J} eller \mathcal{F} , er givet ved følgende definition:

Definition 6.2.1 (Julia- og Fatou-mængder)

Et punkt $z \in \hat{\mathbb{C}}$ er et element i Fatou-mængden $\mathcal{F}(R)$, hvis der eksisterer en omegn U af z i $\hat{\mathbb{C}}$ således, at familien af itererede $\{R^n|_U\}$ er en normal familie. Julia-mængden er komplementærmængden til Fatou-mængden. (Blanchard, 1984, side 90)

Man kan overbevise sig om, at denne definition har en helt klar sammenhæng med det generelle problem; nemlig at dele $\hat{\mathbb{C}}$ i den del som konvergerer, og den som ikke gør.

Det er da også almindeligt at definere Fatou-mængden som den delmængde af $\hat{\mathbb{C}}$, hvor punkterne under iteration med R konvergerer mod en tiltrækkende cykel, og Julia-mængden som den del, hvor punkterne via iteration med R ikke konvergerer mod en tiltrækkende cykel. Denne definition er dog ikke lige så præcis som definition 6.2.1, men det viser sig, at den er indeholdt i definition 6.2.1.

Rigtigheden af dette kan antydes med følgende eksempel

Eksempel 6.2.2

Sæt $R(z) = z^2$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Benyt nu denne funktion til iteration. $R(z)$ har to tiltrækkende fikspunkter 0 og ∞ . Det gælder da, at ethvert punkt uden for enhedscirklen vil konvergere mod ∞ , og at ethvert punkt inden for enhedscirklen

konvergerer mod 0, under iteration med R . Punkter på enhedscirklen konvergerer ikke mod nogen værdi. Sæt nu \mathcal{J} til mængden af punkter, som ikke konvergerer (altså punkterne på enhedscirklen), og \mathcal{F} til mængden af punkter, som konvergerer. Lad \mathfrak{F} være familien af itererede af R som defineret ovenfor (6.1.1).

Lad S være en delfølge af \mathfrak{F} , og z være et punkt i \mathcal{F} . Da alle punkter i \mathcal{F} konvergerer enten mod 0 eller ∞ , konvergerer S uniformt enten mod den konstante funktion $K(z) = 0$ eller $K(z) = \infty$ i en omegn af alle punkter af \mathcal{F} .

Tilsvarende lad $z \in \mathcal{J}$. Inden for enhver omegn af z er der punkter, som konvergerer mod 0 eller ∞ , og punkter, der ikke konvergerer. Derfor er en delfølge af \mathfrak{F} ikke uniformt konvergent i en omegn af z .

△

Med udgangspunkt i denne definition opbyggede henholdsvis Julia og Fatou uafhængigt af hinanden et stort teoriapparat. Vi vil ikke gå i detaljer med disse teorier, da det er et helt projekt for sig selv. Vi vil dog arbejde hen imod den af deres sætninger, som giver en del af svaret på vores problemformulering. Der er dog det problem, at det er utroligt svært at plukke en lille del af deres teori ud, og så kunne bevise de udplukkede sætninger uden den øvrige teori. Derfor vil vi undlade de fleste beviser, og kun forsøge at godtgøre deres rigtighed i det omfang, det er muligt.

Som udgangspunkt begynder vi med følgende sætning angående kritiske punkter:

Sætning 6.2.3

Antallet af kritiske punkter for en rationel funktion er højst $2d - 2$,

hvor d er graden af den rationelle funktion og et kritisk punkt for en rationel funktion er et punkt (z) , hvor $R'(z) = 0$. (Blanchard, 1984)

Den følgende sætning omhandler begrebet primærdomæne. Et primærdomæne er den komponent, der indeholder fikspunktet eller den periodiske sfære; hvor en komponent er det størst mulige sammenhængende konvergensområde for et fikspunkt eller en periodisk sfære.

Sætning 6.2.4

Primærdomænet for en tiltrækkende periodisk sfære indeholder mindst et kritisk punkt for funktionen $R(z)$, (Alexander, 1994, side 137)

Et korollar til denne sætning viser, at Koenings' frygt, for at antallet af tiltrækkende periodiske sfærer er uendeligt, var ubegrundet, idet det viste sig at:

Korollar 6.2.5

Antallet af tiltrækkende periodiske sfærer er højst $2d - 2$, hvor d er graden af $R(z)$,

Ifølge sætning 6.2.4 er der garanti for at der til hver tiltrækkende periodisk sfære er tilknyttet mindst et kritisk punkt, og dermed er antallet af tiltrækkende

periodiske sfærer begrænset opadtil ved antallet af kritiske punkter, hvoraf der højst er $2d - 2$.

Det er nu muligt at vise følgende sætning:

Sætning 6.2.6

En komplet invariant simpelt sammenhængende komponent A i \mathcal{F} har $d - 1$ kritiske punkter, talt med multiplisitet. A (Alexander, 1994, side 140)

Ud fra sætning 6.2.6 og sætning 6.2.3 kan man komme frem til følgende korollar:

Korollar 6.2.7

Fatou-mængden kan ikke indeholde mere end 2 forskellige komplet invariante, simpelt sammenhængende komponenter. (Blanchard, 1984, side 114)

Det sammenfatter, at hvis antallet af kritiske punkter er højst $2d - 2$, og et komplet invariant simpelt sammenhængende komponent har $d - 1$ kritiske punkter, kan Fatou-mængden maksimalt indeholde 2 sådanne komponenter. Dette korollar skal bruges til at forklare afsnittets hovedsætning sammen med sætning 6.2.9, der fremkommer bl.a. via følgende definition

Definition 6.2.8

Komponenter i \mathcal{F} , der konvergerer mod et fikspunkt ξ under iteration, men ikke indeholder ξ , kaldes preperiodiske. Det preperiodiske domæne er foreningsmængden af de komponenter i \mathcal{F} , som konvergerer mod tiltrækkende periodiske punkter, men ikke indeholder sådanne.

Denne definition bruges i nedenstående sætning, hvis bevis kort gennemgået, kan være udformet således: Lad A_ξ være det primære domæne for et tiltrækkende fikspunkt ξ . R er fremad invariant, dvs. $R(A_\xi) \subseteq A_\xi$. For at se at der ikke kan være én preperiodisk komponent til A_ξ , kan man antage, at der eksisterer en sådan komponent, A^* . Vælg $z^* \in A^*$, således at $R(z^*) = z \in A_\xi$. Da $R(z)$ er surjektiv, har z^* et Urbillede z^{**} , som må ligge i A^* , da $R(A_\xi) \subset A_\xi$. Da punktet $R(z^{**}) = z^*$ konvergerer mod ξ , gør z^{**} det også. Da både z^* og z^{**} ligger i A^* , kan man forbinde z^* og z^{**} med en kontinuert kurve γ . Da A_ξ og A^* er to forskellige komponenter, er deres fællesmængde tom. Yderligere er de adskilt af Julia-mængden. Da $R(z)$ er kontinuert, må $R(\gamma)$ være indeholdt enten i A_ξ eller A^* ; men dette kan ikke lade sig gøre, da $R(z^*) \in A_\xi$ og $R(z^{**}) \in A^*$. Hermed er opstået en modstrid, der kun kan løses, hvis der findes en anden preperiodisk komponent. Alle forudgående argumenter kan nu bruges på denne preperiodiske komponent, hvorved der må findes en tredje preperiodisk komponent osv.. Herved fås:

Sætning 6.2.9

Hvis der eksisterer mindst en komponent i \mathcal{F} , som er preperiodisk, så er der uendeligt mange preperiodiske komponenter. (Alexander, 1994, side 139)

Med henvisning til korollar 6.2.7 fås at Fatou-mængden højst indeholder 2 simpelt sammenhængende komplet invariante komponenter. Udtages 3 komponenter i \mathcal{F} er det ene af dem preperiodisk, da Fatou-mængden er simpelt sammenhængende. Denne preperiodiske komponent er ikke unik ifølge sætning 6.2.9, der også giver, at der er uendeligt mange preperiodiske komponenter. Heraf fås afsnittets hovedsætning:

Sætning 6.2.10

Hvis antallet af komponenter i \mathcal{F} er endeligt, er der højst 2. (Blanchard, 1984, side 114)

Denne sætning har stor betydning for muligheden for en simpel opdeling af $\widehat{\mathbb{C}}$ i konvergensområder. Hvis $\widehat{\mathbb{C}}$ indeholder mere end to tiltrækkende fikspunkter, vil $\widehat{\mathbb{C}}$ blive delt i uendelig mange områder.

6.3 Julia og Fatous arbejde med Cayleys problem.

Julia og Fatou har også direkte arbejdet med Cayleys problem, de har dog valgt en ret forskellig tilgang. Julia har først arbejdet med det kvadratiske tilfælde og derefter, ud fra hans generelle teorier, analyseret det kubiske problem (se oversættelse i appendiks E). Fatou har derimod lavet en mere direkte analyse af det kubiske problem (se oversættelse i appendiks F). Vi har valgt at gennemgå begge arbejder. Julias arbejde viser, hvad man kan få ud af den generelle teori, hvor Fatous arbejde er mere forståeligt uden brug af speciel teori.

6.3.1 Fatous arbejde

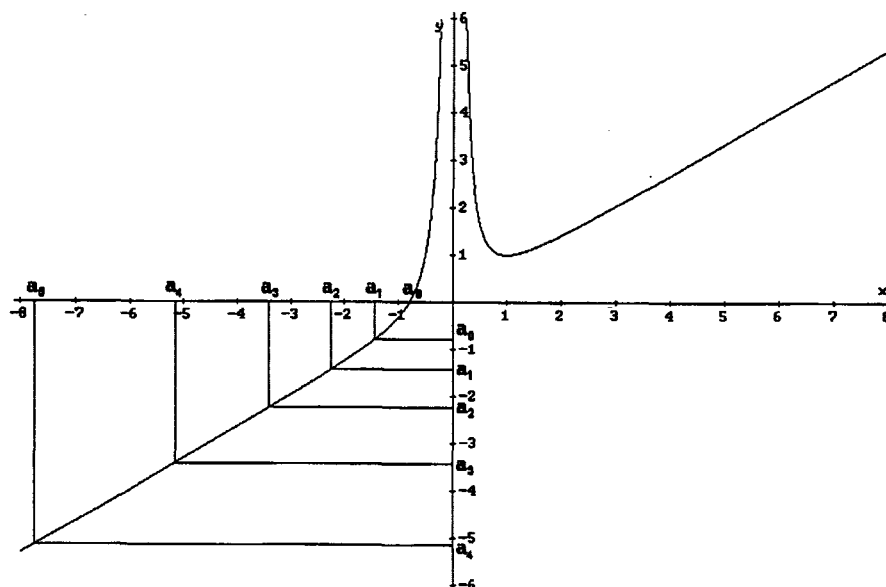
Fatou starter med at betragte funktionen

$$N(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2},$$

som fremkommer, når man benytter Newtons metode på $z^3 - 1 = 0$, hvor rødderne er givet ved: $-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ og 1.

Han bemærker, at $R^{-1}(z)$ har 4 kritiske punkter, et i hvert af de tre rødder og et i uendeligt. Han postulerer dernæst, at domænerne for tiltrækning til de tre rodpunkter er dannet af en uendelighed af enkeltvis sammenhængende dele, der er indbyrdes disjunkte. Ved følgende argumentation viser han, at dette specielt gælder på den reelle akse.

Bemærk at det åbne interval $(0, \infty)$ tilhører domænet til rodpunktet $z = 1$; dette interval har et urbillede, som ikke ligger i intervallet selv, dette ses f.eks. ved at betragte kurven $\gamma = \frac{2z^3+1}{3z^2}$, hvor $z \in (-\infty, \infty)$, (se figur 6.1). Intervallet $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ($(a_0, 0)$ på figuren) er urbillede til $(0, \infty)$ og dette interval har selv et



Figur 6.1 Kurven $\gamma = \frac{2z^3+1}{3z^2}$

urbillede beliggende på dets venstre side ($a_1, \frac{-1}{\sqrt{2}}$). Således fortsætter man med at konstruere intervaller, som er Urbilleder af det foregående. Længden af disse intervaller vil vokse.

Det gælder nu, at endepunkterne af intervallerne under iteration vil gå mod uendelig. De vil først gå mod 0, og da $R(0) = \infty$, går de altså mod ∞ .

Ved rotation omkring origo med $\frac{2\pi}{3}$ og $\frac{4\pi}{3}$ fås den samme egenskab for de andre bassiner. Alt i alt kan man altså vise, at der mindst er en uendelighed af randpunkter for de 3 bassiner, som konvergerer mod det frastødende fikspunkt $z = \infty$. Altså består Juliamængden af uendeligt mange punkter.

Han kan altså ikke konkludere noget om selve opdelingen af planen, men kun at man ikke kan beskrive Juliamængden simpelt, hvilket man jo kan for det kvadratiske tilfælde.

6.3.2 Julias arbejde

Julia bearbejder ikke blot den kubiske ligning, men også den kvadratiske, som vi kort vil gennemgå først (se oversættelse i appendiks E, Den kvadratiske og den kubiske ligning).

Lader man $f(z)$ have graden 2 og rødderne ζ_1 og ζ_2 , vil det gælde at:

$$\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \frac{1}{z_0 - \zeta_1} + \frac{1}{z_0 - \zeta_2}$$

og derved vil det også gælde at:

$$\frac{1}{z_0 - z_1} = \frac{1}{z_0 - \zeta_1} + \frac{1}{z_0 - \zeta_2},$$

hvor z_1 er det næste led i følgen. Man kan uden tab af generalitet antage, at $\zeta_1 = -\zeta_2$ og $\zeta_1 = 1$. For z_0 liggende på den imaginære akse, viser Julia, at z_1 ligeledes vil ligge på den imaginære akse. Hvis $z_0 = iy$ indsættes i ovenstående fås:

$$\frac{1}{iy - z_1} = \frac{1}{iy - 1} + \frac{1}{iy + 1} = \frac{2iy}{-y^2 - 1}$$

Det vil sige:

$$\frac{-y^2 - 1}{2iy} = iy - z_1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = -2iyz_1$$

Der vil på venstre side af ligningen findes et reelt tal, og hvis højresiden også skal være reel, må det gælde, at z_1 er imaginær, altså hvis z_0 er imaginær vil z_1 også være imaginær.

Julia viser ligeledes, at hvis z_0 befinder sig i højre halvplan, dvs. $\operatorname{Re}(z_0) > 0$, vil z_1 også befinde sig her. Lad igen $f(z) = z^2 - 1$, da vil Newtoniterationen kunne omskrives til følgende:

$$z_1 = \frac{z_0^2 + 1}{2z_0} = \frac{1}{2} \frac{z_0^2 + 1}{z_0} = \frac{1}{2} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) \quad (6.3.1)$$

For $\operatorname{Re}(z_0) > 0$ vil det gælde at $\operatorname{Re}(z_1) > 0$, og z_1 vil derfor også ligge i den højre halvplan. Julia afslutter sin behandling af det kvadratiske tilfælde med:

På den fælles grænse mellem de to områder, som er den fælles lodrette linie mellem ζ_1 og ζ_2 , er rodpunkterne til ligningerne, $z = N_P^n(z)$, $n = 1, 2, \dots, \infty$ for hvilke $|N_P'(z)| > 1$ (sættet \mathcal{J}), tætte overalt.

Han beviser ikke dette, men nævner det blot som en sidste del af sin behandling.

Efter det kvadratiske tilfælde behandler han det generelle tilfælde:

Hvis man vender tilbage til et generelt polynomium $f(z)$ af grad k har man set, at brøken

$$z_1 = N_P(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

giver adgang til grænsepunkterne med regulær konvergens, der giver de k forskellige rødder til $f(z) = 0$. (Julia, 1918, side 179)

Han skriver derefter

... Det følger, at mindst $(k - 1)$ af rødderne til $f(z)$ har et totalkonvergensområde dannet af en uendelighed af flader (Julia, 1918, side 179)

Og i det efterfølgende eksempel at:

Altså vil opdelingen af planen i områder, der hver indeholder en bestemt rod til $f(z) = 0$ generelt være et ufremkommeligt problem, eftersom mindst $(k - 1)$ rødder har et konvergensområde bestående af uendeligt mange flader, dette fører til en opdeling af planen i uendeligt mange områder. Der ser man grunden til Cayleys manglende succes med at anvende princippet på ligninger af grad ≥ 3 . (Julia, 1918, side 179)

Man kan komme til sammen konklusion som Julia, ved brug af sætning 6.2.10, nemlig at hvis man anvender Newtons metode på polynomier af grad ≥ 2 vil opdelingen af planen være ufremkommelig, da planen er opdelt i uendeligt mange konvergensområder.

Julias behandling af det generelle tilfælde er således en benyttelse af hele hans teori. Man ser, at man gennem henholdsvis Julias og Fatous teorier er i stand til at forstå, hvorfor løsningen af Cayleys problem er ufremkommeligt i det generelle tilfælde.

Kapitel 7

Diskussion

Cayley fokuserede direkte på, at løse det af ham formulerede problem, altså at opdele planen i konvergensområder for Newtons metode anvendt på et vilkårligt polynomie. Han opnåede dog kun at opdele planen for andengradspolynomier af typen $f(z) = z^2 - 1 = 0$, som dog lader sig generalisere til andengradspolynomier i almindelighed.

Cayley benytter en geometrisk udgave af Newtons metode, og gennem geometriske betragtninger kommer han frem til en løsning. Hans bevis bygger ikke på en generel teori, men er konstrueret præcis til dette formål. Hvis konvergensområderne for den kubiske ligning havde fordelt sig som på figur 4.5 (side 36), kan man forestille, sig at han ville have været i stand til at generalisere den geometriske metode, og dermed vise opdelingen for det kubiske tilfælde. Men da opdelingen jo ikke er så simpel, var det ikke muligt med Cayleys metode at løse det kubiske problem.

Schröders fokus var først på metoder til at finde rødder i polynomier, og senere på generel funktionalligningsteori. Resultaterne fra disse to områder brugte han til at finde konvergensområderne for $z^2 - 1 = 0$, som et eksempel på brugen af den udviklede teori for funktionalligninger.

Han interesserede sig også for, hvad der skete på imaginæraksen og fandt, at der eksisterede cykler på akse, og at resten af punkterne på imaginæraksen ville gennemløbe uendeligt mange værdier. Schröders interesse for de punkter, der ikke konvergerer, viste sig at være vejen til en mere generel løsning af problemet. På denne måde kan Schröder siges at have været forud for sin tid. Desværre blev denne del af Schröders arbejde overset, og det var således ikke hans arbejde, der inspirerede eftertiden.

Man kan ikke ud fra hans tekster se, om han rent faktisk forsøgte at løse problemet generelt, men hans metoder havde næppe tilladt en mere generel løsning.

Cayley og Schröder kom begge frem til, at planen bliver delt af den imaginære akse, højre halvplan er bassinet for $\zeta_1 = 1$ og venstre halvplan er bassin for $\zeta_2 = -1$. Den imaginære akse tilhører ingen af de to bassiner.

For at kunne forstå hvorfor det ikke kunne lade sig gøre at generalisere Schröder og Cayleys resultater, måtte mængdelæren og topologien anvendes i matematisk analyse. Denne udvikling tog tid, grundet en konservativ holdning i det meste af det franske og dele af det tyske matematiske miljø.

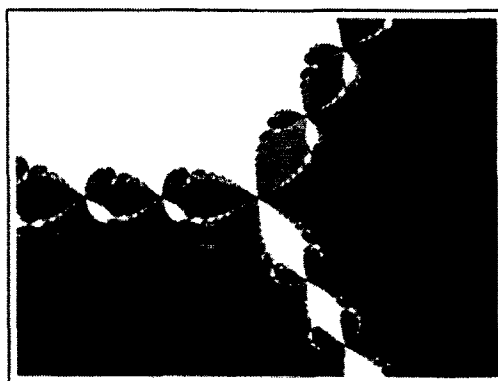
Der var dog, specielt ved "École Normale", en begyndende accept af disse tanker, der resulterede i, at Fatou blev inspireret til at benytte sig af avanceret mængdelære i sit arbejde. Det skulle vise sig, at det først var med færdiggørelsen af Montels teori om "normale familier" (1912 - 1916), at man fik et værktøj som kunne give generelle resultater.

Samtidig var der i det matematiske miljø et ønske om at få skabt generelle resultater angående iterative processer. Dette resulterede i at det Franske Videnskabernes Akademi (l'Académie des Sciences) i 1915 udskrev en konkurrence, hvor hovedprisen på 1000 franc tilfaldt den, der på en meningsfyldt måde kunne beskrive en given iteration globalt.

Julia og Fatou udviklede uafhængigt af hinanden, med Montels teori som en af de vigtigste faktorer, en generel teori omkring iteration af rationelle funktioner. Et af resultaterne er:

Antallet af disjunkte områder i hvilke \mathcal{J} deler planen kan kun være 1 eller 2, hvis ikke det er uendeligt. (Fatou, 1920, side 50)

Man kan således se, at der gælder væsentligt simple egenskaber for ligninger af grad mindre end 3 end af grad 3 eller større. For det kvadratiske tilfælde gælder det, at Fatou-mængden består af to disjunkte mængder og at Julia-mængden er en kontinuert linje. I det kubiske tilfælde er Fatou-mængden sammensat af uendeligt mange adskilte områder, og Julia-mængden er meget indviklet, som det fremgår af figur 7.1



Figur 7.1 Bassinerne for Newtons metode på $z^3 - 1$

Resultaterne for det kubiske tilfælde kan generaliseres til alle rationelle funktioner af grad større end 3.

Dette viser, at løsningen af det kvadratiske problem er et specialtilfælde af det generelle problem, og ikke, som man kunne forestille sig, det simpleste eksempel på det generelle problem.

Derfor er det klart, at Cayley og Schröder ikke var i stand til at generalisere deres resultater og metoder, men at der skulle et helt nyt teoriapparat til for at forstå Cayleys problem generelt.

Litteratur

Alexander, D. S. (1994). *A History of Complex Dynamics*, Aspects of Mathematics, Vol. E 24, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

Beardon, A. F. (1991). *Iteration of rational functions*, Graduate texts in mathematics, Vol. 132, Springer-Verlag.

Blanchard, P. (1984). Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, *Bulletin of the American Mathematical Society* 11(1): 85-141.

Cayley, A. (1879a). Application of the Newton-Fourier Method to an imaginary root of an equation., *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 16: 179-85 + fig.48-49.

Cayley, A. (1879b). The Newton-Fourier imaginary problem, *American journal of mathematics*. 2: 97.

Cayley, A. (1880). On the Newton-Fourier imaginary problem., *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 3: 231-232.

Fatou, P. (1906). Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles., *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* pp. 546-48.

Fatou, P. (1920). Sur les équations fonctionnelles., *Bulletin de la Société mathématique de France* pp. 33-94. Benyttet s. 89-90.

Julia, G. (1918). Sur l'iteration des fonctions rationnelles., *Journal de Mathématiques pures et appliquées* pp. 47-245. brugt s. 137-138,175-181.

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics*, 2. edn, Addison-Wesley Educational publishers, Inc., Reading, Massachusetts.

Koenigs, G. (1884). Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles., *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Serie 3* pp. 1-41. brugt s. 5-6, 40-41.

Palka, B. P. (1991). *An Introduction to Complex Function Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

Schröder, E. (1870). Ueber Unendlich Viele Algorithmen Zur Auflösung der Gleichungen, *Mathematische Annalen* **2**: 317–365.

Schröder, E. (1871). Ueber iterirte Functionen, *Mathematische Annalen* **3**: 296–322.

Spiegel, M. R. (1968). *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York.

Appendiks A

Definitioner og begreber

I rapporten er der en række begreber, der måske er fremmede for vores målgruppe, men som er vigtige for forståelsen. Dette appendiks er et forsøg på kort at definere disse begreber. Stoffet er primært hentet fra (Palka, 1991).

Riemannsfæren

Normalt giver det ikke umiddelbart mening at regne med uendelig, da hverken \mathbf{C} eller \mathbf{R} indeholder uendelig. For at kunne regne med uendelig og derved eksplicit udtrykke regneregler skal *Riemannsfæren* defineres, til tider benævnt det udvidede komplekse plan. Riemannsfæren kan kort udtrykkes som:

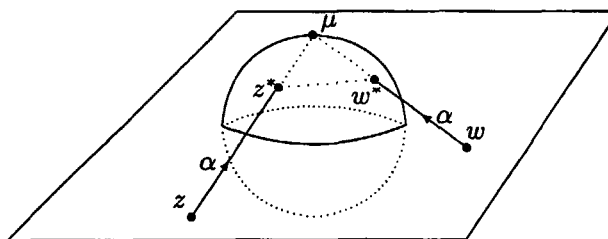
$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\},$$

dvs. foreningen mellem det komplekse plan og uendelig. For at kunne regne på $\widehat{\mathbf{C}}$, identificeres \mathbf{C} , det horisontale plan, ved:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_3 = 0\}$$

i \mathbf{R}^3 , og ud fra dette konstrueres $\widehat{\mathbf{C}}$ som en sfære: Lad S være sfæren i \mathbf{R}^3 med radius 1, og centrum i $(0,0,0)$. Lad yderligere μ beskrive punktet $(0,0,1)$. Nu projekteres ethvert punkt z i \mathbf{C} lineært mod (eller væk fra) μ indtil det rammer S i punktet z^* , forskelligt fra μ . Afbildningen $\alpha : z \rightarrow z^*$ kaldes en stereografisk projektion af \mathbf{C} på S . Herved fås, at hvis $|z|$ er stor, så vil z^* ligge tæt på μ , og ud fra dette defineres projektionen $\alpha(\infty)$ til at være μ . Med denne definition er α en bijektiv afbildning fra $\widehat{\mathbf{C}}$ til S , og ud fra dette kaldes $\widehat{\mathbf{C}}$ den komplekse sfære eller Riemannsfæren (se figur A.1).

Nu bruges bijektionen α af $\widehat{\mathbf{C}}$ på S til at sende den Euclidiske metrik fra S , til en anden metrik σ på $\widehat{\mathbf{C}}$, hvilket betyder at σ er defineret ved ligningen:



Figur A.1 Figuren viser Riemannsfæren S og projektionen α

$$\sigma(z, w) = |\alpha(z) - \alpha(w)| = |z^* - w^*|,$$

hvilket generelt giver:

$$\sigma(z, w) = \frac{2|z - w|}{(1 + |z|^2)^{1/2}(1 + |w|^2)^{1/2}},$$

hvor $\sigma(z, w)$ er længden af linien mellem z^* og w^* . σ kaldes "chordal"-metrik på $\hat{\mathbb{C}}$.

Det udvidede komplekse plan gør det altså muligt at udtrykke regneregler, hvor uendelig indgår:

$$\begin{aligned} \infty \pm z &= z \pm \infty = \infty & \text{for } z \in \mathbb{C} \\ \infty \cdot z &= z \cdot \infty = \infty & \text{for } z \in \hat{\mathbb{C}}/\{0\} \\ \frac{z}{\infty} &= 0 & \text{for } z \in \mathbb{C} \\ \frac{z}{0} &= \infty & \text{for } z \in \hat{\mathbb{C}}/\{0\} \end{aligned}$$

Det skal nævnes, at det stadigvæk ikke kan tillægges nogen mening f.eks. at addere ∞ med sig selv, ligesom $\frac{\infty}{\infty}$ og $0 \cdot \infty$ heller ikke vil give mening.

Topologiske notationer

Følgende er en kort opridsning af de topologiske definitioner, vi benytter i rapporten:

Definition 1 (Simpelt sammenhængende mængder)

Lad D være en mængde i den komplekse plan \mathbb{C} . D kaldes simpelt sammenhængende hvis omkredsen af en hvilken som helst lukket kurve γ kan formindskes kontinuert til et punkt uden på noget tidspunkt at forlade D .

Lidt løst sagt betyder simpelt sammenhængende, at mængden ikke indeholder "huller". Vi benytter ligeledes følgende begreb:

Definition 2 (Perfekt, totalt usammenhængende mængde)

- To mængder er usammenhængende, hvis A og B er ikke-tomme mængder og $A \cap B = \emptyset$
- En total usammenhængende mængde, er en mængde, hvor det for et hvert punkt i mængden gælder, at sammenhængskomponenten for punktet kun består af punktet selv. Sammenhængskomponenten for et punkt er den største sammenhængende delmængde af mængden, som indeholder punktet selv.
- En mængde er perfekt, hvis det gælder at der i enhver omegn af et punkt z_0 tilhørende mængden, eksisterer et andet punkt fra mængden.

dvs. en perfekt, totalt usammenhængende mængde er en mængde, der består af enkeltpunkter, der ligger vilkårligt tæt på hinanden. Et eksempel på en perfekt, totalt usammenhængende mængde i \mathbb{R}^1 er Cantormængden.

Invarians

Invarians defineres som følgende:

Definition 3

Lad f være en afbildning fra X ind i sig selv. En delmængde $U \subset X$ er fremad invariant når $f(U) \subseteq U$, baglæns invariant når $f^{-1}(U) \subseteq U$ og komplet invariant når $f(U) = U = f^{-1}(U)$.

Appendiks B

Cayleys artikel fra 1879

Dette er en oversættelse af Cayleys artikel, som originalt er publiceret under titlen "The Newton-Fourier Imaginary Problem." i 1879, i "American Journal of Mathematics, II, s. 97"

Det Newton-Fourierske komplekse problem

Newtons metode, som færdiggjort af Fourier, eller sagt som Newton-Fourier metoden, til løsning af en numerisk ligning ved successive approksimationer, relaterer til en ligning $f(x) = 0$, med reelle koefficienter og til bestemmelsen af en bestemt rod a deraf, v.h.a. en antaget approksimeret reel værdi ξ , der tilfredsstiller foreskrevne betingelser: Derefter udregner vi ud fra ξ , en tættere approksimeret værdi ξ_1 ved formlen $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$, og derfra på samme måde $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ approksimationerne tættere og tættere på den krævede rod a .

I forbindelse hermed, ved at smide restriktionen til \mathbf{R} væk, har vi hvad jeg kalder det Newton-Fourierske komplekse problem, der følger.

Tag $f(u)$, en given rationel og integral funktion af u , med reelle eller komplekse koefficienter; tag ξ , en given reel eller kompleks værdi og udregn herfra ξ_1 ved formlen $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$, og heraf $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, hver fra den foregående ved samme formel.

En givet kompleks størrelse $x + iy$ kan repræsenteres ved et punkt med koordinaterne (x, y) : rødderne til ligningen er på denne måde repræsenteret ved givne punkter A, B, C, \dots , og værdierne ξ, ξ_1, ξ_2, \dots ved punkterne P, P_1, P_2, \dots , hvor den første værdi antages efter behag, og hvert af de andre fra det foregående ved en given geometrisk konstruktion. Problemet er at bestemme områderne af planen, således at vælges P hvor som helst i et område, ender vi til sidst ved punktet A , hvor som helst i et andet område ved punktet B og således for flere punkter, der repræsenterer rødderne til ligningen.

Løsningen er let og elegant i tilfældet med den kvadratiske ligning, men det efterfølgende tilfælde, den kubiske ligning, synes at forvolde anseelige vanskeligheder.

Appendiks C

Koenigs' artikel fra 1884

Dette er en oversættelse af Koenigs side 5-7 samt 40-41. Artiklen er originalt publiceret med titlen "Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles", i "Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Series 3, 1, 1884, s1-41" Første del er Koenigs' formulering af fikspunktsætningen, anden del er nogle afsluttende og perspektiverende bemærkninger.

Fikspunktsætningen

Følgen af størrelserne $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots$ siges at konvergere regulært mod en grænse x , når det er muligt for alle positive tal ε , så små som man ønsker det, at få kendskab til et N_ε , der er stort nok til, at man har $\text{mod}(\alpha_p - x) < \varepsilon$ under den eneste betingelse at $p \geq N_\varepsilon$

Når serien ikke har denne egenskab, men følgen, som man har udledt deraf ved at tage hvert k 'te element, har denne egenskab, definerer jeg, at den oprindelige følge konvergerer periodisk, og at k er perioden.

Antag at en funktion $\varphi(z)$ er uniform i hele det indre af et område, R , i planen og besidder den egenskab, at hvis z er i det indre af dette område, vil $z_1 = \varphi(z)$ også ligge i det indre af området; hvis vi generelt fastsætter $\varphi(z_i) = z_{i+1}$ er punkterne i følgen

$$z, z_1, z_2, z_3, \dots, z_p, \dots$$

alle i det indre af området R .

Da denne følge konvergerer regulært mod en grænse x , som ikke er et essentielt punkt for $\varphi(z)$, ved man, at x er en nulværdi for funktionen $z - \varphi(z)$, som bør verificere uligheden $\text{mod}\varphi'(x) < 1$.

Omvendt, antag at x er en nulværdi for funktionen $z - \varphi(z)$ som verificerer uligheden $\text{mod}\varphi'(x) < 1$: så har jeg vist, at punktet x er centrum i cirklen C_x , i hvis indre $\varphi(z)$ er holomorf og $\frac{\varphi(z)-x}{z-x}$ er numerisk mindre end 1, endda strengt mindre end $H = 1 - \delta$, $\delta > 0$.

Man kalder H en omfattende kvantitet mellem 0 og 1, og man kan sætte

$$\operatorname{mod} \frac{\varphi(z) - x}{z - x} < H \quad \text{eller} \quad \operatorname{mod} \frac{z_1 - x}{z - x} < H < 1.$$

Punkterne $z, z_1, z_2, \dots, z_p, \dots$ nærmer sig altså uophørligt punktet x , efterhånden som indekset øges, og eftersom alle disse punkter er i det indre af cirklen C_x , kan vi sætte

$$\operatorname{mod} \frac{\varphi(z) - x}{z - x} < H \quad \text{eller} \quad \operatorname{mod} \frac{\varphi(z_1) - x}{z_1 - x} < H, \dots \operatorname{mod} \frac{\varphi(z_{p_1}) - x}{z_{p_1} - x} < H;$$

man udleder så

$$\operatorname{mod}(z_p - x) < H^p \cdot \operatorname{mod}(z - x) < H^p r,$$

hvor r er radius i cirklen C_x .

Men nu er ε en positiv kvantitet og så lille som man ønsker det. Antag

$$N_\varepsilon = \text{heltal af } \frac{\log \frac{r}{H\varepsilon}}{\log \frac{1}{H}},$$

det er tilstrækkeligt at have $p \geq N_\varepsilon$, for at $\operatorname{mod}(z_p - x)$ vil være mindre end ε , dette beviser den regulære konvergens af følgen z, z_1, z_2, \dots

Afsluttende bemærkninger

I den generelle teori forlader vi ikke cirklen C_x ; i dette sidste eksempel viser vi dog, i særlige tilfælde, at det er muligt at forlade den, og at man i stedet for den har et større område. Antag at et punkt z i planen føres over i punktet x ; z bliver ført over i et punkt z_k inden for cirklen C_x efter et endeligt antal iterationer. Hvis punktet z_k ikke er, som jeg antog det, et essentielt punkt for funktionen $\varphi_k(z)$, eksisterer der omkring z et kontinuert område af punkter, der føres fuldstændigt over i det indre af cirklen C_x efter k iterationer. Hvis man erstatter dette i alle de foregående teoremer, fås at den største værdi h for punkterne i cirklen C_x i forhold til en koncentriske cirkel Γ , med denne største værdi bliver k større, bliver teoremerne anvendelige på området der omgiver punktet z [Oversættelsen af foregående sætning er uklar, da vi ikke forstå den franske original].

Mere generelt, antag at U er et område i planen, det er tilstrækkeligt, at alle punkterne føres over i cirklen C_x for at ende i punktet x efter et endelig antal iterationer.

Hvis man kalder den største afstand mellem C_x og punkterne i U for k , er det tilstrækkeligt at udvide h med k , for at alle teoremerne kan anvendes på området U .

Hvis man betragter mængden af punkter i planen, der føres over i det indre af cirklen C_x og følgelig i punktet x , kan man udvide området, der omfattes af de generelle teoremer. Men man ved intet, om det generelle i måden denne region er afgrænset på, og man kan ikke vise a priori, at afgrænsningsmåden ikke er af en natur, der begrænser denne udbredelse.

Vigtigheden i opdelingen af planen i områder af punkter, der føres over i grænsepunktet, findes altså én gang med stor klarhed. Men man forstår hvilke vanskeligheder, der knytter sig til problemet, når man indser, at der generelt er en uendelighed af grænsecykler, da indekset hørende til disse grupper kan være vilkårligt stort.

Hr. Cayley har som den første fremsat problemet i tilfældet med Newtons regel; men selv i tilfældet med et simpelt heltals-polynomium kan antallet af grænsecykler være uendeligt, og selvom problemet kan løses i tilfældet med en ligning med grad 2, hænger dette sammen med, at cyklerne af højere orden ikke er grænsecykler, og at cyklerne alle er på den rette linie, hvor punkterne har samme afstand til rodpunkterne, den rette linie, der, det ved man, deler planen i to områder, sådan at alle punkter i et område føres over i det grænsepunkt området indeholder.

Appendiks D

Fatous note fra 1906

Dette er en oversættelse af Fatous artikel med titlen "Sur les solution uniformes de certaines équations fonctionnelles." fra 1906. Artiklen er originalt publiceret i "Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, 142, 1906, 546-48"

Om uniforme løsninger af særlige ligninger

Lad os antage at $\theta(u)$ er en rationel brøk af grad $q > 1$; sæt $u_1 = \theta(u)$, $u_n = \theta(u_{n-1})$, og antag at α er rod i

$$u - \theta(u) = 0 \quad [|\theta'(\alpha)| < 1] \quad (1)$$

Der eksisterer altså en kugle $C : |u - \alpha| = r$, således at, for u indeholdt i C , har man:

$$|u_1 - \alpha| < k|u - \alpha|, \quad \lim u_n = \alpha \quad , (k < 1)$$

Hvis derimod $|\theta'(\alpha)| > 1$ kan u_n ikke gå i retning af α (ref: Cf. Koenigs, sur les equations fonctionnelles, Comptes rendu, dec 1884) [Det er Fatou, der henviser til Koenigs artikel (Koenigs, 1884)]. Men når man beskriver u ved hele den komplekse plan [Vi tolker dette som Riemannsfæren], er opdelingen af konvergensområder for de enkelte rodpunkter til (1) generelt svær. Studiet af dette specielle tilfælde viser effektivt, at grænsen generelt er af kompliceret natur.

I

Antag at ligning (1) har én enkelt rod, der opfylder betingelsen $|\theta'(\alpha)| < 1$, hvor $\alpha = 0$. Antag at C er valgt tilstrækkeligt stor til, i sit indre, at indeholde alle de kritiske punkter til $\theta(u)$'s inverse algebraiske funktion.

Antag desuden (godt at det er unødvendigt) at $\theta(u)$ er nul i uendeligt. Lad os antage, at E_n er mængden af punkter u , således at man har

$$|u| > r, |u_1| > r, \dots, |u_{n-1}| > r, |u_n| \geq r, |u_{n+1}| < r, \dots,$$

E_{n+1} er indeholdt i E_n , E_n er mængden af indre punkter i q^n lukkede disjunkte kurver, Γ_n : Hver kurve Γ_n indeholder det samme antal, q , af kurverne Γ_{n+1} . Hvis uligheden

$$|\theta'(u)| > A > 1$$

er opfyldt for punkterne i Γ_n fra en bestemt "plads" (n), vil man specielt have, at længden af hver af kurverne går mod nul. Mængden E , grænse for E_n , er altså en *perfekt, absolut diskontinuert mængde*; u_n går mod nul, undtagen når initialpunktet tilhører E . [Følgende står som fodnote i originalen: Det er klart, at E indeholder Urbilleder og billeder for alle dens punkter; i øvrigt indeholder E naturligvis alle de periodiske punkter bortset fra nul.]

Dette gælder for $\theta(u) = \frac{u^2}{u^2+2}, \frac{u^3}{u^3+2}, \frac{u^m}{u^m+2}, \dots$ ($m > 2$). For alle brøkerne $\theta(u)$ giver funktionalligningerne

$$\begin{aligned} F[\theta(u)] &= F(u) + u, \\ F[\theta(u)] &= \theta'(0)F(u) \quad [\text{hvor } \theta'(0) \neq 0] \end{aligned}$$

og nogle andre (tilhørende den type af ligninger Koenigs studerede) adgang til de regulære løsninger for $u = 0$, uniforme i hele planen, og meromorfe undtagen i punkterne i en perfekt disjunkt mængde.

Ligningen

$$F[\theta(u)] = cF(u),$$

c er en vilkårlig konstant, har også de uniforme løsninger (uden undtagelse), men med et essentielt punkt i origo.

Betragt, som afbildning, følgende algoritme, antag a og b er to vilkårlige tal; sæt

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a+b}{2}, & b_1 &= \frac{a^2+b^2}{a+b} \\ a_2 &= \frac{a_1+b_1}{2}, & b_2 &= \frac{a_1^2+b_1^2}{a_1+b_1} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \quad (2)$$

Studiet af konvergens af a_n, b_n reduceres til det tilfælde, hvor u_n er givet ved ligningen $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n^2+2}$. Man finder altså, at a_n og b_n altid går mod den samme grænse: $M(a, b) = \tilde{M}(b, a)$.

Hvis man sætter $M(r, z) = \varphi(z)$, opfylder funktionen φ funktionalligningerne

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z\varphi\left(\frac{1}{z}\right), \\ \varphi(z) &= \frac{1+z}{2}\varphi\left[\frac{2(1+z^2)}{(1+z)^2}\right]. \end{aligned}$$

Denne funktion er holomorf i origo og på halvplanen $R(z) > 0$. Den har som singulariteter en uendelighed af usammenhængende poler, og grænsepunkter for disse poler, som former en diskontinuert mængde E . I en omegn af punkterne i E er $\varphi(z)$ fuldstændig ubestemmelig.

II

Antag at der eksisterer adskillige grænsepunkter, man har altså konvergensområder separeret af kurver, generelt er disse kurver ikke analytiske.

For at sikre sig er det tilstrækkeligt at finde et simpelt eksempel $\theta(u) = \frac{u^2+u}{2}$. Man kan demonstrere, at u_n går mod nul eller mod uendeligt i to områder separeret af en kurve Γ , symmetrisk i forhold til den reelle akse og besiddende den simple rationelle transformation, der giver $U = \frac{u+u^2}{2}$. Γ vil antages at have en ligning af formen

$$\bar{u} = \varphi(u) \quad (u = x + iy, (\bar{u}) = x - iy),$$

hvor φ er analytisk. Overvejelser omkring de to ligninger

$$\begin{aligned} \varphi[\theta(u)] &= \theta[\varphi(u)], \\ \varphi[\varphi(u)] &= u, \end{aligned}$$

som φ burde kunne opfylde, tillader at demonstrere, at den (φ) fører til en modstrid. [Følgende står som fodnote i originalen: ræsonnementet kan desuden anvendes på mere generelle tilfælde]

De tidligere betragtede funktionalligninger vil, for dette valg af funktionen θ , have uniforme løsninger, for hvilke Γ er en grænse.

De enkelte funktionalligninger, fører til at introducere de uniforme transcendenter [transcendente funktioner], der indeholder de perfekte diskontinuerte mængder af singulariteter, eller de ikke-analytiske grænser. Man har i øvrigt, at de analoge kendsgerninger viser sig allerede i teorien om automorfe funktioner.

Appendiks E

Julias artikel fra 1918

Dette er en oversættelse af dele af Julias artikel, der originalt er publiceret med titlen "Sur l'iteration des fonctions rationnelles" i "Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, s.47-245, 1918". Her er medtaget side 137-138, Julias vigtige konklusion, samt side 177-181, der drejer sig om det kvadratiske og det kubiske tilfælde.

Julias vigtige konklusion.

54. Vigtig konklusion. For en vilkårlig rationel brøk $\varphi(z)$ er antallet af grænsepunkter med regulær konvergens og grænsecykler endeligt.

Det er klart, at hvert grænsepunkt med regulær konvergens, for at være et unikt grænsepunkt for de foregående led, må have mindst et punkt, hvor $\varphi'(z) = 0$, og de p punkter i en grænsecykel må også have mindst et punkt, hvor $\varphi'(z) = 0$ for at være grænsecykel for de foregående led. Antallet af grænsepunkter med regulær konvergens + antallet af grænsecykler overskrider aldrig antallet af punkter, hvor $\varphi'(z) = 0$. Dette antal, hvor $\varphi(z)$ har grad k , overstiger aldrig $2(k - 1)$, men er normalt lig med.

Jeg minder om fundamentalteoremet, der kræver at et punkt, hvor $\varphi'(z) = 0$, at urbillederne konvergerer uniformt mod punkterne i en grænsegruppe. Dette er også korrekt, hvis $\varphi(z)$ er en transcendent funktion. Men konklusionen, som følger af det udledte, strækker sig ikke til alle transcendente funktioner $\varphi(z)$, for det gælder generelt, at en transcendent funktion af denne type kan have en uendelighed af punkter, hvor $\varphi'(z) = 0$.

Altså findes en tvivl omkring grænsecyklerne. Hr. Koenigs siger da også i paragraf 34 i sin Mémoire, *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles* publiceret på *Annales de l'École normale supérieure* i 1884 (side 401 i supplementet)[(Koenigs, 1884, side 40)]

Vigtigheden i opdelingen af planen i områder af punkter, der føres over i grænsepunktet, findes altså én gang med stor klarhed. Men man forstår hvilke vanskeligheder, der knytter sig til problemet, når man indser, at der generelt er en uendelighed af grænsecykler, da indekset hørende til disse grupper kan være vilkårligt stort.

Hr. Cayley har som den første fremsat problemet i tilfældet med Newtons regel; men selv i tilfældet med et simpelt heltalspolynomium kan antallet af grænsecykler være uendeligt ...

Denne sidste udtalelse står ikke ved magt længere, da alle heltalspolynomier har et *endeligt* antal grænsecykler. Vi vender senere tilbage til anvendelsen af Newtons regel, hvor vi vil se helt nye og interessante omstændigheder komme til syne, når ligningen, der underkastes reglen, passerer graden 2.

Den kvadratiske og den kubiske ligning

60. a. Betragt først det simple tilfælde, hvor $f(z)$ har grad 2. Hvis man bestemmer $f(z)$ ved dens rødder ζ_1 og ζ_2 , er rødderne også de to eneste kritiske punkter for den inverse til $z_1 = \varphi(z)$. I dette tilfælde er der 2 grænsepunkter med regulær konvergens (da $f''(z) = \text{konstant}$). Man har altså det simple tilfælde, behandlet i del 3^o (side 140 i denne *mémoire*). Planen deler sig altså i to områder R_1 og R_2 , der skilles af en ubrudt linie. Hvert af disse områder indeholder et af grænsepunkterne, hvilket gør det til et totalkonvergensområde (R_1 indeholder ζ_1 og R_2 indeholder ζ_2).

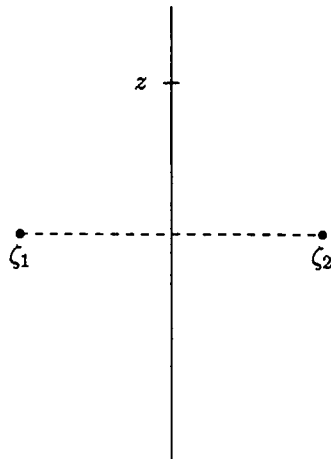
For at se alle disse resultater, vil det være nok at genkalde sig, at man har

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2},$$

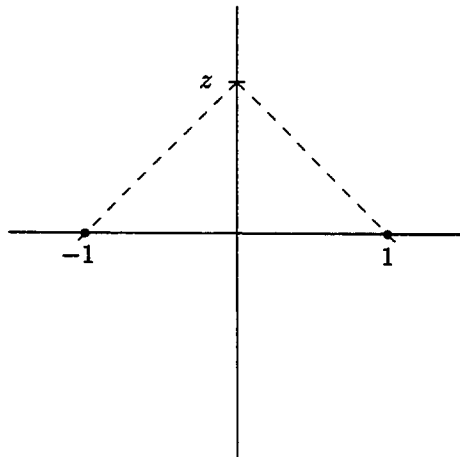
og følgelig skrives iterationsrelationen

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2}, \quad (1)$$

z_1 vil være z 's efterbillede. Af dette kan man konkludere at: *Hvis z tilhører den ubrudte linie mellem ζ_1 og ζ_2 vil z_1 også tilhøre den.*



Den simpleste måde at se det på, er ved at lave en hjælpetransformation [Möbiustransformation], som giver en enkel omflytning af planen og tager ζ_1 og ζ_2 med over på den reelle akse, symmetrisk om den imaginære akse. Det er klart, at man har den samme relation som i (1) mellem de transformerede punkter z , z_1 , ζ_1 , ζ_2 .



Der er intet hindring for straks at antage, at ζ_1 er reel og positiv og $\zeta_2 = -\zeta_1$. Det vil ikke mindske generaliteten at antage, at $\zeta_1 = 1$ (det er nødvendigt med en omformning for at dette fremkommer). Problemet føres altså tilbage til at undersøge

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1}.$$

Heraf ses, at hvis z er imaginær vil $\frac{1}{z-1}$ og $\frac{1}{z+1}$ være 2 symmetriske punkter i forhold til O_y . Deres sum vil være et punkt på O_y . $\frac{1}{z-z_1}$ vil være imaginær,

ligesom z og deraf også z_1 . Den lodrette linie midt mellem ζ_1 og ζ_2 er bibeholdt i Newtons relation

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Det er også let at vise, at hver af halvplanerne, som relationen fastsætter, kan bestemmes ved at transformere dem over på noget tilsvarende. Man er altså i tilfældet med disse grupper på enhedscirklen, som Hr. Fatou betragter i sin note af 21. maj 1917 i Comptes rendu. Den simpleste måde at se det på består i at vende tilbage til udtrykket

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

hvor man antager, at $f(z) = z^2 - 1$, således at en hjælpetransformation som fører ζ_1 og ζ_2 over i punkterne (-1) og $(+1)$ afgjort tillader det. Dette giver

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

og i dette udtryk er det klart, at enhver halvplan, bestemt ved den lodrette linie midt mellem ζ_1 og ζ_2 , er transformeret over på sig selv ved iterationen

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \varphi(z),$$

enhver af dem er totalkonvergensområdet for det af punkterne ζ_1 og ζ_2 , som den indeholder. På den fælles grænse mellem de to områder, som er den fælles lodrette linie mellem ζ_1 og ζ_2 , er rodpunkterne til ligningerne, $z = \varphi_n(z)$, $n = 1, 2, \dots, \infty$ for hvilke $|\varphi'(z)| > 1$ (sættet E), tætte overalt.

61. b. Hvis man vender tilbage til et generelt polynomium $f(z)$ af grad k har man set, at brøken

$$z_1 = \varphi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

giver adgang til grænsepunkterne med regulær konvergens, der giver de k forskellige rødder til $f(z) = 0$. Funktionen $\psi(z)$, den inverse til $\varphi(z)$, giver, for de kritiske punkter, adgang til de k rødder til $f(z) = 0$ og de $(k - 2)$ rødder for $f''(z)$, som er generelt forskellige fra de foregående. Det følger, at *mindst* $(k - 1)$ af rødderne til $f(z)$ har et totalkonvergensområde dannet af en uendelighed af flader i stil med det betragtede i eksempel 1. Det er nok at se på bemærkningerne på side 155 for straks at forsikre sig om dette.

62. Hvis man f.eks. betragter polynomiet $f(z) = z(z^2 - 1)$ hvor rødderne er 0, -1 , $+1$ har man

$$z_1 = z - \frac{z(z^2 - 1)}{3z^2 - 1} = \frac{2z^3}{3z^2 - 1},$$

og hvis man omformer dette ved en hjælpetransformation

$$z = \frac{1}{Z}, \quad z_1 = \frac{1}{Z_1}$$

giver det

$$Z_1 = \frac{3Z - Z^3}{2}$$

det vil sige det først behandlede eksempel, det er altså nytteløst at blive ved.

Altså vil opdelingen af planen i områder, der hver indeholder en bestemt rod til $f(z) = 0$ generelt være et ufremkommeligt problem, eftersom mindst $(k - 1)$ rødder har et konvergensområde bestående af uendeligt mange flader, dette fører til en opdeling af planen i uendeligt mange områder. Der ser man grunden til Cayleys manglende succes med at anvende princippet på ligninger af grad ≥ 3 .

63. For at fuldende tilfældet, for $f(z) = z^3 - a^3$.

Altså

$$z_1 = \frac{2z^3 + a^3}{3z^2} = \varphi(z)$$

f 's 3 rødder a , $a\omega$ og $a\omega^2$ ($\omega^3 = 1$) er tre grænsepunkter med regulær konvergens og tre kritiske punkter for $\varphi(z)$'s inverse $\psi(z)$. Det fjerde kritiske punkt for $\psi(z)$ er punktet i uendeligt, for dette punkt forener to Urbilleder. Det er et punkt fra E' . Der er altså ikke en grænsecykel, der er heller ikke andre grænsepunkter med regulær konvergens. Det umiddelbare konvergensområde for hvert af punkterne a , $a\omega$, $a\omega^2$ indeholder ikke andre kritiske punkter end punktet selv, der er et simpelt kritisk punkt. Altså ethvert af konvergensområderne for a , $a\omega$ eller $a\omega^2$ består af en *uendelighed af stykker*, som i det forrige eksempel, hvor hvert af områderne for -1 og $+1$ gjorde det. Ethvert af disse totale konvergensområder giver de to andre ved to efterfølgende rotationer på 120° omkring origo, for selvfølgelig svarer z og $z\omega$ til de efterfølgende z_1 og $z_1\omega$.

Den kontinuerte linie E' , som former samtlige grænser mellem totalkonvergensområderne (hvert totaldomæne har selvfølgelig hele E' som grænse, fordi ethvert punkt i E' er grænse for de på hinanden følgende Urbilleder til et vilkårligt punkt taget i hvert af disse domæner), bevares ved en 120° rotation omkring origo. Ved en simpel transformation ($z = aZ$), føres man tilbage til tilfældet hvor $a^3 = 1$. Altså, uden at forringe generaliteten, får man

$$z_1 = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

De tre grænsepunkter er 1 , ω , ω^2 .

Man ser a priori, at den positive del af den reelle akse tilhører det umiddelbare konvergensområde for 1 , 0 og ∞ er grænsepunkter. Den reelle akse er symmetriakse for det betragtede domæne. Man har altså nogle oplysninger om domænerne for 1 , ω , ω^2 .

Appendiks F

Fatous artikel fra 1920

Dette er en oversættelse af side 89-90 fra Fatous artikel, der originalt er publiceret med titlen "Sur les équations fonctionnelles" i "Bulletin de la Société Mathématique de France, 48" 1920.

36. VI

$$R(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}$$

Denne brøk er den man opnår, når man anvender Newton-approksimation på ligningen $z^3 - 1 = 0$. Rodpunkterne til denne ligning er de dobbelte tiltrækningspunkter med multiplikator nul; de er kritiske enkeltpunkter til funktionen $R_{-1}(z)$. Punktet i uendeligt er et frastødende dobbeltpunkt, ligeledes et kritisk punkt til $R_{-1}(z)$. Disse fire punkter udgør hele E'_c . Domænerne til de tre punkter $z = 1^{\frac{1}{3}}$ er dannet af en uendelighed af enkelte sammenhængende dele. Ser vi efter sker det særligt på den reelle akse. Stykket $(0, \infty)$ hører til domænet til punktet $z = 1$. Dette stykke har et Urbillede forskelligt fra sig selv og beliggende på den reelle akse; det er det, man let får ved konstruktionen af kurven $\gamma = \frac{2z^3+1}{3z^2}$ for z liggende mellem $-\infty$ og ∞ ; denne kurve har en lodret asymptote i $z = 0$, en skrå asymptote $\gamma = \frac{2}{3}z$, og et punkt med vandret tangent $\gamma = z = 1$. Stykket $(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$ Urbillede til $(0, \infty)$ har selv et reelt Urbillede, som er beliggende på dets venstre side, altså efter hinanden. Længderne af alle de stykker, startende med det tredje, vil vokse, som det fremgår af udtrykket $R'(z) = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{z^3})$. De yderste af segmenterne har altså uendeligt som unikt grænsepunkt. Punktet $z = 1$'s domæne omfatter altså hele den reelle akse undtagen en uendelig opregning af punkter, der har uendeligt som unikt grænsepunkt. Domænerne til de to andre attraktionspunkter kommer af den første, ved rotation med $\frac{2\pi}{3}$ og $\frac{4\pi}{3}$ omkring origo. De delvist sammenhængende domæner for de tre punkter har altid fælles grænsepunkter, som indeholder punkterne $z = \infty$, $z = 0$ og deres Urbilleder.

Liste over tidligere udkomne tekster
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan
ske til IMFUFA's sekretariat

tlf. 46 74 22 63

-
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Ólafsson and
Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional
Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT
LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent
en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmex,
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild
og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY
CONVERSION"
by: Bent Sørensen
- 227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm,
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,
Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder,
Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,
Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og
en skitse til et alternativ basseret
på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk
problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse
af energiens bevarelse og isærdeles om
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz
udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorte Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host
mortality on the dynamics of an endemic
disease and
Instability in an SIR-model with age-
dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL
BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen
-

- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling
af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN
Et 1.modul fysikprojekt
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning
Projektrapport
af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.
by: B. Booss-Bavnbek
With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreassen and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFELDIGE FÆNOMENER
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgård, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning
Teori og model
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse
Materiale til et statistikkursus
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED
af: Peter Harremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-electric Spherical Shell (Preprint)
by: T. Christensen and N.B.Olsen
- 257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker
af: Perille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"
af: Mogens Brun Heefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

- 261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93
- 262/93 Separability and the Jones
Polynomial
by: Lars Kadison
- 263/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra
og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt
- 264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen
-
- 265/94 **SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED
SYMMETRIC SPACES**
**To Sigurdur Helgason on his
sixtyfifth birthday**
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert
and Gestur Olafsson
- 266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i
laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen,
Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik
Lindelof, Peder Voetmann Christiansen
- 267/94 Kom til kort med matematik på
Eksperimentarium - Et forslag til en
opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via
en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson,
Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 269/94 Dimensionsanalyse en introduktion
metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen,
Ken Andersen, Nikolaj Hermann,
Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA
AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen
- 271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets
fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel
- 273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann,
Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen
- 274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse
anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine
Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth
Helmgård
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen
- 275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis,
Per Gregersen, Kristina Vejre
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af
problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann
Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas
Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 278/94 The Models Underlying the Anaesthesia
Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen
(RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen
(Herlev University Hospital), Stig Andur
Pedersen (Roskilde University)
- 279/94 Description of a method of measuring the shear
modulus of supercooled liquids and a comparison
of their thermal and mechanical response
functions.
af: Tage Christensen
- 280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann
- 281/94 Modellering af Det Cardiovasculære System med
Neural Puls kontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen,
Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen
- 282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen,
Niels Bo Johansen

- 283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)
af: Erwin Dan Nielsen og Niels-Bo Johansen
- 284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke
lige ve' det!
Gymnasie matematikkens begrundelsesproblem
En specialerapport af Peter Hauge Jensen
og Linda Kyndlev
Vejleder: Mogens Niss
- 285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and
its diploid host
by: Viggo Andreassen and
Freddy B. Christiansen
- 286/94 The energy master equation: A low-temperature
approximation to Bässler's random walk model
by: Jeppe C. Dyre
- 287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the
Calculation of Time Auto-Correlation Functions
by: Jeppe C. Dyre
- 288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION
by: Bent Sørensen
- 289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square
Displacement in Extremely Rugged Energy
Landscapes with Equal Minima
by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen
- 290/95 Modellering af uregelmæssige bølger
Et 3.modul matematik projekt
af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson,
Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 291/95 1st Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH
ENERGY SYSTEM
an example of using methods developed for the
OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study
by: Bent Sørensen
- 292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3
af: Bent Sørensen
- 293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?
af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen
Vejleder: Anders Madsen
- 294/95 Universets udvidelse -
et metaprojekt
Af: Jesper Duelund og Birthe Friis
Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen
- 295/95 A Review of Mathematical Modeling of the
Controlled Cardiovascular System
By: Johnny T. Ottesen
- 296/95 RETIKULER den klassiske mekanik
af: Peder Voetmann Christiansen
- 297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with
bifurcations
by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen
- 298/95 Mordet på Schrödingers kat - et metaprojekt om
to fortolkninger af kvantemekanikken
af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst,
Christina Specht
Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen
- 299/95 ADAM under figenbladet - et kig på en samfunds-
videnskabelig matematisk model
Et matematisk modelprojekt
af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation
by: Bent Sørensen
- 301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning
af ozon
af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe
Nielsen og Bettina Sørensen
Vejleder: Jesper Larsen
- 302/95 KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for
aksialkompressor
Projektrapport sf: Stine Bøggild, Jakob Hilmer,
Pernille Postgaard
Vejleder: Viggo Andreassen
- 303/95 Masterlignings-modeller af Glasovergangen
Termisk-Mekanisk Relaksation
Specialerapport udarbejdet af:
Johannes K. Nielsen, Klaus Dahl Jensen
Vejledere: Jeppe C. Dyre, Jørgen Larsen
- 304a/95 STATISTIKNOTER Simple binomialfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen
- 304b/95 STATISTIKNOTER Simple normalfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen
- 304c/95 STATISTIKNOTER Simple Poissonfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen
- 304d/95 STATISTIKNOTER Simple multinomialfordelingsmodeller
af: Jørgen Larsen
- 304e/95 STATISTIKNOTER Mindre matematisk-statistisk opslagsværk
indeholdende bl.a. ordforklaringer, resuméer og
tabeller
af: Jørgen Larsen

- 305/95 The Maslov Index:
A Functional Analytical Definition
And The Spectral Flow Formula
By: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani
- 306/95 Goals of mathematics teaching
Preprint of a chapter for the forth-
coming International Handbook of
Mathematics Education (Alan J. Bishop, ed)
By: Mogens Niss
- 307/95 Habit Formation and the Thirdness of Signs
Presented at the semiotic symposium
The Emergence of Codes and Intensions as
a Basis of Sign Processes
By: Peder Voetmann Christiansen
- 308/95 Metaforer i Fysikken
af: Marianne Wilcken Bjerregaard,
Frederik Voetmann Christiansen,
Jørn Skov Hansen, Klaus Dahl Jensen
Ole Schmidt
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og
Petr Viscor
- 309/95 Tiden og Tanken
En undersøgelse af begrebsverdenen Matematik
udført ved hjælp af en analogi med tid
af: Anita Stark og Randi Petersen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
-
- 310/96 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra
algebra og analyse" (E1)
af: Mogens Brun Heefelt
- 311/96 2nd Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH
ENERGY SYSTEM
by: Hélène Connor-Lajambe, Bernd Kuemmel,
Stefan Krüger Nielsen, Bent Sørensen
- 312/96 Grassmannian and Chiral Anomaly
by: B. Booss-Bavnbek, K.P. Wojciechowski
- 313/96 THE IRREDUCIBILITY OF CHANCE AND
THE OPENNESS OF THE FUTURE
The Logical Function of Idealism in Peirce's
Philosophy of Nature
By: Helmut Pape, University of Hannover
- 314/96 Feedback Regulation of Mammalian
Cardiovascular System
By: Johnny T. Ottesen
- 315/96 "Rejsen til tidens indre" - Udarbejdelse af
a + b
et manuskript til en fjernsynsudsendelse
+ manuskript
af: Gunhild Hune og Karina Goyle
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og
Bruno Ingemann
- 316/96 Plasmaoscillation i natriumklynger
Specialerapport af: Peter Meibom, Mikko Østergård
Vejledere: Jeppe Dyre & Jørn Borggreen
- 317/96 Poincaré og symplektiske algoritmer
af: Ulla Rasmussen
Vejleder: Anders Madsen
- 318/96 Modelling the Respiratory System
by: Tine Guldager Christiansen, Claus Dræby
Supervisors: Viggo Andreassen, Michael Danielsen
- 319/96 Externality Estimation of Greenhouse Warming
Impacts
by: Bent Sørensen
- 320/96 Grassmannian and Boundary Contribution to the
-Determinant
by: K.P. Wojciechowski et al.
- 321/96 Modelkompetencer - udvikling og afprøvning
af et begrebsapparat
Specialerapport af: Nina Skov Hansen,
Christine Iversen, Kristin Troels-Smith
Vejleder: Morten Blomhøj
- 322/96 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1996
- 323/96 Structure and Dynamics of Symmetric Diblock
Copolymers
PhD Thesis
by: Christine Maria Papadakis
- 324/96 Non-linearity of Baroreceptor Nerves
by: Johnny T. Ottesen
- 325/96 Retorik eller realitet ?
Anvendelser af matematik i det danske
Gymnasiums matematikundervisning i
perioden 1903 - 88
Specialerapport af Helle Pilemann
Vejleder: Mogens Niss
- 326/96 Bevisteorier
Eksemplificeret ved Gentzens bevis for
konsistensen af teorien om de naturlige tal
af: Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen,
Klaus Frovin Jørgensen, Ivar Peter Zeck
Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Stig Andur Pedersen
- 327/96 NON-LINEAR MODELLING OF INTEGRATED ENERGY
SUPPLY AND DEMAND MATCHING SYSTEMS
by: Bent Sørensen
- 328/96 Calculating Fuel Transport Emissions
by: Bernd Kuemmel

- 329/96 The dynamics of cocirculating influenza strains conferring partial cross-immunity and
A model of influenza A drift evolution
by: Viggo Andreassen, Juan Lin and Simon Levin
- 330/96 LONG-TERM INTEGRATION OF PHOTOVOLTAICS INTO THE GLOBAL ENERGY SYSTEM
by: Bent Sørensen
- 331/96 Viskøse fingre
Specialerapport af:
Vibeke Orlien og Christina Specht
Vejledere: Jacob M. Jacobsen og Jesper Larsen
-
- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialerapport af:
Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 PROBLEM-ORIENTATED GROUP PROJECT WORK AT ROSKILDE UNIVERSITY
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose - et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss, Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by Mogens Niss
- 342/97 LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND AND SUPPLY
A global clean fossil scenario discussion paper prepared by Bernd Kuemmel
Project leader: Bent Sørensen
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTELSE AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen
- 344/97 Puzzles and Siegel disks
by Carsten Lunde Petersen
-
- 345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen
- 346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
- 347/98 Verificering af Matematiske Modeller - en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
Project leader: Bent Sørensen
- 349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
- 350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96
- 351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss

352/98 The Herman-Swiatec Theorem with
applications

by: Carsten Lunde Petersen

353/98 Problemløsning og modellering i
en almindelig matematikundervisning

Specialrapport af: Per Gregersen og
Tomas Højgaard Jensen

Vejleder: Morten Blomhøj

354/98 A GLOBAL RENEWABLE ENERGY SCENARIO

by: Bent Sørensen and Peter Meibom

355/98 Convergence of rational rays in
parameter spaces

by: Carsten Lunde Petersen and
Gustav Ryd

356/98 Terrænmodellering

Analyse af en matematisk model til
konstruktion af terrænmodeller

Modelprojekt af: Thomas Frommelt,
Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge

Vejleder: Johnny Ottesen