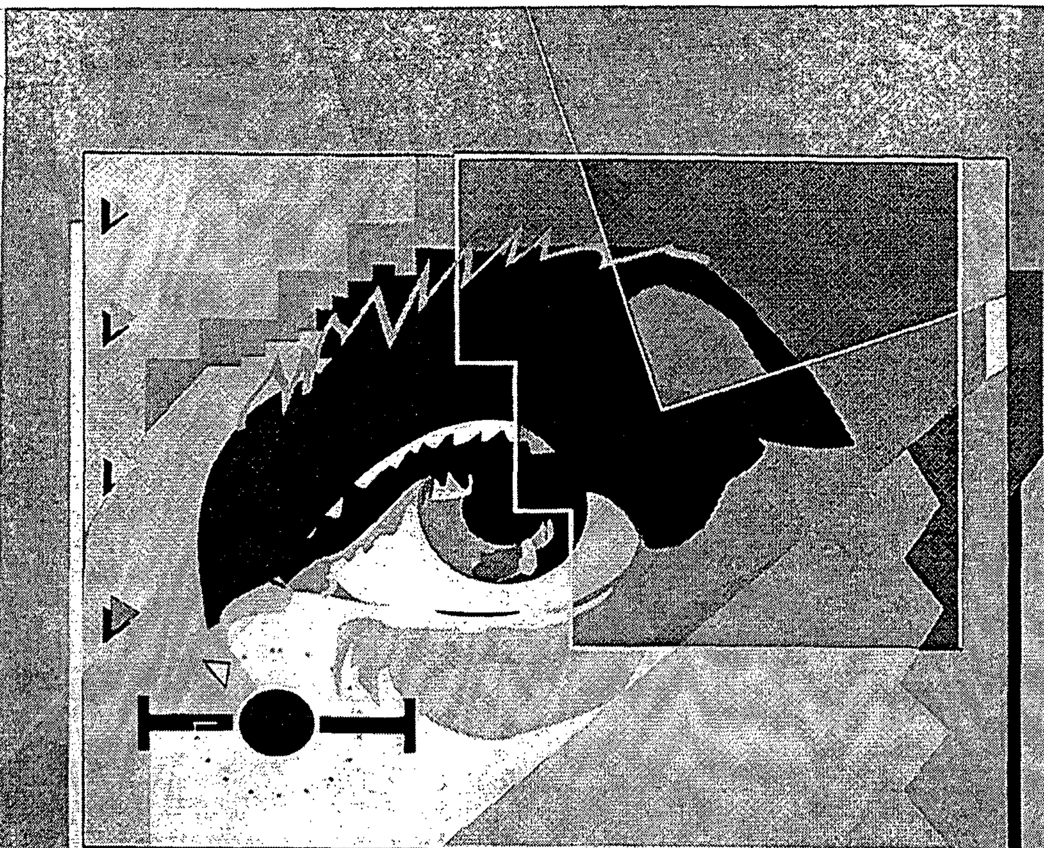
TEKST NR 325 1996



Retorik eller realitet ?

Anvendelser af matematik i det danske gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903 - 88

En specialerapport af Helle Pilemann
Vejleder: Mogens Niss

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, DK-4000 Roskilde, Danmark

Retorik eller realitet? Anvendelser af matematik i det danske gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903 - 88
Specialerapport af: Helle Pilemann

IMFUFA-tekst nr. 325/96 279 sider ISSN 0106-6242

Abstract

Denne tekst er et uændret optryk af min specialerapport udført i perioden medio januar til medio september. Rapporten handler om anvendelser af matematik i det danske gymnasiums matematikundervisning i årene 1903-88. Anvendelser af matematik betyder i denne rapport alle mulige relationer mellem matematik og virkeligheden, hvor virkeligheden opfattes som et ikke-matematisk genstandsfelt for matematisk aktivitet. Perioden er delt op i tre mindre perioder delt ved årene 1935 og 1960. På disse tidspunkter blev der netop vedtaget ændringer i bestemmelserne for matematikundervisningen af betydning for anvendelser af matematik. Hver periode behandles ud fra bekendtgørelser for undervisningen, lærebogssystemer, studentereksamensopgaver, konferencerapporter, udvalgsbetænkninger, tidsskriftartikler m.v. Analysen finder fundet sted på tre niveauer - hvad skal der ifølge bekendtgørelserne foregå i undervisningen omkring anvendelser?, hvad diskuteres omkring anvendelser i undervisningsøjemed? og hvad kan der være foregået omkring anvendelser af matematik i undervisningen? Til hver af de tre niveauer finder en begrebsafklaring sted over holdninger og opfattelser til anvendelser af matematik, samt argumenter for og indholdet i anvendelser af matematik. Specialerapporten skal derved give et billede af, hvilken status og funktion anvendelser af matematik har i perioden 1903-88. Det konkluderes, at der i tiden 1903-88 har været forskellige opfattelser af anvendelser af matematik. De kommer til udtryk både i diskussion og i lærebøgernes opbygning. Der er i perioden 1903-88 forskel på retorik og realitet med hensyn til inddragelse af anvendelser. De perioder, hvor der sker mest omkring anvendelser af matematik, er ved periodens begyndelse, det vil sige i tiden 1903-35, og omkring 70'erne og tiden derefter.

Forord

Denne specialerapport er skrevet i perioden medio januar til medio september 1996 på matematikuddannelsen ved RUC. Den er tænkt at skulle opfylde kravene til et didaktisk speciale. I tilknytning dertil har jeg arbejdet med emnekredse inden for området matematikkens didaktik med særlig henblik på anvendelser og modellering. Emnekredsene er inddraget gennem hele rapporten, men i kapitel 2 har det en særlig vægt.

Jeg vil gerne sige tak til vejleder Mogens Niss (IMFUFA) for inspirerende idéer og forslag undervejs i forløbet. Endvidere tak til Gunhild Nissen (Institut for historie og samfundsforhold) for gennemlæsning af rapporten og Torben Christoffersen (fagkonsulent for matematik i gymnasiet) for oplysninger om forhold vedrørende matematikundervisningen i gymnasiet efter gymnasiereformen af 1987.

Indholdsfortegnelse

Prolog

Matematik er et fag med mange år bag sig i gymnasiets matematikundervisning. Dets plads i undervisningen har ikke på noget tidspunkt været til diskussion kun i forhold til, hvem der skal undervises i det. Fagets status og funktion blev derimod en del af en omfattende diskussion, som handlede om målet med undervisningen i gymnasiet og omkring gymnasiets indretning. Gymnasiets formål var at forberede til videregående studier ved universitetet og derved forberede til job ved rigets embeder og samtidig bidrage til elevernes almendannelse. Men i 1800-tallet blev der lagt mest vægt på det første. Dette kom senere til at ændre sig.

Det dobbelte formål var vanskeligt for skolen at fastholde. Men det var ikke forberedelse til universitetet, der var til diskussion, det var snarere målet med at bibringe eleverne dannelse. Hvad skulle midlerne være? Særlig markante var indlæggene i diskussionen fra S. L. Tuxen[1] og K. Kroman[2] om dannelsesgrundlaget. S. L. Tuxen udgav "Om Maal og Midler for den højere Dannelse" i 1884, og K. Kroman udgav i 1886 "Om Maal og Midler for den højere Skoleundervisning og om Muligheden af dens organiske Sammenknytning med den lavere".

Gymnasiet var siden 1871 delt op i to linjer, en matematisk-naturvidenskabelig og en sproglig-historisk linje. Det var særlig denne opdeling, der førte til debat omkring linjerne og fagenes formål og bidrag til den almene dannelse. Tuxen vægtede fagene græsk og historie højest, mens Kroman ville basere undervisningen på modersmålet og naturvidenskaberne. Det blev til en debat om, hvorvidt den matematisk-naturvidenskablige retning, som blev beskyldt for at være en fagskole, kunne sidestilles med den sproglig-historiske i relation til at give dannelse.

Der var for Tuxen og Kroman stor forskel på de to retninger, både hvad angik eleverne på disse linjer og linjernes anseelse i befolkningen. Tuxen skrev i "Om Maal og Midler for den højere Dannelse", at eleverne på matematisk-naturvidenskabelig retning ingen interesse viste for historie og deres danske stile er skrevet i et pjattet sprog, og

"Den Tanke, der stod saa revolutionær for de fleste af den gamle Skoles Mænd, at man skulle kunne blive student uden at kunne citere Horats og Vergil, ja, uden at have læst blot et vers af nogen af dem, den Tanke blev adopteret af Regering og Repræsentationen, og den blev ved denne Lov sat ud i Livet".

Kroman er enig med Tuxen i, at der er forskel på de to linjer. Det handler ikke om eleverne, men i højere grad om linjernes anseelse og muligheder. Det kommer til udtryk i "Om Maal og Midler for den højere Skoleundervisning":

[1] Søren Ludvig Tuxen 1850-1919; cand. philol. 1875; vandt doktorgrad i 1896 ved Københavns Universitet; fik i 1898 Videnskabernes Selskabs guldmedalje; blev i 1906 udnævnt til undervisningsinspektør for "De fuldstændige højere Almenskoler" efter at have været medlem af forskellige skolekommissioner

[2] Kristian Kroman 1846-1925; magisterkonferens i filosofi; 1877 dr. phil; 1883 professor i filosofi; 1886-1909 kultusministeriets pædagogiske konsulent.

"De to Linier ere ikke ganske ligestillede; den ene (den filologiske) giver Adgang til mere end den anden...og den sproglig-historiske Artium nyder endnu i Skolemændenes og dermed i de Unges Bevidsthed en langt større Anseelse end den matematisk-naturvidenskabelige, der tidt nok endnu betragtes som en uundgaaelig Udvæxt, en Dannelsesform, der kun passer sig for mindre Aander."

Kroman er ikke enig i, at målet med skolen skal være at kunne citere Horats og Vergil. Netop problemet med at fastslå, hvad begrebet almendannelse betyder, overvejer Kroman:

"...thi hvad er saa atter denne højere Almendannelse? At kunne haandtere sin Kniv og Gaffel nøje efter højeste Mode, er det et nødvendigt Led, eller er det noget ganske ligegyldigt? At kunne tale flydende Fransk, uden alt for dansk Tonefald. Er det Hovedsagen eller er ogsaa det uvæsentligt? At kunne citere Horats eller endog Platon, er det derpaa, det særlig kommer an, eller er dette endog det aller ligegyldigste og overflødigste af Verden?...Man kan ved Dannelse fortrinsvis tænke paa Selskabsdannelse...Aandsdannelse og...Hjertets Dannelse. Disse Udtryk forklare sig selv ved deres Sammenstilling. Ingen, der ikke lider af Ensidighed, vil vel erklære nogen af disse tre Arter Dannelse for absolut og fuldstændig udenfor Skolens Maal: Paa den anden Side vil sikkert ingen nægte, at det fortrinsvis er den miderste Art, der bliver skolens Sag, mens de to andre Arter fortrinsvis tilfalde Hjemmets Pleje...Det er Skolens Maal at gjøre i ædleste og bedste Forstand dygtige Mennesker ud af sine Elever."

Faget matematik har en særlig placering i diskussionen omkring almendannelse. Tuxen mener ikke, at matematik bidrager i udpræget grad til den dannelse, der skal lægges vægt på:

"Den Dannelse, der naas gjennem disse Fag...kaldes formalistisk; det er overalt Opgaven, ikke at berige Sjælen, men at danne Forstanden, dels i Almindelighed, dels til Forståelse af Naturens hele...Det er ikke Forstand paa Menneskelivet, paa sig selv og de Mennesker, der omgive os, men Forstand paa det, der ligger uden for dette...Der er sikkert ingen anden Videnskab, der i den Grad egner sig til at bringe Sans for exakt Videnskabelig Methode, ingen, der paa den maade formaar at feje al Løshed og Overfladiskheden i Tankegangen ud...Saa gode Midler til at udvikle en klar, stringent Tænkning, kan derfor ikke naas af anden Vej end netop ad denne...Et andet Spørgsmaal bliver, om den bør indtage den første Rang...den former Tænkeevnen, men beriger ikke med Erfaringsstof...De mathematiske Abstraktioner ere ikke Udtryk for nogetsomhelst. Det er en i højeste Grad ensidig Forstandskultur."

Det har Kroman en helt anden holdning til, idet han er af den opfattelse, at matematikundervisningen netop i høj grad bidrager til dannelse:

"Det gælder om snarest muligt at opgive den gamle og falske Pædagogik, der lever i den Tro, at Eleven udelukkende sidder og tænker i Mathematiktimen, føler i Religionstimen og vil i skrive- og tegnetimen...Men kunne vi til en vis Grad lære dem at tænke, at dømme sundt og klart, lære dem at skjelne mellem Fantaseren og virkelig Tænken, og intet Middel er hertil saa ypperligt som Naturvidenskaben."

Det er den udbredte brug af matematik i mange situationer i samfundslivet, der indgår i Kromans argumentation og begrundelse for matematikundervisningens høje status i gymnasiet:

"Vi bruge Mathematik, naar vi beregne vore daglige Udgifter og Indtægter, naar vi lægge finansielle og topografiske Planer for vore Udflugter, naar vi om Foraaret anlægge vore Haver, naar vi med Vold og Magt skulle have utilstrækkelige Gager til at slaa til. Husmoderen anvender Mathematik, naar hun veier af til Maden, fordeler sine Ugepenge, beregner sine Gardiner og Gulvtæpper og klipper Tøj til sine Smaabørn. Hvilke utallige Bryderier vilde ikke, blot i det sidste tilfælde, en Smule større Mathematisk Indsigt gjøre en Ende paa! Og vilde man indvende, at en saa simpel Mathematik lærer vi alle af Livet, saa svarer jeg, at det netop beviser Mathematikens Nødvendighed...Og endelig spiller Mathematiken endnu en stor Rolle, idet dens Sætninger bestandig finde Anvendelse paa Naturvidenskabens Omraade."

Diskussionen omkring dannelse resulterer i debat om gymnasiets opdeling i to retninger - en sproglig-historisk og en matematisk-naturvidenskabelig retning. Der kommer flere forslag frem, hvoraf nogle foreslår helt at forkaste begge retninger og i stedet oprette en moderne-humanistisk linje med moderne sprog. Det er et forslag fra 1898 fra tre københavnske private skoler, der kommer til at inspirere til opdelingen af gymnasiet i tre retninger, og det skal danne en større sammenhæng i den lærde skole. Der indledes politiske forhandlinger, og forslaget vedtages i "Lov om højere Almenskoler" af 24. april 1903, hvor betegnelsen gymnasium bliver benyttet første gang. Gymnasiet er tre-årigt, og eleverne kan vælge sig ind på tre retninger; den klassisk-sproglige, den nysproglige og den matematisk-naturvidenskabelige retning. Der skal undervises i matematik på alle tre linjer.

Diskussionen omkring mål og midler med gymnasiets undervisning, herunder matematikfagets betydning fortsætter og er til debat. I den debat optræder anvendelse af matematik til skiftende tider både som begrundelse for matematikundervisningen og som mål og middel for denne. Afhængig af dette vil anvendelser af matematik være tiltænkt en meget lille eller en noget større rolle i undervisningen. Debatten om betydningen af anvendelser af matematik er ikke afsluttet med Tuxens og Kromans indlæg. Tværtimod har anvendelser af matematik stadig en plads i de kommende års diskussion omkring mål og midler med matematikundervisningen.[3]

[3] Prologen er baseret på følgende litteratur: Skovgaard-Petersen, Vagn: Dannelse og demokrati; Opdragelse og Undervisning i Danmark - red. af Einer Torsting; Tuxen, S. L.: Om Maal og Midler for den højere Dannelse; Kroman, K.: Om Maal og Midler for den højere Skoleundervisning.

Kapitel 1 Metode

1. 1 Problemfelt

Denne specialerapport handler om gymnasiets matematikundervisning med henblik på anvendelser af matematik set i et historisk perspektiv i tiden 1903-88.

Jeg benytter gennem hele rapporten begrebet anvendelser af matematik, som er et begreb knyttet til den didaktiske forskning inden for matematik. Det vil da være i betydningen alle de relationer mellem matematik og virkelighed, hvor virkeligheden er et ikke-matematisk genstandsfelt for matematisk aktivitet.[1]

Undervisningen i matematik i gymnasiet er præget af mange traditioner og af personlige holdninger til faget. I Danmark har vi tradition for bekendtgørelser, hvor det i høj grad er lærerens fortolkning af indholdet, der får betydning i forhold til, hvordan og i hvilken grad bekendtgørelsens enkeltdele skal vægtes i forhold til hinanden, samtidig med at eleverne bliver i stand til at bestå studentereksamen. Sammen med bekendtgørelsen følger en undervisningsvejledning, som giver læreren forslag til, hvordan emnerne kan behandles, samt nærmere præcisering af hensigterne med bekendtgørelsens indhold. Lærerne kan selv vælge, hvilket lærebogssystem, de ønsker at benytte, som regel inden for specifikke systemer, de enkelte gymnasier indkøber. Lærebogssystemerne skal ikke godkendes af fagkonsulenter for matematik eller af andre instanser. For at sikre, at undervisningen har samme vilkår i hele landet, bliver de skriftlige studentereksamensopgaver formuleret og stillet centralt af en opgavekommission for at signalere, hvilke kundskaber, der fra centralt hold ønskes, eleverne har erhvervet. Studentereksamensopgaver bliver derfor meget styrende for undervisningen. Ved den mundtlige eksamen er det censorsystemet, der skal sikre, at eleverne har erhvervet de ønskede kundskaber.

Det er op til de enkelte lærere at fortolke bekendtgørelsen og samtidig overholde den, og derfor vil der være forskellige holdningerne til og opfattelserne af anvendelser af matematik gennem tiden, og det vil være muligt at følge, om målet med anvendelser af matematik forandres i perioden.

Ved at følge udviklingen inden for anvendelser af matematik over en årrække kan det give en bedre forståelse af matematikundervisningen i gymnasiet i dag, om hvorfor anvendelser af matematik er inddraget i undervisningen i den form, som det er. Det kan give nogle årsagsforklaringer til, hvordan et modelaspekt er blevet en del af bekendtgørelsen ved gymnasiereformen af 1987. Samtidig kan diskussioner omkring anvendelser af matematik give en forståelse af, at matematikundervisningen i høj grad er præget af traditioner og en vis inerti, som betyder, at nye tendenser er flere år om at vise sig i bekendtgørelserne for matematik. I den forbindelse vil det vise sig, om diskussionen omkring anvendelser af matematik bevæger sig i en kontinuert retning mod tilstanden i dag, eller om der er brud på den udvikling, sådan at diskussionen bevæger sig i cirkler, og hvordan der i diskussionen betones dét, der ikke er tilstede i bekendtgørelsen. Det kan

[1] Begrebet "Anvendelser af matematik" bliver behandlet i kapitel 2.

ligeledes give et billede af, hvordan den danske matematikundervisning med hensyn til anvendelser af matematik udvikler sig i forhold til diskussioner omkring dette.

1. 2 Problemformulering

Hvilken status og funktion har anvendelser af matematik i matematikundervisningen i den danske gymnasieskole i perioden 1903-88 med særlig henblik på argumenter for at inddrage anvendelser af matematik i matematikundervisningen?

1. 3 Uddybning af problemformuleringen

For at undersøge, hvilken status anvendelser af matematik har i matematikundervisningen, da må undersøgelsen foregå på flere niveauer. Der skal ses på, om anvendelser overhovedet italesættes i henholdsvis bekendtgørelser, i diskussioner og i lærebøger. Det fører til følgende tre spørgsmål, der kan adskille niveauerne i behandlingen af problemformuleringen:

Hvad skal der foregå i matematikundervisningen omkring anvendelser af matematik?

Hvad diskuteres omkring anvendelser af matematik i undervisningen?

Hvad har der/kan der være foregået omkring anvendelser af matematik i undervisningen?

Til disse tre niveauer kan der stilles endnu tre spørgsmål til hver situation i perioderne:

Hvorfor undervise i anvendelser af matematik? Hvilke argumenter er der for at inddrage anvendelser af matematik i undervisningen? Disse spørgsmål vil hovedsageligt kunne stilles i de niveauer, hvor det analyseres, hvad der skal foregå omkring anvendelser af matematik, og hvad der diskuteres omkring anvendelser af matematik.

Når der tales om anvendelser af matematik, hvad menes der med det? I hvilken betydning optræder begrebet? Det vil være i tilknytning til niveauet, hvor det analyseres, hvad der diskuteres omkring anvendelser af matematik, og hvad der kan have været foregået i undervisningen med hensyn til anvendelser af matematik, at dette spørgsmål kan stilles.

Hvordan skal anvendelser af matematik behandles i undervisningen? Det vil være i tilknytning til alle de tre niveauer, at dette spørgsmål vil være relevant. I niveauet om, hvad der skal foregå i undervisningen omkring anvendelser af matematik, kan det analyseres ud fra undervisningsvejledninger i forbindelse med bekendtgørelser om matematikundervisningen. Ellers er det både i diskussion omkring anvendelser af matematik og i niveauet, hvor der analyseres, hvad der kan have været foregået i undervisningen, at dette spørgsmål vil kunne stilles.

De ovennævnte spørgsmål skal overvejes ved alle situationer i perioden 1903-88 for derved at kunne vurdere status og funktion i forbindelse med anvendelser af matematik i gymnasiets matematikundervisning.

Perioden 1903-88 er valgt ud fra, at begge årstal er skelsættende inden for udviklingen af begrebet anvendelser af matematik og dansk skolelovgivning. I 1903 blev Almenskoleloven vedtaget. Her fik gymnasiet sin egen undervisningsinspektion med en undervisningsinspektør og faglige medhjælpere. Året 1988 er valgt, idet bekendtgørelsen af 1987 trådte i kraft, og der indførtes et modelaspekt i matematikundervisningen. Det er den seneste vigtige begivenhed i gymnasiets matematikundervisning med hensyn til anvendelser af matematik. Interessen for at beskæftige mig med anvendelser af matematik i et historisk perspektiv hænger sammen med min fagkombination matematik og historie.

Når jeg taler om gymnasiet, så er det det traditionelle gymnasium. Det er ikke handelsgymnasiet eller teknisk gymnasium. Jeg behandler ligeledes ikke forhold inden for mellem-, real- og privatskoler, hf og studenterkurser. Det er ikke mit mål at beskrive strukturdiskussioner vedrørende gymnasiet, men de vil blive inddraget i det omfang, de har betydning for forståelsen af anvendelser af matematik eller for udviklingen inden for dette emne. Det samme kan siges om udviklingen inden for de forskellige matematiske discipliner. Jeg forfølger ikke bestemte matematiske discipliners udvikling, men de vil blive inddraget i de sammenhænge, hvor det er af betydning for anvendelser af matematik. Det er ikke hele den danske matematikundervisning i gymnasiet, jeg forsøger at behandle, men et udsnit af den.

For at afgrænse problemstillingen omkring anvendelser af matematik har jeg valgt udelukkende at beskæftige mig med danske forhold. Der vil, hvor det er relevant blive inddraget beretning om forholdene i udlandet, som eventuelt kan have påvirket de danske forhold, men i mindre grad. Det er interesse i den danske matematikundervisning i gymnasiet, der har betydning for valget af dette som genstand for undersøgelse.

1.4 Fremgangsmåde

Jeg har fra begyndelsen haft en arbejdsproblemformulering, som har været styrende for projektet på den måde, at det er gennem den, at jeg har absorberet alt, hvad der kunne have med anvendelser at gøre. Dette materiale har jeg inddraget til nærmere analyse. Der er store dele af mit materiale, hvor anvendelser af matematik ikke nævnes. Der vil altid være nogen, der blander sig i debat, og nogle der følger med strømmen. Det tavse flertal vil ikke kunne afspejles i dette projekt. Det samme kan siges om lærebøgerne, hvor jeg har fremhævet alt, der kan have med anvendelser af matematik at gøre. I den forbindelse skal man tænke på bøgernes omfang. I begyndelsen af dette århundrede havde et lærebogssystem henvendt til undervisning i matematik på matematisk linje i 1., 2. og 3. g. typisk et omfang af ca. 350 sider inklusiv opgaver, mens lærebogssystemer henvendt til samme målgruppe i dag indeholder ca. 1400 sider.

Arbejdsproblemformuleringen har været styrende for projektet, og den viste sig at kunne bære projektet igennem. Ud fra kendskab til didaktiske diskussioner og synspunkter omkring anvendelser af matematik, fik jeg udviklet et analyseapparat. Analyseapparatet har jeg benyttet til at analysere, hvad der foregår i debat og i praksis omkring anvendelser af matematik i materialet. Analyseapparatet er beskrevet i det teoretiske kapitel (kapitel 2).

Arbejdet med at beskrive de tre perioder med henblik på anvendelser har overvejende været en induktiv arbejdsproces. Det er materialet, der har styret undersøgelsen. Historien omkring anvendelser af matematik i Danmark er ikke skrevet tidligere. Jeg har derfor ud fra materialet og analyseapparatet beskrevet, hvad der er blevet sagt om anvendelser af matematik og kan ligeledes give en vurdering af, hvad der kan have foregået i praksis omkring anvendelser af matematik i tiden 1903-88.

1. 5 Materialevalg og kilder

Til dette projekt har jeg benyttet mange former for materiale. Det har blandt andet drejet sig om artikler, konferencerapporter, lærebøger, studentereksamensopgaver, retsregler for gymnasiet herunder anordninger, bekendtgørelser og undervisningsvejledninger. Det hele er kilder til en analyse af anvendelser af matematik i gymnasiets matematikundervisning.

Der er forskel på, hvad de er kilder til. Anordninger, bekendtgørelser, undervisningsvejledninger og studentereksamensopgaver er kilder til at forstå de officielle intentioner med matematikundervisningen. Studentereksamensopgaverne giver et indtryk af, hvad der fra centralt hold forventes, at eleverne skal kunne. Studentereksamensopgaver spiller ligeledes en anden rolle. De virker tilbage på undervisningen på den måde, at det, der stilles opgaver i til eksamen, meget typisk vil blive dét, der lægges vægt på i timerne. Lærerne er interesserede i, at eleverne klarer sig godt til eksamen.

Lærebogssystemer, konferencerapporter og artikler giver et billede af, hvad der kan have foregået i timerne omkring anvendelser af matematik- hvad eleverne har skullet foretage sig. Samtidig giver det en kilde til at forstå, hvilke diskussioner, der rørte sig i blandt fagfolk. Lærebøgerne kan derudover vise på hvilken måde, at forfatterne har fortolket bekendtgørelsen, og hvordan anvendelser af matematik kan inddrages. Lærebøger og studentereksamensopgaver er kilder til at kunne udtale sig om, hvorvidt der er forskel på, hvad der ifølge bekendtgørelsen skal foregå omkring anvendelser af matematik og på dét, der foregår og bliver testet i - er der forskel på retorik og realitet? Det vil sige, om anvendelser kun er noget, der tales om, eller om det faktisk indgår i undervisningen og i den skriftlige eksamen.

Med hensyn til min udvælgelse af lærebøger til analyse, er der to faktorer, der har spillet ind. Nogle lærebøger er valgt ud fra, at lærebogsforfattere både blander sig i debatten og skriver lærebøger. På den måde kan det give et billede af, hvordan forfatterens forståelse og opfattelse af begrebet anvendelser af matematik har været. Opfattelsen af begrebet vil få indflydelse på opbygningen af lærebogssystemerne. Mens andre lærebøger er blevet valgt, fordi de var de mest benyttede bøger i en periode. Lærebøgerne kan i mangel af mundtlige kilder til undervisningssituationen give et billede af, hvad der kan have foregået i matematiktimerne i Danmark. Ud fra disse kan der gives et kvalificeret bud på, hvad der er inddraget i undervisningen omkring anvendelser af matematik. Der skal dog stadig tages forbehold for, at mere engagerede lærere selv kan have inddraget materiale udover lærebøgerne. Ikke alle lærere behøver at have fulgt lærebøgerne fra ende til anden, men kan have udvalgt dele og selv suppleret med eventuelt egne noter.

Jeg har benyttet mange artikler fra forskellige tidsskrifter. Jeg referer til dem ved navn, men "Matematisk Tidsskrift" skifter navn gennem perioden. Indtil 1929 var tidsskriftets navn "Nyt Tidsskrift for Matematik Afd. A", fra 1929-52 "Matematisk Tidsskrift A", fra 1953 til 1978 "Nordisk Matematisk Tidsskrift" og fra 1979 "Normat". Jeg har derfor valgt at referere til det som "Matematisk Tidsskrift".

1. 6 Rapportens opbygning

Rapporten består af en prolog, et metodekapitel, et teorikapitel, tre perioder, en diskussion/konklusion og en epilog. Teorikapitlet omhandler didaktiske teorier, som jeg er influeret af, og som har betydning for hvorfor, hvad der forstås ved og hvordan anvendelser af matematik kan inddrages i gymnasiematematikundervisningen. Dette skal danne baggrund for analysen af de tre perioder. De forskelligheder, der er mellem de tre historiske perioder i relation til anvendelser af matematik, har betydning for omfanget af perioderne. Rapporten er opbygget kronologisk inden for de enkelte kapitler, sådan at det vil være lettere at følge udviklingen gennem tiden.

Første periode omhandler tiden fra 1903-35. Periodeinddelingen er valgt ud fra, at der i 1935 kom en ny bekendtgørelse efter, at almenskoleloven af 1903 blev vedtaget. Denne periode består af et oversigtskapitel og et kapitel om karakteristik af lærebøger, som er udkommet i denne periode, samt en beskrivelse af studentereksamensopgaver med henblik på anvendelser af matematik. Derefter følger en analyse, som analysebegreber fra teorikapitlet vil danne baggrund for. Der vil efterfølgende være en sammenfatning på hele første del.

Anden periode omhandler tiden fra 1935-60. Det er en periode, som skal ridse diskussioner og præsentere bestemmelser for undervisningen i perioden. Dette kapitel fokuserer på anvendelser af matematik i perioden indtil den nye matematik dukker frem i undervisningen. Der vil desuden være et kapitel om lærebøger udgivet i denne periode og studentereksamensopgaver. I perioden 1935-60 sker der ikke meget på feltet anvendelser af matematik, derfor har anden periode et mindre omfang end første og tredje periode. Kapitlerne i anden periode vil dog blive analyseret på samme vis som de øvrige perioder, men vil være af mindre omfang. Det munder ud i en analyse, som efterfølges af en sammenfatning på hele anden periode.

Tredje periode omhandler tiden efter 1960 til 1988, hvor bekendtgørelsen af 1987 trådte i kraft. Denne periode er mere omfangsrig at behandle, da der i denne periode sker meget på området med diskussioner omkring anvendelser af matematik. Der er flere elever, der kan og vælger at komme på gymnasiet i denne periode. Det medfører diskussioner omkring nye krav til undervisningen til en anden type elever. Derfor er der i denne periode mange ændringer af bestemmelser for matematikundervisningen set i forhold til de øvrige perioder. Det betyder, at den tredje periode vil være mere omfangsrig, men det skal ikke betyde, at den dermed har højere status i forhold til første periode. Der er ligeledes et analysekapitel, og perioden afsluttes med en sammenfatning af perioden.

Hver analyse i tilknytning til de tre perioder er delt op i mindre periodeinddelinger. De er inddelt i forhold til, hvornår en ny anordning eller bekendtgørelse for undervisningen er blevet vedtaget. Det er kun for overskuelighedens skyld og for lettere at kunne se, om der er forskel på de tre niveauer gennem perioderne.

Bagest i rapporten findes appendiks over bekendtgørelserne, anordningerne, fagkonsulenter og undervisningsinspektører gennem tiden. Fodnoter er brugt ved citater, referat og ved personlige oplysninger om de medvirkende personer. Kursiv eller andre fremhævelser i citater er forfatterens egne.

Det er ikke alle aktører i projektet, det har været muligt at finde personalia omkring. De fundne oplysninger er fra "Hof og Stat", "Folketinget efter valget. Den 21. september", "Dansk Biografisk Leksikon", "Salmonsens store Konversationsleksikon", "Dansk Magisterstat"og Kraks "Den blå bog". De, der ikke er beskrevet i disse værker, har jeg for en del af dem fået kendskab til gennem min vejleder, Mogens Niss.

Kapitel 2 Didaktisk teori om anvendelser af matematik

Dette kapitel skal tjene til at orientere i det didaktiske univers omkring feltet anvendelser af matematik. Med udgangspunkt i førende didaktikere fra 1980'erne og 1990'erne skal der udvikles et begrebsapparat til at kunne analysere materialet. De udvalgte didaktikere er fra lande, hvor der bliver forsket i anvendelser af matematik. Didaktikernes forskning er præget af traditioner og tendenser i forhold til deres geografiske placering både hvad angår universitetet, de forsker på, og landet de kommer fra. Danmark markerer sig i den didaktiske forskning inden for de teoretiske og filosofiske aspekter ved anvendelser af matematik. Det samme gør lande som Tyskland, Holland, Østrig, Frankrig og Indien. England og Australien forsker i muligheder for at implementere anvendelser af matematik i undervisningen, og le psykologiske aspekter ved problemløsning forsker Australien, USA, Rusland, Canada og Israel i. Danmark og Holland er de lande, der er nået længst med at introducere anvendelser af matematik i skriftlige eksamensopgaver.

Under begrebet anvendelser af matematik hører også matematiske modeller. Der er i de senere år sket et skift i debatten fra at tale om anvendelser til at tale om matematiske modeller og modellering. Men bag enhver anvendelse af matematik er en matematisk model, hvor matematisk model er i betydningen en repræsentation af et virkelighedsområde. Det er ikke tilstrækkeligt i forhold til problemformuleringen kun at se på begrebet matematiske modeller eller modelbygning og modellering, da disse begreber sandsynligvis ikke vil være til stede i en stor del af perioden 1903-88. Når der i dele af perioden tales om matematiske modeller, da er det i betydningen illustrative modeller, f. eks. en gips-model. Det er endnu et argument for, at begreberne skal analyseres i forhold til den situation, de optræder i for at forstå betydningen af dem. Begreberne modellering og modelbygning består i deres indhold af nogle egenskaber, som ikke vil være at finde i gennem hele perioden 1903-88. Det er begreber fra nyere tid, som kan benyttes til at kategorisere situationer i materialet gennem perioden, men ikke til at sortere materialet. Det er derfor nødvendigt i et projekt, som behandler en længere periode, med et bredt begreb som "anvendelser af matematik" til at observere i materialet.

Dette kapitel skal vise forskellige positioner og begreber inden for det didaktiske felt om anvendelser af matematik i dag. Dette skal benyttes til at analysere materialet. Efter endt analyse vil der sandsynligvis vise sig at være forskellige opfattelser af anvendelser af matematik, idet analysen og materialet spænder over perioden 1903-88. Som beskrevet i fremgangsmåden for analysen kan der i kapitlet om didaktisk teori stilles tre relevante spørgsmål, som har betydning tor opdelingen af kapitlet i tre afsnit: Hvorfor skal eleverne undervises i anvendelser af matematik? Hvad forstås der med begreberne inden for anvendelser af matematik i matematikundervisningen? Hvordan skal der undervises i anvendelser af matematik? Efter hvert afsnit følger en opsamling, hvor der vil blive gjort rede for valg af analysebegreber.

2.1 Hvorfor undervise i anvendelser af matematik?

Der er flere begrundelser for at undervise i anvendelser af matematik. Noglc af begrundelserne handler om, at eleverne skal lære at være kritiske overfor beslutninger taget på baggrund af matematiske modeller og overfor brugen af disse til forskellige formål. Man kunne spørge sig selv, hvorfor egentlig undervise i anvendelser af matematik? Det er tidskrævende for læreren, og burde undervisning i anvendelser af matematik ikke finde sted i de fag og inden for de områder, hvor matematik bruges, og ikke i matematiktimerne? Der vil sikkert kunne findes lærere, der har den holdning. Det er ikke længere siden end ved gymnasiereformen, der trådte i kraft august 1988, at undervisning i matematiske modeller fik formel plads i den danske gymnasiematematikundervisning.

Det vil i det følgende vise, at der gennem tiderne har været forskellige argumenter for at undervise i anvendelser af matematik, men det argument, der vejer tungest i den dansk-tyske forskning, er et ønske om, at eleverne forholder sig kritiske overfor brug og misbrug af matematik inden for stadig flere områder ud fra et demokratisk argument. Argumenterne for undervisning i anvendelser hænger naturligt sammen med en diskussion af begrundelser for matematikundervisning i det hele taget og involverer spørgsmål som f. eks. Hvorfor skal denne gruppe unge mennesker have matematikundervisning? Hvem kan lære matematik? Hvordan skal det gøres? og Hvad skal indholdet bestå i? Men det er ikke en diskussion, jeg vil komme ind på.

Matematik og demokrati
Mogens Niss[1] beskriver i en artikel[2] de egenskaber, matematik besidder, som har betydning for den rolle, matematikken spiller i vores samfund:

"Mathematics...is a *science* in an epistemological sense, oriented towards developing, describing and *understanding* objects, phenomena, relationships, mechanisms, and so forth belonging to the domain. When this domain consists of what we usually think of as mathematical entities, mathematics acts as a *pure* science. In this capacity, mathematics aims at internal selfdevelopment and self-understanding, independent of the world...If, on the other hand, the domain of consideration lies outside of mathematics, typically within some other scientific field, mathematics serves as an *applied* science. In this capacity, mathematics is activated to help to understand and develop aspects of various extra-mathematical areas...Whether pure or applied, mathematics as a science serves to generate *knowledge* and *insight*. Mathematics is also a system of *instruments*, products as well as processes, that can assist *decisions* and *actions* related to the mastering of extra-mathematical practice areas."[3]

På grund af disse egenskaber spiller faget matematik en stor rolle i vores samfund. Matematik bruges ofte til at forstå og udforske områder uden for matematikken selv.

---

[1] Mogens Niss; f. 1944; cand. scient. i matematik 1968 fra Københavns Universitet; lektor ved Roskilde Universitetscenter 1972; professor inden for matematikkens didaktik 1993 ved Roskilde Universitetscenter; medlem af ICMI fra 1987; generalsekretær samme sted fra 1991

[2] Niss, M.: Mathematics in society, 1994, s. 367-378

[3] Niss, M.: Mathematics in society, 1994, s.367

Disse områder udvides hele tiden, og i dag bruges matematik inden for fagområder som biologi, økonomi, information og sociologi. Til trods for at matematikken anvendes i mange sammenhænge, er matematikken i de mange anvendelser for mange mennesker ikke synlige.

"It is a striking fact that although the social significance of mathematics seem to be ever increasing in scope and density, the place and rôle and function of mathematics are largely invisible to - and unrecognized by - the general public, decision makers and politicians...Mathematics is invisible because it is hidden, not because it is absent."[4]

Denne usynlighed, som Niss omtaler, kommer Christine Keitel[5] også ind på[6]:

"Models used in practice are still relatively unknown and mysterious for the average citizen. Although everybody is convinced that the engine would not exist without mathematics, for instance, only a few specialists know which mathematical results are hidden in an engine. Our life is highly intersected with mathematical and technological artefacts - described as the mathematisation of our society - and our physical world has become more a construction by our technology than a natural environment. The increasing mathematisation requires more and more use of mathematical and technological treatments of the problems in our society, but leads also to an increasing dematematisation of its members."[7]

Keitel mener, at matematikundervisningen er en oplagt mulighed til at udvikle en demokratisk kompetence:

"It is obvious that democratic competence in a highly mathematised society includes mathematical and technical competence to understand, and reflective knowledge to analyse and evaluate technological developments...However, we still have to find ways to develop reflective knowledge, both as a attitude to be willing for democratic control and as an ability to reflect and judge."[8]

Keitel henviser til Ole Skovsmose[9] og hans fortolkning af reflektiv viden (se afsnit om dette).

Demokratiargumentet omtaler Ole Skovsmose, som et særligt argument, der spillede en central rolle i den tyske didaktiske debat efter krigen, hvor ønsket om at fastholde

---

[4] Niss, M.: Mathematics in society, 1994, s. 371

[5] Christine Keitel; professor i matematikkens didaktik ved Freie Universität i Berlin

[6] Keitel, C.: Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Applications, 1993, s. 19-30

[7] Keitel, C.: Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Applications, 1993, s. 22-23

[8] Keitel, C.: Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Applications, 1993, s. 28

[9] Ole Skovsmose; lektor ved Ålborg Universitetscenter; fra 1996 professor i matematikkens didaktik ved Danmarks Lærerhøjskole

demokratiske institutioner i samfundet var meget stort.[10] I dette argument findes tre påstande, som også omhandler, at matematikken i samfundet er skjult:

1. "...Den reelle matematiske anvendelse foregår under det teknologiske samfunds overflade. Matematikanvendelsen er reel og omfattende, men skjult".

2. "Gennem sine anvendelser har matematikken en samfundsformende funktion. Matematik indgår som en integreret del af samfundets teknologier på en unik måde. Matematik opfattet som redskab er ikke udskifteligt med et andet redskab med tilsvarende funktioner."

3. "Skal man have mulighed for at udøve sine demokratiske pligter og rettigheder, må man være i stand til at identificere og forstå hovedprincipperne i de samfundsformende mekanismer. Specielt må man være i stand til at gennemskue matematikanvendelsen, og eksempelvis være i stand til at forstå nogle af de principper teknologiske beslutningsprocesser underlægges, når en matematisk model optræder som hjælperedskab."[11]

Reflektiv viden og kritisk undervisning

Skovsmose tilhører en kritisk pædagogisk fløj i den didaktiske debat. Han forholder sig til lærere, studenter, indhold og undervisningens mål set i relation til det komplekse i sociale og politiske konflikter og problemer ude omkring.

"Briefly, not only teachers but also students are attributed a *critical competence* which is considered a resource to be further developed through their participation in the educational process. The content of subject matter is not (and cannot be) taken for granted on the basis of established tradition, but must continuously be subject for critical revision - there must be a *critical distance* to the curriculum. The teaching-learning process should be oriented towards the goal of providing the students with opportunities to develop their critical competence in the form of qualifications necessary for their participation in furthering democratization processes in society - i.e., developing qualifications that give them competence and capacity to deal creatively with problems in everyday life in such a way that they can support democratization processes in society. And finally, in so far as both teachers and students are oriented critically to traditional content and subject matter of education in order to develop their critical competence in a focus on problems outside the educational universe, there should be support for their efforts to have a *critical engagement* in their common educational (and social) endeavours."[12]

Det er netop disse elementer en kritisk undervisning indebærer. Kritisk undervisning tager udgangspunkt i det forhold, at lærer og elever er lige, og undervisningsprocessen er demokratisk og fremstår ved dialog. Både lærer og elev må diskutere fagkritiske forhold. F.eks. hvem bruger matematik? Hvor bruges matematik?

---

[10] Skovsmose, O.: Initiativområder inden for matematikkens didaktik, 1987, s. 20
[11] Skovsmose, O.: Initiativområder inden for matematikkens didaktik, 1987, s. 21
[12] Skovsmose, O.: Mathematics as a part of technology, 1988, s. 23-24

Skovsmose bemærker: "The basic idea in what we may call the pragmatic trend in mathematical education is that it is most important for the students to learn about model building, and the best way of learning this is to build models." [13] Denne pragmatiske tendens støtter Skovsmose, men den kritiske attitude overfor modellering fremkommer ikke ved kun at vise eleverne en modelleringsproces. De fundamentale problemer vedrørende anvendelser af matematik er ikke synlige. Der skal tales om det i undervisningen.

Ole Skovsmose opstiller tre former for videnstyper, han mener, man som tilhænger af kritisk pædagogik, skal tilstræbe:

"a. Matematisk viden
b. Teknologisk viden (et kendskab til matematikkens instrumenter) i kraft af hvilken vi sættes i stand til at opbygge og anvende en matematisk model.
c. Reflektiv viden (reflektorisk viden) i kraft af hvilken vi er i stand til at diskutere rimeligheden af en bestemt modelanvendelse og af de resultater, som modelanvendelsen har givet anledning til."

I tilknytning hertil kommenterer Skovsmose, at der tidligere har været den opfattelse, at det var en tilstrækkelig betingelse at lære matematik for at kunne anvende faget, i dag er det en nødvendig betingelse, men ikke tilstrækkelig, at lære matematik for at kunne anvende faget. "Efterhånden er det imidlertid erkendt, at anvendelse af matematik kræver en særlig indsigt og træning ud over den matematiske." Han forudsætter, at matematikken opbygges og udvikles i tæt interaktion med det emneområde, der skal gøres til genstand for en matematisering. "Med andre ord: teknologisk viden lader sig ikke reducere til matematisk viden. Den centrale pointe i nærværende sammenhæng er imidlertid, at også reflektiv viden kræver en sær[l]ig indsats for at blive etableret. Reflektiv viden lader sig ikke dekomponere til en række af teknologiske færdigheder samt en vis portion matematisk indsigt."[14]

Modelleringsevnen er for Skovsmose ligeledes en nødvendig men ikke tilstrækkelig aktivitet i matematikundervisningen. Han mener, den reflektive viden kræver mere end at kunne modellere.[15] Det kan forekomme, at to modeller kan være opbygget matematisk identisk, men hvor evalueringen af dem vil være forskellig.[16] Det er her den reflektive viden kommer ind.

Morten Blomhøj[17] taler ligesom Skovsmose om begreberne teknologisk viden og om at opøve en kritisk holdning overfor matematikkens brug og misbrug. Han ser to mål med undervisning i anvendelse af matematik og i modelaspektet, som er en del af den danske gymnasiematematikbekendtgørelse. Disse mål består i, at eleverne opnår en:

[13] Skovsmose, O.: Models and reflective knowledge, 1989, s. 3
[14] Skovsmose, O.: Initiativområder inden for matematikkens didaktik, 1987, s. 22
[15] Skovsmose, O.: Mathematics as a part of technology, 1988, s. 25
[16] Skovsmose, O.: Mathematics as a part of technology, 1988, s. 28
[17] Blomhøj, M.: Incorporating the Aspect of Mathematical Modelling in the Danish Gymnasium Curriculum: Problems and Perspectives, 1991, s. 187-194; Morten Blomhøj; ph. d.; adjunkt i matematik ved Roskilde Universitetscenter

1. Teknologisk viden om, hvordan man bygger og bruger en matematisk model.
2. Demokratisk kompetence i forhold til matematiske modeller.

Det har blandt andet sin begrundelse i, at matematik anvendes inden for stadig flere områder, og anvendelsen finder sted ved at udarbejde matematiske modeller. Derfor må gymnasiet forberede eleverne sådan, at de i deres videre uddannelse er i stand til at anvende og bygge matematiske modeller. Det rationelle bag et argument som dette består i, at der er et krav om en tilstrækkelig udviklet arbejdskraft i et højteknologisk samfund, og der er derved brug for en gruppe af mennesker, der har teknologisk viden til at kunne bygge og bruge matematiske modeller.

Samtidig mener Blomhøj, at det i stigende grad er beslutninger med betydning for borgeren i samfundet, der baseres på brugen af matematiske modeller. Derfor må matematikundervisningen i gymnasiet have som mål, at eleverne tager en kvalificeret og kritisk stilling til anvendelsen af matematiske modeller i samfundet. Det er vigtigt, at både folk, der skal anvende matematiske modeller og lægmænd kender til matematiske modeller. Men han erkender, at de ovennævnte mål kan være svære at få ind i undervisningen, da de er af en meget forskellig karakter.

Kritisk kompetence
Werner Blum[18] og Mogens Niss[19] har den opfattelse, at formålet med at undervise i matematik kan deles op i to hovedformål.

"(a) to provide students with konwledge and abilities concerning mathematics as a subject in itself;
(b) to provide students with knowledge and abilities concerning (one or more) other subjects, to which mathematics is supposed to have actual or potential services to offer."[20]

Det er i det andet formål at begrundelsen for at inddrage anvendelser og modellering kommer ind i diskussionen. For at kunne modellere er nødvendigheden af matematiske færdigheder stadig og ikke mindre vigtige. Jo mere aktivt matematik bruges, jo mere er det nødvendigt med matematisk indsigt til bedømmelse af resultater. Det er derfor ikke sådan, at det ene formål er vigtigere end det andet. Niss og Blum[21] og Niss[22] mener, at for at eleverne opnår en kritisk kompetence, da er det nødvendigt, at:

"1. Students should be able to perform applicational/modelling/applied problem solving processes.

[18] Werner Blum ; professor i matematik og matematikkens didaktik; Universität Kassel
[19] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1989, s. 37-68
[20] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1989, s. 41
[21] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1989, s. 37-68
[22] Niss, M.: Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula, 1989, s. 22-31

2. Students should acquire knowledge of existing models and applications of mathematics, and of characteristic aspects of related processes.

3. Students should be able to critically analyse and assess given examples of modelling and applications."[23].

Mål med anvendelsesorienteret matematikundervisning
Gabrielle Kaiser-Messmer[24] er at den opfattelse, at anvendelsesorienteret undervisning skal indeholde autentiske eksempler på anvendelser af matematik. De kan derved fremme elevernes holdning overfor matematik og få dem til at gennemføre en modelleringsproces. Hun definerer ikke det nærmere indhold ved disse eksempler. Det vil dog være svært at lære eleverne at kunne modellere, med mindre at undervisningen lægger op til det. Under ét kalder Kaiser-Messmer den form for undervisning, der indeholder disse aspekter, for anvendelsesorienteret matematikundervisning. Hun opstiller fire mål med det:

Et pragmatisk mål: Det drejer sig om, at autentiske eksempler skal fremme elevernes evne til at mestre deres hverdagsliv. Det betyder, at eksemplerne skal omhandle situationer særlig relevante for eleverne i deres nutidige og fremtidige liv.

Metodologiske mål: Anvendelsesorienteret matematikundervisning skal lette mulighederne for at anvende matematik i virkelige situationer. Autentiske eksempler skal fremme elevernes modelleringskvalifikationer og deres kendskab til nogle standardmodeller.

Matematiske mål: Autentiske eksempler skal øge motivationen og interessen for matematik, forbedre elevernes holdning overfor matematik, fremme evnen til på længere sigt at fastholde kendskabet til matematik og forstærke forståelsen af matematik.

Generelle pædagogiske mål: Fremme kreativiteten eller problemløsningsevnen. Også videnskabsorienterede mål, som viser et realistisk billede af udviklingen inden for matematik som videnskab.

Kaiser-Messmer har til forskel for både Blum og Niss ikke et mål, hvor eleverne skal opnå en kritisk kompetence overfor brug og misbrug af matematik. Hun mener, at eleverne skal kunne modellere og har begrundelser for dette, men denne reflektive viden, som også Blomhøj og Skovsmose mener skal være et resultat af en modelleringsproces (se nedenfor), den nævner Kaiser-Messmer ikke.

[23] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1989, s. 44-45
[24] Kaiser-Messmer, G.: Application-orientated Mathematics Teaching, 1989, s. 66-72; Kaiser-Messmer; Dr. rer. nat. ved Universität Kassel

For Jan de Lange[25] er målet, at eleverne skal trænes i at blive intelligente og kritiske borgere i en bredere forstand. Ved at introducere anvendelser og modeller skal man være opmærksom på, at det skal være en del af undervisningen at diskutere begrænsninger for modellen for at opnå reflektioner. For at forberede eleverne til samfundet er et af målene, som kan opnås, at inddrage rigtige problemer. Jan de Lange deler ligesom Niss, Blomhøj og Skovsmose den kritisk pædagogiske indgangsvinkel omkring begrundelse for indførelse af anvendelser af matematik.

H. O. Pollak[26] mener, at det er et ønske at forskellige former for anvendt matematik ikke kun skal påvirke pensum, men også undervisningspædagogikken. Hvis man ser på relativt simpelt brug af matematik, kan man se, at det er nødvendigt at forstå hvornår, hvordan og hvorfor matematik er velegnet til at anvende. Det er vigtigt, at matematik bliver forstået, for da vil det blive husket bedre. Hvis matematik kun huskes mekanisk kan det let blive brugt forkert. At bygge en matematisk model kræver forståelse af både området, der skal bygges en model over, og matematikkens mekanismer. Det nytter ikke kun at tale om anvendelser. Eleverne skal selv prøve at være i en problemløsningssituation.

Samarbejdet mellem matematik og andre fag betyder pædagogisk set, at undervisningen bliver mindre fastlagt. Her mener Pollak, at eleverne udover de sædvanlige aktiviteter med at løse problemer og bevise teorier skal opnå erfaring i at finde deres egne problemer og løse dem.

"Besides the usual activities of solving problems and proving theorems, students should have the experience of finding their own problems to solve and their own theorems to prove...It is very valuable for the student to have open-ended modelling experience, which besides its great pedagogic value is an accurate foretaste of mathematical applications in the real world."[27]

Men ændringen af pædagogikken for eleverne vil også kræve en anden uddannelse af lærerne. Det må tilstræbes at der gøres tiltag, der letter samarbejdet mellem matematik og andre fag.

Den stigende anvendelse af matematik inden for mange områder har haft den betydning, at flere anvendelser af matematik er blevet tilgængelige til undervisningsbrug. Mange matematiklærere vil ifølge Pollak gerne løse et godt problem, når de møder det. Det kan være en årsag til, at anvendelser af matematik allerede er en del af undervisningen flere steder. Han mener, at der til matematikpensum hører anvendelser af matematik, og at pensum ikke er fuldført, før eleverne har erfaret anvendelser af matematik. Han mener derved, at det bliver lettere at motivere eleverne til at lære matematik ved at arbejde med anvendelser af matematik. Pollak mener, et bevidstheden om, at der er gode jobs til folk,

[25] De Lange, J.: Innovation in Mathematics Education using Applications - Progress and Problems, 1993, s. 3-17; Jan de Lange; professor i matematikkens didaktik ved Universitetet i Utrecht

[26] Pollak, H. O.: The interaction between mathematics and other school subjects, 1979, s. 232-248; H. O. Pollak; Emeritus Director, Maths. Dept. Bell Laboratories, New Jersey, USA

[27] Pollak, H. O.: The interaction between mathematics and other school subjects, 1979, s. 240

der kan anvende matematik, har hjulpet til at fremme inddragelsen af matematiske anvendelser.

Argumenter gennem tiden
Werner Blum og Mogens Niss har gennem tiderne i den didaktiske diskussion observeret forskellige argumenter og mål for at undervise i matematiske anvendelser. Alle argumenter har gjort sig gældende til forskellige tider og til forskellige niveauer i matematikundervisningen i uddannelsessystemet.[28] Det drejer sig om følgende:

1. Det personlighedsdannende argument: Dette argument benyttes ofte i forbindelse med anvendelser af matematik og matematiske modeller som midler til at udvikle generelle kreative kompetencer og problemløsningsfærdigheder hos eleverne. Ligesom det kan sigte mod at skabe selvtillid til egne evner. (argument 1)

2. Argumentet om kritisk kompetence: Her fokuseres på, at eleverne skal forberedes til at leve og opføre sig som selvstændige og sociale individer. Eleverne skal besidde en kritisk kompetence i dét samfund, som i stigende grad er påvirket af anvendelser af matematik. Målet med den kritiske kompetence er, at eleverne skal kunne bedømme, genkende, forstå, analysere og vurdere eksempler på faktiske anvendelser af matematik og resultaterne af dem. (argument 2)

3. Det utilitaristiske argument: Kaldes også nytteargumentet, hvor der fokuseres på, at kendskab til anvendelser af matematik og matematiske modeller har en for eleverne praktisk anvendelighed. Matematikundervisningen skal give eleverne nogle forudsætninger for at bruge matematik til at løse problemer eller beskrive aspekter ved situationer fra ikke-matematiske områder. Og det skal give eleverne mulighed for at handle i deres dagligdag og i fremtiden. Matematikundervisningen skal gøre eleverne i stand til at foretage anvendelser af matematik og modellering i sammenhænge, hvor matematik kan være et værktøj. Og det er ikke en egenskab, der kommer af at blive undervist i ren teoretisk matematik. (argument 3)

4. Matematikundervisningen skal give et dækkende billede af matematik i alle dets funktioner: Når matematikkens anvendelser og matematiske modeller er en vigtig del af faget matematik, da bør det også være en del af undervisningen. (argument 4)

5. Tilegnelsesargumentet: Ved at inddrage problemløsning, anvendelser og modellering i matematikundervisningen ønskes at fremme elevernes læring af matematiske begreber, metoder og resultater ved at øge motivationen og relevansen af matematikundervisning. (argument 5)

Disse 5 argumenter har ifølge Niss forskellig karakter og status:

"Arguments (1) and (5) relate primarily to educational **tactics**. Argument (1) focuses on formative aspects of the *general education* and personal development of students, not on

[28] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1991, s. 37-68

matters specific to mathematics. Mathematics and application and modelling activities are to serve as a vehicle to a general end, rather than to be of independent interest. In aiming at facilitating or improving mathematics teaching, argument (5) is concerned with teaching tactics. *Applications and modelling* form a *vehicle* to this end. The argument would not make sense if *mathematics* were dispensed with. In pursuing the purpose of preparing students to aspects of life outside mathematics education, arguments (2) and (3) deal with general educational **strategy**. In both arguments students are wanted to come to grips with the actual use of mathematics in the world; in argument (2) in an *analytical* way, in argument (3) in a *constructive* way. To both arguments, mathematics and applications and modelling are essential components, not replaceable vehicles. Argument (4) concerns students' perceptions of mathematics as an entity, thus addressing mainly epistemological issues. In contradiction to (2) and (3) which look at the world outside mathematics and views mathematics as a factor of the world, argument (4) looks at *mathematics*."[29]

Niss mener ikke, at argument (2) og (4)har fået den opmærksomhed i den didaktiske debat, de fortjener. Men ser man på hvilke argumenter, der spiller en rolle for matematikundervisningen på gymnasieniveau, da er det ifølge Niss argument (2) og (3), der skal vægtes højest. Det er ikke bemærkelsesværdigt, da han tilhører en fløj i den didaktiske forskning, der fokuserer på, at eleverne opnår en kritisk attitude til matematikkens brug og misbrug. Ikke sådan at de andre argumenter ikke har betydning, men de kommer i anden række.

Blum har gennem de sidste 15-20 år observeret forskellige argumenter og mål for indførelse af matematiske anvendelser og modellering i undervisningen. Målene hænger ifølge Blum[30] nøje sammen med den didaktiske debat omkring målene med at undervise i matematik. Argumenterne er ofte af pædagogisk, politisk og social karakter:

"Pragmatic arguments. Mathematics teaching is intended to help students to understand and to cope with real-world situations and problems. To that end, modelling is indispensable.

Formative arguments. By being concerned with mathematics, students should - we hope - acquire general qualifications (such as the ability to tackle problems) or attitudes (such as openness towards new situations). Modelling is one important way to develop these.

Cultural arguments. Students should be taught mathematical topics as a source for reflection, or in order to generate a comprehensive and balanced picture of mathematics as a science and a part of human history and culture. Modelling is an essential feature of human intellectualism as well as of history and of actual practice, and can thus contribute towards promoting those aspects.

Psychological arguments. Mathematical contents can be motivated or consolidated by suitable modelling examples, and these may contribute towards deeper understanding and

[29] Niss, M.: Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula, 1989, s. 24
[30] Blum, W.: Applications and Modelling in Mathematics Teaching - A Review of Arguments and Instructional Aspects, 1991, s. 10-29

longer retention of mathematical topics, or they may improve students' attitudes towards mathematics."[31]

Opsamling
Det er nu set, at der blandt nogle didaktikere er enighed om, at argumentet for at inddrage anvendelser af matematik er ud fra tanken om, at eleverne skal blive kritiske overfor brug og misbrug af matematik. Både Niss, Blum, Blomhøj, Skovsmose, Keitel og de Lange taler om, at eleverne skal opnå en kritisk holdning til brugen af matematik. For Keitel og Skovsmose er det et tilstrækkeligt argument for at inddrage anvendelser af matematik i undervisningen. Det er det ikke for Blomhøj, Niss, Blum og de Lange, hvor det derudover også handler om, at eleverne skal sættes i stand til at anvende matematik i deres hverdag og fremtidige liv. Pollak bringer et pædagogisk argument frem om, at matematikundervisningen vil blive mindre fastlagt, hvis anvendelser inddrages i undervisningen. Det vil lægge op til andre undervisningsmetoder som gruppearbejde og diskussioner end en almindelig tavleundervisning. Pollak hører til i en anden forskningstradition, hvorfor han fokuserer på andre argumenter, end dem Niss og Blum har observeret.

Blum har alene og også sammen med Niss observeret forskellige argumenter for at inddrage anvendelser af matematik gennem tiden. Blums observering af argumenter for anvendelser af matematik adskiller sig i formuleringen fra de observationer over argumenter, som Niss og Blum har udarbejdet sammen. Blum nævner ikke det kritiske argument (argument 2) som særskilt punkt, men nævner anvendelser og modellering som en kilde til refleksion under det det kulturelle argument. Det kan være, at Blums forståelse af refleksion er identisk med at opøve den kritiske sans. Det pragmatiske argument svarer til det tidligere omtalte nytteargument (argument 3), det personlighedsdannende argument svarer til det personlighedsdannende argument (argument 1), mens det kulturelle og pykologiske argument svarer til henholdsvis argumentet om billedet af matematikken (argument 4) og tilegnelsesargumentet (argument 5).

Kaiser-Messmer opstiller fire mål med anvendelsesorienteret matematikundervisning. Der er flere ligheder mellem hendes mål og Blum og Niss' fem argumenter, de har observeret gennem tiden. Hendes matematiske mål med anvendelsesorienteret undervisning svarer til tilegnelsesargumentet (argument 5) i Blum og Niss' argumenter. Det generelle pædagogiske mål, som blandt andet skal vise et realistisk billede af udviklingen inden for matematik som videnskab, har ligheder med (argument 4), hvor undervisningen skal vise et dækkende billede af matematikken i alle dens funktioner og derfor skal inddrage anvendelser af matematik. Kaiser-Messmers pragmatiske mål, hvor elevernes evne til at mestre deres hverdagsliv skal fremmes via undervisningen, kalder Blum og Niss for det personlighedsdannende argument (argument 1). Her skal der udvikles generelle kreative kompetencer og problemløsningsfærdigheder hos eleverne. Endelig er der ved det metodologiske mål ligheder med det utilitaristiske eller nytteargumentet (argument 3), hvor det handler om, at eleverne skal blive i stand til at bruge matematikken til at løse

[31] Blum, W.: Mathematical modelling in mathematics education and instruction, 1993, s. 5-6

problemer eller beskrive aspekter. Kaiser-Messmer kommer ikke ind på det kritiske argument (argument 2).

Som det kan ses af ovenstående sammenligning mellem Blum, Kaiser-Messmer og Blum og Niss' argumenter for at inddrage anvendelser af matematik i undervisningen er der mange ligheder mellem de forskellige argumenter. Der er så små forskelle, at man kan tale om, at de i deres argumenter og mål kommer ind på samme substans, men på en forskellig måde.

De danske didaktikere, går som beskrevet alle ind for det kritiske argument, som en del af demokratiargumentet. Det kan være en tilfældighed, men det kan også skyldes, at der i Danmark er tradition for at udvikle kritiske samfundsborgere, der tager stilling til samfundets udvikling og beslutninger. Der er en forskel på, om anvendelser af matematik skal ind i undervisningen på grund af et demokratisk argument eller, om der derudover skal opnås en kritisk sans overfor brugen af matematiske anvendelser. Det kan være et ønske, at eleverne skal have kendskab til anvendelser af matematik og modellering, uden at de når til at reflektere over arbejdet med dette. Flere didaktikere mener ikke, at der er undervist i anvendelser af matem:atik, hvis man i en problemløsningsproces kun når frem til matematifisering af et virkelighedsområde. I det følgende afsnit gives beskrivelser af modellerings- og problemløsningsprocesser.

Jeg vil i analysen benytte Blum og Niss' liste over fem argumenter for og mål med inddragelse af anvendelser af matematik. Det er de argumenter, der vil kunne hjælpe til en besvarelse af problemformuleringen, når der skal analyseres over en længere periode. Blum og Niss har ikke i deres virke observeret andre argumenter end disse. Derfor vil de være velegnede til at kategorisere argumenter for anvendelser, der vil være at finde i perioden, der skal analyseres. Der vil være forskellig betoning af dem afhængig af, hvilken didaktisk position debattørerne indtager og til hvilken tid og sted, de befinder sig på. Hvad der er af argumenter og barrierer imod indførelsen af anvendelser af matematik, vil jeg i analysen kommentere undervejs. Men det vil være relevant at se dem i forhold til de tre positioner, som Blum opstiller. Det er barrierer set fra lærerens og elevernes side samt barrierer ved indretningen af undervisningen.

2.2 Hvad skal undervisning i anvendelser af matematik bestå af?

Dette afsnit skal give et billede af nogle forskellige positioner inden for matematikkens didaktik, inden for teori om, hvilke elementer undervisning i anvendelser af matematik skal bestå af. Der er typisk fire positioner at indtage, hvis der skal tales om, hvad undervisning i anvendelser af matematik skal bestå af. Der er didaktikere, der taler om modellering, nogle taler om problemløsning, mens andre taler om anvendelser af matematik. På tværs af disse hører begrebet anvendt matematik. Der vil i afsnittet blive introducere til begreber som modellering, problemløsning, samt forskellige opfattelser af anvendt matematik.

Modellering
Skovsmose mener, at reflektiv viden består i at kunne identificere faktorer, der indgår i en modeldiskussion. Han taler om, at relationen mellem model og genstand er medieret

gennem et begrebsmæssigt system, hvor vi fastholder de elementer i genstandsområdet, som vi anser som væsentlige, og koblingerne mellem dem. Genstandsområderne kan være forskellige og omhandle biologi, fysik, sociale strukturer og så videre. Afhængig af genstandsområdet sker der forskellige former for systemafgrænsning. Her kommer Skovsmose ind på de bagvedliggende interesser for modelbygningen, som vil afspejle sig i systemafgrænsningen. Et af elementerne i reflektiv viden består i at anskue modellen ud fra dens konstruktionsforudsætninger.[32] Hvis studenter skal kunne forholde sig til en modelleringsproces, så må de være i stand til selv at kunne modellere. Den bedste måde at lære noget er ved at gøre det - learning by doing.[33]

Modelleringsprocessen består ifølge Skovsmose af en specifik inddragelse af virkeligheden. For at komme i kontakt med virkeligheden må vi strukturere den. Der må foretages en fortolkning af virkeligheden, så der dannes mønstre. Vi udvælger de elementer fra virkeligheden, som vi finder vigtige og beslutter derefter hvilke relationer, der skal være imellem dem. Disse udvælgelser udgør en fortolkning af virkeligheden. Derfor er en matematisk model ikke virkeligheden, og indimellem glemmes det faktum, og modellen opfattes som objektiv.[34]

En modelleringsproces indeholder ifølge Skovsmose følgende trin: En model skal repræsentere et objekt, og relationen mellem en model og dets objekt foregår i et begrebsmæssigt system. Objektet kan være alt inden for blandt andet natur, menneskelige relationer eller kommunikation. Modellen kan være baseret på teori af forskellig karakter f.eks. teoribaseret ud fra en fastlagt teori om et givet område. Eller der kan foretages et valg mellem flere teorier at opstille modellen ud fra. Eller modellen er ikke bygget ud fra teori. I relationen mellem model og objekt foretages nogle valg. Det objekt vi vil modellere bliver i vores tanke struktureret, så der kan identificeres genkendelige mønstre. Når modellen skal evalueres ses på relationen objekt-system. Her overvejes hvilke forudsætninger, vi har haft for at udvikle modellen. Hvilke teoretiske rammer er i overensstemmelse med forudsætningerne? Findes der alternativer til det teoretiske skelet?

Der må skelnes mellem karakteren af parametre, der kan indgå i modellen. Der er empiriske -, og teoretiske - og pseudo-empiriske parametre. Med empiriske parametre mener Skovsmose parametre, der kan estimeres ved empirisk arbejde. De teoretiske parametre fastsættes ved teoretiske beregninger. Og de pseudo-empiriske parametre er parametre, der er svære at fastsætte uafhængig af processen, og de estimeres undervejs. En måde at vurdere parametrene på er at se på følsomheden af dem. Hvilken indflydelse har en ændring af parametrene på modellens værdier, funktioner og resultater? Modellen baseret på pseudo-empiriske parametre bliver en black-box model, som er svær at evaluere. Evnen til erkendelsen af dette kan opnås ved indøvelse i reflektiv viden.[35] Derefter ses på relationen system-model, hvor modellen kan testes via empiri.

[32] Skovsmose, O.: Initiativområder inden for matematikkens didaktik, 1987, s. 24-25
[33] Skovsmose, O.: Reflective knowledge - Its relation to the mathematical modelling process, 1990, s. 768
[34] Skovsmose, O.: Reflective knowledge - Its relation to the mathematical modelling process, 1990, s. 769-770
[35] Skovsmose, O.: Reflective knowledge - Its relation to the mathematical modelling process, 1990, s. 777-778

Når der skal reflekteres over en matematisk model, er der ifølge Skovsmose to perspektiver, der indgår i overvejelserne; de strukturelle relationer i modellen og de dynamiske relationer i modellen. De strukturelle relationer undersøges ved at vurdere objekt-system-model-interesser-relationerne, som tidligere nævnt. De dynamiske relationer involverer kendskab til at forstå, at en matematisk model ikke er neutral, samt kendskab til forskelle i det problemløsningsmedium, der ligger til grund for modeller og til formålene med disse. Det er vigtigt at se mængden af magt tilknyttet brug af forskellige medier i modellen og overveje hvilke interesser, der kan ligge bag en model.[36] Til sidst må mulige konsekvenser for handling vurderes.[37]

Ifølge A. O. Moscardini[38] består en modelleringsproces af fem elementer: "Problem analysis", "Problem modelling", "Analysis of model", "Solution of model" og "Validation":

"Problem analysis: In this stage the modeller investigates the background to the problem and how the result are going to be used. Every model is build for a purpose...One must research and discover all the information that is available and especially the form and accuracy of data or parameters...Knowledge elication techniques as described here, require general skills such as researching papers and books, questioning, understanding and selective listening. These are not regarded as mathematical techniques. The result of this stage is normally a concise set of aims and objectives for the problem.

Problem modelling: ...This stage requires mathematical modelling skills. It is at this stage that the mathematical description of the problem is obtained.

Analysis of model: In true industrial and commercial modelling, the equations are usually extreme complicated and require much solution time. It is therefore important to be reasonably sure that the equations are correct before on begins to solve them...there are certains test that can be done, such as looking at special cases, extreme values and parameter estimation. The skills involved are quite specialised and would be termed mathematical.

Solution of model: The skills at this stage are definitely mathematical. A suitable technique must be chosen and applied correctly to obtain to the problem. The skills required are mathematical knowledge, judgement, manipulative and/or programming ability.

Validation: A true validation is often difficult and sometimes even impossible. Often there are no facts to compare results with, just one's own preconceived notions. This stage involves experimental work and will usually involve sophisticated statistical techniques. This can be the most highly mathematical stage of them all."[39]

[36] Skovsmose, O.: Mathematics as a part of technology, 1988, s. 28-33
[37] Skovsmose, O.: Models and reflective knowledge, 1989, s. 4-7
[38] Moscardini, A. O.: The identification and teaching of Mathematical Modelling Skills, 1989, s. 36-42, A. O. Moscardini; Sunderland Polytechnic
[39] Moscardini, A. O.: The identification and teaching of Mathematical Modelling Skills, 1989, s. 37

Problemløsning

Udgangspunktet for anvendelse af matematik til problemløsning opfatter Blum[40] som en situation fra den virkelige verden. Det er en verden udenfor matematik. Denne situation skal simplificeres, struktureres og gøres mere præcis af problemløseren, og dette fører til en model. Skridtet fra virkeligheden til modellen er præget af problemløserens intentioner og interesser. Så skal den virkelige model matematifiseres, det vil sige oversættes til matematik og derved fremkommer den matematiske model. Problemløseren kan nu vælge forskellige metoder at løse problemet på. Når resultatet er fundet, skal det oversættes til den virkelige verden. Der kan her opstå uoverensstemmelser med virkeligheden, og modelleringsprocessen må begynde forfra. Disse betragtninger gælder kun for virkelige situationer, idet der ofte i skolesammenhæng gives iklædte opgaver af et problem vedrørende det matematiske univers. Her består opgaven i at afklæde opgaven og problemløsningsprocessen stopper efter en cyklus. Sådanne opgaver kan dog have en anden pædagogisk værdi.

Begrebet matematisk modellering bruger Blum som et vidtfavnende begreb, idet der findes mange forskellige definitioner på dette begreb, og forskellen er lille. Samtidig påpeger han, at den internationale trend går i retningen af at samle begreberne under en fællesbetegnelse.

Men Blum og Niss[41] har sammen udarbejdet nogle definitioner for begreber, der indgår i diskussionen omkring anvendelser af matematik og matematiske modeller:

Et problem: Det er et åbent spørgsmål, der udfordrer én intellektuelt, og hvor der ikke for dem, der har problemet, er færdige løsningsmetoder til.

Matematiske problemer: Der 2 slags matematiske problemer. Den ene type problemer er anvendte matematiske problemer, der er knyttet til områder uden for matematikken, hvor matematikken giver metoder, begreber og resultater til at løse det. Den anden type er et rent matematisk problem, hvor samme situation er gældende, bare inden for det matematiske univers.

Problemløsningsproces: Det handler om hele processen med at tackle et problem i forsøget på at løse det. Ligesom der er 2 slags problemer, er der 2 slags problemløsningsprocesser. Elementerne i processen er de samme, men den ene type omhandler anvendelser af matematik, mens den anden omhandler ren matematik.

Anvendt problemløsningsproces: Der tages udgangspunkt i et virkeligt anvendt problem. Denne situation skal simplificeres, idealiseres, struktureres og ses på afgrænsninger. Dette fører til realmodellen, som skal matematifiseres. Derved fås en realmodel over problemsituationen. Den vil på dette stadie være skematiseret, så det er muligt at oversætte relationerne til matematik. Når det er gjort, da har man den matematiske model. Den består af matematiske objekter, der svarer til de valgte objekter i realmodellen.

---

[40] Blum, W.: Mathematical modelling in mathematics education and instruction, s. 3-14

[41] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1991, s. 37-68

Med matematifisering af et virkeligt anvendt problem, som beskrevet ovenfor, mener Blum og Niss processen med at gå fra realmodellen til den matematiske model. Ved modellering eller modelbygning menes hele processen fra det originale problem til den matematiske model.

I problemløsningsprocessen skal man vurdere, hvilken type af model, der er tale om:

"It has proved appropriate to distinguish between different kinds of models. If economic items; for example, such as interests or taxes are considered mathematics particularly serves to establish certain norms involving value judgements. Here it is a matter of normative models. If physical phenomena, for example, such as planetary motions or radioactive decay are considered, mathematics serves primarily to describe and explain the respective situation. Here it is a matter of descriptive models."[42]

Når disse overvejelser er gjort, skal den matematiske model udarbejdes. Det resulterer i et matematisk resultat, som skal oversættes tilbage til den virkelige verden. I oversættelsen foretager problemløseren en validering af modellen, idet der sker en tolkning af de matematiske resultater i oversættelsen til virkelighed. Måske fører det til en modificering af modellen. Denne proces skal måske foregå flere gange. Når den færdige matematiske model er fundet, så kan modellen danne en basis for beslutninger, handlinger og prognoser.

Det er almindelig brug at kalde de ovennævnte måder at bringe matematik i spil på for anvendelser af matematik eller anvendt matematik - "*application* of mathematics (or applying mathematics)". "In a slightly narrower sense, real problem situations can also be called *applications*". Men al matematik, der i en eller anden forstand relateres til den virkelige verden hører til begrebet anvendt matematik. Når Blum og Niss taler om anvendelser, er det i betydningen, "any representational relations whatsoever between the real world and mathematics." Når de bruger begrebet "anvendelser og modellering", dækker det også over processen med anvendte problemløsningsprocesser. Den virkelige verden er i betydningen, verden uden for matematik, det vil sige ikke-matematiske genstandsfelter.[43]

Problemløsningsprocessen har Mogens Niss[44] beskrevet mere detaljeret:

1. Først sker der en *afgrænsning* af det system, der skal beskrives. Ved afgrænsningen sker en række bevidste fravalg af éns område. Her kan det overvejes: Hvad karakteriserer det virkelighedsområde, der skal beskrives? Hvad skal modellen vise? Hvilke elementer indgår i systemet? I afgrænsningsprocessen finder man de elementer, der har betydning for situationen og det system, der skal modelleres over.

[42] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1991, s. 39
[43] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1991, s. 40
[44] Niss, M.: Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula, 1989, s. 22-31

2. Når der er sket en afgrænsning af virkeligheden, så vil modellen også være en afgrænsning af virkeligheden. Der er sket en *forenkling*, som man skal holde sig bevidst. Hvilke faktorer kan matematificeres? Og hvilke faktorer er ikke til at se bort fra ved en matematifisering? Her idealiseres til en form, der kan gøres til genstand for en matematisk repræsentation.

3. *Matematifisering.* Når forsimplingen og idealiseringen er foretaget, kan man begynde at sætte matematiske størrelser på de faktorer, man fandt frem til havde betydning. Disse faktorer bliver til den *matematiske model*, og modellen er en oversættelse af virkeligheden til matematik. Nu kan man begynde at bruge modellen til formålet f.eks. beskrive sit område eller foretage prognose.

4. Sidste skridt er *verificeringen* af modellen. Her skal modellen afprøves og vurderes. Den skal konfronteres med virkeligheden. Det kan gøres ved at sammenligne med observerede eller forudsagte data. Sætte den i relation til eksisterende teori, eller sammenligne med andre modeller. Hvis modellen svigter på dette stadie, må man se, om der kan være en fejlkilde i de antagelser, der er foretaget. Derved må man starte forfra.

Matematifisering: Ved matematifisering forstås trinnene i modelleringsprocessen bortset fra det sidste verificeringstrin. Det vil sige trin 1-3.

Blum[45] giver en lignende beskrivelse af en problemløsningsproces, som i store træk er identisk og dækker over samme proces. Jeg vil ikke beskrive den nærmere, men henviser til artiklen.

Opfattelser af anvendt matematik

Ifølge Pollak[46] er der forbundet unødvendige vanskeligheder med at finde de rigtige definitioner til dække begrebet "anvendt matematik". Han har fire definitioner, som han mener er dækkende for alle opfattelser af anvendt matematik:

1. Anvendt matematik betyder klassisk anvendt matematik: Det er emnerne analyse, partielle differentialligninger, integralligninger, funktionsteori, algebra, trigonometri og andre variationer af geometri, der anvendes i andre områder. Særlig anvendelig er disse emner i klassisk fysik, hvor de forstås som en del af definitionerne, men er uden forbindelse til fysiske problemer.

2. Anvendt matematik betyder al matematik, som har en særlig praktisk anvendelse: Det betyder alle de discipliner, som er nævnt i den forrige definition, der har særlig praktisk betydning. Anvendelig matematik - det er de matematiske emner, som faktisk kommer til anvendelse. Ikke kun i teorien. Af matematiske emner, der ikke hører til definition 1, men som hører til under definition 2, er statistik, moderne algebra, sandsynlighedsregning og mængdelære.

---

[45] Blum, W.: Applications and Modelling in Mathematics Teaching - A Review of Arguments and Instructional Aspects, 1991, s. 10-29

[46] Pollak, H. O.: The interaction between mathematics and other school subjects, 1979, s. 232-248

3. Anvendt matematik betyder at tage udgangspunkt i en situation fra et andet område eller fra virkeligheden og udarbejde en matematisk fortolkning eller model, hvori matematik indgår og anvende resultatet i den oprindelige situation. Dette andet område behøver ikke at være fysik. Her går man fra virkeligheden til matematikken og tilbage til virkeligheden én gang.

4. Anvendt matematik betyder dét mennesker gør, når de anvender matematik. Det vil sige processen med at bevæge sig mellem den virkelige verden og den matematiske verden op til flere gange. Med resten af verden mener Pollak alle discipliner med menneskelig indblanding lige så vel som hverdagslivet. Der er her matematisk modellering kommer ind i processen. Det består ifølge Pollak i, at opdage en situation, som ønskes forstået; et forsøg på at formulere situationen til præcise matematiske begreber; dernæst matematisk og måske numerisk arbejde med at forstå modellens resultater; og en evaluering af modellen. En god model er ifølge Pollak en model, som i en eller anden grad har succes med at forklare eller forudsige verden ude omkring. Hvis modellen ikke har den forklarende/oplysende egenskab, så må den laves om. Det kan være en lang proces, og derfor skal man gå mellem virkeligheden og matematikken mange gange. Man må ligeledes overveje med hvilket formål modellen skal udvikles. Der er forskel i teorien, der ligger til grund for modellen.

Zalman Usiskin[47] præsenterer ligeledes forskellige opfattelser af anvendelser af matematik inden for forskellige områder, som han har observeret gennem tiden:

1. Anvendt matematik er paramatematik:
I starten af 60'erne i tiden med den nye matematik var en del lande modstandere af anvendelser, og dem som talte for anvendelser blev anset for ikke at forstå, hvad matematik handlede om. Anvendt matematik havde ringere status, og det samme gjaldt matematikere, der anvendte matematik. Der findes stadig nogle, som mener sådan. En del lærere blev matematikere for at undgå den virkelige verden. Sådan en lærer var Usiskin selv, påstår han.

2. Anvendt matematik er når en gren inden for matematik bruges til at studere noget fra en anden gren:
Der findes stadig nogen, som mener, at matematikinterne problemer er det samme som problemer fra virkeligheden. Denne forståelse dækker over, at Pythagoras sætning brugt til at finde afstanden mellem to punkter i planen er en anvendelse som de, der foregår i den virkelige verden.

3. Anvendt matematik er en service til dem, der skal studere matematik:
Matematikken kan have sin begrundelse i, at det kan anvendes i det videre uddannelsesforløb. Usiskin mener selv, at der er mere indhold i det end kun at handle om videreuddannelse.

[47] Usiskin, Z.: Conceptions of mathematical modelling and their implications for the future, 1993, s. 26-33; Zalman Usiskin; professor i matematik ved Universitetet i Chicago

4. Anvendt matematik er en adgang til matematik for dem, som ikke er gode til ren matematik:
Dette er en konsekvens af den første og tredje definition. Der er ikke andre muligheder for disse elever, da de ikke er gode til ren matematik, end at undervise dem i anvendelser.

5. Anvendt matematik er kun for de bedste elever:
Mange steder er det først på universitetsniveau, at eleverne kan se anvendelser af matematikken. Ofte på baggrund af den opfattelse, at et bestemt teoretisk grundlag skal være på plads først. Anvendelser og modellering er til den sidste time før jul og til varme sommerdage som belønning og et højdepunkt.

6. Anvendt matematik er fundamental forskellig fra ren matematik:
Anvendelser er rodede, induktive og problemerne har mange svar. Problemet er ifølge Usiskin, at det samme kan siges om den rene matematik.

7. Anvendt matematik har paralleller med ren matematik:
Den rene matematik har ifølge Usiskin to slags strukturer. Den ene består i det velkendte matematiske system med postulater, definitioner og teoremer relateret til logik og deduktion. Det andet består i den algoritmiske struktur i matematikken. "The typical student activities in this structure are expressed by the verbs find or simplify or invent. The highest level of thinking for the student or mathematician is to invent a new way of finding an answer to a problem - to invent a new algorithm".[48] Usiskin mener, at denne struktur, som den rene matematik har, men anvendt matematik ikke har, er årsag til problemerne med at indføre anvendelser i matematikundervisningen. Der er dog visse sammenfald mellem modellering og bevisførelse, som f.eks. at de begge bygger på en hvis-så opfattelse.

Opsamling
Der er mange ligheder mellem de enkelte didaktikeres beskrivelser af en problemløsningsproces og definitioner af de enkelte dele i processen. Både Niss, Blum, Pollak, Moscardini og Skovsmose beskriver modellrings- og problemløsningsprocessen, som begyndende med et område, der ønskes beskrevet ved hjælp af matematik. Afhængig af, om problemet er inden for ren matematik eller anvendt matematik, som Niss og Blum beskriver det, da er udgangspunktet for problemløsningsprocessen forskelligt. Selve processen og overvejelserne har meget til fælles. Dette område skal indsnævres ved overvejelser omkring, hvilke faktorer, der har betydning for modellen. Derved findes en model af området. Dette skal matematifiseres, hvorved den matematiske model fremkommer, og den skal derefter bearbejdes med matematiske løsningsmetoder. Det matematiske resultat oversættes tilbage til virkeligheden. Hvis processen stopper her, da er det et udtryk for, i Skovsmoses terminologi, at eleverne har en teknologisk viden til at kunne bygge matematiske modeller. I Niss og Blums forståelse, da er dette et eksempel på modellering.

Både Blum, Niss, Moscardini, Skovsmose og Pollak mener, at en modellerings- og problemløsningsproces skal indeholde en verificering af modellen, når den kommer i spil

[48] Usiskin, Z.: Conceptions of mathematical modelling and their implications for the future, 1993, s. 30-31

med virkeligheden igen. Det er muligt, at modellen skal justeres og tilpasses, så den kan tjene sit formål bedre, hvorfor processen vil begynde forfra. Den viden, der skal være et resultat af at arbejde med problemløsning, kalder Skovsmose for reflektorisk viden, og Niss mener, at verificering af modellen er et med til at skabe kritisk attitude hos eleverne overfor brugen af matematiske modeller. For Skovsmose er det essentielt at se på hvilke interesser, der ligger bag modellen. Ligesom det er vigtigt at forholde sig til den mængde af magt, der kan være bag de handlinger, der danner baggrund for modellens udseende.

Der er forskel mellem de didaktikere, der ønsker problemløsningsprocesser ind i undervisningen, Blum og Niss, og de, der ønsker undervisningen skal involvere modellering, Moscardini og Skovsmose. En problemløsningsproces vil indeholde modellering, mens det modsatte ikke nødvendigvis er tilfældet. Der en forskel på, om der er et "erkendt problem", som indgår i problemløsningsprocessen, og om der mere generelt skal opøves et kendskab til og matematisk teknologiske evner til at foretage en modellering. Om der i undervisningen skal inddrages problemløsningsprocesser eller modellering hænger sammen med argumentet for at inddrage anvendelser af matematik. Skovsmoses argument for at inddrage modellering er et kritisk argument, hvor det handler om, at eleverne ved at kunne modellere bliver kritiske overfor anvendelser af matematik. For Blum og Niss handler det om, at eleverne både skal blive kritiske overfor misbrug af anvendelser af matematik og også skal kunne anvende matematikken i deres hverdag og i fremtiden. Det kræver mere end at kunne modellere, det vil sige at kunne gennemføre en problemløsningsproces.

Jeg har til analysen valgt at benytte mig af Blum og Niss' beskrivelse af definitioner, der følger undervejs i en problemløsningsproces, samt Niss' lidt mere detaljerede beskrivelse af processen. Deres beskrivelse af en problemløsningsproces inkluderer både en problemløsningproces, der tager udgangspunkt i et ikke-matematisk genstandsfelt og i en problemløsningsproces, der tager udgangspunkt i matematikken selv. Definitionerne vil da kunne bruges til en analyse over en længere periode, som kan indeholde elementer af problemløsning, uden at området hører til definitionen anvendelser. Skovsmose, der ligeledes giver sin forståelse af en modelleringsproces, antager, at udgangspunktet er i virkeligheden. Moscardini beskriver mere overordnet hvilke elementer, der indgår i en modelleringsproces, og Pollak behandler ikke begrebet i samme omfang. Usiskin kommer ikke ind på elementerne i en modellerings- eller problemløsningsproces.

Som definition på anvendelser af matematik benytter jeg ligeledes Blum og Niss' definition, som er beskrevet og fremhævet i forbindelse med definitionen på en problemløsningsproces. Jeg har valgt det ud fra nogle overvejelser om, at det skal være et bredt begreb, der kan rumme mange former for relationer mellem matematik og virkeligheden. Hvis begrebet er for snævert vil der være mange relationer, der vil blive udelukket i analysen. <u>Anvendelser af matematik er alle de relationer mellem matematik og virkeligheden, vi kan forestille os. Med virkeligheden menes ikke-matematiske områder, det vil sige områder uden for matematikkens eget genstandsfelt.</u>

Usiskin og Pollak præsenterer forskellige opfattelser af anvendt matematik, de har observeret gennem tiden. Jeg vil benytte Pollak og Usiskins kategorier af opfattelser af anvendt matematik som inspiration til punkter, jeg vil være opmærksom på, om kommer til udtryk i materialet. Der kan være forskelle mellem deres og mine observationer af opfattelser, idet både Usiskin og Pollak kommer fra USA, hvor opfattelserne kan have været anderledes gennem tiden. Deres kategorier af opfattelser vil muligvis ikke kunne dække perioden 1903-88, hvad angår anvendelser af matematik i Danmark. Det kan derfor resultere i, at der efter endt analyse vil være tilføjet flere opfattelser eller observeret nogle andre opfattelser, end de nævnte.

2. 3 Hvordan skal der undervises i anvendelser af matematik?

Vi har i de to forrige afsnit set eksempler på, hvorfor matematikundervisningen skal omhandle undervisning i anvendelser og modellering, og hvad der skal indgå af elementer i undervisning i anvendelser af matematik. Det er så spørgsmålet om, hvordan det skal gøres. Der er mange spørgsmål, der kunne tages op. F. eks hvilke anvendelser og modeller skal inddrages i undervisningen? Hvordan skal anvendelser af matematik ind i undervisningen i forhold til de øvrige emner? Skal det ske integreret? I forløb? Hvilke aspekter i modelbygningsprocessen skal have særlig opmærksomhed i undervisningen? Hvilke typer af eksempler? Skal eleverne selv kunne udføre en problemløsningsproces, og hvordan skal læreren lære eleverne det? Det er kun visse aspekter inden for dette felt, jeg vil berøre i afsnittet.

Principper for og begrænsninger ved undervisning i anvendelser af matematik
For at øve elevernes modelleringskompetence skal undervisningen ifølge Moscardini udvikle en atmosfære, hvor eleverne ikke er bange for at gøre eller tage fejl.

"To do this the lecturer abandon his experts status and become af a guide or consultant...Splitting the students into small groups helps to create this atmosphere. In a group everyone has a say and the student learns to listen and accept criticism from his peers. The groups then report back to the class at frequent intervals which give practice in presentational skills. The students are encouraged to think freely with no restrictions except the knowledge that anything they say will be discussed. After a group has worked on a problem it is quite in order for the lecturer to discuss the groups work in front of the class."[49]

Blum[50] forestiller sig, at der i matematikundervisningen skal inddrages mange lokale og nogle globale anvendelses- og modelleringseksempler. Med lokale eksempler mener Blum mindre opgaver, der primært henvender sig til det tidligere omtalte psykologiske og pragmatiske argument. Disse opgaver optræder ofte som problemer og øvelser, og de kan findes i de fleste lærebøger i dag som f.eks. planetbane- og parabolantenneopgaver. Med globale opgaver tænker Blum på større eksempler henvendt til "det personlighedsdannende argument" og "det kulturelle argument", sådan at eleverne er mere indstillede på at fremme generelle evner (særlig modellering) og får et nuanceret billede af matematik. Nogle gange er en kunstig model bedre til undervisningsbrug end

[49] Moscardini, A. O.: The Identification and Teaching of Mathematical Modelling Skills, 1989, s. 41
[50] Blum, W.: Applications and Modelling in Mathematics Teaching - A Review of Arguments and Instructional Aspects, 1991, s. 10-29

en autentisk model. Der skal blot gøres opmærksom på det. Blum forestiller sig, at denne undervisning skal foregå i undervisningsenheder over flere timer.

Der er forskellige årsager til at inddrage andre områder end den klassiske fysik, når det handler om anvendelser af matematik. Ofte kan en anvendt problemsløsningsproces bedre vises ved ikke-fysiske eksempler. Det er dog stadig vigtigt, at der er relationen mellem fysik og matematik i undervisningssystemet, fordi der altid har været et intimt forhold mellem disse fag, og det har haft en stor rolle kulturhistorisk set. Så eleverne skal ifølge Blum også præsenteres for fysiske eksempler.

Når der inddrages anvendelser af matematik og modellering skal tanker omkring det pragmatiske, det udviklende, det kulturelle og det psykologiske argument tages op til overvejelse. For at opnå meta-viden og sætte eleverne i stand til at oversætte mellem den virkelige verden og matematik, og det gælder ikke kun eksempler, hvor sådanne oversættelser finder sted, skal problemløsningsprocessen analyseres, og eleverne skal være bevidste om det. Dette opnås bedst ved globale eksempler. For at opnå en omfattende forståelse for matematiske begreber, som også involverer relationer til den virkelige verden, så må disse begreber være en del af undervisningen og det på en fyldestgørende måde. Blum referer til Kaiser-Messmer, som har foretaget nogle empiriske undersøgelser omkring dette. Relationerne til virkeligheden må tjene til, at vise matematiske resultater på en mindre regelret måde, men skal samtidig være stringent.

G. Kaiser-Messmer[51] opstiller nogle teser for, hvordan hendes mål (se afsnit 2. 1) kan nås[52]:

Tese 1: "The ability to master everyday-life situations is reached by most students. How far this ability is developed depends on the themes of the teaching material, whether they are interesting and important for the students".

Tese 2: "The ability to apply mathematics is promoted within all students, but to different degrees. It is necessary to discuss the process of applying mathematics explicitly with the students several times. This ability cannot be expected as a transfer after a pure mathematical treatment. Modelling abilities are attainable in long-term learning processes, but only for parts of the class, especially high motivated and interested students. The promotion of component skills is more easily reached. Barriers to the promotion of modelling skills are schematic thinking procedures and sticking to recipes"

Tese 3: "An increase of motivation is reached for nearly all students. The degree of increase strongly depends on the theme of the teaching material, how far it coincides with the interest of the students. A short-term increase is attainable at once with small examples. As a long-term development it can be observed that the motivational effects lessen, because the students get used to real world examples".

[51] Kaiser-Messmer, G.: Application-orientated Mathematics Teaching, 1989, s. 66-72
[52] Kaiser-Messmer, G.: Application-orientated Mathematics Teaching, 1989, s. 71

Blum har observeret nogle argumenter imod inddragelse af anvendelser og modellering i undervisningen. De kan deles op og ses fra tre positioners side. Det kan være et:

Modargument set fra undervisningssituationens side: Det vil sige, at der f. eks. ikke er nok tid i matematiktimerne til at behandle anvendelser og modellering. Ikke-matematiske problemer skal ikke behandles i matematiktimerne, men i andre fag. Anvendelser ødelægger den æstetiske renhed og det kontekstfrie univers, matematik er kendt for.

Modargumenter fra elevens side. Anvendelser og modellering gør matematiktimerne mere krævende og mindre forudsigelige. Det er ikke nok kun at lære matematikkens begreber og instrumenter at kende.

Modargumenter fra lærerens side: Det stiller større krav til læreren, fordi der vil blive krævet en ikke-matematisk viden og kvalifikationer. Timerne bliver mere åbne og læreren vil ikke fremstå som en autoritet. Læreren kender ikke nok til eksempler og materiale velegnet til undervisning, og der er ikke tid til at finde ud af det.

For at overvinde hindringerne må der samarbejdes mellem lærere i gymnasiet, på universitetet og mellem andre fag. Der findes rigeligt med eksempler til undervisningsbrug. Så det er ikke en undskyldning for ikke at undervise i anvendelser. Blum[53] mener, at der i undervisningen skal være tid til anvendelser, om nødvendigt med nedskæring i det øvrige pensum. Han kan godt se, hvorfor modargumenterne set fra lærerens og elevernes optræder. Det er ikke let for begge parter at inddrage modellering og anvendelser. Men Blum mener, at anvendelser og modellering skal inkorporeres på alle niveauer i uddannelsessystemet.

Niss og Blum[54] har vurderet computerens muligheder og begrænsninger ved undervisning i anvendelser i matematik. Computerens udbredelse har givet nye dimensioner for den didaktiske debat om anvendelser af matematik. Uden matematik ville computeren ikke eksistere, og samtidig har computeren givet øgede muligheder for matematisk problemløsning. Men matematik kan godt klare sig uden computeren. Der er i de senere år udviklet programmer, der er mulige at inddrage i undervisningen, sådan at eleverne kan opleve selv at være i modelbyggerens sted. Niss og Blum ser fordele og ulemper ved den udvikling. Det er en fordel, at ellers komplekse modeller bliver mere tilgængelige for eleverne. Undervisningen kan koncentrere sig om problemløsningsprocessen, og eleverne kan se resultatet af at variere parametre i modeller. Samtidig er der en visuel fordel ved at bruge computere i og med, at den kan bruges til grafisk fremstilling.

Nogle af ulemperne kan til gengæld være, at de mere rutinemæssige færdigheder, som er med til, at eleverne består prøver og eksamener, bliver devalueret. Det har ligeledes den konsekvens, at undervisningen bliver <u>mere</u> krævende for alle elever, men <u>for</u> krævende for nogle, idet problemløsning og modellering er en ambitiøs aktivitet både med og uden

---

[53] Blum, W.: Applications and Modelling in Mathematics Teaching - A Review of Arguments and Instructional Aspects, 1991, s. 10-29

[54] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1991, s. 37-68

computer. Eleverne kan have en fornemmelse af, at undervisningen fjerner sig fra virkeligheden. Det er muligt, at den kritiske refleksion forsvinder, og studenteraktiviteterne erstattes af at trykke på knapper. Endelig vil nogle lærere muligvis være mere interesserede i computerens teknologi og programmering frem for problemløsningssprocessen. Dette er nogle problemer, som lærere og elever skal være opmærksomme på.

Pollak har ligesom Blum observeret hindringer og barrierer for at inddrage anvendelser af matematik i undervisningen:

a. Nogle matematikere ønsker ikke at ødelægge skønheden ved matematikken. Anvendelser skal der i lyset af dette argument undervises i andre steder end i matematiktimerne.

b. Nogle matematiklærere er bange for eller uvidende om andre fag. Uddannelsen af matematiklærere behandler ikke dette forhold i særlig høj grad.

c. Der er en tendens i den didaktiske debat til at føre matematikken "back to basics" efter år med diskussioner først omkring den nye matematik og senere om anvendelser af matematik .

d. Tiden til at undervise i anvendelser skal ofte tages fra de andre emner i matematikundervisningen.

Der kan også forestilles at være hindringer og barrierer forbundet med samarbejdet mellem andre fag og matematik set fra de andre faglæreres side. Det kan være følelsen af utilstrækkelighed af matematiske kundskaber, som igen hænger sammen med, at den matematik, der bruges i ikke-matematiske discipliner, kan have et andet udseende end det, der foregår i matematiktimerne.

Niss og Blum[55] vurderer, at hvis undervisningen skal inddrage anvendelser og modellering, da vil det være nødvendigt at ændre de traditionelle bedømmelsesformer og eksamener i gymnasiet. Eksamener har i dag en rolle som sorteringsredskab for elevernes videreuddannelse. De skal samtidig tjene til at evaluere elevernes udbytte af den undervisning, eleverne har modtaget. Hvis eksamener og bedømmelser skal vise indholdet og kompleksiteten i anvendelser og modellering og kunne teste de overvejelser, der er involveret i arbejdet, da vil det kræve andre bedømmelsesmetoder, end de standardiserede og centralt stillede opgaver, som vi har i dag i gymnasiet. For at lette implementeringen af anvendelser og modellering i undervisningen, da må der forsøg til, der kan give erfaringer at bygge videre på.

Det er en hindring for implementeringen af anvendelser af matematik, hvis lærerne er usikre overfor at inddrage andre fagområder, end dem, de kender til. Det mener Niss og Blum kan afhjælpes ved at sørge for, at lærerne i deres uddannelse får prøvet at

[55] Blum, W. og Niss, M.: Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction, 1991, s. 37-68

modellere med andre fagområder, sådan at de kan opfylde de krav, der stilles til den type undervisning. Samtidig er det vigtigt, at der lægges op til øget samarbejde mellem alle faggrupper på alle skoleniveauer.

Problemet med at implementere modelaspektet i den danske gymnasieundervisning i matematik er ifølge Morten Blomhøj[56], at det meste af tiden går med at sætte modeller op på computer og løse dem analytisk eller numerisk. Set i lyset af den begrænsede tid i undervisningen og elevernes færdigheder, da bliver eksemplerne ofte velkendte områder som fysik, biologi og kemi, der indgår i modellerne. Det kan give et unuanceret billede af en modelleringsproces og modellers rolle i samfundet. Han formulerer otte principper for tilrettelæggelsen af undervisningen, der kan hjælpe til at opnå en kritisk attitude overfor anvendelser af matematik:

1. Undervisning i matematiske modeller må omfatte som almindelig princip at vise det komplementære mellem matematisk viden og færdigheder på den ene side og kendskab til modelleringsprocessen og modellernes funktion på den anden side.

2. Planlægningen af undervisningen skal være fleksibel, så den kan gøre brug af elevernes motivation gennem arbejdet med modeller til at erhverve ny viden med nyt indhold.

3. Læreren må kommunikere indholdet som en vekselvirkning med eleverne gennem arbejdet med modeller i så stor en udstrækning som muligt.

4. Undervisningen skal indeholde metoder, sådan at eleverne får mulighed for at diskutere både matematiske og meta-matematiske aspekter mellem dem selv.

5. Processen med at bygge en model skal være central for undervisningen, og en skelnen mellem virkelighed og model skal gives særlig opmærksomhed.

6. Valget af modeller til undervisning i matematiske modeller på gymnasieniveau skal indeholde generelle karakteristika omkring problemer ved at bygge, anvende og kritisere pseudo-realistiske modeller.

7. Undervisningen må indeholde forløb, hvor eleverne selv skal arbejde med hele processen for dem selv med lærerens støtte. Det skal være lige fra at formulere problemet til at kritisere processen. Sådan en proces kan åbne op for diskussioner af personlig, social og politisk art i tilknytning til det aktuelle problem.

8. Undervisningen skal indeholde arbejde med autentiske modeller med forskellige funktioner og status. De skal igennem deres arbejde med selv at opbygge modeller lære, at det er muligt at kritisere matematiske modeller på mange niveauer, og at kritikkens relevans afhænger af omstændighederne ved den aktuelle anvendelse.

[56] Blomhøj, M.: Incorporating the Aspect of Mathematical Modelling in the Danish Gymnasium Curriculum: Problems and Perspectives, 1991, s. 187-194

Der er andre implementationsproblemer, hvilket ifølge Blomhøj skyldes, at der i undervisningssystemet hersker en vis inerti. Det er også et problem, at undervisningen i høj grad er styret af lærebogssystemer og lægger op til i høj grad at træne eleverne i at erhverve færdigheder, så de kan opnå høje karakterer til den skriftlige eksamen.

Blomhøj konstaterer, at den nye gymnasiereform, der trådte i kraft 1988, har medført, at de teoretiske emner er skåret ned i forhold til tidligere for at få plads til de nye aspekter, men eksamen er stadig den traditionelle. Men den nye reform kan danne en god baggrund for at ændre matematikundervisningen fremover. Det kræver blandt andet udvikling af nyt undervisningsmateriale.

Erfaringer med undervisning i anvendelser af matematik

Jan de Lange[57] beretter, at det i Holland har været en succes med indførelsen af anvendelser i matematikundervisningen. Motivationen og deltagelsen i undervisningen er øget, og relevansen af matematikundervisningen er klar for alle. Der er dog alligevel nogle problemer med implementeringen, før det kan kaldes en succes. Det er problemer som "the loss of teaching; the loss af basic skills and routines; the loss og structure; the loss of clarity of goals; the complexity og authentic assessment".[58]

Ved at bruge autentiske problemer i matematikundervisningen er undervisningen blevet mere kompleks. Det er ikke længere nok for læreren at undervise, men han skal i stedet lære kunsten at undervise i anvendelser. Læreren må selv planlægge sin undervisning. De problemer, han vælger at inddrage i undervisningen kan have flere svar eller et svar og flere strategier. Det sker, at eleverne kommer med svar, som læreren ikke havde overvejet. Her bliver læreren usikker og vil muligvis ikke vise sit eget svar, og han føler, det er en trussel mod sin egen position. Læreren vil få svært ved at bedømme elevernes arbejde.

Med hensyn til reduceringen af de basale færdigheder er der ifølge De Lange ikke problemer. Da det nye pensum for gymnasiet blev indført i Holland, var der skepsis blandt flere omkring reduceringen i pensum i forhold til det forrige pensum. Men eleverne fra den nye undervisning har de samme færdigheder, som de tidligere elever. Og de nye elever er bedre til at klare problemløsningsopgaver. Efterhånden som der bliver indført nye eksamensformer, bliver det svært at have den holdning, at de nye elever er ringere, end de tidligere.

Det kan være et problem for lærere og elever, at undervisningen mangler matematisk struktur. Undervisningsmaterialerne i Holland er bygget tematisk op, og det vil være lærerens opgave at sørge for, at eleverne når derhen, hvor det er tænkt. Når undervisningen styres af emnet og diskussionerne, må læreren fortælle eleverne, hvilken struktur, der er bag indholdet.

"The new goals emphasise the reasoning skills, communication and the development of a critical attitude. Together, these are popularly called "higher-order" thinking skills, which

[57] De Lange, J.: Innovation in Mathematics Education using Applications - Progress and Problems, 1993, s. 3-17
[58] De Lange, J.: Innovation in Mathematics Education using Applications - Progress and Problems, 1993, s. 8

were seldom if ever present in traditional education and assessment. The change towards a "thinking" curriculum forces us to focus on "thinking" assessment as well...Most experts agree that we cannot operationalise all goals in mathematics education with tests of the multiple-choice or open-question format. However, these types og assessment offer, in our opinion, more possibilities than are usually exploited".[59]

Ellers mener de Lange, at der virkelig er gjort fremskridt i Holland med at implementere anvendelser i undervisningen, og ser man på undervisningen rundt i verden, da er udviklingen positiv og lovende.

Fagkonsulenterne for matematikundervisningen i det danske gymnasium, Bent Hirsberg[60] og Kirsten Hermann[61], fortæller i en artikel[62] om opgaver til skriftlig eksamen efter gymnasiereformen af 1987. Undervisningen er delt op i to niveauer, obligatorisk og højt niveau. Der skal undervises i fastlagte matematiske emner, men derudover skal der i undervisningen indgå tre aspekter. Det er det historiske aspekt, modelaspektet og matematikkens indre struktur:

"The models and modeling aspect aims at making the student familiar with the building of mathematical models as representations of reality; they are given an idea of the potentials and limitations in the application of mathematical models. In addition, the instruction should enable them to carry out a not-too-complex modeling process."[63]

Eksamen i matematik i det danske gymnasium består af en skriftlig (obligatorisk) eksamen og en mundtlig (af ministeriet udvalgte klasser) eksamen. De skriftlige eksamensopgaver udarbejdes af en opgavekommission og består af rene matematiske opgaver og opgaver, der indeholder anvendelser af matematik og simpel modellering:

"Most problems are compulsory, but there are also a few optional problems. At B-level [obligatorisk niveau] approximately 25 percent of the problems are simple, aiming at differentiating between different categories of less able students. The remaining problems are more complex of nature...The students are not required to mathematize problems themselves, except in very simple cases."[64]

I England afsluttedes i 1993 et 5-årigt forsøg med at implementere og teste matematisk modellering i en akademisk undervisning for 16-19 årige, det vil sige, hvad der svarer til matematikundervisningen på gymnasieniveau. Ann Kitchens og Julian Williams[65] fortæller, at projektet er forløbet med succes og at der fra 1992 er 16000 elever i

[59] De Lange, J.: Innovation in Mathematics Education using Applications - Progress and Problems, 1993, s. 13 og 16

[60] Bent Hirsberg; cand. scient. i matematik og fysik; lektor ved Rosborg Gymnasium; fagkonsulent 1986-1991; fmd. for Matematiklærerforeningen.

[61] Kirsten Hermann; cand. scient. i matematik; lektor i matematik ved Marselisborg Gymnasium; fagkonsulent 1986-90.

[62] Hermann, K. og Hirsberg, B.: Upper secondary assessment in Denmark, 1993, s. 129-137

[63] Hermann, K. og Hirsberg, B.: Upper secondary assessment in Denmark, 1993, s. 130

[64] Hermann, K. og Hirsberg, B.: Upper secondary assessment in Denmark, 1993, s. 131-132

[65] Kitchens, A. og Williams, J.: Implementing and assessing mathematical modelling in the academic 16-19 curriculum, s. 138- 150; Ann Kitchens og Julian Williams; Mechanics in Action Project, University of Manchester

England, der er begyndt en undervisning, der involverer modellering og problemløsning. Projektet medførte nye undervisnings- og evalueringsmetoder.

"In order to change both student and teacher behaviour, modelling and problem solving must be assessed. Otherwise it would be recognised by both teachers and students as a worthy part of the curriculum, but then ignored."[66]

Derfor skal eksamen bestå af, at:

"to develop skills of modelling,...to develop an appreciation of the links between mathematics and the real world.. to be able to model both in familiar and unfamiliar contexts...the ability to identify problems...to set up a model...to translate a mathematical solution into everyday language...to validate results."[67]

Konklusionen blev, at for at kunne teste disse egenskaber kunne eksamen ikke være tidsbegrænset. I stedet blev der inddraget tests løbende, som ikke var tidsbegrænsede, hvor eleverne kunne tale frit om problemer i eget tempo. Disse tests kunne både være skriftlige 2-timers opgaver og 8-timers projektforløb ud fra et emne, som eleven selv valgte. Det var dog ikke uden problemer, idet både disse former for tests og undervisning i modellering var ukendt for mange lærere. Lærerne var ligeledes usikre overfor, i hvor høj grad de skulle være styrende i forløbet. Det vil derfor kræve en anden form for læreruddannelse for at få løst disse problemer.

Opsamling

Det ser ud til, at et stort problem ved at implementere anvendelser i undervisningen er eksamensopgavernes karakter. Både de Lange, Blomhøj og Niss er fortalere for en eksamensform, der afspejler en undervisning i anvendelser. En sådan undervisning kræver andre arbejdsformer, end der har været praktiseret i mange år. I både Danmark, Holland og England er der arbejdet med at få anvendelser af matematik ind i undervisningen. I Danmark er vi ikke nået til samme implementeringsstadie som i Holland, hvor der allerede er erfaringer med undervisningen lagt an på, at læreren selv skal planlægge sin undervisning, diskutere og præsentere undervisningens struktur for eleverne. I Holland har man taget konsekvensen og ændret eksamensformen. En forudsætning for inddragelse af anvendelser af matematik i undervisningen er, at det udgør en del af evalueringen af undervisningen. Det er muligt, at der skal andre bedømmelsesmetoder til, som vægter de omtalte højere-ordens-tanker højt. Det har i Holland vist sig, at lærerne har svært ved at bedømme disse situationer. I England har man forsøgt at opstille nogle retningslinjer for, hvordan eleverne i en undervisning baseret på anvendelser kan testes. Det skal blandt foregå ved løbende test og udarbejdelse af mindre projekter, hvor modelleringsegenskaber indgår. I Danmark inddrages anvendelser af matematik ved den skriftlige eksamen. Den skriftlige eksamen bestående af opgaver stillet fra ministeriets side, og de er meget styrende for den daglige undervisning. Derfor må man, hvis anvendelser af matematik skal tages alvorligt,

[66] Kitchens, A. og Williams, J.: Implementing and assessing mathematical modelling in the academic 16-19 curriculum, s. 140

[67] Kitchens, A. og Williams, J.: Implementing and assessing mathematical modelling in the academic 16-19 curriculum, s.140

inddrage anvendelser ved eksamen. Uddannelsen af lærerne spiller ligeledes en rolle. Hvis anvendelser af matematik skal ind i undervisningen, da vil det betyde, at lærerne i løbet af deres uddannelse skal præsenteres for anvendelsessituationer. Niss mener, at det er en måde at sætte lærerne i stand til at kunne tackle problemer og overvinde barrierer ved indførelse af anvendelser af matematik.

Hvad angår karakteren af eksempler og opgaver, der skal inddrages i undervisningen, da er det flere didaktikeres holdning, at der skal være opgaver af en type, der lægger op til modelleringsovervejelser. Det vil forudsætte, at disse opgaver er åbent formuleret. Det vil sige, at eleverne skal overveje de matematiske løsningsmetoder. Åbne opgaver behøver ikke nødvendigvis i sig selv at være en del af en modelleringsproces. Men i modsætning til de lukkede opgaver, hvor eleverne kender den matematiske løsningsmetode og kun skal afklæde problemet, da kræver de åbne opgaver en større matematisk forståelse.

Alle de omtalte didaktikere er enige om, at der skal indgå modelleringsprocesser, og at eleverne skal besidde modelleringsevner. Blomhøj foreslår, at der i undervisningen skal indgå forløb, hvor eleverne selv skal formulere og diskutere sig frem til en konstruktion af en matematisk model. De skal have lov til at arbejde lidt for dem selv. Det kan betyde, at der kommer flere overvejelser frem, uden at eleverne tænker på, om dét, de siger, er "rigtigt". Modelleringsevner opnås ikke ved, at læreren gennemgår en modelleringsproces. Eleverne skal prøve det selv. Der er derfor i undervisningen nødt til at indgå undervisningsmetoder som f. eks. gruppearbejde og diskussioner mellem lærer og elever. Moscardini er af den opfattelse, at der skal skabes en atmosfære i undervisningen, der lægger op til at inddrage anvendelser. Det indebærer ligeledes, at der skal arbejdes i grupper, hvor gruppearbejdet skal diskuteres i klassen.

Anvendelserne skal for alle didaktikernes synspunkt omhandle problemer fra den virkelige verden. Der skal ifølge Blum være både globale og lokale opgaver i undervisningen, og genstandsfelterne skal ikke kun være fra fysik. Kaiser-Messmer mener, at det er vigtigt for elevernes motivation, at der inddrages autentiske eksempler fra den virkelige verden, som er vigtige og interessante for eleverne. Hun har observeret undervisningssituationer, hvor det var tydeligt, at motivationen blandt eleverne steg markant, når anvendelserne havde relevans for eleverne. Der vil altid være en diskussion om, hvad der er af relevans for eleverne. Hvis man tænker på, at matematikundervisningen skal føre til, at eleverne bliver kritiske samfundsborgere, så må det have betydning for de typer af områder, der behandles. Det må betyde, at der ligeledes skal være opgaver af mere samfundsrelevant karakter f. eks. om miljø og vækst. Det er ikke nok at konstruere en pseudo-virkelighed, som ikke er interessant i nogen sammenhæng. Derfor kan det være nødvendigt, at sætte sig ud over, hvad eleverne kunne tænkes at synes spændende - afhængig af argumentet for og målet med at inddrage anvendelser.

2. 4 Analyseapparat

Jeg vil i analysen af materialet benytte mig af Niss og Blums definition af anvendelser, som enhver relation mellem virkeligheden og matematik, vi kan forestille os. Når jeg i både min beskrivelse af perioden 1903-88 og i analysen af perioden vil bruge begrebet virkelighed, da er det i den betydning, at virkeligheden er et ikke-matematisk genstandsområde. Om det er virkelighed for eleverne i gymnasiet, vil altid kunne diskuteres. Det er min intention at analysere og kategorisere opfattelser og betydninger af anvendelser af matematik i perioden 1903-88.

Til begrebsafklaringen benytter jeg Niss og Blums begrebsdefinitioner til at kategorisere de enkelte situationer i materialet, der vil være relevante at analysere. Det er ligeledes Blum og Niss' observerede argumenter gennem de sidste tiders debat, der vil danne baggrund for bestemmelse at typerne af formål i analysen.

Der skal i analysen skelnes mellem argumenter for anvendelser af matematik og argumenter for matematikundervisningen i det hele taget. Når jeg møder en situation, hvor det drejer sig om argumenter for anvendelser af matematik, da kommenterer jeg i analysen argumentet efterfulgt af en parentes med argumentets nummer. Det vil forekomme, at jeg kategoriserer argumenter for matematikundervisning efter samme mønster. Det vil da kun blive beskrevet uden parentes med argumentets nummer. Jeg skal i den forbindelse gøre opmærksom på, at Niss og Blum's observerede argumenter omhandler anvendelser af matematik og ikke overordnede mål med den generelle matematikundervisning.

Der vil i materialet muligvis forekomme argumenter, hvor matematikundervisningen skal bidrage til almendannelsen eller dannelsen. Der vil til forskellige tider være forskellige betydninger af, hvad der ligger i dét begreb. Det handler i høj grad om, hvilke evner skal gymnasiet bidrage til, at eleverne opnår. Jeg vil ikke behandle begrebet yderligere, end at når det optræder i debatten, vil jeg bemærke det.

Som beskrevet i fremgangsmåden har jeg delt materialet op i tre niveauer, inden for hvilke analysen skal foregå. Da man ikke altid kan tage ordet anvendelser af matematik for pålydende, må begrebet anvendelser af matematik analyseres i en sammenhæng, så det er muligt at forstå, hvad begreberne betyder. Det vil derfor være relevant at få afklaret følgende punkter og de dertil hørende spørgsmål til materialet. Spørgsmålene er afledt af det teoretiske kapitel, og de skal stilles til alle relevante situationer i materialet:

Analysen består af:
1. Begrebsafklaring
2. Typer af formål
3. Indhold i ovenstående.
4. Former for arbejde, der indgår i ovenstående.

Ad 1. Er der tale om anvendelser af matematik, eller falder situationen udenfor begrebet? Er der i stedet tale om en anden begrebstype? Her benyttes Niss og Blums definitioner af anvendelser og af en problemløsningsproces. Hvilket didaktisk forhold er der tale om?:

a. at eleverne selv skal opstille den matematiske model, men modellen er indlysende, så der skal ikke tænkes over opstillingen af modellen.

b. at der bliver diskuteret modeldannelse, uden at eleverne selv skal bygge matematiske modeller.
c. at der skal bygges modeller, men ikke selvstændig modellering af eleverne.
d. at eleverne skal udføre selvstændig og kritisk modellering, hvor problemet findes og analyseres af eleverne.

Ad 2. Hvilke argumenter eller begrundelser for anvendelser af matematik er der tale om? Til det benytter jeg Niss og Blums 5 argumenter, de har observeret gennem tiderne, som udgangspunkt for analysen.

Ad 3. Hvad betyder anvendelser af matematik? Hvad betyder virkelighed? Hvad er f. eks. dagligt liv? Er der en kerne af noget ægte eller er det en pseudovirkelighed? Tages virkeligheden alvorligt på dens egne betingelser? Er det en ægte/autentisk anvendelse? En autentisk anvendelse vil i rapporten være en anvendelse af matematik, hvor løsningen på anvendelsen kan benyttes i den verden, som anvendelsen beskriver. Hvilken opfattelse af anvendelser af matematik kommer da til udtryk? Her benyttes Pollak og Usiskin som inspiration til at observere opfattelser af anvendelser af matematik i tiden 1903-88. Det vil senere vise sig, om materialet fra hele perioden byder på andre opfattelser, end dem, de har observeret.

Ad 4. Hvilke former for arbejde skal der indgå? Hvor skal anvendelsen foregå? Er anvendelserne taget ind i teksten eller kun i opgaver? Er der et oversættelsesjob for eleverne i opgaverne?

Efter endt analyse skal det overvejes, om der er forskel på retorik og realitet i perioden. Kan der ses en kontinuert udvikling eller er der brud/skel i perioden med hensyn til anvendelser? Er periodeinddelingen passende, når det handler om anvendelser af matematik? Hvilke opfattelser af anvendelser af matematik kommer til udtryk gennem perioden? Dette skal give et billede af status og funktion af anvendelser af matematik i tiden 1903-88.

Kapitel 3 Matematikundervisningen i årene 1903-1935

Dette kapitel skal forsøge at illustrere en udvikling i debatten omkring anvendelser af matematik i undervisningen, der har været blandt fagfolk. Almenskoleloven er en rammelov, der først bliver udfyldt efter faglige diskussioner og ender med den kongelige anordning af 1. december 1906 med den tilhørende bekendtgørelse af 4. december 1906. Derfor starter diskussionen i dette afsnit fra 1903 og fortsætter indtil 1935, hvor en ny anordning af 9. marts og bekendtgørelse af 13. marts for gymnasiet indføres.

Vægtningen i betydningen af den studieforberedende rolle overfor den almendannende rolle er forskellig fra tid til anden og fra matematiklærer til matematiklærer. Det får betydning i forhold til diskussionen om anvendelser af matematik i undervisningen. Der vil være forskellige argumenter fremme for eller imod anvendelser, som bunder i holdningen til gymnasiets og herunder matematiks studieforberedende og almendannende funktion.

3. 1 Inspiration fra Preussen

Omkring århundredeskiftet tog mange matematikere på udenlandsophold ved universitetet rundt omkring i Europa. Mange gjorde ophold ved universiteterne i Preussen. Derfor var mange nye idéer inden for skolevæsenet inspireret derfra. Det var både en pædagogisk inspiration og en faglig inspiration.

Det er netop et udenlandsophold, der forhindrer Tommy Bonnesen[1] at deltage i forhandlingerne om gymnasiets indretning i den nært foreliggende bekendtgørelse. Redaktionen på Matematisk Tidsskrift opfordrer ham til at give sit besyv til debatten.

Bonnesen indleder med at præsentere to holdninger for principper med gymnasiets matematikundervisning. Han refererer organisator bag Almenskoleloven af 1903, M. C. Gertz[2], for at mene, at matematik kun har en lille praktisk betydningen for dem, der afslutter skolen ved 4. klasses mellemskoleeksamen, hvorfor der må lægges vægt på den formelle, logiske træning undervisningen kan give. Bonnesen pointerer, at der med lethed kan findes andre, der anser matematik som kun havende værdi "ved den Rolle, Matematikken spiller i det praktiske Liv, og kun ved at fremdrage Anvendelserne som det væsentlige, vil det være muligt at udvikle den rette Forståelse og Interesse hos Eleverne"[3].

Bonnesen konstaterer med hensyn til anvendelser af matematik i den eksisterende matematikundervisning i mellemskolen, at tidligere har selv oplagte områder som f.eks.

---

[1] Tommy Bonnesen 1873-1935, mag. scient i matematik; fik universitetets guldmedalje i matematik i 1898; studieophold i Bologna og Gøttingen; rektor for Østre Borgerdydskole; professer i geometri ved Den polytekniske Læreanstalt; medredaktør af Matematisk Tidsskrift.

[2] Martin Clarentius Gertz 1844-1929: 1880; cand. philol, 1880 professor i klassisk filologi; fmd. for undervisningsinspektionen ved de lærde skoler 1888-1906. I 1906 ophørte universitetets inspektion med at fungere. [Skovgaard-Petersen, s. 38]. Ved nærmere oplysninger om Almenskolelovens tilblivelse kan henvises til Skovgaard-Petersen.

[3] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 2

trigonometri, været meget løsrevet fra virkeligheder. Selv de områder, der er direkte praktisk anvendelige. "Og ser vi til de Anvendelser af Matematikken, som frembyder sig indenfor Skolens Grænser, navnlig i Fysikken, da staar det vel kummerligt til"[4]. For gymnasiets vedkommende påpeger Bonnesen, at eleverne i øjeblikket lærer analyse for geometriens skyld, men at det burde være omvendt. "Det er "Analysen", som ved den nye Ordning bør bringes fuldstændig i Forgrunnden; hvad der skal fremhæves er med et moderne Slagord: "Funktionsbegrebet i grafisk fremstilling"."[5]

Bonnesen understreger, at det for læger, jurister, statistikere vil være vigtigt at kunne se matematikken fremstillet grafisk. Derfor synes han, at der skal lægges stor vægt på funktionsbegrebet, som er ret nyt på det tidspunkt. Han håber, at denne udvikling senere vil kunne smitte af på undervisningen i mellemskolen, hvor loven på dette tidspunkt er udformet. Han mener, at eleverne ligefrem bør have undervisning i grafisk fremstilling. Netop funktionsbegrebets anvendelighed i fysik bør eleverne lære samtidig med den matematiske deduktion. Ved funktionslære forventer han ikke kun det at vise "kurvetegning", men at vise "Funktionens Voksen og Aftagen, Bestemmelsen af Tangenten ved den Afledede, Maksimum og Minimum, Fladeberegning...og Metodens Anvendelighed i Fysikken". Med hensyn til opgaver, der gælder det om "fremfor alt at give Eleverne Lejlighed til at løse Opgaver, som rent praktisk frembyder sig for dem, og ikke blot for Tilfældet indrettede Opgaver".[6] Med fare for at blive beskyldt for at ville gøre gymnasiet til en fagskole[7], da mener Bonnesen, at det skal være hensigten, at eleverne skal have følelsen af, at de kan bruge deres lærdom udenfor skolens rammer. Der er vigtigt, at "vore Elever kan blive handledygtige Mennesker, samtidig med, at de erhverver sig Dannelse...vi maa inden for den Idealitet, som vi ønsker at finde hos dem, fremarbejde alt, hvad der kan tjene til at udvikle Selvvirksomheden og derved Karakteren".[8]

Derefter refererer Bonnesen til udviklingen i Tyskland, Italien og Schweiz, hvor funktionsbegrebet florerer i undervisningen. I Tyskland med Felix Klein[9] som talsmand. Bonnesen har selv overværet undervisningen på det humanistiske gymnasium i Gøttingen og konstaterer, at eleverne her "med Iver og Fornøjelse arbejder efter den grafiske Metode, der giver dem forøget Anledning til Virksomhed i Timerne (Millimeterpapir)"[10]. Han erkender, at det tager lidt tid, når det skal indøves, men fordelen viser sig i længden, da eleverne opnår større forståelse. Den egentlige sammenhæng viser sig især i læren om proportionale størrelser.

Bonnesen kommer med et forslag til, hvad matematikundervisningen på de forskellige linjer skal indeholde. På den nysproglige linje foreslår han, at anvendelser for en stor del

---

[4] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 3
[5] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 4
[6] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 5
[7] På det tidspunkt blev mange fagfolk, hvis de ønskede, at gymnasiets undervisning skulle indrettes ud fra et nytteformål, beskyldt for at gøre gymnasiet til en fagskole. Det er dannelsesdiskussionen fra 1880'erne, der stadig kan høres.
[8] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 5
[9] Felix Klein 1849-1925; præsident for ICMI 1908-25
[10] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 8

skal hentes fra praksis, "særligt direkte fra Fysikken og den Matematiske Geografi". Hertil skal samarbejdet mellem fysik- og matematiklæreren styrkes. Resultatet vil ifølge Bonnesen blive, at matematikken ikke er så svær, at det blokerer for indlæring, og er på et niveau, så eleverne bliver motiverede samtidig med, at det er logisk udviklende. Det vil også komme til gavn for elever, der skal studere medicin. Han mener, at matematik og fysik burde kunne få tildelt en time mere tilsammen. Gerne på bekostning af fagene dansk eller oldnordisk, som han mener, har henholdsvis et for stort timetal med et for lille udbytte.

For den matematisk-naturvidenskabelige linje ser det lidt anderledes ud. Her er "en direkte Tilknytning til den matematiske fysik, særligt Mekaniken, nødvendig og i høj grad udviklende"[11]. Til forskel fra den nysproglige linje, da taler han ikke noget om, at anvendelser af matematik skal give indtryk af, at matematik kan bruges til noget. Der behøves ingen argumenter for det på den matematiske linje. Der skal ifølge Bonnesen afsættes tid til projektionstegning, idet både lærere og elever ville nyde godt af det. Tiden kan tages fra danskundervisningen. Formålet med dette skulle være en udvikling af rumsansen og indøvelse i at se på tegninger. "I det praktiske Liv forekommer jo temmelig hyppigt "Planer", som man maa kunne finde sig til Rette paa".[12]

Den klassisk-sproglige afdeling bør have samme pensum som den nysproglige, men da der ikke er afsat tid til fysik, er Bonnesens interesse ikke stor for undervisningen her. "Tilknytningen til Fysikken for mig er af afgørende pædagogisk, dannende og praktisk Betydning". Hvis ikke fysikken inddrages, da bliver undervisningen "altfor matematisk abstrakt...og ren Teori uden Forbindelse med Livet".[13] Han håber for matematikundervisningen, at den vil virke udviklende pga. stoffets mangesidighed og rigdom på metoder, der åbner udsigter til videre matematiske horisonter. Ligesom han mener, at undervisningen bliver mere almendannende med "en uafbrudt og tæt Tilknytning til Anvendelser i det daglige Liv, i Fysikken osv.".[14] Det vil kunne spare ekstra forberedelse og derved studietid for de sproglige studenter, der vil studere medicin. De matematiske studenter burde som en følge deraf kunne spare en eksamen i fysik.

Diskussionen om matematik i gymnasiet fortsætter i Matematisk Tidsskrift 1906, hvor Ivar Heckscher[15] ligeledes beretter om og er inspireret af det preussiske skolesystem. I 1904 blev der i Breslau nedsat en kommission, der skulle udarbejde reformforslag til undervisningen i matematik og naturvidenskab i de højere skoler. I denne kommission sad bl.a. Felix Klein. Et af dens programpunkter var, at den anerkendte matematik som dannelsesværdi fuldt på højde med sprogene. Undervisningen "maa give Afkald paa at

[11] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 13

[12] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 12

[13] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 13. Det må være på idéplan, at der ikke skulle være afsat tid til fysik på den klassisk-sproglige linje, idet timetabellen viser, at der for de to linjer er afsat det samme antal timer til naturvidenskabelige fag.

[14] Matematisk Tidsskrift 1905, s. 14

[15] Det er ikke lykkedes mig at finde Ivar Heckscher i diverse opslagsværker. Jeg ved, at han er matematiker og har været på udlandsophold i Preussen.

indøve praktisk værdiløse Specialkundskaber og i stedet dyrke Evnen til matematisk Betragtning og Opfattelse af Forteelser i Naturen og i de menneskelige Forhold"[16].

Kommissionen kom ifølge Heckscher til det resultat, at den nye læseplan i stor grad skal uddanne rumanskuelsen og opdrage til funktionel tænkning. Et middel til at udvikle rumanskuelsen skulle være at benytte eksempler fra virkeligheden, og "Benyttelse af Modeller anbefales"[17]. Det påpeges, at der er en fordel ved at knytte forbindelse mellem fysik og matematik. "Opgaver skal hentes fra Fysikken, især fra Mekanikken, ikke alene for at knytte nøjere Forbindelse mellem den matematiske og fysiske Tænkning, men også for at tage noget af Byrden fra Fysiklæreren".[18] Det er Heckschers vurdering, at tendensen indenfor reformer er den, at matematik skal tildeles andre roller "end den at være den store Dressør for Elevernes logiske Sans".[19]

Denne tendens gør sig ikke kun gældende i Tyskland, og Heckscher fremhæver også Frankrig, hvor der i læseplanen af 1902 lægges vægt på matematikkens anvendelser. Det kommer til udtryk på den måde, at der "allerede i den Klasse, der svarer til vores 2den Mellemklasse, tales om Abscisser og Forandring af Begyndelsespunkt, om den jævne Bevægelse og lignende, i den derpaa følgende har vi grafisk Fremstilling og vi ender paa den matematiske Linje med Differential- og Integralregning".[20] Heckscher stiller det spørgsmål, om samme tendens er at se i Danmark. Det mener han, at der er. Blot ikke på mellemskoleplan[21], hvor kun konstruktion er fremhævet.

Heckscher fremhæver "Forslag til undervisningsplaner for gymnasiet" udarbejdet af 3 lærerforeninger, hvor nye tendenser for undervisningen kommer frem. Formålet med matematik på de sproglige retninger er, at "det maa tage Sigte paa interessante praktiske Anvendelser og samtidig udvikle Sansen for det rent matematiske". Om den matematiske retning lyder det: "Heller ikke bør de praktiske Anvendelser lades ude af betragtning, dels fordi de fængsler Eleverne, dels fordi der bør tages Hensyn til de Elever, der ikke fortsætter Studiet af Matematikken".[22] Nærmere om hvordan planerne er tænkt, står der ikke noget om. Lidt senere henviser han dog til planen for de sproglige, hvor der står om de retvinklede koordinater og deres anvendelse til grafisk fremstilling.

3.2 Anordning og bekendtgørelse af 1906

I 1906 bliver Almenskoleloven af 1903 fyldt ud med et regulært indhold for gymnasiets matematikundervisning og resulterer i anordningen af 1. december 1906 og bekendtgørelsen af 4. december 1906. (se appendiks 1). Anordningen er et resultat af fagligt udvalgsarbejde, som blandt andet Bonnesen skulle have deltaget i, hvis han ikke havde været forhindret.

---

[16] Matematisk Tidsskrift 1906, s. 99
[17] Matematisk Tidsskrift 1906, s. 103
[18] Matematisk Tidsskrift 1906, s. 105
[19] Matematisk Tidsskrift 1906, s. 106
[20] Matematisk Tidsskrift 1906, s. 106
[21] Bekendtgørelsen for mellemskolen er på dette tidspunkt trådt i kraft.
[22] Matematisk Tidsskrift 1906, s. 107

I Anordningen af 1. december 1906 er der fastsat følgende fordringer omkring anvendelser af matematik:

På de sproglige linjer skal der arbejdes med emneområderne aritmetik og algebra og geometri. Under emnet aritmetik og algebra skal "Sammensat Rentesregning med ganske simple Anvendelser på Annuiteter" behandles. Ordet "anvendelser" kommer til udtryk ved emnet geometri under trigonometriske funktioner af spidse og stumpe vinkler arbejdes "med simple Anvendelser paa Trekantsberegninger". Der fordres også, at der gennemgås "Retvinklede Koordinaters Anvendelse til grafisk Fremstilling af simple Funktioner".

På den matematiske linje er emnerne aritmetik og algebra, herunder rentesregning, plangeometri, trigonometri, stereometri, analytisk plangeometri og et valg mellem enten aritmetik og algebra, analytisk geometri og stereometri eller infinitesimalregning. Ordet anvendelser kommer ind i forbindelse med "De sfæriske Grundformler og deres Anvendelse paa den retvinklede sfæriske Trekant". Matematik, der anvendes udenfor sit eget felt findes under infinitesimalregningen, hvor "Simple Anvendelser paa geometriske og fysiske Opgaver" skal indgå. Infinitesimalregning er dog et frivilligt emneområde.

I bekendtgørelsen af 4. december 1906 er formålet med matematikundervisningen for de to sproglige linjers vedkommende:

"Formaalet for Undervisningen paa de to sproglige Linier skal ikke saa meget være at bibringe Eleverne omfattende Kundskaber i Matematik, idet Anordningen i saa Henseende ikke i sine Krav er gaaet meget udover det, der tidligere krævedes til IV. Klasses Hovedeksamen, som at skole Elevernes Tænkeevne ved at indøve den gennem Matematikkens stringente Betragtningsmaader."[23]

Bekendtgørelsen siger noget om, at der generelt i undervisningen på de sproglige linjer lægges vægt på andre værdier end det rent matematiske. Eller sagt på en anden måde, så skal der igennem det faglige indhold opnås noget yderligere, som her er evnen til at tænke stringent.

For den matematiske linje nævnes ikke noget formål. Der er altså ikke behov for nogen begrundelser for hverken anvendelser af matematik eller for matematik i det hele taget. Det hænger sammen med, at formålet for den matematiske linje var at forberede til videre studier på universitetet eller andre højere læreanstalter.

3. 3 Tiden efter anordningen af 1906

Når en ny anordning vedtages, vil der altid være reaktioner fra fagfolk, der har en mening om indholdet. Nogle vil være tilfredse med indholdet, mens andre vil være det modsatte. Efter en indkøringsperiode vil undervisningen blive taget op til vurdering af det

[23] Glahn, K.: Lov om Højere Almenskoler med dertil hørende Anordninger og ministerielle Bekendtgørelser. Cirkulærer og Skrivelser, s. 195

ansvarlige ministerium for undervisningen. Det er netop, hvad der sker i tiden efter anordningen, og anvendelser af matematik begynder at blive en del af diskussionen.

Redaktionen på Matematisk Tidsskrift vurderer, at pensum for den matematiske linjes vedkommende er blevet større, så med det afsatte timetal vurderes, at det vil være umuligt at nå, hvis der også skal være tid til opgavegennemgang. Infinitesimalregning er stadig et valgfrit emne, hvor mange lærere gerne så det indført som krav.[24] Det bliver fra redaktionens side opfordret til, at især yngre lærere vil vælge infinitesimalregningen. Den forudser dog praktiske problemer, idet studerende vil have forskellige forudsætninger, når de møder op på de videregående uddannelser.

Den anvendelsesorienterede matematikundervisning kommer i fokus, da der i 1908 dannes "Den internationale Matematikundervisningskommission" i Rom med Felix Klein som præsident. Kommissionens formål er, at "...offentliggøre en Beretning om Tendenserne i Matematikundervisningen i de forskellige Lande". "Man skal ikke alene behandle Undervisningsmetoderne og Læseplanerne, men også selve Organisationen af Studierne".[25] Det er ikke meningen, at matematikundervisningen skal ensrettes i de enkelte lande. Et af forskningsområderne for kommissionen indenfor moderne undervisningsmetoder er at se på hvilke resultater, der er kommet ud af oprettelsen af matematiske laboratorier og betydningen af modelsamlinger. De modeller, der tænkes på, er f.eks. geometriske modeller. Der er sandsynligvis tale om en model, der repræsenterer et matematisk område. Der opfordres som et af foreningens forskningsfelter til at undersøge matematiks berøringspunkter til f.eks. tegneundervisning, de andre naturvidenskaber, til filosofien og til det daglige livs problemer. "Disse Berøringspunkter er af pædagogisk Vigtighed".[26]

S. L. Tuxen har i sin egenskab som undervisningsinspektør afholdt et foredrag om "Gymnasieundervisningen. Erfaringer og Iagttagelser" ved De Højere Almenskolers lærermøde oktober 1911. Foredraget omhandler positive og negative emner ved den nye anordning. Gymnasiet er ifølge Tuxen blevet en fagskole, hvor erhvervsmulighederne ligger i valget af linje. Han udtaler sig i sit foredrag om hvert fag, men for faget matematik er der ikke meget at sige. Kun at indførelsen af infinitesimalregningen er modtaget positivt af gymnasielærerne.[27] "Derimod kan jeg ikke se, at der er noget af de nu bestaaende Fag, der kan undværes, i alt Fald naar jeg undtager, hvad jeg sagde om Matematik for de sproglige Linier".[28]

Michael Winther lærer ved Hjørring højere almenskole reagerede efterfølgende på Tuxens udtalelser. Ifølge Winther citeres Tuxen i referatet over mødet for at have udtalt: "Jeg er meget i Tvivl om, hvorvidt det vil være rigtigt at bevare de to Timers Matematikundervisning for de sproglige Linier. Selv om der ogsaa lader sig høre Stemmer i modsat Retning, synes Flertallet af Matematiklærere dog at være af den

---

[24] Matematisk Tidsskrift 1906, s. 112
[25] Matematisk Tidsskrift 1909, s. 42
[26] Matematisk Tidsskrift 1909, s. 48
[27] Tuxen, S. L.: Gymnasieundervisningen, s. 111
[28] Tuxen, S. L.: Gymnasieundervisningen, s. 136. Der mangler noget af foredraget i bogen, derfor kan Tuxen kun citeres meget lidt.

Anskuelse, at Udbyttet af denne undervisning er temmelig ringe, og at man derfor hellere maa lade den falde, hvis den ikke kan faa en langt fyldigere Karakter".[29] Ordlyden er af en lidt anden karakter i forhold til optrykket af Tuxens foredrag. Men holdningen til matematik for sproglige er den samme.

Winther nævner, at ingen kunne drømme om at lade matematik bortfalde på realskolen, hvorfor skulle den så i gymnasiet? Begrundelsen for matematikkens eksistens for sproglige er for Winther, at faget har en stor betydning som opdragelsesmiddel, og af den grund bør bevares i gymnasiet.[30] Rent praktisk mener han, at matematik kan give udbytte. Det især når der undervises i rentesregning og annuiteter. Her er der "rig Anledning til at komme ind paa praktiske Forhold, som en student ikke bør være uvidende om".[31] Nærmere om hvordan, det nævner Winther ikke. Hvis det skulle blive sådan, at matematik fjernes fra de sproglige linjer, da vil det betyde, at studenter, der senere finder ud af, at de vil være ingeniører, må supplere med matematikkurser. Winther foreslår, at der indføres handelsregning taget i betragtning, at der kommer flere studenter, og ikke alle vil blive studerende, men må ud i det praktiske liv. Der kan kombinationen af handelsregning og sprog komme dem til gode.

S. L. Tuxen er som undervisningsinspektør primus motor for en beretning udarbejdet under kultusministeriet i 1914, hvor erfaringer med anordningen af 1906 vurderes. T. Bonnesen er repræsentant for matematikfaget og berettet om tilstanden i gymnasieundervisningen:

For de sproglige linjer bliver det fremhævet, at der er for lidt tid til at nå pensum, og nogle faglærere har udtalt ønske om at fjerne matematik helt fra de sproglige linjer. Andre påtaler, at "Matematiken ikke paa dette Trin havde den udviklende Evne, som man har villet tillægge den". Nogle fastholder dog, at "Matematiken i visse henseender vilde være uerstattelig indenfor Gymnasiet".[32]

Et forslag til, hvordan det kan gøres bedre er, at undervisningen skal gøres mere sammenhængende og let forståelig, og midlet til det er grafisk fremstilling. Det er dog ikke sådan, at det skal være et emne i sig selv, sådan som nogle lærere underviser i det. Udvalget ved, at eleverne har svært ved at opfatte den organiske sammenhæng i matematikken, når undervisningen går op mere op i "detaljerytteri". Det bliver påtalt, at formålet med undervisningen ikke er udenadslære, men at indøve at eleverne selv kan ræsonnere. Det skal de gøre ud fra de erfaringer, der bliver givet til dem via det faglige indhold i timerne. Erfaring kan de få fra den grafiske fremstilling.

Undervisningsmetoderne på de sproglige linjer skal der ses kritisk på, idet traditioner stadig præger dem. Der bliver ikke givet skriftlige opgaver til eksamen, hvilket nogle lærere er utilfredse med. Eleverne på den sproglige linje skal kun kunne regne opgaver i det omfang, det er nødvendigt for at forstå teorierne. Udvalget er enig i, at elevernes interesse for matematik vil vokse, når teorien illustreres med eksempler fra virkeligheden.

[29] Vor Ungdom 1912, s. 352
[30] Vor Ungdom 1912, s. 353
[31] Vor Ungdom 1912, s. 354
[32] Beretning om Undervisningen i Gymnasieskolerne, s. 203

Rentesregning fremhæves som et velegnet emne. Nogle lærere vil foretrække, at hele undervisningen bestod af anvendelsesorienteret teori. Den eneste forhindring ved dét er, at det vil kræve kendskab til andre fagområder. Det kan være vanskeligt at sætte sig ind i for lærere og elever. Udvalget gør opmærksom på, at der er forlydender om, at de sproglige elever er længe om at regne opgaver, men gør det tilfredsstillende.

På den matematisk-naturvidenskabelige linje er det nye i undervisningen indføringen af infinitesimalregningen. Det er dog stadig på frivillig basis, idet lærere kan vælge andre emner. Det viste sig dog i 1913, at alle gymnasier opgav infinitesimalregningen til studentereksamen. Netop denne disciplin kræves i Anordningen at skulle relateres til simple anvendelser på geometriske og fysiske opgaver. Det har skabt en del tvivl om, hvilke typer af opgaver, det kan dreje sig om. Som der står i beretningen: "Der har heller ikke endnu kunnet danne sig nogen fast Tradition paa dette Omraade, og man har i Eksamensopgaverne været meget forsigtig."[33]

Der er ifølge beretningen blandt matematik- og fysiklærerne ikke noget samarbejde, og fysiklæreren overlader det matematiske indhold til matematiktimerne. Det bør ændres, sådan at "naar Eleverne skal forstaa, at Matematiken kan anvendes udenfor sit egen Domæne, vil dette bedst kunne opnaaes, naar Anvendelsen sker indenfor de andre Fag, medens det altid gør Indtryk af noget mere tillæmpet, naar det er Matematiklærerne, som henter deres Eksempler fra de andre Fag". [34] For at samarbejdet skal komme i gang mellem de to fag, er det nødvendigt, at "de matematiske Metoder er rettidigt indøvede". Infinitesimalregning kan ifølge kommissionen indføres først i 2. klasse (2. g), og funktionsbegrebet i 1. klasse. Dette emne er indført på bekostning af geometri, som nu kun finder sted i stereometrien.

Opgaverne til eksamen er blevet lettere, og det er lærerne tilfredse med. De kræver mindre matematisk opfindsomhed, "idet de for største Delen er direkte Anvendelser". Det har tidligere i beretningen været nævnt, at opgavestillerne har været forsigtige med at relatere opgaver til fysik. Eleverne er blevet længere om at svare på en beregningsopgave til eksamen. Hvad angår den del af eksamen, der kræver, at eleverne til den skriftlige eksamen giver et mindre bevis for en sætning i pensum til den mundtlige eksamen, da er tilstandene ikke tilfredstillende. Den matematiske pointe er ikke forstået, og det bærer præg af udenadslære.[35]

3. 4 Fokus på anvendelser af matematik

Der er ikke ubetinget begejstring med matematikundervisningen på gymnasiets linjer, hvorfor debatten om matematikundervisningen blusser op igen. Debatten kommer til igen til at handle om mål og midler med matematikundervisningen og denne gang om nytten ved at indføre anvendelser af matematik kontra det åndsdannende ved matematikundervisning uden anvendelser.

[33] Beretning om Undervisningen i Gymnasieskolerne, s. 206-207
[34] Beretning om Undervisningen i Gymnasieskolerne, s. 206-207
[35] Beretning om Undervisningen i Gymnasieskolerne, s. 207-208

I et indledningsforedrag til en diskussion i matematikpædagogisk Læseselskab af 25. april 1914 afholder Carl Hansen[36] et foredrag om ændring af læseplanen i matematik på den matematiske linje. Han fortæller, at der i et stykke tid har været diskussion om de sprogliges matematikudbytte, men at der tilsyneladende er tilfredshed med matematikernes undervisning, siden der ingen debat har været. Han er det til gengæld ikke. Han værdsætter, at noget stof er gledet ud af bekendtgørelsen, da det ikke var af stor værdi i undervisningen og ønsker en ændring, sådan at "Anvendelser af Matematiken blev sat ganske anderledes i Forgrunden, end Tilfældet er nu; jeg forlanger, at ikke alene skal Eleverne lære Matematik, men de skal paa den matematiske Linie tillige lære, hvad Matematik kan bruges til"[37]. Han mener, at gymnasiets indretning stadig bærer præg af båndene til universitetet, hvor gymnasiets formål, som det ser ud, er studieforberedende. Matematik i gymnasiet skal udgøre et afsluttet forløb, så matematikundervisningen også giver noget til de elever, der ikke skal læse videre på universitetet, Polyteknisk Læreanstalt eller andre institutioner. Han mener, at eleverne skal have en anden oplevelse af matematik. De skal ikke kun have den fornemmelse, at matematik er "gymnastik for hjernen", men at de også skal se, at "Matematiken ogsaa bruges til at forklare, forstaa og beherske mangfoldige af de Fænomener, vi alle daglig iagttager".[38] Hansen stiller det spørgsmål, om hvilke anvendelser det i så fald skal være. Og han svarer selv dertil, at "vi har et uudtømmeligt Forraad i den rationelle Mekanik og i Astronomien". [39] Det ville give mulighed for at stille opgaver, der vil være mere udviklende for eleverne.

Hansen kommer med et alternativt forslag til en læseplan, hvor han forudsætter et treårigt matematisk gymnasium med 6 timers ugentlig matematik. Af emner han ønsker at tilføje hentet fra den rationelle mekanik er bl.a. statik, hvor "Eleverne skal lære Ligevægtsbetingelserne for et System af Kræfter i samme Plan og kunne benytte dem til Løsning af simple Opgaver, der gaar ud paa at bestemme Ligevægtsstillinger; endvidere Bestemmelse af Tyngdepunkter og Inertimomenter. I emnet dynamik skal eleverne "være fortrolige med Begreberne Hastighed og Akceleration samt deres analytiske Udtryk. Endvidere Bevægelsesligningerne for en enkelt Partikel og levende Krafts Princip; de Opgaver, der stilles heri, skal selvfølgelig kun føre til Integrationer, som kan udføres ved de Metoder, Eleverne har lært i Integralregningen".[40]

Han kommer med eksempler på opgaver, der illustrerer, hvad han mener ville være velegnede opgaver til studentereksamen (se analyse1).[41] Igen er holdningen den, at det vil kunne spare tid for fysiklæreren. Det er altså ikke kun begrundelser indenfor matematikken selv, der får ham til at foreslå høj grad af anvendelser i undervisningen. Det er i høj grad et pragmatisk argument. Hansen ser også på, at størstedelen af de matematiske studenter søger til Den Polytekniske Læreanstalt, Farmaceuthøjskolen og Landbohøjskolen. For disse institutioner og deres elever vil det være mere rationelt, om de havde anvendelsesorienteret undervisning.

[36] Carl Hansen; f. 1876 mag. scient. i matematik 1899; 1904 dr. phil; 1906 lektor ved Metropolitanskolen; censor ved Den polytekniske Læreanstalt 1912; lærer for prins Viggo og prins Knud 1917-19.
[37] Matematisk Tidsskrift 1914, s. 106
[38] Matematisk Tidsskrift 1914, s. 107
[39] Matematisk Tidsskrift 1914, s. 107
[40] Matematisk Tidsskrift 1914, s. 109
[41] Matematisk Tidsskrift 1914, s. 110-113

Dr. Hansens forslag til ændringer af læseplanen medfører nogle reaktioner, som Matematisk Tidsskrift bringer. Der er bl.a. en artikel af V.A.C. Jensen[42], som ligesom Hansen er enig i, at undervisningens princip er, at "Matematiken skal anvendes til Løsning af visse praktiske Opgaver". Jensen har et mere beskedent mål end Hansen. Hansens mål er at "Matematiken ikke nu bibringer Eleverne Forstaaelsen af mangfoldige af de Fænomener, vi daglig iagttager; det skal Matematiken nu bringes til, ligesom Fysikundervisningen skal bringe Eleverne til at "opdage" de Love, hvorefter den omgivne Natur virker."[43] Jensen mener i stedet, at

"Kunde vi i Ny og Næ gøre virkelig praktiske Anvendelser af Matematiken, kunde vi nu og da give Abstraktionerne Liv, saa tror jeg noget vilde være vundet, men saa skal det ogsaa virkelig være praktiske Anvendelser, for det er nemlig Sagen, at Dr. Hansens Anvendelser, i alt Fald i mine Øjne, ikke har saa meget med Praksis at gøre. Den Matematik, vi kan lære Skoleelever, er meget elementær, og naar Matematik er meget elementær, saa er dens praktiske Anvendelighed ogsaa meget begrænset. Naar Læsestoffet skal vælges, maa man først og fremmest sørge for, at det bliver saa god Matematik som muligt, og ikke til Grund lægge Anvendeligheden til visse praktiske Formaal."[44]

Jensen underviser selv i fysik og matematik, og som fysiklærer kan han ikke forestille sig at fjerne den rationelle mekanik fra fysiktimerne. "Det er ikke et lidet Arbejde, der maa gøres for at faa noget ud af simple Opgaver i Mekanik, og gør man sig end nok saa megen Ulejlighed, saa giver Matematiken dog for lidt; dette vil man ogsaa se ved Betragtning af Opgavesamlingen i Dr. Hansens artikel". For at få udbytte af opgaver, må man gå videre indenfor fysikken, "men saa er det ikke Matematik længere". Jensen mener desuden, at "Matematiklæreren maa give Grundlaget og i Fysikundervisningen maa Rækkevidden af de matematiske Resultater paavises"[45]

V. Trier[46] har også reageret på den tidligere artikel af Dr. Hansen om forslag til ændring af læseplanen i det matematiske gymnasium. "Dr. Hansen lægger Hovedvægten paa den Nytte, man kan have af Matematikken i dens talrige Anvendelser, jeg ser dens væsentlige Betydning som Skolefag i det Bidrag, den paa sin Vis giver til Aandsdannelsen". Trier og Hansen har hver deres syn på matematikundervisningens formål. Hansen vil, for at få plads til den rationelle mekanik og astronomi, fjerne nogle matematiske områder, som ifølge Trier er af stor åndsdannende betydning. Trier mener, at nyttehensynet bør komme til udtryk i mellemskolen, mens indsigt og ræsonnement kommer i gymnasiet. At Hansen kan finde på at kalde både de daglige opgaver og eksamensopgaver kedelige, er Trier ikke enig i. "Vore Lærebogsforfattere og vor Opgavekommissions Medlemmer har jo i Aarevis kappedes om at skaffe gode, smukke og "morsomme" Opgaver". Der skal ligeledes tages hensyn til de elever, der ikke fortsætter på universitetet. Gymnasiet skal,

[42] Vilhelm Andreas Christoffer Jensen; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lærer ved Borgerdydskolen 1900; rektor ved Helsingør højere Almenskole 1919.
[43] Matematisk Tidsskrift 1915, s. 29
[44] Matematisk Tidsskrift 1915, s. 29
[45] Matematisk Tidsskrift 1915, s. 30
[46] V. Trier 1862-1916; mag. scient; medredaktør af Matematisk Tidsskrift fra 1899.

som også Hansen udtaler, udgøre et afsluttet forløb. Det gymnasiets matematikundervisning skal give er "foruden nogle almennyttige Kundskaber, som næsten alle meddeles i Mellemskolen - den aandsdannende Udvikling, som Aandsfaget "ren Matematik" er i Stand til at skaffe dem".[47]

3. 5 Mangel på dannelse i gymnasiet?

Det er ønsket om dannelse som mål for undervisningen i gymnasiet, der fører til debat omkring indførelse af en ny struktur for gymnasiet. Omkring 1915 nedsættes et udvalg med blandt andet S. L. Tuxen[48] til at vurdere, hvordan gymnasiet kan opfyldelse sit mål om at bibringe eleverne dannelse. Udvalgsarbejdet resulterer i en betænkning med lovforslag til en ændret struktur af gymnasiet. Der ønskes et 4-årigt gymnasium, hvor eleverne først efter det andet år skal vælge linje, som udvalget ønsker reduceret til to - en sproglig-historisk og en matematisk-naturvidenskabelig linje. "Gymnasiets Maal er i første Instans at bibringe en *højere Almendannelse*...Ligesom i det nuværende Gymnasium skal den Aandsdannelse, Gymnasiet tilsigter at give, være *moderne* Aandsdannelse".[49] Derfor skal der være to linjer i gymnasiet frem for tre.

Der er visse mangler ved gymnasiet, som udvalget ønsker at pointere og gøre noget ved. "Paa det nuværende Gymnasiums mat.-nat. L. er hensynet til den almene Aandsdannelse traadt tilbage for det umiddelbare Hensyn til de videregaaende Studier, og endda til en bestemt Art af Studier, de polytekniske, hvorfor den nuværende mat.-nat. L. for en væsentlig Del er blevet en Forberedelsesskole til den polytekniske Læreanstalt".[50] Den nysproglige linje er blevet for litterær, hvorfor det er udvalgets ønske, at de to linjer skal nærme sig hinanden.

Udvalgets konklusioner medfører debat blandt fagfolk. Det gælder ligeledes for Oluf Bøggild[51], som har deltaget ved et oktobermøde, hvor undervisningsinspektør Tuxen og rektor Bruun deltog.[52] Ved dette møde bliver muligheden om at få enten et 4-årigt eller et 6-årigt gymnasium diskuteret. Det er vel og mærket inklusiv mellemskolen. Bøggild gør sig til talsmand for, at mellemskolen skal vare 3 år og gymnasiet tilsvarende. Eller også skal mellemskolen vare 4 år og gymnasiet 2 år. Det vil være uforsvarligt at gymnasiet skulle vare 4 år og mellemskolen 2 år, idet formålet med mellemskolen er at give et afsluttet forløb indenfor de forskellige fag. Det spørgsmål, der optager ham, er hvornår skoleforløbet skal deles op i linjer. Det ideelle for Bøggild vil være, hvis gymnasiet ikke bliver delt op, og at det varer 6 år. Der vil komme studenter, der virkelig har en alsidig uddannelse, som skal give adgang til de videregående studier uden ekstra adgangsgivende kurser.

[47] Matematisk Tidsskrift 1915, s. 34-35
[48] De øvrige udvalgsmedlemmer var N. Bang, N. A. Larsen og F. Rønning.
[49] Udvalgsbetænkning angaaende Ændringer i Lov af 24. April 1903 om højere Almenskoler, s. 48
[50] Udvalgsbetænkning angaaende Ændringer i Lov af 24. April 1903 om højere Almenskoler, s. 49
[51] Oluf Bøggild 1887-1941; cand. mag. i naturhistorie og geografi, kemi og fysik; lektor ved Kolding Højere Almenskole; rektor; medl. af Det Radikale Venstre; leder af det 11. Nordiska Skolemøde.
[52] Gymnasieskolen 1919, s. 103.

Han er af den holdning, at den ny-sproglige linje kan betegnes som ensidig. "Denne Linie...giver saa godt som intet Kendskab til Naturvidenskaberne og deres Metode".[53] Ligesom han mener, at den matematiske linje "unægteligt er...en Fagskole, der i højere Grad egner sig som Forskole til polyteknisk Læreanstalt end til Universitetet". Hvis linjerne kunne arbejde sammen til en enhedslinje ville det give stor dannelsesværdi. Han nævner forøvrigt, at man i 1871 lod hebræisk udgå som fag for at give mere plads til moderne sprog og "de mægtigt fremstormende Naturvidenskaber"[54]. Dette er ifølge Bøggild et eksempel på, at gymnasiet nødvendigvis forandrer sig med tidsånden. Bøggild mener, at hvis universitetet påtager sig at undervise i græsk, da vil enhedslinjen, "som tog ligeligt Hensyn til de moderne Krav om en fyldig Undervisning i Naturfagene og de levende Sprog", kunne indføres.

I en senere artikel samme år skriver Bøggild om den naturvidenskabelige linje contra den sproglige linje. Han konstaterer, at den nysproglige linje er ved at blive affolket for elever, og hvis ikke det var for de kvindelige elever og 2-3 drenge ville linjerne affolkes. En tilstand, der har gjort sig gældende lige siden. Retningerne er vidt forskellige, og han vil her retfærdiggøre den naturfaglige linje som havende værdi i forhold til dannelse. Samtidig mener han, at den sproglige linje ofte overvurderes i forhold til det at være almendannende. Der er problemer med at få kvalificerede lærere til de moderne sprog. Han fremhæver gymnasiets formål, som ikke kun drejer sig om kundskabsmeddelelse, men også om karakterdannelse. "Enhver god Skole er ikke blot et Kursus, men i nok saa høj Grad Opdragelsesanstalt". Det er skolens maal "at søge at opdrage Elevens Evne til logisk og følgerigtig Tænken, og at opdrage ham til at stole paa sit eget Omdømme og sin egen Iagttagelse, kort udtrykt, maalet er at skabe Personligheder, der ikke er slavisk afhængige af de bestaltede Autoriteter"[55].

Når det er skolens opgave at gøre eleverne kritiske overfor autoriter, må det samme gælde indenfor de enkelte fag, at de skal bidrage til at udvikle kritiske holdninger til faget. Her mener Bøggild, at naturvidenskaberne kan bidrage i høj grad. I fysik- og kemiundervisningen kan eleven selv via forsøg kontrollere lærerens udsagn. "I Matematiken bevises enhver Paastand ved et almengyldigt Bevis, hvis Sandhed ingen kan betvivle".[56] Eleven er ikke nødt til at stole på lærerens autoritet. Det er for eleven i det matematiske gymnasium muligt at arbejde selvstændigt. "De eksakte Fag er personlighedsdannende, og derigennem bliver de i Virkeligheden ogsaa almendannende"[57].

Diskussionen omkring gymnasiets struktur får en foreløbig afslutning ved nedsættelsen af "Den store skolekommission". Den vedtages nedsat 21. februar 1919 "med det Hverv at tage det samlede Skolevæsens Forhold - pædagogisk, økonomisk og administrativt - op til overvejelse og Drøftelse samt til at udarbejde Forslag til en Omordning heraf".[58] Den store skolekommission er sammensat af repræsentanter fra Rigsdagen, fra

[53] Gymnasieskolen 1919, s. 105
[54] Gymnasieskolen 1919, s. 106.
[55] Gymnasieskolen 1919, s. 54
[56] Gymnasieskolen 1919, s. 54
[57] Gymnasieskolen 1919, s.56
[58] Betænkning med Lovforslag afgivet af Skolekommissionen i henhold til Lov Nr. 77 af 21. Februar 1919, s. 1-4

undervisningsministeriet og folk fra interesseorganisationer. Kommissionen opdeler arbejdet i 15 områder/udvalg, so.n hver udarbejdede lovforslag til ændringer. Når det kommer til lovforslagene er der stor uenighed blandt udvalgets medlemmer.[59] Det afspejler sig i betænkningen med lovforslag, som omhandler gymnasiets struktur. Begge lovforslag bærer præg af lige så mange undtagelser som beslutninger. Et af stridsspørgsmålene handler om, hvorvidt gymnasiet skal bestå af to eller tre linjer.[60] Men på grund af manglende politisk flertal bliver ingen af forslagene vedtaget og foreløbig skrinlagt.[61]

Fagkonsulenten gør status

Der går nogle år inden debatten viser sig igen i Matematisk Tidsskrift, og det er i forbindelse med et foredrag 22. marts 1923 holdt i Matematisk Forening, hvor lektor og fagkonsulent Hans Jensen Pihl[62] fortæller om matematikundervisningen i gymnasiet. De første studenter fra Den kongelige Anordningen af 1906 sprang ud i 1910, og indenfor nær tid skal ordningen op til revision, hvorfor Pihl vil gøre status over resultatet. Tidligere bestod undervisningen på den matematiske linje af delemner, som kunne vælges i vilkårlig rækkefølge. "De forskellige Discipliner: Aritmetik, Trigonometri, Analytisk Geometri o.s.v...øvede ingen eller i hvert Fald ringe Indflydelse paa hinanden;...med Hensyn til Helhedsopfattelsen tør det vel paastaaes, at en saadan ikke blev tilstræbt i synderlig grad".[63] Pihl mener, at helheden skal understreges for eleverne. Denne helhed kan skabes ved hjælp af grafisk afbildning. Det gør matematikken anskuelig. Anskueliggørelse er det vigtigste ved den nye ordning. Grafisk afbildning er ikke en del af anordningen for den matematiske linje, men det er det derimod på den sproglige linje. Han mener, det er et udtryk for manglende kærlighed til dette som arbejdsprincip hos udarbejderne af anordningen. Han nævner, at der er en vis træghed for den nye retning i undervisningen og påpeger, at det måske skyldes, at lærerne er påvirkede af den undervisning, de selv har modtaget. Ligesom nogle lærere stadig underviser efter gamle lærebøger. Undervisningsmetoderne bliver aldrig ligegyldige, da de er et led i en dannelsesproces, som skolen tilstræber. Hvis bestemte metoder fremmer elevernes dømmekraft og fantasi, så må disse foretrækkes. Han ønsker, at undervisningen skal give eleverne forståelse frem for udenadslære. Man forveksler "hvad Elever virkeligt har forstaaet, med hvad de er i Stand til at sige"[64]. Det er farligt, at kræve et højt abstrakt niveau, hvis eleverne ikke forstår det, men lærer det udenad. Her mener Pihl, at anskueliggørelse kan hjælpe til forståelse.

3. 6 Forsøgsundervisning på sproglige linjer

På grund af debatten omkring de sproglige elevers udbytte af matematikundervisningen udsendes 14. april 1924 et cirkulære, som gør opmærksom på, at

[59] Det Centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning bd. 2, s. 12-13
[60] Betænkning med lovforslag afgivet af skolekommissionen i henhold til Lov nr. 77 af 21. februar 1919.
[61] Det Centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning bd. 2, s. 12-13
[62] Hans Jensen Pihl; f. 1880; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; fagkonsulent 1919; lektor ved Ordrup Gymnasium 1920; faglig medhjælper i undervisningskommissionen for gymnasieskolerne 1919-29; redaktør af Matematisk Tidsskrift 1924-29.
[63] Matematisk Tidsskrift 1923, s. 34
[64] Matematisk Tidsskrift 1923, s. 40

undervisningsinspektøren ønsker at støtte, at lærere i samråd med ham kan foretage forsøg med ændret undervisning. Formålet for de sproglige linjer er ved bekendtgørelsen af 1906 "at skole Elevernes Tænkeevne ved at øve den gennem Matematikkens stringente Betragtningsmaader", og undervisningen skal lægge vægt på en udtømmende behandling af de teoretiske afsnit.

"Der er imidlertid i Aarenes Løb fra forskellige Sider blevet udtalt Tvivl om Værdien af denne Undervisning for de paagældende Elever, og man har samtidig udtalt Ønsket om, at Undervisningen blev omlagt saaledes, at den skulde kunne bibringe Eleverne Kendskab til matematiske Forhold, der staar mere i Forbindelse med det praktiske Liv".[65]

Dr. Hansen er én af de første, der har fået tilladelse til at udføre forsøg med sin undervisning. Det er i anledning af det ministerielle cirkulære, at redaktøren af Matematisk Tidsskrift, lektor Pihl, opfordrer Hansen til at berette om hans forsøg og holdning til matematik i det sproglige gymnasium. Han har i flere år undervist på Metropolitanskolen på de sproglige linjer. Han mener, at der ved anordningen af 1906 blev stillet en umulig opgave for det sproglige gymnasium, idet indholdet og formålet ikke svarede til den afsatte tid til det. Men ved det fastsatte læsestof og ved den fastsatte læsemåde, så har man ifølge Hansen aflivet elevernes interesse for faget. De 2 ugentlige timer er "i Virkeligheden kun en Plage for Elever og Lærer"[66]. Ifølge Hansen bør man fjerne de mest teoritunge afsnit og i stedet lægge vægten på anvendelser. Hermed "gør man ikke Matematiken til selve Maalet, men derimod til det nødvendige Middel"[67]. Han får eleverne på sin side, når de kan se, hvordan matematik kan beskrive dagligdags fænomener.

"Efter den Plan, jeg har fulgt, strækker den egentlige Matematikundervisning sig over 1½ Aar, idet hele 1. Gymnasium og 2. Gymnasium indtil Juleferien medgaar dertil".[68] Her underviser Hansen i algebra herunder "sammensat Rentesregning med ganske simple Anvendelser paa Annuiteter" og geometri. I 1. g læser han kun algebra, og der er rigelig tid til opgaveregning på tavlen. Geometri læser han fra starten af 2. g. til juleferien. Der er også her god tid til repetition og opgaveregning på tavlen. De sidste 1½ år af gymnasiet giver han sig af med anvendelser af det læste stof. Og det var indenfor emner som elementær mekanik og astronomi. Mekaniken har været delt i ligevægtslære og bevægelseslære og læst i 2. halvdel af 2.g. Hansen giver eksempler på opgaver han regner med eleverne. (se analyse1) Det er hans erfaring, at "saadanne Opgaver i høj Grad fanger Elevernes Interesse, i en langt stærkere Grad end Tilfældet er, hvis man stillede dem overfor de samme Ligninger, der fører til Opgavens Løsning, men udelod den mekaniske Formulering".[69] Det er den samme metode, der anvendes til alle opgaver, og "Eleverne faar dem saa stærkt indøvet, at de uden videre Spekulation kan anvende dem". I 3. g læser Hansen astronomi. Her skal eleverne blive fortrolige med begreber som f.eks. meridian, polhøjde, bredde døgncirkler osv. Hertil benytter han en figur, så begreberne bliver terpet ind. Også her giver han et par eksempler på typiske opgaver. (se analyse1)

[65] Glahn, K.: Retsregler vedrørende det højere Skolevæsen VI. Del, s. 56-58
[66] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 32
[67] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 33
[68] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 33
[69] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 35-36

Derefter gennemgås sekstantens indretning og brug. "Af øvrige Afsnit læser vi Stedbestemmelse til Lands og til Søs, gennemgaar de forskellige Kortprojektioner, der benyttes i de sædvanlige Skolekort, og endelig et historisk Afsnit, nemlig Kalenderens Indretning i de forskellige Folkeslag gennem Tiderne."[70] Hansen har selv i noteform udarbejdet materiale, der udleveres til eleverne. Disse emner er gennemgået ved juletid i 3. g, og der er tid til repetition. Forsøget resulterede i 2 bøger "Anvendt Matematik" og "Ren Matematik" (se kapitel 4)

F. Bøgh[71] har ligesom Hansen glædet sig over den ministerielle betænkning af 1924, der opfordrer til forsøg med matematik på de sproglige linjer. Der er problemer med udbyttet af undervisningen. Det er han enig i. Spørgsmålet er så, om det skyldes elevmaterialet og det tilrådeværende timetal. Eller om det skyldes indholdet i anordningen. Han holder sig til det sidste. Med bekendtgørelsen af 1906 ønskede man at udvikle elevernes tænkeevne ved matematikkens stringente betragtningsmåder. Det lykkedes ikke. Undervisningen bærer præg af at være sammensat af spredte enkeltdele, så det hele bliver spredt fægtning. Der måtte ikke gives hjemmeopgaver for, og opgaveregningen på skolen blev nedtonet. Under disse forhold kan Bøgh udmærket forstå, at formålet ikke kan opfyldes.[72]

Viggo Bredsdorff[73] bidrager ligeledes med ideer til en plan, som han kunne forestille sig ville afhjælpe problemerne i det sproglige gymnasium. Han har dog ikke selv undervist disse klasser. Han har forsøgt for aritmetikkens vedkommende at finde et afsnit, sådan "at det paa een Gang gav noget Kendskab til Aritmetikens Problemer, og samtidig dannede en Helhed. Dette har jeg søgt at opnaa ved at lægge den grafiske Fremstilling til Grund for hele Udviklingen". Ved at tage udgangspunkt i for eleverne kendte ting får han af bagvejen introduceret koordinatsystemet. Han tager udgangspunkt i et dagblads abonnenttal over en årrække og viser dem sammenhængen mellem år og abonnenter.

"Derpaa dannes Kurven - som er alle Elever bekendt og altsaa ikke behøver nogen videre Forklaring. En Række lignende Opgaver giver Lejlighed til at vise, at det eneste man i Virkeligheden kender, er de enkelte Punkter; naar man derfor forbinder disse med rette Linier, betyder det intet andet end et Middel til tydeligere at vise Svigningerne. Gaar man derfra over til f.eks. Temperaturkurver (Variationer i et Døgn, Smeltepunktskurve o.l.), saa vil her Forbindelseslinierne med større sandsynlighed betegne, hvorledes Forløbet har været mellem de aflæste Temperaturer. Derpaa kan man - med opgaver hentet fra Fysiken (Spændingsfald langs en Leder, Vædskeblandingers Kogepunkt, Strækningsforsøg) faa Kurver (rette Linier) frem, som ganske øjensynligt ikke alene fortæller, hvordan Tilstanden har været i enkelte Punkter, men ogsaa i den mellemliggende Tid."[74]

[70] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 37
[71] Frederik Bøgh 1880-1967; mag. scient. i matematik; lærer ved Frederiksberg Gymnasium 1905-20; rektor for Christianshavns Gymnasium 1924-1948; pædagogisk konsulent for de forenede skoler 1920-24.
[72] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 39
[73] Viggo Bredsdorff; f. 1885; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lærer ved Birkerød Kostskole; lektor ved Stenhus Kostskole.
[74] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 117

Dette skal få eleverne til at blive fortrolige med forholdet mellem en tabellarisk oversigt og grafisk afbildning. Han forestiller sig også, at eleverne kan tegne legemers hastighedskurver efter sekunders forløb, når legemet forøges med en hastighed for hver meter. Det næste skridt bliver så, at undersøge funktioner udfra lineære fremstillinger. Dernæst vil Bredsdorff gå over til kurver udfra ikke-lineære fremstillinger. Her laves funktionsundersøgelse med fortegnsvariation, nulpunkter, maksimum og minimum. Der skal derimod ikke arbejdes dybere med asymptoter og grænseværdi. Rentesregningen skal også behandles - "hvor navnlig simpel Rente giver Anledning til Anvendelse af grafisk Fremstilling". Indenfor geometri forestiller han sig, at der skal arbejdes med ren geometrisk tegning af kegler, terninger, kasser, prismer o.s.v.. Hvis der er tid til det, vil Bredsdorff "gerne kombinere Opgaven (en Cylinder staaende paa en Terning og lign.) for helst at ende med et eller andet Møbel (Bord, Stol, Skab) fremstillet ved forskellige Snit". Der er hans håb, at "Syslen med Passer, Ridsefjer og Lineal opdrager til Orden og Omhu, samtidig med, at det har en rent praktisk Betydning."[75]

3. 7 Revidering af anordningen på vej

Omkring 1926 er der noget i gære. Almenskoleloven skal muligvis revideres. Derfor er der stor diskussion blandt lærerne, som der ofte er, når en ny anordning skal vedtages. Ofte er det ved sådanne lejligheder, at målet med gymnasiefagene bliver revurderet. Diskussionerne ved denne lejlighed handler om anvendelser af matematik, pædagogisk helhedssyn og fjernelse af matematikundervisningen på de sproglige linjer. Det er diskussioner om mål og midler.

Som rektor S. A. Christensen[76] udtrykker det, så har den gamle ordning givet "flinke Studenter" og det væsentligste ved ordningen er, at eleverne i større grad skal "se selv og slutte fra det, man ser"[77]. Eleverne skal lære at være mere kritiske og selvstændige. Alle lærerne udtrykker helt urealistisk ønske om at få flere timer til hvert fag. Derfor bliver det diskuteret om nogle fag kan fravælges. S. A. Christensen ønsker et gymnasium, hvor de 2 første klasser er fælles, hvorefter det skal være muligt at specialisere sig ud på de linjer, der allerede eksisterer, eller med muligvis flere linjer og mere flydende grænser. Det er første gang, at noget, der kunne ligne grengymnasiet, er på tale. Med hensyn til lærernes ønske om forøget timetal er der et eksempel, hvordan latinlæreren i det nysproglige gymnasium ønsker flere timer til sit fag, og hvilket andet fag kan bedst undvære dem? Det kan matematik[78]. Så der er fra andre faglæreres side ikke den store forståelse for fagets eksistens.

Det problem kommer S. A. Christensen også ind på i Matematisk Tidsskrift, hvor de sproglige linjers matematikundervisning er til diskussion. Han mener, at klagerne over de sproglige elevers udbytte af matematikundervisning er overdrevne. "Sagen er den, at Formaalet med denne Undervisning er at øve Eleverne i koncis Tænkning, logiske Slutninger og klar Fremstilling indenfor et Omraade, som Eleverne kan magte, men først

[75] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 120
[76] Sophus Andreas Christensen 1861-1943; mag. scient. i matematik; universitetets guldmedalje 1888; medlem af opgavekommissionen; 1909 dr. phil; rektor for Nykøbing Katedralskole 1909.
[77] Gymnasieskolen 1926, s. 233.
[78] Gymnasieskolen 1926, s. 102

i anden Række at skaffe dem en vis Kundskabsfylde. Det er derfor naturligt, at de Unge, naar de bliver Studenter, siger, vi kan intet huske af det Fag, det var bedre, om vi var fri derfor og kunde anvende Tiden til mere Sprog, og dette bevirker let, at Faglærere fra disse Fag saa stemmer med."[79]

Han ved derfor, at eleverne muligvis ikke selv kan se udbyttet, de har fået af matematikundervisningen i gymnasiet. Christensen er bange for at fjerne matematik for sproglige, og tror konsekvenserne vil blive store. "Vi har jo under den tidligere Skoleordning (af 1871) set, at Studenter af den spr.-historiske Retning manglede dette Fag".[80] Det ville øge interessen for de elevers vedkommende, når de kan se, at "ogsaa for dem har Matematiken sin praktiske Betydning, hvilket vist bedst kan ske ved, at man tager et Omraade, hvortil kan knyttes praktiske Anvendelser".[81] Han foreslår, at fagene fysik og astronomi bliver inddraget i højere grad. Grafisk fremstilling er også godt, hvis det ikke kommer til at fremstå som et emne i sig selv. Det skal binde undervisningen sammen. Ellers vil eleverne tro, at der er enkelte discipliner, de kan undvære, "hvorfor jeg tror, at der i det nye maa lægges en Hovedvægt paa de praktiske Anvendelser".[82]

At kunne fravælge fag mener rektor Jakob Alsted[83] ligeledes vil være en god idé. Mange lærere beklager sig over niveauforringelse i gymnasiet, særlig i de fag de ikke selv underviser i! Han foreslår derfor, at 8 timer skal kunne vælges frit dog med visse bindinger, og nogle fag skulle være obligatoriske.[84] Det kunne sikre en fordybelse i de valgfrie fag og flere timer til det. Der er her et forslag om en indretningen af gymnasiet, som vi ser det i dag.

Fr. Fabricius-Bjerre[85] har ved en afhandling i teoretisk pædagogik skrevet om matematikkens stilling i den højere skole fra 1850 til 1927 . Han har set på love, bekendtgørelser, lærebøger o.s.v. og prøver at give et billede af matematikkens stilling i gymnasiet. Han behandler hele matematikundervisningen og ser ikke kun på anvendelser af matematik. Men han har i sin afhandling gjort sig nogle overvejelser omkring anvendelser, idet det er en del af debatten og derved matematikkens stilling, som han forsøger at illustrere.

Med hensyn til matematikundervisningen på de sproglige linjer, da er der ifølge Fabricius-Bjerre 3 hovedsynspunkter, der gør sig gældende. Det er nogle synspunkter, der spænder vidt fra at 1: undervise i teoretisk matematik, 2: undervise i praktisk matematik og 3: ingen undervisning i matematik.[86] Det første synspunkt har den gældende anordnings fædre ifølge Fabricius-Bjerre haft. Det har været formålet at vise eleverne, hvordan slutninger drages "rigtigt" ud fra givne forudsætninger. Man ville

[79] Matematisk Tidsskrift 1926, s. 4 -5.
[80] Matematisk Tidsskrift 1926, s. 5-6
[81] Matematisk Tidsskrift 1926, s. 5-6
[82] Matematisk Tidsskrift 1926, s. 8
[83] Jakob Alsted 1866-1957; rektor; cand. theol. og mag.; fmd. for Gymnasielærerforeningen
[84] Gymnasieskolen 1926, s. 110
[85] Frederik Fabricius-Bjerre 1903-1984; mag. scient. i matematik; 1928 universitetets guldmedalje; dr. phil 1934; studieophold i Rom og Bologna; professor i geometri ved DTH 1942; lektor ved Københavns Universitet 1948; fmd. for Dansk Matematisk Forening 1951-54
[86] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 91

gerne give dem matematiske klarheder i form og indhold ved at lære dem ren matematik. Der er enighed om, at dette ikke er lykkedes. "Grunden dertil kan søges i, at de sprogliges matematiske evner og interesser gennemgaaende er meget ringe, og at viljen til at lære matematik heller ikke er stærk. Mange bliver som bekendt sproglige for at undgaa matematik og ofrer - hensigten tro - heller ikke forberedelsen til matematiktimen mange minutter".[87]

Han har observeret flere forslag til, hvordan undervisningen kan lægges lidt mere "praktisk" an. Det spænder fra at lægge sin undervisning an på opgaver i rationel mekanik og astronomi, lægge hovedvægten på grafisk afbildning eller knytte matematik og fysik tættere sammen. Metoderne er meget forskellige til at opnå forståelse og interesse for matematik. Lærerne har dog det til fælles, at de mener, at undervisning i teoretisk matematik hidtil ikke har givet det ønskede udbytte, hvilket Fabricius-Bjerre kan tilslutte sig. "At man ikke faar noget ud af undervisning i den mere teoretiske matematik, er sikkert, men at det i det store og hele bliver bedre, fordi man krydrer undervisningen med eksempler og anvendelser fra andre videnskaber eller fra det praktiske liv, er dog temmelig usikkert".[88]

Skal man så fjerne matematik helt? Fabricius-Bjerre konstaterer, at det er få, der ønsker det. Han selv er af den opfattelse, at "det næppe vil være til større skade for de sproglige, hvis faget blev strøget".[89] For de sproglige vil det næppe gøre noget, idet mange opfatter faget som en plage. Fabricius-Bjerre mener, at det burde undersøges nærmere ved hjælp af statistiske undersøgelser, hvad de sproglige bruger deres eksamen til. Han forventer, at 90% vil svare, at de ikke har haft noget at bruge matematik til. Derfor tilslutter han sig, at matematik skal fjernes fra den sproglige linje.[90]

Han afslutter sin afhandling med at der er to spor, der har været gældende inden for den almindelige pædagogiske udvikling i perioden: "fra kundskab til forstaaelse" og "fra teori til praksis". Netop derfor er tilrettelæggelsen af undervisningen også af stor betydning. Han kan se, at udviklingen indenfor teknikken har præget især naturfagene, hvorfor der fokuseres på anvendelser frem for store teoritunge afsnit.[91] Han opsummerer og kan fortælle, at undervisningen på den sproglige og matematiske linje har udviklet sig til at inddrage matematik, der kan bruges til anvendelser. For matematikerne gælder det især infinitesimalregningens indførelse på bekostning af kædebrøker. Konklusionen i afhandlingen er at, "man lægger i undervisningen mere og mere vægt paa anskuelsen, saaledes at eleverne forstaar det, de lærer, og tilegner sig det paa en saadan maade, at de kan bruge det i praksis. Man forlader mere og mere de stærkt teoretiske afsnit inden for matematikken og indfører i deres sted de discipliner, der er direkte anvendelse for i praksis"[92].

---

[87] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 91-92.
[88] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 93
[89] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 93
[90] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 94
[91] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 102
[92] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 104

Einer Torsting[93] gør opmærksom på, at det er en mangel, at undervisningen optræder som bestående af enkeltemner. Det giver dog den fordel for læreren, at han selv kan planlægge sin undervisning og skabe sammenhæng på den mest pædagogiske måde. Men Torsting mener, at den matematiske ånd mangler, og hvis der er én, vil eleverne ikke opdage den, som det ser ud nu.[94] "Naturens bog er skrevet med matematiske bogstaver[95] - og vi må lære dem ikke blot bogstaverne, men også at læse". Det har stor pædagogisk kvalitet, når matematikken sættes i relation til andre emner. Ligesom både fysiske og historiske ekskursioner altid er kærkomne og i stand til at vække interesse og beundring for matematikken.[96]

Torsting har læst Félix Kleins bog "Elementarmathematik vom höreren Standpunkte aus", og han refererer fra den. På det pædagogiske område mener Klein, at det matematiske stof skal knyttes til elevernes erfaringsverden til det udviklingstrin, de er på. Her peger Klein på anvendt matematik, der vil kunne gøre det. Der kan ifølge hans overbevisning ikke ses bort fra dette. Det kræver, at læreren er bredt orienteret på "den rene og anvendte matematiks" felter. Matematik er for Klein en organisme, der skal betragtes som sådan. Det er ikke en videnskab bestående af enkeltdele men et fag, der skal kædes sammen. Det kan netop funktionsbegrebet gøre. Det er hans ønske, at det skal gennemsyre undervisningen. Torsting beretter, at nogle danske lærebøger er præget af Kleins idéer om funktionsbegrebet og ønsket om anvendelser. Han ønsker efter at have læst Kleins bog, som gennemgå·· geometriens stilling i England, Frankrig, Italien og Tyskland, at det bliver taget op til revision, om ikke geometri skal indføres igen.[97]

Flere lærere har benyttet sig af ministeriets opfordring om at eksperimentere med matematikundervisningen på de sproglige linjer. Laurits Willesen[98] er en af disse.[99] Han mener, at med dét elevmateriale, der er på de sproglige linjer, da er anordningen, som den ser ud, ikke til at opfylde. Der kan gøres 2 ting (han går ikke ind for at fjerne matematik fra den sproglige linje) enten at i mellemskolen knytte en del opgaver til teorien og samtidig uddybe teorien eller lade den grafiske fremstilling være omdrejningspunktet i undervisningen. Han går selv ind for den sidste mulighed. Den grafiske fremstilling vil eleverne også kunne få brug for på de videregående uddannelser som Tandlægeskolen, Farmaceuthøjskolen. Ligesom "Infinitesimalregning er Matematikens bedste Værktøj"[100] og vil være af værdi for de sproglige.

Willesen beretter, hvad hans undervisning består i. Undervisningen er foregået på baggrund af nogle hæfter, han har skrevet. I 1. g indføres koordinatsystemet med dets akser. "Grundlaget for Forstaaelsen af Funktionsbegrebet er lagt ved Tegning af Kurver

---

[93] Einer Torsting 1893-1951, cand. mag. i matematik; faglig medhjælper hos undervisningsinspektøren for gymnasieskolerne 1929-33; fagkonsulent 1929-33; redaktør af Matematisk Tidsskrift 1929 og Vor Ungdom 1939.
[94] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 105
[95] Citat Galileo Galilei
[96] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 106
[97] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 113
[98] Laurits Willesen 1886-1971; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi, har udgivet lærebøger for sproglige gymnasieelever i matematik: adjunkt ved Herlufsholm Skole 1910; medlem af opgavekommissionen 1930-42; lærer i matematik ved Nykøbing Katedralskole.
[99] Matematisk Tidsskrift 1928, s. 45
[100] Matematisk Tidsskrift 1928, s. 46

givne ved Tabeller". For at relatere teori til virkelighed bruger han et eksempel med "Gudenaaen og dens vandføring til forskellige aarstider, nedbør og temperatur." Dernæst går han over til analytisk geometri, hvortil grafisk fremstilling tilknyttes f.eks. afstand mellem to punkter i planen, cirkelligningen, den rette linje, parabler og deres toppunkter o.s.v.. I 2.g introduceres differentialkvotient. Et eksempel på en på en opgave kunne være: "Løs ad grafisk vej Ligningen $2x^3-3x^2-12x+8=0$" og "Hvilke Dimensioner skal man give et cylindrisk Litermaal (Konservesdaase), for at Forbruget af materiale skal blive Minimum?". Derudover arbejdes med simpel rentesregning. Dertil stiller Willesen opgaver af typen: "Tegn den Kurve, som fremstiller Væksten af 100 kr. sat paa Rente og Rentes Rente i 5 Aar til 10% p.a. Er den krum eller sammensat af rette Liniestykker? Kan man med fuld Nøjagtighed interpolere i en Rentetavle, naar r er givet?" Her ser vi et eksempel på, hvor der i et undervisningsforløb skal overvejes relationen mellem matematik og virkelighed. I 3. g kommer trigonometrien ind i undervisningsforløbet.[101] Willesen "turde sige, at Eleverne med Interesse og ogsaa med udbytte har fulgt Undervisningen og de fleste af dem er i Stand til at tage fat paa Opgaverne paa en fornuftig Maade". Hans elever mener ifølge ham, at rentesregning er det værste, og det er også det, der falder mest ud af tråd med hans øvrige teorigennemgang.[102]

Da Torsting markerer sig i debatten næste gang, har han været på besøg ved de preussiske skoler. I "Rictlinien für die Lehrpläne der Höheren Schulen Preuszens" står der blandt andet, at "mellem matematikken og de øvrige undervisningsfag må tilstræbes de flest mulige forbindelser". Det fremhæves, at matematikkens logiske side falder fint i tråd med det grammatiske i sprogene, ligesom rumanskuelse og projektionstegning kan bruges til kunstbetragtninger.[103] I de gode timer åbnes op for samvirken mellem fagene. Herunder vil den gode lærer krydre med matematikkens historie. I Rictlinien står der skrevet, at undervisningen skal stå i intimt forhold til anvendelser. Den undervisning Torsting har fulgt i Preussen bærer præg af en vogten efter anvendelser. Det er ment positivt. De har også givet mulighed for, at elever på tværs af klasser kan fordybe sig i noget matematik og lave et afsluttet forløb over det. Mulige emner kunne være forsikringsmatematik, nationaløkonomiske betragtninger osv. Her skal læreren have en rådgivers rolle.[104] Det lyder meget som projektorienteret undervisning, hvor eleverne i høj grad selv opnår deres egne erkendelser. Torsting synes, at hvis anordningen står for at skulle ændres, da skulle man prøve at drage erfaringer af den preussiske undervisning.

3. 8 Tanker om indførelse af valgfrit fag

Torsting blander sig ligeledes i debatten i Gymnasieskolen i 1929[105]. Det er i forbindelse med indførelsen af et eventuelt frit valg i gymnasiet. Der er røster, der mener, at piger hellere skulle vælge husholdningskundskab frem for matematik. Det vil Torsting gerne argumentere imod, idet han mener, der er et udbytte ved at blive undervist i matematik også for sproglige. Skolens formål er at gøre eleverne i stand til at forstå det samfund, de lever i. Og verden er præget af naturvidenskab. Matematikken giver en logisk måde at

[101] Matematisk Tidsskrift 1928, s. 47- 5?
[102] Matematisk Tidsskrift 1928, s. 51-52
[103] Matematisk Tidsskrift 1928, s. 85
[104] Matematisk Tidsskrift 1928, s. 90
[105] Det er omkring dette tidspunkt, Torsting bliver fagkonsulent.

tænke og forstå på og bidrager i høj grad til almendannelsen. Og i stedet for at overveje at skære ned på faget, da skal man hellere vende blikket mod "Richtlinien" fra de preussiske højere skoler.[106] Men gymnasiet er stadigvæk også studieforberedende, og Torsting pointerer, at for sproglige, der vil studere medicin, da vil matematik være til stor gavn. Også på det filosofiske fakultet kan matematisk tankegang spille en rolle. Mange statistiske tabeller og grafiske afbildninger kræver matematisk forståelse. Ligesom faget gymnastikteori under det filosofiske fakultet gør det. Desuden skal alle lærere tage en pædagogisk eksamen og lære om "skolehygiejne, hvor funktionsbegreb og grafisk afbildning spiller en stadig større rolle"[107]. Konklusionen er ifølge Torsting, at en fjernelse af matematik vil give forringede muligheder for videreuddannelses for de sproglige. Han slutter af med synspunktet, at matematik har en større almendannelsesværdi og giver større muligheder end husholdningskundskab.

Årsagen til diskussionen omkring husholdningskundskab skyldes en lærerinde Sophie Petersen[108]. Hun agiterer for, at der skal tages hensyn til, hvilke evner de sproglige piger har og deres fremtidige erhverv. Derfor skal matematik kunne vælges fra. "Det er (heldigvis) kun et ringe Procenttal, der vælger et Universitetsstudium"[109]. Resten får uddannelse indenfor kontor, sygepleje og børnehavegerning. Hun foreslår indførelse af faget husholdningskundskab, som vil virke "tiltrækkende paa dem og er i Overensstemmelse med mer eller mindre fremtrædende Evner og Interesser hos dem"[110]. Hun mener, at de kvindelige rektorer burde agitere for undervisning i husholdningsbiologi som et valgfrit fag i de gymnasier, hvor der er piger. "Faget vil paa Forhaand være sikker paa Elevernes Interesse (ikke *alene* fordi de derved slipper for den forhadte Matematik!), det vil være af stor samfundsmæssig Betydning"[111].

Poul Mogensen[112] reagerer på Sophie Petersens indlæg og er glad for en debat om matematik for sproglige. Angreb på de sproglige linjer skyldes ifølge ham ofte uvidenhed om forholdene i undervisningen. Pensum ved den nye ordning er så lille, at selv de mindst begavede elever kan følge med. "Sandheden er, at den spr. Studentereksamen i vore Dage er en ren Børneeksamen, hvad Matematikken angaar. Det gælder for øvrigt ikke alene kvalitativt, men ogsaa kvantitativt".[113] Tværtimod kan han se en sammenhæng mellem karaktererne i tysk, latin og matematik, så det kan tyde på, at sproglige til eksamen ikke har påfaldende sværere ved matematik. Klagerne over matematikken skyldes dårlige indtryk fra tidligere elever. De tidligere akademikere fra undervisning før 1910 har haft et stort pensum, meget arbejde, lille forståelse og dårlige karakterer. Dette har måske præget den negative holdning til faget. Vigtigere er spørgsmålet om de

[106] Gymnasieskolen 1929, s. 109
[107] Gymnasieskolen 1929, s. 111
[108] Sophie Clausine Petersen 1885-1965; cand. mag. i naturhistorie og geografi, fysik og kemi; lærerinde ved Ingrid Jespersens Skole; lektor ved N. Gymnasium; medl. af bestyrelsen for Gymnasieskolernes Lærerforening 1927-44 og Pædagogisk Selskab 1935-49.
[109] Gymnasieskolen 1929, s. 67
[110] Gymnasieskolen 1929, s. 68
[111] Gymnasieskolen 1929, s. 69
[112] Poul Mogensen 1895-1980; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; stifter af og fmd. for foreningen af matematiklærere ved gymnasier og seminarier 1931-37; redaktør af Matematisk Tidsskrift 1934-38; medlem af opgavekommissionen 1934-45; rektor for Lyngby Gymnasium 1945-65.
[113] Matematisk Tidsskrift 1929, s. 136

sproglige får et udbytte af matematikundervisningen. Tidligere skulle der afses tid til opgaveregning, og det var her, at eleverne fik forståelsen af teorien. Nu er dette reduceret til behandling af simple eksempler. Det gør teorien uinteressant, og eleverne mister interessen.[114] Der er et problem i undervisningen. Derfor er han glad for initiativet fra ministeriet i 1924, hvor der opfordres til nye forsøg i undervisningen. Mogensen har selv deltaget og mange andre ligeså. Han nævner nogle af de punkter, som han har forsøgt sig med. Det er igen grafisk fremstilling og funktionslære. Eleverne udvikler en glæde ved kurvebegrebet, og de når til en god forståelse af afhængigheden mellem variable. "Den Enhed, Sammenhæng og Harmoni, som er et af Matematikkens Adelsmærker træder meget tydeligt frem ved Behandlingen og brugen af de nævnte moderne Begreber"[115]. Det interesserer også eleverne at arbejde med rentesregning og anvendelser indenfor fysikken. Mogensen synes, at diskussionen skal stoppe for en tid, og give ro til de lærere, der forsøger sig med noget nyt i undervisningen. For en matematiker som ham er det umuligt at forstå, at nogen kan foreslå at afskaffe matematik for sproglige samtidig med, at "Matematikken går sin Sejrsgang paa flere og flere Omraader, selv i populære Fremstillinger både indenfor Naturvidenskab og Aandsvidenskab - man kan jo snart ikke røre sig uden at træffe på Formler, Kurver og Tabeller"[116]. Han erklærer sig enig i adjunkt Torstings argumenter for, hvad sproglige kan benytte matematik til på de videregående uddannelser. Også han foreslår en undersøgelse af, hvor de sproglige går hen, når de går ud af gymnasiet.

3. 9 Betænkning vedrørende det højere skolevæsen[117]

Efter flere år med overvejelser omkring afskaffelsen af matematik for sproglige elever, forandring af gymnasiestrukturen, undervisning baseret på anvendelser af matematik nedsættes den 13. oktober 1928 af undervisningsministeriet et udvalg til drøftelse af reformer inden for det højere skolevæsen. Beskikket medlem og formand for udvalget var bl.a. undervisningsinspektør Højberg Christensen[118]. V. A. C. Jensen og Einer Torsting, som blandede sig i debatten om matematikundervisningen deltog ligeledes i udvalget. Universitetets konsistorium har på forhånd spurgt om, der "kan aabnes Muligheder for i højere Grad end hidtil at tilpasse Gymnasiets Undervisning med et Universitetsstudium som Maal". Samtidig med at det lægevidenskabelige og det matematisk-naturfaglige fakultet "udtaler Ønsket om, at *Matematikundervisningen* på den nævnte Linie [den ny-sproglige] af Hensyn til Anvendelser paa biologiske Fænomener indrettet saaledes, at den kan bibringe de Studerende et mere omfattende Kendskab til Anvendelsen af Koordinatsystemer og grafisk Fremstilling, end den hidtil har ydet".[119] Udvalgets opgave har været, at indrette den højere skole inden for den ramme, at gymnasiet skal være 4-årigt frem for det gældende 3-årige. Derved kommer idéen fra tidligere betænkninger af blandt andet Tuxen og af den store skolekommission frem igen.

---

[114] Gymnasieskolen 1929, s. 138
[115] Gymnasieskolen 1929, s. 139
[116] Gymnasieskolen 1929, s. 139 - 140
[117] Betænkningen er et resultat af et udvalgsarbejde og danner baggrund for en senere ændring af anordningen.
[118] Axel Christen Højbjerg Christensen 1888-1972, cand. mag. i tysk; dr. phil 1918; rektor for Ordrup Gymnasium i 1921; undervisningsminister 1942-45; medlem af opgavekommissionen 1922-58; undervisningsinspektør 1927-58.
[119] Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen, s. 9

I udkastet til en timeplan for gymnasiet, da har udvalget foreslået, at matematik skal udgøre 4 timer på de sproglige linjer i 1. og 2. g. og 6, 5, 6 og 6 timer på den matematiske linje i 1., 2., 3. og 4. g. Formålet med undervisningen er "at bibringe Eleverne de Forestillinger, som ligger til Grund for vor Opfattelse at Tal og Rum, at gøre dem fortrolige med matematiske Betragtningsmaader og at give dem Midler til at uddybe deres Forestillinger paa Omraader, hvor Matematikken kommer til Anvendelse".[120] Der er her en formålsparagraf, der anbefales, at eleverne skal kende til områder, hvor matematik anvendes. På sproglig linje skal man se, hvorledes koordinatsystemet kan anvendes til afbildning af funktioner, der har praktisk oprindelse.[121] "Ved Valg af Øvelseseksempler bør man, hvor det er muligt, søge Tilknytning til det praktiske Liv"[122], udtaler udvalget sig i et forslag til bekendtgørelse om gymnasiet. Af hensyn til de nysproglige, som ikke fortsætter med videre studier, men går ud i det praktiske liv, foreslår man indført et fag som praktisk økonomi, som tildeles en time i 3. og 4. g.. I forhold til den gældende anordning af 1906, da bortfalder valget mellem infinitesimalregning og andre udvidede emner, ligesom de imaginære tal udgår. For de sproglige linjer, da ligger forandringen i, at matematikundervisningen ophører efter det 2. år. Det sker på baggrund af den kritik, der har været af de sprogliges udbytte af samme.[123] Apropos eksamen så ligger matematikeksamen for sproglige efter 2.g. og for matematikere efter 4. g. For alle linjer gælder, at der er både skriftlig og mundtlig eksamen. Den skriftlige eksamen er på 4 timer og dækker hele pensum, mens den mundtlige prøve for matematikere udgør halvdelen af pensum og for sproglige hele pensum.[124] I breve sendt til undervisningsinspektøren fra De Kommunale Gymnasieskolers Lærerforening og fra Gymnasieskolernes Lærerforening giver de udvalget deres opbakning til at gøre gymnasiet 4-årigt, blot er det et krav, at der skal være tilknyttet en forskole til det.[125] Udvalgsarbejdet bliver afsluttet 1930.

3. 10 Reaktioner på betænkningen

Betænkningen fører til debat blandt flere fagfolk, der også underviser i gymnasiet, og C. Hansen er af redaktionen på Matematisk Tidsskrift blevet opfordret til at skrive om sin reaktion på udkastet til den nye betænkning for matematikundervisningen. Først stiller han det spørgsmål: Hvad skal vi egentlig med matematik i en skole? Han svarer selv, at "Matematik skal der til, for at vi Mennesker kan forklare og beherske en stor og for vort Samfund overordentlig vigtig Mængde af Fænomener"[126]. Igen kommer ord som "Træning for den menneskelige Hjerne", "logisk Sans" og "logiske Metoder" ind i debatten. Men den egentlige grund til at matematik har fået mange timer ved loven af 1903 er den, at "omverdenen, at Teknikken kræver Matematik til sin forstaaelse". Det er for Hansen hovedformålet, at "Forstaaelsen af Omverdenen er Maalet for vor Stræben,

[120] Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen, s. 81
[121] Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen, s. 84
[122] Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen, s. 96
[123] Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen, s. 102
[124] Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen, s. 122
[125] Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen, s. 180 og 182
[126] Matematisk Tidsskrift 1931, s. 38

Matematikken er et af Midlerne dertil".[127] Igen agiterer han for, at anvendelser af matematikken indenfor andre områder skal fremhæves. Og igen er det fysik, astronomi, og geografi, der kan bruges til det.

Poul Mogensen har også en mening om den nye betænkning. Der er ikke noget positivt at sige. Timetallet er reduceret, og indførelsen af den 3-årige forskole og det 4-årige gymnasium fører ikke noget godt med sig. At timetallet er nedsat i 1. og 2. g. er for Mogensen besynderligt, idet netop matematik anvendes indenfor flere og flere felter. Også på de videregående uddannelser. På den sproglige linje er det helt galt. Faget er blevet reduceret med 1 time i forskolen og med 4 timer i gymnasiet. Han mener, det gør lidt grin med de forsøg mange lærere har gjort for at få undervisningen til at fungere, og det på opfordring af ministeriet. Fejlen man har gjort er ifølge Mogensen, at man har ønsket, at matematik for de sproglige skal være et nedkog af matematikpensum på den matematiske linje. I stedet skulle man hellere opfatte matematik for sproglige som sit eget fag både med stofvalg og med behandlingen deraf.[128]Som det ser ud på nuværende tidspunkt, da vil den matematiske linje være det bedste valg til at forberede til videre studier.

Også L. Willesen er utilfreds med resultatet for de sproglige. Han frygter, at de steder en sproglig student vil kunne få adgang til af videregående studier er på det juridiske, teologiske og det filosofiske fakultet. Medicin og statsvidenskab kræver for meget matematik for de sproglige. Resultatet vil blive, at de sproglige linjer vil miste elever, fordi mulighederne er større for matematikere.[129]

Sigurd Kristensen[130] har også en kommentar til betænkningen. Han er ikke glad for betænkningens opdeling i 2 år + 2 år, idet han frygter, at sammenhængen over de 4 år går tabt. For de sproglige er matematikken reduceret i en grad, så de vil være nødt til at supplere før et eventuelt universitetsstudium.[131]

F. Bøgh kan ikke for det matematiske gymnasium se de store ændringer ved den nye betænkning. Hverken i timetal eller i stoffet. Det gøres obligatorisk at behandle infinitesimalregningen, men det har de fleste lærere gjort i praksis. Ligesom de komplekse tal udelukkes. Det vil nok ikke medføre et stort tab for lærerne, mener Bøgh. Han er meget tilfreds med den nye betænknings stofindhold. Værre ser det ud for de sproglige. Der er faget nærmest skåret væk i en grad, der er helt grel.[132]

Viggo Madsen[133] er absolut ikke tilfreds med den nye ordning, som han mener lægger for mange bånd på læreren. "Jo flere Baand man lægger paa Læreren, desto mindre Interesse

[127] Matematisk Tidsskrift 1931, s. 39
[128] Matematisk Tidsskrift 1931, s. 55
[129] Matematisk Tidsskrift 1931, s. 57 - 59
[130] Sigurd Kristensen; f. 1887; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Ordrup Gymnasium; medlem af opgavekommissionen 1922-33; censor i forsikringsvidenskab ved Københavns Universitet 1933-57.
[131] Matematisk Tidsskrift 1931, s. 60 - 62
[132] Matematisk Tidsskrift 1931, s. 62 - 65
[133] Lars Viggo Hesseldahl Madsen; f. 1879; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Odense Katedralskole; medlem af opgavekommissionen; lærebogsforfatter.

og desto daarligere Arbejde"[134]. Kun de yngste lærere behøver at få fortalt, hvordan de skal gøre. Madsen har i 20 år undervist i irrationelle tal, og nu er det blevet forbudt. Det er han utilfreds med. Han er ligeledes vred over, at de komplekse tal er strøget af betænkningen. Det burde være valgfrit at undervise i komplekse tal eller funktionsteori. Han ønsker som de øvrige lærere flere anvendelser ind i undervisningen, i hvert fald foretrækker han det frem for funktionsteori.[135]

3. 11 Ny betænkning

På grund af politiske forhold med ny regering og mangel på opbakning til at føre den første betænkning ud i praksis, da har undervisningsministeriet i en skrivelse af 14. september 1931 bedt undervisningsinspektøren for gymnasieskolerne, Højbjerg Christensen, om at udarbejde et nyt forslag til reform af gymnasieskolen. Undervisningsministeriet har erkendt, at tiden ikke er inde til en ændring ved loven af 24. april 1903. Derfor er rammerne nu et 3-årigt gymnasium. I fagudvalget for matematik sidder lektor Alb. Kristensen[136], lektor J. A. Kristensen[137], rådsformand S. Kristensen og lektor P. Mogensen.

Matematik har på de sproglige linjer fået tildelt 4 timer i 2. og 3. g. mod tidligere 6. På den matematiske linje er timetallet henholdsvis 6, 5 og 6 timer fordelt på de 3 år. De 2 timers reducering af timetallet for de sproglige linjer har matematik måttet afgive til fysik/kemi i naturlæretimerne. Matematik har også måttet afgive en time på den matematiske linje. Det foreslås, at fransk får denne time.[138] Formålet for undervisningen på de sproglige linjer er "at give Eleverne Kendskab til visse vigtige Anvendelser af Matematikken. Af de teoretiske Afsnit medtages saa meget, at dette Formaal kan opfyldes". For den matematiske linje er det "at bibringe Eleverne en klar Forstaaelse af læren om de reelle Tal, Funktioner og simplere Rumformer. Endvidere skal Eleverne lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger, alt inden for de Rammer, som fastsættes ved nedenstaaende krav".[139] I stofvalget på alle linjer er det ikke matematik relateret til virkeligheden, der præger anordningen. I forslag til en bekendtgørelse for de sproglige linjer står, at "Hovedvægten lægges paa Matematikkens Anvendelse i det praktiske Liv inden for de i Anordningen givne Rammer. Ved valg af Øvelseseksempler bør man derfor, overalt hvor det er muligt, søge Tilknytning til det praktiske Liv. Tillige bør der inddrages Materiale (Tabeller og grafisk Afbildning), som finder Anvendelse ved Undervisningen i andre Fag, f.Eks. Naturfag og Historie". For den matematiske linje, da "bør tilstræbes et Samarbejde med de Fag, specielt Fysik, hvor Matematikken kan komme til Anvendelse. Ved Planlæggelsen af Undervisningen bør der derfor tages saadanne Hensyn, at dette

[134] Matematisk Tidsskrift 1931 s. 78
[135] Matematisk Tidsskrift 1931 s. 80
[136] Albert Kristensen; f. 1896; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Sct. Jørgens Gymnasium 1932; lærebogsforfatter.
[137] Johannes Arnold Kristensen; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; assistent ved observatoriet i København; adjunkt ved Randers Statsskole.
[138] Betænkning vedrørende Undervisningen i Gymnasiet, s. 12-13
[139] Betænkning vedrørende Undervisningen i Gymnasiet, s. 66-67

Samarbejde kan blive frugtbart".[140] Med hensyn til eksamen, da foreslår udvalget ikke en skriftlig eksamen for sproglige, men kun en mundtlig. I forhold til kommissionens forslag, da mener det nuværende fagudvalg ikke, at komplekse tal skal bortfalde. "Derimod er tilføjet Elementer af geometrisk Kinematik af hensyn til det ønskelige Samarbejde mellem Matematik og Fysik".[141] Udvalgsarbejdet afsluttedes d. 22. september 1933 og resulterer i anordningen af 1935. (se kapitel 7).

[140] Betænkning vedrørende Undervisningen i Gymnasiet, s. 69
[141] Betænkning vedrørende Undervisningen i Gymnasiet, s. 70-71

Kapitel 4 Lærebøger og studentereksamensopgaver

4. 1 Lærebøger til matematisk linje

De første lærebøger fra perioden er "Matematik for de sproglige gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasiums 1.ste klasse" af T. Bonnesen udgivet 1907 samt "Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium I og II" af samme forfatter og udgivet i 1909.

"Matematik for de sproglige gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasiums 1.ste klasse" er en bog til det første år på både den sproglige og matematiske linje. Bonnesen udtaler i forordet, at han har indrettet bogen saaledes, at den også kan benyttes på matematisk-naturvidenskabelig linje i 1. g.. "Det saa meget mere som det sikkert af Hensyn til Fysikundervisningen vil være heldigt, at "Matematikerne" tidligt lærer Elementerne af Trigonometrien at kende...Fremstillingen er gennemgaaende ret udførlig, hvilket sikkert vil vise sig nødvendigt, for at de sproglige Afdelinger, der kun har to ugentlige Matematiktimer, skal kunne tilegne sig stoffet.[1]
Det er bevidst, at han indleder med funktionsbegrebet i grafisk fremstilling, idet det vil blive "en hel Del lettere for dem at tilegne sig Teorien, der som bekendt indeholder nogle for mange Elever dunkle Spørgsmaal, end det hidtil i Almindelighed har været".[2]

"Matematik for de sproglige gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasiums 1.ste klasse" behandler blandt andet emnerne funktioner, grafisk fremstilling, polynomier, rødder, potenser, logaritmer, rækker, rentesregning og trigonometri. Indledningskapitlet "Funktion. Grafisk Fremstilling" har til hensigt at introducere størrelser, der afhænger af hinanden, for eleverne. Disse størrelser er hentet fra den virkelige verden. F. eks nævner han "Landets Folketal er en Funktion af Tiden", "Prisen paa Raastoffer, Fødemidler, Aktier og Obligationer varierer fra Dag til Dag", "Et faldende Legemes Hastighed er Funktion af den Tid, Legemet er faldet", "en Elektromagnets Styrke er Funktion af Strømstyrken" osv. Eksempler som strømforbrug i København over et døgn skal lære eleverne at tænke på maksimum og minimum. Hvornår er det største forbrug på et døgn? Bogens første kapitel bærer præg af grafisk fremstilling. Der er blandt andet et eksempel, hvor der oplyses, at matematik bruges til at planlægge togplaner. Det efterfølgende eksempel viser to toge, der kører fra henholdsvis København og fra Korsør med jævn hastighed, hvornår mødes togene? Ud af 1. aksen aftegnes klokkeslettene, og ud af 2.aksen tegnes kilometerafstande mellem stationerne. Opgaverne til afsnittet inddrager ikke anvendelser af matematik.[3]

[1] Bonnesen, T.: Matematik for de sproglige gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasiums 1.ste klasse, forord
[2] Bonnesen, T.: Matematik for de sproglige gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasiums 1.ste klasse, forord
[3] Bonnesen, T.: Matematik for de sproglige gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasiums 1.ste klasse, s. 5-11

Et andet anvendelsesorienteret kapitel er "Rentesregning", hvor også opgaverne til tager udgangspunkt i virkeligheden.[4] Ellers relateres ikke sidenhen til virkeligheden. Hverken teori eller opgaver handler derudover om anvendelser af matematik.

"Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium II" er en fortsættelse af bogen til de sproglige linjer og matematisk 1.g. I forordet fortælles, at "Der bygges i dette Bind paa det Funktionsbegreb, som i I er indarbejdet paa Grundlag af den grafiske Fremstilling...herefter følger Differentialkvotient og Integral af hele Funktioner, hvorved opnaaes tidligt at få indøvet alle de for Anvendelsen betydningsfulde Begreber paa det simpleste Grundlag og med et ringe Formelapparat. Ved Anvendelserne har jeg holdt det for rigtigt straks at medtage nogle stereometriske Opgaver, idet der enten benyttes en fra Regneundervisningen kendt Formel eller kun paa den elementæreste Rumanskuelse, som bedst støttes paa Modeller. Af mekaniske Anvendelser er Tyngdepunktets Bestemmelse medtaget, men iøvrigt er det af megen Betydning, at Anvendelserne netop foretages i Fysiktimerne og ikke i Matematiktimerne". "Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium II" indeholder følgende emner: rationale funktioner, trigonometriske funktioner, algebraiske ligninger og kurver, permutationer og kombinationer, sætninger om hele tal, komplekse tal og trigonometri. I kapitlet om "Permutationer" bliver der i opgaverne dertil relateret til virkeligheden. Der er opgaver, hvor antallet af måder *n* herrer og *n* damer kan tage hinanden til bords på skal beregnes, og antallet af måder hvorpå 52 kort kan fordeles ligeligt mellem 4 personer. Derudover er der ikke nogen anvendelser af matematik i bogen.[5]

"Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium III" indeholder det anordnede pensum i geometri for matematisk linje. Den omfatter emnerne punkter på en ret linje, linjer i et bundt, koordinater, den rette linje, geometriske steder, cirklen, parablen, ellipsen og hyperblen. Der er ingen anvendelser i hverken teori eller opgaver. Opgaverne er meget regnetekniske.

Fr. Fabricius-Bjerre har i sin pædagogiske afhandling fra 1927 også behandlet lærebogssystemer fra denne periode. Han har delt lærebøgerne op i bøger henvendt til mellemskolen, de sproglige linjer og den matematiske linje. Mellemskolens bøger kommer jeg ikke ind på. For de sproglige linjer er der ifølge Fabricius-Bjerre ikke mange bøger at skrive om, idet de, der benyttes også anvendes i det matematiske gymnasium. Dette er i hvert fald også tilfældet med Bonnesens bøger, hvor bog I er til alle linjer. Generelt tager mange bøger fra den periode ideen op med grafisk fremstilling, og i disse er funktionsbegrebet i fokus.

For den matematiske linje, da er Fabricius-Bjerre af den holdning, at "Bonnesen er gennem sine lærebøger den første danske talsmand for de nyere synspunkter. For ham er funktionsbegrebet det centrale matematiske begreb, den grafiske afbildning, hvorved funktionen anskueliggøres, det bedste pædagogiske hjælpemiddel".[6] Han sammenligner forskellige systemer og kommer til den konklusion, at "den grafiske afbildning her, som i

[4] Bonnesen, T.: Matematik for de sproglige gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasiums 1.ste klasse, s. 95-105

[5] Bonnesen, T.: Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium II, s. 112.

[6] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 95

Bonnesens bøger, indføres straks er sikkert af stor værdi, idet stoffet gøres lettere tilgængeligt for eleverne".[7] Mere behandler han ikke Bonnesens bøger, men gør rede for, at "Bonnesens har været brugt en del".[8]

Et andet lærebogssystem udgivet i perioden 1903-35 er J. Hjelmslevs[9] bøger "Elementær Geometri første, anden og tredje bog" udgivet i henholdsvis 1916, 1919 og 1921, og "Elementær Aritmetik første, anden og tredje bog" udgivet i 1925, 1926 og 1931.

I forordet til "Elementær geometri - første bog" står, at lærebøgerne skal "tilvejebringe et simpelt og naturligt Grundlag for al Undervisning i Geometri...Den handler ikke om Abstraktioner, men om Ting, der hører Livets Praksis til. Den bygger ikke paa Postulater, men paa Erfaringsresultater i deres naturlige Form. Og netop derigennem søger den at naa den Tilknytning til Virkeligheden, som baade for den geometriske Lærebygnings Sikkerhed og for dens praktiske Værd er af afgørende Betydning". I forordet retter Hjelmslev en tak til Bonnesen, som har hjulpet med at gennemse manuskriptet.

I "Elementær geometri - første bog" omhandler kapitlerne de geometriske grundformer, geometrien i tegneplanen, geometrien i marken, ligedannethed, beregnende geometri og konstruktionslære samt en opgavedel bagest i bogen. Der indledes med et eksempel taget fra en fabrik, hvor der laves plane flader. Herefter fortsættes med en fortælling om normalhjørnet, normalkilen og normalklodsen. Et kapitel senere, da viser det sig, at praksis i forbindelse med geometri f.eks er at kunne dele en vinkel med en passer eller at kunne konstruere en trekant. Ordet "anvendelse" dukker op nu og da f.eks. i forbindelse med sætningen: "Naar to Vinkler A og B i en Trekant ABC er lige store, er Trekanten ligebenet". Denne sætning kan anvendes til "Anvendelse I: I en retvinklet Trekant, hvis ene Vinkel er 30 grader, er den modstaaende Katete halvt saa stor som Hypotenusen".[10] Hjelmslev har medtaget et kapitel med titlen "Geometri i Marken", og det dækker over indførelsen af begreberne vandret og lodret. Vandret er enhver linje og plan, der er vinkelret på lodlinjen. Lodlinjen fås ved at sætte et lod fast for enden af en snor. Lodret er enhver linje og plan, der er vinkelret på en vandret. Landmåling introduceres som et område, hvor matematik kan anvendes. "Naar Landmaaleren skal "stikke en ret Linie ud" i Marken, sker det ved Anvendelse af Stokke...".[11] Bogen har udover det ingen anvendelser af matematik i tekst eller opgaver.

"Anden bog af min Elementær Geometri er en Lærebog i Stereometri, bestemt til Brug i det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium, i tekniske Skoler o. l., i det hele ved enhver Undervisning, der tilstræber at give et nogenlunde afrundet kursus i elementær Geometri...Første og Anden Bog indeholder tilsammen det Stof, som naturligt hører hjemme inden for den praktiske Elementærgeometri".[12] "Elementær geometri - anden

[7] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 95
[8] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 97
[9] Johannes Trolle Hjelmslev 1873-1950: mag. scient. i matematik; dr. phil 1897; universitetets guldmedalje i 1907; professor ved Københavns Universitet 1917.
[10] Hjelmslev, J.: Elementær Geometri I, s. 46
[11] Hjelmslev, J.: Elementær Geometri I, s. 69
[12] Hjelmslev, J.: Elementær Geometri II, forord.

bog" indeholder emnerne parallelforskydning i rummet, polyedre, krumme flader, ligedannethed og modsatte figurer, rumfangsberegninger, indledning i projektionslæren, sfærisk geometri, keglesnit og koordinater samt en opgavedel. Bogen inddrager ikke anvendelser i teori eller i opgaver. F. eks. ved teorien om kuglen og kugleoverflader relateres ikke til jordens udseende, som andre lærebogsforfattere gør det. Der stilles ikke spørgsmål i emnet om stedbestemmelse.

"Elementær geometri - tredje bog" indeholder kapitler om læren om de reelle tal, den geometriske målings teori, den analytiske plan, den analytiske trigonometri, geometriske steder, teoretisk konstruktion ved passer og lineal og arealmåling samt opgaver bagest i bogen. I forordet til den tredje bog står, at bogen omhandler "Begrundelsen og Udviklingen af den abstrakte Geometri". "Det har samtidig været et Hovedformaal, at denne rent aritmetiske Geometri blev bygget op ved naturlig Udvikling af og i Tilknytning til den praktiske Geometri. Det væsentligste Grundlag, herfor gives i andet Kapitel, den geometriske Maalings Teori. Hele den geometriske Lærebygning former sig da i to Afdelinger, en Virkelighedsgeometri, der handler om Ting, og en abstrakt Geometri, der handler om Tal".[13] I det andet kapitel om målingsteori gennemgås, hvordan en målestok er indrettet og nøjagtigheden af den.[14] Under kapitlet geometriske steder tager Hjelmslev ikke fat i bestemmelse af længde- og breddegrad, som andre matematikere gør i forbindelse med dette emne.

J. Hjelmslev har ligeledes skrevet et system over aritmetik "Elementær Aritmetik første, anden og tredje bog" udgivet i henholdsvis 1925, 1926 og 1931.

"Elementær Aritmetik - første bog" omhandler "Alle Egenskaber ved Tallene og alle Regler om deres Brug maa fremgaa af den Maade, hvorpaa de saaledes er indført".[15] Indholdet er læren om subtraktion, kvadratet på en sum, den pythagoreiske læresætning osv. Ingen relationer til virkeligheden. "Elementær Aritmetik - anden bog" har intet forord med eventuelle tanker omkring bogen. Kapitlerne omhandler polynomiet af 2. grad, ligninger med 2 ubekendte, kvotientrækker, logaritmer og rentesregning. Rentesregning er det eneste kapitel, hvor anvendelser af matematik inddrages. Ordet praksis/praktisk kommer igen til udtryk f.eks "Formel I finder navnlig Anvendelse i Praksis...", "Ved praktiske Beregninger af den her omtalte Art benytter man Tabeller".[16] De tilhørende opgaver tager ikke udgangspunkt i virkeligheden, kun i opgaver tilknyttet emnet rentesregning. Den tredje bog skal afslutte forløbet indenfor dét, elever skal lære om aritmetik i det matematiske gymnasium. Det er emner som komplekse tal, algebraiske ligninger, hele tal herunder kongruenser. Derudover er der et tillæg med induktionsbeviset og kædebrøker. Der er udover rentesregning ingen anvendelser af matematik i bogen.

Fr. Fabricius-Bjerres indtryk af Hjelmslevs bøger er, at de er svære at sammenligne med andre, "fordi det grundlag Hjelmslev arbejder paa, er vidt forskelligt fra andre

[13] Hjelmslev, J. : Elementær Geometri III, s. 3.
[14] Hjelmslev, J. : Elementær Geometri III, s. 69
[15] Hjelmslev, J. : Elementær Aritmetik I, s. forord
[16] Hjelmslev, J. : Elementær Aritmetik II, s. 23-24

forfatteres".[17] Fabricius-Bjerre er meget fascineret af Hjelmslevs lærebogssystem. "Elementær Geometri I" er af ham beskrevet under bøger til mellemskolen. I forordet står, at bogen tænkes anvendt i almenskoler og fagskoler, og siger intet om anvendelse i gymnasiet. Så det kan godt tyde på det. Men de øvrige bøger "Elementær Geometri II og III"[18] er beskrevet under bøger til det matematiske gymnasium. Bog 3 er noget helt specielt, idet der i kapitel 2 "etableres den overgang mellem abstrakt og virkelig geometri, der er et af de vigtigste punkter i den hjelmslevske geometri. Det vises her, at man virkeligt kan anvende den euklidiske talgeometri i den virkelige verden, og det er en af prof. Hjelmslevs store fortjenester for første gang at have gennemført beviset for den euklidiske geometris anvendelighed i virkeligheden. Dette kapitel: Den geometriske maalings teori, er ikke let tilgængeligt, men uundværligt, naar det hjelmslevske synspunkt anlægges på geometrien".[19]

Fordelen ved at undervise efter disse bøger er ifølge Fabricius-Bjerres opfattelse, at "Begreberne klares og renses i et omfang, der er ganske uvant ved den sædvanlige undervisning. Men en saadan rensning foregaar ikke smertefrit; og førend de af Hjelmslev uddannede matematikere bliver lærere paa landets skoler, vil det hjelmslevske system næppe trænge igennem. Det er store fordringer, Hjelmslev stiller i sine lærebøger, baade til læreren og til eleverne, maaske for store fordringer, men der er ingen tvivl om, at ved at bruge disse lærebøger, vilde der læres mere matematik end tidligere, og rigtig matematik". [20] Fabricius-Bjerre konstaterer, at dette bogsystem anvendes "praktisk set ikke".[21]

Pihl og Kristensens lærebogssystem "Matematik I, II og III" markerede et brud med de forrige generationers måde at skrive lærebøger på. Det var et lærebogssystem fremstillet på en pædagogisk måde. De var mere forklarende og brede i deres form, hvorfor de var lettere for eleverne at forstå. "Det var meget livskraftige bøger, der hurtigt opnåede meget stor udbredelse".[22] Det samme mener Fabricius-Bjerre, som også har behandlet Pihl og Kristensens bøger. Han når til den konklusion, at dette system, ligesom Bonnesens bøger, bærer præg af funktionsbegrebets indførelse. Ligesom den grafiske afbildning også spiller en stor rolle. Han kommenterer de mange eksempler, der er med til at gøre bøgerne omfangsrige. Med hensyn til, hvad der benyttes mest i matematikundervisningen, da har Pihl og Kristensen overtaget førerpositionen.

Pihl og Kristensens lærebogssystem "Matematik I, II og III" henvendt til det matematisk-naturvidenskabelige gymnasium blev udgivet første gang i tiden 1926-27. I tredje bog, som er anden uforandrede udgave, har Pihl og Kristensen i forordet skrevet om hele bogserien, at det er deres opfattelse, at eleverne skal øves i selvstændig tilegnelse af stoffet, hvorfor de har bestræbt sig på at gøre bogen overskuelig og anskuelig. Eksemplerne i bogen er udarbejdet med det formål, at eleverne kan læse dem selv uden

[17] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 96
[18] Det har ikke været muligt at finde "Elementær Geometri IV", men den skulle ifølge Fabricius-Bjerre indeholde differential- og integralregning langt over pensum.
[19] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 96-97
[20] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 97
[21] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 97.
[22] Matematiklærerforeningen 1931-1981, s. 46

gennemgang. Med hensyn til pædagogisk metode og stofbehandling, da udtaler forfatterne, at bøgerne ikke fremtræder revolutionerende. De er blevet inspireret af bl.a. Bonnesens lærebøger. Pihl og Kristensen har ud fra egne erfaringer som lærere fremstillet stoffet som det bedst egnede sig for gymnasieelever samtidig med, at de har taget hensyn til, at stoffet skal være af studieforberedende karakter.[23]

"Matematik I" indleder med de reelle tal, numerisk værdi osv. Lige derefter introduceres koordinatsystemet og dernæst funktioner. Derudover behandler bogen emneområderne første og andengradspolynomiet, rod, potens, logaritmer, ensvinklede og kongruente trekanter, trigonometri, areal, punktsystemer og cirklen. Funktionsbegrebet indføres i emnet grafisk fremstilling ved en støttepunktstabel over klokkeslet og dagtemperatur, og der er et eksempel, hvor eleverne grafisk skal vise leveomkostninger i forhold til år og et eksempel, hvor arbejdsløsheden i forhold til måneder skal vises grafisk.[24] Bogen illustrerer også grafisk, når der arbejdes med emner som den rette linje, parablen, det grafiske billede af $y = x^n$, teori om geometri og trigonometri. Der er ikke anvendelsesrelaterede emner udover de nævnte hverken i opgaver eller eksempler.

"Matematik II" indeholder emnerne konvergente talfølger, funktioner i almindelighed, kontinuerte funktioner, differentialregning, hele og brudne rationale funktioner, trigonometriske funktioner, integralregning og geometriske steder. Selve begrebet anvendelse bliver brugt i forbindelse "Koordinatsystemets Anvendelse til Bestemmelse af geometriske Steder".[25] Der er ingen anvendelser af matematik i teori eller opgaver.

I forordet til "Matematik III" skriver forfatterne: "Det er vor Opfattelse, at det i Gymnasiet navnlig gælder om at øve Eleverne i selvstændig Tilegnelse, og det har derfor været et Hovedformaal for os at give Stoffet en saa udførlig og tilpas anskuelig Fremstilling, at Bogen kan tjene som et væsentligt Hjælpemiddel for Eleverne under deres Tilegnelse af Kundskaberne. Væsentlige Dele af Bogen - herunder de mange gennemregnede Eksempler - er beregnet paa at læses uden den sædvanlige minutiøse Gennemgang". Kapitlerne omhandler talteori, komplekse tal, algebraiske ligninger, rækker og rentesregning. Det er i emnet "Rentesregning", at anvendelser af matematik kommer ind.[26]

Hvis man tænker på lektor Pihls udtalelser i forbindelse med et foredrag afholdt i Matematisk Forening d. 22. marts 1923, 3 år før bøgerne udkom, da kan man tydeligt se, at lærebøgerne er et udtryk for de tanker, Pihl gjorde sig om undervisningen i gymnasiet. Nøgleordene var grafisk afbildning og anskuelse. Han gjorde sig til talsmand for, at grafisk afbildning skulle være en del af pensum for den matematiske linje frem for kun for de sproglige linjer. Desuden mente Pihl, at elevernes dømmekraft skulle opøves. Det er i god overensstemmelse med hensigten med lærebogssystemet beskrevet i forordet.

Til Pihl og Kristensens lærebogssystem hører også "Matematiske opgaver I, II og III". Opgavesamlingen er bygget op som lærebøgerne, dvs. med samme emneinddeling.

[23] Pihl, H. J. og Kristensen, Sig. : Matematik III, forord
[24] Pihl, H. J. og Kristensen, Sig. : Matematik I, s. 32-33
[25] Pihl, H. J. og Kristensen, Sig. : Matematik II, s. 166
[26] Pihl, H. J. og Kristensen, Sig. : Matematik III, s. 77-85.

Bøgerne karakteriseres ved at have mange opgaver tilknyttet hvert emne. I forordet til samlingen skriver forfatterne, at det er deres mening, at eleverne selv kan lave opgaverne hjemme. Anvendelser af matematik kommer i emnet "Rentesregning", hvor alle opgaver tager udgangspunkt i virkeligheden.[27] I "Rumgeometri" er der opgaver om skibsfart og astronomi, hvor blandt andet et skibs geografiske bredde skal beregnes.[28] Der er ikke anvendelser af matematik i udpræget grad i opgaver. Derudover har de anført de skriftlige studentereksamensopgaver fra årene 1910-1937 inkl. De vil blive behandlet særskilt. (se afsnit 4.3)

Senere blev P. Rubinstein[29] medforfatter til lærebøgerne i forbindelse med en ny udgave. Han fik især indflydelse med ideerne om en aksiomatisk opbygning af stoffet, den dybere behandling af de reelle tal og af funktionsbegrebet, der blev lagt op til ved anordningen af 1935. Det nye form for lærebogssystem af Pihl, Kristensen og Rubinstein overfor det tidligere system af Hjelmslev førte til en disputs i Matematisk Tidsskrift mellem forfatterne omkring holdningen til indførelsen af aksiomatisk opbygning i gymnasiets matematikundervisning.[30]

Af øvrige bøger fra perioden 1903-1935 kan nævnes "Elementær Matematik" af Johs. Mollerup[31] udgivet i 1933. Der er desværre intet forord i bogen, så det er svært at yde bogen retfærdighed med hensyn til formålet. Indholdsmæssigt består bogen af meget forskellige emner, som f.eks komplekse tal, sinusrelationer og indirekte andengradsligninger. Han behandler rentesregning, hvor de tilhørende opgaver er anvendelsesorienterede og tager udgangspunkt i en situation fra virkeligheden.[32] Der er en anvendelsesorienteret opgave i tilknytning til afsnittet omrumfang, hvor eleverne skal beregne, hvor mange glas punch gæsterne ved et selskab får udfra kendskabet til antallet af karafler og deres rumfang.[33]

4. 2 Lærebøger til sproglige linjer

I 1924 kom ministeriets betænkning vedrørende, at nye forsøg var velkomne i det sproglige gymnasium. Dr. Hansen var én af dem, der forsøgte nye ideer. Forsøget resulterede i
udarbejdelsen af to lærebøger til det sproglige gymnasium, der udkom i 1924 og 1925.

Den ene bog hedder "Anvendt Matematik" , "fordi dens Stof skal vise Eleverne, at den Matematik, de har lært i Mellemskolen og i Gymnasiet, kommer til Anvendelse ved Besvarelse af en Mængde Spørgsmaal, som Iagttagelsen af Omverdenen og vore Forsøg

[27] Pihl, H. J. og Kristensen, Sig.: Matematiske opgaver II, s. 51-55
[28] Pihl, H. J. og Kristensen, Sig.: Matematisk opgaver III, s. 22-23
[29] Poul Georg Rubinstein 1904-1987; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse 1945-64; rektor for Øregaard Gymnasium; 1960 fmd. for censorerne under det naturvidenskabelige fakultet ved Københavns Universitet.
[30] Matematiklærerforeningen 1931-81, s. 46-47
[31] Johannes Mollerup 1872-1937; mag. scient. i matematik, dr. phil 1903; professor i matematik ved Den polytekniske Læreanstalt; 1917 fmd. for Matematisk Forening; lærebogsforfatter.
[32] Mollerup, J.: Elementær Matematik, s. 90-95
[33] Mollerup, J.: Elementær Matematik, s. 111

paa at forstaa dens mekaniske Sammenhæng stiller os".[34] Hansen skriver i forordet, at bogen er et resultat af et forsøg over en længere årrække, hvor han med ministeriets tilladelse har udført forsøg med de sprogliges undervisning. Af emner han relaterer til er ligevægtslære, bevægelseslære og astronomi. "Stoffet er af en saadan Art, at det øver Eleverne i Tænkning og behandler Problemer fra Verdenen, hvori vi lever". [35] For at kunne variere opgaverne indenfor astronomi anbefaler Hansen, at læreren anskaffer sig en kalender udgivet af Københavns Observatorium med geografiske og astronomiske tabeller. Det er dog ikke påkrævet for at kunne løse opgaverne i bogen. Han lader også eleverne på den matematiske linje regne opgaver fra denne bog, der omhandler fysik og astronomi.

Ser man på indholdet af teorien, da gennemgås sammensætning af kræfter, der ligger i samme plan og angriber samme punkt, momentpar og kraftpar, vejlængden og det lodrette kast. Der er ligeledes emner hentet fra astronomien f.eks. solens drejning, himlens daglige drejning, sekstanten, solure og kortprojektioner. De dertil hørende opgaver bagest i bogen kan alle defineres som anvendelser af matematik.

Den anden bog "Ren Matematik" af Hansen udkom året efter (1925). Den udgør den teoretiske basis for at undervise i anvendt matematik efter bogen af samme navn. (Planlægningen af undervisningen kan ses beskrevet i kapitel 3). Bogen indeholder emner, som ikke er nødvendige for forståelsen af "Anvendt Matematik". Det drejer sig om rentesregning, logaritmer, rækker, grænseværdier, polynomiet af 2. Grad herunder fortegnsdiskussion, maksimum og minimum og rodstørrelser. Når stoffet er taget med skyldes det, at "der har været rigelig Tid dertil, og desuden, at dette Stof indeholder udmærkede pædagogiske Værdier, som det er værd at udnytte. Særlig Afsnittet om Rentesregning og Annuiteter indeholder stof, hvortil det er godt for Eleverne at have Kendskab; dels har det en praktisk Betydning, og dels giver det en udmærket Øvelse i Tænkning og Fremstilling".[36] Denne bog adskiller sig fra den forrige ved ikke at relatere til virkeligheden undtagen ved rentesregning. Opgaverne er da også af mere teknisk karakter, hvor det handler om at indøve regning indenfor emnerne. Det er værd at bemærke, at Hansen deler matematisk teori op i henholdsvis anvendt og ren matematik.

Fabricius-Bjerre har ikke mange kommentarer om dette bogsystem. Han beskriver kort om dem: "C. Hansen lader sine elever bruge deres matematiske viden paa opgaver inden for Rationel mekanik og astronomi. Ved hjælp af de sfæriske formler for retvinklede trekanter vil man være i stand til at løse overmaade mange simple, astronomiske opgaver, og de mekaniske opgaver løses let ved elementær analytisk geometri".[37] Han mener, at Hansen hører til den kategori af matematiklærere, der mener, at sproglige skal undervises i matematik, og at den manglende interesse fra de sproglige elevers side må skabes ved at tage udgangspunkt i praktisk matematik.

S. A. Christensen har også en kommentar til Dr. Hansens bøger over forsøget i det sproglige gymnasium. "Det forekommer mig, at Dr. H. Stiller meget store Fordringer til,

[34] Hansen, C.: Anvendt Matematik, s. forord
[35] Hansen, C.: Anvendt Matematik, s. forord
[36] Hansen, C.: Ren Matematik, s. forord
[37] Matematisk Tidsskrift 1927, s. 92

hvad der kan naas i de 3 Klasser med 2 Timer ugentligt og med et Elevmateriale, der ikke er særlig interesseret og for en Del ikke anlagt for Matematik". Men Christensen er meget positiv overfor forsøget. "Dr. H.'s Bøger giver hidtil det eneste Forsøg paa at løse Opgaven om en Ændring i Matematikundervisningen for de sproglige Linier, som er gennemprøvet og nu offentligtgjort, saa at andre kan prøve det samme System, og jeg tror, at det som Helhed er lykkedes ham at faa noget godt ud af at kombinere Matematik og Fysik og derigennem skaffe et praktisk Moment ind i den Undervisning".[38] Også Torsting mener, at Hansens bøger er det eneste forsøg på at indføre nye pædagogiske synspunkter.[39]

Af andre bøger findes bogen "Praktisk Matematik" af Jakob Jensen[40]. Fabricius-Bjerre har ikke arbejdet med denne bog, hvilket skyldes, at den er udgivet i 1932, hvor Fabricius-Bjerres afhandling er fra 1927. Lærebogen henvender sig til de sproglige linjer.

"Navnet *Praktisk Matematik* er at opfatte som et Motto for Bogen, idet der dermed kun hentydes til, 1) at der ved Stofvalget især er taget hensyn til, hvad det for Eleverne er af størst *praktisk* Interesse at lære at kende, og 2) at hele Lærebogen er opbygget som en Række *praktiske Øvelser* i Tegning, Maaling og Beregning".[41] Bogen er gennemlæst af Einer Torsting og er ellers i sin tankegang ifølge Jensen tænkt at skulle være beslægtet med Hjelmslevs virkelighedsgeometri. Der slås bro mellem geometri og virkeligheden i afsnit 1, "hvor der gøres Rede for den Usikkerhed, hvormed vore Maalinger er beheftede, og undersøges, hvilken Indflydelse den har paa vore Resultaters Gyldighedsområde".[42]

Bogen omhandler emnerne geometriske målinger, grafisk fremstilling, matematiske funktioner, tabellariske beregninger, geometriske beregninger og kurveundersøgelser. Bogen indledes med et afsnit om geometriske målinger med måleenhedernes historie. Målestokken gennemgås med usikkerhedsberegninger.[43] Der er en tilhørende opgave, hvor eleverne skal forklare hvorledes, længdemåling er af stor betydning i det praktiske liv.[44] Det næste afsnit omhandler grafisk fremstilling. Meget kendetegnende for diskussionen omkring de sprogliges matematikundervisning, tager Jensen her udgangspunkt i for eleverne kendte situationer. F.eks. en patients temperatur afsat grafisk med tiden hen af 1. aksen og temperaturen op af 2. aksen. På den måde introduceres koordinatsystemet. Der er også fysiske fra fysikken med et radioapparat og bølgelængder.[45] Næste afsnit er om ligefrem proportionale størrelser. Her skal eleverne overveje om "Menneskets Vægt afhænger af Alderen" og om "Arbejdstiden afhænger af

[38] Matematisk Tidsskrift 1926 s. 6-7
[39] Matematisk Tidsskrift 1927 s. 109
[40] Jakob Jensen; f. 1901; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; fmd. for Matematiklærerforeningens styrelse 1937-47; lektor ved Ordrup Gymnasium 1933; medlem af opgavekommissionen 1945-57; fmd. for Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasier og Seminarier 1937-47.
[41] Jensen, J.: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier, forord
[42] Jensen, J.: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier, s. forord
[43] Jensen, J.: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier, s. 9-15
[44] Jensen, J.: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier, s. 25
[45] Jensen, J.: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier, s. 27-42

Arbejdernes Antal".[46] Ligesom de øvrige bøger medtager Jensen også rentesregning., hvor de tilhørende opgaver drejer sig om anvendelser af matematik.[47]

4. 3 Studentereksamensopgaver 1903-35

I "Kgl. Anordning angaaende Fordringerne ved og Eksamensopgivelserne til Studentereksamen m. m." af 10. juli 1909 gælder det for faget matematiks vedkommende, at eksamen for de to sproglige linjer er mundtlig, og der skal eksamineres i halvdelen af det læste pensum. For den matematiske linje gælder det, at eksamen både er skriftlig og mundtlig. Ved den mundtlige eksamen eksamineres i halvdelen af det læste pensum. Til den skriftlige eksamen gives to sæt opgaver. "Mindst Halvdelen af Opgaverne skal være umiddelbare Anvendelser af læste Sætninger. Een af Opgaverne skal bestaa i at føre Bevis for en Sætning i det Pensum, som opgives til mundtlig Eksamen. Den mundtlige Prøve bortfalder for de Eksaminander paa denne Linie, som mindst have faaet Karakteren 6 ved den Skriftlige Prøve, medmindre der fra Skolens eller Censors Side fremsættes udtrykkeligt Ønske om det modsatte".[48]

I "Udkast til Anordning angaaende Fordringerne ved og Eksamensopgivelserne til Studentereksamenen" i et cirkulære af 4. December 1906 var det oprindelig tænkt, at der også for sproglig linje skulle være skriftlig eksamen, hvortil der skulle gives et "Sæt Opgaver, som ere ganske simple Anvendelser af de læste Sætninger og Metoder".[49] Men skriftlig eksamen for sproglig linje blev ikke vedtaget ved anordningen af 10. juli 1909.

I Tuxens beretning om forholdene i gymnasiet berettes, at der "fra forskellig Side er ...udtalt Utilfredshed med, at der ikke gives skriftlige Opgaver til Eksamen. Denne Ordning er truffet for at undgaa en Overbebyrdelse af Eleverne med Hjemmearbejde, og den kan ogsaa anses for forsvarlig, da det ikke kræves, at Eleverne skal opnaa teknisk Færdighed, men kun, at de skal regne Opgaver i et Omfang, som er nødvendigt til Forstaaelse af Teorierne. Naar man ved, hvorledes Løsningerne af Hjemmeopgaverne bliver til i Telefonens Aarhundrede, kan der næppe være Grund til at gøre Forandring paa det Punkt".[50]

Opgavesættene[51]

Disse opgavesæt fra perioden 1903-35 er tilegnet den skriftlige studentereksamen for den matematisk-naturvidenskabelige linje. Jeg har valgt at se på studentereksamensopgaver fra 1910, da det var første gang, at der blev afholdt studentereksamen efter den nye anordning af 1906.

[46] Jensen, J.: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier, s. 51
[47] Jensen, J.: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier, s. 99-109
[48] Glahn, K.: Lov om Højere Almenskoler III, s. 46-47
[49] Glahn, K.: Lov om Højere Almenskoler, s. 211-212
[50] Beretning om Undervisningen i Gymnasieskolerne, s. 205
[51] Lomholt, A.: Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra Matematisk Artium Juni 1897 - Juni 1916; Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra Matematisk Artium Juni 1907 - Juni 1920; Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra Matematisk Artium Juni 1913 - Juni 1943

Opgavesættene er karakteriseret ved, at der ca. er 6 opgaver hvert år, hvor af de to-tre er inden for hvert emne. De fleste sæt i starten af perioden indeholder en opgave i rentesregning. Sådan er det i årene 1910-1916. Ved studentereksamen fra januar 1916 er der en opgave, der tager udgangspunkt i en situation, hvor et hold skal udtages til en sportskamp, og på hvor mange måder det kan gøres. En lignende opgave dukker op igen ved eksamen i september 1923 (som er en sygeeksamen), hvor der skal udregnes antal måder, et antal kugler kan fordeles i nogle skåle. I september 1925 er der en opgave, hvor der skal beregnes, hvor langt der er mellem 2 punkter på jorden. Ved eksamen i 1927, 1928,1932 og 1934 kommer rentesregningsopgaven ind igen. Udover de nævnte opgaver er der ikke anvendelser af matematik i dem.

Kapitel 5 Analyse1

5. 1 Hvad skal der foregå omkring anvendelser af matematik i 1906?

Anordningen af 1906 er et godt eksempel på, at når der tales om anvendelser, skal ordet ses i en sammenhæng. Det bliver ofte omtalt i andre betydninger end som jeg har defineret. Som eksempel kan nævnes formuleringen omkring de sproglige linjer: "Sammensat Rentesregning med simple Anvendelser paa Annuiteter", "Trigonometriske Funktioner af spidse og stumpe Vinkler med simple Anvendelser på Trekantsberegninger" og "Retvinklede Koordinaters Anvendelse af grafisk Fremstilling af simple Funktioner". Anvendel. er af matematik omtales i betydningen et matematisk område benyttet inden for et andet matematisk område.

Der er ikke for de sproglige linjer meget der antyder på, at der i indholdet skal arbejdes med anvendelser ifølge min definition. Det kan kun være i forbindelse med emnet rentesregning, som kan siges at falde inden for definitionen af anvendelser af matematik, idet teorien tager udgangspunkt i virkeligheden.

Det samme gør sig gældende for den matematiske linje. I anordningen er der eksempler på, at ordet anvendelser bruges i andre betydninger: "De Sfæriske Grundformler og deres Anvendelse paa den retvinklede Trekant" og i tilknytning til emnet infinitesimalregning, hvor "Simple Anvendelser paa geometriske og fysiske Opgaver" skal inddrages. I sidste tilfælde er der dog tale om anvendelser i forhold til definitionen, når infinitesimalregningen relateres til fysik. Infinitesimalregning bliver her opfattet, som Pollak omtaler (se afsnit 2. 2), i betydningen en matematisk disciplin særlig velegnet til at anvende, hvilket er en klassisk opfattelse af anvendelser af matematik.

De matematiske elever skal ligeledes arbejde med "Sammensat Rentesregning. Annuiteter". Der er en anden formulering, end for de sproglige linjer. Der er gradsforskel i teoriindholdet. De sproglige elever skal arbejde mindre med annuiteter, end matematikerne skal. Det er et emne, som kan høre under definitionen anvendelser. Derudover kan anvendelser inddrages i forbindelse med fysiske opgaver i tilknytning til infinitesimalregningen. Infinitesimalregning er dog et frivilligt emne, som lærerne ikke behøver at vælge.

I bekendtgørelsen for matematikundervisningen på de sproglige linjer er formålet ikke at inddrage eller vise anvendelser af matematik. Det er at skole tænkeevnen, hvor matematik er midlet til det formål. Principielt er matematik ikke en nødvendig betingelse for at udvikle det, idet det ikke er formålet at opøve elevernes matematiske kundskaber.

Der er ikke anført noget formål ved den matematiske linje sandsynligvis fordi, den matematiske linje forbereder til videre studier, og det er begrundelse og formål nok til, at der ikke behøves at blive gjort opmærksom på det.

5. 2 Hvad diskuteres omkring anvendelser af matematik 1903-35?

Det mest omdiskuterede emne i denne periode er grafisk fremstilling og funktionsbegrebets indførelse. Bonnesen og Heckscher er de første i denne periode, som er inspireret af den preussiske matematikundervisning og forsøger at overføre det til danske forhold. Når grafisk fremstilling er interessant i historien omkring anvendelser, hænger det sammen med, at det er her virkeligheden inddrages udover i emnet rentesregning.

For Bonnesen er der flere formål forbundet med at indføre grafisk fremstilling. For det første vil det være en fordel for de elever, der skal være læge, jurist eller statistiker. For det andet har Bonnesen set i Tyskland, hvordan eleverne dernede bliver mere motiverede og opnår større forståelse af matematikken. Det er to argumenter, som kan kaldes at nytteargument og tilegnelsesargument. Det førstnævnte formål peger ud fra matematikken, mens det andet peger ind i matematikundervisningen selv. Virkeligheden er et middel til, at eleverne skal lære om grafisk fremstilling. Det er for Bonnesen ikke nok, at eleverne lærer at tegne grafer, men de skal lære om funktioners voksen og aftagen og bestemme minimum og maksimum for funktionen.

Han taler om, at der på den nysproglige linje skal inddrages anvendelser, der skal hentes fra praksis "særligt direkte fra Fysiken og den matematiske Geografi". Argumenterne for det er, at det vil være til gavn for de, der skal læse medicin (argument 3), og at det er motiverende (argument 5). Han mener ligeledes, at man skal vise eleverne, at matematikken kan bruges til noget uden for skolen, sådan at de kan blive "handledygtige Mennesker, samtidig med, at de erhverver sig Dannelse". Det er argumentet om, at anvendelser kan bidrage til, at eleverne kan handle i deres dagligdag og i fremtiden (argument 3). Opgaver skal ikke være konstruerede til lejligheden, men skal i stedet være opgaver, som rent praktisk frembyder sig. I det tilfælde nævner han ikke hvilke områder, det skal være fra. Det kan meget vel være opgaver fra fysikken, som byder sig til. Han mener, det er vigtigt for eleverne, at matematikundervisningen har relevans og vil derfor gerne motivere dem til at se, at det kan nytte at lære matematik, når de nu kan bruge det til noget.

På den matematiske linje skal der i undervisningen søges stærkere tilknytning til fysikken, særlig mekanikken. Han mener desuden, at der skal afsættes tid til projektionstegning. Formålet skal være at udvikle rumsansen og indøve at se på tegninger. Bonnesen nævner ikke argumentet for indførelsen af det, men både hvad angår tilknytningen til fysik og inddragelsen af projektionstegning kan det være et argument om nytte (argument 3). "I det praktiske Liv forekommer jo temmelig hyppigt Planer, som man maa kunne finde sig til rette paa". Det vil være en fordel for de, der skal være ingeniører, at kunne tegne og forestille sig planer i rummet. Tilknytningen til fysik er for Bonnesen af afgørende betydning. Han skriver i forordet til sine lærebøger, at de er indrettet med det for øje.

De anvendelser Bonnesen taler om at inddrage er inden for områderne fysik, matematisk geografi og mekanik. Undervisningen bliver mere almendannende med "en uafbrudt og tæt Tilknytning til Anvendelser i det daglige Liv, i Fysikken osv.". Bonnesens opremsning kan tolkes sådan, at han ikke mener, at fysik er lig det daglige liv, og at eleverne skal præsenteres for andre emneområder end fysik. Både mekanik og fysik kan kaldes for anvendelse af matematik inden for et andet fagområde end matematikken selv. Matematikken inden for disse områder udgør en del af teoridannelsen .

Bonnesens bøger omhandler i forhold til definitionen anvendelser i tilknytning til kapitlet om grafisk fremstilling og funktioner, permutationer og rentesregning. Det kan ud fra forordet til lærebogssystemet ses, hvilken forståelse Bonnesen har af anvendelser.

"Der bygges i dette Bind paa det Funktionsbegreb, som...er indarbejdet paa Grundlag af den grafiske Fremstilling...herefter følger Differentialkvotient og Integral af hele Funktioner, hvorved det opnaaes tidligt at få indøvet alle de for Anvendelsen betydningsfulde Begreber paa det simpleste Grundlag og med et ringe Formelapparat. Ved Anvendelserne har jeg holdt for rigtigt straks at medtage nogle stereometriske Opgaver, idet der enten benyttes en fra Regneundervisningen kendt Formel eller kun paa den elementæreste Rumanskuelse, som bedst støttes paa Modeller. Af mekaniske Anvendelser er Tyngdepunktets Bestemmelse medtaget, men iøvrigt er det af megen Betydning, at Anvendelserne netop foretages i Fysiktimerne og ikke i Matematiktimerne."

Bonnesen udtrykker her mange opfattelser omkring anvendelser af matematik. For det første mener han, at differentialkvotient og integralregning hører til de matematiske emner, som bruges til noget. Det forstærker idéen om, at det er bestemte emner, der kan anvendes i Bonnesens opfattelse. Og endelig siger Bonnesen her, at anvendelserne skal foregå i fysiktimerne og ikke i matematiktimerne. Det er ligeledes endnu et eksempel på, at ordet anvendelser skal ses i en sammenhæng.

Ivar Heckscher mener ligesom Bonnesen, at der skal anvendelser ind i undervisningen, idet matematik skal tildeles andre roller, "end den at være den store Dressør for Elevernes logiske Sans". Han henviser til Preussen, hvor der nye tendenser i retning af, at øve elevernes rumsanskuelse og funktionelle tænkning. Et middel dertil skulle være at inddrage eksempler fra virkeligheden, "benyttelse af Modeller anbefales". De modeller, der her tænkes på, er ikke matematiske modeller i forhold til definitionen, men sandsynligvis en gips-model af et geometrisk objekt. Her er det ikke matematikken, der bruges til at illustrere et udsnit af virkeligheden, men virkeligheden, der giver et billede af matematikken. Det er et eksempel på, at ordet ikke kan tages på ordet. Den type af modeller falder udenfor definitionen af anvendelser. De har en funktion af pædagogisk karakter. Det kan, som i forbindelse med Bonnesens projektionstegning, skyldes argumenter om nytte (argument 3) for de, der skal læse til ingeniører eller som motivation for tilegnelse af matematik (argument 5).

Som eksempel på, at anvendelser er i fokus fremhæver Heckscher et forslag fra 3 lærerforeninger, hvori det står, at undervisningen for de sproglige linjer skal tage udgangspunkt i interessante praktiske anvendelser og samtidig udvikle sansen for det rent matematiske. Og for den matematisk linje må praktiske anvendelser ikke lades ude af betragtning af to grunde. Dels fordi det skærper interessen for matematik (argument 5), og dels fordi der skal tages hensyn til de elever, de ikke fortsætter med matematik (argument 3).

Michael Winther taler ligeledes om, at anvendelser skal inddrages i matematikundervisningen for sproglige elever. De får ifølge Winther størst udbytte af matematikundervisningen, når rentesregning og annuiteter inddrages. Her kan der kommes ind på "praktiske Forhold, som en Student ikke bør være uvidende om". Rentesregning er anvendelse af matematik på et virkelighedsområde. Argumentet for det er et nytteargument (argument 3).

Han foreslår, at der indføres handelsregning. Det vil være til stor gavn, hvis matematikundervisningen står for at blive fjernet. Der er en del, som ikke skal læse videre og slutter skolen efter gymnasiet. Handelsregning kan defineres som anvendelser af matematik, idet matematik bruges til at handle inden for og beskrive et område uden for matematikken.

I udvalgets beretning, "Beretningen om undervisningen i gymnasiet" med undervisningsinspektør Tuxen som formand, fremhæves grafisk fremstilling som et middel til, at eleverne selv skal kunne ræsonnere frem for at lære udenad. Det er udvalgets opfattelse, at eleverne vil blive mere motiverede, når teorien illustreres med eksempler fra virkeligheden. Rentesregning fremhæves som et glimrende emne. Nogle lærere ville gerne have flere anvendelser ind i undervisningen, men hindringen ved det er, at det ville kræve kendskab til andre fagområder.

Rentesregning som et emne for anvendelsesorienteret undervisning falder ind under min definition af anvendelser af matematik. Formålet er klart, at eleverne skal blive mere motiverede i timerne. Det er tilegnelsesargumentet (argument 5), der er tale om. Det er i eksemplerne, at anvendelserne skal ind. Når nogle lærere gerne vil have flere anvendelser ind, og nævner, at det vil kræve kendskab til andre fagområder, end de allerede har, da må det betyde, at de forestiller sig fagområder udover matematik, fysik, kemi og astronomi, som de fleste er kandidater i.

Det er udvalgets opfattelse, at "når eleverne skal forstå, at matematikken kan anvendes udenfor sit eget domæne, vil dette bedst kunne opnås, når anvendelse, sker inden for de andre fag, mens det altid gør indtryk af noget mere tillempet, når det er matematiklærerne, som henter deres eksempler fra de andre fag." Der blive her givet udtryk for, at det er bedst at anvendelserne foregår i andre timer end matematiktimerne. Der er mangel på samarbejde mellem matematik- og fysiklæreren, og det skal styrkes. Derfor er det ifølge udvalget nødvendigt, at "de matematiske metoder er rettidigt indøvede". Det kan tyde på, at udvalget har den holdning, at i matematiktimerne lærer eleverne matematik, og så er det op til de andre fag at vise anvendelserne. Til gengæld skal matematiktimerne sørge for, at eleverne har de rette kundskaber i tide, sådan at det kan lade sig gøre.

Med hensyn til studentereksamensopgaverne da er udvalget tilfredse med, at de kræver mindre spidsfindighed fra elevernes side, "idet de for størstedelen er direkte anvendelser". Dette er et eksempel på, at ordet anvendelser kan betyde, at bruge sin matematisk viden til at løse opgaver uden den store overvejelse. Særlig når man ser på studentereksamensopgaverne, der er meget lidt anvendelsesorienterede i min definition, da er det tydeligt.

Carl Hansen går som de øvrige ind for, at anvendelser skal inddrages i undervisningen. Det gælder både for den matematiske og de sproglige linjer.

For den matematiske linje fremhæver han områderne rationel mekanik og astronomi, som to genstandsområder, hvor det vil være velegnet at inddrage anvendelser fra. Rationel mekanik falder sandsynligvis udenfor definitionen af anvendelsesbegrebet, idet det dyrkes som en disciplin inden for det matematiske felt. Virkeligheden inddrages ikke direkte, og der er ingen relationer til den. Astronomi er til gengæld et emne, som falder inden for definitionen af anvendelser. Her kan man tale om et felt ligesom fysik, hvor matematik er en nødvendig del af teorien på området. Kendskabet til astronomi er baseret på matematik.

Af argumenter for at undervise i anvendelser fremhæver Carl Hansen, at "de skal på den matematiske linje lære, hvad matematik kan bruges til", og at gymnasiets matematikundervisning også skal give noget til de elever, som ikke skal fortsætte på universitetet eller andre videregående uddannelser. Disse elever skal ikke føle matematik kun som hjernegymnastik, men at "matematikken bruges til at forklare, forstå og beherske mangfoldige af de fænomener, vi alle daglig iagttager". Han begrunder anvendelser med argumentet om, at matematikundervisningen skal give et billede af matematikkens funktioner (argument 4). De, der ikke skal fortsætte med matematik, skal have fået noget ud af matematikundervisningen (argument 3). Anvendelser af matematik vil ifølge Hansen give mulighed for at stille opgaver, der er mere udviklende for eleverne.

Carl Hansen giver eksempler på opgaver, han finder vil være velegnede som opgaver til studentereksamen[1]:

- "Find Længden i Timer af den længste og korteste Dag for København. Københavns bredde er $55^0 41'$ nordlig, og Ekliptikas Vinkel med Ækvator er $23^0 27'$."

- "En tynd homogen Stang støtter sig med sine to Endepunkter til to glatte Skraaplaner, hvis Hældningsvinkler er α og β og som skærer hinanden i en vandret Linie vinkelret paa Stangen. Find Vinklen φ, som Stangen i sin Ligevægtsstilling danner med det vandrette Plan."

- "Find Afstanden mellem København og Paris, idet København ligger på $55^0 41'$ n. B., $12^0 45'$ø. L. og Paris paa $48^0 51'$n. B., $2^0 20'$ ø. L. Jorden betragtes som en kugle med Radius 6370 km."

- "En retvinklet Trekants ene Katete er vandret, den anden lodret. Find Forholdet mellem disse Kateters Længder, naar den Tid, en tung Partikel bruger for at falde i frit Fald gennem den lodrette Katetes Længde og derefter gennemløbe den vandrette

[1] Matematisk Tidsskrift 1914, s. 110-113

Katetes Længde i jævn Bevægelse med den ved Faldet opnaaede Hastighed, skal være lige saa stor som den Tid, Legemet bruger for at glide ned af Hypotenusens Længde." (Har været stillet til Kadetskolens overgangsprøve i elementær mekanik)

Dette er et eksempel på, hvordan nogle studentereksamensopgaver kunne teste undervisning i anvendelser, det vil sige opgaver i emnerne stereometri, statik og dynamik. Hansen mener, at disse emner vil være til nytte for de studenter, der søger ind på Den polytekniske Læreanstalt og Farmaceuthøjskolen. Det er tale om et nytteargumentet. (argument 3) Den første og tredje opgave falder inden for min definition af anvendelser af matematik, mens den anden og fjerde opgave kun er retoriske anvendelser af matematik. Det er sprogbrugen, der bringer matematikken i spil med de ikke-matematiske genstandsfelter. Det er derfor iklædte opgaver.

På den sproglige linje har Carl Hansen forsøgt i matematikundervisningen at inddrage anvendelser og til gengæld fjernet de mere teoritunge afsnit. (Selve forløbet er beskrevet i kapitel 3) I den bog, der hedder "Anvendt matematik" behandler Carl Hansen emner inden for ligevægtslære, bevægelseslære og astronomi.

Argumentet for at undervise i anvendelser er det, at det "i høj grad fanger elevernes interesse i en langt stærkere grad end tilfældet er, hvis man stillede dem overfor de samme ligninger, der fører til opgavens løsning, men udelod den mekaniske formulering". Her siger Hansen det meget tydeligt. Anvendelser er med for at motivere eleverne til at lære matematik (argument 5). Han siger samtidig, at opgaver lige så godt kunne undvære formuleringen fra virkeligheden. Det er altså iklædte opgaver. "Eleverne får dem så stærkt indøvet, at de uden videre spekulation kan anvende dem." Der er altså ikke noget oversættelsesjob i opgaverne.

Man må undre sig over lærebogssystemets opdeling i anvendt og ren matematik. I dag mener de fleste matematikere, at al matematik i princippet kan anvendes, og at det blot er et spørgsmål om, at nogen gør det. Han vælger at placere emnet "Rentesregning" i bogen om ren matematik, hvilket er mærkeligt. Rentesregning er netop et emne, som tager udgangspunkt i den virkelige verden. Om rentesregning udtaler han da også: "Særlig rentesregning og annuiteter indeholder stof, hvortil det er godt for eleverne at have kendskab; dels har det en praktisk betydning, og dels giver det en udmærket øvelse i tænkning og fremstilling". Det har et dobbelt formål, idet både nytteargumentet (argument 3) og tilegnelsesargumentet (argument 5) er på tale. Både Hansen og Bonnesen anser ikke rentesregning som hørende til anvendelser af matematik.

Hansen giver eksempler på opgaver, han regner med eleverne[2]:

- "To Personer bærer i Forening en Kuffert (Vægt 30 kg) saaledes, at de holder i samme Hank, og de bærende Arme danner 30^0 og 60^0 med Horisonten. Find ved Konstruktion og Beregning Trækkene i de to Arme."

[2] Matematisk Tidsskrift 1924, s. 35

- "En Stok støtter med sine Endepunkter til to glatte Skraaplaner, hvis Hældningsvinkler er 30^0 og 60^0. Find Stangens Vinkel med Skraaplanerne i Ligevægtsstillingen."

- "En Stige støtter sig til en lodret Mur og et vandret Underlag. Naar Gnidningskoefficienten begge Steder er ½, skal man finde, hvor langt Stigens laveste punkt kan komme fra Muren uden at Stigens skrider ud."

De nævnte opgaver er gennemregnede eksempler i lærebogen. Disse opgaver inddrager virkeligheden, så på den måde kan de defineres som anvendelser af matematik. Ser man på opgaverne og sammenholder det med Hansens bemærkninger omkring sine opgaver, som eleverne løser mekanisk, da kan de kaldes for iklædte opgaver inden for emnerne geometri og parallelle kræfter. Men den første opgave kan være en anvendelse af matematik, selv om den stadig er iklædt en virkelighed. Den anden opgave derimod er en retorisk angivelse af virkeligheden.

V. A. C. Jensen mener ikke, at Hansens anvendelser er et udtryk for virkelige anvendelser. "Kunne vi i ny og næ gøre virkelige praktiske anvendelser af matematikken, kunne vi nu og da give abstraktionerne liv, så tror jeg noget ville være vundet, men så skal det også virkelig være praktiske anvendelser, for det er nemlig sagen, at Dr. Hansens anvendelser, i alt fald i mine øjne, ikke har så meget med praksis at gøre." Jensen mener, "matematiklæreren må give grundlaget og i fysikundervisningen må rækkevidden af de matematiske resultater påvises".

Ud fra dette kan vi se, at han ikke opfatter dynamik og statik som virkelige anvendelser. Han kunne ikke forestille sig, at rational mekanik ikke var en del af fysikundervisningen. Han mener, at det er for svært for eleverne at forstå i matematiktimerne, og matematikudbyttet er for lille til matematiktimerne. Han er ligeså af den holdning, at matematik læres i matematiktimerne og anvendelserne foregår i fysiktimerne.

Trier er et eksempel på holdningen, at anvendelser af matematik ikke bidrager til personlighedsdannelsen. Han er af den holdning, at matematikundervisningen skal bidrage til logik og ræsonnement. Det overvejer han ikke, om anvendelser af matematik kan bidrage til. Han ser ikke anvendelser, som om det kan give noget til det afsluttede uddannelsesforløb, gymnasiets undervisning er rettet imod. Det overvejes ikke, at anvendelser af matematik vil være af betydning for de elever, der ikke skal fortsætte på universitetet.

Bøggild er den første, der fremhæver, at formålet med gymnasiet er "at skabe personligheder, der ikke er slavisk afhængige af de bestaltede autoriteter" og matematikundervisningen kan bidrage dertil. "I matematikken bevises enhver påstand ved et almengyldigt bevis, hvis sandhed ingen kan betvivle". "Det er de eksakte fag, der i særlig grad er personlighedsdannende og derved også almendannende".

Bøggilds udtalelser viser, at han mener, at målet med matematikundervisningen er at gøre eleverne kritiske overfor autoriteter. Der er ikke anvendelser af matematik, der bidrager til dét. Måden det kan gøres på i matematikundervisningen er ved bevisførelse, for der kan eleverne kontrollere det matematiske bevis og derved blive kritiske. Bevisernes autoritet i undervisningen, tænker Bøggild ikke på. Mange elever vil måske netop opfatte beviserne som en sandhed, de ikke kan betvivle.

H. J. Pihl gør som fagkonsulent status for matematikundervisningen i gymnasiet. Han konstaterer, at der tidligere har været et problem med at få en helhedsopfattelse af og forståelse for undervisningen. Det kan grafisk afbildning hjælpe med til at skaffe. Han er dog meget ked af, at grafisk fremstilling ikke benyttes som arbejdsprincip på den matematiske linje i samme grad som på de sproglige linjer. Også han peger på, at eleverne skal forstå frem for at lære udenad. I de lærebøger, Pihl har skrevet sammen med Sigurd Kristensen et par år senere, kan man se, at netop grafisk fremstilling og funktionsbegrebet træder i forgrunden. Det er lærebøger til den matematiske linje. For at introducere til funktioner og grafisk fremstilling inddrages virkeligheden for at vise en sammenhæng mellem størrelser. Det er som introduktion til dette, at virkeligheden inddrages. Bøgerne er ikke derudover anvendelsesorienterede. Anvendelser inddrages med det formål at lære teori om et matematisk område (argument 5).

Grafisk fremstilling er midlet til få de sproglige elever til at forstå matematik. Det mener V. Bredsdorff, som tager udgangspunkt i for eleverne "kendte ting" og får introduceret koordinatsystemet og grafisk fremstilling. Han foreslår mange forskellige genstandsområder, som kan inddrages til dette formål: fysik, temperaturkurver, rentesregning. "Navnlig simpel rente giver anledning til anvendelse af grafisk fremstilling". Der er i forhold til definitionen tale om anvendelser af matematik i ikke-matematiske områder. Der er her tale om et tilegnelsesargument (argument 5), idet emneområderne inddrages for at indføre grafisk fremstilling. Det har for ham en pædagogisk pointe, og formålet er at øge indlæring af matematik.

S. A. Christensen mener, at anvendelser skal ind i undervisningen for de sproglige elever, fordi det vil være en måde, hvorpå eleverne kan blive bevidste om, at matematikundervisningen kan give dem et udbytte. Den gældende undervisning fokuserer for meget på at indøve koncis tænkning, end på at give eleverne en mening med undervisningen. Han foreslår at inddrage emneområderne fysik og astronomi. Der er ifølge definitionen tale om anvendelser af matematik. Formålet og argumentet for at inddrage anvendelser er for Christensen et spørgsmål om motivering (argument 5), sådan at eleverne kan se, at matematikken også for dem har en praktisk betydning. Han nævner ikke, hvordan det kan foregå. Man kan diskutere, om det vil gøre de sproglige elever mere motiverede for undervisningen, når der inddrages anvendelser af matematik inden for genstandsområderne fysik og astronomi.

Fr. Fabricius-Bjerre kommer i sin afhandling ind på sin egen opfattelse af og holdning til anvendelser af matematik i undervisningen. Han er ikke den, der går ind for at inddrage anvendelser af matematik. Han vurderer i afhandlingen, at tiden fra 1850 til 1927 kan betegnes som tiden, hvor tendensen peger i retning af at gå fra teori til praksis. Han konkluderer i sin afhandling, at den matematiske og de sproglige linjer medtager matematik, der kan bruges til anvendelser. Det gælder særlig emnet infinitesimalregning, som er indført på bekostning af kædebrøker. Det viser, at Fabricius-Bjerre er af den opfattelse, at det er særlige områder inden for matematikken, der kan anvendes.

Torsting vil give eleverne en forståelse for den matematiske ånd ved at sætte matematik i relation til andre emner. "Ligesom både fysiske og historiske ekskursioner altid er kærkomne og i stand til at vække interesse og beundring for matematikken". Han ser gerne anvendelser af matematik ind i undervisningen. Hans argument for det bunder i tilegnelsesargumentet, hvor motivation (argument 5) for at lære matematik er en del af formålet med at inddrage anvendelser af matematik i undervisningen.

Torsting har været på besøg i Preussen, hvor de eksperimenterer med matematikundervisningen og tilstræber et samarbejde mellem matematik og de andre fag. Den logiske egenskab ved matematikken ses også i sprogenes grammatik, og rumanskuelse og projektionstegning kan bruges til kunstbetragtninger. I Preussen vogter de på lejligheder til at vise matematikkens anvendelser. Der bliver udarbejdet tværfaglige forløb, hvor eleverne selv arbejder med et matematisk emne og laver et afsluttet forløb over det. Et eksempel kan være forsikringsmatematik. Læreren skal have en rådgivende rolle. Torsting mener, at den danske matematikundervisning burde lade sig inspirere af den undervisning.

Her er et eksempel på, hvordan man i undervisningen kan inddrage anvendelser. Det er første gang, at nogen har foreslået noget, der ligner projektarbejde i et undervisningsforløb. Torsting mener, at undervisningen skal indeholde anvendelser. Det er af stor pædagogisk kvalitet. Han mener som tidligere nævnt, at det kan vække interesse for matematik (argument 5). Der kan i dette forløb være tale om ægte anvendelser af matematik. Det kan være noget matematik, der beskriver sammenhænge mellem faktorer i den verden, hvortil matematikken giver resultater og løsningsmetoder til at handle inden for. Resultaterne kan meget vel blive brugt i denne verden. Så meget taler for, at det er en autentisk anvendelse, der behandles eller kan blive det. Måden at få det ind i undervisningen på er blandt andet ved tværfagligt arbejde på tværs af klasser. Dermed må vi gå ud fra, at det skal foregå i grupper, hvor læreren skal vejlede igennem forløbet. Det er i høj grad et selvstændigt arbejde, eleverne skal udføre.

I denne periode udkom "Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier" af Jakob Jensen. Man kan ved at se på stofvalget i denne bog få en fornemmelse af, hvad, han mener, kan opfattes som praktisk matematik. Han siger i forordet, at indholdet er taget med ud fra overvejelser om, hvad der er "praktisk at lære at kende", og at bogen er bygget op som en "række praktiske øvelser". Praktisk matematik må derfor være geometriske målinger, grafisk fremstilling, matematiske funktioner, tabellariske beregninger, geometriske beregninger og kurveundersøgelser.

L. Willesen ønsker ligeledes den grafiske fremstilling ind som et omdrejningspunkt i matematikundervisningen på sproglig linje. Det er igen som et middel til få eleverne på de sproglige linjer til at forstå matematikken. Begrundelsen for det er, at det vil de kunne få brug for ved Tandlægehøjskolen og Farmaceuthøjskolen, og "infinitesimalregning er matematikkens bedste værktøj". Han ønsker at inddrage grafisk fremstilling , fordi det vil gøre nytte (argument 3) ved videreuddannelse. Han inddrager blandt andet tal fra Gudenåens vandføring til forskellige årstider og bruger det til at indføre funktionsbegrebet. Formålet er at få eleverne til at lære funktionsbegrebet, og derfor peger formålet ind i matematikken. Det er tilegnelsesargumentet (argument 5), der er tale om.

Willesens eksempel på en opgave i rentesregning vil kræve overvejelser mellem virkelighed og muligheden for interpolation i en rentetavle. Det er dog hans erfaring, at eleverne ikke bryder sig om rentesregning, som er det emne, der falder mest ud af tråd med den øvrige teorigennemgang. Dette er et eksempel på en hindring ved at indføre anvendelser af matematik i undervisningen set fra elevernes position. Det er ikke altid, de finder opgaver med anvendelser af matematik særlig spændende - denne opgave slet ikke, når der skal overvejes frem for bare at regne.

Da det kommer på tale at fjerne matematik for de sproglige linjer, da farer både Torsting og Poul Mogensen i blækhuset. Begge fremhæver grafisk fremstilling og funktionsbegrebet som et emne, der er af betydning for de sproglige elever.

Torsting mener, det er skolens formål, at bidrage til, at eleverne bliver i stand til at forstå det omkringliggende samfund, som er naturvidenskabeligt præget. Derfor kan matematikundervisning ikke fjernes for de sproglige linjer. Han begrunder det med et personlighedsdannende argument, det vil sige, at matematik bidrager med "en logisk måde at tænke og forstå på". Han pointerer også den studieforberedende rolle, som matematikundervisningen har, hvorfor de sproglige vil få forringede muligheder ved videreuddannelse, hvis matematik udelades.

Mogensen er ligeledes imod at fjerne matematikundervisningen fra de sproglige linjer. Han forsøger ved midlet grafisk fremstilling og funktionsbegrebet at øge motivationen for matematik hos de sproglige elever. Han arbejder med rentesregning og anvendelser inden for fysikken. Derfor kan man ifølge min definition sige, at der er tale om anvendelser af matematik. Eleverne udvikler ifølge Mogensen en glæde ved kurvebegrebet og viser interesse for undervisningen. Det er et argument om indlæring og motivation (argument 5), og samtidig er der tale om et nytteargument (argument 3), idet han mener, at det en vigtigt at undervise i netop disse emner, da "man kan jo snart ikke røre sig uden at træffe på formler, kurver og tabeller". I særlig grad på de videregående uddannelser.

5. 3 Hvordan inddrages anvendelser af matematik 1906-35?

Sammen med diskussionen som beskrevet ovenfor, da kan lærebøgerne være med til at vise nogle opfattelser af anvendelser af matematik. Lærebøgerne er sammen med studentereksamensopgaverne den eneste kilde til, hvad der kan være foregået i undervisningen, idet der ikke findes mundtlige kilder til at belyse det. Ved en analyse af dette materiale er det derfor muligt at give et kvalificeret bud på, hvad der er inddraget omkring anvendelser af matematik i undervisningen. Det kan ikke udelukkes, at dygtige og engagerede lærere selv har suppleret med materiale udover lærebøgerne, eller har valgt dele ud fra lærebøgerne til undervisningsbrug.

Lærebøger til matematisk linje

Anvendelser af matematik præger ikke lærebøgerne til matematisk linje på denne tid. Det er de to lærebogssystemer af Bonnesen og Pihl og Kristensen, der hovedsagelig bliver brugt på dette tidspunkt. Hjelmslevs bøger er for vanskelige for eleverne.

Bonnesens lærebøger kan sige noget om, hvordan han forestiller sig, at anvendelser af matematik skal inddrages. Hans synspunkter og opfattelse af begrebet anvendelser vil afspejles i bøgerne. Han udtaler, at bøgerne er indrettet ud fra vigtigheden af tilknytning til fysik. I forbindelse med introduktionen af funktionsbegrebet, da kan man tale om, at han inddrager anvendelser. Han tager her flere ikke-matematiske genstandsområder ind som introduktion til begrebet funktioner. I opgaverne i lærebogssystemet er det kun opgaver tilknyttet rentesregning, som kan siges at være om anvendelser af matematik. Ellers er de øvrige opgaver af regneteknisk karakter til de behandlede emneområder. Det samme gælder for bøgerne henvendt til den matematiske linjes matematikundervisningen i 2. og 3. g.. Der er meget få opgaver, hvor der kan tales om anvendelser. Selv inden for matematisk geografi og fysik er der ingen opgaver. Det kan betyde, at Bonnesen, når han taler om tilknytning til fysik, mener, at det matematiske stof er indlært, sådan at anvendelserne kan foregå i fysiktimerne, eller at matematik- og fysikundervisningen er koordineret i forhold til hinanden, sådan at de matematiske kundskaber er erhvervet i tide i forhold til det matematiske indhold i fysikteorien.

Jeg definerer i modsætning til Bonnesen rentesregning som en anvendelse af matematik. Det bliver ikke nævnt som en anvendelse af Bonnesen. Derudover inddrages virkeligheden under emnet permutationer. Der er mange opgaver, hvor antallet af måder i en eller anden sammenhæng skal regnes ud. Det er en angivelse af en virkelighed, hvor virkeligheden tjener matematikkens formål. Det kan have en pædagogisk værdi, som ikke er er uvæsentlig. Der er ikke noget oversættelsesjob i opgaven, og eleverne vil straks afklæde opgaven sin virkelighed og begynde at regne den i stedet. Anvendelser hos Bonnesen kommer mest til udtryk ved grafisk fremstilling og ved funktioner. Det skal her nævnes, at Bonnesens kapitel om grafisk fremstilling ikke indeholder en eneste graf.

Bonnesen inddrager grafisk fremstilling i teksten, og dette eksempel viser hvordan:

IV. Et Forsikringsselskab forlanger følgende aarlige Præmier for hver 100 Kr, som udbetales ved den Forsikredes Død, eller efter at han er fyldt 65 Aar, naar Forsikringen tegnes i det

25de	30te	35te	40de	45de Aar
2,01	2,42	2,96	3,72	4,86 Kroner.

Lad 1 Enhed paa Abscisseaksen repræsentere 1 Aar, 1 Enhed paa Ordinataksen 10 Øre. For ikke at anvende for meget Papir, kan man reducere samtlige Ordinater, idet man afsætter det første Punkt svarende til 20,1 10-Øre paa Abscisseaksen. Aflæs paa Figuren, hvor stor Præmien omtrentlig bliver i det 33te og det 42de Aar. Denne Indskydning af Værdier (33, 42) imellem de i Tabellen givne kaldes Interpolation, og, naar de tilsvarende Præmier aflæses tilnærmelsesvis paa Figuren, kaldes Interpolationen grafisk. Interpolationen kan ogsaa ske tilnærmelsesvis ved følgende Beregning: Præmien stiger fra det 40de til det 45de Aar med Kr. 1,14. Fra det 40de til det 42de stiger den derfor med Kr. $\frac{2}{5} \cdot 1{,}14 = 0{,}46$. Præmien i det 42de Aar bliver altsaa Kr. $3{,}72 + 0{,}46 = 4{,}18$. Sammenlign dette Resultat med det, den grafiske Interpolation gav.

Eksemplet er meget skægt, idet der i kapitlet om grafisk fremstilling ikke tegnes grafer, men kun beskrives. Spørgsmålet er hvilken virkning, det kan have, når der ikke vises, hvordan det skal tegnes i koordinatsystemer.

Hjelmslevs mål er ikke at inddrage anvendelser i bøgerne, og da de blev benyttet meget sjældent, kan de ikke bruges til at sige, hvad der kan have foregået i undervisningen omkring anvendelser af matematik. De kan i stedet benyttes til at undersøge, om anvendelser i det hele taget er en del af bøgerne. Han siger om sine bøger om geometri, at de skal tilvejebringe "et simpelt og naturligt Grundlag for al Undervisning i Geometri...Det handler ikke om Abstraktioner, men om Ting der hører Livets praksis til". Ser man på indholdet i bogen og tager det som udtryk for at skulle høre livets praksis til, da er områder som normalhjørnet, normalkilen, geometri i tegneplan, geometri i marken og landmåling. Ud af de nævnte områder er det kun landmåling, der hører til definitionen omkring anvendelser. Det er en disciplin, hvor matematik spiller en rolle til opmåling. Det er ikke i opgaver, at anvendelser inddrages og udover det nævnte eksempel bliver virkeligheden ikke nævnt.

Selve ordet anvendelser bliver brugt i andre sammenhænge. "Naar to Vinkler A og B i en Trekant ABC er lige store, er Trekanten ligebenet." Dette bruges til "Anvendelse I: I en retvinklet Trekant, hvis ene Vinkel er 30 grader, er den modstaaende Katete halvt saa stor som Hypotenusen." Det er igen et eksempel på, at ordet anvendelse skal ses i en sammenhæng, ligesom livets praksis ikke betyder anvendelser af matematik i forhold til definitionen.

Pihl og Kristensens lærebogssystem inddrager ikke anvendelser i særligt stort omfang. Det er ligesom i Bonnesens system ved grafisk fremstilling og rentesregning, at anvendelserne inddrages. Selve ordet anvendelse indføres ved "Koordinatsystemets Anvendelse til Bestemmelse af geometriske Steder". Det er opfattelsen, at matematik anvendes inden for andre matematiske områder, der kommer til udtryk samtidig med, at det kan slås fast, at der ikke er tale om anvendelser i forhold til min definition med mindre, virkeligheden inddrages i den sammenhæng.

Lærebøger til de sproglige linjer

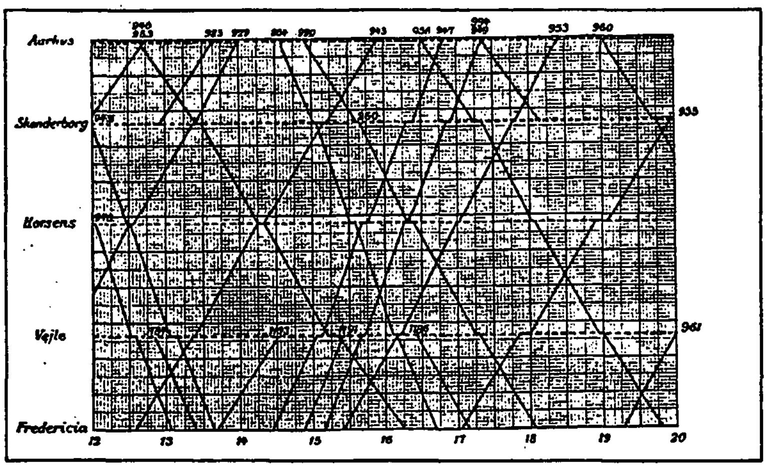
Udover Carl Hansens lærebøger om "ren matematik" og "anvendt matematik" (som nævnt i afsnit 5. 2), da bliver der i denne periode udgivet en anden bog til undervisningen på de sproglige linjer. Det er Jakob Jensens lærebog "Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige Gymnasier". I denne bog inddrages anvendelser af matematik i forhold til min definition ved grafisk fremstilling og rentesregning. Rentesregning er et område, som kan kaldes en autentisk anvendelse, idet resultaterne bruges i det felt, det beskriver. Jensens bog er et eksempel på, at anvendelser af matematik ikke er det samme som praktisk matematik. Argumentet for indholdet i bogen "Praktisk matematik" ligger i nytteargumentet (argument 3), idet det bliver fremhævet, at stoffet er taget med ud fra et praktisk kendskab.

Jeg vælger at give et par eksempler på opgaver fra Jensens lærebog, der er tilknyttet teorien om målestokken[3]:

- "Forklar, hvorledes selve Længdemaalingen er af stor Betydning i det praktiske Liv".[4]
- "Naar en gl. dansk Mil = 7,532484 km, angiv saa ved afkortet Regning, hvor mange Kvadratkilometer en Kvadratmil er (2 dec.)".

Et eksempel på en opgave i grafisk fremstilling[5] :

"Paa Grund af den grafiske Fremstillings store Anskuelighed i Modsætning til en tabel anvendes den f. Eks ved udarbejdelsen af Køreplaner, idet der først lægges en grafisk Køreplan, der derefter udskrives i almindelig Køreplansform.



Vi vil her modsat danne en grafisk Køreplan f. Eks. for Strækningen Fredericia-Aarhus kl. 12-20 paa Grundlag af Statsbanernes Køreplan. Paa Millimeterpapir afsættes paa den ene Akse Klokkeslættene, idet 1 time = 2 cm, og paa den anden Akse Strækningen, idet 10 km = 1 cm. I Køreplanen betragtes nu eet Tog af Gangen, og man tegner den Kurve, der angiver dets Afstand fra Endestationen som Funktion af Klokkeslættet."

Studentereksamensopgaver

Studentereksamensopgaver kan give en idé om hvilke krav, der skal være opfyldt efter gymnasiets matematikundervisning. Ved at se på studentereksamensopgaver kan der gives et indtryk af, hvilken status anvendelser af matematik har på denne tid, og eventuelt hvordan anvendelser af matematik bliver inddraget. De vil ofte være en rettesnor for, i hvilket omfang anvendelser skal indføres i undervisningen.

Ved analyse af samtlige studentereksamensopgaver i perioden 1903-35 kan der observeres i alt 13 opgaver, som falder inden for min definition af anvendelser af

[3] Jensen, J.: Praktisk matematik - Lærebog for sproglige gymnasier, s. 26

[4] Jensen, J.: Praktisk matematik - Lærebog for sproglige gymnasier, s. 25

[5] Jensen, J.: Praktisk matematik - Lærebog for sproglige gymnasier,, s. 29-30

matematik. Hvis opgaverne derfor virker styrende for den øvrige undervisning, da kan det ikke være i særlig høj grad, at anvendelser af matematik bliver inddraget.

Jeg vil vise nogle opgaver, hvor anvendelser kan siges at indgå:

"Den 1. Juli 1900 indsatte en Mand 10000 Kr. i en Sparekasse, der giver 4 pCt. p. a., og hvert Aars 1. Juli derefter udtager han 700 Kr.. Hvor meget vil han da have indestaaende i Sparekassen den 1. Juli 1910 efter at have hævet de 700 Kr.?"

Denne opgave er stillet til studentereksamen 1910 for de dimittender, der har valgt infinitesimalregning. Her kan man tale om en autentisk anvendelse, idet opgavens resultat bliver brugt inden for bankverdenen, og opgaven har en kerne af ægte indhold.

Et andet eksempel er fra eksamen september 1923:

"Paa hvor mange Maader kan 12 forskellige Kugler fordeles i 3 Skaale saaledes, at der i den ene Skaal kommer 3, i den anden 4 og i den tredje 5 Kugler? - Bevis endvidere, at naar $x + y + z = n$ er $K_{n,x} * K_{n-x,y} = K_{n,y} * K_{n-y,z} = K_{n,z} * K_{n-z,x}$."

Dette er et eksempel på, at selv om kugler skal fordeles i skåle, så er det en stiliseret og retorisk angivelse af en virkelighed, som muligvis har en pædagogisk pointe, men ikke en pointe set men anvendelsesøjemed. Kugler og skåle er en italesættelse af henholdsvis 12 og 3 genstande.

Det tredje og sidste eksempel er fra september 1925:

"A og B er to Punkter paa Jordkloden, der er i denne Opgave betragtes som en Kugle med Radius 6366 km. A er beliggende paa $55^0,74$ nordlig Bredde og 12^0, 46 østlig Længde, B paa 55^0, 74 nordlig Bredde og 48^0, 86 østlig Længde. Hvor mange km er den mindste af de to Storcirkelbuer, der forbinder A og B?"

Resultatet i denne opgave kan bruges til at regne afstanden ud mellem to destinationer. Der er ikke et oversættelsesarbejde i opgaven, og eleverne har sikkert ikke besvær med at regne den, hvis de har regnet tilsvarende opgaver i undervisningen.

Kapitel 6 Sammenfatning på perioden 1903-35

Dannelsesdiskussionen fra sidst i 1800-tallet bliver genoptaget ved flere lejligheder. Særlig ved kritikken af den matematiske linje. Undervisningen på den matematiske linje forbereder til videre studier ved Den polytekniske Læreanstalt eller til naturfaglige studier ved universitet. Det er sandsynligvis årsagen til, at der ikke er anført noget formål for matematikundervisningen på den matematiske linje. Af samme grund bliver denne linje kaldt for ensidig og for en fagskole. Det bliver ligeledes fremhævet af undervisningsinspektør Tuxen på et lærermøde i 1911, hvor han netop pointerer, at valget af erhvervsmuligheder ligger i valg af linje i gymnasiet. Tuxen var en af aktørerne i dannelsesdiskussionen fra 1880'erne hvor han ikke tillagde matematik en særlig stor dannelsesværdi. Ifølge ham behøver de sproglige elever ikke have matematikundervisning. De sprogliges matematikudbytte bliver genstand for diskussioner gennem hele perioden.

Det er i den forbindelse, at anvendelser af matematik inddrages. Eleverne er ikke motiverede for at lære matematik, men det vil influere på de sproglige elevers muligheder for uddannelse, hvis matematikken afskaffes. Anvendelser af matematik bliver midlet til at indfri nogle overordnede mål med undervisningen og for elevernes fremtid og får en central placering i diskussionen. Der bliver fra undervisningsministeriets side givet lov til at udføre forsøg med matematikundervisningen for sproglige elever. Mange taler her om inddragelse af anvendelser af matematik.

Der er i denne periode en klar inspiration fra det preussiske skolesystem, hvor nogle matematiklærere tog på udlandsophold. Nye matematiske emner og pædagogisk nytænkning kom derfra. Grafisk fremstilling, funktionsbegrebet, rumsans og helhedssyn er begreber fra Preussen. Særlig grafisk fremstilling og funktioner kommer til at få betydning for inddragelsen af anvendelser. Det er disse emner, der bliver midlet til at nå målet med at gøre undervisningen mere sammenhængende og overskuelig, det vil sige skabe et helhedssyn og gøre matematikken forståelig, særlig for de sproglige elever. Det er samme tendens, der kommer til udtryk i lærebøgerne i denne periode.

Lærebogssystemer begynder i denne periode at ligne de typer af lærebøger, som vi kender i dag. I takt med, at der ønskes en større forståelse af og mere sammenhæng i stoffet får lærebøgerne et andet udseende og opbygning. Der begynder at komme opgaver, som eleverne selv skal løse, og der er derfor eksempler og illustrationer i et større omfang.

Det er emnerne grafisk fremstilling og funktioner, der er helt i forgrunden i lærebøger på dette tidspunkt. Det er her at anvendelser af matematik inddrages. Ellers er det meget lidt, at virkeligheden inddrages i lærebøgerne. Det sker dog i relation til matematisk geografi og rentesregning. Efter cirkulæret fra ministeriet omkring forsøg med de sprogliges matematikundervisning af 1924 udkommer lærebøger, der vægter anvendelser af matematik højt. Studentereksamenssættene i perioden 1910-35 omhandler i meget få tilfælde anvendelser af matematik. De består af små regnetekniske opgaver og en bevisopgave.

Når det analyseres, hvad der skal foregå omkring anvendelser af matematik i undervisningen, ses det, at anvendelser af matematik ofte bruges som et ord i betydningen et matematisk emne benyttet inden for et anden matematisk disciplin. Anvendelser af matematik indføres på de sproglige linjer i tilknytning til rentesregning. På den matematiske linje skal der ligeledes arbejdes med rentesregning, mens der i opgaver til emnet infinitesimalregning skal inddrages fysiske opgaver.

Ved analyse af, hvad der bliver diskuteret omkring anvendelser af matematik i undervisningen, er der flere forhold at være opmærksom på. Der er igennem perioden forskel på de to linjer i relation til diskussionen omkring anvendelser af matematik både med hensyn til argumenter og indhold af anvendelserne.

På de sproglige linjer er det i relation til de matematiske emner grafisk fremstilling og funktionsbegrebet, at anvendelser af matematik indføres. Det hænger sammen med, at grafisk fremstilling og funktioner er nye begreber, der kommer fra Preussen, og som gerne skal indføres i undervisningen. For lettere at få eleverne til at forstå det inddrages virkeligheden. Samtidig er disse begreber gode at kende til for de sproglige elever, idet de vil møde dem på f. eks. medicinstudiet. Det bliver derfor nytteargumentet (argument 3) og tilegnelsesargumentet (argument 5), vi kan se gennem perioden blive fremhævet som argumenter for at inddrage anvendelser af matematik. De emneområder, der indføres og kan defineres som anvendelser af matematik, er emnerne rentesregning og handelsregning, og det er autentiske anvendelser. Omkring år 1924 bliver området foreslået udvidet til at omfatte astronomi og fysik.

På den matematiske linje tales der ikke i lige så høj grad om anvendelser. Når der gør, er det i forbindelse med de matematiske emner grafisk fremstilling og funktioner, som det også er på de sproglige linjer. Men derudover bliver anvendelser tilknyttet emnerne infinitesimalregning, stereometri og permutationer. Genstandsfelterne, der indføres, er rentesregning, fysik og matematisk geografi. I tilknytning til permutationer inddrages virkelighedsområder udover de nævnte. Det er da altid en iscenesat virkelighed, som ikke er autentisk. Argumenterne for at inddrage anvendelser af matematik er de samme som for de sproglige elever. Det er nytteargumentet (argument 3) og tilegnelsesargumentet (argument 5), der fremføres. Kun ét sted nævnes, at anvendelser skal inddrages, fordi det hører til billedet af matematikken (argument 4).

I denne periode er der mange opfattelser af anvendelser af matematik, som falder uden for definitionen omkring anvendelser. I anordningen kommer det til udtryk ved at benytte anvendelser af matematik som et matematisk område benyttet inden for et andet matematisk område. I diskussionerne er der mange eksempler på, at anvendelser af matematik er noget, der foregår i fysiktimen. Ofte skriver lærebogsforfatterne, at de i deres stofvalg og opbygning af bogen har taget hensyn til fysiktimernes indhold. Det er da i betydningen, at anvendelser af matematik foregår i fysiktimen, og matematiktimerne giver eleverne de "rette kundskaber i tide", sådan at de matematiske evner kan komme til udfoldelse i fysik. Der ses ligeledes mange eksempler på, at det er bestemte områder inden for matematik, der er særlig anvendelige. Det gælder f. eks. infinitesimalregning, som anses for at være et velegnet område at anvende.

Også andre opfattelser af anvendelser af matematik kommer til udtryk. Konstruktion kan nævnes som et eksempel på en opfattelse af anvendelse af matematik. Det samme gør opgaveregning, som kaldes for en direkte anvendelse af matematik. Det er ligeledes i denne periode, at ordet model dukker op. Det er i betydningen en geometrisk model, som skal synliggøre et geometrisk emneområde. Det er ikke en matematisk model ifølge definitionen. Ofte bliver disse modeller benyttet til at udvikle rumsansen, og en del af Den internationale Matematikkommissions forskningsområde var omkring 1908 at undersøge modelsamlingers betydning for matematikundervisningen.

Der er to nye ting som nævnes i debatten om matematikundervisningen. Det ene er en art tværfagligt projektarbejde, som finder sted i Preussen, hvor der inddrages autentiske matematiske områder som f. eks. forsikringsmatematik. I dette projekt har læreren en vejledende rolle, som vi først meget senere skal komme til at se tilsvarende i Danmark. Det andet handler om, at eleverne skal blive kritiske og ikke autoritetstro overfor matematikundervisningen. Midlet til dét er matematiske beviser, hvor eleverne kan kontrollere de matematiske sætninger, men det er ikke en kritisk analyse af gjorte anvendelser

Lærebøgerne afslører både, hvad der kan have foregået omkring anvendelser af matematik, samtidig med, at de er udtryk for en forfatters holdning til og opfattelser af anvendelser af matematik i deres måde at opbygge bøgerne på.

Bøgerne til matematisk linje inddrager anvendelser i relation til grafisk fremstilling, funktioner og permutationer. Ved emnet permutationer er det kun i de tilknyttede opgaver. Det er ikke i teorien. For grafisk fremstilling er det hovedsageligt i teori, men også i opgaver, at anvendelser af matematik indføres. Genstandsområderne for grafisk fremstilling er mange, og de handler ikke kun om fysik. Ellers bliver der i bøgerne gennemgået rentesregning. Bøgerne giver udtryk for den holdning, at anvendelser af matematik er knyttet til bestemte emner, hvad der tydeligt kan ses i bøgerne.

På de sproglige linjer indføres virkeligheden ved emnerne grafisk fremstilling og permutation. Det er som for den matematiske linje i opgaverne, at anvendelser af matematik inddrages i emner permutationer. Det er også her kun en retorisk angiven virkelighed, der kommer til udtryk. Det er ved rentesregning, at der kan tales om autentiske anvendelser af matematik. Opfindsomheden i valg af genstandsfelter er større ved grafisk fremstilling, hvor der f. eks. inddrages køreplaners tilblivelse.

Hvis denne periode skal vurderes i forhold til, om der er forskel på, hvad der diskuteres, og hvad der finder sted - er der forskel mellem retorik og realitet - da vil denne periode være kendetegnet ved, at der inddrages flere anvendelser i undervisningen, end anordningen lægger op til. For de sproglige linjer skal der kun arbejdes med rentesregning, men der bliver arbejdet med blandt andet anvendelser af matematik inden for fysik i lærebøgerne. Diskussionerne fra perioden peger ligeledes i retning af at inddrage anvendelser af fysik og astronomi. Så på disse linjer bliver både retorik og realitet forenet. På den matematiske linje skal eleverne også behandle rentesregning, hvilket er en del af lærebøgerne. Det er et emne, der ligeledes testes ved studentereksamen, hvor det er det eneste område, hvor anvendelser af matematik inddrages. Hvad angår emnet infinitesimalregning, da er det ikke et emne, hvor anvendelser af matematik inddrages, som der står beskrevet i anordningen. Det er ellers opfattelsen, at det er et særligt godt område at anvende. I dette tilfælde er der forskel på retorik og realitet, og det er ikke til fordel for anvendelser af matematik.

I perioden 1903-35 programsættes anvendelser af matematik i anordningen af 1935 efter lang tids debat. Argumenterne, der fokuseres på for at inddrage anvendelser af matematik, kan betegnes som nytteargumentet (argument 3) sammen med tilegnelsesargumentet (argument 5). Det er derfor et meget pragmatisk syn, der præger denne periodes diskussion omkring anvendelser af matematik.

Kapitel 7 Anvendelser af matematik 1935-60

Perioden indledes med vedtagelsen af anordningen af 9. marts 1935 med en tilhørende bekendtgørelse af 13. marts 1935 om gymnasiets matematikundervisning. Anordningen er et resultat af mange diskussioner og idéer fra perioden 1903-35 (se appendiks 2).

7. 1 Anordningen af 1935

For de sproglige linjer lyder det : "Formaalet for Undervisningen er at give Eleverne Kendskab til visse vigtige Anvendelser af Matematikken. Af de teoretiske Afsnit medtages saa meget, at dette Formaal kan opfyldes". Det vil sige, at det med denne anordning sættes højere, at de sproglige elever opnår kendskab til matematikkens anvendelser end, at "bibringe Eleverne omfattende Kundskaber i Matematik", som den forrige anordning fra 1906 foreskrev.

Med hensyn til det faglige stof, da er funktionsbegrebet indført men sådan, at det er "Funktionernes Fremstilling og Undersøgelse ved Hjælp af Tabeller og grafisk Afbildning. Funktioner af Praktisk Art", der skal medtages. Der skal stadig undervises i rentesregning og annuiteter, men ikke som i den gamle formulering, med "sammensat Rentesregning med ganske simple Anvendelser paa Annuiteter". Begrebet anvendelse optræder også ved de trigonometriske funktioner, hvor praktiske anvendelser skal inddrages.

Bekendtgørelsen af 13. marts 1935 viser tydeligt, at anvendelser skal have en placering i undervisningen. For de sproglige står der: "Ved Undervisningen skal Hovedvægten lægges paa Matematikkens Anvendelse i det praktiske Liv inden for de i Anordningen givne Rammer. Ved valg af Øvelseseksempler bør man derfor, overalt hvor det er muligt, søge tilknytning til det praktiske Liv. Tillige bør der inddrages Materiale (Tabeller og grafisk Afbildning), som finder Anvendelse ved Undervisningen i andre Fag, f. eks Naturfag og Historie". Det kunne tyde på, at relationer til virkeligheden skal gennemsyre undervisningen både hvad angår opgaver og eksempler.

Til forskel fra bekendtgørelsen af 1906, da kommer den nye fra 1935 også ind på formålet med den matematiske linje. Det kan se ud som om, at det efter flere års diskussion er blevet nødvendigt at begrunde matematikundervisningens formål også for matematikere, hvor det før var indlysende.

For den matematiske linje træder funktionsbegrebet i forgrunden, ligesom rumsansen skal opøves. "Der bør tilstræbes et Samarbejde med de Fag, specielt Fysik, hvor Matematikken kan komme til Anvendelse. Ved Planlæggelsen af Undervisningen bør der derfor tages saadanne Hensyn, at dette Samarbejde kan blive frugtbart". Der skal ikke inddrages anvendelser af matematik. Eleverne skal have kendskab til "de reelle Tal og disses Anvendelse til Beskrivelse af Funktioner".

Selve formålet med undervisningen i 1935 er af en anden karakter end i 1906, idet der for både de sproglige og matematiske linjer gælder det, at det er andre evner, der lægges vægt på i 1935 end i 1906. Ved 1935-bekendtgørelsen lægges vægt på elevernes forståelse af stoffet og "en klar og koncis Fremstilling saaledes at de Slutninger, der drages, og de Resultater, der opnaas, hviler paa velbegrundede Ræsonnementer". Ligesom der skulle skabes større sammenhæng mellem de enkelte stofområder. Netop større sammenhæng i undervisningen var et af de punkter, lærerne påtalte som en nødvendighed.

Der kan i den nye anordning og bekendtgørelse påvises en vis inspiration fra Preussen. Eleverne skal på den matematiske linje udvikle deres rumsans, hvilket der blev lagt vægt på i Preussen. Det samme kan siges om funktionsbegrebet, der ikke længere er frivilligt, men en del af pensum. Erfaringen sagde, at lærerne underviste i det alligevel, også da det var valgfrit.

7. 2 Matematikundervisningen i krise

Perioden indledes med en konstatering af, at elevtallet på den nysproglige linje daler. Svend Bruun[1] er af den opfattelse, at dette forhold ikke bør være ligegyldigt for matematiklærere. Hvis det værste skulle ske, at den nysproglige linje blev nedlagt og den matematisk-naturvidenskabelige linje blive fælleslinje, da ville matematikerne ifølge Bruun nødvendigvis skulle have flere sprogtimer, da samfundet ikke kan nøjes med akademikere med dét sprogkundskab, som den matematiske linje tilbyder. Disse ekstra sprogtimer ville sandsynligvis blive taget fra matematik-, fysik- og naturfagstimerne. Derfor mener han ikke, at man kan tillade sig at tale om sproglig contra matematisk linje. I stedet skal begge faglærergrupper tale sammen om at løse problemet. Årsagen til nedgangen af elevtallet for den sproglige linje mener Bruun skyldes, at den matematiske linje giver bedre muligheder for en række fagstudier.[2]

At de sproglige har problemer med at blive optaget på de videregående uddannelser uden ekstra tillægsprøver konstaterer Jakob Jensen i en artikel. Samtidig oplever den matematiske linje en stigning i elevtallet, særlig af drenge. Det første kunne der gøres noget ved, da det muligvis er medvirkende årsag til nedgangen af elever på nysproglig linje og stigningen af elever på matematisk linje. Men Jensen ser også en anden årsag til stigningen på den matematiske linje. Det kan være, at eleverne finder, "at den matematiske Retning er i Pagt med Fremtiden, og derfor vælger den, navnlig da dens Undervisning mere appellerer til Initiativet og Selvstændigheden end den sprogliges."[3]

Der bliver i tiden efter anordningen af 1935 klaget over for store krav ved studentereksamen. Kravene til eksamen er blevet større, end det var tænkt ved læseplanen i anordningen. Denne tendens bliver imidlertid afbrudt af Anden Verdenskrig, hvor undervisningen har svære vilkår for normal skolegang.[4] Besættelsestidens

[1] Svend Bruun; cand. mag, engelsk, tysk og historie; adj. ved Sct. Jørgens Gymnasium 1919; rektor ved Slagelse Kommunale højere Almenskole 1936
[2] Gymnasieskolen 1935 s. 73-76
[3] Gymnasieskolen 1935 s. 55-57
[4] Det Centrale Uddannelsesråd: U90 - Samlet uddannelsesplanlægning bd. 2, s. 41

anordninger og cirkulærer handler hovedsagelig om forbud mod demonstrationer mod besættelsesmagten, mørklægnings- og luftværnsforanstaltninger med deraf følgende afkortning af den daglige skoletid, forbud mod offentlige møder og så videre. Undervisningsministeriet indfører dispensationer fra bestemmelserne for eksamenspensa.[5]

Efter krigen er lektor Ivar Hainau Christensen[6] af redaktionen på Gymnasieskolen blevet bedt om en kommentar til matematikkens stilling i gymnasiet. Han indleder med, at matematikken sætter sine ben i den synlige verden, og det handler om begreber, der kan tælles, måles og sættes i relation til hverandre. Matematik har også haft stor indflydelse på teknikkens udvikling. "Men Beundringen for den har efter Krigen ligesom faaet en Afsmag". Han mener, at den matematik, der undervises efter i gymnasiet "har sin Berettigelse i Nyttehensynet. Men Gymnasiet er ikke en teknisk skole. Thi sideordnet med vor Hensyntagen til matematikkens Anvendelser indvier vi vore Elever i den mærkelige Lærebygning, som hedder: Matematikken er en rationel videnskab".[7] Nyttematematikken er blevet et mål i sig selv.

Hainau Christensen kommenterer også problemet med den sproglige linjes devaluering. Matematik har bidraget til at de humanistiske fag er kommet i defensiven. Snart er alle latinskoler på vej til at blive matematikskoler. Det skyldes især kræfter udenfor skolen. Særlig omdannelsen af samfundets økonomiske struktur, kræver folk med andre uddannelsesmæssige forudsætninger end tidligere. Disse folk kommer fra den højere skole, som er til for samfundets skyld.

Med hensyn til anordningen af 1935 er det Hainau Christensens indtryk, at den "er saa god, som den kan være, og at den indeholder en rimelig Stofmængde, som langt de fleste af Eleverne kan naa at tilegne sig med seks ugentlige Timer i tre Aar".[8] Målet er, at eleverne opnår en forståelse af faget, som universitetet kan godtage, og at de opnår mekaniske færdigheder inden for faget. "Begge Dele maa Læreren have for Øje i sin Undervisning. Saa kan man lægge Eftertrykket paa det første eller det sidste. Gør man det sidste, saa hjælper man gennem sin Dressur Studenterne til at faa en god Eksamenskvotient...Sagen er den, at vi som Lærere saa vidt muligt sørger for, at "Vægtskaalen med de to Vægte: Indsigten og Færdigheden kommer i Balance. Men uden for Skolens Dør virker som omtalt stærke Kræfter, der griber ind i Skolens selvskabte Verden og prøver at tynge den sidste Skaal ned. Disse kan Skolen ikke sidde overhørig. Det er naturligvis de højere Skolers Adgangsbegrænsning, jeg tænker paa".[9] Hvis klasserne ikke var så store, så ville det være lettere for skolen at opfylde begge dele, mener Hainau Christensen.

Det er ellers ikke særlig svært at undervise i matematik, mener Hainau. Ifølge ham er der mange muligheder for at gøre undervisningen spændende. Han gør det ved at opstille problemer i undervisningen og frembringe en spænding. På den måde kommer eleverne

---

[5] Meddelelser angående de højere skoler i Danmark år 1940-47.
[6] Ivar Hainau Christensen; f. 1907; cand. mag. i matematik, fysik og kemi; lektor ved Århus Katedralskole 1942; lærer ved Marselisborg Seminarium 1958; medlem af opgavekommissionen 1951-63.
[7] Gymnasieskolen 1946 s. 595-596
[8] Gymnasieskolen 1946 s. 597
[9] Gymnasieskolen 1946 s. 597

ud på dybt vand og får fast grund under fødderne igen. Det er af stor pædagogisk værdi. Af andre virkemidler benytter Hainau ofte elevernes sanseanskuelse. En tegnet figur kan ofte hjælpe eleverne til at huske stoffet bedre og virker samtidig som en appetitvækker.[10]

Problemerne med den nysproglige linje kommer til udtryk ved mange lejligheder. Adjunkt Olaf Heide Petersen[11] klager i en artikel til Gymnasieskolen 1949 over, at matematikken på de sproglige linjer er baseret på anvendelser. Han er klar over, at årsagen til den nye tendens fra anordningen af 1935 skyldes en iver for at øge interessen for matematik hos de sproglige elever. Ifølge Heide Petersen og dennes indstilling til sit fag er denne "fremhævelse af matematikkens anvendelser overdrevet". "Ud fra min erfaring som matematiklærer i det nysproglige gymnasium finder jeg 1935-anordningens formålsparagraf uhensigtsmæssig, og jeg tror, at hvis faget lider under mangel på interesse, er det ikke på trods af , men på grund af denne paragraf...Formålet med undervisningen er at give eleverne et indtryk af, hvordan matematikkens fundamentale og almengyldige sætninger og fakta er fremkommet som resultat af flere årtusinders beskæftigelse med specielle opgaver, som naturnødvendigt frembød sig, og hvordan disse sætninger nu er grundlaget for al eksakt tænkning og naturbeskrivelse såvel som for praktiske anvendelser".[12]

Heide Petersen foreslår i stedet, at der skal undervises i tre emner 1. analytisk geometri, 2. logaritmer og 3. trigonometri, og matematikkens kulturhistorie skal i høj grad inddrages. Han ønsker ikke matematikken fjernet fra de sproglige linjer, som der stadig går rygter om.[13] Heide Petersen fortryder, at han ikke har fået dispensation fra anordningen og forsøgt sig med sin egen undervisning. Især nu hvor der tales om at afskaffe matematik på de sproglige linjer. Han vil beklage, hvis de sproglige elever bliver sendt ud uden kendskab til matematik, "der slet ikke er *real* som fysik og naturhistorie, ikke mindre *humanistisk* end sprogene og, når det kommer til stykket, den almeneste af alle.[14]

I 1948 nedsættes en kommission, der havde til opgave at finde en kvalitativ og faglig forsvarlig måde at nedskære pensum i gymnasiet på. Det var resultatet af et ønske fra Gymnasieskolernes Lærerforening om, at de midlertidige bestemmelser om nedskæring i pensum fra Anden Verdenskrig kan blive varige.[15] Kommissionens betænkning "Angående begrænsning af læse- og eksamenspensa til studentereksamen" udkom i 1949. Konklusionerne i betænkningen medførte postyr. Det erklærede problem var at genopbygge den nysproglige linje, der ikke var stor søgning til. Dens lødighed skulle op på niveau med den matematiske linje, hvorfor der skulle fokuseres på de centrale fag.[16]

---

[10] Gymnasieskolen 1946, s. 598
[11] Olaf Heide Petersen; f. 1908; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lærer ved Horsens Statsskole 1934; lærer ved Ribe Katedralskole 1935; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse 1945-55.
[12] Gymnasieskolen 1946, s. 26
[13] Gymnasieskolen 1949, s. 27
[14] Gymnasieskolen 1949, s. 27
[15] Det Centrale Uddannelsesråd: U90 - Samlet uddannelsesplanlægning bd. 2, s. 41
[16] Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark I del, s. 192

På Matematiklærerforeningens efterårsmøde kommer lektor Mogens Pihl[17] ind på kommissionens overvejelser med hensyn til de sproglige elevers udbytte af matematikundervisningen, som har været til debat lige siden århundredeskiftet. Kommissionen er kommet til det resultat, at den kan acceptere, at matematikundervisningen bortfalder for de sproglige elever, hvis dette er juridisk gennemførligt. Hvis det ikke er det, da vil den ikke foreslå ændringer i undervisningen. Pihl er enig med kommissionen i, at undervisningen for sproglige ikke har haft det tiltænkte udbytte, men det skyldes ifølge Pihl, at der fokuseres på det utilaristiske ved matematikken. Det har svækket faget. Han mener, at der skal slækkes på kravet om "kun at give i praksis anvendbare kundskaber og færdigheder". Kun derved er det muligt, at "skabe en undervisning, hvorigennem eleverne føres til en sympatisk forståelse af, hvad der er matematikkens væsen, og hvori dens almen-kulturelle værdi og betydning ligger."[18]

En årsag til svækkelsen af matematikundervisningen i de sproglige gymnasier kan være, at "man meget hyppigt begynder på fremstillingen af en eller anden problemkreds på den måde, at man ikke på forhånd gør eleverne klart, hvor man vil hen, og hvorfor man har lyst til at komme derhen, men derimod omgående på systematisk måde, udvikler hele det nødvendige, forberedende apparat". Det samme gælder for den matematiske linje, hvor Pihl kunne ønske sig mere stringens pointeret gennem opgaver frem for et opbud af teori. Han mener dog ikke, at anvendelser skal fjernes fra den sproglige linje.[19] "Selvfølgelig må eleverne også stifte bekendtskab med matematikkens praktiske anvendelser, og jeg vil i den forbindelse finde det rimeligt, om logaritmeregningen og potensbegrebets udvidelse stadig blev obligatorisk stof".[20] Pihl håber, at der er meget gode argumenter hos undervisningsinspektør Højbjerg Christensen for eventuelt at afskaffe matematikundervisningen for sproglige elever. Han gør muligvis repræsentanten for matematikfaget i kommissionen uret ved at udtale, at man ikke fornemmer "at diskussionen om matematikkens forhold på de sproglige linjer har været ført med varme og autoritet".[21]

Også Axel Nygaard[22] har en mening om matematikken på de sproglige linjer. Nygaard er undervisningsassistent på det økonomiske fakultet på Århus Universitet. Der har han observeret, hvor dårligt rustede de sproglige studerende er til matematik. Hvis rygterne om at fjerne matematikken helt realiseres, da vil man svække den sproglige studentereksamens almendannende og studieforberedende værdi. Det vil være uheldigt i en tid, "hvor kulturen er så teknisk præget, som tilfældet er nu". Nygaard pointerer, at uanset om man mener matematik bidrager til almendannelse, så har matematik en praktisk værdi, som kommende studerende til medicin, økonomi og statsvidenskab har

[17] Mogens Pihl; f. 1907 mag. scient. i matematik og fysik; universitetets guldmedalje 1935; dr. phil 1939; studieophold i Gøttingen 1928-30; lektor ved Kolding højere Almenskole 1939; lektor ved Vester Borgerdyd Skole; professor i fysik ved Københavns Universitet

[18] Gymnasieskolen 1949, s. 650.

[19] Gymnasieskolen 1949, s. 651

[20] Gymnasieskolen 1949, s. 654

[21] Gymnasieskolen 1949, s. 655

[22] Axel Nygaard; f. 1907; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Århus Katedralskole 1938-50; 1951 undervisningsassistent ved det økonomiske fakultet; fmd. for Matematik og fysiklærerforeningen for Århus og omegn.

brug for. Ligesom det praktiske erhverv også har brug for studenter med regnefærdigheder.[23]

Jakob Jensen reagerer på O. Heide Petersens indlæg i debatten. Han mener, "at en undervisning i matematik som den af Heide Petersen skitserede både fagligt og alment dannende ville være af den største værdi for de sproglige elever, som derved ville lære, at kulturhistorie er andet og mere end litteratur- og kunsthistorie." Hvad angår de sproglige elevers interesse for matematikfaget eller manglen på samme, da mener han, at det hænger sammen med både elevernes individuelle anlæg samt lærerens evner. Der findes også elever i gymnasiet, der er dygtige til matematik.[24] Men det vil være umuligt inden for de afsatte timer at få det fulde udbytte af en sådan vægtning af stoffet, som Heide Petersen foreslår. Jensen kommenterer også rygtet om, at matematik skal fjernes helt fra de sproglige linjer. At han ikke har protesteret skyldes, at det endnu kun er et rygte. Men det ville ikke undre ham, om nogle ville sætte pris på det for at få "skabt den så længe efterlyste linje for piger, blot fordi forældrene ikke ved, hvor de ellers skal anbringe dem i årene, inden de skal på kontor, på husholdningsskole eller i pension i udlandet". Samtidig ville man mindes "de tider, da man også på den nysproglige linje var indstillet på at give en højere *almen* undervisning, som tillige afgiver det nødvendige grundlag for videregående studier".[25]

Poul Mogensen mener, at det er nødvendigt at styrke de sproglige linjer. Spørgsmålet er så om midlet tjener til formålet. Det føles ret forargeligt, at "*sprogene* bemægtiger sig den fattiges eneste lam og som et led i begrundelsen derfor anfører med sarkasme, at lammet ikke trivedes så godt (hvilket nota bene for en stor del skyldes, at man i 1935 amputerede 1/3 af det - med en begrundelse der kun var halv dækning for)." Lammet er i denne sag matematikken for de sproglige. Faget blev opgivet for 30 år siden, men efter flere forsøgsordninger slutter de fleste lærere op om faget. Det samme gør andre faglærere, men disse forholder sig tavse. Mogensen stiller sig tvivlende overfor den juridiske hjemmel i almenskoleloven overfor denne beslutning. Han mener fortolkningen er tvivlsom. I stedet skal man tage tråden op efter anordningen af 1935, som er et fremskridt ifølge Mogensen. Han sad selv i udvalget, der resulterede i betænkningen forud for anordningen. Men det var et tilbageskridt at nedskære undervisningen med 1/3.[26]

7. 3 Den nye lov af 1953

I 1953 vedtages den nye grundlov. Ved den lejlighed bliver også loven for gymnasiet ændret. På baggrund af de mange års debat om de sprogliges manglende udbytte af matematikundervisningen, da bliver det besluttet at fjerne matematik fra disse linjer i 1953.

I anordningen af 8. april 1953 om matematik for den matematisk-naturvidenskabelige linje lyder det:

---

23 Gymnasieskolen 1949, s. 108
24 Gymnasieskolen 1949, s. 74
25 Gymnasieskolen 1949, s. 75
26 Gymnasieskolen 1953, s. 693-696

"Formålet med undervisningen er at bibringe eleverne kendskab til et fundamentalt område af matematikken og gennem arbejdet hermed at udvikle og skole deres evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform samt hos eleverne at opøve sikkerhed og færdighed i brugen af det matematiske formelsprog og i udførelsen af numeriske beregninger".[27]

Formålet ved anordningen af 1935 for den matematiske linje var beskrevet således:

"Formaalet for Undervisningen er at bibringe Eleverne Kendskab til de reelle Tal og disses Anvendelse til Beskrivelse af Funktioner, samt Kendskab til simple Figurer i Planen som i Rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger".

I den tilhørende bekendtgørelse af 9. april 1953 står, at der under emnet sammensat rentesregning og annuiteter kun skal behandles ganske simple opgaver. Sammensat rente og annuiteter er et emne, som sædvanlig er en anvendelse af matematik på et virkelighedsområde. "Et samarbejde med de fag, specielt fysik, hvor matematikken kan komme til anvendelse, bør tilstræbes, og undervisningen bør planlægges under hensyn hertil".[28]

En meget væsentlig forskel mellem anordningen af 1935 og anordningen af 1953 består i, at matematikken er fjernet fra de sproglige linjer. For den matematisk-naturvidenskabelige linje ligger forskellen i formålet med matematikundervisningen. I 1953 er formålet med matematikundervisningen, at give eleverne kendskab til "et fundamentalt område af matematikken".

Der er også en forskel i behandlingen af emnet stereometri, hvor der i anordningen af 1935 ved undervisning i cos- og sin-sætningen skal inddrages "simple Anvendelser blandt andet paa astronomiske Opgaver", da er der ved anordningen i 1953 ikke nævnt nogle former for anvendelser.

I bekendtgørelsen af 1935 og 1953 lægges der begge steder op til samarbejde mellem andre fag, specielt fysik, og der skal tages hensyn til det i planlægningen af undervisningen.

7. 4 Reaktioner på loven

Det er ikke uden problemer at fjerne matematikken for de sproglige elever. Det viser sig, at det giver problemer med hensyn til at blive optaget på det lægevidenskabelige fakultet. De bliver optaget men må supplere med ekstra matematikkursus og får derved studietidsforlængelse, som ikke er populært i hjemmene, der som regel støtter de unge økonomisk i en tid uden uddannelsesstøtte. I en cirkulæreskrivelse af 6. december 1955 fra undervisningsministeriet lægges det ud til statens højere almenskoler at indrette et

[27] Meddelelser angående den højere almenskole 1947-58, s. 119
[28] Meddelelser angående den højere almenskole 1947-58, s. 132

kursus i matematik, der kan afhjælpe problemet for de sproglige, der vil studere til læge. Denne undervisning "bør i så høj grad som muligt bygge på anskuelsen, og hovedvægten lægges på anvendelserne, hvorfor man ved valg af øvelseseksempler overalt, hvor det er muligt, bør søge tilknytning til det praktiske liv". [29]

Willy F. Hellner[30] har deltaget i et møde i undervisningsministeriet om de sprogliges matematik i 1956. Mødet var indkaldt på foranledning af undervisningsinspektør Højbjerg Christensen, og årsagen var de sprogliges matematiske forudsætninger for medicinstudiet. Højbjerg Christensen gør opmærksom på, at universiteterne ikke tidligere har antydet, der er et problem for de sproglige, men at det forsømte kan indhentes på et kursus i fysik og kemi indrettet af universitetet.[31] Universitetet kan ikke forvente de sproglige at besidde de matematiske egenskaber før studiestart.

Men ministerielle forhandlinger resulterer i en cirkulæreskrivelse fra undervisningsministeriet af 16. marts 1956 til statens højere almenskoler og da berettes, at det lægevidenskabelige fakultet vil acceptere elever med forudsætninger fra særlige indrettede kurser på gymnasierne. "Ved undervisningen benyttes de lærebøger i matematik, der anvendtes i det sproglige gymnasium af 9. marts 1935".[32] Derudover må universitetet oprette matematikkurser af 6 timer ugentligt til eleverne uden disse forudsætninger.

7. 5 Matematikkens fremmarch nationalt og internationalt

Matematik og fysik er i efterkrigstiden inde i en hastig udvikling. På Den 2. nordiske fysik- kemi- og matematiklærerkongres d. 3.-6. august 1954 åbnede undervisningsminister Julius Bomholt[33] kongressen med at konstatere, at de eksakte fag, herunder matematik, har fået stadigt voksende betydning. Der er ligefrem tale om en eksplosiv udvikling. "Denne udvikling hænger naturligvis på det nøjeste sammen med de eksakte videnskabers fremskridt i det hele og med det samfund, som anvender dem. Det er disse videnskaber, der er hovedfundamentet under vor tids industri, vor tids beherskelse af kloden og naturkræfterne, og et uundværligt redskab for fortsat erkendelse af det univers, der omgiver os...Den undervisning, som den højere skoles elever får i fysik, kemi og matematik, skal være det solide og bæredygtige fundament, som de kan bygge videre på, hvis de efter skolen kaster sig ud i fortsatte studier, som skal føre dem frem til stillinger som ingeniører, læger og videnskabsmænd".[34] Bomholt mener, at "det vil styrke faget pædagogisk, hvis man kunne give børnene og de unge et indtryk af, hvad matematik kan bruges til, d.v.s. at teori i nogen grad modsvares af anskueliggørende opgaver".[35]

---

29 Meddelelser angående den højere almenskole 1947-58, s. 207-208

30 Willy Frits Hellner 1905-1975; cand. mag. i naturhistorie og geografi, astronomi og kemi; lektor ved Aurehøj Gymnasium 1949; 1956 rektor for Gladsaxe Gymnasium; medlem af gymnasieudvalget 1952-56 og 1958-60; redaktør af Gymnasieskolen 1944-50.

31 Gymnasieskolen 1956 s. 1-5

32 Meddelelser angående den højere almenskole 1947-58, s. 215

33 Julius Bomholt 1896-1969; cand. theol.; undervisningsminister 1950, 1953-57

34 Beretning om den 2. nordiske fysik- kemi- og matematiklærerkongres i Aarhus, s. 26

35 Beretning om den 2. nordiske fysik- kemi- og matematiklærerkongres i Aarhus, s. 27

P. Rubinstein har på samme møde talt om at udvikle samarbejdet mellem fysik og matematik, hvor det er naturligt. Samarbejdet er ikke udviklet i særlig høj grad. Rubinstein mener, at fysikundervisningen kan gavne matematikundervisningen på den måde, at det vil give eleverne en intuitiv forståelse af f.eks. differentialkvotientens betydning som vækst- og ændringshastighed. Denne fortolkning skal finde sted i forbindelse med opgaveregning, og her er der måske problemer med at finde tid, men her skal fysiklæreren træde hjælpende til, så man kan finde en fælles terminologi. "Mange elever vil fatte større interesse for matematikken, når de ser den anvendt uden for sit eget område". Der vil derved kunne findes "interessevækkende anvendelser af matematikken".[36]

Det er ikke kun i Danmark, at naturfagene vinder frem. Professor Svend Bundgaard[37] har i et indlæg på GL's møde d. 18. oktober 1955 talt om de matematisk-fysiske fags stigende anvendelsesmuligheder overalt i verden. Og det inden for teknik (energiforsyning), medicin, økonomi og kommunikation. Han nævner, at man i USA siden 2. Verdenskrig har forøget antallet af matematikere ved at oprette en statsfond til dette formål. Særlig i industrivirksomheder i England og USA søger man at knytte matematikere til sig. Samme udvikling ses i Holland, Sverige og Polen. Det er derfor et problem at tilgangen til netop disse videregående studier er meget lille. "Hele undervisningen i matematik, fysik, kemi og astronomi ved gymnasieskolerne, universiteterne og Danmarks tekniske Højskole, samt hele det videnskabelige arbejde ved de sidstnævnte institutter for disse fag hviler på i alt kun godt 400 personer, og at denne gruppe i en lang række år kun har modtaget en tilgang på gennemsnitlig ca. 15 pr. år".[38] Bundgaard mener ligeledes, der er en fare ved, at kun 5% af en ungdomsårgang går i gymnasiet, og spår at Danmark vil blive bagud i udviklingen.[39]

Disse indlæg ved mødet ved Den 2. nordiske fysik- kemi- og matematiklærerkongres d. 3.-6. august 1954 og GL's møde d. 18. oktober 1955 er udtryk for den udvikling, samfundet tager fra midten af 50'erne i Danmark og i verden udenomkring. Sammen med et økonomisk opsving bliver det muligt at planlægge en udvikling hen mod et teknologisk samfund. Der er tale om "teknologioptimisme". I den sammenhæng interesserer man sig for den kommende arbejdskraft. Hvis forventningerne til fremskridtet blev indfriet, da vil det kræve kvalificeret arbejdskraft. Derved skærpedes interessen for uddannelser i matematik og naturfag. I 1956 nedsættes i Danmark en "Teknikerkommission", hvis arbejde resulterer i betænkningen "Teknisk og naturvidenskabelig arbejdskraft". Kommissionen anbefaler, at der stilles bevillinger til rådighed, sådan at den matematisk-fysiske faggruppe ved Århus Universitet kan udbygges, og at H. C. Ørsteds Instituttet

[36] Beretning om den 2. nordiske fysik- kemi- og matematiklærerkongres i Aarhus, s. 32-33

[37] Svend Børge Erik Bundgaard; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; undervisningsassistent i Rational Mekanik ved Den polytekniske Læreanstalt 1942; lektor i matematik ved Københavns Universitet 1942; senere professor i matematik ved Århus Universitet, hvor han var hovedinspirator i "Danmarks Matematik Undervisningskommission", som blev nedsat på privat initiativ i 1953. Denne kommission opfattede sig selv som en del af en international reformbevægelse, der formidlede den ny matematik i Danmark. ("Den ny matematik i Danmark- en essaysamling redigeret af Peter Bollerslev, s. 57")

[38] Gymnasieskolen 1955, s. 766

[39] Gymnasieskolen 1955, s. 767

kan opføres. Danmarks Ingeniør Akademi er ligeledes et resultat af kommissionens arbejde.[40]

På det internationale plan spiller OEEC (senere OECD), Marshallhjælpens følgeorganisation for europæisk samarbejde, en rolle for den nye matematiks indførelse i pensa over hele verden. Sidst i 50'erne har organisationen fokus på matematikundervisningen, men da dens økonomer og planlæggere ikke besidder matematisk ekspertise, organiserer og finansierer man en række konferencer, hvor matematikeksperter fra Danmark også deltager. Ønsket er, at eleverne skal lære "en fremstillingsform og nogle formsprog, der er kalkeret efter det sprog, hvori den avancerede viden (undertiden) udtrykkes: mængdelære, relationer, grupper, vektorrum, transformationsgrupper, ækvivalensklasser, aksiomatisk formulering og så videre".[41] En meget vigtig konference afholdes på slottet Royaumont i Frankrig i 1959. På denne konference bliver retningslinjer for reformarbejdet fastlagt, sådan at den ny matematik vil blive lettere at gennemføre i de enkelte lande. Fra Danmark deltog Erik Kristensen[42].[43]

7. 6 En ny lærerrolle

På det 17. nordiske skolemøde afholdt i Helsinki 1959 talte professor Mogens Pihl blandt andet om lærerrollen i de naturvidenskabelige fag. Der er sidst i 50'erne problemer med at skaffe kvalificerede lærere.[44] Det er ifølge Pihl et problem på alle niveauer i uddannelsessystemet. Han mener, at det ofte er de ringeste lærere, der underviser. Hvis der ikke rettes op på det, bliver gymnasieuddannelserne devalueret, som der ifølge Pihl er eksempler på i USA.[45] For Danmarks vedkommende kommer han ind på, at ofte er indtrykket af en matematiklærer en lærer, der fremtræder i en bestemt form. "Vi er alle fortrolige med billedet af den klare og sikre matematiklærer, for hvem undervisningen gaar som en leg, og som nyder stor agtelse baade blandt eleverne, forældrene og kollegerne...Jeg vil alligevel gerne have lov til at pille lidt ved denne myte om den dygtige matematiklærer! Jeg er nemlig ikke sikker paa, at han eller hun i alle tilfælde er en saa fremragende pædagog, som man kan faa indtryk af...Men for det første er denne sikkerhed i matematikundervisningen et tveægget sværd, idet den kan gøre eleverne ængstelige, fagets autoritet smitter af paa læreren, hvis dom synes at være ufejlbarlig...Matematiklærerens store sikkerhed [er] ofte betinget af en altfor dogmatisk holdning overfor stoffet".[46] Den danske matematikundervisning ligger i for faste rammer. Det er der taget initiativer til at gøre noget ved blandt andet ved efteruddannelseskurser under Danmarks Lærerhøjskole. Pihl er af den opfattelse, at disse initiativer vil komme undervisningen til gode i fremtiden.

---

[40] Skovsmose, O.: Forandringer i matematikundervisningen, s. 12-17

[41] Den ny matematik i Danmark - en essaysamling redigeret af Peter Bollerslev, s. 50-51

[42] Erik Kristensen; f. 1922; mag. scient. i matematik; lecturer ved Washington University 1958; lektor ved Århus Universitet 1958; lektor ved Viby Amtsgymnasium 1968.

[43] Skovsmose, O.: Forandringer i matematikundervisningen, s. 33-34

[44] Det 17. Nordiska skolmötet 1959, s. 211

[45] Det 17. Nordiska skolmötet 1959, s. 212

[46] Det 17. Nordiska skolmötet 1959, s. 214-215

7. 7 Forsøg i gymnasieskolen 1950-60

Inden det trækker op til at lave reformer inden for gymnasiet, vil der ofte være en række forsøg med alternative undervisningstilbud. For faget matematik har der i perioden 1950-60 været 5 forsøg, som der er kendskab til. De 2 af disse er vedrørende undervisning i realskolen, mens de øvrige 3 er om sandsynlighedsregningens indførelse i gymnasiet.

Lektor Helge Berg Graversen[47] fra Rungsted Statsskole har udført forsøg med to 3. g. klasser fra den matematiske linje i skoleåret 1957-58 og 1958-59. Undervisningen bestod af "en kort omtale af matematiske modeller og deduktive systemer", "Tilfældige eksperimenter (trafiktælling, tælling af røde blodlegemer, puppevejninger på statens skadedyrslaboratorium m.v.)" og "opgaver med tilknytning til Mendels 1. lov og 2. lov. Hardy-Weinbergs lov. Et par eksempler på beregning af genhyppighed". De omtalte punkter er valgt ud fra dét, der har relationer til virkeligheden. Det er her nok første gang, vi ser, at ordet matematiske modeller optræder. Ligesom det er første gang, vi ser, at der i undervisningen behandles emner, der er taget fra virkeligheden og skal bruges til at vise et matematisk emne. Forsøget varede 20 timer, men det biologiske indhold krævede et samarbejde mellem biologi og matematiktimerne. Til forsøget anvendte læreren sit eget materiale.[48]

Et lignende forsøg begyndte i 1958 og er udført på Virum Statsskole af lektor Stig Bülow.[49] Der var tale om undervisning på en forsøgslinje, hvor det var målet at koordinere fagene matematik, naturhistorie, geografi, fysik og kemi. Derfor var der skåret ned på dét matematiske pensum, der tilsyneladende ikke havde stor betydning for de øvrige naturvidenskabelige fag. Af samme grund er sandsynlighedsregning medtaget. Der blev i forsøget arbejdet med blandt andet sandsynlighedsbegrebet, addition og multiplikation af sandsynligheder, binomialfordelinger. Bülows elever udviste god interesse for undervisningen og generelt havde undervisningen et positivt udfald.[50]

Lektor Axel Nygaard fra Århus Katedralskole har i en 3. g. matematisk-naturfaglig klasse i skoleåret 1958-59 forsøgt at erstatte 3.g.'s pensum inden for rumgeometrien med sandsynlighedsregning og statistik. Formålet var at undersøge sværhedsgraden og omfanget af det pensum, man kunne forestille sig i et kommende pensum. Nygaard mener også, at forsøget faldt godt ud og mener, at det med fordel kan indføres i en kommende ny læseplan for gymnasiet.[51]

[47] Helge Berg Graversen; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; vikar ved forskellige skoler
[48] Florander, J. og Rasborg, F. : Forsøg i gymnasieskolen 1950-60, s. 150-152
[49] Stig Bülow; f. 1915; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; studieophold i udlandet; assistent i matematik ved DTH 1939-42; lektor ved Virum Statsskole 1957.
[50] Florander, J. og Rasborg, F. : Forsøg i gymnasieskolen 1950-60, s. 152-153
[51] Florander, J. og Rasborg, F. : Forsøg i gymnasieskolen 1950-60, s. 154

Kapitel 8 Lærebøger og studentereksamensopgaver

8. 1 Lærebøger til matematisk linje

Meget kendte blandt lærebogssystemer er blandt andet A. F. Andersens[1] og Poul Mogensens "Lærebog i matematik I-V", som udkom i løbet af årene 1937-1946. Systemet er tænkt til at skulle opfylde kravene i matematik for den matematiske linje fra anordningen af 1935.

"Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie I" indleder med læren om det reelle talsystem og går derfra over til grundlæggende geometriske sætninger, konstruktioner og analytisk geometri. Ved introduktionen af funktioner tager bogens forfattere udgangspunkt i grafisk fremstilling, hvor eksempler fra de fysiske verden inddrages til at illustrere forholdet mellem afhængige variable f.eks. kogepunktets afhængighed af barometerstanden og en jernstangs længdes afhængighed af temperaturen. Der er ligeledes et eksempel med en temperaturkurve over et sygdomsforløb.[2] Derudover bliver virkeligheden ikke inddraget i kapitlerne.

"Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie II" omhandler talmængder og talfølger, funktioner og differentialregning. I disse emner relateres ikke til virkeligheden. "Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie III" skal ifølge forfatterne dække pensum i analytisk geometri til studentereksamen. Emnerne er blandt andet den rette linje, cirklen, parablen, ellipsen og hyperblen og 2. gradsligning i x og y. Heller ikke her kommer virkeligheden ind i billedet. "Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie IV" er tiltænkt at dække pensum i algebra og aritmetik. Emnerne er polynomier, kombinatorik, rentesregning, vektorer, herunder kinematik, og komplekse tal. Under emnet kombinatorik findes et eksempel med et rohold, der skal udtages på et antal måder.[3] Der er under emnet rentesregning virkelighedsrelaterede opgaver.[4] "Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie V" er inden for emnet stereometri og skal dække pensum i dette. Det drejer sig om emner som krumme flader, rumfang, keglesnit, sfærisk geometri osv.. I sfærisk geometri inddrages astronomi til at bestemme stjerners kulminationstidspunkt og nedgangstid over København. Også afstanden mellem to punkter på jordkloden beregnes.[5]

I Matematiklærerforeningens 50-års jubilæumsskrift fortæller Helge Christiansen, at Andersen og Mogensens lærebogssystem opnåede stor anseelse på grund af de matematiske kvaliteter og det klare sprog.[6] Lærebogssystemet udkom med disse forfattere helt frem til 1971, men det fortsatte med at udkomme helt frem til 1983 med forfatterne K. R. Buch, Fr. Fabricius-Bjerre og O. Brændstrup. Gennem tiderne er

[1] A. F. Andersen 1891-1972; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor i matematik ved Den polytekniske Læreanstalt 1923; docent i matematik ved Landbohøjskolen 1925.

[2] Andersen, A. F. og Mogensen, P. : Lærebog i matematik I, s. 70-71

[3] Andersen, A. F. og Mogensen, P. : Lærebog i matematik IV, s. 22

[4] Andersen, A. F. og Mogensen, P. : Lærebog i matematik IV, s. 28-29

[5] Andersen, A. F. og Mogensen, P. : Lærebog i matematik V, s. 75-77

[6] Matematiklærerforeningen 1931-81; s. 50

stoffets behandling forandret, men ånden er den samme som i Andersens og Mogensens bøger.

Et alternativ til lærebogssystemet af Andersen og Mogensen var lærebogssystemet af Juul og Rønnau, som i perioden 1936-38 udgav et lærebogssystem henvendt til den matematiske linje. Det drejede sig om "Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie I, II og III" og tilhørende opgavebøger "Matematiske Opgaver 1.-3.". Det er ikke bøger, jeg har inddraget i materialet. Men ved anmeldelsen af "Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie I" blev fænomenet med lærebogssystemernes voksende omfang omtalt:

"Den foreliggende bog er stor og statelig, fra forlagets side godt udstyret; den minder i denne henseende om Pihl, Kristensen og Rubinstein's bog, men er større i format og sidetal. "Pihl og Kristensen I" var på 188 sider, "Pihl, Kristensen og Rubinstein I" på 220 sider og "Juul og Rønnau I" på 243 sider ("Bonnesen I" var på 140 sider). Der er vææxt i de matematiske lærebøgers størrelse. Selv om det ikke er sidetallet, der er det afgørende for en matematisk lærebog "størrelse", bliver man uvilkårligt lidt betænkelig, når man mindes de små, ganske tynde bøger, man i sin egen skoletid skulde lære. Disse store, bredt skrevne bøger med de mange gennemregnede exempler har den fordel, som man næppe altid benytter i tilstrækkelig grad, at eleverne kan læse mange afsnit uden egentlig gennemgang; men der er på den anden side den mangel ved dem, at det frie spillerum for lærerens personlige tilføjelser til det anordnede stof bliver mindre. Fremtidige lærebogsforfattere bør søge at afveje disse to sider mod hinanden, når de udarbejder deres bøger."[7]

I denne periode vokser omfanget af lærebogssystemerne, og der begyndte at blive inddraget et forøget antal eksempler og øvelser. Det blev tilstræbt at komme eleverne i møde ved at give dem en mere forklarende fremstilling for derved at kunne nå en dybere faglig forståelse.

Det kan man ikke sige om et andet lærebogssystem fra denne periode - professor Julius Petersens system. Systemet består af 7 bøger til det matematiske gymnasium: "Lærebog i Aritmetik og Algebra I", "Lærebog i Aritmetik og Algebra II", "Lærebog i Plangeometri", "Lærebog i Geometri", "Lærebog i analytisk Plangeometri", "Lærebog i Differential- og Integralregning" og "Lærebog i Stereometri". Bøgerne udkom første gang med Julius Petersen som forfatter omkring 1866-1878. Gennem tiden har lærebogssystemet skiftet forfatter. Omkring århundredeskiftet var det dr. phil Carl Hansen, som var forfatter til systemet. Den seneste udgave er af Albert Kristensen[8] og er fra 1955. Albert Kristensen har udarbejdet sine bøger ud fra Carl Hansens udgave. Jeg vælger at bearbejde den seneste udgave, da jeg ved fra Helge Christiansen, at dette system endnu var i brug. Christiansen beskriver bøgerne som "en række emnebøger...skrevet i en tæt og knap form".[9]

---

[7] Matematiklærerforeningen 1931-81; s. 55-56
[8] Albert Kristensen; f. 1896; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Sct. Jørgens Gymnasium 1932; lærebogsforfatter.
[9] Matematiklærerforeningen 1931-81, s. 46

"Lærebog i Aritmetik og Algebra I" omhandler blandt andet emnerne funktioner, logaritmer, rentesregning og annuiteter, talfølger og førstegradspolynomiet. Kapitlet om funktioner indledes med at vise forsøgsresultater over vanddampes tryk ved opvarmning. Her er en tabel og graf over resultaterne,[10] og kapitlet om rentesregning og annuiteter tager udgangspunkt i virkeligheden.[11] Ellers bliver der ikke relateret til virkeligheden. I den tilhørende opgavedel er det inden for de tilsvarende emner, at der er virkelighedsrelaterede opgaver tilknyttet.

"Lærebog i Aritmetik og Algebra II" behandler emnerne hele tal, permutationer og kombinationer, induktionsbeviset, polynomier, komplekse tal og algebraiske ligninger. Bogen inddrager ikke virkeligheden i teorien, men i opgaverne tilknyttet kombinationer skal der dannes par til en middag på et antal måder, findes antal mulige cykellåskombinationer og så videre.[12]

Bogen "Lærebog i Plangeometri og Trigonometri" er en samlet udgave af Julius Petersens bøger "Lærebog i Plangeometri" og "Lærebog i Trigonometri". Af emner indgår blandt andet ensvinklede trekanter og anvendelser, trigonometriske funktioner, den almindelige trekant, kongruens og ligedannethed. Der bliver ikke i teorien relateret til virkeligheden. Der er dog to opgaver i tilknytning til afsnittet om cirklen, som handler om henholdsvis jordens radius og længden af en drivrem mellem to hjuls centre, hvor hjulene er af en vis størrelse.[13]

"Lærebog i analytisk Plangeometri" behandler emnerne koordinater, den rette linje, cirklen, geometriske steder, parablen og ellipsen og hyperblen. Denne bog tager ikke udgangspunkt i virkeligheden; hverken i teori eller opgaver.

I "Lærebog i Differential- og Integralregning" indgår emnerne funktioner, kontinuerte funktioner, differentiable funktioner, integralregning, geometriske anvendelser, naturlig logaritme og eksponentialfunktionen. Geometriske anvendelser af integralregningen omhandler dét at finde arealer under kurver og omdrejningslegemer.[14] Det samme gør sig gældende i de tilhørende opgaver. Der bliver ikke i bogen inddraget anvendelser af matematik.

"Lærebog i Stereometri" behandler blandt andet emnerne parallelle linjer, kuglaflader, polyedre, rumfang og overflader. Under kapitlet om sfærisk geometri findes eksempler af geografisk og astronomisk karakter.[15] Det samme gælder i opgaverne, der knyttes til dette kapitel.[16]

[10] Kristensen, A.: Lærebog i Aritmetik og Algebra I, s. 6-8
[11] Kristensen, A.: Lærebog i Aritmetik og Algebra I, s. 92-97
[12] Kristensen, A.: Lærebog i Aritmetik og Algebra II, s. 49
[13] Kristensen, A.: Lærebog og Plangeometri og Trigonometri, s. 135
[14] Kristensen, A.: Lærebog i Differential- og Integralregning, s. 66-78
[15] Kristensen, A.: Lærebog i Stereometri, s. 83-86
[16] Kristensen, A.: Lærebog i Stereometri, s. 120

8. 2 Lærebøger til sproglige linjer

Poul Mogensen har også skrevet en lærebog til det sproglige gymnasium. "Mindre lærebog i matematik for gymnasiets sproglige linier" udkom i en 2. udgave i 1938. Bogen er en fortsættelse af en tidligere bog fra 1930, men efter anordningen af 1935 har Mogensen måttet foretage visse bortskæringer. Ved anordningen af 1935 blev de sprogliges timetal til matematik skåret ned med 2 timer. Han gør i forordet opmærksom på, at han i disse bøger har udeladt visse emner, der ikke kræves mere i anordningen, og at han samtidig har udeladt "en Række indflettede teoretiske Betragtninger og praktiske Anvendelser".

Under emnet "funktioner og deres undersøgelser" inddrager Mogensen virkeligheden for at gøre emnet "afhængige variable" lettere at forstå. Han tager emnet som empiriske funktioner og grafisk afbildning op. Der er til dette afsnit en del eksempler, men jeg vil kalde det øvelser, idet svarene ikke står i bogen. Der er medtaget eksempler fra statistikken, som f. eks. Roskildes indbyggertal som funktion af tiden, antal studenter i forhold til årene 1907-25, forsikringspræmier.[17] Temperaturkurver indføres ligeledes under dette emne.[18] Under "ligefrem proportionale" størrelser bruger kan kiloprisen på smør og tilbagelagt vejlængde som eksempel. Der er tilknyttet opgaver, som ligeledes tager udgangspunkt i virkeligheden.[19] Under "omvendt proportionalitet" tales om et varelagers forråd.[20] Under "rentesregning" nævnes, at formlen for tilskrivning af renter kan beskrive individantal i dyre- og planteverdenen. Dette emne relaterer til virkeligheden. De tilhørende opgaver til de nævnte emner er ligeledes relaterede til virkeligheden.[21]

Einer Torsting har med bogen "Matematik for gymnasiets sproglige retninger" fra 1936 forsøgt at tage udgangspunkt i virkelige problemstillinger, f.eks. at "Færdselspolitiet udfra Maaling af Bremsesporets Længde kan udregne, hvor hurtigt Automobilet har kørt".[22] Ligesom de øvrige lærebøger har også Torsting rentesregning med. Der er tilknyttet nogle opgaver, hvor der tages udgangspunkt i virkeligheden.[23] I kapitlet om "Konstante og variable størrelser. Funktioner" er der et eksempel med temperaturkurver i forbindelse med grafisk fremstilling.[24] Der er en særskilt opgavedel bagest i bogen. Nogle opgaver til emnet "grafisk fremstilling", "rentesregning" og "trigonometri" tager udgangspunkt i virkeligheden.[25]

En anden lærebog for sproglige er Jakob Jensens "Matematik for de sproglige gymnasielinier" fra 1944. Bogen er en revidering af hans tidligere bog fra 1932. I forordet gør Jensen opmærksom på, at på grund af begrænsningen af

[17] Mogensen, P.: Mindre lærebog for gymnasiets sproglige linier, s. 20-21
[18] Mogensen, P.: Mindre lærebog for gymnasiets sproglige linier, s. 22-23
[19] Mogensen, P.: Mindre lærebog for gymnasiets sproglige linier, s. 32-34
[20] Mogensen, P.: Mindre lærebog for gymnasiets sproglige linier, s. 42-45
[21] Mogensen, P.: Mindre lærebog i matematik for gymnasiets sproglige linier, s. 68-72
[22] Torsting, E.: Matematik for gymnasiets sproglige retninger, s. 4
[23] Torsting, E.: Matematik for gymnasiets sproglige retninger, s. 51-53
[24] Torsting, E.: Matematik for gymnasiets sproglige retninger, s. 6-7
[25] Torsting, E.: Matematik for gymnasiets sproglige retninger, s. 76, 80 og 82-84

matematikundervisningen på de sproglige med 2 timer, har han begrænset teorien, så der er tid til opgaveregning. "Til Begrænsning af det teoretiske Stof har den anvendte Opbygning af Læren om Logaritmer, Potens og Rod bidraget, idet den sædvanlige anvendte Behandling er erstattet med en tidsbesparende og formentlig mere praktisk Opbygning, som har vist sig at ligge let og naturligt for Eleverne." Bogen har efter hvert kapitel og også bagest i bogen opgaver, der kan løses selvstændigt. For at introducere emnet "grafisk fremstilling" er der medtaget eksempler fra virkeligheden. Det er temperaturkurver og en dansk provinsbys gasforbrug. Der er eksempler, hvor der ved hjælp af Statistisk Årbog skal udarbejde et diagram over middeltemperaturen for hver måned i 1941, og de tilknyttede opgaver inddrager ligeledes virkeligheden.[26] Som eksempler på "omvendt proportionalitet" er Ohms lov medtaget.[27] Der er i bogen et kapitel om "rentesregning". Både eksempler og opgaver relateres til virkeligheden.[28] I kapitlet "trekantsberegninger" bliver virkeligheden inddraget i opgaverne.[29]

8. 3 Studentereksamensopgaver 1935-60[30]

Opgaverne til eksamen omhandler for en stor del opgaver i analytisk geometri. Der er om anvendelser af matematik først i 1942 en opgave i rentesregning. Samme år er der en opgave i sfærisk geometri, der tager udgangspunkt i punkter på jordkloden. Juni 1943 handler en af opgaverne i kombinatorik om et cykelhold, der skal udtages på et antal måder. Det ser ikke umiddelbart ud som om, omfanget af opgaver er nedsat p.g.a. krigen, selv om der blev givet tilladelse fra ministeriets side. Først igen i 1957 er en opgave i rentesregning. Derudover findes ingen anvendelsesorienterede opgaver i perioden1935-60.

[26] Jensen, J.: Matematik for de sproglige gymnasielinier, s. 17-24
[27] Jensen, J.: Matematik for de sproglige gymnasielinier, s. 27
[28] Jensen, J.: Matematik for de sproglige gymnasielinier, s. 50-55
[29] Jensen, J.: Matematik for de sproglige gymnasielinier, s. 69-71
[30] Lomholt, A.: Matematiske opgaver - eksamensopgaver fra matematisk Artium Juni 1918 - Juni 1946; Matematiske opgaver - eksamensopgaver fra matematisk studentereksamen september 1939 - juni 1962

Kapitel 9 Analyse2

9. 1 Hvad skal der foregå omkring anvendelser af matematik i 1935?

Ved den endelige betænkning, der ligger til grund for bekendtgørelsen af 1935 sættes anvendelser af matematik i fokus. For de sproglige linjer lægges der vægt på "Ved valg af øvelseseksempler bør man...søge tilknytning til det praktiske liv. Tillige bør inddrages materiale (tabeller og grafisk afbildning), som finder anvendelse ved undervisningen i andre fag, f. eks. naturfag og historie". Mens der på den matematiske linje bør tilstræbes et "samarbejde med de fag, specielt fysik, hvor matematikken kan komme til anvendelse". For at fremme samarbejdet har man valgt at indføre geometrisk kinematik.

Der er tilsyneladende forskel på, hvilke genstandsområder, der skal inddrages i undervisningen på de to linjer. For den matematiske linje er det fysik, mens andre fagområder kan inddrages på sproglig linje. Men for begge linjer er der tale om anvendelser. Der står ikke noget om begrundelsen for det.

Man kan ud af betænkningen se, at der for de sproglige linjer gælder, at det også skal være i øvelseseksempler, at anvendelserne skal ind. Der skal ligeledes i undervisningen inddrages materiale, som bruges ved undervisning i andre fag i gymnasiet. Det vil sige, at der skal supplerende stof ind i undervisningen.

I anordningen af 1935 er formålet for de sproglige linjer: "Formaalet for undervisningen er at give Eleverne Kendskab til visse vigtige Anvendelser af Matematikken. Af de teoretiske Afsnit medtages så meget, at dette Formål kan opfyldes". Det vil sige, at anvendelser nu sættes højere end det teoretiske stof for de sproglige. Funktionsbegrebet er i fokus, og der skal inddrages "funktioner af praktisk art". Det kan være et udtryk for, at der ved funktionsbegrebets indførelse skal tages udgangspunkt i virkeligheden. Det kan i virkeligheden være en stadfæstelse af praksis. Der skal fortsat undervises i rentesregning, som er et emne, der tager udgangspunkt i virkeligheden.

Det er tydeligt, at diskussionerne blandt fagfolk har influeret på ændringen i anordningen. Det er ikke længere så vigtigt, at eleverne på de sproglige linjer når langt teoretisk men mere vigtigt, at de opnår kendskab til anvendelse af matematikken. Der var i diskussionen to argumenter fremme som begrundelse for at indføre anvendelser i matematikundervisningen for sproglige elever. Det var nytteargumentet (argument 3) og tilegnelsesargumentet (argument 5). Disse argumenter har meget vægt i ved en revidering af anordningen, som det netop kan ses ved anordningen af 1935.

På matematisk linje skal eleverne ligeledes undervises i rentesregning. Fagområderne astronomi og geografi nævnes også. Det er ifølge definitionen anvendelser. Anvendelser af matematik nævnes ikke i formålet for matematisk linje, som det gør ved de sproglige linjer. På det grundlag kan man netop vurdere, at det ikke er i fokus i samme grad som på de sproglige linjer.

"Formaalet for Undervisningen er at bibringe Eleverne Kendskab til de reelle Tal og disses Anvendelse til Beskrivelse af Funktioner, samt Kendskab til simple Figurer i Planen som i Rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger".

Når der i anordningen og bekendtgørelsen for matematik nævnes ordet anvendelse af matematik, da er det blandt andet i forbindelse med matematiske emners anvendelse i andet matematisk emne. Under integration kommes der ind på "Anvendelser paa Arealbestemmelser og paa Volumen af Omdrejningslegemer". Under emnet stereometri kommes der ind på "cos- og sin-Sætningen med simple Anvendelser bl. a. paa astronomiske og geografiske Opgaver". Sidstnævnte eksempel viser, at de nye ideer om at relatere matematik til andre fagområder har fået lidt plads. Der skal ligeledes undervises i rentesregning og annuiteter, som er en anvendelse af matematik i et ikke-matematisk virkelighedsområde. Flere af lærerne i diskussionen i perioden 1903-35 foreslog netop astronomi som et velegnet område at inddrage. Det er tilsyneladende ikke slået igennem ved denne anordning.

9. 2 Hvad diskuteres omkring anvendelser af matematik 1935-53?

Tiden efter anordningen af 1935 bærer stadig præg af en diskussion om, hvorvidt de sproglige elever får udbytte af matematikundervisningen. Det er stadig grafisk fremstilling og funktionsbegrebet, der er helt i fokus. Der er en tendens til, at mange synes, at det er på sproglig linje, at anvendelserne skal foregå. Der er forskel i perioden på, hvor meget anvendelser er italesat. Der er ligeledes forskel på matematisk og sproglig linje.

Der er fra begyndelsen af perioden problemer med eleverne på de sproglige linjer. Der er debat omkring situationen. Lærerne skal via undervisningen sørge for, at deres sproglige elever får gode muligheder for videreuddannelse, at de kan de ting, der bliver forventet dér. Samtidig med at matematiske færdigheder indøves. Enkelte lærere mener, at der med anordningen af 1935 bliver fokuseret for meget på anvendelser. Det vil de gerne ændre, idet de mener, at anvendelser af matematik fjerner elevernes motivation for at lære matematik.

Samtidig vokser interessen blandt elever for den matematiske linje. Det er den generelle holdning, at mange finder matematik spændende, fordi den bruges mere og mere i teknologi og videnskab. Netop derfor begynder man at tale om anvendelser på den matematiske linje. Der sker et skift fra at tale om at inddrage anvendelser på de sproglige linjer til at tale om at indføre anvendelser på den matematisk linje, mens en anden tendens peger i retning af at fjerne anvendelser af matematik fra de sproglige linjer.

O. Heide Petersen mener, at der skal ske en anden vægtning med hensyn til at inddrage anvendelser af matematik på de sproglige linjer. Han er af den opfattelse, at manglen på interesse for matematik skyldes, at der fokuseres på at inddrage anvendelser af matematik og derved på nyttehensynet. Det er Mogens Pihl enig med Heide Petersen i, og han mener ligeledes, at der er blevet fokuseret for meget på nytteværdien ved matematikundervisningen for sproglige elever. I stedet skal der lægges vægt på matematiks almenkulturelle værdi. Pihl ønsker stringens gennem flere opgaver frem for "et opbud af teori". "Selvfølgelig må eleverne også stifte bekendtskab med matematikkens praktiske anvendelser" og Pihl finder det rimeligt, om "logaritmeregningen og potensbegrebets udvidelse stadig blev obligatorisk stof". Pihl giver her et billede af, at matematikkens praktiske anvendelser for ham er det samme som logaritmeregning og potensbegrebet. Det er ikke en anvendelse af matematik i forhold til definitionen. Men det er et udtryk for den opfattelse, at anvendelser af matematik kan være bestemte områder eller dele af matematikken.

Axel Nygaard mener ligeledes, at matematik er godt for de sproglige elever. Han mener, det har en praktisk værdi for de sproglige i forhold til de videregående uddannelser som medicin-, økonomi- og statsvidenskabsstudiet. Det vil være uheldigt at fjerne matematik i en tid, "hvor kulturen er så teknisk præget, som tilfældet er nu". "Ligesom det praktiske erhverv også har brug for studenter med regnefærdigheder". Det er ikke til at sige, om Nygaards forestillinger omkring matematikundervisningen inkluderer anvendelser af matematik.

9. 3 Hvordan inddrages anvendelser af matematik 1935-53?

Lærebøgerne og studentereksamensopgaverne er kilder til at vurdere, hvordan anvendelser af matematik kan være inddraget i undervisningen. Som tidligere nævnt giver det en mulighed for et kvalificeret bud på, hvad der kan være foregået. Der kan have været lærere, der har inddraget materiale udover lærebøgerne.

Lærebøger til matematisk linje
I perioden 1935-53 udkom Andersen og Mogensens lærebogssystem henvendt til den matematiske linjes matematikundervisning efter anordningen af 1935. Disse bøger blev benyttet meget i gymnasieskolen. De kan derfor give et billede af, hvad der kan have foregået i undervisningen.

I lærebøgerne inddrages virkeligheden inden for de matematiske emneområder grafisk fremstilling, funktioner, kombinationer og sfærisk geometri. Den virkelighed, de inddrager i disse emner er påvirket af, at bøgerne henvender sig til den matematiske linje, hvor en tilknytning til fysik blev anbefalet. Det er hovedsagelig genstandsområderne fysik og astronomi. I emnet kombinationer relateres til virkeligheden i eksemplerne. Der er et eksempel med et rohold, der skal udtages[1]:

"En roklub har 20 Medlemmer. Paa hvor mange Maader kan man udtage Roere til en Toaarers- og en Fireaarersbaad? Tomandsholdet kan udtages paa $K_{20,2}$ Maader, og for hvert af disse Valg, kan Firemandsholdet udtages paa $K_{18,4}$ Maader. Det søgte Antal er $K_{20,2} * K_{18,4} = 581400$."

Dette er et eksempel på, at der til lejligheden opfindes en pseudovirkelighed, som ikke har og nok aldrig vil få betydning for nogen i nogen sammenhænge. Det er en anvendelse

[1] Andersen, A. F. og Mogensen, P.: Lærebog i Matematik for gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige linje IV, s. 22

ifølge definitionen, men det er en retorisk angivelse af en virkelighed. Argumentet for at udforme sådanne opgaver begrundes med tilegnelsesargumentet (argument 5), hvor det er målet, at eleverne skal blive motiverede for det matematiske indhold. Formålet med en sådan opgave peger ind i matematikken. Virkeligheden har ingen betydning for matematikken på anden måde end i indpakningen.

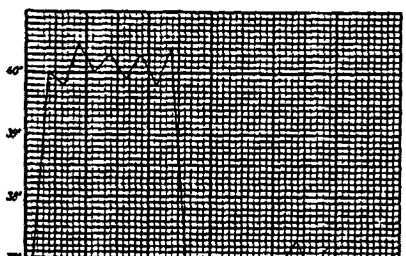
Lærebogsforfatterne har ikke skrevet noget om anvendelser i forordet til systemet. Derfor kan man ikke forvente, at disse bøger skal være særlig anvendelsesorienterede. I det tilfælde ville de sandsynligvis skrive det. Derfor kan man få en mistanke om, at virkeligheden er inddraget på grund af et tilegnelsesargument (argument 5), når der er nogen med. Der er et indadrettet formål med lærebøgerne.

Lærebøger til de sproglige linjer

I denne periode har Poul Mogensen udgivet en bog henvendt til matematikundervisningen på de sproglige linjer. De er skrevet, sådan at de opfylder anordningen af 1935. Mogensen skriver, at han har været nødt til at fjerne "en Række indflettede teoretiske Betragtninger og praktiske Anvendelser" i forhold til en tidligere bog.

Anvendelser af matematik inddrages ved emnerne grafisk fremstilling og rentesregning. Ved grafisk fremstilling er et eksempel på feberkurver over et sygdomsforløb:

Grafisk Fremstilling benyttes paa mange andre Omraader inden for Lægevidenskaben. Som et vigtigt Eksempel kan nævnes *Feberkurver,* der er et uvurderligt Hjælpemiddel ved Bedømmelsen af Sygdommens Forløb. Her er det hurtige Overblik af særlig stor Betydning (Stuegang paa Hospitaler). Nedenstaaende Kurve er typisk for Lungebetændelse; Forløbet er dog hurtigere end almindeligt.



Tid	Temperatur
$\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{4}$	
$1\frac{1}{4}$	
$1\frac{3}{4}$	
$2\frac{1}{4}$	
$2\frac{3}{4}$	
$3\frac{1}{4}$	
$3\frac{3}{4}$	
$4\frac{1}{4}$	

Dette er et eksempel på, at anvendelser indgår til introduktion af grafisk fremstilling. Mogensen nævner, at denne anvendelse af matematik finder sted på sygehusene. Det er sandsynligvis et nytteargument (argument 3) og et tilegnelsesargument (argument 5), der er årsag til, at han inddrager denne opgave. Han nævner ikke selv, hvorfor anvendelser af matematik skal med i undervisningen for de sproglige elever. Men han inddrager anvendelser både i de nævnte emner og i opgaverne dertil.

Torsting har ligeledes skrevet en lærebog til de sproglige linjer. Det er som hos Mogensen ved emnerne grafisk fremstilling, funktioner og rentesregning, at anvendelser af matematik indføres.

Et eksempel på en opgave i grafisk fremstilling:

"Kartoffelmelsproduktionen i Danmark var i Aarene 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930 henholdsvis 2230 t, 371 t, 243 t, 731 t, 400 t, 880 t (1 t = 1000 kg). Giv en grafisk Fremstilling af denne Sammenhæng."

Denne opgave er et eksempel på en anvendelse af matematik til at beskrive forhold omkring kartoffelmelsproduktionen i Danmark. Der er ikke noget oversættelsesjob i opgaven, idet indholdet i opgaven er uden betydning for at kunne afsætte punkterne ind i et koordinatsystem. Argumentet for at tage en sådan opgave ind i lærebogen kan kun være et argument om øget indlæringsmuligheder af grafisk fremstilling (argument 5).

Jakob Jensens bog til de sproglige linjer skal leve op til anordningen af 1935. Han udtaler, at han har været nødt til at skære ned på pensum i forhold til en tidligere lærebog, idet undervisningstiden er skåret ned for de sproglige linjer ved anordningen af 1935. Han har derfor forsøgt at indrette stoffet sådan, at det blev let og naturligt for eleverne at forstå. Igen er det ved grafisk fremstilling og rentesregning, at virkeligheden inddrages. Grafisk fremstilling er et forsøg på at illustrere virkeligheden med matematik. Jeg vil her give et eksempel på en opgave i grafisk fremstilling:

23. Tegn en Skatteligningskurve efter følgende Stykke af Ligningsskalaen for Gjentofte Kommune:

Skatteindlægt	*Aarlig Kommuneskat*
0 Kr. – 1050 Kr.	4 Kr.
1050 Kr. – 2000 Kr.	4 Kr. af 1000 Kr., 7,6 % af Resten
2000 Kr. – 4000 Kr.	4 % af 2000 Kr., 8 % af Resten
4000 Kr. – 10000 Kr.	6 % af 4000 Kr., 9 % af Resten
10000 Kr. – 20000 Kr.	7,8 % af 10000 Kr., 10 % af Resten

(X-Aksen: 1 cm = 1000 Kr., Y-Aksen: 1 cm = 100 Kr.).

Eksemplet viser endnu en opgave i grafisk fremstilling. Denne opgave er en autentisk anvendelse af matematik og viser, at skatteberegningsfunktionen er stykkevis lineær. Der er ikke det store oversættelsesjob i opgaven for eleverne.

Han indleder kapitlet om logaritmer med: "Et nyttigt Hjælpemiddel til praktiske Beregninger har man i den Funktion, vi nu skal behandle".[2] Det kan tyde på, at han har den opfattelse, at netop logaritmefunktionen er god at anvende til både interne og eksterne beregninger. Hverken eksempler eller opgaver tager udgangspunkt i virkeligheden.

[2] Jensen, Jakob: Matematik for de sproglige Gymnasielinier, s. 39

De tilhørende opgaver til kapitlet om rentesregning er karakteriseret ved både at indeholde regnetekniske opgaver og autentiske opgaver, hvor resultatet bruges i en virkelig situation:

- "Hvor længe er en Kapital om at fordobles til 3½, 4, 4½ og 5% p. a.?"
- "Hvor længe kan et Menneske med et aarligt Forbrug af 4500 Kr. leve af en Kapital paa 50000 Kr., der er anbragt til 5% p. a. ?"

Den første opgave er en regneteknisk opgave, men opgaven i dens formulering er en autentisk anvendelse af matematik. Der er lidt mere arbejde for eleverne i den anden opgave, men den er også autentisk. Derudover bærer denne bog ikke præg af anvendelser.

Studentereksamensopgaver

Studentereksamensopgaver har den funktion, at de giver et indtryk af, hvad ministeriet stiller af krav til undervisningen, samtidig med, at de virker tilbage på undervisningen og bliver styrende for undervisningen. Ved analyse af samtlige studentereksamensopgaver i perioden 1935-53 er der to opgaver fra eksamen i henholdsvis 1942 og 1943, hvor virkeligheden inddrages. Det er inden for emnerne rentesregning og kombinationer.

- " 1 . Juli 1940 stiftede A en Gæld på 10000 Kr. Denne Gæld forrentes og afdrages dels ved aarlige lige store Ydelser à 600 Kr., hvoraf den første falder 1. Juli 1941 og den sidste 11. Juli 1956, dels ved 5 lige store Ydelser, der falder hvert tredie Aar, første Gang 1. Juli 1944 og sidste Gang 1. Juli 1956. - Hvor stor maa hver af de nævnte lige store Ydelser være, naar Gælden skal være fuldstændig afdraget, efter at de sidste Ydelser er betalt 1. Juli 1956? Rentefoden er 5 pCt. p. a.."

- "I en Cykleudflugt deltager 4 Herrer og 5 Damer. Et Hold på 3 Deltagere, hvoraf mindst een skal være en Herre, skal cykle i Spidsen. - Paa hvor mange Maader kan Holdet udtages? På hvor mange måder kunne Holdet på 3 Deltagere udtages, hvis der skulle være mindst een Dame paa Holdet? - I en anden Cykleudflugt deltager 4 Herrer, 5 Damer og 6 Børn. Her skal et Hold på 4 Deltagere, hvoriblandt findes mindst een Herre, een Dame og eet Barn, cykle i Spidsen. - Paa hvor mange Maader kan et sådant Hold udtages?"

Begge opgaver er ifølge definitionen anvendelser af matematik. Den første opgave kan kaldes en autentisk anvendelse, mens den anden opgave er en retorisk angivelse af en virkelighed. I den første kan formålet pege ud fra matematikken, mens det i den sidste opgave peger ind i matematikken. Den første kan også være en iscenesat virkelighed, men derudover kan den have en funktion i virkeligheden, idet resultatet kan bruges i den verden, den forsøger at beskrive. Det er sandsynligvis tilegnelsesargumentet (argument 5), der ligger til grund for at udarbejde opgaven til kombinationer.

9. 4 Hvad skal der foregå omkring anvendelser af matematik i 1953?

Anordningen af 1953 er kun for matematisk linje, idet matematik på den sproglige er fjernet. Formålet med matematikundervisningen for den matematisk-naturvidenskabelige linje lyder:

"Formålet med undervisningen er at bibringe eleverne kendskab til et fundamentalt område af matematikken og gennem arbejdet hermed at udvikle og skole deres evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform samt hos eleverne at opøve sikkerhed og færdighed i brugen af det matematiske formelsprog og i udførelsen af numeriske beregninger."

Der bliver ikke i formålet nævnt noget om anvendelser af matematik. Tværtimod ser det ud til, at det er evnen til at tænke stringent, der er i højeste kurs. Der opfordres til et samarbejde mellem matematik og fysik, og der skal tages hensyn til det i planlægningen. Det behøver ikke nødvendigvis at betyde, at anvendelser af matematik vil blive inddraget i matematiktimerne. For det første kan det vel tænkes, at det er den matematiske teori, der skal sørges for bliver indøvet i tide, sådan at anvendelserne kan finde sted i fysiktimerne. For det andet kan det eksempelvis betyde, at elementer af fysisk teori, f. eks. mekanik, indgår i matematikundervisningen.

Tværtimod ser man i 1953, at den tidligere formulering om, at trigonometri skal anvendes på "blandt andet astronomi", er fjernet. Hvis anordningen i nogen grad skulle opfordre til at inddrage anvendelser af matematik, da er det ikke i relation til astronomi. Det er ikke noget, der nævnes.

9. 5 Hvad diskuteres omkring anvendelser af matematik 1953-60?

Efter at matematik for de sproglige linjer fjernes bliver der problemer med elevernes forudsætninger for videreuddannelse på blandt andet medicinstudiet. Der indføres derfor et matematikkursus, der skal afhjælpe problemerne med videreuddannelse for sproglige elever. Der skal i dette kursus lægges vægt på anskuelsen og "hovedvægten lægges på anvendelserne, hvorfor man ved valg af øvelseseksempler overalt, hvor det er muligt, bør søge tilknytning til det praktiske liv."

Det er i denne periode, at holdningen til anvendelser af matematik bliver gradvist mere positiv. Det hænger nøje sammen med, at matematikkens betydning for vækst i samfundet. Det bliver blandt andet fremført af undervisningsminister Bomholt, som er af den opfattelse, at "det vil styrke faget pædagogisk, hvis man kunne give børnene og de unge et indtryk af, hvad matematik kan bruges til, d. v. s. at teori i nogen grad modsvares af anskueliggørende opgaver". Han taler ikke om, at anvendelser af matematik kan/skal bidrage til, at eleverne får nogle evner, de kan anvende i deres uddannelse og i fremtiden. Der er tale om, at anvendelser skal bidrage til, at flere bliver motiverede for at lære matematik. Derfor er argumentet for at inddrage anvendelser i undervisningen et motivationsargument (argument 5).

Rubinstein mener, at fysikundervisningen kan hjælpe til, at eleverne forstår matematikken. F. eks kan det hjælpe til, at det bliver lettere at forstå vækst- og ændringshastighed. "Mange elever vil fatte større interesse for matematikken, når de ser den anvendt uden for sit eget område". Rubinsteins udtalelse ligger ligeså inden for tilegnelsesargumentet (argument 5), hvor man via andre fagområder skal fatte større interesse for og forståelse af matematik. Det er tanken med at indføre anvendelser af matematik i genstandsområdet fysik at skabe interesse for matematik. Dette skal ifølge Rubinstein foregå ved opgaveregning.

9. 6 Hvordan inddrages anvendelser af matematik 1953-60?

Forsøg i undervisningen

Til forskel fra lærebøgerne og studentereksamensopgaverne, som kan give bud på, hvad der kan have foregået omkring anvendelser, da er kendskab til forsøgsvirksomhed i undervisningen kilde til at sige, hvad der faktisk har fundet sted i undervisningen i nogle gymnasieklasser.

Sidst i 1950'erne finder nogle forsøg sted inden for emnet sandsynlighedsregning. Formålet er at undersøge, hvordan emnet sandsynlighedsregning vil blive at undervise i ved den kommende bekendtgørelse. De anvendelsesorienterede emner handler blandt andet om trafiktælling, tælling af røde blodlegemer og Mendels 1. og 2. Lov. Disse emner kan betegnes som anvendelser af matematik. Der fandt en "kort omtale af matematiske modeller" sted. Lærernes erfaring sagde dem, at eleverne udviste stor interesse for sandsynlighedsregning. Når forsøgene handler om at undersøge, om sandsynlighedsregning kan inddrages i en kommende bekendtgørelse, da vil argumentet for at inddrage anvendelser betegnes som et tilegnelsesargument (argument 5), idet det ser ud til, at det er vigtigt, at eleverne bliver motiverede for sandsynlighedsregning.

Lærebøger til matematisk linje

Med hensyn til lærebøger, der er udkommet i perioden 1953-60, da er Albert Kristensens fortolkning af Julius Petersens lærebogssystem det eneste nye fra denne tid. Systemet blev ikke benyttet mange steder, og systemet stammer helt fra 1870'erne, hvor Julius Petersen var forfatteren til bøgerne. Det stod i konkurrence til Andersen og Mogensens lærebøger, som blev benyttet flere steder. Der er ikke noget forord i Kristensens bøger, og derfor kan det være vanskeligt at vide, hvilke overvejelser, der kan ligge bag udformningen af lærebogssystemet. Der er nogle eksempler, hvor virkeligheden inddrages. Det er inden for emnerne rentesregning og kombinationer.

Der er tilknyttet nogle opgaver til emnet rentesregning[3]:

- "Til hvilken sum vil 1 kr. vokse i 200 år, når renten er 4 % p. a. ?"
- "To brødre, der er henholdsvis 12 og 15 år gamle, skal dele en arv på 10000 kr., således at de begge får samme sum udbetalt, når de er 25 år gamle. Hvorledes skal summen deles? (Hele kroner). Hvor meget får hver udbetalt?"

[3] Kristensen, A.: Lærebog i aritmetik og algebra I, s. 134

Disse to opgaver findes i opgavesamlingen bagest i lærebogen. Det er forskellige eksempler, hvor der i det første ikke inddrages virkelighed. Vi ved ikke, om resultatet skal bruges i en virkelig situation. Det har mere karakter af at være en regneteknisk opgave. I det andet kan man tale om anvendelser af matematik. Det er en konkret situation, hvor resultatet kan bruges i den verden, den beskriver.

I tilknytning til emnet om kombinationer er en opgave, som jeg vil vise her:

- "En cykellås er forsynet med 6 taster; på hvor mange måder kan den indstilles, når hver tast kan stå i 3 forskellige stillinger?"

- "På hvor mange måder kan n herrer tage n damer til bords?"

Dette er nogle opgaver, hvor virkeligheden kommer ind i billedet. Den første kan være en autentisk situation fra en cykellåsfabrik eller en cykeltyv, hvor resultatet ønskes udregnet. Den anden opgave er en retorisk angivelse af en virkelighed. Der er tale om anvendelser i begge tilfælde. Anden opgave er ikke autentisk, men argumentet for at udarbejde den type opgaver kan være et tilegnelsesargument (argument 5).

Studentereksamensopgaver
Ud af alle studentereksamensopgaverne i perioden 1953-60 inddrages virkeligheden i ét tilfælde, og det er i forbindelse med en opgave i rentesregning.

Kapitel 10 Sammenfatning på perioden 1935-60

Perioden 1935-60 er præget af diskussionen om de sproglige elevers udbytte af matematikundervisningen, hvilket er en fortsættelse af en diskussion fra perioden 1903-35. Der er samtidig et problem med, at eleverne svigter de sproglige linjer. Den anvendelsesorienterede matematikundervisning får i diskussionen skylden for denne svigtende interesse. Ved anordningen af 1935 fik anvendelser af matematik ellers en central placering.

Efter udvalgsbetænkningen om nedsættelse af pensa, hvor dét, der i virkeligheden er intentionen er at genoprette den nysproglige linjes status, bliver det vedtaget, at der fremover på denne linje skal fokuseres på de centrale fag på de sproglige linjer. Det inkluderer ikke matematikundervisning, hvorfor matematikundervisningen bliver fjernet fra de sproglige linjer. Det er starten til en anden diskussion omkring de sproglige elevers mangel på matematikkundskaber ved de videregående uddannelser. Det er særlig det medicinske fakultet, der klager over det, og der oprettes forberedende kurser ved fakultetet. Det bliver derfor besluttet at indføre matematikundervisningen for sproglige igen.

Generelt vokser samfundets interesse for anvendelser af matematik, da det i 50'erne konstateres, at naturvidenskabelige fag er med til at skabe vækst inden for teknologien og derfor også for samfundet. Der ønskes derfor flere, der vil interessere sig for matematik, hvilket skal fremmes ved at sætte anvendelser i fokus. Der opfordres til at samarbejde med fysik, og de to fag skal koordinere planlægningen af undervisningen.

I perioden 1935-60 er der eksempler på lærebogssystemer til den matematiske linje, som består af flere bøger om enkeltemner. Mens andre lærebogssystemer er bygget op som det blev påbegyndt i tiden 1903-35. Det vil sige en opbygning, hvor der er tænkt over, hvordan de matematiske emner skal introduceres i forhold til hinanden. Der er meget få anvendelser af matematik i disse lærebogssystemer. Bøger til de sproglige linjer fra før 1953 er revideringer af tidligere udsendte bøger og tilpasset anordningen af 1935.

Studentereksamensopgaver i tiden 1935-60 handler meget om analytisk geometri. Der er meget få anvendelser af matematik i disse opgaver. Det hænger sammen med, at det er i anordningen for de sproglige linjer, at anvendelser er i fokus, og der er kun skriftlig eksamen på den matematiske linje.

Ved analyse af de tre niveauer - hvad der skal inddrages af anvendelser i undervisningen, hvad der diskuteres omkring anvendelser af matematik og hvad der kan være foregået omkring anvendelser af matematik i undervisningen - kan det ses, at når det drejer sig om, hvad der står omkring anvendelser af matematik i anordningen af 1935, da er det igen ved funktionsbegrebet, at anvendelser af matematik skal indføres. Der foreslås, at der skal nye genstandsfelter ind i matematikundervisningen, hvilket drejer sig om historie og naturfag. Derudover skal der stadig arbejdes med rentesregning. Ved denne anordning skal der inddrages øvelseseksempler, der viser anvendelser af matematik. For den matematiske linje skal der inddrages genstandsfelterne fysik, astronomi, rentesregning og geografi. Når der tales om anvendelser af matematik er det oftest i betydningen, at et matematisk emne benyttes til andet matematisk emne.

Den diskussion, der føres omkring matematikundervisningen på de sproglige linjer, handler om, at der er for stor fokus på anvendelser af matematik. Nytteargumentet (argument 3) har ifølge nogle debattører fået for stor vægt og får skyld for at ødelægge elevernes motivation for at lære matematik. Når der tales om at inddrage anvendelser af matematik er det i relation til de matematiske emner logaritmeregning og potensbegreb. Der tales om, at undervisningen skal indeholde flere opgaver med mere stringens.

Lærebøgerne giver en idé om, hvad der kan være foregået i timerne. På sproglig linje er det ved det matematiske emne grafisk fremstilling, anvendelser inddrages. Det er genstandsfelterne rentesregning, og i relation til grafisk fremstilling er det f. eks. områder som feberkurver og kartoffelmelsproduktion, der indgår i bøgerne. I bøgerne forekommer anvendelser både i tekst og i opgaver ved de nævnte emner. Der er dog ikke noget oversættelsesjob i opgaverne. Ved at se på lærebøgerne afspejles opfattelser af anvendelser af matematik. Det er særlig opfattelsen, at anvendelser knytter sig til bestemte matematiske områder.

For den matematiske linje er det ved de matematiske områder grafisk fremstilling, funktion, kombination og sfærisk geometri, at anvendelser inddrages. Det er genstandsområderne rentesregning, fysik, astronomi og retoriske angivelser af virkeligheden. Sidstnævnte er i forbindelse med emnet kombinationer. Det samme er tilfældet i studentereksamensopgaverne, hvor virkeligheden også inddrages ved samme matematiske emne, kombinationer. Det er er en iscenesat virkelighed, som kun er med af pædagogiske årsager ud fra et argument om at motivere til indlæring (argument 5).

I 1953 vedtages en ny anordning for gymnasiet, hvor matematikken fjernes for de sproglige linjer. Men for den matematiske gælder, at der skal samarbejdes med fysik, og der skal tages hensyn til det under planlægningen af undervisningen. Der bliver ikke i anordningen nævnt anvendelser af matematik. Det kan derfor betyde, at der er en opfattelse af, at anvendelserne foregår i fysik. Der blev i anordningen af 1935 nævnt, at astronomi skal indgå, men det punkt er fjernet i denne bestemmelse.

I diskussionen i tiden 1953-60 bliver sandsynlighedsregning et matematisk emne, der knyttes til begrebet anvendelser. Der er blandt andet forsøg på matematisk linje med at indføre sandsynlighedsregning. Det viser sig, at argumentet for at gøre det skyldes et indlæringsargument (argument 5). Emnerne er blandt andet trafiktælling og Mendels love, som er autentiske anvendelser af matematik.

I lærebøgerne er det i relation til emnet kombinationer, at anvendelser inddrages. Der er et eksempel, hvor emnet kombinationer inddrager en autentisk problemstilling. I studentereksamensopgaverne er det kun ved emnet rentesregning, at der kan tales om anvendelser af matematik.

Ved anordningen af 1906 er det den matematiske teori, der vægtes højest, mens det i anordningen af 1935 er anvendelser af matematik, der står højere end den teoretiske indlæring. Der sker et skift i tiden efter 1935, hvor anvendelser af matematik får skylden for de sproglige elevers mangel på motivation for at lære matematik. Lærebøgerne henvendt til sproglige elever viser i deres indhold, at anordningens forskrifter er blevet fulgt. Der bliver i bøgerne arbejdet med rentesregning og funktionsbegrebet, som anordningen for de sproglige linjer foreskriver, at undervisningen skal indeholde. Diskussionen omkring de sproglige elever og anvendelser af matematik resulterer blandt andet i, at matematikken fjernes for i 1953, men derefter begynder debatten at omhandle anvendelser af matematik igen. Denne gang med det formål at forberede til medicinstudiet, hvor matematikken spiller en rolle.

Lærebøger henvendt til den matematiske linje fra perioden 1935-53 behandler anordningens intentioner om, at der skal undervises i rentesregning og relateres til fysik. Men det er først omkring midten af 50'erne, at diskussionen omkring anvendelser af matematik intensiveres. Det er på et tidspunkt, hvor matematik og fysik har del i teknologiudviklingen og den øgede vækst i samfundet. Før den tid er anvendelser af matematik ikke noget, der debatteres. Det samarbejde, der skal være mellem matematik og fysik i bekendtgørelsen fra 1953, afspejles ikke i lærebøgerne skrevet efter bekendtgørelsen. Det er kun i forbindelse med rentesregning og kombinationer, at virkeligheden inddrages. Dette er netop et udtryk for, at samarbejdet mellem de to fag ikke betyder, at der skal undervises i anvendelser af matematik inden for fysik. Studentereksamensopgaverne i perioden 1935-60 behandler kun anvendelser af matematik i forbindelse med rentesregning.

Generelt for tiden 1935-60 kan der på retorikplanet observeres en mere formaldannende tendens i argumentationen for matematikundervisningen for de sproglige linjer, modsat første periode, hvor der blev fokuseret på nytteværdien af matematik. Den samme tendens gør sig gældende for den matematiske linje, hvor der begynder at blive fokuseret på anvendelser, men det er for at motivere til at studere matematikken nærmere. Anvendelser af matematik er ikke et mål i sig selv. Det er de matematiske evner, der skal gøre nytte i bestræbelserne på øget vækst og teknologisk udvikling i samfundet.

Kapitel 11 Ministerielle bestemmelser 1960-88

11. 1 Den røde betænkning bliver til

Gymnasieskolen hvilede indtil 1958 stadig på Almenskoleloven af 1903. Loven fungerede i 50 år uden store forandringer for matematikundervisningen. En ny skolelov blev vedtaget 7. juni 1958 under forudsætning af, at læseplanerne for folkeskolen og gymnasiet vil blive revideret. Derfor nedsættes et fagudvalg 27. februar 1959 til at tage matematikundervisningen op til revision og forsøge at koordinere lovgivningen for folkeskolen og gymnasiet. Undervisningsinspektør Sigurd Højby[1] fremhæver, at den "betydelige pædagogiske, faglige og samfundsmæssige udvikling, som har fundet sted i den sidste menneskealder" er meget væsentlig.[2] Højby nævner, at man har været nødt til at styrke værdien af den sproglige studentereksamen, hvorfor matematik igen foreslås indført.[3] Fagudvalgets arbejde munder ud i en betænkning af 18. november 1960, kaldet "den røde betænkning" efter omslagets farve. Betænkningen handler ikke kun om det faglige indhold, men også om strukturændring i gymnasiets opbygning. Den klassisk-sproglige linje bliver nedlagt, og i stedet bliver der til den matematiske og sproglige linje tilknyttet forskellige faglige grene, som eleverne efter 1. g. skal vælge sig ind på.

Udvalget har til opgave:

"på grundlag af skolelovene af 7. juni 1958 at tage gymnasieskolens (herunder studenterkursernes) linie- og fagfordeling, indholdet og omfanget af undervisningen samt eksamensordningen op til kritisk gennemgang for derefter til undervisningsministeren at afgive en betænkning, som indeholder forslag om sådanne ændringer i liniedelingen, fagenes fordeling og timetal, undervisningens form og indhold og eksamensordning, som udvalget måtte anse for formålstjenlige for at gøre gymnasieundervisningen og studentereksamen tidssvarende, uden at dens kvalitet som grundlag for videregående studier forringes".[4]

I udvalget for matematik sidder følgende: professor dr. phil. Mogens Pihl (formand), adjunkt Hans Jørgen Helms[5] (Foreningen af Matematiklærere ved Gymnasieskoler og Seminarier), professor Henning Højgaard Jensen[6], lektor Henrik Meyer[7] (Foreningen af

[1] Sigurd Højby; f. 1902; cand. mag. i historie og dansk; rektor ved Sorø Akademi 1954; undervisningsinspektør 1958; undervisningsdirektør 1969.
[2] Det 18. Nordiske skolemøde 1961, s. 116
[3] Det 18. Nordiske skolemøde 1961, s. 117
[4] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 5
[5] Hans Jørgen Helms; f. 1931; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; adjunkt ved Rysensteen Gymnasium; assistent ved DTH 1956-58; medlem af styrelsen for Dansk Magisterforening 1956-61; afdelingschef for Division des Affaires Scientifiques NATO 1961
[6] Henning Højgaard Jensen; f. 1918; mag. scient. matematik, fysik, kemi og astronomi; universitetets guldmedalje 1945; professor i fysik ved DTH 1952; professor i fysik ved Københavns Universitet 1960
[7] Henrik Meyer; f. 1917; mag. scient. og cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; ansat ved Vordingborg Gymnasium 1941-43; ved Birkerød Statsskole siden 1943; fmd. for Matematiklærerforeningens styrelse 1957-66; censor ved Århus Universitet og Roskilde Universitetscenter; medlem af Georg Mohr Fondens bestyrelse; fagkonsulent 1971-78.

Matematiklærere ved Gymnasier og Seminarier), lektor Ole Rindung[8] (Undervisningsinspektionen) og professor dr. phil. Fr. Fabricius-Bjerre (medlem af underudvalget siden april 1960).

Udvalget har beskæftiget sig med perspektiverne for betænkningen, og forholdet mellem individ og samfund er et område, som fortjener opmærksomhed. "De enkelte skal have så meget kendskab til biologi, geografi, historie, økonomi, sociale forhold og samfundets funktioner, at de har forudsætninger for at tage stilling til offentlige anliggender og modstå propaganda ved at klargøre sig dens egentlige hensigter og sammenholde den med de faktiske forhold".[9] Af nye tiltag inden for undervisningsmetoder anbefales læreren at inddrage elevforedrag og gruppearbejde, laboratoriestudier, ligesom læreren skal søge at vække elevernes kritiske sans og give dem lejlighed til at diskutere.[10]

I forslag til timetal er matematik blevet tildelt 3 timer i 1. og 2. g på den sproglige linje, mens matematik på den matematiske linje udgør 5 timer i 1. g. og 6 timer i 2. og 3. g på den matematisk-fysiske gren, 4 timer i 2. g og 3 timer i 3. g på den matematisk-samfundsfaglige og matematisk-naturfaglige gren.

I kapitlet om læseplaner og eksamenskrav for matematik har udvalget følgende bemærkninger:

"Det er undervisningens formål på alle grene af denne linie både at give eleverne et fond af konkrete matematiske kundskaber, som kan være dem til nytte, og hvis anvendelse i og uden for matematikken de skal opøves i, og lade dem indleve sig i nogle karakteristiske sider af matematisk metode....De praktiske områder, hvor matematik finder anvendelse, er talrige og forskelligartede, og nye områder dukker stadig op. Der foreligger derfor mange forskellige muligheder for et praktisk anvendeligt udvalg af emner for gymnasiets matematikundervisning. Udvalget har udarbejdet sit forslag ud fra et ønske om at begrænse sig til nogle centrale emner."[11]

Ændringen i forhold til den gældende ordning består i, at der på den matematisk-fysiske linje er indført mængdelære, vektorer, analytisk rumgeometri og begreber fra algebra. Derudover er der indført et valgfrit emne. Emnerne sfærisk geometri, stereometri, keglesnitslære, konstruktionslære og logaritmiske trekantsberegninger er derfor bortfaldet. "Det skal endvidere nævnes, at nærværende forslag stærkere, end det tidligere er sket, betoner nødvendigheden af et samarbejde mellem matematikundervisningen og undervisningen i andre fag, især fysik og kemi". På den samfundsfaglige og naturfaglige matematiske linje er undervisningen koncentreret om funktionslæren, mens de geometriske emner p.g.a. det mindre timetal ikke er at finde på disse linjer. "Dette emnevalg er begrundet med et ønske om, at matematikundervisningen på disse grene skal

[8] Ole Rindung 1921-84; mag. scient. i matematik; universitetets guldmedalje i 1946; lektor på Virum Statsskole 1958; fagkonsulent 1958-65; medlem af opgavekommissionen 1960-67; faglig medhjælper under undervisningsinspektør Sigurd Højby; undervisningsinspektør 1965-66; rektor for Kildegaard Gymnasium 1966.
[9] Det nye Gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 17
[10] Det nye Gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 26
[11] Det nye Gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 45

omfatte et afsnit af matematikken, der fører frem til videregående resultater, og som samtidig spiller en fremtrædende rolle for anvendelserne".[12]

"På gymnasiets sproglige linje, hvor matematikundervisningen foreslås genindført, må faget i væsentlig grad indrettes som et hjælpefag. På den anden side mener udvalget det berettiget at fremhæve, at det også på den sproglige linie er vigtigt, at eleverne får et indtryk af matematisk metode."[13]

Med hensyn til skriftlig eksamen for de matematiske grene, da består opgavesættene nu af både obligatoriske opgaver og valget mellem to andre. Tidligere var alle obligatoriske. "Endelig foreslås det udtrykkelig udtalt, at der ved eksamen kan stilles opgaver, der vedrører matematikkens anvendelse på andre fagområder. Med en sådan bestemmelse mener man at fremme interessen for det islæt i undervisningen, der peger ud mod fagets anvendelser".[14]

I afsnittet "de nye undervisningsplaner og lærerne" gør udvalget opmærksom på nogle forhold, som gør, at der stilles store krav til læreren. Det drejer sig blandt andet om den herskende lærermangel, som medfører, store klassekvotienter, lokalemangel og stor undervisningsbyrde for læreren. Indførelsen af nye arbejdsformer betyder ligeledes, at læreren må tilrettelægge stoffet anderledes. Derudover ønsker udvalget, at faglærerne samarbejder om tilrettelæggelsen af undervisningen.[15]

Forslag til anordning om undervisningen på matematisk linje
I forslag til anordning for matematik på matematisk linje er formålet:

"at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber og tankegange, at vække deres sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform, at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet, at øve dem i behandlingen af konkrete problemer, herunder udførelse af numeriske beregninger, samt at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder".[16]

Til forskel fra den matematisk-fysiske gren skal eleverne på den samfundsmatematiske og den naturfaglige gren undervises i rentesregning. Eleverne på sproglig linje skal ligeledes undervises i rentesregning.

Hvad det nærmere indhold i emneområderne skal være er beskrevet i forslag til en ny bekendtgørelse for fagene. F.eks. under emnet "anvendelser af infinitesimalregning" ses det, at der her tænkes på undervisning i "bestemmelse af funktioners værdimængde og monotoniforhold... Bestemmelse af arealer og rumfang ved integration...Hastighedsvektor, fart, accelerationsvektor...Eksempler på simple

[12] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 46
[13] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 46
[14] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 47
[15] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 154-155
[16] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 58

differentialligninger. Eksempler på infinitesimalregningens anvendelse på numeriske opgaver samt opgaver hentet fra andre fagområder".[17]

Under de almindelige bemærkninger i betænkningen gøres opmærksom på, at "Der bør lejlighedsvis finde en behandling sted af opgaver og eksempler hentet fra andre fagområder (fysik, kemi, samfundsfag, biologi m.v.). Dette eksempelmateriale bør være varieret og illustrere anvendelser af de gennemgåede afsnit af matematikken i den udstrækning, det er muligt".[18]

I bemærkninger til de enkelte emner står der ved "anvendelser af infinitesimalregningen" skrevet: "Som eksempler på fysiske anvendelser af infinitesimalregningen kan blandt andet medtages simple beregninger af inertimomenter og simple tyngdepunktsbestemmelser."[19]

Det valgfri emne skal have et omfang svarende til 2 måneders arbejde. Emnet skal godkendes af undervisningsinspektøren. Som eksempler foreslår udvalget blandt andet : "Matematikkens historie, talteori, matricer og determinanter,... statistisk teori og så videre...Endelig kan det valgfri emne tilrettelægges i samarbejde med andre fag end fysik. Som eksempel herpå kan nævnes sandsynlighedsregning og arvelighedslære".[20]

For den samfundsmatematiske og naturfaglige gren gælder der med hensyn til anvendelser af matematik, at der under emnet "anvendelser af infinitesimalregning" skal gives "eksempler på infinitesimalregningens anvendelse på numeriske opgaver samt opgaver hentet fra andre fagområder". Der skal som tidligere nævnt arbejdes med rentesregning, og under emnet statistik skal der også hentes eksempler fra andre fagområder. Der opfordres til under de almindelige bemærkninger, at der lejlighedsvis bør finde en behandling sted af opgaver og eksempler hentet fra andre fagområder (fysik, kemi, samfundsfag, biologi m.v.). Disse materialer skal være varierede og illustrere den gennemgåede matematiks anvendelse, hvor det er muligt.[21]

I forslag til fordringer ved eksamen for matematik gælder det, at prøven er skriftlig og mundtlig for den matematiske linje, men ikke for den sproglige linje, hvor den kun er mundtlig. Til den skriftlige eksamen for matematisk-fysisk gren kan opgaverne "vælges fra alle dele af det læste stof undtagen fra det valgfri emne." For alle tre grene på den matematiske linje står, at "desuden bør der lejlighedsvis stilles opgaver, som giver anledning til at undersøge, om der er hvervet forståelse af matematikkens anvendelse inden for andre fagområder. I disse opgavers tekst skal de nødvendige ikke-matematiske forudsætninger nøje præciseres". Til den mundtlige prøve, da skal "indgå en væsentlig del af det valgfri emne".[22]

---

[17] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 89
[18] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 90
[19] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 93
[20] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 93
[21] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 94-95
[22] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 116

Forslag til anordning for matematik på sproglig linje
I forslag til anordning for matematik på sproglig linje er formålet:

"dels at give eleverne et indtryk af matematisk tankegang og metode, dels at give dem nogle matematiske hjælpemidler i hænde, som kan være til nytte inden for andre fag i skolen og under deres senere virke". Af anvendelsesrelaterede emneområder er rentesregning medtaget.[23]

For den sproglige linje skal der gennemgås rentesregning, som er et emne, der tager udgangspunkt i virkeligheden. Ved de almindelige bemærkninger pointeres, at der ikke skal være skriftligt arbejde for de sproglige, ligesom det anses for væsentligt, at "der i matematikundervisningen gives eksempler på matematikkens anvendelse inden for andre fag bl. a. bør en række eksempler hentet fra fysikken medtages. Behandlingen af fysiske eksempler må i fornødent omfang ledsages af en omtale af de fysiske begreber og love, der indgår i eksemplerne".[24] Det skal nævnes, at de sproglige ikke modtager undervisning i fysik.

Under betænkningens afsnit om forholdet til de højere læreanstalter, da kommenteres genindførelsen af matematik for sproglige elever. Manglen på matematikkundskaber har i den foregående periode givet problemer for de sproglige med at blive optaget på medicinstudiet og statskundskab uden at skulle aflægge en tillægsprøve. Udvalget har ikke kunnet tage hensyn til alle, idet der hele tiden vil være et spænd mellem de højere læreanstalters direkte ønske om gymnasiet som studieforberedende institution og den almene interesse i almendannelse. Der gør sig samtidig det forhold gældende, at gymnasiet er uden indflydelse på de forudsætninger, eleverne kommer i gymnasiet med, og må tage imod dem, hvor de står.[25]

11. 2 Bekendtgørelse af 6. september 1961 vedtages

Som et resultat af udvalgsarbejdet vedtager Folketinget i 1961 en ny bekendtgørelse[26] om undervisningen i gymnasiet. Hermed indføres det grenopdelte gymnasium, hvor der til hver linje er knyttet tre grene, som eleverne efter 1. g. vælger sig ind på. Der drejer sig om en nysproglig, samfunds-sproglig, klassisk-sproglig, matematisk-fysisk, samfunds-matematisk og matematisk-naturfaglig gren.

Matematikundervisningen består på den sproglige linje af 3 timer i 1. og 2. g.. På den matematiske linje starter de 3 grene med 5 timer i 1. g.. På den matematisk-fysiske gren undervises i 6 timer i 2. og 3. g.. På de matematisk-naturfaglige og den matematisk-samfundsfaglige grene undervises i henholdsvis 4 og 3 timer i 2. og 3. g.. De i betænkningen foreslåede emner for matematikundervisningen på sproglig og matematisk linje er blevet en realitet i bekendtgørelsen.[27]

---

[23] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 58-59
[24] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 98
[25] Det nye gymnasium, Betænkning nr. 269, s. 148
[26] Fra ministeriets side ophøres opdelingen i en anordning og en dertil hørende bekendtgørelse. Fremover er det under ét og hedder nu bekendtgørelse.
[27] Undervisningsministeriets bekendtgørelse af 6. september 1961 om undervisningen i gymnasiet

Bekendtgørelsen om "undervisningen i gymnasiet" og om "fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereksamen" er vedtaget med samme formulering for matematikfagets vedkommende, som beskrevet i den røde betænkning.[28]

Midlertidige ændringer af bekendtgørelsen

Erfaringer med arbejdet efter den nye bekendtgørelse viser, at der er for stort et pensum til at kunne nå det hele. Det resulterer i et cirkulære af 20. marts 1964 fra Direktoratet for gymnasieskolerne: "På baggrund af høstede erfaringer fra den forløbne del af indeværende skoleår skønner man det ønskeligt, at der indrømmes undervisningen i matematik på matematisk linje en vis lempelse i stofmængden inden for den overgangsperiode, hvori det nye pensum gennemarbejdes de første par gange. Man skal derfor meddele følgende tidsbegrænsede dispensationer fra bestemmelserne i undervisningsministeriets bekendtgørelse af 6. september 1961 og undervisningsinspektørens vejledende bestemmelser vedrørende undervisningen i gymnasiet af november 1961:

Matematisk-fysisk gren: Det i de vejledende bestemmelsers § 19 A. I. som nr. 10 på emnelisten opførte punkt: "Valgfrit emne" udgår.
Naturfaglig gren: Det i de vejledende bestemmelsers § 19 A. II. som nr. 7 på listen opførte punkt: "Rentesregning" udgår. Endvidere udgår følgende afsnit af emnelistens punkt 8: "Eksempler på klassificering af statistisk materiale. Tegning af frekvenspolygoner. Beregning af middelværdi og spredning"."[29]

En anden midlertidig ændring af bekendtgørelsen om undervisningen i gymnasiet kommer 5. juli 1968. Den medfører oprettelse af en musiksproglig gren og en ændring af normaltimeplanen. Hvor sproglig linje i bekendtgørelsen af 1961 skal have 3 timer i henholdsvis 1. og 2. g.. Da skal sproglige elever, der begynder i gymnasiet august 1968 kun have 2 timer i 1. g.. For den matematiske linje er der også sket nedskæringer. Alle tre grene har mistet en time i 2. g., så den matematisk-fysiske gren går fra 6 til 5 timer pr. uge, mens den samfundsfaglige og naturfaglige gren går ned fra 4 til 3 timer pr. uge. Samtidig stadfæstede denne bekendtgørelse ændringerne fra cirkulæret af 20. marts 1964.[30]

11. 3 Den lille gymnasiereform af 1971

10. juli 1970 bliver loven om gymnasieskoler fra 1958 revideret.[31] Som oftest benyttes denne lejlighed til samtidig at revidere bekendtgørelser inden for uddannelsessystemet. Det er i den forbindelse, at det bliver vedtaget, at realafdelingen i gymnasieskolerne kan afvikles[32], og at skoleugens længde skal nedsættes til 5 dage mod tidligere 6.

[28] Undervisningsministeriets bekendtgørelse nr. 293 af 6. september 1961
[29] Gymnasieskolen 1964, s. 383
[30] Lovtidende for kongeriget Danmark 1968, lov nr. 277
[31] Lovtidende for kongeriget Danmark 1970, lov nr. 328
[32] Lovtidende for kongeriget Danmark 1971, lov nr. 67

Bestemmelser for gymnasiet blev også ændret. Det resulterede i "Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet og om fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereksamen" af 16. juni 1971[33]. Hvad angår timeantal for faget matematik, da er der ikke sket ændringer i forhold til den midlertidige bekendtgørelse, det trådte i kraft august 1968.

Formålsparagraffen for matematik på den matematiske linje er ændret. Ved bekendtgørelsen af 1971 lyder det, at undervisningens formål er:

"at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber, tankegange og metoder,
at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegange og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder,
at opøve klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
at udvikle fantasi og opfindsomhed,
at give en forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder".

Hvor eleverne i bekendtgørelsen af 1961 skal gøres "fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder", da skal eleverne efter bekendtgørelsen af 1971 opnå en "forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder".

Undervisningen kan for den matematiske linje omfatte "problemstillinger fra økonomi, biologi, fysik, sociologi, teknik, databehandling, informationsteori, psykologi, sprog, kemi m.m.". Til forskel fra bekendtgørelsen af 1961 omkring den matematisk-fysiske gren er emnet rumgeometri fjernet. Og til forskel fra den midlertidige ændring af bekendtgørelsen, der trådte i kraft august 1968, er det valgfrie emne med igen. På den samfundsmatematiske og naturfaglige gren er emnet plangeometri kommet ind i bekendtgørelsen af 1971.

For den sproglige linje, da er formålet:

"Undervisningen har til formål at opøve eleverne i anvendelsen af matematisk tankegang, metode og viden til formulering, analyse og løsning af problemer på forskellige områder. Undervisningen skal endvidere give eleverne en elementær forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder".

Ved bekendtgørelsen af 1961 lød det blandt andet således:

"Formålet med undervisningen er...at give dem nogle matematiske hjælpemidler i hænde, som kan være dem til nytte inden for andre fag i skolen og under deres senere virke".

---

[33] Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet 16. juni 1971, nr. 322

Der er som for den matematiske linje sket en ændring i retning af en kritisk pædagogisk undervisning, hvor anvendelser af matematik spiller en betydende rolle.

På den sproglige linje erstatter emnet "almene begreber fra mængdelære" i denne bekendtgørelse emnet "funktionsbegrebet" fra bekendtgørelsen af 1961.

I den tilhørende undervisningsvejledning til bekendtgørelsen af 1971 står følgende om faget matematik for begge linjer: "Med hensyn til det faglige indhold må blandt andet følgende elementer tages i betragtning: ...Den måde hvorpå behandlingen af emnerne er påvirket af det samspil, der i undervisningssituationen findes mellem faget og fagets anvendelsessituationer...Behandlingen af eksempler på matematikkens anvendelse bør blandt andet give eleverne en forståelse af matematikkens betydning i samfundet og udvikle deres evne til kritisk at vurdere den måde, hvorpå matematikken anvendes...Behandlingen af eksempler fra fagområder, som ikke er eleverne bekendt, må i fornødent omfang ledsages af omtale af de begreber og sammenhænge, der indgår i eksemplerne".[34]

For den matematisk-fysiske gren, da er der i bemærkninger til emnelisten anført under emnet sandsynlighedsregning: "Arbejdet med dette område [sandsynlighedsregning] kan med rimelighed danne grundlag for en diskussion af begrebet "en matematisk model."[35] Og "Det valgfri emne kan endvidere vælges i samarbejde med et eller flere andre fag".[36]

For den naturfaglige og samfundsfaglige gren er der ikke nævnt noget om anvendelser af matematik. Der er ikke på disse grene et valgfrit emne som på den matematisk-fysiske gren. Men selv inden for samme emne "sandsynlighedsregning" tales der ikke om en matematisk model.

Men for den sproglige linje, da skal eleverne under sandsynlighedsregning komme ind på begrebet "endeligt sandsynlighedsfelt". "Der er således tale om en repræsentation af en simpel matematisk model og anvendelse af den udtryksmåde, der knytter sig hertil. De opgaver vedrørende sandsynligheders bestemmelse på kombinatorisk grundlag, der gennemarbejdes, bør dels pege mod praktiske anvendelsessituationer og dels ved at være af en sådan art, at de kan løses ved simple anvendelser at kombinatorikkens regler".[37]

Adgangsbegrænsning til de videregående uddannelser indføres
På grund af den øgede tilgang til gymnasiet op gennem 70'erne og den øgede tilgang til de videregående uddannelser, da indføres ved lov i 1977 adgangsbegrænsning til universitetet.[38] Der er indtil da fri adgang til universitetet, når blot eleverne havde bestået studentereksamen. I lang tid skulle studenterne bestå en tillægsprøve for at blive optaget på Den polytekniske Læreanstalt, Landbohøjskole og Danmarks farmaceutiske Højskole. På universiteterne indførtes først i 1977 adgangsregulering ud fra eksamenskvotienter.

[34] Vejledning og retningslinier for undervisningen i gymnasiet, s. 67-68
[35] Vejledning og retningslinier for undervisningen i gymnasiet, s. 69
[36] Vejledning og retningslinier for undervisningen i gymnasiet, s. 70
[37] Vejledning og retningslinier for undervisningen i gymnasiet, s. 72
[38] Bekendtgørelse om optagelse ved uddannelse...1977, nr. 190

11. 4 Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet af 25. maj 1984[39]

Ved bekendtgørelsen af 1984 indføres en musikfaglig gren på matematisk linje. Normaltimeplanen er den samme tor matematiks vedkommende som i 1971.

Bekendtgørelse for matematisk linje
Med hensyn til formålet med matematikundervisningen på matematisk linje er der ikke ændret ved den gældende fra 1971. Undervisningen har til formål:

"at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber, tankegange og metoder,
at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegange og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder,
at opøve klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
at udvikle fantasi og opfindsomhed,
at give en forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder."

På den matematiske linje er der i emnelisten for alle matematiske grene ikke ændret andet end, at der er tilføjet et emne "Brug af regnetekniske hjælpemidler". Lommeregneren har siden bekendtgørelsen af 1971 vundet indpas i undervisningen, hvor eleverne tidligere benyttede en regnestok.

Bekendtgørelse for sproglig linje
For den sproglige linje er det i bekendtgørelsen af 1984. "Formålet med undervisningen er, at eleverne hverver:

1. nogle matematiske kundskaber, som kan være dem til nytte i andre fag og i deres øvrige dagligdag,
2. kendskab til udformning og anvendelse af matematiske modeller, og
3. indtryk af matematisk metode og tankegang."

Det er første gang, at begrebet matematisk model dukker op i en bekendtgørelse, når det ikke er i relation til sandsynlighedsregning. Punkt 1 og 2 er nyt i forhold til formuleringen om anvendelser i bekendtgørelsen af 1971:

"Undervisningen har til formål at opøve eleverne i anvendelsen af matematisk tankegang, metode og viden til formulering, analyse og løsning af problemer på forskellige områder. Undervisningen skal endvidere give eleverne en elementær forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikkens anvendes inden for forskellige fagområder".

De sproglige elever skal undervises i følgende emner "tal og talbehandling", "deskriptiv statistik", "funktioner", "sandsynlighedsregning og kombinatorik", og derudover et supplerende matematisk emne. Her kan enten vælges differentialregning eller et eller to

[39] Bekendtgørelse om undervisningen m. v. i gymnasiet 1984, nr. 268

sammenhængende matematiske emner, hvor omfanget skal svare til ca. 35 undervisningstimer. Til forskel fra bekendtgørelsen af 1971, da er emnet "almene begreber fra mængdelære", teori omkring trigonometri og integraler er erstattet af emnet "deskriptiv statistik", "supplerende matematiske emner" og ligesom på matematisk linje "brug af regnetekniske midler".

11. 5 En ny gymnasiereform er på vej

I 1984 kommer Uffe Gravers Pedersen[40] med en rapport om den nye gymnasiereform, som Matematiklærerforeningens styrelse ikke har været med til at udarbejde. Han udtaler til Gymnasieskolen, at det nye forslag gør op med den socialdemokratiske idé om et fælles basisår for alle 1. g.'ere.[41] Ellers går han ikke i detaljer med de enkelte fag, men reformtankerne handler overordnet politisk mere om struktur end indhold. Ofte er det sådan, at indholdet ved en sådan lejlighed revideres.[42]

I et interview udtaler undervisningsminister Bertel Haarder[43] udtaler han: "Socialdemokratiets gymnasiepolitik af i dag begyndte med Højby-skitsen om 12 års uddannelse for alle. Og denne skitse afløstes af Ritt Bjerregaards U90. Gennem disse to oplæg går tendensen, der peger mod et altomfattende efg-system, med megen vægt lagt på basisuddannelsen. Og denne tankegang forkaster jeg i bund og grund".[44] "Jeg fremmer heller ikke den slags gymnasieforsøg, som socialdemokratiet fremmede". Her tænker han på forsøg på blandt andet Herlev Statsskole (se afsnit 12. 4). "Nu har vi i årevis dyrket det tværfaglige, som jeg personligt i bund og grund er skeptisk over for. Nu siger jeg: Det almene skal opnås gennem fordybelse". Og i forbindelse med naturfag, da ønsker Haarder ikke at udvide timetallet af naturvidenskabelige fag på den sproglige linje, men han ønsker gerne ændringer inden for samme timeblok. Desuden er Haarder imod, at pensum for de enkelte fag skal begrundes med at have samfundsrelevans.[45]

I det kommissorium, der skal udarbejde rammerne for faget matematik, sidder fagkonsulenterne Bent Hirsberg og Kirsten Hermann, Matematiklærerforeningens formand Torben Christoffersen[46], medlem af Matematiklærerforeningens styrelse Jens Ole Bach[47], professor fra DTH Vagn Lundsgaard Hansen[48], rektor fra Aarhus Statsgymnasium Ole Juhl[49] samt gymnasieelev Dorthe Nørgård fra Allerød Gymnasium. Udvalget har til opgave at udarbejde forslag til justering af faget matematik ved den

[40] Formand for undervisningsministeriets udvalg vedrørende en ny gymnasiereform; 1986 undervisningsdirektør for gymnasieskolerne.
[41] Gymnasieskolen 1984, s. 770-773. Det var daværende undervisningsminister, Dorte Bennedsens, idé for gymnasiet.
[42] Pers. med. Niss
[43] Bertel Haarder; f. 1944; undervisningsminister 1982-93.
[44] Gymnasieskolen 1984, s. 289
[45] Gymnasieskolen 1984, s. 290-291
[46] Torben Christoffersen; lektor i matematik og fysik ved Sorø Akademi; fagkonsulent 1992-.; fmd. for Matematiklærerforeningen
[47] Jens Ole Bach; lektor i matematik og fysik ved Herlev Gymnasium.
[48] Vagn Lundsgaard Hansen; ph. d. i matematik; lektor i matematik ved Københavns Universitet; professor i matematik på DTU.
[49] Ole Juhl; f. 1937; cand. mag. og mag. scient. i matematik, fysik, kemi og astronomi; adjunkt ved Århus Universitet 1964; fagkonsulent 1969-74; rektor for Århus Statsgymnasium.

kommende strukturelle ændring af gymnasiet. Det vil sige med matematik på obligatorisk niveau (1. og 2. g.) og højt niveau (3. g) på matematisk linje, mens matematikundervisningen på sproglig linje erstattes af naturfag. Både bekendtgørelse og undervisningsvejledning skal foreligge inden for henholdsvis to og syv måneder.[50]

Den 14. april sender arbejdsgruppen et udkast til undervisningsdirektør Uffe Gravers Pedersen. Der er imidlertid en række forhold, arbejdsgruppen må gøre opmærksom på. De er i kommissoriet kommet frem til,

"at de to beskrevne matematikniveauer ikke befinder sig på linje med eksisterende niveauer, og at aftagere af gymnasiets matematiske studenter, som udnytter den specifikke matematikkompetence må justere deres begynderundervisning...De ændrede elevforudsætninger i matematik ved indgangen til gymnasiet har nødvendiggjort, at der i bekendtgørelsesudkastet er medtaget stof, som tidligere hørte med til de grundlæggende kundskaber gymnasiets matematikundervisning kunne bygge på."[51]

I dette notat tager kommissoriet forbehold for niveauet i den nye reform. En konsekvens af niveaunedsættelsen bliver, at integralregning først introduceres i 3. g. på højt niveau, hvor der tidligere var relation mellem differential- og integralregning. Der vil derfor være elever, der ikke vil blive undervist i dette emne. Gruppen har prøvet at tage hensyn til de nødvendige matematikkundskaber for, at eleverne kan blive undervist på højeste niveau i fysik, kemi, samfundsfag og biologi. Gruppens arbejde mundede ud i et reformforslag for matematik i gymnasiet.

11. 6 Forslag til ny bekendtgørelse[52]

Forslag til bekendtgørelse for matematisk linje
Formålet med undervisningen er, at eleverne erhverver:

"-indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder,
-fortrolighed med matematik som beskrivelsesmiddel,
-forståelse af matematik som et middel til erkendelse."

På det obligatoriske niveau (1. og 2. g) består undervisningen af fem hovedemner og tre aspekter. Hovedemnerne er "tal", "geometri", "funktioner", "differentialregning" og "statistik og sandsynlighedsregning". Under behandlingen af differentialregning skal eleverne blandt andet opnå færdighed med "at anvende differentialregningens metoder og modeller". Der skal ved arbejdet med statistik opnås fortrolighed med "de sandsynlighedsteoretiske modeller binomialfordeling og normalfordeling samt praktiske anvendelser af disse".

De tre aspekter er det historiske aspekt, modelaspektet og matematikkens indre struktur:

[50] LMFK 1987 nr. 3, s. 6-7
[51] Et ikke offentliggjort brev til Uffe Gravers Pedersen.
[52] Dette notat er et ikke offentliggjort papir.

"i. Det historiske aspekt.
Eleverne skal opnå kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng.

ii. Modelaspektet.
Undervisningen skal give eleverne kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger samt sætte dem i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces.

iii. Matematikkens indre struktur.
Eleverne skal opnå forståelse af de for matematik karakteristiske tankegange og metoder og indsigt i, hvordan disse indgår i udvikling og strukturering af matematiske emneområder.

Behandlingen af aspekterne sker i forbindelse med behandlingen af de fem hovedemner og gennem særlige undervisningsforløb tilrettelagt med henblik på et eller flere af aspekterne. I disse forløb kan indgå såvel de obligatoriske emner som supplerende stof."

For matematik på højt niveau (3. g.) gælder, at undervisningen består af tre hovedemner, et valgfrit forløb og de tre aspekter. De tre hovedemner er "plan-og rumgeometri og vektorer", "integralregning og differentialligninger" og "et matematisk-datalogisk emne". Ved arbejdet med differentialligninger skal eleverne opnå færdighed i "at behandle problemer knyttet til differentialligninger som matematiske modeller". Det valgfri forløb skal være på mindst 25 timer.

De tre aspekter er formuleret på samme vis som for obligatorisk niveau. Behandlingen af aspekterne sker i forbindelse med hovedemnerne, det valgfrie forløb eller gennem særlige undervisningsforløb. Når man har haft særlige forløb med et eller flere aspekter på obligatorisk niveau, så er det ikke påkrævet at få flere af disse på højt niveau.

Undervisningsvejledning
I den tilhørende undervisningsvejledning[53] indledes med:

"Undervisningen sigter mod at eleverne erhverver et matematisk grundlag, der øger en alsidig omverdensforståelse og udbygger forudsætningerne for en meningsfuld og kvalificeret deltagelse i det moderne teknologiske samfund. For mange elever er gymnasiets matematikundervisning deres sidste egentlige uddannelse i matematik. Med samfundets anvendelse af matematik, ikke kun i teknik og produktion, men også som baggrund for prognoser, planlægning, beslutningstagen og styring, er det derfor af almen betydning, at eleverne på den ene side bliver i stand til hensigtsmæssigt selv at udnytte matematiske betragtningsmåder og på den anden side bliver i stand til at tage stilling til andres anvendelse deraf."

[53] Dette notat er et ikke offentliggjort papir.

Dette formål med undervisningen gælder både for obligatorisk niveau og højt niveau, idet de to niveauer er i naturlig forlængelse af hinanden.

Anvendelser i undervisningsvejledningen på matematisk linje
Behandlingen af modelaspektet foreslås at kunne tilrettelægges som et tema f. eks. "Matematiske Vækstmodeller", og bygge på kendskabet til eksponentialfunktioner, men det kan lige så vel foregå ved behandlingen af eksponentialfunktioner, så disse funktioners egenskaber blev en del af forløbet.

Med hensyn til undervisningsmaterialer, da er det meningen, at eleverne skal se forskellige typer materialer. "Endvidere skal eleverne stifte bekendtskab med tekster om matematik og/eller tekster, hvori anvendelser af matematik indgår." Eleverne skal prøve forskellige former for skriftligt arbejde . Arbejdet kan lægge op til diskussion og vurderende betragtninger. Der vil derfor være mulighed for at kombinere almindelig sprogbrug med matematikkens.

"Samarbejdsmulighederne kan udbygges, idet der i de eksperimentelle fag samt senere i geografi er mulighed for at inddrage matematiske modeller f. eks. i form af simulationsprogrammer i behandlingen af faglige områder i disse fag. Hermed kan elevernes opfattelse af matematik og dets relationer til de omtalte fag og deres arbejdsmetoder styrkes. Da eleverne i både 1. og 2. g. har faget fysik, er der her særlige muligheder for fagsamarbejde. Udover den gensidige metodiske og faglige støtte, er der også mulighed for tværfagligt samarbejde i forbindelse med behandlingen af f. eks. det historiske aspekt i matematik og dimensionen "fysikken i historisk og filosofisk belysning" i fysik eller modelaspektet i matematik og dimensionen "fysikkens verdensbillede".

Modelaspektet
Eleverne skal i simple situationer selv gennemføre en modelleringsproces. Der peger arbejdsgruppen på, at det kan være "simple optimeringssituationer, simple problemstillinger af geometrisk art, hvor den geometriske repræsentation ikke er givet på forhånd samt simple stokastiske eksperimenter". Der lægges op til en diskussion af modelleringsprocessen. Det kan dreje sig om problemer tilknyttet "hensigt med modeldannelse; udvælgelse af de dele af virkelighedsområdet, der skal indgå i modeldannelsen og idealiseringer heraf; matematisk repræsentation med eventuel efterfølgende simplificering og informationstab, verifikationsproblemer". Det foreslås at inddrage vækstmodeller, stokastiske modeller og simulationsprogrammer i arbejdet. Der kan også arbejdes med større dele af en autentisk model.

På det høje niveau kan det valgfrie forløb foregå på klassen, men også gruppearbejde kan inddrages. Det kan ligeledes ifølge arbejdsgruppen "tilgodese aspekterne" eller være "at eleverne sætter sig ind i en i praksis forekommende matematikanvendelse og de til denne knyttede problemstillinger, herunder at de stifter bekendtskab med dele af den til grund liggende matematiske teori. I arbejdet kan f. eks. også indgå tilvejebringelse og behandling af datamaterialer".

Der indføres en større skriftlig opgave, som kan tilgodese aspekterne med hensyn til valg af emneområde.

Forslag til bekendtgørelse for sproglig linje
De sproglige elever kan vælge matematik på mellemniveau. Undervisningen har til formål, "at eleverne tilegner sig

-nogle matematiske kundskaber som kan være dem til nytte i videre uddannelse
-indsigt i matematik som middel til beskrivelse og erkendelse
-indtryk af matematisk tankegang og metode."

Undervisningen omfatter tre hovedemner og et valgfrit forløb. Hovedemnerne er funktioner og optimering, bearbejdning og analyse af talmaterialer og geometri. Der arbejdes med alle tre emneområder, men de to skal gøres til genstand for en dybere behandling. Omfanget af det valgfrie forløb skal være på 20 timer.

Undervisningsvejledning for matematik på sproglig linje mellemniveau
For matematik på mellemniveau er der lagt op til en større valgfrihed end på matematisk linje. Der skal i tilrettelæggelsen tages hensyn til, at eleverne kan have forskellige faglige forudsætninger fra naturfag, hvor der er frihed i planlægningen af undervisningen. Naturfaget ligger i 1. og 2. g., og matematik på mellemniveau kan derefter vælges i 3. g.. Fra arbejdsgruppens side har man forsøgt at formulere beskrivelsen af de tre emner, så de indeholder træk fra de tre aspekter, der er på matematiske linje:

"1. Funktioner. Optimering.
Eleverne skal erhverve forståelse af funktionsbegrebet som et middel til at beskrive og analysere sammenhænge mellem variable størrelser samt kendskab til elementære funktioner og metoder til løsning af optimeringsproblemer.

2. Bearbejdning af talmateriale og analyse af talmaterialer.
Undervisningen skal videreudvikle elevernes færdigheder i at anvende statistiske beskrivelsesmidler og beregningsmæssige værktøjer, herunder edb, til analyse af talmaterialer. Endvidere skal eleverne opnå fortrolighed med begreber og metoder til matematisk beskrivelse af almindeligt forekommende økonomiske problemstillinger.

3. Geometri.
Undervisningen skal udbygge elevernes kendskab til grundlæggende geometriske begrebsdannelser med det hovedformål at øge elevernes indsigt i matematisk tankegang og metode, at give dem indsigt i nogle praktiske anvendelser af geometri eller at give dem indtryk af matematik i en historisk sammenhæng."

I behandlingen af emnet optimering, da skal diskuteres "modeldannelse, herunder variabeltilknytning, formulering af sammenhænge mellem variable i form af ligninger og uligheder, grafisk repræsentation og løsning af problemer ved grafiske eller simple numeriske metoder." Og ved behandlingen af økonomiske problemstillinger foreslås, at der i undervisningen inddrages autentisk materiale og virksomhedsbesøg.

11. 7 Bekendtgørelse om fagene m.v. i gymnasiet af 4. november 1987[54]

Efter endt udvalgsarbejde med formulering af en bekendtgørelse for matematik på sproglig og matematisk linje, da vedtages bekendtgørelsen. Formuleringen er, som den foreslåede af udvalget dog med nogle ændringer af formålet med matematikundervisningen i bekendtgørelsen, af formålet med undervisningen i undervisningsvejledningen og derudover er den skriftlige dimension for mellemniveau på sproglig linje styrket.

I undervisningsvejledningen præciseres yderligere de bagvedliggende begrundelser for bekendtgørelsens indhold. Matematikkens formål er begrundet ved:

"Undervisningen sigter mod, at eleverne erhverver et matematisk grundlag, der øger en alsidig omverdensforståelse og udbygger forudsætningerne for en meningsfuld og kvalificeret deltagelse i det moderne teknologiske samfund. For mange elever er gymnasiets matematikundervisning deres sidste egentlige uddannelse i matematik. Med samfundets stigende anvendelse af matematik, ikke kun i teknik og produktion, men også som baggrund for prognoser, planlægning, beslutningstagen og styring, er det derfor af almen betydning, at eleverne både bliver i stand til selv at udnytte matematiske betragningsmåder og til at vurdere anvendelser af matematik, som de møder i deres hverdag. <u>Undervisningen sigter tillige mod, at eleverne opnår det nødvendige faglige grundlag for at kunne gennemføre gymnasiets højeste niveau i matematik og videregående, matematikbaserede uddannelser. Arbejdet med matematiske begreber og ræsonnementer spiller derfor en central rolle i undervisningen</u>".[55]

Der er her sket en udvidelse af undervisningens sigte i forhold til arbejdsgruppens forslag. Der er kommet en studieforberedende begrundelse ind i formuleringen.

Bekendtgørelse for matematisk linje
For matematik på obligatorisk niveau er formålet med undervisningen,

"at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder, og at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder",

hvilket er en anden formulering end den af arbejdsgruppen foreslåede.

Det samme er tilfældet med matematik på højt niveau, hvor formålet for matematik har fået denne formulering:

"Formålet med undervisningen er, at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder, at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder, og at eleverne videreudvikler deres evne til selvstændigt at

[54] Bekendtgørelse om fagene m. v. i gymnasiet 4. november 1987, nr. 694
[55] Undervisningsvejledning for gymnasiet 1993, nr. 22

benytte matematiske begreber og metoder og bliver i stand til at sætte sig ind i, analysere og vurdere problemkredse, der kan formuleres og bearbejdes ved brug af matematiske begreber og metoder".

Bekendtgørelse for sproglig linje
Matematik for mellemniveau for den sproglige linje har formålet:

"at eleverne får indblik i matematiske tankegange og metoder, at eleverne opnår kendskab til matematik som middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder, og at eleverne tilegner sig færdighed i at anvende nogle elementære matematiske begreber og metoder til problemløsning".

Behandlingen af de tre emner skal være, som arbejdsgruppen foreslog. Men i den endelige bekendtgørelse lyder det derudover således:

"For at sikre eleverne tilstrækkelige færdigheder og udtryksmuligheder i arbejdet med matematiske problemstillinger indgår skriftligt arbejde som et led i undervisningen."

Forskel mellem bekendtgørelsen af 1984 og bekendtgørelse af 1987
Forskellen mellem de to bekendtgørelser for den matematiske linjes vedkommende i faget matematik er ikke kun i indholdet og formålet, men også i strukturen, herunder timetallet.

Struktur:
Der er sket en reduktion af timetallet for matematik, sådan at det ugentlige timetal nu bliver 5 timer i 1., 2., og 3. g.. Det maksimale timetal er på 15 timer, hvis eleven vælger matematik på højt niveau, og det mindste timetal er på 10 timer, hvis eleven stopper med matematikundervisningen efter det obligatoriske niveau. Tidligere var det maksimale timetal for den matematisk-fysiske gren på 16 timer, og det mindste timetal for den samfundsmatematiske, naturfaglige og musikfaglige gren på 11 timer. Med den nye struktur skal eleverne vælge valgfag, hvor man før valgte gren, og muligheden for at få matematik på højeste niveau er nu uafhængig af dette valg, hvad det ikke var tidligere.

På den sproglige linje er timetallet for matematik på mellemniveau 4 timer. Undervisningen er baseret på, at der i naturfag i 1. og 2. g. blandt andet bliver behandlet matematisk obligatoriske kernestofområder som sandsynlighedsregning, tal og vækst. Det er dog muligt for naturfagslæreren at vægte kernestofområderne forskelligt. Derfor kan der ske en opprioritering af matematik, men det modsatte kan også forekomme. Ved bekendtgørelsen af 1984 havde de sproglige elever samlet 5 timers ugentlig matematik på de første år. Nu vil der være elever, der ikke møder andet matematik, end dét naturfaget præsenterer.

Indhold:
Ser man samlet på matematikindholdet på obligatorisk niveau og højt niveau, da er emneområdene ikke ændret væsentligt. Emnet "Almene begreber fra mængdelære og algebra" er fjernet i forhold til den nye bekendtgørelse. Der er dog i nogle emneområder sket ændringer ved indholdet under emnerne. Det drejer sig blandt andet om emnet

"kombinatorik, sandsynlighedsregning og statistik", som er blevet til "Statistik og sandsynlighedsregning", og indholdet omkring kombinationer og permutationer er fjernet fra den tidligere bekendtgørelse i forhold til den nye. Hvor indholdet i 1984 i emnet "Hele, rationale og reelle tal" handlede om induktionsaksiomet, primtal, restklasser, øvre og nedre grænse og største fælles divisor, da handler emnet "Tal" i 1987 om hele, rationale og reelle tal samt regneregler for disse, regning med potenser og rødder, procent- og rentesregning. Rentesregningen er indført i matematikundervisningen igen, eftersom det ikke var en del af indholdet på hverken matematisk eller sproglig linje i bekendtgørelsen af 1984.

Det kunne se ud til, når man ser på indholdet i emnet "Tal", at dette kunne være et eksempel på, hvad arbejdsgruppen ser som nødvendige kundskaber fra folkeskolen, som man har været nødt til at gøre til en del af gymnasiepensum.

Til gengæld er emnet rumgeometri og vektorer i rummet en væsentlig del af 3. g.'s pensum. Dette emne var ikke med i bekendtgørelsen af 1984. Ligesom indførelsen af aspekterne og nye former for skriftligt arbejde har givet undervisningen nye dimensioner, som ikke var tilstede før. Der skal ligeledes forberedes undervisningsforløb, der tilgodeser aspekterne. Aspekterne skal styrke fagets mundtlige dimension i undervisningen.

For sproglig linje, da er emnet geometri indført i forhold til tidligere. Det var ikke med i bekendtgørelsen af 1984.

Formål:
Ved bekendtgørelsen af 1987 er formålet med matematikundervisningen på obligatorisk niveau på matematisk linje:

"at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder, og at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder".

For det høje niveau udvides ovenstående formål med:

"og at eleverne videreudvikler deres evne til selvstændigt at benytte matematiske begreber og metoder og bliver i stand til at sætte sig ind i, analysere og vurdere problemkredse, der kan formuleres og bearbejdes ved brug af matematiske begreber og metoder".

Ved den forrige bekendtgørelse af 1984 lyder det for matematisk linje, at formålet er:

"at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber, tankegange og metoder,
at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegange og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder,
at opøve klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
at udvikle fantasi og opfindsomhed,

at give en forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder."

Formålet med at opøve eleverne i klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform og udviklingen af fantasi og opfindsomhed er fjernet i forhold til bekendtgørelsen af 1987. Formålet med at gøre eleverne kritiske overfor måden, matematik anvendes på er også fjernet, men det er til gengæld en naturlig del af undervisning i modelaspektet. Læreren skal ved undervisning i emneområderne behandle de tre aspekter, men derudover skal der udarbejdes særlige forløb, hvor et eller flere af aspekterne behandles. Det behøver nødvendigvis ikke at være modelaspektet. Er det ikke det, skal det komme i forbindelse med undervisningen i emneområderne, hvor "elementer af modelopstilling og brug af matematiske modeller diskuteres".

For matematikundervisningen på den sproglige linje i bekendtgørelsen af 1984 lyder det:

"Formålet med undervisningen er, at eleverne hverver:
1. nogle matematiske kundskaber, som kan være dem til nytte i andre fag og i deres øvrige dagligdag,
2. kendskab til udformning og anvendelse af matematiske modeller, og
3. indtryk af matematisk metode og tankegang."

Ved bekendtgørelsen af 1987 har matematik for mellemniveau på den sproglige linje formålet:

"at eleverne får indblik i matematiske tankegange og metoder, at eleverne opnår kendskab til matematik som middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder, og at eleverne tilegner sig færdighed i at anvende nogle elementære matematiske begreber og metoder til problemløsning".

Ved bekendtgørelsen af 1987 skal eleverne i højere grad selv kunne bruge deres matematiske evner til problemløsning, hvor det tidligere var nok, at de havde kendskab til anvendelsen af matematik.

Kapitel 12 Anvendelser af matematik 1960-88

12. 1 Reaktioner på den nye bekendtgørelse

I Gymnasieskolen refereres en artikel af professor dr. phil Knud Togeby[1] fra Information, og han mener, at den nye gymnasiereform er blevet forbedret, idet matematikken for sproglige er vendt tilbage efter, at det i 1953 blev fjernet. Han kommer ind på forholdet mellem gymnasiets studieforberedende og almendannende funktion og konstaterer, at det ny gymnasium har bevæget sig i en retning af en mere almendannende skole.[2]

En anden holdning har adjunkt Leif Nedergaard-Hansen[3] i en artikel fra Aktuelt refereret i Gymnasieskolen. Han mener, at det ved den nye ordning er de eksakte fag på matematikerlinjen, der står stærkest. Selv folk uden for vil mene, "at der er sket en væsentlig forbedring inden for matematikken, når der nu skal lægges vægt på at vise dens anvendelsesmuligheder og iværksættes et samarbejde med fysik, ligesom der åbnes muligheder for selvstændigt emnevalg for specialet. For de sproglige genindføres den matematik der afskaffedes forrige gang, hvad der nok vil vække behersket glæde blandt de mange piger, der så gerne vil udfylde ventetiden mellem realeksamen og ægteskabs indgåelse med at lære lidt sprog".[4]

Anders Bager[5] har også givet sit besyv til debatten. Han er af den opfattelse, at den del af formålet for matematikundervisningen, der handler om, at gøre eleverne fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder, bliver tilgodeset i for høj grad.[6] "Det vil nok glæde både matematik- og fysiklærere, at analytisk rumgeometri og vektorregning med skalarprodukt i plan og rum nu medtages i pensum. Jeg ser også velvilligt på, at regnestok indføres (også til skr. eks.), medens brugen af tabellerede logaritmer indskrænkes. Dette er et skridt nærmere mod anvendelsernes praksis".[7] Derimod mener han, at der er kommet alt for meget analysestof ind i pensum, hvilket kun kan være for at lette fysikkens stofpres. "Matematikken på mf [matematisk-fysisk linje] må nødigt synke ned til kun at blive et hjælpefag for fysikken".[8]

Der er blevet skåret ned i pensum, og konsekvensen af disse nedskæringer er ifølge Bager, "at det bliver meget knapt med stof, som vil gøre det muligt at illustrere anvendelsen af koordinater, vektorer og differentialregning som bevismiddel overfor konkrete matematiske sætninger. Da man her nok i hovedsagen må holde sig til ligegyldige taleksempler, kan eleverne næppe undgå at få det forkerte indtryk, at disse metoder finder deres anvendelse uden for matematikken".[9]

---

[1] Knud Togeby; cand. mag. i fransk, dansk og gymnastik; universitetets guldmedalje i romansk filologi 1941
[2] Gymnasieskolen 1960, s. 133-135
[3] Leif Nedergaard-Hansen; f. 1914; cand. mag. i almindelig og sammenlignende litteraturhistorie.
[4] Gymnasieskolen 1961 s. 567-573
[5] Anders Bager; f. 1918; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Hjørring Gymnasium 1958; medlem af opgavekommissionen 1957-67; censor ved Århus Universitet 1961-67.
[6] Gymnasieskolen 1961, s. 214
[7] Gymnasieskolen 1961, s. 215
[8] Gymnasieskolen 1961, s. 215
[9] Gymnasieskolen 1961, s. 216

Jacob Jensen gør i Gymnasieskolen opmærksom på de erfaringer, han har gjort sig med at undervise 2 1. g. matematiske klasser efter lærebogssystemet af Kristensen og Rindung (se afsnit 13. 2). Det er hans erfaring, at 1.g.'s pensum er for omfangsrigt til at kunne gennemføres på 5 ugentlige timer. Det vil i stedet kræve 7 timer pr. uge.[10]

Undervisningsinspektør Sigurd Højby forstår, at der i starten vil være en indkøringsperiode, hvor det er svært at vurdere omfanget af lærebøgerne. De faglige medhjælpere og undervisningsinspektøren har netop holdt møde om tidspresset i 1.g. matematisk linje, så der er opmærksomhed på problemet.[11]

Ole Rindung, som på samme tid er fagkonsulent og lærebogsforfatter, griber selvfølgelig til modsvar, og gør opmærksom på, at der i vejledende bestemmelser for undervisningen kun er antydninger af, hvad der skal læses, og at det er lærerens opgave at tilrettelægge stoffet. Rindung ser dog forstående på, at det kan være svært at planlægge 3 års matematikundervisning, når hele lærebogssystemet ikke er skrevet færdigt endnu. Det er på vej til det.[12]

Men der er et problem med pensum. Lærerne H. Kjær[13], E. Thorsen[14], F. Jespersen[15] og Gyrithe Jensen[16] skriver ligeledes i Gymnasieskolen, at de har store problemer med at nå pensum i 1. g. De erklærer sig enige i problemet, Jakob Jensen rejser i debatten.: "Med det omfang, lærebøger har, er det umuligt at nå stoffet på forsvarlig måde" og "Det er uforsvarligt at lægge undervisningen om, så den antager en kursusform".[17]

Disse foreløbige erfaringer med den nye bekendtgørelse resulterede i nedskæringer i pensum.[18] (se kapitel 11)

---

[10] Gymnasieskolen 1964, s. 248-249
[11] Gymnasieskolen 1964, s. 304
[12] Gymnasieskolen 1964, s. 304-305
[13] Hans Kjær; f. 1902; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; adjunkt ved Odense Katedralskole; lektor ved Roskilde Katedralskole 1944.
[14] Ellen Thorsen har jeg ikke kunnet finde i diverse opslagsbøger, men hun er sandsynligvis fra Roskilde Katedralskole.
[15] Frans Djørup Jespersen; f. 1898; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; adjunkt ved Birkerød Statsskole 1924; adjunkt ved Rønne Statsskole 1925; adjunkt ved Roskilde Katedralskole 1935, lektor samme sted 1963-66.
[16] Gyrithe Jensen; f. 1908; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; adjunkt ved Roskilde Katedralskole 1947, lektor samme sted 1955.
[17] Gymnasieskolen 1964, s. 368
[18] Gymnasieskolen 1964, s. 383

12. 2 Nye vilkår for matematikken i gymnasiet

1960'erne var en tid præget af vækst. Velfærd for alle, lød det politiske motto og for at skabe lige muligheder for alle i samfundet, skal alle have lige muligheder for uddannelse. Det bliver betegnet som en uddannelseseksplosion. På mange niveauer og i alle retninger bliver der taget initiativer til fornyelse og udvikling.

I dagene 8.-11. august 1966 holdtes den 6. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi (LMFK) i Danmark. Kongressen havde deltagelse af undervisningsminister Knud Børge Andersen[19] og undervisningsdirektør Sigurd Højby. Andersen indledte mødet med at redegøre for nødvendigheden af uddannelsesreformer på grund af den hastige samfundsudvikling. Det samme sker for matematik, hvor ikke kun nye emner er indvundet, men også de gamle discipliner bliver sat i andre sammenhænge og set i et nyt lys.[20]

Højby følger op og taler også om det nødvendige i reformer inden for de naturvidenskabelige fag, herunder matematik. Han mener, at der i de seneste år er blevet fokuseret for meget på specialistviden inden for de naturvidenskabelige fag. De er de sproglig-humanistisk fag, der sørger for det almen-kulturelle hensyn. "Hvis et fag opleves som noget isoleret, er det et udtryk for, at specialiseringen er drevet for vidt...Alle er enige om betydningen af fagenes samarbejde, men desværre oplever også alle, hvor store anstrengelser det koster at få dette samarbejde etableret på effektiv måde, og hvor ofte den enkelte faglærer vælger isolationens bekvemme vej...Det er derfor naturligt for mig ved denne lejlighed at appellere til Dem om en konstruktiv indsats for koordination og for øget forståelse for andre fags behov og vilkår".[21]

Det er på den baggrund, at undervisningsminister Ritt Bjerregaard[22] i 1975 beder Det centrale Uddannelsesråd (CUR) om en større redegørelse for den samlede danske uddannelsespolitik for de næste 15 år. Redegørelsen har til hensigt at vurdere, hvilke uddannelser, der vil blive brug for i 80'erne og 90'erne. I CUR sad folk af forskellig politisk opfattelse og repræsentanter fra de største interesseorganisationer. Rapporten kaldes U90. Den handler om den formaliserede del af uddannelsesvæsenet, men i virkeligheden mener CUR, at vi i lige så høj grad uddanner os til fritidsliv, arbejdsliv, familieliv og samfundsliv blot uformelt.[23]

Der er inden for de sidste år gennemført visse reformer, som er med til at fremme, at flere får en uddannelse. Det drejer sig ifølge CUR blandt andet om "gennemførelse af gratisprincippet på offentlige uddannelsesinstitutioner", "uddannelsesstøtte", "støtte til kollegiebyggeri", "studenter- og elevindflydelse i styringen", som de væsentligste fremskridt.[24]

[19] Knud Børge Andersen (soc. dem.); f. 1914; undervisningsminister 1964-68.
[20] LMFK: 6. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi, s. 13-15
[21] LMFK: 6. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi, s. 16-18
[22] Ritt Bjerregaard (soc. dem.); f. 1941; undervisningsminister 1973 og 1975-78.
[23] Det centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne bd. 1, s. 5-15
[24] Det centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne bd. 1, s. 17

U90 anslår, at fra 1950-1975 er antallet af eleverne i gymnasiet og hf[25] vokset til det 7-dobbelte. Det skyldes ifølge CUR 60'ernes velfærdsstigning og en overbevisning om uddannelse som forudsætning for fremskridt.[26] Der er i de sidste par år bygget flere gymnasier til de mange elever, og de er placeret i geografiske knudepunkter. Der er i 1975 112 gymnasieskoler.[27] Der er ligeledes kommet nye pædagogiske metoder til: gruppe- og projektarbejde, deltagerstyring m.m.[28] U90' s bud på de kvalifikationer, der skal vægtes højt i det kommende uddannelsessystem, er blandt andet dygtiggørelse og evnen at kunne forholde sig kritisk.

På grund af den hastige uddannelseseksplosion oprettede staten mange videregående uddannelsesinstitutioner. Odense Universitet, Danmarks tekniske Højskole, Københavns Universitets afdeling på Amager, Roskilde Universitetscenter og Ålborg Universitetscenter var nogle af de største byggerier i perioden 1960-76.[29] Tilgangen til de videregående uddannelser blev i samme periode fordoblet fra 10.000 til 20.000.

Denne udvikling i uddannelsessystemet medfører, at der skal lægges vægt på andre værdier, når så mange mennesker videreuddanner sig. Det samme gør sig gældende for gymnasiet, hvad angår indholdet i undervisningen og i forhold til gymnasielæreruddannelsen.

I forbindelse med opbyggelsen af matematikuddannelsen på Roskilde Universitetscenter, har Mogens Niss skrevet om krisen inden for matematikundervisningen, og hvilke krav det stiller til uddannelsen af lærere til gymnasiet. Han var på dette tidspunkt formand for et af undervisningsministeriet nedsat udvalg, der skulle resultere i indstillinger omkring matematikundervisningen og gymnasielæreruddannelse i matematik til undervisningsministeriet.

At matematikken er inde i en krise, skyldes ifølge Niss blandt andet, at den eksisterende matematikundervisning er præget af et veldefineret pensum, som elever ikke har indflydelse på, og undervisningen består af nogle emner med stringente definitioner og symboler.

"One of the striking points in this instruction is that reality - represented by examples- serves to illustrate mathematics, at the most to demonstrate its power to assist in handling certain problems from physics...The examples serves, whether they are constructed, academic examples with only a thin "varnish of reality", or more realistic but simplified ones, to motivate and facilitate the learning. Only seldom have they an interest in their own right".[30]

[25] Loven om Højere Forberedelseseksamen blev vedtaget i 1966.
[26] Det centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne bd. 1, s. 22
[27] Det centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne bd. 1, s. 41
[28] Det centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne bd. 1, s. 78-79
[29] Det centrale Uddannelsesråd: U90 - samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne bd. 1, s. 43
[30] Niss, M.: The "crisis" in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level, s. 305

Nogle elever har det fint med matematikundervisningen, som den er, og arbejder gerne efter dens normer. Men for en stor del er det et problem, at matematikken for dem ingen relevans har:

"It is possible that mathematics instruction is not being given for its own sake, but it appears as if it were. Reality serves til illustrate mathematics, not conversely".

Disse problemer kalder Niss, at matematikken er i en relevanskrise. "Mathematics must leave its introvert inbreeding and actively demonstrate its relevance to essential problems from the non-mathematical sphere".[31]

Matematikundervisningen har mange funktioner, hvoraf særlig to formål er vigtige.
Det ene er et studieforberedende formål, og det andet er som et middel til intellektuel skoling. Den skal samtidig følge med udviklingen i samfundet, hvor studenternes valg af videregående uddannelser siden 60'erne er blevet meget bredt. Derudover er studenter efter studenteroprøret blevet mere kritiske og kræver relevans med undervisningen. De, der anvender matematik, er ikke længere kun ingeniører og fysikere, men også inden for andre fag spiller anvendelser af matematik en stadig større rolle.[32]

Ved en konference i Hurdal i Norge, marts 1978, kom Niss med yderligere årsager til matematikkens krise.

Han fremhæver 3 årsager til det:

Årsag1. At der generelt i samfundet sker en "voksende matematifisering", og dette har to større konsekvenser: a. at behovsspektret hos den voksende skare af aftagere af matematiske kvalifikationer er blevet meget bredere b. at dette behovsmønster ændrer sig meget hurtigt.

Årsag 2. Rekrutteringsgrundlaget er forandret, og gymnasieskolen har forandret sig fra at være en eliteuddannelse til en masseuddannelse.

Årsag 3. Siden ungdomsoprøret har ungdommen forandret sig til at være kritisk og er ikke autoritetstro.

Krisen fremtræder ifølge Niss ligeledes på 3 måder:

1. som en relevanskrise: Eleverne har svært ved at se nytten ved matematik, med mindre de spiller med på spillereglerne. Dette er fremkommet ved årsag 1 og årsag 3.

2. som en anvendelighedskrise: Eleverne oplever, at faget matematik ikke kan hjælpe dem i de situationer, hvor det er oplagt i deres videre liv. "...Dels består enhver ikke-triviel anvendelse af matematikken i ikke-matematiske sammenhænge i dannelsen og bearbejdningen af en matematisk model, dvs. fænomener, der er givet i ikke-matematiske

[31] Niss, M.: The "crisis" in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level, s. 305-306
[32] Niss, M.: The "crisis" in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level, s. 306-307

kategorier, udvælges, repræsenteres og oversættes til matematiske begreber og udtryk som behandles med matematiske metoder. Denne modelbygningsproces indtager i de fleste eksisterende matematikundervisningsprogrammer på gymnasialt niveau en meget beskeden plads, og i det omfang den faktisk forekommer, er den næsten altid knyttet til modeller i fysik. Desuden lægges der højst vægt på behandling inden for modellen, kun yderst sjældent på opstillingen af den".[33]

3. som en sværhedskrise: Faget matematik opfattes som svært, hvilket også skyldes årsag 2.[34]

Derfor må der en anden form for matematikundervisning til og en anden type gymnasielærer må uddannes. Det kan være problemorienteret matematikundervisning. Denne form for undervisning har Niss erfaringer med fra matematikuddannelsen på Roskilde Universitetscenter. Det problemorienterede projektarbejde, kan ifølge Niss slå bro mellem , at "matematikkens magtfuldhed følger af en dialektisk symbiose mellem på den ene side: abstrakte, formelle strukturer, reguleret af aksiomatisk-deduktive ræsonnementer, og på den anden side: empirisk givne relationer og hypoteser om konkrete, komplekse problemstillinger fra den "virkelige" verden".[35]

12. 3 Den 10. nordiske kongres 1978

Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi blev afholdt i perioden 29. juli- 1. august 1978.[36] Her bliver problemerne med matematikkens krise taget op til diskussion.

Kongressen åbnes af undervisningsminister Ritt Bjerregaard med en tale om, at netop matematik, fysik og kemi er fag, der er inde i en meget spændende udvikling. Hun taler om, at unge på det tidspunkt ikke mere vælger de traditionelle veldefinerede uddannelser, men i højere grad vælger andre erhvervsmuligheder. "Den kritiske holdning til fremskridtstroen, denne voksende bevidsthed om ressourcernes begrænsning, betyder ikke, at ønskerne til de naturvidenskabelige fag bliver mindre eller lettere at opfylde. Det betyder ej heller, at den formidling, som lærerne skal udføre, har fået lettere vilkår. Man kan se tilbage på den optimistiske tid, der ikke ligger ret langt tilbage, hvor lærere i kemi og fysik så det som deres opgave at kunne beskrive naturens undere og forklare mennesket betagende kontrol over dem, og hvor matematiklærere undertiden færdedes i så ren og høj luft, at man kunne tro, at tyngdeloven ikke gjaldt for dem. Derefter kan man sammenligne den tids krav med opgaven i dag med at give kvikke, spørgelystne og skeptiske unge svar på, hvordan fremtiden kan styres, og hvordan vi kan søge at mildne følgerne af vor egen fremstormen mod materiel sikkerhed".[37]

[33] Niss, M.: Problemorienteret projektarbejde, s. 3-6
[34] Niss, M.: Problemorienteret projektarbejde, s. 3-6
[35] Niss, M.: Problemorienteret projektarbejde, s. 5
[36] Siden 1951 har der hvert 3. år været holdt LMFK-kongres på skift mellem de nordiske lande.
[37] Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 1978, s. 13-15

Jonas Lichtenberg[38] fra Den rejsende Højskole, Tvind, taler ligeledes på denne kongres i 1978. Han kommer blandt andet ind på, hvorfor den ny matematik i det hele taget kom. Han nævner den almindelige opfattelse, at det skyldes en Sputnik-effekt i den vestlige verden. Da der var økonomisk højkonjuktur, da kunne matematikerne forske uden at tænke på anvendelser deraf. Ligesom mængdelæren var et produkt af 60'erne, da mener Lichtenberg at 70'erne har deres karakteristika. Nu er det anvendelserne af matematik, der er i forgrunden. "Anvendelserne har jo altid været høfligt omtalt. Men der blev ikke gjort noget synderligt ved dem. Anderledes er det i 70-erne...At anvendelserne er kommet i forgrunden, gælder naturligvis ikke bare Danmark".[39]

På samme kongres har en af de nedsatte arbejdsgrupper til opgave at se på anvendelse af matematik inden for andre fag. Fra Danmark deltager Ib Lunau[40] og Leif Andersen[41]. Gruppen taler om, at det ofte er matematik, der bliver sorteper i de tværfaglige forsøg med andre fag. Der er enighed om, at det ikke er en god ide at lade de andre fag tage sig af anvendelser af matematik. Svein Arneson fra Norge siger til dét, at der i samfundet er en tendens til at matematisere andre fagområder, men den modsatte tendens ses i skolen, hvor matematikpensum reduceres samtidig med, at også mængden af matematik i andre fag bliver mindre". Som en løsning på det forslår han, at "eleven må indlære matematikken i den sammenhæng, hvor den finder anvendelse...Den matematik, som naturligt hører til i andre fag, kan lige så godt læres i disse fag, og den senere viderebehandling skal gå på tværs af de traditionelle faggrænser...Centralt i denne diskussion må være brugsværdien af det matematiske emneområde".[42]

Generelt mener arbejdsgruppen, at der er mangel på vejledning til lærere i f. eks. fysik, biologi og geografi med hensyn til at inddrage matematik. Af arbejdsmetoder mener gruppen, at parallellæsning er bedst, hvis begge lærere har eleverne i flere fag. Der er enighed om, at for store tværfaglige projekter vil være uoverskuelige for eleverne. Arbejdsgruppen er enige med Svein Arneson i, at emnernes brugsværdi skal prioriteres højt. Men fagets natur skal samtidig vægtes højt. "Det er vigtigt, at de anvendelser, der tages op, er så realistiske som muligt og <u>ikke nødvendigvis</u> presses ind før indførelsen af nye emner".[43]

En anden gruppe skal arbejde med matematikkens relevansproblem. I den diskussion kommer anvendelser af matematik også til at spille en rolle. Fra Danmark deltager Allan Tarp[44] og Mogens Niss. Allan Tarp indleder med at fortælle om, modelmatematikkens opståen i begyndelsen af 70'erne. Det er tænkt til at skulle bringe virkeligheden og faget matematik tættere sammen. Men det er faktisk matematikken, der styrer virkeligheden og ikke omvendt. Mogens Niss kommer med nogle teser om undervisningen i matematik:

---

[38] Jonas Lichtenberg; f. 1930; mag. scient. i fysik 1955; adjunkt ved Holte Gymnasium 1957; afdelingsleder ved DHL 1961; lærer på Den farmaceutiske Højskole 1959-63; lektor ved DHL 1962; senere lærer Det nødvendige Seminarium inden for Tvind.
[39] Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 1978, s. 53-54
[40] Ib Lunau; f. 1928; cand. mag. i naturhistorie, geografi og anatomi; ansat ved Københavns Universitet 1957-61.
[41] Leif Andersen; f. 1941; matematik og fysiklærer ved Herlev Gymnasium; fmd. for Matematiklærerforeningen for gymnasiet.
[42] Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 1978, s. 344-345
[43] Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 1978, s. 347
[44] Allan Tarp; f. 1945; matematik og fysik ved Grenå Gymnasium og hf-kursus.

"Den eksisterende gymnasiale matematik har ingen seriøse anvendelser; dvs. den sætter ikke eleverne i stand til at forstå eller handle over for problemer, som de ellers ikke kunne forstå eller handle over for...Pensum i sædvanlig forstand er så omfangsrigt, at der ikke er tid til ordentlig behandling af forholdet mellem matematik og virkelighed".[45]

Poul O. Andersen advarer mod at gøre matematikken for relevant, "man skal passe på ikke at binde faget alt for stærkt til virkeligheden, så eventuelle antipatier mod virkelighedsområdet smitter af på matematikken. I det hele taget er virkeligheden et subjektivt begreb".[46] Dernæst følger en diskussion om, hvad folk opfatter som virkelighed, og om lærere og fiskere har forskellig virkelighedsopfattelse.

I de afsluttende bemærkninger kommer forskellige holdninger frem angående faget matematik og anvendeligheden deraf: "Glæden ved en aktivitet er jo noget, der kendetegner en hobby, f.eks. skak. Grunden til, at matematik er i skolen, er ikke, at det er en dejlig hobby. Det er en ydre årsag, og denne skal eleverne kunne se", "Det må være de andre fags opgave at vise eleverne betydningen af det værktøj, vi giver dem", "Bortset fra fysik og kemi har andre faglærere ofte svært ved at anvende matematikken og gøre dette korrekt. En løsning er tværfagligt samarbejde, men her kommer igen problemet med den stramme tidsplan".[47]

12. 4 Forsøg med tværfaglighed i matematikundervisningen

Årsagerne til matematikkens krise, som Niss fremhæver, er ligeledes årsag til behovet for nytænkning i gymnasiet. Derfor får Herlev Statsskole og Avedøre Gymnasium status som statens forsøgsgymnasier. På Herlev Statsskole drejer det sig om forsøg med indholdet i undervisningen, mens det på Avedøre Gymnasium drejede sig om forsøg med arbejdsformer. Der er så mulighed for forskellige lærere at få et ophold på disse gymnasier for en periode udover de fasttilknyttede lærere. Generelt for tiden er det, at der er mange gymnasier, hvor der foregår forsøg. På grund af gymnasiets grenstruktur var det oplagt at få et samarbejde til at fungere.[48]

I 1978/79 har Mette Mortensen, Poul Printz[49] og Jette Reich fra Herlev Statsskole udført et matematikforsøg på sproglig linje. Forsøget drejer sig om 1) ændret pensum 2) skriftlig eksamen med lokalt stillede opgaver for gymnasiets sproglige linje. Formålet er: "1) at indhente erfaringer med et matematikpensum, der i højere grad søger at fremme elevernes forståelse for matematiks anvendelsesmuligheder 2) at indhente erfaringer med en skriftlig eksamensform med elever, der ikke regelmæssigt afleverer skriftlige opgaver".[50]

[45] Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 1978, s. 350
[46] Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 1978, s. 352
[47] Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 1978, s. 354-355
[48] Pers. med. Niss.
[49] Poul Printz; f. 1931; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Danmarks Ingeniørakademi 1958; lærer ved Virum Statsskole; senere ved Herlev Statsskole.
[50] LMFK 1980 nr. 2, s. 7

Matematikundervisningen på den sproglige linje koncentreres til 1. g.. Det betyder, at læseplanen må indeholde stof, der kan anvendes. Det mener de 3 lærere kan lade sig gøre inden for de rammer, der tænkes at skulle være indholdet i en ny bekendtgørelse, som det faglige udvalg i matematik har fremsat. Det forslag giver plads til at inddrage eksempler fra fag, som eleverne får senere på grenholdene. Et af formålene med undervisning i matematik for sproglige er at træne eleverne i at "bruge matematikkens redskaber til kritisk at vurdere tekster og påstande med matematisk indhold".[51]

Selve det matematiske indhold var deskriptiv statistik, som valgtes ud fra, hvad eleverne blev undervist i i andre fag. Eleverne kørte allerede på tværs af fagene da/ty/hi/eng/fr/fo et projekt om levevilkår i tiden 1930-1970. I projektet skulle eleverne selv fremskaffe historisk materiale om dette emne. Også interviews blandt kvarterer i København var en del af det. Den deskriptive statistiks beskrivelsesteknik skulle kombineres med oplysninger af statistisk art og kritiske vurderinger om oplysningernes art var obligatorisk.

Ved evalueringen af forløbet vurderer Reich og Mortensen, at forsøget med at gøre den sproglige linjes matematik til et redskabsfag mislykkedes. "selv om der til opgaver...bliver brugt eksempler fra andre fag f.eks. geografi, fysik, samfundsfag og biologi bliver elevernes transfer muligheder ikke væsentligt forøget. Det er tydeligt, at eleverne ved tekstopgaverne meget hurtigt bliver forvirrede af teksten og har svært ved at finde de bagvedliggende matematiske problemstillinger, og de er trygge og glade for små *rene* opgaver, der nærmest kommer til at virke som regnestykker". Lærernes erfaringer siger dem, at det ikke kan lade sig gøre at opøve et redskab, uden at det sker integreret med et for eleverne formålstjenstligt brug. "I praksis må det medføre, at undervisningen i matematik skal knyttes til andre fag i længere forløb, og i et udviklingsarbejde må bestå i opbygning af en række forløb dækkende matematik plus geografi/biologi/samfundsfag/historie/dansk".[52] Intentionerne er at øve elevernes brug af det matematiske begrebsapparat på andre fagområder og i brug af matematikkens redskaber i kritisk vurdering af tekster og påstande med matematisk indhold. Forsøget viste, "at det med den krævende stofmængde og elevernes udgangsniveau ikke var muligt for eleverne at få den overlegenhed over for matematikkens redskaber så disse kunne bruges i nye sammenhænge". Opgaverne til den skriftlige eksamen i forbindelse med forsøget blev da nødt til at være typeopgaver.[53]

Eksaminationsformen var en skriftlig eksamen. Derfor har man ikke øvet elevernes mundtlige præstation ved tavlen, men koncentreret sig om det skriftlige arbejde. En stringent matematiske formulering så man ikke strengt på. Når de sproglige elever ikke har tid afsat til at aflevere skriftlige opgaver, da er det nødvendigt at slække på kravene til formuleringen.

Poul Printz har en kommentar til forsøget. Han ser to aspekter ved det. Det ene er, at den skriftlige eksamensform for de sproglige elever giver den mest retfærdige bedømmelse af indsigt og viden om matematik. "Desuden vil den skriftlige prøveform

[51] LMFK 1980 nr. 2, s. 7
[52] LMFK 1980 nr. 2, s. 12
[53] LMFK 1980 nr. 2, s. 12

tillade, at hovedvægten i årets arbejde lægges på matematikkens anvendelsessider med en induktiv indgang til problemerne og hovedvægt på problemanalyse, problemformulering og problemløsning".[54] Det andet er ikke særlig godt. "Overførselsværdien af matematiske metoder anvendt på bestemte problemstillinger, der ofte er yderst abstrakte, er ringe, og den abstraktionsproces, der er nødvendig for at bringe matematiske metoder i anvendelse på praktiske problemer opleves af eleverne som langt vanskeligere end matematikken selv...og der er derfor grund til at sætte spørgsmålstegn ved, om eleverne har noget reelt udbytte af den nuværende matematikundervisning".[55]

Et andet tværfagligt forsøg fandt sted på Herlev statsskole, og det var mellem fagene fransk og matematik i en matematisk 1.g.. Lærerne var Jette Reich og Børge Spang-Thomsen. Forsøget har for faget matematik følgende formål: "at åbne faget ud mod andre fag, at vise eleverne matematikkens internationale sprog og at gøre det lettere for eleverne senere at læse matematik på fremmedsprog". [56] Forsøget strakte sig over 13 timer. Klassen læste kapitel 1 i Papy's "Mathématique Moderne" og løste opgaver dertil. Bogen var beregnet til 12-13 årige elever. Eleverne mente, at forsøget var spændende. Men lærernes konklusion var, at det faglige niveau var dog for begge fag lavere end dét, eleverne ellers arbejdede med.

Lars Færch Knudsen og Elisabeth Rischel også fra Herlev Statsskole har ligeledes gennemført et tværfagligt forløb mellem matematik og dansk. Det varede i alt 15 timer og var med en matematisk 1. g. klasse. "Formålet med projektet var, at faget dansk skulle få forøgede muligheder for at foretage en medieundersøgelse mere kvalificeret statistisk, og at matematik skulle få eksempler fra hverdagen til at indgå i undervisningen. Som helhed havde projektet også det formål at øge elevernes (kritiske) bevidsthed om ugeblade og reklamer og om anvendelse af matematik. Eleverne skulle altså dels anvende matematik, dels vurdere anvendelse af matematik (jvf. bekendtgørelsens formålsparagraf), mens det faglige indhold, set i relation til danskbekendtgørelsen, blandt andet var beskæftigelse med triviallitteratur/ikke-fiktive tekster."[57] Det matematiske arbejde i forløbet drejede sig om, at eleverne skulle behandle materiale fra Dansk Media Index, som udgiver oplysninger om brugerne af media i Danmark. Til det var knyttet et sæt hjemmeopgaver, hvor eleverne skulle beskrive læserne af et givet ugeblad og vurdere effekten af et reklamer i ugebladene. Der var i forløbet en generel diskussion af grafisk fremstilling i medierne f.eks. cirkeldiagrammer, stolpediagrammer og så videre.

Begge lærere finder, at det var et godt forløb også set fra de enkelte fag. Af matematiske redskaber fik eleverne benyttet middelværdi og spredning i forbindelse med aldersfordelingen af bladenes læsere. Også procentregning indgik især i øvelser med at nærlæse tekster med matematisk indhold. Elevernes reaktioner på forløbet kom frem ved en spørgeskemaundersøgelse, og et af svarene lød: "Vi har fået en øvelse i at bruge statistik til andre ting end til matematikopgaver, så det har været godt".[58]

---

[54] LMFK 1980 nr. 2, s. 15
[55] LMFK 1980 nr. 2, s. 15-16
[56] LMFK 1980 nr. 2, s. 16-20
[57] LMFK 1980 nr. 2, s. 20
[58] LMFK 1980 nr. 2, s. 23-24

Ulla Kürstein Jensen[59] beskriver i LMFK-bladet matematik i et strukturforsøg A på Herlev Statsskole.[60] I forsøg A er formålet med matematikundervisningen, "at eleverne udvikler deres forståelse af natur, kultur og samfund,- at eleverne udvider deres kendskab til og forståelse af den rolle, som matematisk beskrivelse og problemløsning spiller i vores kultur, samt udvikler deres bevidsthed om historiske og samfundsmæssige forudsætninger herfor,- at eleverne tilegner sig et forråd af matematiske modeller og redskaber og udvider deres kendskab til de matematiske teorier, som ligger til grund for disse, for derigennem at skabe sig et grundlag for videre beskæftigelse med matematik, - at eleverne udvikler deres evne til at anvende matematiske modeller på virkeligheden og udvikler deres bevidsthed om, hvilken udvidelse af handle- og forståelsesmuligheder og hvilke begrænsninger, der ligger i sådanne anvendelser, - at eleverne udvikler deres bevidsthed om modellers og teoriers betydning for vores opfattelse af os selv og omverdenen - og endelig at bidrage til, at eleverne udvikler deres evne til at tænke abstrakt samt udvikler deres forståelse af generalisationers betydning og af den sammenhæng, der er mellem det konkrete og det abstrakte".[61]

Undervisningens indhold er emner og problemstillinger:
- "hvor anvendelsen af matematik øger indsigten, forståelsen og handlemuligheden."
- "som har haft betydning for udviklingen af matematik, og hvor denne udvikling har haft betydning for forståelse eller løsning af problemer."
- "hvor matematik har betydning i en debat eller beslutningsproces."
- "som kan belyse modellers betydning for opfattelsen af omverdenen."

Med hensyn til emnevalg og arbejdsform skal undervisningen tilrettelægges således, at:
- "den i videst mulige omfang er problemorienteret og integreret i projekter eller emneforløb."
- "eleverne får de nødvendige erfaringer og forudsætninger for at forstå de problemstillinger og matematiske teorier og begreber, som de arbejder med."
- "allerede behandlede modeller og redskaber igen inddrages og viderebehandles - og en sådan viderebehandling skal fremstå som en nødvendighed for udvikling af forståelsen."

Undervisningen omfatter 2 områder: a. "Matematik som et redskab, der er udviklet til problemløsning og erkendelse af omverdenen. Der vælges et antal emner, således at de belyser anvendelsen af matematiske modeller og redskaber i en kulturel, samfundsmæssig og historisk sammenhæng." b. "Matematiske begreber, modeller, redskaber og teorier. Der vælges et begrænset antal matematiske emner, som gøres til genstand for en mere omfattende teoretisk behandling." Af modeller skal indgå "lineære, eksponentielle, cos, sin. Binomialfordelingen samt to andre fordelinger."

I undervisningen skal indgå et projektforløb, hvor emnerne skal vælges således, at "anvendelsen af matematiske modeller og redskaber spiller en væsentlig rolle i behandlingen af emnet eller delemner". Den skriftlige fremstilling skal tjene til, at : "udvikle elevernes evne til at udtrykke sig skriftligt og til at kommunikere problemstillinger eller viden til andre" og "at øge elevernes forståelse af en

[59] Ulla Kürstein Jensen; f. 1941; matematiklærer; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse 1976-77; fmd. for Matematiklærerforeningens styrelse 1978; rektor for Ålborg Katedralskole.
[60] LMFK 1980 nr. 3, s. 3-7
[61] LMFK 1980 nr. 3, s. 3-4

problemstilling, en model, en teori, et redskab". "Der skal lægges vægt på, at eleverne tydeligt formulerer problemer, at de argumenterer for en løsning af et problem, at det tydeligt fremgår, hvilke konklusioner de drager af løsningerne".

Færdighedskrav til eleverne: "Eleverne skal...såvel skriftligt som mundtligt [kunne]...gøre rede for væsentlige træk ved en problemstilling, formulere og løse problemer med anvendelse af matematik, vurdere sådan en løsning i forhold til problemstillingen som helhed samt at dokumentere og argumentere for konklusioner og vurderinger".

Der kører ligeledes et strukturforsøg B på Herlev Statsskole. Et af formålene er, "at eleverne skal udvide deres kendskab til og forståelse af matematikkens anvendelser inden for natur, kultur og samfund, således at de bedre kan forstå deres omverden og bedre kan deltage i samfundets debatter og beslutninger omkring problemer, hvor matematikken bruges som et redskab." Eleverne skal i løbet af de tre år gennem, at "få kendskab til en række matematiske redskaber, modeller og løsningsmetoder, samt kendskab til matematiske teorier, der ligger til grund herfor", at "udvikle evnen til selvstændigt at opstille matematiske modeller til brug for løsning af problemer i praktiske og erkendelsesmæssige sammenhænge" samt at "udvikle evnen til selvstændigt at analysere og kritisk bedømme gjorte anvendelser af matematiske modeller på problemer fra virkeligheden".[62]

Indholdet i undervisningen skal vælges sådan, at "anvendelsen af matematik øger forståelsen, vurderingen og handlemuligheden i emnearbejdet eller emnerne skal belyse betingelser og forhold omkring matematikkens udvikling". I løbet af de tre år skal der arbejdes med mellem 6-10 emner, hvoraf skal indgå: "mindst 2 emner med forbindelse til det naturvidenskabelige fagområde, mindst 1 emne med forbindelse til det humanistiske fagområde og mindst 2 emner med forbindelse til det samfundsvidenskabelige fagområde. I mindst et emne skal der indgå fremmedsprogede tekster af et vist omfang".[63] Eleverne skal derigennem udvikle evnen til "at opstille en matematisk model for et problem, anvende matematiske løsningers værdi i relation til problemet". "Eleverne skal kunne foretage en matematisk/statistisk beskrivelse eller analyse af et givet oplæg. Eleverne skal inden for de behandlede emner kunne redegøre for emnets problemstillinger, anvendte modeller, redskaber og løsningsmetoder, samt i begrænset omfang kunne redegøre for de matematiske teorier, der ligger til grund herfor". Den mundtlige eksamen afholdes som en gruppeeksamen, hvor eleverne fremlægger et emnearbejde, derefter en samtale med elevgruppe, censor og eksaminator. Der skal lægges vægt på elevernes evne til at organisere gruppens fremlægning, ligesom der skal lægges vægt på det faglige indhold. Der vil også være en skriftlig eksamen inden for emner, der har været behandlet i undervisningen.[64]

Samtlige MFK-lærere ved Amtsgymnasiet i Greve mener ikke, at forsøgene ved Herlev Statsskole er egnede som model for undervisningen i matematik, fysik og kemi. De mener, at Herlev-lærerne vil afskaffe det matematisk-fysiske gymnasium og indføre et samfundsfagligt i en sproglig og matematisk variant. Fagligt mener lærere fra Greve ikke,

[62] LMFK 1980 nr. 3, s. 10
[63] LMFK 1980 nr. 3, s. 11
[64] LMFK 1980 nr. 3, s. 12-13

at Herlev-forsøgene får eleverne op på et tiltænkt A-niveau, men snarere et C-niveau. Deres pædagogiske holdning er en anden. "Kun på baggrund af en solid basisviden kan man udvikle evnen til selvstændigt at analysere og kritisk bedømme fagets forhold til virkeligheden...Kun ved selv at beherske en række af fagets redskaber, modeller og løsningsmetoder har man mulighed for selv at opstille modeller til brug for løsning af problemer".[65] "Vi finder, at projektarbejde kun kan give udbytte, hvis det finder sted på baggrund af en rimelig basisviden...I denne forbindelse undrer det os, at man i Herlev ikke har orienteret sig om de erfaringer, man har gjort på Roskilde Universitetscenter...Ved uddannelse af lærerkandidater har vi haft kontakt med RUC, og vore erfaringer fra dette samarbejde underbygger vor argumentation."[66]

12. 5 Efteruddannelseskurser

Med den store tilgang af elever til gymnasiet og med elevernes ændrede holdning med hensyn til relevans med undervisningen, da kræver det en anden form for uddannelse af lærere. Det kan man gøre noget ved ved uddannelse af kommende generationer af lærere, men de, der underviser på dette tidspunkt, må derfor på efteruddannelseskurser.

Mogens Niss taler ved to efteruddannelseskurser i Ry og på Magleås Højskole i marts 1979 om perspektiverne for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser frem til 1990. Møderne bliver skelsættende på den måde, at der her formuleres nogle hensigter og formål med matematikundervisningen, som har karakter af formålet og aspekterne ved bekendtgørelsen af 1987. (se afsnit 11. 7)

Han udtaler på dette møde:

"Med vægt på den alment demokratiske betydning af borgernes selvstændige stillingtagen til dagliglivets og samfundslivets anliggender, kan hensigten med en matematikundervisning formuleres således: Matematikundervisningen må på den ene side sætte folk i stand til på en rimelig måde at udnytte matematiske betragtningsmåder når situationen er til det, og på den anden side sætte dem i stand til at tage kritisk stilling til andres anvendelse af sådanne betragtningsmåder".[67]

For at nå det mål, så må undervisningen ifølge Niss sigte mod[68]:
"- at eleverne skal erhverve *kendskab* til og *forståelse* af matematikkens anvendelse, og baggrunden for den, i ikke-matematiske forbindelser. De skal herunder opnå forståelse af hvilke faktorer, såvel ved matematikkens tankegange, begreber og opbygning, som uden for matematikken selv, der spiller en rolle for denne anvendelse, dens muligheder og begrænsninger.
- at eleverne skal kunne foretage kritiske analyser og bedømmelser af gjorte anvendelser af matematik i ikke-matematiske forbindelser.

[65] LMFK 1980 nr. 4, s. 3
[66] LMFK 1980 nr. 4, s. 5
[67] Matematisk Tidsskrift 1980, s. 53
[68] Matematisk Tidsskrift 1980, s. 54

- at eleverne skal opnå erfaring med selvstændigt og på ikke-receptagtig måde at anvende matematik som middel ved behandlingen af ikke-matematiske problemstillinger."

Niss har 4 genstande, der bør være tilstede i matematikundervisningen[69]:

"1) Matematikundervisningens tilstedeværelse i skolen, dens indretning, rammer og baggrund." Herunder forstås, i forhold til det tredje formål, at "en central undervisningsgenstand må være matematikkens muligheder, og begrænsninger i disse, for at bidrage til at formulere, beskrive, forklare eller løse problemstillinger uden for matematikken selv."
"2) Matematiske modeller og modelbygning for konkrete ikke-matematiske problemstillinger, herunder samspillet mellem disses egenskaber og modellens egenskaber og mulighederne, og begrænsningerne i disse, for ud fra modellen at udsige noget om virkeligheden."
"3) Matematikkens begreber, metoder og opbygning, undersøgt med henblik på fagets sammenhæng."
"4) Matematikkens udvikling og samfundsmæssige placering, anskuet under historiske synsvinkler."

Niss forestiller sig, at disse genstandene skal behandles i undervisningen. Ikke nødvendigvis systematisk og i den nævnte rækkefølge. Faktisk skal de ikke behandles som indbyrdes afgrænsede afrundede genstande, men nærmere som genstande, der skal indgå i nogle sammenhænge, der ellers vil være at finde i undervisningen. Han har ikke gjort sig overvejelser omkring deres omfang.[70]

Der er ingen tvivl hos Niss om, hvorvidt der skal eksistere et selvstændigt fag i gymnasiet, der hedder matematik. "Matematikken skal bringes i anvendelse ad hoc i integrerede problemsituationer uden for matematikkens og matematikundervisningens rammer." Der skal eksistere afgrænsede tidsrum afsat alene til matematik. Med udgangspunkt i undervisningsgenstandene er det umuligt, at matematik ikke skulle være selvstændigt fag. "Således kan matematikkens opbygning, anskuet globalt eller regionalt, ikke på meningsfuld måde behandles ad hoc i tilknytning til arbejdet med integrerede, ikke-matematiske problemstillinger...Et andet argument er, at hvis matematik kun skal eksistere som et anvendelsesfag, bragt i spil ad hoc, vil det antageligt slet ikke komme i spil særlig ofte. Først og fremmest, fordi eleverne, hvis de ikke har modtaget undervisning i faget, næppe af egen drift vil overveje, om matematiske betragtningsmåder kunne bidrage til behandlingen af de problemstillinger, de arbejder med".[71]

Hvis Niss' perspektiver skal gennemføres, da må læreren i undervisningen dokumentere en behandling af ikke-matematiske problemstillinger og ikke bare postulere. Vigtigt er

[69] Matematisk Tidsskrift 1980, s. 55-56
[70] Matematisk Tidsskrift 1980, s. 56. Det er disse genstande, der kommer til at danne baggrund for aspekterne i bekendtgørelsen af 1987.
[71] Matematisk Tidsskrift 1980, s. 57

det også, at der lægges vægt på kvaliteten af genstandene frem for, hvor langt der nås i pensum.[72]

I den efterfølgende periode arrangeres efteruddannelseskurser af Matematiklærerforeningen, hvor emnerne er mange og nogle omhandler anvendelser af matematik:

"Matematiklæreren i projektarbejde" (1979), "Populationsdynamiske modeller" (1980), "Kursus om didaktiske problemer i forbindelse med undervisning i statistiske emner" (1980), "Inddragelse af historiske emner i matematikundervisningen" (1982), "De nye gymnasieelever og matematikundervisningen" (1982), "Tradition og nytænkning i matematikundervisningen" (1982), "Statiske modeller og deres anvendelse" (1983), "Matematiske modeller" (1983), "Matematik og datalogi" (1984), "Matematisk erkendelse" (1984), "Datalogisk matematik" (1984), "Arbejde med nye teksttyper i matematikundervisningen" (1984), "Matematik og kunst" (1985), "Erfaringer med udkastene til nye bekendtgørelse" (1985), "Erhvervsøkonomi som undervisningsemne i matematik og samfundsfag" (1985), "Matematisk modellering" (1986), "Indføring i Pascal og brug af edb til løsning af matematiske problemer" (1986) og "Samspillet mellem matematik og fysik i gymnasiet" (1986).

12. 6 Landsmødet om matematikken i Danmark 1981

Dansk Matematisk Forening vedtager i 1979 at arrangere et landsmøde om matematikken i Danmark. Planlægningsgruppen består udover Matematiklærerforeningens styrelse af Jørgen Hoffmann-Jørgensen (Århus Universitet), Uffe Haagerup[73] (Odense Universitet), Mogens Niss (Roskilde Universitetscenter) og Niels Wendell Pedersen[74](Ålborg Universitetscenter). Der nedsættes fem udvalg, hvoraf to af dem omhandler "Matematikundervisningen i gymnasiet og i gymnasielæreruddannelsen" og "Forskning og uddannelse i matematikkens anvendelser i andre fagområder". Landsmødet afholdes 6.-8. maj 1981 i Vejle. Formålet med landsmødet er at danne et helhedsbillede af matematikken i Danmark samt at komme med konkrete forbedringsforslag. I sammenfatningen af mødets resultater kommer flere udvalg til den konklusion, at matematik skal være mere udadvendt og mindre selvtilstrækkeligt. Det er der ikke noget nyt i, men det har tidligere været på bekostning af den rene matematik.[75]

Udvalget til at kortlægge matematikundervisningen i gymnasiet består af: Tage Bai Andersen[76], fagkonsulent Ib Axelsen[77], Jens Ole Bach, Helge Gram Christensen[78], Torben Christoffersen, Vagn Lundsgaard Hansen, Kirsten Hermann, fagkonsulent Lise

[72] Matematisk Tidsskrift 1980, s. 60
[73] Uffe Haagerup; professor i matematik ved Odense Universitet.
[74] Niels Wendell Pedersen; f. 1937; mag. scient. i matematik; amanuens. ved Århus Universitet ved matematisk institut 1963; lektor samme sted 1965; ingeniørdocent i matematik ved Ålborg Universitetscenter.
[75] Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark I, s. 7
[76] Tage Bai Andersen; f. 1942; lektor i matematik på Århus Universitet 1966; amanuens. ved DTH 1967;
[77] Ib Axelsen; fagkonsulent 1979-1985; lektor i matematik på Skanderborg Amtsgymnasium.
[78] Helge Gram Christensen; lektor i matematik ved Varde Gymnasium

Høj[79], Bent Hirsberg, Finn V. Jensen[80], Ole Juhl, Hans Jørgen Munkholm[81] og Mogens Niss. Tage Bai Andersen, Ole Juhl og Finn V. Jensen trak sig fra udvalgsarbejdet på grund af studieophold og arbejdspres.

I perioden 1960-80 har mindre bekendtgørelser og cirkulæreskrivelser tilpasset sig de aktuelle forhold, men har ikke ændret ved det faglige fundament for matematikundervisningen. Bekendtgørelsens foreskrifter er ikke vedkommende for eleverne. Ligesom der er flere elever, for hvem gymnasiet er det sidste sted, de møder faget matematik.

Udvalget er af den opfattelse, at alle elever skal undervises i matematik. Derved skal eleverne opnå indsigt i:

"1) matematiks specielle natur, som blandt andet kommer til udtryk ved den proces, der består i intuitiv forståelse af en sammenhæng, formulering af en sætning og bevis for denne,
2) nogle matematiske emner, der er centrale derved, at de indgår i mange forskellige anvendelser, samt eksempler på sådanne anvendelser,
3) nogle autentiske anvendelser af matematik, der behandles, fordi anvendelsesområdet er af væsentlig samfundsmæssig betydning,
4) dele af matematikkens historie og matematik i kulturel, historisk og samfundsmæssig sammenhæng."[82]

For at gennemføre en matematikundervisning i overensstemmelse med punkterne 1) - 4) vil det være nødvendigt, dels at matematik optræder som et selvstændigt fag, dels at der eksisterer mulighed for, at matematik kan indgå i tværfagligt samarbejde."[83]

Uanset hvordan den kommende gymnasiestruktur vil komme til at se ud, er det ifølge udvalget meget vigtigt, at matematikundervisningen tager udgangspunkt i de fire punkter.

I diskussionen omkring "anvendelser af matematik i gymnasiet" berettes fra diskussionen, at situationen i gymnasiet er karakteriseret ved, at "at der ikke i almindelighed inddrages anvendelser i et omfang, der går ud over illustrationer/"krydderier" til det matematiske indhold, først og fremmest fordi de øvrige krav ikke levner tid til det (navnlig på mat-sam og mat-nat-grenene). Derimod er der visse muligheder i det valgfrie emne i mat-fys-grenen, men de udnyttes ikke i særligt stort omfang". Der er enighed om, at det i højere grad skal dreje sig om autentiske anvendelser frem for pseudoanvendelser. "Flere fandt, at selv om autentiske anvendelser i en eller anden forstand er nødvendige, er det lettere sagt end gjort at finde nogen, der er baseret på gymnasial matematik. I den forbindelse

[79] Lise Høj; lektor i matematik ved Sct. Annæ Gymnasium; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse 1971-76; fagkonsulent 1978-85.
[80] Finn V. Jensen; docent ved Institut for elektroniske systemer, Ålborg Universitetscenter.
[81] Hans Jørgen Munkholm; f. 1940; mag. scient. i matematik; amanuens. ved Århus Universitet ved matematisk institut; docent i matematik ved Odense Universitet.
[82] Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark I, s. 173-179
[83] Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark I, s. 179

mener flere, at det kunne blive nødvendigt at slække på kravene til eksakthed i fremstillingen, for i stedet at lægge vægt på selve modelopstillingen, også på dens intuitive sider". [84] I den afsluttende diskussion fremhæver Niss, at det ofte er de formelle rammer som pensumbindinger og centralt stillede opgaver til den skriftlige eksamen, der sætter en grænse for, hvilke anvendelser der kan inddrages i undervisningen.[85]

Derudover blev der på landsmødet vedtaget en anbefaling om, at give gymnasielærere mulighed for efteruddannelse ved universiteterne og de højere læreanstalter. Denne anbefaling kommer ud fra ønsket om, at lærerne skal kunne behandle "autentiske anvendelser" i gymnasiet.

12. 7 Efter landsmødet

Matematiklærerforeningens styrelse skriver, at der i de sidste 20 år er sket meget med vilkårene for undervisning. Blandt andet er der indført 5- dages skoleuge (1971), gymnasiefrekvensen er forøget og de unge vælger meget forskellige videreuddannelsesveje. Der har ikke tidligere været politisk vilje til en ny gymnasiereform, men nu kunne det tyde på, at der er én undervejs.

Undervisningsministeren på dette tidspunkt, Dorte Bennedsen[86] forestiller sig en fælles 1. g., idet opdelingen i en matematisk og sproglig linje ifølge hendes overbevisning er uheldig. For matematiks vedkommende, da understreger hun, at "i matematik og naturvidenskaberne må man overveje at lægge mere vægt på overordnede samfundsmæssige problemer".[87] Disse kommende ændringer er nogle, styrelsen mener, der skal tages stilling til. Der er i de sidste år udført forskellige forsøg også i andre fag med nye arbejdsformer, og de kan muligvis overføres til matematik. Det er vigtigt, at erfaringer fra undervisningen og forsøg kommer frem, og der opfordres til at starte andre forsøg.[88]

Anne Jensen[89], Marianne Kesselhahn[90] og Lena Lindenskov[91] har i en rapport om tværfaglige kurser givet en karakteristik af matematikundervisningen i gymnasiet, som den ser ud på dette tidspunkt. Bekendtgørelsens formål med matematikundervisningen, mener de, koncentrerer sig om 3 niveauer:

1) at lære matematisk teori,
2) at anvende matematik inden for andre fagområder og

[84] Dansk Matematisk Forening: Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark II, s. 403-404
[85] Dansk Matematisk Forening: Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark II, s. 417
[86] Dorte Bennedsen (soc. dem.); f. 1938; undervisningsminister 1979-82.
[87] LMFK 1981 nr. 4, s. 4
[88] LMFK 1981 nr. 4, s. 6-7
[89] Anne Jensen; lærer i matematik og samfundsfag ved Greve Gymnasium; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse.
[90] Marianne Kesselhahn; lærer i matematik og samfundsfag ved Stenløse Gymnasium.
[91] Lena Lindenskov; lærer i matematik og samfundsfag ved Stenløse Gymnasium; ph. d. i matematikkens didaktik.

3) kritisk at analysere matematiks anvendelse (og forstå matematiks samfundsmæssige betydning).[92]

Karakteristisk for emnelisten i bekendtgørelsen og undervisningsvejledningen giver den forslag til, hvordan punkt 1 kan opfyldes, men ikke hvordan punkt 2 og 3 kan det. Undervisningen bliver i høj grad styret af indlæring af teori i mindre grad af 2 og slet ikke af 3. Det skyldes ifølge Jensen, Kesselhahn og Lindenskov, blandt andet, at: der "eksisterer...et dogme om, at det i sig selv er godt at lære noget matematik (lige meget hvilken). Det træner den logiske sans og abstraktionsevnen", - der "eksisterer ...en myte om, at det er nødvendigt at lære en hel masse matematisk teori, inden man kan lære at bruge det, og inden man kan lære at forholde sig kritisk til disses anvendelser...det mest almindelige er, at disse anvendelser inddrages som et pædagogisk hjælpemiddel for at lette tilegnelsen af matematikken - det er altså ikke anvendelsen, der er den egentlige genstand for undervisningen", - "faget fra gammel tid [er] et studieforberedende fag" - og "de fleste matematiklæreres uddannelse [er] en grundvidenskabelig forskeruddannelse, der ikke retter sig mod det faktum, at de fleste matematikstuderende senere bliver gymnasielærere. På den måde lægges vægten på en bestemt type faglighed, som overføres mere eller mindre direkte til gymnasieundervisningen".[93]

Jensen, Kesselhahn og Lindenskov mener desuden, at det er vigtigt for eleverne, "at de ser nogle eksempler på, at man opnår en større erkendelse ved at bruge matematik på nogle sammenhænge, end man ville få, hvis man ikke gjorde det. Ved at udelade mindre betydningsfulde faktorer, kvantificere forholdene og lave en model ud fra nogle antagelser om nogle sammenhænge, kan man skaffe sig et overblik og komme med præcise udsagn". [94]

Det er H. J. Munkholms fornemmelse, at der blandt lærere er den udbredte holdning, at "eksakt naturvidenskab (og teknik) ikke er anvendelsesområder, der er af væsentlig samfundsmæssig betydning...Jeg vil understrege, at nogle af de autentiske anvendelser kunne komme fra f.eks. fysik, og jeg vil gerne opfordre mine matematik-kolleger i gymnasiet til også at huske fysikken, når de overvejer evt. at gå ind i et af de forsøg, som styrelsens rammeansøgning lægger op til. Enhver, der har studeret vort fags historie blot en lille smule, må jo indrømme, at mange af fagets højdepunkter er nået, når det hånd i hånd med fysikken, har været brugt til at beskrive naturen omkring os".[95]

Flere lærere melder, at der er problemer med undervisningen i matematik i gymnasiet. Helge Christensen, Susanne Højlt[96], Otto Jensen[97] og Vibeke Thomsen[98] påpeger problemet med det udvidede rekrutteringsgrundlag til gymnasiet. Med mange elever vil der også være en større del, der har svært ved matematik. Disse problemer må løses af pædagogisk og didaktisk vej. De 4 lærere mener ikke, at der findes så meget litteratur

---

[92] Bach, Jens Ole et al.: Pædagogik i gymnasiet - rapport fra tre tværfaglige kurser, s. 69
[93] Bach, Jens Ole et al.: Pædagogik i gymnasiet - rapport fra tre tværfaglige kurser, s. 70-71
[94] Bach, Jens Ole et al.: Pædagogik i gymnasiet - rapport fra tre tværfaglige kurser, s. 72
[95] LMFK 1982 nr. 3, s. 8-9
[96] Susanne Højlt; matematiklærer ved Maribo Gymnasium.
[97] Otto Jensen; adjunkt i matematik og fysik ved Maribo Gymnasium.
[98] Vibeke Thomsen; f. 1928; cand. mag. i matematik; adjunkt ved Maribo Gymnasium.

om indlæring af matematiske strukturer hos 16-19 årige, så det håber de, at nogle vil tage op.[99]

Ved et regionalmøde i matematik d. 15. januar 1983 er emnet fremtidens skriftlige eksamen. Det bliver på mødet diskuteret, om der skal være åbne opgaver i sættene. "De åbne opgaver overlader det i høj grad til eleverne, hvilke spørgsmål, der skal behandles i besvarelserne; der kan være tale om "analyseopgaver" og "bilagsopgaver"". Der var positiv stemning for en anden type opgaver, da den skriftlige eksamensform og karakter virker uheldigt tilbage på undervisningen. Men problemerne med sådanne opgaver er, at det er svært at finde gode opgaver, at eleverne har forskellige forudsætninger for at behandle opgaverne, og at der ikke endnu er nogen erfaring med at bedømme åbne opgavebesvarelser. Fagkonsulent Ib Axelsen beretter, at det netop er disse problemer, der gør, at der ikke er åbne opgaver i de vejledende opgaver. Han foreslår til gengæld, at åbne opgaver bruges som små matematikrapporter i den daglige undervisning.[100]

12. 8 Ny undervisningsminister - ny gymnasiereform

Matematiklærerforeningens styrelse og det faglige udvalg for matematik gør opmærksom på, at det tilsyneladende ikke ser ud til, at der sker en strukturændring med gymnasiet, som tidligere antaget. Til gengæld vil de enkelte fag kunne se frem til revision af deres bekendtgørelser.

I forbindelse med nyt forslag til pensum i matematik på matematisk linje, da afholder styrelsen og det faglige udvalg for matematik et kursus 5. og 6. maj, hvor det nye forslag drøftes. Bekendtgørelsesforslaget indeholder, som noget nyt, 4 aspekter, som skal indgå sammen med de øvrige emneområder. De 4 aspekter er det historiske aspekt, modelaspektet, matematikkens indre struktur-aspektet og datalogiaspektet. Der skal i grupper blandt andet tages stilling til valget af netop disse aspekter. Konklusionen på kurset er, at man mener, at aspekterne vil blive nedprioriteret i forhold til emnerne, når aspekterne ikke indgår i den skriftlige eksamen. Generelt er tanken om aspekter er god. Diskussionen går mere på, om sidestillingen af aspekterne er rimelig. Ligesom nogle mener, at datalogiaspektet kan være et emne frem for et aspekt. Aspekterne skal kunne tilgodeses i forbindelse med undervisningen og i særlige undervisningsforløb.[101]

Direktoratet for gymnasieskolerne har udsendt et udkast til en ny bekendtgørelse og undervisningsvejledning for matematik på den matematiske linjes naturfaglige og samfundsfaglige gren. Udkastet efterfølges af en skrivelse fra fagkonsulenterne om, at grenhold kan læse efter det fra året efter, hvis de ønsker det. Dette udkast indeholder undervisning i fem hovedemner og de omtalte fire aspekter.[102]

Fagkonsulenterne Ib Axelsen og Lise Høj påpeger, at de foreløbige bestemmelser i den kommende bekendtgørelse for matematik ikke ændrer ved eksamen. Det vil sige, at den skriftlige eksamen stadig er på 4 timer med centralt stillede opgaver. Den nye

[99] LMFK 1982 nr.4, s. 8-11
[100] LMFK 1983 nr. 3, s. 20-21
[101] LMFK 1983 nr. 7, s. 13-17
[102] LMFK 1983 nr. 7, s. 8

bekendtgørelse skal give lærere og elever større frihed med at tilrettelægge undervisningen. "Dette kommer især til udtryk i, at undervisningen også skal omfatte fire aspekter, for hvilke der i bekendtgørelsen kun er beskrevet et formål, mens omfang, vægtning og valg af konkret indhold er overladt til de enkelte lærere og deres elever. Den eneste begrænsning her er den, som de tidsmæssige rammer sætter".[103]

Undervisningsminister Bertel Haarder taler ved LMFK' s årsmøde d. 8. oktober 1983 om matematiks og naturvidenskabernes rolle nu og i fremtiden i den gymnasiale uddannelser. "Det er min opfattelse (og jeg håber, at jeg har ret i den), at gymnasiets matematik-, fysik- og kemiundervisning er almendannende i netop den forstand, at den udruster eleverne med værktøj til at beskrive og erkende komplicerede fænomener. Det enkelte menneske må i et højt udviklet industrisamfund som det danske som et led i sin personlige udrustning have en mulighed for en kvalificeret indsigt i og stillingtagen til de mange beslutninger, der træffes med baggrund fx. i eksperters anvendelse af matematiske modeller. Det gælder spørgsmål om teknik, teknologi, økonomi, folkesundhed osv. Hvis den enkelte skal have mulighed for andre holdninger end "dyb ærbødighed og bøjen sig for eksperters udsagn" eller "total mistillid og afvisning af samme", så forudsætter det en indsigt i matematisk modelbygning".[104] For at gymnasiet bevarer sin studieforberedende rolle, da er det vigtigt at det høje niveau i matematik bevares. Det gøres bedst ved et samspil mellem matematik, kemi og fysik.

Når det drejer sig om den sproglig linje, da er det tydeligt, at der er visse problemer. Det er Haarders ønske at indføre et naturfag for sproglige. Situationen er på daværende tidspunkt den, at der er en tilbagegang af elever til den sproglige linje. Det mener Haarder skyldes, at de sproglige elever får en formel kompetence frem for en reel svarende til den matematiske linjes matematikundervisning. Naturfag skal "ikke bare være et orienteringsfag, men have et så lødigt indhold, at det giver en reel kompetence".[105] "Det er ønskeligt, at der gøres noget for at slå hul på myten om, at piger ikke kan have at gøre med fysik og matematik, bl. a. for at komme snæverheden i deres erhvervsvalg til livs".[106] Dette skal naturfag hjælpe til.

Børge Degn Nielsen[107] fra Viby Amtsgymnasium udtaler sig ligeledes om den kommende bekendtgørelsesændring for matematikundervisningen. Han mener, at "vi begynder en udvikling bort fra en opfattelse af matematikken som et isoleret og selvtilstrækkeligt fag. Set ud fra et almendannelsessynspunkt er det ikke nok at undervise i matematiske begreber, teorier og anvendelser. Det er vigtigt, at eleverne også får en forståelse af fagets udvikling, af fagets samspil med andre fag og med samfundet samt af anvendelsen og anvendeligheden af matematik i mange sammenhænge...Det er en myte, at hvis man først har lært en matematisk teori grundigt, så kan man selv gå ud og bruge den. Det bør være et væsentligt led i undervisningen, at den udvikler og styrker elevernes

[103] LMFK 1983 nr. 9, s. 6
[104] LMFK 1983 nr. 9, s. 8
[105] LMFK 1983 nr. 9, s. 11
[106] LMFK 1983 nr. 9, s. 13
[107] Børge Degn Nielsen; f. 1927; lærer i matematik, fysik og naturfag ved Århus hf-kursus; lærer ved Viby Amtsgymnasium.

handlemuligheder".[108] For at det kan lykkes, så må man tage sig tid til at behandle problemer udefra.

Nielsen kommer på baggrund af ovenstående med overvejelser i relation til en ny bekendtgørelse for matematik. Han foreslår, at der skal være en liste med emner, som bliver testet ved den skriftlige eksamen. Hvad der derudover skal foregå, kan lærere og elever vælge sammen ud fra følgende foreskrifter[109]:

"a. Emnet kan belyses i samarbejde med et eller flere andre fag,
b. Emnet kan belyse dele af matematikkens historie,
c. Emnet kan være anvendelse af matematik. Specielt kan en matematisk model behandles, eller
d. Emnet kan have et datalogisk indhold."

I pensumlisten skal det valgfri emne ligeledes indgå, ikke kun for den matematisk-fysiske linje, men også for den samfundsfaglige og naturfaglige linje. Han foreslår, at der ved det datalogiske emne inddrages matematiske modeller, hvor det foreslås, at eleverne skal foretage prøvekørsler af mini-udgaver af SMEC eller andre finansmodeller.[110]

I en artikel i Unge Pædagoger 1984 taler Ole Skovsmose om, at den kritiske pædagogik har påvirket mange områder, hvor der eksperimenteres med problemorientering og tværfaglighed. I forhold til denne situation kan man indtage tre positioner:

1. Den holdning at matematiklærerne pædagogisk set er fantasiløse, reaktionære og hæger om deres fag. Den position støtter Skovsmose ikke.
2. Holdningen at det ikke betyder noget, at matematik er udenfor den kritiske pædagogik.
3. Holdningen at det er en katastrofe, at matematik ikke er blevet en del af den kritiske pædagogik. Det er denne position, Skovsmose støtter.

Han behandler også matematikkens rolle i samfundet som magtinstrument og matematik som social tilpasning. Matematik som social tilpasning handler om magtudøvelsen, der finder sted i matematikundervisningen. Skovsmose ser den som fuld af anvisninger, forordninger og forskrifter. Det har ikke karakter af en undersøgelsesproces eller anden videnskabelig arbejdsmetode. Derved kunne man tro, at det var matematikundervisningens funktion "at opøve eleverne til omhyggeligt og omsorgsfuldt at følge eksplicit formulerede arbejdsanvisninger...Der foreligger ingen præcise forestillinger om, hvad matematikundervisningen reelt socialiserer til."[111]

"Konsekvensen for den teoretiske side af den kritiske pædagogik er, at de nøglebegreber og kriterier for undervisningsplanlægning der har været fremme i debatten må genovervejes. Principperne om problemorientering, deltagerstyring, eksemplarisk indlæring m. v. kan ikke udgøre definerede kriterier for en fremtidig kritisk undervisning.

[108] LMFK 1983 nr. 10, s. 13
[109] LMFK 1983 nr. 10, s. 17
[110] LMFK 1983 nr. 10, s. 21
[111] Unge Pædagoger 1984, s. 9-11

De må reformuleres, og denne reformulering må ske i lyset af principper og indsigter erhvervet gennem kritik af tekniske fag."[112]

Mogens Niss taler ligeledes i Unge Pædagoger om nødvendigheden af kritisk matematikundervisning. Matematik er et fag, der optræder som obligatorisk undervisning på næsten alle niveauer i uddannelsessystemet. Niss begrunder dernæst, hvorfor matematik er af betydning for alle. Det skyldes blandt andet at matematik er en forudsætning for megen produktion og teknologi, samtidig er matematik med til at danne vores opfattelse af vores verden. I et samfund, der i højere og højere grad benytter sig af matematik til at tage økonomiske beslutninger og lave prognoser, da er det vigtigt, at elever kan forholde sig kritisk til og handle overfor dette. For at opnå det foreslår Niss, at undervisningen i matematik skal medvirke til, at:

"eleverne selvstændigt kan aktivere og anvende matematiske betragtningsmåder over for problemer i virkeligheden (at de kan opstille, behandle, bedømme matematiske modeller), eleverne kan gennemskue og bedømme andres anvendelser af matematik på udenomsmatematiske problemer, eleverne har fornemmelser for og erfaringer med rækkevidden og begrænsningen i anvendelsen af matematik på virkelige forhold, og på andre faglige områder, eleverne med tryghed, overblik og kreativitet selv kan agere inden for et matematisk "teori"univers, eleverne kan kommunikere med andre om anliggender med et matematisk indhold, eleverne forstår noget om matematikkens natur, eleverne ved noget om matematikkens og matematikudøvelsens forbindelseslinjer til samfundet, eleverne har indblik i træk af matematikkens historie. Hverken folkeskolens eller de gymnasiale uddannelsers matematikundervisning lever op til disse krav".[113]

Matematikundervisningen har igennem 60'erne gennemgået en udvikling, der kan karakteriseres som en humanisering, "der sigter mod at gøre matematik til et venligt, tolerant, åbent og kreativt fag" Men fra slutningen af 70'erne blev undervisningen betonet af anvendelser af matematik. "Undertiden har dette ført ud i at matematikken er blevet forsøgt på hvad som helst, også i sammenhæng hvor der ikke har været baggrund for dette. Imidlertid er der ved at ske nogle ændringer i gymnasiets matematikundervisning. Der åbnes for en mere kritisk inddragelse af matematikkens anvendelser og matematiske modeller, og for en egentlig beskæftigelse med matematikkens historisk/filosofiske dimensioner". [114]

12. 9 Matematikrapport af juli 1984

Inden for de seneste par år har matematikken påtaget sig særlig opmærksomhed. I 1978 blev den matematiske forskning undersøgt på foranledning af undervisningsminister Ritt Bjerregaard. Dette udvalgsarbejde mundede ud i en rapport, der udkom i 1980, og kortlægger de matematiske forskningsmiljøer i Danmark. Den 6.-8. maj 1981 afholdtes et landsmøde om matematikken i Danmark arrangeret af Dansk Matematisk Forening. Dette resulterede ligeledes i en rapport, som jeg tidligere er kommet ind på. En af

[112] Unge Pædagoger 1984, s. 12
[113] Unge Pædagoger 1984, s. 24-25
[114] Unge Pædagoger 1984, s. 25

erkendelserne fra dette landsmøde var om manglen på universitetsuddannede matematikere. Dette førte til at Dansk Matematisk Forening nedsatte et "Kameludvalg" til at undersøge problemet. Dette udvalg udsendte et notat i november 1981, som yderligere indgik i rapporten fra landsmødet. Disse rapporter blev sendt til Det faglige landsudvalg for de naturvidenskabelige uddannelser (FLUNA), som derefter vedtog at nedsætte et underudvalg vedrørende faget matematik. Efter en forsinkelse på grund af regeringsskiftet 10. september 1982 begyndte udvalget sit arbejde november 1982. Resultatet mundede ud i en matematikrapport af 1984.

Udvalget anbefaler generelt, at undervisningstiden på alle uddannelsesniveauer sættes op. Igennem en årrække er undervisningstiden blevet skåret ned både i folkeskolen, i gymnasiet og på de videregående uddannelser. I rapporten er nogle beregninger, der viser, at timetallet på matematisk-fysisk gren (39 ugetimer à 60 min.) svarer til timetallet for den samlede matematikundervisning efter 2. real (38.3 ugetimer à 60 min.). Timerne er omregnet til ugetimer à 60 min., idet en undervisningstime i 1980 blev sat ned fra at være 50 min. til at være 45 min..[115]

Rapporten fastslår, at der et er behov for at kende til matematik. "Mange beslutninger og gøremål i de mest forskelligartede sektorer et moderne samfund bygger på anvendelse af matematik som beskrivelsesmiddel eller som analyseværktøj". Udvalgets anbefalinger om matematikundervisningen i gymnasiet drejer sig om: "at man ved eventuelle fremtidige gymnasiereformer sikrer, at en væsentlig del af eleverne fortsat gives en matematikundervisning af mindst samme omfang og dybde som den, der gives på den matematisk-fysiske (og matematisk-kemiske) gren", "at man tilstræber en udvidelse af tidsrammen for faget på de matematiske grene", "at alle elever på gymnasiets matematiske grene bør bibringes solide kundskaber inden for matematikkens centrale områder" og "at avendelsesprægede ...emner betones mere end hidtil".[116]

Matematik som erkendelsesredskab inden for andre fagområder behandles ligeledes. "Fra oldtiden til vore dage har medicinmænd, præster, filosoffer, videnskabsmænd, teknikere og praktisk orienterede mennesker arbejdet i gensidig vekselvirkning, med eller mod hinanden, på at forøge vor forståelse af verden omkring os og beherske den mere. Disse bestræbelser er kommet længst for den fysiske omverdens vedkommende, hvilket det højteknologiske samfund, vi i dag lever i, er et slående bevis på".[117] Vores forståelse af omverdenen hænger sammen med formuleringen i matematisk sprog. "Navnlig i fysik, astronomi og kemi har denne "matematisering" haft åbenbar succes, og matematisk formulering er kommet til at fremstå som et ideal for andre fag at stræbe efter". [118] Netop dette forhold bestyrker behovet for at mange undervises i matematik.

Det er vigtigt, at interessen for matematik og naturvidenskab stimuleres i de almene uddannelser. Årsagen til denne anbefaling skyldes, at "samtlige naturvidenskaber i stigende grad inddrager matematiske og fysiske modeller. Desuden er de dele af naturvidenskaberne, som har mest direkte relation til teknologiske og samfundsmæssige

[115] Matematikrapport 1984, s. 160-161.
[116] Matematikrapport 1984, s. 10-11
[117] Matematikrapport 1984, s. 24
[118] Matematikrapport 1984, s. 25

vurderinger, netop de, hvis interne sprog er mest matematisk og symbolpræget. Det er derfor vigtigt fortsat at sikre fortroligheden med matematik og symbolpræget fremstillingsform på de indledende og almene uddannelsestrin, herunder folkeskolen...Konklusionen bliver, at medens de fleste mennesker fremover vil have mindre behov for de traditionelle regnetekniske færdigheder, vil behovet for matematisk forståelse til gengæld være øget. Med matematisk forståelse tænkes i denne sammenhæng dels på almindelig talforståelse og fortrolighed med matematisk udtryksform, dels på viden om matematiske ræsonnementers karakter, bærekraft og begrænsninger".[119] Det er skolens opgave at forberede eleverne til at deltage i samfundslivet. Derfor har man i gymnasiet indført aspekter, blandt andet modelaspektet, som kan perspektivere matematikundervisningen og medvirke til opnåelse af ovenstående. Problemet er dog, at timetallet ved den "lille gymnasiereform" i 1971 blev nedsat, da man gik over til 5-oages ugen. Derfor mener udvalget, at der ikke er tilstrækkelig tid til at dyrke aspekterne, som de var tiltænkt.[120]

12. 10 Flere forsøg i matematikundervisningen

Med hensyn til naturfag for sproglige, da mener Lasse Storr-Hansen[121] på vegne af fysiklærerforeningens styrelse, at det er nødvendigt med et nyt pust i undervisningen af sproglige elever. Der har gennem de seneste år været tilbagegang i elevantallet til denne linje, og de elever, der vil ind på sygeplejeskolerne, har problemer med at blive optaget. Der har siden 1979 været forsøg i gang med dette. På Metropolitanskolen har der vist sig spændende muligheder med at inddrage fysiske eksperimenter i matematikundervisningen. Timerne blev taget fra de sædvanlige matematiktimer. Også på Gentofte Statsskole har man siden startet forsøg af lignende art. På Tornbjerg Gymnasium har man forsøgt, at integrere flere naturvidenskabelige fag f.eks. fysik, matematik, biologi, geografi samt datalære. Roskilde Katedralskole integrerer matematik, biologi og geografi. Nørre Gymnasium involverer matematik, fysik, kemi og geografi. Frederiksborg Gymnasium kører forsøg med fysik, matematik og kemi. Der er lignende forsøg på andre skoler, men her integreres fagene ikke, og faggrænser opretholdes. Det drejer sig blandt andet om Sct. Knuds Gymnasium.[122] Fysiklærerforeningens styrelse anbefaler en diskussion af sådanne forsøg, så det er muligt at påvirke undervisningsministerens nedsatte fagkonsulentudvalg.

Marianne Berthelsen[123] fra Tornbjerg gymnasium fortæller om et forsøg på hendes gymnasium, hvor det forsøges at skabe "et ægte tværfagligt naturfag". Her indgår matematik, edb, fysik, kemi, biologi og geografi, og der er sat 20 ugentlige timer over et 3-årigt forløb af til det. Erfaringerne ved det forsøg viser, at det er umuligt for en lærer at sikre dybden og bredden i alle fag, hvorfor der reelt kun sker en integration mellem to

[119] Matematikrapport 1984, s. 30
[120] Matematikrapport 1984, s. 38
[121] Lasse Storr-Hansen; lærer i matematik, fysik og naturfag ved Frederiksborg Gymnasium; medlem af fysiklærerforeningens styrelse.
[122] LMFK 1984 nr. 7, s. 3-5
[123] Marianne Berthelsen; lærer i matematik ved Tornbjerg Gymnasium.

måske tre fag. Men eleverne har lettere ved at se sammenhænge mellem fagene end tidligere.[124]

Endnu et tværfaglige forsøg, hvor matematik indgår, har fundet sted på Mulernes Legatskole i Odense i perioden 1982-84 på matematisk linje. Forsøget var mellem fagene samfundsfag, matematik og edb, og blev varetaget af læreren Peter Andersen[125]. Det var delt op i 2 dele, en del om driftsøkonomi, og en del om nationaløkonomiske modeller. Den teoretiske driftsøkonomi blev gennemgået matematisk, mundtligt og grafisk. "Den matematiske gennemgang gav eleverne en forståelse af matematikkens praktiske anvendelse, og hvilken nytte den giver ved præcisering af verbalt udtrykte sammenhænge".[126]

I arbejdet med nationaløkonomiske modeller, da skulle eleverne beskæftige sig med de økonomiske matematiske modeller KLASK (Kort Ligningssystem til analyse af Statens konjukturpolitik), STINE (Simulation Til Indlæring af Nationaløkonomi med Edb-model) og SMEC (Simulation Model of the Economic Council). Matematikfaget havde til opgave at gennemgå ligningssystemerne i KLASK og STINE, ligesom det skulle gennemgå SMEC i grove træk. Det er Andersens opfattelse, at forståelsen af modellernes indhold blev bedre forstået ved samarbejdet mellem matematik og samfundsfag.

Fordelen ved at arbejde med modellen KLASK er ifølge Andersen den, at det er til at ændre parametrene i den, men til gengæld er den begrænset til at beskrive et år og beskæftiger sig kun med finanspolitik. I modellen STINE kan parametrene ikke ændres og det gør den utilfredsstillende at anvende i undervisningen. "Modelanvendelse og simulationer via EDB har dog tilført undervisningen væsentlige dimensioner". Konklusionen på forsøget er, at både elevinteressen og udbyttet blev øget for begge fag. Det har været tidskrævende for lærerne, da de selv har måttet fremstille materiale. Forsøget er tiltænkt at kunne falde ind under modelaspektet i udkastet til en ny bekendtgørelse.[127]

Matematiklærerne Frans Morville[128], Jette Nygaard[129] og Peter Heiberg[130] har en kommentar til de vejledende eksempler på eksamensopgaver tilegnet den nye forsøgsbekendtgørelse. De vejledende eksamensopgaver giver et billede af, hvor undervisningen er på vej hen. Som nogle matematiklærere, der ser frem til aspekterne ved den nye bekendtgørelse, da mener de ikke, at man i opgaver kan se, hvilken status aspekterne skal have. Men for at aspektet kan få en status i undervisningen, da må der nye typer af opgaver til. Derfor har de tre lærere forsøgt at designe et sæt til en matematisk-fysisk eksamen, hvor vægten lægges på modelaspektet.[131] (se appendiks 9)

[124] LMFK 1984 nr. 7, s. 7
[125] Peter Andersen; f. 1934; lærer i matematik ved Mulernes legatskole i Odense.
[126] LMFK 1984 nr. 9, s. 20
[127] LMFK 1984 nr. 9, s. 20-23
[128] Frans Morville; lærer i matematik, fysik og naturfag ved Frederiksberg Studenterkursus.
[129] Jette Nygaard; lærer i matematik og geografi ved Marselisborg Gymnasium.
[130] Peter Heiberg har jeg ikke kendskab til.
[131] LMFK 1985 nr. 4, s. 28-38

12. 11 En ny gymnasiereform - en kommende realitet

I 1986 har undervisningsminister Bertel Haarder netop fremlagt de nye planer for ændringen af gymnasiet. Matematiklærerforeningens styrelse er ikke tilfredse med situationen set fra faget matematiks side. "Det er her foreningens opfattelse, at det fundament i matematik og naturvidenskab, enhver matematisk student får, bliver langt ringere, end tilfældet er i dag".[132] En elev før 1966 modtog 900 timer matematik i gymnasiet, men ved den kommende gymnasiereform, da vil det højst være muligt for elever at modtage matematikundervisning i 675 timer.[133]

Ved et debatmøde i Ingeniørsammenslutningen 8. januar 1986 blev de nye gymnasiestrukturer drøftet. Ved mødet deltog blandt andet Vagn Lundsgaard Hansen (DTH), Mogens Niss (RUC), Jens Højgaard Jensen[134] (RUC), Hans Glendrup (Dansk Arbejdsgiverforening), fagkonsulenterne Lise Høj og Bent Hirsberg. Det var særlig fagene matematik, fysik og kemi, hvis stilling i den nye struktur man diskuterede. Et af de synspunkter, der kom frem, var bekymringen for, at piger ville fravælge de naturvidenskabelige fag i gymnasiet. Der var generel enighed om, at de naturvidenskabelige fag bliver stillet dårligt. Der blev opfordret til at ytre sig i pressen om forholdene.

Senere samme år beretter fagkonsulenterne for matematik Kirsten Hermann, som afløser Lise Høj, og Bent Hirsberg om, at 122 hold på dette tidspunkt har været til eksamen efter forsøgsordningen. Artiklen giver et indtryk af læsepensa, men nok så vigtigt, så er det opgjort, hvordan aspekterne er blevet behandlet. Modelaspektet er på den matematisk-naturfaglige,- musikfaglige og -samfundsfaglige gren blevet behandlet i forbindelse med følgende emner[135]: "Eksponentiel- og logistisk vækst. Genetik. Afsætningsøkonomi. Dynamisk systembeskrivelse. Simulering. Meningsmålinger. Statistiske modeller, forholdet mellem model og virkelighed". Der er den mulighed i bekendtgørelsen, at læreren kan designe et forløb, hvor aspekterne på den måde behandles. For modelaspektets vedkommende, da er det sket ved "differentialligningsmodeller/vækstmodeller (samfundsøkonomiske modeller, enkeltartsmodeller for fiskeri, vekselvirkning mellem populationer af dyrearter mv.) samt idræt (testmetoder og signifikans af resultater). Med fysik har der været samarbejde om digitalelektronik".

På den matematisk-fysiske og matematisk-kemiske gren, da er modelaspektet behandlet i løbet af undervisningen i forbindelse med emnerne[136]: "Vækstmodeller (lineære, eksponentielle og logistiske). Differentialligningsmodeller, trigonometriske modeller og statistiske modeller, økonomiske modeller, belastningsmodeller, klassisk mekanik. Systemdynamiske edb-modeller. Modeller i forbindelse med lineær programmering. Rekursion, grafteori og vektorfunktioner. Generelt om matematiske modeller.". Også her er der til tider indrettet forløb, der tilgodeså aspekterne, men det er ofte sket, at

---

[132] LMFK 1986 nr. 1, s. 6
[133] LMFK 1986 nr. 1, s. 9
[134] Jens Højgaard Jensen; fysiklærer ved Roskilde Universitetscenter
[135] LMFK 1986 nr. 7, s. 8
[136] LMFK 1986 nr. 7, s. 9

aspekterne er behandlet i det valgfri forløb. I sådanne tilfælde har det drejet sig om: "anvendelser af matematik (bl.a. i økonomi, biologi, fysik og astronomi)".

Jørgen Rothe[137] fra Nakskov Gymnasium ønsker den skriftlige eksamen indført for sproglige elever. Begrundelsen for det er, "at en sproglig student har mere glæde af at kunne bruge matematik til problemløsning frem for at kunne brillere med finde beviser. (Jeg ved dette er groft sagt)".[138]

Matematiklærerforeningens styrelse har i et brev til Folketingets uddannelsesudvalg gjort opmærksom på konsekvenserne af den kommende gymnasiereform. Det samlede timetal for matematik nedsættes fra 16 til 15 timer, og et samlet 2-årigt forløb på højt niveau erstattes af et 1-årigt. "Matematiklærerforeningens styrelse har fundet det nødvendigt på denne måde at gøre det klart, at når det drejer sig om videregående uddannelser, der anvender matematik, så vil kommende studenter - både matematiske og sproglige - have et andet fagligt udgangspunkt end i dag, og af disse uddannelser i tide må rette deres studieplaner derefter". Styrelsen har ikke forsøgt at få et 2-årigt højt niveau indført, da det vil kræve en deling af eleverne efter 1. g.. Det er "en fordel at vente med delingen til efter 2. g. Flere elever - specielt flere piger - vil vælge det høje niveau, når det kun drejer sig om at vælge et 1-årigt forløb med 5 timer pr. uge".[139] For at afrunde det obligatoriske niveau foreslår styrelsen, at der indføres en obligatorisk skriftlig eksamen efter 2. g..

For den sproglige linjes matematikundervisning, som muligvis skal indgå i naturfag, da mener styrelsen, at "Elevernes matematiske udbytte bliver størst, hvis faget bliver formidlet både i selvstændige matematikundervisningsforløb og i samarbejde med andre fag omkring fælles temaer og emner...Endvidere har vi fremhævet, at eleverne gennem begge de to første gymnasieår skal opleve matematikforløb, hvor der dels samarbejdes med fysik-kemi, og dels samarbejdes med emner, som tilgodeser matematiks øvrige funktioner (f.eks. inden for økonomi og statistik)".[140]

Flere års debat og forslag til nyt indhold i matematikundervisningen i gymnasiet resulterer i bekendtgørelsen af 1987. (se kapitel 11)

[137] Jørgen Rothe; f. 1933; cand. mag. i matematik 1956; lærerkandidat 1963; ophold i Brasilien.
[138] LMFK 1987 nr. 2, s. 7
[139] LMFK 1987 nr. 3, s. 5
[140] LMFK 1987 nr. 3, s. 6

Kapitel 13 Lærebøger og studentereksamensopgaver

13. 1 Lærebøger til den sproglige linje

Hver gang der kommer en ny gymnasiebekendtgørelse, hvor det faglige indhold forandres, da skal der nye lærebøger til. Da matematikundervisningen genindføres for den sproglige linje, er der problemer med, hvad indholdet af undervisningen skal bestå i. Begrundelsen for at genindføre faget er, at de sproglige elever skal kunne søge ind på medicinstudiet uden tillægsprøve i matematik. Da pensum for undervisningen skal fastlægges, spørger man derfor de medicinske fakulteter, hvad der undervises i ved de eksisterende tillægskurser. Dette bliver pensum på sproglig linje, og generelt er der to lærebogssystemer i tankerne, som er egnede lærebøger til det formål. Det ene system af Poul Mogensen anvendes ved de matematiske tillægskurser ved medicinstudiet. Det andet er af Poul Rubinstein, og er skrevet på en meget teoretisk måde, som ikke kommer til at fungere i den sproglige undervisning. Det bliver for vanskeligt at læse for lærerne og endnu sværere for eleverne.[1]

Poul Rubinstein har i 1963 skrevet "Matematik for gymnasiets sproglige linie I-II". Bøgerne skal ifølge forfatteren indarbejde de nye begreber som mængdelære og algebra. Mængdelæren får også betydning ved anvendelser af matematik i fysik. "Tillige kan man opnå visse fordele i de fysiske anvendelser. F. eks. kan et elektrisk felt opfattes som en afbildning af en punktmængde ind i vektorrummet...Af hensyn til de fysiske anvendelser i skolen og under videregående uddannelser har jeg anset det for nødvendigt at behandle vektorbegrebet".[2]

"Matematik for gymnasiets sproglige linie I" udkom i 1963 og er tiltænkt at skulle benyttes til undervisningen i 1. g.. Den behandler emner som f. eks. mængdelære, algebra, afbildninger, vektorrummet og funktioner. Under emnet "afbildninger", der benyttes et eksempel med to landkort over jordens overflade til at illustrere at punktet x afbilder det samme punkt af jordens overflade som y.[3] Og under emnet "vektorer" står der ved et eksempel, at "vektorer spiller en stor rolle i fysikken, f. eks. til beskrivelse af kræfter, der virker på meget små legemer. Som matematisk model af et meget lille legeme kan man i mange opgaver bruge et punkt; dette kaldes en *partikel*".[4] Ved tilvækstfunktioner nævnes en situation, hvor en mand skal måle en bordplade for at finde arealet af en kvadratisk bordplade med usikkerhedsberegninger.[5] Indkomstskat er et eksempel ved skalaindkomst, og dette eksempel bruges ligeledes til at illustrere tilvækstfunktioner.[6]

"Matematik for gymnasiets sproglige linie II" udkom i 1965 og skal sammen med første del dække alle emner, som der efter bekendtgørelsen skal undervises i. Bogen omhandler

[1] "Den ny matematik i Danmark- en essaysamling", s. 102; LMFK 1989 nr. 5, s. 26.
[2] Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie, forord
[3] Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - første del, s. 52
[4] Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - første del, s. 123
[5] Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - første del, s. 132
[6] Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - første del, s. 145

analytisk geometri, integralregning, ringe, sandsynlighedsregning. Af virkelighedsorienterede emner er rentesregning medtaget. Under emnet grænseovergange med funktioner tager eksemplerne udgangspunkt i virkeligheden ved blandt andet at benytte en rutschebanes startpunkt til at vise relationen mellem start- og slutpunkt.[7] Ved emnet differensligning fremhæves et eksempel med stråling gennem en glasplade. [8] Endelig er rentesregning og annuitetslån medtaget.[9] Under emnet det bestemte integral, da fremhæves to eksempler, der skal vise "i praksis forekommende problemer, der begge fører til én og samme matematiske behandling". Det drejer sig om en skruefjeder, der påvirkes af kræfter, der trækker i den ene ende, mens den er fastspændt i den anden, og om et hus, der skal opvarmes set over et døgn, hvor varmetabet skal findes.[10] Ohms lov er med for at illustrere den harmoniske svingning og summerne deraf.[11] Genstandsområder som f.eks. forsikringspræmier, eksamenskarakterlodtrækning og regnvejrsdage er med i eksempler under sandsynlighedsregningen.[12] Og ved symmetriske sandsynlighedsfelter trækkes kugler op af en pose, kastes med terninger og spilles bridge.[13]

Poul Mogensen har med bøgerne "Matematisk Orientering - for gymnasiets sproglige linie I-II", der udkommer i henholdsvis 1964 og 1965, forsøgt at dække emnerne foreskrevet i bekendtgørelsen af 1961.

"Matematisk Orientering - for gymnasiets sproglige linie I" indeholder blandt andet emnerne afbildning af talpar, omvendt proportionalitet, trigonometriske funktioner, den lineære funktion og rentesregning. Ved emnet funktioner og herunder grafisk fremstilling introduceres begrebet afbildning ved at vise sammenhængen mellem et barns fødselsvægt og barnets alder indtil det 14. år, feberkurver ved et sygdomsforløb og lufttemperaturer gennem et døgn.[14] Ved proportionalitet er et eksempel med sammenhængen mellem en cyklists tilbagelagte vejstrækning og tid. Og den grafiske togplan er et eksempel, hvor to toge mødes, og det ene standser ved flere stationer end det andet. Mogensen skriver, at "når togembedsmændene skal fastlægge togtiderne, må de anvende den grafiske fremstilling...;kun derved kan de hurtigt og sikkert få overblik".[15] Under omvendt proportionalitet giver han et eksempel med trykket som funktion af rumfanget.[16] Ellers er emnet rentesregning og annuiteter en del af indholdet.[17] Mogensens bog har afsnit om praktiske anvendelser af trigonometri, brydningsloven og månens afstand og størrelse, der tager udgangspunkt i virkeligheden.[18] Der er opgaver bagest i bogen svarende til den gennemgåede teori. Nogle opgaver inddrager materiale fra Statistisk Årbog, hvor eleverne skal vise sammenhængen mellem tiden og data. Der drejer sig om en opgave,

---

7 Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - anden del, s. 57
8 Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - anden del, s. 141
9 Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - anden del, s. 146-159
10 Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - anden del, s. 183-186
11 Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - anden del, s. 253-262
12 Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie -anden del, s. 289-300
13 Rubinstein, P.: Matematik for gymnasiets sproglige linie - anden del, s. 300-302
14 Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 16-19
15 Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 28- 31
16 Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 61
17 Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 62-70
18 Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 100-105

hvor den årlige oversøiske udvandring i årene 1930-50 skal undersøges. Der skal tegnes en grafisk fremstilling over forløbet, og kurven skal diskuteres (iøjnefaldende omstændigheder ved dens forløb, forbindelseslinjernes betydning etc.).[19] En anden opgave består i at finde middeltemperaturer for de 12 måneder i 1950. Dette skal fremstilles grafisk sammen med normaltemperaturen over året.[20] Derudover findes opgaver, hvor to cykler med forskellig hastighed mødes, og nogle opgaver fra fysikken. F.eks. skal eleverne udregne, hvor meget 1 kg sprit fylder udfra kendskab til vægtfylden.[21] Der er ligeledes opgaver tilknyttet rentesregning, som jeg betegner anvendelser af matematik.[22]

"Matematisk Orientering - for det sproglige gymnasium II" indeholder for den sproglige linje en del nye emner. Det drejer sig om mængder og afbildning af disse, integralregning, differentialregning og anvendelser deraf, funktion af to variable, kombinatorik og sandsynlighedsregning. Den jævne bevægelse og et legemes fald i luft inddrages i indøvelsen af differentialregning.[23] Virkeligheden kommer ind i emnet "funktion af to variable" i forbindelse med niveaukurver i geodæsien.[24] Under sandsynlighedsregning omhandler eksemplerne de Mendelske nedarvningslove ved arveanlæg for blå og brune øjne og om sandsynligheden for at få et es i bridge. I teksten inddrages kortspil og terningkast.[25] Bagest i bogen findes opgaver til de gennemgåede emner. Det er ved opgaverne tilknyttet sandsynlighedsregning, at der kan tales om anvendelser af matematik. En opgave omhandler f. eks. sandsynligheden for en træffer i skydning.[26] Ellers er opgaverne mere regnetekniske opgaver.

Rubinstein og Mogensens lærebogssystemer er ikke helt velegnede til den sproglige linjes matematikundervisning, og andre initiativer er tiltrængte. Der udkommer dernæst en bog af Anders Bager (som jeg ikke har behandlet), men den er for særpræget til at være ideel. Da man skal afholde eksamen for det første hold, står man i en problematisk situation og er derfor nødt til at begrænse eksamen til få hold, hvor censoren er informeret om at se med venlige øjne på eksamenssituationerne.[27] For at undervisningen ikke skal lades i stikken tager fagkonsulenterne Frans Handest[28] og Erik Mortensen[29] initiativ til et nyt lærebogssystem for sproglige. De danner en gruppe på otte lærere og skriver en lærebog for de sproglige elever, som kommer til at være enerådende gennem 10 år. Overskuddet fra bogsalget går til "Georg Mohr-fonden", hvis renter skal anvendes til støtte til matematikundervisningen i gymnasiet.[30]

[19] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 129
[20] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 129-130
[21] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 130-131
[22] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 136-137 og 146
[23] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 33-36
[24] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 136
[25] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 156-160
[26] Mogensen, P.: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium I, s. 182-184
[27] LMFK 1989 nr. 5, s. 26
[28] Frans Handest; f. 1927; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse 1957-62; fagkonsulent 1962-67; rektor for Metropolitanskolen
[29] Erik Mortensen 1924-86; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse; fagkonsulent 1965-69; rektor for Vallensbæk Gymnasium; undervisningsdirektør 1981-86.
[30] "Den ny matematik i Danmark - en essaysamling", s. 103

"Matematik for sprogligt gymnasium 1 og 2" for den sproglige linje udkommer i 1968 og er skrevet af Stig Bülow, Frans Handest, Gudrun Jensen[31], Henrik Meyer, Erik Mortensen, Jette Reich, Leo Toft[32] og Kaj Vetter[33]. Forfatterne udtaler i forordet, at bøgerne har været gennemprøvet ved en række gymnasier i perioden 1966-1968. De er tiltænkt at skulle danne grundlag for undervisningsplanerne fra 1961 og kan stadig anvendes i 1968, hvor det ugentlige timetal for sproglige blev skåret ned i en revideret læseplan.[34]

"Matematik for sprogligt gymnasium 1" behandler blandt andet emner som udsagn, konjuktion, disjunktion, implikation og biimplikation, mængder, ligning af første grad, uligheder, koordinatsystemer, afstand mellem to punkter, afbildning, logaritmefunktion og regnestok. Emnet "anvendelse af trigonometriske funktioner på retvinklet trekant" omhandler omregning fra radiantal til gradtal og omvendt. Der er ikke i den første bog tekst, eksempler eller opgaver (som forfatterne kalder øvelser), der tager udgangspunkt i ikke-matematiske situationer, det vil sige kan betegnes som anvendelser, eller nævner ordet anvendelser.

"Matematik for sprogligt gymnasium 2" behandler emner som grænseværdi og kontinuitet, differential- og integralregning med anvendelser, eksponential- og logaritmefunktioner, rentesregning, kombinatorik og sandsynlighedsregning. Under emnet "Anvendelser af differentialregning og grafer" introduceres hastigheden af en partikel og den jævne bevægelse. Der tages udgangspunkt i en bils kørsel.[35] Der er et afsnit, "Et eksempel fra biologien", som drejer sig om populationsvækst.[36] Afsnittet "Eksempler fra samfundslære m. m." handler om, at statistisk materiale ofte bliver mere anskueligt, når det fremstilles grafisk. Der er øvelser tilknyttet med en graf over den funktion, der angiver landbrugseksporten. Her skal eleverne svare på spørgsmål ved hjælp af graferne om, hvornår landbrugseksporten var størst.[37] Der er ligeledes en øvelse omhandlende Nationalbankens valutabeholdning. Her skal eleverne ud fra opgivne data tegne en graf over beholdningen i forhold til måneder i året.[38] Afsnittet om anvendelser af integralregning omhandler dét at løse problemer inden for matematikken selv, f. eks. at finde rumfang af et omdrejningslegeme.[39] Af virkelighedsrelaterede emner er rentesregning og annuiteter behandlet i bogen.[40] I "Multiplikationsprincippet" bliver der i øvelserne blandt andet beregnet det maksimale antal mulige menuer ud fra et spisekort, anbragt fire bøger på forskellig måde i en bogreol, antal mulige kombinationer ved en

[31] Gudrun Jensen; f. 1915; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; lektor ved Ballerup Gymnasium 1965; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse 1965-1971.
[32] Leo Toft; f. 1919; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; seminarieadjunkt ved Århus Seminarium 1963; matematiklærer ved Risskov Gymnasium.
[33] Kaj Vetter; f. 1927; medlem af Matematiklærerforeningens styrelse 1966-67; fagkonsulent 1967-71; matematiklærer ved Sct. Knuds Gymnasium i Odense.
[34] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 1, s. 7
[35] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 64-65
[36] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 68-70
[37] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 71-72
[38] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 72-73
[39] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 91
[40] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 121-135

cykellås og antal måder at udtage genstande fra tre forskellige kasser.[41] "Kombinatorik" handler om, at eleverne skal beregne antal måder at sammensætte et rohold på, antal måder at danne et udvalg på og antal måder at fordele et selskab af mænd og kvinder på.[42] "Sandsynlighedsregning" tager udgangspunkt i møntkast i teksten, og i opgaverne skal eleverne foretage beregninger ved kast med terninger og mønter. De skal ligeledes hive kugler op af en krukke, finde sandsynligheder for at kuglerne er røde, at man ved terningkast får summen 4 og så videre.[43] I afsnittet "Stolpediagram. Blokdiagram. Frekvensfunktion" er en øvelse, der handler om at inddele soldater efter vægt, for derefter at finde den relative hyppighed af soldater der hører til den pågældende inddeling.[44]

13. 2 Lærebøger til den matematiske linje

Den nye matematiks indførelse smitter af på lærebøgerne. Der lægges vægt på forståelse af matematikkens opbygning og den matematiske tankegang, men der bliver samtidig åbnet op for overspringelser i den stringente opbygning, så kræfterne i stedet kan bruges på at lære at anvende matematikken i andre faglige sammenhænge.[45] "Det gjaldt i ganske usædvanlig høj grad for Kristensen og Rindung's bøger, der passede som hånd i handske til de nye læseplaner og dertil havde fine matematiske og pædagogiske kvaliteter."[46] Det vil være underligt andet, idet Ole Rindung som fagkonsulent selv har deltaget i udformningen af læseplanerne. Dette system bliver normdannende i årtier efter.[47]

Erik Kristensen og Ole Rindung skriver og udgiver lærebogssystemet "Matematik 1, 2 og 3" i perioden 1962-64. "Matematik 1" henvender sig ifølge forfatterne til 1. g. på matematisk linje, mens "Matematik 2" og "Matematik 3" henvender sig til den matematisk-fysiske gren. Kristensen og Rindung har til systemet udarbejdet opgavesamlinger. Lærebogssystemet udkommer i nye udgaver helt op til 1980.

"Matematik 1" omhandler blandt andet emnerne mængder og udsagn, talmængder, vektorer, den rette linies analytiske fremstillinger, afbildninger, reelle funktioner, ligninger og uligheder, algebra, praktiske anvendelser af logaritmefunktioner og geometriske anvendelser af trigonometriske funktioner. Under afsnittet om talfølger, differens- og kvotientrækker optræder tilskrivning af renter som et eksempel og en øvelse.[48] Kapitlet praktiske anvendelser af logaritmefunktionen omhandler brugen af regnestokken, opbygningen af logaritmisk papir og brugen af logaritmetabeller.[49] Med geometriske anvendelser af trigonometriske funktioner forstår forfatterne f.eks. at finde vinklen mellem to vektorer og vinklerne i en trekant.[50]

[41] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 135-140
[42] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 144-148
[43] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s. 148-164
[44] Bülow, S., Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2, s.168-172
[45] Matematiklærerforeningen 1931-81, s. 51
[46] Matematiklærerforeningen 1931-81, s. 51
[47] Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark I del, s. 201
[48] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 1, s. 172-174
[49] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 1, s. 272-288
[50] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 1, s. 320-321

"Matematik 2" indeholder blandt andet følgende emner kvantorer, reelle tal numerabilitet, kontinuitet og grænseværdi, differentialregning, integralregning, eksponential-, logaritme- og potensfunktioner, approximerede funktioner, afbildninger af planen ind i planen og ellipse, hyperbel og parabel. Ved kapitlet om differentialregning er der eksempler, der tager udgangspunkt i situationer uden for matematikkens eget område. Blandt andet er der eksempler med en bils antal kørte km og fart, skatteindbetaling, rumfangsforøgelse ved opvarmning af metalterning og en virksomheds vareafsætning.[51] Der er også eksempler med partikler, der bevæger sig under påvirkning af en kraft f.eks. tyngdekraften.[52] Under behandlingen af anvendelser af integralregning findes et eksempel med en by, hvor folketallet skal bestemmes udfra kendskab til befolkningstætheden, et eksempel med at finde en homogen stangs inertimoment og et eksempel med at finde rumfanget af et omdrejningslegeme.[53]

"Matematik 3" behandler emnerne kombinatorik, algebra, komplekse tal, geometri, polyedre, rumfang, overflader og Eulers polyedersætning. I kapitlet "Kombinatorik" er anvendelser af matematik indblandet i nogle eksempler. Der er tre eksempler, og de to af dem omhandler at trække kugler op af en urne.[54] Kapitlet "sandsynlighedsbegrebet" indledes med følgende: "I det praktiske liv kommer man ofte ud for at skulle gætte, om en bestemt begivenhed B vil indtræffe eller ej...Det kan f. eks. være tale om, at en bestemt terning viser 5 eller 6 øjne ved næste kast".[55] Eksemplerne omhandler sandsynligheden for at vinde i et lotteri, hvor der er n lodsedler og en præmie, sandsynligheden for, at en mønt giver plat, sandsynligheden for at det næste barn, der fødes i Danmark, bliver en pige.[56] I kapitlet "endeligt sandsynlighedsfelt" beregnes sandsynligheder for at trække bestemte kort i et kortspil, sandsynligheder for ikke-defekte enheder i et vareparti, sandsynligheden for at to personer i en klasse har fødselsdag samme dag.[57] I afsnittet "Sfæriske koordinater" bliver der i et par eksempler taget udgangspunkt i nogle byers placering på jorden, hvor de sfæriske koordinater skal findes, og når jorden betragtes som en kugle.[58]

De tilhørende opgavesamlinger "Opgaver til matematik 1, 2 og 3" indeholder ikke mange opgaver, hvor der er relationer til områder uden for matematikken selv. Der er til kapitlet om reelle tal en opgave om tre cykelryttere, der kører med forskellig hastighed og indhenter hinanden på et tidspunkt[59] og til kapitlet om afbildninger er der tre opgaver, som alle handler om at minimere udgifter ved f. eks. produktion.[60] I teorien om de hele tal køber en mand nogle flasker rødvin og hvidvin og betaler en bestemt pris i alt. Her skal man finde ud af, hvor mange flasker, han køber af hver.[61] Til integralregningen er

[51] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 2, s. 75
[52] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 2, s. 144-145
[53] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 2, s. 175-177
[54] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 3, s. 1-2
[55] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 3, s. 7
[56] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 3, s. 8-9
[57] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 3, s. 10-12
[58] Kristensen, E. og Rindung, O.: Matematik 3, s. 130
[59] Kristensen, E. og Rindung, O.: Opgaver til matematik 1, s. 24
[60] Kristensen, E. og Rindung, O.: Opgaver til matematik 1, s. 91-92
[61] Kristensen, E. og Rindung, O.: Opgaver til matematik 1, s. 116

knyttet opgaver om at finde rumfang af en væske, der gennemstrømmer et cylindrisk rør, finde inertimomentet af en cirkulær skive og en opgave om en ø med en biograf i centrum, hvor antallet af pladser skal udregnes.[62] Ellers er det ved teorien om kombinatorik at virkeligheden kommer ind i opgaverne. Der er ligesom i eksemplerne i lærebogen opgaver om sammensætning af menuer, dannelse af grupper til en lejrtur, anbringelse af familiemedlemmer omkring bordet til en julefrokost, kugler i en urne og klasseinddeling af skoleelever.[63] Og til kapitlet om sfæriske koordinater er der opgaver, der drejer sig om at finde afstande mellem givne byer.[64]

Meget hurtigt efter Kristensen og Rindung's lærebøger følger et andet lærebogssystem "Matematik for gymnasiet 1, 2A, 3A, 2B og 3B" af Poul O. Andersen, Stig Bülow og Hans Jørgen Helms, og bøgerne udkommer i perioden 1963-66. Der er skrevet lærebøger til både matematisk-fysisk gren, naturfaglig og samfundsfaglig gren. Lærebogssystemet vedblev at udkomme indtil 1979 med Torben Christoffersen som forfatter i stedet for Hans Jørgen Helms. Jeg har undersøgt et udvalg af bøgerne.

"Matematik for gymnasiet 1" er beregnet for 1. g. på matematisk linje efter den læseplan, der trådte i kraft 1963. Forfatterne Andersen, Helms og Bülow skriver i forordet, at af hensyn til matematikkens anvendelser i fysik og kemi har der fundet et samarbejde sted mellem fysik- og kemilærebogsforfatterne Frode Andersen, Hugo Asmussen, Ole Bostrup og K. G. Hansen. Indholdsmæssigt dækker "Matematik for gymnasiet 1" blandt andet emnerne aritmetik, numeriske metoder, mængdebegrebet, de reelle tal, ligninger, vektorer, logaritmefunktionen og trigonometri. Bogen inddrager ikke virkeligheden i mere end tre tilfælde. Det ene er ved "rentesregning og annuiteter".[65] Det andet er ved "lineær programmering", hvor den mindste udgift skal findes i nogle forskellige situationer.[66] Og det tredje omhandler "radioaktivt henfald".[67] Den tilhørende opgavebog indeholder nogle opgaver, der tager udgangspunkt i virkeligheden. Flertallet findes under emnerne "elementære begreber og sætninger", hvor tre opgaver omhandler kapital i en bank.[68] I tilknytning til "logaritmefunktioner" inddrages virkeligheden ved opgaver om svingningstallet for kammertoner, lufttrykket i højder, befolkningstal og kapitalvækst.[69] Derudover er der ingen opgaver med anvendelser af matematik.

"Matematik for gymnasiet 2B" henvender sig til matematikundervisningen i 2. g. på naturfaglig og samfundsfaglig gren. Der kommes ind på emnerne talmængder, kontinuitet, differentiable funktioner, integrable funktioner, anvendelser af infinitesimalregningen, specielle funktioner og differentialligninger. Denne bog er ikke udpræget anvendelsesorienteret. Det er kun i afsnittet "anvendelser af differentialligninger", at der én øvelse om radioaktivt henfald, og ét eksempel om

[62] Kristensen, E. og Rindung, O.: Opgaver til matematik 2, s. 68
[63] Kristensen, E. og Rindung, O.: Opgaver til matematik 3, s. 7-15
[64] Kristensen, E. og Rindung, O.: Opgaver til matematik 3, s. 57
[65] Andersen, P., Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 1, s. 262-265
[66] Andersen, P., Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 1, s. 248-251
[67] Andersen, P., Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 1, s. 373
[68] Andersen, P., Bülow, S. et al: Opgaver til matematik for gymnasiet 1, s. 10
[69] Andersen, P., Bülow, S. et al: Opgaver til matematik for gymnasiet 1, s. 80-82

strømstyrkes henfalden til 5% af sin begyndelsesværdi.[70] Ud af de få opgaver, der berører et virkelighedsområde i den tilhørende opgavesamling, da falder de 12 inden for emnet differentialligninger. De omhandler blandt andet omdannelse af sukker i en sukkeropløsning, befolkningsvækst, radioaktivt henfald og afkøling af et legeme.[71] De øvrige opgaver inddrager ikke anvendelser af matematik.

"Matematik for gymnasiet 3B" skal dække matematikundervisningen i 3. g. på den naturfaglige og samfundsfaglige gren. Emnerne i bogen er følgende: kombinatorik og sandsynlighedsregning. Herunder er der et afsnit om "sandsynlighedsregningens anvendelse på arvelighedslæren". Netop dette kapitel omhandler arvelighedslæren inden for forskellige felter f.eks. rød- og hvidblomstret ært, at blive smager eller ikke-smager, øjenfarve og malkekvægs farve.[72] Ellers handler det om at trække kugler op af en pose, sammensætte hold og så videre. Den tilhørende opgavesamling indeholder opgaver i emnerne kombinatorik og sandsynlighedsregning. Den er meget anvendelsesrelateret på den måde, at et stort flertal af opgaverne tager udgangspunkt i en situation udenfor matematikkens eget område. Der er opgaver, der handler om morsealfabetet, om sammensætningen af en kommité, om sammensætningen af forskelligfarvede sider i en salmebog, om sammensætningen af bøger på en hylde.[73] Opgaverne i sandsynlighedsregning omhandler alt lige fra at beregne, på hvor mange måder 2 brikker kan placeres på et skakbræt, finde sandsynligheder for plat og krone, finde sandsynligheden for at en mand får sin kone til bords ved et selskab, sandsynligheden for at få sin egen hat tilbage i teatergarderoben m. m..[74] Opgaver til afsnittet om anvendelser af sandsynligheder inden for arvelighedslæren handler hovedsageligt om øjenfarve ellers er det sandsynligheden for kort pels i forhold til lang hos marsvin og blomsterfarver, der stilles opgaver i.[75]

"Matematik for gymnasiet 2A" er til matematikundervisningen på den matematisk-fysiske gren i 2. g.. Forfatterne skriver i forordet: "Visse afsnit er medtaget for at afrunde stoffet og forsøge at give eleverne et indtryk af matematikkens mange aspekter. En del af dem kan således anvendes som grundlag for elevforedrag eller overlades interesserede elever til selvstudium. Sådanne afsnit er f. eks. uendelige rækker, det skrå kast, cykloiden, hypocykloiden...Ligeledes er afsnittene om tyngdepunkt og inertimoment medtaget for at illustrere, hvorledes matematiske betragtningsmåder finder anvendelse i fysikken." Indholdet består blandt andet af emnerne grænseværdi for talfølger, kontinuerte funktioner, differentiable funktioner, anvendelser af infinitesimalregningen, vektorfunktioner, keglesnit, specielle funktioner og differentialligninger. Som forfatterne selv skriver, da er afsnittene om tyngdepunkt og inertimoment henvendt til et samarbejde mellem fysik og matematik. Det efterfølges af tre eksempler på anvendelser af denne teori. Det drejer sig om en konisk formet vandbeholder, to skibe der nærmer sig hinanden og en mand der går hen imod et gadelys med en bestemt hastighed.[76] I

[70] Andersen, P., Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 2B, s. 209-212
[71] Andersen, P., Bülow, S. et al: Opgaver til matematik for gymnasiet 2B, s. 58-60
[72] Andersen, P., Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 3B, s. 73-80
[73] Andersen, P., Bülow, S. et al: Opgaver til matematik for gymnasiet 3B, s. 7-10
[74] Andersen, P., Bülow, S. et al: Opgaver til matematik for gymnasiet 3B, s. 12-30
[75] Andersen, P., Bülow, S. et al: Opgaver til matematik for gymnasiet 3B, s. 30-32
[76] Andersen, P., Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 2A, s. 224-227

"anvendelser af differentialligninger" er to eksempler om radioaktivt henfald og et legemes bevægelse på et vandret underlag tilknyttet.[77] I den tilhørende opgavesamling falder de anvendelsesorienterede opgaver inden for emnerne infinitesimalregning, bestemmelse af maksimum og minimum og differentialligninger. Opgaverne i differentialligninger er identiske med dem for naturfaglig og samfundsfaglig gren.[78] Der er ikke mange anvendelsesorienterede opgaver i denne bog.

Ole W. Olsens[79] lærebogssystem "Kombinatorik og Sandsynlighedsregning" "Matematik M1", "Matematik NS" og "Matematik MF" udkommer første gang i perioden 1979-1982. Sammen er bøgerne tiltænkt at skulle dække undervisningen i matematik på den matematiske linje efter bekendtgørelsen af 1971. Bøgerne er udarbejdet sådan, at eleverne skal regne øvelserne i bogen. Ole W. Olsen har senere udarbejdet et nyt lærebogssystem til gymnasiebekendtgørelsen af 1987.

"Matematik M1" er beregnet til undervisning i 1. g på matematiske linje og omhandler blandt andet emnerne mængder, funktioner, polynomier, trigonometri, vektorer og eksponentiel vækst. Der er meget få tilfælde, hvor anvendelser inddrages. Der er ét eksempel i kapitlet om vektorer, hvor der relateres til fysik.[80] Ellers inddrages eksempler om forrentning i banken og bakterievækst i kapitlet om "eksponentiel vækst". Der er øvelser tilknyttet emnet, som handler om befolkningsvækst, dyrevækst, bakterievækst og forrentning i banken.[81]

"Matematik NS" behandler blandt andet emnerne trigonometri, differentialregning, integraler og logaritme-, potens- og eksponentialfunktioner. Bogen skal dække matematikundervisningen på den samfundsfaglige og naturfaglige gren. Under teorien om eksponentialfunktioner er ét eksempel om populationsvækst og én øvelse tilknyttet emnet.[82] Derudover omhandler bogen ikke ikke-matematiske situationer.

"Matematik MF" skal benyttes til undervisningen på matematisk-fysisk gren. Der er i bogen emner om blandt andet trigonometri, differentialer, asymptoter, potens-, logaritme- og eksponentialfunktioner, integraler, differentialligninger og vektorfunktioner. Selve bogen er ikke domineret af teori, eksempler eller øvelser fra ikke-matematiske situationer. Under emnet differentialkvotient nævnes det frie fald.[83] Og ved kapitlet om eksponentialfunktioner opstilles en matematisk model over populationsvækst, og i samme kapitel tilknyttes en opgave om bakterievækst.[84] Bakterievækst nævnes senere i forbindelse med et eksempel under emnet differentialligninger.[85]

[77] Andersen, P., Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 2A, s. 321-324
[78] Andersen, P., Bülow, S. et al: Opgaver til matematik for gymnasiet 2A, s. 90-92
[79] Ole W. Olsen; f. 1936; cand. mag. i matematik og fysik; adjunkt ved Næstved Gymnasium 1964
[80] Olsen, O. W.: Matematik M1, s. 214
[81] Olsen, O. W.: Matematik M1, s. 294-300 og 311
[82] Olsen, O. W.: Matematik NS, s. 177, 180 og 181
[83] Olsen, O. W.: Matematik MF, s. 44
[84] Olsen, O. W.: Matematik MF, s. 177-181
[85] Olsen, O. W.: Matematik MF, s. 213-214

"Kombinatorik og sandsynlighedsregning" skal sammen med bøgerne til henholdsvis 1. g. matematisk-fysisk gren og samfundsfaglig og naturfaglig gren dække det fulde pensum til disse grene. Af kapitler er der blandt andet deskriptiv statistik, permutationer og kombinationer, betinget sandsynlighed, binomialfordelingen og normalfordelingen. Genstandsområder er i denne bog blandt andet primærkommuners gennemsnitsstørrelse, og soldaters højde i kapitlet i emnet om "deskriptiv statistik".[86] Under emnet "Tællemetoder" skal der sammensættes menuer, grupper i en skoleklasse, findes antal kombinationer på en cykellås og farvelægning i en malebog.[87] I kapitlet "Permutationer og kombinationer" findes en øvelse, hvor nogle mennesker leger en selskabsleg, og hvor den ene er en løgner.[88] Kapitlet om "Sandsynlighedsbegrebet" omhandler et eksempel, hvor sandsynligheden for at finde en venstreorienteret lærer skal findes. For at kunne svare på det, har Ole Olsen taget nogle indledende modelforsøg med. De drejer sig at tage kugler op af en krukke.[89]

Serien teori og redskab er endnu et bud på lærebøger til det matematiske gymnasium. Bøgerne er skrevet af Steffen Jensen[90] og Karin Sørensen[91] og udgivet første gang i perioden 1980-1983. Systemet omfatter bøgerne "Funktioner og vektorer: Teori og redskab", "Differentialregning: Teori og redskab", "Plangeometri og algebra: Teori og redskab", "Statistik og sandsynlighed: Teori og redskab" og "Matematik: Teori og redskab". Der er i samme system senere udarbejdet et lærebogssystem til matematikundervisningen efter gymnasiebekendtgørelsen af 1987. Jeg har valgt at bearbejde et udvalg af bøgerne.

"Funktioner og vektorer: Teori og redskab" skal dække undervisningen i matematisk 1. g. I forordet gør Jensen og Sørensen opmærksom på: "I forbindelse med beskrivelserne af anvendelsesområder af teoridelens matematik er anført en række opgaver (A-opgaver). Anvendelserne kan integreres i undervisningen, eller de kan danne oplæg til tværfagligt samarbejde". Af teori indeholder bogen blandt andet afbildninger, vektorer, talmængder, ligninger og uligheder, punktmængder i planen, trigonometriske funktioner og eksponentialfunktioner. Forfatterne har anført en liste over "anvendelser". Den indeholder blandt andet bevismetoder, eksponentiel vækst, numeriske metoder, rentesregning, svingninger, usikkerhedsberegninger og vektorer. Bogen relaterer ikke én gang til områder fra virkeligheden i teoridelen og i de tilhørende opgaver, hvilket er et bevidst valg fra forfatternes side. Bagest i bogen er der i stedet et kapitel om "anvendelser".[92] Afsnittet om eksponentiel vækst omhandler opgaver i bakterievækst og radioaktivt henfald.[93] Der er få opgaver om anvendelser af matematik. De, der er, omhandler strålingsintensitet, en jordskælvsrystelse, verdensrekorder over løb, afsætningspris, rentesregning og en lysstråles brydningsforhold. Der er meget lidt

[86] Olsen, O. W.: Matematik S, s. 7-12
[87] Olsen, O. W.: Matematik S, s. 17-27
[88] Olsen, O. W.: Matematik S, s. 32
[89] Olsen, O. W.: Matematik S, s. 59-60
[90] Steffen Jensen; lærer i matematik og fysik; p. t. undervisningsinspektør
[91] Karin Sørensen; lærer i matematik ved København Dag- og Aftenseminarium
[92] Jensen S. og Sørensen, K.: Funktioner og vektorer - Teori og redskab, s. 327
[93] Jensen S. og Sørensen, K.: Funktioner og vektorer - Teori og redskab, s. 330-332

teoretisk stof i kapitlet om anvendelser. Det er kun i relation til en opgave, at det inddrages.[94]

"Differentialregning: Teori og redskab" er tiltænkt at dække matematikundervisningen i 2. g. på matematisk-fysisk gren. Indholdet består af teori omkring grænseværdi og asymptoter, de reelle tal, kontinuitet, differentialregning, funktionsundersøgelse, logaritme- og eksponentialfunktioner, ubestemt og bestemt integral og differentialligninger. Derudover findes bagest i bogen et kapitel[95], "anvendelser", der omhandler afsætningsøkonomi, inertimomenter, optik, vækst, radioaktivitet. Der er afsnittet om afsætningsøkonomi[96], kemi[97], optimeringsproblemer[98] og om radioaktivitet og vækst[99], der omhandler anvendelser. Det er i opgaver og ikke i teorien, at det foregår. Der er meget lidt teori i dette kapitel.

"Plangeometri og algebra: Teori og redskab" skal dække undervisningen på gymnasiets matematisk-fysiske gren i 2. g. og 3. g.. Teoridelen omhandler blandt andet talteori, algebra, lineære funktioner, vektorfunktioner, transformationer, parabler og ellipser. Anvendelseskapitlet[100] bagest i bogen består af afsnit om banekurver, komplekse tal, polære koordinater og positionssystemer. Afsnittene om komplekse tal og kurvelængde og areal, polære koordinater og positionssystemer hører ikke til definitionen anvendelser af matematik, da der ikke relateres til virkeligheden eller tager udgangspunkt i en virkelig situation. Der er ingen opgaver, eksempler eller noget teori, der kan falde ind under definitionen omkring anvendelser af matematik. Der bliver ikke taget udgangspunkt i virkeligheden.

"Statistik og sandsynlighed: Teori og redskab" skal dække teori omkring statistik og sandsynlighed på alle grene i det matematiske gymnasium. De behandlede emner er blandt andet kombinatorik, observationssæt, endelige sandsynlighedsfelter, stokastiske variable, binomialfordelingen, kontinuerte fordelinger og normalfordelinger. Igen indeholder bogen et kapitel[101], "anvendelser", hvor der er opgaver inden for genetik, test, spil, regression, stikprøver og opinionsundersøgelser. Der behandles ikke anvendelser af matematik i den teoretiske del. Det sker først i anvendelseskapitlet. Her relateres de fleste opgaver i alle afsnit til virkeligheden.

Gads Matematik er et emneopdelt lærebogssystem, som er tiltænkt at skulle dække den nye forsøgsbekendtgørelse fra 1984. Flertallet af bøgerne i serien udkom i 1986. Jeg har udvalgt emnebøgerne om "Tal", "Funktioner" og "Geometri" til nærmere undersøgelse. De var de første tre bøger i systemet og udkom i den nævnte rækkefølge. Der var på det tidspunkt planer om flere bøger om emnerne differentialregning, statistik og sandsynlighedsregning, algoritmer og numerisk analyse, eksponential- og

[94] Jensen S. og Sørensen, K.: Funktioner og vektorer - Teori og redskab, s. 332-354
[95] Jensen S. og Sørensen, K.: Differentialregning - Teori og redskab, s. 288
[96] Jensen S. og Sørensen, K.: Differentialregning - Teori og redskab, s. 288-290
[97] Jensen S. og Sørensen, K.: Differentialregning - Teori og redskab, s. 300-302
[98] Jensen S. og Sørensen, K.: Differentialregning - Teori og redskab, s. 315-317
[99] Jensen S. og Sørensen, K.: Differentialregning - Teori og redskab, s. 319-328
[100] Jensen S. og Sørensen, K.: Plangeometri og algebra - Teori og redskab, s. 193
[101] Sørensen, K. og Jensen S.: Statistik og sandsynlighedsregning - Teori og redskab, s. 163-201

logaritmefunktioner, integralregning og differentialligninger og vektorer og rumgeometri undervejs. Der er forskellige forfattere til de enkelte bøger, som alle er redigeret af Ib Axelsen. Lærebogssystemet udkommer senere i en anden udgave henvendt til bekendtgørelsen af 1987.

"Tal" af Ib Axelsen og Hans Jørgen Schrøder[102] behandler emnerne: talmængder, ligninger og uligheder, potens og rod og procentregning. "Integreret i teksten er det historisk-filosofiske aspekt og datalogiaspektet. Disse aspekter uddybes naturligt med opgaver. Ved arbejdet med bogen udgør teksten og de valgte opgaver således tilsammen behandlingen af emnet med de to aspekter." Det vil sige, at bogen ikke forsøger at dække modelaspektet. I kapitlet om procentregning med afsnit om vejet gennemsnit og indekstal inddrages virkelige situationer.[103] Det samme gør sig gældende i de tilhørende opgaver.

"Funktioner" af Niels Holm Larsen[104], Gerhard Offenberg[105] og Inge Wendell Petersen[106] er lagt op til, at man på naturlig måde kan inddrage modelaspektet, det historisk-filosofiske aspekt og datalogiaspektet i undervisningen. Af emner behandler bogen funktionsbegrebet, lineære funktioner, polynomier og trigonometriske funktioner. Funktionsbegrebet indledes med et eksempel om en butik, hvor der sælges tomater til en bestemt pris pr. kilo, og situationen vises senere ved en graf.[107] Der er tilknyttet et eksempel og en opgave omkring temperatursvingninger over et døgn.[108] Ved funktionstilvækst illustrerer en graf temperaturstigninger ved opvarmning af en ovn.[109] Til afsnittet om anvendelser af lineære funktioner er et eksempel og en opgave om et fysisk eksperiment og trækkraften, der indgår i dét forsøg.[110] Ved afsnittet om stykkevis lineære funktioner inddrages skattevæsenet[111], i afsnittet om sammensatte funktioner inddrages Ohms lov[112], og i afsnittet om anvendelser af trigonometri og harmoniske svingninger udregnes lydbølger.[113] Det er inden for stort set de samme emner, at der forekommer virkelighedsrelaterede opgaver i den tilhørende opgavesamling bagest i bogen. Der er derudover en opgave, hvor eleverne ud fra en pjece fra SU-styrelsen skal beregne SU ud fra en lineær funktion.[114]

"Geometri" af Ib Axelsen forsøger ikke at dække modelaspektet, for Ib Axelsen giver i forordet kun udtryk for at dække det historisk-filosofiske aspekt og matematikken som erkendelsesform. Bogen behandler emnerne klassisk geometri, analytisk geometri og

[102] Hans Jørgen Schrøder; lærer i matematik ved Skanderborg Amtsgymnasium
[103] Axelsen, I. og Schrøder, H. J.: Tal, s. 60
[104] Niels Holm Larsen; lærer i matematik ved Risskov Amtsgymnasium
[105] Gerhard Offenberg; lærer i matematik, fysik og naturfag ved Risskov Amtsgymnasium
[106] Inge Wendell Petersen; f. 1937; cand. mag. i matematik, fysik, kemi og astronomi; seminarieadjunkt ved Århus Seminarium 1963; lærer i matematik ved Risskov Amtsgymnasium
[107] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 7-9
[108] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 14-15
[109] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 22
[110] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 28-30
[111] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 35
[112] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 46
[113] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 86-88 og 94
[114] Larsen, N. H., Offenberg, G. et al: Funktioner, s. 106

vektorer. Der er ingen anvendelser i teorien, men i de tilhørende opgaver findes opgaver fra hf-eksamener om en stige op af en mur med en bestemt hældning[115], og ellers er der opgaver taget fra fysik med beregninger af krafters påvirkning[116].

13. 3 Andre typer af danske lærebøger

Siden 60'erne har der til tider været en bestemmelse om, at matematikundervisningen skal omfatte et valgfrit emne. Her er der mulighed for, at eleverne og læreren kan fordybe sig i et selvvalgt emne. En stor del bøger udkommer til dette formål på mindre forlag og er derfor lidt primitive af udseende. Men den deraf følgende lave pris medfører, at mange gymnasier har mulighed for at indkøbe disse. Det drejer sig blandt andet om bøgerne fra Georg Mohr Fonden.

I 1972 udskriver Georg Mohr Fonden en opgave om en disposition til beskrivelse af matematiks anvendelse inden for forskellige fagområder. Konkurrencen vindes af nogle matematikere fra Århus Universitet, og det fører til en samling bøger med titlen "Matematiks anvendelse i ...":

Søren Lützen: Matematiks anvendelse i psykologi. - København: Munksgaard, 1975.

Detlef J. Dohrn, Lilian Kirkegaard og Annette Nielsen: Matematiks anvendelse i samfundsfag. - København: Munksgaard, 1975.

Jonny Schultz: Matematiks anvendelse i biologi. - København: Munksgaard, 1974.

Annette Makholm Nielsen: Matematiks anvendelse i informationsteori. - København: Munksgaard, 1977.

Derudover har jeg fundet yderligere nogle stykker, som jeg vil nævne:

Mogens Brun Heefelt: Differentialligningsmodeller. - København: Gyldendalske Boghandel, 1980.

Kirsten Hermann og Mogens Niss: Beskæftigelsesmodellen i SMEC III - en autentisk matematisk model. København: Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck A/S, 1982.

Allan Tarp: Matematiske Vækstmodeller. - Grenå: GMT, 1974.

Allan Tarp: Spilteori og afstemningsteori. - Grenå: GMT, 1973

Morten Blomhøj og Klavs Frisdahl: Model-snak - differentialligningsmodeller. - Frederikssund: Forlaget FAG, 1985.

[115] Axelsen, I.: Geometri, s. 89 og 91
[116] Axelsen, I.: Geometri, s. 100-101 og 104-105

Bent Zimmermann Nielsen: Matematiske fiskerimodeller. - Herning: Forlaget systime, 1985.

13. 4 Studentereksamensopgaver 1960-88[117]

Hvis man skal tale om særlige kendetegn ved studentereksamensopgaverne fra 1960 til 1966 er det manglen på virkelighedsrelaterede opgaver. Ved eksamen for den naturfaglige gren i 1966 er en opgave i sandsynlighedsregning, hvor situationen omhandler nogle personer, der spiller et spil. Sandsynligheden for blandt andet ikke at vinde skal beregnes. I 1967 er der for den matematisk-fysiske gren en opgave også i sandsynlighedsregning, hvor sedler lægges i en urne, og her skal beregnes sandsynligheden for, at den samlede gevinst bliver på et bestemt antal kroner. En tilsvarende opgave er der ved eksamen for den naturfaglige gren i 1967 og i 1968. Ved eksamen for den matematisk-fysiske gren 1970 er en opgave om en virksomhed, hvor et antal arbejdere skal udvælges til en særlig opgave. Og ved den samfundsfaglige og naturfaglige eksamen 1970 bliver igen trukket kugler fra en krukke. Denne type opgave dukker op med jævne mellemrum i perioden. Det matematiske indhold er stort set éns. Ellers findes en del opgaver om møntkast og som nævnt kugleudtrækning.

Denne type opgaver i sandsynlighedsregning fortsætter ind i 70'erne. Ved den samfundsfaglige og naturfaglige eksamen i 1971 er en opgave, hvor en fabrik skal udtage stikprøver af deres produktion. Igen i 1974 skal der foretages stikprøver på en fabrik, der producerer tøjklemmer. I 1975 er en opgave i sandsynlighedsregning, hvor det drejer sig om fodbold. En stikprøveopgave med en fabriks produktion af el-pærer ses ved den samfundsfaglige og naturfaglige eksamen i 1975, og ved den matematisk-fysiske grens eksamen i 1977 handler det om fejl ved danske billygter og sandsynligheden for at finde fejl ved mekanikerens arbejde. Ved den matematisk-fysisk gren i 1978 drejer det sig om at finde sandsynligheden for fejl i en produktion.

Den første eksamensopgave, hvor genstandsområdet er blodsukkerkoncentration i blodet og fra biologiens verden, kommer ved den samfundsfaglige og naturfaglige grens eksamen i 1977, og det matematiske indhold er om voksende funktioner. Denne eksamen er et vendepunkt med hensyn til anvendelsesorienterede opgaver. I 1978 handler det ved den matematiske-fysiske eksamen om at optimere en lastbils fart ved kørsel på motorvej sammen med oplysninger om chaufførens løn. Ved eksamen i 1979 skal de matematisk-fysiske elever løse en opgave inden for emnet rentesregning. Og ved den matematisk-fysiske eksamen i 1979 er der en opgave med en rundskåren nederdel til en pige, hvor et cirkeludsnit skal udklippes af nederdelen, der ligeså skal udklippes af et stykke stof givet ved et særligt mål.

I en opgave fra 1979 skal de natur- og samfundsfaglige elever fortolke en matematisk model til beskrivelse af fangstudbyttet ved fiskeri. Modellen er en vækstmodel. I 1980 handler det om at optimere en løbebane med hensyn til areal. Samme år er der en opgave med radioaktivt nedfald, hvor det matematiske indhold drejer sig om eksponentiel

[117] A. Lomholt: Eksamensopgaver fra matematisk artium September 1950 - september 1964; Skriftlige opgaver fra Studentereksamen 1966-74; Skriftlige opgaver fra studentereksamen 1974-89.

aftagende vækst. Der er ligelèdes en opgave i sammenhængen mellem koncertsalsvolumen og orkesterstørrelse, og hastigheden hvormed luftpartikler hostes ud. Afstandsbestemmelse er knyttet til en situation omkring nedlægning af vandrør, hvor prisen skal minimeres i forhold til afstanden.

Ellers begynder der at blive inddraget avisartikler med problemstillinger, som matematificeres. Som f.eks. i en opgave ved den matematisk-fysiske grens eksamen i 1981 hvor der er udklip fra en artikel, hvor Ove Nathan fortæller om en fysisk model til beskrivelse af halveringstiden for en proton. Eleverne skal via beregninger vurdere artiklen og modellens udsagn. Ved den samfundsfaglige og naturfaglige grens eksamen i 1982 skal eleverne ved hjælp af eksponentiel vækst vurdere en artikels udsagn om befolkningstallet i Mexico City. Sandsynlighedsregning inddrages i samme sæt ved, at der skal bygges diger, hvor sandsynligheden for at diget oversvømmes skal være under en vis størrelse. Der bliver også inddraget fra andre opgaver. F.eks. er der ved den matematisk-fysiske eksamen fra 1983 inddraget en artikel fra Dansk Orgelårbog 1981/82 om akustiske forhold i danske kirker. Her skal eleverne bestemme forskriften for den funktion, der beskriver efterklangstiden som funktion af frekvensen

Ellers ændres genstandsfelterne i opgaverne op gennem 80'erne. Det kan dreje sig om blyforurening i motorvejsgræsset 1984, vejslid på køretøjers akseltryk 1984, intelligenskvotienten hos et tilfældigt barn 1984, en kemisk reaktion givet ved en differentialligning 1984, arvelighed af allergi 1985, spildevandsudledning i vandløb 1985, skatteregler ved befordringsfradrag 1985, sandsynlighed for arbejdsskader 1986, planlægning af skovbrug 1986, vandstanden i en bestemt havn 1986, radioaktive atomer 1987, sandsynligheden for at KTAS' mønttelefoner virker 1987, artikel og opgave i sandsynlighed for væksthæmmet foster 1986, bygningers lydisolering 1988, kontrol med udledningstilladelser for kommunale rensningsanlæg 1988, vægten af dåseøl i en normalfordelingsopgave 1988, varmebehandlingstiden for mælk 1988, og endelig normalfordelt fødselsvægt for danske børn 1988.

Kapitel 14 Analyse3

Dette afsnit skal analysere, hvad der kommer til udtryk om anvendelser af matematik i debat, bekendtgørelser, lærebøger og i studentereksamensopgaver. Lærebøgerne er sammen med studentereksamensopgaverne den eneste kilde til, hvad der kan være foregået i undervisningen, idet der ikke findes mundtlige kilder til at belyse, hvad der kan være foregået i undervisningen. Ved en analyse af dette materiale er det derfor muligt at give et kvalificeret bud på, hvad der er inddraget omkring anvendelser af matematik i undervisningen. Det kan ikke udelukkes, at dygtige og engagerede lærere selv har suppleret med materiale udover lærebøgerne, eller har valgt dele ud fra lærebøgerne til undervisningsbrug. Studentereksamensopgaverne virker tilbage på undervisningen, hvorfor det er interessant at analysere disse for anvendelser af matematik. Jeg har analyseret samtlige studentereksamensopgaver i perioden.

14. 1 Hvad skal der foregå omkring anvendelser af matematik i 1961?

I den røde betænkning af 1960 og bekendtgørelsen af 1961 bliver samarbejdet mellem matematik og andre fag betonet. På den samfundsmatematiske og naturfaglige gren er undervisningen koncentreret om funktionsbegrebet, mens geometri forsvinder som genkendelig disciplin. Dette sker, for at matematikundervisningen på disse grene skal omfatte dele af matematikken, "der fører frem til videregående resultater, og som samtidig spiller en fremtrædende rolle for anvendelserne". Det viser, som det tidligere er set, at det er funktionsbegrebet, der sættes i forbindelse med anvendelser. Det er opfattelsen af, at det er noget matematik, der kan bruges til anvendelser og andet ikke. Der foreslås, at der inddrages opgaver, der omhandler anvendelser af matematik inden for andre fagområder.

På den matematisk-fysiske gren, skal undervisningen ligeledes "gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder". "Der bør lejlighedsvis gives eksempler og opgaver hentet fra andre fagområder". Det ses her, at man på matematisk-fysisk linje vil gøre eleverne fortrolige med anvendelser af matematik, og det skal tilsyneladende foregå i opgaver og eksempler - ikke i teorien. Ved emnet "anvendelser af infinitesimalregning" kan man se, at der kan medtages simple beregninger af inertimomenter og tyngdepunktsbestemmelser. Det er igen et eksempel på, at når der tales om anvendelser på den matematisk-fysiske gren, er det området fysik, der fremhæves.

Ved indførelsen af det valgfri emne åbnes mulighed for at inddrage andre matematiske områder og anvendelser af matematik, end dem der er foreskrevet i emnelisten. Der fremhæves blandt andet "Endelig kan det valgfri emne tilrettelægges i samarbejde med andre fag end fysik. Som eksempel herpå kan nævnes sandsynlighedsregning og arvelighedslære". Det, der står her, er, at sandsynlighedsregning er et oplagt emne at samarbejde med i det valgfri emne, og arvelighedslære kan være en del af det. Men der er ifølge min definition ikke tale om anvendelser af matematik, hvis det drejer sig om "ren" sandsynlighedsregning. Det afhænger af om, der inddrages virkelighedsområder i behandlingen af det. Hvis arvelighedslære inddrages, er der tale om anvendelser ifølge definitionen. Det kan tyde på, at forsøgene med sandsynlighedsregning i gymnasiet fra sidst i 50'erne har haft indflydelse på betænkningen.

På den sproglige linje skal man arbejde med rentesregning. Der skal i matematikundervisningen "gives eksempler på matematikkens anvendelse inden for andre fag blandt andet bør en række eksempler hentet fra fysikken medtages". Igen ses det, at når det handler om anvendelser, da er det i eksemplerne og i relation til fysik.

På den matematiske linje er der for alle tre grene anført, at der "desuden bør lejlighedsvis stilles opgaver, som giver anledning til at undersøge, om der er hvervet forståelse af matematikkens anvendelse inden for andre fagområder". Igen er det i opgaverne, at anvendelser skal ind i undervisningen, og at opgaverne skal tjene til at undersøge forståelser, ikke til at skabe dem. Når det hovedsageligt er i opgaverne, at anvendelserne kommer ind, da kan det skyldes en opfattelse af, at når blot teorien er lært, så kan anvendelsen af matematik finde sted af sig selv. Der gøres i den forbindelse opmærksom på, at de ikke-matematiske forudsætninger i opgaverne skal præciseres. Det viser, at der er en vis bekymring for, om anvendelserne vil blokere for at kunne løse dem.

14. 2 Hvad diskuteres omkring anvendelser af matematik 1961-71?

I perioden 1961-71 handler diskussionen om, hvorvidt at pensum for matematik i gymnasiet er for omfangsrigt. Der er delte meninger omkring det gode ved den nye bekendtgørelse af 1961. Det positive ved den er, at samarbejdet mellem matematik og fysik er blevet styrket. Det kommer både Anders Bager og Leif Nedergaard- Hansen ind på. Bager udtaler: "Det vil nok glæde både matematik- og fysiklærere, at analytisk rumgeometri og vektorregning med skalarprodukt i plan og rum nu medtages i pensum. Jeg ser også velvilligt på, at regnestok indføres, medens brug af tabellerede logaritmer indskrænkes. Dette er et skridt hen imod anvendelsernes praksis". Dette er et eksempel på, at brug af en regnestok opfattes som et middel i forbindelse med anvendelser af matematik. Det viser ligeledes, at det er vigtigt for både fysik og matematik, at det faglige indhold er koordineret i forhold til hinanden. Det gælder især på området vektorbegrebet.

14. 3 Hvordan inddrages anvendelser af matematik 1961-71?

Lærebøger til sproglig linje

Poul Rubinstein skriver i forordet til "Matematik for gymnasiets sproglige linje I-II", at meningen med bøgerne er at indarbejde nye begreber som mængdelære og algebra. "Af hensyn til de fysiske anvendelser i skolen og under videregående uddannelser har jeg anset det for nødvendigt at behandle vektorbegrebet". Han siger dermed, at han har matematisk stof med af hensyn til anvendelser af matematik i andre fag. Det er igen vektorbegrebet, der er vigtigt for de fysiske anvendelser og ved de videregående uddannelser. Det er et argument om nytte, der får ham til at inddrage begrebet.

Der bliver i bogen inddraget anvendelser, og det ses mest tydeligt ved det matematiske område tilvækstfunktioner. Der er et eksempel med skalaindkomst, hvor der gennemgås, hvordan indkomstskat beregnes. Efter gennemgangen nås der frem til en skala, som skatten beregnes i forhold til:

Skalaindkomst	Indkomstskat til staten
3000 kr. og derunder	0 kr.
over 3000 - 5000 kr.	0 kr. af 3000 kr., af resten 10%
„ 5000 - 6000 kr.	200 kr. af 5000 kr., „ „ 12%
„ 6000 - 8000 kr.	320 kr. af 6000 kr., „ „ 20%
„ 8000 - 14000 kr.	720 kr. af 8000 kr., „ „ 24%
„ 14000 - 18000 kr.	2160 kr. af 14000 kr., „ „ 50%
„ 18000 - 50000 kr.	4160 kr. af 18000 kr., „ „ 68%

Bevis, at grafen består af rette liniestykker, og kontrollér, at den stiplede punktmængde er grafen.

Dette er et autentisk eksempel på en matematikanvendelse. Elevarbejdet består i, at bevise, at grafen består af rette linjestykker. Der er ingen overvejelser omkring anvendelsen. Formålet med eksemplet må da være at motivere eleverne til indlæring (argument 5) samt at vise, at skatteskalaen er stykkevis lineær.

Ordet model forklarer Rubinstein på denne måde: "Vektorer spiller en stor rolle i fysikken, f. eks. til beskrivelse af kræfter, der virker på meget små legemer. Som matematisk model af et meget lille legeme kan man i mange opgaver bruge et punkt; dette punkt kaldes en partikel."

Hvis et punkt er en repræsentation af et meget lille legeme, så er et punkt en matematisk model for det meget lille legeme. Dette eksempel bevæger sig på grænsen af, hvad der kan kaldes for anvendelser, idet det ikke-matematiske islæt er minimalt og er et legeme og krafter et ikke-matematisk genstandsområde? I formuleringen kan det ses, at netop vektorer spiller en rolle for fysikken. Sådan er det i hele bogsystemet, hvor anvendelserne er i relation til fysik. Genstandsområderne er blandt andet om stråling gennem en glasplade, opvarmning af et hus, en skruefjeder, der påvirkes af kræfter og Ohms lov. Der er ligeledes et kapitel om rentesregning. Der er tilknyttet øvelser og eksemplerne til kapitlet, der omhandler alle anvendelser af matematik. Der er tale om autentiske anvendelser, idet resultatet benyttes i den verden, matematikken anvendes i.

Han har ligeledes opgaver i sandsynlighedsregning, hvor der skal kastes med terninger. Denne type opgave hører under definitionen omkring anvendelser, men det er en retorisk angivelse af en virkelighed, hvor terninger er et andet ord for genstande. Der er ikke noget oversættelsesjob for eleverne ved opgaven, og indholdet af virkeligheden er uden betydning for opgaven. Det kan derfor kun være et spørgsmål om at motivere eleverne til at tilegne sig stoffet (argument 5), der får Rubinstein til at udarbejde sådan en opgave.

Der er lidt anderledes med Poul Mogensens bøger, idet han ikke udelukkende relaterer matematik til fysik. Han inddrager også genstandsområderne astronomi og biologi. Det er kendetegnende ved hans bog, at den ligesom hans tidligere bøger inddrager virkeligheden ved emnet grafisk fremstilling, funktioner, sandsynlighedsregning og rentesregning.

Han inddrager et eksempel med en gæld, der skal forrentes og afdrages. Dette eksempel viser, at der findes autentiske situationer, som ser således ud, hvor resultatet kan bruges i den verden, matematikken beskriver:

Eks. 10. En gæld på 25000 kr. skal forrentes og afdrages ved 10 lige store udbetalinger, som erlægges med 1 års mellemrum, første gang et år efter gældens stiftelse. Hvor stort skal det årlige beløb være, når der regnes med 4% p.a. i rente? – Fremstil forholdene ved hjælp af en tidslinie, som i eks. 9.

Kreditor må forlange, at den samlede værdi af udbetalingerne, samtidig med at den sidste finder sted, er lig den kapital, de 25000 kr. ville være nået op til, hvis de var blevet anbragt til forrentning med 4%. Altså må, idet den årlige ydelse kaldes a kr.,

$$25000 \cdot 1{,}04^{10} = a + a \cdot 1{,}04 + a \cdot 1{,}04^2 + \ldots + a \cdot 1{,}04^9.$$

Vi multiplicerer nu med kvotienten $1 + r = 1{,}04$.

$$25000 \cdot 1{,}04^{11} = a \cdot 1{,}04 + a \cdot 1{,}04^2 + a \cdot 1{,}04^3 + \ldots + a \cdot 1{,}04^{10}.$$

Ved subtraktion fås da

$$25000 \cdot 1{,}04^{10}(1{,}04 - 1) = a(1{,}04^{10} - 1).$$

Heraf

$$a = \frac{1000 \cdot 1{,}04^{10}}{1{,}04^{10} - 1} = \frac{1000}{1 - 0{,}67556} = \frac{1000}{0{,}32444}$$

$$a = 3082.$$

Der er to eksempler, hvor eleverne skal finde data i Statistisk Årbog og illustrere data grafisk:

25. Undersøg ved hjælp af Statistisk Årbog den årlige oversøiske udvandring fra Danmark f.eks. i årene 1930–1950. Tegn en grafisk fremstilling og diskuter kurven (iøjnefaldende omstændigheder ved dens forløb, forbindelsesliniernes betydning etc.).

27. Find i Statistisk Årbog middeltemperaturerne for de tolv måneder i 1950. Tegn en kurve, der viser temperaturens årlige gang i 1930. Tegn i samme koordinatsystem en kurve, der viser temperaturens normale årlige gang; materiale hertil kan, foruden i Statistisk Årbog, findes i Statistiske Sammendrag.

Her skal eleverne for at løse opgaven selv finde data. I den første opgave skal eleverne efter den grafiske fremstilling diskutere iøjnefaldende ting ved kurven og forbindelseslinjernes betydning. Der bliver her overvejet relationen mellem matematik og virkelighed. Virkeligheden skal hjælpe til at forstå den teori om den grafiske fremstilling, og den grafiske fremstilling skal få eleverne til at forstå virkeligheden. Formålet er blandt andet tilegnelse af matematisk viden (argument 5), når der skal overvejes, hvad man kan tillade sig med forbindelseslinjer, når man skal illustrere virkeligheden. Men idet data rent faktisk eksisterer og eleverne selv skal ud og finde dem, kan der ligeledes være tale om nytteargumentet (argument 3), hvor eleverne selv handler ud fra kendskab til matematikkens anvendelsesmuligheder.

Mogensen relaterer under emnet "funktioner af to variable" til niveaukurver i et atlas. Der er her tale om anvendelser af matematik. I afsnittet "sandsynlighed for en hændelse" kommer Mogensen ind på et eksempel med Mendelske arvelove. Det er et eksempel på en anvendelse af matematik, som også er en autentisk anvendelse:

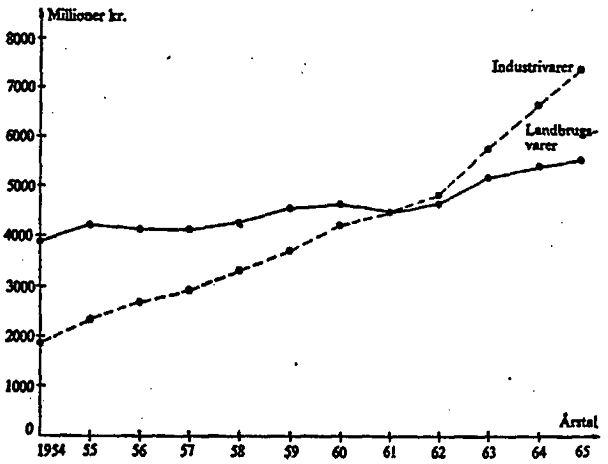
Eks. 3. De *Mendelske* nedarvningslove fremgår af simple sandsynligheds-betragtninger. Lad A betegne et arveanlæg eller *gen* for brunøjethed, og a et anlæg for blåøjethed. Vi kan eksempelvis betragte afkommet efter et par forældre, der begge har genotypen Aa, hvilket betyder, at deres kromosomer indeholder et gen for brunøjethed og et for blåøjethed (er heterogene). For børnene er følgende koblinger mulige, idet vi f. eks. stiller det fra faderen modtagne anlæg forrest

$$AA,\ Aa,\ aA,\ aa,$$

og disse udfald anses for lige sandsynlige. De tre genotyper AA, Aa ($= aA$), aa har da sandsynlighederne $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ (jfr. eks. 1). Sandsynligheden for en genotype med mindst ét A-gen er $\frac{3}{4}$, og samme sandsynlighed er der for mindst ét a-gen. Imidlertid forholder det sig således, at anlægget A er dominerende, a vigende; derfor vil kun arveformlen aa give blå øjne. For et barn af disse brunøjede forældre er der altså sandsynligheden 25 % for blå øjne, medens hændelsen brune øjne har sandsynligheden 75 %.

I lærebogssystemet af Bülow, Handest et al. inddrages anvendelser af matematik i forbindelse med emnet "anvendelser af differentialregning og grafer". Her inddrages biologien og samfundslæren som genstandsfelt for anvendelser. Der er tilknyttet nogle spørgsmål, som eleverne skal svare på ved hjælp af grafen:

På fig. 29 ses en graf for såvel den funktion, der angiver landbrugseksporten som den, der angiver industrieksporten fra Danmark i hvert af årene 1954–65. Der er for hvert år og for hver af eksportgrenene angivet et tal, som er eksportens værdi det



pågældende år. Graferne er derfor en række »isolerede« punkter. For at gøre oversigten lettere og holde de to grafer adskilte, forbindes ofte punkter på samme graf med linjestykker.

Besvar ved hjælp af graferne følgende spørgsmål:

1. I hvilket år var industrieksporten størst?
2. I hvilket år mindst?
3. I hvilket år var landbrugseksporten størst?
4. I hvilket år mindst?
5. I hvilke tidsrum var industrieksporten i fremgang? I tilbagegang?
6. I hvilke tidsrum var landbrugseksporten i fremgang? I tilbagegang?
7. I hvilket år var stigningen i industrieksporten størst?
8. I hvilket år var stigningen i landbrugseksporten størst?

Der er ikke i denne anvendelse diskussion af anvendelser eller overvejelse omkring forbindelsen mellem matematik og samfundslære. Det er ikke til sige, hvilken rolle virkeligheden spiller for opgaven. Det er ikke nødvendigt at have kendskab til virkeligheden for at finde svarene til opgaven, men opgavestillerne kan have en anden pointe med den. Nemlig den pointe, at opgaven skal vise, at matematikken faktisk kan anvendes inden for et område som dette. Det kan derfor tyde på, at formålet med at inddrage opgaven er at motivere til at forstå differentialregning (argument 5), samtidig med at den skal vise matematikkens anvendelsesmuligheder.

Ellers er det ved emnerne kombinatorik og rentesregning, at anvendelser inddrages. I kapitlet "Anvendelser af integralregning" kan integralregningen benyttes til at finde rumfang af et omdrejningslegeme. Det viser, at ordet anvendelser skal læses i en sammenhæng, da det ikke er en anvendelse i forhold til definitionen. Der er mange opgaver, der kan defineres som anvendelser af matematik tilknytning til kombinatorik, men det er karakteristisk for dem, at de alle retorisk angiver en virkelighed. Det kan derfor tænkes at være tilegnelsesargumentet om at fremme motivationen, der får lærebogsforfattere til at udforme disse typer opgaver (argument 5).

Lærebøger til matematisk linje

På den matematiske linje er anvendelser som oftest i relation til fysik. Det gælder også lærebøgerne af Kristensen og Rindung. Det sker i tilknytning til emnet "differentialregning". Derudover er der anvendelser af matematik ved emnerne om kombinatorik og sandsynlighedsregning. Det er dog retoriske angivelser af en virkelighed, som kendetegner disse opgaver. Derudover bliver der ikke vist nogen eksempler på anvendelser. Det samme gør sig gældende i de tilhørende opgaver.

I betænkningen står, at det er formålet "at gøre dem [eleverne] fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder". I den sammenhæng er det bemærkelsesværdigt, at bøgerne ikke inddrager andre fagområder, når lærebogsforfatteren Rindung på denne tid var fagkonsulent og med til at udforme betænkning og bekendtgørelse for matematikundervisningen. Bøgerne blev af mange opfattet som en opskrift til at realisere betænkningens forskrifter på. I den sammenhæng er det bemærkelsesværdigt, at dette lærebogssystem ikke indeholder flere anvendelser. Det kan tyde på, at Kristensen og Rindung er af den opfattelse, at anvendelser af matematik kun foregår i relation til differentialligninger, kombinatorik og sandsynlighedsregning og helst i relation til fysik. Det kan betyde, at de er af den opfattelse, at anvendelser skal finde sted i andre fag, eller at anvendelser kommer af sig selv, når blot den matematiske teori er indlært.

Samme tendens ses i lærebøgerne til den matematisk-fysiske gren af Andersen, Helms og Bülow. De skriver i forordet, at de har medtaget emner for at illustrere, hvordan matematiske betragtningsmåder finder anvendelse i fysikken. Igen falder anvendelserne af matematikken hovedsagelig inden for emnerne rentesregning og differentialligninger. I sidstnævnte er et eksempel med radioaktivt henfald. Det kan betyde, at disse lærebogsforfattere er af samme overbevisning som Kristensen og Rindung med hensyn til fortolkningen af bekendtgørelsen. De kan ligeledes mene, at det er i andre fag, at anvendelser af matematik skal inddrages eller, at anvendelser af matematik kommer af sig selv, når matematikken er indøvet tilstrækkeligt.

I bøgerne til den matematisk-naturfaglige og samfundsfaglige gren, har lærebogsforfatterne samarbejdet med nogle kemi- og fysiklærere for at kunne tage hensyn til deres fag. Anvendelserne falder inden for emnet sandsynlighedsregning og differentialligninger, hvor der i opgaverne inddrages andre genstandsfelter end fysik. I sandsynlighedsregning inddrages de Mendelske arvelove som et eksempel på anvendelser af sandsynlighedsregning. Det er en autentisk anvendelse, hvor resultatet bruges i den verden, matematikken beskriver. Der er ligeledes opgaver tilknyttet til dette emne. Denne anvendelse er sandsynligvis taget med, fordi bøgerne er henvendt til naturfaglig linje ud fra et argument om, at det vil kunne gøre nytte (argument 3) i andre fag. Når forfatterne skriver, at der er blevet taget hensyn til kemi og fysiktimerne, kan det skyldes en opfattelse af, at disse fag anvender matematikken, som eleverne derfor skal lære i "rette tid". Det kan ligeledes skyldes et ønske om større sammenhæng mellem fagene.

I bekendtgørelsen af 1961 lyder det om eksamen for matematik: "Endelig foreslås det udtrykkelig udtalt, at der ved eksamen kan stilles opgaver, der vedrører matematikkens anvendelse på andre fagområder. Med en sådan bestemmelse mener man at fremme interessen for det islæt i undervisningen, der peger ud mod fagets anvendelser".

Her bliver der gjort opmærksom på, at eksamen har en tilbagevirkning på undervisningssituationen. Derfor skal studentereksamensopgaverne vedrøre anvendelser af matematik. Så meget mere bemærkelsesværdigt er det, at der i perioden 1960-1977 kun inddrages anvendelser i relation til sandsynlighedsregning, og det er kun opgaver med en retorisk angivelse af en virkelighed.

14. 4 Hvad skal der foregå omkring anvendelser af matematik i 1971?

Ved bekendtgørelsen af 1971 blev formålet med matematikundervisningen ændret i forhold til tidligere. Undervisningens formål er blandt andet for den matematiske linje: "at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegang og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder...at give en forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder". Det er et argument om at inddrage anvendelser som et middel til øge elevernes problemløsningsevner og deres kritiske sans overfor anvendelser (argument 2).

Det ses her, at det ønskes, at eleverne skal være kritiske overfor matematikkens anvendelser i andre fagområder. Formuleringen i formålet viser, at eleverne selv skal kunne formulere et problem i andre fagområder og finde en løsning på det. Det er efter definitionen ensbetydende med, at eleverne skal blive i stand til at modellere. Definitionen siger, at modellering er, når eleverne selv skal udvælge virkelighedsområdet, der skal indgå i en model og formulere denne virkelige model til en matematisk model. Desuden skal undervisningen give eleverne forståelse og evne til kritisk at analysere matematikkens anvendelser. Det er ikke til at vide, om bekendtgørelsesforfatterne mener, om eleverne skal arbejde med modeldannelsesdiskussioner, eller om eleverne selv skal udføre en problemløsningsproces for derigennem at opnå disse evner.

For den sproglige linje er formålet som for den matematiske linje: "Undervisningen har til formål at opøve eleverne i anvendelsen af matematisk tankegang, metode og viden til formulering, analyse og løsning af problemer på forskellige områder. Undervisningen skal endvidere give eleverne en elementær[1] forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder". De dele af formålet, der handler om anvendelser af matematik, er næsten éns for matematisk og sproglig linje. For begge linjer gælder det, at problemstillingerne kan være fra områderne økonomi, biologi, sociologi, fysik og så videre. I forhold til definitionen af anvendelser er der tale om anvendelser af matematik.

I undervisningsvejledningen pointeres for begge linjer blandt andet, at "behandlingen af eksempler på matematikkens anvendelse bør blandt andet give eleverne en forståelse af matematikkens betydning i samfundet og udvikle deres evne til kritisk at vurdere den måde, hvorpå matematikken anvendes". Det kan tyde på, at det er et kritisk argument (argument 2), der ligger til grund for indførelsen af anvendelser i matematik.

Under emnet sandsynlighedsregning bliver der for den matematisk-fysiske gren anført: "arbejdet med dette område kan med rimelighed danne grundlag for en diskussion af begrebet "en matematisk model" ". Matematisk model betyder i denne sammenhæng en bestemt type princip-model, som er særlig velegnet til at beskrive fænomener inden for matematikken. De modeller, der tænkes på, er blandt andet normalfordelings- og binomialfordelingsmodeller. Hvis virkeligheden inddrages, er der i forhold til definitionen tale om anvendelser. Der skal i tilknytning dertil diskuteres matematiske modeller. Det kan være mange ting, og det er svært at udtale sig om, hvad det er for nogle områder, der skal diskuteres. Der kan ligeledes diskuteres matematiske modeller i det valgfri emne, som indføres på denne gren.

På den naturfaglige og samfundsfaglige gren tales der ikke nærmere om anvendelser. Der nævnes ikke diskussion af begrebet matematisk model under emnet sandsynlighedsregning. Der er ikke noget valgfrit emne, som kan give mulighed for inddragelse af anvendelser af matematik. Under emnet sandsynlighedsregning skal der behandles "endeligt sandsynlighedsfelt", hvortil der står "Der er således tale om en repræsentation af en simpel matematisk model og anvendelse af dens udtryksmåde, der knytter sig hertil. De opgaver, vedrørende sandsynligheders bestemmelse på kombinatorisk grundlag, der gennemarbejdes, bør dels pege mod praktiske anvendelsessituationer og dels være af en sådan art, at de kan løses ved simple anvendelser af kombinatorikkens regler".

Eleverne på disse grene skal ikke diskutere matematiske modeller. Endeligt sandsynlighedsfelt kaldes en repræsentation af en simpel matematisk model. Det er ikke en anvendelse i sig selv. Det er måden, det bliver benyttet på, der afgør om, der er tale om en anvendelse. Der gøres opmærksom på, at anvendelser inden for emnet kombinatorik skal pege mod praktiske anvendelsessituationer. Der står ikke noget om, at de praktiske situationer skal være autentiske situationer fra virkeligheden, eller om der er

[1] Denne formulering optræder ikke for den matematiske linje.

tale om retoriske angivelser af virkeligheden, som der er mange eksempler på gennem perioden, eller noget derimellem.

14. 5 Hvad diskuteres omkring anvendelser af matematik 1971-84?

I denne periode kommer anvendelser af matematik virkelig i fokus. De bliver i denne periode anset af mange som et middel til at give matematikundervisningen en relevans. Det kommer blandt andet til udtryk hos forskellige debattører og ved forskellige lejligheder.

Det sker blandt andet ved den 10. nordiske kongres i 1978, hvor en arbejdsgruppe kommer til den konklusion, at det "ikke er en god ide at lade de andre fag tage sig af anvendelser af matematikken". Der er altså enighed om, at anvendelser af matematik skal ind i undervisningen. Når matematik indgår i tværfaglige forsøg, så er det ofte matematik, der bliver sorteper, hvis ikke matematiklærerne behandler matematikken i det tværfaglige. Der sker et skift her i holdningen til i hvilke timer, anvendelser skal finde sted. I 60'erne var det en gængs opfattelse, at anvendelser foregik i andre fag, særlig i fysik.

Det er ved den lejlighed, at Niss udtaler ønske om, at der skal være steder i undervisningen, hvor eleverne sættes i stand til at forstå eller handle over for problemer, som de ellers ikke kan forstå eller handle overfor, og at der skal inddrages seriøse anvendelser. Det drejer sig om "på den ene side at sætte folk i stand til på en rimelig måde at udnytte matematiske betragtningsmåder når situationen er til det, og på den anden side sætte dem i stand til at tage kritisk stilling til andres anvendelse af sådanne betragtningsmåder". For at nå de mål, må matematikundervisningen sigte mod: "at eleverne skal erhverve kendskab til og forståelse af matematikkens anvendelse, og baggrunden for den, i ikke-matematiske forbindelser. De skal herunder opnå forståelse af hvilke faktorer, såvel ved matematikkens tankegange, begreber og opbygning, som uden for matematikken selv, der spiller en rolle, for denne anvendelse, dens muligheder og begrænsninger, - at eleverne skal kunne foretage kritiske analyser og bedømmelser af gjort anvendelser af matematik i ikke-matematiske forbindelser, - at eleverne skal opnå erfaring med selvstændigt og på ikke-receptagtig måde at anvende matematik som middel ved behandlingen af ikke-matematiske problemstillinger".

Der er her givet udtryk for den holdning, at der i undervisningen skal indgå modeldannelsesdiskussioner. Eleverne skal også selv kunne anvende matematik som middel ved behandling af et ikke-matematisk problem. Det involverer ligeledes, at eleverne skal igennem en anvendt problemløsningsproces. Der er tale om kritisk modelbygning over et område uden for matematikken. Argumentet for anvendelser i undervisningen er et kritisk argument (argument 2), hvor eleverne skal være kritiske overfor misbrug af matematik, men de skal samtidig også lære at kunne bruge matematikken til at løse problemer i deres hverdag og i deres fremtid (argument 3). Måden det kan opnås på er blandt andet ved nogle genstande, som ligner aspekterne i bekendtgørelsen af 1987. De skal ikke behandles som selvstændige forløb, men være tilstede i undervisningen løbende. Læreren skal dokumentere behandling af ikke-matematiske problemstillinger, og ikke kun postulere behandling af ikke-matematiske problemstillinger. Der skal ikke kun præsenteres og diskuteres modeldannelse - det skal realiseres i undervisningen.

Ved landsmødet i 1981 ønskes med hensyn til anvendelser, at matematikundervisningen skal give indsigt i "nogle matematiske emner, der er centrale derved, at de indgår i mange forskellige anvendelser, samt eksempler på sådanne anvendelser" og "nogle autentiske anvendelser af matematik, der behandles, fordi anvendelsesområdet er af væsentlig samfundsmæssig betydning". Der er her et eksempel på, at bestemte emner skal begrundes i at have samfundsrelevans.[2]

Der er stemning for at inddrage anvendelser af matematik, og det gælder særlig autentiske anvendelser af matematik, sådan at der i mindre grad skal benyttes pseudoanvendelser af matematikken. Det er udvalgenes mening, at anvendelser af matematik hidtil kun har været krydderier til det matematiske indhold. Der diskuteres visse hindringer ved at indføre anvendelser i højere grad. Det er forhindringer set fra undervisningssituationens position, og det drejer sig om mangel på tid til at inddrage anvendelser og det problematiske i at finde egnede autentiske anvendelser, der svarer til det gymnasiale niveau i matematik.

Anne Jensen, Marianne Kesselhahn og Lena Lindenskov mener, at anvendelser er underprioriteret i formålet med matematikundervisningen i forhold til matematisk teori. De mener, at der er en prioritering i formålet med matematikundervisningen til fordel for, at undervisningen skal indeholde matematisk teori, frem for anvendelser af matematik og en kritisk analyse af anvendelser af matematik. Den opfattelse, der "officielt" kommer til udtryk, er ifølge dem, at anvendelser er et pædagogisk hjælpemiddel, som skal lette tilegnelsen af matematikken (argument 5). Eleverne vil opnå større erkendelse ved at indføre modellering i undervisningen frem for ikke et gøre det.

Hans J. Munkholm mener, at der er mange lærere, der ikke ser de eksakte videnskaber som anvendelsesområder, der er af samfundsmæssig betydning. Han vil derfor gerne opfordre til, at man ikke glemmer fysikken, når der skal inddrages autentiske anvendelser.

Undervisningsminister Bertel Haarder taler ligeledes om, at eleverne skal have en personlig udrustning, der gør dem i stand til at vurdere beslutninger, der bliver taget på baggrund af matematiske modeller, hvorfor eleverne skal have indsigt i matematisk modelbygning. Argumentet for undervisning i modelbygning begrunde med det kritiske argument (argument 2).

Børge Degn Nielsen mener, at det er vigtigt, at eleverne får en forståelse af "fagets udvikling, af fagets samspil med andre fag og med samfundet samt af anvendelsen og anvendeligheden af matematik i mange sammenhænge...Det er en myte, at hvis man først har lært matematisk teori grundigt, så kan man selv gå ud og bruge den. Det bør være et væsentligt led i undervisningen, at den udvikler og styrker elevernes handlemuligheder".

[2] Der var mange i 70'erne der mente, at indholdet i undervisningen på alle uddannelsesniveauer skulle begrundes i at have samfundsrelevans.

Anvendelser af matematik skal programsættes i undervisningen, idet evnen til at anvende matematik ikke kommer af sig selv. Han foreslår, at eleverne skal prøvekøre simulationsprogrammer over finansmodeller eller SMEC-modellen.

14. 6 Hvordan inddrages anvendelser af matematik 1971-84?

Forsøg i gymnasiet
Det, der kendetegner denne periode, er utallige forsøg på at undervise i anvendelser af matematik i mange sammenhænge inden for mange genstandsområder.

På Herlev Statsskole forsøges med en mere anvendelsesorienteret undervisning i matematik på sproglig linje. Det blev forsøgt sig med et pensum, der "i højere grad søger at fremme elevernes forståelse for matematiks anvendelsesmuligheder". Forsøget omhandler levevilkår i tiden 1930-70, og det matematiske indhold er deskriptiv statistik. Der er ifølge definitionen tale om anvendelser af matematik. Formålet med forsøget er, at træne eleverne i at "bruge matematikkens redskaber til kritisk at vurdere tekster og påstande med matematisk indhold". Det er tale om et kritisk argument generelt som begrundelse for at undervise sproglige elever i matematik. Dertil kan anvendelser af matematik hjælpe (argument 2).

Eleverne skulle selv fremskaffe materiale til forsøget. Det foregik i grupper og kørte på tværs af fagene da/ty/hi/eng/fr/fo/mat. Eleverne skulle bruge den deskriptive statistik til at vurdere statistiske oplysninger og give kritiske vurderinger af brugen. Resultatet af forsøget var, at eleverne blev meget glade for almindelige opgaver, hvor virkeligheden ikke var inddraget. "Det er tydeligt, at eleverne ved tekstopgaverne meget hurtigt bliver forvirrede af teksten og har svært ved at finde de bagvedliggende matematiske problemstillinger". Eleverne var ikke i stand til, selv om de regner opgaver inden for emner som geografi, fysik og samfundsfag at overføre denne viden til nye problemstillinger. Dette viser en meget tydelig barriere fra elevernes side med at inddrage anvendelser af matematik. Eleverne føler sig mere trygge ved "rene" opgaver.

Eleverne blev i dette forsøg præsenteret for nogle tekster, hvor de selv skulle formulere det matematiske problem, beskrive og vurdere det i forhold til statistiske oplysninger. De skal lære at modellere udfra en problemstilling, de selv udvælger, for derefter at vurdere resultatet i forhold til kendte ting. Der er her tale om selvstændig modellering med overvejelser.

Lærerne mente efter forsøget, at man fremover skal knytte matematikundervisningen i længere forløb til fagene geografi/biologi/samfundsfag/historie/dansk, for at eleverne kan indøve en praksis i at gennemskue de matematiske problemstillinger. De mener dermed, at for at få eleverne til at blive kritiske overfor brug og misbrug af matematik, må man inddrage sådanne elementer i undervisningen. Der er her et eksempel på den opfattelse, at evnen til anvende matematik ikke kommer af sig selv ved undervisning i "ren" matematik.

Et tredje forsøg var mellem dansk og matematik i en matematisk 1. g.. Det ses i forsøgsbeskrivelsens formål, at det var faget dansk, der var i fokus. "Formålet med projektet var, at faget dansk skulle få forøgede muligheder for at foretage en medieundersøgelse mere kvalificeret statistisk, og at matematik skulle få eksempler fra hverdagen til at indgå i undervisningen." Forsøget havde for matematikfaget til formål at gøre eleverne i stand til at vurdere anvendelser af matematik. Eleverne skulle i forsøget diskutere brugen af grafik i medierne. Anvendelsen kan finde sted i virkeligheden. Eleverne skulle beskrive nogle ugebladslæsere statistisk. Det er en autentisk anvendelse af matematik, hvor matematik er et redskab til at beskrive virkeligheden. Argumentet for at lære eleverne at vurdere brugen af matematik i medierne er et kritisk argument (argument 2). Eleverne fik brug for middelværdi og spredning i forbindelse med aldersfordeling af bladenes læsere. Procentregning indgik i øvelser, hvor et matematisk indhold skulle vurderes. Eleverne mente, det var godt at se statistik brugt til andre ting end at regne opgaver.

I et andet forsøg på Herlev Statsskole var formålet blandt andet, "at eleverne udvider deres kendskab til og forståelse af den rolle, som matematisk beskrivelse og problemløsning spiller i vores kultur, samt udvikler deres bevidsthed om historiske og samfundsmæssige forudsætninger herfor, at eleverne tilegner sig et forråd af matematiske modeller og redskaber og udvider deres kendskab til de matematiske teorier, som ligger til grund for disse, for derigennem at skabe sig et grundlag for videre beskæftigelse med matematik, at eleverne udvikler deres evne til at anvende matematiske modeller på virkeligheden og udvikler deres bevidsthed om, hvilken udvidelse af handle- og forståelsesmuligheder og hvilke begrænsninger, der ligger i sådanne anvendelser".

Der er tale om anvendelser ifølge definitionen, hvis der altså er et ikke-matematisk virkelighedsområde, der skal være genstand i den matematiske model. Der er ligeledes tale om en opfattelse af, at eleverne skal igennem både modeldannelsesdiskussioner samt selv prøve at modellere. De skal lære at anvende matematiske modeller på virkelighedsområder. "Der skal lægges vægt på, at eleverne tydeligt formulerer problemer, at de argumenterer for en løsning af et problem, at det tydeligt fremgår, hvilke konklusioner de drager af løsningerne". Eleverne skal derfor gennemgå en problemløsningsproces. Som forsøget er beskrevet, skal de lære at modellere ud fra et problem. Argumenterne for at inddrage modellering skyldes både argumenter om, at modeller er en del af matematikkens billede (argument 4), samt at det vil være til nytte for eleverne i deres videre liv (argument 3).

Lærebøger til matematisk linje

Lærebogssystemet af Ole Olsen inddrager ikke anvendelser af matematik udover i meget få tilfælde. De er beskrevet i beskrivelsen af lærebøger. Udover nogle anvendelser af matematik i fysik, inddrager han biologi som et emneområde. Der står i bogen, at der nu skal opstilles en matematisk model af populationers udvikling. Undervejs i denne opstilling bliver de matematiske begreber fortolket og dernæst fortsættes med at bygge modellen for populationsvækst under optimale vækstbetingelser og dernæst under begrænsede forhold. Han forlader da teorien om populationer og fører resultatet over til at præsentere en differentialligning. Når modellen er opstillet er der to opgaver tilknyttet:

```
Vi vender nu tilbage til opgaven med bakteriekulturen
fra eksempel 11, og vi underforstår fortsat, at tiden
måles i minutter. Vi betragter en bakteriekultur, hvor
frugtbarheden er 0.03. På et givet tidspunkt består
kulturen af 100 bakterier.

1) Angiv en forskrift for den funktion f, der angiver
   antallet af bakterier til tidspunkt t, idet vi reg-
   ner ud fra det tidspunkt, hvor der var 100 bakterier.

2) Beregn populationens størrelse efter forløbet af
   henholdsvis 1 min, 2min, 20 min, 2 timer og 24 ti-
   mer.
```

I den første opgave, skal eleverne i den første opstille den matematiske model, i denne situation en funktionsforskrift, der beskriver antallet af bakterier til et tidspunkt t. Virkelighedsområdet er udvalgt for eleverne i denne opgave, og de skal ikke selv vurdere, hvilke faktorer der kan spille ind i opstillingen af en forskrift - en matematisk model. Der er tale om, at matematisere en real model til en matematisk model. I den anden opgave skal eleverne sætte forskellige tider ind i modellen uden at tænke over modellen.

Der bliver ligeledes under emnet sandsynlighedsregning inddraget anvendelser. Der er et eksempel med at finde sandsynligheden for at møde en venstreorienteret lærer. Dette er et eksempel på en pudsig opgave, hvor problemstillingen kan være affødt af en meningsytring i f.eks. en avis. Det er ikke en opgave, hvor eleverne skal oversætte virkeligheden til matematik. De skal afklæde opgaven dens indpakning og bruge de regnetekniske evner, de får ved de øvrige opgaver.

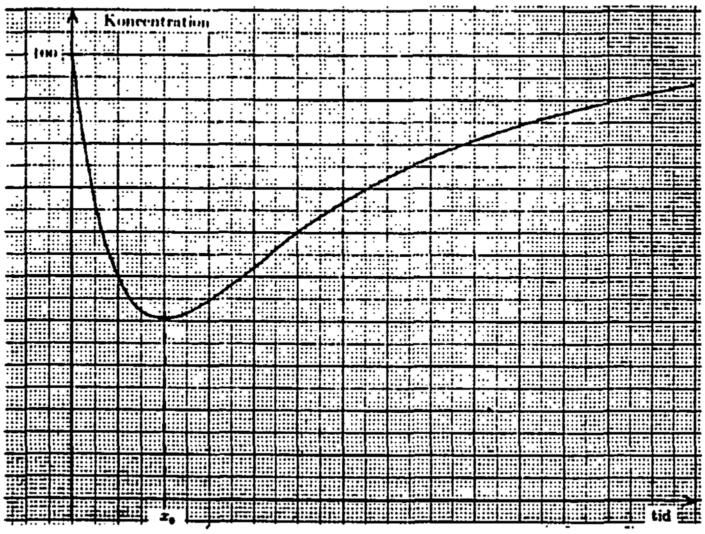
Forfatterne til lærebogssystemet "teori og redskab" giver ved deres opbygning af bogen udtryk for en holdning til anvendelser af matematik. For det første mener de, at anvendelser skal indgå i undervisningen, siden der er et afsnit om det. De sætter det på programmet. Men teoridelen og anvendelsesdelen er adskilt. Det kan betyde, at anvendelserne er ikke taget med for anvendelsernes skyld, men for at kunne vise, hvad matematik kan bruges til. Opsplittelsen i anvendt og ren matematik findes ligeledes hos Carl Hansen i 1924, hvor han udgav bøgerne "ren matematik" og "anvendt matematik".

De begreber, de kalder anvendelser, er meget blandede. Det kan være: bevismetoder, eksponentiel vækst, numeriske metoder, rentesregning, komplekse tal, transformationer og vektorer. Blandt de nævnte emner bliver under eksponentiel vækst inddraget bakterievækst og radioaktivt henfald, mens virkeligheden ikke indføres i f. eks. numeriske metoder og usikkerhedsberegninger. Det er et godt eksempel på, at ordet anvendelser skal undersøges i forhold til indhold og betydning. Forfatternes forståelse af anvendelsesområder falder ikke ind under min definition af anvendelser. Det kan tyde på en opfattelse af, at anvendelser af matematik er eller kan være en matematisk disciplin anvendt inden for andre matematiske områder. Der er meget få opgaver og meget lidt teori knyttet til delen om anvendelser. I bogen om sandsynlighedsregning relateres til virkeligheden. Der er opgaver inden for genetik, test og opinionsundersøgelser. Det er dog ikke inddraget i bogens teoridel.

Studentereksamensopgaver

Det er i studentereksamensopgaverne fra perioden 1971-84, at anvendelser af matematik begynder at blive inddraget. Der sker et skift omkring 1977, hvor der ved eksamen for den naturfaglige og samfundsfaglige gren er en opgave om blodsukkerkoncentrationen i blodet:

Hos raske mennesker er koncentrationen af blodsukker ca. 100 mg pr. 100 ml blod. Ved indsprøjtning af en bestemt dosis af stoffet insulin ændres koncentrationen af blodsukker. Variationen af koncentrationen fremgår af nedenstående figur.



Koncentrationen målt i mg pr. 100 ml er en funktion af den tid, målt i timer, der er forløbet efter indsprøjtningen. Denne funktion betegnes i det følgende f. Det antages, at

$$f(x) = 100 + 111(e^{-4x} - e^{-0.8x}).$$

Beregn det tidspunkt x_0 (2 decimaler), til hvilket blodsukkerkoncentrationen er mindst.

Beregn $f(x_0)$.

I tiden efter x_0 vokser blodsukkerkoncentrationen. Den fart, hvormed blodsukkerkoncentrationen vokser til tidspunktet x, er $f'(x)$.

Bestem det tidspunkt x_1, til hvilket blodsukkerkoncentrationen vokser hurtigst.

Det er et eksempel på, at matematik bliver anvendt inden for mange områder til beskrivelse af fænomener. Det er nok ikke tilfældigt, at det er den naturfaglige og samfundsfaglige gren, der bliver stillet denne opgave. Argumentet for at inddrage denne type opgave kan være nytteargumentet (argument 3), hvor eleverne skal se, at matematikken anvendes i mange problemstillinger, som det er godt at kende til i forhold til de øvrige grenfag, eller for de elever, der vil videreuddannes inden for bestemte naturvidenskabelige fag. Der kan være paralleller til argumentet for indførelsen af grafisk fremstilling for sproglige elever, der skulle læse medicin. Opgaven kan være en autentisk problemstilling, hvis resultatet i opgaven benyttes i biologiens verden. Men det er ikke til at sige ud fra opgaven. Det er ikke en opgave, hvor eleverne selv skal vurdere eller formulere problemet. De skal løse opgaven, og virkeligheden er uden betydning for, om eleverne er i stand til at løse den.

Det var den til gengæld ikke i 1978 på den matematisk-fysiske gren, hvor der var en opgave med en rundskåren nederdel. Denne opgave voldte drengene mange problemer[3]:

> En stofrest, der er 90 cm bred og 120 cm lang, skal bruges til en såkaldt rundskåren nederdel til en pige. Der skal udklippes det størst mulige cirkeludsnit med radius 55 cm.
>
> Beregn den brøkdel, som cirkeludsnittet udgør af den tilsvarende cirkel.

Det var manglen på kendskab til en rundskåren nederdel, der betød, at drengene ikke kunne løse opgaven, mens pigerne ingen problemer havde. Det siger noget om, at når der inddrages anvendelser i opgaverne, da skal det forklares, hvad det ikke-matematiske består i, eller også skal eleverne selv i opgavebesvarelsen præcisere deres forudsætninger for at løse opgaven. Opgaven er en meget åben opgave, hvor eleverne selv skal opstille den matematiske model for at kunne løse opgaven. I dette tilfælde er virkeligheden ikke uden betydning for at kunne løse sådan opgave. De, der ikke kender til en rundskåren nederdel, vil næppe få associationer i den retning og de, der gør, vil have en lettere tilgang til at kunne løse den. Men hvis praksis er, at eleverne skal tænke selv, da vil de kunne deducere sig til en løsning. Men det kræver en vanlig praksis for kunne etablere denne egenskab. Det kan kun være et argument om at motivere (argument 5), der kan få opgavestillerne til at tage den med til eksamen.

I 1979 er der ved eksamen for den samfundsfaglige og naturfaglige gren en opgave, hvor ordet en matematisk model indgår:

> I forbindelse med opstilling af modeller til beskrivelse af fangstudbyttet ved fiskeri, har man for fisk af en bestemt art opstillet en funktion r til beskrivelse af fiskenes gennemsnitsvægt som funktion af deres alder t.
> (I denne opgave er enhederne uden betydning.)
>
> I en af disse modeller gælder
>
> $$r(t) = A(1-e^{-kt})^3 ,$$
>
> hvor A og k er positive konstanter.
>
> Bestem $r(0)$ og $\lim_{t \to \infty} r(t)$.
>
> Hvorledes kunne disse to tal fortolkes i biologisk sammenhæng?
>
> Bestem væksthastigheden r'.
>
> Angiv monotoniforholdene for væksthastigheden, og bestem udtrykt ved k den alder t_0, hvor væksthastigheden er størst mulig.
>
> Angiv $r(t_0)$.

Denne opgave er ikke en opgave, hvor der blot skal sættes værdier ind og beregne et resultat. Der skal vurderes, hvilken biologisk fortolkning, der kan ligge bag to matematiske udtryk. Det gør det til en anderledes opgave. Det kan være det kritiske argument (argument 2), der ligger bag tanken om at inddrage denne opgave. Hvis der ikke i matematikundervisningen er blevet undervist i populationsvækst, da ville det kunne giver problemer for elever fra den samfundsfaglige gren.

---

[3] Pers. med. Niss

I 1981 begynder der at optræde artikler i opgaverne. Ved eksamen for den matematisk-fysiske gren:

Det viste udklip stammer fra *Samvirke*, august 1980. Udklippet er en del af en artikel af professor Ove Nathan om moderne atomfysik.
Vi antager i det følgende, at kvarkmodellen holder, således at protonen er radioaktiv med en halveringstid på 10^{30} år.

Angiv en forskrift for den funktion f, der beskriver, hvor mange protoner der er tilbage til tiden t, målt i år, når der til tiden 0 er 10^{30} protoner.

Bestem det approksimerende førstegradspolynomium til f i tallet 0.

Bestem ved hjælp heraf et skøn over, hvor mange af de 10^{30} protoner der sønderdeles i løbet af det første år, og sammenhold med artiklens oplysning om dette.

Universets alder – et kort sekund

Senest har kvark-fysikken sat spørgsmålstegn ved endnu en „hellig ko": Protonens absolutte stabilitet. Kvarkmodellen forudsiger, at protonen er radioaktiv med en halveringstid på ca. 10^{30} år (et ettal med 30 nuller efter). Halveringstiden er den tid, der skal hengå, før halvdelen af et vist antal protoner spontant er sønderdelt til andre partikler. Man kan naturligvis ikke direkte måle et tidsrum på 10^{30} år – selv universets alder (ca. 20 milliarder år) er kun et kort sekund i sammenligning. Men hvis man har mange protoner, kan man i løbet af et års tid gøre sig håb om at iagttage sønderdelingen af nogle få protoner. Forsøget er inden for mulighedernes rækkevidde, hvis man iagttager ca. 10^{30} protoner, svarende til protontallet i et middelstort svømmebasin fyldt med vand.

I disse måneder er den første forsøgsopstilling til måling af protonens spontane sønderdeling ved at blive monteret i en forladt mineskakt dybt under Jordens overflade.

Dette er en opgave, som er aktuel i den forstand, at den inddrager en artikel, som eleverne skal vurdere indholdet af. Denne opgave kan have til hensigt at gøre eleverne bevidste om, at indholdet i medier skal de være kritiske overfor. Det er et kritisk argument (argument 2). Det er ikke her tilfældigt, at det er den matematisk-fysiske gren, der bliver stillet denne opgave, hvor indholdet handler om protoner. Derfor kan det skyldes et nytteargument (argument 3), der er årsag til, at opgaven findes til denne grens eksamen.

Der begynder derefter at blive inddraget mange forskellige problemstillinger i anvendelserne af matematik i opgavesættene (se afsnit 13. 3), og der bliver i den sidste del af perioden udvist stor opfindsomhed med virkeligheden i opgaverne. Opgaverne bliver i mindre grad styret af at skulle gøre nytte for de enkelte grene. Problemstillingerne er ikke så fagspecifikke, men tager udgangspunkt i situationer, som er aktuelle i den officielle debat.

Det er den næste opgave et eksempel på. Der skal beregnes blyindholdet i græs, og opgaven går ud på at foretage en beregning af, hvor langt inde køer skal græsse fra vejen for at EF's bestemmelser overholdes:

> Blyforurening af græs stammer hovedsagelig fra motorkøretøjers forbrænding af blyholdig benzin på veje. Blyindholdet i græs ved en vej har vist sig tilnærmelsesvis at aftage eksponentielt med afstanden fra vejkanten, og »halveringsafstanden« er 15 m.
> Ved en motorvej målte man et blyindhold på 50 mg pr. kg græs i afstanden 8 m fra vejkanten.
>
> Bestem blyindholdet i græsset ved vejkanten.
>
> Hvor langt væk fra vejkanten skal køer græsse, når et krav fra EF om højst 10 mg bly pr. kg i græs til foder skal overholdes?
>
> Med $f(x)$ betegnes blyindholdet i græsset (målt i mg pr. kg) i afstanden x (målt i meter) fra vejkanten. Det gennemsnitlige blyindhold i en 50 meter bred bræmme nærmest vejen er da givet ved
>
> $$\frac{1}{50}\int_0^{50} f(x)dx .$$

Opgaven er ikke karakteriseret ved, at der et formulerings eller oversættelsesjob i den. Eleverne skal afkode opgaven dens virkelighed, og så regne løs. Men opgaven har et autentisk islæt, da resultatet kan bruges i den verden, matematikken beskriver. Det kan være et argument om, at eleverne skal være bevidste om brug af matematik i mange sammenhænge i samfundet, der er årsag til, at opgaven er taget med (argument 2), men det kan ligeledes være et argument om motivation (argument 5), hvor brug af matematik i ikke-matematiske områder skal motivere til indlæring.

14. 7 Hvad skal der foregå omkring anvendelser af matematik i 1984?

Ved bekendtgørelsen af 1984 er der ingen ændringer i formålet for den matematiske linje, men for den sproglige linje er der sket ændringer. Nu er formålet med undervisningen, at eleverne hverver: "nogle matematiske kundskaber, som kan være dem til nytte i andre fag og i deres øvrige dagligdag, kendskab til udformning og anvendelse af matematiske modeller". Den matematik de sproglige skal lære skal være dem til nytte i deres dagligdag og andre fag. "Kendskab til udformning og anvendelse af matematiske modeller" kan betyde, at der i undervisningen skal diskuteres modeldannelse, men at eleverne ikke selv matematifisere et problem, som formålet beskrev i 1971. Der er ikke beskrevet hvilke områder, de matematiske modeller skal beskrive. Der er på dette tidspunkt ikke længere kun tale om princip-modeller som f. eks normalfordelingsmodeller

14. 8 Hvad diskuteres omkring anvendelser af matematik 1984-87?

Det er i høj grad et argument om indsigt i matematikkens anvendelser set ud fra et ønske om, at eleverne skal blive demokratiske borgere, der præger denne periodes diskussioner.

Niss taler om nødvendigheden af en kritisk matematikundervisning. Argumentet for at inddrage matematiske modeller er et kritisk argument (argument 2) og et nytteargument (argument 3). Det skyldes i høj grad den rolle, som matematik spiller i samfundet inden for beslutningstagen, teknologi og produktion og prognoser for fremtiden. Derfor er det vigtigt, at eleverne bliver kritiske overfor brug og misbrug af matematik.

Matematikundervisningen skal derfor medvirke til, at eleverne "kan opstille, behandle, bedømme matematiske modeller; kan gennemskue og bedømme andres anvendelser af matematik på udenomsmatematiske problemer, har fornemmelser for og erfaringer med rækkevidden og begrænsningen i anvendelsen af matematik på virkelige forhold". Det indebærer, at der i undervisningen skal indgå modeldiskussioner, og at eleverne selv skal kunne opstille modeller. Eleverne skal gennemgå en anvendt problemløsningsproces. Det er en nødvendig betingelse, at eleverne prøver at gennemgå en anvendt problemløsningsproces for at få en fornemmelse af og erfaringer med rækkevidden og begrænsningen i anvendelsen af matematik.

Matematikkens stadig voksende rolle i samfundet fremhæves også i rapporten om matematikken i Danmark som en vigtig årsag til, at anvendelser skal ind i matematikundervisningen. Mange beslutninger bliver taget på baggrund af anvendelse af matematik, og områderne hvori det sker bliver flere og flere. Der er mange, der stræber efter at inddrage matematik som en del af teoridannelse, som fag som fysik, kemi og astronomi har haft succes med.

Det blev ligeledes slået fast, at der fremover vil være mindre brug for regnetekniske færdigheder og i højere grad forståelse. Eleverne skal derfor kende til "matematiske ræsonnementers karakter, bærekraft og begrænsninger". Det er skolens opgave at forberede eleverne til at deltage i samfundslivet. Der er igen tale om vigtigheden i, at eleverne forstår matematikken. Eleverne skal lære matematikkens anvendelsesmuligheder og begrænsninger. Det er et kritisk argument (argument 2), der afgør, at anvendelser af matematik skal gøre eleverne i stand til at vurdere anvendelserne. Men det er ikke tilstrækkeligt, hvis eleverne ligeledes skal blive i stand til at udføre modellering. Der skal indgå, at eleverne skal gennemføre en problemløsningsproces.

14. 9 Hvordan inddrages anvendelser af matematik 1984-87?

Forsøg i gymnasiet

Der bliver i denne periode fortsat eksperimenteret med tværfaglige forsøg, hvor matematikkens anvendelsesmuligheder indgår. Det foregår f. eks. på Mulernes Legatskole. Her har man forsøgt at integrere matematik, samfundsfag og edb. Der blev lavet et undervisningsforløb delt i to dele, hvor den ene del omhandlede nationaløkonomiske modeller. Forsøget var tiltænkt at skulle falde ind under modelaspektet i udkastet til en ny bekendtgørelse. I forsøget indgik simuleringsprogrammer, hvor eleverne skulle prøve at ændre ved modellens parametre for at få en forståelse af modellens muligheder og begrænsninger. Der blev i dette forsøgt ikke lagt op til, at eleverne selv skulle modellere, men de blev præsenteret for en matematisk gennemgang af modellerne herunder SMEC, som er en autentisk anvendt matematisk model. Resultatet af forsøget var, at "elevinteressen og udbyttet blev øget for begge fag".

Dette eksempel kunne tyde på, at forsøget om at inddrage anvendelser af matematik i højere grad handlede om at motivere eleverne for begge fag og vise eleverne nytten ved matematik. Formålet ser ud til at pege ind i matematikken. Der bliver ikke diskuteret modeldannelse i dette forsøg. Selv om eleverne fandt forsøget spændende, er det ikke sikkert, at de derved har fået den store forståelse af indholdet i modellen og dens begrænsninger, hvis elevarbejdet har bestået i at skrue på parametre og se modellen illustreret grafisk på computer.

Der er i denne periode gjort et forsøg på at designe et eksamensopgavesæt, som indeholder anvendelser af matematik modelaspektet (se appendiks 9). Sættet er blevet til ud fra den holdning, at for at undervisningen skal tage aspekterne alvorligt, må eksamen afspejle intentionerne med undervisningen. Sættet omhandler optimering i landbruget, hvor eleverne skal vurdere landmandens økonomiske overvejelser i forbindelse med udbytte og kvælstofforbrug. Dette er et eksempel på en autentisk anvendelse, hvor resultatet bruges i den verden, matematikken beskriver. Der er mange oplysninger, der bliver givet til eleverne for at de kan blive i stand til at løse sættet. Det ser umiddelbart ud til at være for mange, hvis eksamen skal foregå inden for et afgrænset tidsrum, hvor der er et tidspres.

Lærebøger til matematisk linje

Der er lærebogssystemer, der ligeledes skal tilgodese modelaspektet. Lærebogssystemet "Gads matematik" henvender sig til forsøgsbekendtgørelsen, som modelaspektet er en del af. Det er ikke alle bøger i systemet, der er tiltænkt at skulle tage sig af modelaspektet. Det er muligvis derfor, at der i de to bøger "tal" og "geometri" ikke er mange anvendelser af matematik. Bogen "funktioner" er til gengæld tiltænkt at skulle behandle modelaspektet. Det kan være et udtryk for en opfattelse af, at det er særlige matematiske emner, der er velegnede til at anvende.

Funktionsbegrebet indføres med et eksempel med en butik, der sælger tomater, hvor situationen vises ved en graf. Anvendelserne omhandler ellers i høj grad fysik. Eksempler omkring Ohms lov, opvarmning af en ovn, svingninger og lydbølger er dækkende for de anvendelser, der forekommer i bogen. Der er måske også hos disse forfattere en holdning til, at anvendelser foregår i samspil med fysik. I forordet skriver forfatterne: "Man kan uden videre læse trigonometri før polynomier, hvis hensyn til fysik gør det ønskeligt." Det er et eksempel på, at der i opbygningen af bøgerne er overvejet et hensyn til fysikundervisningen.

Anvendelser inddrages i eksempler og i opgaver. I en af opgaverne inddrages en pjece fra SU-styrelsen. Det gør en opgave lidt aktuel:

SU-støtten til 18–21 årige er afhængig af forældrenes indtægtsforhold. Nedenstående er et uddrag af SU-pjecen 1986/87.

Beregning af stipendium til 18-21 årige ansøgere

Det højeste stipendium for støtteåret 1986/87 (perioden 1. august 1986 - 31. juli 1987) er for hjemmeboende 15.800 kr. og for udeboende 26.000 kr.

Maksimumsbeløbet kan kun ydes til uddannelsessøgende, hvis forældre har indtægt og formue under en vis grænse. Reglerne herom er følgende:

Stipendiet beregnes normalt på grundlag af forældrenes socialindkomst for 1987, der dannes med udgangspunkt i de økonomiske forhold i 1985. Socialindkomsten nedsættes med 17.200 kr. for hver af dine søskende, som er under 18 år, eller som er under uddannelse og ikke er fyldt 22 år. Dine søskende mellem 18 og 22 år må dog ikke have en gennemsnitlig månedlig indtægt, der overstiger 2.900 kr., heri ikke medregnet eventuel støtte fra Statens Uddannelsesstøtte.

Maksimal støtte ydes ved de således korrigerede socialindkomster til og med 162.400 kr. Støtten nedsættes derefter i takt med stigende socialindkomst efter en glidende skala. Hvis dine forældres korrigerede socialindkomst er på 266.000 kr. eller derover, falder støtten helt bort.

1. Tegn grafen for SU-støtten som funktion af forældrenes socialindkomst for en udeboende person uden søskende.
2. Samme fremgangsmåde for en hjemmeboende person, der har en bror under 18 år.
3. Besvar ved hjælp af graferne følgende spørgsmål:
   a. Ved hvilken socialindkomst får de to slags personer samme støtte?
   b. Arne er udeboende og enebarn. Hans forældres socialindkomst er 220000 kr. Hans veninde er hjemmeboende og har en lillebror på 10 år. Hun får samme SU som Arne. Hvor stor er hendes forældres socialindkomst?

Eleverne skal selv ud fra opgaven finde de rette oplysninger i teksten og indtegne dem i et koordinatsystem. Teksten skal eleverne derfor oversætte for at kunne løse de øvrige delspørgsmål i den.

Studentereksamensopgaverne i perioden 1984-88 omhandler mange forskellige typer af opgaver og mange forskellige problemstillinger inden for anvendelser af matematik. Jeg har valgt én ud, og den er fra eksamen i 1986 for de naturfaglige og samfundsfaglige grene og handler om planlægning af skovbrug:

I vedproducerende skovbrug er langsigtet planlægning nødvendig, idet f. eks. en bøg fældes, når den er 90-120 år.
I en redegørelse fra 1983 skriver skovstyrelsen til miljøministeriet, at arealet af de private bøgeskove er aftaget siden 1930'erne. Styrelsen forventer, at dette areal i fremtiden vil blive reduceret med 0,9% pr. år, hvis udviklingen fra årene før 1983 fortsætter.
I det følgende antages, at skovstyrelsens forudsigelse holder.

Hvor mange procent vil arealet af private bøgeskove være reduceret med i år 2083 sammenlignet med arealet i 1983?

I hvilket år vil arealet af private bøgeskove være halvt så stort som i 1983?

I denne opgave skal eleverne selv oversætte opgavens tekst til matematik. Virkelighedsområdet er præsenteret for dem, hvorfor der ikke er tale om en fuld problemløsningsproces. Der er tale om simpel modellering. De skal matematisere problemstillingen og gennemskue den matematiske metode, der kan løse opgaven. Opgaven er en autentisk opgave, idet resultatet og problemstillingen anvendes i skovstyrelsen.

Ved eksamen for den matematisk-fysiske gren er i 1987 en opgave om scanning af gravide kvinder. Opgaven inddrager en avisartikel om emnet, og den danner baggrund for opgaver i sandsynlighedsregning, hvor resultaterne i opgaven kan være medbestemmende for en personlig beslutning, om man vil vælge at blive scannet. Dette er en autentisk anvendelse af matematikken. Jævnligt foretager man i samfundet den slags beregninger og vurderinger og sætter dem op mod hinanden i for og imodholdninger til forskellige emner, som kan have betydning for éns liv. Der er ikke i opgaven et oversættelsesjob for eleverne, og principielt er det ikke nødvendigt at tænke over indholdet i opgaven.

14. 10 Hvad skal der foregå omkring anvendelser af matematik i 1987?

I forslag til den nye bekendtgørelse er formålet med matematikundervisningen for det obligatoriske niveau blandt andet, at eleverne opnår "fortrolighed med matematik som beskrivelsesmiddel". Denne formulering er svagere end tidligere. Det kan dække over alle former for arbejde. Det vil sige, at det kan omhandle anvendelser, hvor eleverne skal modellere selv, eller at de skal præsenteres for en anvendelser af matematik.

Under emnet "differentialregning" skal eleverne kunne anvende "differentialregningens metoder og modeller" og under emnet "statistik" skal eleverne opnå fortrolighed med de "sandsynlighedsteoretiske modeller binomialfordeling og normalfordeling samt praktiske anvendelser af disse". Det gøres opmærksom på, at det skal være inden for emnerne differentialregning og statistik at anvendelserne skal inddrages.

Derudover foreslås modelaspektet indført: "Undervisningen skal give eleverne kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger samt sætte dem i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces."

Det betyder, at der i undervisningen både skal diskuteres modeller med hensyn til begrænsninger og anvendelsesmuligheder. Samtidig med at eleverne i simple situationer selv skal gennemføre en modelleringsproces. Det kan være en proces som ifølge definitionen er en problemløsningsproces. Det skal være modeller som repræsentationer af virkeligheden, derfor må man antage, at virkeligheden ikke kun er begrænset til fysik eller matematik selv.

På det høje niveau skal eleverne under emnet "differentialligninger" opnå færdighed i "at behandle problemer tilknyttet til differentialligninger som matematiske modeller". Der er også et valgfrit emne, hvor der vil være mulighed for at behandle en autentisk matematisk model, så der kan diskuteres modeldannelse.

I den tilhørende undervisningsvejledning gøres opmærksom på, at dét, der er undervisningens sigte, blandt andet er at gøre eleverne bevidste og opnå en kritisk kompetence overfor brug og misbrug af matematiske modeller. Det er altså det kritiske argument (argument 2), der er årsag til, at anvendelser skal ind i undervisningen.

Med hensyn til hvilke fagområder, der tænkes på at inddrage, fremhæves, at eleverne både i 1. og 2. g. har fysik sammen, og at det derfor vil være oplagt med et samarbejde mellem de fag. Ellers peges især på de eksperimentelle fag samt geografi, hvor der vil være mulighed for at inddrage simuleringsprogrammer i behandlingen af de faglige områder i disse fag. Der vil derved være mulighed for at inddrage anvendelser og modellering i højere grad.

Der skal nye materialer ind i undervisningen. Tekster om matematik og/eller tekster, hvori anvendelser af matematik indgår. Man kunne forestille sig, at det var en del af at opøve eleverne til at vurdere og være kritiske overfor brug og misbrug af matematik, men det vil være optimalt, hvis det drejer sig om autentiske tekster. Det vil ikke sige konstruerede tekster om emnet, men aktuelle tekster, som læreren finder frem.

I undervisningsvejledningen bliver det nærmere indhold for modelaspektet præsenteret. Det er jo noget nyt i gymnasiet, og det nærmere indhold af en modelleringsproces skal præciseres. Arbejdsgruppen peger på, at det f. eks. kan være "simple optimeringssituationer, simple problemstillinger af geometrisk art, hvor den geometriske repræsentation ikke er givet på forhånd samt simple stokastiske eksperimenter". Der lægges op til diskussion af "hensigt med modeldannelse; udvælgelse af de dele af virkelighedsområdet, der skal indgå i modeldannelsen og idealiseringer heraf; matematisk repræsentation med eventuel efterfølgende simplificering og informationstab, verifikationsproblemer". Der anbefales at inddrage vækstmodeller, stokastiske modeller og simulationsprogrammer i arbejdet, samt eventuelt dele af en autentisk model.

Der, hvor eleverne selv skal gennemføre en modelleringsproces, behøver det ikke at medføre kritiske overvejelser over brugen af matematik i situationen. Og hvis eleverne skal diskutere modeldannelse behøver det ikke at betyde, at de selv skal modellere, og at det er i den forbindelse, at diskussionen skal foregå. Der er ikke tale, at eleverne skal gennemgå en anvendt problemløsningsproces. Men det er meget tæt på. Det er en mulighed at inddrage autentiske modeller i matematikundervisningen.

Der skal på sproglig linje mellemniveau under emnet "optimering" diskuteres modeldannelse, det vil sige, at eleverne ikke selv skal modellere eller matematifisere et problem. Eleverne skal under emnet "bearbejdning af talmateriale og analyse af talmaterialer" og "opnå fortrolighed med begreber og metoder til matematisk beskrivelse af almindeligt forekommende økonomiske problemstillinger". Her foreslås at inddrage autentisk materiale og virksomhedsbesøg. Det kan tyde på, at de sproglige elever skal se, hvordan matematik bruges i virkeligheden. Det kan være et argument om indlæring og motivation (argument 5), men der står intet om det. Under emnet "geometri" skal inddrages praktiske anvendelser af geometri.

Ved den endelige bekendtgørelsesformulering af 1987 er formålet med matematikundervisningen for matematisk linje og både for obligatorisk og det høje niveau ændret til, at eleverne skal opnå "fortrolighed med matematik som middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder". Her kan man se, at det er andre fagområder, der tænkes på at skulle inddrages, hvilket det ikke behøvede ved forslag til bekendtgørelse. Undervisningen for den sproglige linje mellemniveau har formålet: "...at eleverne opnår kendskab til matematik som middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder...". Der er altså en forskel på de to linjer. Hvor de sproglige elever skal opnå kendskab til matematik som middel..., da skal de matematiske elever opnå fortrolighed med matematik som middel.... Der er en gradsforskel. De sproglige elever behøver ikke selv at modellere for at få kendskab, de skal høre om det i undervisningen, og det er nok. De matematiske elever skal blive fortrolige, hvilket kræver mere end at høre om det i undervisningen. Der skal eleverne selv modellere.

Kapitel 15 Sammenfatning på perioden 1960-88

Bestemmelser for perioden
Ved den røde betænkning i 1960 og den efterfølgende bekendtgørelse i 1961 bliver anvendelser af matematik på papiret sat i fokus. Det understreges ved formuleringen af den skriftlige eksamen, hvor der gøres opmærksom på, at det vil blive testet, om eleverne har hvervet forståelse af anvendelser af matematik inden for andre fagområder. Både ved den matematiske og sproglige linje, skal der lejlighedsvis findes varierede opgaver fra andre fagområder.

I 1971 indføres der i formålet for matematikundervisningen for både sproglig og matematisk linje en sætning om, at eleverne skal lære at være kritiske overfor anvendelser af matematik. Det er nye toner i bestemmelserne for matematikundervisningen. Det er ligeledes første gang, at der i bekendtgørelsen står, at der kan finde diskussion af matematiske modeller sted ved den matematiske linje. Det er i forbindelse med emnet sandsynlighedsregning.

Ved bekendtgørelsen af 1984 skal eleverne hverve kendskab til udformning og anvendelse af matematiske modeller, og ved bekendtgørelsen af 1987 skal eleverne på matematisk linje i simple situationer gennemføre en modelleringsproces. Efter mange års diskussion af de sproglige elevers manglende udbytte af matematikundervisningen ender det ved bekendtgørelsen af 1987 med, at den selvstændige matematikundervisning erstattes af et naturfag bestående af kemi, matematik og fysik.

Anvendelser af matematik i 1960-88
Fra begyndelsen af perioden er anvendelser i fokus igen på papiret. Der er en positiv stemning omkring de naturvidenskabelige fag, da de er medvirkende til vækst i industri og produktion. Derfor bliver der talt meget om anvendelser i perioden op til 1960 og om at åbne faget mere op. Det skal den nye matematik medvirke til. Den nye matematik indføres med nyt pensum, nye områder og matematikken formuleres i nye termer. I den forbindelse er der diskussion om, hvorvidt pensum er blevet uoverkommeligt, hvilket fører til, at der efter nogle års erfaringer fjernes emner fra emnelisten i bekendtgørelsen.

Væksten i 60'erne og mange unge mennesker på uddannelsesinstitutionerne fører til nye vilkår for undervisningssystemet, også for gymnasiet og derved matematikundervisningen. Der diskuteres, at matematikken er ude i en relevanskrise. Eleverne ved ikke, hvad de skal bruge matematik til. Faget opfattes som meget autoritært. Anvendelser af matematik skal være et middel, der kan løse op for det problem.

Der tages mange initiativer til at gøre noget ved situationen. Der arrangeres fra sidst i 70'erne og frem efteruddannelseskurser, et landsmøde om matematikkens stilling, konferencer og der udarbejdes en rapport om matematikken i Danmark. Fælles for disse er, at der bliver talt om, at anvendelser af matematik skal ind i undervisningen, og begreber som modellering og modeldiskussioner fremhæves ligeledes i debatten. Her formuleres for første gang de principper, der kom til at ligge til grund for bekendtgørelsen af 1987.

På det strukturelle plan ændres gymnasiet i 1961 til at blive et grengymnasium, hvor eleverne efter det første år på henholdsvis matematisk og sproglig linje skal vælge sig ind på grene. Den gammelsproglige linje nedlægges ved den lejlighed og optræder i stedet som en gren på den sproglige linje. Dette grenopdelte gymnasium blev afskaffet ved bekendtgørelsen af 1987, hvor valgfagsgymnasiet blev indført. Timeantallet er i samme periode blevet reduceret for matematiks vedkommende. Det skete ved flere lejligheder. Først blev 5-dages skoleugen indført, dernæst blev en skoletime sat ned fra at vare 50 min. til at vare 45 min. og den sidste reduktion skete ved bekendtgørelsen af 1987, hvor det ugentlige timetal over alle tre år nedsættes med en time.

Lærebøger og studentereksamensopgaver

Lærebogssystemer henvendt enten til de sproglige elever eller til de matematiske elever begynder i denne periode at vokse i omfang. Det bliver i denne periode nødvendigt for læreren selv at tage stilling til, hvilke dele der skal undervises i og samtidig overholde bekendtgørelsens forskrifter. Det er ikke meningen med disse lærebogssystemer, at der skal undervises slavisk i indholdet fra første side til sidste.

Indførelsen af den nye matematik afspejles tydeligt i lærebogssystemerne. Matematikken bliver reformuleret i termer fra mængdelæren, som dominerer indholdet. Det er ligeledes i denne periode, at sandsynlighedsregning indføres. Anvendelser af matematik spiller ved periodens begyndelse ikke en stor rolle. Det er først senere omkring 70'erne, at der bliver lagt mere vægt det. Det samme kan siges om studentereksamensopgaverne. Det er først omkring 1977, at der kan tales om, at anvendelser af matematik inddrages i opgaverne udover ved rentesregning.

Analyse

I bekendtgørelsen af 1961 bliver anvendelser af matematik introduceret på den samfundsfaglige og naturfaglige gren i relation til det matematiske emne funktioner. Mens det på den matematisk-fysiske gren fremhæves, at anvendelser af matematik skal sættes i forbindelse med infinitesimalregning og sandsynlighedsregning. Der skal på både matematisk og sproglig linje relateres til genstandsområderne rentesregning, fysik og andre fag end fysik.

Der er ikke i tiden 1961-71 meget debat omkring anvendelser af matematik. Der er et sted, hvor det kommer frem, at en regnestok er et middel til anvendelsernes praksis.

Ved at se på lærebøgerne fås et indtryk af, hvordan anvendelser af matematik opfattes på det tidspunkt, samtidig med at forfatterne udtrykker deres opfattelse af anvendelser af matematik. På den måde er lærebøgerne alligevel et indlæg i debatten.

Lærebogssystemer til den sproglige linje er karakteriseret ved, at det er ved emnerne grafisk fremstilling, funktioner, kombinatorik og sandsynlighedsregning, at anvendelser af matematik inddrages. Det er da i forbindelse med genstandsfelterne fysik, rentesregning, astronomi, samfundslære og biologi herunder Mendels arvelove. Der sker op gennem perioden et skift til at inddrage andre genstandsfelter end rentesregning i takt med, at matematikken anvendes inden for flere områder.

For lærebøger til den matematiske linje gælder det, at anvendelser af matematik generelt ikke har stor placering i disse bøger eller i de tilhørende opgaver. Anvendelser af matematik indføres ved emnerne kombinatorik, sandsynlighedsregning og differentialregning. Det er genstandsfelterne fysik, rentesregning, og i lærebøger til naturfaglig og samfundsfaglig gren også biologi. Det må være et argument om nytte (argument 3), der medfører, at dette anvendelsesfelt kun observeres ved den naturfaglige og samfundsfaglige gren. Der er ikke mange anvendelser af matematik i bøgerne. Der er værd at bemærke, at der i bekendtgørelsen står, at anvendelser af matematik skal inddrages. Når fagkonsulenten i sin egenskab som lærebogsforfatter ikke inddrager anvendelser i særlig høj grad i lærebøgerne, og bøgerne i samtiden opfattes som et udtryk for en fortolkning af bekendtgørelsen, kan det umiddelbart betyde en opfattelse af, at anvendelser af matematik enten kommer af sig selv ved at lære meget matematik, eller at anvendelserne foregår i fysik. Når virkeligheden inddrages i sandsynlighedsregning og kombinatorik er opfindsomheden stor med at inddrage virkeligheden. Det er blot retoriske angivelser af virkeligheden, og argumentet for at indføre den type opgaver må skyldes et ønske om at motivere til indlæring af matematik (argument 5). Anvendelserne er et middel i tilegnelsen af matematik.

I studentereksamensopgaver fra perioden 1961-71 er der en opgave i sandsynlighedsregning, hvor virkeligheden inddrages. Det er ikke mere rentesregning, der testes omkring anvendelser af matematik.

Med den lille gymnasiereform af 1971 begynder en ny tid for anvendelser af matematik. I bekendtgørelsen skal der både for den matematiske og sproglige linje arbejdes med genstandsfelter som f. eks. økonomi, sociologi, biologi, fysik m.m. Formålet med matematikundervisningen og inddragelsen af anvendelser af matematik skyldes et argument om, at eleverne skal blive kritiske overfor anvendelser af matematik (argument 2). Eleverne skal ifølge bekendtgørelsen lære at modellere. Det ses dog, at den opfattelse, der kommer til udtryk omkring af matematiske modeller og anvendelser, handler om, at et endeligt sandsynlighedsfelt er en matematisk model, og at diskussion af matematiske modeller er en diskussion af en normalfordelingsmodel. Det er stadig inden for de matematiske områder sandsynlighedsregning og kombinatorik, at bekendtgørelsen foreskriver, anvendelser af matematik skal finde sted.

Der kommer i perioden 1971-84 mange holdninger omkring anvendelser af matematik til udtryk i debatten: Anvendelser af matematik skal ikke foregå i de andre fag. Det skal finde sted i matematiktimerne. Det skal være seriøse anvendelser og autentiske anvendelser, der inddrages. Det er ikke nok, at læreren postulerer modellering - modellering skal dokumenteres. Eleverne skal prøve at opstille modeller. Anvendelser af matematik kommer ikke af sig selv. Der skal undervises i det.

I samme periode er der mange tværfaglige forsøg, der finder sted i gymnasiet. Det betyder, at nye arbejdsmetoder som gruppearbejde og selvvirksomhed fra elevernes side indføres. Argumentet for at udføre forsøgene grunder blandt andet i det kritiske argument (argument 2), og det er intentionerne med forsøgene at gøre eleverne bevidste om brugen af matematik. Genstandsfelterne er blandt andet humanistiske fag som dansk og historie.

I lærebøger henvendt til matematisk linje bliver genstandsområder som rentesregning, biologi og fysik inddraget. Det er ofte i forbindelse med emnet vækst, differentialligninger og sandsynlighedsregning. Bøgerne er udtryk for en opfattelse af, at anvendelser af matematik er et krydderi i undervisningen. Der er stadig eksempler på, at bestemte matematisk områder i sig selv er en anvendelse af matematik.

Studentereksamensopgaverne omhandler nu emner fra virkeligheden, som ikke er rentesregning. Der er ligeledes opgaver med et aktuelt tilsnit, og opfindsomheden er stor i opgaver om anvendelser tilknyttet sandsynlighedsregning. Der er enkelte opgaver, hvor eleverne skal modellere ud fra en givet virkelighed, og opgaver, hvor eleverne skal fortolke de matematiske udtryk. Genstandsområderne afhænger for en stor del af til hvilken gren, opgaven er stillet. Det er ofte biologiske områder til den naturfaglige og samfundsfaglige gren, mens det ofte er fysik ved den matematisk-fysiske gren. I denne periode skifter anvendelserne til i høj grad at finde sted inden for det matematiske emne eksponentiel vækst.

Ved bekendtgørelsen af 1984 skal der på den sproglige linje diskuteres modeldannelse, og genstandsfelterne skal blandt være fra andre fagområder. Der er ingen ændringer for den matematiske linje. I tiden derefter fortsættes diskussionen omkring, at eleverne skal udsættes for modeldiskussioner og lære at modellere. Argumentet for det er det kritiske argument (argument 2).

I tiden 1984-88 foregår mange ting, som har med anvendelser af matematik at gøre. Der er fortsat forsøg med tværfaglige forløb, hvor matematik anvendes i relation til edb og samfundsfag. Der er nogle, der forsøger at udarbejde eksamenssæt, hvor anvendelser af matematik benyttes til en emneorienteret eksamensopgave, hvor alle opgaverne tilhører samme problemstilling. Lærebøgerne fra denne periode inddrager genstandsfeltet fysik og det i relation til emnet funktioner. Der ses endnu den opfattelse, at anvendelser af matematik er et bestemt matematisk område. Studentereksamensopgaverne indeholder opgaver, hvor eleverne skal matematifisere et område fra virkeligheden, og der er i nogle tilfælde tale om en autentisk anvendelse. Anvendelser af matematik inddrages igen ved eksponentialfunktioner og sandsynlighedsregning.

Ved bekendtgørelsen af 1987 kulminerer diskussionerne fra 70'erne og 80'erne om matematiske modeller og anvendelser med indførelsen af krav om, at eleverne skal diskutere modeldannelse, udføre problemløsningsprocesser, se eksempler på autentiske anvendelser af matematik. De matematiske områder, hvor anvendelser af matematik foreslås indført er i forbindelse med differentialregningsmodeller, differentialligninger, sandsynlighedsteoretiske modeller og vækstmodeller. Genstandsfelterne er ikke kun fysik, men generelt andre fagområder end matematikken selv. Der skal ligeledes inddrages andre former for materiale udover, hvad lærebøgerne kan byde på. Ved denne bekendtgørelse ændres gymnasiets struktur fra at være et grengymnasium til et valgfagsgymnasium. Det betyder, at muligheden for direkte tværfaglige forløb mellem matematik og grenfaget stoppes. Til gengæld giver det mulighed for mere mangfoldige input ved modeldannelsesdiskussioner i timerne, hvor eleverne vil have forskellige valgfag at bidrage til diskussionerne med.

Ved analyse af de intentioner, der kommer til udtryk i bekendtgørelser, diskussioner, lærebøger og studentereksamensopgaver, er der til forskellige perioder stor forskel på, hvad der skal foregå i undervisningen omkring anvendelser af matematik, og hvad der finder sted. Det er særlig ved indførelsen af den nye matematik, hvor der i bekendtgørelsen gives udtryk for, at eleverne skal præsenteres for anvendelser af matematik, og det er faktisk meget lidt, at der kan tales om anvendelser i lærebøger henvendt til den bekendtgørelse. Der skal ved eksamen lejlighedsvis stilles opgaver i anvendelser for at se, om eleverne kender til anvendelser af matematik, og der er én opgave i sandsynlighedsregning, som kun er en angivelse af virkeligheden, hvor anvendelser inddrages.

Den formaldannende tendens fra perioden 1935-60 fortsætter ind i denne periode. På realplanet finder denne tendens sted indtil sidst i 70'erne, hvor lærebøger og studentereksamensopgaver begynder at omhandle andre anvendelser end rentesregning. Der bliver ligeledes ikke diskuteret anvendelser og modellering før sidst i 70'erne. Anvendelser af matematik bliver det middel, der kan gøre matematikundervisningen relevant for eleverne. Det er en debat, der varer helt op til 1987, hvor diskussionerne forplanter sig i bekendtgørelsen af 1987. Men i samtlige bekendtgørelser fra perioden 1961-1987 skal anvendelser af matematik inddrages. Der kan derfor tales om, at der er forskel på forskrifter og det, der føres ud i livet.

Kapitel 16 Diskussion og konklusion

Efter endt analyse af de tre perioder i tiden 1903-88 er jeg nu i stand til, at give et billede af, hvilken status og funktion anvendelser af matematik har i matematikundervisningen i årene 1903-88. Først følger en opsamling på, hvilke argumenter, genstandsfelter og undervisningsmetoder, der kommer til udtryk i materialet i tiden 1903-88. Dernæst følger en præsentation af opfattelser af anvendelser af matematik, som jeg har observeret gennem perioden. Dette følges op af en diskussion af periodisering, og endelig diskuteres anvendelser af matematik i matematikundervisningen i forhold til problemformuleringen.

16. 1 Samlet opsamling

Argumenter for anvendelser gennem tiden

Når der gennem perioden diskuteres anvendelser af matematik, er der forskel på hvilke argumenter, der er herskende i forhold til perioden. Det er i årene 1903-35 ofte nytteargumentet (argument 3) og tilegnelsesargumentet (argument 5), der præger debatten. Der er ligeledes argumenter for bestemte typer af opgaver i lærebøger, som ikke kommer til udtryk, men hvor jeg kun kan sandsynliggøre hvilket argumentet, der kan ligge til grund for at tage dem med i bøger. Det gælder f. eks. i tilfælde med anvendelser af matematik i relation til kombinationer og permutationer, hvor opgaverne er retoriske angivelser af en virkelighed, hvorfor det må være et spørgsmål om at motivere til tilegnelse af matematik, der er årsag til at opgaverne inddrages. I perioden efter 1935 er der en generel stemning mod anvendelser af matematik, både på grund af krigens forfærdelige brug af teknologi baseret på anvendelse af matematik, fysik og kemi, og på grund af, at anvendelser af matematik ikke har kunnet "løse" problemerne med de sproglige elevers matematikudbytte. Stemningen vender i 50'erne, hvor argumentet for at vise, hvad matematik kan bruges til skal motivere flere til at ville læse matematik (argument 5). Fra omkring 70'erne er det det kritiske argument (argument 2), der præger debatten og bekendtgørelserne med hensyn til anvendelser af matematik. Tilegnelsesargumentet (argument 5) og nytteargumentet (argument 3) kan ligger skjult i samtlige perioder, hvis intentionerne med bestemte opgaver kunne undersøges. Det viser sig, at der er flertal af bestemte genstandsfelter, der henvender sig til specielle grene i gymnasiet.

Argumentet om, at der skal undervises i anvendelser af matematik, fordi det hører til det fulde billede af matematikken (argument 4), har jeg kun observeret få steder. Det var ved en enkelt lejlighed i første periode og ved en enkelt lejlighed i tredje periode. Til gengæld har jeg ikke fundet eksempler på argumentet om anvendelser af matematik som et middel til personlighedsdannelse (argument 1), som er på listen over Blum og Niss' observerede argumenter.

Genstandsfelter og matematiske emner

Betragtes genstandsfelterne for anvendelser over hele perioden er der bestemte områder, anvendelser af matematik relateres til for en stor del af tiden. Det drejer sig især om fysik og rentesregning. Der bliver dog i forbindelse med grafisk fremstilling inddraget genstandsfelter som f. eks. skatteskalaer og feberkurver, og i opgaver inden for emnet kombinationer inddrages f. eks. cykelture og bordplaner til en fest. Sådan er det i realiteten indtil midt i 70'erne, hvor andre genstandsfelter som f. eks biologi, samfundsfag inddrages i eksempler og opgaver.

Indimellem inddrages autentiske anvendelser af matematik, hvor resultatet af anvendelserne kan bruges inden for den verden anvendelserne beskriver. Emnet grafisk fremstilling i lærebøgerne fremstillet som værende en autentisk anvendelse af matematik. Det er blandt andet en af årsagerne til, at sproglige elever skal undervises i det emne, idet det kan gøre nytte for dem i deres videre studier inden for f.eks. medicinstudiet. Derudover undervises i rentesregning, som er en autentisk anvendelse af matematik. Ellers er det først i forbindelse med sandsynlighedsregningens indførelse, at der igen ses autentiske anvendelser i opgaverne, som ikke er rentesregning.

Rentesregning er et genstandsfelt, som jeg betegner som en anvendelse af matematik. Den opfattelse deles af meget få igennem perioden. Det viser dig ved flere lejligheder, at det opfattes som "ren" matematik. Jeg vil betegner rentesregning som en autentisk anvendelse af matematik. Det er ikke sådan, at der inden for det område ikke findes regnetekniske opgaver, men det er meget få, og både teorien i lærebøger, indholdet i opgaverne og studentereksamensopgaverne omhandler situationer, hvor resultatet kan benyttes inden for den verden, den beskriver. Derfor kan jeg konstatere, at anvendelser af matematik er blevet inddraget i perioden 1903-88, men det er blot ikke opfattet sådan af samtiden, og det er i en meget lille grad.

Det er viser sig at genstandsfelterne, der inddrages i undervisningen afhænger af, hvilke videnskabelige områder, matematikken anvendes inden for. I begyndelsen af perioden drejer det sig om genstandsfelterne fysik og astronomi, hvor matematik er en væsentlig del af teoridannelsen. Igennem de senere år er andre fagområder begyndt at benytte matematikkens muligheder som beskrivelsesmiddel. Humanistiske, socialvidenskabelige og andre naturvidenskabelige fag som f.eks. biologi, som ikke er eksakte fag, benytter sig i et større omfang af matematik I takt med den udvikling bliver mulighederne for at inddrage autentiske eller mere mangfoldige anvendelser af matematik større. Det er netop, hvad analysen omkring genstandsområder viser, at det finder sted.

Anvendelser af matematik knyttes ofte til bestemte matematiske emner. I den første periode i tiden 1903-35 er det ved emnerne funktioner, grafisk fremstilling, infinitesimalregning, kombinationer/permutationer og sfærisk geometri. Det samme viser sig i næste periode 1935-60, men i den sidste periode knyttes anvendelser til nye discipliner som sandsynlighedsregning. De øvrige områder, hvor der knyttes anvendelser af matematik til enten i opgaver eller i debatten, er differentialregning, differentialligninger og eksponentialfunktioner. Der er mange matematiske emner, der forsvinder fra gymnasiepensum gennem tiden. Sfærisk geometri, komplekse tal, permutationer, rentesregning for en periode, rumgeometri ligeså. Det har selvfølgelig betydning for typen af anvendelser af matematik, der kan observeres gennem perioden. Det har ligeså stor betydning, at der kommer nye områder til som f.eks. sandsynlighedsregning. Derfor vil anvendelser af matematik være afhængig af, hvilke øvrige områder, der skal undervises i i gymnasiet.

Det har vist sig, at Blum og Niss' definitionen på anvendelser af matematik er en god til at sortere anvendelser af matematik ud fra det fuldstændige materiale. Det kan altid ved efterrationalisering diskuteres, om en definition på anvendelser af matematik skal være smallere, sådan at f. eks. de steder, hvor der "kun" er tale om retoriske angivelser af virkeligheden bliver frasorteret. Denne type opgaver er sandsynligvis inddraget ud fra et pædagogisk sigte om at motivere til tilegnelse af matematik (argument 5). Det er der ikke noget forkert i. En definition på anvendelser af matematik kan i stedet være kun at finde de autentiske anvendelser af matematik, hvor der udover et kunne være tale om tilegnelsesargument (argument 5) for at inddrage anvendelser ligeledes er tale om et nytteargument (argument 3) eller et argument om, at anvendelser af matematik hører med til matematikkens billede (argument 4). Det vil sige, at anvendelsen ikke er uden betydning og bliver taget seriøst på dens egne præmisser. Det kan ligeledes være et kriterium om og definition af, at anvendelserne skal være relevante for eleverne. Det bringer selvfølgelig det næste spørgsmål, om hvordan de skal være det. Er det for eleverne her og nu eller i fremtiden? Er det i forhold til videre studier eller som deltager i samfundslivet? Definitionen jeg har valgt at arbejde ud fra, er den mest velegnede og mindst problematiske at benytte i forhold til problemstillingen. På den måde får man flest mulige situationer frem til analyse gennem tiden, som hører med til spektret anvendelser af matematik.

Undervisningsmetoder knyttet til anvendelser af matematik
Der bliver i den første periode talt om tværfaglige forløb, der finder sted i Preussen. Det er gruppearbejde, hvor læreren har en vejleders rolle, og eleverne arbejder med en autentisk anvendelse af matematik. Der er ligeledes eksempler på opgaver, hvor eleverne selv skal finde data for derefter at kunne fremstille data grafisk. I anden periode er der forsøg med sandsynlighedsregning, og i disse inddrages eksempler på autentiske anvendelser. Men i den forbindelse er der ikke tale om nye metoder som f. eks. gruppearbejde. Det kommer der til gengæld i den sidste periode, hvor der foregår mange tværfaglige forsøg i gymnasiet. Det er ikke alle disse forsøg, der omhandler anvendelser af matematik. Her skal eleverne arbejde i grupper og arbejde ud fra andre typer af materialer end de traditionelle lærebøger. Der medfører i samme åndedrag, at læreren skal forny sin undervisning. Lærerrollen skifter i denne periode karakter, og læreren skal ikke længere virke autoritær overfor eleverne i timerne. Lærebogssystemerne skal benyttes på den måde, at læreren selv skal udvælge stof og sørge for, at undervisningen giver et helhedsbillede af matematikken. I løbet af sidste periode kommer flere elever i gymnasiet, som ikke længere er forbeholdt de få. Efter studenteroprøret i 1968 bliver eleverne mere kritiske, og de kræver relevans med undervisningen. Det stiller også nye krav til undervisningens indhold og til læreren.

16. 2 Opfattelser af anvendelser af matematik

Ved analyse af de tre perioder har jeg observeret mange opfattelser af anvendelser af matematik. Det er karakteristiske udsagn fra forskellige mennesker fra de tre perioder. De er baseret på mine indtryk. Det vil sikkert være muligt at finde disse opfattelser hos forskellige mennesker til forskellige tider. Derfor kan opfattelserne ikke ses som tidstypiske. I stedet ville det være interessant at undersøge, hvorfor netop disse opfattelser, som jeg har observeret, kommer til udtryk i materiale fra henholdsvis første, anden eller tredje periode. Men det er en anden diskussion. Jeg vælger at præsentere opfattelserne på listeform for overskuelighedens skyld:

1903-35: 1. Anvendelse af matematik i betydningen et matematisk område, der benyttes inden for et andet matematisk område.

2. Det er bestemte matematiske områder, der er velegnede at anvende.

3. Konstruktion er anvendelse af matematik.

4. Opgaveregning er anvendelse af matematik.

5. Anvendelser af matematik skal finde sted i fysiktimerne, og matematikundervisningen sørger til gengæld for, at den "rette" matematik er lært i tide, sådan at anvendelserne kan finde sted.

6. Rentesregning er ikke en anvendelse af matematik.

7. En model er en geometrisk model, det vil sige et matematisk område repræsenteret ved virkelighed.

8. Det er særlige genstandsfelter, der benyttes til anvendelser af matematik.

1935-60: Punkt 1 og punkt 8 kommer ligeledes til udtryk i denne periode.

9. Anvendelser af matematik ødelægger motivationen for at lære matematik.

10. Særlige matematiske områder som f. eks. logaritmeregning og konstruktion er anvendelser af matematik. (som punkt 3)

1960-88: Punkt 2 og 3 (og punkt 10 med regnestok som objekt) kan ligeledes observeres i denne periode.

11. Anvendelser kommer ikke af sig selv. Der skal undervises i det.

12. Anvendelser af matematik skal foregå i matematiktimen.

13. Undervisningen skal indeholde seriøse og autentiske anvendelser af matematik.

14. Anvendelser af matematik kommer af sig selv, når der er lært tilstrækkeligt matematik.

15. Eleverne skal gennemgå en modelleringsproces.

16. Anvendelser af matematik er et krydderi til timerne ikke et mål i sig selv.

Dette er opfattelser om anvendelser af matematik, der kommer til udtryk inden for den danske gymnasiematematiske verden i årene 1903-88. Disse synspunkter ville ikke kunne dækkes med Usiskin og Pollaks opfattelser. Deres punkter er ikke udført med henblik på matematikundervisningen i gymnasiet, hvor det vil være en anden type opfattelser, der vil komme til udtryk.

16. 3 Periodisering

Anvendelser af matematik gennemgår ikke i perioden 1903-88 en kontinuert udvikling. Det bevæger sig meget i bølger, om anvendelser af matematik skal inddrages i undervisningen, om anvendelser af matematik diskuteres eller om anvendelser af matematik kan observeres i undervisningen. Det veksler i høj grad mellem tidsperioder, men der er ligeledes forskel på til hvilken linje i gymnasiet, at anvendelserne diskuteres. Derfor er det relevant at diskutere periodiseringen i de tre mindre perioder og forholde det i forhold til opdelingen i de tre niveauer og til problemformuleringen.

Ved analyse af niveauet omkring, hvad der ifølge anordninger og bekendtgørelser skal undervises i med hensyn til anvendelser af matematik, da bliver der ikke for den matematiske linje talt om anvendelser udover rentesregning før ved bekendtgørelsen af 1961. Derefter bliver anvendelser af matematik en del af de kommende bekendtgørelser indtil 1987 og denne inklusiv. For den/de sproglige linje/linjer bliver anvendelser af matematik sat i fokus i anordningen af 1935, matematikken fjernet ved loven i 1953, for derefter at blive indført i 1961, hvor anvendelser af matematik igen udgør en del af bekendtgørelsen. Anvendelser af matematik for de sproglige elever skal ind i undervisningen indtil 1987, hvor matematikken fjernes og erstattes af naturfag. De kan derudover vælge matematik på mellemniveau, hvor anvendelser ligeledes skal inddrages. I større eller mindre grad skal der faktisk i alle bekendtgørelserne inddrages anvendelser af matematik.

På diskussionsplanet er udviklingen foregået anderledes. For de sproglige linjers vedkommende har anvendelser af matematik skiftevis gennem perioden været i fokus og ikke været det. Diskussionen indtil 1935 bærer præg af, at mange ønsker anvendelser af matematik ind i undervisningen. Da det indføres i 1935, og problemerne med matematikundervisningen på de sproglige linjer stadig ikke er løst, bliver anvendelser beskyldt for at fjerne motivationen fra eleverne. Efter 1953, hvor matematik fjernes fra disse linjer, bliver der igen fokuseret på anvendelser af matematik i 1956, idet matematik anvendes ved de videregående uddannelser, som de sproglige elever ikke har forudsætninger for at forstå. Diskussionen omkring de sproglige og anvendelser af matematik henvender sig mere generelt til begge linjer sidst i perioden.

For den matematiske linje bevæger udviklingen sig i et andet mønster. Diskussionen omkring anvendelser af matematik influerer lidt på den matematiske linje. Det kommer til udtryk i et meget lille omfang. Det er først omkring først i 50'erne, at anvendelser får en betydning i diskussionen. Det er i forbindelse med, at der er vækst i samfundet, og at der til produktion, skal bruges matematikere og fysikere. Derfor begynder mange at tale om, at anvendelser vil kunne motivere flere til at lære matematik. Faget skal åbnes op, hvilket den nye matematik skal hjælpe til. På trods af det fører det ikke til, at der tales om, at inddrage anvendelser som en del af matematikundervisningen ved den nye matematiks indførelse i 1961. Der debatteres ikke anvendelser af matematik meget seriøst før sidst i 70'erne og gennem 80'erne.

Med hensyn til, hvad der kan have fundet sted/ finder sted omkring anvendelser af matematik i undervisningen, da følger det et tredje udviklingsmønster. Igennem det meste af perioden bliver genstandsområdet rentesregning behandlet, men det er tydeligt, at der er matematiklærere, der ikke ser det som en anvendelse af matematik. Der er ligeledes få eksempler på inddragelse af virkeligheden i relation til kombinationer og grafisk fremstilling. Hvis der ses bort fra det, bliver anvendelser af matematik først en reel del af matematikundervisningen på den matematiske linje omkring 1977, hvor der for første gang findes en andre genstandsområder end rentesregning, fysik og astronomi som hørende under anvendelser af matematik. Det er på det tidspunkt og i tiden fremover, at der inddrages anvendelser af matematik i lærebøgerne og i studentereksamensopgaverne. Studentereksamensopgaverne virker tilbage på undervisningen, derfor kan anvendelser af matematik antages at være en del af undervisningen. For de sproglige linjer inddrages anvendelser i lærebøgerne i større eller mindre grad gennem hele perioden. Det er som for den matematiske linje først omkring midt i 70'erne , at der indføres andre genstandsområder end rentesregning, fysik og andre matematiske områder end grafisk fremstilling og retoriske angivelser af en virkelighed i relation til kombinationer.

Jeg har valgt overordnet at dele tiden 1903-88 op i mindre perioder opdelt efter bestemmelser for matematikundervisningen. Udviklingen inden for anvendelser af matematik er dog mere kompleks. De perioder, hvor anvendelser af matematik virkelig spiller en rolle, er i første periode og fra 70'erne og frem, hvor anvendelser af matematik virkelig slår igennem. Det er i særlig høj grad omkring 1970'erne, hvor der både på retorik og realplan inddrages anvendelser inden for andre genstandsområder end fysik og astronomi.

16. 4 Anvendelser af matematik

Med udgangspunkt i anvendelser af matematik er det muligt, at sige noget om, hvordan nye ændringer i bekendtgørelser er blevet til i tiden 1903-88. Det har gennem perioden vist sig, at der er forskellige interne og eksterne faktorer, der har betydning for status af anvendelser af matematik og for ændringer af bekendtgørelsen for faget. Det er faktorerne de videregående uddannelser, inspiration fra udlandet, faginterne diskussioner og samfundets udvikling.

De videregående uddannelser, som er aftagere af de fleste studenter får meget tydeligt indflydelse på, at matematikfaget indføres for de sproglige elever i 1961. Anvendelser af matematik skal vægtes højt for de sproglige elever, når det er er til nytte for eleverne ved videregående studier. Når nyttehensynet vægtes højere til nogle tider i forhold til andre, så er det de videregående uddannelser, som har haft indflydelse på det. Det skal ikke glemmes, at de som aftagere af studenter gerne vil have indflydelse på indholdet af gymnasiet. Indholdet i gymnasiet influerer også på indholdet ved de videregående uddannelser. Samtidig med at elevmaterialet fra folkeskolen har betydning for indholdet i gymnasieundervisningen. Der vil til hver tid være en afvejning af, om undervisningen i gymnasiet skal indrettes ud fra hensynet til de videregående studier, om gymnasiet skal tage hensyn til folkeskolens elevmateriale, om gymnasiet skal vælge sin egen vej, eller om det skal prøve at tilfredsstille det hele. Der er tradition for, at de videregående uddannelser har repræsentanter siddende i de betænkningsudvalg, der skal udarbejde idéer til en ny anordning eller bekendtgørelse.

Der bliver i perioden antydet, at impulser fra udlandet påvirker indholdet i matematikundervisningen. I første periode var der hovedsageligt inspiration fra Tyskland, der får indflydelse på de matematiske emner, der kommer til at få stor vægt i undervisningen. I anden periode bliver det vækst i USA, der kommer til at stå som forbillede for andre lande med hensyn til matematikken og fysikkens del i den teknologiske udvikling. Det er påvirkning fra udlandet, der kommer til at få betydning for indførelsen af den nye matematik i 1961.

Ved at følge sagen "anvendelser af matematik" gennem perioden 1903-88 giver det en mulighed for bedre at forstå, hvorfor matematikundervisningen i gymnasiet i dag indeholder et modelaspekt, og hvordan der i undervisningen hersker en vis inerti både hvad angår indførelse af nye emner i bekendtgørelsen, men også hvad angår praksis.

Diskussionen om anvendelser af matematik har været tilstede i hele perioden 1903-88. Den er blot betonet i større eller mindre grad. Ud fra en analyse af materialet gennem tiden kan man se, at diskussion om anvendelser af matematik har bevæget sig i cirkler. I første periode udgjorde anvendelser en meget stor del i debatten, hvorefter anvendelser blev betonet i høj grad i bestemmelserne for matematikundervisningen. I anden periode bevæger diskussionen sig væk fra anvendelser af matematik, og der ønskes en mere stringent matematikundervisning. Det bliver realiteten ved den nye matematiks indførelse ved begyndelsen af tredje periode. Her skal der på papiret lægges vægt på at inddrage anvendelser af matematik. Det bliver dog først senere i tredje periode, at det sker. Diskussionen afspejler en tendens til altid at betone dét, der ikke er tilstede. Der er derfor ikke tale om en kontinuert udvikling inden for inddragelse af anvendelser i matematikundervisningen. Det er en udvikling i bølger/cirkler.

Måden, hvorpå anvendelser af matematik inddrages, afspejler, at der i undervisningssystemet hersker en vis inerti. Det er inden for en stor del af perioden de samme genstandsfelter og de samme matematiske emner, hvor anvendelser af matematik bliver en del af undervisningen. I lærebøgerne er det de samme eksempler, der benyttes gennem både første og anden periode - også af forskellige forfattere. Senere i tredje periode kommer nye eksempler ind. Opgaver og teori i tilknytning til radioaktivt henfald og populationsvækst dominerer i lige så høj grad i tredje periode, som emnet grafisk fremstilling gør i første og anden periode.

Generelt kan det observeres, at der ved varsling af ændringer kommer meget gang i debatten. Der er flere eksempler i perioden 1903-88 på, at debatten intensiveres og får indflydelse på udformningen af anordningen eller bekendtgørelsen. Det ses ved anordningen af 1935, hvor der i en lang periode forinden diskuteres anvendelser, og det indføres herefter. Det samme gør sig gældende fra sidst i 70'erne, hvor der igen diskuteres anvendelser af matematik og modellering. Det resulterer i at blive indført i bekendtgørelsen i 1987. Hvem er det, der blander sig i debatten? Det er de meget engagerede matematikere, som ønsker at påvirke diskussionen, som senere skal føre til nye bestemmelser. Ser man på de opfattelser af anvendelser af matematik, jeg har observeret, vil det sandsynligvis forholde sig sådan, at det kun er nogle synspunkter omkring anvendelser af matematik, der er kommet frem. Det er ikke til at sige, hvilken holdning og opfattelse af anvendelser af matematik de, der forholder sig tavse, har haft. Og er det dem, der siger de samme ting flere gange, der bliver hørt?

Når der skal ændres på indholdet i bekendtgørelsen for matematikundervisningen, henvender undervisningsministeren og fagkonsulenten/fagkonsulenterne sig til de fagfolk, der har markeret sig med nogle synspunkter i debatten eller praktiserer matematik. Det er værd at bemærke, at det er de samme folk, der kan være årsag til, at der skal ændres i indholdet for matematikundervisningen. På den måde kan retorik blive til realitet i bekendtgørelsen. Det er dog ikke sikkert, at det bliver en realitet i undervisningen, fordi det står skrevet i bekendtgørelsen. Det er bekendtgørelsen af 1961 et eksempel på. Her skal anvendelser af matematik inddrages i undervisningen, og eksamen er tiltænkt at skulle teste i anvendelser af matematik. Men det bliver ikke gjort. Lærebøger, som fagkonsulenten er medforfatter til, inddrager ikke anvendelser. Eksamensopgaver fra tiden efter bekendtgørelsen inddrager ikke anvendelser i den udstrækning, det står skrevet i bekendtgørelsen. Men et skridt hen imod en undervisning, der inddrager anvendelser, forudsætter, at det er skrevet i bekendtgørelsen og at der testes i det til eksamen. Det er tydeligt at se, hvordan lærebøger og studentereksamensopgaver på samme tid i 70'erne inddrager anvendelser af matematik udover rentesregning og grafisk fremstilling.

Hvis vi prøver at fokusere på modelaspektet i bekendtgørelsen for matematikundervisningen af 1987, da kan man se, at det faktisk allerede bliver en del af debatten i 70'erne. Indholdet i modelaspektet, som det ser ud i dag, er der flere debattører, der fremhæver allerede tidligt. Det har i materialet vist sig at være en del, der sluttede op om det. På trods af den efterhånden store opbakning blandt fagfolk bliver det alligevel først ved bekendtgørelsen af 1987, at tankerne indføres i bekendtgørelsen for matematikundervisningen. Dette er igen et eksempel på, at der hersker en vis inerti i uddannelsessystemet, som er svært at foretage ændringer inden for.

Hvis der er noget emne inden for matematikken, hvor udviklingen ikke foregår isoleret fra omverdenen og samfundet, så må det være anvendelser af matematik. For det første, fordi selve betydningen af det, set i lyset af min definition, involverer relationer til områder uden for matematikken selv. For det andet, fordi anvendelser af matematik er til nytte for samfundet til både teknologisk udvikling, til udarbejdelse af prognoser og til beslutningstagen. Derfor vil eksterne faktorer, ligesom de interne diskussioner blandt matematikfagfolk, have betydning for inddragelse af anvendelser af matematik og udviklingen inden for matematikundervisningen. De er i høj grad med til at sætte de ydre rammer for undervisningen, og samfundets udvikling vil ligeledes altid have en vis indflydelse på indholdet i uddannelser på alle niveauer. F. eks. viser det sig, at anvendelser af matematik for nogle debattører får en dårlig klang efter krigen, hvor netop anvendelse af matematik blev brugt til teknologisk udvikling inden for våbenindustrien. Senere ved opsvinget i 50'erne bliver anvendelser af matematik meget velanset, og regeringen ønsker at mange vil studere de naturvidenskabelige fag. I 70'erne bliver det igen samfundsudviklingen, hvor mange unge får mulighed for at gå i gymnasiet, der fører problemer med sig, hvorfor anvendelser af matematik bliver det middel, der skal afhjælpe problemerne med, at undervisningen mangler relevans. Den politiske udvikling har selvfølgelig lige så stor betydning for indretningen af gymnasiet både i indhold og i struktur. Det er mangel på politisk flertal, der forhindrer vedtagelsen af det 4-årige gymnasium i første periode. Det er mange på politisk vilje, der forhindrer politikerne i 70'erne i at indføre et fælles basisår i 1. g. for alle elever i gymnasiet i grenstrukturen. Endelig er det udtryk for politisk ideologi, da valgfagsgymnasiet blev vedtaget i 80'erne.

Med hensyn til udviklingen inden for matematikundervisningen med hensyn til anvendelser da kan det konkluderes, at det er ved begyndelsen af dette århundrede og efter 70'erne, at der sker en del omkring anvendelser af matematik i perioden 1903-88. I tiden imellem sker der meget lidt på realplanet, der har med anvendelser af matematik at gøre. På det retoriske plan bliver der gennem perioden talt om anvendelser af matematik, men først efter 70'erne involverer undervisning i anvendelser af matematik, at eleverne skal opnå kendskab til matematiske modeller, kunne modellere og gennemføre en simpel modelleringsproces. Som vi har set er der flere faktorer, der spiller ind på anvendelser af matematiks status og funktion i matematikundervisningen. Det er et samspil mellem disse faktorer, der får betydning for, om anvendelser af matematik på retorikplanet skal inddrages i undervisningen. Og et samspil mellem samme faktorer, der får betydning for, om anvendelser af matematik rent faktisk inddrages i undervisningen.

Dannelse - hvor blev diskussionen af?

Tidligere blev dannelse af nogle opfattet som "en bestemt måde af opføre sig på". Gymnasiet skulle bidrage til ånsdannelsen og opdragelsen af eleverne. Ofte blev dannelse set i betydningen at kunne fagligt stof uden ad - at kunne citere bestemte digtere m. m.. I vores tid, hvor samfundet forandrer sig hrutigt, da vil nogen faglige kvalifikationer være uaktuelle meget hurtigt. Derfor er det andre krav, der stilles til gymnasiets rolle som opdrager. Kravene i dag handler mere om et krav til elevernes personlige åbenhed og kritiske stillingtagen til beslutninger i samfundet. Det handler også i dag om at værne om demokratiet. Det er en udvikling, der afspejles perifært i perioden 1903-88 omkring anvendelser af matematik. Hvor det i første periode hedder, at gymnasiet skal bidrage til åndsdannelse, hedder det i tredje periode, at gymnasiet skal bidrage til at udvikle selvstændige og kritiske elever, der kan handle i samfundet. Diskussionen om mål og midler forsvinder derfor ikke i perioden. Men det vil kræve en selvstændig analyse for at blive klogere på indholdet i målene og midlerne. Det kan ikke skildres så kort som her, hvor der blot konstateres, at diskussionen fra 1880'erne af Tuxen og Kromann om mål og milder med gymnasiet ikke forsvinder i tiden 1903-88.

Epilog

Umiddelbart efter vedtagelsen af bekendtgørelsen af 1987 er mange spændt på, hvordan matematikundervisningen vil forløbe efter de mange nyskabelser med at indføre aspekterne og simple modelleringssituationer.

Matematikundervisningen og anvendelser

Fagkonsulent Torben Christoffersen er efter bekendtgørelsens vedtagelse af den opfattelse, at den nye gymnasiereform vil gå stærkest ud over det obligatoriske niveau.[1] Matematik fjernes på den sproglige linje, og på den matematiske linje sker en timenedsættelse på en time på både højt og obligatorisk niveau i forhold til tidligere. Derudover bliver antallet af afleveringsopgaver reduceret på det obligatoriske niveau fra ca. 90 fordelt over 3 år til ca. 55 fordelt over 2 år. Af gode ting ved bekendtgørelsen er indførelsen af de tre aspekter: det historiske aspekt, modelaspektet og matematikkens indre struktur. Aspekterne vil give lærerne større mulighed for at perspektivere faget.

Hvordan gik det så med det første hold studenter efter den nye gymnasiereform? På obligatorisk niveau, da har lærerne ifølge fagkonsulenterne taget aspekterne meget seriøst. Modelaspektet er blevet behandlet i forbindelse med særlige forløb, hvor edb er blevet inddraget. Blandt nogle emner kan nævnes: optimering, vækstmodeller, radioaktivitet, AIDS-udbredelse, navigation, økonomiske modeller og livsforsikring. Af tværfagligt arbejde har der været forløb mellem dansk og matematik: billedanalyse og det gyldne snit, H. C. Andersen og Pythagoras' sætning, beskrivelser i litteraturen af matematikundervisning (Scherfig, Bodelsen, Reuter, Kielland) og en stil om matematikindholdet i en avisartikel. Ellers har der været forløb mellem geografi og matematik, og de har omhandlet: demografi, landmåling, triangulering og nivellering. I løbet af 1. og 2. g. skal eleverne aflevere anderledes skriftligt arbejde. Det har drejet sig om matematikstile om: tallenes historie, rapport om lånevilkår i butikker og pengeinstitutter, det gyldne snit, skriv et læserbrev til avisen i anledning af en regnefejl i en artikel, matematisk modelbygning, skriv om kvadratrødder så dansklæreren kan forstå det, brug og misbrug af grafiske fremstillinger af talmateriale.[2]

Ifølge fagkonsulenterne i matematik valgte 80% af eleverne efter obligatorisk niveau matematik på højt niveau. Det var en fordobling af antallet elever, der følger gymnasiets højeste niveau i matematik, i forhold til tidligere[3]. Af samme grund vil der være en større faglig spredning blandt eleverne. Lærerne har udtalt, at der har været problemer med at få tid til at perspektivere emnerne i bekendtgørelsen herunder aspekterne. Derfor er det valgfri forløb i mange tilfælde kombineret med det datalogiske emne. Ellers er det mest populære valgfri forløb, som det også var i grengymnasiet, komplekse tal og differentialligninger. Aspekterne behøver ikke at blive behandlet i et særligt forløb, men mange har valgt at gøre dette. Modelaspektet er der arbejdet med ved: differentialligningsmodeller, keglesnit, vækstmodeller, afsætningsøkonomi, hyperbolsk

[1] Gymnasieskolen 1988, s. 409-410
[2] LMFK 1991 nr. 10, s. 17-18
[3] LMFK 1991 nr. 10, s. 14

geometri og relativitetsteori, smittespredning, Lotka-Volterra modellen samt lineær programmering.

Lærebøger efter bekendtgørelsen af 1987

Hvad angår lærebøger, der henvender sig til denne bekendtgørelse, er der ifølge fagkonsulent Torben Christoffersen særlig tre systemer, der dominerer markedet.

Jens Carstensen og Jesper Frandsens lærebogssystem fra forlaget Systime dækker sammen med Klaus Holth, Jonny Schultz, Bent Juhl og Hans Sloths lærebogssystem fra forlaget Trip markedet med over 70% både på obligatorisk niveau og på højt niveau. Systemet "Ind i matematikken" bliver kun benyttet på 10% af alle matematikhold. Det skyldes ifølge Torben Christoffersen, at de to førstnævnte systemer meget hurtigt udkom først efter den nye bekendtgørelses vedtagelse. Gymnasierne har på det tidspunkt, inden andre lærebogssystemer udkom, allerede investeret i lærebøger og skifter dem ikke ud. Det er dog hans fornemmelse, at mange bruger "Ind i matematikken" som et supplement og kopierer fra dem. Der findes andre systemer (GAD's matematiksystem, FAG's matematiksystem, Gyldendals matematiksystem, Chr. Ejlers matematiksystem og Ole Olsens matematiksystem), men de bliver ikke anvendt i særlig stort omfang.[4]

Alle tre lærebogssystemer behandler det nye modelaspekt i større eller mindre grad. De har alle et kapitel "Matematiske modeller", men måden de behandler det på er forskellig.

"Matematik 1 og 2 - for obligatorisk niveau" og "Matematik 3 - for højt niveau" af Jens Carstensen og Jesper Frandsen introducerer til matematiske modeller ved at fortælle om en problemløsningsproces. De bruger det ikke videre i kapitlet, så det kommer til at stå isoleret. De har ikke i lærebøgerne opgaver i tilknytning til det kapitel.

"Matematisk Grundbog 1 og 2" og "Matematik Højniveau 1 og 2" af Klaus Holth, Jonny Schultz, Bent Juhl og Hans Sloth introducere ligeledes til matematiske modeller med en beskrivelse af, hvordan en matematisk model bliver til. Det er ikke ifølge definitionen en problemløsningsproces. De når til modelleringsstadiet. Til gengæld har de opgaver i bøgerne, hvor eleverne skal følge en opstilling af en matematisk model over et sygdomsforløb og komme med overvejelser i relation til antagelser i modellen.

Et andet lærebogssystem, der kom i forbindelse med gymnasiebekendtgørelsen af 1987 gældende fra 1988, går under navnet "Ind i matematikken". Systemet består af fire bøger til gymnasiets obligatoriske niveau: "Tal og geometri", "Analytisk geometri og funktioner", "Differentialregning" og "Sandsynlighedsregning og statistik". Lærebogssystemet er skrevet af Flemming Clausen, Poul Printz og Gert Schomacker, og bøgerne til obligatorisk niveau udkom i perioden 1988-90.[5] Disse lærebøger behandler modelaspektet i mange henseender. Eleverne skal både modellere, diskutere modeldannelse, introduceres til autentiske matematiske modeller, gennemgå en

[4] Pers. med. fagkonsulent Torben Christoffersen.
[5] For det høje niveau skal bøgerne "Integralregning og differentialligninger" og "Vektorer og rumgeometri" benyttes., men de udkom først i årene 1992-93 og er af samme forfattere.

modelleringsproces og løse opgaver i relation til disse punkter. Bøgernes skal ikke ifølge forfatterne læses fra ende til anden, men tværtimod er det tiltænkt, at læreren skal udvælge dét stof, som interesserer eleverne og læreren, og som svarer til elevernes niveau. Der lægges op til andre undervisningsmetoder som f.eks. elevforedrag og gruppefremlæggelser af stof.

Andre typer af danske lærebøger

Ved gymnasiereformen af 1987 blev de tre aspekter indført i pensum. Der er derefter udgivet flere bøger, der forsøger at perspektivere matematikundervisningen ved aspekterne. Ved samme gymnasiereform blev det indført at eleverne skal skrive en større skriftlig opgave i ét af deres højniveaufag, og det kan være i matematik. Derfor er der i de seneste 6-8 år kommet bøger på markedet til det formål. Jeg vil nævne nogle af disse typer af bøger.[6]

Hans Jørgen Beck: Datalogiske modeller. Borgens Forlag, København, 1990.

Mogens Brun Heefelt: Differentialligningsmodeller. Gyldendalske Boghandel, København, 1980.

Torben Svendsen: Modelbygning. Gyldendalske Boghandel, København, 1994

Mogens Brun Heefelt: Dynamiske modeller. Gyldendal, København, 1990.

Anne Winther Petersen og Erik von Essen (red.): Utraditionelle matematikopgaver. Matematiklærerforeningen, København, 1994.

Jens Peter Touborg (red.): Autentiske matematikanvendelser. Matematiklærerforeningen, København, 1991.

[6] Derudover kan jeg henvise til en oversigt med bøger henvendt til matematikundervisningens valgfri emne og undervisning i aspekterne, som fagkonsulenterne Torben Christoffersen og Vibeke Svaneborg har samlet i MT 1995, s. 171-178.

Litteraturliste

Lovstof

Anordning af 8. april 1953 angående Undervisningen i Gymnasiet

Anordning af 18. april 1953 om fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereksamen.

Anordning af 9. Marts 1935 angaaende Undervisningen i Gymnasiet

Anordning angaaende Fordringerne ved og Eksamensopgivelserne til Studentereksamen m . m. 10. Juli 1909, nr. 176

Bekendtgørelse af Lov om gymnasieskoler og studenterkursus, 10. juli 1970, nr. 328

Bekendtgørelse af 13. Marts 1935 angaaende Undervisningen i Gymnasiet

Bekendtgørelse af 9. april 1953 om undervisningen i gymnasiet

Bekendtgørelse om fagene m. v. i gymnasiet, 4. november 1987, nr. 694

Bekendtgørelse om gymnasiet, studenterkursus og enkeltfagsstudentereksamen, 19. maj 1993, nr. 319

Bekendtgørelse om midlertidig ændring af bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet, 5. juli 1968, nr. 277

Bekendtgørelse om optagelse ved uddannelse på Københavns, Århus og Odense Universiteter, 12. maj 1977, nr. 190.

Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet og fordringerne ved og eksamensopgivelser til studentereksamen, 16. juni 1971, nr. 322

Bekendtgørelse om undervisningen m. v. i gymnasiet, 25. maj 1984, nr. 268

Beretning om Undervisningen i Gymnasieskolerne udgivet paa kultusministeriets foranstaltning, af undervisningsinspektør S. L. Tuxen, 1914

Betænkning med Lovforslag afgivet af Skolekommissionen i henhold til Lov Nr. 77 af 21. Februar 1919

Betænkning vedrørende det højere Skolevæsen afgiven af det af Undervisningsministeriet under 13. oktober 1928 nedsatte udvalg

Betænkning vedrørende Undervisningen i Gymnasiet afgivet af Undervisningsinspektøren for Gymnasieskolerne i henhold til Undervisningsministeriets skrivelse af 14. september 1931

Brev fra arbejdsgruppen vedr. matematik i gymnasiet til undervisningsdirektør Uffe Gravers Pedersen Direktoratet for gymnasieskolerne og hf, 14. april 1987 (ikke-offentliggjort)

Cirkulære angående undervisningen i matematik i gymnasiet 20. marts 1964.

Cirkulære til samtlige Gymnasieskoler om Undervisningen i Matematik paa de sproglige Linier, 14. April 1924

Cirkulæreskrivelse af 6. december 1955 til rektorerne for statens højere almenskoler og Sorø Akademis Skole om tillægsprøve i matematik for elever på gymnasiets sproglige linier.

Cirkulæreskrivelse af 16. marts 1956 til rektorerne for statens højere almenskoler og Sorø Akademis Skole om matematikundervisning for elever i III. gymnasieklasse i gymnasiets sproglige linier i skoleåret 1955-56 samt om vilkårene ved de medicinske fakulteter ved Københavns og Aarhus universiteter for de sproglige studenter, der dimmitteres 1956 og 1957.

Det nye gymnasium, Betænkning afgivet af det af undervisningsministeriet under 27. februar 1959 nedsatte læseplansudvalg for gymnasiet, nr. 269

Første behandling af Lovforslag om højere Almenskoler m. m. 8. januar 1903.

Indberetning til Undervisningsministeriet om Gymnasieskolernes Undervisning i Aarene 1915-17. - Meddelelser angaaende de højere Almenskoler i Danmark i Skoleaaret 1917-18

Kgl. Anordning angaaende Undervisningen i Gymnasiet, 1.December 1906

Lov om gymnasieskoler 7. juni 1958, nr. 165

Lov om Nedsættelse af en Skolekommission, 21. februar 1919. - Meddelelser angaaende de højere Almenskoler i Danmark for Skoleaaret 1918-19

Ministeriel Bekendtgørelse angaaende Undervisningen i Gymnasiet, 4. December 1906

Udkast til bekendtgørelsen af 1987 fra arbejdgruppen vedr. matematik i gymnasiet (ikke-offentliggjort)

Udvalgsbetænkning angaaende Ændringer i Lov af 24. April 1903 om højere Almenskoler

Udvalgsbetænkning angaaende Ændringer i Lov af 24. Apirl 1903 om højere Almenskoler. - Meddelelser angaaende de højere Almenskoler i Danmark for Skoleaaret 1915-16

Undervisningsministeriets bekendtgørelse af 6. september 1961 om undervisningen i gymnasiet.

Undervisningsministeriets bekendtgørelse nr. 293 af 6. september 1961 om fordringerne ved og eksamensopgivelser til studentereksamen.

Undervisningsvejledning for gymnasiet, maj 1993, nr. 22

Vejledning og retningslinjer for undervisningen i gymnasiet. - København: Direktoratet for Gymnasieskolerne og hf, 1978

Artikler

Alsted, Jakob: Den nysproglige Linie. - Gymnasieskolen, 1926.

Andersen, Peter: Tværfagligt forsøg mellem blandt andet matematik, samfundsfag og edb. - LMFK nr.9, 1984.

Axelsen, Ib og Høj, Lise: Så uklart er det nu heller ikke. - LMFK nr. 9, 1983.

Bager, Anders: Det nye Gymnasium matematik. - Gymnasieskolen, 1961.

Balle, E.: Matematik. - Gymnasieskolen, 1967.

Berthelsen, Marianne: Naturfag for sproglige. - LMFK nr. 7, 1984.

Blomhøj, Morten: Incorporating the aspect of mathematical modelling in the danish gymnasium curriculum: Problems and perspectives. - Teaching of mathematical modelling and applications: Ellis Horwood Limited, 1991. - p. 187-194

Blum, Werner og Niss, Mogens: Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. - Educational Studies in Mathematics, vol. 22, no. 1, 1991. - p. 37-68

Blum, Werner: Applications and modelling in mathematics teaching - a review af arguments and instructional aspects. - Teaching of mathematical modelling and applications: Ellis Horwood Limited, 1991. - p. 10-29

Blum, Werner: Mathematical modelling in mathematics education and instruction. - Teaching and learning mathematics in context: Ellis Horwood Limited, 1993. - p. 3-14

Bonnesen, Tommy: Matematikken i Gymnasiet -Overvejelser og Forslag. - Nyt Tidsskrift for Matematik, 1905.

Bredsdorff, Viggo: En Plan for Matematikundervisningen i det nysproglige Gymnasium. - Matematisk Tidsskrift, 1924.

Bruun, Svend: Sprogligt og matematisk. - Gymnasieskolen, 1935.

Bundgård, Svend: De matematisk-fysiske fags udvikling og matematik-fysik-lærerens stilling. - Gymnasieskolen, 1955.

Bøggild, Oluf: Den matematisk-naturvidenskabelige Linje contra den nysproglige. - Gymnasieskolen, 1919.

Bøggild, Oluf: Et almendannende Gymnasium. - Gymnasieskolen, 1919.

Bøgh, Frederik: Matematiken efter Kommissionens Betænkning. - Matematisk Tidsskrift, 1931.

Bøgh, Frederik: Matematikundervisningen i det nysproglige og klassiske Gymnasium. - Matematisk Tidsskrift A, 1924.

Christensen, Helge et al.: Om gymnasiets matematikundervisning. - LMFK nr. 4, 1982.

Christensen, Ivar Hainau: Matematik som Skolefag i Gymnasiet. - Gymnasieskolen, 1946.

Christensen, Sophus Andreas: Om Muligheden af at bortvælge Fag i Gymnasiet. - Gymnasieskolen, 1926.

Christensen, Sophus Andreas: Matematikundervisningen paa de sproglige Linier i Gymnasiet. - Matematisk Tidsskrift A, 1926.

Christoffersen, Torben og Svaneborg, Vibeke: Nogle danske matematikbøger fra de seneste 10 år. - Normat, 1995.

De Lange, Jan: Innovation in Mathematics Education using Applications: Progress an Problems. - Innovation in maths education by modelling and applications: Ellis Horwood Limited, 1993. - p. 3-18

Den Internationale Matematikundervisningskommission. - Nyt Tidsskrift for Matematik, 1909.

Fabricius-Bjerre, Frederik: Dobbelt bogholderi i de sproglige Gymnasier. - Gymnasieskolen, 1930.

Fabricius-Bjerre, Frederik: Matematikkens stilling i den højere skole fra 1850 til vore dage. - Matematisk Tidsskrift A, 1927.

Fagkonsulenter i matematik: Matematik på matematisk linje 1990/91. - LMFK nr. 10, 1991.

Fagkonsulenterne: Om læsepensa og eksamensopgivelser. - LMFK nr. 7, 1986.

Fysiklærerforeningens styrelse: Naturfag for sproglige - en realitet. - LMFK nr. 7, 1984.

Haarder, Bertel: Gennem fordybelse finder man det almene. - Gymnasieskolen, 1984.

Haarder, Bertel: Matematiks og naturvidenskabs rolle nu og i fremtiden i den gymnasiale uddannelser. - LMFK nr. 9, 1983.

Hansen, Carl: Forslag til Ændring af Læseplanen i Matematik for Gymnasiets matematiske Linie. - Nyt Tidskrift for Matematik, 1914.

Hansen, Carl: Matematikken efter Kommissionens Betænkning. - Matematisk Tidsskrift A, 1931.

Hansen, Carl: Om Forslagene til Undervisningen i Matematik i Gymnasiet. - Gymnasieskolen, 1933.

Hansen, Carl: Om Matematikken paa Gymnasiets sproglige Linier. - Matematisk Tidsskrift A, 1924.

Hansen, Carsten et al.: Fremtidens gymnasium skal ikke være Herlevs samfundsfaglige model. - LMFK nr. 4, 1980.

Heckscher, Ivar: Reformforslag for Undervisningen i Matematik i Preussen. - Nyt Tidsskrift for Matematik, 1906.

Hellner, Willy Frits: De sprogliges matematik. - Gymnasieskolen, 1956.

Hermann, Kirsten og Hirsberg, Bent: Udkastene til ny bekendtgørelse for matematik på matematisk linje. Læsepensa og eksamensopgivelser 1986. - LMFK nr. 7, 1986.

Hermann, Kirsten og Hirsberg, Bent: Assessment in upper secondary mathematics in Denmark. - Cases of assessment in Mathematis Education - An ICMI study/ ed. by Mogens Niss. - Kluwer Academic Publishers, 1993.

Hjelmslev, Louis: Den nysproglige Almendannelse.- Gymnasieskolen, 1942.

Højby, Sigurd: Den nye matematikundervisning . - Gymnasieskolen, 1964.

Jensen, Jakob: Matematikken paa de sproglige linier. - Gymnasieskolen, 1949.

Jensen, Jakob: Matematiksituationen i lgm. - Gymnasieskolen, 1964.

Jensen, Jakob: Nu lysner det i matematiksituationen. - Gymnasieskolen, 1964.

Jensen, Jakob: Sprogligt contra matematisk. - Gymnasieskolen, 1935.

Jensen, Ulla Kürstein: Matematik i Herlevforsøgsplanerne. - LMFK nr. 3, 1980.

Jensen, Vilhelm Andreas Christoffer: Dr. Hansens Forslag til Ændring af Læseplanen i det matematiske Gymnasium. - Nyt Tidsskrift for Matematik, 1915.

Kaiser-Messmer, Gabrielle: Application-orientated mathematics teaching. - Applications and modelling in learning and teaching mathematics: Ellis Horwood Limited, 1989. - p. 66-72

Keitel, Christine: Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Applications. - Innovation in maths education by modelling and applications: Ellis Horwood Limited, 1993. - p. 18- 30

Kitchen, A. og Williams, J.: Implementing and assessing mathematical modelling in the academic 16-19 curriculum. - Teaching and learning mathematics in context: Ellis Horwood Limited, 1993. - p. 138-150

Kjær, H. et al.: Matematikken i Igm. - Gymnasieskolen, 1964.

Knudsen, Lars Færch og Rischel, Elisabeth: Medieprojekt - et samarbejde mellem dansk og matematik. - LMFK nr. 2, 1980.

Koch, Hal: Om Almendannelse. - Gymnasieskolen, 1942.

Kristensen, Jens Borchsenius: Matematisk linje efter gymnasiereformen. - LMFK nr. 4, 1987.

Kristensen, Sigurd: Matematiken efter Kommissionens Betænkning. - Matematisk Tidsskrift A, 1931.

Larsen, Mogens Esrom: Hvorfor læser vi matematik i gymnasiet? - Normat, 1984.

Madsen, Viggo: Læseplanen i det ny mat.-nat. Gymnasium. - Matematisk Tidsskrift A, 1931.

Matematiklærerforeningen: Matematik tar tid. - LMFK nr. 2., 1986.

Matematiklærerforeningens styrelse: Endnu en gang - Matematikken i gymnasiet. - LMFK nr. 10, 1981.

Matematiklærerforeningens styrelse: Gymnasiereformen og matematik. - LMFK nr. 9, 1984.

Matematiklærerforeningens styrelse: Matematik i gymnasiet. - LMFK nr. 4, 1981.

Matematiklærerforeningens styrelse: Matematikkens stilling i undervisningsministerens forslag til ændring af gymnasiet. - LMFK nr. 1, 1986.

Matematiklærerforeningens styrelse: Matematiklærerforeningens kommentar til undervisningsministeriets rapport. - LMFK nr. 2, 1991.

Matematiklærerforeningens styrelse: Udviklingsarbejde med ændret pensum i matematik. - LMFK nr. 7, 1983.

Matematiklærerforeningens styrelse: Ændret pensum i matematik. - LMFK nr. 7, 1983.

Meyer, Henrik: Matematik for sproglige. - LMFK nr. 5, 1989.

Mogensen, Poul: Det nysproglige gymnasium og matematikken. - Gymnasieskolen, 1953.

Mogensen, Poul: Kommissionsbetænkningen vedrørende det højere skolevæsen. - Matematisk Tidsskrift A, 1931.

Mogensen, Poul: Matematikken paa de sproglige Gymnasielinier. - Gymnasieskolen, 1929.

Mortensen, Mette et al.: Matematikforsøg på sproglig linie. - LMFK nr. 2, 1980.

Morville, Frans et al.: Om aspekternes status i forsøgsbekendtgørelsen for matematik. - LMFK nr. 4, 1985.

Morville, Frans og Jensen, Peter Winther: Referat af regionalmøde i matematik den 15. januar 1983 på Amtsgymnasiet i Paderup. - LMFK nr. 3, 1983.

Moscardini, A. O.: The Identification and Teaching of Mathematical Modelling Skills. - Modelling, applications and applied problem solving: Ellis Horwood Limited, 1989. - p. 36-42.

Munkholm, Hans: Om "autentiske anvendelser af matematik". - LMFK nr. 3, 1982.

Nedergaard-Hansen, Leif: Kundskaber og dannelse. - Gymnasieskolen, 1961.

Nielsen, Børge Degn: Om bekendtgørelsesændring i matematik. - LMFK nr. 10, 1983.

Niss, Mogens: Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. - Applications and modelling in learning and teaching mathematics: Ellis Horwood Limited, 1989. - p. 22-31

Niss, Mogens: Kritisk matematikundervisning - nødvendig men vanskelig. - Unge Pædagoger, nr. 4, 1984.

Niss, Mogens: Mathematics in Society. - Didactics of Mathematics as a scientific Discipline: Kluwer Academic Publishers, 1994. - p. 367-378

Niss, Mogens: Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser frem til 1990. - Normat, 1990.

Niss, Mogens: Problemorienteret Projektarbejde. - IMFUFA tekst nr. 4, 1978

Niss, Mogens: The "crises" in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level. - International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 8, no. 3, 1977. - p. 765-780

Nygaard, Axel: Om matematiken på de sproglige linier. - Gymnasieskolen, 1949.

Olsen, Bent Rye: Forsøgsundervisningen i matematik. - Gymnasieskolen, 1963.

Pedersen, Uffe Gravers: Dette reformforslag er jo ikke revolutionerende. - Gymnasieskolen, 1984.

Petersen, Olaf Heide: Matematikken på de sproglige linier. - Gymnasieskolen, 1949.

Petersen, Sophie: Et valgfrit Fag i Gymnasiet. - Gymnasieskolen, 1929.

Pihl, Hans Jensen: Om Matematikundervisningen i Gymnasiet. - Matematisk Tidsskrift A, 1923.

Pihl, Mogens: De sproglige liniers matematik. - Gymnasieskolen, 1949.

Pollak, H. O.: The interaction between mathematics and other school subjects. - New trends in mathematics teaching ICMI, vol. IV., 1979 - p. 232-248

Reich, Jette og Spang-Thomsen, Børge: Fagsamarbejde mellem fransk og matematik i 1 gm. - LMFK nr. 2, 1980.

Rindung, Ole: Matematikundervisningen til international drøftelse. - Gymnasieskolen, 1964.

Rindung, Ole: Nogle bemærkninger vedrørende matematikken i Igm .- Gymnasieskolen, 1964.

Rindung, Ole: Reformeringen af matematikundervisningen. - Gymnasieskolen, 1962.

Rothe, Jørgen: Vedrørende matematikundervisningen i det sproglige gymnasium. - LMFK nr. 2, 1987.

Skovsmose, Ole: Gør kritisk pædagogik kritisk. - Unge Pædagoger, nr. 4, 1984.

Skovsmose, Ole: Mathematics as a part of Technology. - Educational Studies in Mathematics, vol. 19, no. 1, 1988. - p. 23-42

Skovsmose, Ole: Models and reflective knowledge. - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Jahrgang 21, Heft 1, 1989. - p. 3-7

Skovsmose, Ole: Reflective Knowledge: Its relation to the mathematical modelling process. - International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 21, no. 5, 1990. - p. 765-780

Skovsmose, Ole: Towards a philosophy aof an applied oriented matehmatical education. - Applications and modelling in learning and teaching mathematics: Ellis Horwood Limited, 1989. - p. 110-114

Svaneborg, Vibeke: Forslag til bekendtgørelse for sprogligt højniveau i matematik. - LMFK nr. 2, 1992.

Togeby, Knud: Gymnasiereformen og universitetet. - Gymnasieskolen, 1960.

Torsting, Einer: Hvorledes kan Skolens Matematikundervisning bidrage til at skabe Énhed i Mangfoldighederne? - Matematisk Tidsskrift A, 1931.

Torsting, Einer: Matematik i Gymnasiet. - Gymnasieskolen, 1934.

Torsting, Einer: Matematiken i det matematiske Gymnasium. - Gymnasieskolen, 1928.

Torsting, Einer: Matematiken i det sproglige Gymnasium. - Gymnasieskolen, 1929.

Torsting, Einer: Nogle Bemærkninger angående Matematiken i Skolen. - Matematisk Tidsskrift A, 1927.

Trier, V: Dr. Hansens Forslag til Ændring af Læseplanen i det matematiske Gymnasium. - Nyt Tidsskrift for Matematik, 1915.

Usiskin, Zalman: Conceptions of mathematical modelling and their implications for the future. - Teaching and learning mathematics in context: Ellis Horwood Limited, 1993. - p. 26-36

Willesen, Laurits: Matematik for det sproglige Gymnasium. - Matematisk tidsskrift A, 1928.

Willesen, Laurits: Matematiken efter Kommissionens Betænkning. - Matematisk Tidsskrift A, 1931.

Winther, Michael: Matematikundervisningen ved Forberedelsen til nysproglig Artium. - Vor Ungdom, 1912.

Lærebøger

Andersen, A. F. og Mogensen, P.: Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie I. - København: Gyldendal, 1937

Andersen, A. F. og Mogensen, P.: Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie II. - 2. udg. - København: Gyldendal, 1944

Andersen, A. F. og Mogensen, P.: Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie III. - 2. udg. - København: Gyldendal, 1944

Andersen, A. F. og Mogensen, P.: Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie IV. - København: Gyldendal, 1940

Andersen, A. F. og Mogensen, P.: Lærebog i Matematik for Gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige Linie V. - København: Gyldendal, 1946

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 1. - København: Gyldendal, 1963

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Opgaver til Matematik for gymnasiet 1. - 2. udg. - København: Gyldendal, 1967

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 2A - den matematisk-fysiske gren. - København: Gyldendal, 1964

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Oogaver til Matematik for gymnasiet 2A - den matematisk-fysiske gren. - København: Gyldendal, 1964

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 2B - den naturfaglige og den samfundsfaglige gren. - København: Gyldendal, 1964

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Opgaver til Matematik for gymnasiet 2B - den naturfaglige og den samfundsfaglige gren. - København: Gyldendal, 1964

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Matematik for gymnasiet 3B - den naturfaglige og den samfundsfaglige gren. - København: Gyldendal, 1966

Andersen, P.O; Bülow, S. et al: Opgaver til Matematik for gymnasiet 3B - den naturfaglige og den samfundsfaglige gren. - København: Gyldendal, 1965

Bonnesen, Tommy: Matematik for de sproglige Gymnasier samt for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasiums 1ste Klasse. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1907

Bonnesen, Tommy: Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium II. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1909

Bonnesen, Tommy: Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium III. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1909

Bülow, S.; Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 1. - København: Munksgaard, 1968

Bülow, S.; Handest, F. et al: Matematik for sprogligt gymnasium 2. - København: Munksgaard, 1968

Carstensen, Jens og Frandsen, Jesper: Matematik 1 for obligatorisk niveau. - Herning: Systime a/s, 1988

Carstensen, Jens og Frandsen, Jesper: Matematik 1 opgaver. - Herning: Systime a/s, 1988

Carstensen, Jens og Frandsen, Jesper: Matematik 2 for obligatorisk niveau. - Herning: Systime a/s, 1989

Carstensen, Jens og Frandsen, Jesper: Matematik 2 opgaver. - Herning: Systime a/s, 1989

Carstensen, Jens og Frandsen, Jesper: Matematik 3 for højt niveau. - Herning: Systime a/s, 1990

Carstensen, Jens og Frandsen, Jesper: Matematik 3 opgaver. - Herning: Systime a/s, 1990

Clausen, Flemming, Printz, Poul et al: Tal og geometri. - København: Munksgaard, 1988

Clausen, Flemming, Printz, Poul et al: Differentialregning. - København: Munksgaard, 1989

Clausen, Flemming, Printz, Poul et al: Analytisk geomtri og funktioner. - København: Munksgaard, 1989

Clausen, Flemming, Printz, Poul et al: Sandsynlighedsregning og statistik. - København: Munksgaard, 1990

Hansen, Carl: Anvendt Matematik for det sproglige gymnasium. - København: Det Schønberske Forlag, 1924

Hansen, Carl: Ren Matematik for det sproglige gymnasium. - København: Det Schønberske Forlag, 1925

Hjelmslev, J.: Elementær Geometri Første Bog. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1916

Hjelmslev, J.: Elementær Geometri Anden Bog. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1919

Hjelmslev, J.: Elementær Geometri Tredje Bog. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1921

Hjelmslev, J.: Elementær Aritmetik Første Bog. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1925

Hjelmslev, J.: Elementær Aritmetik Anden Bog. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1926

Hjelmslev, J.: Elementær Aritmetik Tredje Bog. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1931

Jensen, Jakob: Praktisk Matematik - Lærebog for sproglige gymnasier. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1932

Jensen, Jakob: Matematik for de sproglige Gymnasielinier. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1944

Kristensen, Albert: Lærebog i Aritmetik og Algebra I for gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige linie. - 5. udg. København: Det Schønbergske Forlag, 1955

Kristensen, Albert: Lærebog i Aritmetik og Algebra II for gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige linie. - 5. udg. København: Det Schønbergske Forlag, 1954

Kristensen, Albert: Lærebog i Plangeometri og Trigonometri for gymnasiet. - 4. udg. København: Det Schønbergske Forlag, 1947

Kristensen, Albert: Lærebog i analytisk plangeometri. - 8. udg. København: Det Schønbergske Forlag, 1954

Kristensen, Albert: Lærebog i Differential- og integralregning for gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige linie. - 5. udg. København: Det Schønbergske Forlag, 1955

Kristensen, Albert: Lærebog i Stereometri efter Dr. phil C. Hansens Udgave. - 3. udg. København: Det Schønbergske Forlag, 1943

Kristensen, Erik og Rindung, Ole: Matematik 1. - København: G.E.C. GADS Forlag, 1962

Kristensen, Erik og Rindung, Ole: Matematik 2. - 2. udg. - København: G.E.C. GADS Forlag, 1965

Kristensen, Erik og Rindung, Ole: Matematik 3. - København: G.E.C. GADS Forlag, 1964

Kristensen, Erik og Rindung, Ole: Opgaver til matematik 1. - 2. reviderede udg. København: G.E.C. GADS Forlag, 1968

Kristensen, Erik og Rindung, Ole: Opgaver til matematik 2.- København: G.E.C. GADS Forlag, 1964

Kristensen, Erik og Rindung, Ole: Opgaver til matematik 3. - København: G.E.C. GADS Forlag, 1965

Mogensen, Poul: Mindre Lærebog i Matematik for Gymnasiets sproglige Linier. - 2. udg. - København: Gyldendal, 1938

Mogensen, Poul: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium 1. - København: Gyldendal, 1964

Mogensen, Poul: Matematisk Orientering for det sproglige gymnasium 2. - København: Gyldendal, 1965

Mollerup, Johannes: Elementær Matematik. - 2. oplag. - København: Jul. Gjellerups Forlag, 1933

Olsen, Ole W.: Matematik M1 for det matematiske gymnasiums 1. klasse. - Næstved: Forlaget Basis, 1981

Olsen, Ole W.: Matematik MF for matematisk-fysisk gren. - Næstved: Forlaget Basis, 1982

Olsen, Ole W.: Matematik S Kombinatorik og Sandsynlighedsregning. - Næstved: Forlaget Basis, 1979

Olsen, Ole W.: Matematik NS for naturfaglig og samfundsfaglig gren. - Næstved: Forlaget Basis, 1982

Pihl, H. J. og Kristensen, Sig.: Matematik I. - København: Gyldendal, 1926

Pihl, H. J. og Kristensen, Sig.: Matematik II. - København: Gyldendal, 1926

Pihl, H. J. og Kristensen, Sig.: Matematik III. - 2. uforandrede udg. - København: Gyldendal, 1934

Pihl, H. J. og Kristensen, Sig.: Matematiske Opgaver I. - København: Gyldendal, 1926

Pihl, H. J. og Kristensen, Sig.: Matematiske Opgaver II. - København: Gyldendal, 1926

Pihl, H. J., Kristensen, Sig. et al: Matematiske Opgaver III. - København: Gyldendal, 1937

Rubinstein, Poul: Matematik for gymnasiets sproglige linie - første del. - København: Gyldendal, 1963

Rubinstein, Poul: Matematik for gymnasiets sproglige linie - anden del. - København: Gyldendal, 1965

Torsting, Einer: Matematik for Gymnasiets sproglige Retninger. - København: H. Hirschsprungs Forlag, 1936

Holth, Klaus; Schultz, Jonny et al: Matematik Grundbog 1. - 1. udg., 4. oplag. - Vejle: Forlaget Trip, 1988

Hebsgaard, Thomas; Juhl, Bent et al: Matematik Grundbog 2. - 1. udg., 2. oplag. - Vejle: Forlaget Trip, 1988

Schultz, Jonny: Matematik højniveau 1- plangeometri og rumgeometri. - 1. udg., 2. oplag. - Vejle: Forlaget Trip, 1990

Hebsgaard, Thomas; Juhl, Bent et al: Matematik Højniveau 2. - 1. udg., 2. oplag. - Vejle: Forlaget Trip, 1990

Jensen, Steffen og Sørensen, Karin: Funktioner og vektorer - Teori og redskab en lærebog for matematisk gymnasium. - København: Christian Ejlers' Forlag, 1981

Sørensen, Karin og Jensen, Steffen: Statistik og sandsynlighedsregning - Teori og redskab en lærebog for matematisk gymnasium. - København: Christian Ejlers' Forlag, 1980

Jensen, Steffen og Sørensen, Karin: Differentialregning - Teori og redskab en lærebog for A-niveauet. - København: Christian Ejlers' Forlag, 1982

Jensen, Steffen og Sørensen, Karin: Plangeometri og algebra - Teori og redskab en lærebog for A-niveauet. - København: Christian Ejlers' Forlag, 1983

Axelsen, Ib og Schrøder, Hans Jørgen: Tal - Gads Matematik. - København: Gjellerup & Gad, 1986

Axelsen, Ib: Tal - Gads Matematik. - København: Gjellerup & Gad, 1986

Larsen, Niels Holm; Offenberg, Gerhard et al: Funktioner - Gads Matematik. - København: Gjellerup & Gad, 1986

Studentereksamensopgaver

Lomholt, Adolf: Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra Matematisk Artium Juni 1897 - Juni 1916. - Viborg: Sophus Beckers Boghandel, 1917

Lomholt, Adolf: Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra Matematisk Artium Juni 1907 - Juni 1920. - Viborg: Sophus Beckers Boghandel, 1921

Lomholt, Adolf: Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra Matematisk Artium Juni 1913 - Juni 1943. - København: P. Haase & Søn, 1943

Lomholt, Adolf: Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra Matematisk Artium Juni 1918 - Sept. 1946. - København: P. Haase & Søn, 1946

Lomholt, Adolf: Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra matematisk studentereksamen september 1939 - juni 1962. - København: P. Haase & Søn, 1962

Lomholt, Adolf: Matematiske opgaver - Eksamensopgaver fra matematisk artium September 1950 - september 1964. - København: P. Haase & Søn, 1965

Skriftlige opgaver fra Studentereksamen 1966 - 74. - Kalundborg: A/S Danpress Undervisningsmateriale, 1974

Skriftlige opgaver fra Studentereksamen 1966 - 89. - Kalundborg: Danpress, 87

Andet materiale

Glahn, K.: Lov om højere Almenskoler med dertil hørende Anordninger og ministerielle Bekendtgørelser, Cirkulærer og Skrivelser. - København: V. Pios Boghandel, 1907

Glahn, K.: De til Lov om højere Almenskoler hørende Anordninger og ministerielle Bekendtgørelser, Cirkulærer og Skrivelser II. Del. - København: V. Pios Boghandel, 1908

Glahn, K.: De til Lov om højere Almenskoler hørende Anordninger og ministerielle Bekendtgørelser, Cirkulærer og Skrivelser III. Del. - København: V. Pios Boghandel, 1912

Glahn, K.: Retsregler vedrørende det højere Skolevæsen IV. Del. - København: V. Pios Boghandel, 1917

Glahn, K.: Retsregler vedrørende det højere Skolevæsen V. Del. - København: V. Pios Boghandel, 1923

Møller, Andr.: Retsregler vedrørende det højere Skolevæsen VI. Del. - København: V. Pios Boghandel, 1929

Storm, Kai: Retsregler vedrørende det højere Skolevæsen VII. Del. - København: V. Pios Boghandel, 1941

Bach, Jens Ole et al.: Pædagogik i Gymnasiet - rapport fra tre tværfaglige kurser. - København: Direktoratet for Gymnasieskolerne og hf, 1982.

Beretning fra Den 4. Nordiske Kongress Oslo 2. - 5. august 1960. - Oslo, 1962

Beretning om den 2. nordiske fysik- kemi- og matematiklærer kongres i Aarhus 3.-6. August 1954. - København: J. Jørgensen og Co., 1956

Debat om matematik-, fysik- og kemiundervisningen - Beretning fra den 6. nordiske kongres for lærere i matemati, fysik og kemi. - København: Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag A/S, 1966

Den 10. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi Odense den 29. juli-1. august 1978. - København: Matematiklærerforeningen, 1978

Den 12. nordiske LMFK-kongress Trondheim 31. juli - 3. august 1984. - Trondheim: Norsk Undervisningsforbund, 1984.

Den ny matematik i Danmark - en essaysamling/ red. af Peter Bollerslev. - København: Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag A/S, 1979

Det attende nordiske skolemøde/ red. af J Skibelund Eeg og H. E. Frank Hansen, 1961

Det 17. Nordiska Skolemötet. - Helsinki, 1959

Florander, Jesper og Rasborg, Finn: Forsøg i gymnasieskolen 1950-60 - En oversigt. - Søborg: Danmarks Pædagogiske Institut, 1962

Højby, Sigurd: Det nye gymnasium- det attende nordiske skolemøde. - København, 1961

Kroman, K.: Om Maal og Midler for den højere Skoleundervisning og om Muligheden for dens organiske Sammenknytning med den lavere - en pædagogisk Undersøgelse. - Kjøbenhavn: Andr. Fred. Høst & Søns Forlag, 1886

Larsson, Erik: Kompendium til Henrik Zahle Dansk Forfatningsret 1989. - 1. udgave, 1992

LMFK: 6. nordiske kongres for lærere i matematik, fysik og kemi 8.-11. august 1966. - H. C. Ørsted Instituttet, 1966

Matematik - Kvalitet i uddannelse og undervisning. - København: Undervisnings- og forskningsministeriet, 1990

Matematiklærerforeningen 1931-81/ red. af Bent Hirsberg, Ulla Kürstein Jensen et al. - Jelling: Jelling Bogtrukkeri Aps, 1981

Matematikrapport 1984 - FLUNA's Matematikudvalg. - København: Stougaard Jensen, 1987

Meddelelser angående de højere skoler i Danmark år 1940-47

Meddelelser angående den højere almenskole 1947-58

Opdragelse og Undervisning i Danmark / red. af Einer Torsting. - København: Alfred Jørgensen, 1948. - 2 bd.

Pihl, Mogens: Indledning til det 17. Nordiska Skolmötet. - s. 211-217

Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark 1981 I Del. / Dansk Matematisk Forening. - København: Dansk Matematisk Forening, 1981.

Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark 1981 II Del. / Dansk Matematisk Forening. - København: Dansk Matematisk Forening, 1981.

Skovgaard-Petersen, Vagn: Dannelse og demokrati - Fra latin- til almenskole. Lov om de højere almenskoler 24. april 1903. - København: Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag A.S., 1976

Skovsmose, Ole: Forandringer i matematikundervisningen 1. - København: Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag A/S, 1980

Skovsmose, Ole: Initiativområder inden for matematikkens didaktik. Institut for Elektroniske Systemer, Aalborg Universitetscenter, 1987.

Torsting, Einer: Matematikens og fysikens Åndsdannende Betydning. - Stockholm: Ernst Westerbergs Boktryckeri A.-B., 1936

Tuxen, Søren L.: Gymnasieundervisningen. - 1912

Tuxen, Søren L.: Om Maal og Midler for den højere Dannelse. - Kjøbenhavn: Wilhelm Priors Hof-Boghandel, 1884

Tuxen, Søren L.: Vor skole og den Fremtid.- 1911

U90 - Samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne. - København: Undervisningsministeriet, 1978. - 2 bd.

Vejen til universitetet: Bibliografi / red. af Jette Kjærulff Tuxen og Ole Tuxen. - Korsør: Selskabet for Dansk Skolehistorie, 1978

Zahle, Henrik: Institutioner og regulering - København: Christian Ejlers Forlag, 1989

Andre typer af lærebøger

Disse bøger er ikke benyttet i specialerapporten, men der henvises til dem.

Autentiske matematikanvendelser / red. af Jens Peter Touborg. - København: Matematiklærerforeningen, 1991.

Beck, Hans Jørgen: Datalogiske modeller. - København: Borgens Forlag, 1990.

Blomhøj, Morten Blomhøj og Frisdahl, Klavs: Model-snak - differentialligningsmodeller. - Frederikssund: Forlaget FAG, 1985.

Dorn, Detlef J.; Kirkegaard, Lilian et al: Matematiks anvendelse i samfundsfag. - København: Munksgaard, 1975.

Heefelt, Mogens Brun: Differentialligningsmodeller. - København:Gyldendal, 1980.

Heefelt, Mogens Brun: Dynamiske modeller. - København: Gyldendal, 1990.

Hermann, Kirsten og Niss, Mogens: Beskæftigelsesmodellen i SMEC III - en autentisk matematisk model. - København: Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck A/S, 1982.

Lützen, Søren: Matematiks anvendelse i psykologi. - København: Munksgaard, 1975.

Nielsen, Annette Makholm: Matematiks anvendelse i informationsteori. - København: Munksgaard, 1977.

Nielsen, Bent Zimmermann: Matematiske fiskerimodeller. - Herning: Forlaget systime, 1985.

Schultz, Jonny: Matematiks anvendelse i biologi. - København: Munksgaard, 1974.

Svendsen, Torben: Modelbygning. - København: Gyldendal, 1994

Tarp, Allan: Matematiske Vækstmodeller. - GMT, 1974.

Utraditionelle matematikopgaver / red. af Anne Winther Petersen og Erik von Essen. - København: Matematiklærerforeningen, 1994.

Appendiks 1 Anordning og bekendtgørelse af 1906

12. Matematik.

A. Paa de to sproglige Linier.

a. Aritmetik og Algebra.

Den almindelige kvadratiske Ligning; Sætningerne om Røddernes Sum og Produkt. Ligninger, der indeholde Kvadratrod.

Polynomiet af 2den Grad: Opløsning i Faktorer; Fortegnsdiskussion (Uligheder af 2den Grad); Maksimum og Minimum.

Uendelig store og uendelig smaa Størrelser. Grænseværdier.

1906 ninger af 1ste Grad med to ubekendte. — To Ligninger
An. 1. Decbr. med to ubekendte, den ene af 1ste, den anden af 2den Grad; symmetriske Ligninger.

Læren om Potens og Rod med rationale Eksponenter. Det omtales kort, at Regning med irrationale Rodstørrelser opfattes som Regning med de rationale Tilnærmelsesværdier; det omtales ligeledes, at en lige Rod af et negativt Tal hverken kan være positiv eller negativ, uden at der dog gives nogensomhelst Fremstilling af eller indoves Regning med komplekse Tal.

Logaritmer med Grundtallet 10; de fire Logaritmesætninger; Beregning af simple Udtryk ved Hjælp af en fir-cifret Tabel. De simpleste eksponentielle Ligninger.

Differens- og Kvotientrækker; Summen af den uendelige Kvotientrække.

Sammensat Rentesregning med ganske simple Anvendelser paa Annuiteter.

b. Geometri.

Det almindelige Bevis for Sætningen om Sidernes Proportionalitet i to ensvinklede Trekanter. Det almindelige Bevis for Sætningen om et Rektangels Areal.

Den almindelige Ligedannethedsteori med Anvendelser paa simple Konstruktionsopgaver. Arealer af ligedannede Figurer.

Regulære Polygoner. Cirkelperiferiens Deling i 4, 6, 10 og 15 lige store Dele og Beregning af de tilsvarende Korder.

Længden af Cirklens Periferi og af Dele af denne. Arealet af Cirkel, Cirkeludsnit og Cirkelafsnit.

De trigonometriske Funktioner (sinus, cosinus, tangens og cotangens) af spidse og stumple Vinkler med simple Anvendelser paa Trekantsberegninger.

Retvinklede Koordinaters Anvendelse til grafisk Fremstilling af simple Funktioner (f. Eks. ax, ax^2, $ax^2 - bx + c$, $\frac{a}{x}$, for specielle Værdier af Koefficienterne).

B. Paa den matematisk-naturvidenskabelige Linie. 1906 An. 1. Decbr.

1. Aritmetik og Algebra.

Den almindelige kvadratiske Ligning; Sætningerne om Røddernes Sum og Produkt. Ligninger, der indeholde Kvadratrødder.

Polynomiet af 2den Grad: Opløsning i Faktorer; Fortegnsdiskussion (Uligheder af 2den Grad); Maksimum og Minimum.

Uendelig store og uendelig smaa Størrelser. Grænseværdier.

Fuldstændig Diskussion af Løsningen af to Ligninger af 1ste Grad med to ubekendte; gennem Eksempler behandles den samme Opgave for tre Ligninger af 1ste Grad med tre ubekendte.

Symmetriske Ligninger. Ligninger af højere Grader med to ubekendte; ved Eksempler vises det, hvorledes man ved Løsningen af saadanne Ligninger kan indføre eller bortskaffe Rodsæt.

Læren om Potens og Rod med rationale Eksponenter. Regning med irrationale Størrelser. Eksempler paa tilnærmet Beregning med given Nøjagtighed.

Logaritmer med Grundtallet 10; de fire Logaritmesætninger; Beregning af simplere Udtryk ved Hjælp af en fircifret Tabel. Eksponentielle Ligninger.

Differens- og Kvotientrækker; den uendelige Kvotientrække. Den harmoniske Række.

Sammensat Rentesregning. Annuiteter.

Komplekse Tal. — Induktionsbeviset. — Permutationer og Kombinationer af forskellige Elementer uden Gentagelser af disse. — Binomialformlen med positiv, hel Eksponent.

Største fælles Maal og mindste fælles Mangefold for hele Tal. Primtal; det bevises, at et Tal kun kan opløses i eet Sæt Primfaktorer. Ubestemte Ligninger med to ubekendte.

1906 Polynomiers Division; Sætningen om Division med
An. 1. Decbr. et Polynomium af 1ste Grad.

Algebraiske Ligninger: højeste Antal af Rødder; komplekse Rødder i Ligninger med reelle Koefficienter; Koefficienterne udtrykte ved Rødderne. Den binome Ligning.

2. Plangeometri.

Som ved de sproglige Linier.

Foruden de fra Mellemskolens Undervisning bekendte geometriske Steder medtages tillige de geometriske Steder for de Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter eller to givne Linier have et givet Forhold. Harmonisk forbundne Punkter og Linier. Anvendelser paa Konstruktionsopgaver.

3. Trigonometri.

De trigonometriske Funktioner (sinus, cosinus, tangens, cotangens) af hvilke som helst Vinkler. Formlerne for Funktionerne af en Sum eller en Differens af to Vinkler, for Funktionerne af den dobbelte og af den halve Vinkel. Logaritmiske Udtryk. Grænseværdien af $\frac{\sin x}{x}$ for $x = 0$. Bestemmelse af en Vinkel, naar en trigonometrisk Funktion af denne er given; Løsning af simplere trigonometriske Ligninger. Bestemmelse af en Trekants Stykker, naar tre af dem ere givne.

4. Stereometri.

Hovedsætninger om ret Linie og Plan. Konvekse Hjørner; det tresidede Hjørne; det retvinklede Hjørne; et Punkts Bestemmelse i Rummet ved retvinklede Koordinater.

Polyedre: Prisme, Pyramide og Pyramidestub. Det bevises, at der ikke kan eksistere andre konvekse regulære Polyedre end de 5 saakaldte Platoniske Legemer, men af disse behandles fuldstændigt kun Tetraeder, Tærning og Oktaeder.

Cylinder. Kegle og Keglestub. Kuglen. De sfæriske Grundformler og deres Anvendelse paa den retvinklede sfæriske Trekant. 1906 An. 1. Decbr.

Kongruens, Symmetri og Ligedannethed.

Arealet af Omdrejningscylindrens, Omdrejningskeglens og Omdrejningskeglestubbens krumme Overflader samt af Kuglebæltets og Kuglens Overflader.

Rumfang af Prisme, Pyramide og Pyramidestub, Cylinder, Kegle og Keglestub, Kugle, Kugleudsnit og Kugleafsnit.

Det paavises, at plane Snit i en Omdrejningskegleflade kan være Ellipse, Hyperbel eller Parabel.

Der bør gennem Undervisningen lægges Vægt paa at udvikle Elevernes Rumsans.

5. Analytisk Plangeometri.

Punkters og Kurvers Bestemmelse ved retvinklede og polære Koordinater. De vigtigste Former for den rette Linies og Cirklens Ligninger. Skæring mellem ret Linie og Cirkel; Tangent; Radikalakse; Cirklen bestemt ved tre Punkter. Parabel, Ellipse og Hyperbel henførte til Symmetriakser som Koordinatakser. Hovedsætninger om Brændpunkt. Ledelinie. Tangent (Asymptoter) og Normal. Diametre.

Desuden læses efter frit Valg,

enten 6 a. α. Aritmetik og Algebra: Determinanter med Anvendelse paa lineære Ligningers Løsning (Diskussion). Kædebrøk med Anvendelse paa tilnærmet Beregning af en irrational Kvadratrod og paa Løsning af ubestemte Ligninger.

β. Analytisk Geometri: Diskussion af den almindelige Ligning af 2den Grad.

γ. Stereometri: Ikosaeder. Dodekaeder. Fremstilling af simple Polyedre ved retvinklet Projektion

1906 An. 1. Decbr. paa to paa hinanden vinkelrette Billedplaner og af plane Snit i saadanne Legemer.

eller 6 b. Infinitesimalregning: Regning med uendelig smaa Størrelser som Indledning til Differential- og Integralregningen. Funktioners Kontinuitet; Eksempler paa kontinuerte og diskontinuerte Funktioner. Den afledede Funktion. Den afledede Funktion af x^n (n rational), af de trigonometriske Funktioner, af Sum, Produkt og Kvotient, af Funktion af Funktion. Rolles Sætning. Maksimum og Minimum. Taylors Række for den hele Funktion. — Det bestemte og det ubestemte Integral. Integration af de simpleste Funktioner. Delvis Integration. Simple Anvendelser paa geometriske og fysiske Opgaver.

12. Matematik.

Formaalet for Undervisningen paa de to sproglige Linier skal ikke saa meget være at bibringe Eleverne omfattende Kundskaber i Matematik, idet Anordningen i saa Henseende ikke i sine Krav er gaaet meget udover det, der tidligere krævedes til IV. Klasses Hovedeksamen, som at skole Elevernes Tænkeevne ved at indøve den gennem Matematikkens stringente Betragtningsmaader. Ved Undervisningen bør man derfor særlig lægge vægt paa en udtømmende og omhyggelig teoretisk Behandling af de optagne Afsnit.

Appendiks 2 Anordning og bekendtgørelse af 1935

§ 12. Matematik.

A. De sproglige Linier.

Formaalet for Undervisningen er at give Eleverne Kendskab til visse vigtige Anvendelser af Matematikken. Af de teoretiske Afsnit medtages saa meget, at dette Formaal kan opfyldes:

Undervisningen skal omfatte:

1. Det retvinklede Koordinatsystem. Afstanden mellem to Punkter. Cirklens Ligning.
2. Funktionsbegrebet. Funktionernes Fremstilling og Undersøgelse ved Hjælp af Tabeller og grafisk Afbildning. Funktioner af praktisk Art.
3. Den lineære Funktion. Den rette Linies Ligning. Skæring mellem to rette Linier.
   Funktionen $y = \frac{a}{x}$. Ligefrem og omvendt Proportionalitet.
4. Funktionen $y = ax^n$ (n positiv, hel). Rod med positiv, hel Eksponent.
5. Potens med rationel Eksponent.
6. Funktionen $y = 10^x$. Logaritmer med 10 som Grundtal. Beregning af simple Udtryk ved Hjælp af firecifret Tabel.
7. Rentesregning. — Annuiteter.
8. De trigonometriske Funktioner (cos, sin, tg) af spidse og stumpe Vinkler. Den retvinklede Trekant. Sinusrelationerne og den udvidede pythagoræiske Læresætning. Beregning af de ubekendte Stykker i en Trekant, naar 3 er givne. Kordeberegning. — Praktiske Anvendelser.

B. Den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

Formaalet for Undervisningen er at bibringe Eleverne Kendskab til de reelle Tal og disses Anvendelse til Beskrivelse af Funktioner, samt Kendskab til simple Figurer i Planen som i Rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger.

Undervisningen skal omfatte følgende Emner:

a. Aritmetik og Plangeometri.

1. Relle Tal. Talfølger. Grænseværdier.
2. Det retvinklede Koordinatsystem og Parallelforskydning af dette.
3. Funktionsbegrebet (grafisk Afbildning).
4. Største fælles Maal for hele Tal. Opløsning i Primfaktorer. Polynomiers Division. Største fælles Maal for to Polynomier. Division med et Polynomium af 1. Grad.
5. Den almindelige Ligedannethedslære: herunder to Cirklers Lighedspunkter.
6. Definition og Bestemmelse af Cirkelbuers Længde.
7. Potens og Rod med rationel Eksponent.
8. Undersøgelse af Funktionerne:
   $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$ (ligefrem og omvendt Proportionalitet).
   $y = ax + b$.
   $y = ax^2 + bx + c$.
   $y = x^n$ (n rational).
   $y = e^x$ og $y = 10^x$. Logaritmer med 10 som Grundtal.
9. De trigonometriske Funktioner (cos, sin, tg og cot) af vilkaarlige Vinkler. Relationer mellem de trigonometriske Funktioner. Formler for Funktionerne af en Sum og en Differens af to Vinkler, for Funktionerne af den dobbelte og den halve Vinkel. Kordeberegning.
10. Grundformler for den skævvinklede Trekant. De til Trekantens Opløsning almindeligt benyttede logaritmiske Formler. Beregning af Trekantens Højder, Medianer og Vinkelhalveringslinier samt Radius i Trekantens omskrevne Cirkel og i dens Røringscirkler. Beregninger, der kan henføres til Trekantens Opløsning.
11. Formler for Arealet af en Trekant (bl. a. udtrykt alene ved Siderne): Forholdet mellem ligedannede Polygoners Arealer: Arealet af Cirkel, Cirkeludsnit og Cirkelafsnit.
12. Kontinuerte og differentiable Funktioner.
    Differentiation af en flerleddet Størrelse, et Produkt, en Brøk, en Funktion af en Funktion, omvendt Funktion. Differentialkvotienten af x^n (n rational), hele og brudne rationale Funktioner (Eksempler), Eksponentialfunktionen, Logaritmefunktionen og de trigonometriske Funktioner.
    Den simple Middelværdisætning. Maksimum og Minimum.
13. Det bestemte og det ubestemte Integral. Integration af en flerleddet Størrelse. Integration af x^n (n rational). Eksponentialfunktionen samt de trigonometriske Funktioner. Integration ved Substitution. Delt Integration.
    Anvendelser paa Arealbestemmelser og paa Volumen af Omdrejningslegemer.

14. Ligninger: Løsning og Diskussion af to Ligninger af 1. Grad med to ubekendte. Den kvadratiske Ligning: Røddernes Sum og Produkt. To Ligninger med to ubekendte, den ene af 1., den anden af 2. Grad. Symmetriske Ligninger med to ubekendte. Beviset for, at en algebraisk Ligning af n'te Grad højest har n forskellige Rødder. Bestemmelse af de rationale Rødder i algebraisk Ligning med hele Koefficienter. Eksempler paa Løsning af algebraiske Ligninger med flere ubekendte. — Ligninger, hvor den ubekendte forekommer under Kvadratrodstegn. Simple trigonometriske Ligninger med een og to ubekendte. Eksponentielle Ligninger.
15. Uligheder af 1. og 2. Grad.
16. Hovedformerne for den rette Linies Ligning (herunder Normalformen) med Anvendelser. Parameterfremstilling af den rette Linie. Liniebundter.
17. Cirklen, dens Ligning og Ligningen for dens Tangent. Parameterfremstilling af Cirklen. Et Punkts Potens med Hensyn til en Cirkel. To Cirklers Radikalakser. Cirkelbundter.
18. Parablen henført til Symmetriaksen og Toppunktstangenten som Koordinatakser. Ligningen for Tangent. Normal og Diameter. Hovedsætninger om Parabeltangenten. Parameterfremstilling af Parablen.
19. Ellipse og Hyperbel henført til Symmetriakserne som Koordinatakser. Ligningen for Tangent, Normal, Diameter og Ledelinier samt Hyperbiens Asymptoter. Hovedsætninger om Brændpunkt, Ledelinier og Tangent. Parameterfremstilling af Ellipsen.
20. Behandling af den almindelige Ligning af anden Grad uden Produktled.
21. Geometriske Steder i analytisk Fremstilling.
22. Polære Koordinater.
23. Deling af et givet Liniestykke i et givet Forhold. Harmonisk forbundne Punkter.
24. Konstruktion paa Grundlag af:
    1. de fra Mellemskolen kendte geometriske Steder.
    2. det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter har et givet Forhold.
    3. det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to givne Linier har et givet Forhold.

    Konstruktioner paa Grundlag af Læren om ligedannede Figurer.
25. Komplekse Tal. Den binome Ligning. Løsning af den kvadratiske Ligning i komplekse Tal.
26. Vektorers Sammensætning og Opløsning.
27. Hastighed ved ret- og krumliniet Bevægelse (i Planen). Acceleration ved retliniet og cirkulær Bevægelse.
28. Differens- og Kvotientrækker. Eksempler paa konvergente og divergente Rækker. Den uendelige Kvotientrække.
29. Rentesregning og Annuiteter.
30. Induktionsbeviset.
31. Permutationer og Kombinationer. — Binomialformlen.

b. Stereometri.

32. Hovedsætninger om ret Linie og Plan: det tresidede Hjørne: konvekse Hjørner.
    Eksempler paa Anvendelse af retvinklet Koordinatsystem i Rummet: Afstanden mellem to Punkter. Kuglefladens Ligning. Vinklen mellem to Linier.
33. Kongruens, Symmetri og Ligedannethed.
34. Polyedre. Prisme. Cylinder. Pyramide og Pyramidestub. Kegle og Keglestub. De 5 regulære Polyedre med udførlig Behandling af Tetraeder. Terning og Oktaeder.
35. Kuglen. Sfæriske Trekanter. Cos- og sin-Sætningen med simple Anvendelser bl. a. paa astronomiske og geografiske Opgaver.
36. Arealet af Omdrejningscylinderens, Omdrejningskeglens og Omdrejningskeglestubbens krumme Overflade.

Tabeller over de trigonometriske Funktioners Værdier og deres Logaritmer, Kvadrattalstabel og Rentetabel.

Der bør tilstræbes et Samarbejde med de Fag, specielt Fysik, hvor Matematikken kan komme til Anvendelse. Ved Planlæggelsen af Undervisningen bør der derfor tages saadanne Hensyn, at dette Samarbejde kan blive frugtbart.

Bek. af 13. Marts 1935.

§ 12. Matematik.

A. De sproglige Linier.

Ved Undervisningen skal Hovedvægten lægges paa Matematikkens Anvendelse i det praktiske Liv inden for de i Anordningen givne Rammer. Ved Valg af Øvelseseksempler bør man derfor, overalt hvor det er muligt, søge Tilknytning til det praktiske Liv. Tillige bør der inddrages Materiale (Tabeller og grafisk Afbildning), som finder Anvendelse ved Undervisningen i andre Fag, f. Eks. Naturfag og Historie.

Tillige bør Undervisningen i de teoretiske Afsnit, der er nødvendige for Forstaaelsen af de ovennævnte Anvendelser, lægge Vægt paa en klar og koncis Fremstilling, saaledes at de Slutninger, der drages, og de Resultater, der opnaas, hviler paa velbegrundede Ræsonnementer.

Anordningens Punkt 4 og 5 skal forstaas saaledes, at det kun tilsigtes at give Eleverne en klar Forstaaelse af Begreberne Potens og Rod, hvorimod der ikke kræves Indøvelse i indviklede Opgaver.

For Logaritmers Vedkommende kan man indskrænke sig til at omskrive de i Beregningerne forekommende Tal til Potenser af 10.

B. Den matematisk-naturvidenskabelige Linie.

Undervisningen bør i saa høj Grad som muligt tilstræbe en Sammenhæng mellem de forskellige Dele af Stoffet, og Funktionsbegrebet træder herved naturligt i Forgrunden.

I Konstruktionslæren bør ikke behandles for indviklede Opgaver; der bør lægges Vægt paa en klar og udtømmende Forklaring samt paa en tydelig og nøjagtig Figur.

Der bør endvidere lægges Vægt paa at udvikle Elevernes Rumsans (eventuelt ved Anvendelse af retvinklet Projektion).

Eleverne bør beherske det matematiske Formelsystem, saaledes at de kan udføre simple Beregninger. Til saadanne indøves Brugen af 4-cifret Logaritmetabel, 4-cifrede

Appendiks 3 Anordning og bekendtgørelse af 1953

§ 13

Matematik

(*Den matematisk-naturvidenskabelige linie*).

Formålet for undervisningen er at bibringe eleverne kendskab til et fundamentalt område af matematikken og gennem arbejdet hermed at udvikle og skole deres evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform samt hos eleverne at opøve sikkerhed og færdighed i brugen af det matematiske formelsprog og i udførelsen af numeriske beregninger.

Undervisningen skal omfatte følgende emner:

1) De reelle tal. Angivelse af deres egenskaber (regneregler, ordningsregler og kontinuitet) i et sådant omfang, at læren om de reelle tal kan danne grundlag for funktionslæren. Talfølgebegrebet. Ulighedsregning og regning med numeriske værdier.
2) Hele tal; herunder deres eentydige opløsning i primfaktore, restsætninger og største fælles mål.
3) Induktionsbeviset.
4) Permutationer og kombinationer.
5) Differens- og kvotientrækker. Uendelige kvotientrækker.
6) Sammensat rente og annuiteter.
7) Polynomier; herunder division og sætningen om bestemmelse af resten, nar divisor er af første grad. Højeste antal forskellige rødder i et polynomium af n^{te} grad. Flerdobbelte rødder. Rationale rødder i et polynomium med hele koefficienter.
8) Binominalformlen.
9) Fortegnsdiskussion af polynomier af første og anden grad. Eksempler på fortegnsdiskussion af polynomier af højere grader og af brudne rationale funktioner.
10) Løsning af een ligning med een ubekendt: Andengradsligningen (diskussion); roddernes sum og produkt. Eksempler på ligninger, der kan henføres til andengradsligningen. Eksempler på algebraiske ligninger af højere grad. Eksempler på ligninger, hvor den ubekendte forekommer under kvadratrodstegn. Simple trigonometriske ligninger og eksempler på diskussion af sådanne, deriblandt af ligningerne $a\sin x + b\cos x = c$ og $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$. Eksponentielle ligninger.
11) Løsning af ligningssystemer med flere ubekendte: To ligninger af første grad med to ubekendte (diskussion). Eksempler på tre ligninger af første grad med tre ubekendte. Een ligning af første grad og een ligning af anden grad med to ubekendte (diskussion). Eksempler på to ligninger af anden grad med to ubekendte, hvor den ene ligning er algebraisk og den anden trigonometrisk eller begge er trigonometriske.
12) Komplekse tal. Løsning af andengradsligningen og den binome ligning.
13) Det retvinklede koordinationssystem og parallelforskydning af dette.
14) Funktionsbegrebet i det reelle talområde (grafisk afbildning). Ligefrem og omvendt proportionalitet. Funktionerne $y = ax + b$ og $y = ax^2 + bx + c$.
15) Grænseværdi for en funktion. Regneregler for grænseværdier. Asymptoter.
16) Kontinuerte funktioner. Kendskab til hovedsætningerne om kontinuerte funktioner og bevis for sætningen om, at en i et interval kontinuert funktion, der antager to forskellige værdier, antager alle mellemliggende værdier. Omvendt funktion.
17) Differentiable funktioner. Differentiationsreglerne for flerleddet størrelse, produkt, kvotient, sammensat og omvendt funktion. Middelværdisætningen. Funktioners voksen og aftagen. Maksimum og minimum samt største- og mindsteværdi. Anvendelse på undersøgelse af kurver, der kan fremstilles ved en ligning af formen $y = f(x)$.
18) Det ubestemte integral. Integration af flerleddet størrelse. Integration ved substitution. Delt integration. Det bestemte integral med anvendelse på bestemmelse af plane områders areal og omdrejningslegemers volumen.
19) Genstand for funktionsanalysen er de nedenfor under a), b), c), d) og e) nævnte funktionstyper samt simple funktioner, der kan opbygges ved kombination af disse.
   a) Rationale funktioner.
   b) De trigonometriske funktioner $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ og $\cot x$.
   c) Logaritmefunktionerne $\ln x$ og $\log x$.
   d) Eksponentialfunktionerne a^x med hovedvægten lagt på e^x.
   e) Potensfunktionerne x^a $(x > 0)$ med særligt henblik på $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$ for $n \geq 2$ og hel. For n ulige behandles tillige $\sqrt[n]{x}$.
20) Deling af et givet liniestykke i et givet forhold. Harmonisk forbundne punkter.
21) Den almindelige ligedannethedslære. Ligedannede polygoners arealer. To cirklers lighedspunkter.
22) Længde af cirkel og cirkelbue. Areal af cirkel, cirkeludsnit og cirkelafsnit.
23) Konstruktion på grundlag af:
   a) De fra mellemskolen kendte geometriske steder.
   b) Det geometriske sted for de punkter, hvis afstande fra to givne punkter har et givet forhold.
   c) Det geometriske sted for de punkter, hvis afstande fra to givne linier har et givet forhold.
   d) Læren om ligedannede figurer.
24) De trigonometriske funktioner (sin, cos, tg og cot) af vilkårlige vinkler. Relationer mellem de trigonometriske funktioner. Formler for funktionerne af summen og differensen af to vinkler, for funktionerne af den dobbelte og den halve vinkel. Kordeberegning.
25) Grundformler for den retvinklede og den skævvinklede trekant. De til trekantens opløsning sædvanligt benyttede logaritmiske formler. Beregning af trekantens højder, medianer og vinkelhalveringslinier samt radius i trekantens omskrevne cirkel og i dens røringscirkler. Beregninger, der kan henføres til trekantens opløsning.

   Arealet af en trekant bl. a. udtrykt ved 1) to sider og den mellemliggende vinkel og 2) siderne alene.
26) Hovedformerne for den rette linies ligning (herunder normalformen) med anvendelser. Parameterfremstilling af den rette linie. Liniebundter.
27) Ligning og parameterfremstilling for cirklen. Ligning for tangenten. Et punkts potens med hensyn til en cirkel. To cirklers radikalakse.
28) Ligning og parameterfremstilling for parablen henført til symmetriaksen og toppunktstangenten som koordinatakser. Ligning for tangent, normal og den til et givet kordesystem svarende diameter. Hovedsætninger om tangenten med anvendelse på konstruktioner.
29) Ligning for ellipse og hyperbel henført til symmetriakserne som koordinatakser. Ligning for tangent, normal, hyperblens asymptoter og den til et givet kordesystem svarende diameter. Konjugerede diametre. Hovedsætninger om tangenten med anvendelse på konstruktioner. Parameterfremstilling af ellipsen. Ledelinier.
30) Geometriske steder i analytisk behandling; herunder ellipsen og hyperblen som geometrisk sted for de punkter, hvis afstande fra et givet punkt og en given ret linie har et givet forhold.
31) Diskussion af andengradsligningen $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$.
32) I rumgeometrien behandles hovedsætninger om ret linie og plan. Det tresidede hjørne; konvekse hjørner.
33) Kongruens, symmetri og ligedannethed i rummet.
34) Polyedre, herunder prisme, pyramide og pyramidestub samt de fem regulære polyedre med udførlig behandling af tetraeder, terning og oktaeder. Cylinder, kegle og keglestub. Kuglen.
35) Sfærisk geometri med henblik på behandling af sfæriske trekanter. De trigonometriske grundform-

§ 12.

Matematik.

(*Den matematisk-naturvidenskabelige linie*).

Undervisningen bør i så høj grad som muligt tilstræbe en sammenhæng mellem de forskellige dele af stoffet, og funktionsbegrebet træder herved naturligt i forgrunden.

Indførelsen af de irrationale tal omtales, men der kræves ikke nogen konstruktiv irrationalitetsteori. Angående talfølger fordres intet ud over kendskab til definition, monotoni og konvergens, medmindre andet vedrørende talfølger benyttes i det følgende.

Under sammensat rente og annuiteter behandles kun ganske simple opgaver.

Ved behandlingen af ligninger og uligheder bør der lægges vægt på forståelsen af frem- og tilbageregningens betydning, ligesom den rolle, analysen og syntesen spiller ved behandling af konstruktionsopgaver og bestemmelse af geometriske steder, bør fremhæves i undervisningen.

Regnereglerne for funktionsgrænseværdier bør kendes, men man kan indskrænke sig til at føre bevis for et passende udvalg af dem, f. eks. sum- og produktreglen.

Sætningen om grænseværdien af en brøk, hvis tæller og nævner er differentiable funktioner, som begge er lig 0 for samme argument, behøver ikke at medtages.

Behandlingen af cirkelbuers længde, plane områders og krumme fladers areal samt legemers rumfang kan baseres på postulater om eksistensen af additive måltal. Der kræves ingen udledelse af formlen for rektanglets areal og kassens rumfang, når disse har irrationale sider og kanter.

Der bør lægges vægt på at udvikle elevernes rumsans blandt andet ved eksempler fra læren om retvinklet projektion.

Ved opgaveløsning bør der lægges vægt på en omhyggelig og klar fremstilling og ved konstruktionsopgaver tillige på en tydelig og nøjagtig figur. I konstruktionslæren og ved analytisk bestemmelse af geometriske steder kan der kun stilles krav om en udtømmende behandling ved opgaver af forholdsvis simpel karakter.

Eleverne må beherske det formelsystem, der er af særlig betydning for opgaveløsning. Som hjælpemiddel til beregninger indøves brugen af 4-cifret logaritmetabel, 4-cifrede tabeller over de trigonometriske funktioner og deres logaritmer, kvadrattals- og rentetabel.

Et samarbejde med de fag, specielt fysik, hvor matematikken kan komme til anvendelse, bør tilstræbes, og undervisningen bør planlægges under hensyn hertil.

Det vil for forståelsen af kultursammenhængen være af betydning, om der af matematikkens historie medtages træk, der har almenmenneskelig interesse, samt at der gennemgås illustrerede eksempler fra epoker inden for den matematiske tænknings historie, tjenende til at vise, hvorledes fundamentale problemer er opstået og løst.

Appendiks 4 Bekendtgørelse af 1961

§ 19. Matematik.

A. *Den matematiske linje.*

Formålet med undervisningen er
at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber og tankegange,
at vække deres sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet,
at øve dem i behandlingen af konkrete problemer, herunder udførelse af numeriske regninger, samt
at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder.

Undervisningen skal i I gymnasieklasse og på den matematisk-fysiske gren omfatte følgende emneområder:

1. Almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra.
2. Hele, rationale, reelle og komplekse tal.
3. Kombinatorik.
4. Ligninger og uligheder.
5. Plangeometri.
6. Rumgeometri.
7. Elementære funktioner.
8. Infinitesimalregning.
9. Anvendelser af infinitesimalregningen.
10. Valgfrit emne.

Undervisningen skal i I gymnasieklasse og på den samfundsfaglige samt den naturfaglige gren omfatte følgende emneområder:

1. Almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra.
2. Hele, rationale og reelle tal.
3. Ligninger og uligheder.
4. Elementære funktioner.
5. Infinitesimalregning.
6. Anvendelser af infinitesimalregningen.
7. Rentesregning.
8. Kombinatorik, sandsynlighedsregning og statistik.

Da I gymnasieklasse er grundlaget for alle matematiske grene, må emnevalget i denne klasse foretages inden for den fælles del af de samlede pensa.

B. *Den sproglige linje.*

Formålet med undervisningen er dels at give eleverne et indtryk af matematisk tankegang og metode, dels at give dem nogle matematiske hjælpemidler i hænde, som kan være dem til nytte inden for andre fag i skolen og under deres senere virke.

Undervisningen skal omfatte følgende emneområder:

1. Funktionsbegrebet.
2. Elementære funktioner.
3. Infinitesimalregning.
4. Rentesregning.
5. Kombinatorik og sandsynlighedsregning.

§ 16. Matematik.

A. *Den matematiske linjes matematisk-fysiske gren.*

Prøven er skriftlig og mundtlig.

Til *den skriftlige prøve* gives to sæt opgaver. Hvert opgavesæt består af fire opgaver. Heraf er de to obligatoriske for samtlige eksaminander, medens der gives den enkelte frit valg mellem de to andre opgaver, hvoraf kun én kan afleveres til bedømmelse.

Til besvarelse af hvert opgavesæt gives fire timer.

Det tillades eksaminanderne at medbringe følgende hjælpemidler: en regnestok og en tabelsamling, begge godkendte af undervisningsinspektionen samt en af undervisningsinspektionen udarbejdet formelsamling.

Opgaverne kan vælges fra alle dele af det læste stof undtagen fra det valgfri emne. Der skal jævnligt stilles opgaver, som kan tjene til at prøve eksaminandernes færdighed i numerisk regning. Desuden bør der lejlighedsvis stilles opgaver, som giver an~~ledning til at undersøge, om der er erhvervet forståelse af matematikkens anvendelse inden for andre fagområder. I disse opgavers tekst skal de nødvendige ikke-matematiske forudsætninger nøje~~ præciseres.

Til *den mundtlige prøve* opgives et pensum, som er omtrent halvdelen af det læste stof. I det opgivne pensum skal indgå en væsentlig del af det valgfri emne. Opgivelserne bør udvælges med en vis afveksling fra år til år.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand to spørgsmål.

Under prøven må der lægges vægt på at undersøge, ikke blot om eksaminanden har opnået en god forståelse af enkeltheder, men også om vedkommende har erhvervet sig et almindeligt overblik over stoffet. Ved bedømmelsen bør der tage hensyn til eksaminandens evne til selvstændig fremstilling.

B. *Den matematiske linjes samfundsfaglige og naturfaglige grene.*

Prøven er skriftlig og mundtlig.

Til *den skriftlige prøve* gives ét opgavesæt, der består af fire opgaver. Heraf er de to obligatoriske for samtlige eksaminander, medens der gives den enkelte frit valg mellem de to andre opgaver, hvoraf kun én kan afleveres til bedømmelse.

Til besvarelse af opgavesættet gives fire timer.

Det tillades eksaminanderne at medbringe følgende hjælpemidler: en regnestok og en tabelsamling, begge godkendte af undervisningsinspektionen, samt en af undervisningsinspektionen udarbejdet formelsamling.

Opgaverne kan vælges fra alle dele af det læste stof. Der skal jævnligt stilles opgaver, som kan tjene til at prøve eksaminandernes færdighed i numerisk regning. Desuden bør der lejlighedsvis stilles opgaver, som giver anledning til at undersøge, om der er erhvervet forståelse af matematikkens anvendelse inden for andre fagområder. I disse opgavers tekst skal de nødvendige ikke-matematiske forudsætninger nøje præciseres.

Til *den mundtlige prøve* opgives et pensum, som er omtrent halvdelen af det læste stof. Opgivelserne bør udvælges med en vis afveksling fra år til år.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand to spørgsmål.

Under prøven må der lægges vægt på at undersøge, ikke blot om eksaminanden har opnået en god forståelse af enkeltheder, men også om vedkommende har erhvervet sig et almindeligt overblik over stoffet. Ved bedømmelsen bør der tages hensyn til eksaminandens evne til selvstændig fremstilling.

C. *Den sproglige linje.*

Prøven, der finder sted ved udgangen af II gymnasieklasse, er mundtlig.

Der opgives et pensum, som er ca. $^2/_3$ af det læste stof.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives ét spørgsmål til hver eksaminand.

Appendiks 5 Bekendtgørelse af 1971

§ 18. Matematik.

I. Den matematiske linje.

Formål:

Undervisningen har til formål:

at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber, tankegange og metoder,

at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegange og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder,

at opøve klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,

at udvikle fantasi og opfindsomhed,

at give en forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder.

A. 1. gymnasieklasse og den matematisk-fysiske gren.

Undervisningen:

Teoretiske matematiske strukturer kan opbygges på grundlag af velformulerede problemer. Undervisningen kan omfatte problemstillinger fra økonomi, biologi, fysik, sociologi, teknik, databehandling, informationsteori, psykologi, sprog, kemi m.m.

I 1. gymnasieklasse kan sædvanligvis kun fælles emner fra linjens forskellige grene behandles. På den enkelte skole skal lærerne i 1. gymnasieklasse koordinere arbejdet, således at eleverne møder på de forskellige grene med samme grundlag.

Undervisningen omfatter:

1. Almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra.
   Mængde, delmængde, komplementærmængde, foreningsmængde, fællesmængde, mængdedifferens.
   Ækvivalensrelation, ordensrelation.
   Afbildning af en mængde ind i og på en mængde (funktionsbegrebet), énentydig afbildning, invers afbildning (omvendt funktion), sammensætning af afbildninger (sammensat funktion). Kompositionsregel; begreberne gruppe, undergruppe, isomorfi.
2. Hele, rationale og reelle tal.
   De naturlige tal. Induktionsaksiomet.
   Primtal. Største fælles divisor.
   Restklasser. Rationale og reelle tal (regneregler); de reelle tals ordning.
   Øvre og nedre grænse.
   Absolut (numerisk) værdi.
3. Kombinatorik, sandsynlighedsregning og statistik.
   Kombinationer og permutationer, binomialformlen.
   Endelige sandsynlighedsfelter. Additions- og multiplikationssætninger. Binomialfordelingen.
   Stokastisk variabel. Middelværdi og spredning.
4. Ligninger og uligheder.
   Ligninger og uligheder af første og anden grad med én ubekendt. Ligninger og uligheder af første grad med to ubekendte
   Simple eksempler på andre ligninger.
5. Plangeometri.
   Det retvinklede koordinatsystem. Koordinatskifte. Vektorer og deres koordinater. Regning med vektorer, herunder to vektorers skalære produkt.
   Den rette linies analytiske fremstillinger.
   Afstande og vinkler.
   Cirklens analytiske fremstillinger.
   Areal af trekant og parallelogram.
   Definition af parabel, ellipse og hyperbel.
   Afbildninger af planen på sig selv. Parallelforskydning, drejning, spejling, multiplikation og sammensætning af disse afbildninger. Ret affinitet.
6. Elementære funktioner.
   Den lineære funktion af én variabel.
   Den lineære funktion af to variable. Niveaulinjer.
   Polynomier i én variabel, herunder deres faktoropløsning, højeste antal rødder, bestemmelse af rationale rødder i polynomier med hele koefficienter.
   Brudne rationale funktioner af én variabel.
   Logaritmefunktionerne, den logaritmiske skala, regnestokkens og logaritmetabellens brug.
   Eksponentialfunktionerne, potensfunktionerne.
   De trigonometriske funktioner, additionsformlerne, de logaritmiske formler.
   De trigonometriske funktioners anvendelse ved behandlingen af den retvinklede trekant.
7. Infinitesimalregning.
   Grænseværdibegrebet.
   Kontinuitet og differentiabilitet af en reel funktion af én reel variabel.
   Kontinuitet og differentiabilitet af en vektorfunktion af én reel variabel (tangentvektor).
   Regneregler for differentiation. Differentialer.
   Det bestemte integral som grænseværdi for summer.
   Det ubestemte integral.
   Regneregler for bestemte og ubestemte integraler, herunder partiel integration og integration ved substitution.
8. Anvendelser af infinitesimalregningen.
   Bestemmelse af funktioners værdimængde og monotoniforhold.
   Simple eksempler på bestemmelse af funktioners asymptotiske egenskaber.
   Tegning af plane kurver bestemt ved eksplicit givne funktioner eller ved simple parameterfremstillinger.
   Bestemmelse af arealer og rumfang ved integration.
   Simple differentialligninger.
9. Valgfrit emne.

Eksamen:

Der afholdes to skriftlige prøver og en mundtlig prøve.

Til hver af de *skriftlige* prøver gives ét sæt opgaver. Hvert opgavesæt består af et antal (sædvanligvis 4-7) obligatoriske opgaver med enkel problemstilling samt af to opgaver, mellem hvilke den enkelte eksaminand vælger frit, idet kun én af disse to opgaver kan afleveres til bedømmelse. Til besvarelse af hvert opgavesæt gives fire timer.

Direktoratet fastsætter omfanget af hjælpemidlerne.

Opgaverne kan stilles i alle dele af pensum med undtagelse af det valgfri emne.

Opgivelserne til den *mundtlige* prøve skal i omfang svare til ca. halvdelen af det læste pensum. Opgivelserne skal blandt andet indeholde centrale dele af det valgfri emne.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand to spørgsmål. Til begge spørgsmål gives forberedelsestid med alle hjælpemidler. Andet spørgsmål kan være et oversigtsspørgsmål, hvor der ikke kræves selvstændig fremstilling.

B. 1. gymnasieklasse og den samfundsfaglige og naturfaglige gren.

Undervisningen:

Teoretiske matematiske strukturer kan opbygges på grundlag af velformulerede problemer. Undervisningen kan omfatte problemstillinger fra økonomi, biologi, fysik, sociologi, teknik, databehandling, informationsteori, psykologi, sprog, kemi m.m.

I 1. gymnasieklasse kan sædvanligvis kun fælles emner fra linjens forskellige grene behandles. På den enkelte skole skal lærerne i 1. gymnasieklasse koordinere arbejdet, således at eleverne møder på de forskellige grene med samme grundlag.

Undervisningen omfatter:

1. Almene begreber fra mængdelære.
   Mængde, delmængde, komplementærmængde, foreningsmængde, fællesmængde, mængdedifferens.
   Ækvivalensrelation.
   Afbildning af en mængde ind i og på en mængde (funktionsbegrebet), énentydig afbildning, invers afbildning (omvendt funktion), sammensætning af afbildninger (sammensat funktion).
2. Hele, rationale og reelle tal.
   De naturlige tal. Induktionsaksiomet.
   Rationale og reelle tal (regneregler).
   De reelle tals ordning.
   Absolut (numerisk) værdi.
3. Kombinatorik, sandsynlighedsregning og statistik.
   Kombinationer og permutationer, binomialformlen.
   Endelige sandsynlighedsfelter. Additions- og multiplikationssætninger.
   Binomialfordelinger. Stokastisk variabel.
   Beregning af middelværdi og spredning.
   Normalfordelingen.
   Eksempler hentet fra andre fagområder.
4. Ligninger og uligheder.
   Ligninger og uligheder af første og anden grad med én ubekendt. Ligninger og uligheder af første grad med to ubekendte.
   Simple eksempler på andre ligninger.
5. Plangeometri.
   Det retvinklede koordinatsystem.
   Vektorer og deres koordinater.
   Regning med vektorer, herunder to vektorers skalære produkt.
   Den rette linies analytiske fremstillinger.
   Afstand.
   Cirklens analytiske fremstillinger.
   Areal af trekant og parallelogram.
6. Elementære funktioner.
   Den lineære funktion af én variabel.
   Polynomier i én variabel, herunder deres faktoropløsning.
   Brudne rationale funktioner af én variabel.
   Logaritmefunktionerne, den logaritmiske skala, regnestokkens og logaritmetabellens brug.
   Eksponentialfunktionerne, potensfunktionerne.
   De trigonometriske funktioner, additionsformlerne, de logaritmiske formler.
   De trigonometriske funktioners anvendelse ved behandlingen af retvinklede trekanter.

7. Infinitesimalregning.
Beskrivelse af grænseværdibegrebet og kontinuitet af en reel funktion af én reel variabel.
Differentiabilitet af en reel funktion af én reel variabel.
Regneregler for differentiation.
Det approximerende førstegradspolynomium, differentialer.
Det bestemte integral som grænseværdi for summer.
Det ubestemte integral.
Regneregler for bestemte og ubestemte integraler, herunder partiel integration og integration ved substitution.
8. Anvendelse af infinitesimalregningen.
Bestemmelse af funktioners værdimængde og monotoniforhold.
Simple eksempler på bestemmelse af funktioners asymptotiske egenskaber.
Tegning af plane kurver bestemt ved eksplicit givne funktioner.
Bestemmelse af arealer og rumfang ved integration.

Eksamen:

Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.

Til den *skriftlige* prøve gives et opgave-et, der består af et antal (4-7) obligatoriske pgaver med enkel problemstilling samt af opgaver, mellem hvilke den enkelte eksainand vælger frit, idet kun én af disse to pgaver kan afleveres til bedømmelse.

Til besvarelse af opgavesættet gives fire mer.

Direktoratet fastsætter omfanget af hjælmidlerne.

Opgaverne kan vælges fra alle dele af nsum.

Opgivelserne til den *mundtlige* prøve skal mfang svare til ca. halvdelen af det læste nsum.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle le af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand to spørgsmål. I begge spørgsmål gives forberedelsestid d alle hjælpemidler. Andet spørgsmål kan re et oversigtsspørgsmål, hvor der ikke æves selvstændig fremstilling.

II. Den sproglige linje.

Formål:

Undervisningen har til formål at opøve eleverne i anvendelsen af matematisk tankegang, metode og viden til formulering, analyse og løsning af problemer på forskellige områder.

Undervisningen skal endvidere give eleverne en elementær forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder.

Undervisningen:

Undervisningen omfatter:

1. Almene begreber fra mængdelære.
Mængde, delmængde, komplementærmængde, foreningsmængde, fællesmængde, mængdedifferens.
Afbildning af en mængde ind i og på en mængde (funktionsbegrebet), énentydig afbildning, invers afbildning (omvendt funktion), sammensætninger af afbildninger (sammensat funktion). Forskellige midler til beskrivelse af reelle funktioner.
2. Elementære funktioner.
Den lineære funktion af én variabel.
Polynomier i én variabel.
Logaritmefunktionerne, den logaritmiske skala, regnestokkens og logaritmetabellens brug.
Eksponentialfunktionerne.
De trigonometriske funktioner, overgangsformler.
De trigonometriske funktioners anvendelse ved den retvinklede trekants behandling.
3. Infinitesimalregning.
Differentialkvotient. Det approximerende førstegradspolynomium. Regneregler for differentiation.
Undersøgelse af funktioners variation.
Det bestemte integral som grænseværdi for summer.
Det ubestemte integral.
Regneregler for bestemte og ubestemte integraler.
Eksempler på størrelsers bestemmelse ved integration.
4. Kombinatorik og sandsynlighedsregning.
Kombinationer og permutationer.
Endelige sandsynlighedsfelter. Eksempler på sandsynligheders beregning på kombinatorisk grundlag.

Eksamen:

Prøven er mundtlig.

Opgivelserne skal i omfang svare til ca. halvdelen af det læste pensum. De centrale dele af det læste stof skal med rimelig vægt indgå i opgivelserne.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives ét spørgsmål til hver eksaminand.

Der gives forberedelsestid.

Appendiks 6 Bekendtgørelse af 1984

§ 20. Matematik.

1. Den matematiske linje.

Formål:

Undervisningen har til formål:

at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber, tankegange og metoder,

at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegange og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder,

at opøve klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,

at udvikle fantasi og opfindsomhed,

at give en forståelse af og evne til k[illegible] analysere den måde, hvorpå mate[illegible] ken anvendes inden for forskellige [illegible] områder.

A. 1. gymnasieklasse og den matemati[illegible]ske gren.

Undervisningen:

Teoretiske matematiske strukturer kan [illegible] bygges på grundlag af velformulerede [illegible] blemer. Undervisningen kan omfatte [illegible] blemstillinger fra økonomi, biologi, [illegible] sociologi, teknik, databehandling, in[illegible] tionsteori, psykologi, sprog, kemi m.m.

I 1. gymnasieklasse kan sædvanligvis [illegible] fælles emner fra linjens forskellige grene [illegible] handles. På den enkelte skole skal lærerne [illegible] 1. gymnasieklasse koordinere arbejdet, [illegible] des at eleverne møder på de forskellige [illegible] med samme grundlag.

Undervisningen omfatter:

1. Almene hjælpebegreber fra mængde[illegible] og algebra.
   Mængde, delmængde, komplement[illegible] mængde, foreningsmængde, fællesmæng[illegible] de, mængdedifferens.
   Ækvivalensrelation, ordensrelation, [illegible]
   Afbildning af en mængde ind i og på [illegible] mængde (funktionsbegrebet), entydig [illegible] afbildning, invers afbildning (omvendt [illegible] funktion), sammensætning af afbildnin[illegible] ger (sammensat funktion). Kompositions[illegible] regel: begreberne gruppe, undergruppe, [illegible] isomorfi.
2. Hele, rationale og reelle tal.
   De naturlige tal. Induktionsaksiomet. [illegible]
   Primtal. Største fælles divisor.
   Restklasser. Rationale og reelle tal (reg[illegible] neregler); de reelle tals ordning.
   Øvre og nedre grænse.
   Absolut (numerisk) værdi.
3. Kombinatorik, sandsynlighedsregning [illegible] statistik.
   Kombinationer og permutationer, bino[illegible] mialformlen.
   Endelige sandsynlighedsfelter. Additions[illegible] og multiplikationssætninger. Binomial[illegible] fordelingen.
   Stokastisk variabel. Middelværdi [illegible] spredning.
4. Ligninger og uligheder.
   Ligninger og uligheder af første og [illegible] den grad med én ubekendt. Ligninger [illegible] uligheder af første grad med to ubekendte.
   Simple eksempler på andre ligninger.
5. Plangeometri.
   Det retvinklede koordinatsystem. Koordinatskifte. Vektorer og deres koordinater. Regning med vektorer, herunder to vektorers skalære produkt.
   Den rette linjes analytiske fremstillinger.
   Afstande og vinkler.
   Cirklens analytiske fremstillinger.
   Areal af trekant og parallelogram.
   Definition af parabel, ellipse og hyperbel.
   Afbildninger af planen på sig selv. Parallelforskydning, drejning, spejling, multiplikation og sammensætning af disse afbildninger. Ret affinitet.
6. Elementære funktioner.
   Den lineære funktion af én variabel.
   Den lineære funktion af to variable. Niveaulinjer.
   Polynomier i én variabel, herunder deres faktoropløsning, højeste antal rødder, bestemmelse af rationale rødder i polynomier med hele koefficienter.
   Brudne rationale funktioner af én variabel.
   Logaritmefunktionerne, den logaritmiske skala.
   Eksponentialfunktionerne, potensfunktionerne.
   De trigonometriske funktioner, additionsformlerne, de logaritmiske formler.
   De trigonometriske funktioners anvendelse ved behandlingen af den retvinklede trekant.
7. Infinitesimalregning.
   Grænseværdibegrebet.
   Kontinuitet og differentiabilitet af en reel funktion af én reel variabel.
   Kontinuitet og differentiabilitet af en vektorfunktion af én reel variabel (tangentvektor).
   Regneregler for differentiation. Differentialer.
   Det bestemte integral som grænseværdi for summer.
   Det ubestemte integral.
   Regneregler for bestemte og ubestemte integraler, herunder partiel integration og integration ved substitution.
8. Anvendelser af infinitesimalregningen.
   Bestemmelse af funktioners værdimængde og monotoniforhold.
   Simple eksempler på bestemmelse af funktioners asymptotiske egenskaber.
   Tegning af plane kurver bestemt ved eksplicit givne funktioner eller ved simple parameterfremstillinger.
   Bestemmelse af arealer og rumfang ved integration.
   Simple differentialligninger.
9. Valgfrit emne.
10. Brug af regnetekniske hjælpemidler.

Eksamen:

Der afholdes to skriftlige prøver og en mundtlig prøve.

Til hver af de *skriftlige* prøver gives ét sæt opgaver. De to opgavesæt vil tilsammen bestå af et antal opgaver med enklere problemstilling samt en eller flere mere sammensatte opgaver. I hvert af sættene vil nogle af opgaverne være valgfrie. Til besvarelse af hvert opgavesæt gives 4 timer.

Opgaverne kan stilles i alle dele af pensum med undtagelse af det valgfri emne.

Opgivelserne til den *mundtlige* prøve skal i omfang svare til ca. halvdelen af det læste pensum. Opgivelserne skal blandt andet indeholde centrale dele af det valgfri emne.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand to spørgsmål. Til begge spørgsmål gives forberedelsestid. Andet spørgsmål kan være et oversigtsspørgsmål, hvor der ikke kræves selvstændig fremstilling.

B. 1. gymnasieklasse og den samfundsfaglige, den naturfaglige og musikfaglige gren.

Undervisningen:

Teoretiske matematiske strukturer kan opbygges på grundlag af velformulerede problemer. Undervisningen kan omfatte problemstillinger fra økonomi, biologi, fysik, sociologi, teknik, databehandling, informationsteori, psykologi, sprog, kemi m.v.

I 1. gymnasieklasse kan sædvanligvis kun fælles emner fra linjens forskellige grene behandles. På den enkelte skole skal lærerne i 1. gymnasieklasse koordinere arbejdet, således at eleverne møder på de forskellige grene med samme grundlag.

Undervisningen omfatter:

1. Almene begreber fra mængdelære.
   Mængde, delmængde, komplementærmængde, foreningsmængde, fællesmængde, mængdedifferens.
   Afbildning af en mængde ind i og på en mængde (funktionsbegrebet), éntydig afbildning, invers afbildning (omvendt funktion), sammensætning af afbildninger (sammensat funktion).
2. Hele, rationale og reelle tal.
   De naturlige tal.
   Rationale og reelle tal (regneregler).
   De reelle tals ordning.
   Absolut (numerisk) værdi.
3. Kombinatorik, sandsynlighedsregning og statistik. Kombinationer og permutationer, binomialformlen.
   Endelige sandsynlighedsfelter. Additions- og multiplikationssætninger.
   Binomialfordelinger. Stokastisk variabel.
   Beregning af middelværdi og spredning.
   Normalfordelingen.
   Eksempler hentet fra andre fagområder.
4. Ligninger og uligheder.
   Ligninger og uligheder af første og anden grad med én ubekendt. Ligninger og uligheder af første grad med to ubekendte.
   Simple eksempler på andre ligninger.
5. Plangeometri.
   Det retvinklede koordinatsystem.
   Vektorer og deres koordinater.
   Regning med vektorer, herunder to vektorers skalære produkt.
   Den rette linjes analytiske fremstillinger.
   Afstand.
   Cirklens analytiske fremstillinger.
   Areal af trekant og parallelogram.
6. Elementære funktioner.
   Den lineære funktion af én variabel.
   Polynomier i én variabel, herunder deres faktoropløsning.
   Brudne rationale funktioner af én variabel.
   Logaritmefunktionerne, den logaritmiske skala.
   Eksponentialfunktionerne, potensfunktionerne.
   De trigonometriske funktioner, additionsformlerne, de logaritmiske formler.
   De trigonometriske funktioners anvendelse ved behandlingen af retvinklede trekanter.
7. Infinitesimalregning.
   Beskrivelse af grænseværdibegre[illegible] kontinuitet af en reel funktion af [illegible] variabel.
   Differentiabilitet af en reel funktion [illegible] reel variabel.
   Regneregler for differentiation. [illegible]
   Det approximerende førstegradspolynom[illegible] um, differentialer.
   Det bestemte integral som grænse[illegible] for summer.
   Det ubestemte integral.
   Regneregler for bestemte og ubeste[illegible] integraler, herunder partiel integration [illegible] integration ved substitution.

8. Anvendelse af infinitesimalregningen.
Bestemmelse af funktioners værdimængde og monotoniforhold.
Simple eksempler på bestemmelse af funktioners asymptotiske egenskaber.
Tegning af plane kurver bestemt ved eksplicit givne funktioner.
Bestemmelse af arealer og rumfang ved integration.
9. Brug af regnetekniske hjælpemidler.

Eksamen:

Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.

Til den *skriftlige* prøve gives et opgavesæt bestående af et antal opgaver med enkel problemstilling samt en eller flere mere sammensatte opgaver. Nogle af opgaverne i sættet vil være valgfrie.

Til besvarelse af opgavesættet gives [illegible] timer.

Opgaverne kan vælges fra alle dele af pensum.

Opgivelserne til den *mundtlige* prøve skal i omfang svare til ca. halvdelen af det læste pensum.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand to spørgsmål. Til begge spørgsmål gives forberedelsestid. Andet spørgsmål kan være et oversigtsspørgsmål, hvor der ikke kræves selvstændig fremstilling.

II. Den sproglige linje.

Formål:

Formålet med undervisningen er, at eleverne erhverver

1. nogle matematiske kundskaber, som kan være dem til nytte i andre fag og i deres øvrige dagligdag,
2. kendskab til udformning og anvendelse af nogle matematiske modeller, og
3. indtryk af matematisk metode og tankegang.

Undervisningen:

Undervisningen omfatter:

1. Tal og talbehandling.
Hele, rationale og reelle tal. Regning med rationale og reelle tal. Procentregning. Brug af regnetekniske hjælpemidler.
2. Deskriptiv statistik.
Talmæssig beskrivelse af observationer. Grafiske beskrivelsesmidler. Statistiske deskriptorer.
3. Funktioner.
Definitionsmængde. Værdimængde. En funktions graf. Monotoniforhold. Lineære funktioner. Stykkevis lineære funktioner.
Polynomier. Eksponentielt voksende og eksponentielt aftagende funktioner. Logaritmefunktion.
4. Sandsynlighedsregning og kombinatorik.
Tilfældigt eksperiment.
Endeligt sandsynlighedsfelt.
Multiplikationsprincippet. Kombinationer.
Stikprøveudtagning. Binomialfordeling.
5. Supplerende matematiske emner.
a. Differentialregning.
b. Et eller to sammenhængende matematiske emner.
Der vælges enten 5 a. eller 5 b. Omfanget er i begge tilfælde ca. 35 undervisningstimer.
6. Frie timer.

Eksamen:

Prøven er mundtlig.

Opgivelserne skal i omfang svare til ca. halvdelen af det læste pensum. De centrale dele af det læste stof skal med rimelig vægt indgå i opgivelserne.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives ét spørgsmål til hver eksaminand.

Der gives forberedelsestid.

Appendiks 7 Bekendtgørelse af 1987

§ 20. MATEMATIK

Matematisk linie. Obligatorisk niveau

Formål:

Formålet med undervisningen er,

- at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder, og
- at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder.

Undervisningen:

Undervisningen omfatter fem hovedemner og tre aspekter.

De fem hovedemner er:

1. Tal.

Undervisningen skal uddybe elevernes forståelse af talbegrebet og opøve elevernes regnefærdighed med såvel tal som symboludtryk, således at det fornødne grundlag for behandlingen af emnelistens øvrige punkter tilvejebringes.

Emner: Hele, rationale og reelle tal samt regneregler for disse. Regning med potenser og rødder. Procent- og rentesregning.

2. Geometri.

Undervisningen skal uddybe elevernes kendskab til grundlæggende geometriske begreber, og eleverne skal gennem arbejde med analytisk beskrivelse af punktmængder i planen indse, hvordan den analytiske geometri giver et alternativ til den sædvanlige geometri som redskab til behandling af geometriske problemer. Eleverne skal erhverve fortrolighed med trigonometri som et beregningsmæssigt værktøj.

Emner: Trekant, retvinklet trekant og ensvinklede trekanter. Analytisk beskrivelse af simple punktmængder i planen. Afstande i planen. Sinus, cosinus og tangens. Beregning af sider og vinkler i trekanter.

3. Funktioner.

Undervisningen skal udbygge elevernes kendskab til elementære funktioner og deres egenskaber og gøre dem fortrolige med forskellige metoder, herunder algoritmiske metoder, til behandling af funktioner.

Emner: Lineære funktioner. Polynomier. Trigonometriske funktioner. Eksponential- og logaritmefunktioner samt potensfunktioner. Løsning af simple ligninger og uligheder, hvori de nævnte funktioner indgår.

4. Differentialregning.

Eleverne skal erhverve indsigt i differentialregningens begreber og deres tolkning samt opnå færdighed i at anvende differentialregningens metoder og modeller.

Emner: Differentialkvotient. Tangent til graf, approksimerende førstegradspolynomium. Regneregler for differentiation. Ekstremumsbestemmelse, monotoniforhold. Metoder til tegning af grafer.

5. Statistik og sandsynlighedsregning.

Eleverne skal opnå forståelse af begreberne stokastisk eksperiment og sandsynlighed og erhverve fortrolighed med de sandsynlighedsteoretiske modeller binomialfordeling og normalfordeling samt praktiske anvendelser af disse.

Emner: Stokastisk eksperiment. A priori og frekventielle sandsynligheder. Sandsynlighedsfelt, sandsynlighed for hændelser. Stokastisk variabel. Binomialfordeling og normalfordeling.

De tre aspekter er:

i. Det historiske aspekt.

Eleverne skal opnå kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng.

ii. Modelaspektet.

Undervisningen skal give eleverne kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger samt sætte dem i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces.

iii. Matematikkens indre struktur.

Eleverne skal opnå forståelse af de for matematik karakteristiske tankegange og metoder og indsigt i, hvordan disse indgår i udvikling og strukturering af matematiske emneområder.

Behandlingen af aspekterne.

Behandlingen af de tre aspekter sker i forbindelse med behandlingen af de fem hovedemner og gennem særlige undervisningsforløb tilrettelagt med henblik på et eller flere af aspekterne. I disse forløb kan indgå såvel de obligatoriske emner som supplerende stof. Omfanget af sådanne forløb er mindst 20 lektioner.

Eksamen:

Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.

Til *den skriftlige prøve*, hvortil der gives 4 timer, stilles opgaverne inden for centrale områder i de fem hovedemner.

De centrale områder fastlægges nærmere gennem en af direktoratet udarbejdet opgavesamling med vejledende eksempler på eksamensopgaver.

Til *den mundtlige prøve* gives der en forberedelsestid.

Der opgives ca. halvdelen af det læste pensum, udvalgt på en sådan måde, at et eller flere af aspekterne inddrages. Afhængigt af det valgte stof og undervisningsmaterialets art opgives 140-220 sider.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand ét spørgsmål.

Matematisk linie. Højt niveau

Formål:

Formålet med undervisningen er,

- at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder,
- at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder, og
- at eleverne videreudvikler deres evne til selvstændigt at benytte matematiske begreber og metoder og bliver i stand til at sætte sig ind i, analysere og vurdere problemkredse, der kan formuleres og bearbejdes ved brug af matematiske begreber og metoder.

Undervisningen:

Undervisningen omfatter tre hovedemner, et valgfrit forløb og tre aspekter.

De tre hovedemner er:

1. Plan- og rumgeometri. Vektorer.

Undervisningen skal udbygge elevernes kendskab til geometrisk og analytisk beskrivelse af plane og rumlige punktmængder. Eleverne skal opnå fortrolighed med vektorbegrebet i to og tre dimensioner og kunne benytte vektorregning som et beregningsmæssigt værktøj.

Emner: Vektorer i planen og rummet, vektorers koordinater. Regning med vektorer, herunder skalarprodukt af to vektorer. Tværvektor, vektorprodukt. Projektion af vektor på vektor. Analytisk beskrivelse af simple punktmængder i planen og rummet. Afstand, vinkel og skæring mellem punktmængder.

2. Integralregning. Differentialligninger.

Eleverne skal erhverve indsigt i begrebsdannelser knyttet til integralregningens teoribygning og i vekselvirkningen mellem differentialregning og integralregning. Eleverne skal opnå færdighed i at behandle problemer knyttet til differentialligninger som matematiske modeller.

Emner: Stamfunktion, ubestemt og bestemt integral. Det bestemte integral som grænseværdi for summer. Analytiske og numeriske metoder til integration. Beregning af areal og rumfang.

Differentialligningsmodeller, herunder differentialligninger af formen $y' = f(x)g(y)$ samt $y' = ky$.

3. Et matematisk-datalogisk emne.

Eleverne skal opnå indsigt i et matematisk emneområde, der belyser samspillet mellem matematik og datalogi. Emnet skal tilrettelægges, så der indgår både ræsonnementer af matematisk karakter og datalogisk prægede tankegange. Algoritmebegrebet bør spille en central rolle.

Omfanget af det matematisk-datalogiske emne skal være mindst 20 lektioner.

Et valgfrit forløb.

Omfanget af dette forløb skal være ca. 25 lektioner.

De tre aspekter er:

i. Det historiske aspekt.

Eleverne skal opnå kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng.

ii. Modelaspektet.

Undervisningen skal give eleverne kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger samt sætte dem i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces.

iii. Matematikkens indre struktur.

Eleverne skal opnå forståelse af de for matematik karakteristiske tankegange og metoder og indsigt i, hvordan disse indgår i udvikling og strukturering af matematiske emneområder.

Behandlingen af aspekterne.

Behandlingen af de tre aspekter sker i forbindelse med behandlingen af de tre hovedemner, det valgfrie forløb eller gennem særlige undervisningsforløb tilrettelagt med henblik på et eller flere af aspekterne.

Eksamen:

Der afholdes en skriftlig og en mundtlig prøve.

Til *den skriftlige prøve*, hvortil der gives 4 timer, stilles opgaverne inden for centrale områder i hovedemnerne 1 og 2.

De centrale områder fastlægges nærmere gennem en af direktoratet udarbejdet opgavesamling med vejledende eksempler på eksamensopgaver.

Til *den mundtlige prøve* gives der en forberedelsestid.

Der opgives ca. ⅓ af det læste pensum, udvalgt på en sådan måde, at de centrale dele af det læste stof indgår med rimelig vægt i opgivelserne. Afhængigt af det valgte stof og undervisningsmaterialets art opgives 125–175 sider.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand ét spørgsmål.

Sproglig linie. Mellemniveau clnl 5.2 L.

Formål:

Formålet med undervisningen er,

- at eleverne får indblik i matematiske tankegange og metoder,
- at eleverne opnår kendskab til matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder, og
- at eleverne tilegner sig færdighed i at anvende nogle elementære matematiske begreber og metoder til problemløsning.

Undervisningen:

Undervisningen omfatter tre emneområder og et valgfrit forløb.

De tre emneområder er:

1. Funktioner. Optimering.

Eleverne skal erhverve forståelse af funktionsbegrebet som et middel til at beskrive og analysere sammenhænge mellem variable størrelser samt kendskab til elementære funktioner og metoder til løsning af optimeringsproblemer.

2. Bearbejdning og analyse af talmaterialer.

Undervisningen skal videreudvikle elevernes færdigheder i at anvende statistiske beskrivelsesmidler og beregningsmæssige værktøjer, herunder edb, til analyse af talmaterialer. Eleverne skal endvidere opnå fortrolighed med begreber og metoder til matematisk beskrivelse af almindeligt forekommende økonomiske problemstillinger.

3. Geometri.

Undervisningen skal udbygge elevernes kendskab til grundlæggende geometriske begrebsdannelser med det hovedformål at øge elevernes indsigt i matematisk tankegang og metode, at give dem indsigt i nogle praktiske anvendelser af geometri eller at give dem indtryk af matematik i en historisk sammenhæng.

Der arbejdes med alle tre emneområder, og to af dem gøres til genstand for en mere dybtgående behandling. For at sikre eleverne tilstrækkelige færdigheder og udtryksmuligheder i arbejdet med matematiske problemstillinger indgår skriftligt arbejde som et led i undervisningen.

Et valgfrit forløb.

Omfanget af dette forløb skal være ca. 20 lektioner.

Eksamen:

Der afholdes en mundtlig prøve, hvortil der gives en forberedelsestid.

Der opgives ca. ⅓ af det læste pensum, udvalgt på en sådan måde, at de centrale dele af det læste stof indgår med rimelig vægt i opgivelserne. Afhængigt af det valgte stof og undervisningsmaterialets art opgives 80–120 sider.

Eksamensspørgsmålene udtages fra alle dele af det opgivne pensum.

Der gives hver eksaminand ét spørgsmål.

Appendiks 8 Eksempel på eksamenssæt

OM ASPEKTERNES STATUS I FORSØGSBEKENDTGØRELSEN FOR MATEMATIK
- og om de vejledende opgaver.

Frans Norville, Amtsgymnasiet i Paderup
Jette Sygaard, Marselisborg Gymnasium
Peter Selberg, diverse Århus-gymnasier.

OM KVÆLSTOFGØDNING

Denne opgave handler om landbrugets gødskning med kvælstof(N), idet driftsøkonomiske og miljømæssige spørgsmål berøres.

Opgaverne 1-9 handler om <u>byg</u> og skal regnes ved udstrakt brug af grafer.
Opgaverne 10-13 handler om <u>havre</u> og kan regnes helt uafhængigt af bygopgaverne. Havreopgaverne skal løses ved beregning.

29

I efterskriftet side 6 er der givet nogle uddybende oplysninger om opgavens indhold og begreber. Disse oplysninger er ikke nødvendige for at besvare spørgsmålene.

TO VIGTIGE BEGREBER:

<u>"Fortjeneste pr. hektar"</u>
Ved landmandens "fortjeneste pr. hektar" vil vi i denne opgave forstå:

Værdi af høstudbytte <u>minus</u> udgift til kvælstofgødning (N-gødn.)

Vi ser således bort fra alle faste udgifter til f.eks. så-sæd, K- og P-gødning, maskiner, forrentning o.s.v., da disse udgifter ikke påvirkes af variationer i den tilførte N-mængde.

<u>"Økonomisk optimal N-mængde pr. hektar"</u> (eller blot <u>"Optimal N-mængde pr.hektar".)</u>
I denne opgave vil vi ved den "optimale kvælstofmængde" forstå den mængde, der økonomisk set bedst betaler sig for den enkelte landmand. D.v.s. den N-mængde, der gør hans "fortjeneste pr. hektar" størst mulig (se ovenfor).

OPLYSNINGER OM BYG:

<u>Høstudbyttets afhængighed af N-gødningsmængden:</u>
For enhver mark vil høstudbyttets størrelse afhænge af, hvor meget N-gødning der er givet.
Vi vil i opgaven betragte en bygmark, for hvilken denne afhængighed er som vist på figur 1 (følgende side)

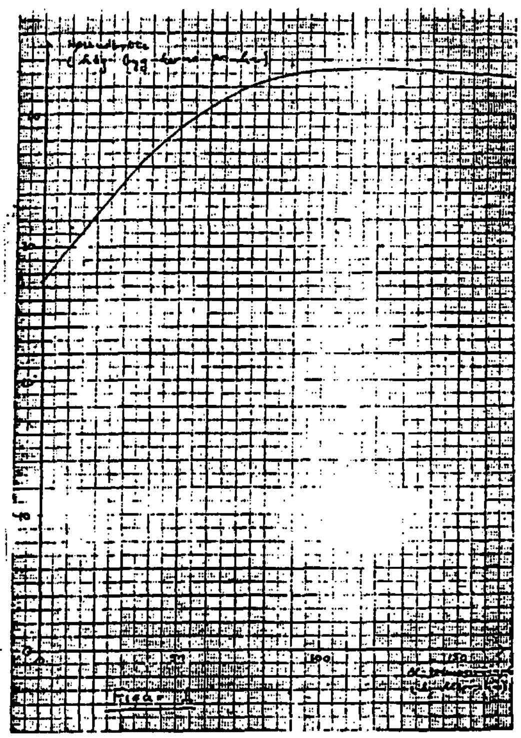
<u>Priser vedrørende byg-dyrkning:</u>

Høstudbyttets værdi:	130 kr. pr. hkg byg-kerner
Gødningsudgift:	4 kr. pr. kg N-gødning

SPØRGSMÅL OM BYGDYRKNING:

1) Hvis N-gødning var <u>gratis</u>, hvilken N-mængde pr. hektar ville så give landmanden den største indtjening?

30



31

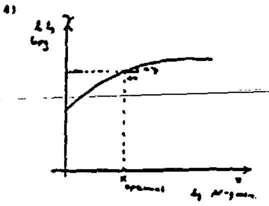
LMFK 1985, nr. 9.

2) Brug grafen figur 1 samt byg- og kvælstofpriserne ovenfor til at beregne landmandens "fortjeneste pr. hektar" (se ovenfor) ved følgende fem N-gødningsmængder:

a) 0 kg N pr. ha
b) 40 kg N pr. ha
c) 80 kg N pr. ha
d) 120 kg N pr. ha
e) 160 kg N pr. ha

3) Forklar hvorfor 80 kg N pr. ha giver større fortjeneste end 120 kg N pr.ha (jævnfør spm.2).

4)



figur 2

Den "optimale N-gødningsmængde" (se ovenfor) er karakteriseret ved, at mere gødning ikke kan betale sig, idet (se fig.2) udgiften til en lille ekstra gødningsmængde Δx er lige så stor som værdien af ekstra-udbyttet Δy.

a Beregn på dette grundlag tangenthældningen i det kurvepunkt, der svarer til den "optimale N-gødningsmængde".

b Find på figur 1 så nøjagtigt som muligt det kurvepunkt, hvis tangent har den i a beregnede hældning (tegn tangenten). Hvor stor er den optimale gødningsmængde pr. ha ?

5) Find ved den optimale N-gødningsmængde høstudbyttet samt fortjenesten pr. ha (hvis det ikke i spm. 4b lykkedes at bestemme den optimale N-gødningsmængde, så brug i stedet den af de fem kvælstofmængder fra spm. 2, som gav den største fortjeneste. Dette gælder også i de følgende spørgsmål.)

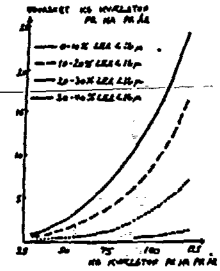
6) Af ressource- og miljømæssige grunde har flere i den offentlige debat talt for en nedsættelse af kvælstofforbruget.

Hvis landmanden, der ejer den omtalte bygmark, nedsætter N-forbruget fra det økonomisk optimale til 60 kg pr. hektar, hvad bliver da faldet i

a høstudbytte pr. hektar ?
b fortjeneste pr. hektar ?

Og hvad bliver det procentvise fald i

c N-gødningsmængde ?
d høstudbytte ?
e fortjeneste pr. ha (iflg. side 1)
f kvælstofudvaskningen (se nedenstående kurver og forklaring.



Figur 26. Kvælstofudvaskningens afhængighed af den tilførte mængde kvælstofgødning og jordens lerindhold.

Hosstående kurver viser, hvor meget kvælstof, der i form af nitratforbindelser "udvaskes", d.v.s. nedsiver til grundvandet eller føres ud i bække og åer gennem dræn.

Antag, at den betragtede bygmark har jord af den type, der beskrives ved den næstøverste kurve (10-20% lerpartikler mindre end 16 μm).

7) Man kunne få landmændene til at bruge mindre gødning ved at lægge skat på N-gødning eller ved at ændre byg-prisen. (Kornpriser i EF aftales politisk inden for visse rammer, der f.eks. bestemmes af verdensmarkedsprisen).

a Hvis man valgte at lægge skat på N-gødning, hvor stor skulle denne skat så være (pr. kg N) for at det blev økonomisk optimalt for den betragtede landmand at gøde med 60 kg N pr. ha ?

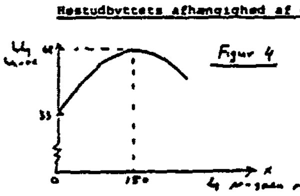
b Hvis man i stedet valgte at sætte bygprisen ned, hvad skulle den så nedsættes til for at 60 kg N pr. ha blev den optimale N-mængde på den betragtede mark ?

8) Beregn landmandens økonomiske tab pr. hektar, dels ved at der gennemføres en politik som beskrevet i spm. 7a, dels ved at politikken fra 7b gennemføres.

9) Ved både at hæve N-gødningsprisen og bygprisen er det muligt at opnå at den økonomisk optimale N-mængde bliver nedsat uden tab for landmanden.
Hvor meget skal kvælstofprisen og bygprisen sættes til, hvis man vil opnå , at den optimale N-mængde på den omtalte bygmark bliver 60 kg pr. ha, samtidig med at ejeren får samme fortjeneste pr.hektar som under de nuværende priser ?

HAVREDYRKNING

Høstudbyttets afhængighed af gødningsmængden:



Figur 4

Grafen for høstudbyttet som funktion af N-gødningsmængden kan tilnærmes ved en parabel med toppunkt i (150 , 48) og skæring med y-aksen i (0 , 33)

Priser:

Høstudbyttets værdi	130 kr. pr. hkg havrekerner
N-gødnings-udgift:	4 kr. pr. kg N-gødning

10) Den ved figur 4 beskrevne parabel er graf for et andengradspolynomium. $h(x) = Ax^2 + Bx + C$.
Vis, at koefficienterne har følgende værdier:

$$A = -\frac{1}{1500} \qquad B = \frac{1}{5} \qquad , C = 33$$

11) Idet
x = N-gødningsmængden pr. hektar (i kg)
$f(x)$ = "fortjenesten pr. hektar (i kroner; se indledn.)
skal man opstille et regneudtryk for $f(x)$.

12) Bestem ved hjælp af funktionsudtrykket fra spørgsmål 11 den "økonomisk optimale N-gødningsmængde pr. hektar" (se indledningen).

13) Hvad skal N-gødningsprisen sættes til (pr. kg N) for at den økonomisk optimale N-gødningsmængde bliver nedsat til 80 kg pr. ha ?

EFTERSKRIFT (nogle supplerende oplysninger om emnet, begreber og enheder. Oplysningerne er ikke nødvendige for at besvare spørgsmålene).

N-gødning, N-mængde . Kvælstofgødning, f.eks. i form af flydende ammoniak. Hvis vi taler om f. eks. 80 kg N-gødning, menes en gødningsmængde, der indeholder 80 kg af grundstoffet kvælstof.

hkg . Hekto-kilogram = 100 kg. Høstudbyttet måles i denne enhed. Det er vægten af (byg-)kernerne alene man angiver.

ha , hektar = 10.000 m^2. Markernes areal angives i Hektar (ha).

På statens forsøgsgårde gøres der hvert år forsøg for at finde frem til den gødningsmængde, der giver landmændene det størst mulige økonomiske udbytte. Alle marker "grundgødes" med fosfor- og kalium-gødning, og derefter gives forskellige marker forskellige mængder af kvælstofgødning. Høstudbyttet pr. hektar måles for de forskellige marker, og på dette grundlag kan man tegne en kurve som den, der er vist på figur 1.

Denne kurve viser i virkeligheden et gennemsnit for forsøg foretaget forskellige steder i Danmark i 1981. Den enkelte landmand kan ikke bruge denne kurve, men må bruge resultaterne fra forsøgsmarker der ligner hans jord mest muligt. Det skal også nævnes, at resultaterne varierer fra år til år på grund af forskellige vejrforhold. Først når der er høstet, kan den nøjagtige kurve tegnes, men landmændene er naturligvis nødt til at gøde længe inden. I praksis gødes der derfor på grundlag af prognoser om den mest fordelagtige kvælstofmængde. De fleste år ligger prognoserne rimeligt tæt ved de resultater, der fås ved høsten.

Kvælstofudvaskningen (se fig. 26 side 4) afhænger af mange andre ting end gødningsmængden og jordbundstypen: f.eks. gødningens art (staldgødning, flydende ammoniak, nitratgødninger), nedbøren, afgrøden (også vintersæd kontra vårsæd) og ikke mindst jordens kvælstoflager fra tidligere år. På grund af emnets kompleksitet og de store økonomiske interesser, der er forbundet med spørgsmålet, er der langt fra enighed om, hvor meget kvælstofgødningen bidrager til nitratforureningen af grundvand og vandløb.

Appendiks 9 Juridisk begrebsafklaring

Der bliver i denne rapport benyttet mange juridiske begreber. Derfor vil jeg kort beskrive forretningsgangen ved at få vedtaget et nyt lovforslag, og definitionen på en bekendtgørelse, en anordning og et cirkulære.

Sådan bliver en lov til: Når et nyt lovforslag skal vedtages, er det første, der sker, en 1. behandling i Folketinget, hvor principielle synspunkter omkring lovforslaget diskuteres. Dernæst besluttes om forslaget skal overgå til 2. behandling. Det er mellem 1. og 2. behandlingen, at udvalgsarbejdet finder sted. Der nedsættes faglige udvalg, organisationer høres, er politisk drøftelse og spørgsmål til ministeren. Udvalgsarbejdet munder ud i en betænkning, der indeholder udvalgets stilling til forslaget. Betænkningen danner baggrund for 2. behandlingen i Folketinget, hvor eventuelle ændringsforslag vedtages. Derefter overgår forslaget ved flertalsafstemning til 3. behandling. Herefter muligvis ny udvalgsbehandling ellers endelig vedtagelse af forslaget.[1]

Bekendtgørelse: Forskrift udstedt af minister eller anden offentlig myndighed, og som er gældende for enhver såvel myndigheder og private. Der er altid krav om, at bekendtgørelsen skal have hjemmel i en lov. Det vil sige, at bekendtgørelser gældende for gymnasiet skal have hjemmel i en skolelov. Bekendtgørelser adskiller sig ikke fra loven udover, at den er udformet af forvaltningen fremfor lovgivningen. Forskrifter signeret af regenten og derefter signeret af ministeren kaldes anordninger, men opfattes som bekendtgørelser.[2]

Anordning: Udstedt med hjemmel i lov, derfor har den samme retsvirkning som love. Forvaltningen har pligt til at realisere dem. Den adskiller sig kun fra en lov ved at stamme fra forvaltningen og ikke fra den lovgivende myndighed.[3] (Se under bekendtgørelse). Med tiden ophører bestemmelser for gymnasiet med at blive beskrevet i både anordning og bekendtgørelse, men udelukkende i en bekendtgørelse.

Cirkulære: Generel tilkendegivelse fra en administrativ myndighed til en anden administrativ myndighed. Indeholder en for denne myndighed bindende forskrift[4]. Et cirkulære kan ændre administrativ praksis.[5] Ind i mellem bliver der udstedt cirkulærer, som omhandler aktuelle situationer. Det kræver ikke samme juridiske apparat at udsende en cirkulæreskrivelse, men den har bindende virkning.

[1] Larsson, E.: Kompendium til Henrik Zahle - Dansk forfatningsret 1989, 1. udg. 1992. s. 22-23.
[2] Zahle, H.: Institutioner og regulering. s. 335
[3] Christensen, B.: Forvaltningsret. Opgaver. Hjemmel. Organisation - Dansk Jurist- og Økonomforbund, 1. udg, 2. oplag 1991. s. 57 og 123.
[4] Zahle, H.: Institutioner og regulering, s. 373
[5] Zahle, H.: Institutioner og regulering, s. 378

Appendiks 10 Normaltimetal 1903-88

Normaltimetal 1906

Den klassisk-sproglige Linie.	Klasse I	II	III	Den nysproglige Linie.	Klasse I	II	III	Den matematisk-naturvidenskabelige Linie.	Klasse I	II	III
Religion	1	1	1	Religion	1	1	1	Religion	1	1	1
Dansk	4	4	4	Dansk	4	4	4	Dansk	4	4	4
Historie	3	3	4	Historie	3	3	4	Historie	3	3	4
Græsk	6	6	6	Engelsk	5	5	5	Matematik	6	6	6
Latin	6	5	5	Tysk	4	4	4	Naturlære	6	6	6
Oldtidskundskab	„	1	„	Fransk	4	4	4	Engelsk eller Tysk	2	2	2
Engelsk eller Tysk	2	2	2	Latin	4	4	3	Fransk	4	4	4
Fransk	4	4	4	Oldtidskundskab	1	1	1	Oldtidskundskab	1	1	1
Geografi og Naturhistorie / Naturlære	2	2	2	Geografi og Naturhistorie / Naturlære	2	2	2	Geografi og Naturhistorie	3	3	2
Matematik	2	2	2	Matematik	2	2	2				
	30	30	30		30	30	30		30	30	30
Gymnastik (Legemsøvelser), Sang og eventuelt Legemsarbejde	6	6	6		6	6	6		6	6	6

Normaltimetal i 1935

Klassisk-sproglig Linie	I	II	III
Religion	1	1	1
Dansk	4	4	4
Historie	3	3	4
Græsk	6	6	6
Latin	5	5	6
Oltidskundskab			1
Engelsk eller (og) Tysk	3	3	
Fransk	4	4	4
Geografi og Naturhistorie		2	4
Naturlære	2		
Matematik	2	2	
	30	30	30
Legemsøvelser, Sang etc.	6	6	6

Nysproglig Linie	I	II	III
Religion	1	1	1
Dansk	4	4	4
Historie	3	3	4
Engelsk	5	5	5
Tysk	4	4	4
Fransk	4	4	4
Latin	4	4	3
Oltidskundskab	1	1	1
Geografi og Naturhistorie		2	4
Naturlære	2		
Matematik	2	2	
	30	30	30
Legemsøvelser, Sang etc.	6	6	6

Matematisk-naturvidenskabelig Linie	I	II	III
Religion	1	1	1
Dansk	4	4	4
Historie	3	3	4
Matematik	6	6	6
Naturlære	6	6	6
Engelsk eller (og) Tysk	3	3	
Fransk	4	4	4
Oltidskundskab	1	1	1
Geografi og Naturhistorie	2	2	4
	30	30	30
Legemsøvelser, Sang etc.	6	6	6

Timetal for sproglig linje 1961-87

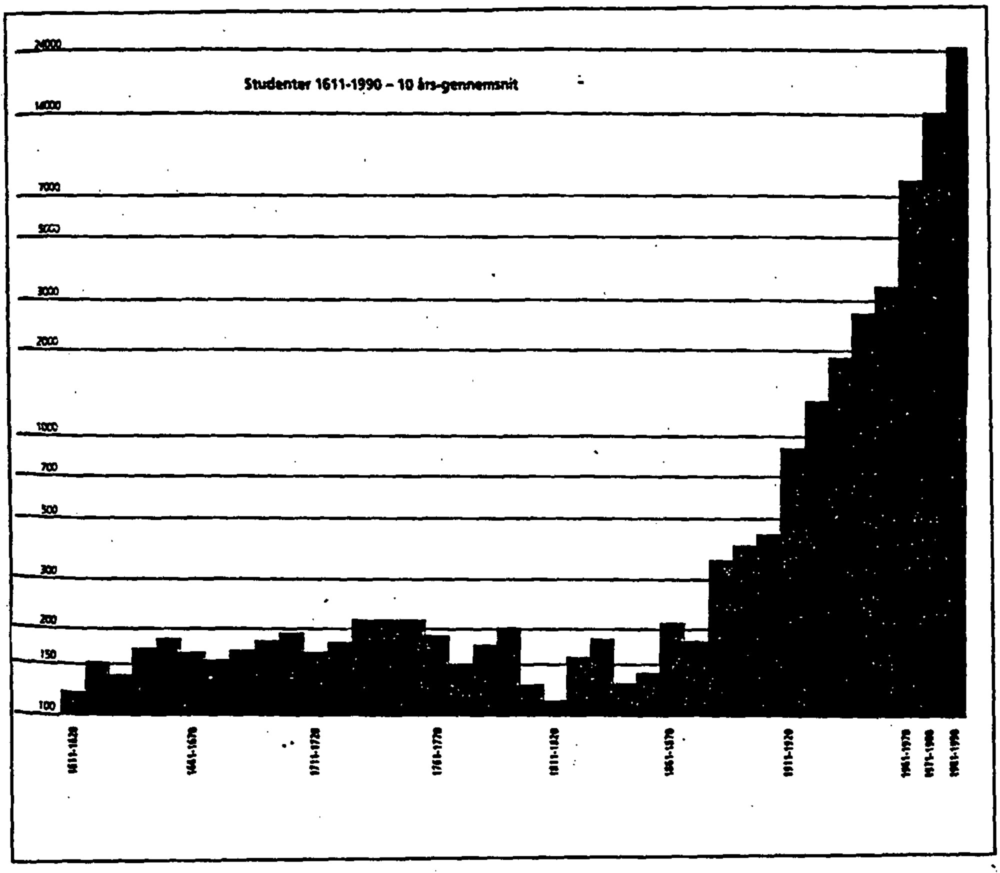
			Sproglige linjer 1960-88			
Matematik	fællesfag	nysproglig	samfundsfaglig	klassisksproglig	musiksproglig	mellemniveau
	I- II- III	II- III	II- III	II- III	II- III	III
1961	3,3,0	~	~	~	%	%
1968	2,3,0	~	~	~	~	%
1971	2,3,0	~	~	~	~	%
1984	2,3,0	~	~	~	~	~
1988	%	%	%	%	%	4

Timetal for matematisk linje 1961-87

		Matematiske linjer 1960-88				
Matematik	fællesfag	mat.-fys.	samfundsfaglig	naturfaglig	musikfaglig	obligatorisk og højt niveau
	I- II- III	II- III	II- III	II- III	III	I-II-III
1961	5, 0, 0	6, 6	4, 3	4, 3	%	%
1968	5, 0, 0	5, 6	3, 3	3, 3	%	%
1971	5, 0, 0	5, 6	3, 3	3, 3	%	%
1984	5, 0, 0	5, 6	3, 3	3, 3	3, 3	%
1988	%	%	%	%	%	5, 5, 5

Appendiks 11 Antallet af studenter gennem tiden

Tabel 1: Danmarkshistoriens hvem, hvad og hvornår, s. 395



Appendiks 12

Fagkonsulenter for matematik i perioden 1919- 1996

1919 - 1929: Hans Jensen Pihl

1929 - 1933: Einer Torsting

1933 - 1947: Carl Christian Andersen

1947 - 1956: Ejner Rønnau

1956 - 1958: Mogens Pihl

1958- 1965: Ole Rindung	1962 - 1967: Frans Handest
1965 - 1969: Erik Mortensen	1967 - 1971: Kaj Vetter
1969 - 1974: Ole Juhl	1971 - 1978: Henrik Meyer
1974 - 1979: Viggo Petersen	1978 - 1986: Lise Høj
1979 - 1986: Ib Axelsen	1986 - 1989: Kirsten Hermann
1986 - 1991: Bent Hirsberg	1990 - : Betsy Conradsen
1992 - : Torben Christoffersen	

Undervisningsinspektører/direktører i perioden 1906 - 1996

1906 - 1919: Søren L. Tuxen

1919 - 1958: Axel Højbjerg Christensen

1958 - 1972: Sigurd Højby (fra 1971 undervisningsdirektør)

1972 - 1980: Rikard Frederiksen

1980 - 1986: Erik Mortensen

1986 - : Uffe Gravers Pedersen

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og især deles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251|93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252|93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 Kuglepakning

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 Regressionsanalyse

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED

af: Peter Harremoës

256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-electric Spherical Shell (Preprint)

by: T. Christensen and N.B.Olsen

257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker

af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen

271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel

273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen

274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth Helmgaard
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen

275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)

279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen

280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann

281/94 Modellering af Det Cardiovaskulære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen

282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)

af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen

284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!
Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem

En specialerapport af Peter Hauge Jensen og Linda Kyndlev

Vejleder: Mogens Niss

285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and its diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

286/94 The energy master equation: A low-temperature approximation to Bässler's random walk model

by: Jeppe C. Dyre

287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the Calculation of Time Auto-Correlation Functions

by: Jeppe C. Dyre

288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION

by: Bent Sørensen

289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square Displacement in Extremely Rugged Energy Landscapes with Equal Minima

by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen

290/95 Modellering af uregelmæssige bølger
Et 3.modul matematik projekt

af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson, Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen

Vejleder: Jesper Larsen

291/95 1st Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

an example of using methods developed for the OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study

by: Bent Sørensen

292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3

af: Bent Sørensen

293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?

af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen

Vejleder: Anders Madsen

294/95 Universets udvidelse - et metaprojekt

Af: Jesper Duelund og Birthe Friis

Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen

295/95 A Review of Mathematical Modeling of the Controled Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

296/95 RETIKULER den klassiske mekanik

af: Peder Voetmann Christiansen

297/95 A fluid-dynamical model of the aorta with bifurcations

by: Mette Olufsen and Johnny Ottesen

298/95 Mordet på Schrödingers kat - et metaprojekt om to fortolkninger af kvantemekanikken

af: Maria Hermannsson, Sebastian Horst, Christina Specht

Vejledere: Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christiansen

299/95 ADAM under figenbladet - et kig på en samfundsvidenskabelig matematisk model

Et matematisk modelprojekt

af: Claus Dræby, Michael Hansen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Jørgen Larsen

300/95 Scenarios for Greenhouse Warming Mitigation

by: Bent Sørensen

301/95 TOK Modellering af træers vækst under påvirkning af ozon

af: Glenn Møller-Holst, Marina Johannessen, Birthe Nielsen og Bettina Sørensen

Vejleder: Jesper Larsen

302/95 KOMPRESSORER - Analyse af en matematisk model for aksialkompressorer

Projektrapport sf: Stine Bøggild, Jakob Hilmer, Pernille Postgaard

Vejleder: Viggo Andreasen

303/95 Masterlignings-modeller af Glasovergangen
Termisk-Mekanisk Relaksation
Specialerapport udarbejdet af:

Johannes K. Nielsen, Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Jeppe C. Dyre, Jørgen Larsen

304a/95 STATISTIKNOTER Simple binomialfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304b/95 STATISTIKNOTER Simple normalfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304c/95 STATISTIKNOTER Simple Poissonfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304d/95 STATISTIKNOTER Simple multinomialfordelingsmodeller

af: Jørgen Larsen

304e/95 STATISTIKNOTER Mindre matematisk-statistisk opslagsværk indeholdende bl.a. ordforklaringer, resuméer og tabeller

af: Jørgen Larsen

305/95 The Maslov Index:
A Functional Analytical Definition
And The Spectral Flow Formula

By: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani

306/95 Goals of mathematics teaching

Preprint of a chapter for the forthcomming International Handbook of Mathematics Education (Alan J.Bishop, ed)

By: Mogens Niss

307/95 Habit Formation and the Thirdness of Signs

Presented at the semiotic symposium

The Emergence of Codes and Intensions as a Basis of Sign Processes

By: Peder Voetmann Christiansen

308/95 Metaforer i Fysikken

af: Marianne Wilcken Bjerregaard,
Frederik Voetmann Christiansen,
Jørn Skov Hansen, Klaus Dahl Jensen
Ole Schmidt

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Petr Viscor

309/95 Tiden og Tanken
En undersøgelse af begrebsverdenen Matematik udført ved hjælp af en analogi med tid

af: Anita Stark og Randi Petersen

Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

310/96 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)

af: Mogens Brun Heefelt

311/96 2nd Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

by: Hélène Connor-Lajambe, Bernd Kuemmel,
Stefan Krüger Nielsen, Bent Sørensen

312/96 Grassmannian and Chiral Anomaly

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

313/96 THE IRREDUCIBILITY OF CHANCE AND THE OPENNESS OF THE FUTURE
The Logical Function of Idealism in Peirce's Philosophy of Nature

By: Helmut Pape, University of Hannover

314/96 Feedback Regulation of Mammalian Cardiovascular System

By: Johnny T. Ottesen

315/96 a + b "Rejsen til tidens indre" - Udarbejdelse af et manuskript til en fjernsynsudsendelse + manuskript

af: Gunhild Hune og Karina Goyle

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen og Bruno Ingemann

316/96 Plasmaoscillation i natriumklynger
Specialerapport af: Peter Meibom, Mikko Østergård
Vejledere: Jeppe Dyre & Jørn Borggreen

317/96 Poincaré og symplektiske algoritmer
af: Ulla Rasmussen
Vejleder: Anders Madsen

318/96 Modelling the Respiratory System
by: Tine Guldager Christiansen, Claus Dræby
Supervisors: Viggo Andreasen, Michael Danielsen

319/96 Externality Estimation of Greenhouse Warming Impacts

by: Bent Sørensen

320/96 Grassmannian and Boundary Contribution to the -Determinant
by: K.P.Wojciechowski et al.

321/96 Modelkompetencer - udvikling og afprøvning af et begrebsapparat

Specialerapport af: Nina Skov Hansen, Christine Iversen, Kristin Troels-Smith

Vejleder: Morten Blomhøj

322/96 OPGAVESAMLING
Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1996

323/96 Structure and Dynamics of Symmetric Diblock Copolymers
PhD Thesis
by: Christine Maria Papadakis

324/96 Non-linearity of Baroreceptor Nerves
by: Johnny T. Ottesen

325/96 Retorik eller realitet ?
Anvendelser af matematik i det danske Gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903 - 88

Specialerapport af Helle Pilemann
Vejleder: Mogens Niss

326/96 Bevisteori
Eksemplificeret ved Gentzens bevis for konsistensen af teorien om de naturlige tal

af: Gitte Andersen, Lise Mariane Jeppesen,
Klaus Frovin Jørgensen, Ivar Peter Zeck

Vejledere: Bernhelm Booss-Bavnbek og Stig Andur Pedersen

327/96 NON-LINEAR MODELLING OF INTEGRATED ENERGY SUPPLY AND DEMAND MATCHING SYSTEMS
by: Bent Sørensen

328/96 Calculating Fuel Transport Emissions
by: Bernd Kuemmel