

Modelkompetencer

- udvikling og afprøvning af et begrebsapparat

Specialerapport af:

Nina Skov Hansen Christine Iversen

Kristin Troels-Smith

Vejleder: Morten Blomhøj

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter
Postbox 260, 4000 Roskilde, Denmark

Modelkompetencer - udvikling og afprøvning af et begrebsapparat
Specialerapport, 3. modul, matematik
Udarbejdet af: Nina Skov Hansen, Christine Iversen og Kristin Troels-Smith
Vejleder: Morten Blomhøj

IMFUFA-tekst 321/1996 (175 sider) ISSN 0106-6242

Abstract

I denne specialerapport præsenteres udvikling og afprøvning af et begrebsapparat bestående af 9 modelkompetencer. De 9 modelkompetencer dækker til sammen de aktiviteter, der er forbundet både med opbygning og analyse af matematiske modeller. Begrebsapparatet, som er videnskabsteoretisk funderet, afprøves som analyseredskab på empirisk materiale hentet fra undervisningssituationer. Målet med denne afprøvning er både at illustrere kompetencerne og at undersøge begrebsapparatets analytiske kraft. Resultatet af denne afprøvning er bla. at samtlige kompetencer kan genfindes i praksis, men at det empiriske materiales karakter ikke har været optimalt til afprøvning af alle kompetencer. Begrebsapparatet foreligger i en afrundet udformning, men vil kunne videreudvikles blandt andet vha. anden type empirisk materiale.

Modelkompetencer

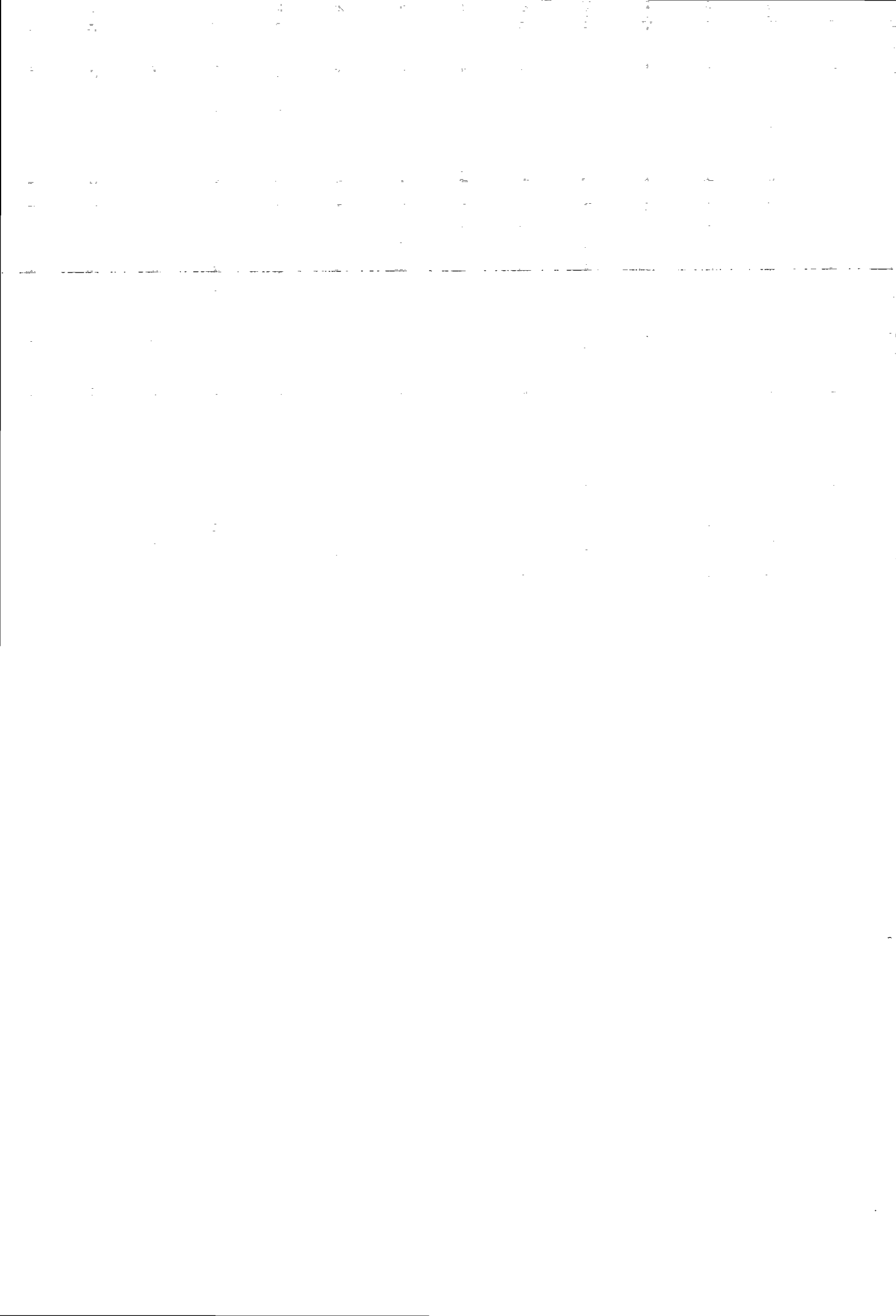
- udvikling og afprøvning af et begrebsapparat

Specialerapport af:

Nina Skov Hansen Christine Iversen
Kristin Troels-Smith

Vejleder: Morten Blomhøj

August 1996



Forord

Denne specialrapport handler om hvilke kompetencer det kræver for at opstille og analysere matematiske modeller. Rapporten er resultatet af et projektarbejde på 3. modul af matematikuddannelsen på Roskilde Universitetscenter og skal opfylde studieordningens krav til *praksisprojektet*, hvor "*matematikken som et fag, der er genstand for formidling*" skal behandles. Inspirationen til arbejdet har været en stor interesse for matematikkens didaktik og de forskellige problemstillinger, der knytter sig til matematik som undervisningsfag, kombineret med interesse for matematikkens rolle i samfundet. Da vi med dette projekt afslutter vores kandidatuddannelse, har vi også ønsket at forberede os på et eventuelt kommende job som undervisere i matematik.

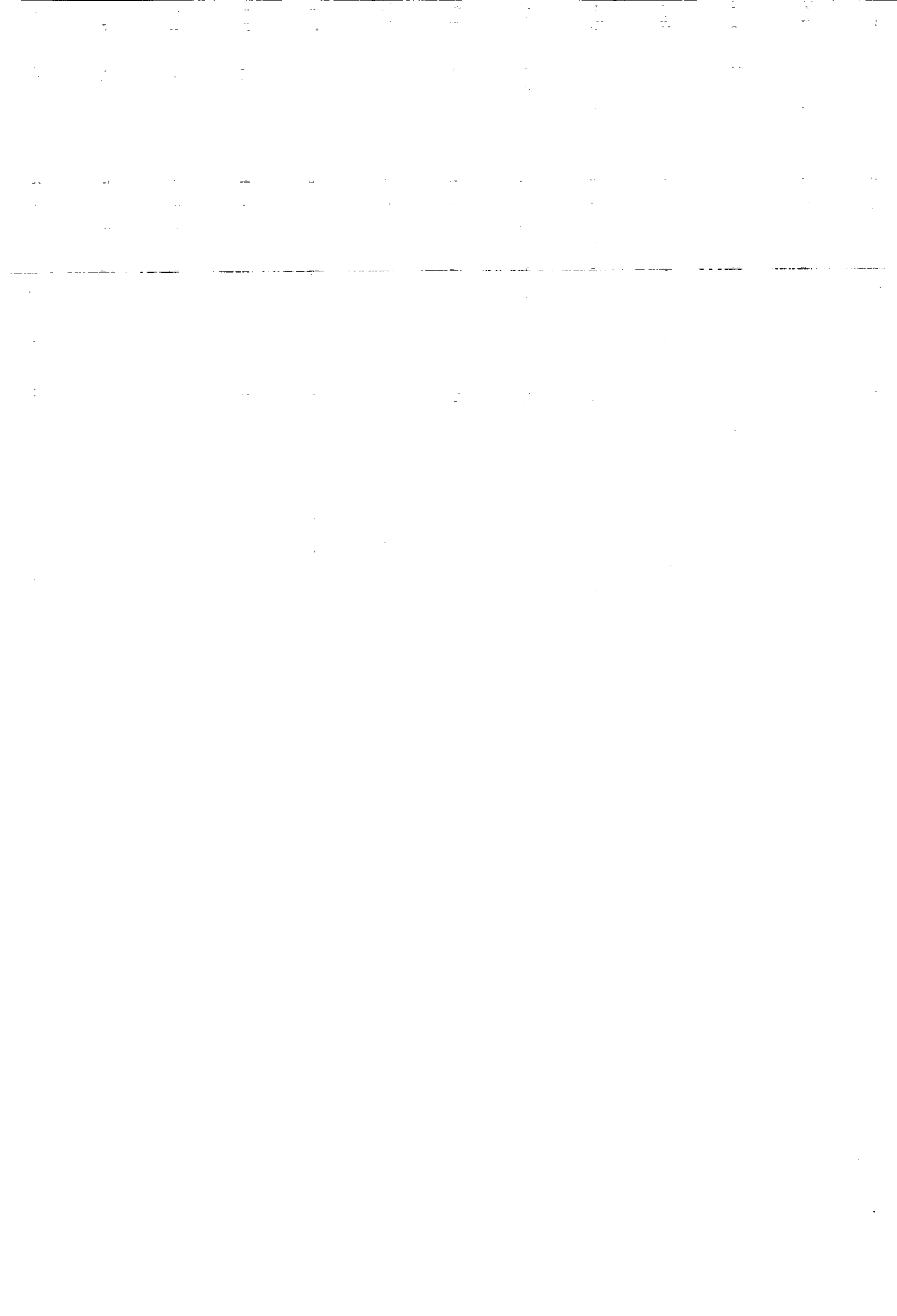
Projektet er udarbejdet af Kristin Troels-Smith, Christine Iversen og Nina Skov Hansen, som i fællesskab har arbejdet med det fra september 1995. I juni 1996 afsluttede Kristin Troels-Smith projektet med en eksamen på normal vis, da hun tidligere havde skrevet speciale. Vi andre har i sommerens løb arbejdet videre med projektet på baggrund af den foreløbige rapport, og resultatet er denne speciale-rapport.

Vi vil gerne takke nogle af de personer, som har haft betydning for dette projekt. Først og fremmest naturligvis Kristin Troels-Smith for hendes medvirken i projektet. Hun har haft afgørende indvirkning på hele det grundlæggende arbejde med begrebsopstilling, indsamling og analyse af materiale og rapportens udformning. Vores vejleder, Morten Blomhøj, har været en væsentlig støtte, og har altid været parat med gode diskussioner og råd. De studerende på Roskilde Universitetscenters Naturvidenskabelige Basisuddannelse, hvis rapporter og opgaver vi har analyseret, takker vi for deres velvillighed. På Frederiksværk Gymnasium, Amtsgymnasiet i Roskilde og Himmelev Gymnasium har vi haft inspirerende og oplysende samtaler med gymnasielærere om vilkårene for undervisning i matematiske modeller. I foråret 1996 præsenterede vi vores arbejde i studiekredsen for matematikkens og fysikkens didaktik på IMFUFA. Her i medvirkede Karin Beyer, Morten Blomhøj, Mogens Brun Heefelt, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss, og vi vil gerne takke dem for deres gode forslag og kritiske kommentarer.

Fra projektets sidste fase skylder vi Ole Skovsmose, Aalborg Universitet, en stor tak for hans grundige kritik af den foreløbige rapport i forbindelse med Kristin Troels-Smiths eksamen. Også Tine Wedege, ph.d studerende i matematikkens didaktik på IMFUFA, har gennemlæst den foreløbige rapport og har givet inspiration til det afsluttende skrivearbejde.

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, august 1996

Nina Skov Hansen og Christine Iversen

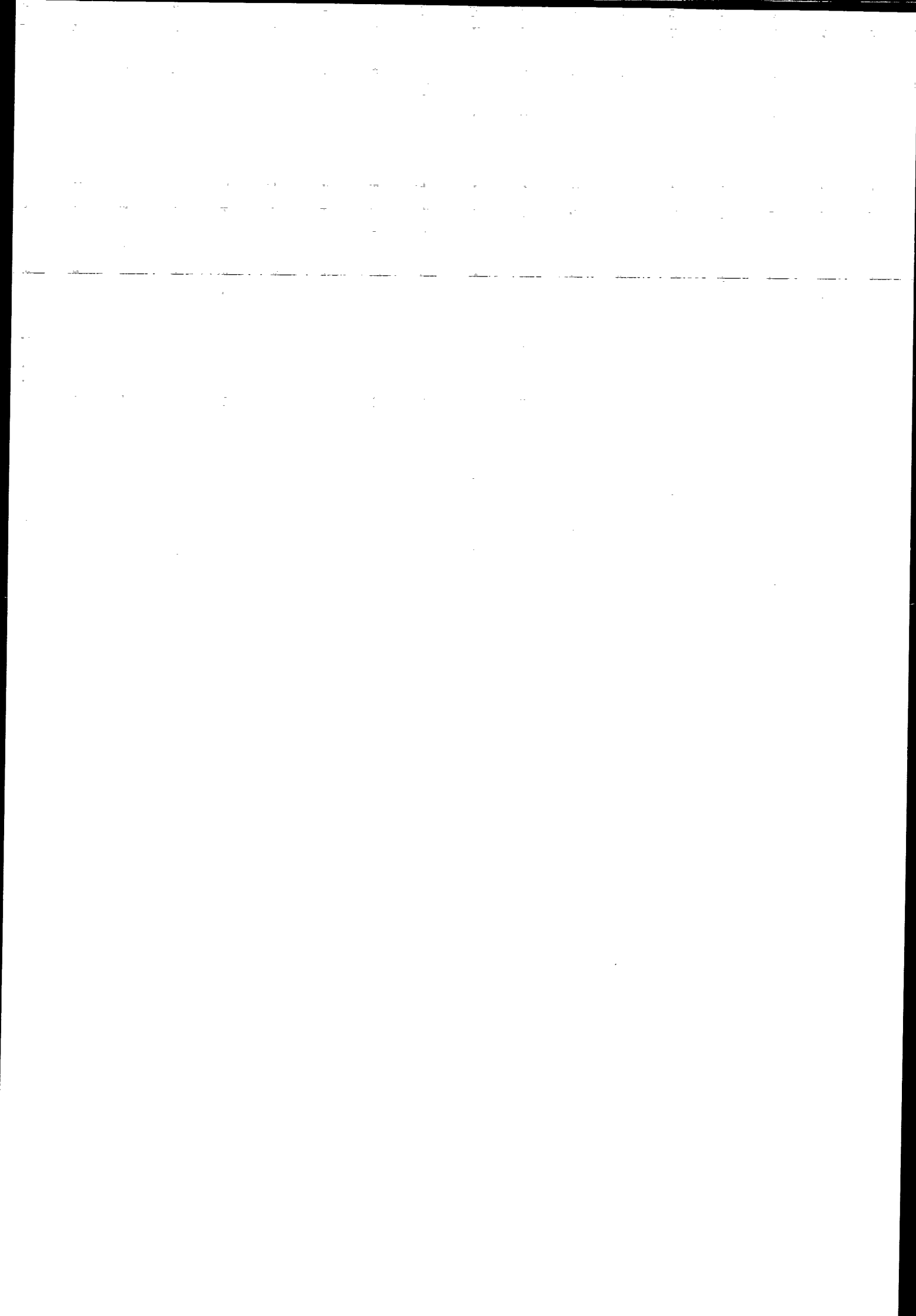


Indhold

Forord	1
Indledning	7
1 Argumenter for undervisning i matematiske modeller	15
1.1 Kritikargument	18
1.2 Nytteargument	21
1.3 Kulturargument	24
1.4 Dannelsesargument	26
1.5 Indlæringsargument	28
1.6 Sammenfattende kommentarer	31
2 Opbygning af kompetencebegrebsapparatet	35
2.1 Strukturen i modelleringsprocessen	39
2.1.1 Modeksempel: Overbooking af fly	43
2.1.2 Modelleringsprocessen i overbookingmodellen	49
2.2 Modelkompetencer	50
2.2.1 Struktureringskompetence	50
2.2.2 Matematiseringskompetence	52
2.2.3 Afmatematiseringskompetence	54
2.2.4 Modelløsningskompetence	56
2.2.5 Valideringskompetence	57
2.2.6 Strategikompetence	58

2.2.7	Refleksionskompetence	59
2.2.8	Kritikkompetence	61
2.2.9	Kommunikationskompetence	62
2.2.10	En slutkommentar	63
2.3	Uddybning og diskussion af begrebsapparatet	64
2.3.1	Schnacks handlekompetence	64
2.3.2	Schoenfelds matematiske tænkning	66
2.3.3	Skovsmoses videnstyper	73
2.4	Diskussion af modelkompetencerne i forhold til modeltyper	80
2.4.1	Gruppering af nogle modeltypeinddelinger	81
2.4.2	Diskussion af modeltypeinddelinger	84
2.4.3	Opsamling	89
2.5	Diskussion af modelkompetencerne i forhold til argumenterne	90
2.6	Sammenfatning	92
3	Afprøvning af kompetencebegrebsapparatet	97
3.1	Projektrapporten "Trafik modellering"	99
3.1.1	Beskrivelse af projektrapporten	99
3.1.2	Modellen i projektrapporten	103
3.1.3	Analyse af kompetencerne i projektrapporten	106
3.1.4	Opsamling på analysen af projektrapporten	122
3.2	Opgavebesvarelser om "Lotka-Volterra modeller"	125
3.2.1	Beskrivelse af opgaven	126
3.2.2	Analyse af to opgavebesvarelser	127
3.2.3	Afrunding på analysen af opgavebesvarelserne	139
3.3	Sammenfatning	141
4	Metodeovervejelser og diskussion	149
	Litteratur	159

A Opgaven og opgavebesvarelserne til "Lotka-Volterra modeller"	163
A.1 Opgaven	163
A.2 Opgavebesvarelse 1 (OP1)	166
A.3 Opgavebesvarelse 2 (OP2)	170



Indledning

Når man taler om, hvilket udbytte studerende skal have af matematikundervisningen, bliver det nemt til en diskussion om, hvilke emner de skal have kendskab til. Det er imidlertid vores - og nok også de fleste matematikunderviseres samt didaktikeres - holdning, at det er mindst ligeså vigtigt at diskutere, hvilke *kompetencer* man ønsker at bibringe studerende. At diskussionen nemt bliver emnefokuseret, mener vi bunder i den omstændighed, at de kompetencer, der kunne komme på banen, er dårligere beskrevet, end emnerne er det. Dette kan skyldes, at der aldrig har været meget fokus på dem og/eller at de faktisk er svære at beskrive. Vi har derfor følt, at der var behov for at uddybe de kompetencer, der kan udvikles i matematikundervisningen. Dette projekt har således som målsætning at yde et bidrag, der kan hjælpe til at nuancere diskussionen om matematikundervisningen.

Vi har valgt at fokusere på de kompetencer, som er tilknyttet arbejdet med *matematiske modeller*. Dette er til dels inspireret af indførelsen af modelaspektet i 1988 for gymnasiets matematiske linie, men bygger også på, at vi anser modeller for en vigtig del af matematikundervisningen. Heri ligger der implicit, at vores matematiksyn indbefatter matematikanvendelser, som et aspekt af videnskaben matematik. Dette skyldes, at vi anser det for umuligt, at anvende matematik uden at involvere en matematisk model. Derudover ligger der også et bestemt syn både på matematiske modellers rolle i samfundet og på matematikundervisningens mål. Vi tilslutter os den overbevisning, at matematiske modeller spiller en afgørende rolle i samfundsudviklingen. En rolle der er kendetegnet ved, at den er med til at bestemme i hvilke retninger udviklingen går, og som derfor meget rammende af flere didaktikere betegnes som *samfundsformende*. Vi anser det for en del af matematikundervisningens mål at give de studerende en mulighed for både at forstå og forholde sig kritisk til dette forhold. Da vi således mener, at undervisningen i matematiske modeller er nødvendig for udviklingen af en *kritisk demokratisk kompetence* hos de studerende, ser vi matematiske modeller som en vigtig del af matematikfagets læseplan. Vi har derfor fundet det særligt vigtigt og interessant

at undersøge, hvilke kompetencer lige netop arbejdet med matematiske modeller kan give studerende.

Formål

Formålet med projektet er således at bidrage til diskussionen om, hvilket udbytte de studerende skal have af at arbejde med modeller i matematikundervisningen ved at opbygge et *begrebsapparat* bestående af kompetencer tilknyttet arbejdet med matematiske modeller. Vores begrebsapparat er dog ikke velegnet til at fungere som et direkte provokerende indslag i debatten. Derimod ønsker vi dels at øge bevidstheden om, at det ikke kun er *viden* men også *kunnen*, som er målet for matematikundervisningen og dels at nuancere opfattelsen af, hvad der ligger i at arbejde med matematiske modeller.

Udover at få styrket diskussionen om matematikundervisningen mener vi også, at der både set fra et *undervisnings-* og et *læringsmæssigt* perspektiv er behov for en uddybet beskrivelse af, hvad de studerende skal kunne og ikke blot, hvad de skal vide noget om. Formålet med at opbygge et kompetencebegrebsapparat er således også i en vis forstand at give både lærere og studerende et redskab til henholdsvis undervisnings- og indlæringsbrug.

Hvis det ikke kun er den formelle teoretiske viden, i form af pensum/emnelister, der er beskrevet, mener vi det vil være nemmere for læreren at tilgodese, at der i læringssituationer er en komplementaritet mellem viden og handling. Med komplementaritet mellem handlinger og viden hentyder vi til det forhold, at viden på den ene side er grundlag for handlinger, og at handlinger på den anden side giver grundlag for opbygning af viden.

Vi anser det for essentielt, at læreren i sin undervisning er opmærksom på hvilke kompetencer, hun søger at udvikle hos de studerende. Dette skyldes, at man ikke umiddelbart kan regne med, at studerende selv automatisk afleder dem af et vilkårligt modelarbejde. Undervisningen skal altså tilrettelægges bevidst på en sådan måde, at der skabes mulighed for, at de ønskede kompetencer kan udvikles. For at dette kan gennemføres, er det naturligvis en hjælp for læreren, hvis der foreligger beskrivelser af kompetencerne. Hvis en lærer feks. ønsker at bibringe studerende evnen til at kunne formulere et problem matematisk, skal de studerende også gennem undervisningen bringes i situationer, hvor dette er påkrævet. Med dette er det også sagt, at det afgørende for at kompetencerne udvikles er, at de studerende bringes/bringer sig i situationer, hvor disse trænes - "learning by doing".

Fra et læringsperspektiv tror vi, at det er vigtigt, at der bliver sat ord på kompetencerne. De studerendes *metakognition* kan blive styrket ved at få

relateret den konkrete aktivitet med den generelle kompetence. Det er altså vores overbevisning, at det i en læringsproces er en fordel for den studerende at få præciseret, hvad det er der skal til for at nå frem til løsningen af en given opgave. Det at blive gjort opmærksom på hvilke generelle kompetencer, man med fordel kan benytte i en bestemt situation, kan gøre det lettere for den studerende at gøre brug af de samme kompetencer i nye situationer. Vi tror med andre ord, at man hurtigere lærer generelle kompetencer ved at blive bevidst om deres eksistens - ved at komme væk fra det "bare at gøre noget" uden helt at vide hvorfor og hvordan.

Dette hænger meget sammen med de generelle problemer ved eksemplarisk undervisning; eksemplet får størst værdi som eksempel, når man ved, hvad det er eksemplarisk for. Når man som studerende arbejder med en matematisk model, vil alle aktiviteter føles stærkt knyttet til denne konkrete model. Meget af arbejdet vil også være specielt for eksemplet, mens andet vil være af mere generel karakter. Men den erhvervede viden og modelleringserfaring bliver ikke af sig selv hævet over det konkrete eksempel. Hvis kompetencerne bliver bragt eksplicit på banen i undervisningssituationen, mener vi det vil kunne højne de studerendes mulighed for at generalisere over de enkelte aktiviteter og dermed anvende det tillærte i nye situationer.

Vores ambition om, hvordan henholdsvis lærere og studerende skal kunne benytte begrebsapparatet er indsnævret til følgende: Vi forventer ikke at læreren detaljet kan planlægge hvordan en given kompetence kan blive udviklet i et undervisningsforløb ud fra begrebsapparatet. Men vi håber at en lærer, ved at få udpeget de mest centrale aspekter ved modelarbejde, kan blive opmærksom på om vedkommende får tilgodeset de sider, som han er ude efter at bibringe de studerende. Sagt med andre ord kan vores begrebsapparat hjælpe en lærer til at overskue om et givet undervisningsforløb kan indfri *målet* med det. Størst kraft mener vi dog apparatet vil give i analysen af et afsluttet forløb, da vi ikke vil give nogen fuldstændig beskrivelse af, hvornår de enkelte kompetencer kan komme i spil i modelleringsarbejde.

Med hensyn til de studerende vil vi ikke påstå, at det er en ubetinget fordel at de får præsenteret kompetencebegreberne i den form, som vi giver dem i rapporten. Vi vil kun fastholde, at det at få sat ord på kompetencerne i en læringssituation - i en eller anden udformning - kan være med til at støtte tilegnelsen af kompetencerne. Vi vil imidlertid ikke undersøge begrebsapparatets egnethed set fra et indlæringsmæssigt synspunkt. Dette formål vil altså få lov at fremstå som en påstand.

Problemformulering

Det centrale spørgsmål for rapporten er følgende:

Hvordan kan vi *beskrive*, de *kompetencer* der er tilknyttet *arbejdet* med *modeller* i *matematikundervisningen*?

Den *beskrivelse*, vi ønsker at udarbejde, skal kunne bruges som analyseapparat på forskellige situationer, hvor modelarbejdet har foregået. Da vi har lagt op til, at både lærere og studerende skal kunne drage nytte af kompetencebeskrivelserne er det nødvendigt med en hvis detaljeringsgrad. Imidlertid er vi mere ude efter, at kompetencerne skal kunne genkendes end omvendt fremprovokeres, så vi stiler ikke mod en meget fin detaljeringsgrad. Vores mål er for det første at udpege de mest centrale aspekter ved modelleringsarbejde og dernæst i de enkelte beskrivelser af kompetencerne, at få fremhævet alle vigtige facetter, således at vi giver en dækkende beskrivelse både af den enkelte kompetence og af modelleringsarbejde.

Med *kompetence* mener vi den evne at kunne sætte viden og erfaring i sving i nye situationer. Kompetencen er altså at kunne udføre forskellige aktiviteter på baggrund af viden og erfaringer.

Det *arbejde* der kan foregå med matematiske modeller i undervisningen, anser vi for hovedsageligt at være af to typer: enten er der tale om at modeller opbygges, eller også foregår der en analyse af allerede opbyggede og færdige modeller. Det er klart at der også kan være tilfælde, hvor begge typer af modelarbejde er involveret. Eksempelvis vil videreudbygning af en eksisterende model trække på begge typer. Det er kompetencer tilknyttet begge disse typer af modelarbejde vi ønsker at beskrive.

Vi beskæftiger os kun med *matematiske* modeller - ikke med modeller generelt. En *matematisk model* er i vores opfattelse et symboludtryk, hvor symbolerne både henviser til matematiske begreber og til noget udenfor matematikken selv. Vi fokuserer ikke på nogen bestemt type af matematiske modeller, men diskuterer forholdet mellem kompetencernes indhold og forskellige modeltyper. Målet er derfor at begrebsapparatet dækker matematiske modeller generelt.

Uddannelsesniveaumæssigt beskæftiger vi os først og fremmest med *matematikundervisningen* på gymnasie- samt indledende universitetsniveau. Vi vil derfor ikke udelade, at der på et mere avanceret uddannelsesstrin i uddannelsen af en "professionel modelbygger" kunne være brug for kompetencer, som ikke vil være dækket ind af vores begrebsapparat. Vi er dog mere af den overbevisning, at det ville dreje sig om andre aspekter af vores kompetencer.

Metode

Opbygningen af begrebsapparatet involverer både *teoretisk* og *empirisk arbejde*. Selve udskilningen af kompetencerne foregår på teoretisk basis ud fra litteraturstudier af specielt matematikdidaktikers arbejder. Præciseringen af de mest centrale aspekter ved de enkelte kompetencer bygger ligeledes på teoretisk analytisk arbejde. Samspillet mellem de forskellige kompetencer afklares både vha. teori og empirisk arbejde.

Det empiriske arbejde består af analyser af studerendes modelarbejder. Det empiriske *materiale* består hovedsageligt af skriftligt materiale - nærmere bestemt opgavebesvarelser og en projektrapport - men indeholder også båndoptagelser af både interview og dialoger mellem studerende i færd med at udføre forskellige modelleringsaktiviteter samt observationer af tilsvarende slags arbejder. I rapporten vil vi dog fortrinsvis inddrage det skriftlige materiale.

Det empiriske arbejde har overordnet to forskellige funktioner: dels fungerer det som en afprøvning af, om - og hvordan - kompetencerne kan genfindes i praksis og dels som en afprøvning af begrebsapparatets egnethed som analyseredskab. I det empiriske arbejde undersøger vi forhold som, om der er for få eller for mange kompetencer, om grænserne mellem kompetencerne er for flydende og hvordan samspillet mellem kompetencerne er. Vi afdækker og illustrerer således aspekter af kompetencerne vha. eksempler fra det empiriske materiale. Denne afprøvning hjælper således til at forfine og nuancere begrebsapparatet. Problemer i forbindelse med dette arbejde ligger til grund for diskussionen af begrebsapparatets anvendelighed som analyseredskab.

Placering i det matematikdidaktiske felt

For at placere projektet i det matematikdidaktiske felt tager vi udgangspunkt i, at den didaktiske diskussion kan inddeles i tre niveauer: hvorfor, hvad og hvordan. *Hvorfor*, angår begrundelsesproblemet, med andre ord en diskussion af mulige svar på spørgsmålet: "Hvorfor skal der undervises i matematik?". *Hvad*, angår mulighedsproblemet, dvs. "Hvad skal der undervises i?". Holdninger til dette spørgsmål vil på en eller anden måde afhænge af hvilken holdning, man har til begrundelsen for at undervise i matematik. Sidste plan af den didaktiske diskussion benævnes også implementationsproblemet og cirkler om spørgsmålet: "*Hvordan* skal man undervise i matematik?". De tre niveauer er nøje forbundne, således at svaret på det ene eller det andet af de tre spørgsmål vil være påvirket af holdningen til de to andre (Niss, 1993).

Efter ovenstående inddeling hører vores arbejde med modelkompetencer til på hvad-planet. Dette plan afspejler sig i praksis bla. i læseplaner. Det er vores indtryk at læseplaner i høj grad indeholder en række emner, der skal gennemgås i undervisningen og ikke så meget færdigheder eller kompetencer, man ønsker at udvikle på det pågældende kursus. Vores arbejde kan derfor ses som et forsøg på at give et supplement til de traditionelle emnelister. Hvad-planet er som nævnt stærkt influeret af tanker fra hvorfor-planet - uden man dog kan tale om nogen entydig sammenhæng mellem de to planer. For at sikre en fornuftig referenceramme til dette plan har vi derfor valgt at se nærmere på begrundelsesdiskussionen i starten af rapporten. Vi ser her på argumenterne for at inkludere modeller i matematikundervisningen. Disse argumenter er af normativ karakter, dvs. de sigter mod at nå frem til, hvad der bør findes. Det sidste plan, hvordan-planet, i dette tilfælde hvordan skal der undervises i modeller, er ikke i fokus i dette projekt, men vil kort blive berørt specielt i forbindelse med generelle overvejelser om indlæringen af kompetencerne.

Vores hensigt med at opbygge et begrebsapparat om modelkompetencer er normativ, da vi ønsker beskrivelsen skal bidrage til, hvad indholdet i undervisning i matematiske modeller bør være. Da projektet tager udgangspunkt i argumenter for modelundervisning har det også et normativt fundament. Det er dog ikke vores hensigt at argumentere for vigtigheden af nogle kompetencer fremfor nogle andre. Vores mål er at få opbygget et indholdsrigt og anvendeligt begrebsapparat om modelkompetencer. Dette projekt er således hovedsageligt analytisk og deskriptivt.

Rapportopbygning

Rapporten er opdelt i fire kapitler. Første kapitel indeholder en gennemgang af argumenter, der er blevet fremført for undervisning af modeller. I kapitel 2 præsenteres begrebsapparatet og i kapitel 3 afprøves det på empirisk materiale. Sidste kapitel indeholder metodeovervejelser og diskussion af begrebsapparatets status.

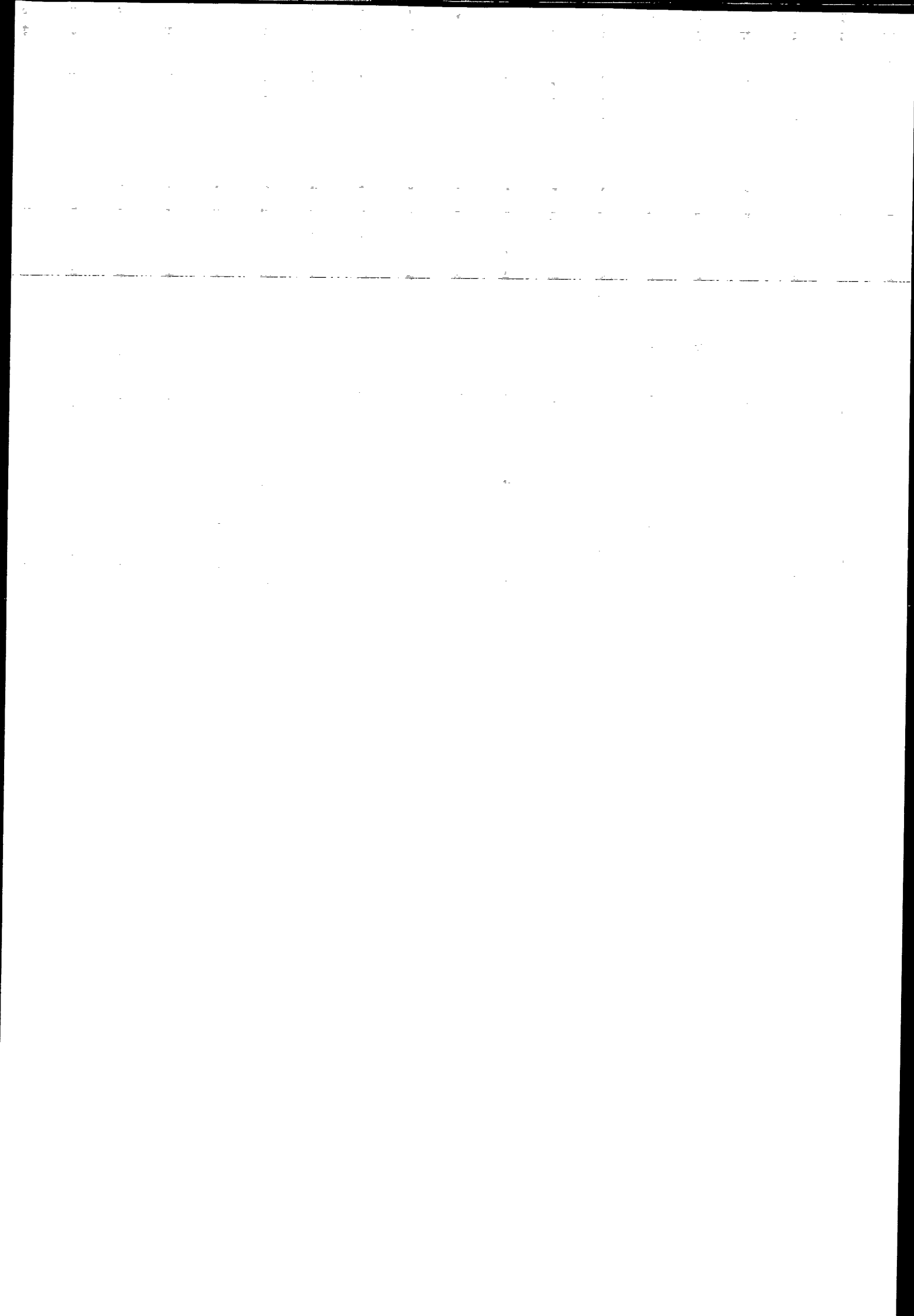
Vi har valgt at medtage en forholdsvis grundig behandling af argumenterne for undervisning i matematiske modeller ud fra overvejelserne om, at disse argumenter nødvendigvis må have indflydelse på hvad det er, man ønsker der skal være udbyttet af undervisningen. Dette skal ikke forstås så firkantet, at vi mener man direkte og entydigt kan udlede kompetencerne af argumenterne. Hvilke kompetencer, der skal til for at tilfredsstille hensigterne bag et givet argument, afhænger bla. af hvilket syn man har på læring, matematik, samfundet mm. I gennemgangen af argumenterne inddrager vi nogle af de

grundlæggende holdninger til læring, matematik og samfund, som argumenterne mere eller mindre eksplicit bygger på.

I kapitel 2 præsenterer vi kompetencebegrebsapparatet. Det består af 9 kompetencer, som er udskilt på forskellig vis. Seks af kompetencerne er udskilt på baggrund af en undersøgelse af de forskellige trin i en fuld *modelleringsproces*. Tre andre kompetencer er identificeret på basis af to matematikdidaktikeres arbejder. I kapitlet gennemgår vi en del af det teoretiske fundament for kompetencerne, selve begrebsapparatet (dvs. de ni modelkompetencer), diskuterer kompetencebegrebets status og diskuterer kompetencernes indhold i relation til forskellige modeltyper. De enkelte afsnit i kapitlet har alle som mål at nuancere beskrivelserne af kompetencerne.

Kapitel 3 indeholder en præsentation af det empiriske arbejde. Vi afprøver hele begrebsapparatet på dokumentation af to forskellige typer af modelarbejde. Det ene arbejde involverer selvstændig modelopbygning mens det andet har fokus på analyse af eksisterende modeller. Det empiriske materiale er udarbejdet af studerende på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse på RUC. Afprøvningen tjener som førnævnt to hovedformål. For det første nuancerer det beskrivelserne af kompetencerne og medvirker dermed i selve udviklingen af begreberne. For det andet fungerer det som en slags test af deres brugbarhed som analyseredskab.

Vi slutter af med at diskutere kvalitative metoder og specielt her indenfor, de metoder vi har anvendt. Vi ønsker her at belyse forholdet mellem det empiriske arbejde og begrebsapparatets indhold. I kapitlet diskuterer vi endvidere det empiriske materiales egnethed til afprøvning af de enkelte kompetencer samt hvilket andet empirisk materiale, der eventuelt kunne anvendes i stedet. Formålet med kapitlet er at kunne runde rapporten af med en statusopgørelse af hele begrebsapparatet.



Kapitel 1

Argumenter for undervisning i matematiske modeller

Op gennem 1970'erne og 1980'erne blev der foretaget ændringer i både folkeskolens, gymnasiet og universitetets læseplaner i matematik i retning af at give matematikanvendelser en mere central placering. Gymnasireformen i 1988 udmøntede sig blandt andet i, at der ud over hovedemnerne blev indført tre aspekter for matematikundervisningen: et historisk aspekt, et *model-aspekt* og et internt matematisk aspekt. Forud for og sideløbende med disse ændringer kørte der en debat i fagdidaktiske kredse med fokus på anvendelsers og modellers relevans i matematikundervisningen. Debatten blev ført både på nationalt og internationalt plan fra sidst i 60'erne og kan ses som en reaktion både på 60'ernes strukturalistiske matematikundervisning og på den store udbredelse af matematik i samfundet med deraf følgende nye kvalifikationskrav.

I dette kapitel vil vi belyse hovedtræk af den internationale fagdidaktiske diskussion af spørgsmålet om, *hvorfor* modeller skal indgå i matematikundervisningen. Vi vil tage fat på de centrale argumenter, som de fremtræder i litteraturen, og give dem en uddybende analyse for at nå frem til, hvad de egentligt dækker over. Gennemgangen af argumenterne skal danne baggrund for de følgende kapitler. Alle synspunkter om hvad undervisning i matematiske modeller skal indeholde, hvilke kompetencer den skal udvikle, og hvordan den skal tilrettelægges, vil bygge på nogle mere eller mindre eksplicite begrundelser for, hvorfor man skal undervise i modeller. Det bedste grundlag for videre overvejelser, mener vi derfor, er en seriøs behandling af begrundelsesspørgsmålet.

Begrundelser for at inddrage matematiske modeller i matematikundervis-

ningen, såvel som for matematikundervisning generelt, kan naturligvis have mange forskellige former og foregå på mange forskellige niveauer. For eksempel er det klart, at "samfundets" begrundelse for at tilbyde en given matematikundervisning i gymnasiet ofte må have en anden karakter end den enkelte elevs begrundelse for at lære matematik. Elevers og læreres individuelle begrundelser er naturligvis relevante, når man eksempelvis vil forstå hvordan læreprocesserne foregår, men de begrundelser vi vil diskutere, er dem af mere generel art. Gymnasiets matematikundervisning har ligesom de øvrige fag i gymnasiet både en almindennende og en studie- og erhvervsforberedende funktion. Denne opdeling er vigtig, men i en mere dybtgående diskussion af begrundelser både for modeller og matematik som sådan er den ikke tilstrækkelig. De argumenter, vi vil diskutere, kan ikke opdeles i entydigt studieforberedende eller almindennende.

For at få et overblik over de forskellige begrundelser for at undervise i matematiske modeller kan man gruppere dem efter deres karakter. Vi har valgt at opdele begrundelserne i fem forskellige argumenter. Disse fem argumenter er ifølge de nyere oversigtsartikler over debatten repræsentative for de forskellige typer af begrundelser, der har været fremført. Vi vil tage udgangspunkt i Mogens Niss¹ formulering af argumenterne i artiklen "*Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics curricula*" (Niss, 1989). Disse formuleringer er valgt, fordi de er kortfattede og forholdsvis præcise og dermed velegnede som fælles udgangspunkt for videre analyse og diskussion. Argumenterne kan i forskellige artikler optræde med lidt forskellige overskrifter - og det er naturligvis altid vanskeligt at finde en god, præcis overskrift. Herunder er gengivet forskellige overskrifter til de fem argumenter. Vi har fremhævet de overskrifter, der vil blive benyttet i denne rapport.

- **Kritikargument**, kritisk kompetence argument, demokratiargument.
- **Nytteargument**, anvendelighedsargument, pragmatisk argument, utilitaristisk argument.
- **Kulturargument**, billede af matematikken argument, videnskabsorienteret argument.
- **Dannelsesargument**, formativt argument.
- **Indlæringsargument**, effektiv matematikindlæringsargument, psykologisk argument.

¹Mogens Niss er professor i matematikkens didaktik ved Institut for studiet af Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelser, IMFUFA, Roskilde Universitetcenter, Danmark.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at denne opdeling i høj grad er en analytisk skelnen. Når man konkret støder på begrundelser for undervisning i modeller, vil skellet ikke optræde ligeså klart. Hvert argument kan indeholde flere forskellige begrundelser, ligesom der også er overlap mellem flere af argumenterne. Styrken ved opdelingen er, at det giver et redskab til at aflæse begrundelser, også når de ikke optræder helt eksplicit, ligesom det generelt giver mulighed for at diskutere begrundelsesspørgsmålet på et klarere grundlag.

I det følgende vil argumenterne først blive belyst enkeltvist, og dernæst vil de blive sat op mod hinanden. I gennemgangen vil vi fortrinsvis holde os til det niveau, som vi i indledningen kaldte "hvorfor-niveauet". Vi vil dog inddrage overordnede betragtninger fra de to andre planer, dvs. fra "hvad" og "hvordan", når vi mener, det kan støtte en bredere forståelse af begrundelserne. I udfoldningen vil vi medtage synspunkter fra markante didaktikere såvel som fra matematikundervisere, der har forholdt sig både direkte og indirekte til diskussionen. Disse eksempler fungerer i nogle tilfælde som konkretiseringer af argumentet, og i andre tilfælde skal de uddybe aspekter vedrørende det pågældende argument. En didaktiker, D'Ambrosio², optræder i uddybningen af tre af de fem argumenter. Dette har vi gjort bla. for at illustrere førnævnte pointe med, at skellet mellem de forskellige argumenter i praksis ikke er så skarp, som det kunne se ud til i en teoretisk gennemgang. Desuden udtrykker D'Ambrosio nogle synspunkter på en meget klar og forståelig måde.

For at give belysningerne mere fylde vil vi uddybe nogle af de bagvedliggende holdninger og synspunkter, som argumenterne bygger på. Dette gør vi, fordi den enkelte didaktikers argument for inddragelse af modeller i undervisningen er påvirket af den pågældendes syn på, hvorfor der i det hele taget skal undervises i matematik. Endvidere kan forhold som didaktikerens matematiksyn, syn på læring og på uddannelse eller helt bredt menneskesyn implicit bestemme holdningen til modellers inddragelse. Det er ikke vores hensigt at gå i dybden med disse sammenhænge konsekvent for alle argumenter, men vi inddrager dem, når vi finder det nødvendigt for en fyldestgørende forståelse af det pågældende argument. Argumenternes tyngde vil også blive overvejet undervejs. Hermed menes, om modellerne tildeles en uundværlig rolle for matematikundervisningen, eller om de får mere karakter af en mulighed, der kan overvejes på linie med andre indholdselementer.

Efter gennemgangen af de enkelte argumenter vil vi stille dem sammen. Her vil argumenternes indbyrdes forhold og eventuelle overlapninger blive trukket frem med henblik på en præcisering af det enkelte argument og en vurdering

²Ubiratan D'Ambrosio er tilknyttet Campinas Universitet, Brasilien.

af, om de fem argumenter er "dækkende", eller om der kan fremføres begrundelser, som ikke er indeholdt i dem.

1.1 Kritikargument

Evnen til at kunne vurdere matematikanvendelser i ikke-matematiske sammenhænge er kernen i dette argument.

"Applications and modelling should be part of the mathematics curriculum in order to... generate, develop and qualify a critical potential in students towards the use (and misuse) of mathematics in extra-mathematical contexts" (Niss, 1989, s.23).

Arbejdet med modeller skal udvikle "a critical potential" overfor anvendelsen af matematik. Til dette formål er matematiske modeller det helt centrale middel, som ikke kan udskiftes med noget andet middel. Hermed er dog ikke sagt, at modeller alene er tilstrækkeligt til at udvikle det kritiske potentiale hos de studerende.

I en større undervisningsmæssig sammenhæng hænger argumentet sammen med et ønske om at udvikle en generel kritisk indstilling hos de studerende. Denne kritiske holdning kan og skal ikke udvikles alene gennem matematikundervisningen. Det handler i stedet om, at alle fag dels forsøger at fremme en generel kritisk indstilling hos de studerende og dels fremhæver kritik specielt relateret til det pågældende fag. En del af den matematikrelaterede kritik vil bestå i en vurdering af brugen af matematik udenfor matematikken selv. I denne kritik vil man uundgåeligt skulle beskæftige sig med matematiske modeller, da disse altid vil være i spil i enhver form for matematikanvendelse. Matematiske modeller skal derfor nødvendigvis medtages i matematikundervisningen, hvis man tilslutter sig ideen om at udvikle fagspecifikke kritiske holdninger hos de studerende.

Hvordan skal den kritiske evne så nærmere forstås? En tolkning af dette må både indbefatte en generel stillingtagen til, hvad det indebærer at være kritisk og derudover mere specifikt, hvad der ligger i at være kritisk i forhold til matematikanvendelser. Vi vil uddybe, hvad vi mener, der kan ligge i de to ting på baggrund af ideerne i "kritisk pædagogik"³.

³Kritisk pædagogik er en fællesbetegnelse for flere forskellige pædagogiske retninger fra 1960'erne og 1970'erne, som bla. er inspirerede af Karl Marx. En generel introduktion til pædagogikken samt dens relation til matematik findes i (Skovsmose, 1981).

Det at kunne tage kritisk stilling til et problem eller område må indbefatte evnen til at kunne stille spørgsmål til, kunne vurdere og være i stand til at finde alternativer til problemet og dets mulige løsninger. Problemet kunne omfatte en given anvendelse af matematik. Kritikken i forhold til matematikanvendelser kan opdeles i *intern modelkritik* og *samfundsrettet kritik*. I den interne modelkritik vil de kritiske spørgsmål angå det matematiske indhold i modellen og dette indholds anvendelsesmuligheder og begrænsninger. Det vil således være spørgsmål indenfor det matematiske begrebsunivers. I den samfundsrettede kritik er det forhold, som modellens forudsætninger og begrænsninger i forhold til den virkelighed den beskriver og de involverede interesser i modelleringsprocessen, der skal i fokus. En opfattelse af den samfundsrettede kritik kunne være, at den kan og skal udmønte sig i handling. Denne holdning implicerer, at man ved at forholde sig kritisk i forskellige sammenhænge samtidig får udvidet sit handlingsrum.

De didaktikere, der argumenterer for at modeller og anvendelser er et middel til at udvikle et kritisk potentiale hos de studerende, forbinder ofte denne evne med dens nødvendighed for demokratiet. Dette bygger på en opfattelse af at matematik er en *samfundsformende* faktor. Med matematikkens samfundsformende evne tænkes på, at matematikken er med til at påvirke den måde vi opfatter virkeligheden på igennem at matematiske tænkemåder er vidt udbredte indenfor mange andre naturvidenskabelige og samfundsvidenskabelige fagområder. Matematikken bruges også konkret som et grundlæggende redskab til at planlægge og træffe beslutninger i mange forskellige sammenhænge af stor samfundsmæssig betydning, feks. indenfor teknologi, miljøplanlægning, politisk og økonomisk administration osv. På den måde er matematikken med til at forme virkeligheden både reelt og i vores fortolkning af den. I artiklen "*Kritisk matematikundervisning - nødvendig men vanskelig*" fra 1984 skriver Mogens Niss:

"Når matematikken er samfundsformende skyldes det måden den er vigtig på. Først og fremmest er de omtalte forhold som matematikken spiller en rolle for, grundforhold i et stærkt styret samfund, hvilende på videnskabeliggjort produktion i bredeste forstand, og på et videnskabsfrembragt verdensbillede." (Niss, 1984, s.24).

Kritikargumentet anvendes således ofte i forbindelse med diskussioner om skolens demokratiske forpligtelse og hvad matematikundervisningen kan bidrage med i den henseende. Morten Blomhøj⁴ udtrykker det således:

⁴Morten Blomhøj er adjunkt ved Institut for studiet af Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelser, IMFUFA, Roskilde Universitetcenter, Danmark. Han forsker indenfor matematikkens didaktik.

“...grundlaget for en lang række vigtige beslutninger, som har betydning for den enkelte borgers arbejdsliv og deltagelse i det demokratiske samfund tilvejebringes ved hjælp af matematiske modeller.”

Efter min opfattelse må denne udvikling have konsekvenser for matematikundervisningen. Matematikundervisningen må på alle niveauer bidrage til dannelsen af en faglig kritisk dømmekraft overfor de matematiske begreber og deres anvendelse - i form af matematiske modeller. Opbygningen af en sådan faglig dømmekraft anser jeg for at være matematikundervisningens vigtigste bidrag til udviklingen af en almen demokratisk kompetence.” (Blomhøj, 1992, s.13).

Et demokratisk samfund bygger på, at folk er i stand til at vurdere og tage stilling til, hvad der styrer samfundets udvikling. På grund af matematikkens samfundsformende funktion bliver det at sætte unge i stand til at vurdere matematikkens rolle i samfundet af afgørende demokratisk betydning. Der er således en samfundsmæssig interesse i, at flest mulige borgere har en kritisk dømmekraft også overfor problemstillinger, der involverer matematiske modeller. Således bliver kritikargumentet meget vægtigt i forhold til indførelsen af modeller i matematikundervisningen.

Som det fremgår af det foregående er modeller og anvendelser en absolut nødvendig del af matematikfagets læseplan, hvis man vil udvikle en kritisk dømmekraft i relation til matematik. Men det er ifølge Mogens Niss ikke tilstrækkeligt:

“De ‘hårde’ sider af faget, hvis kerne er det stringente (ikke nødvendigvis formalistiske) matematiske ræsonnement, kæderne af ‘hvis-så’-udsagn, er ofte blevet nedprioriteret i kampens hede. Men hvis de udelades af matematikundervisningen, mister eleverne muligheder for at komme ind på livet af nogle af de afgørende forudsætninger for matematikkens rolle i verden.” (Niss, 1984, s.24-25).

Ifølge Mogens Niss bygger det kritiske potentiale altså i lige så høj grad på et indgående kendskab til de sider af matematikken, der traditionelt har været lagt størst vægt på, de såkaldt “hårde sider”, som på et kendskab til anvendelser og modeller.

1.2 Nytteargument

Nytteargumentet tager udgangspunkt i, at matematik er nyttigt i mange sammenhænge, og at de studerende derfor skal sættes i stand til at drage fordel af denne omstændighed ved selv at kunne anvende matematik.

“Applications and modelling should be part of the mathematics curriculum in order to:... prepare students to being able to practice applications and modelling - in other teaching subjects, as private individuals or as citizens, at present or in the future, or in their professions.” (Niss, 1989, s.23).

I Niss' formulering af argumentet er “...to practice applications and modelling...” det centrale. Denne formulering, mener vi, må dække over både det at kunne modellere selv men også over det at kunne forstå andres modeller således, at man bliver i stand til at anvende dem.

Nytteargumentet i denne formulering er meget bredt og kan indbefatte mange forskellige synspunkter på målene for matematikundervisning. Den grundlæggende opfattelse, som argumentet bygger på, er dog som nævnt i alle tilfælde, at matematik er *nyttigt* og væsentligt, fordi det er et uundværligt redskab til at behandle og løse mange vigtige problemer udenfor matematikken. Derfor skal man gennem matematikundervisningen få forudsætninger for at bringe matematikken i spil overfor sådanne problemstillinger. Når nytteargumentet anvendes for at inddrage anvendelser og modeller i matematikundervisningen, så er det i erkendelse af, at selv et grundigt kendskab til de matematiske teorier ikke giver eleverne forudsætning for at kunne anvende matematik til løsning af ikke-matematiske problemstillinger, hvis ikke de har set og brugt matematik i sådanne sammenhænge før. Derfor skal anvendelser og modeller have en central plads i matematikundervisningen.

Når man taler om, at matematik er nyttigt, så rejser det jo spørgsmålet om for hvem og i forhold til hvad, den er nyttigt. Den enkelte elev kan have nytte af at beherske modellering. Det gælder dels i forhold til, at mestre umiddelbare dagligdags problemstillinger som f.eks. at kontrollere sin bon fra supermarkedet, beregne tidsforbruget til middagstilberedningen osv. Men det kunne også angå den nytte, den enkelte kan have af at kunne bruge matematikken som redskab til bedre at kunne beskrive, forstå, håndtere og/eller påvirke virkeligheden udenfor matematikken. Eller til at få bedre jobmuligheder. Den nytte vil kunne komme eleverne til gode både i hverdags-, samfunds-, studie- og erhvervsliv. I hverdagslivet vil det være til nytte hele tiden i mindre betydende sammenhænge. Et simpelt eksempel på dette kunne være, at

et indblik i sandsynlighedsregning vil give en bedre mulighed end ens intuition vil gøre, for at tage et hensigtsmæssigt træk i et terningspil som feks. backgammon. Eller det kunne være optimeringsproblemer, som at udnytte det stykke stof man har bedst muligt til fremstilling af to joggingsæt. Den enkeltes nytte af matematikken i samfundslivet er ofte forbundet med, at der er blevet anvendt matematik fra samfundets side. Her vil det være nyttigt for den enkelte at kunne forholde sig til og vurdere beslutninger, der involverer brug af matematiske modeller. Når en kommune eksempelvis beregner, at det er hensigtsmæssigt at nedlægge en skole, så kan det være nyttigt at kunne gennemskue grundlaget for sådanne beregninger og evt. argumentere imod ved at inddrage beregninger på andre faktorer som anses for væsentlige i spørgsmålet. Denne form for nytteværdi er noget af det kritikargumentet også ønsker at fremme.

Ligeledes kan samfundet og erhvervslivet siges at have nytte af, at man uddanner dygtige modelbyggere, idet matematikanvendelser har stor betydning for teknologisk udvikling og dermed for produktivitetsstigning, konkurrenceevne og økonomisk vækst. Selvfølgelig kan man ikke altid klart adskille den enkeltes nytte fra samfundets, men alt efter hvad man har i fokus, kan det resultere i forskellige vægtninger af de enkelte dele i nytteargumentet.

Vi vil her komme med to forskellige eksempler på, hvordan nytteargumentet kan fremføres. Det første er af D'Ambrosio, som vi nævnte indledningsvis, fra artiklen "*Historical and Epistemological Bases for Modelling and Implications for the Curriculum*" (D'Ambrosio, 1989). Heri fremfører han argumenter for modeller, der både kan høre under nytte-, udviklings-, og kulturargumentet. I artiklen lægger D'Ambrosio meget vægt på, at matematikken spiller en stor rolle som *redskab* i mange situationer udenfor matematikken selv. D'Ambrosio fokuserer hovedsageligt på matematikkens rolle i forbindelse med anvendelsen indenfor andre videnskabelige discipliner.

"... the growing problem of failure in the sciences [skolefagene red.] because the students are unable to apply mathematics to elementary situations in the sciences... Efforts to close this gap between learning mathematics and using it in other subjects has been a concern of mathematics educators for some time, again trying to knit together mathematics and others... the basic thread in this knitting is techniques of modelling" (D'Ambrosio, 1989, s.21).

Modeller skal altså inddrages i undervisningen for at sætte studerende i stand til at anvende matematik i andre fagdiscipliner. D'Ambrosio mener, at det

nævnte problem må betyde en gennemgribende omstrukturering af matematikundervisningen med henblik på at inddrage væsentlige anvendelser i undervisningen. Disse vil ofte være matematisk komplicerede og vil derfor ikke kunne indføres med den traditionelle grundighed. For eksempel har fysikere og biologer brug for og er i stand til at anvende komplicerede matematiske redskaber, selvom de ikke har den formelt nødvendige matematiske baggrund. Også skolens undervisning må ændres, således at anvendelser af avanceret matematik kan præsenteres på tidligere niveauer, selvom det måske på en mindre grundig facon. D'Ambrosios argument er altså, at modeller og anvendelser skal indgå i matematikundervisningen, da det vil være nyttigt for de andre videnskabsområder. Argumentet får sin styrke gennem det at matematik anvendes stadig mere og i flere og flere ikke-matematiske sammenhænge (D'Ambrosio, 1989, s.26-27).

H. Banu⁵ fremfører i artiklen "*The importance of the Teaching of Mathematical Modelling in Bangladesh*" (Banu, 1991), nytteargumentet med en anden vægtning, hvilket følgende citat skal belyse: "*The main objectives of teaching mathematics in developing countries like Bangladesh are as follows. ... To encourage the students to develop mathematical models depending on the requirements of the country,...*" (Banu, 1991, s.118). Banu fremhæver, at undervisning i matematiske modeller kan være en hjælp for udviklingslande. Bagved dette må ligge en tro på, at matematiske modeller kan bidrage til udviklingen af økonomisk vækst og dermed i udviklingen af landet. Her er det således nytten for samfundet, der er den vægtige grund til, at de studerende skal undervises i anvendelser og modeller.

Ud fra det foregående skulle det være klart, at nytteargumentet ikke er ét argument, men en samling af mange forskellige argumenter alt efter hvilken "nytte" der fokuseres på. Dette fokus vil også have betydning for hvem og på hvilke uddannelsestrin, feks. folkeskole, gymnasium, redskabsfag i anden uddannelse eller matematikuddannelser, der skal undervises i modeller og anvendelser. Fokuset vil også have betydning for hvilke slags modeller, man vil inddrage i undervisningen.

Der kunne altså meget vel være en sammenhæng mellem, om argumentet lægger vægt på samfundsnytte eller individuel nytte i den ene eller anden forstand, og hvilket uddannelsestrin det er stilet mod. Forskellige vægtninger vil også give argumentet forskellig vægt i forhold til de andre argumenter. Et vægtigt argument for indførelse af modeller i folkeskolen ville således sikkert fokusere på elevernes nytte i hverdagssituationer. Mens et vægtigt argument i gymnasiet snarere ville lægge vægt på samfundsnyttens eller måske på den

⁵H. Banu er tilknyttet University of Dhaka i Bangladesh.

enkeltes nytte af matematiske modeller i videre uddannelse eller fremtidige erhverv.

1.3 Kulturargument

Dette argument har sit udgangspunkt i det syn på matematikken, at anvendelser af matematik er et aspekt af denne. Det følger derfor som en naturlig nødvendighed at medtage disse anvendelser, når man ønsker at give de studerende det fulde billede af matematikken:

“Applications and modelling should be part of the mathematics curriculum in order to:... Establish a representative and balanced picture of mathematics, its character and role in the world - such a picture must encompass all essential aspects of mathematics, and the application of mathematics and mathematical modelling in other areas do form one such aspect” (Niss, 1989, s.23).

Med kulturargument som overskrift prøver vi på at indfange dette arguments to foki. Det ene på matematikkens karakter som en videnskab, der er i samspil med verdenen udenfor eller med andre ord: matematikken som en særskilt *del af kulturen*. Det andet fokus er på matematikkens *rolle i verden*, altså hvordan matematikken er en implicit del i kulturen.

Matematikundervisningen skal ifølge argumentet ikke bare give det indtryk, at matematik er et fag, der kun relaterer sig til sig selv, men også som et fag der benyttes og kan bidrage til forståelsen af sammenhænge i andre discipliner. Argumentet bygger på en overordnet målsætning om, at man med matematikundervisningen ønsker at give den studerende et helstøbt billede af videnskaben matematik. Ud over et kendskab til matematikkens produkter og redskaber skal man også vise de *processer*, der er kendetegnende for arbejdet med matematiske problemstillinger. Undervisning i modellering kan være med til at belyse matematikkens mere eksperimentelle side. Med eksperimentel tænker vi på, at matematik ikke bare bruges i modelleringssituationer, men også skabes - eller i det mindste bliver modificeret, reorganiseret, specialiseret eller på anden måde tilpasset til den bestemte problemsituation. Løsningen bliver ikke bare fundet, den bliver konstrueret. Ved at undervise i modellering kan man derfor opnå en bedre balance mellem produkt og proces (Niss, 1988, s.244). Anvendelser og modeller kan også illustrere, via den før omtalte skabelse af matematik, at der ikke bare er en fremstilling af de forskellige matematiske teorier men flere forskellige udgaver.

Vi mener, at der overordnet kan ligge to ting i at inddrage anvendelser og modeller ifølge kulturargumentet. Anvendelsen af matematik til at løse ikke-matematiske problemer er et væsentligt aspekt ved matematik som videnskab. For at få et nuanceret syn på faget matematik skal de studerende for det første orienteres om dette aspekt, dvs. de skal præsenteres for væsentlige autentiske modeller og anvendelser for at få indsigt i og viden om dette aspekt af matematikken. For det andet må der også ligge det, at de studerende bliver sat til selv at opstille og analysere matematiske modeller, for selv at opnå erfaring med de muligheder og begrænsninger, der ligger i at anvende matematik.

Desuden skal anvendelser og modeller illustrere særtrækkene ved videnskaben matematik, som en implicit del i samfundet. Hvad der kan ligge i dette, vil vi uddybe ved at inddrage D'Ambrosio. D'Ambrosio giver følgende karakteristik af matematik: *"By mathematics we understand the mode of thought which began to take form in Greece some 2.500 years ago...The overall objectives of this mode of thought are, as an etymological analysis would reveal, an art or technique...of understanding, explaining, learning about, coping with, managing, the natural, social and political environment."* (D'Ambrosio, 1989, s.24). D'Ambrosio betegner således matematik som en teknik eller kunst, som er udviklet indenfor bestemte kulturelle grupper til at opfatte, forklare, strukturere mm. den omgivende verden med, og at den dermed har vundet indpas i mange andre videnskaber. For at få de forskellige træk ved matematikkens rolle i verden frem skal de studerende opnå en meta-viden om matematikken. I arbejdet med dette, skal der reflekteres over forholdet mellem faget matematik og omverdenen og til dette er anvendelser og modeller et godt udgangspunkt, da disse giver en god mulighed for at træde udenfor faget og betragte det, når der arbejdes med det indenfor andre discipliner. D'Ambrosio uddyber matematikkens rolle i andre videnskaber yderligere:

"Sociology, political sciences, psychology and even literary fields are joining economics and other subjects traditionally placed among the humanities in claiming credibility through the use of mathematical models. In some cases it is no more than the use of mathematical jargon. But it is the first step in adopting a mathematical way of thought in dealing with their subjects. ... Clearly this is an indicator of how influential mathematics is in modern society. Mathematical thinking has acquired unprecedented prestige. Maybe this is the main reason why mathematics is kept with such intensity as a major school subject." (D'Ambrosio, 1989, s.26).

De andre videnskabelige fagdiscipliner bruger altså matematiske modeller til at opnå "troværdighed" med. Bagved dette må der ligge en opfattelse af, at matematikkens sprog både er brugbart og ideelt til at argumentere med. Matematiske modeller kommer på denne måde til at forme den måde, der bliver argumenteret på indenfor andre fagdiscipliner. Citatet kan derfor illustrere matematikkens samfundsformende evne, som vi omtalte i forbindelse med kritikargumentet. Da D'Ambrosio ikke selv direkte nævner nogle kritiske argumenter, har vi valgt at bruge citatet i forbindelse med kulturargumentet og ikke i forbindelse med kritikargumentet. Men vi vil nævne, at det kunne have været brugt til at illustrere aspekter af kritikargumentet.

Kulturargumentet har sit udgangspunkt i og er centreret om matematikken. Da argumentet er af en sådan karakter, vil nogle tillægge det størst betydning i uddannelsen af professionelle matematikere, der skal have en baggrund for at udføre fagkritik og en mindre i de uddannelser, hvor matematik udelukkende er redskabsfag. Deraf vil argumentet hovedsageligt få betydning på gymnasieniveau ud fra et studieforberedende synspunkt, altså som en matematikundervisning der også skal forberede til en uddannelse som professionel matematiker.

Andre mener, at det er ønskeligt, at den almindelige borger har en indsigt i matematikkens rolle i verden, og at dette så vil kræve mere matematik på de lavere niveauer. Filosofien er, at der skal en stor viden om matematikken som videnskab til for at forstå anvendelser af matematik samt disses begrænsninger og muligheder. Denne indstilling fører i nogle fremstillinger (Blum, 1991) frem til, at kulturargumentet også indbefatter det argument, som vi har kaldt kritikargumentet. Sammenfaldet mellem argumenterne sker, fordi begge argumenter tager udgangspunkt i, at eleverne skal kunne reflektere og have en meta-viden. I nærværende argument skal disse egenskaber bruges til at give et detaljeret og fuldstændigt billede af matematikken, mens egenskaberne i kritikargumentet skal hjælpe til at give et detaljeret billede af matematik i samfundet. Desuden er der det sammenfald mellem argumenterne, at det er af betydning for både kritik- og kulturargumentet at der arbejdes med autentiske modeller i undervisningen.

1.4 Dannelsesargument

Dette argument sigter på, at der med indførelsen af modeller og anvendelser kan bidrages til den studerendes personlige udvikling med nogle nærmere angivne egenskaber:

"Applications and modelling should be part of the mathematics curriculum in order to:... foster among students general creative and problem solving attitudes, activities and competences" (Niss, 1989, s.23).

Det er umiddelbart klart, at *kreativitet* og *problemløsning* er nøgleordene i dannelsesargumentet. Disse to generelle egenskaber kan ifølge argumentet udvikles hos de studerende i matematikundervisningen gennem arbejdet med modeller. Argumentet bygger på troen på, at egenskaber der opbygges indenfor et område, her matematikken, kan overføres og bruges på andre områder og i andre sammenhænge - kaldet "transfereffekt".

Kreativitet og problemløsende adfærd er generelle egenskaber, som al undervisning kan stile mod at udvikle. Hvad der nærmere ligger i disse egenskaber kan ikke aflæses direkte af ovenstående kortfattede udgave af argumentet. I en anden artikel af Blum⁶ og Niss uddybes beskrivelsen med følgende ord: "...overall explorative, creative and problem solving capacities, as well as open-mindedness and selv-reliance." (Blum & Niss, 1989, s.5). Under alle omstændigheder kan forskellige matematik-, samfunds- og læringssyn føre til forskellige tolkninger af dels de specifikke ord "kreativitet" og "problemløsning" og dels helt generelt af, hvad et dannelsesargument kan indeholde. Der er hermed åbent for forskellige drejninger af dannelsesargumentet.

Den målsætning, som dannelsesargumentet bygger på, relaterer sig således hverken specifikt til matematik eller til anvendelser og modellering. Karakteren af dannelsesargumentet er dermed givet ved en fokusering på nogle generelle dannelsesegenskaber, der kan udvikles via matematikundervisningen med anvendelser og modeller som middel. Således ligger der i argumentet en tro på, at arbejdet med virkelige problemstillinger, som de studerende er bekendte med, giver gode muligheder for at de studerende bliver selvsikre og udforskende i forhold til det at lære, og at modelleringsproblemstillinger i særlig grad kan motivere til problemløsende adfærd. Modeller og anvendelser i sig selv er i denne sammenhæng kun væsentlige i den udstrækning, at de kan bidrage til de studerendes personlige udvikling.

Hvis man med udgangspunkt i ovenstående karakteristik ønsker at give argumentet vægt, vil det være nødvendigt at argumentere for, at matematikundervisning i væsentlig grad kan bidrage til en personlighedsudvikling, og at matematiske modeller herunder giver nogle særlige muligheder for en sådan personlig dannelse.

⁶Werner Blum er didaktiker tilknyttet Department of mathematics, University of Kassel, Tyskland.

Ifølge D'Ambrosio (D'Ambrosio, 1989) er modelleringsprocessen selve essensen af kreativitet. Om modelleringsprocessen skriver han: "*This is the very essence of the intelligent inquiry which distinguishes homo sapiens from other species. Hence, modelling is the essential feature of human intellectual behaviour.*" (D'Ambrosio, 1989, s.23). D'Ambrosio beskriver nærmest hele processen omkring arbejdet med modeller som "programmet" for menneskelig erkendelse. D'Ambrosio mener desuden, at inddragelsen af modeller og anvendelser i undervisningen vil åbne for, at matematikken ikke præsenteres som endelig men som et fag med stadig opbygning af viden, og derfor vil befordre en hvis kreativitet af de studerende, som udsættes for undervisningen. D'Ambrosio argumenterer altså for, at modellering i særlig grad kan bidrage til personlig udvikling.

Med mindre man fuldt tilslutter sig D'Ambrosios tanker, mener vi, det er problematisk at fremhæve dannelsesargumentet som det eneste eller som det vigtigste argument for modeller i matematikundervisning. Det er problematisk at argumentere for eksistensen af en generel transfereffekt, og det kan let udarte sig til det klassiske *formaldannende argument*. Gennem tiden har formaldannende argumenter for matematikundervisning haft stor vægt. Med disse mentes at beskæftigelsen med matematik i sig selv skulle sikre udviklingen af generelle egenskaber som kreativitet, logisk tankegang mv. Denne brug af formaldannende argumenter er de fleste efterhånden meget skeptiske overfor (Jensen & Kyndlev, 1994, s.90).

Det vil være mindre problematisk at anskue dannelsesargumentet som et "underordnet" argument, der kan være en betingelse for eller middel til, at intentionen i de øvrige argumenter kan virkeliggøres. For eksempel, hvis ikke de studerende er kreative, problemløsende, selvbevidste mm. i en eller anden udstrækning, er det svært at se, hvordan de feks. kan blive kritiske modelbyggere med et afbalanceret og nuanceret syn på matematikfaget (hensigter med henholdsvis kritik-, nytte- og kulturargumentet). På den måde bliver dannelsesargumentet ikke et hovedargument for indførelsen af matematiske modeller, men et formålstjenstligt følgeargument for de øvrige argumenter.

1.5 Indlæringsargument

Ifølge dette argument vil inddragelse af matematiske modeller i undervisningen gøre de studerendes matematikindlæring mere effektiv.

"Applications and modelling should be part of the mathematics curriculum in order to... assist students' acquisition and

understanding of mathematical concepts, notions, methods, results and topics, either to give a fuller body to them, or to provide motivation for the study of certain mathematical disciplines."
(Niss, 1989, s.24).

Modellernes funktion i undervisningen er dels at virke motiverende for de studerende og dels at medvirke til at give mening til de matematiske begreber, for der igennem at støtte begrebsdannelsen og give en større matematikforståelse.

Argumentet tager udgangspunkt i den studerende og dennes læreproces, og modellerne ses som et vigtigt redskab i den sammenhæng. Det centrale er modellernes værdi som pædagogisk redskab mere end det, at de i sig selv kunne vise noget væsentligt ved matematikken eller samfundet.

Når man mener, at arbejdet med matematiske modeller kan fremme begrebsdannelsen, må det bygge på et synspunkt om, at generelle begreber kan erkendes ud fra konkrete eksempler på deres anvendelse. Konkretiseringen af matematikken i forhold til ikke-matematiske kontekster kan give eleverne mulighed for at gøre konkrete erfaringer med matematikken, ligesom modelarbejdet kan bygge bro til elevernes tidligere erfaringer og dermed støtte dem i at knytte mening til nye matematiske begreber.

På den måde hænger indlæringsargumentet nøje sammen med det *konstruktivistiske* syn på læring⁷. Her er grundsynspunktet netop, at viden er noget den enkelte konstruerer på grundlag af egne erfaringer. Tilegnelsen af matematiske begreber sker altså gennem den enkelte studerendes konstruktion af disse. Arbejdet med matematiske modeller kan give særligt gode muligheder for, at en sådan konstruktion kan finde sted på en hensigtsmæssig måde. I det efterfølgende samspil mellem de studerende indbyrdes og med læreren kan der opbygges en fælles begrebsforståelse, der omfatter en passende del af det matematiske begreb. I artiklen "*Social konstruktivism som grund för matematikundervisning*" (Björkqvist, 1993) fremhæver Ole Björkqvist⁸ en lang række konsekvenser for matematikundervisningen, som følger af et social konstruktivistisk udgangspunkt. Han nævner bla. at "*Det är viktigt för en elev att ha konkrete upplevelser av situationer som kan matematiseras.*"

⁷Konstruktivisme er en generel teori for læring og erkendelse, som findes i forskellige mere eller mindre radikale variationer, og som har fået stor udbredelse indenfor naturvidenskabens og matematikkens didaktik. Grundsynspunktet, at viden konstrueres hos den enkelte, er fælles for dem alle. Den "sociale konstruktivisme" betoner særligt, at de sociale sammenhænge hvori indlæringen foregår, har betydning for den viden som konstrueres.

⁸Ole Björkqvist er professor i matematiske emners didaktik ved Institutionen för lärutbildning, Åbo Akademi, Vasa, Finland.

Begreppsbygning bygger på strukturelle ligheder i erfaringer" (Björkqvist, 1993, s.14). Det er gennem variation af konteksterne, at de matematiske begreber får "livskraft" for eleven, som på den måde får en oplevelse af begrebet som almenlydigt. Derfor bør matematikanvendelser være et vigtigt element i matematikundervisningen (Björkqvist, 1993, s.14).

Det ville nok være en fejlfortolkning at anklage indlæringsargumentet for at påstå, at matematiske begreber kan forstås alene ud fra anvendelseksemppler. I Niss' formulering af argumentet hedder det da også, at modeller og anvendelser skal give en mere fuldstændig forståelse af begreberne. Der er således snarere tale om, at udnytte den komplementaritet der består i, at modellering på den ene side fremmer forståelsen af (og giver "livskraft" til) de anvendte begreber, og på den anden side at forståelse af begreberne er grundlaget for at kunne modellere ikke-matematiske fænomener. Det vigtige er, at arbejdet med modeller giver nogle konkrete erfaringer, som begreberne kan hænges op på, og at dette virker motiverende for indlæringen.

Indlæringsargumentet optræder i Kirsten Hermanns artikel "*A foodproducing factory*" (Hermann, 1989). Kirsten Hermann⁹ beskriver et tværfagligt undervisningsforløb med matematik, biologi, kemi, fysik og geografi. I undervisningsforløbet indgik bla. fabriksbesøg, hvor eleverne stiftede bekendtskab med forskellige matematikanvendelser. Efter afslutningen af forløbet arbejdede klassen på traditionel vis videre med de begreber, som de havde mødt. Herom skriver Hermann:

"The happy ending is, that the students were unusually motivated during the period of follow up: they had seen all the mathematical topics at work in 'the real world'!" (Hermann, 1989, s.246).

For at få den ønskede motiverende effekt er det selvfølgelig ikke uvæsentligt hvilke ikke-matematiske sammenhænge, der hentes modeller fra. Emnet skal så at sige "fange" eleverne. Dette giver sig udslag i, at nogle modeller kan virke motiverende for nogle elever og andre modeller på andre elevgrupper. Læreren kan evt. forbedre muligheden for en bredere motiverende effekt ved at give eleverne nogle fælles erfaringer til at bygge videre på, feks. gennem modelleringsforløb eller ekskursioner, som i Hermanns eksempel.

Indlæringsargumentets betoning af at motivation og konkrete erfaringer er afgørende for begrebsdannelsen, gør det også til et argument overfor nogle

⁹Kirsten Hermann er gymnasielærer og har tidligere været ansat som fagkonsulent i Undervisningsministeriet, Danmark.

af de modargumenter og problemer, som inddragelse af modeller i undervisningen også rejser. Hvis modeller indføres som et ekstra punkt på pensumlisten, rejser det naturligvis problemer mht. tid, prioritering i forhold til andre emner, mv. Men indlæringsargumentet betoner, at modelarbejdet også er en forudsætning for en hensigtsmæssig og effektiv indlæring af det øvrige pensum.

Det er vigtigt at fastholde, at argumentet ikke siger noget om karakteren af modellerne. Kriteriet for modeller er hverken deres eventuelle nytteværdi eller samfundsformende betydning, men kun i hvilken udstrækning de kan motivere og støtte elevernes indlæring af pensummets matematiske begreber.

1.6 Sammenfattende kommentarer

Vi har i det ovenstående gennemgået fem argumenter for hvorfor, man skal inddrage matematiske modeller i matematikundervisningen. Disse argumenter er af forskellig karakter, men nogle af dem overlapper også delvis hinanden. De er ikke indbyrdes modstridende, så et argument udelukker ikke nødvendigvis et andet, men forskellige vægtninger af argumenterne vil afspejle forskellige syn på matematikundervisning og modeller. Inden vi i det følgende ser lidt nærmere på argumenternes indbyrdes sammenhæng, resumerer vi kort de forskellige argumenters udgangspunkter.

Dannelsesargumentet og indlæringsargumentet tager begge deres udgangspunkt i den studerende og henholdsvis dennes personlige udvikling eller læreproces. Nytteargumentet kan have sit udgangspunkt i den studerende eller i samfundet (nytte for den ene eller det andet). Derimod er kritikargumentet alene centreret om samfundet. Mens kulturargumentet er det eneste, der tager udgangspunkt i matematikken, og således fremstår som et argument, der er centreret om at belyse matematikken som en videnskab.

Werner Blum har i sin fremstilling (Blum, 1991) ikke medtaget kritikargumentet som et særskilt argument, men ser det som indeholdt i de andre, specielt i kulturargumentet. Nytteargumentet og kulturargumentet kan da også begge siges at have kritiske perspektiver. Nytteargumentet går bla. på, at den enkelte ville få bedre handlemuligheder i forhold til ikke-matematiske problemer gennem erfaringer med matematiske modeller, og her i kan ligge en kritisk dimension. Derudover vil vi mene, at det ofte vil være relevant at foretage en kritisk vurdering af eventuelle interne problemer i modellen og af modellens gyldighedsområde i forhold til virkeligheden, hvis matematikken - i form af matematiske modeller - skal være nyttig.

Kulturargumentet for inddragelse af modeller i undervisningen kan ligeledes tolkes kritisk. Synspunktet, at autentiske modeller er væsentlige for at få et nuanceret billede af, hvad matematik er som videnskab, lægger også op til en generel-refleksion over, hvordan matematik indgår i samfundet og i forholdet til andre videnskaber, og hvad der er modellernes styrker og svagheder. Det kan tolkes kritisk/demokratisk, men kan også angå en mere snæver intern modelkritik.

Når vi vælger at medtage kritikargumentet som et argument for sig - selv om det netop er illustreret, at det kunne indgå i de andre argumenter - er det fordi, det fremhæver nogle væsentlige argumenter for inddragelse af modeller i undervisningen, som ikke nødvendigvis indeholdes i de øvrige argumenter. Særligt matematikkens samfundsformende funktioner er ikke noget, de andre argumenter umiddelbart tager op. Argumentet understreger dermed matematikundervisningens demokratiske forpligtelse på en langt mere direkte måde end de øvrige. Man kan sige, at kritikargumentet på en måde implicerer nytteargumentet, således at det er fordi matematikken er "nyttig" for samfundet på en sådan måde, at det får samfundsformende betydning, at kritikargumentet får sin vægt.

Man kan sige, at kritikargumentet også indeholder en kritik af nytteargumentets tilstrækkelighed. Hermed mener vi den omstændighed, der påpeges af Niss, at den individuelle nytteværdi ikke kan begrunde en udstrakt undervisning i matematiske modeller, da det trods alt er ret få, der i deres fremtidige liv får brug for selv at anvende matematik på mere avanceret niveau (Niss, 1984, s.23). Nytteargumentet kan i den forbindelse kun begrunde undervisningen for disse få fremtidige anvendere, hvorimod kritikargumentet lægger vægt på nødvendigheden af, at så mange som muligt får mulighed for at kunne "se eksperterne i kortene", og det kræver en udstrakt matematikundervisning med fokus på modeller og anvendelser. På den måde fremhæves det også, at man ikke nødvendigvis skal være ekspert for at kunne tage kritisk stilling til modelanvendelser.

Vi er stødt på en begrundelse for at indføre modeller, der ikke direkte kan relateres til ét bestemt af de fem argumenter. Det er et argument for at inddrage modeller i undervisningen for at synliggøre de samfundsmæssige og videnskabelige anvendelser af matematikken. Bag dette argument ligger der et ønske om at overvinde det problem, at alle ved at matematik er vigtigt, men at ingen ved hvorfor. Vi vil benævne dette *synliggørelsesargumentet*.

Synliggørelsen af matematikken er naturligvis en implicit forudsætning i både nytteargumentet, kritikargumentet og kulturargumentet. Synliggørel-

sesargumentet bygger ligesom disse tre også på, at matematiske modeller er nyttige og i udstrakt grad anvendes i samfundet. Det adskiller sig fra feks. nytteargumentet ved, at de studerende ikke nødvendigvis selv skal kunne praktisere modellering; det er muligvis tilstrækkeligt, at de er orienteret om, at matematik er vigtigt og nyttigt. Man kunne godt diskutere om det skulle have sin egen plads, idet vi kan finde eksempler på synliggørelsesargumentet, hvor det ikke knyttes direkte sammen med nogen af de øvrige argumenter. Kirsten Hermann lægger i sin artikel, "*A Foodproducing Factory*" stor vægt på, at matematikkens funktion i samfundet skal synliggøres. Et af de overordnede mål med undervisningsforløbet er "*.. to give the students involved some insight into the use of science (as taught in school) in the 'real world'*" (Hermann, 1989, s.244). Synliggørelsen har i forløbet karakter af et ret indgående kendskab til hvordan forskellige matematiske redskaber er væsentlige for produktionen på den margarinefabrik, som er elevernes studieobjekt. Denne erfaring, påpeger hun, er meget væsentlig for den matematiske opfølgning på projektet, hvor de berørte matematiske redskaber gennemgås mere teoretisk. Synliggørelsen er stærkt motivation- og relevansskabende for eleverne, og på den måde bliver det faktisk mest anvendt som et indlæringsargument. Men udgangspunktet er dog stadig, at matematik (og andre fag) har væsentlige anvendelser i samfundet, og det er det, som skal synliggøres, der er ikke blot tale om lokale eksempler, der kan konkretisere det ene eller andet matematiske begreb. Derfor kan det heller ikke siges at høre under indlæringsargumentet alene.

Når man ser de fem argumenter under et, er det klart, at dannelsesargumentet og indlæringsargumentet har en anden karakter end de øvrige - de befinder sig på et andet niveau. Hvis man argumenterer ud fra nytte, kultur og/eller kritik, vil indlæringsargumentet og dannelsesargumentet ofte være "afledte" argumenter, der skal give den motivation, relevans og positive, problemløsende tilgang mm., som er en forudsætning for at intentionen i de andre, mere væsentlige argumenter kan opfyldes. Vi mener også, at der i dannelsesargumentet kan ligge kritisk demokratiske elementer, men de angår arbejdsformen og ikke indholdet. Dvs. hvis man underviser i matematik ud fra en kritisk demokratisk målsætning, så vil man naturligvis lægge stor vægt på kritikargumentet for inddragelse af modeller, men det vil/bør spille sammen med dannelsesargumentet for at udvikle en arbejdsform, som fremmer kritik, demokrati mm. som konkret handling i undervisningen.

Selvom vi nu har kategoriseret indlæringsargumentet og dannelsesargumentet, som nogle mindre væsentlige argumenter, er det værd at fremhæve, at de i den konkrete undervisningssituation meget vel kan forekomme at

være de tungeste. Når man står som lærer med et fastlagt pensum, vil de store problemer sandsynligvis være, hvordan man sikrer, at eleverne faktisk lærer stoffet, og hvordan man får en positiv og konstruktiv undervisningsform, som giver eleverne gode erfaringer med matematikfaget. Herved får de målsætninger der er indeholdt i indlæringsargumentet og dannelsesargumentet naturligvis en stor betydning. Når vi karakteriserer dem som mindre væsentlige, er det fordi de alene ikke giver så tunge argumenter for *hvorfor* netop modeller skal have en central placering i matematikundervisningen. Anvendt sammen med de øvrige argumenter har dannelses- og indlæringsargumentet dog en stor vægt.

Til sidst vil vi nævne, hvordan argumenterne overordnet er præget af et bestemt syn på, hvordan der kan undervises. Dels må argumenterne indeholde en tilslutning til *eksemplarisk undervisning* som mulig pædagogisk metode. Gennem det at beskæftige sig med nogle eksempler på matematiske modeller, mener man, at de studerende kan erhverve sig nogle generelle modelkompetencer. Dels kan man se, argumenterne har en holdning til undervisning om, at den skal være praksisorienteret og give konkrete redskaber, som kan bruges udenfor det specifikke fag, dvs. ikke udelukkende videnskab for videnskabens skyld.

Vi skulle nu have belyst de overordnede argumenter for at inddrage modeller i matematikundervisningen. Dette skal danne baggrund for de videre kapitler, der omhandler det andet niveau i didaktikken, dvs. *hvad* det nærmere er, der skal undervises i. Vi vil derfor nu vende os mod en behandling af, hvad det er, man skal *kunne* for at arbejde med modeller.

Kapitel 2

Opbygning af kompetencebegrebsapparatet

Vi har tidligere set på argumenterne for, hvorfor man skal inddrage matematiske modeller i matematikundervisningen. Hvad er det så, man ønsker at opnå med sådan en undervisning? Hvad er det for viden og kompetencer, der skal udvikles, for at undervisningen rent faktisk lever op til de begrundelser, der er fremført i argumenterne?

I artiklen "*Aims and Scope of Applications and Modelling in mathematics Curricula*", hvorfra vi også citerede argumenterne, har Mogens Niss givet et bud på, hvordan "hvad-spørgsmålet" kan besvares:

- "(1) Students may acquire knowledge of*
(a) existing models and applications of mathematics - this may include knowledge of different categories of models, classified according to mathematical characteristics regarding the different applicational areas to which the models refer;
(b) characteristics of the modelling process, either in general or with respect to situations which are new to them;
(2) Students may perform modelling themselves, either by
(a) applying models known to the students to situations which are new to them; or by
(b) building new (to the students) models, or modifying known ones.
(3) Students may critically analyse and assess models, existing ones or models they have constructed themselves with respect to
(a) their mathematical properties (work inside the model); or to
(b) the properties, qualities and bases of justification of the models as representations of given segments of reality." (Niss, 1989, s.28).

De forskellige indholdselementer vil blive tillagt forskellig vægt alt efter situationen. For eksempel vil den enkelte lærers prioritering af punkterne dels afhænge af, hvilke af argumenterne vedkommende tilslutter sig, og dels af hvilket undervisningstrin, han betragter.

Men selv med disse punkter er det ret uklart, hvad det er de studerende skal lære. Hvad skal der til for at man kan modellere? Eller kritisere?

I undervisningen vil man altid arbejde med eksempler på modeller, som vil være specielle på hver deres måde. Der vil eksempelvis opleves store forskelle på at arbejde med henholdsvis astronomiske modeller for stjerners opbygning og en matematisk model til at sammenligne rentabiliteten af forskellige investeringer i energiteknologi. Både arten af modellernes genstandsfelt, arten af modellens formål og arten af ens arbejde med modellen (opstilling, analyse eller kritik, mv.) vil have betydning for, hvad der kræves, for at man kan behandle dem, og for hvilke kompetencer modelarbejdet kan udvikle. Når det alligevel giver mening at sætte "modeller" som sådan på programmet både i videnskabsteoretiske diskussioner og i undervisningsmæssige sammenhænge, så er det selvfølgelig fordi der er nogle generelle træk ved modeller, de problemer de giver anledning til, og de kompetencer, der kan udvikles, fordi de er nødvendige i arbejdet med dem. Som vi så det i kapitel 1, bygger de fleste af argumenterne for modeller også på den antagelse, at der eksisterer sådanne generelle modelkompetencer, som en eksemplarisk undervisning i modeller kan udvikle.

Før vi begynder at beskrive de forskellige modelkompetencer, vil vi definere, hvad vi mere præcist lægger i begrebet *kompetence*. *Kompetence* bruges på flere måder i daglig tale. For eksempel om det at have bemyndigelse eller berettigelse til at tage beslutninger, eller forhandle på andres vegne. Men en kompetent person er også én, der har en evne til at gøre noget. Det er nærmere sådan, vi vil bruge ordet. Det skal imidlertid pointeres, at vi i vores brug af begrebet *evne* ikke hentyder til, at denne skulle være en medfødt evne.

Kompetence: evne til at kunne sætte en nærmere afgrænset viden og erfaring i sving i nye situationer.

En person, der mestrer en given kompetence, vil være i stand til at udføre forskellige aktiviteter. Vel at mærke aktiviteter, som bygger på viden og erfaringer. Vi vil ikke gå i dybden med henholdsvis *videns-* og *erfaringsbegrebet* men kort præcisere, hvordan vi skelner mellem viden og erfaringer: Erfaringer opbygges på baggrund af aktiviteter, mens viden kan tilegnes på en mere passiv facon. Det er altså muligt at tilegne sig viden blot ved at læse en bog eller ved at lytte til en anden person. Med denne skelnen siger vi samtidig, at det

er nødvendigt, at de studerende bliver aktiveret i undervisningssituationer for at de kan tilegne sig kompetencerne.

I læringssituationen vil en given aktivitet både være et udtryk for kompetencen og medvirke til at udvikle kompetencen. Denne komplementaritet er karakteristisk for tilegnelsen af kompetencerne og den stadige progression i kompetencen hos den studerende. I praksis er der selvfølgelig ingen garanti for, at kompetencerne altid vil udvikle sig i positiv retning. Man kan meget vel tænke sig undervisningsforløb, der i stedet for at kvalificere en given kompetence har den modsatte effekt.

Det man skal lære for at erhverve sig modelkompetencer er således, som også Mogens Niss fremhæver i de tre citerede punkter, dels noget *viden* og dels noget *kunnen*. Det kan være viden om modeller og modelleringsprocessen, om de nødvendige matematiske teorier og metoder eller viden om det område som skal modelleres. De forskellige former for viden opfatter vi som nødvendigt grundlag for kompetenceaktiviteterne. Vi tillægger derfor kompetencerne et *vidensindhold*. Vores kompetencebegreb indeholder således både, hvad det er man skal kunne og hvad man skal vide.

Kompetencerne, som vi har valgt under et at betegne som *modelkompetencer* for at understrege, at de er knyttet til arbejdet med *både* opstilling og analyse af matematiske modeller, har vi givet følgende betegnelser:

- Struktureringskompetence
- Matematiseringskompetence
- Afmatematiseringskompetence
- Modelløsningskompetence
- Valideringskompetence
- Kommunikationskompetence
- Strategikompetence
- Refleksionskompetence
- Kritikkompetence

Kompetencerne er udskilt på baggrund af litteraturstudier af matematikdaktikers arbejder. Man kan således tale om, at begrebsapparatet har en

videnskabsteoretisk basis. De første seks kompetencer er hovedsageligt fremkommet ved studium af modelleringsprocessens overordnede trin, mens de sidste tre kompetencer har basis i Alan Schoenfelds¹ og Ole Skovsmoses² arbejder. Dette forhold betyder, at de tre sidstnævnte kompetencer har en anden status end de første seks kompetencer: De første seks kompetencer, dvs. struktureringskompetencen, matematiseringskompetencen, afmatematiseringskompetencen, modelløsningskompetencen, valideringskompetencen og kommunikationskompetencen kan relateres til bestemte trin i modelleringsprocessen. Dette kan ikke siges om de tre sidste kompetencer. Strategikompetencen, refleksionskompetencen og kritikkompetencen benyttes i samspil med de andre kompetencer og har således et bredere udfoldelsesrum. De ni kompetencer er derfor ikke logisk adskilte størrelser, men er afhængige af hinanden i et omfang, som vil blive præciseret nærmere.

Vores bestræbelse er, at de opstillede kompetencer skal udspænde de typer af aktiviteter, der forekommer ved modelarbejde. Vores påstand er, at vi med denne liste rammer de *centrale* og i vid udstrækning *generelle* kompetencer. Dette betyder, at vi hverken mener, at listen med de ni kompetencer med rimelighed kan forlænges eller forkortes. Vi tror altså på, at det ikke ville være muligt at udbygge med andre kompetencer, der ville være ligeså relevante og centrale som de nævnte. Med andre kompetencer tænker vi på kompetencer, der dækker over aktiviteter, som ikke allerede var inkluderet i en af de ni kompetencer. Ligeledes mener vi heller ikke, at nogle af kompetencerne helt kan stryges - vi mener altså ikke, at nogle af kompetencerne er irrelevante. Det er på den anden side klart, at den præcise skæring sagtens kunne være anderledes. Man kunne feks. sammenlægge nogle af vores kompetencer, eller omvendt opdele nogle af dem yderligere. Vi mener dog, at andre skæringer overordnet ville dække over de samme aktiviteter, som hele vores begrebsapparat gør tilsammen. Man kunne sige, at vi har valgt et begrebsapparat med et forholdsvis stort antal kompetencer. Vi mener imidlertid, at alle kompetencer dækker overfor forskellige vigtige aspekter ved matematisk modellering. Det store antal kompetencer kan dermed medvirke til at sætte fokus på mange forskellige nuancer ved matematisk modellering.

Da modelleringsprocessen er en del af begrebsapparatets teoretiske grundlag lægger vi i dette kapitel ud med en gennemgang af strukturen i en fuld model-

¹Alan Schoenfeld er ansat ved School of Education, Department of Mathematics, University of California-Berkeley, USA.

²Ole Skovsmose er lektor ved Aalborg Universitetscenter. Han forsker indenfor matematikkens didaktik.

leringsproces. Herefter følger et eksempel på en modelopbygning. Eksemplet er en *overbookingmodel*, der skal belyse baggrunden for, at luftfartselskaber ofte overbooker flyvninger. Overbookingmodellen skal dels fungere som illustration af modelleringsprocessen og dels benyttes i den følgende gennemgang af de ni modelkompetencer. I præsentationen af modelkompetencerne beskriver vi de generelle træk ved de enkelte kompetencer og giver nogle eksempler, på hvilke aktiviteter kompetencerne kan give sig udslag i. Disse eksempler henter vi fra overbookingmodellen og deres funktion er at nuancere beskrivelserne af kompetencerne og dermed give kompetencerne et mere konkret indhold.

Efter beskrivelsen af de enkelte kompetencer diskuterer vi selve kompetencebegrebets status og indhold. Dette gør vi ved at forholde det til Karsten Schnacks³ begreb *handlekompetence* (Schnack, 1993).

Alan Schoenfeld og Ole Skovsmose har som nævnt været inspirationskilder til tre af kompetencerne. Derfor inddrager vi henholdsvis Schoenfelds begreb *Mathematical thinking* (Schoenfeld, 1992) og Skovsmoses begreb *Reflective knowing* (Skovsmose, 1994). Diskussionen af deres teorier i forhold til vores ni kompetencer har endvidere karakter af at være en *teoretisk test* af hele begrebsapparatet. I den teoretiske test undersøger vi, om vores begreber giver mening i forhold til deres, om der er uenigheder eller modstrid mellem begreberne, og afklarer hvilke nye punkter vores begreber kan bibringe med. Formålet med at sammenligne vores begreber med Schoenfelds og Skovsmoses teorier er at gøre indholdet af vores begrebsapparat mere klart.

Derefter følger et afsnit om modeltyper. Modeltypeviden er et centralt aspekt af kompetencernes vidensindhold. Gennem en diskussion af, hvordan forskellige modeltyper kan have indflydelse på modelkompetencernes indhold, ønsker vi derfor at nuancere beskrivelserne af kompetencerne yderligere.

Afrundingsvis forholder vi modelkompetencerne til argumenterne fra det første kapitel. Dette gør vi for at belyse hvilke af kompetencerne argumenterne lægger op til, at undervisningen i matematiske modeller skal udvikle.

2.1 Strukturen i modelleringsprocessen

Gennemgangen af modelleringsprocessen er en idealiseret fremstilling. Grundlæggende bygger den på den ide, at der er en struktur i processen, samt at der er en rationel bevæggrund for opstillingen af modellen. Sidstnævnte vil

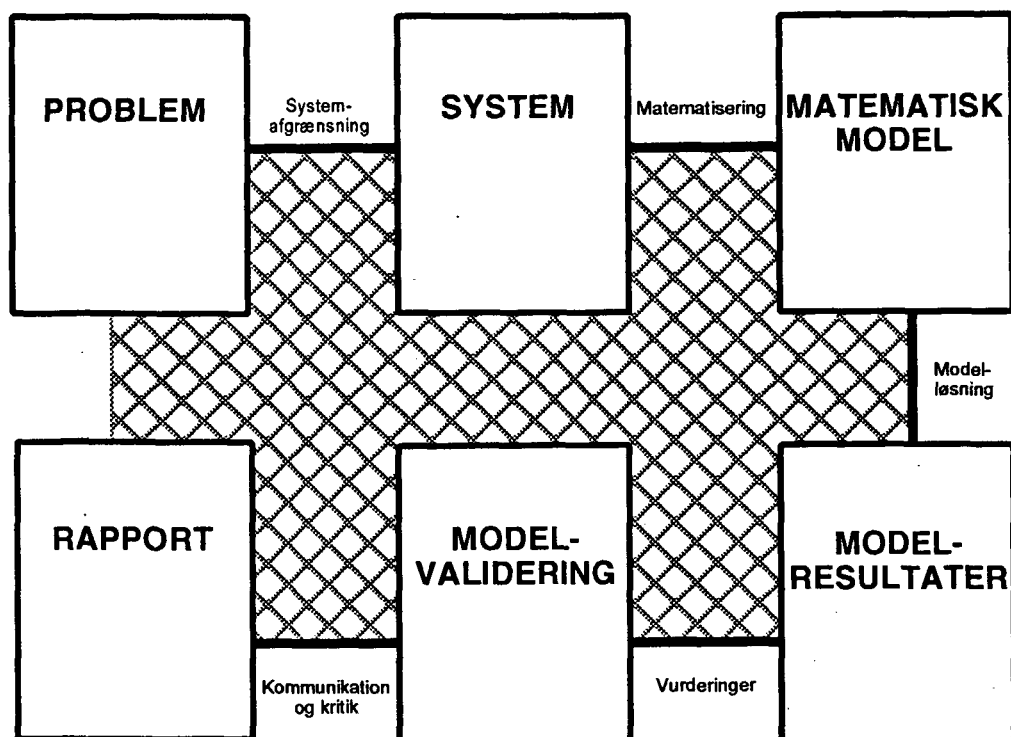
³Karsten Schnack er professor i didaktik og metodik ved Danmarks Lærerhøjskole.

oplagt ikke altid være tilfældet; forskellige interesser og magtforhold vil ofte have indflydelse på, hvordan processen og de indgående aktiviteter udfolder sig. Hvis interessen i modelopbygningen feks. er at skabe konsensus om det modellerede problemfelt, vil en stor del af modelleringen bestå i at tage højde for forskellige interessegrupperingers vurderinger og i at justere modellen i forhold hertil (Madsen & Andersen, 1991). Interesser kan altså have en stor indflydelse på hele modelleringsprocessen. Disse såkaldte irrationelle faktorer vil vi imidlertid se bort fra i første omgang. (Fremstillingen er hovedsageligt baseret på (Blomhøj, 1992; Skovsmose, 1990b; Clements, 1989).)

På figur 2.1 er strukturen af modelleringsprocessen skitseret. I kasserne er resultatet af de enkelte trin angivet, og i overgangen mellem kasserne er der angivet hvilke aktiviteter, der skal foretages for at komme dertil. Strukturen viser således hvilke *aktiviteter* og *produkter*, der hører med til en fuld modelleringsproces. Illustrationen antyder en vis grad af lineær proces - med start i *problemkassen* i øverste venstre hjørne og slut i *rapportkassen* i nederste venstre hjørne. Dette forløb skal imidlertid ikke opfattes for bogstaveligt. I konkrete modelleringsprocesser vil modelbyggeren gå frem og tilbage mellem trinene, og der vil ofte blive arbejdet samtidigt med forskellige trin. Som det også er illustreret på figuren skal man derfor forestille sig et kompliceret net af forbindelser mellem de forskellige trin i modelleringsprocessen. For anskueligheden skyld vil vi dog gennemgå strukturen trin for trin.

Udgangspunktet for en modelleringsproces er et *problem*. Det første, der skal gøres, er således at få dette præciseret, så det kan behandles matematisk. Problemet vil være indlejret i et udsnit af virkeligheden. Der er en række opfattelser af det pågældende virkelighedsudsnit, som kan være en kombination af teorier, erfaringer og mere eller mindre velbegrundede forestillinger. Den valgte synsvinkel på virkelighedsudsnittet præciserer problemet. Dette sker i samspil med en given interesse, der overordnet kan være af erkendelsesmæssig eller handlingsorienteret karakter. Det kan altså være et ønske om at opnå større viden om et givent område, der styrer processen, eller et ønske om at kunne foretage handlinger på baggrund af modelresultaterne (Skovsmose, 1988, s.12). Det er således klart, at modelleringen er afhængig af den modellør, som tolker problemet og virkelighedsudsnittet.

Når problemet er præciseret, foretages der en *systemafgrænsning*. Denne har som mål at udvælge de størrelser, der er essentielle i forhold til problemformuleringen og at bestemme hvilke indbyrdes relationer, der er af afgørende betydning. Både virkelighedsudsnittets og problemets udseende, samt viden om det matematiske beredskab der skal bruges efterfølgende, vil være afgørende for hvilke krav, der nærmere stilles i systemafgrænsningen. Overordnet bliver systemafgrænsningen foretaget ud fra et krav om simpelhed, der mulig-



Figur 2.1: Strukturen af modelleringsprocessen. Resultatet af de enkelte trin i processen er angivet i kasserne. I mellemrummene er der angivet hvilke aktiviteter, der fører frem til de forskellige trin. Det underliggende net af streger skal illustrere, at de enkelte trin i modelleringsprocessen er relateret til hinanden på kryds og tværs. Kasserne er placeret således, at de to kasser, der er placeret over hinanden, kan siges at tilhøre det samme univers. *Problem* og *rapport* kan relateres til den virkelige verden; *system* og *modelvalidering* kan relateres til en slags systemverden imellem den virkelige og den matematiske verden, og *matematisk model* og *modelresultater* kan relateres til det matematiske univers.

gør videre trin, men som dog ikke forsimpler problemet så meget, at afgørende faktorer bliver skåret bort.

Herefter udtrykkes de valgte størrelser og relationer matematisk. Denne aktivitet benævnes ofte *matematiskering*. Den består som regel i at opstille ligninger, hvor de udvalgte størrelser defineres som parametre eller variable, og relationerne er udtrykt ved kendte funktioner. Her er det afgørende, at man får opstillet et udtryk, der kan give det ønskede resultat. Matematiskeringen foretages således på baggrund af problemformuleringen og interessen.

Resultatet af matematiseringen er det, der tit opfattes som den egentlige matematiske model - forstået som et *symboludtryk*, hvor symbolerne både henviser til matematiske begreber og til noget udenfor matematikken selv.

Den næste fase angår løsningen af modellen. Den matematiske model er principielt tilgængelig for en analyse. I en del situationer vil analytiske beregninger dog enten være for tidskrævende eller slet ikke mulige at udføre. Således vil det ofte være nødvendigt at udføre numeriske beregninger for at opnå løsninger af modellen. I denne fase drejer det sig om at vurdere hvilke resultater, der kan udledes af modellen, som vil være interessante i forhold til problemformuleringen, og hvordan disse resultater kan produceres.

Før resultaterne benyttes, skal de vurderes. Det kan være matematiske vurderinger, som beregninger af afvigelser som den valgte matematisering har medført, og det kan være sammenligning med empiriske data. Disse vurderinger resulterer i en overordnet *validering* af hele modellen. Hertil skal der medtages vurderinger af de valg, der er foretaget på tidligere trin i processen. Alt efter resultatet af valideringen er næste trin at overveje modelresultaterne i forhold til udgangsproblemet. Hvis man har opnået tilstrækkeligt pålidelige resultater, vil processen foreløbigt munde ud i enten øget erkendelse eller en given handling alt efter den implicerede interesse.

Til slut skal resultaterne nedskrives, så de er tilgængelige for andre. Til denne del af processen er det nødvendigt med nogle refleksioner over det forløb, som har ført frem til model og resultater; herunder også overvejelser om interessernes indflydelse på forløbet. Desuden vil det være oplagt at supplere med kommentarer om hvilke begrænsninger, der ligger i modellen og dens resultater, da disse vil have betydning for modellens anvendelser.

Som nævnt i starten er den beskrevne lineære proces ikke i overensstemmelse med virkelige modelleringsprocesser. For eksempel vil det være svært fra start at overskue alle de elementer, der viser sig at være nødvendige. En anden omstændighed er, at matematiseringen ofte vil kræve, at man går tilbage til systemafgrænsningen og foretager nye idealiseringer og simplifikationer. Problemer med at opnå relevante resultater af en opstillet model vil ligeledes føre til, at man går tilbage i processen. I mange tilfælde vil der endvidere være tale om, at man bygger videre på en anden model. Her springer man så midt ind i processen og er nødt til at analysere sig frem til, hvilke valg der ligger bag den pågældende model.

Vi vil nu konkretisere beskrivelsen af modelleringsprocessen ved at gennemgå opbygningen af en matematisk model. Denne model vil endvidere blive brugt som eksempel i den efterfølgende beskrivelse af kompetencerne.

2.1.1 Modeleksempel: Overbooking af fly

En del mennesker vil enten selv have oplevet - eller have kendskab til andres oplevelser af - at møde op til en flyafgang med billetten i hånden i sikker forvisning om, at alt er i orden og så til stor forundring blive afvist, da flyet allerede er fyldt op. Dette afføder naturligt nok megen vrede, men også en del forundring. For hvordan kan det dog være, at flyselskaber ikke kan finde ud af at booke det rigtige antal passagerer? Umiddelbart skulle det ikke være så vanskeligt, da der jo er et vist antal sæder i flyet.

Den overordnede forklaring på at flyselskaber vælger at overbooke er, at der til de fleste flyafgange er bookede passagerer, der ikke møder op. Det gælder særligt passagerer, der har en billettype, som uden ekstra betaling kan bruges til en anden afgang. Uden overbooking ville dette medføre tomme sæder i flyene, som ikke gav nogen indtjening til selskabet. Ulempen ved overbooking er imidlertid at flyselskaberne risikerer at måtte afvise et antal passagerer. Hvad dette betyder for selskabet er ikke så ligetil at sætte tal på. Der vil selvfølgelig være tale om konkrete erstatningsbeløb, men det er mere uklart, hvad det feks. betyder for selskabets renommé.

I "*Why airlines sometimes overbook flights*" (Clements, 1990) gennemgår Dick Clements⁴ opbygningen af en model, der skal belyse de overvejelser, der ligger bag luftfartselskabers beslutning om generelt at overbooke flyvninger. Modellen opbygges trinvis. Clements starter med en meget simpel model og udbygger den så gradvist i tre omgange. Før hver udbygning undersøger han, om den foreløbige model svarer intuitivt til "virkeligheden", og præciserer hvilke mangler den har. Vi vil nøjes med at gennemgå de 3 første modeludgaver grundigt og blot skitsere principperne i den sidste udbygning, da vi ikke mener, den sidste udbygning giver nogle væsentlige nye pointer til vores fremstilling.

Den første simple model

I første omgang opbygger Clements en simpel model over flyselskabers profit ved en underbooket flyvning, dvs. i en "verden" hvor der ikke overbookes.

De indgående elementer er:

⁴Dick Clements er tilknyttet Department of Engineering Mathematics, University of Bristol, England.

- S = flyselskabets udbytte af en flyvning
 N = passagerkapacitet i flyet
 n = antal passagerer på en flyvning
 g = billetpris pr. passager
 f = udgifter ved at udruste og udføre en flyvning

I den simple model antager man, at alle betaler den samme pris for billetten. Der skelnes altså ikke mellem 1. klasse, turistklasse, business class eller andet. I f -parameteren, der angiver de samlede udgifter ved udførelsen af en flyvning, vil der indgå faktorer, som udgifter til brændstof, løn til piloter, kabinepersonale mfl., lufthavnsafgifter og meget mere. Udgifterne opfattes som værende uafhængige af antallet af passagerer, da en del af de nævnte udgifter ikke varierer væsentligt ved varierende passagerantal.

Udbyttet, S , kan så udtrykkes som flyselskabets indtægter ved billetsalg, ng , fratrukket deres udgifter, f . Den simple model bliver derfor:

$$S = ng - f$$

Af modellen kan man umiddelbart sige, at *højere billetpris, flere passagerer eller lavere udgifter* vil give større udbytte, hvilket jo umiddelbart lyder fornuftigt nok. Med faste udgifter og faste flypriser opnås den største profit med et fuldt fly, $n = N$: $S = Ng - f$. Den simple matematiske model stemmer altså udmærket overens med den systemverden, der er afgrænset. Modellen er imidlertid for simpel til at sige noget om den overordnede problemstilling, da den ikke rummer mulighed for at beregne omkostningerne ved at afvise passagerer.

Første udbygning af den simple model

Første udbygning medtager yderligere følgende elementer:

- k = antal passagerer, der ikke møder op til en flyvning
 P_k = sandsynligheden for at netop k personer ikke møder op
 m = antal passagerer booket på et fly
 \bar{S} = forventet profit

Antallet af passagerer, der er booket på et fly, m , kan i denne model overstige flyets kapacitet N . Alle passagerer har en billet, som kan bruges til en anden flyafgang uden ekstra betaling. Dette betyder, at flyselskabets indtjening på netop den flyvning bliver reduceret pga. k ikke-fremmødte. Flyselskabets profit kan nu udregnes på følgende måde, for netop k ikke-fremmødte:

$$\begin{aligned}
 S &= (m - k)g - f && \text{hvis } m - k \leq N \\
 &= Ng - f && \text{hvis } m - k > N
 \end{aligned}$$

Øverste ligning angiver det tilfælde, hvor antallet af fremmødte, $m - k$, er mindre end eller lig flyets kapacitet, dvs. det tilfælde, hvor alle fremmødte får en plads i flyet. I dette tilfælde undgår flyselskabet altså at afvise passagerer, selv om de har overbooket, fordi antallet af ikke-fremmødte er stort nok. Nederste ligning angiver det tilfælde, hvor antallet af fremmødte overstiger antallet af sæder, altså der hvor nogle må afvises ved indcheckning. Modellen angiver her indtægten til Ng , dvs. at det antages, at flyselskabet på netop den pågældende flyvning mister billetindtægterne fra alle dem, de må afvise. 1. modeludbygning er imidlertid ikke færdig her. Et flyselskabs profit vil afhænge af antallet af passagerer, der ikke møder op. Det præcise antal af ikke-fremmødte, kan de imidlertid ikke vide på forhånd. Det bliver derfor nødvendigt at opstille et udtryk for profitten, der afhænger af hvor mange ikke-fremmødte, der forventes. Dette benævnes *det forventede overskud*, \bar{S} :

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \sum_{k=0}^m P_k [\text{overskuddet fra en flyvning med } (m - k) \text{ passagerer}] \\ &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (Ng - f) + \sum_{k=m-N}^m P_k [(m - k)g - f]\end{aligned}$$

Antallet af passagerer, som ikke møder op, k , opfattes som en tilfældig hændelse. Det forventede overskud beregnes altså ved at summere over overskuddet ved alle mulige værdier af k ganget med sandsynligheden for det pågældende tilfælde. Første led i nederste ligning angiver de tilfælde, hvor flyet er fuldt. I disse tilfælde bliver der afvist passagerer, fordi antallet af fremmødte $(m - k)$ overstiger N . Andet led i nederste ligning angiver de tilfælde, hvor antallet af fremmødte ikke overstiger antallet af sæder.

Hvis flyselskabet ikke overbookede, dvs. hvis $m < N$, ville første led forsvinde i ovenstående. Det antages imidlertid at flyselskabet gør dette, hvorfor begge led skal med. Ovenstående omskrives for at gøre udtrykket mere overskueligt:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \sum_{k=0}^m P_k (Ng - f) + \sum_{k=m-N}^m P_k [(m - k)g - f - (Ng - f)] \\ &= (Ng - f) \sum_{k=0}^m P_k + \sum_{k=m-N}^m P_k (m - N - k)g\end{aligned}$$

Da $\sum_{k=0}^m P_k = 1$ pr. definition, fås:

$$\bar{S} = Ng - f + g \sum_{k=m-N}^m P_k (m - N - k) \quad (2.1)$$

I det sidste udtryk summeres der fra $k = m - N$, således vil $(m - N - k)$ altid være ikke-positiv, idet $k \geq m - N$. Det forventede overskud vil derfor ikke overstige $Ng - f$. For at gøre overskuddet størst muligt gælder det ifølge modellen om at mindske det negative led; $g \sum_{m-N}^m P_k(m - N - k)$. Dette opnås ved at hæve antallet af bookinger, m , til betydeligt mere end N . Jo større m vælges, jo mindre bliver hver enkelt af de sandsynligheder, som indgår i summationen. Ledet $(m - N - k)$ vil i alle tilfælde antage værdierne mellem 0 og $-N$.

Ifølge modellen skal flyselskabet altså hæve antallet af bookinger for at optimere profitten. Da det gælder om at få fyldt flyet og chancen for at opnå dette nødvendigvis må stige jo flere personer, man booker på en afgang, virker dette resultat intuitivt fornuftigt. Eftersom modellen ikke medregner de udgifter, der er forbundet med at afvise passagerer, kan selskabet teoretisk set booke uden at bekymre sig om utilfredse kunder og resultatet bliver derfor ifølge modellen, at selskabet opnår større profit jo mere det overbooker.

Denne model mangler altså at medregne flyselskabets tab ved at afvise passagerer. Disse tab kan dreje sig om direkte udgifter til indkvartering, måltider mm. eller om tab forårsaget af en forværing af selskabets renommé. Der er heller ikke i modellen nogen metode til en nærmere bestemmelse af P_k . Den næste model medtager disse omstændigheder.

En bedre model

Der medtages følgende nye elementer:

b = udgift ved at afvise en passager

\bar{k} = forventet antal ikke-fremmødte

p = sandsynligheden for at én passager møder op

q = sandsynligheden for at én passager ikke møder op

Profitten kan nu udtrykkes ved præcis k ikke-fremmødte:

$$\begin{aligned} S &= (m - k)g - f && \text{hvis } m - k \leq N \\ &= Ng - f - (m - k - N)b && \text{hvis } m - k > N \end{aligned}$$

Øverste ligning, som angiver det tilfælde, hvor alle fremmødte kan være i flyet, er fortsat uændret. I anden ligning er der til forskel fra den foregående model fratrukket et led, der angiver flyselskabets udgifter ved at afvise $(m - k - N)$ passagerer. Således er det nu medtaget i profitten, at der er en udgift ved at afvise passagerer.

Det forventede overskud kan nu udtrykkes:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \sum_{k=0}^m P_k [\text{profit ved } (m-k)\text{-passagerer}] \\ &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k [(Ng - f) - (m - k - N)b] + \sum_{k=m-N}^m P_k [(m - k)g - f] \\ &= \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k [(N - m + k)g - (m - k - N)b] + (mg - f) \sum_{k=0}^m P_k - g \sum_{k=0}^m kP_k\end{aligned}$$

Da $\sum_0^m P_k = 1$ og $\sum_0^m kP_k = \bar{k}$, forventet antal ikke-fremmødte, kan det forventede overskud omskrives til

$$\begin{aligned}\bar{S} &= mg - f - \bar{k}g - (b + g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m - N - k) \\ \bar{S} &= (m - \bar{k})g - f - (b + g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k (m - N - k)\end{aligned}$$

For at verificere dette resultat ses der på et specialtilfælde, hvor der sættes $P_0 = 1$ og $P_k = 0$ for $k \geq 1$ i det sidste udtryk. Dette svarer til, at alle bookede passagerer møder op. Det sidste udtryk for \bar{S} vil så reduceres til:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= (m - \bar{k})g - f - (b + g)(m - N) \\ &= Ng - f - b(m - N)\end{aligned}$$

Den sidste reduktion følger af at $\bar{k} = 0$. Dette viser, som man skulle forvente, at hvis m passagerer er booket på et fly med kapaciteten N , og de alle møder op, så vil profitten være $Ng - f$ for at flyve med et fuldt fly, minus omkostningerne, $(m - N)b$, ved at afvise $m - N$ overbookede passagerer. I dette tilfælde vil den maksimale profit opnås, når der er booket $m = N$ passagerer, hvilket er i overensstemmelse med det, den første simple model havde som resultat.

I denne model medtages der yderligere overvejelser vedrørende P_k 's udseende. Det antages, at den enkelte passagers fremmøde eller mangel på samme er uafhængigt af de andre passagerer. Dette er selvfølgelig en idealisering, da en del rejser i grupper og derfor kan påvirke hinandens fremmøde. Antagelsen muliggør at P_k kan opfattes som binomial fordelt:

$$P_k = \binom{m}{k} q^k p^{m-k}$$

hvor q er sandsynligheden for, at en passager ikke møder frem og p er sandsynligheden for, at en passager møder frem, dvs. $p = 1 - q$. Det forventede antal ikke-fremmødte, \bar{k} , er givet ved $\bar{k} = qm$ og den forventede profit kan omskrives til:

$$\bar{S} = pmg - f - (b + g) \sum_{k=0}^{m-N-1} P_k(m - N - k)$$

Den forventede profit er hermed afhængig af 6 parametre: billetpris (g), udgifter ved at afvise en passager (b), flyselskabets udgifter til flyvningen (f), sandsynligheden for at én passager møder op (p), antal bookinger (m) og flyets passagerkapacitet (N). Da det overordnede problem er at undersøge overbooking, vil det være mest interessant at undersøge, hvad det betyder for den forventede profit at ændre på m , mens de fem andre parametre holdes fast. Modellen kan i princippet godt undersøges analytisk, men det vil være temmelig tidskrævende. Derfor benyttes en computer til at beregne løsningerne. Computerberegninger viser eksempelvis, at et flyselskab opnår størst profit i forhold til de faste udgifter (f) i et fly med plads til 300 passagerer med en overbooking på 20 personer, når $p = 0.95$. Sandsynligheden for at afvise 5 eller flere personer er i dette tilfælde 0.464. (I denne beregning var udgifterne ved at afvise en passager sat til 20% af billetprisen ($b = 0,2g$) og g , billetprisen, var fastsat udfra at 60% af indtægterne går til de faste udgifter forbundet med at udruste flyet og udføre flyvningen ($0,6Ng = f$.)

Endnu en justering

Da et flyselskab ifølge modellerne opnår størst profit uden overbooking men med det krav, at samtlige passagerer dukker op, altså $S = Ng - f$, er det en mulighed for flyselskabet at forsøge at højne chancen for, at passagerer møder op. Dette kan gøres ved at udbyde særlige billige billetter, som imidlertid ikke kan bruges til andre afgang. Passagerer med denne type billetter kan forventes at have et højere fremmøde end andre. Dette medtages i den tredje udbygning af modellen. Nye elementer i denne udgave er:

j = antal solgte billetter med nedsat pris

r = den nedsatte billetpris i forhold til den fulde pris

Vi vil som nævnt ikke gennemgå opbygningen af denne model trin for trin. I stedet vil vi skitsere de enkelte leds overordnede betydning. Den sidste udbyggede model ser således ud:

$$\bar{S} = pmg - (1 - r)jg - f - (b + g) \sum_0^{m-N-1} P_k(m - N - k)$$

Første led, dvs. pmg , altså sandsynligheden for at en booket passager møder op, ganget med antal bookede passagerer, m , og ganget med den fulde billetpris, g , angiver den forventede indtægt, hvis alle betalte fuld pris. Andet led, dvs. $(1 - r)jg$, angiver flyselskabets tab ved at nogle af billetterne er solgt billigere. Tredje led, f , angiver som hele tiden udgifterne ved at udruste og udføre flyvningen, og det sidste led angiver udgifterne ved at måtte afvise folk i tilfælde, hvor der er overbooket, og der møder flere op end der er plads til.

Den forventede profit er nu afhængig af 8 parametre. Ud over de seks nævnt i den forrige model er de to nye parametre j og r også betydende. Et af resultaterne ved computerberegninger, der undersøger effekten ved at variere på de forskellige parametre er, udover den effekt at flyselskabet kan regne med større fremmødeprocent, at jo flere billetter, der sælges til nedsat pris, jo mindre overbooking skal der til for at optimere profitten. Denne profit bliver til gengæld ikke samme størrelse som den på flyvninger uden billige billetter. I følge det norske flyselskab Braathen SAFE tilstræbes det i praksis, at personer med de billigste billetter bliver afvist ved overbooking. Denne afvisning er i form af et tilbud om et *erstatningsbeløb* samt pladsgaranti i den første afgang med ledige pladser.

2.1.2 Modelleringsprocessen i overbookingmodellen

Vi vil nu illustrere de enkelte trin i modelleringsprocessen ved at tage udgangspunkt i det netop gennemgåede modeleksempel.

Systemafgrænsningen består i at udpege de faktorer, der har indflydelse på problemet. I overbookingmodellen er det et spørgsmål om at udpege *udgifter* og *indtægter*, da det er disse, der har betydning for profitten, som hurtigt identificeres som værende den, flyselskaberne handler efter, når de overbooker flyene. Især er det væsentligt at indse, at det er antallet af ikke-fremmødte, der er centralt for problemet og bruge dette som udgangspunkt for den øvrige strukturering, vi kunne kalde det et *strukturerende greb*.

De overordnede træk af overbookingmodellens matematisering følger af struktureringen, idet den har fastlagt, at det handler om indtægter og udgifter, og så er det faktisk givet, hvordan det skal matematiseres. Nemlig indtægter

fratrullet udgifter, hvor udgifter eller indtægter udtrykkes som antallet af noget gange med dette nogets pris. Der ligger dog et arbejde i at vælge en symbolisering af de indgående faktorer og relationerne imellem dem, da de ikke kan nedarves fra en teori. Specielt er det en vigtig del af matematiseringen, og som her er tæt knyttet til struktureringen, at foretage beskrivelsen af ikke-fremmødte. At opfatte antallet af ikke-fremmødte som en stokastisk variabel er således en vigtig del i både struktureringen og matematiseringen.

Efter dette matematiseringstrin er vi nået frem til modellen. I overbookingmodellen i form af en ligning der udtrykker, hvad den forventede profit er givet ved. Næste trin er at få nogle resultater af modellen. Til dette skal de indgående parametre bestemmes. For at gøre beregningerne mindre tidskrævende er det nødvendigt at algoritmisere løsningsmetoden og implementere den i en computer. Modellen skal løses flere gange for forskellige valg af m , for at få resultatet, den overbooking der giver den maksimale fortjeneste. Hver enkelt løsning kunne godt findes analytisk, men ville være uforholdsmæssigt tidskrævende.

Modelvalidering har bestået i at afprøve særtilfælde og se, om de førte til fornuftige resultater. Fornuftige fordi de umiddelbart kunne sammenlignes med mere simple overvejelser over dynamikken i modellen. I denne model er der også gode muligheder for at redegøre for de forskellige parametres betydning for, hvad den maksimale profit er, og hvordan den opnås.

2.2 Modelkompetencer

I følgende gennemgang af modelkompetencerne indleder vi hver enkelt kompetencebeskrivelse med et afsnit, der giver essensen af den pågældende kompetence. Herefter følger en uddybning, der bla. indeholder eksempler hentet fra *overbookingmodellen* beskrevet i afsnit 2.1.1, referencer til inspirationskilder for den pågældende kompetence samt for nogle af kompetencernes vedkommende beskrivelse af centrale aspekter ved vidensindholdet.

2.2.1 Struktureringskompetence

Struktureringskompetencen består overordnet i at skabe en passende struktur i det virkelighedsudsnit, som problemet er indlejret i. Det drejer sig om at fastlægge en egnet synsvinkel på virkelighedsudsnittet. Denne synsvinkel skal gøre det muligt at udvælge de parametre, som er væsentligst for problemet, samt at bestemme deres indbyrdes relationer. Til kompetencen hører således

både det at få valgt en overordnet ramme; at udvælge essentielle parametre samt at fastlægge de væsentligste sammenhænge mellem disse.

En væsentlig del af struktureringskompetencen er således at være i stand til at finde en egnet synsvinkel i en given modelleringsproces. Dette vil selvfølgelig variere meget, men overordnet er det vigtigt at være opmærksom på, at struktureringen foretages med en efterfølgende matematisering for øje. Man kan derfor sige, at det gælder om at få simplificeret sit virkelighedsudsnit mest muligt uden dog at bortskære punkter, der er altafgørende for problemet. Dette indebærer viljen til at idealisere størrelser og viljen til at se bort fra mindre betydende faktorer. For at kunne vurdere hvilke faktorer, der skal medtages, er det nødvendigt med viden både om det pågældende virkelighedsudsnit og om hvilke matematiske teorier og værktøjer, der kan bruges til den efterfølgende matematiske formulering af systemet. Viden om forskellige modeltyper vil også kunne gavne. Endelig er det også en del af struktureringskompetencen at reformulere udgangsproblemet løbende, hvis nogle af simplificeringerne skulle vise sig at påkræve dette. I praksis findes der forskellige redskaber til at støtte struktureringen. Det kan feks. være en god strategi at lave en fysisk beskrivelse i form af en skitse for at få en første begrebsmodel. Et andet anvendt redskab er *system dynamics*⁵. System dynamics benyttes til at karakterisere de valgte størrelser og relationerne imellem disse ved hjælp af forskellige symboler. For eksempel opereres der med symboler som *tilstandsvariabel*, *strømvariabel*, *strømpil* og *informationspil*. Teknikken er således mere en hjælp til at adskille og klassificere de udvalgte størrelser og deres indbyrdes sammenhænge end en hjælp til at udvælge dem i første omgang.

I overbookingmodellen er den valgte synsvinkel at opfatte problemet som et profi-toptimeringsproblem. Denne synsvinkel bygger på en antagelse om, at flyselskabet kun gør det som er økonomisk rationelt. Dette indebærer, at man i udvælgelsen af vigtige parametre kan kigge efter to overordnede hovedgrupper: faktorer, der giver flyselskabet en indtægt i forbindelse med en flyvning og faktorer, der giver en udgift for selskabet. Ud over dette er struktureringen styret af, at den endelige model skal kunne give et svar på spørgsmålet om, hvorfor det kan betale sig at overbooke et fly. Det er derfor essentielt at få medtaget de udgifter og indtægter, der er relateret til en overbookingssituation. Men det vigtigste at indse, er det vi tidligere benævnte som det *strukturerende greb*, nemlig at struktureringen skal foregå i forhold til antallet af *ikke-fremmødte*, da det er dette, der er årsag til overbookingssitu-

⁵System dynamics er udviklet ved Massachusetts Institute of Technology, MIT, af Jay W. Forrester, der er professor of management. En beskrivelse af metoden findes i (Heefelt, 1990).

ationen. Struktureringskompetencen har i overbookingmodellen bla. krævet viden om en ret basal økonomisk teori: profit = indtægter - udgifter, og en lidt mere specialiseret viden om de enkelte udgifts- og indtægtsposter. For eksempel kræver idealiseringen af f -parameteren, der står for flyselskabets udgifter ved at udføre og udruste en flyvning, viden om lufthavnsafgifter, flyets brændstofsforbrug og flypersonale mm.

2.2.2 Matematiseringskompetence

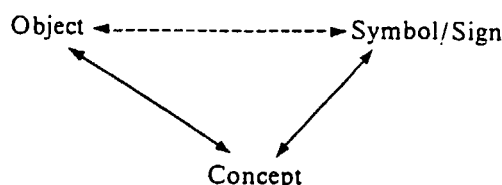
Matematiseringskompetencen indeholder evnen til at foretage matematiske beskrivelser af størrelser, der oprindeligt er udtrykt i hverdagsprog. Kompetencen kan derfor udtrykkes som evnen til at matematisere de valg, der er blevet foretaget af strukturingskompetencen.

Kompetencen er i særlig grad beherskelse af det matematiske sprog og af matematiske begreber og teorier. Matematiseringskompetencen bruges både til at formulere problemet fra virkelighedsudsnittet som et problem i matematikkens verden og til at foretage yderligere matematisering i det matematiske univers. Sidstnævnte drejer sig om matematiske formuleringer af yderligere skærpelser og reformuleringer af problemet, som ikke kan fortolkes i virkeligheden, men alene kan foregå, fordi man er i den matematiske modelverden. Matematiseringskompetencen kræver ligesom strukturingskompetencen viljen til at simplificere komplicerede sammenhænge. Dette er nødvendigt, når en størrelse feks. opfattes som eksponentielt voksende, selv om dette oplagt må være en tilnærmelse.

I nogle tilfælde vil matematiseringen foregå meget direkte. Dette drejer sig om de modelleringsforløb, hvor den valgte synsvinkel på virkelighedsudsnittet muliggør brug af fysiske love, som allerede er udtrykt på matematisk form. Matematiseringskompetencen bliver i sådanne tilfælde, at kombinere de mest egnede teorier for at få den ønskede model.

En vigtig forudsætning for at kunne matematisere er at have en fornemmelse for de matematiske symbolers betydning. Symbolerne er byggestenene i det matematiske sprog, som anvendes i reformuleringerne af problemet. Man skal derfor beherske symbolerne på samme måde som man behersker det naturlige sprog. Denne færdighed kalder Abraham Arcavi⁶ for *Symbol Sense*. I artiklen "*Symbol Sense: Informal Sensemaking in Formal Mathematics*" (Arcavi, 1994) giver Arcavi et bud på, hvad der bla. må ligge i *symbolfornemmelse*. Det

⁶Abraham Arcavi er ansat ved Department of Science Teaching, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel.



Figur 2.2: Den epistemologiske trekant illustrerer bla. at matematiske begreber både har en symbolfremstilling og en objektfremstilling. Objektfremstillingen er begrebets udseende i en given anvendelse (Steinbring, 1989).

centrale i symbolfornemmelse er ifølge Arcavi at kunne anvende og gennemskue den status, symbolerne har. Symbolerne har status af at være bindeledet imellem de matematiske begreber og objekterne udenfor matematikken. Symbolerne er således vejen til at formulere og formalisere objektet, så matematiske begreber kan anvendes på det.

Det er i den forbindelse essentielt at have en forståelse af de matematiske begreber, der omfatter både et symbolspekt og et anvendelsesmæssigt (ikke-matematisk) aspekt. Dette forhold tydeliggør Steinbring⁷ i artiklen "*Routine and Meaning in the Mathematics Classroom*" (Steinbring, 1989). Heri karakteriserer Steinbring begrebsmæssig matematisk viden vha. en *epistemological triangle* se figur 2.2. Den *epistemologiske trekant* illustrerer bla. at matematiske begreber både har en *symbolfremstilling* og en fremtrædelse i en given anvendelse kaldet *objektforstilling*⁸.

Vi vil nu nævne nogle af de aspekter ved symbolfornemmelse - i Arcavis formulering - som vi finder relevante for matematiseringskompetencen. For det første indeholder symbolfornemmelse, at man har symboler som et menings-tilskrivende og umiddelbart tilgængeligt værktøj. For det andet er der indeholdt en forståelse for hvilke symboler, der er relevante i en given situation samt en forståelse for symbolernes magt til bla. at klargøre sammenhænge.

De øvrige aspekter, Arcavi nævner, antyder alle i en eller anden grad, at *symbolfornemmelse* er en egenskab eller et værktøj, der skal udnyttes til at opnå løsninger. For eksempel er en intuitiv fornemmelse for, hvornår det er

⁷Heinz Steinbring er ansat ved Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Tyskland.

⁸I artiklen diskuterer Steinbring de forskellige begreb-symbol-objekt relationer i en indlæringsmæssig sammenhæng. Han fremfører, at objekt og symbol ofte kommer til at fremstå som identiske i traditionelle undervisningssituationer. Dette medfører en unuanceret begrebsmæssig forståelse, som ofte vil være kontekstafhængig (Steinbring, 1989).

relevant at benytte symboler, og omvendt hvornår det er mere givtigt at benytte andre metoder for at nå frem til en løsning, en del af *symbolfor-nem-melse*. Dette belyser, at matematiseringskompetencen ikke kun er at kunne matematisere det strukturerede problem, men at gøre dette med en løsning for øje. Dvs. vælge en matematisering der er mulig at løse.

Matematiseringen i overbookingeksemplet foregår trinvis, eftersom modellen bygges trinvis op. Matematiseringskompetencen indeholder i eksemplet bla. det at opfatte og opskrive nogle parametre som konstanter. Opstillingen af den første ligning, $S = ng - f$, er også et eksempel på matematiseringskompetence. Bag denne ligger forståelsen for, at det er S , altså profitten, der skal beregnes og at denne er afhængig af de andre størrelser. De følgende udbygningerne af ligningen er også eksempler på matematiseringskompetencen. Da der i systemafgrænsningen er udvalgt faktorer, som ikke kan bestemmes entydigt, her tænkes på en parameter som *antal ikke-fremmødte*, bliver det en del af matematiseringskompetencen at finde en passende beskrivelse for denne stokastiske variabel. I første omgang er opfattelsen af ikke-fremmødte som stokastisk variabel grundlaget for, at der i udbygningen af den simple model kan opstilles et udtryk for det forventede overskud \bar{S} . I den anden udbygning af den simple model findes der en matematisk beskrivelse af de ikke-fremmødte, da sandsynlighed for k ikke-fremmødte, P_k , opfattes som binomialt fordelt.

Det skal til sidst bemærkes, at der er andre som til begrebet matematisering knytter processer, som dem vi har beskrevet under struktureringskompetencen. Dette gælder feks. Ole Skovsmose, som beskriver matematisering på følgende måde: "*To mathematise means to formulate, to systematise and to make judgements about ways of understanding reality,...*" (Skovsmose, 1994, s. 63). Vi har imidlertid valgt at udskille struktureringen fra matematiseringen, da vi mener der er væsentlige forskelle på de to processer, og at det er vigtigt at fremhæve dem begge.

2.2.3 Afmatematiseringskompetence

Afmatematiseringskompetencen er en komplementaritet til matematiseringskompetencen. Den består i at kunne tilskrive en matematisk formulering en mening i virkeligheden. Det vil sige at tolke et matematisk udtryk i forhold til det bagvedliggende virkelighedsudsnit. Væsentlige elementer af tolkningen er at klarlægge, hvilke parametre og sammenhænge fra virkelighedsudsnittet, som det matematiske udtryk symboliserer. Kompetencen inkluderer endvidere evnen til at gennemskue de grundlæggende forudsætninger for opstillin-

gen af det matematiske udtryk, sagt med andre ord evnen til at klarlægge den valgte synsvinkel på virkelighedsudsnittet.

Afmatematisering er en nødvendig kompetence, når et modelresultat skal tolkes i forhold til det bagvedliggende virkelighedsudsnit. Dette skyldes, at modelløsningsprocessen foregår i det matematiske univers, hvilket medfører, at nogle af løsningerne også umiddelbart kun vil give mening indenfor dette. Sidstnævnte vil oftest gøre sig gældende, når modellerne giver kvalitative resultater, som f.eks. funktioner der skal angive en tendens i det modellerede problem. Løsningerne kan derfor ikke i alle tilfælde bruges direkte, men skal først tolkes i dagligdagssprog. Afmatematiseringskompetencen kommer således i spil i særlig grad, når modelleringsprocessen afsluttes, og de endelige resultater skal anvendes, men er også nødvendig ved de løbende tjek, der foretages undervejs i en modelleringsproces. Situationer, der i høj grad kræver afmatematiseringskompetence, er modelanalyser og modelleringsprocesser, der tager udgangspunkt i en allerede eksisterende model. I begge tilfælde har modelløren ikke selv foretaget de systemafgrænsninger og matematiseringer, der ligger til grund for modellen. Da afmatematiseringen bygger på kendskab til de valg, der er foretaget i systemafgrænsningen, bliver en del af kompetencen her at afdække disse simplifikationer og grundlæggende krav. I de tilfælde, hvor modelløren selv har foretaget alle modelleringsstrin, bliver kompetencen at benytte dette kendskab i tolkningen af resultaterne.

Afmatematiseringen bygger ligesom matematiseringskompetencen på en *symbolforståelse*. I Arcavis artikel har vi fundet følgende aspekter af symbolforståelse vigtige for afmatematiseringskompetencen: Evnen til at kunne læse en mening ud af symbolerne og gennem symbolerne få en forståelse af det problem de beskriver. Derudover at have en forståelse for, at symbolerne kan have forskellig rolle i forskellige kontekster. Her er det centrale altså at kunne læse *både* de matematiske begreber og de ikke-matematiske objekter, som symbolerne refererer til. Det er klart, at de to typer fortolkning kan støtte hinanden, men at afmatematiseringskompetencen ikke fungerer, hvis kun den ene type kan gennemføres. Dvs. hvis det alene var en fortolkning af symboler som repræsentanter for matematiske begreber, ville denne ikke bidrage til en forståelse for det objekt, som var modelleret. Afmatematiseringskompetencen bygger på en begrebsmæssig forståelse som den blev illustreret i *den epistemologiske trekant* på side 51. Eftersom en matematisk model vil optræde som en symbolfremstilling bliver det afmatematiseringskompetencens opgave at tolke en tilhørende objektfremstilling på baggrund af en forståelse af det underliggende matematiske begreb.

Afmatematiseringskompetencen har også en funktion i de modelleringsforløb, hvor der i systemafgrænsningsfasen bliver valgt en synsvinkel, som muliggør

anvendelse af fysiske love på matematisk form. Kompetencen har i sådanne tilfælde det formål at tilskrive de matematisk formulerede love mening for at klargøre, hvad de beskriver i forhold til det problem, der ønskes løst, og hvordan problemet eventuelt skal reformuleres for at passe med disse love.

I overbookingmodellen vil afmatematiseringskompetencen komme forskelligt i fokus, alt efter om modellen skal analyseres eller opbygges. Hvis modellen bliver videregivet uden præcisering af de bagvedliggende antagelser vil det være en opgave for afmatematiseringskompetencen at afdække disse. For eksempel ville det være et eksempel på afmatematiseringskompetence at overveje, hvad der nødvendigvis måtte ligge bag det at kunne opfatte P_k som binomialt fordelt - altså at gennemskue at den enkelte passagers fremmøde eller mangel på samme regnes som uafhængigt af de andre passagerers fremmøde. I vores fremstilling kommer afmatematiseringskompetencen i spil ved tolkningen af de beregnede resultater. Information om, at et flyselskab opnår størst profit med en overbooking på 20 personer i et fly med plads til 300 personer, er ikke så meget værd i sig selv. Det er først når denne information suppleres med præcisering af de antagelser resultatet bygger på, at det kan bruges til noget. For eksempel vil det være fornuftigt at inddrage nogle overvejelser om størrelsen af b , der står for flyselskabets udgifter ved at afvise en booket passager. Resultatet med de 20 personer er opnået ved en bestemt fastsættelse af b -parameteren, som imidlertid aldrig kan være andet end et skøn, da det ikke er muligt at sætte tal på, hvor meget det betyder for selskabets renommé at måtte afvise passagerer.

2.2.4 Modelløsningskompetence

Modelløsningskompetencen består i at opnå resultater af den opstillede model. Heri ligger både det at analysere modellen for at klarlægge hvilke relevante resultater, der kan tænkes at opnås fra den, og dernæst at udføre de nødvendige aktiviteter for at komme frem til de ønskede resultater.

Viden om matematiske teorier og metoder er en grundlæggende forudsætning for modelløsningskompetencen. Kompetencen er at bringe denne viden i spil for at løse den matematiske model. Det kan feks. være anvendelsen af numeriske eller analytiske metoder til at løse differentiaalligninger. For at løse modellen er det nødvendigt, dels at kunne anvende de teknikker man har viden om i nye situationer, og dels at kunne improvisere nye teknikker når de kendte ikke er brugbare. I kompetencen ligger også, at man er i stand til at udnytte, at man befinder sig i det matematiske modelunivers og derfor kan "glemme alt om" virkeligheden og koncentrere sig om at komme frem til nogle

resultater. Her er det altså en fordel at kunne betragte symboludtrykkene og deres form alene uden at lade sig distrahere af meningen af symbolerne i virkeligheden. En del af kompetencen ligger altså i at vide hvilke muligheder og ikke mindst begrænsninger, der er i at bevæge sig i et rent matematisk univers.

Ofte vil en meget vigtig del af modelløsningskompetencen være at kunne benytte en computer til at opnå de ønskede løsninger. I kompetencen kan der både ligge det at have kendskab til forskellige programmer og være i stand til at bruge dem og den mere avancerede kompetence i at programmere selv. Sidstnævnte betyder, at *algoritmisk tankegang* er inkluderet i modelløsningskompetencen. Dvs. at kunne give en detaljeret beskrivelse af den procedure, der skal gennemløbes for at løse modellen. Et andet punkt, der hører under modelløsningskompetencen, er *parameterbestemmelse*. I nogle tilfælde er det muligt at fastlægge deres størrelser ud fra empiriske data, mens det i andre tilfælde er nødvendigt at "prøve sig frem". Endelig kan der være parametre hvis værdi er entydigt givet som naturkonstanter.

I overbookingeksemplet foregår modelløsningen på computer. Kompetencen er derfor her først og fremmest at lave en algoritme til modelløsningen, som kan implementeres i et program, der kan give relevante resultater. Ud over det er parameterbestemmelse af afgørende betydning. De indgående parametre er af vidt forskellig status. Nogle må forventes at kunne bestemmes ud fra empiriske data. Dette gælder bla. f , der angiver de samlede udgifter ved at udføre en flyvning og g , der angiver billetprisen. Størrelserne p og q , der angiver henholdsvis sandsynligheden for at en passager møder op eller ej kan ligeledes fastlægges på baggrund af empiriske data vha. statistiske beregninger. Andre parametre vil i kraft af deres natur være meget vanskelige at fastlægge præcist. Dette gælder for eksempel parameteren, b , som er flyselskabets udgifter bla. i form af tab af renommé, som er forbundet med at afvise en passager.

2.2.5 Valideringskompetence

Valideringskompetencen vedrører en vurdering af modellen. Valideringerne kan bestå af matematiske analyser for at afdække modellens styrker og svagheder samt af sammenligninger mellem empiriske data og resultater udledt af modellen. Valideringskompetencen består endvidere i at afgøre, hvilke krav modellen skal leve op til, for at den kan benyttes til det pågældende formål.

Valideringskompetencen bygger også på en matematisk viden om teorier og teknikker. Kompetencen vil trække på den samme type analyser som model-

løsningskompetencen, men vil gøre det med et andet formål for øje. Afhængig af typen af de teorier, som er udgangspunkt for systemets beskrivelse, vil der i visse tilfælde kunne regnes på de usikkerheder, som den valgte strukturering og matematisering giver.

I overbookingseksemplet er nogle af de indgående parametre særdeles vanskelige at fastlægge. I dette tilfælde bliver det nødvendigt at undersøge, hvor meget det indvirker på de endelige resultater, at disse størrelser kan variere. Hvis præcisionen på de svært bestemmelige parametre har en afgørende betydning, vil det være relevant at tage højde for dette i bedømmelsen af modellens resultater. Mens der kan argumenteres for at negligere disse usikkerheder på parameterverdierne i bedømmelsen, hvis de ikke har stor betydning for resultaterne. En sådan undersøgelse er derfor et eksempel på valideringskompetencen.

Et andet eksempel på valideringskompetence i overbookingmodellen er undersøgelsen af specialtilfældet i den anden udbygning af den simple model. Her blev det undersøgt, hvad profitten ville være i det tilfælde, hvor alle bookede passagerer mødte op. Dette blev gjort for at tjekke den anden modeludbygning, før den blev udbygget yderligere. Den første simple model blev valideret ved hjælp af forholdsvis banale sammenligninger med den systemverden, der var afgrænset. Et aspekt af valideringskompetencen er således at vurdere hvordan det er rimeligt at vurdere den pågældende model, dvs. om der f.eks. er nogen mening i at sammenligne modellens resultater med empiriske data.

2.2.6 Strategikompetence

Strategikompetencen indeholder evnen til at planlægge og styre hele den igangværende modelleringsproces. Heri ligger både det at styre den overordnede proces samt at kontrollere de enkelte deltrin. Strategikompetencen kræver derfor overblik over hele processen og evnen til at vurdere og kontrollere egne handlinger.

Kendskab til og fortrolighed med de forskellige niveauer i modelleringsprocessen er nødvendig for at kunne kontrollere arbejdet med modellen og dermed effektivisere processen mest muligt. Kompetencen kræver evnen til at opstille forskellige strategier og til - under udførelsen - at kunne kontrollere, i hvilken udstrækning de er konstruktive. Den indeholder derfor evnen til at vurdere og kontrollere ens egen arbejdsproces.

Vi har hentet inspiration til udviklingen af strategikompetencen hos Alan Schoenfeld, som har beskæftiget sig med problemløsningsstrategier generelt.

Vi vil derfor inddrage hans beskrivelser i uddybningen af strategikompetyens indhold. Schoenfeld skelner mellem *strategier* og *kontrol*. Et eksempel på en overordnet strategi er at starte med at simplificere sit problem og undersøge dette først. Idéen med dette er at få en ide om den mere komplicerede udgave. En anden overordnet strategi er at undersøge sit problem i specialtilfælde også med det formål at få en ide om i hvilken retning problemløsningen går. En tredje strategi er at opstille delmål for at gøre løsningsprocessen mere overskuelig. Kontrolbegrebet beskriver Schoenfeld kort på følgende måde: *"Selecting and pursuing the right approaches, recovering from inappropriate choices, and in general monitoring and overseeing the entire problem-solving process, is equally important. One needs to be efficient as well as resourceful. In broadest terms, this is the issue of control."* (Schoenfeld, 1985, s.98-99). Disse aspekter af kontrol samt generelle strategier er inkluderet i strategikompetencen. Dick Clements skriver:

"...I would normally try to keep a model as simple as possible at first and go back to include more features once I had the basic model formulated...Once they [studerende red.] have achieved a basic understanding of their model they can go back and include more detailed effects." (Clements, 1990, s.326).

Dette illustrerer hvad en strategi kan være - at starte simpelt og så bygge ud - og hvordan det kan være en hjælp til at få opstillet den endelige model.

I overbookingeksemplet bygges modellen op trinvis. Dette er således et eksempel på strategikompetencen. De første simple udgaver af modellen giver altså en første forståelse, samtidig med at det letter opbygningen. Et vigtigt aspekt af denne metode er at validere de enkelte udbygninger af modellen, før man arbejder videre med modellen, hvilket også gøres i eksemplet.

2.2.7 Refleksionskompetence

Refleksionskompetencen består i at reflektere over de valg og aktiviteter, der foretages undervejs i modelleringsprocessen. Refleksionerne indeholder overvejelser om, hvad de givne valg betyder for den overordnede problemstilling samt vurderinger af, hvilke konsekvenser disse overvejelser bør føre til. Refleksionskompetencen benyttes således, mens modelleringsprocessen eller modelanalysen er i gang.

Refleksionskompetencen indeholder evnen til at stille de relevante kritiske spørgsmål til de enkelte trin i modelleringsprocessen. Arten af disse spørgsmål vil være af forskellig type alt efter hvilket trin, man befinder sig på. I

systemafgrænsningsfasen vil det feks. være: Kan andre elementer end de udvalgte være væsentlige? Dette kunne for eksempel være tilfældet, hvis man havde taget udgangspunkt i en anden teori. I modelløsningsfasen kan det være spørgsmål af typen: Hvilke begrænsninger giver den valgte matematiske teknik til antallet af parametre i modellen? Hvilke typer af løsninger giver den opstillede model anledning til? Hvordan opfører modellen sig i hypotetiske ekstreme situationer? Det følger af ovenstående, at refleksionskompetencen har en rolle i alle de andre kompetencer, nærmest som et aspekt af disse der kan hjælpe til en progression i de aktiviteter, der foretages indenfor de forskellige kompetencer.

Vores beskrivelse af refleksionskompetencen er inspireret af Ole Skovsmoses begreb *reflective knowing* (Skovsmose, 1988, 1994). Dette vender vi tilbage til i den efterfølgende diskussion af hele begrebsapparatet, hvor vi giver refleksionskompetencen mere indhold gennem sammenlignende analyse af Skovsmoses og vores begreber.

I overbookingmodellen er der et eksempel på en udregning af en hypotetisk ekstrem situation. Dette finder sted i valideringen af den anden udbygning, hvor det specialtilfælde, hvor alle bookedede passagerer med sikkerhed møder op, undersøges. Sandsynligheden for at en passager møder op er i dette tilfælde 1, og dermed reduceres ligningen væsentligt. Da $P_0 = 1$ og $P_k = 0$ for $k \geq 1$ bliver der kun et led tilbage i summationsleddet. Første led i ligningen reduceres også, eftersom det forventede antal ikke-fremmødte, \bar{k} , er 0. Herefter reduceres ligningen til $\bar{S} = Ng - f - b(m - N)$, som ikke er så kompliceret at analysere. Refleksioner i denne forbindelse er i første omgang at overveje hvilket specialtilfælde, der vil være fordelagtigt at undersøge og derefter refleksioner i forbindelse med tolkningen af resultatet af det undersøgte specialtilfælde.

Overvejelser i forbindelse med valg og fastlæggelse af de indgående parametre i overbookingmodellen er også eksempler på refleksionskompetence. I forbindelse med fastlæggelse af P_k som binomialfordelt drejer det sig feks. om at overveje det rimelige i at antage, at den enkelte passagers fremmøde er uafhængigt af de andre passagerers fremmøde. I forbindelse med modeludbygningerne er det nødvendigt med refleksioner om hvilke parametre, der skal bibeholdes, hvilke der skal droppes og hvilke nye, der er nødvendige. I den første simple model optræder der feks. en n -parameter, der angiver antal passagerer på flyvningen. Denne parameter vælger Clements imidlertid at substituere med k -parameteren, der angiver antal ikke-fremmødte, altså nærmest den modsatte parameter af n . Refleksioner bag dette valg går på, at det er mere relevant at se på antal *ikke-fremmødte* end på antal fremmødte, eftersom det netop er den omstændighed, at der er bookedede passagerer, der

ikke møder op, som er årsag til at flyselskaber må overbooke for at højne profitten.

2.2.8 Kritikkompetence

Kritikkompetencen består i at forholde sig kritisk til en given afsluttet modelleringsproces sat i relation til en eller flere kontekster. Kritikkompetencen indeholder evnen til at stille de relevante kritiske spørgsmål til en model med det formål at vurdere modellens anvendelighed i den pågældende kontekst, som ofte vil være en samfundsmæssig sammenhæng. Til det at vurdere modellens anvendelighed ligger også en vurdering af hvilke konsekvenser, det får for det pågældende felt, at man vælger at bruge lige netop den foreliggende model.

Kritikkompetencen anvendes overfor modeller, når de anskues udefra og altså ikke indefra selve modelleringsprocessen. Der er altså en perspektivforskel mellem refleksions- og kritikkompetencen. Hovedelementet i kritikkompetencen er at kunne behandle spørgsmål, der afdækker modellens status, styrker og problemer i forhold til anvendelsen. Spørgsmålene kan være af karakteren: Hvilket formål skal modelanvendelsen opfylde? Til hvilket formål er modellen oprindeligt konstrueret? Hvilke interesser kan der være forbundet med modellen og den måde den anvendes på? Hvilket teoretisk fundament bygger systemafgrænsningen og matematiseringen på? Hvordan er sammenhængen mellem model og virkelighed? En del af kritikkompetencen består således i at afdække problemer, der så må undersøges nærmere på de enkelte niveauer i modelleringsprocessen. En anden del af kompetencen består i at kunne vurdere, hvordan modelanvendelsen påvirker præciseringen af problemet og de rammer under hvilket problemet kan diskuteres, samt de muligheder der er for handling.

For at stille disse spørgsmål er et kendskab til andre modeller og deres anvendelse en fordel, derfor er en del af vidensindholdet i denne kompetence viden om forskellige modeltyper.

Ligesom refleksionskompetencen er kritikkompetencen inspireret af Ole Skovsmoses begreb *reflective knowing*. Som sagt vil vi vende tilbage til dette i den efterfølgende diskussion af hele begrebsapparatet.

Kritikkompetencens opgave vil i tilknytning til overbookingmodellen være at belyse den interesse, der ligger bag modellen, og hvilken indflydelse det har haft på modelleringsprocessen. Men også at vurdere grundlaget for og rimeligheden af de forskellige antagelser og parameterbestemmelser. For eksempel kan man undersøge rimeligheden af at anvende en binomialfordeling

til beskrivelse af sandsynligheden for, at et bestemt antal personer ikke møder frem. Binomialfordelingen er den matematiske simpleste fordeling, der kan stilles op, idet den bygger på antagelsen om, at passagerernes fremmøde er uafhængigt af hinanden. Rimeligheden af antagelsen kunne eventuelt testes ved sammenligning med statistiske undersøgelser af fremmødeprocenten til forskellige afgange. De simple parameterbestemmelser i overbookingmodellen kunne forklares med, at Clements har en undervisningsmæssig indgang til hele modelopstillingen. Hans interesse har dermed heller ikke været direkte foreskrivende. Det har derfor ikke været vigtigt for ham at lave en meget virkelighedstro fastlæggelse. Hvis flyselskaber eventuelt skulle benytte denne model, ville det således være relevant for dem at være opmærksom på, at Clements interesse i at opbygge modellen ikke var foreskrivende. Derudover vil kritikkompetencen fremhæve, at modellens resultater ikke er entydige, idet en given profit er forbundet med en risiko for at afvise passagerer. Anvendelsen af modellens resultater kræver således en stillingtagen til, om man vil yde en forringet service på dette område, og i givet fald om man f.eks. vil vælge at give forskellig service til forskellige kundegrupper.

2.2.9 Kommunikationskompetence

Kommunikationskompetencen er evnen til at formidle færdige eller foreløbige resultater af modelleringen til både matematikere og ikke-matematikere. Den kræver evnen til at vurdere hvilke faktorer, der er vigtige at videregive i den pågældende sammenhæng, samt evnen til at formidle disse på en forståelig måde.

Kommunikationskompetencen udøves således både undervejs i modelleringsprocessen og i den afsluttende fase og kan være både mundtlig og skriftlig. Kompetencen kan siges at være særlig vigtig, når en modelleringsproces afsluttes, og den endelige model bliver videregivet. Hvis modellen ikke suppleres med information om de begrænsninger mm., der er foretaget undervejs i processen, er det svært at sikre en fornuftig brug af modellen. I kompetencen er der også inkluderet en evne til at samarbejde med dels andre modelbyggere, f.eks. i tilfælde af at ens model er en del af en større og dels med eventuelle brugere og aftagere af modellen. Målgruppe overvejelser er endvidere en nødvendighed for kommunikationskompetencen.

Et eksempel på kommunikationskompetencen er Dick Clements indledende argumentation for den valgte fremstillingsform af overbookingmodellen:

“What I have actually written reflects my own mental processes in creating the model described...some lecturers prefer to present

concrete and specific problems, others to propose an area of study and see what emerges. In the case of this material I have adopted the latter stance,...the style is also probably best chosen in the light of the intended student audience." (Clements, 1990, s.323).

Beskrivelsen er udformet til matematiklærere, men med det i baghovedet, at den skal præsenteres for studerende. En del af kommunikationskompetencen har været at gøre dette klart og en anden del at foretage selve beskrivelsen.

I forbindelse med overbookingeksemplet vil det at kommentere resultatet af modellen give mulighed for refleksioner. Feks. det resultat at flyselskabet tjener mest, når deres 300 personers fly overbooker med 20 personer, kommenteres med at der så også er 46 % sandsynlighed for at afvise 5 eller flere personer. En sådan kommentar lægger op til nogle overvejelser af, om det bare er profitten, der er det væsentlige for flyselskabet, eller det er at undgå for mange afviste, for så er det et andet resultat der skal bruges. Kommunikationskompetencen kan således blotlægge modellens bagland og sætte modellens resultater i perspektiv.

Efter dette står det klart, at kommunikation forudsætter refleksion. Det er muligt for en modellør at strukturere modelleringsprocessen, men det følger ikke deraf, at hun kan kommunikere denne strukturering, og hvorfor den ser ud som den gør, til andre. Det kræver refleksion.

Disse forhold er med til at give kommunikationskompetencen en anden karakter end de tidligere nævnte modelkompetencer. Kompetencen er i særlig grad knyttet til refleksionskompetencen og kritikkompetencen. Idet, som før nævnt, kommunikation i en hvis grad forudsætter refleksioner, samtidig med at det er kommunikation der giver mulighed for en efterfølgende kritik og refleksion. Det kan således være svært at forestille sig en egentlig kritikkompetence uden kommunikationskompetencen også er tilstede.

2.2.10 En slutkommentar

Vi har nu givet en første præsentation af vores begrebsapparat bestående af ni modelkompetencer. I præsentationen har vi gjort mest ud af at klarlægge de enkelte kompetencers indhold og kun kort berørt nogle af kompetencernes indbyrdes relationer.

Vores beskrivelse af de seks af kompetencerne, *struktureringskompetencen, matematiseringskompetencen, afmatematiseringskompetencen, modelløsningskompetencen, valideringskompetencen og kommunikationskompetencen*

har udgangspunkt i et studium af modelleringsprocessen. Dette betyder imidlertid ikke, at de kun er knyttet til et bestemt tidspunkt i en given proces. Som vi beskrev afslutningsvis i afsnittet om modelleringsprocessens struktur er modelleringen netop en dynamisk proces. Derfor vil den enkelte kompetence også komme i spil flere gange i modelleringen, som følge af at der springes rundt, frem og tilbage i den beskrevne struktur. De andre tre kompetencer, *strategikompetencen*, *refleksionskompetencen* og *kritikkompetencen*, har vi opstillet på basis af mere videnskabsteoretisk litteratur. Disse tre kompetencer indgår alle i samspil med de andre kompetencer. Man kan således ikke forestille sig en aktivitet, der udelukkende hører under f.eks. refleksionskompetencen. I den følgende diskussion, hvor vi bl.a. diskuterer inspirationskilderne til disse tre kompetencer, vil vi udfolde dem nærmere. For refleksions- og kritikkompetencens vedkommende vil det særligt dreje sig om at klarlægge grænsen mellem de to kompetencer.

2.3 Uddybning og diskussion af begrebsapparatet

I dette afsnit vil se på, hvordan vores kompetencebegreb forholder sig til andres begreber, der omhandler noget lignende. Dette gør vi dels for at placere vores arbejde i en bredere kontekst og dels for på den måde at gøre det klarere, hvad vores begreber kan byde på.

Vi har valgt, at se på tre andre tilgange til kompetencerne, som er af ret forskellig karakter. Dels vil vi se på begrebet *handlekompetence*, som bruges af danske didaktikere, bl.a. Karsten Schnack. Handlekompetence anvendes som et alment didaktisk begreb, og altså ikke specifikt inden for matematik. Vi ser på, hvordan sammenhængen er mellem dette kompetencebegreb og vores. *Matematisk tænkning* er en fællesbetegnelse for bl.a. problemløsning, metakognition og "sense making" indenfor matematik. Alan Schoenfeld har forsøgt at samle nogle definitioner på centrale begreber for, hvad matematisk tænkning består i, som vi vil se nærmere på. Endelig vil vi forholde vores kompetencebegreb til Ole Skovsmoses begreber om *matematisk*, *teknologisk* og *refleksiv viden*.

2.3.1 Schnacks handlekompetence

Begrebet *handlekompetence* er ikke fagspecifikt, men skal ses i en bredere sammenhæng med politisk dannelse, opdragelse til demokrati og kritisk pæ-

dagogik. Følgende citater beskriver, hvad Karsten Schnack lægger i begrebet handlekompetence:

“Opdragelse til demokrati er altså også opdragelse og kvalificering til deltagerrollen. Det er i dette lys, begrebet ‘handlekompetence’ skal ses. At udvikle handlekompetence bliver et dannelsesideal i demokratisk perspektiv. ‘Kompetence’ må gerne give associationer til noget med at kunne og ville være deltager” (Schnack, 1993, s.7).

Det dannelsesbegreb, Schnack henviser til, indeholder *“udover en indsigt i et vidensområde også, at man har etableret et kriterium for hvornår og til hvad, man vil anvende denne viden, at man har accepteret et ansvar for hvordan, hvornår og til hvad man vil anvende denne viden” (Nielsen, 1973, s.40-41) citeret efter (Schnack, 1993, s.7).*

Den overordnede ide er, at skolen må have som målsætning at bibringe studerende en handlekompetence i forhold til samfundsmæssige problemer. Selvom samfundsmæssige problemer ikke direkte kan siges at være fællesobjekt for vores kompetencer mener vi, at vores kompetencebegreb i sin grundide har meget til fælles med *handlekompetencen*. Ideen med at opstille vores kompetencebegreb er inspireret af den opfattelse, at matematik er samfundsformende, og at matematikundervisningen har til formål at *“... sætte alle elever i skolesystemet i stand til at forstå, tage stilling til og handle overfor matematikkens rolle i verden (naturen og samfundet)” (Niss, 1984, s.24)*. Vores kompetencer kan således opfattes som relevante aspekter af handlekompetencen, når man taler om at handle overfor matematikken i samfundet. Selvom vores kompetencer ganske vist er specifikt knyttet til arbejdet med matematiske modeller, drejer de sig også om aktiviteter med et bestemt formål, hvilket netop karakteriserer *handling* i Schnacks terminologi. Derudover ligger der i handlekompetence, at den aktivitet der udføres er noget man tager på sig, dvs. noget man både skal kunne og ville. Dette gælder også for vores kompetencer, måske specielt for kritikkompetencen.

I første omgang er det oplagt at opfatte kritikkompetencen, som den der er nærmest knyttet til handlekompetencen. Dette skyldes, at kritikkompetencen beskæftiger sig med modeller set i en samfundsmæssig sammenhæng, fordi den ser på modellen i anvendelse og derfor klart vil være et relevant aspekt af handlekompetencen. Vi mener dog, at kritikkompetencen i høj grad bygger på de andre kompetencer. Dette skyldes, at vi finder disse nødvendige både for at kunne stille de relevante spørgsmål og for at kunne besvare de spørgsmål, som kritikkompetencen sætter fokus på. Derudover vil selve det at kunne modellere udgøre en mulighed for handling i forhold til samfundsmæssige problemer.

På denne måde bliver alle vore kompetencer nødvendige aspekter af den mere overordnede handlekompetence.

Karsten Schnack skelner mellem *viden*, *erfaringer* og *handlinger*. Viden kan ifølge Schnack overføres til en person, men erfaringer er noget, man må handle sig til. Med *handling* mener han ikke blot en fysisk aktivitet, men at der foreligger en hensigt for den handlende. Erfaringer og handlekompetence hænger således nøje sammen, idet handlekompetence er en forudsætning for erfaringer, men erfaringer på den anden side kan medvirke til at kvalificere kompetencen (Schnack, 1993, s.9). Disse tanker kan illustrere, hvordan der vil ske progression i vore kompetencer: handlinger i form af modelleringsarbejde giver erfaringer, der vil lagres i vidensindholdet. Vidensindholdet bliver hermed mere indholdsrigt, hvilket vil påvirke kompetencens kvalitet. På denne måde bygges kompetencerne gradvist op.

2.3.2 Schoenfelds matematiske tænkning

I artiklen "*Learning to think mathematically; problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*" (Schoenfeld, 1992) præsenterer Schoenfeld fem centrale aspekter ved matematisk tænkning. Opdelingen i de fem aspekter er Schoenfelds egen, men i artiklen fremstiller han aspekterne, som nogle der tilsammen dækker over tanker, der hersker generel enighed om i matematikdidaktiske kredse. Fremstillingen inddrager forskning i matematisk tænkning indenfor adskillige fagområder, herunder forskellige filosofi- og psykologiretninger. Schoenfelds interesse i at beskæftige sig med matematisk tænkning er indlæringsmæssig. Det er hans overordnede synspunkt, at målet for matematikundervisning er at fostre matematisk tænkning hos de studerende, og dermed gøre dem til gode problemløsere, men at den nuværende undervisning ikke normalt gør det i særlig stor grad. Gennem hele artiklen påpeger Schoenfeld derfor, hvilke konsekvenser eksistensen af de forskellige aspekter bør have for undervisningen.

De fem centrale aspekter af matematisk tænkning er ifølge Schoenfeld: *vidensbasen* (The knowledge base), *problemløsningsstrategier* (Problem-solving strategies), *styring og kontrol* (Monitoring and control), *matematiksyn og affektive faktorer* (Beliefs and affects) og *praksis* (Practices). Schoenfeld relaterer ikke sine begreber om matematisk tænkning specifikt til matematiske modeller. De går mere bredt på matematik som sådan. Der er dog tydeligt paralleller til vores begreber. Ved at fremhæve de forskellige aspekter ved matematisk tænkning viser han, at det man skal lære gennem matematikundervisning er andet og mere end en mængde viden og standardprocedurer.

Schoenfelds begreber er ikke på nogen måde logisk adskilte kategorier men netop aspekter ved matematisk tænkning. De hænger tæt sammen og indvirker på hinanden. De to aspekter, der kommer tættest på vores kompetencer, er problemløsningsstrategier og kontrol. Disse aspekter har da også, som nævnt tidligere, fungeret som inspirationskilde i udviklingen af vores strategikompetence. Endelige er vores forståelse af vidensindholdet i de enkelte kompetencer også inspireret af Schoenfelds vidensbase. De to sidste aspekter *matematiksyn og affektive faktorer* samt *praksis* er områder, som vi ellers ikke berører, da de er direkte knyttet til indlæringen.

Vidensbasen

Schoenfelds *vidensbase* svarer nogenlunde til det, som vi kalder *vidensindholdet* i de forskellige kompetencer, og udgør på den måde ikke i sig selv en kompetence i vor forstand. Schoenfeld lægger dog vægt på, at det ikke kun er relevant, hvad man ved, men også hvordan adgangen er til denne viden. Begrebet *vidensbase* angår således også det at anvende viden; det at have tilgang til sin viden bliver opfattet som den aktive del af det at vide (Schoenfeld, 1992, s.349). Schoenfeld beskriver vidensbasens indhold generelt på følgende måde: "*Simply put, the issues related to the individual's knowledge base are: What information relevant to the mathematical situation or problem at hand does he or she possess? And how is that information accessed and used?*" (Schoenfeld, 1992, s.349). Indholdet i vidensbasen kan være af meget forskellig karakter, bla. må man skelne mellem *knowing that* og *knowing how*, dvs. mellem kendskab til facts og procedurer for den pågældende problemløsningsituation (Schoenfeld, 1992, s.351).

Schoenfeld påpeger, at den enkelte persons vidensbase kan indeholde *forkerte* fakta og procedurer. Dette er vigtigt at huske, når man vurderer personens handlinger, da disse forkerte elementer vil være den pågældende persons redskaber i en konkret problemløsningsituation.

En vidensbase med forkerte fakta eller procedurer giver ingen mening i forhold til vores kompetencebegreb. Når vi skriver, at vores vidensindhold nogenlunde svarer til Schoenfelds vidensbase, skal det forstås således, at vidensindholdet indeholder de samme kategorier men i en ideel tilstand. Ideelt i den forstand, at det indeholder korrekt relevant viden og procedurer på området i en umiddelbart tilgængelig form.

Schoenfelds beskrivelse af de områder i vidensbasen, som er relevante for en kompetent opførsel, vil derfor også være dækkende for vores vidensindhold: "*...informal and intuitive knowledge about the domain; facts, definitions, and*

the like; algorithmic procedures; routine procedures; relevant competencies; and knowledge about the rules of discourse in the domain" (Schoenfeld, 1992, s.349). Vidensbasen indeholder således ud over fakta og formelle procedurer aspekter af mere uformel og intuitiv karakter, som angår mening med de indgående elementer og begreber samt hele diskursen på området.

Schoenfeld fremhæver, at adgangen til viden om en problemsituation sker gennem *genkendelse* - gennem en kategorisering af problemet i forhold til tidligere erfarede situationer. Dette gør at vidensbasen er helt afgørende for ens muligheder for problemløsning (Schoenfeld, 1992, s.351). Hermed påpeges også vigtigheden af, at vidensbasen indeholder mange og varierede eksempler, for at man kan foretage denne problemkategorisering hensigtsmæssigt med henblik på problemløsning. Samtidig fastholder Schoenfeld også, at vidensbasen altid kun vil være det tilgængelige "ordforråd", uundværligt, men absolut ikke det eneste nødvendige for problemløsning.

Problemløsningsstrategier

Problemløsning og problemløsningsstrategier er helt centralt i Schoenfelds arbejde. I artiklen påpeger han nødvendigheden af en begrebsafklaring, idet det i litteraturen er ret uklart, hvad der egentligt menes med problemløsning. For Schoenfeld er problemer noget, man ikke umiddelbart har et svar på, og hvor det ikke på forhånd er klart, hvordan det skal løses - i modsætning til øvelser, hvor redskaberne er fastlagt fra start. Dette gør det interessant at beskæftige sig med problemløsningsstrategier. At se problemløsningsstrategier som en central del af matematisk tænkning hænger sammen med et syn på matematik som en aktivitet, og ikke blot som en samling af definitioner, sætninger og beviser.

Den måde Schoenfeld omtaler problemløsningsstrategier på svarer til vores forståelse af kompetencebegrebet. Schoenfeld forbinder ikke problemløsningsstrategier specielt med modelarbejde, men det er oplagt, at det også er en kompetence som har stor relevans indenfor matematisk modellering. I vores kompetencebeskrivelser indgår problemløsningsstrategier som en del af det, vi har kaldt strategikompetencen. Begrebet om problemløsningsstrategier er således møntet generelt på løsning af problemer inden for matematik, mens objektet for vores strategikompetence er arbejdet med matematiske modeller.

Schoenfeld fører problemløsning som didaktisk begreb tilbage til Polyas⁹ "*How to solve it*" fra 1945, (Polya, 1957) som *beskriver* en række problemløs-

⁹G. Polya var ved udgivelsen af bogen ansat og havde undervist ved Stanford University, USA.

ningsstrategier. Schoenfeld mener, at Polyas strategibeskrivelser har været banebrydende til at vise, at sådanne strategier findes. Polyas beskrivelser er ifølge Schoenfeld karakteriseret ved, at man kan genkende strategierne, når man ser dem, men at de er for generelle til at kunne bruges til undervisning. Et af problemerne er, at strategierne er meget kontekstafhængige, og at det ikke er vist, at der skulle være nogen større transfereffekt (Schoenfeld, 1992, s.352). Der er altså ikke nogle empiriske beviser for, at de strategier, som de studerende har lært indenfor et område af matematikken, umiddelbart kan anvendes indenfor et andet område. Schoenfeld ønsker derfor med sin forskning at videreudvikle beskrivelserne af problemløsningsstrategierne, så de kan anvendes til undervisning i problemløsning. En af Polyas strategier lyder: "*examining special cases*". En sådan ordlyd mener Schoenfeld, er for generel til at kunne bruges i en undervisningssituation. Han foreslår følgende mere præcise beskrivelser:

"Strategy 1. When dealing with problems in which an integer parameter n plays a prominent role, it may be of use to examine values of $n = 1, 2, 3, \dots$ in sequence, in search of a pattern.

Strategy 2. When dealing with problems that concern the roots of polynomials, it may be of use to look at easily factorable polynomials.

Strategy 3. When dealing with problems that concern sequences or series that are constructed recursively, it may be of use to try initial values of 0 and 1 - if such choices don't destroy the generality of the processes under investigation." (Schoenfeld, 1992, s.353).

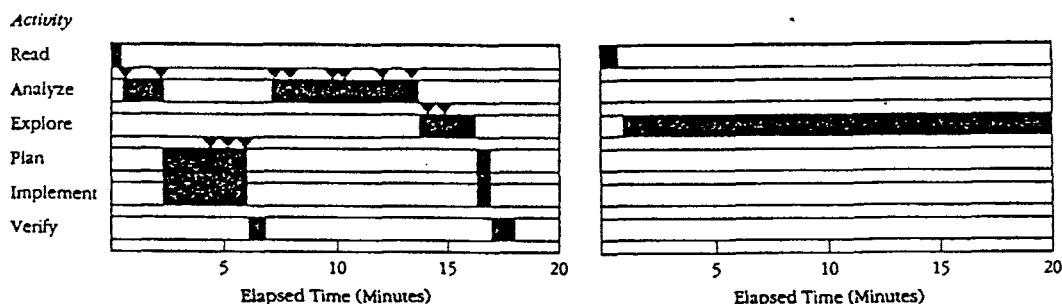
Schoenfelds strategier bygger på en kategorisering af problemer. Strategi 1 er således møntet på en klasse af problemer, hvor en heltals parameter n spiller en afgørende rolle, strategi 2 kan anvendes på en klasse af problemer, der handler om rødder i polynomier, og strategi 3 anvendes overfor problemer, der involverer rækker eller serier, som er opbygget rekursivt. Strategierne har på den måde fået et mere begrænset genstandsfelt end Polyas.

Vi har ikke forsøgt at lave så udførlige beskrivelser af, hvad den enkelte kompetence består i, men mener godt, at man kan sige, at vores opdeling i 9 modelkompetencer også er et forsøg på noget af det samme som Schoenfeld. Nemlig at vise at visse typer af aktiviteter, som kan beskrives med en rimelig grad af konkretisering, er generelle for forskellige problemsituationer, der kan opstå i arbejdet med matematiske modeller. Kompetencebeskrivelserne har dog tydeligvis ikke den detaljeringsgrad, som Schoenfeld ville kræve af en velbeskrevet problemløsningsstrategi. Dette vanskeliggør muligvis anven-

delsen af begreberne i indlæringsmæssig sammenhæng, hvilket heller ikke er vores umiddelbare målsætning.

Styring og kontrol

En vigtig evne for en problemløser er hos Schoenfeld det at kunne styre og kontrollere sin egen arbejdsproces. Ved at undersøge både elevers og professionelle matematikers arbejdsprocesser i en problemløsningsituation, har Schoenfeld fundet frem til, at den professionelle matematiker har et karakteristisk arbejdsmonster der - imodsætning til den typiske elevs - involverer en stor grad af kontrol, således at mål og midler hele tiden bliver vurderet undervejs, og fejlslag dermed kan stoppes hurtigt. Schoenfeld illustrerer dette med skemaer af den type, som er vist i figur 2.3. Det ses på figurerne, at matematikeren flere gange skifter "spor", og at hun flere gange eksplicit kommenterer status i egen arbejdsproces - illustreret på figuren med små trekantede. Disse omstændigheder viser, at matematikeren kontrollerer sin arbejdsproces ved en stadig vurdering af progressionen i problemløsningen. Den studerende derimod stopper ikke op og analyserer eller lægger planer for løsningen men fortsætter med at udforske problemet, selvom der ikke er nogen progression. Kontrollevnen, som er en del af begrebet metakognition, er afgø-



Figur 2.3: Schoenfelds problemløsningskemaer. Til venstre den professionelle matematikers, til højre den typiske studerendes. Tiden som de forskellige aktiviteter foregår i er afbilledet ud af 1.aksen. De forskellige aktiviteter er læsning af opgaven (read), analyse af opgaven (analyze), udforskning af opgaven (explore), planlægning af løsningen (plan), udførelsen af løsningen (implement) og til sidst et check af, at opgaven er løst tilfredsstillende (verify). De små trekantede, som optræder i matematikerens skema, repræsenterer tidspunkter, hvor problemløseren udtaler sig mundtligt om status i problemløsningen (Schoenfeld, 1992, s.356).

rende for en konstruktiv problemløsning. Det er ikke noget elever automatisk udvikler, men Schoenfelds pointe er, at den kan gøres til genstand for undervisning, bla. gennem at udfordre eleverne til at reflektere over hvad de gør, hvorfor de gør det, og hvad det skal føre frem til (Schoenfeld, 1992, s.356).

Det er hovedsageligt Schoenfelds kontrolbegreb der har været inspirationskilde til vores strategikompetence. Strategikompetencen indeholder dog også Schoenfelds problemløsningsstrategier. Vi har fundet det relevant at sætte dem sammen, da begge handler om arbejdsprocessen som sådan i at løse et givet modelproblem, og på den måde har relevans på alle niveauer i modeleringsprocessen. Da det er klart at kontrolevenen også bygger på en høj grad af refleksioner, er der således også en tæt sammenhæng til vores refleksionskompetence.

Matematiksyn og affektive faktorer

Grænsen mellem de kognitive og de affektive sider af matematisk tænkning er ifølge Schoenfeld ikke så klar, som man tidligere har opfattet det. I artiklen beskæftiger Schoenfeld sig ikke yderligere med de affektive faktorer særskilt men nøjes med at give en litteraturhenvisning. I stedet uddyber han kortfattet, hvad han forstår ved *beliefs*. I begrebet lægger han følgende: "... *an individual's understandings and feelings that shape the ways that the individual conceptualizes and engages in mathematical behavior...*" (Schoenfeld, 1992, s.358). Da det fremgår af artiklen, at det hovedsageligt er forståelsen og følelserne for matematik, Schoenfeld hentyder til, har vi valgt at oversætte *beliefs* med matematiksyn.

Schoenfeld fremhæver, at det er nødvendigt at betragte ikke bare elevernes matematiksyn men også lærernes og samfundets, da de har afgørende betydning for mulighederne for matematiklæring, idet eleverne i høj grad indsocialiserer sig i bestemte opfattelser af, hvad matematik kan gå ud på mm. gennem skolesystemet. Ligegyldigt om man er bevidst om sit matematiksyn eller ej, så har det konsekvenser for ens "matematiske opførsel". Som eksempel på henholdsvis et elevmatematiksyn og et lærermatematiksyn kan nævnes "... *ordinary students cannot expect to understand mathematics; they expect simply to memorize it and apply what they have learned mechanically and without understanding*" (Schoenfeld, 1992, s.359) "*Mathematics is more a subject of ideas and mental processes than a subject of facts*" (Schoenfeld, 1992, s.360). Den enkeltes matematiksyn er ikke noget der læres eksplicit, men er mere et spørgsmål om socialisering.

Det er oplagt, at den enkeltes indstilling til, hvad matematik er, samt ople-

velse af faget vil være afgørende for hvilken form for matematisk tænkning, personen udvikler og dermed også for udviklingen af modelkompetencerne. Matematiksyn og affektive faktorer vil således have betydning for, om hun er i stand til at udvikle kompetencen i en læringssituation, og om hun kan realisere de kompetencer hun besidder. Progression i kompetencerne vil derfor i høj grad være afhængig af disse faktorer.

Matematiksyn, læringsstrategier mv. er imidlertid ikke i sig selv kompetencer, og er derfor ikke noget, vi i øvrigt kommer særlig meget ind på. Dette gør det dog ikke mindre væsentligt, hvilket vi da også er opmærksomme på, da det tydeligvis i høj grad er med til at sætte rammerne for, hvad der kan foregå i matematikundervisningen.

Praksis

I forlængelse af ovenstående uddyber Schoenfeld sin pointe om, at vigtige sider af matematisk tænkning ikke kan gøres til direkte genstand for undervisning, men må læres gennem den sociale proces og de aktiviteter, der finder sted i klasselokalet. At lære at tænke matematisk er også en socialisationsproces, som medvirker til, at man får tilskrevet og oplevet mening med centrale begreber som definitioner, beviser, gæt, matematisk erkendelsesproces mv. Konsekvenserne af disse overvejelser handler om, hvordan man skal tilrettelægge matematikundervisning, således at denne sociale proces får gode vilkår.

For en undervisning i matematiske modeller må dette betyde, at der bliver lagt vægt på, at de studerende aktivt arbejder med modeller, og at læreren indgår som repræsentant for det matematiske miljø. Læreren skal altså ikke virke som en alvidende autoritet, men som en der kan konsulteres i, og som stiller spørgsmål til arbejdet. Herved skulle man opnå, at de studerende selv får ansvaret for de matematiske afgørelser og deres arbejde vil således nærme sig en oplevelse af en matematisk erkendelsesproces.

En opsummering

Det er klart, at Schoenfelds beskrivelse af matematisk tænkning i mange henseender adskiller sig fra vores kompetencer. Hans sigte er langt mere direkte rettet mod læring, hvor vi vil beskrive hvad det er for kompetencer, der kan udvikles. Der er dog ingen modstrid mellem Schoenfelds og vores begreber, hvilket har gjort, at vi har kunnet lade os inspirere af tre af hans

aspekter. Således er det vi har benævnt vidensindhold i kompetencegennemgangen en form for idealiseret vidensbase, og vores strategikompetence er en kombination af Schoenfelds to aspekter om henholdsvis *styring og kontrol* og *problemløsningsstrategier*. Sidstnævnte gør at vores strategikompetence kan relateres til en bredere problemløsnings- og kontrolkompetence, der har matematikken - og altså ikke blot matematiske modeller - som genstandsfelt. I en endnu større samme sammenhæng vil man kunne tale om en helt generel kompetence til at lægge strategier for løsning af problemer af enhver art.

2.3.3 Skovsmoses videnstyper

Ole Skovsmose introducerer i "*Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*" (Skovsmose, 1994) bla. tre forskellige videnstyper: *teknologisk viden*, *matematisk viden* og *refleksiv viden*. De tre begreber indgår i en større behandling af begrebet "mathemacy"¹⁰, der foretages med henblik på at udforske termen "competence of mathemacy". Det overordnede sigte med hele bogen er at belyse *kritisk matematikundervisning*. Den refleksive viden indtager en særrolle i behandlingen. Vi vil i dette afsnit først gengive hovedpunkterne i Skovsmoses fremstilling af de tre videnstyper og derefter sætte de tre begreber i relation til vores kompetencer. Sigtet er at give vores kompetencer - specielt refleksions- og kritikkompetencen, som er inspirerede af Skovsmoses arbejde - mere indhold gennem denne sammenligning.

De tre videnstyper beskriver Skovsmose således

"(1) Mathematical knowledge, which refers to the competencies we normally describe as mathematical skills. (These include competencies in reproducing mathematical thoughts, theorems and proofs, as well as in performing algorithms for calculations. The advanced competence of inventing and discovering new mathematics is also included.)

(2) Technological knowledge, which refers to the ability to apply mathematics and formal methods in pursuing technological aims...

(3) Reflective knowledge, which has to do with evaluation and general discussion of what is identified as a technological aim, and the social and ethical consequences of pursuing that aim with selected tools." (Skovsmose, 1994, s.100-101).

¹⁰Begrebet "mathemacy" er en parallel til "literacy", som dækker over det at kunne læse og skrive.

Refleksiv viden er altså først og fremmest nødvendig, når man skal vurdere konsekvenserne af at opfylde et *teknologisk mål*¹¹. Dette skyldes, at den samme type viden ikke kan bruges både til at opfylde et givent teknologisk mål og til at vurdere de videre konsekvenser af at have opfyldt det. Den teknologiske viden kan med andre ord ikke bruges til at vurdere konsekvensen af de teknologiske handlinger. Til dette er det nødvendigt med refleksioner, som medtager referencer til blandt andet normer og værdier. Refleksionerne bygger naturligvis på noget af den teknologiske viden. Men Skovsmose pointerer, at det ikke er hele den teknologiske viden, som er nødvendig for refleksioner. Hvis den refleksive viden byggede på hele den teknologiske viden, ville resultatet ifølge Skovsmose være et samfund, hvor kun eksperter havde mulighed for at deltage aktivt i samfundsdebatten, et såkaldt *ekspertokrati* (Skovsmose, 1994, s.99).

Der gælder noget tilsvarende om relationen mellem den teknologiske og den matematiske viden. Den teknologiske viden skal altså ikke opfattes som byggede på hele den matematiske viden. Dette illustrerer Skovsmose med brugen af en lommeregner til beregninger (et teknologisk mål). Overordnet er dette en matematikanvendelse og hører dermed under teknologisk viden; pointen er at denne brug ikke kræver den samme viden som den matematiske viden, der ville være nødvendig uden lommeregneren.

De tre videnstyper er i høj grad afhængige af hinanden: "*I suggest there is a web of interrelationship between types of knowing*" (Skovsmose, 1994, s.123). Hermed menes, at en aktivitet kun sjældent kan siges at trække på blot den ene af de tre videnstyper. Videre nævner Skovsmose som eksempel, at refleksioner kan føre til ændringer i de teknologiske mål, hvilket i visse tilfælde kan føre til en ændring i brugen af de anvendte matematiske værktøjer. Feks. kan det blive nødvendigt at skifte til andre mere passende værktøjer.

Skovsmoses endelige beskrivelse af "mathemacy" lyder således: "*...mathemacy must be seen as being composed of the different competencies, a mathematical, a technological and a reflective competence. But especially: Reflective knowing has to be developed to provide mathemacy with an element of empowerment.*" (Skovsmose, 1994, s.117).

Refleksiv viden indtager, som nævnt, en særstilling hos Skovsmose. Dette skyldes, at kompetencen er nødvendig for at tage begrundet stilling i en diskussion af teknologiske spørgsmål. Derved relaterer refleksiv viden sig til den generelle kompetence, der er nødvendig for at kunne agere som en kritisk borger i dagens samfund.

¹¹Ole Skovsmose benytter begrebet *teknologi* i en bred fortolkning. Se (Skovsmose, 1990b) og (Skovsmose, 1994).

Før vi uddyber indholdet af den refleksive viden, vil vi kort nævne, at Skovsmose selv diskuterer det misvisende i at bruge termen *viden* i forhold til en brug af termen *kompetence*. Som det ses af ovenstående citat bruger han begge begreber. Ifølge Skovsmose giver ordet viden associationer til "...existence of some degree of explicability and perhaps the existence of some sort of authorised body of knowledge..." (Skovsmose, 1994, s.101). Dette er specielt i forbindelse med den refleksive viden uheldigt, da den snarere består af *tænkemåder* og *handlemuligheder*. Disse overvejelser fører til, at termen "knowing" såvel som "knowledge" optræder i teksten.

Skovsmose giver en mere specifik fortolkning af, hvad der ligger i "reflective knowing". Da han gør det i forhold til matematisk modellering, har vi fundet det relevant også at medtage disse punkter. Skovsmose afgrænser "*Three tasks of reflective knowing*" og "*Six entry points to reflective knowing*", sidstnævnte er tænkt til undervisningssituationer.

De tre opgaver for den refleksive viden er:

1. At afdække de antagelser, idealiseringer, simplifikationer, mm. der er foretaget i systemafgrænsningen.
2. At klarlægge problemer i overgange mellem de forskellige "sprog" som er involveret på forskellige niveauer i modelleringsprocessen. Skovsmose lægger vægt på, at der benyttes mindst fire forskellige sprog i en modelleringsproces. Det første er det "naturlige sprog", som bla. benyttes i formuleringen af det problem, der tages udgangspunkt i. Næste sprog er et "systemsprog", der bla. anvendes i systemafgrænsningen, og som benytter sig af terminologi fra de teorier, der inddrages i afgrænsningen. Tredje sprog er det "matematiske sprog", som bla. bruges i matematiseringen, og sidste sprog er et "algoritmisk sprog", der ind imellem er nødvendig i behandlingen af modellen. Da disse fire sprog er af vidt forskellig natur, eksisterer der ingen entydig oversættelsesprocedure mellem dem. Som illustration kan gives, at det naturlige sprog kan indeholde normer og usikkerheder, mens dette ikke kan udtrykkes i matematisk sprog. At afdække omstændigheder i forbindelse med dette forhold er den anden opgave for den refleksive viden.
3. At klarlægge hvordan modelleringen påvirker den kontekst, den er placeret i, dvs. at afdække den samfundsformende magt. Dette punkt uddybes med fire aspekter:
 - 3.1 Problemidentifikation. Dette aspekt sætter fokus på, at udgangsproblemet løbende vil blive ændret bla. på grund af de forskellige sprog, der er involveret i arbejdet.
 - 3.2 Argumentationsstrukturen. Andet aspekt vedrører det punkt, at anvendelsen af en model påvirker de argumenter, der vil kunne anvendes i diskus-

sionen af det pågældende problem. Præciseringen af problemet, så det kan modelleres, begrænser antallet af faktorer der inddrages og dermed hvilke argumenter der kan fremføres.

3.3 Kritikbasens historie. Tredje aspekt beskæftiger sig med kritikbasen, som indeholder de befolkningsgrupper, som vil være i stand til at forholde sig til problemet. Indholdet af denne kritikbase vil ændre sig betydeligt, idet en matematisk model inddrages i behandlingen. Således vil det antal af mennesker, der kan kritisere modellen, mindskes pga. den specialisering en model vil medføre.

3.4 Handlingsrækkevidde. Sidste aspekt inddrager diskussion af de mulige handlinger, der kan foretages på baggrund af modelleringen. Formålet er således at belyse det faktum, at opbygningen af en model til et teknologisk formål ofte resulterer i konkrete handlinger.

Disse fire aspekter udgør tilsammen den tredje opgave for den reflektive viden, der overordnet stiler mod at vurdere, hvordan modelleringen påvirker konteksten (Skovsmose, 1994, s.105-114).

Udover at præcisere disse tre opgaver for den reflektive viden fremdrager Skovsmose 6 indgangsspørgsmål til reflektiv viden, som kan benyttes i en undervisningssituation. Da disse kan illustrere forskellen mellem henholdsvis refleksionskompetencen og kritikkompetencen, har vi valgt også at medtage de 6 punkter. De 6 spørgsmål lyder:

1. Har vi brugt algoritmen på den rigtige måde?
2. Har vi brugt den rigtige algoritme?
3. Kan vi stole på de resultater, vi har opnået?
4. Kunne vi have løst problemet uden matematik?
5. Hvordan påvirker den konkrete løsningsmetode konteksten?
6. Kunne vi have evalueret vores løsningsmetode på en anden måde?

Overordnet beskæftiger de to første punkter sig med "det matematiske værktøj", de to næste sig med relationen mellem værktøjet og opgaven, spørgsmål 5 retter sig mod de ydre påvirkninger, og 6 refererer tilbage til de første fem punkter (Skovsmose, 1994, s.120).

I slutningen af næste afsnit vil vi vende tilbage til både de tre opgaver for reflektiv viden og til de seks listede spørgsmål, idet vi forholder dem til refleksionskompetencen og kritikkompetencen.

Skovsmoses videnstyper i forhold til kompetencebegrebsapparatet

For det første vil vi pointere, at Ole Skovsmoses videnstyper ikke kan reduceres til det vidensindhold, som vi tilknytter vores kompetencer. Der ligger

noget aktivt i Skovsmoses *viden*. Dette markerer Skovsmose også selv tydeligt i diskussionen af anvendelsen af begrebet, og idet han vælger også at benytte termen "knowing" sideløbende med termen "knowledge". Vi mener at Skovsmoses videnstyper bygger på den samme ide, som vi har med vores kompetencer, men at Skovsmose har valgt en anden og mere overordnet inddeling.

Vores modelkompetencer indeholder forskellige blandinger af Skovsmoses matematiske og teknologiske viden samt af refleksioner. Refleksioner udspænder ikke hele Skovsmoses begreb; refleksiv viden, men de hidrører derfra. I forhold til Skovsmose går vores opdeling i de forskellige kompetencer således på "tværs af" hans videnstyper. Idet hele modelleringsprocessen kan opfattes som en teknologisk aktivitet, kan den kompetenceopdeling vi har til dels siges at udspringe af de (teknologiske) delmål, man kan opstille for at nå frem til opstillingen af en passende model - udvidet med de aktiviteter, der specielt er fremtrædende ved en analyse af modellen.

Vi vil nu illustrere, hvad vi mener med, at vores kompetencer indeholder en blanding af de to vidensformer samt refleksioner. Når begreberne teknologisk viden, matematisk viden og refleksiv viden optræder, er det som Skovsmose har beskrevet dem.

Struktureringskompetencen: Selve aktiviteten at strukturere kan i stort omfang tilskrives en teknologisk viden, da selve struktureringen er en metode til at bevæge sig mod en modelopstilling. Det er oplagt, at struktureringen vil nyde godt af refleksion, så refleksiv viden er også tilstede i kompetencen. Struktureringskompetencen indeholder også en matematisk viden, som vi beskriver den, idet struktureringen foregår med en matematisering for øje. Den matematiske viden har i vores beskrivelse af struktureringskompetencen nok mere karakter af noget viden end en kunnen.

Vores beskrivelse af modelløsningskompetencen har elementer, der kan findes i den matematiske og den teknologiske viden. Skovsmoses to videnstyper dækker kompetencen ganske godt. Feks. vil den algoritmiske tankegang, vi har beskrevet, høre under den matematiske viden. Mht. den refleksive viden mener vi formuleringen "*... at vide hvilke muligheder og ikke mindst begrænsninger der er i at bevæge sig i et rent matematisk univers.*" fra beskrivelsen af kompetencen i afsnit 2.2.4, er et eksempel på en viden, der vil komme frem ved refleksioner. Vi mener dog ikke, at den refleksive viden er involveret i stor grad i modelløsningskompetencen, men at denne kompetence hovedsageligt indbefatter matematisk og teknologisk viden.

Skovsmoses mål er at beskrive "competence of mathemacy"; under dette er

kommunikationskompetencen ikke lige så oplagt, som de øvrige kompetencer vi beskriver. Det er alligevel muligt at forholde denne kompetence til Skovsmoses videnstyper. Kommunikationskompetencen indeholder matematisk viden, da en redegørelse for resultaterne klart vil være styrket af, at man kan reproducere matematiske tankegange. Refleksioner vil oplagt være altafgørende for en rapportering, så man kan sige, at kompetencen vil være noget nær fuldt tilstedeværende, hvis hele den refleksive viden blev inddraget i en kommunikationsproces.

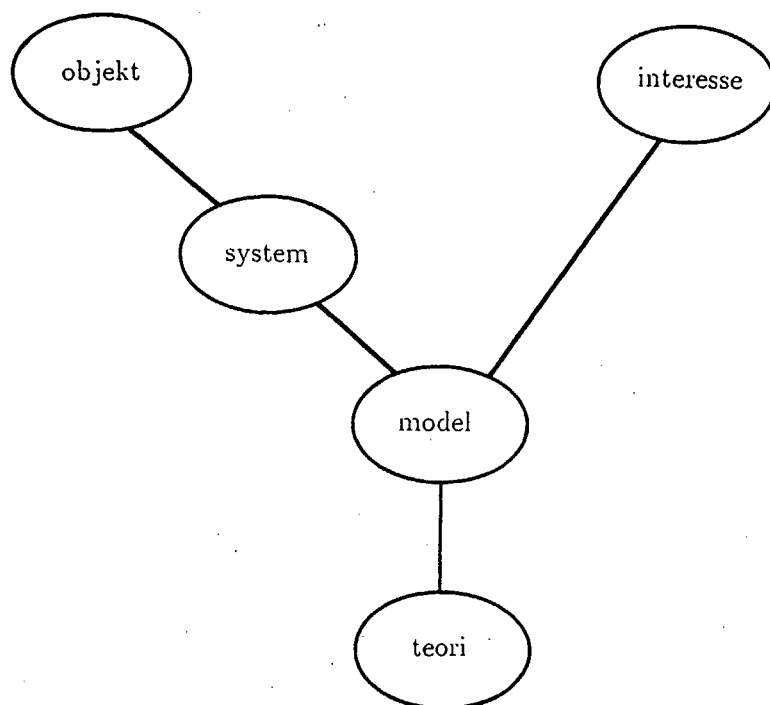
For at mestre strategikompetencen er det nødvendigt med både matematisk og teknologisk viden. Problemløsningsstrategier og styring er baseret på en matematisk viden. De selv samme strategier kan betragtes som metoder, og her kommer den teknologisk viden ind, da denne dækker over en anvendelse af metoder, som netop kan være problemløsningsstrategier. For at udføre selve kontrol delen af strategikompetencen må der anvendes nogle refleksioner.

Den refleksive viden er hovedsagen i refleksions- og kritikkompetencen. Skellet mellem de to kompetencer kan relateres til Skovsmoses opdeling i modellens *strukturelle* og *dynamiske relationer*, som han præsenterer i "*Ud over matematikken*" (Skovsmose, 1990b). Disse relationer er dem, som Skovsmose mener skal belyses, når man analyserer en matematisk model.

Opdelingen i modellens strukturelle relationer sætter fokus på de *elementer*, som en model er relateret til. Skovsmose udpeger følgende elementer: Modellen i relation til *teori*, i relation til det afgrænsede *system* og *objektet* for modelleringen samt i relation til *interessen* i modelleringen. Disse sammenhænge er illustreret på figur 2.4.

Relationen *model - teori* er central, fordi der altid vil være involveret en eller flere teorier, når et virkelighedsudsnit anskues og fordi den eller de pågældende teorier kan være af forskellig karakter. Relationen *objekt - system - model* sætter fokus på, at en model aldrig direkte vil modellere et stykke virkelighed, men at der altid vil være et system mellem objektet og modellen. Derudover markerer relationen, at modelobjektet sjældent vil være en veldefineret størrelse. Sidste relation, *model - interesse*, påpeger vigtigheden af at overveje, hvilken eller hvilke interesser der ligger bag en given modelopstilling. Det er klart, at en del af undersøgelsen af disse relationer må indbefatte de to første "opgaver for den refleksive viden", dvs. den opgave der ligger i at afdække antagelser, idealiseringer mm. og den anden opgave i at klarlægge konsekvenser af de forskellige involverede sprog.

En models dynamiske relationer angår de relationer, der er centrale, når en model anskues som en del af en større undersøgelsesproces. Modellen ses altså her i et historisk perspektiv. De dynamiske relationer betragtes for



Figur 2.4: En models *strukturelle* relationer ifølge Ole Skovsmose. De strukturelle relationer angår de elementer, som en model almindeligvis relaterer sig til. Disse relationer skal undersøges, når en model analyseres. Som supplement til denne synsvinkel opererer Skovsmose med en models *dynamiske* relationer, hvor modellen anskues som en del af en større undersøgelsesproces (Skovsmose, 1990b, s.121).

at få belyst det samspil der kan eksistere indenfor modellens strukturelle relationer. Disse dynamiske relationer belyser Skovsmose nøjagtig med de fire aspekter, der er nævnt som den tredje opgave for den refleksive viden. Det er imidlertid oplagt, at de tre opgaver for den refleksive viden hænger nøje sammen - de bygger så at sige på hinanden. Tilsvarende bygger anskuelsen af en models dynamiske relationer på en forståelse for de strukturelle relationer.

Vi mener, at studiet af en models dynamiske relationer hører under kritikkompetencen mens undersøgelsen af de strukturelle relationer hovedsageligt hører under refleksionskompetencen. Sammenhængen mellem de forskellige relationer gør dog, at undersøgelsen af de strukturelle relationer også kan falde ind under kritikkompetencen. Således udspænder refleksions- og kritikkompetencen tilsammen den refleksive viden.

Forholdet mellem refleksionskompetencen og kritikkompetencen kan endvidere klargøres ved at sammenholde de to kompetencer med de seks indgangsspørgsmål til refleksiv viden, som Skovsmose foreslår til undervisningsbrug. Her angår refleksionskompetencen spørgsmål med fokus på det matematiske værktøj og relationerne mellem værktøj og problemstilling (indgangsspørgsmål 1-4); mens kritikkompetencen har fokus på de dynamiske sammenhænge (indgangsspørgsmål 5) og refleksioner over alle de tidligere handlinger og refleksioner (indgangsspørgsmål 6).

En opsummering

Skovsmose fremhæver, at der er et tæt net mellem de tre videnstyper. Med den inddeling, som modelkompetencerne udgør, understreges dette samspil mellem de tre vidensformer, og det står klart at alle videnstyperne er nødvendige for at beherske hver enkelt kompetence.

Styrken ved Skovsmoses inddeling i tre typer viden er, at den er bred, så det vil være muligt at placere de fleste modelleringsaktiviteter indenfor disse, som vi netop har gjort. Disse begreber ville altså være mulige at bruge som et analyseapparat på linie med det, vi har udviklet. Men målet med vores inddeling er at opnå, at en given modelleringsaktivitet kan placeres i en af kompetencerne. Derfor skal beskrivelserne være mere tilgængelige og give beskrivelser af det konkrete indhold. I forhold til dette har Skovsmoses videnstyper den svaghed, at man ikke umiddelbart kan læse og overskue hvilke aktiviteter, der rent faktisk er indeholdt i de tre videnstyper.

2.4 Diskussion af modelkompetencerne i forhold til modeltyper

Vi har tidligere skitseret de forskellige elementer i modelleringsprocessen som værende generelle for alle typer af matematiske modeller. Alle matematiske modeller har på den måde nogle fællestræk, hvilket er det der i sidste ende, gør det relevant og muligt at tale om modelkompetencer, og at have "matematiske modeller" på programmet i matematikundervisningen. På den anden side er det også ganske klart, at matematiske modeller er mange ting, og at de kan have vidt forskellig karakter og videnskabelig status, samt at disse forskelle er væsentlige, bla. når det drejer sig om at vurdere og kritisere modellerne.

Vi anser derfor "viden om modeltyper" som en vigtig del af vidensindholdet i flere af kompetencerne. Denne viden vil være gavnlig for og medbestemende for aktiviteter der vil foregå i de pågældende kompetencer. Modeltypeinddelinger kan således sætte fokus på, at der skal udføres nogle bestemte aktiviteter, som vil høre under de forskellige kompetencer. Diskussionen af forskellige modeltyper kan dermed konkretisere kompetencernes indhold og dermed nuancere beskrivelsen af begrebsapparatet.

I det følgende vil vi først præsentere nogle af de modeltypeinddelinger, vi har mødt i litteraturen og give et overblik over dem ved at gruppere disse inddelinger. Der kan givetvis opstilles flere modeltypeinddelinger, end dem vi nævner her, men vi mener, at de her medtagede giver et nogenlunde dækkende billede.

Vi har valgt at bruge ordet modeltype i stedet for modelkategori for at fremhæve, at der ikke er tale om nogen endegyldig opdeling, men at en given model godt kan være en blanding af flere typer, hvilket vi vil vende tilbage til i det følgende.

2.4.1 Gruppering af nogle modeltypeinddelinger

Det er klart, at "modelrummet" kan skæres på mange måder, og at der ikke er nogen entydig rigtig måde at gøre det på. Den valgte opskæring vil afhænge af, hvad man ønsker den fremkomne opdeling skal belyse. Overordnet mener vi, at de modeltypeinddelinger vi har mødt i litteraturen, falder i tre forskellige grupper: 1. Modellens relation til virkeligheden, 2. Formålet med modellen og 3. Modellens indre natur. Modeltypeinddelingerne i de tre grupper sætter således fokus på hhv. modellens forhold til virkeligheden, modellens overordnede hensigt og modellens anvendte metode. Vi vil selvfølgelig ikke inddrage samtlige modeltypeinddelinger, som vi er stødt på i litteraturen, men vil indenfor hver gruppe se på tre-fire forskellige, som vi mener er repræsentative og som tilsammen udspænder gruppen.

I den første gruppe vil vi inddrage tre forskellige måder at inddele modeller på. For det første en opdeling af modeller efter det *genstandsfelt*, de tager udgangspunkt i. Det kan f.eks. være en inddeling efter det fagområde problemet hører til som biologi, fysik, eller økonomi, eller det kan være en inddeling efter problemområdet, som f.eks. transport, forurening, blodomløbet eller politiske systemer. Sidstnævnte inddeling vil tit inddrage flere forskellige fag og derfor gå på tværs af førstnævnte inddeling (Kapur, 1988, s.7).

Den anden typeinddeling, vi medtager i første gruppe, har vi mødt hos Jens

Højgaard Jensen¹². Jens Højgaard Jensen opererer med to modeltyper: *teoribaserede* modeller overfor *ad-hoc* modeller (Jensen et al., 1980; Jensen, 1980). Teoribaserede modeller er i Jens Højgaard Jensens terminologi modeller, der hviler på et solidt teoretisk fundament¹³. Som eksempler på sådanne modeller nævnes mekaniske modeller fra fysikken, f.eks. en satellitmodel til beregning af en satellits placering og en model til beregning af en krans bæreevne. Overfor disse sættes *ad-hoc* modeller, som er modeller uden eller med svagt teoretisk grundlag. Som eksempel nævner Jens Højgaard Jensen den makroøkonomiske model SMEC¹⁴ og fiskerimodeller for dambrug. Jens Højgaard Jensens inddeling har til formål at illustrere, hvilken art af viden modelbyggeren har om den virkelighed, han eller hun ønsker at modellere, og hvad det betyder for modellens status.

En tredje opdeling er af Morten Blomhøj, som opdeler modeller i *punkt-anvendelser* og *fladeanvendelser*. Punkt-anvendelser indbefatter modeller, der anvendes til at belyse specifikke samfundsmæssige og erhvervsmæssige dele af virkeligheden, mens fladeanvendelser anvendes om modeller, som er en mere integreret del af virkeligheden. Pengesystemet og skatte- og afgiftssystemet er eksempler på fladeanvendelser (Blomhøj, 1992, s.29). Denne modeltypeinddeling har vi valgt at placere i denne gruppe, da den også belyser modellens relation til virkeligheden. I modsætning til de to førstnævnte typeinddelinger tænker vi imidlertid ikke på relationen til det virkelighedsfelt, der tages udgangspunkt i, men derimod på relationen til den virkelighed, hvor modellen finder sin anvendelse.

I næste gruppe har vi placeret de typeinddelinger, der fokuserer på modellernes formål. Her vil vi give fire eksempler. Saaty og Alexander¹⁵ opdeler modeller i to typer. De *kvantitative* modeller, som besvarer spørgsmål som; "Hvor mange?" og "Hvor længe?", sat overfor modeller af den *kvalitative* type, som giver mulighed for at studere relationerne mellem systemer og deres egenskaber (Saaty & Alexander, 1981, s.6).

En anden inddeling, der falder i gruppen efter formål, er Blum og Niss' inddeling i de to modeltyper: *deskriptive* og *normative*. De deskriptive modeller

¹²Jens Højgaard Jensen er lektor i fysik og ansat ved IMFUFA, RUC.

¹³Jens Højgaard Jensen er senere gået bort fra betegnelsen teoribaseret til fordel for betegnelsen *teoriafledt* om denne type af modeller. Dette skyldes, at næsten alle modeller vil kunne siges at være *teoribaserede* - hvilket fratager begrebet sin gennemslagskraft i en diskussion.

¹⁴SMEC står for Simulation Model of the Economic Council. Den er udarbejdet af Det økonomiske Råds Sekretariat.

¹⁵Thomas L. Saaty er tilknyttet University of Pennsylvania, USA; Joyce M. Alexander er tilknyttet Immaculata College, Pennsylvania, USA. Begge er matematikere.

har som formål at bruge matematikken til at beskrive og forklare en given situation - de giver som eksempler planetbevægelser og radioaktivt henfald - mens de normative har som formål at etablere visse normer for værdiafgørelser. Som eksempel på modeller af den normative type giver Blum og Niss økonomiske modeller for skat o.l. (Blum & Niss, 1989, s.2).

P.J. Davis¹⁶ opdeler matematiske modeller i tre typer efter, om deres formål er *beskrivende*, *forudsigende* eller *foreskrivende* (Davis, 1991, s.2). Som eksempel på en beskrivende model tager Davis Ptolemæus' planetmodel. Ptolemæus' planetmodel beskriver planeternes bevægelser rundt om jorden som epicirkler, dvs. som mindre cirkelbaner med centrum på en større cirkel med jorden som centrum. Denne beskrivelse stemte overens med observationer fra jorden, men viste sig senere at være forkert. Dermed illustrerer han, at beskrivelser ikke nødvendigvis er sandheder. En forudsigende model kan give anledning til udsagn af typen: "Populationen i et givet land på et givent tidspunkt vil være $57.056.908 \pm 7.894$ ". En foreskrivende model har som mål at udmunde i udtalelser om, hvordan noget skal gøres, og giver således mulighed for handling. Et eksempel på dette er en beregning af hvor meget øl, der skal købes til en fest ud fra de tilbagemeldinger, man har fået på de udsendte invitationer.

Et fjerde og sidste eksempel fra denne gruppe er en inddeling af Ole Skovsmose i to typer alt efter, om den bagvedliggende interesse er *teknologisk* eller *videnskabelig*. Da interessen har nøje sammenhæng med formålet med modellen, har vi placeret inddelingen i denne gruppe. Til den teknologiske type hører modeller, der har som mål at forbedre en given produktivitet eller teknologisk konstruktion, mens de videnskabelige modeller sigter mod at bibringe større erkendelse på et givent område. Sidstnævnte kan være ved at falsificere eller verificere en teori (Skovsmose, 1988, s.12).

Den sidste gruppe af typeinddelinger sætter fokus på modellens indre matematiske natur. I denne gruppe falder opdelinger efter de involverede *matematiske teknikker*, som feks. lineær algebra, partielle differentiaalligninger og integralligninger (Kapur, 1988). Derudover vil opdelinger af modellerne efter om deres grundlæggende struktur er feks. lineær overfor ikke-lineær, dynamisk overfor statisk, eller stokastisk overfor deterministisk (Kapur, 1988), høre til i denne gruppe.

¹⁶P.J. Davis er tilknyttet Brown University, Providence, USA. Han er matematiker og har sammen med R. Hersh skrevet bøger som "*Descartes Dream*" (1986) og "*The Mathematical Experience*" (1981).

Det ses af ovenstående, at typeinddelingerne ofte har karakter af to analytiske modsætninger. Dette er meget godt til at udspænde feltet af muligheder og til at pointere det forskellige ved modellerne. Ulempen ved dette er imidlertid, at der er en vis fare for overforenkling. De modeller vi møder, vil sjældent være "enten-eller", men vil oftest være "både-og", og det er dette både-og det kræver øvelse at forholde sig hensigtsmæssigt til.

Det må også være klart - ud fra den måde typeinddelingerne er konstrueret på - at de nævnte mulige typeinddelinger overlapper hinanden. Man kan altså ikke sige, at de opdeler modelrummet i nogle få adskilte kasser. En given model kan indplaceres efter samtlige typeinddelinger, men der er ingen entydig sammenhæng mellem, hvordan den skal indplaceres de forskellige steder. Det at modellen har en bestemt relation til virkeligheden, feks. til biologi, betyder ikke, at den automatisk vil have et bestemt formål og omvendt. Det samme gælder feks. for forskellige modeller med samme genstandsfelt, der udmærket kan tænkes at have et forskelligt teoretisk fundament, ad-hoc ifht. teoribase-ret. Sidst men ikke mindst, så kan en model ikke placeres i én modeltype en gang for alle. En model, der er udviklet til et bestemt forskningsformål som at forklare nogle grundlæggende sammenhænge, kan udvikles eller overgå til at benyttes i en given handlingsorienteret proces. Et eksempel kunne være en model, der oprindeligt havde som formål at beskrive sammenhængen mellem forurenende stoffer i et vandløb og afstanden fra et rensningsanlægs udløb, kunne bruges i en anden sammenhæng til at bestemme grænseværdier for udledning af et givent stof. Beskrevet med Davis' terminologi ville det være et eksempel på en model, der overgik fra et beskrivende til et foreskrivende formål.

2.4.2 Diskussion af modeltypeinddelinger

Pointen i at inkludere *viden om modeltyper* i nogle af kompetencernes vidensindhold er, at forskellige modeltyper ofte giver anledning til forskellige aktiviteter og refleksioner overfor modellen. Dermed ikke sagt, at al aktivitet kan afledes af, at en model tilhører en given modeltype. Der er heller intet der tyder på, at en given modeltype vil give anledning til, at nogle af modelkompetencerne ikke bliver brugt. Men vi mener, at modelbyggeren ved at forholde sin model til en given modeltype kan udnytte den viden, der på forhånd ligger om lige netop den type modeller til at blive opmærksom på feks. hvilke vurderinger, der kan og bør laves overfor den type modeller. I det følgende vil vi derfor uddybe grupperne og de tilhørende modeltyper i et forsøg på at belyse, hvordan de forskellige modeltyper kan indvirke på hvilke aktiviteter, der kommer til at repræsentere de forskellige modelkompetencer.

Modellens relation til virkeligheden

Modeltyperne i denne gruppe har at gøre med vores viden om den virkelighed, som modellen relaterer sig til. Det kan enten være om den virkelighed, som problemet oprindeligt er indlejret i eller det kan være om den virkelighed, som modellen til slut finder sin anvendelse i.

I diskussionen om modeller og problemer ved modeller generelt har opdelingen efter genstandsfelt ikke så stor betydning. Men i praksis vil den have betydning, idet man for at kunne modellere og vurdere modeller nødvendigvis må have en relativ stor viden om det genstandsfelt, modellen er indlejret i; "Hvad ved man om problemfeltet?", "Hvad foretages systemafgrænsningen i forhold til?". Ligeledes vil det være relevant, når man vurderer en model at inddrage det kendskab, man har til andre modeller på feltet. Man kan også forestille sig, at det vil kunne udnyttes i startfasen til at få en første ide om hvilke slags modeller, der ofte anvendes indenfor feks. økonomi eller biologi. Denne modeltypeinddeling vil således have betydning for de aktiviteter der ligger under struktureringskompetencen. Desuden vil kritikkompetencen kunne drage nytte af en viden om andre modeller indenfor genstandsfeltet, idet det vil give mulighed for at diskutere, om anvendelsen af andre modeller, af feks. anden matematisk natur, på genstandsfeltet vil give samme resultat.

Indenfor genstandsfeltet vil man også kunne opdele modellerne efter hvilket *organisationsniveau*, de angår. Dette foreslås af Saaty og Alexander, der karakteriserer denne inddeling med begreberne *lokal* overfor *global*. De globale modeller beskriver overordnede træk ved et givent system, mens de lokale beskriver mere afgrænsede områder. En lokal model i biologi kunne feks. gå ind på celleniveau, mens en global ville se på træk ved hele organismen. Forskellen kan også illustreres med begreberne *mikro* og *makro*. De lokale modeller vil ofte fungere som udgangspunkt for de globale modelleringer. Det vil have betydning for hvilken detaljeringsgrad, man skal forsøge eller forvente at få med i modellen og hvilke systemafgrænsninger, som er relevante. Denne opdeling vil derfor have betydning for aktiviteterne i struktureringskompetencen, da det som er i fokus er detaljeringsgraden af struktureringen. Det kommer således også til at berøre refleksionskompetencen, da der skal stilles spørgsmål som: "Er alle de medtagede elementer væsentlige for den detaljeringsgrad der er valgt?", som er et eksempel på en refleksion knyttet til struktureringskompetencen.

En anden opdeling angår karakteren af den viden, der eksisterer i genstandsfeltet om det pågældende problem. Opbygningen af en matematisk model sker naturligvis altid på baggrund af den fortolkning, man har om sammenhængen mellem de relationer, man ønsker at modellere. Men denne forståelse

kan være af vidt forskellig karakter. Jens Højgaard Jensen er en af dem, der i flere sammenhænge har påpeget det afgørende i at skelne mellem modeller med forskelligt teoretisk grundlag som en vej til at give overblik og grundlag for kritik af de matematiske modeller. Systemafgrænsningen og kvaliteten af denne vil være et hovedproblem for alle typer af matematiske modeller, men med de teoretiske modeller er det muligt at vurdere idealiseringerne på grundlag af teorien. En mulighed der ikke foreligger ved ad-hoc modeller. Her kan modellen kun vurderes ifht. måledata, hvilket rejser særlige problemer, når sådanne ikke eksisterer, og når modellerne skal bruges til at forudsige fremtidig udvikling og foreskrive handlinger ifht. disse. Jens Højgaard Jensens pointe er, at modellernes matematiske fremtrædelsesform slører disse fundamentale forskelle, således at ad-hoc modellerne låner en uberettiget videnskabelig status fra de teoretiske modeller. Jens Højgaard Jensen kommer også ind på nødvendigheden af at vurdere modellerne ifht. de bagvedliggende interesser, men at det må ske på baggrund af modellens teoretiske status. De teoretiske modeller er objektive i den forstand, at de er i overensstemmelse med de generelle videnskabelige opfattelser på feltet.

Gade mfl.¹⁷ har med udgangspunkt i ovennævnte opdeling udviklet en opdeling i *teoretisk-mekaniske modeller* og *black-box modeller*. Black-box modellerne svarer til ad-hoc modellerne. Gade mfl. ser også på andre opdelinger, som feks. forklarende/beskrivende og fænomenologisk/teoretisk, men ser disse som underordnet eller afledt af den overordnede skelnen. Eksempelvis anser de black-box modellerne for kun at kunne give beskrivelser på det fænomenologiske plan og ikke forklare mekanismerne bag, hvorimod de teoretisk-mekaniske modeller både kan være forklarende og beskrivende. Gade mfl. postulerer altså en sammenhæng mellem en models teoretiske fundament og dens formål (Jensen, 1980, s.30-38).

Det er klart, at der ligger væsentlige pointer i den skelnen Jens Højgaard Jensen og Gade mfl. lægger. Vi mener dog, at der er nogle problemer i opdelingen. Selv om det bliver gjort klart, at *teoretisk* og *ad-hoc* er relative begreber, så bliver konsekvensen i praksis nemt, at kun en speciel gruppe af fysiske modeller kan komme i den teoretiske kategori, alt andet bliver ad-hoc, hvor der så igen mangler begreber til at skelne. Vi mener heller ikke, som Gade mfl. at spørgsmålene om modellens formål (forklare-beskrive) nødvendigvis er afhængig af modellens teoretiske status; det er en anden form for typeinddeling. I "Ud over matematikken" giver Ole Skovsmose (under henvisning til Jens Højgaard Jensen) et bud på en opdeling mht. viden om

¹⁷En projektgruppe der på RUC's Naturvidenskabelige basisuddannelse har skrevet en projektrapport med Jens Højgaard Jensen som vejleder med titlen: "Om matematiske modeller og videnskabsteoretiske problemer ved modeldannelse."

genstandsfeltet, som vi anser for at være mere hensigtsmæssig: "*En systemudvikling kan basere sig på: (1) entydigt fastlagt teori, ud fra hvilken man dels kan få udpeget de væsentlige elementer i modelobjektet samt hovedkoblingerne mellem disse elementer, og dels kan få et bud på graden af den simplifikation der er foretaget; (2) eller også på en teoretisk indsigt udvalgt mellem forskellige konkurrerende teorier angående modellens objektområde; (3) eller også på ikke nogen teori, hvorfor systemafgrænsningen bliver udtryk for en første konceptuel fortolkning af modelobjektet.*" (Skovsmose, 1990b, s.123).

Det fremgår af ovenstående, at det i høj grad er valideringskompetencen, der kan drage nytte af viden om denne typeinddeling, da det er arten af de aktiviteter der ligger under valideringskompetencen, der er i fokus her. Hvor meget, det er muligt at validere matematisk og hvordan, afhænger som Jens Højgaard Jensen fremhæver, helt af modellens teoretiske grundlag. Desuden er der lagt op til, at den type af kritik, man kan give af en modelanvendelse, er påvirket af modellens teoretiske grundlag. Aktiviteterne i kritikkompetencen vil derfor være at stille spørgsmål til det teoretiske grundlag og dets forbindelse til en interesse i at opstille og anvende modellen.

Formålet med modellen

Modeltyperne i denne gruppe er dem, som inddeler efter det formål, der er med modellen. Disse inddelinger kan således være med til at belyse, hvilke interesser der er forbundet med opstillingen af en given model. Man skal være opmærksom på, at en model bygget til et bestemt formål ikke uden videre kan bruges til et andet formål. Samtidig er det ofte tilfældet, at en model skifter formål gennem opbygningsprocessen.

Som et første eksempel fra denne gruppe kan vi tage modeltypeinddelingen *kvantitativ* overfor *kvalitativ*. Den samme problemstilling har ofte både en kvalitativ og en kvantitativ side. Feks. vil en modellering af sammenhængen mellem fiskeri og fiskebestanden (kvalitativt) kunne bruges til at give et bud på, hvor meget man kan fiske (kvantitativt). Således vil en kvalitativ model ofte være forløber for en kvantitativ model. Dette kan udnyttes af strategikompetencen, idet det kan være en fornuftig strategi ind i mellem at overveje muligheden af at opbygge en kvalitativ model som et trin på vejen til en kvantitativ model. Inddelingen, kvalitativ/kvantitativ, kan benyttes til at belyse hvilke svar, man kan forvente at få ved anvendelse af modellen og vil ligeledes præge de aktiviteter, der foregår under kritikkompetencen.

På baggrund af de gennemgåede typeinddelinger efter formål har vi lavet en inddeling, som vi anser som den mest anvendelige formålstypeinddeling. Den

minder en del om P.J. Davis' og Niss & Blums ideer:

- 1) Forklare/erkende. Disse modeller har til hensigt at forklare mekanismerne bag et fænomen og derved bringe forståelse om det problemfelt der modelleres.
- 2) Beskrive. Formålet for denne type af modeller er alene at beskrive et fænomen uden at bibringe nogen erkendelse om eller forståelse af fænomenet. For eksempel statistiske beskrivelser af observationer og beskrivelser af udviklinger med funktioner.
- 3) Forudsige. Der findes mange forudsigelser baseret på matematiske modeller. En forudsigelse vil ofte bestå i en simpel fremskrivning af en hidtidig udvikling. Sådanne modeller giver ikke nødvendigvis nogen forklaring og leder heller ikke altid frem til en handling.
- 4) Foreskrive. Disse modeller skal bruges som beslutningsgrundlag for handlinger. Nogle eksempler kunne være: Hvilken type lån skal man tage til sin bærbare computer for at slippe billigst muligt? Hvor meget forurening må der udledes til et givent vandløb?

Det gælder for disse fire modeltyper, at det ene formål ikke nødvendigvis udelukker det andet. Eksempelvis vil en beskrivende model til tider kunne udgøre basis for en forudsigelse, men ikke være tilstrækkeligt fundament til en foreskrivning. I visse tilfælde vil en forklarende model derfor give en bedre basis end en beskrivende for at forudsige, hvad der vil ske og at foreskrive, hvad der kan gøres ved det. Men modeltyperne er også uafhængige af hinanden til en vis grad. Deres uafhængighed kan illustreres ved, at det feks. er muligt at forudsige uden at have dybe erkendelser om problemfeltet. Det er heller ikke givet, at fordi vi kan forklare et fænomen og kan forudsige, hvad der vil ske, at det så er muligt at give handlingsmuligheder i forhold til det.

De forskellige formål vil oplagt give anledning til forskellige krav og problemer ved opstilling og brug af modellen. Således vil denne inddeling specielt afspejles i aktiviteter under struktureringskompetencen og kritikkompetencen. Om elementer skal med eller ej vil være en afgørelse, der afhænger af, om modellen har et beskrivende eller et forklarende formål. Formålet vil også have indflydelse på de aktiviteter, der kan ligge i matematiserings- og afmatematiseringskompetencen. Det vil være forskelligt, om der skal lægges noget arbejde i at finde en matematisk fremstilling, der gengiver systemets egenskaber og dermed kan opfylde et forklarende formål, eller om den matematiske symbolisering bare skal gengive en tendens, når formålet er at beskrive. Et eksempel på en aktivitet under kritikkompetencen vil være at fastlægge, om et ændret formål under processen er problematisk i fht. modellens nuværende anvendelse.

Modellens indre natur

Denne gruppe angår modeltypeinddelinger, som koncentrerer sig om modellens natur; typisk givet ved det matematiske fundament modellen bygger på, feks. integralligninger, eller naturen af det valgte matematiske redskab, feks. lineær overfor ikke-lineær.

En sådan typeinddeling vil være givtig, når der skal vælges redskaber til løsning af modellen og til den matematiske vurdering. Således vil en identifikation af modellens natur udstikke nogle rammer for, hvilke overvejelser der vil være relevante at foretage i arbejdet med modellen. Vel at mærke nogle rammer, der vil være matematisk funderede. For eksempel vil det være muligt at besvare spørgsmålet: "Hvor mange parametre er det matematisk forsvarligt at tage med?" på baggrund af en viden om modellens natur. Dette spørgsmål vil kunne stilles ved en vurdering af modellen med henblik på at overveje om modellen er overparametriseret.

Denne typeinddeling vil gøre det umiddelbart tilgængeligt at vælge det nødvendige matematiske beredskab til behandling af modellen. Aktiviteterne under struktureringskompetencen og matematiseringskompetencen vil her få karakter af at skulle tilpasse et problemfelt til en bestemt matematisk teori. Derudover vil modelløsnings- og valideringskompetencen være begrænset til at være en anvendelse af de løsnings- og valideringsmuligheder, som den ofte velgennemprøvede og veludviklede matematiske teori foreskriver.

2.4.3 Opsamling

Den ovenstående diskussion har fremhævet, at nogle modeltyper har særlig betydning for aktiviteterne i nogle bestemte kompetencer. Denne omstændighed vil vi sammenfatte her ved at tage en kort gennemgang af samtlige kompetencer og pointere hvilke typeinddelinger den enkelte kompetence har mest gavn af.

Strategikompetencen og *kommunikationskompetencen* blev ikke nævnt eksplicit i den ovenstående gennemgang. Dette skal imidlertid ikke forstås således, at de to kompetencers vidensindhold slet ikke indeholder modeltypeviden. Hele generelt vil det være en strategi at forholde en given model til andre modeller. En del af denne strategi vil være at vurdere hvilke modeltyper, det i den pågældende situation vil være relevant at forholde sin model til. Det er noget, der oplagt kræver et stort kendskab til forskellige typeinddelinger. Kommunikationskompetencen vil også have gavn af en modeltypeviden -

men nok mest i form af at kompetencen i stor udstrækning videregiver overvejelser baseret på refleksionskompetencen og kritikkompetencen, som begge inddrager modeltypeviden.

Struktureringskompetencen kan med fordel benytte sig af alle tre modeltypegrupperinger. Alle tre grupperinger kan hjælpe til at pege på dels hvilke faktorer og relationer, der i det hele taget kan være på tale at inddrage og dels hvilken detaljeringsgrad og hvilke krav der skal stilles til disse valg. *Matematiseringskompetencen* og *afmatematiseringskompetencen* kan begge inddrage viden om formålstypeinddelinger. Denne typeinddeling vil kunne hjælpe til at sætte fokus på, hvilken grad af præcision man skal tilstræbe i sin matematiske beskrivelse. *Modelløsningskompetencen* vil fortrinsvis have gavn af typeinddelinger efter modellens indre natur, som kan hjælpe til at afstikke de matematiske redskaber til løsningen af modellen. *Valideringskompetencen* vil ligeledes have gavn af gruppen med typeinddelinger efter den indre natur til at afklare hvilke matematiske valideringer der kan foretages af den pågældende model. Herudover kan denne kompetence have gavn af typeinddelinger efter modellens relation til virkeligheden - specielt den, der inddeler efter arten af den teori, der eksisterer om problemfeltet. Denne viden kan benyttes til at afklare om konsekvensen af de foretagne simplifikationer kan vurderes mere konkret på baggrund af den anvendte teori. Både *refleksionskompetencen* og *kritikkompetencen* vil kunne inddrage samtlige modeltypeinddelinger med fordel til at nuancere og kvalificere overvejelser.

2.5 Diskussion af modelkompetencerne i forhold til argumenterne

Vi vil afrunde dette kapitel med at forholde modelkompetencerne til de argumenter for undervisning i matematiske modeller, som vi præsenterede i kapitel 1. Dette gør vi for at diskutere, hvilke modelkompetencer de forskellige argumenter kræver i spil, for der igennem at bevare referencen til *hvorfor-niveauet* i den didaktiske diskussion, som vi mener er vigtig for en fornuftig behandling af *hvad-niveauet*.

Dannelsesargumentet lægger vægt på, at arbejdet med modeller og anvendelser udvikler kreativitet og problemløsende adfærd hos den studerende. Denne problemløsende adfærd kan i essensen være det samme som en modelleringsadfærd, som er den, vi forsøger at beskrive med kompetencerne. Med denne tolkning inddrager dannelsesargumentet alle modelkompetencerne. Nogle af de egenskaber dannelsesargumentet ønsker at fremme er bla. en udforskende

2.5 Diskussion af modelkompetencerne i forhold til argumenterne 91

og problemløsende tilgang til matematiske problemstillinger. Argumentet fokuserer således specielt på nogle af de aktiviteter, der ligger i strategikompetencen. Disse egenskaber menes i argumentet at være generelle, og hvis de skal være det, mener vi at refleksionskompetencen har en væsentlig funktion.

De matematiske begreber erhverves og forstås bedre ved kontekstualisering - det er hovedpunktet i indlæringsargumentet. Det formuleres i et tidligere anvendt citat således: "*Det är viktigt för en elev att ha konkreta upplevelser av situationer som kan matematiseras.*" (Björkqvist, 1993, s.14). Når man på baggrund af indlæringsargumentet ønsker at skabe sådanne situationer, så er det nødvendigt at de to kompetencer, matematisering og afmatemativering, kommer i spil. Disse kompetencer indeholder netop aktiviteterne at tilskrive matematiske begreber mening i den virkelige verden, og omvendt, at repræsentere træk ved den virkelige verden med matematik. Vi mener, at disse aktiviteter er en forudsætning for at kunne bruge kontekst som et middel til at få en bedre forståelse af matematiske begreber.

Under kulturargumentet falder argumenter for, at de studerende selv skal praktisere modellering og anvendelse af matematik for at få en opfattelse af matematik som en proces. Dette sigter mod, at alle kompetencer inddrages, da vi som sagt mener, at det er de aktiviteter der er knyttet til at gennemføre en modelleringsproces. Desuden argumenteres der for, at de studerende skal opnå en viden om matematikken gennem refleksioner over forholdet mellem faget matematik og omverdenen. Denne del af argumentet mener vi understreger vigtigheden af, at refleksions- og kritikkompetencen bringes i spil ved arbejdet med modeller.

Det centrale i nytteargumentet er, at de studerende bliver "... *able to practice applications and modelling* ..." (Niss, 1989, s.23). Vi mener at denne formulering lægger op til, at de studerende både skal kunne modellere selv og forstå andres modeller. Men der er intet i argumentet, der nødvendiggør en kritikkompetence, som det også blev diskuteret i afsnit 1.6. Om kritikkompetencen anses for væsentlig eller ej, vil helt afhænge af, hvem evnen til at anvende matematik skal være nyttig for og i forhold til hvad, denne evne skal i spil. Hvis det f.eks. er til nytte for den enkelte studerende i kampen om at få et job, så vil det nok afhænge af jobbet, om det kræver beherskelse af en kritikkompetence.

Kritikargumentet sætter evnen til kvalificeret at kunne vurdere anvendelsen af matematik i ikke-matematiske sammenhænge på dagsordenen. Vi mener, på baggrund af beskrivelsen af argumentet i kapitel 1, at en sådan evne vil kræve, at man både har kendskab til at opstille en model og til at analysere en model. Det indbefatter selvfølgelig også, at man eksplicit kan reflektere over

disse processer, samt kritisk tage stilling til disse processer og til de endelige produkter, modellerne. Dette nødvendiggør således klart, at alle modelkompetencerne skal inddrages i følge argumentet.

Det sidste argument der skal nævnes er synliggørelsesargumentet, som vi præsenterede i "Sammenfattende kommentarer til de fem argumenter". Dette argument fremføres for en inddragelse af modeller i undervisningen alene for at illustrere, at matematikken anvendes i samfundet, både i erhvervsmæssige og videnskabelige sammenhænge. Selv om vi har set argumentet anvendt mener vi, at det må karakteriseres som et delargument der ikke kan stå alene, men kræver tilstedeværelsen af et af de andre argumenter for at få gennemslagskraft. Denne omstændighed viser sig også ved at argumentet ikke i sig selv giver anledning til at inddrage nogle af modelkompetencerne. Der er alene tale om, at de studerende skal præsenteres for nogle modeller, hvilket der ikke ligger nogen aktivitet i. Hvis der er en aktivitet forbundet med præsentationen vil det være et resultat af, at et andet argument også er fremført for at arbejde med modeller i undervisningen.

En mere udførlig diskussion af sammenhængen mellem kompetencerne og argumenterne ville uundgåeligt skulle inddrage en del overvejelser om *hvordan* man lærer. Vi vil derfor ikke gå dybere ind i det, men blot sammenfatte kort. Kulturargumentet og kritikargumentet er de eneste argumenter, der udtalt kræver, at alle de beskrevne modelkompetencer kommer i spil. De andre tre argumenter vil i nogle tolkninger ligeledes inddrage samtlige kompetencer, men kan i andre udgaver begrænse sig til et mindre antal af kompetencerne.

2.6 Sammenfatning

I dette kapitel her vi opstillet et begrebsapparat bestående af ni modelkompetencer. Dette begrebsapparat vil vi afprøve i næste kapitel ved at anvende det som analyseapparat på forskelligt empirisk materiale.

Begrebsapparatets basis er videnskabelig litteratur - og for seks af kompetencernes vedkommende specielt litteratur omhandlende modelleringsprocessens overordnede struktur. Derfor indledte vi dette kapitel med en gennemgang af modelleringsprocessen. Lidt forenklet kan man sige, at processen bag opstillingen af de første seks kompetencer var følgende: Først identificerede vi forskellige aktiviteter på de enkelte trin i modelleringsprocessen; derefter grupperede vi disse aktiviteter i forskellige kompetencer. Resultatet af dette blev *struktureringskompetencen*, *matematiseringskompetencen*, *afmatematiseringskompetencen*, *modelløsningskompetencen*, *valideringskompetencen* og *kommunikationskompetencen*.

Inspirationskilder til opstillingen af de tre sidste kompetencer var teoribygninger af Ole Skovsmose og Alan Schoenfeld. Deres arbejder hjalp således til at sætte fokus på modelkompetencer, som ikke kunne aflæses så direkte i et studium af modelleringsaktiviteter. Udfaldet af dette blev *strategikompetencen*, *refleksionskompetencen* og *kritikkompetencen*.

Vi er af den overbevisning, at de ni modelkompetencer tilsammen udspænder de aktiviteter af både analytisk og af opbygningsmæssig karakter, der kan fremkomme ved modelarbejde. Derimod vil vi ikke påstå, at man ikke kunne opdele kompetencerne på anden vis. Ønsket om at begrebsapparatet skal medvirke til at nuancere billedet af, hvad der kan ligge i matematisk modellering har medført, at vi har tilstræbt en forholdsvis detaljeret opdeling. Derfor består vore begrebsapparat af et relativt stort antal kompetencer. Ulempen ved det store antal kompetencer er, at hele apparatet bliver lidt sværere at overskue, end hvis der feks. kun havde været tre begreber, som Ole Skovsmose opererer med. Vi mener dog ikke begrebsapparatet er for uoverskueligt. Men for at give et lidt bedre overblik vil vi klargøre, hvordan kompetencerne kan indeles i 2 grupper.

Fem af kompetencerne: struktureringskompetencen, matematiseringskompetencen, afmatematiseringskompetencen, modelløsningskompetencen og valideringskompetencen kan opfattes som *uafhængige* størrelser. Hermed tænker vi på, at de fem kompetencer kan komme i spil hver for sig - uafhængigt af hinanden og af de andre modelkompetencer. Dette betyder ikke, at kompetencerne ikke kan være relateret til hinanden. For eksempel er det klart at struktureringskompetencen kvalificeres ved at spille sammen med matematiseringskompetencen - eftersom struktureringskompetencens aktiviteter ofte umiddelbart vil efterfølges af aktiviteter under matematiseringskompetencen.

Anderledes er det med de fire sidste kompetencer: kommunikationskompetencen, strategikompetencen, refleksionskompetencen og kritikkompetencen. Det er svært at forestille sig, at disse kan have et indhold, hvis ikke de andre kompetencer er eller har været tilstede. Vi vil derfor karakterisere disse kompetencer som *afhængige* kompetencer. Således har strategi- og refleksionskompetencen et *samspil* med andre kompetencer, der er kendetegnet ved, at de to kompetencers rolle er at påvirke aktiviteter under andre kompetencer i en - ideelt set - positiv retning. De to kompetencers funktion er således at kvalificere aktiviteterne henholdsvis gennem at planlægge og styre dem og ved at reflektere over dem. Samtlige af kompetencerne vil nå et andet niveau, dvs. give anledning til andre og bedre resultater indenfor hvert deres domæne, hvis refleksionskompetencen og strategikompetencen benyttes.

Kritikkompetencen gør sig gældende, når modellen er opstillet og står foran

en anvendelse, eller når en model skal analyseres. Kritikkompetencen bygger på alle de andre kompetencer, forstået på den måde at de spørgsmål, der kan stilles på baggrund af kritikkompetencen, dels bygger på viden om hvad modelleringsprocessen har indeholdt, og dels kræver de andre kompetencer at besvare. Derfor er kritikkompetencen også afhængig af de andre kompetencer. Specielt er kritikkompetencen nært knyttet til kommunikationskompetencen, da det er svært at forestille sig mulighederne for kritik, hvis der ikke er foregået nogen kommunikation af modellen. Kommunikationskompetencen er afhængig af refleksionskompetencen, idet formidlingen kvalificeres væsentligt, hvis det er refleksioner der kommunikeres. Samtidig kan man sagtens forestille sig, at kommunikation af refleksionerne vil åbne for flere input og dermed ofte for en bedre modellering eller analyse.

For at sætte vores kompetencebegreb i en større didaktisk og pædagogisk sammenhæng diskuterede vi i dette kapitel begrebet i forhold til Karsten Schnacks *handlekompetence*. En af konklusionerne på denne diskussion blev, at modelkompetencerne kan opfattes som aspekter af handlekompetencen. Et større perspektiv på modelkompetencernes berettigelse er således, at disse skal bibringe studerende en faglig kritisk dømmekraft overfor matematikanvendelser og dermed være med til at kvalificere dem til rollen som aktive og velfungerende demokratiske medborgere.

Karsten Schnack diskuterer også forholdet mellem erfaringer, viden og handlinger, og hvordan de har indflydelse på udviklingen af kompetencen. Dette belyser hvordan vi mener, der sker en stadig progression i den enkeltes beherskelse af modelkompetencerne. Der skal skabes erfaringer ved hjælp af handlinger, disse vil så derefter udgøre vidensindholdet i kompetencen og kvalificere kompetencen. Som nævnt tidligere kan man godt forestille sig, at kompetencerne nedbrydes i stedet for opbygges gennem handlinger. Beskrivelsen af kompetencernes progression skal opfattes som en forenklet idealiseret udgave, der ikke direkte kan overføres til praksis uden der inddrages indlæringsmæssige overvejelser.

At vidensindholdet er centralt i beskrivelsen af den enkelte modelkompetence, belyser diskussionen af Alan Schoenfelds vidensbase. Vidensbasen indeholder den enkeltes viden, der kan være både rigtig og forkert, og udgør den baggrund hvorpå en given problemløsning vil foregå. Derimod er vidensindhold et analytisk begreb, der betegner den korrekte viden, der er knyttet til beherskelsen af en given kompetence. Behersker den enkelte en given modelkompetence, vil det givne vidensindhold således være en del af den enkeltes vidensbase.

Der er et fællestræk ved modelkompetencerne, som kom frem af vores diskussion af Ole Skovsmoses videnstyper. Skovsmose skelner mellem matematisk viden, teknologisk viden og refleksiv viden i beskrivelsen af "the competence of mathemacy". Modelkompetencerne indeholder aspekter af alle disse videnstyper. Der vil således være indeholdt både matematisk, teknologisk og refleksiv viden i alle modelkompetencerne.

I dette kapitel diskuterede vi også modeltypeviden, som er af grundlæggende vigtighed for alle modelkompetencerne. Denne viden kan bidrage til hvilke muligheder for - og valg af - aktiviteter, der kommer til udtryk under de forskellige kompetencer. En vigtig pointe er således, at diskussion af modeltypeinddelingerne belyser, hvor forskelligt modelkompetencer kan tage sig ud, alt efter hvilken type model der arbejdes med.

Schoenfeld gør sig tanker om, hvilken detaljeringsgrad problemløsningsstrategier skal beskrives med, for at de kan bruges til undervisning. Det er ikke vores mål med modelkompetencerne, at de skal bruges direkte i undervisning, men Schoenfelds overvejelser er alligevel centrale i en fastlæggelse af modelkompetencernes status. Modelkompetencernes beskrivelser er ikke så detaljerede, som Schoenfeld ville kræve til en undervisningssituation, hvilket som sagt heller ikke er vores formål, men er dog så konkrete, at de beskrevne aktiviteter er genkendelige, og modelkompetencerne derfor skulle kunne bruges som et analyseapparat.

I kapitel 1 præsenterede vi de argumenter, der er blevet fremført for indførelsen af matematiske modeller i undervisningen. Disse argumenter betoner, at nogle bestemte evner skal udvikles gennem undervisningen; disse kan beskrives med modelkompetencerne. Ifølge vores analyse kræver især to af argumenterne, kritikargumentet og kulturargumentet, at alle modelkompetencerne kommer i spil.

De ni modelkompetencer inddrager meget forskellige aktiviteter og vidensområder. En stor del af disse kundskaber rækker langt videre end traditionelle matematikkundskaber. Blandt kompetencerne er kritikkompetencen nok den, der trækker på den bredeste vifte af forskelligartede kundskaber. Som Ole Skovsmoses refleksive viden er den baseret på både *etiske* og *moralske* begreber. Kritikkompetencen kræver kendskab til og forståelse for de faktorer, der styrer samfundsudviklingen. Det vil sige områder der traditionelt ikke spiller nogen stor rolle i matematikundervisningen. De kompetencer, der kommer tættest på traditionelle matematikkundskaber, de mest matematiknære kompetencer, er nok modelløsningskompetencen og valideringskompetencen, idet de inddrager en del *traditionelle matematikværktøjer*. Visse aspekter af

dem, feks. parameterbestemmelse og sammenligning med empiriske data, går imidlertid ud over det normale indhold. Refleksionskompetencen er en klar *meta-kompetence* i den forstand, at den kræver evnen til at træde ud af den konkrete handling og se den i et videre perspektiv udefra. Den kræver altså evne til at se sig selv som objekt og ikke subjekt. Noget tilsvarende gør sig gældende med strategikompetencen. Særligt kontrolaspektet kræver evnen til at se sig selv udefra. Kommunikationskompetencen vil inddrage basale egenskaber som *skrive-* og *mundtlige formuleringskundskaber*. Men også evnen til at samarbejde med og lytte til andre. Struktureringskompetencen er relateret til den generelle struktureringsevne, som man konstant benytter til at strukturere diverse sanseindtryk med. Alle mennesker har en evne til at fokusere på visse aspekter af de syns- høre- og føleindtryk, som man konstant konfronteres med. Aspekter, som man af den ene eller anden årsag, finder vigtige i den pågældende situation. Dette er nødvendigt for at kunne fungere i dagligdagen. Matematiseringskompetencen og afmatematiseringskompetencen er to aspekter af samme sag: evnen til at overskride grænsen mellem to forskellige universer, dvs mellem det matematiske univers og det "virkelige univers". Begge kompetencer har fokus på et særligt aspekt af matematikken: symbolfornemmelse, som der ikke har været megen målrettet undervisning i. Sammenlagt kræver det altså et meget bredt udsnit af generelle kvalifikationer kombineret med mere specifikke matematikkundskaber for at mestre samtlige kompetencer.

Kapitel 3

Afprøvning af kompetencebegrebsapparatet

Efter at have beskrevet og afgrænset de enkelte kompetencer på en teoretisk baggrund vil vi nu afprøve det samlede begrebsapparat på forskelligt empirisk materiale. Afprøvningen tjener to formål. For det første skal den illustrere de enkelte kompetencer og dermed give dem mere fylde, og for det andet skal den fungere som en vurdering af begrebsapparatets anvendelighed som analyseredskab.

Det første formål opfyldes ved, at vi giver eksempler på, hvordan kompetencerne konkret kan komme til udtryk. Disse eksempler skal ikke opfattes som kompetencernes eneste tænkelige fremtrædelsesform, men som eksempler blandt mange mulige. Et andet valg af empiri ville betyde, at andre aspekter af kompetencerne kunne blive fremhævet. Vi vil også fremdrage eksempler fra empirien, hvor kompetencerne *ikke* kommer til udtryk, men hvor det er oplagt, at en given kompetence ville være væsentlig for behandling af problemstillingen. I stil med dette vil vi også fremhæve tilfælde, hvor et væsentligt aspekt af en given kompetence tilsyneladende ikke kommer i spil, og overveje baggrunden for dette.

Når vi undersøger begrebsapparatets *analytiske kraft* er der specielt to forhold, vi lægger vægt på at undersøge. Det ene er, om grænserne mellem kompetencerne er vage. Dette vil give sig udslag i problemer med at indplacere forskellige aktiviteter under den ene frem for den anden kompetence. Dette forhold kunne tænkes specielt at være gældende for de kompetencer, som vi har karakteriseret som *afhængige kompetencer*, dvs. *refleksionskompetencen*, *kritikkompetencen*, *strategikompetencen* og *kommunikationskompetencen*. Aktiviteter, der involverer en af disse fire kompetencer, vil samtidig

være udtryk for en af de andre kompetencer. Vi må derfor forvente, at det kan give anledning til visse problemer med at afgrænse dem i det empiriske materiale. Derudover undersøger vi, om kompetencerne er dækkende. Vi er altså opmærksomme på, om der optræder aktiviteter, der ikke kan beskrives med henvisning til nogle af kompetencerne.

Det empiriske materiale, vi har udvalgt, er af to typer. Det ene angår arbejdet med at *opstille* en model, og det andet angår arbejdet med at *analysere* en model. Det første er en projektrapport om trafikmodellering udført på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse på RUC, og det andet materiale udgøres af to opgaverapporter om Lotka-Volterra modellen udført på et kursus i matematiske modeller, ligeledes på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse på RUC. Begge materialer er således hentet fra undervisningssituationer, hvilket giver anledning til to forhold. Dels betyder det, at det sjældent vil være "fuldt udviklede kompetencer", vi får at se. Dette hænger sammen med, at der i læringssituationer vil være komplementaritet mellem aktiviteter og kompetencer. Hermed tænker vi på, at aktiviteterne udvikler kompetencerne samtidig med, at de også er et udtryk for kompetencerne. Et andet overordnet forhold ved det empiriske materiale er, at materialet indeholder en skriftlig formulering af *resultatet* af aktiviteter. Aktiviteterne fremstår altså ikke direkte i opgavebesvarelsener og projektrapporten. Vi forsøger imidlertid at aflæse de aktiviteter, der har ligget bag resultaterne. Dette vil selvfølgelig ikke være lige nemt i alle tilfælde, hvilket vi vender tilbage til senere. Det materiale vi analyserer har således karakter af at indeholde resultatet af aktiviteter, der både er et udtryk for kompetencerne, men som samtidig har tjent til at udvikle disse. I vores analyse vil vi dog koncentrere os om den førstnævnte dimension, altså at det skrevne er et udtryk for aktiviteter, der hidrører fra kompetencerne.

Vores mulighed for at aflæse kompetencerne er naturligvis meget afhængig af karakteren af den empiri, vi skal analysere. Som før nævnt ville andre problemstillinger og andre modeltyper kunne fremhæve dels andre aspekter ved kompetencerne og dels være afgørende for i hvilken grad kompetencerne kommer til udtryk. For eksempel er det oplagt, at en problemstilling, der indebærer at de studerende selv skal opbygge en model, giver bedre mulighed for at se strukturerings- og matematiseringskompetencen komme til udtryk, end en problemstilling hvor de studerende skal analysere en færdig model. Andre spørgsmål er mere uklare. Hvordan vil strategikompetencen eller refleksionskompetencen f.eks. komme til udtryk i skriftlige rapporter? Kræver det andre slags empiri, f.eks. bånd- eller videooptagelser af undervisning eller interviews, at få belyst disse kompetencer? Arbejdet med analysen af det empiriske materiale skal også bidrage til en belysning af sådanne spørgsmål.

3.1 Projektrapporten "Trafik modellering"

Vi vil først afprøve kompetencebegrebsapparatet på en projektrapport med titlen "Trafik modellering". Projektrapporten er udarbejdet af en 5-personers gruppe på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse på RUC i foråret 1995. Den er skrevet i løbet af uddannelsens 2. semester, der har følgende semesterbinding, hvorom projektarbejdet skal centreres: *"Modeller, teorier og eksperimenter. Projektarbejdet skal belyse brugen af teorier og modeller, især matematiske, i naturvidenskaberne. Vekselvirkningen mellem modeller, eksperimenter og naturvidenskabelige teorier samt disses struktur belyses."* (Studieordning af 1. september 1993 for Den Naturvidenskabelige Basisuddannelse, 1994, s.5). Ud over semesterbindingen er de udfoldelser, der ligger til grund for rapporten, ikke bundet i større omfang. Rapporten i sig selv er dog præget af den tradition, der findes på RUC omkring indholdet af en sådan.

Vi har udvalgt rapporten, fordi den indeholder en modellering, hvor hele modelleringsprocessen er gennemført. Problemstillingen skulle således give mulighed for, at alle kompetencerne kan komme til udtryk. Dermed skulle det også være muligt at illustrere omstændigheder vedrørende sammenhænge mellem de forskellige kompetencer. Da gruppen bag rapporten selv har opstillet modellen helt fra bunden, har det givet særligt gode muligheder for at dokumentere struktureringskompetencen.

3.1.1 Beskrivelse af projektrapporten

For at gøre det muligt at følge med i den efterfølgende kompetenceanalyse vil vi indledningsvis give en beskrivelse af rapportens og problemstillingens indhold. Det vil vi gøre ved først at give et overblik over projektrapportens indhold ved et referat efterfulgt af projektrapportens disposition. Derefter vil vi præcisere nærmere, hvori modellen består, og hvordan gruppen sammenligner modeldata med empiriske trafikmålinger.

Referat af projektrapporten

"Trafik modellering" tager udgangspunkt i det konkrete problem, at der ofte opstår køer om morgenen på en given motorvejsstrækning (motorvej M11) i nærheden af Roskilde i retning mod København. Det bemærkelsesværdige er, at kødannelserne kun observeres et bestemt sted på motorvejen på en

strækning af 8-9 kilometers længde. Gruppen ønsker at opstille en matematisk model, som kan simulere sådan et trafikflow.

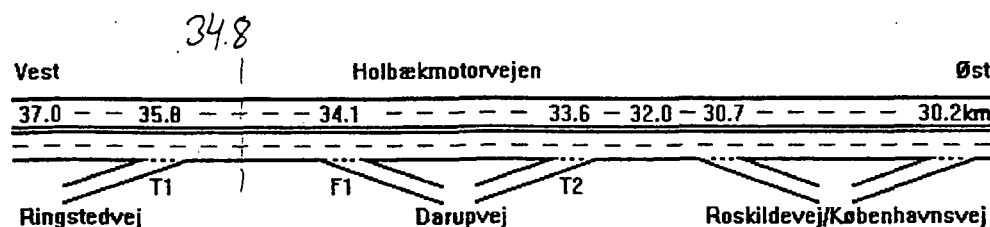
Projektgruppen fremsætter forskellige hypoteser, som kunne forklare problemet med bilkøer på motorvejsstrækningen. Feks. kan det skyldes generelle kapacitetsproblemer på vejstrækningen, den korte afstand mellem tilkørselsramperne og den høje tilkørselsfrekvens for bilerne, eller strækningens særlige topografiske forhold med bakker, sving og lavtstående sol, som kan medvirke til en nedsat gennemsnitshastighed. Gruppens ambition er at opstille en model, som kan beskrive flowet på vejstrækningen på baggrund af kapaciteten. De ønsker at beskrive, hvordan bilerne reagerer på den øvrige trafik samt de begrænsninger, som vejbanerne, til- og frakørselsforhold mv. giver (Andresen et al., 1995, s.6). Ambitionen er således at opbygge en model, der kan simulere flowet på den undersøgte strækning, ved at tage udgangspunkt i den enkelte bils reaktion på den omgivende trafik.

Gruppen griber problemet an på den måde, at de starter med at opstille en simpel model af en et-sporet vej uden til- og frakørsler. Derefter udvider de modellen med en ekstra vejbane, overhalingsmulighed, samt til- og frakørsler. Modelopstillingen indbefatter en matematisk beskrivelse af, hvordan den enkelte bil reagerer, dvs. hvordan den accelererer, bremses eller skifter vognbane afhængigt af den omgivende trafik, samt definition af hvorledes modellens parametre bestemmer bilernes bevægelser. Modellen implementeres i et pascalprogram, således at alle bilernes positioner til ethvert tidspunkt gives en grafisk repræsentation på en computerskærm. Her vises en to-sporet vejbane, og de kørende biler vises som lysende pixels, der bevæger sig på skærmen. Til- og frakørsler kan ses på den måde, at bilerne dukker op et bestemt sted og forsvinder et andet sted, men de er ikke repræsenteret ved særskilte baner.

Programmet fungerer således, at bilerne genereres på vejstrækningen med en vis *frekvens* og *hastighedsfordeling*. Ligeledes fastsættes frekvenser for tilkørsel og frakørsel, dvs. en bestemt andel af bilerne er på forhånd bestemt til at skulle køre til og fra. Bilernes øvrige færd gennem vejstrækningen bestemmes ud fra de opstillede ligninger. Når de har passeret den ønskede strækning tælles de, således at det simulerede bilflow kan opgøres.

Bilernes frekvens og hastighedsfordeling fastsættes ud fra resultatet af diverse trafikmålinger. Projektgruppen "fodrer" således modellen med tal baseret på målinger for, hvor mange biler der kommer i starten af strækningen, hvor mange der kommer på tilkørsler, hvor mange der kører fra og hvor hurtigt bilerne kører, når der ikke er nogen hindringer på vejen. Modellen testes på to forskellige vejstrækninger, begge startende ved 37.0 km mærket, se figur

3.1. Først en kort strækning, der indeholder en tilkørsel (T1) og derefter en lidt længere strækning, der indeholder yderligere en tilkørsel (T2) samt en frakørsel (F1). Begge strækninger svarer til et udsnit af motorvej M11.



Figur 3.1: Oversigt over det valgte motorvejsudsnit. Modellen testes på to strækninger startende ved 37 km markeringen og frem til hhv. 34,8 km og 32 km mærket (Andresen et al., 1995, s.35).

De empiriske testdata er antallet af biler pr. tidsinterval ved slutningen af den udvalgte strækning. De simulerede flow ved strækningernes slutning kan så sammenlignes med de målte. Begge modelkørsler giver utroligt gode resultater med meget lille afvigelse fra de målte flow. (Se figur 3.2, s. 104.)

Efter testen foretager gruppen en undersøgelse af et bestemt tiltag til afhjælpning af kødannelserne, som er blevet foreslået af Roskilde Amt. Forslaget går ud på at ændre vigepligtsbetingelserne på Darupvej, som er den vej bilisterne kommer ud på efter frakørsel fra M11 på den omtalte strækning. Ændringen vil give de frakørende biler forkørselsret, således at de hurtigere kommer væk fra motorvejen. Projektgruppen simulerer virkningen af et sådant tiltag ved at hæve gennemsnitshastigheden for enden af den pågældende frakørsel. Resultatet af denne simulering er imidlertid, at det ikke har nogen nævneværdig effekt på motorvejsflowet.

Projektrapportens disposition

Herunder er opbygningen af "Trafik modellering" skitseret. Vi har angivet kapitlernes overskrifter og omfang, og giver en kort beskrivelse af, hvad de enkelte kapitler indeholder.

1. Indledning (s. 6-9)

Den overordnede problemstilling præsenteres og indsnævres til følgende problemformulering: "Hovedproblemstillingen er om hvorvidt det kan lade sig gøre at opbygge en model, der kan beskrive trafikflowet på en motorvej, ved at

beskrive den enkelte bils reaktioner på den omgivne trafik." (Andresen et al., 1995, s.7). Herudover indeholder kapitlet formål, metode og målgruppe.

2. Simpel model (s. 10-19)

Systemafgrænsning og matematisk beskrivelse af model til beskrivelse af bilflow på en et-sporet vej. Datastruktur i implementering i Pascalprogram beskrives. Vurdering af om det simulerede flow ser "rimeligt" ud.

3. Udbygget model (s. 20-29)

Udbygning af den simple model og matematisering af de nye sammenhænge, der skal beskrive en to-sporet vej med til- og frakørsler. Datastrukturer i det udbyggede program beskrives. Parameterfastsættelse på baggrund af egne og andres målinger, antagelser, mv. foretages. Resultater af simulering af modellen for to bestemte vejstrækninger, hvor gruppen selv har foretaget målinger af det virkelige bilflow, præsenteres og vurderes.

4. Undersøgelse af motorvej M11 (s. 30-36)

Beskrivelse af det virkelige problem med kødannelser, samt præsentation af de hypoteser gruppen mener er betydende for kødannelsen. Endvidere præsenteres Roskilde Amtsvejsvæsens og egne målinger af flow på strækningen i morgentimerne samt målinger af bilernes hastighedsfordeling om søndagen. Disse målinger er brugt henholdsvis til testdata og til bestemmelse af bilernes *maksimale* hastighedsfordeling, som betegner den hastighed bilerne ønsker at køre, hvis der ikke er nogen hindringer på vejen. Parameterbestemmelsernes kvalitet diskuteres i forhold til modelresultaterne.

5. Anvendelse af modellen (s. 37)

Modellen anvendes til at forudsige, hvad en planlagt ændring af frakørselsforholdene vil betyde for flowet. Deres konklusion er, at det ikke vil have nogen afgørende betydning. Konkrete resultater af denne simulering er ikke præsenteret.

6. Konklusion (s. 38-39)

Gruppen konkluderer: At modelleringen har været succesfuld ud fra egne kriterier, idet bilernes gennemkørselstid for strækningen kan reproduceres i modellen.

At det er omfattende at bestemme kriterierne for bilernes bevægelse.

At en grundigere verificering ville kræve et større datamateriale, som modellen kunne vurderes i forhold til.

At modellens anvendelsesperspektiver er at kunne vurdere, hvilken betydning det har på trafikken at ændre til- og frakørselsforhold, gennemsnitshastigheder, antal biler mv.

3.1.2 Modellen i projektrapporten

Efter den generelle beskrivelse af rapporten vil vi gå lidt nærmere ind på indholdet af den model, som projektgruppen opstiller. Vi giver her vores kortfattede fremstilling af gruppens *udbyggede* model, hvordan parametrene som indgår i modellen bestemmes, og hvordan modellen testes. Dette skulle give en bedre baggrund for at læse den efterfølgende analyse.

Elementerne i modellen

Her opridses de elementer, gruppen har valgt ud som de centrale i beskrivelse af trafikflow.

Bilerne beskrives ved deres position, hastighed og acceleration til ethvert tidspunkt. Ud over dette adskiller bilerne sig kun fra hinanden ved den hastighed, de ønsker at køre, hvis trafikken ikke forhindrer det, deres såkaldte maksimale hastighed. Alle biler reagerer på samme måde overfor andre biler, dvs. bremser eller overhaler, hvis den forankørende er indenfor en bestemt afstand. Andre egenskaber ved bilerne adskiller dem ikke, feks. regnes bil-længden for at være ens for alle biler. Således kan der opregnes følgende:

Fællesparametre for systemet

Bilernes længde

Maksimal acceleration, a_{max}

Maksimal deacceleration (minimal acceleration), a_{min}

Reaktionstid for bilerne

Bilernes bremseevne

Antal biler i timen, dvs. frekvens, ved strækningens start

Frekvens ved tilkørsler

Frekvens ved frakørsler

Og herefter opregnes de parametre, der er gældende for:

Den enkelte bil

Faste parametre:

Maksimal hastighed, v_{max} : tildeles ud fra en valgt hastighedsfordeling.

Maksimal bremselængde: beregnes ud fra den enkelte bils maksimale hastighed og bremseevnen.

Afhængige variable:

Acceleration: beregnes ved hvert tidsskridt på baggrund af den omgivende trafik.

Hastighed: beregnes til hvert tidspunkt.

Position: bilens position på vejbanen; beregnes til hvert tidspunkt.

Vejbane: positionen er kun endimensional, så derfor får bilen også en variabel for hvilken vejbane den er i. De 2 vejspor fungerer uafhængigt af hinanden undtagen ved vejbaneskit.

Som allerede nævnt er der nogle af parametrene, der er bestemt på baggrund af empiriske data. Det gælder frekvenserne for bilerne ved henholdsvis strækningens start, ved til- og ved frakørsel og for deres maksimale hastighed. En del af disse data har gruppen selv målt, mens andre er modtaget fra Roskilde Amtsvejvæsen. Andre data som reaktionstid og bremseevne er fastsat ud fra oplysninger i "*Køreskolernes Teoribog*".

Flowmålinger, dvs. målinger af antal biler i fem minutters intervaller, er benyttet til at bestemme den frekvens, hvormed der skal genereres nye biler ved starten af strækningen og ved tilkørsler, samt antallet af biler der skal køre fra motorvejen i et bestemt tidsrum. Derudover har de på baggrund af hastighedsmålinger en søndag, hvor gruppen antager, at bilerne kører med deres ønskede hastighed, bestemt hvilke maks. hastigheder bilerne skal genereres med. Det gøres ved at generere biler med hastigheder indenfor det interval og med samme sandsynlighedsfordeling som hastighedsmålingen viser.

Relationerne i modellen

Vi vil her kort gennemgå nogle af de centrale bestemmende ligninger i modellen, samt beskrive de relationer mellem elementerne, som gruppen medtager i deres model.

Generel bevægelsesteori bruges til at fastlægge sammenhænge mellem acceleration, hastighed og position. Accelerationen regnes for konstant i det enkelte tidsskridt (dt) i simuleringen, og dermed kan hastighed, (v), og position, (s), fremskrives uden videre på baggrund af klassisk mekanik, således:

$$v(t + dt) = v(t) + a(t)dt$$

$$s(t + dt) = s(t) + \frac{1}{2}a(t)dt^2 + v(t)dt$$

Da accelerationen kan ændre sig efter omstændighederne, kræver det flere beskrivelser for at kunne bestemme denne. I grove træk har gruppen begrænset sig til tre tilfælde og bestemt, at accelerationen i disse skal beskrives således:

- Hvis der ikke er forankørende biler indenfor den *maksimale bremselængde*, så accelererer bilen med a_{max} indtil den opnår sin v_{max} .

- Hvis afstanden er kortere end den maksimale bremselængde, så bremses bilen. Deaccelerationen beregnes, så bilen lige netop vil holde en afstand til den forankørende som er længere end *reaktionsafstanden*. Reaktionsafstanden beregnes som produktet af *reaktionstiden* og *hastigheden* til det givne tidspunkt. Herved sikres at bilerne ikke støder sammen.
- Hvis bilerne kommer meget tæt på hinanden, nærmere bestemt tættere end det dobbelte af reaktionsafstanden, så bremses med a_{min} indtil afstanden igen er tilstrækkelig stor. Afstanden mellem bilerne kan risikere at blive ret lille når bilerne trækker ud foran hinanden ved en tilkørsel.

Accelerationen for den enkelte bil bliver således for hvert tidspunkt beregnet på en af tre måder alt efter afstanden til den forankørende og ud fra kravet om, at bilerne ikke må støde sammen i modellen.

Et andet forhold, der kræver en matematisk beskrivelse, er kriterierne for, hvornår bilerne kan foretage overhaling. Disse afhænger af hastighedsforskellen mellem bilen og dens forankørende i inderbanen og af afstanden til eventuelle biler i yderbanen. Således fastsætter gruppen, at en given bil kun vil overhale, hvis dennes v_{max} er mere end eller præcis 10 km/t større end den forankørende bils hastighed. Forudsætningen for at bilen kan overhale er for det første at den ikke kører ud foran en bil, der ikke kan overholde bremselængden til den overhalende bil, og for det andet at en eventuel forankørende bil i overhalingsbanen ikke er tættere på end den overhalende bils bremselængde ved den nuværende hastighed.

Lignende kriterier fastsættes for, at en bil vil og kan trække ind i den indre vejbane. For en bil, der genereres på tilkørselsbanen, sættes der ligeledes krav til, med hvilken hastighed denne kan generes, og hvilken placering den vil få i forhold til de biler, der allerede er på strækningen.

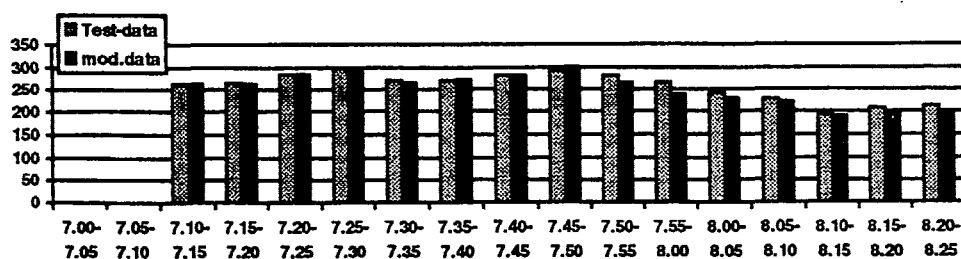
Det sidste forhold der inddrages, er hvordan en bil der skal køre fra på den nærmeste frakørsel vil "agere", eller rettere sagt hvilke krav en sådan frakørselsbil skal opfylde. Her er der medtaget tre ting ved beregning af positionen for en sådan frakørselsbil, når den ligger i yderbanen. De tre ting, der har indflydelse på frakørselsbilens deacceleration, er en eventuel bil i indersporret, den fart bilen skal ned på inden frakørslen, og den fart en eventuel bil på frakørslen har. Til positionsberegningen anvendes den største af de tre deaccelerationer.

Samlet består modellen af flere forskellige dele. Dels datalogiske fremstillinger af vejen og bilerne og dels nogle ligninger til at bestemme den enkelte bils position. Tiden er også medtaget i modellen - ikke kontinuert men diskret i form af tidsskridt. Modellen fungerer på den måde, at vejbanen kigges

igennem fra venstre mod højre, og der "ledes" efter biler. Ved den første bil stoppes der, og dennes nye position beregnes ved først at bestemme dens acceleration ud fra de før beskrevne overvejelser og dernæst at beregne den nye position ud fra den beregnede acceleration samt overvejelser om eventuelt vognbaneskiift. Dette gøres for alle biler på banen for hvert tidsskridt.

Test af modellen

Her vil vi beskrive, hvordan gruppen bruger empiriske data til at vurdere deres model. Ved at sætte en tæller ved bestemte positioner på den simulerede vejstrækning opnår de nogle modelresultater, antal biler pr. tidsinterval, som kan sammenlignes med deres egne og Roskilde Amtsvejsvæsens trafikmålinger. På figur 3.2 er der vist en sammenligning af data fra modellen ("*mod.data*") og empiriske data ("*test-data*"). Det ses at der kun er en meget lille afvigelse mellem de empiriske data og de simulerede data.



Figur 3.2: Det simulerede flow (*mod.data*) i forhold til de målte flow (*test-data*) ved 34,8 km mærket. Modeldata er gennemsnit af 12 simuleringer (Andresen et al., 1995, s.28).

Afslutningsvis skal det nævnes, at det gruppen får ud af deres simuleringer således ikke kan knyttes direkte til kødannelser, som var deres udgangsproblem, men at de har opnået at simulere bilflowet i spidsbelastningsperioden mellem kl. 7.00 og 8.00.

3.1.3 Analyse af kompetencerne i projektrapporten

Analysen her er opbygget således, at hver af modelkompetencerne forsøges illustreret ved hjælp af citater fra projektrapporten. Som nævnt i indledningen

vil vi i en skreven tekst for det meste kun se produktet af en kompetence; selve aktiviteten vil sjældent være beskrevet. Der vil således ligge en vis tolkning til grund for, at kompetencen kan illustreres. Vi har selvfølgelig tilstræbt, at det er den mest oplagte tolkning, der er brugt på eksemplerne.

Vores arbejdsmetode har været først at gennemlæse rapporten med det formål at identificere aktiviteter i samtlige afsnit. Derefter har vi diskuteret hvilke kompetencer, de pågældende aktiviteter har været et udtryk for, og på den måde indplaceret samtlige aktiviteter i rapporten i den ene eller anden af modelkompetencerne. Blandt disse har vi så udvalgt de eksempler, vi finder mest illustrative, eller som kan give nye facetter til begrebsapparatet.

Struktureringskompetencen

Struktureringskompetencen vil kort sagt vise sig ved, at visse elementer og egenskaberne ved disse udvælges. Det vil sige, at der sker en idealisering af det problemfelt der ønskes beskrevet. Kompetencen kan også vise sig ved, at der redegøres for udvælgelsen, samt at der vælges en given teori "strukturering af virkeligheden" til at beskrive elementerne med. Her følger en række eksempler på, hvordan trafikmodelleringsgruppen har benyttet struktureringskompetencen.

Som vi skrev i kapitel 2 findes der forskellige redskaber til at støtte struktureringen. I projektrapporten findes der flere skitser af biler og af vejudsnit med vejbaner og biler. Disse skitser er eksempler på, hvordan gruppen har dannet sig en første begrebsmodel af det område de vil modellere. Herudover kan man forestille sig, at gruppen helt konkret har kørt ture på motorvejen for at undersøge, hvordan bilerne opfører sig. Disse undersøgelser har ligesom skitserne kunnet give nogle fingerpeg om, hvordan struktureringen kunne foretages.

Først et eksempel på at gruppen har udvalgt et element. Deres problem er som nævnt at opstille en model, som kan simulere motorvejstrafikken på en given strækning. Dette vælger de at gøre ved at udvælge den enkelte bil som element og "...beskrive den enkelte bils reaktioner på den omgivne trafik." (Andresen et al., 1995, Problemformuleringen s.7). De har således formået at reducere beskrivelsen af flowet, der udgøres af den samlede mængde af biler, til at omhandle den enkelte bil og dennes egenskaber. Dette valg er et eksempel på, hvad vi tidligere har benævnt det *strukturerende greb*. Dette valg er af afgørende betydning for de øvrige struktureringsaktiviteter, idet disse nu vil være underlagt visse rammer. Den efterfølgende beskrivelse af

bilflowet vil således have bilen som udgangspunkt. Næste trin er dermed at fastlægge, hvordan en bil påvirkes af den omgivende trafik.

Før-gruppen fastlægger de ydre påvirkningers effekt på den enkelte bil, vælger de en bestemt "strukturering af virkeligheden" til at formulere elementets egenskaber med. Dette er også et eksempel på struktureringskompetencen. Det fremgår af rapporten, at gruppen selv er bevidst om dette valg. Således skriver de: "*Til selve implementeringen i programmet blev anvendt de af os specielt konstruerede matematiske opstillinger, opbygget med baggrund i den allerede eksisterende teori for bevægelse: acceleration, hastighed og position.*" (Andresen et al., 1995, s.38). Gruppen har altså valgt bevægelsesteorien til at beskrive, hvordan bilerne grundlæggende bevæger sig, så alle fænomener der indvirker på bilernes bevægelse, skal formuleres med denne teori.

Struktureringskompetencen benyttes også til at beskrive sammenhænge mellem modellens elementer. Man kan sige, at det problem som der her struktureres på baggrund af er: Hvad skal der gælde, når der kører mere end én bil på vejen? Hvordan påvirker bilerne hinandens acceleration og hastighed? Her stilles der det krav at "*... en bil (b_1), altid kan nå at bremse ned til den forankørende bils (b_2) hastighed, sådan at de kører helt tæt sammen.*" (Andresen et al., 1995, s.12). Derefter formuleres det med ord fra bevægelsesteorien, hvad sådan en antagelse må sætte af krav til bilen b_1 's hastighed. Der er altså taget fat på en beskrivelse af, hvordan den enkelte bil bliver påvirket af ydre forhold, i dette tilfælde af de andre biler.

Til sidst vil vi give et eksempel der skal illustrere, at struktureringskompetence ikke kun kommer i sving i systemafgrænsningsfasen i begyndelsen af modelleringsprocessen. Gruppen stiller sig den opgave at anvende modellen til at undersøge, om trafikflowet på motorvejen ville ændre sig, hvis den ubetingede vigepligt for enden af en af frakørslerne blev ophævet. Det er det førnævnte tiltag foreslået af Roskilde Amt for at afhjælpe kødannelser. For at løse denne opgave skal de strukturere problemet med hensyn til deres foreliggende model. De må derfor skele til, hvilke parametre der er at skrue på i modellen. Grundlaget for modellen er som sagt den enkelte bil og dennes hastighed. Hvad vil det betyde for bilen, at den ubetingede vigepligt bliver fjernet? Gruppen vælger at gøre det ved at "*... hæve gennemsnitshastigheden for enden af frakørslen.*" (Andresen et al., 1995, s.37). Dette skulle belyse, at man kan have brug for struktureringskompetencen, når man anvender modellen; dvs. stiller nye spørgsmål til modellen - andre spørgsmål end dem, der er modelleret på baggrund af. Sådanne spørgsmål medfører nemlig, at der må ske en ny fortolkning og afgrænsning af systemet.

Matematiseringskompetencen

Matematiseringskompetencen vil vise sig ved, at de udvalgte elementer fra systemafgrænsningen samt kravene til disse elementer formuleres matematisk.

Det går rimeligt ligetil at beskrive den enkelte bils bevægelse. Gruppen skriver "*Med en konstant acceleration kan man udlede nogle formler, der kan bruges til at udregne position og hastighed...*" (Andresen et al., 1995, s.11). Ud fra en antagelse om konstant acceleration indenfor et tidsskridt kan gruppen bruge bevægelsesteorien, som de har udvalgt i systemafgrænsningsfasen. Gruppen opskriver et udtryk for en bils hastighed i et tidsskridt, som de benævner "*hastighedsformlen*": " $V(t) = K \cdot t + V_0$, hvor V_0 er begyndeshastigheden" (Andresen et al., 1995, s.11). $V(t)$ er hastigheden til tiden t , og K er den konstante acceleration i tidsskridtet. Dette er altså så oplagt, fordi de har valgt at bruge bevægelsesteorien til beskrivelse af bilernes egenskaber, der i forvejen er udtrykt på matematisk form. Dog indbefatter denne matematisering en antagelse, der ikke i forvejen var forudsat i systemafgrænsningen, nemlig at accelerationen i tidsskridtet er konstant. Dette er derfor også et eksempel på, at matematisering indfører begrænsninger.

Det næste eksempel skal dels illustrere matematiseringen af et krav fra systemafgrænsningen og dels illustrere at matematiseringskompetencen også bruges på et andet niveau, hvor den er i samspil med modelløsningskompetencen. Det drejer sig om udledningen af kravet til bilens deacceleration, når bilen skal opfylde antagelsen om at nå at bremse ned til den forankørende bils hastighed. Først formuleres et udtryk for bilens hastighed under en opbremsning. " $V_{b_1}(t) = V_{b_1} - K \cdot t$, hvor t er den tid opbremsningen strækker sig over..." (Andresen et al., 1995, s.12). V_{b_1} er bilen b_1 's hastighed. Konsekvensen af at stille det op på denne måde er, at K vil være positiv ved en opbremsning. Dette er baggrunden for, at gruppen bruger betegnelsen deacceleration for K og ikke acceleration. Imidlertid skal det siges for at lette læsningen, at gruppen veksler mellem at tale om acceleration og deacceleration og mellem k og K , men at det altså er den samme ting de taler om. I følgende citat er første ligning en formulering af kravet til deaccelerationen, idet de to bilers hastigheder sættes lig hinanden:

"Vi beregner den tid det tager at foretage en sådan opbremsning:

$$V_{b_2} = V_{b_1}(t) = V_{b_1} - k \cdot t$$

heraf fås:

$$t = \frac{V_{b_1} - V_{b_2}}{K} \quad (3.1)$$

Dette udtryk sættes så ind i positionsændringsformlen for at kunne beregne deaccelerationen, der vil reducere V_{b1} til V_{b2} i løbet af tiden t . Da accelerationen er modsat bevægelsesretningen får vi:

$$\begin{aligned}
 s \left(\frac{V_{b1} - V_{b2}}{K} \right) &= -1/2 * k \left(\frac{V_{b1} - V_{b2}}{K} \right)^2 + V_{b1} \left(\frac{V_{b1} - V_{b2}}{K} \right) + Pos_{b1} \quad (3.2) \\
 &= -1/2 \left(\frac{V_{b1}^2 + V_{b2}^2 - 2V_{b1}V_{b2}}{K} \right) + \left(\frac{V_{b1}^2 - V_{b1}V_{b2}}{K} \right) + Pos_{b1} \\
 Pos_{b2} &= \frac{V_{b1}^2 - V_{b2}^2}{2K} + Pos_{b1} \\
 dPos &= \frac{V_{b1}^2 - V_{b2}^2}{2K}, \quad \text{hvor } dPos = Pos_{b2} - Pos_{b1} \\
 K &= \frac{V_{b1}^2 - V_{b2}^2}{2dpos} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Hvor K er acceleration og $dPos$ er afstanden mellem bilerne. Da bilerne på en motorvej normalt ikke kører helt tæt sammen, indføres en sikkerhedsafstand.

$$\text{Sikkerhedsafstanden} = V_{b1} * \text{reaktionstiden}$$

Disse formler sammenholdes og deaccelerationsformlen fås:

$$K = \frac{V_{b1}^2 - V_{b2}^2}{2dpos - \text{sikkerhedsafstanden}}$$

Det er denne formel vi benytter i modellen til beregning af bilernes opbremsning. Hvis en bil kommer for tæt på den forankørende vil bilen i hvert tidspunkt få beregnet en ny hastighed efter følgende formel:

$$V(t + dt) = V(t) - K * dt$$

Hvor K hver gang beregnes ved hjælp af deaccelerationsformlen” (Andresen et al., 1995, s.13, numrene ved formlerne er vores, red.)

I citatet benytter gruppen, at de kan opskrive den tid det tager at foretage den ønskede opbremsning (formel 3.1), og at de har et matematisk udtryk for “positionsændringsformlen”, (som er “hastighedsformlen” integreret en gang) til at udlede et udtryk for deaccelerationen, der kun afhænger af bilernes hastigheder og positioner, som de kender. Her kan man tale om et andet niveau af matematiseringskompetencen. Kendetegnet for dette niveau er, at matematiseringen foretages på baggrund af tidligere matematisk formulerede krav til systemet, således at de her bevæger sig alene i det matematiske univers,

hvor målet er at modellen skal kunne løses. De enkelte trin (formel 3.2 og de efterfølgende mellemregninger) i matematiseringen kan ikke tillægges mening i den virkelighed, der modelleres, men benyttes til at opstille et udtryk for deaccelerationen, som kan beregnes (formel 3.3). Dette kunne tyde på en vis vekselvirkning mellem beherskelsen af modelløsningskompetencen og matematiseringskompetencen, idet matematiseringen foregår med løsning af modellen for øje.

Der ses også i citatet endnu et eksempel på, at et krav fra systemafgrænsningen formuleres matematisk. Det er ønsket om at indføre en sikkerhedsafstand mellem bilerne, der straks præsenteres som "*Sikkerhedsafstanden = $V_{b_1} \cdot reaktionstiden$* ". Man kan mene, at der ikke er sket en fuldstændig matematisering (læs her symbolisering), men der er dog klart tale om, at en sammenhæng er udtrykt matematisk.

Til gennemgangen af de to første kompetencer vil vi knytte følgende kommentarer. Det fremgår tydeligt af rapporten, at matematiserings- og struktureringskompetencen ofte indgår i et tæt samspil. Dette afspejler sig i rapporten ved at struktureringen fremstilles i tekst umiddelbart før matematiseringen, som viser sig ved en formaliseret fremstilling af de sprogligt formulerede krav.

Der er ikke i projektet umiddelbart givet nogle redegørelser for den valgte systemafgrænsning eller matematisering, senest det sidste eksempel hvor der ikke argumenteres yderligere for at sikkerhedsafstanden skal afhænge af de angivne parametre. Der er altså ikke nedskrevet nogle refleksioner i forbindelse med aktiviteter under struktureringskompetencen og matematiseringskompetencen. Det skal kort kommenteres at vi ikke mener, vi dermed kan udelukke at det har fundet sted. Vi kan måske udtrykke det sådan, at det er muligt de har reflekteret, men at de ikke har fundet det så væsentligt at det er nedskrevet. Dette hænger naturligvis sammen med gruppens kommunikationskompetence, og det vil vi vende tilbage til under analysen af denne kompetence.

Hvis der ikke har fundet nogle refleksioner sted, kunne man her spørge i forhold til vores kompetencebegrebsapparat, om det er refleksionskompetencen der ikke er til stede, eller om det er en del af de to kompetencer der mangler. Imidlertid kan de to tilfælde ikke skelnes fra hinanden, da refleksionskompetencen benyttes i samspil med de andre kompetencer. Det vil derfor altid være vanskeligt at sætte en skarp grænse mellem refleksionskompetencen og de andre kompetencer.

Afmatematiseringskompetencen

Afmatematiseringskompetencen viser sig ved, at et matematisk formuleret udtryk gives mening i dagligdagssprog. Det kan f.eks. være ved viderebygning af en allerede eksisterende model eller ved meningstilskrivelse til modellens resultater.

Der er ikke mange eksempler på denne kompetence i rapporten, hvilket ikke er overraskende, da den må forventes at være mest anvendt ved analyse af modeller. Der hvor vi kunne forvente at se tegn på afmatematiseringskompetence er i tolkningen af modellens resultater. Vi har da også fundet noget i retning af afmatematiseringskompetence i den forbindelse, hvilket vi vil gennemgå her.

Når gruppen skal formulere, hvordan de når frem til det resultat, der kommer ud af deres simuleringer, er det med følgende ord: *"...i modellen har vi sat en tæller, der tæller hvor mange biler, der kommer igennem."* (Andresen et al., 1995, s.28), og derved får de et udtryk for det flow, de ønsker at beskrive. I dette tilfælde er modellens resultat således et tal, der uden de store forhindringer kan oversættes til antal biler, så denne del af afmatematiseringen er ret simpel. I afmatematiseringskompetencen ligger der imidlertid også det at forholde resultaterne til de bagvedliggende idealiseringer. Denne del af afmatematiseringskompetencen kan vi ikke finde eksempler på i rapporten.

Ud over dette resultat er der også en grafisk side af deres modellering. Det er i deres tolkning af denne grafik, vi har fundet antydningen af et eksempel på at afmatematiseringskompetencen er blevet udfordret. Eksemplet kommer fra deres modellering af biler, der ligger i overhalingssporet og som skal af på den nærmeste frakørsel. *"I dette tilfælde... sættes bilen ind i både overhalingssporet og indersporet, men tegnes kun i overhalingssporet. Dette giver grafisk indtrykket af at der gøres plads til bilen i indersporet. Dette kaldes ... for tænd blinklyset"* (Andresen et al., 1995, s.27). Her giver de altså den grafiske fremstilling af resultatet en fortolkning, der er genkendelig i virkeligheden, nemlig at en bil tænder blinklyset, og at der gøres plads for denne i inderbanen.

Ovenstående eksempel kan bestemt ikke opfattes som noget typisk eksempel på afmatematiseringskompetence. Da det er en hændelse i "datalogiens verden", der tolkes i virkelighedens sprog, ville det måske være mere oplagt at kalde det for "afdatalogisering". På samme måde kunne man tale om datalogisering i stedet for matematisering, mht. den måde hvorpå gruppen vælger at repræsentere vejen i programmet. Fælles for matematisering og datalogisering er, at der "oversættes" mellem forskellige sprog. I begge tilfælde er

udgangspunktet et udtryk i hverdagsprog, der så formuleres enten i matematiske eller datalogiske termer. I gennemgangen af Ole Skovsmoses teori om de tre vidensformer, præsenterede vi også hans tre opgaver for den reflektive viden. Den ene af de tre opgaver omhandler netop problemer i relation til de forskellige sprog, der er involveret i en modelleringsproces. I Skovsmoses terminologi ville overgangen i rapporten være fra et systemsprog til henholdsvis matematisk og algoritmisk sprog. Det er muligt, at man kunne opstille en kompetence, der kunne indbefatte begge typer af overgange, idet man kunne tale om en overordnet "formaliseringskompetence". En formaliseringskompetence ville kunne indfange flere af de aktiviteter, der specielt er tilknyttet datalogisk modelbygning. Da en stor del af modellen i trafikrapporten er datalogisk, kan man i vid udstrækning sige, at gruppen besidder en sådan formaliseringskompetence.

Modelløsningskompetencen

Modelløsningskompetencen består bl.a. i at kunne finde og benytte de værktøjer der skal til for at løse den opstillede model. Feks. løse differentialligninger eller afbilde en funktions udvikling i tid. Eller når opstillingen af modellen skal udvikles yderligere for at lette vejen til løsningen.

I rapporten er det svært at skelne modelløsning fra matematisering og anden formalisering, da nogle af modellens elementer, feks. vejen, først bliver beskrevet som et led i beskrivelsen af implementeringen. Det er imidlertid klart, at gruppen må have anvendt modelløsningskompetence, da de har været i stand til at opbygge en model, der kan implementeres og give de ønskede resultater. Resultatet af modelløsningskompetencen kan siges at være programmet, der beregner bilernes positioner. Programmet er skrevet i Turbo Pascal 7.0 og er gengivet i et appendiks i rapporten.

Vi kunne have ønsket os, at de både havde præsenteret modellen mere løst fra programmet, og at de havde skitseret den algoritme, der skulle bruges ved en løsning, dvs. en beregning af de enkelte bilers position efter et tidsskridt. Det ville have muliggjort en mere nuanceret beskrivelse af hvad modelløsningskompetencen i deres tilfælde består i. Gruppens måde at præsentere modellen og løsningen af den på hænger måske mere sammen med deres kommunikationskompetence end med modelløsningskompetencen. Vi må konstatere, at de må have anvendt modelløsningskompetencen, da de har formået at løse modellen og få resultater. Det er imidlertid svært at give nogle gode tekst-eksempler fra rapporten på dette, her følger dog nogle få eksempler. Først et eksempel på at gruppen giver en beskrivelse af modelløsningen.

Det kommer fra afsnittet "*Dokumentation af programmet*", og er således som før nævnt knyttet til programmet. Gruppen skriver:

"11.Beh_Bil:

Denne funktion er en datalogisk oversættelse af modellen opstillet i afsnit 2.1. Vejsporet kigges igennem fra en ende til den anden ende, grafisk fra venstre mod højre, dvs. i kørselsretningen, og hver gang programmet møder en bil beregnes dens nye position. Alle biler vil prøve at opnå deres max. hastighed, hvis der ikke er nogen bil inden for dens bremselængde" (Andresen et al., 1995, s.15).

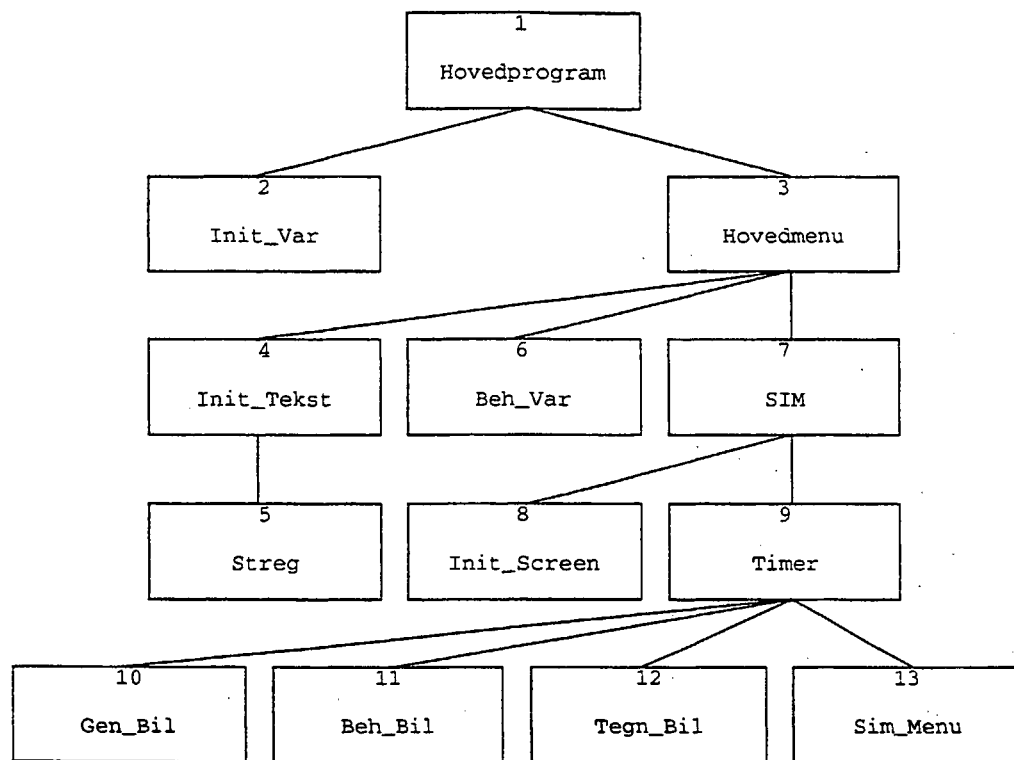
Dette er det nærmeste vi kommer en beskrivelse af modelløsningen, men den er knyttet til programmet og ikke til en matematisk begrebsramme.

Da løsningen af modellen er fundet vha. et program, gruppen selv har lavet, er der ingen tvivl om, at gruppen besidder algoritmisk tankegang, som er et aspekt af modelløsningskompetencen. Således må der for at lave dette program oplagt kræves en evne til at opstille en algoritme for, hvordan modellen løses. At det er dette de har gjort, kan illustreres med følgende citat og figur.

"For at beskrive hvordan programmet over den simple model er bygget op, vil vi benytte os af et moduldiagram. Dette er et diagram, der beskriver programmets flow. Moduldiagrammet for den simple model kan ses på bilag 1. Hver boks, fremover benævnt modul, i dette diagram repræsenterer en procedure i programmet og pilene mellem modulerne viser hvilke procedurer der kalder hvilke procedurer med prioritet oppefra og nedefter." (Andresen et al., 1995, s.14).

Vi har gengivet deres bilag 1 i figur 3.3. Hvert af de moduler, der er nævnt i diagrammet, er beskrevet i rapporten. En af disse beskrivelser er den, som fremgik af citatet om modulet 11.Beh_Bil på side 114.

En stor del af gruppens arbejde har været at bestemme de parametre, der skal indgå i modellen, på baggrund af empiriske data. Såsom bestemmelsen af maksimal hastighed og genereringsfrekvenserne for bilerne ved hjælp af henholdsvis hastighedsmålinger og flowmålinger. Dette er en aktivitet, som også ligger i modelløsningskompetencen. At det er en aktivitet de har udført skulle følgende citat belyse:



Figur 3.3: Moduldiagrammet for den simple model. Forklaringer til diagrammets forkortelser: 1) definerer globale variable, 2) initialiserer globale variable, 3) her kan man ændre variable og starte simuleringen, 4) initialiserer tekstskræmen, 5) tegner en streg ved cursoren 6) bestemmelse af de parametre, der indgår i simuleringen, 7) initialiserer simulationsforløbet, 8) initialiserer grafikskræmen, 9) timer der til hvert tidsskridt kalder de følgende moduler, 10) genererer nye biler, 11) beregning af bilernes hastighed og position, 12) bilernes position tegnes, 13) bilernes tilstande kan aflæses til hvert tidspunkt (Andresen et al., 1995, bilag 1 og s. 14-16).

"Generering af biler.

Frekvensen af biler antages at være konstant i en fem minutters periode ad gangen. Frekvensen i disse fem minutters intervaller bygger på egne målinger af flowet på den modellerede strækning ... Antallet af biler, der skal genereres i en periode bliver ligefordelt. Dette kan udtrykkes ved:

$$\text{Frekvens} = \frac{\text{Antal biler}}{\text{Tidsperiode}}$$

(Andresen et al., 1995, s.20).

Vi har nu belyst, hvordan modelløsningskompetencen har vist sig i "Trafik modellering" med aktiviteter som algoritmisering af modelløsningen og parameterbetemmelse.

Valideringskompetencen

Valideringskompetencen er at kunne gennemføre dels en matematisk vurdering af modellens resultater, herunder dens antagelser, og dels en sammenligning af modellens resultater med eventuelle empiriske data.

Det har ikke været muligt umiddelbart at se nogle matematiske vurderinger af modellen i rapporten. Der er således ikke nogle steder, hvor der matematisk er analyseret konsekvenser af de krav/antagelser, der er i modellen. Her må vi derfor tage et eksempel, som skal illustrere, at denne del af kompetencen er fraværende. Gruppen mener "*Til en grundigere verificering af modellen kræves et bredere testdatamateriale, end det vi i projektførelsen har været i stand til at indsamle...ligesom egne trafiktællinger med fordel kunne have været mere omfattende*" (Andresen et al., 1995, Konklusionen s.39). Det at de ikke matematisk har vurderet deres modelresultater for, hvor meget en ændring i de forskellige parametre ville betyde og således havde kunnet vurdere, om et kæmpe testdatasæt ville forbedre simuleringerne væsentligt, tager vi som udtryk for, at valideringskompetencen ikke er udviklet til fulde. Dette kan også understreges af, at gruppen skriver at "*En vurdering af modellen skal foretages for at fortælle om vores model er god til at eftervise virkeligheden.*" (Andresen et al., 1995, s.9). Gruppen forbinder således en vurdering alene med at sammenligne resultaterne med empiriske data, hvilket også er et aspekt af valideringskompetencen. At kunne gennemføre en matematisk vurdering af modellen og dens antagelser er væsentlige sider af valideringskompetencen, som ville have været relevante for gruppens problemstilling, men de kommer altså ikke til udtryk.

I afsnittet hvor den simple model vurderes, skriver gruppen blandt andet følgende:

"Det første kritiske område, vurdering om modellen grafisk set opfører sig naturligt, har vi fundet frem til, at det ser fornuftigt ud. Dette har vi fundet frem til, ved at se på bilernes opførsel samtidig med at deres forskellige parametre, såsom max. hastighed, nuværende hastighed og acceleration, er blevet aflæst." (Andresen et al., 1995, s.19).

Dette citat giver en fornemmelse af, hvad gruppen mener der er vigtigt at betragte, når den simple model skal vurderes. Da de ikke taler om at sammenligne med empiriske data fremgår det, at de bruger andre kriterier til at vurdere den første simple model, end når de senere vurderer den udbyggede. Dette passer meget godt med den gængse opfattelse. En del af valideringskompetencen har således her været at vurdere hvilke krav, man fornuftigt kunne stille til en første simpel modeludgave.

Refleksionskompetence

Refleksionskompetencen virker i samspil med de aktiviteter, der er indeholdt i de andre kompetencer. Man kan sige, at de andre kompetencer styrkes, når de også indeholder refleksioner over de valg, der foretages. De eksempler, vi kan give på refleksionskompetencen, vil derfor nødvendigvis være i tilknytning til en anden kompetence. Vi har derfor "ledt" efter udtryk for refleksionskompetencen i forbindelse med rapportens beskrivelse af de valg, der er foretaget i de forskellige trin i modelleringsprocessen.

Det har imidlertid været svært at finde nogle dokumenterede overvejelser over de forskellige valg, hvilket vi også har omtalt tidligere. De sparsomme eksempler vi har set på, at gruppen reflekterer, er i forbindelse med at de skal vurdere/validere modellen. Det kunne give anledning til at opstille den hypotese, at validering i særlig grad provokerer til at aktivere refleksionskompetencen. Valideringen uden refleksioner er svært at forestille sig, og derfor bliver det i forbindelse med valideringen måske i højere grad end ved andre af kompetencerne påkrævet at sætte ord på disse refleksioner. I det følgende vil vi se nærmere på overvejelserne i rapportens afsnit "*Simpel model, simulering og vurdering*".

"Dog kan det tydeligt ses at den simple model ikke kan bruges til at vise kødannelse med, da ingen bil nogensinde vil køre langsommere end den bil med mindst max. hastighed. Dette er ingen fejl, hverken i modellen eller programmet, det kan tværtimod understøttes ved undersøgelse af formlerne i modellen." (Andresen et al., 1995, s.19).

Dette citat illustrerer, at refleksioner i vurderingsfasen vil inddrage viden om aktiviteter, der er indeholdt i de andre kompetencer. I dette tilfælde bygger refleksionerne på viden om det, der er foretaget af strukturerings- og matematiseringskompetencen.

Det sidste citat vi præsenterede i det foregående afsnit om "valideringskompetencen" stammer fra samme afsnit i rapporten. Det viser gruppens overvejelser om hvorvidt den simple model virker fornuftig i dens grafiske fremtræden. Selv om det ikke fremgår så tydeligt af citatet hvad refleksionerne konkret har bestået i, er det klart, at det de har skrevet forudsætter refleksioner. Gruppen må have overvejet, hvilke parametre de skulle kigge på for at vurdere om deres model "*grafisk set opfører sig naturligt*", som de kalder det i citatet, og endvidere hvad de nærmere ville kræve af disse parametre. Citatet kan således ikke illustrere indholdet af refleksionskompetencen særligt nuanceret, men dog at kompetencen har været anvendt.

Gruppen har også i deres vurdering af den simple model lavet en gennemsnitsberegning på bilernes deacceleration og fundet, at denne understøtter modellen: "*Vi har fundet at bilernes deacceleration gennemsnitligt ligger omkring 2,1 m/s², som er en lettere opbremsning, dvs. hvor gaspedalen slippes, og dette virker rimeligt, da der er tale om motorvejskørsel.*" (Andresen et al., 1995, s.19). Igen et eksempel på at valideringen inddrager refleksioner.

Det sidste eksempel på refleksionskompetencen er fra en vurdering af vigtigheden af de empiriske data som modellens maks. hastighedsparametre er bestemt af. "*Hastighedsfordelingen er på trods af kvaliteten vigtig i forhold til modellen, da vi ønsker, at bilerne skal kunne opnå samme hastigheder som i virkeligheden. Det vil ikke være en funktionel model, hvis vi opnåede en realistisk flowstørrelse, mens gennemsnitshastigheden sænkedes, og dermed giver en forøgelse af transporttiden.*" (Andresen et al., 1995, s.34). Ud over at være et eksempel på refleksionskompetencen er dette et eksempel på, at deres refleksioner ikke bliver fulgt op af en matematisk vurdering af, hvad denne "usikkerhed" på de empiriske data betyder for resultaterne. Det aspekt af valideringskompetencen, som i dette tilfælde kunne bestå i en undersøgelse af, hvad ændringer i hastighedsfordelingen betyder for det endelige resultat, kommer ikke til udtryk i rapporten.

Som det fremgår af de ovennævnte eksempler, er det forholdsvis kortfattede refleksioner, der er gengivet i teksten. Konklusionen på modelvurderingen indeholder heller ikke flere. Den lyder: "*Derfor må vi konkludere, at vores model, ud fra det spinkle datagrundlag, der foreligger, vil gengive virkeligheden nøjagtig nok til, at man kan bruge resultaterne til at vurdere en bestemt trafiksituation*" (Andresen et al., 1995, s.29). I betragtning af, at gruppen opnår nogle resultater, der stemmer godt overens med de empiriske data, som de tester modellen på mener vi, at en forklaring på de sparsomme refleksioner kan være netop de gode resultater. Vi kan derfor opstille den hypotese, at gode modelresultater ikke i så høj grad giver en åbenlys anledning til refleksioner omkring modellen, i hvert fald ikke til at gøre rede for sådanne

refleksioner i rapporten.

Vores vanskeligheder med at illustrere refleksionskompetencen i denne rapport, på trods af at vi mener at kunne dokumentere, at den har været i spil i løbet af modelleringsprocessen, vil blive fulgt op senere. I næste kapitel diskuterer vi om andre former for empirisk materiale måske ville være mere velegnede til belysning af refleksionskompetencen. Et af problemerne er, at den jo er i brug undervejs i processen, og at det ikke er givet hvordan denne kompetence vil komme til udtryk i det endelige produkt.

Kritikkompetencen

Kritikkompetencen kan komme til udtryk ved, at der stilles spørgsmål på forskellige niveauer i forhold til anvendelsen af modellen. Der bliver ikke nogen steder i rapporten stillet den slags spørgsmål, heller ikke i forbindelse med gruppens anvendelse af modellen. I det følgende vil vi derfor i stedet anføre eksempler fra rapporten, hvor der oplagt kunne have været brugt kritikkompetence.

Det ene sted er i rapportens kapitel 5, hvor gruppen anvender modellen til at forudsige, hvad en ændring i de trafikale forhold ved en af frakørslerne vil betyde for trafikflowet og dermed kødannelserne. Formålet med denne anvendelse er i sidste ende at foreskrive mulige handlinger, nemlig at danne baggrund for en eventuel beslutning om disse ændringer. Her mener vi gruppen med fordel kunne have inddraget det Ole Skovsmose benævner *problemidentifikation*, som sætter fokus på, at problemet for en modelleringsproces ofte bliver ændret i løbet af processen. Dette mener vi også i høj grad er tilfældet med trafikmodellen, idet gruppen lægger ud med at ville modellere *kødannelser*, men ender med at modellere *trafikflow*. Vi kan ikke i rapporten finde nogle overvejelser om, hvordan køer ville tage sig ud i modellen - eller om den i det hele taget kan eftervise kødannelser. Et af problemerne vedrørende den pågældende frakørsel var, at bilerne kom til at holde stille helt ned på motorvejen, idet bilerne ikke kunne komme til at køre ud på den pågældende vej. Hvis dette fænomen ikke kan genfindes i modelkørslerne vil det ikke være rimeligt at bruge modellen til at undersøge det nævnte tiltag.

Det andet sted er i rapportens konklusion, hvor gruppen kommenterer, hvilke anvendelsesmuligheder deres type af trafikmodel har:

"... en trafikmodel af denne type [vil] kunne bruges til at vurdere betydningen af ændrede til- og frakørselsforhold for trafikken. Den vil kunne vise noget om gennemsnitshastigheder, betydningen af

hastighedsgrænser for trafikflowet, samt hvilken indvirkning det ville få for trafikken hvis man, f.eks. på grund af vejarbejde, i en periode leder ekstra meget trafik ned på motorvejen for at aflaste trafikken andre steder” (Andresen et al., 1995, s.39).

Disse kommentarer kunne med fordel være suppleret med nogle sammenligninger med andre typer af modeller indenfor trafikmodellering. Dette kræver selvfølgelig en viden om modeltyper, der i dette tilfælde kunne være begrænset til en viden om modeller indenfor genstandsfeltet: trafikmodellering. De ville også have kunnet drage fordele af en sådan viden i udfoldelsen af andre kompetencer, eksempelvis som sammenligningsgrundlag ved strukturering og matematisering og evt. i vurderingen til at give en mere nuanceret redegørelse for de valg, der foretages. Det er ikke muligt at finde citater i teksten, der understøtter, at gruppen skulle have haft en sådan modeltypeviden. Det antydes dog, at de har set andre metoder anvendt på trafikflowsmaterialet: *“...denne problematik er blevet undersøgt af Roskilde Amt, men metoden er hovedsageligt af statistisk karakter og ikke baseret på en egentlig model.”* (Andresen et al., 1995, s.32). Men dette inddrages ikke i nogen skriftlig redegørelse for deres valg af model.

Kritikkompetencen kunne også have foranlediget en mere overordnet kritik af, hvordan modellens anvendelse til optimering fjerner fokus fra det, som nogle ville kalde det egentlige problem - for meget trafik. Dette problem kalder på helt andre løsninger, såsom tiltag der kunne motivere folk til at benytte andre transportmidler, f.eks. cykel eller tog eller måske en opfordring til at tage arbejdskolleger med i bilen.

Vi må konkludere, at rapporten ikke giver udtryk for, at kritikkompetencen har været anvendt. Vi mener dog ovenstående skulle have belyst, at den kunne have været anvendt med fordel, og derfor har sin berettigelse også i denne modelsituation.

Strategikompetencen

Strategikompetencen besiddes hvis man er i stand til at planlægge, styre og kontrollere sin arbejdsproces - både de enkelte delprocesser og hele modelleringsprocessen samlet. Heri ligger der at være klar over hvilket trin, man er på i processen, mens man udfører det og at kunne udnytte denne viden til at effektivisere sin arbejdsproces. For strategikompetencen gælder det ligesom med refleksionskompetencen, at den indgår på alle niveauer i modelleringsprocessen og har betydning for den måde, hvorpå de andre kompetencer kommer i anvendelse. Derfor vil det også med strategikompetencen være mere

problematisk hvordan den vil komme til udtryk i et empirisk materiale, som en projektrapport.

Vi har i rapporten fundet to konkrete eksempler på, at gruppen har haft strategiske overvejelser eller har set en fordel i at benytte en strategi. På side 16 og 17 i afsnittet "*Dokumentation af programmet, Datastrukturer.*" falder følgende sætningsrække: "*Vi kunne have gjort det sådan at ... da vi her var begyndt at tænke fremad, fandt vi ud af, at der ville opstå komplikationer ... Derfor besluttede vi os til at ...*". Dette illustrerer, at gruppen i processen har været i stand til at se op og orientere sig om, hvor de var og hvor de var på vej hen i forhold til deres arbejdsproces. Dette er det eneste sted i rapporten, vi har set udtryk for en sådan tankerække. Da den forekommer i forbindelse med spørgsmålet om hvilken datastruktur, der skulle vælges i den simple model for at tilgodese den udbyggede model, kan det tolkes sådan, at netop her har gruppen har et overskud, i form af god datalogisk indsigt, så de kunne gennemføre sådanne strategiske overvejelser.

Det andet eksempel er fra konklusionen, hvor gruppen skriver: "*Arbejdsmetoden med at simulere trafikken i modellen ved hver enkelt tilføjelse er en fornuftig fremgangsmåde, da man ellers vil have svært ved at lokalisere og rette en eventuel opstået fejl*" (Andresen et al., 1995, s.38). Her fremhæver gruppen, at der er en fordel i at følge en strategi med at starte med en simpel model og derefter udvide denne. Citatet viser også, at gruppen har været bevidst om deres strategi, og at de har reflekteret over den.

Mere generelt er der i rapporten et metodeafsnit med overskrifter som "*Opbygning af simpel model*", "*Udvidelse af model*", "*Implementation af model*", "*Anvendelse af model*", "*Vurdering af model*". Disse overskrifter indledes med følgende "*For at løse de problemer vi har stillet os i problemformuleringen, vil vi i projektet bruge følgende metoder.*" (Andresen et al., 1995, s.7). Overskrifterne dækker altså over nogle metoder til løsning, som svarer til forskellige trin i modelleringsprocessen. Under hver af disse overskrifter er der i projektet en redegørelse for, hvad dette trin indeholder af aktiviteter, og hvordan disse bidrager til løsningen af problemet. Dette illustrerer, at de er bevidst om, at der er nogle faser i modelleringsarbejdet, og at disse kan hjælpe dem med at strukturere deres arbejde. Desuden har de med opbygningen af rapporten, som følger disse overskrifter, vist at de har haft overblik over, hvad der tilhørte de forskellige faser.

Det er klart, at strategikompetencens synlighed i allerhøjeste grad er afhængig af hvilken karakter dokumentationen af modelleringsarbejdet har. Det gælder specielt kontroldelen samt de strategier, der anvendes til at løse de mindre trin i processen. I det hele taget ville det nok kræve en anden type

empirisk materiale, feks. båndoptagelser af arbejdsprocesser, hvis man skulle undersøge denne kompetence nærmere. Dette vil vi vende tilbage til i næste kapitel.

Kommunikationskompetencen

Kommunikationskompetencen vil vise sig ved en evne til at dokumentere sit modelleringsforløb og modellen. Beherskelsen af denne kompetence til fulde vil indebære refleksioner. Kompetencen kan dermed indgå i et givtigt samspil med de andre kompetencer.

I tilknytning til det sidste citat under strategikompetencen skal det nævnes, at selve rapporten må tages som udtryk for, at kommunikationskompetencen er tilstede. På side 9 i målgruppebeskrivelsen kommer dette eksplicit frem, idet de skriver: *“Endvidere sigter vi på at rapporten fremstår som en detaljeret dokumentation af den modelleringsproces, vi har været igennem og at rapporten dermed vil være af interesse for ... folk, der arbejder med de mere pædagogiske aspekter af modelleringsprocesser”*. Deres intentioner for rapporten ligger tæt op af det, vi mener, aktiviteter foranlediget af en kommunikationskompetence kunne have for øje. Man kan som helhedsbedømmelse påstå, at deres rapport nok ikke er særlig læsevenlig overfor specielt ikke-matematikere. Til dette mangler der bla. at mange flere refleksioner omkring problemstillingen skulle komme til udtryk i rapporten. Det er således klart, at de aktiviteter, der ligger indenfor kommunikationskompetencen, kan beherskes på forskellige niveauer, selv om der foreligger de bedste intentioner.

Vi må konstatere, at vi har haft vanskeligheder med at illustrere nogle af kompetencerne. Hvor meget dette kan skyldes arten af det empiriske materiale og hvor meget, der kan tilskrives en mindre udviklet kommunikationskompetence vil vi vende tilbage til senere.

3.1.4 Opsamling på analysen af projektrapporten

Gennem analysen af projektrapporten “Trafik modellering” har det været muligt at illustrere samtlige ni kompetencer, enten ved at give eksempler på hvordan de kommer til udtryk eller ved at illustrere, hvor kompetencen med fordel kunne have bidraget til problemløsningen. Til gengæld er vi stødt på aktiviteter i tilknytning til datalogi, som vi ikke helt kan dække med vores kompetencer - dertil er de for specifikt datalogiske. Dette vil vi vende tilbage til i opsamlingen på hele dette kapitel. Selvom vi har kunnet illustrere alle kompetencerne, og gøre rede for at de har været relevante i arbejdet

med problemstillingen, så viser analysen også, at der er afgørende forskelle på kompetencerne og deres mulighed for at komme til udtryk i denne type empiri. Som vi før har diskuteret i opsamlingen på kapitel 2, så befinder kompetencerne sig på forskellige niveauer, således at nogle knytter sig til særlige faser i modelleringsprocessen, og andre angår og indvirker på hele processen som sådan. Dette forhold afspejles i analysen.

Strukturerings-, matematiserings-, afmatematiserings-, modelløsnings- og valideringskompetencen er de kompetencer som mest direkte er knyttet til modelleringsprocessens forskellige faser, og de har været relativt klare at identificere og illustrere ved hjælp af rapporten.

Med hensyn til matematiseringskompetencen, så har vi set hvordan den kommer til udtryk gennem en "oversættelse" af de elementer, som er udvalgt i systemafgrænsningen, til et matematisk sprog. Det vil sige når bilernes forskellige egenskaber så som position, hastighed mv. gives en matematisk repræsentation i form af en funktionsforskrift. Et andet aspekt af matematiseringskompetencen som bliver illustreret er, at den også kan indebære yderligere matematiske skridt, som ikke direkte kan begrundes i virkeligheden. Vi ser hvordan det at finde et matematisk udtryk for accelerationen kræver, at man kan manipulere med udtryk som i forvejen er matematiseret. Matematisering er således ikke på nogen måde en direkte oversættelse. Vi kan også se, at dele af modellen aldrig gives nogen formel matematisk repræsentation i rapporten, men er implementeret direkte i programmet på baggrund af systemafgrænsningen. Aktiviteterne med at give modellen en formel repræsentation, som gør det muligt at løse modellen, har således i dette empirieksempel været af meget datalogisk karakter. Det er et eksempel på, at matematisk modelbygning er beslægtet med andre former for modelbygning, som tit vil benyttes sideløbende/integreret. Det kan derfor i nogle sammenhænge måske være relevant at tale om en bredere *formaliseringskompetence*.

Modelløsningskompetencen, som vi har beskrevet den i kapitel 2, handler om de aktiviteter, der er nødvendige for at løse modellen. Vi har i "Trafik modellering" fået illustreret at det kan være aktiviteter af ret forskellig karakter, nemlig dels at konstruere et program, som kan simulere modellen og give resultater, og dels den nødvendige parameterbestemmelse på baggrund af empiriske data. At disse aktiviteter er centrale i løsningen af modellen hersker der ikke tvivl om, men i hvilken grad de er beslægtede og dermed hørende til samme kompetence kan man måske diskutere. Det er muligt, at man meningsfuldt kunne få sat fokus på flere centrale aspekter ved modelløsningen ved at udskille flere kompetencer.

Angående valideringskompetencen, så kan vi konkludere, at en matematisk validering af modellen, som f.eks. en undersøgelse af modellens følsomhed over for ændringer i de indgående parametre, ikke kommer til udtryk i rapporten. Dette finder vi interessant, fordi gruppen faktisk gør nogle overvejelser om hvordan modellen kunne gøres bedre gennem bedre parameterbestemmelse, flere tests mv. Men den matematiske valideringskompetence ligger åbenbart ikke helt så lige for, og kræver måske andre udfordringer for at blive provokeret.

De øvrige kompetencer er lidt mere vanskelige at udskille og illustrere. Det skyldes flere ting. Disse kompetencer er sværere at afgrænse, de hænger i høj grad sammen med andre kompetencer og de er ikke nemme at aflæse i den foreliggende empiri. Lad os betragte dem en for en.

Kritikkompetencen fandt vi ingen gode eksempler på i rapporten. Det har ikke noget at gøre med kompetencens sammenhæng med de øvrige eller andre problemer, men simpelthen, at gruppen ikke har anvendt eller haft kritikkompetencen.

Refleksions- og strategikompetencen har det været svært at finde ordentlige illustrationer af. Vi dog har kunnet dokumentere nogle overordnede strategier (f.eks. opbygningen af en simpel model og efterfølgende udbygning), et eksempel på kontrol med arbejdsprocessen og enkelte refleksioner. Problemet her er, at denne rapport er produktet af en modelleringsproces, og derfor giver begrænset mulighed for at disse kompetencer kan aflæses. Vi ser her *resultaterne* af de enkelte trin i modelleringsprocessen, hvor imod *arbejdsprocesserne* ikke kommer til udtryk. Refleksioner over, problemløsningsstrategier for, og kontrol med den igangværende modelleringsproces er jo i sagens natur noget som i særlig grad spiller ind på disse arbejdsprocesser. Der er således væsentlige aspekter af kompetencerne vi ikke har kunnet illustrere særlig grundigt vha. eksemplet "Trafik modellering", og det er derfor vigtigt at overveje hvilke typer empiri, der kunne give en bedre belysning af disse kompetencer. Angående refleksionskompetencen, kunne det tyde på at valideringskompetencen i særlig grad er afhængig af denne. De steder vi kan aflæse refleksionskompetencen - eller burde have kunnet - er i forbindelse med valideringen.

Kommunikationskompetencen er meget væsentlig i relation til modeller. Vores mulighed for at forstå og tage stilling til modeller og deres anvendelser er betinget af, at nogen kommunikerer dem til os. Formen på denne kommunikation skal og må naturligvis afhænge af formålet. Kommunikationskompetencen indebærer altså, at man kan formulere sig *passende* om modellen og modelleringsprocessen i en eller anden sammenhæng, og kompe-

tencen vil givetvis indebære refleksioner over hvad man har gjort og hvorfor. I forhold til "Trafik modellering" bliver en analyse af kommunikationskompetencen til en vurdering af rapporten som sådan: Gør den rede for modellen, så målgruppen har mulighed for at forstå og tage stilling til den? Noget andet er så, at vores mulighed for overhovedet at aflæse nogen kompetencer er afhængig af, hvordan gruppen har kommunikeret sin arbejdsproces. Men det kan ikke i sig selv være et kriterium for kommunikationskompetencen, at alle de andre kompetencer skal kunne aflæses.

Efter at have afprøvet begrebsapparatet på empirisk materiale, der dokumenterede arbejdet med opbygning af en model, vil vi afprøve det på materiale, der i stedet har fokus på analyse af modeller.

3.2 Opgavebesvarelser om "Lotka-Volterra modeller"

I det følgende vil vi behandle empirisk materiale bestående af to opgavebesvarelser udført af grupper af studerende på et matematikkursus (Mat D) på den Naturvidenskabelige Basisuddannelse, RUC, foråret 1996. Kursets titel var "*Matematiske modeller*" og forløb over et semester. En stor del af kursusarbejdet foregik i grupper omkring forskellige modeller hovedsageligt hentet fra biologi.

Vi fulgte kurset i de 3 uger, hvor der blev arbejdet med Lotka-Volterra modeller. Undervejs observerede vi de studerende, optog dem på bånd mens de arbejdede, samt udførte interview, alt sammen som et led i at opnå en forståelse af hvilke kompetencer de brugte, og hvordan de kom til udtryk. Følgende analyse holder sig dog fortrinsvis til de to gruppers endelige opgavebesvarelser, som vi fremover benævner OP1 og OP2. (Se appendiks A for en fuldstændig ordlyd af opgaven samt kopier af de to opgavebesvarelser.)

Når vi har valgt at se på to besvarelser, er det for at kunne sætte dem op mod hinanden i analysen. Denne sammenligning tjener bla. til at illustrere, hvor forskelligt kompetencerne kan komme i spil overfor den samme problemstilling. Det kan der selvfølgelig være mange forskellige årsager til, men en af pointerne i denne analyse er at påpege en "relevant" årsag: nemlig hvordan forskelle i studerendes vidensbase har indflydelse på i hvilken grad, kompetencerne kommer til udtryk og kan udvikles. Sammenhængen mellem vidensindhold og vidensbase kan bla. udtrykkes ved, at vidensbasen er hos den enkelte person, mens vidensindholdet er en analytisk betegnelse for en

del af kompetencerne. Da kompetenceaktiviteterne bygger på dette vidensindhold, vil studerende med forskellig vidensbase også mestre kompetencerne på forskelligt niveau. Ud over at illustrere denne pointe giver sammenligning af de to opgavebesvarelser også mulighed for at argumentere for fraværet af en given kompetence, eller at den beherskes på et andet niveau, i den ene besvarelse ved at henvise til tilstedeværelsen af samme kompetence i den anden opgave.

I analysen vil vi se nærmere på en række aspekter ved kompetencerne, som vi har fundet interessante gennem arbejdet med at analysere opgavebesvarelserne. Men først en kort beskrivelse af hvilke kompetencer, opgaven overhovedet lægger op til at bringe i spil.

3.2.1 Beskrivelse af opgaven

Da besvarelserne naturligt nok fortrinsvis indeholder svar på de spørgsmål, der optræder i opgaven, vil det ikke være alle kompetencer, som vi kan forvente at se tegn på. Derudover er det også vigtigt at huske på, i hvilken sammenhæng opgaverne er løst, dvs. på et kursus. Dette har forskellige effekter. For det første vil de studerende handle "opgaveøkonomisk", dvs. de vil kun gøre det absolut nødvendige, med mindre de har et særligt overskud. Denne specielle opgaveløsningssituation gør, at kompetencerne ikke bliver udfoldet til fulde, og facetterne i dem vi ser vil være få.

En anden effekt vil være, at nogle aspekter af strategikompetencen ikke ses meget, da opgaven i en eller anden grad afstikker en strategi. Aflæsningen af strategikompetencen kan hindres af, at nogle strategier vil være lært på kurset og de studerende derfor ikke vil anse det for nødvendigt at nedskrive dem. Disse forhold gælder de mere overordnede strategier for løsning af hele opgaven samt nogle deltrinsstrategier. Kontrolaspektet vil ikke være påvirket på tilsvarende vis og vil derfor sagtens kunne komme i spil. Imidlertid er det meget uklart hvordan den vil kunne genfindes i en opgavebesvarelse. Denne opgave er dog forholdsvis åbent formuleret, så der skulle være mulighed for at benytte strategikompetencen i højere grad end ved mere bundne opgaveformuleringer. I tråd med dette er den effekt, at kommunikationskompetencen er nedprioriteret af de studerende, da en masse af de ting og aktiviteter der kunne beskrives, anses for indforstået og givet i det forum som kurset er. Derfor er opgavebesvarelserne forholdsvis bundet til opgaven.

Opgaven består i at analysere Lotka-Volterra modellens differentiaalligningssystem til beskrivelse af samspillet mellem byttedyr og rovdyr. Modellen skal endvidere udbygges på to forskellige måder. I den første udbygning indføres

en såkaldt *befiskningsparameter*. Denne udbygning forklares direkte i opgaveteksten. De studerende skal derfor ikke selv "finde" en symbolbeskrivelse, men skal blot udføre den symbolisering der forklares, hvilket er en forholdsvis simpel matematisering at foretage. Den anden udbygning inddrager, at byttedyrenes vækst er selvbegrænsende. Denne beskrives lidt mindre udførligt og kræver derfor mere af matematiseringskompetencen. Ellers er det minimalt, hvad der bliver lagt op til i opgaven, som vil kræve matematisering. Struktureringskompetencen, som tit vil ses umiddelbart før matematiseringskompetencen, har således også kun en mindre rolle. Det er i højere grad afmatematiseringskompetencen, opgaven lægger op til at bruge og udvikle. Den er nødvendig til at redegøre for forudsætningerne for den simple model og de forskellige udbygninger og til at fortolke de indgående parametre. Den kommer desuden i spil i valideringen samt til at fortolke resultater.

Modelløsningskompetencen er ligeledes vigtig for, at de studerende kan fremstille en opgavebesvarelse, da de studerende bla. blev stillet den opgave at finde løsninger til modellen, dvs. til differentialligningssystemet. Da differentialligningssystemet ikke kan løses analytisk, bliver programmet "LOOP" anvendt på kurset til numerisk løsning. De studerende skal selv programmere, så den del af modelløsningskompetencen, som er beherskelsen af algoritmisk tankegang, er en nødvendighed.

Valideringskompetencen bliver udfordret, dels ved at en af opgaverne er at sammenligne modellens resultater med to forskellige typer empiriske data, og dels ved at der bliver lagt op til matematiske vurderinger af modellen. Kritikkompetencen kommer i spil til slut i opgaven, med et spørgsmål der lægger op til refleksioner over det, der er udført i opgaven og på baggrund af dette en stillingtagen til modellens anvendelse. Refleksionskompetencen er grundlæggende involveret i opgavebesvarelsen. Dette skyldes, at refleksioner er nødvendige for at afdække forskellige aspekter af modellen, da de studerende ikke selv har foretaget de grundlæggende valg, som modellen bygger på. Alle spørgsmål i opgaven kan opfattes som en provokation til refleksion. Nogle gør dette bedre end andre, som det vil vise sig i den følgende analyse.

3.2.2 Analyse af to opgavebesvarelser

I denne analyse vil vi ikke gennemgå alle kompetencerne en for en, som vi gjorde i analysen af "Trafik modellering". Vi vil heller ikke gøre rede for i hvilken forstand, begrebsapparatet er dækkende for alle de aktiviteter der er tilknyttet løsningen af opgaven. I stedet vil vi fokusere på nogle udvalgte aspekter inden for fem af kompetencerne. Gennem en sammenligning af hvad

de to grupper har gjort og ikke gjort vil vi forsøge at konkretisere yderligere, hvad kompetencerne kan bestå i og hvordan de kan komme til udtryk.

Vidensindhold og afmatematiseringskompetencen

Vi vil først give et eksempel på, hvordan en større matematisk viden hos de studerende påvirker deres kompetencer, nærmere bestemt deres afmatematiseringskompetence.

Det første spørgsmål i opgaven lyder således: "*Redegør kort for forudsætningerne for denne model og for fortolkningen af de indgående parametre*" (Blomhøj, 1996, s.18). Dette spørgsmål lægger op til brug af afmatematiseringskompetencen både til at afdække forudsætningerne for modellen og til at fortolke de enkelte parametre. Forud for dette spørgsmål er de studerende blevet rådet til at læse kapitlet "En økologisk model" fra *Dynamiske modeller*, (Heefelt, 1990). I dette kapitel gives en forklaring på opstillingen af Lotka-Volterra modellen. De biologiske sammenhænge beskrives og en del af antagelserne og idealiseringerne præciseres. Der skulle således være stor inspiration at hente i dette kapitel til besvarelse af første spørgsmål.

De to opgavebesvarelser er meget forskellige. OP1 lyder:

"Lotka-Volterra modellen beskriver forholdet mellem byttedyr og rovdyr...Modellen ser således ud:

$$x' = ax - byx$$

$$y' = -cy + dxy$$

hvor x' er ændringen i byttedyr og y' er ændringen i antallet af rovdyr. De fire parametre a, b, c, d er alle positive. Tilvæksten i byttedyrbestanden er således proportional med antallet af byttedyr (ax) - flere dyr føder flere unger, dette led giver en eksponentiel vækst. Faldet i antal byttedyr styres både af byttedyr der kan fanges og af antallet af rovdyr der kan fange. Tilvæksten i antallet af rovdyr er proportionalt med både antallet af byttedyr og rovdyr. Konstanten c er en naturlig dødsrate for rovdyrene" (OP1, s.1).

Efter denne besvarelse henvises der til kapitlet af Heefelt for en nærmere forklaring.

Gruppen bag OP2 giver følgende besvarelse af samme spørgsmål:

"Vi har i afsnit 3.4 læst at Lotka-Volterra modellen viser et samspil mellem byttedyr og rovdyr. For dette samspil gælder følgende model:

$$x' = ax - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

Hvor x' er lig med byttedyrene og y' er lig rovdyrene. Forudsætningerne for modellen er at parametrene skal være positive reelle tal, idet funktionerne ikke må blive negative, da biologiske systemer som dette kun kan gå ned til nul og ikke blive negative. Man kan jo ikke have en negativ population." (OP2, s.1).

Det er tydeligt at de studerende bag OP1, hvor det første citat er hentet fra, trækker på en matematisk viden om blandt andet differentialligninger i deres besvarelse. For det første er de i stand til at tolke en differentialkvotient (x' og y') som en ændring i antallet af henholdsvis byttedyr og rovdyr. Gruppen bag OP2 skriver derimod, at x' er byttedyr og y' er rovdyr. Det kan tolkes som at de har forsøgt at afmatematisere uden at benytte matematisk viden, og derfor ikke er nået længere i deres erkendelsesproces end til at overskue, at x' er relateret til byttedyrene og y' er relateret til rovdyrene. Deres argumentation for at parametrene må være positive, med bemærkningen om "negative funktioner", får det til at virke som om, de udelukkende forsøger at tilskrive mening til ligningerne på baggrund af deres biologiske forståelse af systemet. Dette er utilstrækkeligt til at etablere en ordentlig kobling til matematikken. Deres biologiske viden om at populationsstørrelser naturligvis er positive, overføres direkte til, at de størrelser der indgår i beskrivelsen af populationerne, så heller ikke kan være negative. De foretager ikke en fortolkning af hvilken rolle parametrene spiller i den matematiske model, og dermed bliver afmatematiseringen mangelfuld.

Gruppen bag OP1 gennemgår de fire led ($ax, -bxy, -cy, dxy$) et for et. De giver hvert enkelt led en biologisk fortolkning som henholdsvis stigning og fald i dyrebestandene. I analysen af tilvækst-leddet for byttedyrene anvender de viden om differentialligninger, idet de skriver, at "dette led giver en eksponentiel vækst". De benytter således deres matematiske viden om løsninger til forskellige typer af differentialligninger til at give mening til modellens udsagn om det biologiske system; nemlig at byttedyrenes antal ville stige eksponentielt, hvis deres vækst ikke blev begrænset af rovdyrene. I tolkningerne af de tre andre led oversætter de x og y som antallet af henholdsvis byttedyr og rovdyr og angiver hvilke led, der er afhængige af begge arter og hvilke, der kun er afhængig af den ene. Gruppen bag OP2 kommer slet

ikke ind på de enkelte leds betydning, men giver som nævnt i stedet en biologisk forklaring på at konstanterne skal være positive, som ikke forklarer konstanternes betydning i ligningssystemet.

Der kunne selvfølgelig siges meget mere i den biologiske fortolkning, end grupperne har valgt at gøre. Opgaven lyder dog kun på at give en kort besvarelse, så vi vil kun nævne to punkter, som vi finder det særligt interessant, at grupperne *ikke* kommer ind på.

Det ene er parametrene status. Feks. er tilvækst-leddet for byttedyrene, ax , udtryk for flere forskellige biologiske størrelser, og dækker også over den naturlige dødsrate for byttedyrene. (Dette fremgår også af Heefelts analyse). Gruppen bag OP1 skriver blot at "*flere dyr føder flere unger*", og kommer således ikke ind på, at fortolkningen af denne parameter er mere kompleks. Dette på trods af, at de i arbejdet med problemstillingen faktisk brugte lang tid på at gennemgå Heefelts udlægning af de fire konstanter a, b, c, d , hvor byttedyrenes naturlige dødsrate optræder i a -leddet¹. Det kan skyldes at gruppen har været fokuseret på leddenes overordnede funktion som henholdsvis tilvækst- og frafalds-led i det matematiske udtryk. Det skal selvfølgelig også medtages, at det "opgaveøkonomisk" ikke giver nogen særlig gevinst, at gå ind i disse komplekse sammenhænge - da det ikke er strengt nødvendigt for at løse opgaven.

Et endnu mere iøjnefaldende punkt, der ikke omtales af nogle af grupperne, er de mere grundlæggende forudsætninger for modelopstillingen. Hermed tænker vi på overvejelser omkring, at modellen har som grundlæggende betingelse, at der faktisk finder et meget tæt samspil sted mellem de to arter. Et samspil der gør, at populationernes udvikling i den grad er indbyrdes afhængige. Denne del af afmatematiseringen er nok mere krævende, da det ikke blot er et spørgsmål om at fortolke givne parametre, men mere et spørgsmål om at afdække de grundlæggende betingelser for struktureringen. Med andre ord; at afdække den del systemafgrænsningen, som har været afgørende for udvælgelsen af de essentielle parametre samt bestemmelsen af deres indbyrdes relationer. Vi mener således, at der til afmatematiseringen hører at kunne gennemskue, hvad der er foretaget i struktureringsfasen samt i matematiseringsfasen. At stille spørgsmål til selve grundlaget for modelopstillingen er et udtryk for refleksionskompetence, som her altså spiller sammen med og hæver niveauet i afmatematiseringen, men den kommer ikke her til udtryk hos nogen af grupperne.

¹Dette udsagn bygger på observationer fra en kursusgang, hvor vi observerede gruppen gennemgå kapitlet i Heefelts bog grundigt.

Modelløsningskompetencens indhold afhænger af udfordringen

I dette afsnit vil vi forsøge at belyse, hvordan modelløsningskompetencen kan tage sig forskelligt ud, alt efter de *udfordringer* den bliver stillet overfor. Til at løse modellen skal de studerende opbygge et program. Det er overvejelserne omkring tidsskridtets størrelse ifht. valg af løsningsmetode, som vi vil fokusere på i det følgende.

I opgaveteksten bliver der lagt op til en sammenligning af to numeriske løsningsmetoder. Det lyder således: "*Lav et LOOP-program, der kan beregne numeriske løsninger til dette ligningssystem. I første omgang ved hjælp af Eulers metode... Overvej hvor lille tidsskridtet skal være, for at man får tilfredsstillende numeriske løsninger... Udbyg jeres program, så det i stedet for Eulers metode anvender Runge-Kuttas 4. ordens metode til den numeriske fremskrivning. Hvor stort et tidsskridt kan man tillade med denne metode?*" (Blomhøj, 1996, s.19). Der lægges altså umiddelbart kun op til at fastlægge en værdi for tidsskridtet i de to metoder. De to grupper nøjes dog ikke med dette, men begrundet hvorfor man kan tillade sig et større tidsskridt med Runge-Kuttas 4. ordens metode fremfor med Eulers. Man kan således tale om, at de "har taget på sig" at reflektere over det svar, de har givet på spørgsmålet. Først vurderingen i OP1:

"I første omgang brugte vi Eulers metode til numerisk løsning af systemet. Vi forsøgte os med $dt = 1$ som tidsskridt men programmet gik ned og vi brugte derfor $dt = 0,1$, som tidsskridt, hvilket gav løsningskurver der ikke var kantede.

I stedet for at bruge Eulers metode til den numeriske fremskrivning kan man benytte Runge-Kuttas 4. ordens metode. Princippet i denne fremskrivning er at man for hver fremskrivning beregner 4 hældninger i 4 punkter: en hældning i hvert endepunkt, og to hældninger i to forskellige midterpunkter. Derefter tager man gennemsnittet af de fire hældninger. Da denne procedure gentages for hvert tidsskridt bliver afvigelsen fra den analytiske løsningskurve minimeret i forhold til fremskrivning vha Eulers metode, og det tillader derfor også større tidsskridt." (OP1, s.2).

Gruppen bag OP2 vurderer først tidsskridtet ved Eulers metode og derefter ved Runge-Kuttas på følgende måde:

"Grunden til at tidsskridtet er sat til 0,01, er at computeren ved dette tidsskridt kan generere grafen nogenlunde hurtigt uden at

blive for upræcis. Hvis tidsskridtet bliver sat til 0,1 vil computeren genere grafen lynhurtigt, men resultatet ville være ubrugeligt, da det er alt for upræcist. Hvis tidsskridtet blev sat til 0,001 ville det resultere i en meget præcis graf. Men af hensyn til at man skal kunne benytte sig af resultaterne, forholdsvis hurtigt, er denne løsning upraktisk, idet den genererer grafen utroligt langsomt... Vi har derefter udbygget vores program, så vi benytter Runge-Kuttas 4. ordens metode til den numeriske fremskrivning..., i stedet for Eulers metode. Tidsskridtet man kan benytte her kan ligge mellem 0,01 og 0,1, da de er så godt som ens i udformningen og hastigheden er forholdsvis hurtig for begge. Ved tidsskridt 1 bliver faseportrættet alt for upræcis.” (OP2, s.2).

Begge grupper kommer ind på computertekniske begrundelser for valget af tidsskridt. OP1's kommentarer til dette begrænser sig dog til en konstatering af, at programmet gik ned ved et tidsskridt på 1 ved Eulers metode. OP2 anvender det kriterium, at computeren skal kunne generere grafen hurtigt som et vægtigt argument i fastlæggelse af tidsskridtet. Dette punkt nævnes slet ikke i OP1, hvilket skyldes at det ikke har været noget problem for gruppen. På grund af deres valg af parameterverdier mv. fik de tilfældigvis nogle tilfredsstillende, lukkede løsningskurver med Eulers metode, selv med et tidsskridt på 0,1 og de oplever derfor tilsyneladende ikke Eulers metode som langsom og upræcis. Det eneste problem gruppen oplever er, at kurverne kan blive kantede (eller programmet gå ned) ved store tidsskridt, men de kantede kurver har ikke noget at gøre med løsningsmetoden og præcisionen, kun tidsskridtets størrelse. Gruppen bag OP2 har også nogle overvejelser om grafens udseende. Det fremgår ikke af teksten hvad de mere præcist har kigget på, da de blot anvender ordene "præcis" eller "upræcis" om grafen. Ud fra vores observationer på kursgangen fremgår det imidlertid, at en "upræcis" graf er, når løsningskurven ikke er lukket.

OP2 kommer ikke ind på, *hvorfor* man kan tillade sig et større tidsskridt ved Runge-Kuttas metode. I OP1 bruges derimod et helt afsnit på at give en forklaring af principperne i Runge-Kuttas 4. ordens metode. De skriver imidlertid ikke i teksten hvilket tidsskridt de har fundet brugbart. Af bilaget med programudskriften ser det imidlertid ud som om, de har anvendt 0,1, altså det samme tidsskridt som ved Eulers metode. Igen tyder det på, at gruppen ikke har oplevet forskellen mellem de to metoder gennem implementeringen af dem. I dette tilfælde har det så ført til, at gruppen har fundet det vigtigt at argumentere for denne på anden vis.

Det skal kort nævnes, at ingen af grupperne beskriver nogen videre systema-

tiseret undersøgelse af kravene til dt 's størrelse. De kunne feks. have undersøgt hvordan løsningskurverne konvergerede, når tidsskridtet blev mindre, og brugt dette som kriterium for et tilstrækkeligt lille dt .

Pointen i dette afsnit er, at modelløsningskompetencen kan komme til udtryk på forskellig måde, alt efter hvordan den konkret bliver udfordret i arbejdet med at svare på opgavens spørgsmål.

Ligevægtpunkter som et redskab til modelløsning

Bestemmelse og tolkning af ligevægtpunkter for henholdsvis den simple Lotka-Volterra model samt de to udbygninger er en væsentlig del af opgaven. Første spørgsmål i relation til ligevægtpunkter er ikke overraskende at udlede et udtryk for ligevægtpunktet i den simple model. Det skal understreges, at der ikke bliver bedt om en fortolkning af begrebet. OP1 lyder:

"Parameterverdierne a, b, c og d afgør tilsammen, hvor systemets ligevægtpunkt ligger. At systemet er i ligevægt vil sige at hverken antallet af byttedyr eller antallet af rovdyr ændrer sig, dvs at man kan beregne ligevægtpunktet ved at sætte x' og y' lig 0. Dette giver ligevægtpunktet:

$$x = c/d \text{ og } y = a/b$$

som altså er uafhængigt af begyndelsesværdierne for x og y " (OP1, s.1).

I OP2 svares der direkte på opgavens spørgsmål:

"Ligevægtpunkt: I denne opgave fik vi besked på, at udlede et udtryk for et ligevægtpunkt (x^, y^*) . Udledningen skulle ske ud fra modellens parametre.*

udregningen for x^ :*

$$0 = -c * y + d * x * y$$

$$0 = (-c * a)/b + (d * x * a)/b$$

$$0 = -(c * a)/b + (d * a)/b$$

$$(c * a)/b = (d * a * x)/b$$

$$x^* = c/d, \text{ dvs.}$$

$$x^* = 0,5/0,01 = 50$$

udregningen for y^ :*

$$0 = a * x - b * x * y$$

$$b * x * y = a * x$$

$$y = a * x / b * x$$

$$y^* = a/b, \text{ dvs}$$

$$y^* = 0,5/0,03 = 16,333" \text{ (OP2, s.3).}$$

De studerende bag OP2 trækker i deres tolkning af ligevægtspunktet, dvs. i forståelsen af at der hverken sker ændring i antallet af rovdyr eller i antallet af byttedyr, hvis systemet er i ligevægt, på en afmatematiseringskompetence. Fastlæggelsen af ligevægtspunkter bygger på en matematisk viden. Og den sidste sætning, at ligevægtspunktet ikke er afhængigt af begyndelsesværdierne, tyder på at refleksionskompetencen har været anvendt. Gruppen bag OP2 hæfter ikke mange ord på udledningen. Men de har ligesom OP1-gruppen benyttet sig af en matematisk viden til at sætte ligninger lig 0 i bestemmelsen af ligevægtspunktet. De to grupper har begge haft modelløsningskompetencen i anvendelse i opgavebesvarelsen, men en væsentlig forskel på de to besvarelser er, at de har haft en forskellig kompetence til at kommunikere deres refleksioner.

Ligevægtspunkter som et redskab til validering

Næste gang analyse af ligevægtspunkter bliver brugt i opgaven er i forbindelse med en udbygning af den simple Lotka-Volterra model. Udbygningen består i at indsætte en såkaldt befiskningsparameter, f , i ligningerne. Motiveringen for udbygningen er observationer foretaget af en italiensk biolog, Umberto D'Ancona. Han blev opmærksom på, at den procentvise andel af rovfisk var steget i en periode, hvor fiskeriet efter spisefisk havde været reduceret. Dette var overraskende, da man umiddelbart ville forestille sig, at byttedyrene ville have større fordel af at fiskeriet blev mindsket. Volterra udbyggede den simple model for at forklare denne observation. Denne udbygning beskrives udførligt med ord i opgaven: *“Volterra udbyggede modellen med en befiskningsparameter f på den mest simple måde. Han antog nemlig, at befiskningen kunne repræsenteres i modellen ved, dels at trække f fra byttefiskenes formeringsrate a , dels ved at lægge f til rovfiskenes dødsrate c . Det antages altså, at der fiskes lige meget efter bytte- og rovfisk.”* Spørgsmålet lyder så: *“Hvilke konsekvenser får et reduceret fiskeri for ligevægtspunktet? Kan Volterras model bruges til at forklare D'Anconas observationer?”* (Blomhøj, 1996, s.19). Først besvarelsen i OP1:

“Den udbyggede model ser således ud:

$$x' = (a - f)x - bxy$$

$$y' = -(c + f)y + dxy$$

Dette giver et nyt ligevægtspunkt: $x = (c + f)/d$ og $y = (a - f)/b$. Denne udvidede model beskriver kvalitativt de data D'Ancona

havde samlet sammen om en stigning i rovdyrbestanden under en periode med lav befiskning (1. verdenskrig)" (OP1, s.1-2).

OP2 lyder:

"Volterras udbygning af Lotka-Volterra modellen med befiskningsparameter f , hvor f trækkes fra byttefiskenes formeringsrate a , og lægge f til rovdyrenes dødsrate c . Udledning af x^* :

$$x^* = (c + f)/d$$

Udledning af y^* :

$$y^* = (a - f)/b$$

Man kan se ud fra de 2 udledte ligninger, at når f bliver (reduceret fiskeri) mindre bliver x^* mindre og y^* større, dvs. når befiskningsparameteren falder, falder antallet af byttedyr og antallet af rovdyr stiger. Ligevægtpunktet forskydes skråt op mod venstre (se bilag 7)." (OP2, s.3).

Begge grupper er i stand til at gøre rede for hvordan et ændret fiskeri vil kunne ses på ligevægtpunktet. Mere tvivlsomt er det om grupperne er i stand til at forklare D'Anconas resultater med Volterra's model. Lad os lige tage fat i hvilke overvejelser, der skal til for at forklare dette. Først skal struktureringskompetencen i gang for at forstå dataene fra D'Anconas observationer i forhold til modellen, med andre ord skal det indses at dataene er empiriske ligevægtpunkter for de forskellige år, og derfor kan sammenlignes med den sammenhæng der netop er gjort rede for. OP1-gruppen skriver, at den udvidede model kvalitativt beskriver D'Anconas observationer, men de uddyber ikke, hvad de egentlig mener med dette, eller hvordan de kan se det og det er derfor svært at tyde om de har benyttet struktureringskompetencen til at forstå dataene. OP2-gruppen beskriver med ord hvad ændring i befiskningsparameterens størrelse betyder for ligevægtpunktet, som det fremgår af følgende citat: "I 1914 udgjorde byttedyrene 88,1% og rovdyrene 11,9%. Antallet af rovdyr stiger herefter, idet de spiser byttedyrene -og antallet af disse reduceres. På et tidspunkt vender denne 'kæde' (1918-1919) og rovdyrenes antal falder, mens byttedyrene stiger. Grunden er, at denne fødekæde ændres, da der er for mange rovdyr i forhold til byttedyr- og antallet af rovdyr falder pga. fødemangel. Dette resulterer i, at byttedyrene får bedre leveforhold og stiger igen, og kæden starter forfra" (OP2, s.3). Denne forklaring afspejler

imidlertid at de ikke har forstået D'Ancona's data som ovenfor skitseret, men blot har skitseret den grundlæggende dynamik i byttedyr-rovdyr systemet.

Vi har nu set ligevægtspunktanalyse brugt både i forbindelse med modelløsning og i forbindelse med validering. Dette illustrerer, at det samme matematiske værktøj kan bruges i forbindelse med forskellige kompetencer.

Validering på baggrund af matematiske overvejelser

Et af valideringskompetencens aspekter er at kunne foretage en matematisk vurdering af modellen. Vi vil her illustrere, hvordan dette aspekt kan komme til udtryk.

Vi har valgt et eksempel fra opgaven, hvor de studerende skal validere en udbygning af den oprindelige model vha. ligevægtspunktanalyse. Denne udbygning retter op på den omstændighed, at byttedyrene i den simple model antages at vokse eksponentielt, når der ikke er nogle rovdyr til stede. Dette gøres ved at modellere byttedyrenes vækst som en logistisk vækst. Spørgsmål i denne forbindelse lyder: "*Beregn ligevægtspunktet for modellen. Indtegn to kurver i (x,y) -plottet, der indeholder de punkter, hvor henholdsvis x' og y' er nul. Altså kurverne for modellens kritiske punkter. ... Vil der i denne model altid være et ligevægtspunkt, hvor begge populationer er til stede*" (Blomhøj, 1996, s.21). Der ønskes således, at ligevægtspunktanalysen fører til en indsigt i begrænsningerne i løsningerne som modellen kan give. OP1's svar på disse spørgsmål:

"Den udbyggede model ser således ud:

$$x' = ax(1 - x/N) - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

Her står N for byttedyrenes bærekapacitet.

Denne model har selvfølgelig også et ligevægtspunkt, som kan beregnes ved at sætte x' og y' lig 0. Dermed fås følgende:

$$x = c/d$$

$$y = (a/b)(1 - c/dN)$$

Isocliner: For at finde ud af hvordan løsningskurven vil bevæge sig igennem planen mod ligevægtspunktet, foretages en fortegnsanalyse. Dette gøres ved først at sætte $x' = 0$ og derefter at sætte

$y' = 0$, dermed fås to isocliner, som skærer hinanden i ligevægts-punktet.

$$x' = 0 \Rightarrow y = a/b - (a/bN)x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = c/d$$

...Hvis de to isocliner skærer hinanden i 2. kvadrant, dvs. hvis $N < c/d$, så vil modellen ikke have noget ligevægtspunkt hvor begge arter er tilstede. Rovdyrene vil uddø. Hvis $N = c/d$ når byttedyrene deres bæreevne præcis når rovdryrene uddør." (OP1, s.3).

OP1 gruppen får tillagt en mening til deres undersøgelse af ligevægtspunkterne (afmatematiseringskompetencen) og får dermed mulighed for på længere sigt at vurdere modellens begrænsninger for beskrivelse af rov-byttedyr systemer. De matematiske overvejelser har således været en vigtig del i afgrænsningen af modellens gyldighedsområde.

Kritik af modellens anvendelsesmuligheder

Til slut vil vi se på hvordan kritikkompetencen har været i spil. Opgaven lægger specielt op til kritikkompetencen i sit afsluttende spørgsmål, der lyder: "Hvad kan man efter jeres mening bruge de behandlede populationsmodeller til?" (Blomhøj, 1996, s.21).

OP2 er forholdsvis kortfattet i formuleringen:

"Ud fra de behandlede populationsmodeller, må vi konkludere at modellen må kunne anvendes på andre tilsvarende fødekæder."
(OP2, s.5).

Kritikkompetencen kommer noget mere nuanceret til udtryk i OP1. Allerede i starten af deres besvarelse har gruppen valgt at medtage bemærkninger om formålet bag opstillingen af modellen, som er svaret på et af de typiske spørgsmål, der kan stilles med en kritikkompetence. Gruppen skriver: "Den blev opstillet i 1920'erne, to forskellige steder, med to forskellige formål. Volterra's formål var at forklare en dataindsamling af antallet af hajer og rokker i Middelhavet, Lotka's formål var at forudsige losbestanden." (OP1, s.1).

Det ses også at vurderingen af modellen/modellerne ifht. de angivne formål er en del af kritikkompetencen. Gruppen skriver:

“Lotka opstillede modellen med det primære formål at forudsige en losbestand ud fra dataindsamling. Dette kan dog kun kvalitativt lade sig gøre. Udfra modellen kan man se, at rovdyrbestanden topper lige efter at antallet af byttedyr har været på sit højeste (Figur 1). Groft set passer dette med de målinger, der er vist på grafen i opgaveoplægget. Men hvor stor bestanden bliver fra år til år, kan modellen ikke udtale sig om, da det ses at de to bestande nogle gange topper samtidig, nogle gange når samme maximum og at der nogle gange er stor forskel mellem antallet af hhv byttedyr og rovdyr.” (OP1, s.2).

Og til slut i opgaven:

“Vi mener ikke at modellen kan bruges kvantitativt, dertil er der alt for mange påvirkninger og faktorer der ses bort fra (årstider, andre dyr osv). Den er nok mest anvendelig i undervisningsøjemed...” (OP1, s.4).

Vi ser i citatet hvordan viden og begreber om forskellige modeltyper giver gruppen nogle redskaber, som kan bruges til at kritisere modellen med, og som dermed indgår væsentligt i kritikkompetencen. Gruppen bag OP1 omtaler to forskellige typeinddelinger. I beskrivelsen af formålet skelner gruppen mellem *forklarende* og *forudsigende* formål. I vurderingen skelner de mellem *kvantitative* og *kvalitative* beskrivelser. De kan derfor bygge en del af deres vurderinger på denne skelnen. I deres vurdering af Lotka-Volterra modellens formåen, beskriver de forskellige kvalitative træk udførligt, men tillægger tilsyneladende modellens manglende evne til at kunne anvendes kvantitativt stor vægt, da de til slut forkaster den til alt andet end undervisning.

Refleksioner

Som nævnt i indledningen er refleksionskompetencen grundlæggende i centrum i en opgave som denne, hvor en model skal analyseres. Der vil selvfølgelig være forskel i hvordan denne kompetence beherskes trods det at opgaven som sådan lægger op til den. En iøjnefaldende måde dette kan illustreres på er at se på kontrasten mellem formen af de to opgavebesvarelser. Den ene, OP2, er meget knyttet til opgavens spørgsmål og begrundelsen for de ting der gøres i opgavebesvarelsen er i nogle tilfælde at *“I denne opgave fik vi besked på...”* (OP2, s.3). Dette resulterer i, at der gøres ting i opgaven, uden det i opgavebesvarelsen følges til dørs (OP2, s.2). Gruppen beregner feks. en periode længde uden at bruge den til noget umiddelbart. I modsætning til dette

er OP1 mere løsrevet fra opgaveteksten. Dette ses af den måde opgavebesvarelsen er opbygget på, samt af den omstændighed at gruppen i besvarelsen søger at motivere de ting der gøres og efterfølge dem med en kommentar. Det er oplagt, at denne opbygning i sig selv giver plads til langt flere refleksioner end den anden mere opgavetekstnære besvarelse.

3.2.3 Afrunding på analysen af opgavebesvarelsene

Vores arbejdsproces med opgavebesvarelsene var ligesom med projektrapporten først at inddеле teksten i afsnit, der byggede på samme typer af aktiviteter, og derefter at diskutere hvilke kompetencer disse kunne siges at afspejle. I dette arbejde stødte vi ikke på aktiviteter, som vi ikke kunne indplacere i begrebsapparatet. Vi har således oplevet begrebsapparatet som dækkende for disse besvarelser. Som det fremgik af opgavebeskrivelsen, afsnit 3.2.1, kunne vi ikke forvente at se samtlige kompetencer udfoldet i en besvarelse af Lotka-Volterra-opgaven. Dette forhold medførte, at vi ikke har interesseret os specielt for hvilke kompetencer, der rent faktisk kom - eller omvendt ikke kom - til udtryk i besvarelsene. I stedet har vi været opmærksomme på, om der optrådte interessante ting, som vi ikke havde set i trafikrapporten. Vi vil derfor opsummere hvilke nye aspekter vi har set.

Igennem analysen af de to opgavebesvarelser har vi fået illustreret et par aspekter af begrebsapparatet, som vi i analysen af "Trafik modellering" argumenterede mere indirekte for. Dette gælder kritikkompetencen og det ene aspekt af valideringskompetencen: den matematiske validering. I projektrapporten kunne vi ikke finde nogle beskrivelser, der tydede på, at disse aspekter havde været i spil. Vi argumenterede derfor mere bagvendt for deres berettigelse i den pågældende problemstilling ved at påpege, hvordan de med fordel kunne have været anvendt. I opgavebesvarelsene derimod har der både været anvendt matematisk validering og kritikkompetence. Den matematiske validering blev benyttet af OP1-gruppen til at undersøge om modellen altid ville have et ligevægtspunkt, hvor både rovdyrene og byttedyrene var tilstede. Den matematiske validering blev dermed anvendt til at afgrænse modellens gyldighedsområde. Kritikkompetencen blev direkte udfordret af opgaveteksten til at foretage en vurdering af modellerne. Som det fremgik af analysen var der stor forskel på de to besvarelser på dette punkt. Den ene var noget mere kortfattet end den anden. En forklaring på dette kunne være at den ene gruppe har haft bedre redskaber - i form af begreber - til at foretage vurderingen. OP1-gruppen inddrager modeltypeviden i deres kritik; en mulighed som vi argumenterede for i

kapitel 2. Opgavebesvarelsenerne har dermed illustreret, at kritikkompetencens vidensindhold bla. indeholder modeltypeviden.

Ud over at illustrere disse aspekter mere konkret har vi gennem analysen fået udpeget et par generelle aspekter ved hele begrebsapparatet. I analysen af afmatematiseringskompetencen så vi hvordan karakteren af vidensindholdet påvirkede kompetencen. Vi så hvordan den ene gruppes matematiske viden, konkret kendskab til løsning af differentialligningssystemer, kvalificerede deres afmatematisering af modellen. Dette forhold gælder ikke specifikt for afmatematiseringskompetencen, men kan generaliseres til de andre kompetencer. Ændring i en given kompetences vidensindhold kan dermed influere på de aktiviteter, der udføres på baggrund af den pågældende kompetence. En del andre forhold vil selvfølgelig spille ind på i hvor høj grad en forøgelse af vidensindholdet vil påvirke kompetencerne, men ideelt set vil tilføjelsen af relevant viden føre til flere og mere avancerede aktiviteter.

Et andet aspekt vedrørende forhold, der kan influere på den enkelte kompetence blev konkretiseret i forbindelse med diskussionen af hvilke aspekter af afmatematiseringen, som kom til udtryk. Her påpegede vi, at ingen af besvarelsenerne havde medtaget de mere grundlæggende betingelser for byttedyr-rovdyr systemet. Ingen af de to besvarelsener har kommenteret, at forudsætningen for denne model er, at de to populationer lever i et meget tæt samspil. For at afdække dette forhold er det nødvendigt at tolke mere end blot de givne størrelser. Dette kræver refleksioner af den art vi har repræsenteret med refleksionskompetencen. Refleksionskompetencen havde dermed kunnet støtte afmatematiseringskompetencen til mere avanceret afmatematisering. Dette konkretiserer således refleksionskompetencens evne til at foranledige progression i de andre kompetencer.

I analysen optrådte der ligevægtspunktanalyse både i forbindelse med model-løsningskompetencen og valideringskompetencen. Dette illustrerer at kompetenceopdelingen giver en helt anden opdeling af *hvad* de studerende skal lære end en emneopdeling giver.

Ligevægtspunktanalyse er en del af vidensindholdet - en del af den matematiske viden i vidensindholdet. Modeltypeviden er også en del af vidensindholdet. Vidensindholdet i de enkelte kompetencer vil aldrig kunne beskrives udtømmende. Hvilken viden, der vil være nødvendig i en given situation vil altid afhænge af det pågældende problem. Vi kan altså kun sætte overskrifter på indholdet af vidensindholdet og ikke beskrive det i alle detaljer.

3.3 Sammenfatning

Formålet med dette kapitel var dels at give mere fylde til kompetencebeskrivelserne gennem konkrete illustrationer og dels at undersøge begrebsapparatets funktion som analyseredskab. I hvor høj grad disse formål er blevet indfriet vil vi samle op på her. Vi vil starte med at opsummere, hvad det empiriske arbejde har lagt til resultaterne fra det teoretiske arbejde.

Forskellige forhold vedrørende en del af kompetencernes udfoldelsesrum er blevet illustreret yderligere gennem analysen. Det drejer sig bla. om omstændigheder vedrørende samspillet mellem de forskellige kompetencer og om hvilket trin i modelleringsprocessen, som kompetencerne anvendes på. Vi vil gennemgå kompetencerne én for én og fremhæve de nye aspekter.

De seks kompetencer, som er udskilt på baggrund af et studium af modelleringsprocessens trin, kunne man forvente at se i spil på tilsvarende steder i en modelleringsproces. Dette har vist sig at være lidt af en forenkling. *Struktureringskompetencen* skulle efter første tanke komme i spil i overgangen fra *problem* til *system* i en modelleringsproces. I projektrapporten "Trafik modellering" så vi imidlertid et eksempel, hvor den blev anvendt i forbindelse med en modelanvendelse, altså når der blev stillet nye spørgsmål til modellen, spørgsmål som der ikke var modelleret på baggrund af. Analysen af opgavebesvarelserne illustrerede også struktureringskompetencen på et andet trin i modelleringsprocessen. Her blev den anvendt til at tolke empiriske data, der skulle sammenlignes med modellens data, - altså i en valideringsfase. Struktureringskompetencen har således vist sig på andre steder end der, hvor den umiddelbart kunne forventes. Generelt har det været forholdsvis nemt at illustrere de vigtigste aspekter af struktureringskompetencen. Vi har både fået illustreret det *strukturerende greb*, udvælgelse af en teori fra virkelighedsudsnittet, udvælgelse af elementer og endelig udvælgelse af de essentielle relationer imellem disse. Alle disse aspekter blev illustreret i trafikrapporten.

Matematiseringskompetencen har vi oprindelig identificeret i trinnet fra *system* til *matematisk model*. Dette er i overensstemmelse med det vi har oplevet i det empiriske arbejde. Kompetencen fremhævede vi slet ikke i Lotka-Volterra opgaverne, mens vi så den udfoldet i "Trafik modellering". Kompetencen var her i tæt samspil med struktureringskompetencen. Dette kan generaliseres i en vis udstrækning. Alt efter problemstillingen må vi forvente, at strukturering og matematisering i visse tilfælde kan foretages i et greb. I den første gennemgang af kompetencerne i kapitel 2 skrev vi, at dette ville gøre sig gældende i de tilfælde, hvor man havde lagt en synsvinkel på problemet, der inkluderede en teori formuleret på matematisk form. I disse tilfælde

ville relationerne mellem de udvalgte elementer med det samme kunne udtrykkes matematisk. I "Trafik modellering" havde gruppen valgt en sådan matematisk formuleret teori. Imidlertid fremgik det, at det ikke var alle matematiseringer, der fulgte direkte. For eksempel var det ikke så ligetil at komme frem til en formel, der kunne angive et udtryk for deaccelerationen, der kunne nedbringe en bils hastighed til den samme som den forankørendes. Påstanden om at matematiseringen umiddelbart følger - blot der er valgt en matematisk formuleret teori - skal derfor nuanceres lidt. Dette skyldes, at det system, der matematiseres sjældent vil kunne leve op til de antagelser, som de pågældende teorier fordrer.

Afmatematiseringskompetencen har vi udskilt ud fra samme trin i modelleringsprocessen som matematiseringskompetencen men med modsat udgangspunkt. Afmatematiseringskompetencen har vi således udpeget i overgangen fra *model* til *system*. Vi havde specielt forventet at se afmatematiseringskompetencen anvendt i modelarbejde, der var fokuseret omkring analyse af modeller. I Lotka-Volterra-opgaverne kom den da også til udtryk, og vi fik påpeget en mere avanceret aktivitet, der krævede samspil med refleksionskompetencen. Nemlig det at gennemskue selve grundlaget for modellen, her under at identificere det strukturerende greb.

Modelløsningskompetencen udpegede vi oprindeligt i trinnet fra model til modelresultater. Kompetencen indeholder meget forskellige typer af aktiviteter, der er nødvendige for at opnå resultater af en model. I kapitel 2 påpegede vi bla. at algoritmisk tankegang og parameterbestemmelse var afgørende aspekter af kompetencen. Begge aspekter kunne vi genfinde i praksis. Både i projektrapporten "Trafik modellering" og i opgaverne bestod en meget stor del af modelløsningskompetencen netop i at algoritmisere løsningsproceduren. Parameterbestemmelse så vi ikke i opgavebesvarelserne men derimod i stor stil i "Trafik modellering". I projektrapporten så vi også et nøje samspil mellem matematiseringskompetencen og modelløsningskompetencen. Disse to kompetencer er udpeget på to på hinanden følgende trin i modelleringsprocessen. Dette forhold gør sig også gældende med struktureringskompetencen og matematiseringskompetencen, som vi også har set et meget nøje samspil imellem. Generelt er der altså visse indikationer for, at der blandt de kompetencer, vi har benævnt *uafhængige*, hersker et specielt tæt samspil mellem de kompetencer, der er udskilt på "nabotrin" i modelleringsprocessen.

Valideringskompetencen er identificeret i trinnet mellem *modelresultater* og *modelvalidering*. I beskrivelsen i kapitel 2 fremhævede vi to forskellige aspekter af valideringskompetencen. Begge aspekter har vi fået illustreret. Analysen af "Trafik modellering" fremhævede, at det ene aspekt - aktiviteten med at sammenligne modellens resultater med et empirisk datasæt - tilsyneladende

er lettere at få i gang end det andet aspekt: den matematiske vurdering. Det empiriske materiale efterlader det indtryk, at valideringskompetencen i høj grad spiller sammen med refleksionskompetencen, dvs. validering og vurdering provokerer i særlig grad til refleksioner. I projektrapporten fik vi også illustreret et grundlæggende aspekt af valideringskompetencen - evnen til at gennemskue hvilke typer af valideringer, der ville være fornuftige at foretage til henholdsvis de første mere simple udgaver af en model og den færdige udgave. I "Trafik modellering" benyttede gruppen sig af denne evne til at vurdere deres første simple model ud fra mere skønsmæssige overvejelser end den sidste udgave, som de sammenlignede med empiriske data.

Den sidste kompetence, som er udskilt ud fra modelleringsprocessens trin, er *kommunikationskompetencen*. Kommunikationskompetencen har vi identificeret på det afsluttende trin mellem *modelvalidering* og *rapport*, men vi har ikke i beskrivelsen afgrænset den til dette trin. Dens funktion er bredt ud over hele forløbet. Denne kompetence er imodsætning til de andre kompetencer, der er udskilt fra modelleringsprocessen, ikke hvad vi har benævnt en *uafhængig* kompetence, men derimod en *afhængig* kompetence. Man kan altså ikke forestille sig denne kompetence uafhængigt af mindst en af de andre kompetencer. Kommunikationskompetencen har vi kun kommenteret kort i analysen af "Trafik modellering" og slet ikke i analysen af Lotka-Volterra opgaverne. Kompetencen indeholder evnen til at kommunikere på forskellig vis til forskellige grupper. Den indeholder derfor evnen til at vurdere hvilken information, der er nødvendig at videreformidle i den pågældende situation. Det er en meget vigtig kompetence efter vores overbevisning. Men vores illustrationsmetode - med de korte citater - er ikke særligt velegnet til denne kompetence.

De sidste tre kompetencer er dem, der ikke er udskilt ud fra modelleringsprocessen - de er derfor heller ikke knyttet specifikt til et trin. De er alle *afhængige* kompetencer, dvs. de fungerer altid i samspil med en eller flere andre kompetencer.

Refleksionskompetencen indeholder evnen til at reflektere over de forskellige aktiviteter, der foretages undervejs i en modelleringsproces. I kapitel 2 beskrev vi, hvordan kompetencen kan hjælpe til progression i de aktiviteter, der bliver foretaget på baggrund af de andre kompetencer. Dette fik vi illustreret i Lotka-Volterra opgavebesvarelserne konkret ved at understrege hvordan afmatematiseringen kunne være kommet længere hos grupperne, hvis de havde benyttet refleksionskompetencen i samspil med afmatematiseringskompetencen til at afdække de grundlæggende betingelser for modellerne. I "Trafik modellering" så vi fortrinsvis kompetencen i forbindelse med valideringsakti-

viteter. I Lotka-Volterra opgaven så vi et tilfælde, hvor begge grupper reflekterede over svaret på et spørgsmål selv om der ikke umiddelbart blev bedt om det i opgaveformuleringen. Dette gjorde sig gældende i deres besvarelse af, hvor stort et tidsskridt man kunne tillade sig med de to forskellige numeriske metoder. Den ene gruppes refleksioner blev tilsyneladende foranlediget af nogle overraskende ens resultater med de to metoder. Sammenholdt med et af resultaterne af analysen af "Trafik modellering", hvor vi overvejede muligheden af at særligt gode modelresultater ikke giver anledning til så mange refleksioner kan det indicere, at det er vanskeligt at planlægge undervisningsforløb, der bevidst kan udfordre denne kompetence.

Kritikkompetencen anvendes imodsætning til refleksionskompetencen, når en modelleringsproces er afsluttet og modellen anvendes i en bestemt sammenhæng. Den inddrager således i højere grad end de andre kompetencer modellens *kontekst*. Vi kunne ikke dokumentere tilstedeværelsen af nogen aktiviteter der var foretaget på baggrund af kritikkompetencen i "Trafik modellering", men vi mener, at vi i analysen af projektrapporten har belyst, at denne kompetence med fordel kunne have været anvendt. I opgavebesvarelserne illustrerede vi den mere direkte. Her fik vi også illustreret den pointe, at en vigtig del af kritikkompetencens vidensindhold er modeltypeviden, idet dette kan danne baggrund for, hvilken kritik der kan gives, og om den er relevant. I kapitel 2 argumenterede vi for, at modeltypeviden er en del af samtlige kompetencers vidensindhold. Det, at vi kun har set det eksplicit i forbindelse med kritikkompetencen kan muligvis skyldes, at det er denne kompetence, som mest oplagt er afhængig af en sådan modeltypeviden.

Strategikompetencen, som kan indvirke på samtlige aktiviteter i en modelleringsproces, indeholder evnen til at planlægge og kontrollere egne arbejdsprocesser. Denne kompetence kan derfor ligesom refleksionskompetencen føre til progression i aktiviteter, der foretages på baggrund af de andre kompetencer. Kontrolaspektet af kompetencen, som bla. har som funktion at stoppe ufrugtbare aktiviteter, så vi illustreret i projektrapporten, hvor gruppen beskriver, hvordan de først havde tænkt sig at repræsentere vejen på én måde, men stoppede op og overvejede perspektiverne i dette og derefter valgte en anden datalogisk repræsentationsform. Derudover har vi også i "Trafik modellering" fået illustreret den overordnede strategi, der ligger i at lægge ud med en mere simpel model og trinvis udbygge den. Et vigtigt aspekt af denne strategi, er at overveje, hvordan de enkelte modeller kan og skal vurderes. Dette aspekt fik vi også illustreret i rapporten.

Blandt de *afhængige* kompetencer er der et fællestræk for tre af kompetencerne. Kommunikationskompetencen, refleksionskompetencen og strate-

gikompetencen indvirker på andre aktiviteter og skaber ideelt set positiv fremgang i disse aktiviteter. Dette har vi konkret fået illustreret med de to sidstnævnte kompetencer, men vi mener også det må være gældende for kommunikationskompetencen - selv om vi ikke kan give konkrete eksempler. Det er imidlertid en kendt sag, at det, at man bliver tvunget til at formidle sine resultater, samtidig bevirker, at man reflekterer over dem og dermed ofte får mulighed for ny indsigt og nye handlinger. Kritikkompetencen er afhængig på en anden måde. Den går klart ud over de andre kompetencer, idet den inddrager modellens kontekst, der kan være yderst kompleks. Den er derfor afhængig af de andre kompetencer i den forstand, at de kritiske spørgsmål der kan stilles på baggrund af en kritikkompetence kun kan besvares vha. de andre kompetencer.

Begrebsapparatets analytiske kraft

Vi vil nu diskutere hvordan begrebsapparatet har fungeret som analyseredskab. Specielt vil vi opsummere, om begrebsapparatet har været dækkende for de aktiviteter, vi har set i det empiriske arbejde, og om grænserne mellem kompetencerne har været tilstrækkeligt veldefinerede til, at vi har kunnet indplacere aktiviteter i de forskellige kompetencer. Vi forventede specielt at sidstnævnte kunne give problemer for de afhængige kompetencer, altså kommunikations-, refleksions-, kritik-, og strategikompetencen.

Analysen har understreget de grundlæggende betingelser for at benytte begrebsapparatet som analyseredskab. Når vi benytter begrebsapparatet til at aflæse kompetencer aflæser vi *analytiske størrelser*. Der hvor vi aflæser dem er de imidlertid *tilknyttet* personer. Begreberne har således en grundlæggende forskellig karakter i de to situationer, som vi prøver at sammenstille. Dette kan illustreres med forholdet mellem begreberne vidensbase og vidensindhold. Schoenfeld har i sin definition af begrebet vidensbase taget højde for, at den findes hos personer. Dette har medført, at vidensbasen indeholder et element som *fejlagtig viden*. I opstillingen af modelkompetencerne har vi ikke medtaget den slags betragtninger. Dette skyldes selvfølgelig at formålet er noget andet med vores begreber. Der ville ikke være meget mening i at vores kompetencer inkluderede forkert viden, da de er tænkt som kompetencer, man kunne forestille sig indeholdt i en pensumliste. Det er således en grundlæggende betingelse for anvendelse af begreberne, at vi er opmærksomme på, at kompetencerne tilhører et individ og bruges i en bestemt situation.

Vi har gennem vores arbejdsproces med analysen af det udvalgte empiriske materiale oplevet at modelkompetencerne har været dækkende. Således har

alle aktiviteter, der blev identificeret ved en gennemlæsning af både projektrapporten "Trafik modellering" og Lotka-Volterra opgavebesvarelsenerne, kunnet beskrives med henvisning til de ni modelkompetencer. Det eneste problem, der opstod med at indplacere aktiviteter, var i forbindelse med projektgruppens aktiviteter indenfor datalogien. Disse aktiviteter, der kan betegnes som hørende til en datalogiseringskompetence, har et vist fællesskab med de aktiviteter, der foregår med matematiseringskompetencen og afmatematiseringskompetencen. Dette gav anledning til at benævne fællesskabet med en mere overordnet betegnelse; formaliseringskompetencen. Når vi på trods af disse problemer med at indplacere aktiviteter alligevel konkluderer at begrebsapparatet har været dækkende skyldes det, at vi mener problemerne kan tilskrives at projektgruppens model var både datalogisk og matematisk. Da vi kun har ambitioner om, at begrebsapparatet skal være dækkende for matematisk modellering, vil vi således fastholde, at begrebsapparatet har været dækkende for det empiriske materiale.

Den anden omstændighed vi ville undersøge var, om grænserne mellem kompetencerne var skarpe nok til, at det ville være muligt at indplacere aktiviteter uden de store problemer. Herunder var det vigtigt at indse, at nogle aktiviteter nødvendigvis måtte være udtryk for mere end en kompetence. Spørgsmålet om grænsernes klarhed skal derfor inddeles i to grupper. Med hensyn til de kompetencer, som kan optræde alene, er det vigtigt at de ikke vil inkludere de samme aktiviteter. De afhængige kompetencer kan som sagt ikke undgå at overlape andre kompetencer. Her er der således mere tale om gradforskelle i karakteren af aktiviteterne.

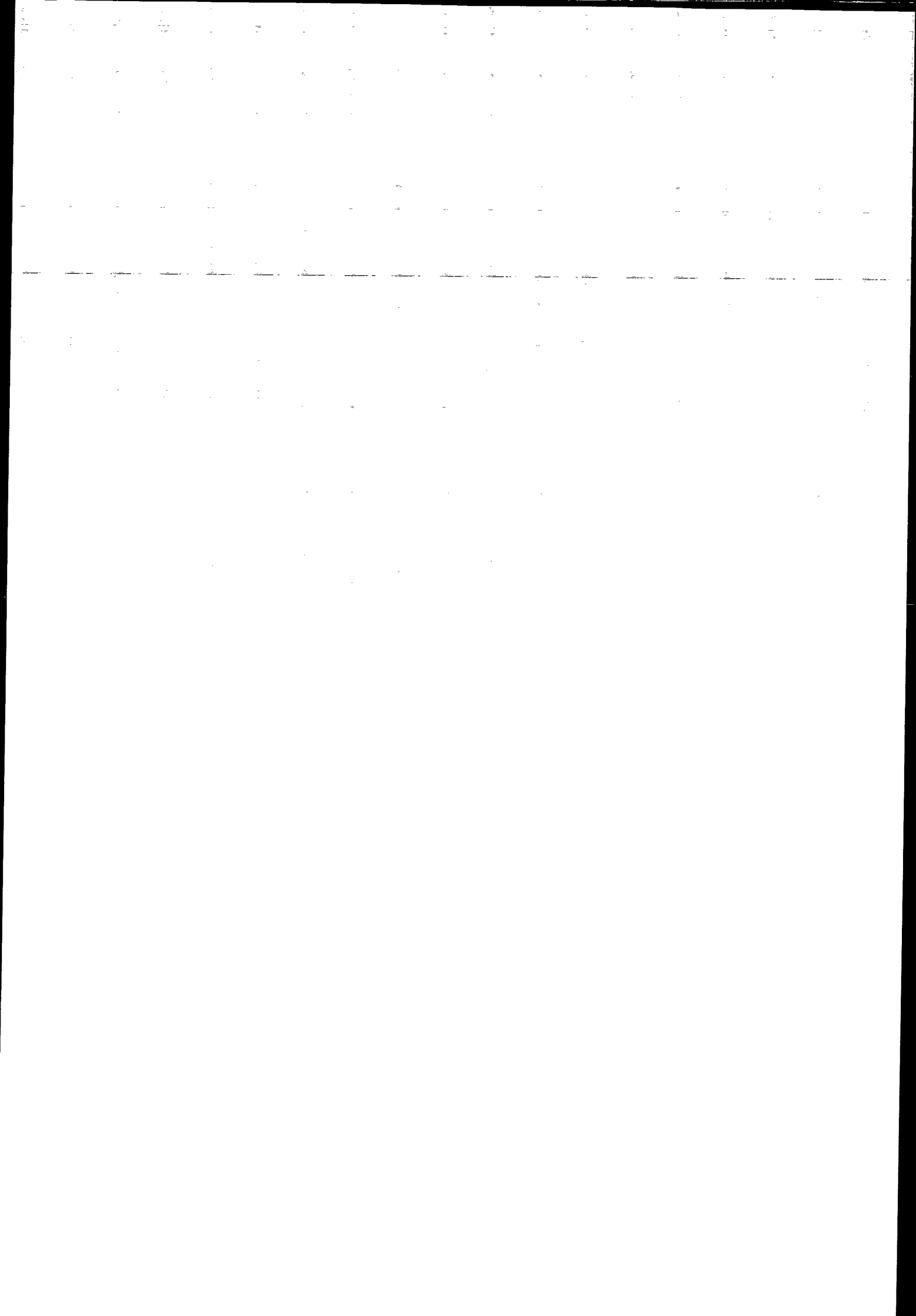
Med hensyn til den første gruppe - de uafhængige kompetencer - mener vi at grænserne er skarpe nok i den forstand, at de indeholder væsensforskellige aktiviteter. Men som vi har påpeget er specielt dem, der tilhører "nabo-trin" i modelleringsprocessen så nært beslægtede at nogle aktiviteter, kan være udtryk for mere end én kompetence.

Med hensyn til den anden gruppe - de afhængige kompetencer - kunne man sige, at grænsen er for vag, mellem refleksionskompetencen og alle de andre kompetencer. Denne kompetence har i særlig grad karakter af at være et aspekt af de andre kompetencer. Dette forhold ligger i selve definitionen af kompetencen, da den ikke eksisterer i sig selv, men kun i samspil med en af de andre kompetencer. Man kunne vælge at indplacere de forskellige refleksioner som en del af de enkelte kompetencer for at undgå dette problem. Vi har imidlertid valgt at bibeholde kompetencen ud fra den overbevisning, at der bliver mere opmærksomhed omkring refleksionerne, når de får en særskilt kompetence. Vi må dog nok konkludere at det i visse tilfælde har været noget af et skønsspørgsmål om man kunne sige, at refleksionskompetencen havde

været i spil.

Vores begrebsapparat kan ikke siges at *kategorisere* aktiviteter i forbindelse med modelarbejde, der er snarere tale om aspekter af modelleringsaktiviteter eller typer af modelleringsaktiviteter. Grænserne mellem kompetencerne er derfor ikke skarpe. Vi mener dog, at grænserne er tilstrækkeligt veldefinerede til at vi har kunnet aflæse kompetencerne i vid udstrækning.

Analysen af det empiriske materiale med kompetencerne som analyseapparat har bragt en indsigt i hvilken kunnen der har ført til henholdsvis trafikmodellen og den tilhørende projektrapport, samt til opgavebesvarelsene om Lotka-Volterra modeller. I sådanne analyser er det oplagt, at der må indtages overvejelser om den situation som modelarbejdet er udført i. Disse metodeovervejelser vil vi komme nærmere ind på i diskussionen i det afsluttende kapitel.



Kapitel 4

Metodeovervejelser og diskussion

Formålet med dette projektarbejde har været at udvikle et begrebsapparat, som kunne medvirke til at nuancere diskussionen om, hvilket udbytte studerende kan have af at arbejde med matematiske modeller. Begrebsapparatet skulle være af en sådan karakter, at det kunne bruges som analyseredskab på forskelligt empirisk materiale. For at klargøre i hvilken udstrækning vores arbejde kan leve op til disse formål, vil vi diskutere begrebsapparatets status på baggrund af overvejelser om de anvendte metoder og resultatet af vores empiriske analyser. Vi vil endvidere diskutere, hvad man kunne gå videre med, hvis begrebsapparatet skulle kvalificeres yderligere.

Analysemetoder og materiale

Det empiriske materiale har spillet en væsentlig rolle i både udviklingen og afprøvningen af begrebsapparatet. Vores valg af empirisk materiale har været bestemt af, at det skulle afspejle et righoldigt modelarbejde. Det var vigtigt, at det bagvedliggende modelarbejde havde indbefattet mange forskellige facetter af modelleringsaktiviteter, således at alle kompetencer havde mulighed for at blive afspejlet i materialet. Dette har været afgørende for, at vi kunne afprøve, om kompetencerne kunne bruges som analyseapparat, og for at få illustreret hvordan kompetencerne konkret kan tage sig ud i forskellige kontekster. Projektrapporten "Trafik modellering" og opgavebesvarelserne om Lotka-Volterra modeller har fungeret godt til afprøvning og illustration af kompetencebegreberne. Materialet indeholder naturligvis nogle begrænsninger for i hvilken udstrækning, vi kan få begreberne belyst. Et forhold der er svært helt at undgå. Før vi kommer nærmere ind på denne diskussion, vil vi se på nogle af de generelle metodiske overvejelser, der har gjort sig gældende ifht. vores analyser.

Et meget almindeligt problem ved indsamlingen af empirisk materiale er at observatøren, eller den specielle situation omkring observationen, i en eller anden grad har påvirket materialet. I vores tilfælde er dette problem til at overse. Projektrapporten "Trafik modellering" var afsluttet lang tid før vi påbegyndte vores arbejde, så den har vi ikke haft nogen indflydelse på. Vi har heller ikke været involverede i opgaveskrivningen om Lotka-Volterra modellerne, selvom vi naturligvis gennem vores tilstedeværelse på kurset, interview, mv. kan have haft indvirkning på arbejdet med problemstillingen. Vejlederen for projektet og læreren på kurset har naturligvis haft en vis indflydelse. De påvirkninger af forskellig art vores materiale dermed har været underlagt, mener vi dog ikke er noget problem for vores analyse. Dette skyldes, at vi ikke er interesserede i at afgøre, om de aflæste kompetencer indehaves af den ene eller af den anden person. Det er derfor i princippet underordnet, om det er vejlederens/lærerens eller de studerendes kompetencer vi aflæser.

Et andet problem ved at arbejde med empirisk materiale er spørgsmålet om, i hvor høj grad man kan tillade sig at generalisere over de forskellige konklusioner, der foretages. For at diskutere dette spørgsmål vil vi først præcisere, hvilken funktion det empiriske materiale har haft i vores arbejdsproces med at udvikle kompetencerne. Det empiriske materiales vigtigste funktion har været at *illustrere* aktiviteter hørende til de enkelte kompetencer og at klargøre samspillet mellem de forskellige kompetencer. Gennem disse illustrationer har det empiriske materiale fungeret som en bekræftelse på, at kompetencerne ikke blot var teoretiske begreber, men at de også kunne findes i praksis. Udskilningen af de ni kompetencer samt beskrivelsen af de overordnede træk ved kompetencerne bygger i høj grad på teoretiske studier af modelleringsprocessen samt af matematikeres behandling af matematisk modellering. Det empiriske materiale har således ikke i sig selv forårsaget dannelsen af en kompetence, men den endelige opdeling og formulering af kompetencerne er foregået i samspil med erfaringerne fra arbejdet med det empiriske materiale. Det er således minimalt, hvad vi generaliserer om kompetencernes berettigelse og overordnede træk alene på baggrund af det empiriske arbejde. Det empiriske materiale kan endvidere via eksempler belyse konkrete problemer om forholdet mellem kompetencerne, som kan inspirere til generelle overvejelser og spørgsmål. Dette vender vi tilbage til.

Når vi forsøger at opstille et begrebsapparat om modelkompetencer, er det naturligvis fordi vi mener det er væsentligt. Målsætningen er at begrebsapparatet også skal kunne give *mening* for andre, så de kan udnytte det. Denne mening skulle helst være i overensstemmelse med den mening vi har tillagt begreberne, og derfor har vi tilstræbt at begrebsapparatet skal være så *objektivt*

som muligt. Hvordan man så skal forstå objektivitet af denne type begreber og analyser er en vanskelig sag, fordi de begreber vi må arbejde med i mange tilfælde er vage, og analyserne består af *fortolkninger* ifht. til disse begreber. Eksempelvis er det tydeligt, at begreber som "model" og "matematisering" kan opfattes på mange forskellige måder.

I artiklen "*Ten Standard Responses to Qualitative Research Interviews*" (Kvale, 1993) diskuterer Steinar Kvale¹ bla. hvad man skal forstå ved objektivitet i kvalitative undersøgelser, som vores jo også er. Han fremhæver betydningerne "*free of bias, intersubjective, and reflecting the nature of the object*" (Kvale, 1993, s.173). Sidste punkt vil vi ikke komme ind på, da vi ikke vil gå ind i en diskussion af, hvad man kan forstå ved kompetencebegrebsapparatets natur. Vi har selvfølgelig tilstræbt at vores analyser er uden fordrejninger og forudindtaget. Gennem en udstrakt brug af citater har vi forsøgt at dokumentere baggrunden for vores konklusioner. At sikre at resultaterne er *intersubjektive* - i den forstand af flere enkeltpersoner er fælles om at stå inde for dem - kan også betyde flere ting. Et krav kunne være, at andre der brugte vores analyseapparat på det samme empiriske materiale skulle opnå samme resultater som os. Noget i den stil har Schoenfeld foretaget af sit begrebsapparat, se (Schoenfeld, 1985, s.270ff). Vi har arbejdet på at give så præcise definitioner som muligt af de begreber vi anvender i et forsøg på at sikre en sådan intersubjektivitet. Imidlertid har vi ikke forsøgt at få andre til at lave tilsvarende analyser med vores begrebsapparat - hvilket ville være en slags kvantitativ test af begrebsapparatet - da vi ikke mener det ville være særligt frugtbart så længe begrebsapparatet er under opbygning.

Kvale taler også om en "*dialogical intersubjectivity*", hvor objektiviteten sikres ved, at flere observatører indgår i en løbende kritik og diskussion af, hvordan fænomenerne skal fortolkes. Dette har vi i høj grad forsøgt, og i dette arbejde har det været en stor fordel, at vi har været tre personer i gruppen. Vi har lavet sideløbende analyser, som enten har været i eller er kommet til overensstemmelse gennem en opklarende diskussion. Desuden har vi fremlagt vores begreber samt analyse for en kreds af didaktikinteresserede ved IMFUFA. Her havde vi den oplevelse, at kredsen kunne følge de analyser vi havde gjort, så længe vi gjorde klart, hvordan vi adskilte de forskellige kompetencer fra hinanden.

¹Steinar Kvale er ansat ved Psykologisk Institut, Aarhus Universitet, som leder af Center for kvalitativ metodeforskning.

Empiriens muligheder og begrænsninger

Analyserne af projektrapporten "Trafik modellering" og opgavebesvarelserne om Lotka-Volterra modeller, har opfyldt deres formål. Vi har fundet eksempler, der konkretiserer hvordan modelkompetencerne kan tage sig ud. Dermed er det blevet mere klart hvilke udfordringer og kompetencer, der kan være forbundet med arbejdet med matematiske modeller. Analyserne har også været med til at sætte fokus på, hvordan kompetencernes indbyrdes sammenhænge er. Vi mener, at analyserne støtter antagelsen om, at de 9 kompetencer, vi har valgt at udskille, alle er væsentlige og tilsammen er dækkende for arbejdet med matematiske modeller. Sammen giver de ud fra vores formål en tilpas præcision i beskrivelsen af hvad der ligger i modelarbejde.

Vores metode med at analysere forskellige aktiviteter og indplacere dem under de enkelte kompetencer har, som man kunne forvente, dog også gjort det klart, at begrebsapparatet naturligt ville kunne skæres anderledes. Antallet af kompetencer man vil udspecificere må afhænge af formålet med beskrivelsen, så på den måde er 9 ikke et helligt tal. Vi har i analyserne set at både mere generelle og mere specielle kompetencer kunne have relevans. Arbejdet med matematiske modeller vil ofte foregå i samspil med anden modeldannelse, som ikke er af direkte matematisk karakter. I "Trafik modellering" så vi f.eks. at den datalogiske del af modellen var mere end blot en numerisk løsning af den matematiske model. Opbygningen af programmet var også et redskab i struktureringen af problemet, og den formelle repræsentation af modellen var af både matematisk og datalogisk karakter. Man kan på baggrund af dette overveje, om det kunne være interessant at definere en slags *formaliseringskompetence*, som en mere generel beskrivelse af den kompetence at give et problem en formel repræsentation i en model, som kan løses. I nogle sammenhænge kan en sådan kompetence være den rette beskrivelse. Lignende overvejelser kan sikkert gøres i forbindelse med andre af kompetencerne, da mange af dem jo peger ud over matematikken.

Tilsvarende har vi også fået eksempler på, at aktiviteter som vi har placeret under samme kompetence kan være af ret forskellig karakter. Modelløsningskompetencen indeholder f.eks. både den algoritmiske kompetence at kunne opbygge et program, evnen til at fastlægge og bestemme de parametre, der indgår i modellen, og den matematiske kompetence at kunne løse det opstillede matematiske problem. Tilsvarende gælder for andre kompetencer. Hvis man er interesseret i en nærmere forståelse af de enkelte kompetencer, og evt. vil ind på hvordan de kan trænes i undervisningen, kan det være relevant med en yderligere specificering.

I vores analyser har vi som sagt fokuseret på de enkelte aktiviteter og vurde-

ret, hvilke kompetencer de var udtryk for. I vores fremstilling har vi forsøgt at eksemplificere disse aktiviteter gennem citater fra det empiriske materiale. Selvom vi fra starten har været bevidste om, at visse af kompetencerne måtte hænge meget nært sammen, så havde vi nok en idé om, at en aktivitet helst skulle kunne placeres entydigt under én kompetence. Erfaringen fra analyserne er, at dette ikke altid er tilfældet. De kompetencer, vi har benævnt de afhængige, vil i kraft af deres natur optræde i samspil med andre kompetencer, og de uafhængige kompetencer vil i visse situationer blive slået sammen i en og samme aktivitet. Dette betyder ikke nødvendigvis, at kompetencerne ikke som begreber er klart adskilte. Det viser sig tydeligt i forbindelse med refleksionskompetencen. Ved løsningen af Lotka-Volterra modellen ser vi et eksempel på, at der bliver reflekteret over, hvor lille tidsskridtet i programmet skal vælges. Dette er naturligvis både udtryk for refleksionskompetencen og modelløsningskompetencen. Sådant må det nødvendigvis være. Særlige forhold gælder for kommunikationskompetencen. Når analyse materialet er det skriftlige resultat af denne kompetence, så vil alle de øvrige kompetencer også være udtryk for eller betinget af kommunikationskompetencen. Alligevel er det vanskeligt at give gode eksempler på kommunikationskompetencen ved hjælp af løsrevne citater; det kræver en vurdering af hele formidlingsproduktet. Kommunikationskompetencen er i den grad betingelsen for, at vi kan aflæse de øvrige kompetencer, og det er ikke uproblematisk.

Det er også klart, at der kan være et grænseproblem mellem de uafhængige kompetencer, der er tilknyttet bestemte faser i modelleringsprocessen. Vores erfaring er, at hvordan de skiller også afhænger af det konkrete problem og genstandsfelt, som modellen handler om. Ved nogle problemstillinger giver det ikke mening at tale om feks. strukturering og matematisering som adskilte aktiviteter, mens skellet i andre tilfælde kan være meget tydeligt. En nærmere undersøgelse af disse forhold, vil kræve analyse af mange forskellige typer af problemstillinger.

I afsnittet om modeltypeinddelinger diskuterede vi, at forskelle i feks. genstandsfelt eller formål for modellen har indflydelse på, hvordan kompetencerne kommer til udtryk. Således vil vores kompetencebeskrivelser - og her tænker vi også på beskrivelsen af vidensindholdet og kompetencernes samspil - være begrænset af dette samt vores egne erfaringer med modelarbejde. Denne begrænsning betyder ikke, at de aktiviteter, der er tillagt de forskellige kompetencer, er fejlplaceret, men at der meget vel kan komme flere aktiviteter til, som vi ikke har tænkt på.

Det at vores empiriske materiale er skriftligt har betydet, at ikke alle aspekter af kompetencerne kan belyses lige godt. Ideelt set ønsker vi jo at beskrive og

kategorisere de forskellige aktiviteter, som er indeholdt i arbejdet med modeller. Det skriftlige materiale er i sagens natur et produkt af disse aktiviteter, og indeholder fortrinsvis en formidling af aktiviteternes *resultater*. Det har dermed i vid udstrækning været op til os at analysere hvilke aktiviteter, der må have ligget bag. Vores oplevelse har været, at de studerende bag begge materialer har nedprioriteret det at formidle dels deres refleksioner og dels de forskellige trin, de har foretaget på vej til et givet resultat. Dette er sikkert til dels et udslag af den tradition, der ligger mht. hvad skriftligt matematisk materiale skal indeholde. Eller i hvertfald hvad studerende tror, der ligger i at udfærdige skriftligt matematisk materiale. Netop indenfor matematik har resultater været prioriteret højt i forhold til de bagvedliggende overvejelser. Men vi har også måttet erkende, at der er nogle begrænsninger for, hvordan strategi og refleksioner kan belyses i denne type materiale.

At vi har valgt et skriftligt materiale, har således givet nogle begrænsninger på, hvad vi kan få ud af analysen. Det lægger derfor op til overvejelser om, hvorvidt man gennem anvendelse af andre former for empiri, feks. videooptagelser eller båndoptagelser, kunne få belyst andre aspekter ved kompetencerne. En anden mulighed ville være andre slags skriftligt materiale, som feks. optegnelser over studerendes aktiviteter. Undervejs i gruppernes arbejde med Lotka-Volterra modellerne har vi lavet båndoptagelser både af interviews med de studerende og når de arbejdede for sig selv i grupper. Dette materiale har vi benyttet som baggrund og inspiration for analyserne, men vi har ikke gjort det til genstand for egentlig analyse. Dette skyldes flere ting. Båndoptagelserne er af vekslende kvalitet og ville være meget omfattende og komplekse at analysere systematisk. Den vekslende kvalitet skyldes blandt andet, at det er ret kompliceret at få gode optagelser af gruppernes arbejde med modellen. Arbejdet foregik fortrinsvis i et lokale, hvor alle kurssets grupper var fordelt ved hver deres computer, hvilket giver anledning til en hel del forstyrrende baggrundsstøj. Men vores manglende erfaring med den type empiriindsamling har naturligvis også haft stor betydning. En stor del af de studerendes kommunikation ved computerne var nonverbal og/eller præget af indforståede hentydninger til skærbilleder eller tegninger. Dette er naturligvis meget vanskeligt at dokumentere med en båndoptager, og lange passager vil ikke kunne analyseres. Nogle af disse problemer kunne muligvis afhjælpes ved, at vi isolerede en gruppe i et lokale for sig selv, eller forsøgte at få de studerende til i højere grad at sætte ord på deres overvejelser. Dette ville dog medføre andre metodiske og praktiske problemer.

Begrænsningerne ved det skriftlige materiale har som sagt haft størst betydning for behandlingen af refleksionskompetencen og strategikompetencen. Kompetencen i at kunne kontrollere sin egen arbejdsproces og andre strate-

gier, når det er påkrævet, kommer i spil løbende gennem arbejdsprocessen. Når der er fundet en løsning på problemet går man videre, og der vil ofte ikke opleves nogen grund til at formulere sådanne overvejelser og fejltrin. Vi må nok konkludere, at det ville have været bedre at anvende et andet type empirisk materiale i afprøvningen og udviklingen af disse to kompetencer. Det er dog lykkedes at genfinde og illustrere dem i et vist omfang i materialet.

Ser vi på refleksionskompetencen, er den som sagt svær at observere, da overvejelser sjældent bliver præsenteret sammen med resultaterne af disse. Dette, sammen med det faktum at kompetencen, som vi har beskrevet den, indgår i alle de andre kompetencer, har sat spørgsmålstejn ved, om denne kompetence var et stærkt nok analytisk begreb. Refleksioner udgør et kvalitativt kognitivt spring i forhold til enhver aktivitet, idet de kræver, at man flytter sig fra at være i aktiviteten til at se sig selv i aktiviteten. Refleksionskompetencen har således en anden karakter, end selve den kompetence den er knyttet til. Dette er grunden til, at vi har bestemt os for at beholde denne adskilt fra de andre kompetencer. Derudover giver denne adskillelse os muligheden for at fremhæve refleksionerne, som vi mener, er en vigtig del af de øvrige kompetencer.

Vi vil nu forsøge at give en samlet statusvurdering af begrebsapparatet. Det valgte empiriske materiale har i stor udstrækning været egnet til vores forehavende med at identificere de kompetencer, der er forbundet med at arbejde med modeller. Vi mener ikke, at antallet af kompetencer umiddelbart ville kunne udbygges fornuftigt. Vi tror altså på, at vi har ramt de væsentligste træk ved matematisk modellering, idet vi har opnået, at beskrivelserne af de mest overordnede træk ved kompetencerne har vist sig dækkende. Derimod begrænser det empiriske materiale og vores erfaringsbaggrund mulighederne for, at vi kan give fyldestgørende beskrivelser af vidensindholdet og af samtlige af de mulige aktiviteter, der involveres i de enkelte kompetencer. Vi har, af samme grund, sandsynligvis heller ikke fået inddraget beskrivelser af alle vekselvirkninger mellem de enkelte kompetencer.

Begrebsapparatets anvendelighed

Af indledningen fremgik det, at det vi ønskede at opnå med dette arbejde var at give et redskab, som lærere kunne bruge i undervisningen i matematiske modeller og derudover et redskab, som også elever skulle kunne bruge i deres arbejde med matematiske modeller. Ønsket er således, at det skulle have en vis relevans i den praktiske undervisningssituation.

Analysen af det empiriske materiale bekræfter at modelkompetencerne kan genfindes i praksis. Modelkompetencerne kan dermed bruges som et redskab til at give aktiviteterne en ny mening i den forstand, at kompetencebegrebet lægger en synsvinkel på det udførte modelarbejde, der kan give anledning til nye overvejelser af dette arbejdes indhold. Hermed bliver kompetencebegrebet et relevant redskab.

Det er ikke hensigten at redskabet, i form af kompetencebeskrivelserne, skal kunne opstille direkte retningslinier for arbejdet med matematiske modeller i undervisningen. Men mere at det kan give anledning til overvejelser hos læreren, om hvilke kompetencer hendes undervisning udvikler og understøtter. Ligeledes kan kompetencebegrebet støtte den studerende i at få det optimale ud af en eksemplarisk undervisning gennem at støtte metakognitionen. Det vil dog næppe være begrebsapparatet i den foreliggende form, der bedst anvendes til sidstnævnte formål. Vi mener heller ikke, at det er muligt for læreren at bruge vores begrebsapparat direkte til at strukturere tilegnelsen af kompetencerne nærmere. Til dette er de alt for generelt beskrevne. Heri er vi enige med Schoenfeld, når han pointerer, at det kræver meget udførlige beskrivelser af det, man skal kunne, for at det kan bruges i en indlærings-situation. Men som sagt kan læreren bruge begrebsapparatet til at analysere et givent undervisningsforløb med henblik på at afklare, hvilke kompetencer hendes undervisning giver mulighed for at udvikle. Det kan nuancere forståelsen af, hvad man skal lære for at kunne modellere.

Hvis kompetencebegrebsapparatet skulle bruges mere direkte til at tilrettelægge en undervisning efter, ville det være nødvendigt at inddrage aspekter, som vi kun kort har berørt i rapporten. Det drejer sig om forskellige indlæringsmæssige perspektiver. I vores analyse har vi forsøgt at adskille kompetencen fra det individ, der besidder den. Dette vil selvfølgelig ikke give nogen mening at gøre, når man er interesseret i at udvikle kompetencen hos en person. Har man en sådan interesse, bliver det nødvendigt at inddrage flere af de aspekter, som vi kort omtalte i afsnittet om matematisk tænkning. Det gælder særligt de aspekter af matematisk tænkning, som handler om matematiksyn, affektive faktorer og praksis. Vi har flere gange talt om, hvordan aktiviteter kan føre til progression i kompetencerne og modereret påstanden med at tilføje, at det omvendte kan gøre sig gældende, aktiviteter kan altså ligefrem føre til nedbrydning af kompetencer. Om en undervisning fører til udvikling i den ene eller anden retning vil i høj grad afhænge af de netop nævnte aspekter.

Overvejelser om anden empiri

Diskussionen af begrænsningerne i vores empiri har givet anledning til overvejelser om hvilke andre typer empiri, der kunne bruges til at belyse kompetencerne yderligere.

Vi har været inde på, at særligt strategi- og refleksionskompetencen ville kræve et materiale, der i højere grad belyser hele arbejdsprocessen. For at refleksionerne skal kunne aflæses, skal der gives udtryk for dem. Det er derfor nødvendigt, at den person eller gruppe, hvis modelarbejde man vil undersøge, opfordres til at give udtryk for overvejelser i forbindelse med problemløsningen. Gruppearbejde kan forbedre mulighederne for på en naturlig måde at fremme den mundtlige kommunikation, fordi gruppens medlemmer kan redegøre for deres overvejelser overfor hinanden. I mere afgrænsede problemløsningsforløb er det måske også muligt, at man kan få personen/gruppen til "at tænke højt", og dermed løbende formulere sine refleksioner og overvejelser. Også andre former for specielt tilrettelagte undervisnings- og observationsforløb, hvor der i særlig grad er fokus på metakognition, kunne tænkes at belyse disse kompetencer yderligere.

En frugtbar metode kunne være at konfrontere de studerende, der har været til genstand for undersøgelser med klip fra videooptagelser, opgaveanalyser eller lignende og bruge dette som baggrund for et interview/diskussion om kompetencerne. Tilsvarende ville det være en mulighed for os at præsentere vores analyser for de respektive forfattere til rapporten og opgaverne. Dette kunne støtte vores tolkninger af hvilke aktiviteter, der har ligget til grund for de forskellige resultater, der optræder i det skriftlige materiale. De studerendes egne opfattelser af forløbene kunne dermed nuancere og afklare tvivlsspørgsmål i de analyser, vi allerede har foretaget.

Som vi tidligere har nævnt har modellens karakter indflydelse på, hvordan kompetencerne kommer i spil i en modelleringsproces. Vores arbejde er dermed begrænset af, at vi kun har undersøgt empirisk materiale byggende på henholdsvis en trafikmodel og en differentiallyigningsmodel anvendt indenfor biologi. En oplagt mulighed ville derfor være at undersøge modelleringsprocesser med andre typer af modeller. Det kunne være interessant at se, hvordan kompetencerne kommer i spil i modelleringsprocesser både med modeltyper indenfor andre videnskabsområder, med modeller opbygget med forskellige formål og med modeller af varierende indre matematisk natur. Specielt kunne det være givtigt at få konkretiseret og dermed præciseret kritikkompetencen yderligere. Denne kompetence er svær at indfange med andet end eksemplariske spørgsmål, som kan give et lidt luftigt billede af kompetencen. Det ville derfor være en klar forbedring af begrebsapparatet, hvis vi kunne give

denne kompetence-noget mere substans gennem et større udbud af varierede eksempler.

En sidste mulighed vi vil nævne er, at man kunne overveje at undersøge professionelle modelbyggeres arbejdsprocesser. Vi har afgrænset os til at undersøge studerendes arbejde. Man kunne forestille sig, at professionelle modelbyggere, som må antages at mestre mange aspekter af kompetencerne, vil kunne illustrere dem mere klart eller få mere avancerede aspekter frem. En sådan undersøgelse kunne derfor udpege nye perspektiver for begrebsapparatet. Gennem analyser af en professionel modelbyggers erfaringer med at kommunikere resultater til forskellige grupper kunne man præcisere kommunikationskompetencen i en videre udstrækning end vi har kunnet gøre. En præcisering af hvilke resultater, der er vigtige at medtage i forskellige situationer, og hvordan betingelserne for kommunikation i det hele taget er i forskellige sammenhænge ville kvalificere beskrivelsen af kommunikationskompetencen væsentligt. Dog er det selvfølgelig ikke sådan, at udseendet og fordelingen af kompetencer hos professionelle direkte kan eller bør efterstræbes i matematikundervisningen.

Det er klart, at kompetencebegrebsapparatet kan videreudvikles. Men vi mener at det i sin nuværende form er tilstrækkeligt helstøbt og af tilstrækkelig god kvalitet til, at kompetencerne kan fungere som *teoretiske tænkeredskaber*. En af de største forcer ved begrebsapparatet er, at det skaber opmærksomhed omkring nogle aspekter ved matematisk modellering, som nemt kan blive overset. Her tænker vi på de kompetencer, der har en lidt anden karakter i forhold til arbejdet med modeller, dvs. strategikompetencen, refleksionskompetencen, kommunikationskompetencen og kritikkompetencen.

Litteratur

- Andresen, M., Ellegaard, M. B., Larsen, M. W., Richter, L. & Vestermann, A. (1995). Trafikmodellering, 2.semester projekt, NAT-BAS, Roskilde Universitetscenter, Roskilde.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics, *For the Learning of Mathematics* 14(3): 24-35.
- Banu, H. (1991). *The Importance of the Teaching of Mathematical Modelling in Bangladesh*, in Niss et al. (1991), pp. 117-120.
- Berry, J., Burghes, D., Huntley, I., James, D. & Moscardini, A. (eds) (1984). *Teaching and Applying Mathematical Modelling*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.
- Biehler, R., Scholz, R. W., Strasser, R. & Winkelmann, B. (eds) (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands.
- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund for matematikundervisning, *Nordisk Matematikk Didaktikk* 1(1): 8-17.
- Blomhøj, M. (1992). *Modellering i den elementære matematikundervisning - et didaktisk problemfelt*, PhD afhandling, Matematisk Institut, DLH.
- Blomhøj, M. (1996). *Noter til Matematik D, Matematiske Modeller*, Den Naturvidenskabelige Basisuddannelse, RUC.
- Blum, W. (1991). *Applications and Modelling in Mathematics Teaching - A Review of Arguments and instructional aspects*, in Niss et al. (1991), pp. 10-29.
- Blum, W., Berry, J., Biehler, R., Huntley, I., Kaiser-Messmer, G. & Profke, L. (eds) (1989). *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.

- Blum, W. & Niss, M. (1989). *Mathematical Problem solving, Modelling, Applications, and Links to Other objects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction*, in Blum, Niss & Huntley (1989), pp. 1–21.
- Blum, W., Niss, M. & Huntley, I. (eds) (1989). *Modelling, Applications and Applied Problem Solving – Teaching Mathematics in a Real Context*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.
- Clements, D. (1990). *Why airlines sometimes overbook flights*, in Huntley & James (1990), pp. 323–340.
- Clements, R. (1989). *Mathematical Modelling*, Cambridge University Press, Cambridge, NY, USA.
- D'Ambrosio, U. (1989). *Historical and Epistemological Bases for Modelling and Implications for Curriculum*, in Blum, Niss & Huntley (1989), pp. 22–27.
- Davis, P. (1991). *Applied Mathematics as a Social Instrument*, in Niss et al. (1991), pp. 1–9.
- de Lange, J., Keitel, C., Huntley, I. & Niss, M. (eds) (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.
- Grouws, D. A. (ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan.
- Heefelt, M. (1990). *Dynamiske modeller*, Gyldendal, Danmark.
- Hermann, K. (1989). *A Foodproducing Factory*, in Blum, Berry, Biehler, Huntley, Kaiser-Messmer & Profke (1989), pp. 243–246.
- Huntley, I. & James, D. (eds) (1990). *Mathematical Modelling. A Source Book of Case Studies*, Oxford University Press.
- Jensen, J. H. (1980). *Matematiske modeller vejledning eller vildledning?*, *Naturkampen* 18.
- Jensen, J. H., Gade, E., Johannsen, O., Lau, H., Physant, F. C., Sørensen, P. S. & Viera, A. (1980). *Om matematiske modeller*, *Tekster fra IMFUFA nr. 26*, IMFUFA, RUC, Roskilde.
- Jensen, P. H. & Kyndlev, L. (1994). *Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det! gymnasimatematikens begrundelsesproblem.*, *Tekster fra IMFUFA nr. 284*, IMFUFA, RUC, Roskilde.

- Jespersen, J. (ed.) (1991). *Model og virkelighed*, Jurist og Økonomforbundets Forlag.
- Kapur, J. (1988). *Mathematical modelling*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India.
- Kvale, S. (1993). Ten standard responses to qualitative research interviews, in G. Nissen & M. Blomhøj (eds), *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*, Danish Research Council for the Humanities, The Initiative:»Mathematics Teaching and Democracy«, pp. 167–200.
- Madsen, P. K. & Andersen, K. (1991). *Om modelbrug og politik*, in Jespersen (1991), pp. 16–24.
- Mason, J. (1984). *Modelling: What do we really want students to learn?*, in Berry et al. (1984), pp. 215–234.
- Nielsen, B. (1973). *Praksis og kritik*, Christian Ejlers' forlag, Danmark.
- Niss, M. (1984). Kritisk matematikundervisning - nødvendig men vanskelig, *Unge Pædagoger* 4.
- Niss, M. (1986). Theme group 6: Applications and modelling, in M. Carss (ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*, ICTMA, Birkhauser, Boston, pp. 197–211.
- Niss, M. (1987). Applications and modelling in the mathematics curriculum—state and trends, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 18: 487–505.
- Niss, M. (1988). Theme group 3: Problem solving, modelling and applications, in Ann & K. Hvist (eds), *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, ICTMA, János Bolgai Mathematical Society, Budapest, pp. 237–252.
- Niss, M. (1989). *Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula*, in Blum, Berry, Biehler, Huntley, Kaiser-Messmer & Profke (1989), pp. 22–31.
- Niss, M. (1993). Centrale problemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne, in E. Strandgaard-Andersen (ed.), *15. Nordiske LMFK-kongres*, LMFK, København, pp. 93–116.

- Niss, M. (1994). *Mathematics in Society*, in Biehler et al. (1994), pp. 267–378.
- Niss, M., Blum, W. & Huntley, I. (eds) (1991). *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.
- Polya, G. (1957). *How to solve it, A New Aspect of Mathematical Method*, 2 edn, Doubleday Anchor Books, Garden City, NY, US.
- Saaty, T. L. & Alexander, J. M. (1981). *Thinking With Models*, Pergamon Press Ltd., Oxford, England.
- Schnack, K. (1993). *Handlekompetence og politisk dannelse*, Vol. 2 of *Didaktiske studier*, Danmarks Lærerhøjskole, pp. 5–15.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, INC., London, UK.
- Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics*, in Grouws (1992), pp. 334–368.
- Skott, J. (1992). Matematiske modeller i fagdidaktisk belysning - et rids af en didaktisk debat, *Technical report*, Danmarks Lærerhøjskole.
- Skovsmose, O. (1981). *Matematikundervisning og kritisk pædagogik, Didaktiske arbejdsrapporter 2*, Gyldendals matematik bibliotek, Nordisk Forlag A.S., Copenhagen, DK.
- Skovsmose, O. (1988). Reflective knowledge and mathematical modelling, *Rapport R 88-13*, Afdeling for matematik og datalogi, AUC, Aalborg.
- Skovsmose, O. (1990a). Reflective knowledge: Its relation to the mathematical modelling process, *Int.J.Math.Educ.Sci.Technol.* **21**(5): 765–779.
- Skovsmose, O. (1990b). *Ud over matematikken*, Systime, Herning, Denmark.
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, AA Dordrecht, The Netherlands.
- Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom, *For the Learning of Mathematics* **9**(1): 24–33.
- Studieordning af 1. september 1993 for Den Naturvidenskabelige Basisuddannelse* (1994).

7.3 Lotka-Volterra modeller

Læs kapitlet *En økologisk model* (Heefelt, 1990), der er gengivet i dette afsnit. I afsnit 3.4 i dette kapitel er Lotka-Volterra modellen for samspillet mellem byttedyr og rovdyr opskrevet på følgende form:

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy \\ y' &= -cy + dxy\end{aligned}$$

hvor x og y er antallet af henholdsvis byttedyr og rovdyr og a, b, c og d er positive reelle tal.

Redegør kort for forudsætningerne for denne model og for fortolkningen af de indgående parametre.

Lav et LOOP-program, der kan beregne numeriske løsninger til dette ligningssystem. I første omgang ved hjælp af Eulers metode.

Afprøv programmet med de parametre ($a=0.5$; $b=0.03$; $c=0.5$; $d=0.01$) og begyndelsesværdier, der svarer til de faseportrætter, der er tegnet i figur 3.4.

Udtegn nogle løsningskurver for udviklingen i antallet af såvel byttedyr som rovdyr. Bestem ud fra løsningskurverne periodelængden for modellen. Tegn også faseportrætter for nogle af løsningerne. Det vil sige et plot med x ud af den ene akse og y ud af den anden akse. Overvej hvor lille tidskridtet skal være, for at man får tilfredsstillende numeriske løsninger. Eksperimenter med modellen og undersøg betydningen af begyndelsesværdierne.

Udbyg jeres program så det i stedet for Eulers metode anvender Runge-Kutas 4. ordens metode til den numeriske fremskrivning. Hvor stort et tidskridt kan man tillade med denne metode?

Baggrunden for opstilling af Lotka-Volterra modellen er interessant. I midten af 1920'erne studerede den italienske biolog Umberto D'Ancona variationen i antallet af rovfisk og byttedyr i forskellige fiskepopulationer. Under dette arbejde støttede D'Ancona på en opgørelse over den procentvise andel af rokker og hajer (begge rovfisk) i fiskefangster i Middelhavet. Opgørelserne dækkede bl.a. perioden omkring første verdenskrig (1914-1918). Denne periode var specielt interessant fordi andelen af rokker og hajer tredobledes i løbet af krigen, men faldt

Appendiks A

Opgaven og opgavebesvarelsenerne til "Lotka-Volterra modeller"

A.1 Opgaven

straks igen efter krigen. Nedenstående tabel viser vægtprocenten af rokker og hajer i fiskefangsterne i perioden 1914-1922.

År	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
%	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

(Kilde: Braun, 1983, s. 442)

D'Ancona vidste at fiskeriet i Middelhavet under 1. Verdenskrig var væsentlig mindre end både før og efter krigen. Han undrede sig derfor over, hvordan det kunne være, at et reduceret fiskeri efter spisefisk, der samtidig er bytte for hajer og rokker, tilsyneladende var en større fordel for rovfiskene end for byttefiskene. For at få en forklaring på denne observation søgte D'Ancona hjælp hos matematikeren Vito Volterra i håb om, at han kunne forklare det iagttaget fænomen ved hjælp af en matematisk model.

Volterra opstillede den model for samspillet mellem rovdyr og byttedyr, der senere har fået navnet Lotka-Volterra modellen. Volterra viste, at løsningskurverne til denne model svingede periodisk omkring et ligevægtspunkt (x^*, y^*) . Udled et udtryk for dette ligevægtspunkt ud fra modellens parametre.

Volterra udbyggede modellen med en befiskningsparameter f på den mest simple måde. Han antog nemlig, at befiskningen kunne repræsenteres i modellen ved, dels at trække f fra byttefiskenes formeringsrate a , dels ved at lægge f til rovfiskenes dødsrate c . Det antages altså, at der fiskes lige meget efter bytte- og rovfisk. Udled et udtryk for ligevægtspunktet i den udbyggede model. Hvilke konsekvenser får et reduceret fiskeri for ligevægtspunktet? Kan Volterras model bruges til at forklare D'Anconas observationer?

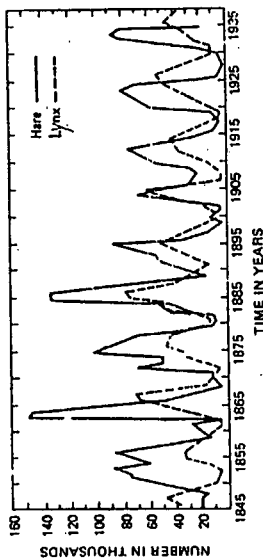
Volterra viste også, at det gennemsnitlige antal af bytte- og rovdyr over en svingningsperiode netop er ligevægtspunktet. Det vil sige, at ligevægtspunktet (x^*, y^*) kan beregnes således:

$$x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \qquad y^* = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

hvor T er periodelængden. Det gennemsnitlige antal bytte- og rovdyr over en tidsperiode er altså uafhængig af begyndelsesværdierne.

Dette resultat kan I eftervise numerisk ved hjælp af jeres program. I kan foretage en numerisk integration af x og y undervejs i løkke-programmet. I Runge-kutta algoritmen beregnes i forvejen vægtede gennemsnitsgradienter for x og y . For hvert tidskridt kan I så summere bidraget til det numeriske integrale. I skal så blot sørge for at stoppe efter præcis en periode.

Samtidig med Volterra opstillede amerikaneren Alfred Lotka fuldstændig den samme differentialligningsmodel til beskrivelse af rovdyr-byttedyr systemer. Som det fremgår af ovenstående brugte Volterra først og fremmest modellen til at undersøge et kvalitativt træk ved et rovdyr-byttedyr system. Lotka var imidlertid interesseret i at kunne forudsige den tidsmæssige udvikling af bestemte rovdyr-byttedyr populationer. Grundlaget for Lotkas modelopstilling var bl.a. omfattende statistik over hare og los bestandene i Canada (se nedestående figur). Materialet var indsamlet af The Hudson Bay Company, der havde en klar økonomisk interesse i at kunne forudsige variationen i populationsstørrelserne for de eftertragtede pelsdyr.



(Kilde: Southwick, 1972)

I hvilke udstrækning kan modellen reproducere denne måleserie?

Både Lotka og Volterra udbyggede deres model. Biologisk set er det problematisk, at byttedyrpopulationen i modellen antages at vokse eksponentielt, når der ikke er nogen predation. I naturen vil en byttedyr-population være begrænset af en lang række andre forhold, f.eks. føde og plads. En simpel måde at modellere en selvbegrænsende vækst er, som vi har set, den logistiske vækstmodel. Indfør en parameter for byttedyrenes bærekraft og udbyg Lotka-Volterra modellen således, at byttedyrene vokser logistisk, når der ikke er nogen predation.

Afprøv modellen med følgende parameter- og begyndelsesværdier: $a = 0.3$; $b = 0.0004$; $c = 0.3$; $d = 3 \cdot 10^7$ (i LOOP 3e-7); $N = 10^7$ (bærekraften), samt $x(0) = 8 \cdot 10^6$; $y(0) = 500$.

Udtegn løsningskurver og et plot af (x, y) . Beskriv faseplottets forløb og undersøg dets afhængighed af begyndelsesbetingelserne.

Beregn ligevægtpunktet for modellen. Indtegn to kurver i (x, y) -plottet, der indeholder de punkter, hvor henholdsvis x' og y' er nul. Altså kurverne for modellens kritiske punkter. Undersøg, ved en simpel fortegnanalyse af x' og y' , om ligevægtpunktet er stabilt. Vil der i denne model altid være et ligevægtpunkt, hvor begge populationer er til stede?

Hvad kan man efter jeres mening bruge de behandlede populationsmodeller til?

Referencer

- Braun, M., 1983: *Differential Equations and Their Applications*. Springer-Verlag, New York.
- Heffelt, M.B., 1990: *Dynamiske Modeller*. Gyldendal.
- Southwick, C., 1972: *Ecology and Quality of our Environment*. Van Nostrand Reinhold Company, New York.

A.2 Opgavebesvarelse 1 (OP1)

Denne udvidede model beskriver kvalitativt de data D'Ancona havde samlet sammen om en stigning i rovdyrbestanden under en periode med lav befiskning (1. verdenskrig)

Numeriske løsningsmetoder:

Lotka-Volterra modellen udgør et koblet differentiaalligningssystem. Vi har lavet et Loop-program til numerisk løsning af det. (bilag 1)
I vores program har vi faktisk hver enkelt af de "biologiske" parametre, i stedet for blot at bestemme a, b, c og d. Disse "velovervejede" parameterverdier, giver en løsningskurve, der kun har få svingninger inden der dannes ligevægt!! (Hejld!) (se figur 2)

I første omgang brugte vi Eulers metode til numerisk løsning af systemet. Vi forsøgte os med $dt = 1$ som tidskridt men programmet gik ned og vi brugte derfor $dt = 0,1$ som tidskridt, hvilket gav løsningskurver der ikke var kantede.

Istedet for at bruge Eulers metode til den numeriske fremskrivning kan man benytte Runge-Kuttas 4. ordens metode. Princippet i denne fremskrivning er at man for hver fremskrivning beregner 4 hældninger i 4 punkter: en hældning i hvert endepunkt, og to hældninger i to forskellige midterpunkter. Derefter tager man gennemsnittet af de fire hældninger. Da denne procedure gentages for hvert tidskridt bliver afvigelsen fra den analytiske løsningskurve minimeret i forhold til fremskrivning vha Eulers metode, og det tillader derfor også større tidskridt.

Numeriske integrale - ligevægtspunkter:

Volterra viste at uanset hvilket begyndeelsesværdier man benytter vil det gennemsnitlige antal af rov- og bytte dyr være lig ligevægtspunktet. Ligevægtspunktet kan derfor beregnes ved først at beregne integralet af antallet og derefter dividere med perioden, dermed fås gennemsnitsantallet.

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

og helt analogt for y .

Her skal man altså kende svingningsperioden, T. Vi aflæste T ud fra en løsningskurve til 15.2.

Derefter tilføjede vi det numeriske integrale til vores program (bilag 1) og fik dermed ligevægtspunktet til:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (56,34; 26,00)$$

De tilhørende parameterverdier var følgende: $a=1,3$; $b=0,05$; $c=0,2$; $d=0,0035$
Beregner man ligevægtspunktet ud fra disse parametre giver det: $(\bar{x}, \bar{y}) = (57,14; 26,00)$. Taget i betragtning at perioden er aflæst på grafen, hvilket kan være noget upræcist, er der god overensstemmelse mellem det numerisk og analytisk beregnede ligevægtspunkt.

Forudsigelighed?

Lotka opstillede modellen med det primære formål at forudsige en løstbestemt ud fra dataindsamling. Dette kan dog kun kvalitativt lade sig gøre. Ud fra modellen kan man se, at rovdyrbestanden toppes lige efter at antallet af bytte dyr har været på sit højeste (Figur 1). Groft set passer dette med de målinger der er vist på grafen i opgaveoplægget. Men hvor stor bestanden bliver fra år til år, kan modellen ikke udtale sig om, da det ses at de to bestående nogle gange toppes samtidig, nogle gange når

LOTKA-VOLTERRA-MODELLER

Lotka-Volterra-modellen beskriver forholdet mellem bytte dyr og rovdyr. Den blev opstillet i 1920'erne, to forskellige steder, med to forskellige formål. Volterra's formål var at forklare en dataindsamling af antallet af højer og rokker i Middelhavet, Lotka's formål var at forudsige løstbestanden. Modellen ser således ud:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

hvor x er ændringen i bytte dyr og y er ændringen i antallet af rovdyr.

De fire parametre a, b, c, d er alle positive. Tilvæksten i bytte dyrbestanden er således proportional med antallet af bytte dyr (ax) - flere dyr føder flere unger - dette led giver en eksponentiel vækst. Faldet i antal bytte dyr styres både af antallet af bytte dyr der kan fanges og af antallet af rovdyr der kan fanges.

Tilvæksten i antallet af rovdyr er proportional med både antallet af bytte dyr og rovdyr. Konstanten c er en naturlig dødsrate for rovdyrene.

Hæsefelt foresøger i *Dynamiske modeller* 1990 at give en biologisk fortolkning af parametrene a, b, c, d. Der henvises til den tekst for en nærmere forklaring. Det gælder at

$$\begin{aligned} a &= HK^*HBD^*(x)/(2^*K1) - HD \\ b &= K3 \\ c &= RD \\ d &= RK^*RBD^*K4/(2^*K2) \end{aligned}$$

Parameterverdierne a, b, c og d følger til sammen, hvor systemets ligevægtspunkt ligger. At systemet er i ligevægt vil sige at hverken antallet af bytte dyr eller antallet af rovdyr ændrer sig, dvs at man kan beregne ligevægtspunktet ved at sætte \dot{x} og \dot{y} lig 0. Dette giver ligevægtspunktet:

$$\bar{x} = c/d \quad \text{og} \quad \bar{y} = a/b$$

som altså er uafhængigt af begyndeelsesværdierne for x og y .

Befiskningsparametre:

Volterra udviklede modellen for at forklare hvorfor mængden af rokker og højer (rovdyr) stiger når der fiskeriet mindskes. Derfor udbyggede han modellen med en befiskningsparameter, f. Den udbyggede model ser således ud:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a-f)x - bxy \\ \dot{y} &= -(c+fy)y + dxy \end{aligned}$$

Dette giver et nyt ligevægtspunkt:

$$\bar{x} = (c-f)/d \quad \text{og} \quad \bar{y} = (a-f)/b$$

samme maximum og at der nogle gange er stor forskel mellem antallet af hhv bytedyr og rovdyr.

Logistisk vækst:

Ved at indføre en logistisk vækst for bytedyrenes sikrer man at bytedyrene ifølge modellen ikke vokser eksponentielt, når der ikke er nogle rovdyr. Dette er tilfældet i den første model, da der ikke tages hensyn til f.eks. fødemængde og plads. Den udbyggede model ser således ud:

$$x' = ax(1-x/N) - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$

Her står N for bytedyrenes bærekapacitet.

Denne model har selvfølgelig også et ligevægtpunkt, som kan beregnes ved at sætte x' og y' lig 0. Dermed fås følgende:

$$x = c/d$$

$$y = (a/b)(1 - c/dN)$$

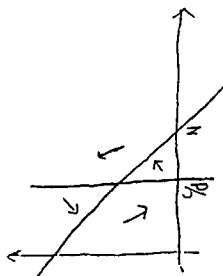
Isocliner:

For at finde ud af hvordan løsningskurven vil bevæge sig igennem planen mod ligevægtpunktet, foretages en fortegnanalyse. Dette gøres ved først at sætte $x'=0$ og derefter at sætte $y'=0$, dermed fås to isocliner, som skærer hinanden i ligevægtpunktet

$$x' = 0 \Rightarrow y = a/b - (a/bN)x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = c/d$$

Fortegnsmethoden medfører at faseportrættet ser således ud:



Se også figur 5,6 og 7

Ligevægtpunktet er stabilt, da løsningskurven altid vil bevæge sig mod dette ene punkt.

Hvis de to isocliner skærer hinanden i 2. kvadrant, dvs hvis $N < c/d$, så vil modellen ikke have noget ligevægtpunkt hvor begge arter er tilstede. Rovdyrene vil uddø. Hvis $N = c/d$ når bytedyrene deres bæreevne præcis når rovdyrerne uddør.

Vurdering af modellerne

Den simple Lotka-Volterra model ser ud til kvalitativt at kunne gengive empiriske data (loshårer i Canada) - hvilket er hvad angår fluktuationer i bestandene. Dog er det bemærkelsesværdigt at vi har fundet nogle parameter- og begyndeelsesværdier, som får bestandene til at indstille sig helt præcist på ligevægtpunktet (figur 2. og bilag 1), i modsætning til figur 1, som har andre parameterværdier.

Udbygningen med logistisk vækst (figur 5,6 og 7) virker biologisk ganske fornuftig, men sammenholdt med de empiriske data er det ikke en god model at der konvergeres mod et ligevægtpunkt.

Arvendelighed

Vi mener ikke at ikke at modellen kan bruges kvantitativt, dertil er der alt for mange påvirkninger og faktorer der ses bort fra (årsåder, andre dyr osv). Den er nok mest anvendelig i undervisningsøjemed - fx på MAIT eller økologikurser, da den giver et simpelt eksempel på koblede differentialligningssystemer og parameter- og begyndeelsesværdiers indvirkning på disse.

BILAG 1.

```

//BYTTEDYR          START          L*KKKE
x=100 //HA - antal byttedyr
HK=4
HD=0.1
HBD=0.7
K1=1

//RØVDYR
v=2 //RV - antal rovdyr
RD=0.7
RO=0.2
RK=2
K2=2

K3=0.05
K4=0.01
ix=0
iy=0

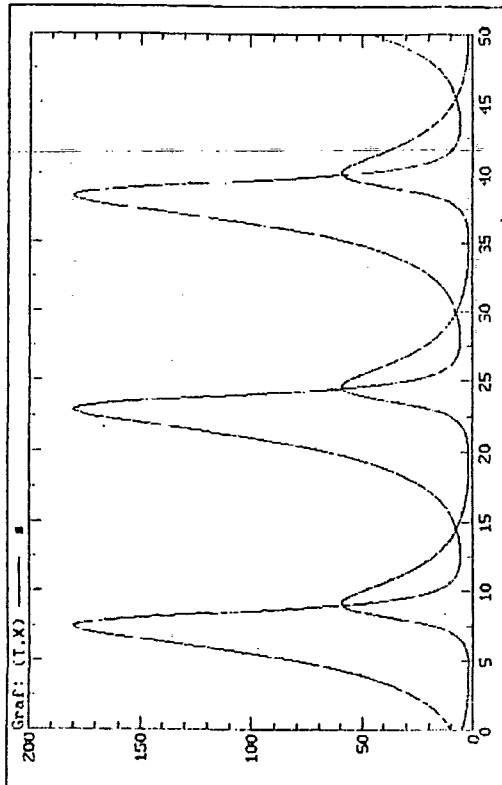
Func f(x)
Return 1
Endfunc

dt=0.1
a=HK*HBD*f(x)/(2*K1)-HD
b=K3
c=RD
d=RK*RD*K4/(2*K2)
Nx=150

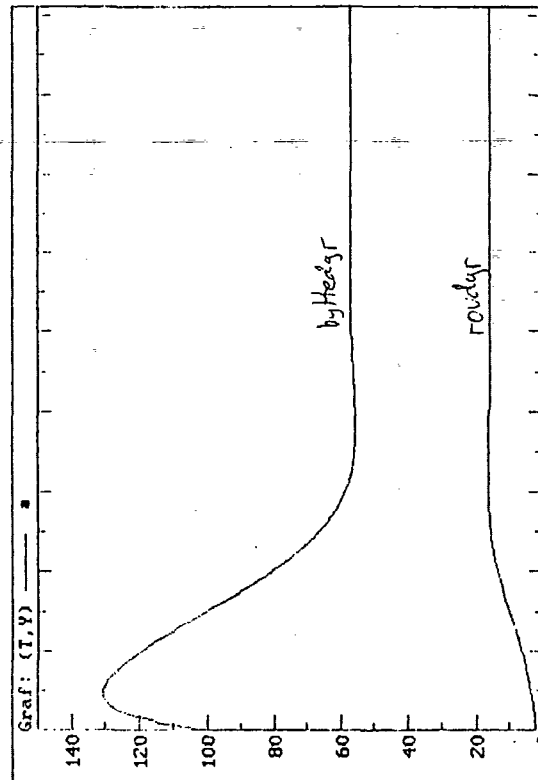
Func dx(x,y)
Return a*x*(1-x/Nx)-b*x*y
Endfunc

Func dy(x,y)
Return -c*y+d*x*y
Endfunc

```

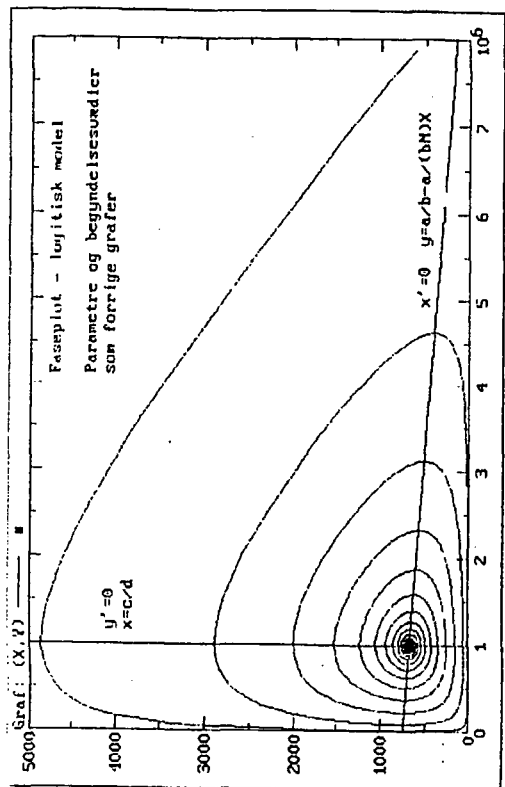


Figur 1 Graf $q=0.5$ $b=0.03$ $c=0.5$ $d=0.01$

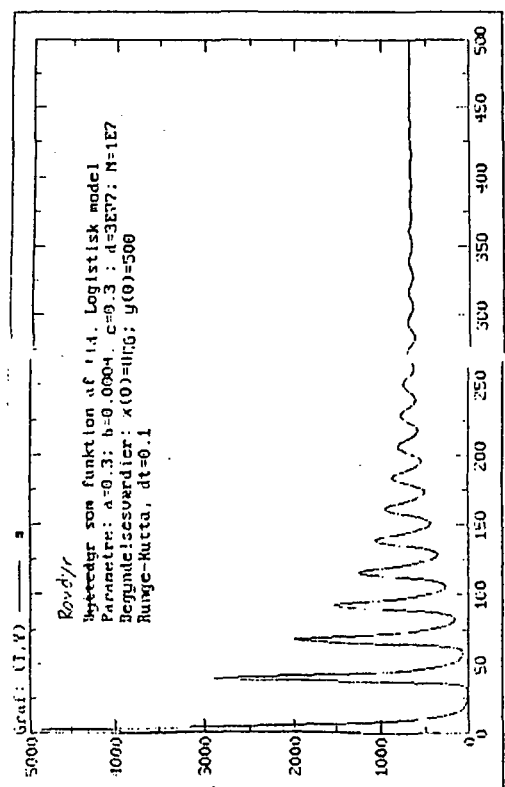


Figur 2 Graf2 Underligt at der ikke er større indsvingninger. Nok pga af suverane biologiske parameterverdier!!!

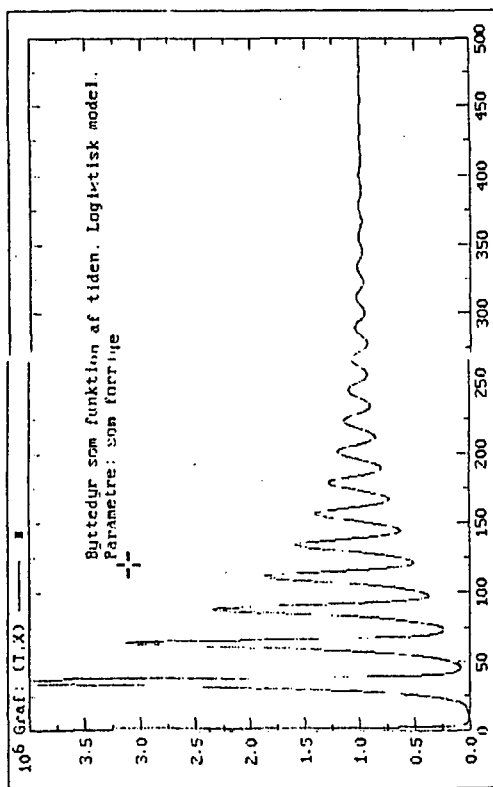
Se bilag 1



Figur 7 grafb



Figur 5 grafb5. ROVDYR - ikke byttedyr!! OBS



Figur 6 grafb

A.3 Opgavebesvarelse 2 (OP2)

Problemstillingstilting 3 : Lotka-Volterra modeller:

Vi har i afsnit 3.4 læst at Lotka-Volterra modellen viser et samspil mellem byttedyr og rovdyr. For dette samspil gælder følgende model:

$$x' = a \cdot x - b \cdot x \cdot y$$

$$y' = -c \cdot y + d \cdot x \cdot y$$

Hvor x' er lig med byttedyrene og y' er lig rovdyrerne.

Forudsætningerne for modellen er at parametrene skal være positive reelle tal, idet

funktionerne ikke må blive negative, da biologiske systemer som dette kun kan gå ned til nul og ikke blive negative.

Man kan jo ikke have en negativ population.

Udskriften af loop-programmet, hvis formål er at beregne den numeriske løsning til ligningssystemet (a), er vedlagt som bilag 1.

$$(a) \quad x' = ax - bxy \quad \text{og} \quad y' = -cy + dxy$$

I selve programmet bruges Eulers metode til at beregne denne løsning, og i afprøvningen af dette program bruges de parametre der er angivet i teksten, samt de begyndelsesværdier der bliver benyttet på figur 4 i notesamlingen.

De begyndelsesværdier (fig.4) er aflæst som følger:

$$\text{Punkt 1 : } x = 15 ; y = 5$$

$$\text{Punkt 2 : } x = 15 ; y = 7$$

$$\text{Punkt 3 : } x = 20 ; y = 7$$

De faseportrætter der kommer ved indsætning i Loop-programmet er vedlagt som bilag 2.

I næste del af opgaven skal man udtegne nogle løsningskurver for udviklingen af byttedyr og rovdyr. Disse grafer er vedlagt som henholdsvis bilag 3. og bilag 4.

Ud fra disse løsningskurver skulle vi bestemme periodelængden for modellen.

Metoden vi brugte til at bestemme periodelængden, var ved at lave en tabel over de forskellige x værdier til tiden t . I tabellen fandt vi så tiden til det første "bundpunkt" og trak dette tal fra tidspunktet hvor toppunkt nummer 2 er. Derved fik vi længden af en periode. Ved udregning af periodelængden af den anden model benyttede vi os af den samme metode. Udregninger af periodelængden for de 2 modeller:

Model 1 (bilag 3):

$$\text{Periodelængde} = 27,880 - 8,050 \Rightarrow \text{Periodelængde} = 19,83$$

Model 2 (bilag 4):

$$\text{Periodelængde} = 24,440 - 4,620 \Rightarrow \text{Periodelængde} = 19,82$$

Faseportrættet over nogle af løsningerne er vedlagt som bilag 5.

På disse faseportrætter er tidsskridtet sat til at være 0,01. Grunden til at tidsskridtet er sat til 0,01, er at computeren ved dette tidsskridt kan generere grafen nogenlunde hurtigt uden at blive for upræcis.

Hvis tidsskridtet bliver sat til 0,1 vil computeren generere grafen lynhurtigt, men resultatet ville være ubrugeligt, da det er alt for upræcis.

Hvis tidsskridtet blev sat til 0,001 ville det resultere i en meget præcis graf. Men af hensyn til at man skal kunne benytte sig af resultaterne, forholdsvis hurtigt, er denne løsning upraktisk, idet den genererer grafen utrolig langsomt.

Begyndelsespunktet for faseportrættet har betydning for hvor stor selve faseportrættet bliver. Jo større begyndelsespunkter man tager des mindre bliver selve faseportrættet.

Vi har derefter udbygget vores program, så vi benytter Runge-Kuttas 4. ordens metode til den numeriske fremskrivning (se bilag 6), i stedet for Eulers metode. Tidsskridtet man kan benytte her kan ligge mellem 0,01 og 0,1, da de er så godt som ens i udformningen og hastigheden er forholdsvis hurtig for begge. Ved tidsskridt 1 bliver faseportrættet alt for upræcis.

Ved at sammenholde Volterras model med D. Anconas observationer mener vi, at modellen godt kan forklare de opgivne tal.

Alfred Lotkas differentialligningsmodel til beskrivelse af rovdyr-byttedyr systemer (grafen over måleserien), skal ses i forhold til Lotka-Volterra modellen. Grafen viser (i store træk), at kort efter de store stigninger af harer, stiger antallet af los. Mængden af harer falder derefter, og lige efter falder losbestanden også.

Denne udvikling må have samme biologiske forklaring som for Lotka-Volterra modellen, hvor fødekæden har betydning for de 2 dyrearters eksistens og vækst.

I naturen vil byttedyrene være begrænset af en række faktorer, der indvirker på deres vækstbetingelser. En logistisk vækstmodel kan på en simpel måde modellere en selvbegrænsende vækst.

Vi har derfor indført en parameter for byttedyrenes bærekapacitet og udbygget vores Lotka-Volterra model, således at denne vokser logistisk, når der ikke findes rovdyr (se bilag 8). Efter afprøvning af de angivne parametre- og begyndelsesværdier får vi følgende løsningskurver (se bilag 9).

Faseplottets forløb er som følgende: først stiger antallet af los, fordi der er mange harer, herefter nås et maksimum i stigningen af los bestanden, hvorefter den falder voldsomt, idet der ikke er tilstrækkeligt med føde. Populationen af harer begynder herefter at stige igen- og kæden fortsætter. Men for hver "runde" er antallet af både harer og los reduceret.

Når x og y ændres, er grafen den samme, men starter i x og y 's nye begyndelsesværdier.

Det beregnede ligevæktspunkt for y :

$$0 = a * (1 - x) / N * x - b * x * y$$

$$b * x * y = a * ((1 - x) / N) * x$$

$$y = a * ((1 - x) / N) * x / (b * x)$$

$$y = (a * (1 - x) / N) / b$$

4

Ligevæktspunkt:

I denne opgave fik vi besked på, at udlede et udtryk for et ligevæktspunkt (x^* , y^*).

Udledningen skulle ske ud fra modellens parametre.

udregningen for x^* :

$$0 = -c * y + d * x * y \quad 0 = (-c * a) / b + (d * x * a) / b \quad (c * a) / b = (d * a * x) / b$$

$$x^* = c / d, \text{ dvs.}$$

$$x^* = 0,5 / 0,01 = 50$$

udregningen for y^* :

$$0 = a * x - b * x * y \quad b * x * y = a * x \quad y = a * x / b * x$$

$$y^* = a / b, \text{ dvs.}$$

$$y^* = 0,5 / 0,03 = 16,333$$

Volterras udbygning af Lotka-Volterra modellen med befolkningsparameter f , hvor f trækkes fra byttefiskenes formeringsrate a , og lægges til rovdyrenes dødsrate c .

Udledning af x^* :

$$x^* = (c + f) / d$$

Udledning af y^* :

$$y^* = (a - f) / b$$

Man kan se ud fra de 2 udledte ligninger, at når f bliver (reduceret fiskeri) mindre bliver x^* mindre og y^* større, dvs. når befolkningsparameteret falder, falder antallet af byttedyr og antallet af rovdyr stiger. Ligevæktspunktet forskydes skråt op mod venstre (se bilag 7).

I 1914 udgjorde byttedyrene 88,1 % og rovdyrene 11,9 %. Antallet af rovdyr stiger herefter, idet de spiser byttedyrene og antallet af disse reduceres. På et tidspunkt vender denne "kæde" (1918-1919) og rovdyrenes antal falder, mens byttedyrene stiger. Grunden er, at denne fødekæde ændres, da der er for mange rovdyr i forhold til byttedyr- og antallet af rovdyr falder pga. fødemangel. Dette resulterer i, at byttedyrene får bedre leveforhold og stiger igen, og kæden starter forfra.

3

```

dt=0.01
a=0.5
b=0.03
c=0.5
d=0.01
x=25
y=25

func dx(x,y)
return a*x-b*x*x
endfunc

func dy(x,y)
return -c*y+d*x*y
endfunc

x=x+dx(x,y)*dt
y=y+dy(x,y)*dt
if t) 100 then stop

```

Bilag 1

Det beregnede ligevægtpunkt for x :

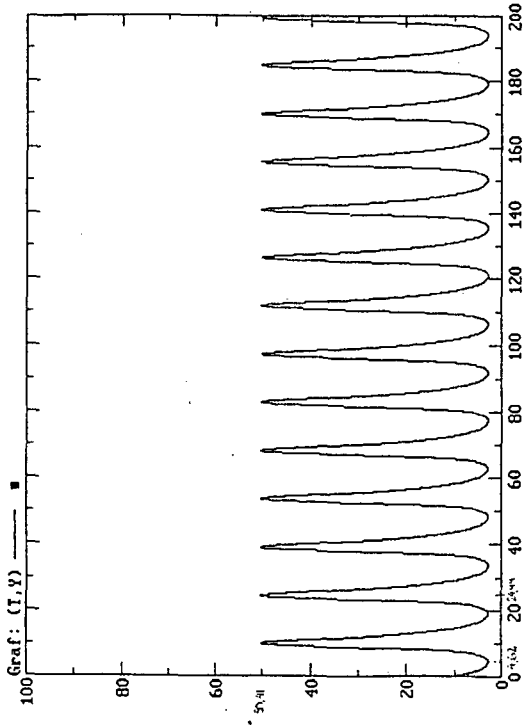
$$x = c/d$$

De 2 kurver i (x,y) -plottet, hvor y og x er nul, ses på bilag 10.

Ved undersøgelsen af den simple fortegnanalyse af x' og y' , finder vi at grafen (se bilag 12) er af en sådan karakter, at vi ikke kan konkludere om ligevægtpunktet er stabilt eller ej!!

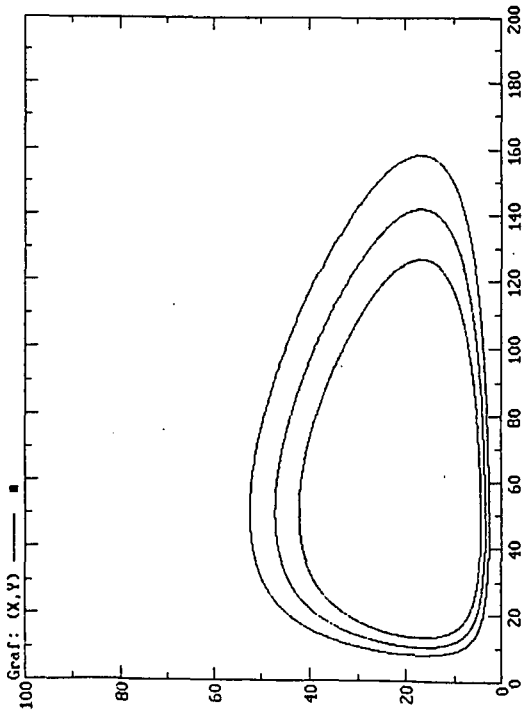
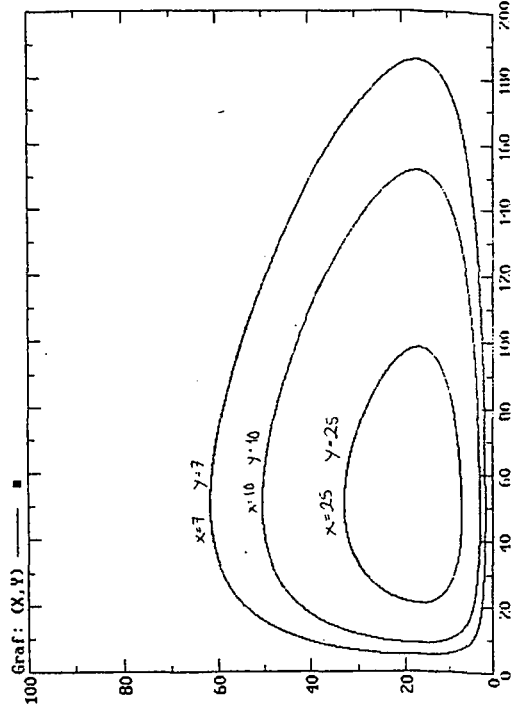
Udfra de behandlede populationsmodeller, må vi konkludere at modellen må kunne anvendes på andre tilsvarende fødekæder.

Bilag 4
Løsningskurve for udviklingen i antallet af rovdyr

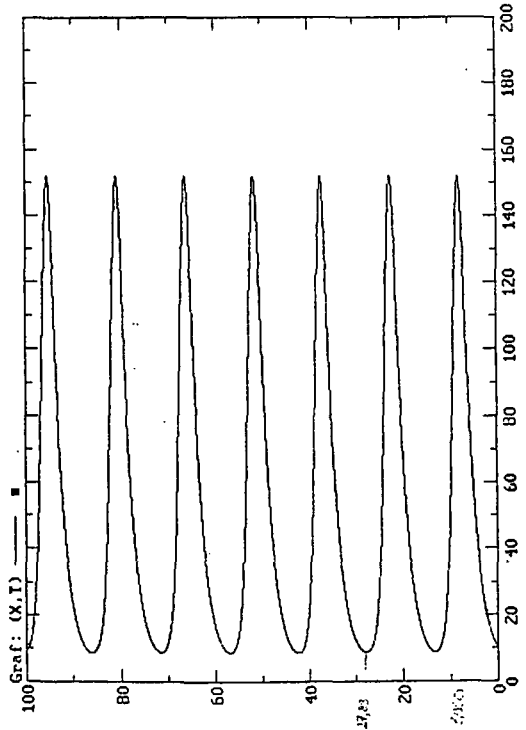


Bilag 5

Løsningskurver for udviklingen i antallet af byttedyr og rovdyr



Bilag 3
Løsningskurve for udviklingen i antallet af byttedyr



```

t=0
dt=0.01
a=0.2
b=0.03
c=0.5
d=0.01
x=10
y=10

func dx(x,y)
return a*x-b*x*y
endfunc

func dy(x,y)
return -c*y+d*x*y
endfunc

t=t+dt
if t>20.03 then stop
k1=dx(x,y)
k2=dx(x+k1*dt/2,y+h1*dt/2)
k3=dx(x+k2*dt/2,y+h2*dt/2)
k4=dx(x+k3*dt,y+h3*dt)
k=(k1+2*(k2+k3)+k4)/6

h1=dy(x,y)
h2=dy(x+k1*dt/2,y+h1*dt/2)
h3=dy(x+k2*dt/2,y+h2*dt/2)
h4=dy(x+k3*dt,y+h3*dt)
h=(h1+2*(h2+h3)+h4)/6

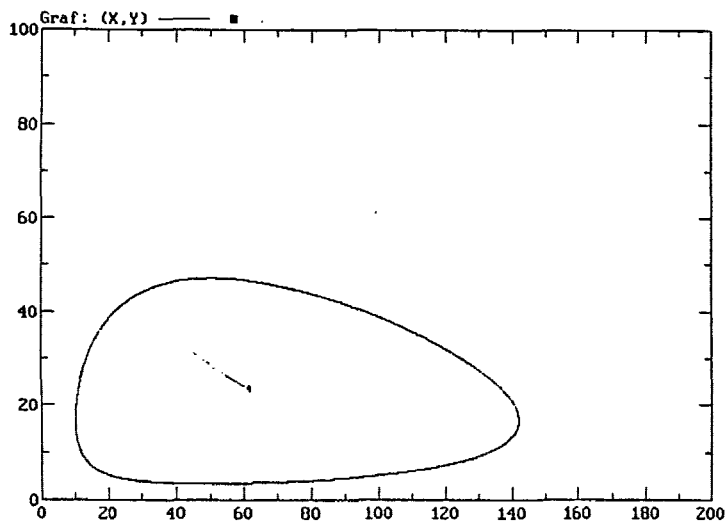
x=x+k*dt
y=y+h*dt

sumx=sumx+(x+dx(x,y)*dt/2)*dt
sumy=sumy+(y+dy(x,y)*dt/2)*dt

```

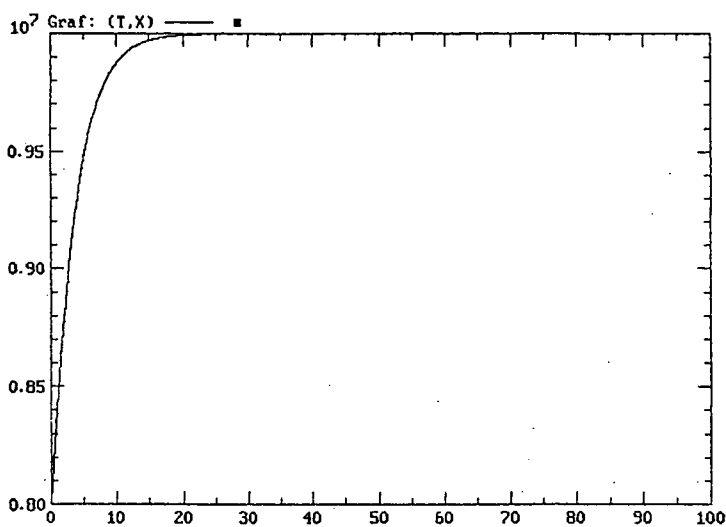
Bilag 6

Bilag 7



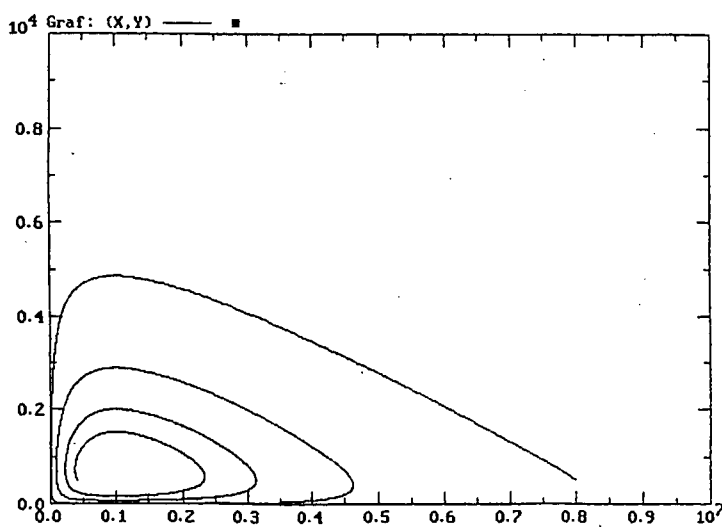
Bilag 8

En logistisk vækstkurve for antallet af bytedyr, når der ikke er rovdyr tilstede



Bilag 9

Faseplot (x,y)



Liste over tidligere udsendte tekster kan ses på IMFUFA's hjemmeside: <http://mmf.ruc.dk> eller rekvireres på sekretariatet, tlf. 46 74 22 63 eller e-mail: imfufa@ruc.dk.

- 332/97 ANOMAL SWELLING AF LIPIDE DOBBELTLAG
Specialrapport af: Stine Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 333/97 Biodiversity Matters
an extension of methods found in the literature on monetisation of biodiversity
by: Bernd Kuemmel
- 334/97 LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM
by: Bernd Kuemmel and Bent Sørensen
- 335/97 Dynamics of Amorphous Solids and Viscous Liquids
by: Jeppe C. Dyre
- 336/97 Problem-orientated Group Project Work at Roskilde University
by: Kathrine Legge
- 337/97 Verdensbankens globale befolkningsprognose
- et projekt om matematisk modellering
af: Jørn Chr. Bendtsen, Kurt Jensen, Per Pauli Petersen
- 338/97 Kvantisering af nanolederes elektriske ledningsevne
Første modul fysikprojekt
af: Søren Dam, Esben Danielsen, Martin Niss,
Esben Friis Pedersen, Frederik Resen Steenstrup
Vejleder: Tage Christensen
- 339/97 Defining Discipline
by: Wolfgang Coy
- 340/97 Prime ends revisited - a geometric point of view -
by: Carsten Lunde Petersen
- 341/97 Two chapters on the teaching, learning and assessment of geometry
by: Mogens Niss
- 342/97 A global clean fossil scenario DISCUSSION PAPER prepared by Bernd Kuemmel
for the project LONG-TERM SCENARIOS FOR GLOBAL ENERGY DEMAND
AND SUPPLY
- 343/97 IMPORT/EKSPORT-POLITIK SOM REDSKAB TIL OPTIMERET UDNYTTTELSE
AF EL PRODUCERET PÅ VE-ANLÆG
af: Peter Meibom, Torben Svendsen, Bent Sørensen

- 344/97 Puzzles and Siegel disks
by: Carsten Lunde-Petersen
- 345/98 Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator
Ph.D. Thesis
by: Mette Sofie Olufsen
- 346/98 Klyngedannelse i en hulkatode-forstøvningsproces
af: Sebastian Horst
Vejledere: Jørn Borggren, NBI, Niels Boye Olsen
- 347/98 Verificering af Matematiske Modeller
- en analyse af Den Danske Eulerske Model
af: Jonas Blomqvist, Tom Pedersen, Karen Timmermann, Lisbet Øhlenschläger
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 348/98 Case study of the environmental permission procedure and the environmental impact
assessment for power plants in Denmark
by: Stefan Krüger Nielsen
Project leader: Bent Sørensen
- 349/98 Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og faglig matematik i
arbejdsmarkeduddannelsen
af: Lena Lindenskov og Tine Wedege
- 350/98 OPGAVESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1998
Erstatter teksterne 3/78, 261/93 og 322/96
- 351/98 Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education
by: Mogens Niss
- 352/98 The Herman-Swiatec Theorem with applications
by: Carsten Lunde Petersen
- 353/98 Problemløsning og modellering i en almindelige matematikundervisning
Specialrapport af: Per Gregersen og Tomas Højgaard Jensen
- 354/98 A Global Renewable Energy Scenario
by: Bent Sørensen and Peter Meibom
- 355/98 Convergence of rational rays in parameter spaces
by: Carsten Lunde Petersen and Gustav Ryd

- 356/98 Terrænmodellering
Analyse af en matematisk model til konstruktion af digitale terrænmodeller
Modelprojekt af: Thomas Frommelt, Hans Ravnkjær Larsen og Arnold Skimminge
Vejleder: Johnny Ottesen
- 357/98 Cayleys Problem
En historisk analyse af arbejdet med Cayleys problem fra 1870 til 1918
Et matematisk videnskabsfagsprojekt af: Rikke Degn, Bo Jakobsen, Bjarke K. W.
Hansen, Jesper S. Hansen, Jesper Udesen, Peter C. Wulff
Vejleder: Jesper Larsen
- 358/98 Modeling of Feedback Mechanisms which Control the Heart Function in a View to an
Implementation in Cardiovascular Models
Ph.D. Thesis by: Michael Danielsen
- 359/99 Long-Term Scenarios for Global Energy Demand and Supply
Four Global Greenhouse Mitigation Scenarios
by: Bent Sørensen (with contribution from Bernd Kuemmel and Peter Meibom)
- 360/99 SYMMETRI I FYSIK
En Meta-projekt rapport af: Martin Niss, Bo Jakobsen & Tune Bjarke Bonné
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 361/99 Symplectic Functional Analysis and Spectral Invariants
by: Bernhard Booss-Bavnbek, Kenro Furutani
- 362/99 Er matematik en naturvidenskab? - en udspænding af diskussionen
En videnskabsfagsprojekt-rapport af: Martin Niss
Vejleder: Mogens Nørgaard Olesen
- 363/99 EMERGENCE AND DOWNWARD CAUSATION
by: Donald T. Campbell, Mark H. Bickhard, and Peder V. Christiansen
- 364/99 Illustrationens kraft - Visuel formidling af fysik
Integreret speciale i fysik og kommunikation
af Sebastian Horst
Vejledere: Karin Beyer, Søren Kjørerup
- 365/99 To know - or not to know - mathematics, that is a question of context
by: Tine Wedege
- 366/99 LATEX FOR FORFATTERE - En introduktion til LATEX
og IMFUFA-LATEX
af Jørgen Larsen

- 367/99 Boundary Reduction of Spectral Invariants and Unique Continuation Property
by: Bernhard Booss-Bavnbek
- 368/99 Kvarterrapport for projektet SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTTELSE AF
BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM
Projektleder: Bent Sørensen
- 369/99 Dynamics of Complex Quadratic Correspondences
by: Jacob S. Jalving
Supervisor: Carsten Lunde Petersen
- 370/99 OPGA VESAMLING - Bredde-Kursus i Fysik 1976 - 1999
Eksamensopgaver fra perioden 1976 - 1999. Denne tekst erstatter
tekst nr. 350/98
- 371/99 Bevisets stilling - beviser og bevisførelse i en gymnasial matematik
undervisning
Et matematikspeciale af: Maria Hermansson
Vejleder: Mogens Niss
- 372/99 En kontekstualiseret matematikhistorisk analyse af ikke-lineær programmering:
Udviklingshistorie og multipel opdagelse
Ph.d.-afhandling af Tinne Hoff Kjeldsen
- 373/99 Criss-Cross Reduction of the Maslov Index and a Proof of the Yoshida-Nicolaescu
Theorem
by: Bernhard Booss-Bavnbek, Kenro Furutani and Nobukazu Otsuki
- 374/99 Det hydrauliske spring - Et eksperimentelt studie af polygoner og hastighedsprofiler
Specialeafhandling af: Anders Marcussen
Vejledere: Tomas Bohr, Clive Ellegaard, Bent C. Jørgensen
- 375/99 Begrundelser for Matematikundervisningen i den lærde skole hhv. gymnasiet 1884-
1914
Historiespeciale af Henrik Andreassen, cand.mag. i Historie og Matematik
- 376/99 Universality of AC conduction in disordered solids
by: Jeppe C. Dyre, Thomas B. Schrøder
- 377/99 The Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: A Multiple Discovery?
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 378/00 Solar energy preprints:
1. Renewable energy sources and thermal energy storage
2. Integration of photovoltaic cells into the global energy system
by: Bent Sørensen

- 389/00 University mathematics based on problemoriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde model
By: Mogens Niss
Do not ask what mathematics can do for modelling. Ask what modelling can do for mathematics!
Vejleder: Johnny Ottesen
- 390/01 SCENARIER FOR SAMLET UDNYTTELSE AF BRINT SOM ENERGIBÆRER I DANMARKS FREMTIDIGE ENERGISYSTEM Slutrapport, april 2001
Projektleder: Bent Sørensen
Projektdeltagere: DONG: Aksel Hauge Petersen, Celia Juhl, Elkraft System[#]; Thomas Engberg Pedersen[#]; Hans Ravn, Charlotte Søndergren, Energi 2[#]; Peter Simonsen, RISØ Systemanalyseafd.: Kaj Jørgensen[#], Lars Henrik Nielsen, Helge V. Larsen, Poul Erik Mørthorst, Lotte Schleichner, RUC: Finn Sørensen[#], Bent Sørensen[#]
[#]Indtil 1/1-2000 Elkraft, [#] fra 1/5-2000 Cowi Consult
^{*} Indtil 15/6-1999 DTU Bygninger & Energi, ^{**} fra 1/1-2001 Polypeptide Labs.
Projekt 1763/99-0001 under Energistyrelsens Brintprogram
- 391/01 Matematisk modelleringskompetence – et undervisningsforløb i gymnasiet
3. semesters Nat.Bas. projekt af: Jess Tolstrup Boye, Morten Bjørn-Mortensen, Sofie Inari Castella, Jan Lauridsen, Maria Gätzsche, Ditte Mandøe Andreasen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 392/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART III: PHYSICS IN PHILOSOPHICAL CONTEXT
by: Bent Sørensen.
- 393/01 Hilberts matematikfilosofi
Specialerapport af: Jesper Hasmark Andersen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 394/01 "PHYSICS REVEALED" THE METHODS AND SUBJECT MATTER OF PHYSICS
an introduction to pedestrians (but not excluding cyclists)
PART II: PHYSICS PROPER
by: Bent Sørensen.
- 395/01 Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege
- 396/01 2 bilag til tekst nr. 395: Menneskers forhold til matematik. Det har sine årsager!
Specialeafhandling af: Anita Stark, Agnete K. Ravnborg
Vejleder: Tine Wedege

- 379/00 EULERS DIFFERENTIALREGNING
Eulers indførelse af differentialregningen stillet over for den moderne
En tredjeseesters projektrapport på den naturvidenskabelige basisuddannelse
af: Uffe Thomas Volmer Jankvist, Rie Rose Møller Pedersen, Maja Bagge Pedersen
Vejleder: Jørgen Larsen
- 380/00 MATEMATISK MODELLERING AF HJERTEFUNKTIONEN
Isovolumetrisk ventrikulær kontraktion og udpumpning til det cardiovascularsystem
af: Gitte Andersen (3. moduls-rapport), Jakob Hilmer og Stine Weisbjerg (speciale)
Vejleder: Johnny Ottesen
- 381/00 Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne
- Rekognosceringer og konstruktioner i grænselandet mellem matematikkens didaktik og forskning i voksenuddannelse
Ph. d.-afhandling af Tine Wedege
- 382/00 Den selvundvigende vandring
Et matematisk professionsprojekt
af: Martin Niss, Arnold Skinninge
Vejledere: Viggo Andreasen, John Villumsen
- 383/00 Beviser i matematik
af: Anne K.S.Jensen, Gitte M. Jensen, Jesper Thrane, Karen L.A.W. Wille, Peter Wulff
Vejleder: Mogens Niss
- 384/00 Hopping in Disordered Media: A Model Glass Former and A Hopping Model
Ph.D. thesis by: Thomas B. Schrøder
Supervisor: Jeppe C. Dyre
- 385/00 The Geometry of Cauchy Data Spaces
This report is dedicated to the memory of Jean Leray (1906-1998)
by: B. Booss-Bavnbek, K. Furutani, K. P. Wojciechowski
- 386/00 Neutrale mandatfordelingsmetoder – en illusion?
af: Hans Henrik Brok-Kristensen, Knud Dyrberg, Tove Oxager, Jens Sveistrup
Vejleder: Bernhard Booss-Bavnbek
- 387/00 A History of the Minimax Theorem: von Neumann's Conception of the Minimax Theorem - - a Journey Through Different Mathematical Contexts
by: Tinne Hoff Kjeldsen
- 388/00 Behandling af impuls ved kilder og drøn i C. S. Peskins 2D-hjertemodel
et 2. moduls matematik modelprojekt
af: Bo Jakobsen, Kristine Niss
Vejleder: Jesper Larsen

- 397/01 En undersøgelse af solvents og kædelængdes betydning for anomal swelling i phospholipidbællag
2. modul fysikrapport af: Kristine Niss, Arnold Skimminge, Esben Thormann, Stine Timmermann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 398/01 Kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" (E1)
Af: Mogens Brun Heefelt
- 399/01 Undergraduate Learning Difficulties and Mathematical Reasoning
Ph.D Thesis by: Johan Lithner
Supervisor: Mogens Niss
- 400/01 On Holomorphic Critical quasi circle maps
By: Carsten Lunde Petersen
- 401/01 Finite Type Arithmetic
Computable Existence Analysed by Modified Realisability and Functional Interpretation
Master's Thesis by: Klaus Frovin Jørgensen
Supervisors: Ulrich Kohlenbach, Stig Andur Pedersen and Anders Madsen
- 402/01 Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse
- udvikling af et kursus
Af: Morten Blomhøj, Tomas Højgaard Jensen, Tinne Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen