TEKST NR 31 1980

VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER
VED UNDERVISNINGSSYSTEMER
BASERET PÅ MÆNGDELÆRE

PROJEKTRAPPORT:

JØRGEN KARREBÆK
TROELS LANGE

VEJLEDER:

STIG ANDUR PEDERSEN

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

"Videnskabsteoretiske problemer ved undervisningssystemer baseret på mængdelære"
Projektrapport af Jørgen Karrebæk og Troels Lange.
Vejleder: Stig Andur Pedersen

IMFUFA tekst nr. 31 (1980), RUC
108 s. ISSN 0106-6242.

Projektet indeholder en gennemgang af noget af den videnskabsteoretiske og -historiske baggrund for 'den ny matematik med særlig vægt på logicismens og formalismens programmer, resultater og begrænsninger. Til kontrast præsenteres den intuitionistiske matematikopfattelse og Lakatos' matematikfilosofi. Et undervisningssystem basebaseret på mængdelære præsenteres, dets underliggende videnskabsteoretiske opfattelse afdækkes, og dets pædagogiske konsekvenser søges vurderet kritisk. Forskellige matematikdidaktiske principper fremstilles med vægt på deres videnskabsteoretiske begrundelse og vurderes i lyset at deres pædagogiske kvaliteter og emne til at tegne et billede af matematikken i samfundet. Til sidst søges begrundet, hvorfor vi mener, at også tanker om matematikundervisningen er nødt til at forholde sig til den frigørende pædagogik.

Teksten er en let omarbejdet udgave af vores projektrapport til modul 3 ved overbygningsuddannelsen i matematik, sommereksamen 1980.

RETTELSER TIL TEKST 31:

s 7, lin 11-12 (og s 41, lin 13 og s 42 midt):

det udesluttede tredjes princip

s 15 lin 5-7 fra neden:

tydning for talbegrebet. Dette er dog det stik modsatte af en fornuftig fremgangsmåde og i hvert fald så umatematisk som vel muligt. Intet under, at matematikerne intet ville vide deraf!

s 34, lin 9: at N er essentielt uafgørlig

s 66, lin 4 fra neden: ...) ham for denne frem-(visning ...)

s 68, lin 12: ville føre til resultater, ...

s 70, lin 20: ... at gøre, for derved at ...

s 81, lin 6: ... af axiomer, derfor bliver ...

s 81, lin 15 fra neden: ... (nem-)lig: at det (citat)

s 82, lin 6: (... matematik-)undervisning er opbygget ...

s 97, lin 8: ... det reelle indhold i forholdet ...

FORORD

Matematikundervisningen i dag er stærkt påvirket af en bestemt matematikopfattelse,som placerer mængdelæren med dens stærke tilknytning til logikken centralt,og som giver sig udtryk i aksiomatisk-deduktivt opbygget undervisning,såvel i skolen som på universitetet. Denne matematik kaldes også 60'er eller strukturmatematikken.

Hos lærere er denne opfattelse ofte uudtalt og endnu oftere ureflekteret.Vi mener, at vi selv og andre matematikstuderende vil stå stærkere i vores kritik af den matematikundervisning, vi præsenteres for og sættes til at videreformidle i skolen med et kendskab til den videnskabsteoretiske og videnskabshistoriske baggrund.

Det er projektets formål at give en sådan baggrund og at vise,hvorledes videnskabsteoretiske opfattelser af matematikken kan være bestemmende for udformningen af matematik-didaktiske systemer.

Vi synes selv, at vi i kapitel 1 er nået rimeligt pænt omkring de videnskabshistoriske og videnskabsteoretiske aspekter ved logicismen og formalismen. Vi har her gennemgået de vigtigste personers filosofiske og faglige standpunkter angående matematikkens erkendelsesteoretiske status.

Særligt interessant må afsnittet 1.6 om formalismens begrænsninger siges at være, da der her både fremhæves resultatet af Gödels ufuldstændighedssætning: At sandhed indenfor matematik ikke kan identificeres med begrebet "at være beviselig", og resultatet af Lövenheim-Skolem's sætning: At en axiomatisering af mængdelæren ikke er meget værd som grundlagsdiciplin.

Disse sætninger er særligt interessante, fordi de på formalismens egne præmisser viser hvilke begrænsede anvendelsesmuligheder formalismen har. Da det er formalismen, der ligger til grund for 60'er matematikken, og dermed den matematiske tradition vi er opdraget med, har vores indpodede matematiksyn hermed fået sig et knæk. Vi er sikre på det gode i at få rykket lidt ved den totale underdanighed, vi ligesom har været presset ud i over for matematikken.

Efter denne erkendelse fik vi mere mod og blod på tanden, og beskæftigede os med nogle grundlæggende anderledes matematiksyn - det gik faktisk op for os, at der overhovedet eksistererede nogle sådanne. Dette har resulteret i kapitel 2, hvor den intuitionistiske matematik og Lakatos' matematikfilosofi gennemgås.

Ved samtale med Ole Skovsmose gik det op for os, at der er en snæver sammenhæng mellem et givet matematiksyn, implicit eller eksplicit, og en given matematikdidaktik.

Vores tidligere omtalte mod resulterede i, at vi turde kaste os ud i en kritik af en repræsentant for den slags matematikundervisning, som vi selv har været udsat for.

Skovsmose afgrænser 4 hovedprincipper indenfor matematikdidaktikken og giver baggrunden for dem. Det fremgår af vores diskussion heraf, at vi ikke mener, at nogle af dem er tilstrækkelige. Faktisk kritiserer vi dem alle for ikke at beskæftige sig med matematikkens samfundsmæssighed.

Det ville nu være rimeligt at afkræve os et alternativ, matematikdidaktikk<u>en</u> (!).

Her må vi desværre stort set melde pas, det er beklageligvis ikke lykkedes os at finde eller udvikle en bedre matematikdidaktik. Det er en stor opgave, som vi ikke kunne gå ordentligt ind i på den korte tid, vi havde til vores rådighed. Vi betragter selv dette som rapportens største mangel. Vi må nøjes med - efter at have skitseret nogle andre problemer ved og omkring matematikundervisning - at flirte lidt med den frigørende pædagogik - repræsenteret ved Freire og Negt. Denne er håbløst ukonkretiseret i forhold til en matematikundervisning, men den indeholder ikke desto mindre nogle af de grundlæggende ting, som vi mener, der er væsentlige for udviklingen af en bedre matematikundervisning. Derfor kan vi i det mindste konkludere, at en bedre matematikundervisning er nødt til at forholde sig til den frigørende pædagogik, men nærmere når vi det altså desværre ikke.

Til slut i indledningen vil vi gerne rette en tak til Ole Skovsmose, som har været en stor hjælp med gode råd og udlån af upublicerede skrifter.

INDHOLDSFORTEGNELSE

KAPITEL 1

OPFATTELSER AF MATEMATIKKENS ERKENDELSESTEORETISKE STATUS. TRÆK AF MATEMATIKKENS NYERE HISTORIE

Matematik synes at rumme sandheder af en særegen natur. Sætningen $x(x+2)+1=(x+1)^2$ kan ikke både forstås og betvivles, hvis der er enighed om tegnenes betydning. Matematiske sandheder synes således ikke blot tvingende, men også enestående og uforanderlige. Den autoritet, hvormed matematiske konsekvenser præsenterer sig for vores bevidsthed, er i slægt med moralsk autoritet - som den blev opfattet i mere absolutistiske tider end vores.

Matematikken præsenterer sig for individet og 'historien' som en helhed af sandheder, som må mestres. Der er klart forskel på sandt og forkert, og en vedholdende anstrengelse bekræfter, at der ligger sandheder længere fremme og venter på at blive opfattet og begrebet. Tilsvarende forhold synes at gælde for matematikkens historie, thi omend forskellige kulturer har ydet forskellige bidrag, så fremtræder disse som facetter af en enkelt, voksende helhed af teoremer.

Der må ligge en bestemt realitet til grund for denne bemærkelsesværdige tingenes tilstand, omend det er uklart hvilken. Tal fx. er nemme at arbejde med i praktiske beregninger, men deres virkelige natur er vanskelig at beskrive. På en måde synes tal at være objekter, og det er fristende at spørge, om tallet tre eksisterer. Uheldigvis er de umiddelbare svar modstridende. Tallet tre synes både at være en størrelse, hvis egenskaber beskrives af matematikere, og på samme tid noget, som er så varieret og ofte reproducerbart, som dets mangfoldighed af fremtrædelser og anvendelser kræver. Her slår den umiddelbare sunde fornuft ikke til; en mere systematisk filosofisk tænkning må til.

I dette kapitel vil vi beskæftige os med nogle vigtige opfattelser af matematik og forskellige forsøg på at retfærdiggøre dem. Kapitlets omdrejningspunkt er den såkaldt logicistiske tese, som kort fortalt siger, at matematik er logik. Den blev i lidt forskellige versioner formuleret af Gottlob Frege og Bertrand Russell omkring århundredskiftet.

En begrundelse for at beskæftige sig med denne opfattelse er, at den udgør kernen i de opfattelser, der lå bag 'den nye matematik' eller '60'er matematikken', som den også kaldes, for dens forståelse af, hvad matematikundervisninger handler om, og for udformningen af undervisningsprogrammer. Det vender vi tilbage til i Kapitel tre.

Kap. 1.1 Ældre matematikopfattelser. Kant

Den filosofiske diskussion om matematikkens natur går langt tilbage, ihvert fald til 'de gamle grækere'. For Platon karakteriseredes matematiske udsagn af præcision, tidløshed og uafhængighed af iagttageren. Således besad matematiske udsagn præcis de karakteristika, der identificerede formerne eller ideerne. Disse var virkelige i modsætning til tilsyneladende. Formerne eller ideerne sanses ikke, men erkendes med fornuften. Platon anså altså ikke matematik for en idealisering af den empiriske verden, men som en beskrivelse af (en del) af virkeligheden. Forholdet mellem et matematisk begreb og dets praktiske tilsynekomst blev beskrevet med begrebet 'participation' (deltagelse). Et æble participerer i formen '1'. 'Anvendt' matematik beskriver empiriske objekter og deres relationer for så vidt, som disse participerer i de rene matematiske former og deres relationer.

For Aristoteles handler matematik om idealiserende abstraktioner foretaget af matematikere; idealiserende fordi han skelner skarpt mellem muligheden for abstraktion af matematiske karakteristika og disses selvstændige, uafhængige eksistens. Aristoteles ville ikke snakke om sande og falske idealiseringer, men om mere eller mindre fyldestgørende til et givet formål. Han havde blik for strukturen af hele videnskabelige teorier og skelnede klart mellem i) principper, der er fælles for alle videnskaber, dvs. den formelle logik, som han også arbejdede med af klassificere ii) de specielle principper, som tages for givet af matematikeren, som er beskæftiget med at vise sætninger, dvs. axiomer iii) definitioner, som ikke antager, at det, der defineres, eksisterer (fx. et punkt er det, som ingen dele har) iv) eksistenshypoteser, som antager , at det, der defineres, er uafhængigt af vor tanke og perception.

Leibniz introducerede nye ideer i matematikfilosofien, som skulle blive vigtige temaer sidenhen, idet han bragte matematik og logik, som indtil da havde været betragtet som to seperate videnskaber, sammen. Han gjorde det på to måder. For det første sagde han, at der er forskel på fornuftsmæssig sandhed og faktuel sandhed; de er gensidigt eksklusive og tilsammen udtømmende. Fornuftsmæssige sandheder er nødvendigvis sande, idet deres modsatte (dvs. negation) er umulige. Faktuelle sandheder er betingede og deres modsatte er mulige (fx. sanseerfaring). Fornuftsmæssig sandhed er grundlagt på principper om kontradiktion(modsigelse), som omfatter principper for identitet og princippet om 'tertium non datur' ('et tredje gives ikke' - det udesluttende trejdes princip: enten gælder et udsagn eller også gælder dets negation). Matematiske axiomer, postulater, definitioner og teoremer er fornuftsmæssige sandheder. De er identiske i den forstand, at de har samme sandhedsværdi.

For det andet introducerede Leibniz kalkulationen i logikken, idet han gjorde opmærksom på symbolikkens betydning for håndteringen af komplekse deduktioner. Selvom den symbolik, der bruges til anskueliggørelse og bevis, og indsigten i de logiske strukturer er adskillelige i tanken, er de det sjældent i praksis. Mekanisk beregning indføres her som metodologisk ide som hjælp til deduktiv tænkning.

Med Kant er vi nået til den sidste i den række af filosoffer vi her trækker frem. Kant levede fra 1724 til 1804, knap hundrede år senere end Leibniz, på kanten så at sige af det 19. århundrede, hvis tænkning han øvede stor indflydelse på, især naturligvis den tyske. Kant skelner mellem fornuftsbegreber og forstandsbegreber. Forstandsbegreber afgrænser vores erkendelsesobjekter. Fornuftsbegreber har ikke nødvendigvis direkte reference til den empiriske virkelighed, men har en regulativ funktion. Han overtager for så vidt opdelingen fra den rationalistiske filosofi (Leibniz) og den empiricistiske filosofi (Hume) af alle sætninger i to klasser: analytiske (dvs. fornuftsmæssige), hvis sandhedsværdi alene afhænger af den semantiske (sproglige) opbygning (tautologier og kontradiktioner), og syntetiske (dvs. faktuelle) sætninger, hvis sandhedsværdi kun kan bestemmes ved at gå uden for sproget. Men Kant lægger en yderligere distinktion på tværs af den foregående, idet han opdeler i a priori-sætninger, hvis gyldighed kan etableres uden at inddrage empirisk erfaring, og a posteriori-sætninger, som er empiriske erfaringssætninger. Den første distinktion er en semantisk distinktion - sætningens sproglige opbygning, afgør, hvorledes dens sandhedsværdi skal bestemmes. Den anden er en erkendelsesteoretisk distinktion, som bestemmer den empiriske erfarings status i forhold til sætningens gyldighed. Kant bestemte matematiske sætninger til at være syntetiske og a priori, dvs. deres gyldighed afgøres uden for sproget, men uden at inddrage empirisk erfaring. Disse syntetiske a priori sætninger er nødvendige i den betydning, at hvis overhovedet nogle sætninger om den fysiske verden skal være sande, så må de være sande. Med andre ord, syntetiske a priori-sætninger er nødvendige betingelser for muligheden af at opnå objektiv erfaring.

Kant indførte flere distinktioner, men vi skal ikke gå dybere ind heri. Det væsentlige i denne sammenhæng er, at med Kant er den begrebsramme skabt, som meget at det 19. århundredes filosofiske diskussion om matematik finder sted i. For Frege fx.,som vi senere vender tilbage til, var geometri syntetisk a priori, altså forudsætning for objektiv erfaring, men aritmetikken (talteorien) anså han for analytisk a priori, dvs. talteoretiske sætningers gyldighed kan etableres uden at inddrage erfaring og afhænger alene af deres semantiske opbygning. Han bestemmer hermed aritmetikken til at være logik, og hans program er at udvide klassen af analytiske a priori-sætninger, deraf navnet 'logicisme'.

Inden vi kommer til Frege og logicismen, skal vi en tur omkring Mill, som formulerer en position, der påkalder sig Freges skarpe kritik, og som derfor er belysende for Freges syn.

Kap. 1.2 John Stuart Mill (1806-1873)

Mill udviklede sit syn på videnskab, herunder matematik i bogen "A System of Logic" fra 1843. Hans centrale mål var, at formulere "a perfect science of natural bodies" og dermed reducere betingelserne for et videnskabeligt bevis "to strict rules and scientific tests" - altså at angive hvorledes en videnskab kan hævde sandhed.

Vor viden er afledt af sanseindtryk, hævdede Mill og gik imod enhver forestilling om, at viden skulle kunne være medfødt eller opnået ved rationel indsigt. I modstrid med fx. Kant. Mill var med andre ord empirist.

Mill konkluderer efter en længere undersøgelse, at alle deduktive eller 'demonstrerende' videnskaber i virkeligheden er induktive. Viden opnås induktivt ved akkumulation af erfaringer af særlige eller konkrete tilfælde. Mill hævder, at vores "universelle" viden stammer fra det særlige. Det er den videnskabelige metode, der sætter os i stand til at formulere den universelle eller generelle viden udfra de specielle tilfælde. Han anerkender de deduktive videnskabers udledninger, altså at konklusionerne følger af præmisserne eller axiomerne, men det hjælper ikke, for "axioms are but a class, the most universal class, of inductions from experiences; the simplest and easiest cases of generalization from the facts furnished to us by our senses or by our internal consciousness." (Mill, 1843,II,VI,§1,P 252) Definitioner er generaliseringer af erfaringer, og de er ikke nødvendigvis sande, fordi de altid vil bortabstrahere egenskaber ved objektet.

Mill er en konsekvent empirist og må som sådan hævde, at hvis matematik er viden, må den stamme fra erfaringen. Han er selv klar over dette og siger, at hans påstand om, at alle deduktive videnskaber er induktive, ikke kan anses for at være bevidst, før han har konfronteret den med "the most remarkable of all those (dvs deduktive; f.a.) sciences, that of Numbers; the theory of the Calculus; Arithmetic and Algebra." (Mill,1843,II,VI,§1,p 253).

Matematiske udsagn er for Mill empiriske erfaringer af en meget generel karakter. Efter en længere polimik mod bl.a. nominalisterne, som er karakteriseret ved, at de hævder, at 'to og en lig tre' ikke er en sandhed, ikke er hævdelse af et reelt eksisterende faktum, men en definition af ordet'tre', et udtryk for, at menneskene har enedes om, at bruge navnet tre som et tegn helt ækvivalent med to og en - siger Mill, at udtrykkene 'to småsten og en småsten' og 'tre småsten' ganske vist betegner den samme samling objekter, men betyder noget forskelligt, fordi objekterne fysisk er arrangeret på to forskellige måder; de er i to forskellige tilstande. Det giver anledning til to forskellige sanseindtryk:

"Three pebbles in two separate parcels, and three pebbles in one parcel, do not make the same impression on our senses; and the assertion that the very same pebbles may by an alteration of place and arrangement be made to produce either the one set of sensations or the other ... is a truth known to us by early and constant experience: an inductive truth; and such truths are the foundation of the science of Number. The fundamental truth of that science all rest on the evidence of sense; they are proved by showing to our eyes and our fingers that any given numbers of objects, ten balls for example, may by separation and re-arrangement exhibit to our senses all the different sets of numbers the sum of which is equal to ten. ...

We may, if we please, call the proposition, "Three is two and one," a definition of the number three, and assert that arithmetic, ...is a science founded on definitions. But they are definitions in the geometrical sense, not the logical; asserting not the meaning of a term only, but along with it an observed matter of fact."

...

What then, is that which is connoted by a name of number? Of course, some property belonging to the agglomeration of things which we call by the name; and that property is, the characteristic manner in which the agglomeration is made up of, and may be separated into, parts."

(Mill, 1843, II,VI,§2, p 256-7 og III, XXIV,§5,p611)

Det er Mills grundlæggende ide, at vi, når vi laver matematik, medbringer et sæt erfaringer med materielle objekters egenskaber og opførsel. At mønstre og grupperinger i fysiske ting udgør en model for vores tankeprocesser. Når vi tænker matematisk trækker vi stiltiende på denne viden. Matematiske resonnements-processer er blot svage skygger af fysiske operationer med objekter. Den tvingende karakter af trinnene og af konklusionerne hviler på den velkendte fysiske nødvendighed af de fysiske operationer, hvorover de er modelleret. Den brede anvendelighed af aritmetisk ræsonneren skyldes, at vi med større eller mindre vanskelighed kan tilpasse mange forskellige situationer til disse modeller.

Tal er for Mill mentale objekter; navnet på et tal er navnet på en egenskab hørende til en samling objekter. Egenskaben er den karakteristiske måde, hvorpå samlingen i følge vores erfaring er opdelt i dele.

Mills empirisme kan betegnes som psykologisme, fordi hans analyse af matematiske ideer tager udgangspunkt i at se matematik som en samling færdigheder, overbevisninger og tankeprocesser, som individet må indvies i.

1.3. Gottlob Frege. Det logicistiske program

Gottlob Frege var en tysk matematiker, professor i faget i Jena, og levede fra 1848 til 1925. Han har givet vigtige bidrag til logikken og filosofien og skabt den matematiske grundlagsforskning. Hans hovedværker er "Begriffsschrift" fra 1879 med undertitlen "Eine der Sprache der Arithmetik nachgebildete formalisierte Sprache des reinen Denkens" (Et formaliseret sprog for den rene tænkning dannet efter aritmetikkens sprog). Fem år senere udkom "Die Grundlagen der Arithmetik", som vi skal beskæftige os en del med i dette afsnit. "Die Grundgesetze der Arithmetik" udkom i to dele i 1893 og 1903.

Samme år som anden del af 'Grundgesetze' udkom Bertrand Russells "Principles of Mathematics", hvor Russell nævner, at den analyse af talbegrebet og det syn på forholdet mellem logik og matematik, som indgår i hans arbejde, blev foregrebet nitten år tidligere i Freges 'Grundlagen'.

Frege var som antydet af titlerne på hans bøger dybt optaget af matematikkens grundlag. Problemet herom stillede sig anderledes end tidligere efter nogle af det 19. århundredes store matematiske resultater. Man havde opdaget, at parallellitetsaxiomet i den euklidiske geometri ikke var et axiom på samme måde som de andre axiomer i Euklids geometri. Det kunne undværes eller erstattes med andre; man kunne lave konsistente ikke-euklidiske geometrier. Geometri var således ikke længere entydigt teorien om rummet, men hvad var det så?

Gennem den sidste fjerdedel af det 19. århundrede blev matematikken aritmetiseret. Ved eksplicitte, skønt ofte komplicerede definitioner blev de forskellige slags tal op til de komplekse og videre og operationerne på dem introduceret på basis af de naturlige tal og operationer herpå. Næsten alle matematikere var tilfredse med dette resultat og betragtede enhver dybere undersøgelse vedrørende reducerbarheden af de naturlige tal til andre størrelser eller deducerbarheden af de aritmetiske teoremer fra andre teoremer med mistænksomhed.

Frege var imidlertid ikke tilfreds og stillede spørgsmålet, om reduktionen kunne fortsættes? Fandtes der noget, som 'lå under' aritmetikken - et fundament, hvorudfra man kunne udlede tallene? Frege mente ja, og specielt ville han vise, at den grund, som læren om de hele tal og dermed indirekte hele den højere matematik hvilede på, er logikken.

Dette synspunkt, at alle matematiske begreber kan defineres ved hjælp af et fåtal af begreber fra logikken, og at alle matematiske sandheder kan udledes af et fåtal af logiske grundsandheder, kaldes den logicistiske tese. Og Freges og Russells forsøg på at vise, at matematikken kan reduceres til logik, kaldes det logicistiske program.

I 'Die Grundlagen der Arithmetik' fra 1884 satte Frege sig for at vise, af samtidens fortolkninger af aritmetikken, af tallenes natur, var graverende utilstrækkelige, og han forsøgte at angive en tilfredstillelse - og det vil for ham sige: logisk - fundering af de naturlige tal.

Vi vil dvæle lidt ved indledningen til bogen. Her formulerer han sit program, begrunder det og udpeger de synspunkter, det er ham særligt om at nedlægge.

Indledningsvist gør han opmærksom på, at det svar, man oftest vil få på spørgsmålet om, hvad tallet én er, eller hvad tegnet 1 betyder, er, at det er en ting. Gør man dernæst opmærksom på, at sætningen "tallet én er en ting" ikke er en definition, fordi den kun siger, at tallet én hører til tingene, men ikke hvilken ting, så bliver man opfordret til at vælge sig en ting og kalde den én. Dette er imidlertid for Frege helt utilfredsstillende, thi hvis alle havde ret til at forstå, hvad de ville om den samme sætning om én, så ville den ikke have noget alment indhold. Matematikerne har altså ikke tilfredsstillende svar på spørgsmålet om tallet én, og Frege spørger, om det "dog ikke er beskæmmende for videnskaben at være så uklar omkring sin første og tilsyneladende så enkle genstand?" (Frege, 1884,p II; dette og følgende citater er i egen oversættelse) - og han fortsætter: "Når et begreb, som ligger til grund for en stor videnskab, volder vanskeligheder, så er det dog vel en uafviselig opgave, at undersøge det nærmere og overvinde disse vanskeligheder, især da det ville være svært at komme til klarhed over de negative, de rationelle og de komplekse tal, sålænge indsigten i grundlaget for hele aritmetikkens struktur er mangelfuldt." (ibid, p II)

Frege er klar over, at mange ikke vil finde hans arbejde umagen værd, fordi de ikke kan se, at der er noget at diskutere, og han føler sig stillet overfor grove opfattelser (Roheit der Auffassung), som kalder regning for 'aggregeret, mekanisk tænkning' (ibid p III) Han betvivler, at der overhovedet findes en sådan tænkning, for "...tænkningen er overalt i det væsentlige den samme ... Forskellene består kun i den større eller mindre renhed og uafhængighed af psykologisk indflydelse og af tænkningens ydre hjælp såsom sprog, taltegn o.lign., og i nogen grad i finheden af begrebernes struktur; men netop i denne henseende overgås matematikken næppe, selv ikke af filosofien." (ibid, p III-IV) Opfattelsen af regning som aggregeret, mekanisk tænkning må det være i matematikernes interesse at imødegå, "fordi den er egnet til at forklejne en hovedgenstand for deres videnskab og dermed denne selv." (ibid p IV) Det er altså i høj grad matematiken og dens udøveres prestige og selvfølelse, der er på spil. Matematikken skulle nødig trues i sin 'renhed' eller vise sig at være under 'psykologisk indflydelse'.

Behovet for en nøjere undersøgelse af talbegrebet er, hvad Frege ønsker at vække. En sådan må nødvendigvis blive ret filosofisk; samarbejdet mellem matematik og filosofi er imidlertid ikke så blomstrende, som det kunne være. Årsagen hertil ser han i "de psykologiske betragtningsmåders overvægt indenfor filofofien, som endda er trængt ind i logikken" (ibid, p V) Han henviser til opfattelser, som går ud på, at tallene afhænger motorisk af 'muskelsansninger', men siger, at matematikeren ikke kan genkende tallene i sådanne forstillinger, og fastslår: "Nej, med sansning har aritmetik intet at skaffe. Ligesålidt med indre billeder, dannet af sporene af tidligere sanseindtryk. Det ustadige og ubestemte, som alle disse gestalter har, står i skarp modsætning til de matematiske begrebers og genstandes endelige og faste karakter" (ibid, p V-VI) Ved ordet 'hundrede' kan man forestille sig tegnet '100' eller bogstavet 'C' eller noget andet. Sådanne forestillinger rammer ikke sagens væsenskerne. "Lad os ikke tage en beskrivelse af, hvorledes en forestilling opstår, for en definition, og ikke angivelsen af de sjælelige og legemlige betingelser for, at en sætning kommer til vores bevidsthed, for et bevis og forveksle tanken om en sætning med dens sandhed!" (ibid, p VI)

Videre gør han opmærksom på, at en sætning jo ikke ophører med at være sand, fordi jeg holder op med at tænke på den. Talforestillinger har deres historie, men den historiske betragtningsmåde også sine begrænsninger. "Bestod i alle tings bestandige flyden intet fast, intet evigt, ville verdens erkendelighed ophøre og alt styrte i forvirring." (ibid, p VII) Det er urimeligt at forestille sig, at begreber opstår i de enkelte sjæle, som blade på et træ, og at mene, at man erkender deres væsen ved at efterforske deres opståen eller forklare dem udfra menneskets psykologiske natur. Ofte lykkes det først efter et stort åndeligt arbejde, der kan strække sig over århundreder, at erkende et begreb i dets renhed, at afskrælle de indhyldninger, der skjulte det for det åndelige øje.

Og så kommer turen til Mill: "Hvad skal man nu sige, når nogen, i stedet for at fortsætte dette arbejde (med at erkende begreberne i deres renhed; f.a.), hvor det endnu ikke synes fuldendt, ikke har nogen agtelse til overs for det, går i børneværelset eller sætter sig tilbage til menneskehedens ældst tænkelige udviklingstrin, for der som J.St.Mill at opdage en pebernødde- eller kiselstens-aritmetik! (se afsnit 1.2; f.a.) Der mangler blot at tilskrive nøddernes velsmag en særlig betydning. Det betydningsfelt, vi har trukket frem, og som Douglas antyder en fortolkning af. Vi vil senere i rapporten vende tilbage til temaet.
I stedet for at finde en særlig renhed for begreberne der, hvor man tror sig nær deres kilde, ser man alt udflydt og utydeligt som gennem en tåge." (ibid, p VII-VIII) Opdagelsernes historie kan måske være nyttig som en forberedelse til videre forskning, men

ikke træde i stedet.

Når vi opholder os så længe ved Freges forord, skyldes det påfaldende træk ved hans stil. I hans argumentation er indvævet en pågående og skarp opmærksomhed omkring matematikernes professionelle agtelse. Det er 'beskæmmende', at matematikken er usikker i sit fundament, og en 'uafviselig' opgave at udbedre skaden. Han er stillet overfor 'grove' og 'forklejnende' anderledes opfattelser. Matematikken er af større 'renhed' og dens begreber af 'finere' struktur end nogen anden videnskab. 'Psykologi' og 'sansning' er det værste han kan forestille sig i forbindelse med matematik. 'Psykologiske betragtningsmåder' er endda 'trængt ind i' logikken.

Forestillinger om renhed og fare, invasion, indtrængen, forklejnelse, foragt, og ruin gennemsyrer hans fremstilling. Den understreger kontrasten mellem det ubestemte, det tågede og forvirrede og flydende overfor det rene, fine, ordnede og regulære. I sin diskussion af kontroversen mellem Mill og Frege er Bloor også opmærksom på dette træk og henviser til antropologiske studier:

> "In 'Natural Symbols' (1973) Mary Douglas has drawn attention to what she calls the 'purity rule'. There is, she says, a natural tendency in all cultures to symbolize high status and strong social control by rigid bodily control. Physical eruptions and processes are framed out of discourse. The attempt is made to portray interactions as if they are between disembodied spirits. Style and behaiviour are bent towards maximising the distance between an activity and its physiological origin. In my terms, invoking the purity rule would be a natural response to threat. Frege's style is a beautiful example of the purity rule in action. Indeed, he explicitly formulates it for himself. ..." (Bloor, 1976,p 83)

Det bemærkelsesværdige ved Freges stil er ikke fremdraget for i sig selv at drage den rationelle kerne i hans argumentation i tvivl. Men hvor berettiget undersøgelsen af matematikkens grundlag eller væsen end er, vækker det vores eftertanke, at en dyb og påstået 'ren' filosofisk-videnskabsteoretisk undersøgelse kan gå så ubesværet hånd i hånd med hele det betydningsfelt, vi har trukket frem, og som Douglas antyder en fortolkning af. Vi vil vende tilbage til temaet senere i rapporten.

Mill behandlede matematik som et sæt forestillinger, der er om den fysiske verden og opstår af erfaring med denne verden. De to centrale ingredienser er således: i) forestillinger og tankeprocesser opfattet som mentale begivenheder og ii) de fysiske situationer , som forestillingerne er om. Freges kritik retter sig mod begge mål. Han kritiserer både synspunktet om, at tal er subjektive eller mentale ting og synspunktet om, at tal er om eller er egenskaber ved fysiske objekter.

Freges argument for at forkaste ideen om tal som subjektive, mentale eller psykologiske består i at pege på forskellen mellem egenskaber ved psykolgiske størrelser, som ideer og erfaringer og egenskaber ved matematiske begreber. Vores bevidsthedstilstande er ubestemte og fluktuerende, mens tilstandenes indhold - den matematiske viden de indeholder - er fast og bestemt. Tal er ikke psykologiske størrelser i folks hoveder, men er uafhængige erkendelsesobjekter.

Heroverfor kunne man forsvare Mill med at sige, at hans teori har en objektiv komponent derved, at aritmetik er om generelle egenskaber ved objekter, fx. de af Frege så foragtede pebernødder. Sværere får han det overfor Freges problematisering af, at tal er egenskaber ved ydre ting. Her er Freges argument, at tal ikke kan være en egenskab ved ting, fordi tallet knyttet til en samling ting afhænger af den måde, vi ser tingene på. Tal er ikke en egenskab ligesom farve og form: "Taler man ikke i en ganske anden forstand om 1000 blade end om træets grønne blade? Den grønne farve tillægger vi hvert blad, det gør vi ikke med tallet 1000. Vi kunne sammenfatte allle træets blade under navnet 'dets løv'. Også dette er grønt, men ikke 1000...... En genstand, som jeg med samme ret kan tilskrive forskellige tal, er ikke den egentlige bærer af et tal." (Frege, 1884, p 28-9)

Frege sammenfatter sin kritik af Mill's og andres talopfattelser således:

> "Tal abstraheres ikke fra ting på samme måde som farve, vægt og hårdhed, er ikke i den forstand egenskab ved ting.
>
> ...
>
> Tal er intet fysisk, men heller intet subjektivt, ingen forestilling.
>
> ...

Tal opstår ikke ved at føje ting til ting. Navngivning efter hver tilføjelse ændrer intet.

...

Afgrænsethed, udelelighed, uadskillelighed er ikke brugbare kriterier for det, som vi udtrykker med ordet 'en'.

...En skelnen må gøres mellem én og enhed. Ordet 'en' kan som egennavn for en [redacted] forskningsgenstand ikke sættes i flertal. Det er altså meningsløst at lade tal opstå som sammenføjninger af enere. Plustegnet i 1+1=2 kan ikke betyde en sådan sammenføjning." (ibid, §45, p 58.9)

Hvad er da løsningen på misêren om tallene? Når de ikke er fysiske eller mentale størrelser, hvad er de så? Frege ser en tredje mulighed: de er fornuftsobjekter eller begreber. Begreber har den vigtige egenskab at være 'objektive'. Med objektiv forstår Frege det, der er uafhængigt af vore sansninger og de mentale billeder bygget herpå, men ikke uafhængigt af vores fornuft. Han forsøger at afgrænse det således:

"Jeg skelner det objektive fra det håndgribelige, det rumlige og det virkelige. Jordens akse, solsystemets [redacted] er objektive, men jeg ville ikke kunne kalde dem virkelige ligesom jorden selv. Man kalder ækvator for en tænkt (gedacht) linie; men det ville være forkert, at kalde den en udtænkt (erdacht); den er ikke opstået ved tænkning, som et resultat af en psykisk proces, men snarere kun erkendt, (be-) grebet ved tænkning. Var [redacted]) en [redacted], så kunne vi ikke sige noget positivt om ækvator angående den tid, der lå forud for [redacted] angivelige opståen." (ibid, §26, p 35)

Frege skelner skarpt mellem begreb og ting. En ting kan 'falde under' et begreb. De enkelte mennesker fx. er ting, som falder under begrebet 'menneske'.

Videre skelner Frege mellem begrebet selv og dets omfang eller extension. Omfanget af begrebet menneske er klassen af alle mennesker. De enkelte mennesker tilhører eller er medlemmer af klassen mennesker. En ting - eller en genstand, som han også kalder den - kan altså falde under et begreb og tilhøre et begrebs omfang.

Det kendetegner Frege, at han betragter begrebsomfang, klasser som en slags ting eller genstand, der har objektiv eksistens. Hans metafysik er 'realisme'; man siger, at han er 'begrebsrealist'. Det er Russell ikke; han er antirealist - det vender vi tilbage til.

Talbegrebet arbejder Frege sig nu frem til således:

En talangivelse udsiger noget objektivt om et begreb. Aritmetikkens tal må begribes ikke som uselvstændig attribut, men som substantivisk - forskellen modsvarer den mellem 'blå' og 'himlens farve'. Et tal er tilstrækkeligt bestemt, hvis i) vi kan identificere det, referere entydigt til det, og ii) vi kan afgøre dets identitet, adskille det fra andre ting. Som definition på lighed bruger han Leibniz' substitutionsprincip: to ting er ens, hvis de kan erstatte hinanden. (ibid, §65, p 76)

Han siger så, at der findes en art sætninger, som må have mening for alle genstande. Det er identitets- sætninger; for tal kaldes de 'ligning' (Gleichung). Problemet er derfor at fastsætte betydningen af tal-lighed uden at gøre brug af tal-ord eller ordet tal. Han finder, at en identitetsdom for tal betyder, at der er en gensidigt entydig tilordning af de genstande, der falder under et begreb F med de genstande, der falder under et begreb G - dvs. en en-til-en-korrespondance. Denne mulighed er definitionen på lighed mellem tal. En sådan gensidigt entydig tilordning er en relation mellem genstandene, der falder under de to begreber. Relationsbegrebet er et rent logisk begreb, kan Frege vise. Hvad der er logisk, er analytisk sandt og kendt a priori. (ibid, §70, p 83)

Med lighed i hus er han parat til at definere tal eller rettere antal:

> "Det antal, som tilhører begrebet F, er omfanget af begrebet 'lige-talligt med begrebet F'" (ibid, § 68, p 79-80)

At begrebet G er lige-talligt med begrebet F betyder, at der er mulighed for førnævnte gensidigt entydige tilordning af de genstande, der falder under de to begreber - altså at der findes en en-entydig relation mellem omfangene af de to begreber.

Et tal er altså en klasse af klasser (omfang af et omfang af et begreb) - nemlig klassen af klasser, der er ligetallige med begrebet, der hører til tallet. Da en klasse (omfang) for Frege er en genstand eller ting, er tal genstande og ikke begreber. Frege har nu defineret - ikke tallene selv - men det almene begreb 'et helt tal' ved hjælp af de logiske begreber 'omfang' og 'lige-tallig'. De enkelte hele tal har han endnu ikke defineret.

For ethvert tal n konstruerer Frege nu et eksempel på en klasse med n medlemmer og siger så, at tallet n er klassen af alle klasser, som har lige så mange medlemmer som den konstruerede klasse. Derved må han se til, at den konstruerede klasse er omfanget af et logisk begreb. Han starter med 0:

"0 er det antal, som tilhører begrebet 'sig selv ulig' (ibid, §74, p 87)

Han tænker sig da, at lighedsbegrebet er et logisk begreb, og at det er et logisk grundlag, at alle ting er lig med sig selv:

"Jeg kunne til definition af 0 have taget ethvert andet begreb, hvorunder intet falder. Men for mig kom det an på at vælge et sådant, hvoraf dette kunne vises rent logisk; og dertil tilbyder sig mest bekvemt 'sig selv ulig', hvor jeg for 'lig' lader den førhen anførte Leibniz'ske fortolkning, som er rent logisk, gælde." (ibid, §74, p 88)

Dernæst definerer han, at

"Der findes et begreb F og en herunder faldende genstand x således, at antallet, der tilhører F er n, og således, at antallet, der tilhører begrebet 'falder under F, men er ikke lig x', er m"

skal betyde

"n følger umiddelbart efter m i den naturlige talrække" (ibid, § 76, p 89)

Nu kan han definere 1:

"1 er det antal, som tilhører begrebet 'lig 0'"

og vise, at 1 er det antal, der følger umiddelbart efter 0. (ibid, §77, p 90) Han kan så vise, at ethvert antal i den naturlige talrække følger efter et antal. (ibid, §79, p 92) Hermed har han konstrueret de naturlige tal.

Hvis det nu er sandt, som Frege - og Russell - mente, at al matematik til syvende og sidst handler om hele tal, og at de hele tal er klasser, så følger, at al matematik i bund og grund handler om egenskaber ved og relationer mellem klasser. Og hvis læren om klasser er en del af logikken, ja så er alle matematiske sandheder logiske sandheder. Men det stod endnu tilbage at bevise. Det blotte faktum, at 2, 3 og 5 kan defineres som klasser, siger ingenting om muligheden for at bevise 2+3=5 'rent logisk'.

Frege var klar over, at hans definition af tallene endnu ikke beviste den logicistiske tese. Han opsumerer sine resultater således:

> "Jeg håber i dette skrift at have sandsynliggjort, at de aritmetiske love er analytiske domme og følgelig a priori. Herefter er aritmetikken kun en udvidet logik, enhver aritmetisk sætning en logisk lov, omend en afledet.
>
> ...
>
> Jeg gør ikke krav på at have mere end sandsynliggjort, de aritmetiske sætningers analytiske natur, idet man altid kan tvivle på, om beviset er ført ud fra rent logiske love, om der ikke et sted ubemærket er indsmuglet en bevisgrund af anden art." (ibid, §§87 og 90, p 99 og 102)

For at kunne gennemføre den anden fase i beviset for den logicistiske tese blev Frege nødt til at arbejde med at systematisere det logiske bevis' regler.

I en vis forstand kan man sige, at Frege tog bolden op fra Leibniz, der som nævnt så forbindelser mellem logik og matematik. Leibniz gjorde sig til talsmand for mekanisk beregning som en i praksis uundværlig hjælp i al deduktiv ræsonneren, og han fremsatte tesen om, at både logisk og matematisk sandhed grunder sig på princippet om modsigelse og derfor i passende forstand skulle kunne reduceres til 'identiske' sætninger.

Frege udvidede den symbolske repræsentation af deduktiv ræsonneren betydeligt. Udvidelsen bestod i at symbolisere ikke bare den notation, der blev brugt i al deduktiv ræsonneren, men også i at formulere eksplicit de tilladte slutningsregler. Det betød, at ethvert trin i en slutning kunne i) repræsenteres af en transformation af et eller flere symbolske udtryk til et andet, og ii) retfærdiggøres med en henvisning til klart formulerede regler.

Freges arbejde med logikken betegnes 'revolutionen i logikken'. Indtil da var der ingen, der havde sat spørgsmålstegn ved den centrale påstand i den aristoteliske logik, at al logik er subjekt-prædikats logik.

Aristoteles havde undersøgt, hvordan slutninger kunne kombineres, så der kom rigtige konklusioner ud af det. Til det formål klassificerede han slutninger i katagorierne: bekræftende (alle mænd er dødelige), benægtende (ingen mænd er dødelige); universelle (alle mænd er dødelige), partikulære (nogle mænd er dødelige) eller individuelle (Sokrates er dødelig). Han konkluderede, at alle slutninger er prædikative, fordi vi, når vi drager slutninger, altid foretager en af følgende to handlinger: i) tilskriver et prædikat til et subjekt ii) fornægter at subjektet har et bestemt prædikat. Sætninger, der ikke er på subjekt-prædikat-form, hævdede han, kunne omskrives til det. Standardmåden at ræsonnere på bestod af tre dele, som hver for sig er en prædikatsslutning: to præmisser og en konklusion. Den slags standarder kaldte han for 'syllogismer', og opstillede regler for, hvorledes præmissernes indbyrdes relation skulle være, for at slutningen var gyldig.

Det ~~systematiseringsarbejde~~ systiseringarbejde, som Frege og efter ham Russell m.fl. udførte, er blevet normgivende for det moderne syn på logikken som system. Et vigtigt træk ved systemet er, at Frege og Russell ville ordne logikkens love efter det euklidiske forbillede i geometrien til et system af grundsætninger (axiomer) og følgeslutninger (teoremer). Frege kaldte udtrykkeligt sin metode 'euklidisk'. Han genskabte på det nærmeste den formelle logik, gav det første fuldstændige axiomsystem for udsagnslogikken og udviklede prædikatslogikken. Bl.a. benyttede han den slutningsregel, der går under navnet modus ponens (givet 'A' og 'A' medfører 'B', så gælder 'B'), som eneste udsagnslogiske slutningsregel. Han behandlede relationer, som der ikke var taget højde for i Aristoteles' logik, viste at konnektiverne 'og' og 'eller' kan udtrykkes ved hjælp af negation og implikation, og indførte eksistens- og alkvantorerne.

Leibniz' anden idé, at matematisk og logisk sandhed er 'identisk', blev hos Frege til det logicistiske program.

1.4 Bertrand Russell's filosofi

Under trykningen af 'Grundgesetze' fik Frege at vide af Russell, at den logik, han benyttede i sine bevisførelser, indeholdt en selvmodsigelse. Det var noget af et chok for Frege, som i sit arbejde med matematikkens fundament ikke anså den logiske tænkning for et problem.

Russell's modsigelse kan konstrueres således:

Vi antager, at man kan tale om klasser som er og klasser som ikke er medlem af sig selv. Det lyder rimeligt; fx er klassen af mennesker ikke et menneske og derfor ikke medlem af sig, mens klassen af ikke-mennesker er et ikke-menneske og derfor medlem af sig selv. Antag videre følgende to forudsætninger: 1) Enhver klasse er enten medlem i sig selv eller er ikke medlem af sig selv.2) Ingen klasse både er og er ikke medlem i sig selv. Den første forudsætning er en anvendelse af princippet om det udesluttede tredje (enten er en sætning S sand eller også er ikke-S sand). Den anden en anvendelse af loven om den udesluttede modsigelse (S og ikke-S er ikke begge sande).

Vi kan danne begreberne 'klasse, som ikke er medlem i sig selv' (B_1) og 'klasse, som er medlem i sig selv' (B_2). B_1's omfang (O_1) er klassen af klasser, som ikke er medlemmer i sig selv. B_2's omfang (O_2) er klassen af klasser, som er medlemmer i sig selv.

I følge vores første forudsætning er hver klasse enten medlem i sig selv eller også er den det ikke. M.a.o. falder hver klasse enten under begrebet B_1 eller under begrebet B_2. I første tilfælde hører klassen til B_1's omfang O_1; i andet til B_2's omfang O_2.

Spørgsmålet er nu: Til hvilket omfang hører O_1.

Antag at O_1 hører til O_1. I så fald er O_1 en klasse, som er medlem i sig selv. Men det betyder at O_1 falder under begrebet B_2 i følge dettes definition. O_1 tilhører altså B_2's omfang O_2. Antagelsen, at O_1 hører til O_1, leder altså til,at O_1 tilhører O_2.

Antag nu, at O_1 tilhører O_2. I så fald er O_1 en klasse, som ikke er medlem i sig selv. Altså falder O_1 i følge definitionen under begrebet B_1 og tilhører dermed dettes omfang O_1.

Hvis vores første forudsætning om, at en klasse enten er eller ikke er medlem i sig selv, er rigtig, så må det også være rigtigt, at klassen O_1 både er medlem i sig selv og ikke er medlem i sig selv. Men det strider mod vores anden forudsætning om, at ingen klasse både er og ikke er medlem i sig selv. I denne modstrid ligger Russells paradox.

Hvis man nu var ligeglad med logik, kunne man affærdige dette som en leg med ord, men troede man på logikken som et system af ufejlbarligt sande sætninger, så var det højst urovækkende, at der kan konstrueres antinomier (modsigelser) indenfor det. Russells paradox er jo konstrueret med Freges logiske byggeklodser, som han brugte i 'Grundlagen der Arithmetik'.

Som nævnt før var Freges 'Grundsetze' ved at gå i trykken, da han hørte om antinomien, og han skrev et tillæg til bogen. Det indledtes med ordene: "En større ulykke kan næppe ramme en videnskabelig forfatter, end at få en af grundene for sit værk raseret, når værket selv er fuldbyrdet" (Wright, p 70; oversat fra svensk). Frege mener selv, at ondets rod skal søges enten i, at loven om det udesluttede tredje ikke har den almene gyldighed, som vi intuitivt tillægger den, eller i sammenhængen mellem begreb og begrebsomfang. Frege foreslog selv det sidste, men dette forslag til udvej blev sat i skyggen af Russells mere opsigtsvækkende ide om, hvordan antinomierne skal løses. Det vender vi straks tilbage til, men først skal vi en tur over en vigtig nyudvikling indenfor matematikken.

Omtrent samtidig med at Frege dannede sin opfattelse af tal som klasser of klasser, lagde den tyske matematiker, Cantor, grunden til en ny gren indenfor matematikken, den såkaldte mængdelære. Cantors lære havde stærke lighedspunkter med Freges arbejder. Cantor havde en grundsætning, der sagde, at for enhver egenskab, kan man danne mængden af objekter, som har denne egenskab. Det er parallelt til Frege, som til et begreb dannede dets omfang. Cantors berømte definition af mægtighed (Gleichmächtigkeit) af mængder, minder stærkt om Freges definition af ligetallighed, bortset fra at Cantor også definerede dette begreb for uendelige mængder. Det var netop omkring uendelighedsbegrebet, at Cantors teori havde epokegørende konsekvenser; konsekvenser, som gjorde,at hans ideer var uglesete i mange år før de vandt udbredelse; det skete i det sidste årti op til dette århundrede.

Det interessante er nu, at Russells paradox også lod sig formulere i Cantors mængdelære. Mængden A af mængder,der ikke er element i sig selv, opfylder betingelserne for Russels paradox, idet A, hvis A er element i sig selv, ikke er element i sig selv, og A, hvis A ikke er element i sig selv, er element i sig selv.

Cantor selv tog ikke dette så tungt. Sålænge man brugte sin sunde fornuft, kom man ikke galt af sted med sine mængder.

For Russell derimod var det alt andet end ligegyldigt. Hvis matematik skulle reduceres til logik, skulle ikke bare aritmetikken, men også den generelle mængdelære, eller i hvert fald teorien for mængder af tal og formodentlig også mængden af mængder af tal osv. kunne reduceres til logik. For Russell stillede problemet sig som en usikkerhed i logikkens fundament, og han var derfor nødsaget til at foretage en revision heraf.

Der var også andre reaktioner, som istedet tog udgangspunkt i mængdelærens grundlag. Det var nemt at se,at det,der gav anledning til antinomierne (for der var flere), var princippet om ubegrænset komprehension, altså Cantors grundforudsætning om, at for enhver egenskab kan dannes mængden af objekter med denne egenskab. Man, von Neuman, Zermelo m.fl. forsøgte at opbygge et axiomsystem for mængdelæren, således at man bevarede de muligheder, som lå i den, men samtidig undgik de 'for store' mængder, som gav anledning til antinomierne.

Russells reaktion i anledning af paradoxerne blev udviklingen af hans såkaldte typeteori. Mens det for Frege var indlysende, at enten faldt en genstand under et begreb eller også gjorde den det ikke, så så Russell en tredje mulighed.

Han sagde, at et begreb har et menings- eller signifikansområde. Falder en genstand indenfor et begrebs meningsområde, er det meningsfuldt at spørge, om genstanden falder under begrebet. I modsat fald er det meningsløst. Fx. er det meningsfuldt at spørge om en blomst er blå, men ikke om den er et primtal. Alle farver hører til begrebet 'blå's meningsområde, alle tal til begrebet 'primtal's meningsområde, selvom alle farver ikke falder under begrebet 'blå' og alle tal ikke under 'primtal'.

Russell sagde nu, at alle genstande i et begrebs meningsområde er af samme logiske type, og at begreber med samme meningsområde er af samme logiske type. Alle farvebegreber er af samme logiske type.

Russells paradox kan nu undgås, fordi det er meningsløst at spørge om en klasse er medlem i sig selv. En klasse er omfanget af et begreb og af en anden logisk type, end de genstande,der falder under begrebet og altså tilhører klassen. Farvebegrebet tilhører ikke begrebet 'blå's meningsområde; klassen af primtal tilhører ikke begrebet'primtal's meningsområde. Han opstillede 'den onde cirkels princip', som skulle sikre, at antinomierne blev undgået: Noget,som indeholder alle genstande i en samling af genstande, kan ikke selv være med i samlingen.

Russells typeteori giver anledning til et hieraki af klasser. Enheder (dvs. 'ting', der ikke er klasser) er af type 0. Klasser af enheder er af type 1. Klasser af klasser af enheder er af type 2. Osv. En klasse af type n må kun have elementer af type n-1.

Omend typeteorien synes sund i sin grund, gav den anledning til en række problemer, som Russell aldrig formåede at løse tilfredsstillende. For matematikkens vedkommende gav det sig udtryk i et behov for axiomer af ikke-logisk karakter. Fx var der brug for et reduktionsaxiom, som tillod reduktion af tal af forskellig type til samme niveau. Videre havde han brug for et uendelighedsaxiom, som fastslog eksistensen af en uendelig mængde. Nødvendigheden af disse axiomer, som dårligt kan siges at være logiske, svækkede afgørende den logicistiske tese.

Frege og Russell har det logicistiske program fælles, men der er også en vigtig forskel mellem dem. Som tidligere omtalt tilskrev Frege begreber objektivitet; begreber var for ham fornuftsobjekter, som havde reel eksistens. Begrebsomfang ligeledes. Tal var altså objekter. Frege var begrebsrealist, og således ikke empirist. Russell derimod var antirealist og hård empirist. Han antager fx. ikke at et bord eksisterer, kun at sanseindtrykkene af det gør det; herudfra kan bordet rekonstrueres. At definere er for Frege at afgrænse et objekt, hvilket implicerer at bevise dets eksistens. For Russell derimod er definitioner blot notationsskift. Når Russell går fra logik til matematik, skaber han ikke ligesom Frege logiske objekter eller andet reelt eksisterende. Russell er nominalist.

Det lykkedes ikke for Frege og Russell at bevise den logicistiske tese, at reducere matematik til logik. Men retrospektivt kan man måske sige, at de skabte en forbindelse mellem to grene af matematikken, nemlig aritmetikken og mængdelæren.

1.5 Hilberts program. Formalisme og metamatematik.

Indtil nu har vi omtalt to forsøg på at genopbygge mængdedelærens grundlag, som i Cantors oprindelige, 'naive' udgave var rystet af antinomierne. Russell og hans tilhængere mente, at vores naivitet bestod i, at vi tog for givet, at enhver grammatisk korrekt indikativ sætning udtrykker noget som enten er eller ikke er tilfældet. Russell mente desuden, at en vis type ondartet cirkel-begrebsdannelse på grund af skødesløshed havde fået lov til at trænge ind i logisk-matematisk tænkning. Ved at begrænse sproget og forbyde de farlige typer af begrebsdannelser kunne de kendte antinomier bringes til at forsvinde. Troen på de resulterende, noget skamferede systemers konsistens var ikke fuldkommen, eftersom visse intuitivt ikke alt for godt funderede indretninger måtte bruges for at genskabe i hvert fald en del af den tabte styrke og manøvremulighed. Zermelo mente, at fejlen lå i at antage, at der til enhver betingelse svarede en vis størrelse, nemlig mængden af objekter, der tilfredsstillede betingelsen. Ved at lægge passende begrænsninger på de axiomer, der styrede dannelsen af mængder, ville han skabe et axiomssystem, som var fri for antinomierne, men stærkt nok til at tillade konstruktionen af tilstrækkelige dele af den klassiske matematik. Troen på disse systemers konsistens hvilede udelukkende på, at de kendte antinomier ikke kunne reproduceres heri.

Både den type-teoretiske og den axiomatiske tilgang til mængdelærens grundlagsproblemer havde således behov for et bevis for, at deres systemer var konsistente. Den klassiske metode at lave sådanne konsistensbeviser på, gik ud på at lave en model af det system, hvis konsistens skulle undersøges, i en teori, hvis konsistens der ikke var tvivl om. Således havde Beltrami i 1868 vist visse ikke-Euklidiske geometriers konsistens ved at konstruere en model for dem i Euklidisk geometri, og Hilbert havde i 1899 lavet en model for Euklidisk geometri indenfor de reelle tal, og derved vist dens konsistens relativt til de relle tals teori.

Men denne metode kunne ikke bruges på de nævnte systemer. Endelige modeller kunne åbenlyst ikke bruges, og ingen begrebsramme, hvori uendelige modeller kunne formuleres, kunne betragtes som sikre i lyset af antinomierne. Derfor var der brug for en anden metode. Hilbert kom med den, vagt i 1904 og med stigende præcision fra 1917: det måtte vises, at de matematiske standard bevis-procedurer er stærke nok til at hele den klassiske matematik - herunder hele Cantors mængdelære - kan afledes af passende axiomer, men ikke så stærke, at antinomierne kommer med. Hilbert var overbevist om, at den klassiske matematik basalt var sund, og heri rokkede antinomierne ham ikke.

Hilbert havde til hensigt at udføre sit program i to trin. I det første skulle hele matematikken - faktisk tænkte han især på aritmetik, analyse og mængdelære - formaliseres, dvs. et formelt system eller formalisme måtte konstrueres, fra hvis axiomer i det mindste den indledende matematik kunne afledes ved hjælp af et nærmere bestemt sæt af slutningsregler. Systemet skulle være formelt i den betydning, at slutningsreglerne virkede på sekvenser af symboler, og der skulle kun tages hensyn til arten og rækkefølgen af symbolerne, ikke fx. til deres 'mening'. Sådanne systemer ville kunne beherskes tilstrækkeligt med et minimum af intuition, nemlig den såkaldte 'globale intuition', som kan afgøre, hvorvidt to symbolforekomster er forekomster af det samme symbol eller af forskellige symboler. Denne slags intuition kræver ingen intellektuelle evner overhovedet og kan bygges ind i en passende konstrueret maskine. Hvorvidt en serie af symbol-sekvenser er et bevis for dens sidste sekvens eller ej, kan i et sådant system kontrolleres uden at bruge andet end sammenligning, en rent mekanisk operation. Der er her tale om en formalisering, som går langt videre end en formel axiomatisering i naturligt sprog, som bygger på en 'forstået' logik og stiller sig tilfreds med at betydningen af teoriens specifikke ekstra-logiske termer ikke indgår i afledningerne, mens der i Hilberts formalisering ses bort fra den tilsigtede fortolkning af alle symboler, de logiske inklusive. Hvis man vil slutte, at 'p er sand' fra 'p og q er sande', kan dette ikke gøres ved implicit eller eksplicit brug af betydningen af 'og', men alene på baggrund af passende axiomer og slutningsregler. I sit arbejde kunne Hilbert selvfølgelig bruge eksisterende formaliseringer, såsom Peanos af aritmetikken (talteorien) og Zermelos af mængdelæren samt axiomatiseringer af logikken hos Frege og Russell/Whitehead.

I andet trin af sit program, havde Hilbert planlagt at vise, at anvendelsen af slutningsreglerne aldrig kunne føre til modsigelse, eller rettere til formel inkonsistens i den betydning, at der fx. ikke kunne eksistere et gyldigt bevis, hvis slutsekvens var '1=2'. Argumentationen for umuligheden af dette metateorem skulle være af en så simpel karakter, at dets sundhed ikke på nogen måde kunne betvivles.

Den metateori, hvori matematikkens bevisprocedurer skulle undersøges, kaldte Hilbert 'metamatematik' eller 'bevisteori', og Hilbert insisterede på, at kun såkaldte 'finitte' argumenter var tilladte i bevisteori. Hilbert specificerede aldrig komplet, hvilke procedurer han anså for finitte, men følgende citat fra en af hans elever kommer tæt på:

"We understand by an intuitionistic (i.e. finitary) argument an argument that fullfils the following conditions: one always deals with a finite and determined number of objects and functions only; these are well defined, their definition allowing the univocal calculation of their values; one never affirms the exixtence of an object without indicating how to construct it; one never deals with the set of all the objects x of an infinite totality; and when one says that an argument (or a theorem) holds for all these x, this means that for every particular x it is possible to repeat the general argument in question which should then be treated as only a prototype of these particular arguments." (Herbrand, cit. fra Fraenkel et al. 1973, p 278)

Hilberts program lod sig ikke gennemføre. Det kunne indenfor metamatematikken bevises, at konsistens af tilpas righoldige matematiske teorier ikke kan bevises. Arbejdet med Hilberts program gav anledning til en række betydningsfulde matematiske udviklinger, men det erkendelsesteoretisk mest interessante er, at det formalistiske program har vist uigennemførligheden af sig selv. Vi vil kort beskrive, hvordan det går til.

1.6 Formalismens begrænsninger

For at have et konkret udgangspunkt at holde os til, vil vi angive en axiomatisering af den elementære talteori, den såkaldte Peano-axiomatisering. Det er en første-ordens teori med lighed, dvs. at den underliggende logik er en førsteordens logik, og den har fire ekstra-logiske symboler: en individuel konstant 0, et singulært operationssymbol (efterfølgerrelationen) S, to binære operationssymboler + og $\cdot$, samt syv axiomer:

1) $Sx \neq 0$
2) $Sx = Sy \Rightarrow x = y$
3) $h(0) \wedge \forall x(h(x) \Rightarrow h(Sx)) \Rightarrow \forall x h(x)$, for alle formler h(x) i sproget. (Dette er induktions-axioms-skemaet.)
4) $x + 0 = x$
5) $x + Sy = S(x+y)$
6) $x \cdot 0 = 0$
7) $x \cdot Sy = x \cdot y + x$

Førsteordenslogik har variabelnavne, funktionssymboler, prædikatssymboler, individuelle konstanter, logiske konnektiver samt kvantorer. Det er den velkendte matematiske logik.

Anden-ordens talteorien har de samme axiomer som førsteordens talteorien, bortset fra axiom 3, som her ser således ud:

3') $\forall p \left(p(0) \wedge \forall x(p(x) \Rightarrow p(Sx)) \Rightarrow \forall x\, p(x)\right)$, hvor p er en prædikatsvariabel.

Anden-ordens talteorien har en anden-ordens logik som underliggende logik. Forskellen på denne og første-ordens logik er, at hvor variablene i første-ordens logik løber over individuelle konstanter, så har anden-ordens logik endnu en type variable, der løber over mængder af individuelle konstanter; det er prædikats-variable. Sagt på en anden måde kan man i første-ordens logik kun kvantorisere over objekter, mens man i anden-ordens logik kan kvantorisere over egenskaber ved objekter.

Dette har den konsekvens, at første-ordens axiomatiseringen af de naturlige tal ikke giver et endeligt axiomssystem; axiom 3 er ikke et enkelt axiom, men et axiomsskema. Anden-ordens axiomatiseringen er derimod endelig; axiom 3' er kun ét axiom. Men hermed er der ikke vundet så meget, fordi nok kan anden-ordens logikken axiomatiseres, dvs. man kan opstille et axiomssystem, som karakteriserer området, men slutningsreglerne kan ikke formaliseres. Første-ordens logikken kan også axiomatiseres, men desuden formaliseres: slutningsreglerne virker på sekvenser af symboler, og der tages kun hensyn til arten og rækkefølgen af symbolerne, ikke fx. til deres tilsigtede mening.

Anden-ordens talteorien kan ikke formaliseres, fordi dens underliggende logik, anden-ordens logikken ikke kan. Årsågen hertil er, at anden-ordens logikken er semantisk ufuldstændig. Dvs. for alle sætninger W og A gælder ikke, at $W \models A \Rightarrow W \vdash A$. $\models$ er den logiske følgerelation: enhver model, der gør W sand, gør også A sand. Anderledes udtrykt: konklusionen kan aldrig være falsk, hvis præmisserne er sande; præmissernes sandhed garanterer konklusionens sandhed. $\vdash$ er beviselighed indenfor systemet. Semantisk ufuldstændighed betyder altså, at sande sætninger ikke nødvendigvis kan bevises. Det modsatte skal altid gælde: beviselige sætninger skal også være sande; ellers er teorien ikke sund.

Første-ordens logikken er semantisk fuldstændig. Logisk følge og beviselighed er identiske. Det viste Gödel i 1930.

De resultater, som på afgørende vis satte begrænsninger for gennemførligheden af det formalistiske program, fremkom fra begyndelsen af 1930'erne. Et af de kendteste og vigtigste er Gödels ufuldstændighedsætning fra 1931. I en populær formulering siger den, at "i ethvert tilstrækkeligt righoldigt system, kan der formuleres sætninger, der indenfor systemet hverken kan bevises eller modbevises medmindre systemet selv er inkonsistent." Sagt mere matematisk siger sætningen, at ethvert logistisk system (dvs. et system formaliseret á la Hilbert), som er tilstrækkeligt righoldigt til at indeholde en formalisering af rekursiv aritmetik, er enten ω-inkonsistent eller indeholder en uafgørlig, men sand, sætning. (ω-konsistens er en lidt stærkere konsistensbetingelse end formel konsistens. En første-ordens teori T er konsistent, hvis den ikke indeholder en sætning S, hvor både S og ikke-S er beviselig i T. T er ω-konsistent, hvis T ikke indeholder en formel h med den fri variabel x, så h(0), h(1), h(2),... og non $(\forall x)h$ er teoremer, dvs. beviselige i T.)

'Teknikken' i Gödels bevis er at konstruere en sætning i N (=de naturlige tals teori, formaliseret som første-ordens talteori) som referer til sig selv. Dette kan lade sig gøre fordi syntaxen kan udtrykkes aritmetisk. Syntaxen er det sprog, der sætter de talteoretiske termer i forhold til hinanden, så der kommer udsagn ud af det; her er det første-ordens logikken med den konnektiver, slutningsregler osv. Da første-ordens logikken kan formaliseres, kan den udtrykkes i de naturlige tals teori, man kan bygge en aritmetisk model af syntaxen. Syntaktisk sandhed bliver dermed ækvivalent med visse tal-teoretiske sandheder. På denne måde kan aritmetikken så at sige bringes til at snakke om sig selv.

Den sætning, som Gödel konstruerede, siger om sig selv, at den ikke er beviselig i N. Kalder vi denne sætning G, siger Gödels ufuldstændighedssætning:

1) Hvis N er konsistent, så er G ikke beviselig i N

2) Hvis N er ω-konsistent, så er ikke-G ikke beviselig i N.

Da de naturlige tals teori er velkendt og erfaringsmæssigt både konsistent og ω-konsistent (jvnf. definitionerne ovenfor) kan vi slutte, at G er en sand sætning i N - G er en sand sætning i den sædvanlige fortolkning af de naturlige tals axiomatisering - som ikke kan afgøres i N.

Dette er en af logikkens erkendelsesteoretisk vigtigste sætninger, idet sandhed indenfor matematik ikke kan identificeres med begrebet 'at være beviselig' indenfor et konsistent og altomfattende system.

Gödel viste også, at man ikke på formalistisk grund kan vise konsistensen af de naturlige tals teori, eller af teorier, hvori denne kan udvikles. Mere præcist: Ingen sætning, som formelt udtrykker konsistensen af et Hilbert-formaliseret system, der indeholder talteorien, er beviselig indenfor dette system, når systemet er konsistent. Man kan godt finde en sådan sætning, men den kan ikke bevises.

Denne sætning slår eksplicit benene væk under Hilberts program, som bestod i at bevise talteoriens formelle konsistens ved hjælp af en del af talteoriens procedurer, nemlig den finitte. Hilbert og hans skole beviste med finitte midler konsistensen af meget udstrakte subsystemer af aritmetikken; det manglende gab bestod i, at disse subsystemer kun indeholdt induktionsprincippet i en afsvækket form, som ikke tillod dets anvendelse til kvantificerede sætninger.

I samme periode blev der vist en række andre sætninger af samme karakter, hvoraf vi blot vil nævne Church-Rossers uafgørlighedssætning, der siger, at N er essentielt afgørlig, dvs. der findes ingen effektiv procedure til at bestemme, hvorvidt en vilkårlig sætning i N eller enhver konsistent udvidelse af N er sand i N (eller i udvidelsen).

Alt dette får også betydning for mængdelæren, men først endnu en sætning. Löwenheim-Skolems sætning kan udtrykkes således: Hvis et første-ordens axiomssystem har en uendelig model, så har det modeller af enhver kardinalitet større eller lig med A_o' (læses aleph$_o$) - de naturlige tals kardinalitet. (Det er en forudsætning, at det har tælleligt mange symboler. den gælder for hele dette afsnit, men udgør ikke nogen restriktion.)

Det betyder, at en axiomatisering af mængdelæren som fx. Zermelo-Fraenkel (ZF) ikke er meget værd som grundlagsdisciplin. ZF har en model som kan formuleres på basis af de naturlige tal, og har da ifølge Löwenheim-Skolems sætning modeller af enhver højere kardinalitet. Cantor viste, at kardinaliteten af alle delmængder af en mængde A er skarpt større end kardinaliteten af A ($\bar{\bar{A}} < \overline{\overline{P(\bar{\bar{A}})}} < \overline{\overline{P(\overline{\overline{P(\bar{\bar{A}})}})}}$ ...), dvs. han skabte et hieraki af transfinitte kardinaltal (A'_0, A'_1, A'_2 ...). ZF kan ikke beskrive forskellen mellem kardinaliteterne og beskriver således kun 'kombinatoriske' træk mellem transfinitte mængder. Ved at forsøge at indfange Cantors mængdehieraki i en formalisering forsvinder det mellem fingrene på os.

Foranstående vil vi afsluttende opsumere i følgende skema, som skulle hjælpe til at holde styr på de mange begreber.

	sund	semantisk fuldstændig	syntaktisk fuldstændig	afgørlig	katagorisk
0'te ordens logik	+	+	(-)	+	
1. ordens logik	+	+	-	-	
1. ordens aritmetik	+	+	-	-	-
1. ordens aritmetik for + kun	+	+	+	+	
2. ordens logik	+	-	-	-	
2. ordens aritmetik	+	-	-	-	+
Zermelo-Fraenkel	+	+	-	-	-

Forklaringer:

0'te ordens logik indeholder kun udsagnsvariable og ikke kvantorer.

1. ordens aritmetik for + kun - er Peanoaritmetikken, hvor multiplikationsaxiomerne er pillet ud.

Zermelo-Fraenkel: En første-ordens axiomatisering af mængdelæren

Sund betyder, at beviselige sætninger er sande.

Semantisk fuldstændig betyder at logisk følge medfører beviselighed.

Syntaktisk fuldstændig betyder, at for alle sætninger A gælder, at enten kan A bevises eller også kan ikke-A.

Afgørlig: En teori er afgørlig, hvis der findes en algoritme som afgør sætningers falskhed eller sandhed.

Katagorisk betyder, at alle modeller af teorien er isomorfe, dvs. de er notationelle varianter af hinanden.

Gödels første ufuldstændighedssætning har inspireret den tyske forfatter og marxist Enzenberger til følgende digt, som vi ikke skal undlade at aftrykke her, fordi det er så sjældent, at der drages politiske konsekvenser af matematisk grundlagsforskning.

Hans Magnus Enzenberger: "Hommage á Gödel"

Münchhausens teorem, hest, sump og hårtop
er besnærende, men glem ikke:
Münchhausen var en løgnhals.

Gödels teorem virker ved første øjekast
noget uanseligt, men betænk:
Gödel har ret.

"I ethvert tilstrækkeligt righoldigt system,
kan der formuleres sætninger,
der indenfor systemet
hvērken kan bevises eller modbevises
medmindre systemet selv
er inkonsistent."

Du kan beskrive dit eget sprog
i dit eget sprog:
men ikke helt.
Du kan udforske din egen hjerne
med din egen hjerne:
men ikke helt.
O.s.v.

For at retfærdiggøre sig
må ethvert tænkeligt system
trancendere, d.v.s. ødelægge
sig selv.

"Tilstrækkeligt righoldigt" eller ej:
modsigelsesfrihed
er et mangelfænomen
eller en modsigelse.

(Vished = inkonsistens.)

Enhver tænkelig rytter,
altså også Münchhausen,
altså også du er et subsystem
i en tilstrækkelig righoldig sump.

Og et subsystem til dette subsystem
er ens egen hårtop,
dette hejseværk
for reformister og løgnhalse.

I et ethvert tilstrækkeligt righoldigt system
altså også i denne sump her,
kan der formuleres sætninger,
der indenfor systemet
hverken kan bevises eller modbevises.

Tag disse sætninger i din hånd og træk til!

(Digtet blev første gang offentliggjort på dansk i Vindrosen 3/1972)

KAPITEL 2

ANDRE VIDENSKABSTEORETISKE OPFATTELSER AF MATEMATIK. FORHOLDET MELLEM MATEMATIK OG LOGIK.

I dette kapitel vil vi fortælle om to matematikopfattelser, som hver på sin måde er i kritisk opposition til de opfattelser, den logicistiske og den formalistiske, som vi beskæftigede os med i første kapitel. Vi tilstræber ikke at give fuldstændige beskrivelser, men nok så fyldige, at man skulle kunne danne sig et indtryk af dem. Hovedvægten ligger på punkter, hvor de er i modsætning til de foregående opfattelser.

Begrundelsen for at skrive dette kapitel har været, at det har været nyt for os at opdage, at der fandtes andre opfattelser end den, vi er blevet doceret i vores skole- og studietid, at der overhovedet var tale om en opfattelse; det er nemlig ikke fremgået af undervisningen. Hvis vi til logicismen regner axiomatiseringen af mængdelæren, er det en sådan matematikopfattelse vi uudtalt er blevet præsenteret for, og som de fleste skoleelever og universitetsstuderende uvidende undervises i idag. Kapitlets hensigt er således i højere grad et forsøg på at sætte denne i relief, end at forholde os kritisk til de opfattelser - den intuitionistiske og Lakatos'ske - vi præsenterer.

Kap. 2.1 Det intuitionistiske matematik-begreb.

Axiomatiseringen af mængdelæren påtager sig at undgå de antinomier, der fremkommer i den klassiske eller naive mængdeteori, hvor Cantors princip garanterer, at hvis vi kan benævne en egenskab ved objekter, så eksisterer mængden af alle objekter, der har denne egenskab. Antinomierne undgås ved at lægge begrænsninger på mængdebegrebet eller den matematiske brug heraf i et sådant omfang, at målet nås - paradoxerne kan ikke konstrueres - men uden at teoriens struktur grundlæggende ændres. Logicismen opfatter antinomierne som et faresignal, der ikke blot drejer sig om mængdeteorien, men viser, at der er noget i de matematiske metoder i almindelighed, der er i uorden. Logicisterne tilskriver logikken og dens brug i matematik defekten snarere end matematikken selv, og foreslår en gennemgribende reform af logikken, der, som en af dens tilfældige konsekvenser, indbefatter eliminationen af antinomierne.

Intuitionismen er langt mere radikal i sin ansats og i sine konsekvenser. Den hævder, at den traditionelle matematik har misfortolket og forkludret begrebet om uendelighed, hvilket er en alvorlig sag, eftersom uendelighed er matematiks livskilde. Hånd i hånd med kritikken af den traditionelle behandling af uendelighed går gennemgribende revisioner af begreber som eksistens, bevis og matematisk objekt. Intuitionismen argumenterer for, at analyse og geometri, som de har udviklet sig siden det 17. og især det 19. århundrede, fuldstændigt har ignoreret særlige træk ved uendelighed og deres konsekvenser for matematik. De såkaldt strenge metoder, som indførtes i de reelle tals teori og differential og integralregning gennem det 19.århundrede fra Cauchy til Weierstrass og Cantor, har ikke indfriet det ønskede mål, men i stedet udviklet den fejlagtige tendens til at behandle uendelighed med metoder skabt for endelige områder til et kunstfærdigt system.

For intuitionisten er fremkomsten af antinomier omkring århundredeskiftet et lidt tilfældigt, sekundært tegn på skrøbeligheden i selve matematikkens fundament, snarer end blot i logikkens og mængdelærens. Tilsynekomsten af modsigelser i mængdeteorien skyldes, at ingen anden gren af matematikken har gjort en så udstrakt og ubegrænset brug af uendelighed. Ikke desto mindre er modsigelserne forårsaget af den traditionelle omgang med uendelighed i almindelighed og ikke anvendelsen i den grad, det sker i mængdeteorien. Derfor kan antinomierne reelt kun imødegås med en reform af matematikken i sin helhed.

Intuitionismen er især knyttet til Brouwers navn - og det er hans udgave det følgende især knytte an til. Der findes en række 'halvintuitionister' ved siden af Brouwer. Det er ikke en særlig heterogen gruppe, ej heller særlig stor, men tæller bemærkelsesværdig mange prominente navne: Kronecker, Pointcaré, Borel, Lebesque, Brouwer, Weyl og Skolem. Overbegrebet for gruppen er 'konstruktivisme'. Kroenecker var den første, der fremsatte intuitionistiske ideer i moderne matematik; det var i 70'erne og 80'erne i forrige århundrede. Dog først med Zermelos bevis af velordningsteoremet i 1904 begyndte den intuitionistiske opposition at danne sig. Zermelo gjorde her opmærksom på en ofte, men implicit, brugt antagelse, som han måtte gøre til et axiom, det såkaldte udvalgsaxiom, fordi det ikke fulgte af andre matematiske eller logiske postulater.

Med sin disputats i 1907 markerede Brower det første skridt i en tydeligt afgrænset intuitionistisk retning; og i ti-året efter 1918 "...Brouwer unfolded his banner to an impetuous attack on traditional mathematics and to a thoroughly new foundation of analysis and set theory, which for some time deeply alarmed the mathematic world and provoked no less vehement reactions, occasionally producing something like Homeric talks; nevertheless quite a few of his opponents proved themselves considerably influenced by the new ideas." (Dalen 1973, p 217) Brouwers intuitionisme adskiller sig fra andre intuitionistiske retninger hovedsageligt i forestillingen om matematikkens natur og matematisk eksistens, herunder holdningen til relationen mellem matematik på den ene side og logik og sprog på den anden, samt i teorien om kontinuum'et.

Brouwers filosofi er naiv og ufuldstændig, men har haft betydning for hans matematik. Vi vil derfor gengive følgende omrids af hans synspunkter:

> "The mind of an individual experiences sensations. The individual identifies certain sensations and starts to recognize iterative sequences of sensations with the property that if one of these sensations occur the others are expected to occur also, in a specific order. Such sequences are called causal sequences. The individual will try to use his knowledge of causal sequences to obtain certain desired sensations by producing a sensation that precedes the desired sensation in a previously experienced, causal sequence. This shift from end to means is called "cunning act" by Brouwer. Certain complexes of sensations are independent of the order in time, and their dependence on the individual is small or nil. These complexes are calles things, e.g. external objects, human beings. The whole of things is called the external world of the individual. The relation of the individual with other individuals (which are again sensation complexes, i.e. things) is described by identification of causal sequences, observed by the individual, of itself and of other individuals. This identification justifies the term "acts of other individuals". It is observed by the individual that causal acts (i.e. cunning acts based on knowledge of causal sequences) of itself and other individuals are highly dependent. Hence the need for cooperative causal acts arises. This is where scientific thinking, as an economical way to deal with large groups of these causal acts, is introduced. Scientific thinking as such is based on mathematics. The genesis of mathematics takes place at the creation of two-ities. Brouwer construes the two-ity from a move of time, which is a concept defined with respect to the individual. Namely: a move of time takes place when one sensation gives way to another. Both sensations are retained in their proper order and constitute a two-ity. The individual abstracts all quality of this two-ity and uses it as the basic ingredient for iterative processes. These iterative procedures can create predeterminately or more or less freely infinite proceeding sequences of mathematical entities previously produced. (Dalen 1973, p 226)

Matematik fødes således af den fundamentale opsplitning af livets øjeblikke i et 'før' og et 'efter'. Den matematiske konstruktion er en primitiv handling, der består i at rippe denne opslitning for følelsesmæssigt indhold, indtil den blotte anskuelse af to-enighed (bi-unity) er tilbage. Følgelig består matematik i sin helhed af før-sproglige, mentale processer, der kan opbygges som ubegrænsede følger af trin, der gentager sådanne primitive matematiske handlinger i det uendelige.

Intuitionismens fundamentale antagelse, som deles af næsten alle dens varinater, er, at matematisk eksistens er sammenfaldende med konstruerbarhed. Mange klassiske matematiske procedurer har det træk til fælles, at visse matematiske objekter (tal, korrespondencer, funktioner, mængder osv.) vises at eksistere - ikke på grund af at være afledet af simplere objekter ved trinvis konstruktion - men ved hjælp af en argumentation, som appellerer til logisk nødvendighed. For det meste gøres dette ved at opstille et alternativ mellem muligheder, som gensidigt udelukker hinanden, i lyset af det udesluttendes tredie princip, eller ved at vise, at ikke-eksistensen af objektet med den ønskede egennskab ville medføre en modstrid, mens modstridens art ikke angiver en metode til konstruktion af et passende objekt.

Intuitionismen benægter, at sådanne procedurer har nogen bindende kraft og accepterer ikke sådanne objekters eksistens, sålænge de ikke er sikret konstruktivt. Ikke konstruktive eksistensudsagn er meningsløse sætninger, der intet har med matematik at gøre. Brouwer har sammenlignet situationen med den, man ville stå i ved at få fat i et dokument, hvorpå der stod, at der var skjult en skat et eller andet (uangivet) sted. - Så kan man selvfølgelig skændes om, hvad konstruerbarhed er, eller undersøge hvilke dele af matematikken, der kan nås med denne eller hin konstruktionsmetode. Brouwer imødegik heftigt sådanne synspunkter og fastholdt, at der er et absolut begreb om konstruerbarhed, som afgør, hvad der er matematik, og hvad, der er psudovidenskab, men at enhver endelig liste over konstruktive matematiske principper principielt er ukomplet.

Opfattelsen af matematik som en mental, før- eller ikkesproglig aktivitet får afgørende betydning for relationen mellem matematik og sprog. Den sproglige kommunikation af en matematisk påstand er en meddelelse om, at en matematisk konstruktion er tilendebragt, og beskrivelsen af denne må ikke forveksles med den mentale oplevelse. Det matematiske sprog er vagt og til fals for misforståelse. Det gælder også symbolsk sprog, eftersom matematiske og logiske symbolers tolkning er afhængig af dagligsproget. Den matematiske tanke, som i sig selv er streng og ensartet, bliver genstand for uklarhed og fejl, når den overføres fra person til person ved hjælp af sprog eller skrift. Det ville derfor være en fundamental fejltagelse at analysere matematisk sprog i stedet for matematisk tænkning. Her som andre steder er Brouwer i kras modsætning til logicismen og formalismen, men også til betydelige filosoffer f.ex. L. Wittgenstein, som hævder, at abstrakt tænkning er afhængig af sproget.

Det intuitionistiske begreb om sproget betyder, at problemet med antinomierne forsvinder, idet antinomierne betragtes som blotte kombinationer af ord tømt for mening og uden konstruktivt indhold.

Intuitionismens matematikopfattelse får også konsekvenser for forståelsen af logik. Logik er for intuitionisten en post festum optegnelse og formulering af de ræsonnementsprincipper, der har været anvendt i den matematiske konstruktionsaktivitet, og er som sådanne af empirisk karakter.
Intuitionostisk logik benægter gyldigheden af det udesluttedes tredie princip, altså reglen om, at enten er en sætning S sand, eller også er benægtelsen af S sand. Videre skal al- og eksistenskvantorerne forstår konstuktivt; et udsagn om, at alle elementerne i en mængde har en given egenskab, er kun sandt, hvis det ledsages af en konstruktionsprocedure, der garanterer egenskabens eksistens for ethvert element.

Formelt er intuitionistisk logik et subsystem af klassisk logik, og indskrænkningerne i forhold hertil er alle klare konsekvenser af kritikken af den klassiske omgang med uendelighed og kravet om konstruerbarhed. Det interessante er imidlertid, at klassisk logik og intuitionistisk logik er lige stærke m.h.t. konsistens, idet Gödel i 30'erne viste,at klassisk logik kan indlejres i intuitionistisk logik. Heraf drager intuitionisterne den slutning, at logik er et overfladefænomen i forhold til den matematiske aktivitet. Brouwer drager da også den klare konklusion, at logik ikke går forud for matematik, men at matematik tværtimod går forud for logik.

Intuitionismen forkaster både den klassiske, naive mængdelære og den axiomatiske. Cantors princip om, at mængden af objekter med en given egenskab eksisterer, er klart ikke konstruktivt, og de axiomatiske udgaver er ikke bedre i denne henseende. Vi skal ikke her diskutere den intuitionistiske mængdelære, men blot nævne et par vigtige begreber: 'choice sequence', 'spread' og'species'.

Problemet er begrebet om kontinuum. Oprindeligt anså Brouwer det for intuitivt givet ligesom de naturlige tal, men siden ændrede han mening. I tråd med sin konstruktivistiske holdning opfattede han et enkelt reelt (irrationalt eller transcendentalt) tal som den lov, der definerer det, mens det klassiske kontinuum ikke kan nås ved aritmetiske operationer. "Nevertheless, he maintains that a veritable continuum which is not denumerable can be obtained as a medium of free development; that is to say, besides the points which exist (are ready) on account of their definition by laws, such as e,Pi ,etc. other points of the continuum are not ready but develop as so-called choice sequences. As it has been said, the choice sequences "free the infinite from the concept of law." (Dalen, 1973, p 255)

En choice sequence kan repræsenteres ved par (a_o,R_o), (a_1,R_1), (a_2,R_2),... hvor R_i'erne er betingelser på følger af naturlige tal, a_i'erne; betingelserne kan snævre ind, dvs. hvis R_i holder for en talfølge a, gør R_{i+1} det også. Disse choice sequences kan ikke opfattes som færdige, afsluttede objekter; til ethevert tidspunkt kendes kun et begyndelsessegment.

En spread-lov er en effektiv procedure S, som opererer på en endelig sekvens af naturlige tal a; S siges at acceptere a hvis Sa=1, ellers gælder Sa=0. S er underlagt følgende betingelser:

(i) S accepterer mindst en sekvens af længde 1.

(ii) Hvis S(a+(k))=1, så er S(a)=1 (a+(k) betyder talfølgen a forlænget med tallet k)

(iii) Hvis Sa=1 så findes der mindst et k, således at S(a+(k))=1.

"In plain words a spread-law determines a collection of finite sequences with at least one member, closed under predecessor and with at least one successor for each member. One can conceive this collection as a tree. The infinite sequences each initial segment of which is accepted by S constitute a spread." (Dalen, 1973, p 257)

Spread-begrebet er intuitionismens konstruktive mængdebegreb; selvom en spread er uendelig og ufuldendelig, har den den vigtige karakteristikum at være en trin-for-trin tilnærmelse. På grundlag af spread-begrebet er det muligt at konstruere en intuitionistisk udgave af kontinuerte mængder.

Brouwer introducerede et andet begreb: species. En species er (omfanget af) en egenskab hos tidligere definerede matematiske objekter. Man bemærker ligheden med komprehensionsprincippet - forskellig er igen konstruktiviteten. Species-begrebet afgrænser allerede konstruerede matematiske objekter, men genererer ikke nye, således som man kan komme ud for med det klassiske komprehensionsprincip.

Det er karakteristisk for intuituinistisk matematik, at mange klassiske begreber spaltes op i flere intuitionistiske delbegreber. Spread og species er et eksempel på en sådan opspaltning, her af det klassiske mængdebegreb.

Kap. 2.2 Lakatos' matematikfilosofi.

Imre Lakatos drager i sin bog "Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery" i felten mod en skole indenfor matematisk filosofi, som han kalder den 'formalistiske'. Denne skole tenderer mod at identificere matematik med dens formale axiomatiske abstraktion og matematikkens filosofi med metamatematik. Klarest finder han denne formalistiske skoles position udtrykt hos Carnap med dennes krav om, at a) filosofi skal udskiftes med videnskabslogik ('logic of science') b) videnskabslogik er intet andet end det videnskabelige sprogs logiske syntaks og c) metamatematik er det matematiske sprogs syntaks. (Lakatos 1976, p 1) Metamatematik er som beskrevet i kap. 1.5 i sin kerne en abstraktion af matematik, hvorved matematiske teorier udskiftes med formelle systemer, beviser med visse sekvenser af velformede formler, definitioner med 'forkortelsesapparater' som er typografisk bekvemmelige, men teoretisk undværlige.

Metamatematikken blev udformet af Hilbert med henblik på at angribe visse problemer indenfor den matematiske metodologi, men andre problemer falder udenfor rækkevidden af de metamatematiske abstraktioner, heriblandt alle problemer hørende til uformel dvs. : ikke formaliseret matematik og dens vækst og alle problemer knyttet til den matematiske-problemløsnings situationsbestemte ('situational') logik. For Lakatos at se kobler formalismen matematikkens historie fra dens filosofi, fordi formalismens begreb om matematik ikke giver plads for en egentlig matematik-historie. "Any formalist would basically agree with Russell's 'romantically' put but seriously meant remark, according to which Boole's Laws of Thought (1854) was 'the first book ever written on mathematics'. Formalism denies the status of mathematics to most of what has been commenly understood to be mathematics, and can say nothing about its growht. None of the 'creative' periods and hardly any of the 'critical' periods of mathematical theories would be admitted into the formalist heaven, where mathematical theories dwell like the seraphim, purged of all the impurities of earthly uncertainty." (Lakatos 1976, p 2) Uden filosofiens vejledning bliver matematikkens historie blind, mens matematikkens filosofi bliver tom ved at vende ryggen til de højst interessante problemer i matematikkens historie. Lakatos ser formalismen som et af den logiske positivismes bolværker, og eftersom meningsfulde sætninger for den logiske positivisme enten er tautologiske eller empiriske og eftersom uformel matematik, som for Lakatos i al væsentlighed er matematikken, hverken er tautologisk eller empirisk og derfor må være meningsløs for den logiske positivisme, er dennes doktriner ødelæggende for matematikkens historie og filosofi.

Lakatos sætter altså ud for at redde historien og filosofien fra den logiske positivisme og dens formalistiske tjeners ødelæggende favntag. Han hævder, at "an investigation of informal mathematics will yeild a rich situational logic for working mathematicians, but which cannot be recognized and still less, stimulated, by the formalist philosophy." (Lakatos 1976, p 4) Det mekaniske og irrationelle er hans karakteristikker af de typer opdagelser, man kan gøre i formalismen: beslutningsprocedurerne er 'mekaniserede' (man kan mekanisk afgøre, om et givet bevis nu også er et bevis) og i løsningen af problemer vejleder kun 'den udiciplinerede indsigts og det gode helds 'metode''. Hensigten med sin bog beskriver han således: "Its modest aim is to elaborate the point that informal, quasi-empical, mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through the incessant improvement and guesses by speculation and criticism, by the logic of proofs of refutations." (Lakatos 1976, p 5)

Dette kan stå som en kort programmatisk formulering, som rummer den centrale brod mod både den Frege-Russell'ske logicisme - matematik er quasi-empirisk - og den Hilbert'ske formalisme - det væsentlige ved matematik er vækstprocessens karakteristika, det Lakatos kalder 'the logic and proofs and refutation'.

Lakatos forsøger at udvikle en forskningsmetodologi for matematik; deraf undertitlen på hans bog: 'The logic of mathematical discovery'. I dette projekt er han stærkt inspireret af K.Popper, som har søgt at udvikle en generel forskningsmetodologi, bl.a. i sin bog 'The logic of scientific discovery'. Denne titel antyder sammenholdt med undertitlen på Lakatos bog, at forskningsmetodologien for matematikken bør ses som eksempel på anvendelsen af Poppers generelle forskningsmetodologi på et bestemt område. Popper udviklede sin metodologi i en kritik af den klassiske empirisme, og Lakatos kritiserer et andet hovedpunkt i den klassiske empirisme, nemlig forestillingen om, at de formelle videnskaber som logik og matematik er analytisk sande, og den deraf afledte metodologi for disse videnskaber, nemlig deduktivismen. Tilsammen skulle Popper og Lakatos udgøre et alternativ til den såkaldte positivistiske position indenfor videnskabsfilosofien. Denne er et sammenfattende udtryk for forestillingen om 1) at der er et skarpt skel mellem analytiske og syntetiske domme, dvs. mellem logik og matematik på den ene side og alle erfaringvidenskaberne på den anden, 2) at alle generelle teoretiske udsagn kan reduceres til singulære udsagn, f.x. udsagn om sanseindtryk, altså alle udsagn i erfaringsvidenskaberne kan reduceres til udsagn vedrørende observationer og sammenhængende hermed 3) at der findes et sikkert og urørligt fundament i erkendelsen, hvorom der ikke kan tvivles.

På grund af dette slægtsskab Popper og Lakatos imellem vil vi først karakterisere Poppers positioner.

Popper vender sig mod forestillingen om, at generelle teoretiske udsagn kan reduceres til singulære iagttagelsesudsagn, ganske enkelt ved at sige, at teoretiske udsagn er generelle udsagn, der gælder for alle objekter af en given slags til alle tider, og da mennesket er et endeligt væsen, vil vi kun have adgang til en endelig mængde af singulære iagttagelsesudsagn om en given klasse af objekter. Følgelig kan det ikke lade sig gøre at reducere generelle teoretiske udsagn til observationsudsagn. Popper konkluderer derfor, idet videnskab forudsættes at bestå i strengt universelle domme, at dette forsøg fra de klassiske empiristers side på at begrunde al videnskab i erfaringen - det kaldes også verifikationisme - er forgæves.

Empirister er imidlertid ikke sådan at slå af pinden. Lad være , at generelle påstande ikke kan vises at være sande, men måske kan de vises at være falske. Der består en asymmetri mellem på den ene side at vise, at en generel påstand er sand, og på den anden side at vise, at den er falsk; thi det sidste kræver blot ét modeksempel. Påstande, som endnu ikke er blevet falsificeret af et modeksempel, kan betragtes som 'måske sande'. Videnskaben består for den moderne empirist af en række gæt, som hidtil ikke har vist sig at være falske. Al menneskelig viden er derfor fejlbarlig. Disse holdninger kaldes falsifikationisme eller fallibilisme.

Omend Popper overtager disse holdninger fra den moderne empirisme, så kritiserer han dog også denne opfattelse af erkendelsen for stadig at rumme forestillingen om, at den menneskelige erkendelse kan reduceres til singulære iagttagelsesudsagn, der er ubetvivlelige, fordi de refererer til umiddelbare observationer. Denne gang er det oplevelsen af modeksempler, der antages at være ubetvivleligt sikre. Poppers kritik retter sig mod et dunkelt punkt i alle psykologiske opfattelser af enkendelsens fundament, både verifikationistiske og falsifikationistiske, nemlig overgangen fra erkendelsens sproglige udtryk til dens ikke-sproglige fundament i sanseerfaringen. Poppers argument er, at al begrundelse angår en relation mellem udsagn, et udsagn kan begrunde et andet udsagn, men begrundelse kan aldrig være en relation mellem noget sprogligt og noget ikke-sprogligt. Al erfaring er teoriladet.

Poppers kritik rækker videre end til den klassiske og moderne empirismes tro på sanseerfaringen som erkendelsens fundament. Han anfægter troen på, at al erkendelse er <u>begrundet</u> viden. Reduktionisme og fundamentalisme som fx. hos empirismen giver tilsammen begrebet om en justifikationistisk erkendelsesteori; begge indgående komponenter er for

Popper forkerte - og heri følger Lakatos ham. Enhver justifikationisme, altså opfattelse af,at erkendelsen hviler på begrebet om bevis, er således utroværdig. Hermed er der sat spørgsmålstegn ved hele ideen om at give beviser, idet disse enten er vilkårlige stoppesteder i begrundelseskæden - dogmatisk fastsatte fornuftsprincipper, der tilsyneladende ikke kan drages i tvivl (jvnf. Frege, der stopper ved logikken) eller overhovedet ikke virkelige beviser, fordi de hviler på en uholdbar forbindelse mellem en sproglig påstand og en ikke-sproglig sanseoplevelse. Såvidt Popper.

Lakatos afprøver Poppers centrale kritikker af empirismens grundforestillinger på forstillingerne om matematik. Vi vil derfor nu se på Lakatos opfattelse af begrundelsesproblemet indenfor matematik og især hans syn på bevisets rolle.

Lakatos' 'Proofs and Refutations' er en historisk undersøgelse over Eulers polyedersætning, men har den usædvanlige form af en dialog. Dialogformen er valgt, fordi den 'should reflect the dialectic of the story; it is meant to contain a sort of <u>rationally reconstructed or 'distilled' history</u>'. (Lakatos 1976, p 5) Samtidig giver den Lakatos lejlighed til at spille forskellige videnskabs- og erkendelsesteoretiske positioner ud mod hinanden.

Første kapitel - og matematikken - starter med et problem og et gæt:

> The dialogue takes place in an imaginary classroom. The class gets interested in a PROBLEM: is there a relation between the number of vertices V, the number of edges E and the number of faces F of polyhedra - particularly of <u>regular polyhedra</u> - analogous to the trivial relation between the number of vertices and edges of <u>polygons</u>, namely, that there are as many edges as vertices: V = E ? This latter relation enables us to classify <u>polygons</u> according to the number of edges (or vertices): triangels, quadrangels, pentagons, etc. An analogous relation would help to classify <u>polyhedra</u>.
>
> After much trial and error they notice that for all regular polyhedra V - E + F = 2. (Eulers polyedersætning, 1758; f.a.) Somebody <u>guesses</u> that this may apply for any polyhedron whatsoever. Others try to falsify this <u>conjecture</u>, try to test it in many different ways - it holds good. The results corroborate (bestyrker; f.a.) the conjecture and suggest that it could be <u>proved</u>. It is at this point - after the stages <u>problem</u> and <u>conjecture</u> - that we enter the classroom. (Lakatos 1976, p 6-7)

Lærere og elever forsøger nu at bevise det naive gæt med et naivt bevis, hvorved gættet opløses i en række delgæt, også kaldet lemmaer. Beviset kritiseres ved at finde modeksempler til lemmaerne, som ikke er modeksempler til hovedgættet - såkaldt lokale modeksempler - udvikle nye lemmaer i stedet for de gendrevne osv. En i princippet uendelig kæde af lemmaer udvikles i forsøget på at bevise gættet. Det kaldes en uendelig regres.

Eleverne finder også på modeksempler til selve hovedgættet og diskuterer, om det medfører, at de må forkaste gættet overhovedet og begynde forfra, forkaste modeksemplet som et 'patologisk' tilfælde, et misfoster, ved at spærre for det med en definition - eller forsøge at forbedre gættet ved at undersøge dets gyldighedsområde gennem en omhyggelig bevisanalyse. Ved at indføje lemmaer fås det bevisgenererende teorem.

"The <u>real</u> aim of a 'problem to prove' should be to improve the original, '<u>naive</u>' <u>conjecture</u> into a genuine '<u>theorem</u>' ... Proofs improve when the proof-idea discovers unexpected aspects of the naive conjecture which then appear in the theorem." (Lakatos 1976, p 41-42)

Imidlertid truer også her en uendelig regres, fordi der ikke er tale om, at bevisanalysen genererer et perfekt teorem, men blot et forbedret teorem. Man kan finde skjulte lemmaer med modeksempler, som er globale, men ikke lokale.

I alle tilfælde af modeksempler kan man forsøge at finde dybere teoremer ved deduktiv gætning, hvortil eksemplerne ikke længere er modeksempler, og derved forøge teoremets indhold. Også her optræder regressen, fordi begyndelsesstedet for det deduktive gæt ikke kan begrundes.

Lakatos sammenfatter den forskningsmetodologi, 'the logic of discovery', der er indeholdt i det ovenstående i følgende fem heuristiske regler:

1) Hvis du har et gæt, så prøv at bevise og at gendrive det. Undersøg beviset omhyggeligt for at lave en liste af ikke-trivielle lemmaer (bevis-analyse); find modeksempler til både gættet og lemmaerne.

2) Hvis du har et globalt modeksempel, så kassér dit gæt, tilføj til bevisanalysen et passende lemma, som bliver gendrevet af modeksemplet, og erstat det kasserede gæt med et forbedret, som medtager lemmaet som betingelse. Tillad ikke, at en gendrivelse forkastes som misfoster. Prøv at gøre alle 'skjulte lemmaer' eksplicitte.
3) Hvis du har et lokalt modeksempel, så prøv at se om det ikke samtidigt er globalt. Hvis det er tilfældet kan du nemt anvende regel 2.
4) Hvis du har et modeksempel som er lokalt men ikke globalt, så prøv at forbedre din bevis-analyse ved at erstatte det gendrevne lemma med et ufalsificeret.
5) Hvis du har modeksempler af en hvilkensomhelst type, så prøv, ved deduktiv gætning, at finde et dybere teorem, hvortil de ikke længere er modeksempler.
(Lakatos 1976, p 50,58,76)

Beviser er for Lakatos fejlbarlige. Forsøg på at bevise gæt opløser sig i en række af lemmaer eller stadig dybere teoremer, rækker som ikke ender noget sted med fast grund under fødderne. Lakatos opgiver altså den justifikationistiske begrundelseside også for matematikkens vedkommende, og er klar over implikationerne, nemlig for det første, at man må opgive ideen om, at al matematik kan reduceres til ubetvivleligt sande trivialiteter, at der er udsagn, hvorom vores sandhedsintuition umuligt kan tage fejl. Og for det andet, at man må opgive ideen om, at vores deduktive, ræsonnerende intuition er ufejlbarlig. (Udgiverne mener ikke, at Lakatos ville have opretholdt det andet punkt, dertil var hans agtelse for den formelle deduktive logik blevet for stor.) (Lakatos 1976, p 138, også note 4) Men Lakatos vil ikke undvære 'beviser', thi de er uundværlige i forklaringen af teoremet. I forsøget på at 'bevise' et teorem, fremkaldes dets dybere mening og indhold, og der genereres nye matematiske begreber. Kun ved at opgive ideen om ufejlbarlighed, kan vejen åbnes for "the free development of the method of proofs and refutations and its application to the critical appraisal of deductive argument and to the problem of dealing with counterexamples."

Skal vi kort sammenfatte Lakatos' synspunkter, kan vi sige, at han mener, at den matematiske opdagelse besidder en rationalitet på linie med de såkaldte empiriske videnskaber. Der findes en 'logic of discovery'; vi er ikke henvist til udiciplineret indsigt og held. Denne "opdagelseslogik" er dels en forskningsmetodologi, en heuristik, dels nøglen så at sige til videnskabshistorien. Problemet, gættene og gendrivelserne rykker i forgrunden af interessefeltet. Videnskabshistorien skal afdække rationaliteteten i videns-skabelsesprocessen, rekonstruere historien rationelt. Lakatos anerkender ikke det klassiske skarpe skel mellem analytiske og empiriske videnskaber, ingen af dem har fast grund under fødderne i streng forstand; matematik er quasi-empirisk. Beviset mister sin status af begrundelse og får i stedet en forklarende og begrebsudviklende funktion. I Lakatos' ikke-justifikationistiske position mister matematisk grundlagsforskning sit - ja - grundlag.

Poppers og Lakatos' standpunkt kaldes også 'kritisk rationalisme'.

Vi har refereret Lakatos velvilligt i dette afsnit, og vi har da også, som det tillige vil fremgå senere, en del sympati for hans forsøg på at opbløde de klassiske forestillinger om matematikkens utilgængelige ufejlbarlighed og for hans insisteren på at fastholde videnskabshistorien som et indholdsfyldt og interessant genstandsfelt og se 'problemet' som en nøgle til forståelsen af videnskabsprocessen.

For en ordens skyld vil vi gøre opmærksom på, at vi på andre punkter ikke er enige i Lakatos' kritiske rationalisme. Dens kriterier for videnskabelighed er ret ensidige og udelukker f.ex. marxisme og psykoanalyse (det var også meningen). Rationaliteten i den videnskabelige udvikling ses snævert som indre videnskabelig og levner næppe plads for samfundsmæssige determinanter. Kritik forstår i forhold til videnskabelige diskussioner og omfatter ikke grænseoverskridende samfundsmæssig kritik.

2.3 Matematik: Logik eller empiri eller matematik. Og hvad så?

Lad os resumere de opfattelser af matematik, som vi har præsenteret indtil nu.

Mill: Matematik er en induktiv videnskab. Matematiske udsagn er om empiriske erfaringer af en meget generel karakter. Tal er subjektive eller mentale ting, og tal er om - eller egenskaber ved - fysiske objekter. Matematik er modeldannelse over erfaringer. I Kants terminologi er matematik for Mill syntetisk og a posteriori. Egentlig matematisk grundlagsforskning findes ikke.

Frege: Matematik er en deduktiv videnskab. Aritmetikken og den højere matematik er analytisk a priori, dvs. gyldigheden kan afgøres udfra logiske, semantiske kriterier og uden at inddrage erfaring. Matematik (excl. geometri) er (en udvidet) logik. Tal er begrebsobjekter og har som sådanne reel eksistens. Frege er grundlæggeren af matematisk grundlagsforskning.

Russell: Matematik er logik. Tal er ikke objekter, men notationer. Matematisk grundlagsforskning er et delområde under logisk grundlagsforskning.

Hilbert: Den klassiske matematik (incl. mængdelæren) er grundlæggende sund, men der er behov for finitte konsistensbeviser, for bevisteoretiske analyser.

Brouwer: Matematik er en mental, før-sproglig aktivitet. Den klassiske omgang med uendelighed m.m. er umatematisk. Kun konstruerede matematiske objekter eksisterer. Logik er et overfladefænomen i forhold til den matematiske aktivitet, som ikke indfanger væsenstræk. Det væsentlige ved matematik er den matematiske konstruktionsaktivitet. Matematisk grundlagsforskning - hvad skulle det være? Matematikken har sin berettigelse i sig selv og behøver ikke den slags afstivninger.

Lakatos: Matematik er 'quasi-empirisk' og principielt fejlbarlig. Det er ikke de 'færdige' matematiske produkter, der er det væsentligste, men derimod de processer, der foregår i arbejdet omkring et problem, når man opstiller gæt og forsøger at gendrive dem. 'Beviser' beviser ikke, men er begrebsgenererende og uddyber forståelsen af problemet. Matematik er ikke logik, og vores sandhedsintuition er næppe ufejlbarlig. Matematisk grundlagsforskning er absurd, for der findes ingen sikker grund, hvorpå viden kan funderes.

Såvidt så godt. Vi har nu en række synspunkter på, hvad matematik er, specielt på forholdet mellem matematik og logik. Er matematik generaliseret empirisk erfaring (Mill), logik (Frege/Russell), quasiempirisk viden (Lakatos), eller er matematik 'sig selv' (Brouwer)? Er de matematiske produkter og deres indbyrdes relationer, konsistens, fundament m.v. det centrale ved matematik (Frege/Russell), eller er det forskningsprocessen (Lakatos), den matematiske konstruktionsaktivitet (Brouwer)? Kort sagt: Er matematik logik - og hvis ikke, hvad så? Og: Er matematik produkt eller proces?

Og hvorfor er det et interessant spørgsmål?

Problemet har i hvert fald fire aspekter, som også angiver de problemfelter, hvor det har interesse. Det angår matematikkens hhv. logikkens i) erkendelsesteoretiske status og ii) genstandsfelt iii) deres samfundsmæssige status og ideologiske funktion og iv) har pædagogiske og didaktiske konsekvenser for matematikundervisningen.

Ad i) Erkendelsesteoretisk status.
Dette aspekt angår, hvilken karakter, den matematiske erkendelse har. Hvordan får vi matematisk erkendelse? Er den objektiv - hvad vil det i givet fald sige? Er den empirisk - hvilket forhold har den til empirisk erfaring? Hvis den ikke er empirisk, hvad er den da? Logik? Hvad er logik så? På hvilken grund hviler matematikkens sandhed? Hvori består dens gyldighed?

Her må man sige, at det ikke er lykkedes at bevise, at matematik er logik. Dels kan matematik ikke reduceres til logik, idet fx. mængdelæren i sin naive udgave er inkonsistent, og i sin axiomatiserede form indeholder ikke-logiske axiomer. Dels ville det ikke hjælpe, dersom matematik kunne reduceres til logik à la Russell, thi også her må der gøres brug af ikke-logiske axiomer, nu for at kunne udvikle matematikken indenfor type-teorien. Endvidere har forsøgene på at vise matematikkens konsistens afsløret fundamentale begrænsninger. Sandhed i matematik kan ikke identificeres med 'at være beviselig' indenfor et konsistent system. Sætninger, der udtrykker et konsistent systems konsistens, kan ikke bevises indenfor systemet.

På den anden side er Mills empirisme nok heller ikke holdbar. Omend hans synspunkt forekommer at indeholde megen sund empirisme, er det næppe rimeligt, at se matematik som blot generaliserede empiriske erfaringer; megen abstrakt matematik synes at være så langt fra erfaring, at det vil være urimeligt at opretholde synspunktet.

Stilles spørgsmålet om matematikkens erkendelsesteoretiske status så snævert som Frege/Russell, sker der en voldsom fokusering på matematikkens produkter og disses eventuelle logiske fundament, indbyrdes relationer osv. Den historiske dimension tabes meget let af syne. Det synspunkt af Russell, som Lakatos drager frem, at det første egentlige værk om matematik er Boole's 'Laws of Thought' fra 1854 er grotesk i sin perspektivforvrængning, og den reduktionisme, der ligger i Carnaps krav om, at filosofi skal udskiftes med videnskabslogik, at videnskabslogik ikke er andet end det videnskabelige sprogs syntaks, og at metamatematik er det matematiske sprogs syntaks, er næsten uhyggelig i sin reduktionistiske indskrænkethed. Det er positivisme i sin værste skikkelse. De matematiske miljøers udtalte mangel på selvreflektion og historisk (selv-)forståelse hænger sammen med denne ensidige fokusering på produkterne.

I modsætning hertil er der noget befriende ved Lakatos' fremhævelse af problemsituationen, fordi det dels muliggør en centrering omkring forståelsen af, hvad de matematiske teoridannelser handler om, dels udgør en brugbar indfaldsvinkel til historien. Matematik er for potent en videnskab til, at det er forsvarligt, at dens udøvere ikke ved, hvilken historisk tradition, de er en del af, men i stedet opfatter den som uproblematiseret, værdifri 'teknik'.

Brouwers forestillinger om matematik som et i sidste ende abstrakt over tidens fundamentale to-enighed, øjeblikkets opsplitning i 'før' og 'efter', ved vi ikke rigtig, hvad vi skal mene om, men hans krav om konstruerbarhed synes os sundt. Indirekte eksistensbeviser er noget mærkeligt noget.

Med hensyn til om matematik er objektiv, så mener Lakatos ikke, at matematik principielt er mere sikker viden en anden empirisk viden. Frege hævder, at matematisk erkendelse er objektiv, i betydningen stabil og bevidsthedsuafhængig. Bloor tager Freges definition af objektivitet (se side 18) på ordet og finder, at Freges objektivitetsbegreb reelt dækker over samfundsmæssigt institutionaliseret tro; thi det sociale er netop det, der hverken er fysisk eller psykologisk. (Bloor, 1976, p 85-87) Vi skal ikke gå dybere ind i diskussionen om objektivitet - den er omfattende - men lade det blive ved disse antydninger. (Pedersen, 1980)

ad ii) Genstandsfelt.
Dette aspekt drejer sig om, hvad matematik udtaler sig om, hvilke områder af 'virkeligheden' dens gyldighedsområde udgøres af, om matematik har et genstandsområde, som er dens egen - ligesom fysikken har den livløse natur som sit genstandsområde. Vi vil nævne to sæt modstridende opfattelser, som gør sig gældende.

Det ene angår en realistisk opfattelse overfor en nominalistisk. Frege var realist, begrebsrealist nærmere betegnet. Matematik handler om reelle **objekter**: rum, tid, tal, mængder osv. Geometri bestemmer han i Kants terminologi som syntetisk a priori, dvs. geometriens gyldighed er en forudsætning for muligheden for at opnå objektiv erkendelse af rummet og dets egenskaber. Aritmetik er analytisk a priori, dvs. logik. Russell derimod er nominalist; for ham har matematikken ingen genstande, tal er notationer, matematik er generelle logiske love, et stort sæt tautologier, som er interessant alene af psykologiske grunde, fordi den menneskelige hjerne ikke umiddelbart kan overskue alle konsekvenserne af de logiske axiomer; matematikken gør det implicitte eksplicit. Hans Hahn har formuleret dette synspunkt krystalklart:

"There has been prolonged opposition to the interpretation of mathematical statements as tautologies; Kant contested the tautological character of mathematics emphatically, and the great mathematician Henri Poincaré, to whom we are greatly indebted also for philosophical criti-

> cism, went so far as to argue that since mathematics cannot possibly be a huge tautology, it must somewhere contain an *a priori* principle. Indeed, at first glance it is difficult to believe that the whole of mathematics, with its theorems that it cost such labor to establish, with its results that so often surprise us, should admit of being resolved into tautologies. But there is just one little point which this argument overlooks: it overlooks the fact that we are not omniscient. An omniscient being, indeed, would at once know everything that is implicitly contained in the assertion of a few propositions. It would know immediately that on the basis of the conventions concerning the use of the numerals and the multiplication sign, "24x31" is synonymous with "744". *An omniscient being has no need for logic and mathematics. We ourselves, however, first have to make ourselves conscious of this by successive tautological transformations*, and hence it may prove quite surprising to us that in asserting a few propositions we have implicitly also asserted a proposition which seemingly is entirely different from them, og that we do mean the same by two complexes of symbols which are externally altogether different. (Vor fremhævelse.) (Hahn i Ayer 1959, p 158-9)

Carnap hævder i samme ånd, at matematik er videnskabens sprog.

Lakatos er lidt uklar i denne sammenhæng - han lægger selv op til betegnelsen quasi-empirist. Han mener noget i retning af, at matematik i sidste ende er en beskrivelse af forhold i den reelle verden, en slags generaliseret fysik.

Den anden skillelinie i opfattelser, som vi vil nævne, angår matematikkens status som videnskab. En opfattelse er, at matematik er en videnskab, som har sine egne videnskabelige problemer, sit eget genstandsfelt, som er essentielt uafhængig af andre videnskabers problemstillinger. Frege, Russell og mange strukturmatematikere (se kap. 3) har denne opfattelse. Heroverfor står en opfattelse, som siger, at matematik står i en afhængig vekselvirkning med andre videnskaber, typisk fysik, økonomi osv. Denne hævdes af Mill, Lakatos (delvist), von Neumann, som axiomatiserede mængdelæren og udviklede spilteorien, bl.a., og Hermann Weyl, som afklarede matematiske grundlagsproblemer i den generelle kvantemekanik. Som det fremgår af de navne, vi har hæftet på de forskellige synspunkter, kan de to skillelinier ikke bringes til at falde sammen. Af en sammenstilling vil man kunne uddrage, at en nominalistisk opfattelse koblet med en opfattelse af matematik, som uafhængig af andre videnskaber, vil give en matematikforståelse, som ikke forpligter matematikken overfor virkeligheden i en eller anden forstand, mens alle andre kombinationer af de to sæt opfattelser vil forpligte matematikken overfor en virkelighed. (Brouwer falder udenfor disse opdelinger.)

iii) Status og ideologisk funktion.

Dette aspekt angår, hvilke interesser, der er knyttet til den ene eller anden opfattelse af matematik. Hvilke konnotationer (ubevidste, holdningsmæssige, bi- betydninger) er knyttet til den ene eller anden karakteristik. Er det 'fint' at være logisk? Er matematik finere end biologi, fordi matematik er logik, mens biologi 'blot' er systematisk erfaring, empiri? Hvis eksperter har 'bevist' noget matematisk, er det så vægtigere end synspunkter, der bygger på sund fornuft eller følelsesmæssige holdninger? Har matematik en højere status som logik end som noget andet? Bliver den mere objektiv? Er det bedre at være objektiv end ikke-objektiv og hvorfor? Hvad har man implicit sagt om resten af verden ved at sige, at matematik er logik?

Udfra Freges forord kan der ikke være tvivl om, at præciseringen af matematikkens erkendelsesteoretiske status er af stor følelsesmæssig betydning for ham. Det er matematikkens prestige og dermed matematikernes anseelse, det handler om. Drivkraften til at opstarte matematikkens grundlagsdiskussion kom ikke blot fra det rene filosofiske problem, men trækker også på emotionelle kilder.

Ekskurs: Frege er på godt og ondt en del af den tyske videnskabs- og universitetshistorie i det 19. århundrede. Op til universitetsreformen i begyndelsen af århundredet, markeret ved etableringen af det Humboldt'ske universitet i Berlin i 1810 var det filosofiske fakultet, hvorunder naturvidenskaberne hørte, en slags basisuddannelse til de 'højere' fakulteter: teologi, jura og medicin, som var erhvervsuddannelser; de uddannede statens embedsmænd, og heri bestod statens interesse i at opretholde dem. I sammenhæng med den tyske kulturs opblomstring kort før og omkring dette tidspunkt etableredes det særlige tyske videnskabsbegreb 'Wissenschaft'. Dette 'Wissenschaft'sbegreb førte til en styrkelse af det filosofiske fakultet, så det kom på linie med de tre andre andre. De ægte 'Wissenschaft'er var især studierne af det klassiske Grækenlands sprog og kultur, som fx. i gymnasiet blev tillagt en overordentlig almendannende og kulturbærende funktion.

Da naturvidenskaberne og også matematikken hørte under det filosofiske fakultet, blev konsekvensen at disse måtte legitimere sig i 'Wissenschaft'. traditionen. Naturvidenskaberne var på dette tidspunkt ikke særligt udviklede, og navnlig var den tyske (universitets)tradition svag. Det bevirkede, at behovet for at legitimere sig overfor de rigtige, fine 'Wissenschaft'er blev ekstra stort og førte til en betoning af naturvidenskabernes karakter af ren sandhedssøgen og uafhængighed af materielle interesser. Mest i ord ganske vist, men med sporbare følger for forskning og undervisning. Meget af vore dages bragesnak om naturvidenskabernes renhed har sin oprindelse i denne særlige tyske 1800-tals tradition.

En del af baggrunden for den betydning, som Frege tillægger spørgsmålet om matematikkens grundlag skal uden tvivl søges i disse historiske omstændigheder, som udgøres af behovet for at legitimere matematik som en fin og objektiv videnskab, ubesmittet af empiri (pebernødder!) og psykologi. Hvordan den nærmere sammenhæng er, må afklares af en nærmere undersøgelse. Frege var betydeligt mere filosofisk orienteret end de fleste af hans samtidige kollegaer, som ikke regnede ham for noget særligt, hvilket måske kunne tolkes som at Frege ikke så meget repræsenterer en matematikerstrømning, men snarere en filosofisk. På den anden side er en 'engelsk Frege' på dette tidspunkt utænkelig. Ekskurs slut.

Kaster man et blik på dagens samfundsmæssige, politiske debat er det åbentlyst, at 'videnskabelige' argumenter spiller en betydelig rolle og netop henter deres vægt fra en - til tider bevidst - ureflekteret opfattelse af naturvidenskaber som 'objektive'. Sådanne illegitime, ideologiske anvendelser af matematik og anden videnskab kan bl.a. imødegås gennem videnskabsteoretiske argumentationer.

iv) Pædagogiske og didaktiske konsekvenser.
Matematikkens erkendelsesteoretiske status og genstandsfelt har betydning for undervisningen i faget, fordi undervisning altid må forholde sig til videnskabsfaget i en eller anden forstand. Børn lærer kemi og ikke alkymi, fordi kemi anses for at give en rimeligere indsigt i stoffernes natur end alkymi, de lærer Newton'sk dynamik og ikke Aristotelisk, geometriundervisningen er næsten helt afskaffet og erstattes af analytisk geometri og liniær algebra (vektorregning).

Derfor giver påstanden om, at matematik er logik, hvis den er begrundet, også anledning til spørgsmål om undervisningen. Skal skolebørn så have en undervisning, som centrerer omkring matematikkens logiske opbygning, dens indre struktur. Den konklusion er draget i '60'er matematikken. Andre har draget andre konklusioner for undervisningen udfra andre videnskabsteoretiske analyser af matematikken. Som vi skal se i næste kapitel formulerer Lakatos på baggrund af sin opfattelse en skarp kritik af den traditionelle matematikundervisning og er tæt ved at drage eksplicitte didaktiske konkluskoner. Han gør det ikke, men andre kan legitimere deres didaktiske ideer med Lakatos' analyser.

På et videnskabsteoretisk plan har vi antydet, at vi synes, at et proces-synspunkt á la Lakatos giver betydeligt bedre muligheder for at forstå matematikkens historiske udvikling og hvilke problemer, matematiske teorier handler om end et produktsynspunkt,samtidig med at det ikke udelukker dettes indsigter. Imidlertid lider processynspunktet i den Lakatos'ke udformning af den svaghed, at det er snævert rettet mod den indre videnskabelige heuristik (udviklingslogik). Han kan ikke forklare, hvorledes - eller rettere han mener ikke at - matematikkens udvikling hænger sammen med den samfundsmæssige helhed, som den er en del af. Det er kun afvigelserne fra den rationelle udvikling, der kan have behov for ekstra-heuristiske forklaringer - en underlig skævhed i forklaringsstrukturen.

KAPITEL 3

PÆDAGOGISKE KONSEKVENSER FOR MATEMATIKUNDERVISNINGEN AF EN NEO-LOGICISTISK MATEMATIKOPFATTELSE. KRITIK AF AXIOMATISK-DEDUKTIVT OPBYGGET UNDERVISNING.

En matematikundervisning må nødvendigvis bl.a. basere sig på en opfattelse af, hvad matematik er. Bevidst eller ej, eksplicit eller implicit står undervisning i et fag i forhold til en videnskabsteoretisk forståelse af, hvad fagets væsen er, og formidler med større eller mindre gennemslag denne forståelse. Heraf følger ikke nødvendigvis, at fagundervisning er en 'miniudgave' af videnskabsfaget.

I kapitel 1 beskæftigede vi os især med Freges og Russells logicistiske program og dets historie. I dette kapitel skal vi se på et nyere undervisningssystem, der er bygget op omkring en udtalt neologicistisk matematikopfattelse. Systemet hedder "Sets and Numbers" og er skrevet af Patrick Suppes, en amerikansk professor i statistik og filosofi.

Lakatos har som beskrevet i kapitel 2 en anderledes matematikopfattelse end den logicistiske. Den munder bl.a. ud i en kritik af axiomatisk-deduktivt opbygget matematikundervisning; en kritik som vi vil videregive og diskutere.

Vi vil selv kritisere Suppes på to ledder, dels diskutere hans videnskabsteoretiske opfattelse, dels dennes konsekvenser for den pædagogiske udformning af matematikundervisningen.

3.1. Sets and Numbers

Patrick Suppes var (er?) professor i filosofi og statistik ved Stanforduniversitetet i USA. Han har lavet lærebøger i matematik både til universitetet og til underskolen. Af universitetsbøgerne kan nævnes 'Axiomatic Set Theory' (1960) og 'Introduction to Logic' (1957); Til underskolen har han været hovedansvarlig for 'Sets and Numbers' (1962), som er et system beregnet for hele underskolen og derfor ret omfattende. Vi har valgt at kigge nærmere på bind 1A, nærmere betegnet lærervejledningen hertil, da hele systemets grundlæggende begrebsapparat introduceres og begrundes her.

Bindet er delt op i 4 hovedafsnit: 1) Mængder. 2) Tal. 3) Foreningsmængde. 4) Addition. Mængder er defineret som en samling af objekter og angives at være noget simpelt og konkret:

"The term 'set' is simple and concrete, easy both to understand and to explain. A set is simply any collection or family of objects. We may speak of sets or collection of all students now in the first grade, the set or collection of dolls now owned by Mary Jones, the set of all books in this room." (Suppes,1962,p iii)

Notationsmæssigt gøres dette ved at elementerne afbildes ved en tegning, f.ex. en tegning af en abe og en bjørn, Koko og Sam. Rundt om elementerne sættes så et par klammer (de normalt anvendte mængdeparanteser), og så har man en mængde, som i eksemplet er mængden af Koko og Sam. Den tomme mængde karakteriseres med mængdeklammer, hvori der ikke er noget.

Tallene indføres som egenskaber ved mængder:

"In part 3, the child learns a precise characterization of number as a property of a set. In answer to the question, "What is a number?", he can give the answer, "A number is a property of a set". To insure that this answer is not merely verbalized, but clearly understood, the teacher is advised to initiate a discussion of the notion of 'a property'. The notion can best be explained through many examples familiar to the children. For instance, in reference to a green book we can say, "Green is a property of this book, it is the color of the book". Similarly, "red is a property of an apple; it describes the apple's color. An apple has other properties as well. It is smooth. It is roundish. It is hard. Square is a property of this book. It describes its shape," etc." (ibid, p 34)

Tallene beskrives notationsmæssigt med et stort N foran mængdenotationen. N'et og mængden skal læses som antallet af elementer i mængden; dette sættes så lig det arabiske talsymbol, der passer til dette tal .

På dette stadie indføres så også begrebet lig med og lighedstegnet, hvor børnene bl.a. trænes i at gennemskue, at det er forskel på , om to mængder er ens, eller om antallet af elementer i mængderne er ens.

Foreningsmængde indføres og indøves som en fortræning til addition:

"Similarly, the arithmetical operations (addition in 1A) are introduced by building upon the analogous operations on sets of physical objects (union of sets in 1A)" (Ibid, p iii)

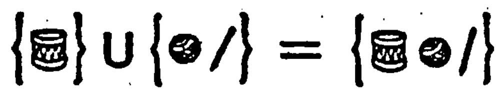
Foreningsmængde indføres ved kombination af eksisterende mængder:

"The same levels of abstraction are appropriate in introducing an operation on numbers such as addition. Once again we can begin with concrete illustrations and build step-by-step to the abstract operation of adding numbers. At the most concrete level, we may display sets of physical objects and show that by combining the sets we form a new set. This operation is called the union of sets." (ibid, p v)

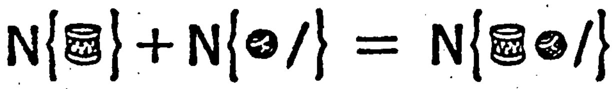
Dette illustreres ved at vise to mængder med et stort U imellem til venstre for et lighedstegn. På højre side vises så en mængde, der indeholder alle de elementer, som de to udgangsmængder indeholdt. Fx. en mængde bestående af en tromme og en mængde bestående af en bold og en blyant. Mellem disse mængder et stort U og efter dem et lighedstegn. På den anden side af lighedstegnet er så en mængde bestående af en tromme, en bold og en blyant.

Addition indføres dernæst ved at strive et stort N foran alle tre mængder og skifte U'et ud med et '+', og derefter videre til de arabiske symboler.

I lærervejledningen illustreres det således:



When we abstract to a consideration of just the number of members, we have the parallel operation of addition so that the plus symbol is used.



Finally, we may represent this equation, using the Arabic numerals, as

$$1 + 2 = 3 .$$

(ibid, p v)

Rækkefølgen: mængder, antal elementer i mængden og så det arabiske talsymbol har Suppes valgt for at begynde med det konkrete og så bevæge sig til det abstrakte:

"There are several reasons for beginning with the concept of a set. The focus of the pedagogical reasons in comparison numbers, is the great concreteness of sets of physical objects. For example, the patting together of sets of physical objects (union of sets) is a more concrete operation than the addition of numbers. The difference of sets of physical objects is more concrete than subtraction of numbers." (ibid, p iii)

Suppes har en matematikopfattelse, der ligger den logicistiske nær. Man kan kalde den neologicisme. Det afspejles i det talbegreb, som han vil lære børnene. Det ligner bortset fra mængdeterminologien til forveksling Freges. Frege opsumerede sin taldefinition på denne måde:

"Jeg gentager: Det tal, som tilhører begrebet F, er omfanget af begrebet 'ligetallig med begrebet F' - og føjer hertil: udtrykket 'n er et tal' skal være ensbetydende med udtrykket 'der findes et begreb således at n er det antal, som tilhører det'." (Frege, 1884,§72, p 85)

- eller oversat til moderne matematisk udtryksmåde: et tal er en mængde af alle mængder med den samme kardinalitet (mægtighed -'antal' elementer). 0 var den tomme mængde, 1 mængden af den tomme mængde osv. 'Børneudgaven' heraf er netop Suppes': 0 er mængden med ingen elementer, 1 er alle mængder med 1 element, osv.

Indførelsen af de grundlæggende aritmetiske operationer på basis af de elementære mængdeoperationer er en følge af denne talopfattelse, hvor relationer mellem tal er relationer mellem mængder. Suppes hævder eksplicit den neologicistiske tese i forordene til sine universitetsbøger. I 'Axiomatic Set Theory' skriver han (i vor oversættelse):

"Blandt moderne matematiks mange grene optager mængdelære en enestående plads: med få undtagelser kan de størrelser, som studeres og analyseres i matematik, betragtes som visse særlige mængder eller klasser af objekter. Det betyder, at de forskellige grene af matematiks natur reduceres til spørgsmål om mængdelære. Som en konsekvens heraf kan mange fundamentale spørgsmål om matematiks natur reduceres til spørgsmål om mængdelære. ... Adækvate axiomer for mængdelæren giver et klart, konstruktivt svar på spørgsmålet: Præcis hvilke antagelser, udover den elementære logiks, kræves som grundlag for moderne matematik?" (Suppes, 1960, p 1-3)

Al matematik (næsten) kan altså reduceres til mængdelære. I 'Introduction to Logic' skriver han:

"I en snæver forstand er logik teorien for gyldige argumenter eller teorien for deduktiv slutning. En lidt bredere betydning omfatter definitionsteorien. En lidt bredere betydning endnu omfatter den generelle mængdelære. Desuden giver definitionsteorien sammen med mængdelæren et eksakt grundlag for den axiomatiske metode; studiet heraf betragtes uformelt som en del af logik af de fleste matematikere. (Suppes, 1957, p xviii)

Mængdelære er altså en udvidet logik.

Suppes har således den opfattelse, at grundlaget for matematikken er mængdelære, som er en let udvidet logik, og at matematikken kan udledes axiomatisk-deduktivt fra logikken og mængdelæren. Det er begrundelsen for at betegne hans opfattelse neologicisme. Dette er hans videnskabsteoretiske opfattelse af matematik. 'Sets and Numbers' viser, at han drager pædagogiske konklusioner af sin videnskabsteori, nemlig den, at underskolebørnene skal lære det for ham at se essentielle i matematikken, mængdelære. Allerførst skal de lære den videnskabeligt forsvarlige definition på tal - et tal er en egenskab ved en mængde; aritmetik ved mængdeoperationer; sidenhen flere mængdeteoretiske operationer, som leder frem til mere komplekse matematiske begreber. Hans argument er, at mængder er mere konkrete end tal og mængdeoperationer mere konkrete end taloperationer. Bekvemt nok falder denne pædagogiske argumentation sammen med hans videnskabsteoretiske syn.

'Sets and Numbers' er karakteristisk for 60'er matematikkens undervisningsprogrammer. Disses grundlæggende karakteristika er netop den mængdeteoretiske ramme, dekomponeringen af begreberne i delbegreber, som indlejres i en spiral opbygning af undervisningen, hvor man vender tilbage til de samme områder igen og igen, og hver gang på et lidt mere kompleks og avanceret niveau. Det er ikke en 'rigtig' axiomatisk-deduktiv opbygning med axiom, definition, teorem, lemma og formaliseret bevisstruktur - det er næppe muligt på underskoleniveau - men det er en videnskabsbaseret undervisning i den forstand, at det er de matematiske strukturer, der udfra denne videnskabsteoretiske forståelse er de fagligt centrale, som gøres til genstand for undervisning. Det er videnskabsfaget matematik i børneudgave.

3.2 Lakatos' kritik af axiomatisk-deduktiv undervisning

Lakatos har som beskrevet i kapitel 2 en ganske anden matematikopfattelse end den logicistiske. For det første tror han ikke på, at matematikken står på et sikkert fundament, der for tid og evighed sikrer mod fejltagelser. Matematik er som al anden videnskab fejlbarlig. For det andet: Hvor logicisten udover at mene, at matematik er logik og derfor sikker viden, tendentielt vil hæfte sig ved matematikkens produkter og undersøge og sikre deres indbyrdes logiske sammenhæng, ser Lakatos matematik som en proces, hvori der - med udgangspunkt i en problemstilling - sker en udvikling og afklaring af matematiske begreber. Processen har en indre rationalitet, som kan rekonstrueres. Denne rationelle rekonstruktion er væsentlig for at forstå problemsituationen, de matematiske begrebers indhold. Matematik går ud på (bør gå ud på) med gætningens og gendrivelsens metode, udfra problemer at generere nye relevante matematiske begreber og uddybe deres indhold.

I et appendix til 'Proofs and Refutations' har Lakatos formuleret en kritik af axiomatisk-deduktiv undervisning. Vi gengiver den her i næsten uforkortet form, fordi vi synes den er så rammende, og fordi 60'er matematikken, som Suppes er eksponent for, indskriver sig i denne tradition.

"Euklidisk metodologi har udviklet en bestemt obligatorisk præsentationsstil. Jeg vil referere til denne som "deduktivistisk stil". Denne stil starter med en samvittighedsfuldt fastsat liste af axiomer, lemmaer og/eller definitioner. Axiomerne og definitionerne ser ofte kunstige og mystificerende komplicerede ud. Man bliver aldrig fortalt, hvordan disse komplikationer opstod. Listen af axiomer og definitioner følges af de omhyggeligt affattede teoremer. Disse er spækket med svære betingelser; det synes umuligt at nogen som helst skulle have gættet dem. Teoremerne følges af et bevis.

I henhold til det euklidiske ritual er matematikstudenten nødt til at overvære denne tryllekunst uden at stille spørgsmål om baggrunden eller om, hvordan denne behændighedskunst udføres. Hvis studenten tilfældigvis opdager, at nogle af disse usømmelige definitioner er bevis-genererede, hvis han simpelthen undrer sig over, hvordan disse definitoner, lemmaer og teoremer overhovedet kan gå forud for beviset, vil tryllekunstneren forvise (ostracize: egl. udstøde af samfundet; brugtes i det gamle Grækenland ved korruption; f.a.) for denne fremvisning af matematisk umodenhed. *(Note: Nogle lærebøger hævder, at de ikke forventer, at læseren har nogen forudgående viden, blot en vis matematisk modenhed. Dette betyder ofte, at de forventer læseren af* *naturen at være betænkt med "evnen" til at godtage euklidiske argumenter uden nogen unaturlig interesse i problembaggrunden, i heuristikken bag argumentet.)*

I deduktivistisk stil er alle sætninger sande og alle slutninger gyldige. Matematik præsenteres som en evigt øgende mængde af evige, uforanderlige sandheder. Modeksempler, gendrivelser, kritik kan umuligt komme ind. En autoritær atmosfære omkring emnet sikres ved at begynde med forklædte misfoster-spærrende og bevis-genererede definitioner og med det flyvefærdige teorem, og at undertrykke den primitive gætning, gendrivelserne og kritikken af beviset. Den deduktivistiske stil skjuler anstrengelsen, skjuler eventyret. Hele fortællingen forsvinder, de sukcessive forsøgsvise formuleringer af teoremet i løbet af bevisproceduren er dømt til glemsel, mens slutresultatet ophøjes til hellig ufejlbarlighed. *(Note: Det er endnu ikke blevet tilstrækkeligt erkendt, at nutidig matematisk og videnskabelig uddannelse er et drivhus for autoritære holdninger og er den værste fjende af uafhængig og kritisk tænkning. Mens denne autoritære atmosfære i matematikken følger det deduktivistiske mønster som netop beskrevet, opererer den i naturvidenskaberne gennem det induktivistiske mønster.*

Der er en langvarig tradition for induktivistisk stil i naturvidenskab. En ideal-artikel skrevet i denne stil starter med den omhyggelige beskrivelse af den experimentelle opstilling efterfulgt af beskrivelsen af experimentet og dets resultater. Papiret kan konkludere i en "generalisation". Problemsituationen, gætningen, som experimentet skulle afprøve, er gemt væk. Forfatteren praler med en tom, jomfruelig bevidsthed. Artiklen vil kun blive forstået af de få, som faktisk kender problemsituationen. - Den induktivistiske stil afspejler et foregivende om, at videnskabsmanden starter sine undersøgelser med en tom hjerne, mens han faktisk starter med et hoved fuldt af ideer. Spillet kan kun spilles — ikke altid med held — for og af et udvalgt laug af eksperter. Induktivistisk stil forstrer, mens den hævder objektivitet, ligesom sin deduktivistiske tvilling (ikke modstykke!) faktisk et privat laug-sprog, atomiserer videnskab, kvæler kritik, og gør naturvidenskab autoritær. Modeksempler kan aldrig forekomme i en sådan præsentation: man starter med observationer (ikke en teori), og det er klart, at uden forudgående teori kan man ikke observere modeksempler.)

Nogle forsvarere af deduktivistisk stil hævder, at deduktion er det heuristiske mønster i matematik, at opdagelsens logik er deduktion. *(Note: Disse folk hævder, at matematikere starter med et tomt hoved, opstiller deres axiomer og definitioner efter behag i løbet af en legende fri kreativ aktivitet, og det er først på et senere tidspunkt, at de deducerer teoremerne fra disse axiomer og definitioner. Hvis axiomerne er sande i én fortolkning, vil alle teoremerne være sande. Det matematiske sandhedstransportbånd kan ikke fejle. Efter vores case-study om bevis-proceduren kan dette udelukkes som argument i forsvaret for den deduktivistiske stil generelt - hvis vi ikke accepterer restriktionen af matematik til formelle systemer.*

Mens Popper viste, at de, som hævder, at induktion er den videnskabelige opdagelses logik, har uret, har disse essays til formål at vise, at de som hævder, at deduktion er den matematiske opdagelses logik, har uret. Mens Popper kritiserede den induktivistiske stil, prøver disse essays at kritisere deduktivistisk stil.) Andre indser, at dette ikke er sandt, men drager fra denne erkendelse den konklusion, at matematisk opdagelse er en fuldstændig urationel affære. Således vil de hævde, at skønt matematisk opdagelse ikke skrider frem deduktivt, så må den hvis vi ønsker vores præsentation at matematiske opdagelser skal skride rationelt frem, fortsætte i deduktivistisk stil. *(Note: ...Popper, som ... adskilte opdagelsens aspekter mellem psykologi og logik på en sådan måde, at ingen plads blev tilovers til heuristik som et selvstændigt undersøgelsesfelt, havde øjensynligt ikke dengang indset, at hans opdagelseslogik var mere end bare det strengt logiske mønster i videnskabens fremskridt. Dette er kilden til paradoxiteten i titlen på hans bog (Logik der Forschung; f.a.), hvis tese synes at have to ansigter: (a) der er ingen videnskabelig opdagelseslogik - Bacon og Descartes tog begge fejl; (b) den videnskabelige opdagelses logik er gætningens og gendrivelsens logik. Løsningen på paradoxet ligger lige for: (a) der er ingen ufejlbarlig logik for videnskabelig opdagelse, en som ufejlbarligt ville føre til , (b) der er en fejlbar logik for opdagelse, som er videnskabelig fremskridts logik. Men Popper, som har lagt grunden for denne opdagelseslogik, var ikke interesseret i metaspørgsmålet om, af hvilken natur hans undersøgelse var, og han indså ikke, at denne hverken er psykologi eller logik, det er en uafhængig disciplin, opdagelseslogik, heuristik.)*

Så vi har i dag to argumenter for deduktivistisk stil. Det ene er baseret på ideen om, at heuristik er rationel og deduktivistisk. Det andet argument er baseret på ideen om, at heuristik ikke er deduktivistisk, men heller ikke rationel.

Der er også et tredje argument. Nogle arbejdende matematikere som ikke kan lide, at logikere, filosoffer og andre tværlinge (cranks) blander sig i deres arbejde, siger sædvanligvis, at indførelsen af heuristisk stil ville kræve, at lærebøger blev omskrevet, og det ville gøre dem så lange, at ingen nogensinde kunne læse dem til ende. Artikler ville også blive meget længere. *(Note: Det må dog indrømmes, at de også ville blive meget færre, eftersom redegørelsen for problemsituationen altfor åbentlyst ville udstille en hel dels meningsløshed.)* Svaret til det fodgængerargument er: Lad os prøve." (Lakatos, 1976, p 142-144)

Den deduktivistiske stil karakteriseres af sine omhyggeligt affattede axiomer, definitioner osv., som gør det uigennemskueligt, hvilken problemsituation, de er udsprunget af.

Undervisningen trækker store veksler på studenternes tålmodighed og evne til at høre på noget, som de først forstår langt senere, hvis de ellers deres uddannelse kommer så langt. Den deduktivistiske stil bevirker, at axiomer, sætninger osv. synes at komme dumpende fra himlen, og eleverne må fortrænge deres nysgerrighed efter baggrunden og forholdes indsigt i den undervisningsproces, som de indgår i.

Matematik præsenteres som et færdigt produkt af evige, ophøjede, helligt ufejlbarlige sandheder (- ' det matematiske sandhedstransportbånd kan ikke fejle'). Eventyret og anstrengelsen bag matematikken skjules og kritik er umuliggjort og fjernet fra undervisningen.

Alt i alt bevirker det, at matematikundervisningen foregår i en autoritær atmosfære, bliver et 'drivhus for autoritære holdninger', som er 'den værste fjende af uafhængig og kritisk tænkning'. Forholdet mellem lærer og elever bliver et autoritetsforhold. Læreren kender begrundelsen for undervisningens indhold (eller tager sig ud, som om han/hun gør det), eleverne er principielt forhindret i at få det begrundet, fordi problemsituationen er fortrængt - og iøvrigt forventes de ikke at spørge om begrundelser; deres kritiske medleven er blokeret. Lærerens autoritet forstærkes af, at matematikken fremstår som ufejlbarlige sandheder. Elevernes væsentligste kvalifikation bliver evnen til ukritisk tilegnelse.

Opfattelsen af matematik som kumulativ proces, hvor evig sandhed stables på evig sandhed lægger op til en konsekvent historieforfalskning, som forestiller sig matematikkens historie mere 'retlinet' end rimeligt er og fortrænger problemfelter og andre indfaldsvinkler. (Se også Pedersen, 1977)

Vi mener, at Lakatos her har fat i nogle meget væsentlige karakteristika ved axiomatisk-deduktiv undervisning, og at kritikken i vid udstrækning også rammer børneudgaven. Det skal vi begrunde nærmere om lidt.

Det er interessant at sammenholde Lakatos' påpegning af den autoritære atmosfære, der omgiver matematikundervisningen, med vores bemærkninger omkring stilen i Freges forord til 'Grundlagen' (se afsn. 1.3)

Freges bestræbelser på at sikre sig, at matematikken havde fast grund i logikken, og hans deraf følgende axiomatiseringsbestræbelser (ihukom at hensigten var at ordne logikken efter euklidisk, dvs axiomatisk-deduktivt mønster) var klart forbundet med forestillinger om, at sikre matematikkens renhed, finhed, ordnethed osv. - karakteristika som han udenfor diskussion tilskriver logikken - mod trusler om indtrængen af ubestemthed, tågethed, forvirring, flyden og faren for forklejnelse, foragt og ruin. Vi henviste til et studie af antropologen Mary Douglas, som Bloor havde fremdraget. Der er, siger hun, en naturlig tendens i alle kulturer til at symbolisere høj status og stærk social myndighed ved streng kropskontrol. Fysiske udladninger og processer udstødes af det felt, der kan forstås og tales om. Vekselvirkninger, samkvem søges fremstillet, som foregik de mellem ånder frigjort fra kroppen. Stil og adfærd indrettes så afstanden mellem en aktivitet og dens fysiologiske oprindelse maximeres.

Som eksempel på dette kan man tage klædedragt. Kongers, officerers og amtmænds uniformer, engelske professorer processionsdragter, lægers kitler osv. har udover deres praktiske funktioner (!) også symbolbærende betydning. Dragternes bærere fremtræder (tendentielt) ikke som kødelige personer, men som sociale institutioner. Man forbinder ikke så menneskelige forhold som svedlugt, fordøjelse o.lign. med dem, men netop status, magt og indflydelse.

Under gennemgangen af Freges forord gjorde vi opmærksom på at matematikkens prestige tiltrak sig hans opmærksomhed. Det er nu tydeligt, at den måde, hvorpå han søger at sikre matematikkens anseelse, er at rense den for alt, hvad der har med fysiske processer at gøre, derved at forlene matematik med de symboler, der karakteriserer høj status og samfundsmæssig autoritet.

Godtager vi Douglas teori, har vi en anden forklaring på den autoritet, som matematik er behæftet med. Matematik er fra matematikernes hånd udstyret med de symboler, der knytter sig til autoritet. (Bemærk, at i denne sammenhæng har 'symboler' ikke den matematiske betydning af 'tegn' men den psykologiske betydning.) Frit sagt, så 'oser' matematik langt væk af høj social status, stærk social myndighed og streng kropskontrol. Det kan elever 'lugte' og knytter derfor intuitivt, ubevidst dette betydningsunivers til matematik. Deres sædvanlige erfaring med og reaktionsmønstre overfor sociale autoriteter aktiveres derfor af og medbestemmer deres reaktion overfor matematik.

Det er altså en dobbeltsidig proces. På den ene side fremtræder matematik som en autoritet, fordi den er behæftet med alle autoritetens attributter. På den anden side reagerer eleverne (og andre) som de plejer overfor autoriteter.

Det er klart, at denne forklaring indtil videre er spekulativ. Den er ikke i modstrid med Lakatos', snarere uddybende, idet den angiver en socialpsykologisk mekanisme til, hvorledes den autoritære atmosfære, som Lakatos så rigtig ser, at matematikundervisningen omgiver sig med, konstitueres. Det må også være klart, at disse forsøgsvise forklaringer indtil videre kun gælder axiomatisk-deduktivt opbygget matematik.

3.3 Kritik af Suppes og 'Sets and Numbers'

3.3.1 Kritik af Suppes matematikopfattelse

Vi vil kritisere Suppes for den måde, hvorpå han fremstiller logikken og mængdelærens betydning og historie. Fx. skriver han i introduktionen til "Introduction to Logic" følgende:

"It is....somewhat surprising that a fully adequate formal theory of inference has been developed only in the last three or four decades...." (Suppes 1957, p xv)

Suppes giver her udtryk for, at der findes en formel slutningsteori, men som vi så i kapitel 1 er det ikke korrekt. Første-ordens logik er nok formaliserbar, men den er hverken syntaktisk fuldstændig eller afgørlig. Højere ordens logikker kan ikke formaliseres (jvnf. afsnit 1.6). Suppes er udenfor enhver tvivl bekendt med de sætninger, der viser og afklarer formalismens begrænsninger, men vælger altså her at se bort fra dem eller undlader at drage konsekvensen af dem.

Følgende citat bestyrker fornemmelsen af, at Suppes er lidt ureflekteret overfor historiske forhold.

"... but the most important defect i this clasical tradition was the failure to relate logic as the theory of inference to the kind of deductive reasonings that are continually used in mathematics ..." (Suppes,1957,p xv)

Sammenholdes dette citat med det foregående virker det nærmest som om, Suppes mener, at matematikerne har været dumme, og at det er overraskende, så lang tid de har været om at tænke sig om. Man kan undre sig over, at fortidens videnskabsmænd ikke bragte det deduktive ræsonnement, som anvendtes i dele af matematikken i et nærmere forhold til logikken - hvis man vil. Man kan undersøge hvilke historiske omstændigheder, der kunne tænkes at forklare de to videnskabsgrenes indbyrdes relation eller mangel herpå. Men det virker lidt absurd at spørge, hvorfor de ikke har haft en bestemt relation til hinanden, som man selv, i kraft af sine egne historiske forudsætninger, synes er indlysende.

Suppes udtrykker sig også om logik og mængdelæres betydning for andre videnskaber.

"The principles of logical inference are universally applied in every branch of systematic knowledge. It is often said that the most important critical test of any scientific theory is its usefulness and accuracy in predicting phenomena before the phenomena are observed. Any such prediction must involve application of the principles of logic inference.....

The axiomatization of a theory within set theory is an important initial step in making its structure both exact and explicit....Indeed familiar philosophical problems like the reduction of one branch of empirical science to another may be made precise in terms of such set-theoretical notions as that of isomorphism. •••

The aim....is to present logic as part of mathematics and science and to show numerous detailled examples how relevant logic is even to empirical science like psychology.." (Suppes 1957, p xv-xviii)

I ovenstående giver Suppes udtryk for, at andre videnskaber kan formaliseres indenfor logik og mængdelære, og at de ville vinde derved. Videnskaberne ville på den måde blive mere eksakte og eksplicitte. Selv en empirisk videnskab som psykologi ville have godt af en mængdeteoretisk axiomatisering.

En sådan umodificeret reduktionisme plejer at høre sammen med et positivistisk videnskabssyn. Citatet viser ikke antydning af, at en sådan reduktionisme skulle være problematisk. Eksemplet med at axiomatisere psykologi forekommer grotesk - i hvert fald, hvis man har intentioner om, at psykologi skal sige noget essentielt om mennesker som mennesker og ikke som et tingsliggjort konglomerat af fysisk-kemiske processer.

Han udtaler sig også om mængdelæren som grundlagsdisciplin inden for matematikken:

"I denne bog udvikles mængdelæren axiomatisk snarere end intuitivt. Flere overvejelser har styret valget af en axiomatisk tilgang. En er, at det er forfatterens synspunkt, at den axiomatiske udvikling af mængdelæren er blandt den moderne matematiks mest slående bedrifter. Begreber som var vage og ubehageligt ueksakte i årtier og til tider endog i århundreder kan gives præcis betydning. ... Den mest påtrængende overvejelse er imidlertid opdagelsen af forskellige paradoxer i naiv, intuitiv mængdelære, gjort omkring 1900, som tillader eksistensen af objekter, som har en hvilkensomhelst egenskab. En særlig begrænset axiomatisk tilgang er nødvendig for at undgå disse paradoxer ...

...med få undtagelser kan de størrelser, som studeres og analyseres i matematik betragtes som visse særlige mængder eller klasser af objekter. Det betyder, at de forskellige grene af matematik kan defineres formelt indenfor mængdelære. Som en konsekvens heraf kan mange fundamentale spørgsmål om matematiks natur reduceres til spørgsmål om mængdelære." (Suppes, 1960, p 1-3)

Når man læser ovenstående, kan man let foranlediges til at tro, at mængdelæren er udviklet for at matematikken kunne have et godt og solidt grundlag.

Det er en ofte gjort fejltagelse at tro, at mængdelæren begyndte som en grundlagsdisciplin.

Som omtalt i afsnit 1.4. skabte Cantor mængdelæren, som en matematisk teori på linie med så mange andre. Hans lære blev mødt med megen skepsis for ikke at sige afvisning i meget lang tid. Det var i forbindelse med studier af rækkeudvidelser og singulariteter i fourier-rækker, at han fik ideen til udvikling af abstrakt mængdelære.

Den elementære mængdelære blev først brugt i forbindelse med grundlagsproblemer af Dedekind i "Was sind und sollen die Zahlen". Det var en af de første axiomatiseringer af de naturlige tal. Bogen indledtes med et mængdeteoretisk kapitel. Mængdelæren blev først grundlagsdisciplin i forbindelse med det logicistiske program, hvor tallene så ud til at være logiske størrelser.

Men det er netop som grundlagsdisciplin, at mængdelæren har problemer. Man kan godt axiomatisere mængdelæren, så at man undgår paradoxerne, men derved opløses en af mængdelærens vigtigste konstruktioner, nemlig hierakiet af transfinitte kardinaltal, som ikke kan indfanges af en formalisering. (jvnf afsnit 1.6)

Endvidere er det ganske vist rigtigt, at det meste matematik kan formuleres mængdeteoretisk - og bliver det - men der er en række områder,hvor det kun er den elementære mængdelære, der bruges, hvor den mængdeteoretiske formulering kun er en ramme, der ikke er egentlig befordrende for indsigten og godt kunne undværes. (Klassiske matematiske discipliner som differential-og integralregning fx.). Kun indenfor få områder bruges avanceret mængdelære på en substantielt nødvendig måde.

Man kan altså kritisere Suppes for at fremstille logikken som mere fuldstændig end den er, for at have et reduktionistisk og historisk ureflekteret videnskabssyn, og for at fremstille mængdelæren, så det lægger op til at misforstå den faktiske udvikling af disciplinen og for at opfatte den mere afklaret og potent end rimeligt er. Han gør heller ingen steder opmærksom på, at der findes matematiksyn, der adskiller sig radikalt fra det, som han selv fremstiller.

3.3.2 Konsekvenser for undervisningen

Vi vil i dette afsnit se nærmere på, hvilke konsekvenser et undervisningssystem som 'Sets and Numbers' har for matematikundervisningen. (Systemet er beskrevet i afsnit 3.1)

'Sets and Numbers' skal illustrere 60'er matematikken, og vores vurdering af systemet vil ikke bestå i at sammenligne det med andet undervisningsmateriale indenfor samme tradition, men angå dets grundlæggende opbygning. 'Sets and Numbers' er valgt - lidt tilfældigt måske - fordi det i kraft af Suppes øvrige arbejder er muligt nøje at se, hvorledes en eksplicit udtrykt neologicistisk, altså videnskabsteoretisk, matematikopfattelse kan udmøntes i undervisningsprogrammer for børn.

Systemet har endvidere den fordel for vores formål, at det er ret tidligt - 1962, således at lærervejledningen implicit tager højde for, at lærerne i mange tilfælde næppe har et fortroligt forhold til mængdelære, og derfor er ret fyldig i sin argumentation.

'Sets and Numbers' starter med mængder, indfører tal som egenskaber ved mængder, aritmetiske operationer med tal defineres udfra manipulationer ved mængder, osv. Suppes argumenterer med, at mængder af fysiske objekter er mere konkrete end tal. Det har han naturligvis lov at mene. For os at se forlanger han betydelige abstraktionsevner af eleverne. For at forstå at 'et tal er en egenskab ved en mængde' skal de først fatte begrebet 'mængde', forstået som en vilkårlig samling af objekter; dernæst begrebet 'egenskab ved en mængde', som i det konkrete tilfælde er antallet af elementer i mængden. Umiddelbart forekommer det os svært og abstrakt for et syvårs barn. Under alle omstændigheder favoriserer det elever med gode forudsætninger for at udvikle intellektuelle abstraktionsevner. Disse forudsætninger ved vi idag er klassespecifikt fordelte, således at undervisning, der i særlig grad fordrer disse, som tendens vil selektere eleverne efter deres sociale herkomst.

'Sets and Numbers' har en spiralformet opbygning. På ethvert sted i systemet er de nye begreber en videreudvikling af begreber, der er indført tidligere. Det er en stiv opbygning forstået på den måde, at det vil være meget svært at forestille sig nogle af afsnittene byttet om, så man kunne tage et afsnit på en andet tidspunkt end beregnet. På ethvert tidspunkt er det givet, hvad der skal gennemgås og indlæres. Det betyder bl.a., at man ikke på et givet tidspunkt kan inddrage et problem i undervisningen, som eleverne er stødt på i hverdagen ,og som på en eller anden måde indeholder matematik. Lærerens dispositionsfrihed er stærkt beskåret. Eleverne er bundet til lærebogens systematiske fremadskriden og kan ikke udvikle noget selvstændigt forhold til faget. De umyndiggøres, fordi de ikke har nogen reel chance for at diskutere og påvirke undervisningens indhold og opbygning.

Matematikundervisning i den her diskuterede udformning kan ikke begrundes med argumenter, der er forbundet til børnenes erfaringer. Eleverne vil have svært ved at forstå, hvorfor de skal lære matematik udover at det skal de, fordi de går i skole. Læreren vil som eneste begrundelse kunne sige, at det, som eleverne lærer nu, skal de lære, fordi de skal bruge det senere. Og det er ikke nogen begrundelse i den betydning, som vi her lægger i ordet.

Det er ikke kun børnenes erfaringsverden, der (måske) er begrænset. Manglen på begrundelse har sin rod i undervisningsprogrammets karakter. I og med at det er matematikkens begrebsstrukturer, dens formalismer - men netop ikke den betydningsstrukturer, ikke problemfeltet - der gøres til genstand for undervisning, bliver det i særlig grad vanskeligt at begrunde undervisningen. Pointen er jo også, at hensigten med undervisningen ikke er at give eleverne (ansatser til en erkendelsesteoretisk) indsigt i matematik, men at beherske dens formelle udtryk, dens begreber blottet for betydning. Det er ihvert fald ikke - som i Lakatos' ideal - en snak om et problem, hvori man fremsætter gæt, forsøger at bevise dem osv., og på den måde arbejder sig ind i problemets kompleksitet og udvikler begreber som indfanger og beskriver den indvundne indsigt.

Man kan anfægte det berettigede i at gøre mængdelære til grundlaget i matematikundervisningen. Vi vil gøre det på tre måder. For det første: Hvis det logicistiske program lod sig gennemføre, hvis matematik ubetvivleligt var logik, og tal egenskaber ved mængder, kunne man måske forsvare det; men det er ikke tilfældet. For det andet: Hvis mængdelæren virkelig var et afklaret grundlag for matematikken, ville det være et væsentligt argument. Men så enkelt er det ikke. Cantors oprindelige mængdelære er inkonsistent og formaliseringer kan ikke tilbunds løse problemerne. For det tredje: Hvis mængdelære spillede en betydelig indholdsmæssig rolle i den matematik, som skolebørn lærer, kunne mængdeformalismen måske have sin berettigelse; men igen er det ikke tilfældet. Som før nævnt er det kun indenfor ret avancerede matematiske områder, at mængdelæren virkelig har betydning. Den videnskabsteoretiske begrundelse for at gøre mængdelære til grundlaget i matematikundervisningen kan således betvivles.

Opbygningen af 'Sets and Numbers' med videreudvikling på basis af tidligere indførte begreber uden sidespring fra 'den rette vej', må give eleverne det indtryk, at matematik er en evig sikker sandhedstransformation. Der stilles ingen steder i systemet spørgsmålstegn ved begrebernes rigtighed. Det nævnes heller ingen steder, at der faktisk kan have været matematikere, der havde en anden opfattelse, at der har været diskussion frem og tilbage, at begreberne ofte har en lang udvikling bag sig. På den måde må eleverne få indtryk af matematik som et færdigt produkt, der af og til tilføjes nye sandheder. Tendentielt får de et produktfikseret og historisk ureflekteret videnskabssyn.

Til sidst vil vi kritisere et undervisningssystem som 'Sets and Numbers' for at omgive matematikundervisningen med den autoritære atmosfære, som Lakatos nævner. Ganske vist er 'Sets and Numbers' ikke rigtigt axiomatisk-deduktivt opbygget, men det har alligevel de væsentlige karakteristika tilfælles med den undervisning, som Lakatos kritiserer.

Undervisning efter 'Sets and Numbers' og lignende undervisningssystemer fordrer som rigtig axiomatisk-deduktiv undervisning af sine elever, at de lytter uden at stille spørgsmål. Læreren er også her den, der ved besked. Problemet er fortrængt og samtalen udelukket. Det skaber et polariseret, autoritært lærer-elev forhold. Det har ikke noget at gøre med, hvorvidt den enkelte lærer er flink og 'demokratisk' eller dum og autoritær. Problemet grunder sig i undervisningsindholdets struktur.

I afsnit 3.2 fremsatte vi en formodning om, at axiomatisk-deduktiv matematik - eller det der ligner - så at sige er 'født' med et autoritært væsen. Lakatos så den autoritære atmosfæres oprindelse i blokeringen af elevernes kritiske medleven i undervisningen. Vores formodning går på, at denne type matematik er bærer af alle autoritetens symboler, og derfor både fremtræder autoritær og samtidig aktiverer elevernes erfaringer med autoriteter, så de reagerer autoritært.

Alt i alt kan vi sige, at en undervisning, der er bygget op som 'Sets and Numbers' er behæftet med et alvorligt begrundelsesproblem, forhindrer elevernes indflydelse på undervisningen og omgiver sig med en autoritær atmosfære. Desuden kan man betvivle den pædagogisk-psykologiske hensigtsmæssighed og den videnskabsteoretiske begrundelse for en mængdelære-baseret matematikundervisning. Endvidere har vi argumenteret for, at en sådan undervisning giver et falsk billede af matematik.

3.4 Forskellige matematikdidaktiske principper

I afsnit 3.1 så vi, at den bagvedliggende ide for opbygningen af Suppes' matematikundervisningsprogram var at formidle en børneudgave af videnskabsfaget matematik, som han selv så det. Suppes gav altså et klart svar på spørgsmålet: Hvad skal der undervises i i faget matematik? Didaktik er betegnelsen for overvejelser over dette spørgsmål. I dette afsnit vil vi præsentere og diskutere nogle svar på spørgsmålet. Vi bygger på arbejder af Ole Skovsmose, som afgrænser fire forskellige typer af svar, didaktiske principper kaldet. Suppes' bud på matematikundervisningen var 'Sets and Numbers', der som nævnt var et forsøg på at lave en børneudgave af den videnskabelige matematik. Han begrundede det pædagogisk med at henvise til at mængder var mere konkrete end tal, men iøvrigt kom den stærkeste begrundelse fra hans videnskabsteoretiske opfattelse af mængdelæren som matematikkens uomtvistede fundament. På baggrund af denne var han ikke i tvivl om, at det logisk fundamentale også skulle være det pædagogisk grundlæggende.

Suppes didaktiske ideer bygger snævert på faglige synspunkter. Mere generelt kan vi sige, at en didaktik kan begrundes med pædagogiske, faglige og kvalifikationsteoretiske argumenter, som dog ikke altid kan holdes skarpt adskilte. De pædagogiske overvejelser angår udvælgelse af stof til undervisningen, metoder i dens praktiske tilrettelæggelse samt grundlæggende dannelsesprincipper. De faglige overvejelser drejer sig om, hvorledes en faglig lødighed sikres; det forudsætter en identifikation og karakteristik af, hvad der udgør fagets centrale dele, altså videnskabsteoretisk analyse og refleksion. Endelig handler de kvalifikationsteoretiske overvejelser om, hvilke kvalifikationer, bredt forstået, undervisningen - erklæret eller ej - sigter imod.

I vores præsentation af de didaktiske principper vil vi lægge vægten på deres begrundelse og dernæst prøve at vurdere dem udfra en pædagogisk og en videnskabsteoretisk synsvinkel. Den pædagogiske synsvinkel kom til udtryk i kritikken af Suppes og vil især dreje sig om, hvilke begrundelser, det er muligt at opstille for undervisningen overfor eleverne, hvilke muligheder de har for indflydelse på undervisningen, forholdet til læreren, og dennes dispositionsmuligheder. Den videnskabsteoretiske synsvinkel angår især en vurdering af, hvilket indtryk, undervisningen formidler af matematikken som lærebygning, af drivkræfterne for dens historiske udvikling, dens historiske og samfundsmæssige placering og som middel til omverdensbeskrivelse.

Til slut skal vi pointere, at det er didaktiske principper for matematik og ikke selve matematikundervisningen, som vi diskuterer. Didaktiske principper er vigtige at forholde sig til, fordi de sætter nogle muligheder og umuligheder for og måder at tænker på undervisningen, men de omsættes ikke mekanisk til konkret undervisning. I denne proces spiller mange andre forhold ind: lærerens person, de fysiske og materielle rammer, tradition m.v.

3.4.1 Et strukturelt princip

Det første matematikdidaktiske princip, som Skovsmose gennemgår, kalder kan et strukturelt princip. Det kan siges at være det hovedprincip, som 60'er matematikken hører under. Princippet fik en præcis formulering af amerikaneren Jerome S. Bruner i bogen "Uddannelsesprocessen", hvis første amerikanske udgave kom i 1960. Det hedder heri, at "... et fags pensum bør være bestemt at den mest indgående forståelse, der kan opnås af de fundamentale principper,som giver faget dets struktur" (Bruner, Uddannelsesprocessen, 1970, p 40, her cit. fra Skovsmose 1979, p 16). Bruner ser ingen grundlæggende vanskelighed forbundet med at omsætte videnskabsfaget til undervisningsfaget; derfor kaldes en strukturel undervisning også ofte for videnskabscentreret undervisning.

For matematikkens vedkommende bygger identifikationen af de grundlæggende strukturer, der ønskes videreformidlet, på analyser af logicisterne og Bourbaki. Den logicistiske analyse har vi beskrevet i kapitel 1; dens program gik i korthed ud på at undersøge matematikkens logiske fundament. Den bourbakistiske analyse er især kommet til udtryk i udgivelser under psedonymet Nicholas Bourbaki. Bag dette navn skulte sig fortrinsvis franske matematikere.

I Bourbaki's analyse undersøges og efterspores matematiske teoriers indbyrdes logiske sammenhænge og fælles strukturtræk. Matematikkens arkitektur afdækkes. Det væsentlige er de matematiske elementers (teoriers) indbyrdes relationer, ikke deres specifikke egenskaber. Relationerne fastlægges fuldstændigt af axiomer, der bliver den axiomatiske metode essentiel i denne analyse. Grænserne mellem disciplinerne udviskes; i stedet træder et net af strukturelle ligheder frem. Mængdelæren er det sprog, der tales i.

Bourbaki identificerede matematikkens tre "moderstrukturer", nemlig 1) en mængde med en komposition, 2) en mængde med en ordningsrelation, 3) en mængde med en omegnsstruktur. Disse to analyser - den logicistiske og den bourbakistiske - er grundlaget for den strukturalistiske matematikforståelse.

Et strukturelt princip hævder altså som didaktisk grundsynspunkt, at der skal undervises i fagets grundstrukturer. Den strukturalistiske analyse identificerer for matematikkens vedkommende disse grundstrukturer. Til grund for en undervisning, baseret på mængdelære, ligger således en strukturalistisk matematikforståelse. Mængdelæren får sin centrale placering, fordi den er sproget, hvori der tales om det, som denne opfattelse udpeger som det centrale i matematikken: strukturerne.

Bag et strukturelt princip ligger en væsentlig pædagogisk overvejelse, eller i dette tilfælde snarere en antagelse, nemlig:

> "logisk grundlæggende både kan og skal gøres til det pædagogisk grundlæggende. Når fagets grundstrukturer er identificeret, kan de danne udgangspunkt for en tilrettelæggelse af undervisningsindholdet. I en vis forstand kan man sige, at strukturerne "projiceres" ind i undervisningssfærer."
> (Skovsmose, 1979, p. 17)

Strukturalismen har for matematikkens vedkommende hentet støtte til dette punkt i nogle undersøgelser foretaget af den schweiziske psykolog Jean Piaget. Disse undersøgelser blev taget til indtægt for en påstand om, at strukturalismens tre moderstrukturer korresponderer til visse basale træk i barnets måde at relatere sig til omverdenen på, og at matematik i en strukturel opbygning derfor ville falde barnet særligt naturligt. Påstanden kan næppe holde for et nærmere syn.

Det strukturelle princip har været gennemgående i den omlægning af naturfagsundervisningen, der har fundet sted siden 1960, og som har været stærkt inspireret og støttet af OEEC/ OECD. "Kristensen og Rindung", der stadigvæk er det mest benyttede matematiklærebogssystem i de danske gymnasiers matematikundervisningssystem opbygget efter et strukturelt princip. Det blev skabt i forbindelse med indførelsen af den ny matematik i Danmark. Begge forfattere, Erik Kristensen og Ole Rindung, var aktive i det forarbejde, der fandt sted forud for reformen i OEEC- og fællesnordisk regi. (Se Skovsmose, 1979, kap. I)

Vores kritik af Suppes (i afsnit 3.3.2) kan uden vanskelighed udstrækkes til at omfatte det strikturelle princip som didaktisk princip for matematikundervisningen. Vi skal ikke gentage den her, men tilføje et par punkter.

En videnskabscentreret undervisning, som et strukturelt princip udtrykker, forudsætter en logisk analyse og systematisering af det pågældende vidensområde, og dermed at en sådan afklaring kan finde sted, at faget er videnskabsteoretisk gennemreflekteret. Det mener vi er langt fra at være tilfældet med matematik, hvorfor en strukturel matematikundervisning vil være videnskabsteoretisk uhæderlig ved implicit at postulere en afklarethed, som vi anser for ubegrundet.

På baggrund af beskrivelsen af strukturalismen kan vi nu bedre forklare hvorfor mængdelære-baseret matematikundervisning er født med et begrundelsesproblem: Indsigten i undervisningens indhold beror på indsigten i sammenhængen mellem de stukturer, som udgør indholdet. Denne indsigt er forbeholdt de få højtuddannede, professionelle matematikere, og således umyndiggøres ikke blot eleverne, men også de menige lærere, som vil være forholdt denne indsigt.

Vi kritiserede Suppes for at videregive et produktfixeret og historisk ureflekteret matematikbillede. For det strukturelle princips vedkommende kan vi udvide denne kritik. Strukturalismen interesserer sig ikke for matematikkens opståen og udvikling, slet ikke for drivkræfterne heri eller forholdet til virkelighed og samfund. Mogen Niss har kritiseret seminariernes liniefagsundervisning i matematik, som er meget strukturmatematisk, for at fremstille matematikken som et spil, en begrebseksercits, med vægten på spillereglerne fremfor indholdet. Om drivkræfterne for matematikkens udvikling formidles intet indtryk. I stedet et statisk billede, hvor

> "... matematikken udvikler sig ved indadvendt selvbeskuen i én stor abstraktions- og generalisationsspiral. ...
> ... Matematikken, dens opgaver og placering (fremstår) som uafhængig af historiske og samfundsmæssige omstændigheder. Herved bliver faget færdigt, udviklingsløst, urørligt, løsrevet fra tid og rum - et platonisk ideal, en krystal man kan dreje og beskue og beundre, men ikke komme ind på livet af."
> (Niss, 1978, p. 9-10)

Matematikkens muligheder og begrænsninger som middel til omverdensbeskrivelse - det der tendentielt perspektivforkortende kaldes den anvendelser - interesserer ikke et strukturelt princip, og problemstillingen kan næppe begribes udfra dets position.

3.4.2 Et genetisk princip

Overfor det strukturelle princip står et genetisk princip, der er en reaktion mod den strukturalistiske matematikundervisning. I et genetisk princip er det en anderledes faglighed, der sættes i højsædet - her drejer det sig om en aktivitet gående ud på at udvikle begreber i forbindelse med visse problemstillinger. Fremhævelsen af aktiviteten betyder, at det er udviklingsbegrebet, der kommer til at stå i centrum. Skovsmose udtrykker det således:

> "I stedet for at organisere stoffet, således at grundlæggende strukturer meddeles, skal det opbygges så indsigt og forståelse genskabes og gen-opbygges, Underviserens og didaktikerens opgave bliver at finde et udgangspunkt, der naturligt fører til spørgsmål og problemformuleringer, således at eleven, ved at forfølge disse, inddrages i en egentlig erkendelsesproces. Elevens vej gennem stoffet kommer til at ligne en "første" undersøgelse og afdækning af problemområdet."
> (Skovsmose, 1979, p 22)

Det syn på, hvad der er essentielt matematisk, som her udtrykkes, kan videnskabsteoretisk begrundes med Lakatos' matematikfilosofi, som vi har beskrevet i afsnit 2.2.

Det genetiske princip indeholder to forskellige udviklingstanker, en heuristisk og en historisk.

"Kernen i de historie-genetiske synspunkter er, at et pensum kan opbygges naturligt, hvis der tages behørig hensyn til det historiske forløb, der har givet vidensområdet dets form. Dette betyder ikke, at man må gentage alle de fejl, der er gjort undervejs. Der skal ikke være tale om en historisk genfortælling. Men tanken er, at historien er med til at udpege en vis form for "naturlighed" og dermed en pædagogisk sekventering."
(Skovsmose, 1979, p 23-24)

Det heuristisk-genetiske princip karakteriserer Skovsmose bl.a. med den hollandske matematiker Freudenthal:

"... på det metodiske plan (ligger) en ide om en sokratisk undervisningsform. Læreren skal være spørgende, støttende, vejledende, ikke forklarende og docerende. Iøvrigt er det nok vigtigt at bemærke sig, at når Freudenthal taler om, at der skal gøres matematiske opdagelser, tænker han på det i en subjektiv form - den studerende oplever, at der gøres en opdagelse - ikke i en objektiv form."
(Skovsmose, 1979, p.26)

Det historiske og det heuristiske genetiske princip kan godt have lighedspunkter, men det behøver ikke at være tilfældet.

Nogle af de vigtigste personer for udviklingen af det genetiske princip er tyskerne A.I. Wittenberg og Martin Wagenschein, amerikaneren Morris Kline og hollænderen Hans Freudenthal.

Freudenthal var leder af det hollanske institut for udvikling af matematikundervisning (IOWO) i fem år, og har der været med til konkret at udarbejde undervisningsforløb, der bygger på et heuristisk-genetisk princip.

" En central ting ved IOWO projekterne er, at matematikundervisningen tematiseres. Man understreger, at det er vigtigt, at temaet har en helhed i sig selv. Eleverne skal kunne orientere sig i emnet, inden et egentligt arbejde begynder. Man skal kunne diskutere emnet; det skal have forskellige indgangstærskler".

Flere af eksemplerne i "Five years IOWO" knytter sig til geometriundervisningen. En pointe er, at hvis denne skal knytte an til barnets ikke-matematiske forforståelse, må man betragte den tre-dimensionale geometri som mere grundlæggende end plangeometrien. Vi lever netop i et tre-dimensionalt rum.

Hvorledes en sådan geometriundervisning - hvor bl.a. rumorientering spiller en væsentlig rolle - kan forme sig, redegøres der for gennem eksempler på temaer, der bærer overskrifter som : "en geometri-ø", "vores jord", "bygning af en bungalov" og "skib ohøj"." (Skovsmose,1979,p. 28)

Det sidste er et eksempel, hvor der indgår to skibe. Det ene skib er i havsnød og det andet skal prøve at finde dets position ud fra nogle opgivelser af placeringen af nogle genstande på land i forhold til hinanden. Dernæst er problemet, hvordan skibene kan være sikre på at ramme ind i havnen ud fra havnelysenes placering osv.

Vores vurdering af det genetiske princip - og de følgende principper - må blive mere foreløbig og spekulativ end vurderingen af det strukturelle princip, fordi de ikke er særligt udbredte, og fordi vi ikke har egne erfaringer med dem, men kun kender dem af omtale.

Vores pædagogiske vurdering af et genetisk princip er, at det undgår meget af den kritik, vi gav af Suppes og det strukturelle princip. Det genetiske princip har de pædagogiske fordele, at eleverne mere direkte føler, at de "er med" til at udvikle nogle af begreberne, og dermed får eleverne et mere personligt forhold til disse begreber. Dette bevirker, at eleverne er mere motiverede og dermed får læreren ikke så stort et begrundelsesproblem. Abstraktionerne er bundet til et konkret udgangspunkt, og har dermed en mindre "abstrakt" og løsrevet karakter end den type abstraktioner, der kræves af strukturmatematikken. Det vil har være muligt i nogen udstrækning at begrunde undervisningen, eleverne kan få indflydelse på emnevalget og betragtes ikke som nogle, der bare skal fodres med færdigtygget matematik. Lærer-elev forholdet bliver et sokratisk mester-lærling ideal med stort rum for elevernes søgende aktivitet. Læreren vil skulle yde et egentligt pædagogisk arbejde for at sætte en udvikling i gang, og vil ikke være umyndiggjort og begrænset til at tilrettelægge en færdigpakket stofmængde teknisk-metodisk.

Begrænsningen hidrører fra, at de problemstillinger eller emnevalg, der skal begrundes overfor eleverne, er pålagt et krav om at skulle lede til rimeligt væsentlige matematiske begrebsdannelser, som kan gøre det vanskeligt at give en begrundelse, som er ægte i forhold til børnenes udgangsposition.
Det problem, som Lakatos bruger i sin bog (se 2.2): forholdet mellem hjørner, kanter og flader hos polyedre, f.eks. forudsætter bestemte, formentligt socialisations-satte former for

intellektuel nysgerrighed, som næppe er naturligt til stede hos alle elever.

Et genetisk princip vil i vores øjne udmærke sig ved at formidle indsigt i indholdet af matematiske teorier i modsætning til eksercits-lignende træning i deres formalismer. Der er nok den svaghed, at genetisk princip meget er bygget op omkring udviklingen af enkeltemner, og dermed lægger det ikke op til en sammenhængende forståelse af matematikken - i første omgang i hvert fald.

Sådan som det genetiske princip er præsenteret vil en undervisning efter det formidle en opfattelse af at drivkræfterne bag matematikkens udvikling udgøres af en rationel, problemløsningsadfærd à la Lakatos' gæt og gendrivelses-logik - indenfor faget alene - og det er ikke altid således, at tingene hænger sammen. Man skal være opmærksom på, at princippet kan efterlade det indtryk af matematik, at det består i at udvikle begreber og se sammenhænge i diverse eksotiske situationer.

Det heuristisk-genetiske princip giver sig ikke af med at beskrive historiske og samfundsmæssige forhold, og det historisk-genetiske forstår kun den historiske udvikling som en en internt matematisk rationel udviling, hvor man kan frygte at historiske forhold reduceres til det anekdotiske. Dermed formidles i realiteten, at historiske omstændigheder er uden betydning for matematikken, hvor vi forstår historie som en beskrivelse af den samfundsmæssige totalitet, dens dynamik og samspillet mellem samfund og natur. Dog må vi medgive, at i det omfang arbejdet ind i matematikkens begreber tager sit udgangspunkt i en rimeligt virkelig "virkelighed", formidles et indtryk af matematik som rodfæstet heri. Hvorvidt det også leder til "konkret funderede ideer om matematikkens almindelige betydningsfuldhed i kraft af anvendelser" (Niss, 1978, p 9) er svært at vurdere. Det vil formentligt afhænge af, hvorvidt matematisk modelbygning gøres til genstand for undervisning. Noget sådant står ikke de genetiske princippers program, men udelukkes vel heller ikke af dem.

3.4.3 Et pragmatisk princip

Det genetiske princip opstod som en reaktion mod strukturmatematikkens tilsløring af matematikkens proceskarakter - strukturmatematikkens skjulen af matematikkens rationelle udvikling. På lignende vis er der kommet andre reaktioner på andre egenskaber eller mangler ved strukturmatematikken.

Et vigtigt argument mod strukturmatematikken er bl.a., at den ikke giver eleverne indtryk af, at matematik har noget med modelbygning af virkeligheden at gøre. Det har netop været hoveddrivkraften bag udviklingen af det pragmatiske princip. Man har forsøgt at finde alternativer til 60'er matematikken gennem en anvendelsesrelateret matematikundervisning:

> "Udgangspunktet skal være en livspraksis eller et konkret problem. Derpå må man søge at opbygge matematisk viden, der er af betydning for problemets løsning. Når det er anvendelsen (modelbygningen), der ønskes gjort til det centrale i matematikundervisningen, kan man tale om et pragmatisk princip."
> (Skovsmose, 1979, p 31)

Hvor et strukturelt princip vil starte med formelle definitioner, som dernæst anskueliggøres med eksempler, vil et pragmatisk princip gå induktivt til værks: Begynde med eksempler, arbejde med intuitiv begrebsdannelse og endelig komme til den formelle begrebsdannelse.

Skovsmose omtaler to forsøg på at realisere en anvendelsesorienteret matematikundervisning på det gymnasielle niveau: Allan Tarp og Christoffer Ormell. Allan Tarp udtrykker i " Matematiske vækstmodeller " sit syn på matematik:

> "Matematik er noget med at løse problemer fra virkeligheden og noget med at almindeliggøre resultaterne, så de kan benyttes til lignende problemer. Man kan sige, at matematik er et forsøg på modelbygning af virkeligheden og således ofte resulterer i opbygningen af en model. De problemer, der giver anledning til modellen, behøver ikke at komme direkte fra virkeligheden, men kan også komme indirekte derfra ved at være problemer i en allerede eksisterende model af virkeligheden. En matematisk model kaldes også en matematisk teori, og den består af en række matematiske objekter (begreber) samt en række regler, der gælder for disse objekter. Men objekterne og reglerne er ikke opstået på vilkårlig måde, de er opstået fra virkeligheden. En matematiker er en modelbygger og kan da være beskæftiget enten med at finde frem til en ny model eller med at viderebygge en allerede eksisterende model eller med at undersøge, hvor meget af virkeligheden modellen dækker, og om den evt. skal ændres. Man beskæftiger sig med faget, fordi der i samfundet er behov for modelbygning af virkeligheden. Ved virkeligheden forstås nærmest det, man kan pege på. F.eks.

tilhører et markhegn virkeligheden; men en linie gør ikke; thi den er abstraheret fra virkeligheden.
Kort sagt: Matematik er modelbygning af virkeligheden."
(Allan Tarp: Matematiske vækstmodeller, 1974, citeret fra Skovsmose 1979, p 32-33)

Dele af matematikken kan temmelig direkte tolkes som opstået som svar på visse problemer i virkeligheden; men det er dog ikke det hele; der er også udviklet en del ren matematik. Denne opfatter pragmatikerne som en modelbygningskapacitet, der er udviklet for at forbedre de anvendte modelbygningsredskaber.

Ormell kalder også matematik for et problemløsningsredskab - teorien om hypotetiske situationer.

Christoffer Ormell var leder af projektet: The Schools Council Sixth Form Mathematics Curriculum Project", der varede fra 1969 til 1976. Dette projekt resulterede bl.a. i serien "Mathematics Applicable", der er beregnet for det gymnasiale niveau, og et system, der lægger meget vægt på modelanvendelsen - på matematikken som middel til løsning af praktiske problemer.

Ormell tilknytter sig amerikaneren C.S. Pierce's pragmatiske filosofi og matematiksyn, han kalder sågar sit eget matematiksyn for "a Piercian view of matematics". Hvorvidt Pierce ville bryde sig om denne sammenligning skal her være usagt.

Det pragmatiske princip tager udgangspunkt i modelbygningssituationen. Da man her direkte kan henvise til matematikkens anvendelighed i virkeligheden, vil læreren ikke nødvendigvis få noget begrundelsesproblem overfor eleverne. Det vil dog ofte være et problem at finde anvendelser, der vedkommer elevernes hverdag, eksemplerne vil ofte virke konstruerede. Dette sammenholdt med, at undervisningsforløbet virker færdigt på forhånd, og dermed begrænser elevernes medindflydelse og medvirken til udvikling af begreberne, kan alt i alt bevirke, at det komme til at skorte på elevernes motivation og reelle indflydelse.

Et pragmatisk princip lægger op til en diskussion af begreberne model og virkelighed. Det har den pædagogiske fordel, at det fremgår, at matematikken kan bruges til noget, hvilket er en af forudsætningerne for at kunne forholde sig kritisk til faget, men princippet viser ikke ud over det indholdsmæssige og undervisningen kan udmærket foregå meget lærerstyret.

Det pragmatiske princip efterlader det indtryk, at matematik, det er noget, der anvendes, og de dele, der ikke direkte gør det, er til eller skabes for at gøre anvendelserne nemmere. Matematikkens udvikling ses som en stadig forfinelse og forbedring af et probelmløsningsredskab, forstået på den måde at hvis der er opstået problemer i modelanvendelsen er de blevet løst. De egenskaber ved matematikken, som muliggør dens karakter af en sammenhængende teoribygning - det aspekt, som strukturalismen fokuserer på - vil det kunne være svært at belyse udfra dette princip. Ligeledes kræver det nok en meget bred definition af anvendelser, hvis alle matematikkens begrebsudviklinger skal rummes inden for den pragmatiske matematikopfattelse.

Det pragmatiske princip præsenterer matematik som et problemløsningsredskab. Dette giver mulighed for en diskussion af matematiske modeller, deres muligheder og begrænsninger. Faren er, at problemerne reduceres til illustrationen af matematikken, så den fremtræder som et neutralt, teknisk problemløsningsredskab, således at en diskussion af de samfundsmæssige interesser, der er knyttet til matematikken, negliceres. Man kan frygte, at princippet lægger op til noget forkortede perspektiver på matematikkens historie og dens samfundsmæssige placering. Princippet har den begrænsning, at det ikke indeholder kriterier for, hvilken form for anvendelser, man skal prioritere. Det kan let resultere i dyrkelse af spredte og tilfældige anvendelser og føre til en ren nyttefilosofi.

3.4.4 Et eksemplarisk princip

De tidligere nævnte didaktiske principper kan siges at være temmelig direkte knyttet til en matematikopfattelse. Dette er ikke tilfældet med et eksemplarisk princip. Her er der nærmere tale om et organisationsprincip, hvis hovedsigt er at sikre undervisningens almendannelse, samtidig med at stofmængden er stadigt ekspanderende. Betragtningerne hører hjemme i en tysk dannelsestradition. Væksten i stofmængden ses som en væsentlig fare for almendannelsen, fordi den medfører en forringelse af undervisningen ved at grundigheden forflygtiges. Og grundighed forudsætter begrænsning. Skovsmose karakteriserer et eksemplarisk princip på følgende måde:

"Ifølge et sådant er det muligt at nå til en viden om almene og generelle sammenhænge gennem en fordybelse i et specielt problem. Et sådant kan være et spejlbillede af generelle problemstillinger. ... Den erkendelsesteoretiske antagelse er, at det enkelte eksempel kan formidle en forståelse af generelle sammenhænge. ... En markant forskel til det pragmatiske princip er, at udvælgensen af en eksemplarisk problemstilling forudsætter nøje analyser og diskussioner. Det forudsætter, at problemer og relationer mellem problemer vurderes. Ud fra et pragmatisk princip kunne man fristes til at arbejde ud fra mange spredte og tilfældige anvendelser."
(Skovsmose, 1979, p 37-38)

Et eksemplarisk princip bygger altså på den hovedantagelse, at det er muligt ud fra et særligt udvalgt problem og gennemarbejdelsen af dette at kunne generalisere så meget, at undervisningen kan bygges op omkring sådanne problemer. Det er i den sammenhæng væsentligt at understrege, at det ikke er et hvilket som helst problem, der vil være velegnet. Problemet skal derimod omhyggeligt udvælges, så det egner sig i den konkrete situation.

Hoveddrivkraften for udviklingen af et eksemplarisk princip har været tyskeren Martin Wagenschein. Han har især arbejdet med et eksemplarisk princip inden for matematik og naturvidenskabelige fag, og dette arbejde har resulteret i talrige artikler, som Skovsmose kommenterer således:

"Wagenschein får vist, at en matematikundervisning kan forløbe efter andre veje end en (logisk) systematisk. Han viser, hvorledes et problem kan danne indgang til et stykke matematisk teori, hvorledes en behandling af problemet kan føre længere og længere ind i matematikken, hvorledes nye problemstillinger dukker op, og hvorledes en egentlig "opdragelsesfærd" kan tage form. Wagenschein får vist, hvad en fordybelse i matematikken på elementært niveau vil sige.
De eksempler Wagenschein fremviser, er i en vis henseende præget af en stor traditionsbundethed. Han gør ikke noget videre forsøg på at komme ud over faggrænserne. Og hans "indgangsproblemer" kan virke traditionelle. De er valgt, så de peger ind i og ikke ud over matematikken."
(Skovsmose, 1979, p 39)

Wagenschein indser nødvendigheden af en ændring af rammerne for undervisningen, hvis en undervisning efter et eksemplarisk princip skal kunne realiseres. Her tænker han selv på at samle de forskellige fag i tidsmæssige klumper.

Det eksemplariske princip er et organisationsprincip, der søger at reducere den stadigt voksende stofmængde på en forsvarlig måde. Det indeholder den pædagogiske fordel, at undervisningen skal tage udgangspunkt i en problemstilling, der kan fange elevernes interesse. Sådan som systemet er formuleret er det også meget fleksibelt, idet der vil være ret stor valgfrihed med hensyn til udgangspunkt. Umiddelbart virker det også fornuftigt at arbejde i dybden med enkelte ting, og så ud fra det få en bredere forståelse af nogle arbejdsmetoder og sammenhænge. Vi synes med Skovsmose, at dets væsentlige begrænsning ligger i, at det peger ind i og ikke ud over matematikken, Dette gør, at vi tvivler på, om det kan tage ordentligt højde for begrundelsesproblemet og indfange matematikkens historiske og samfundsmæssige placering. Princippet indeholder oplagt nogle interessante måder at organisere undervisningen på. Tyskeren Oskar Negt, som vi svagt berører i næste kapitel, har arbejdet videre med princippets vigtige kerne.

KAPITEL 4

FLERE PROBLEMER VED MATEMATIKUNDERVISNINGEN OG ET FORSØG PÅ PERSPEKTIVERING

I dette kapitel vil vi ikke beskæftige os med matematik og matematikundervisning udfra internt videnskabelige kriterier, således som vi hovedsageligt har gjort i det foregående. I kapitel 1 gjorde vi rede for det logicistiske og det formalistiske program, deres baggrund og videnskabelige resultater. De danner på væsentlige måder grundstammen i den strukturalistiske matematikopfattelse, som afgørende har præget undervisningen i den 'ny matematik'. I kapitel 2 præsenterede vi to hver på sin måde alternative matematikforståelser, dels for deres egen skyld, dels for at sætte de først omtalte i relief. I kapitel 3 kritiserede vi den undervisning, der kan komme ud af logicistisk/ formalistiske opfattelser, og præsenterede et vue over udbuddet af didaktiske principper.

Fælles for de matematikopfattelser og didaktiske ideer, som vi har omtalt hidtil, er, at ingen af dem i nævneværdig grad gør de samfundsmæssige forhold, hvorunder matematikken fostres og udvikles og indlæres, til genstand for refleksion. Matematik synes som videnskab at unddrage sig en forståelse i samfundsmæssige kategorier og som undervisningsfag at unddrage sig alle andre end faglige formålsformuleringer; de kønne ord i formålsparagrafferne bliver aldrig andet end draperier om en allerede etableret undervisningspraksis, hvis mål i realiteten ikke rækker ud over snævert faglige.

Ved denne lejlighed skal vi ikke beskæftige os med matematikkens samfundsmæssighed, men nok med matematikundervisningens forhold til den samfundsmæssige helhed, som den er en del af. Vi vil uddybe forrige kapitels kritik af matematikundervisningen ved at se på dens samspil med samfundet og runde af med at holde matematikundervisningens umulighed, som den tegner sig i lyset af kritisk pædagogik, op mod dens nødvendighed, som den kan hævdes ud fra befolkningens behov for kompetance overfor samfundets udvikling. Kapitlet søger ikke sin styrke i detaljens nuancering, men prøver snarere i skitseagtig form at indfange grundlæggende problemer ved matematikundervisningen i lyset af projektets forudgående dele.

I kapitel 3 gjorde vi rede for en række forhold, som vi anså for problematiske ved den 'nye' matematik. Vi brugte konkret Suppes' 'Sets and Numbers' som afsæt for kritikken, men mener nok den har gyldighed for hele genren. Suppes neologicistiske matematikopfattelse stemmer næppe helt overens med strukturalismens, men de er så meget i familie med hinanden, og har specielt den spirale opbygning til fælles, at udstrækningen af kritikken skulle være gyldig.

Vi kritiserede matematikundervisningen for at være autoritær, for ikke at kunne begrundes, for at blokere elevernes aktive medvirken i diskussionen af undervisningens indhold - man kan også sige at deltager-styring er umuliggjort, og for forskellige andre forhold. Man kan så spørge, om matematikundervisning nødvendigvis er sådan, eller om disse træk hænger sammen med en bestemt måde at organisere undervisningen på. Inden vi svarer 'ved ikke' til spørgsmålet vil vi komme med en par uddybende problematiseringer af matematikundervisningen

Matematikreformen i 60'erne som Suppes er en del af har 50'ernes naive teknologioptimisme som baggrund. Udfra nogle teorier om kilderne til økonomisk vækst ønskede man fra politisk hold at 'pumpe' de teknisk naturvidenskabelige uddannelser op og i denne sammenhæng skulle naturfagsundervisningen herunder matematikundervisningen reformeres og moderniseres. De ændrede kvalifikationskrav til arbejdskraften som teorierne om økonomisk vækst indeholdt, var generelle i deres indhold og udmøntedes ikke i særligt specifikke krav til de kvalifikationer, som matematikundervisningen (og de andre naturfag) skulle give. Naturvidenskaben var en produktivkraft, og en generel højnelse af vidensniveauet og de teknisk-naturvidenskabelige uddannelsers volumen måtte føre til intensiveret teknologisk udvikling og dermed give den ønskede økonomiske vækst. Formentligt udfra nogle forestillinger om, at det skulle være videnskabeligt forsvarligt, det som man foretog sig, blev det i første række universitetsmatematikere, der udformede principperne for matematikreformen. På denne måde satte den strukturalistiske matematikopfattelse sit stærke præg på den ny matematik. Det er imidlertid et åbent spørgsmål, om matematikreformen skal betragtes som et spørgsmål om, at universitetsmatematikerne udnyttede en opbrudssituation i uddannelsessystemet til at promovere en matematikundervisning, som de opfattede som en børneudgave af den rigtige videnskabelige, som måske pædagogisk set ikke var så heldig, men som i kraft af de kommende matematikstuderendes bedre forberedelse kunne stimulere den videnskabelige udvikling af faget, eller om matematikreformen faktisk udfyldte sin tilsigtede funktion: at virke accellererende på den økonomiske udvikling via en accellererende virkning på teknologiudviklingen i kraft af en mere adækvat kvalificering af arbejdskraften. Fagchauvinisme eller arbejdskraftkvalifikation?

Dette har med vores diskussion af matematikundervisningen at gøre på den led, at begrundelsesproblemet her får en udvidet dimension. Det er nemlig uklart, om de kvalifikationer, som matematikundervisningen formidler, faktisk er funktionelle i forhold til den teknologiske udvikling, om matematikundervisningen faktisk er spændt for den teknologiske udviklings vogn. Hermed er det umuligt for lærere og elever at gennemskue, hvilke politiske og samfundsmæssige positioner de indtager gennem undervisningen, og en diskussion om disse forhold findes nærmest ikke.

Det bliver ikke bedre af, at teknologioptimismen gennem de to sidste årtier er blevet en stadig mere tvivlsom affære. I samme periode har produktionsmæssige og administrative teknikker, som baserer sig på højt udviklet matematik, udviklet sig kraftigt, og åbnet op for perspektiver om arbejds-(indholds-)løshed og personregistrering og - overvågning af hidtil usete dimensioner.

Ej heller bliver diskussionen af, hvilke kvalifikationer matematikundervisningen giver, mindre væsentligt af, at matematik er et af de kraftigst sorterende fag i skolen. Hvordan kommer dette forhold i stand? Har man arbitrært fastsat, at nu er det matematik, der tæller, ligesom det i gamle dage var latin? Hvilke kriterier sorterer matematikundervisningen reelt på? Har matematikken egenskaber, der gør den egnet til at afgøre hvilke individer, der skal have adgang til samfundets solside? Hvilket rationale anlægges implicit? Sker den faglige sortering i matematikundervisningen på kriterier af en sådan bredde og kompleksitet, at den kan retfærdiggøres som den sociale sortering, den de facto udgør? Hvad betyder det for matematikken, at faget skal lægge ryg til en social sortering på angiveligt rene faglige præmisser?

Det er givet, at der foregår andre ting i matematiktimerne end det, der står i bøgerne og på tavlen. Der indlæres holdninger, normer osv. Fænomenet er beskrevet som 'skjult læseplan'. Ole Skovsmose beskriver det således:

"Det er min opfattelse, at mange af de folkeskoleelever, der år efter år ledes ad uransagelige veje forbi mængdeprodukter, relationer, transitive love, løsningsmængder og lignende, og som ikke forstår hvorfor, i høj grad får lært noget. Ikke matematik, ganske vist. Men de lærer, at der er noget, de ikke forstår. Og dog er det vigtigt, fordi nogle ved, at det er vigtigt. De lærer ligyldighed over for undervisningsindholdet.

Matematikundervisningen bliver for mange en fortræning og tilpasning til adskillige af samfundets arbejdsforhold. Hvis kvalifikationen, at kunne indordne sig under autoriteter, ikke var til stede hos en stor del af arbejdsstyrken, ville det være fatalt for erhvervsstrukturen. Dele af arbejdskraften må have kvalifikationer, så de kan stille spørgsmål, formulere problemer, planlægge samarbejde m.v. Men en lige så afgørende kvalifikation hos en anden del af arbejdskraften er at kunne finde sig i isoleret, trivielt rutinearbejde. Hvorvidt matematikundervisningen faktisk bidrager hertil må afdækkes gennem en form for kvalifikations-analyse ..." (Skovsmose, 1979, p 52)

For så vidt matematikundervisningen har den af Skovsmose beskrevne funktion, er den klart undertrykkende overfor den del af arbejdskraften, som den går ud over. En anonym magt, der slet ikke fremtræder som magt, presser dem og deres fordringer til livet på plads i samfundshierakiet, uden at de levnes chance for at gennemskue, endsige reagere bevidst imod, hvad der gøres med dem. Sorteringen og tilpasningen sker i objektivitetens og de gode hensigters navn.

Det er imidlertid ikke blot denne del af arbejdskraften, som socialiseres på ekstra-faglige områder. Også den del, der "godkendes", får andet end de faglige kundskaber med sig. For det første lærer de, at der er forskel på folk.

Der er de, der kan, og de, der ikke kan matematik. Det gælder selvfølgelig også andre af skolens fag, men det har en særlig betydning at få stemplet "god nok" i matematiktimerne, fordi denne vurdering i mindre grad end i andre fag er lærerens subjektive og anfægtelige vurdering. Matematiklæreren er sit fags repræsentant og uddeler sine domme snarere på fagets end på egne vegne. Og eftersom vejen opad den sociale rangstige for de allerfleste går over en højere uddannelse, og matematik for de fleste af disse spiller en særlig stor rolle for adgangen hertil, vil matematikkens tilsyneladende objektive dømmekraft få det sociale hierarki til at fremstå som en naturlig fordeling efter evner.

Dette skal naturligvis ikke forstås således, at matematik er årsagen til at samfundets klasse- og lagdelinger fremtræder som naturskabte. Det vil de herskendes ideologi altid hævde. Pointen er, at sorteringen sker i et formelt demokratisk uddannelsessystem med matematik som et af de vigtigste fag, ikke mindst i sorteringsmæssig henseende, og at denne sociale sortering ved matematikkens mellemkomst fremtræder som en objektiv faglig inddeling af folk på niveauer, som derudover kan virke retfærdiggjort af, at matematik synes at være mindre klassespecifikt virkende end de humanistiske fag.

For det andet trænes de "gode" elever i skolens matematik og naturvidenskabsundervisning ikke blot i at opfatte og genkende teknisk-naturvidenskabelige delproblemer af større problemstillinger, men samtidig også til at se og strukturere problemer som teknisk-naturvidenskabelige. Dette fremmes eller lades uproblematiseret af undervisningens manglende reflektion over fagenes meta-spørgsmål, f.ex. deres erkendelsers begrænsede rækkevidde. Som socialisering har det den betydning, at mange af de interessekonflikter, som den veluddannede del af befolkningen administrerer, ikke opfattes som sådan, men i stedet ses som teknisk-videnskabelige problemer.

For det tredje tror vi, at matematik - og anden naturvidenskab - med sin tilsyneladende overmenneskelige objektivitet kan organisere nogle af de samme psykiske kræfter, som religiøse gudsforestillinger tidligere gjorde og give politisk dødsensfarlige personlighedsstrukturer. Som illustration heraf kan man tænke på officielle eksperters reaktion, når deres sagligt og fagligt begrundede anbefalinger - som atomkraft - udfordres. Naturvidenkabelig kompetance kan her afstive en iøvrigt svagt funderet personlig autoritet. Ligegyldighed overfor indholdet af undervisningen behøver ikke blot være et resultat af, at det er uforståeligt, men kan også være det reelle i forholdet til undervisningen, hvis dette tilegnes som moment i dannelsen af en uautentisk personlig autoritet. Dette skal ikke være en psykologisk begrundelse for den tekniske ekspertices samfundsmæssige ageren, men blot være en antydning af, hvorledes et aspekt af den samfundsmæssige materialitet får psykiske ben at gå på, hvorledes den tekniske intelligens socialiseres psykisk til sin samfundsmæssige funktion.

Alt i alt synes matematikundervisningen os at være behæftet med meget belastende forhold. De forskellige didaktiske principper, som vi omtalte i sidste kapitel, synes os ikke at være til nogen særlig hjælp. Det strukturalistiske vil vi forkaste, fordi vi ikke kan se, hvordan det kan reddes fra den kritik, som vi har givet af det. De tre andre vil højst i begrænset omfang være virksomme overfor problemfeltet om matematikkens sociale funktion, fordi de alle har den begrænsning, at de ikke peger ud over matematikken selv, men er funderede enten i internt videnskabsteoretiske opfattelser eller på et fagligt organisationsprincip.

Spørgsmålet er for os, hvad vi stiller op med matematikundervisningen? Skal vi afskaffe faget i skolen? Ville børnene og de unge ikke have mere glæde af kreativ og musisk udfoldelse? Eller studier udi klassesamfundets konstitution og virkemåde? Spørgsmålene synes måske noget utopiske i den aktuelle situation, men dog ikke mere end f.ex., at fagets status i gymnasiet diskuteres seriøst, og at man godt kan forestille sig, at gymnasiets flagskib - den matematisk-fysiske gren med de høje faglige ambitioner - forsvinder.

I en kronik i Information fra foråret 1980 diskuterer Mogens Niss og Jens Højgaard Jensen, lærere i matematik hhv. fysik på Roskilde Universitetscenter dette udviklingsperspektiv, hvor matematik og fysik nedtones som teoretiske fag, i takt med at gymnasiets funktion bestemmes som almendannede snarere end studieforberedende. Forfatterne er modstandere af en sådan nedtoning og argumenterer for, at en overbliks-søgende undervisning i fagene er nødvendig:

"Samfundet befinder sig i en udvikling, hvor ulighederne mellem forskellige befolkningsgrupper nærmere er voksende end aftagende, hvor knapheden på ressourcer fører til styring og kontrol, med stadig mere brutale midler, af udnyttelsen og fordelingen af dem, med politisk disciplinering og apati som én af konsekvenserne, fremmedgørelse af den enkelte under et politiserende ekspertvælde som en anden. Jo mere styringskrævende samfundet bliver, jo mere uigennemsigtig for den enkelte bliver forholdene. Erkendelsen af grænserne mellem det tekniske, det økonomiske, det ideologiske og det politiske bliver stadig vanskeligere, og tilbøjeligheden til at give sig udviklingen i vold, uden at forsøge at forstå den og blande sig griber om sig. ...

For tiden er det først og fremmest problemerne med at give eleverne tilstrækkelige begrundelser og motivation for arbejdet med fagene - evt. ændrede fag - der diskuteres. Hvis bestræbelserne på at gøre noget ved gymnasiets samlede situation ensidigt koncentreres om disse problemer, løber man imidlertid en risiko for at finde svar, der kun kan blive symptombehandlende. Motivation til hvad? Det er selvfølgelig nemmere at tilrettelægge en undervisning, der tilfredsstiller elevernes umiddelbare behov ..., hvis hverken deres langsigtede behov eller behov knyttet til en demokratisk/progressiv samfundsudvikling samtidig skal tilgodeses.

En fokusering på motivationsproblemerne uden samtidig overvejelse af gymnasiets samlede funktion fører nemt til et af følgende to fejltrin:

1) Yderligere opsplitning af gymnasiet, i form af yderligere opsplitning i moduler og lignende, som et supermarked til efterkommelse af elevernes (erhvervslivets?) efterspørgsel.
2) En mindskelse eller fjernelse af det teoretiske islæt i undervisningen.

Det første fejltrin er farligt, fordi det bidrager til at forstærke de uheldige virkninger af specialiseringen i samfundet, først og fremmest manglen hos den enkelte på samfundsmæssigt overblik, og den dermed forbundne sociale lagdeling, hvor kun nogle få i kraft af deres position har adgang til at tage samlet stilling til hvad der foregår, mens langt de fleste får horizonten begrænset af deres specialiserede funktion og dens krav. ...

Det andet fejltrin er også farligt, fordi også det forstærker (omend på en anden måde) de uheldige virkninger af specialiseringen i samfundet, og fordi det svækker elevernes muligheder for at gå bagom fænomenerne og forholde sig til andet deres umiddelbare fremtræden.

... (Gymnasiet) er ikke virkelighedsfjernt, fordi det er teoretisk og abstrakt, men fordi den teori og den abstraktion, der bydes på, ikke er tilrettelagt i overensstemmelse med elevernes forudsætninger, og fordi de ikke først og fremmest tager sigte på at skabe et overblik over forhold, der er vigtige i det samfund, eleverne lever i, og for elevernes fremtid. ... Jo mere kompleks den omgivende virkelighed er, jo mere nødvendige er teori og abstraktion som midler til at komme ind på livet af den, at få overblik over den. At få overblik indebærer jo netop at se bort fra det uvæsentlige, at abstrahere, og såvel afgørelsen af hvad der er uvæsentligt som bedømmelsen af, hvordan det væsentlige er indrettet og virker, forudsætter teori.

... Endnu væsentligere for samfundsudviklingen i de industrialiserede lande i slutningen af dette århundrede end problemerne med A-kraft, er den indmarch på den samfundsmæssige arena af matematiske planlægnings- og styringsmodeller, af edb og mikroelektronik, som gennem de seneste år har taget fart.

Hvis gymnasieundervisningen skal give sit bidrag til at modvirke, at befolkningen umyndiggøres af denne udvikling (og det er også umyndiggørelse, hvis det eneste våben man besidder over for den, er blind skepsis), er der behov for en opprioritering, også omfangsmæssigt, af matematik og fysik snarere end en nedtoning. Det forhold, at matematik og fysik er svære fag, gør det særligt påkrævet at sætte tilstrækkeligt tid af til at også elever som har vanskeligheder med fagene, kan få noget ud af dem i det overbliksperspektiv, som her efterlyses.

Det er vigtigt, at netop matematik og fysik som fag inddrages i en undervisning, der tager sigte på at udvide ståsteder for eleverne vedrørende forholdet mellem formodning og viden. Hvilken slags viden kan man stole på? Hvornår kan man stole på eksperterne? Og det er vigtigt at netop matematik og fysik inddrages i en undervisning om forholdet mellem udviklingen af, henholdsvis naturvidenskab, teknologi og samfund. ... Undervisningen skal sigte på at give eleverne indblik i arten af eksperternes ekspertise og en forståelse af samfundsmæssige sammenhænge.

...

... Elevernes almindelige fremmedgjorthed over for den samlede samfundsudvikling (vil) gøre det vanskeligt at motivere dem for at arbejde med de nævnte problemstillinger. De er for komplicerede, for teoretiske, for abstrakte - og for fjerne fra elevernes umiddelbare dagligdag. Selv om de er virkelige.

Men nødvendigheden fjernes ikke af de grunde, der er til at være pessimistisk. ..."

Niss og Højgaard Jensen opstiller en modsætning mellem kortsigtede og langsigtede behov. På kort sigt har eleverne behov for tilstrækkelige begrundelser og motivation til at arbejde med faget. På langt sigt spalter behovene op i elevernes behov som individer og deres behov som befolkning, som samfund. På langt sigt har eleverne som enkeltpersoner behov for alment overblik, for kompetance til samlet stillingtagen til samfundsspørgsmål, for at kunne gå bagom fænomenerne. Som befolkning har eleverne langsigtede behov for at modvirke umyndiggørelsen overfor samfundsudviklingen og en demokratisk/progressiv samfundsudvikling.

De argumenterer nu for at kompetance overfor samfundsudviklingen omfatter indsigt i eksperternes ekspertice, at matematik og fysik kan give nogle vigtige pointer i forhold hertil - omend ikke i fagenes nuværende form -og at omfanget af undervisningen snarere bør udvides end svækkes.

Vi er enige i det grundlæggende udgangspunkt: at det er vigtigt at udvikle strategier til modvirkelse af befolkningens umyndiggørelse overfor samfundsudviklingen, men usikre på om en styrkelse af matematik- og fysikundervisningen er det mest nærliggende middel. En øget undervisning kunne godt tænkes at forstærke mystikken omkring matematik, fordi den indsigt og det overblik, der vil kunne opnås, under alle omstændigheder vil være begrænset i forhold til den forståelse, der ligger til grund for eksperternes brug af matematik. Er det den vej, man skal gå? Ville det så ikke være ligeså godt eller bedre at give folk en filosofisk skoling, så de kunne gennemskue eksperternes ideologiske udgangspunkter og manipulationer? Ville en velfunderet skepsis til eksperter ikke være et mere slagkraftigt udgangspunkt for modstand mod deres vælde? Vi ved det heller ikke, men tror ikke rigtig på, at det er fra matematik- og fysikundervisningen, at befolkningen skal hente kraft til at sejle op mod umyndiggørelsen.

Forfatterne siger endvidere, at tager man kun udgangspunkt i eller hensyn til elevernes umiddelbare behov for begrundelse og motivation risikerer man at havne i en symptombehandling, som ikke forholder sig til nødvendigheden af de langsigtede, og ligeså virkelige behov.

Dette kan vi ikke være uenige i, men den anden side at sagen, begrundelsesproblematikken er ligeså vigtig. Thi tilgodeses denne problematik ikke, risikerer man, at en undervisning, der tilsyneladende indholdsmæssigt tilgodeser de langsigtede behov, forløber på en måde og i nogle former, som ødelægger eller underminerer intentionerne. Undervisningen vil kun kunne finde sted under en form for autoritetsudøvelse, som tendentielt er personlighedsinvaliderende. Hvad vil det hjælpe, at undervisningen giver eleverne "indblik i arten af eksperternes ekspertise og en forståelse af samfundsmæssige sammenhænge", hvis de i indlæringsprocessen bliver så autoritetstro, at de underkaster sig samfundsudviklingen eller ikke formår at give deres oprør en konstruktiv form? - For nu at sætte det på spidsen.

Skismaet forekommer reelt. Eleverne oplever - af mange grunde, vigtigst vel nok deres samfundsmæssige placering på et ventespor - en modsætning mellem deres umiddelbare behov for motivation og begrundelse og deres langsigtede behov for som enkeltpersoner og befolkning at have kompetance til at tage stilling til samfundsudviklingen og modvirke umyndiggørelsen. Modsætningen er reel og kan ikke fjernes ved besværgelser.

Vi vil uddybe dette skisma ved at omtale en pædagogik, som ganske vist er håbløst ukonkretiseret i forhold til matematikundervisningen, men som til gengæld indfanger og forholder sig til de problemer, som vi i rapporten har trukket frem og anset for væsentlige.

Oprindeligt var det vores hensigt, at lave en nøjere diskussion af matematikken i forhold til denne pædagogik, men det må vi, det fremskredne tidspunkt taget i betragtning, renoncere på. I stedet bliver det ved præsentationen, som vi altså bringer, fordi vi mener, der er perspektiver at hente.

Den pædagogik, som vi har i tankerne er Paulo Freires frigørende pædagogik og Oskar Negt's eksemplariske indlæring: den fælles kerne heri omtales også som 'kritisk pædagogik'. Begge disse teorier udmærker sig ved at have et snævert forhold til en konkret praksis. De er så at sige 'afprøvet' i virkeligheden og samtidigt selvfølgelig produkter af denne virkelighed. De relaterer sig til vidt forskellige pædagogiske felter. Freire har arbejdet med det brasilianske landproletariat, som i stor udstrækning består af analfabeter, mens Negt's referenceramme er tyske arbejdere, som gennem deres fagforening får videre uddannelse. På trods af disse meget forskellige erfaringsbaggrunde mener vi at de to teorier er identiske og **i stand til at supplere hinanden.**

Freire lægger ud med en kritik af den sædvanlige undervisning. Omdrejningspunktet for forståelsen af dennes væsenstræk er forholdet mellem lærer og elever. Det er et stærkt polariseret forhold. Læreren er det foredragende, vidende subjekt som fylder de tålmodigt lyttende, uvidende objekter - eleverne.

"Undervisning bliver således opmagasinering, hvor eleverne er magasiner og læreren lagerforvalter. I stedet for at kommunikere laver lærerne kommunikéer og gør 'indskud' i eleverne, som tålmodigt tager imod, memorerer og gentager. Dette er begrebet sparekasseundervisning, hvor de handlemuligheder, der tillades eleverne kun udstrækkes til at modtage, sortere og opmagasinere indskuddene. (Freire, 1973, p 45)

I sparekasseundervisningen ligger en opfattelse af mennesket - ikke som et bevidst væsen - men som udstyret med en bevidsthed, et tomt sind, som er åbent for indskud fra virkeligheden udenfor. Lærerens rolle bliver herefter at regulere den måde, hvorpå verden 'kommer ind' i eleverne. Undervisning er en tilpasning til verden.

"Det uddannede menneske er et tilpasset menneske, fordi han nu 'passer' bedre til verden. I praksis er dette begreb skræddersyet til formålet hos undertrykkerne, hvis indre ro hviler på hvor godt mennesket passer til den verden undertrykkerne har skabt samt på, hvor sjældent den drages i tvivl. (Freire, 1973, p 49)

Når eleverne arbejder med at opmagasinere de indskud, der er gjort i dem, udvikler de ingen kritisk bevidsthed. Den passive rolle, som de er tvunget ind i gør dem tilbøjelige til at tilpasse sig verden, som den er og acceptere det fragmentariske syn på virkeligheden, som deponeres i dem.

Der er klare forbindelser mellem den kritik, vi har givet af matematikundervisning, og så Freires sparekasseundervisning. Matematik er et særdeles godt eksempel på en sådan.

Et af Freires nøglebegreber er dialogen:

"Gennem dialogen ophører forholdet elevernes-lærer og lærerens-elever med at eksistere, og et nyt begreb dukker op: lærer-elev sammen med elever-lærere. Læreren er ikke længere bare den-der-lærer-fra-sig, men en som selv lærer i dialog med eleverne, der omvendt lærer, mens de lærer fra sig. De bliver sammen ansvarlige for en proces i hvilken alle vokser.

"...Her lærer én ikke en anden noget, ligesom heller ingen er selvlært. Mennesker lærer hinanden noget med verden som bindeled, gennem erkendelige objekter, som i sparekasse-pædagogikken 'ejes' af læreren." (Freire, 1973, p 53-54)

Et andet af Freires nøglebegreber er 'det problemformulerende princip'. I en konkret pædagogisk praksis er det nødvendigt at tage udgangspunkt i de konkrete erfaringer eller de konkrete livsomstændigheder, som de erkendende er i besiddelse af eller lever under. Udfra konkrete fænomener forsøger pædagogen i sammenhæng med de erkendende at udbrede disse fænomener til generelle problemstillinger, således at den enkelte bliver i stand til at forstå de betingelser og de årsager, der måtte forklare netop hendes situation. Princippet er således at opstille 'rigtige' problemer, som med en bearbejdningsfase kan anskueliggøre menneskets situation, betingelserne for den og dermed give menneskene redskaber til at frigøre sig gennem handling. Med en både humanistisk og socialistisk forståelse af og indstilling til sine medmennesker bliver den fornemste opgave for Freire at afstikke veje for menneskets frigørelse, hvilket netop kan opnås gennem menneskets forståelse af sig selv i relation til sin omverden i et historisk perspektiv.

Negt's nøglebegreber er 'det eksemplariske princip' og 'den sociologiske fantasi'. At et fænomen er eksemplarisk betyder, at det generelle kan genfindes i det konkrete, mens den sociologiske fantasi er en evne eller egenskab, som de erkendende må være i besiddelse af for at kunne se denne sammenhæng. Negt's pointe er således, at man i en pædagogisk proces skal tage udgangspunkt i de konflikter og de dagligdags situationer, de ~~enkelte~~ mennesker har kendskab til, og som kan udbredes til forståelse af samfundsmæssige konflikter. Denne forbindelse (som også er en forklaring) skal udbredes gennem et formidlingsarbejde, som pædagogen er ansvarlig for. Betingelser for at et sådant uddannelsesforløb kan finde sted er bl.a. en forståelse af de erkendendes baggrund, deres socialisering, deres sprog og de normer og roller, de som voksne lever under og i. Negt's ærinde er altså at give arbejderne en forståelse af deres livssituation, gennem forklaringer, der hentes i samfundets struktur. Disse forklaringer har en afdækkkende funktion og intentionen med uddannelsesarbejdet er da også at afsløre klassesamfundets modsætninger.

Vi skal ikke her gå ind i en nærmere sammenligning af Freire og Negt. Præsentationen må tale for sig selv. Blot vil vi fremhæve, at de to teoriers vigtigste principper: det problemformulerende og det eksemplariske princip ligger tæt op ad hinanden.

Man kan nu spørge, hvad problemformulerende pædagogik og eksemplarisk indlæring har med matematikundervisning at gøre. Brasilianske analfabeter og tyske arbejdere synes jo umiddelbart at ligge et stykke herfra.

Sammenhængen kommer få vidt vi kan se i stand derved, at specielt Freire bevæger sig rundt på et plan, der går forud for undervisningssituationen, når han diskuterer menneskets relation til omverdenen, undertrykkelse og frigørelse. Hvis han i denne diskussion når 'gyldige' resultater må de efterfølgende konsekvenser - altså herunder også undervisning - respektere disse i en passende forstand. Det er evident, at matematikundervisning er sparekasseundervisning om noget, og derfor rammer kritikken også matematikundervisningen. Specielt det underliggende menneskesyn, som Freire fremdrager, er en barsk anklage. Undertrykkelsessammenhængene, de samfundsmæssige konflikter bør heller ikke matematikundervisningen unddrage sig. Som minimum må vi kræve, at matematikundervisningen undersøges udfra en kritisk pædagogisk synsvinkel. Det kan godt være, at man udfra en sådan undersøgelse må konkludere, at en matematikundervisning bliver umuliggjort af sådanne krav. I så fald må man opstille helt specielle begrundelser for undervisningen i faget og disse begrundelser må gøres til genstand for behandling i undervisningen. Derudover er det i høj grad muligt, at undertrykkelsesbegrebet forstået som en del af skolens virkelighed kunne kaste lys på et mere grundlæggende plan over elevernes oplevelse af og reaktion på undervisningen.

Årsagen til, at vi inddrager Freire og Negt, er, at det logisk fundamentale ikke er det erkendelsespsykologisk fundamentale. Vi erkender ikke i overensstemmelse med det logisk grundlæggende. Matematikfilosofien er ufuldstændig på dette punkt. Den er utilstrækkelig med hensyn til de didaktiske og pædagogiske aspekter,og den omfatter ikke en filosofisk bearbejdelse af matematikkens samfundsmæssige konsekvenser. (En sådan findes dog i frankfurterskolen, men den er lettere vulgær og utilstrækkelig.)

De alvorlige problemer som vi ser forbundet med matematikundervisningen, indfanges således ikke af matematikfilosofiske skoler. Derfor er vi henvist til at ty til teorier, som faktisk forholder sig til de problemer, som vi anser for centrale, selvom disse teorier er udviklet i sammenhænge, som umiddelbart ligger langt fra en matematikundervisning.

Den frigørende pædagogik sætter focus på motivationen og begrundelsen, på undertrykkelses-og tilpasnings-aspekterne ved undervisningen; der er ingen tvivl om, at undervisning der forløber efter dens principper vil være gunstig i en masse henseender. Der vil være taget højde for begrundelsesproblematikken og motivationen, erkendelsespsykologisk må det anses for at være en optimal situation; der er taget højde for undertrykkelsesproblematikken, idet der ikke er tale om, at et fag stiller sig som en fremmed klods over det enkelte individ, men omvendt subjektet der bearbejder problemer forbundet med egen situation og søger en forståelse af det i en større sammenhæng. Loyaliteten overfor det subjektive udgangspunkt skal sikre, at den autoritetsudøvelse, der finder sted, er udtryk for personers respekt for hinanden, og ikke udtryk for magtrelationer, hvis reelle indhold er sløret af et polariseret lærer-elev forhold, hvor læreren låner autoritet af fagets ureflekterede, uigennemsigtige status.

Problemet med den kritiske pædagogik er om der bliver nogen matematikundervisning tilbage, når den stilles overfor den kritiske pædagogiks fordringer. Hvad med færdighedsaspektet, som matematik har tilfælles med fx. sprogundervisningen. Må der ikke nødvendigvis være et vist mål af 'slavearbejde' forbundet med at tilegne sig det matematiske værktøj? Hvad med de åndelige landvindinger som den matematiske videnskab repræsenterer. Skal de ikke formidles videre til fremtidige generationer? Temmelig store dele af det matematiske teoriapparat vil næppe simpelt komme ud af at arbejde med problemer, udsprunget af folks mere umiddelbare behov og situation. Man kan forestille sig problemer, som er vigtige, 'nødvendige', men som ikke rummes i problemformuleringer, der tager udgangspunkt i oplevede, bevidste konflikter eller forhold.

Man kan være fræk og sige, at hvad angår den eksisterende matematikundervisning i skolen (regning undtaget) så ville tabet være til at bære, hvis den røg af i svinget. Det synspunkt vil kunne forsvares, at det højst er de elever i gymnasiets matematiske linie, og her specielt den matematisk-fysiske gren, der bruger matematikundervisningen som egentlig studieforberedende, som virkelig har glæde af den - og man vil endda kunne diskutere hvilken glæde de så har - mens alle de andre, hvoraf en meget stor del overvejende har nederlag ud af matematikundervisningen, formentlig først og fremmest vil være lammede eller utidigt respektfulde og autoritetstro overfor matematik, dens anvendelser, også de, der er pseudo - et autoritært forhold til faget og dets anvendelser, som vil overføres til andre (natur)videnskaber og fra disse.

Alt er naturligvis ikke sagt med dette - det ville være lidt for flot. Man kan næppe forestille sig at matematikundervisningen forsvandt ud af skolen, og specielt ikke af den grund, at den er for problematisk af de årsager, som vi har nævnt. Desuden må vi medgive Niss og Højgaard Jensen, at matematik (og fysik) er involveret i samfundsmæssigt så betydningsfulde problemstillinger, som befolkningen som helhed må have en form for konpetance overfor, at det vil være uholdbart ikke at undervise i disse fag under en eller anden form. Det er dog langt fra indlysende, hvorledes det skal gøres.

Den almene pædagogiske fordring, som vi kan uddrage af kritisk pædagogik, er at det pædagogiske arbejde må sigte mod at overskride subjekternes umiddelbare motivation og behov og lede til sammenhængssøgning. Denne overskriden skal være solidarisk overfor de umiddelbare motivationer og behov, som må fastholdes som <u>reelle</u> men også <u>begrænsede</u> udgangspunkter.

LITTERATURLISTE

AYER, A.J. (ed.): Logical Positivism. Geneve 1976.

BLOOR, David: Knowledge and Social Imagery. London 1976

DALEN, Dirk van: Kapitel IV 'Intuitionistic Conceptions of Mathematics' i Fraenkel et al.: Foundations of Set Theory.

FRAENKEL, Abraham A., Yehoshua Bar-Hillel og Azriel Levy: Foundations of set theory, 2. udg. Amsterdam 1973

FREGE, Gottlob: Die Grundlagen der Arithmetic. Eine logische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884.

FREIRE, Paulo: De undertryktes pædagogik. København 1973

JENSEN, Jens Højgaard og Mogens Niss: For matematik og fysik i fremtidens gymnasium. Kronik i Information, 15. april 1980.

JONES, W.T.: A History of Western Philosophy. The Twentieth Century to Wittgenstein and Sartre. 2. udg. New York 1975.

KRONBORG, Anne R. og Gerd Baadsgaard Pedersen: En teoretisk undersøgelse af grundlæggende elementer for en pædagogisk praksis, der søger at inddrage både individual- og samfundshistoriske betydningsstrukturer i erkendelsesprocessen. Hovedopgave i pædagogisk psykologi. Upubliceret. Århus universitet, Psykologisk institut, jan. 1980.

KÖRNER, Stephan: The Philosophy of Mathematics. An introductory essay. London 1971

LAKATOS, Imre: Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery. Cambridge 1976

MILL, John Stuart: A System of Logic: Ratiocinative and Inductive 1887 (1843)

NEGT, Oscar: Sociologisk fantasi og eksemplarisk indlæring. Til teori og praksis i arbejderuddannelsen. Roskilde universitetsforlag 1977

NISS, Mogens: Om folkeskolelæreruddannelsen i det vigtige fag fag matematik. I: Samme: Tre essays. Tekst nr 4, 1978 i Tekster fra IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

PEDERSEN, Stig Andur: Historierekonstruktion i matematikken. I: Videnskabsforskning nr 3, AUC, okt 1977, p 192-217.

Samme: Objektivitetsbegrebets mangetydighed. I: Agrippa, Psykiatriske tekster, årg. 2, nr 3, 1980, p 4-27.

RODGERS, Rogers Mathematical Logic and Formalized Theories.

SKOVSMOSE, Ole: Nogle principper i matematikkens didaktik. Artikel udarbejdet som led i projektet: Grundlag for fagdidaktiske analyser inden for erhvervsuddannelser. Statens erhvervspædagogiske læreruddannelse, april 1979.

Samme: Didaktiske arhejdspapirer. Udkast. Upubl.

SUPPES, Patrick: Introduction to Logic. New York 1957.

Samme: Aciomatic Set Theory. Princeton 1960.

Samme, Shirley Hill, Rose Ginsburg: Sets and Numbers. Book 1A Teachers Edition. New York, 1962.

WRIGHT, G.H. von: Logik, filosofi och språk. Strömninger och gestalter i modern filosofi. 2. udg. Stockholm 1971

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen.

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss

3/78 "Opgavesamling", breddekursus i fysik.
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.

4/78 "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Mogens Niss.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE"
Helge Kragh.

6/78 "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret"
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.

7/78 "Matematikkens forhold til samfundsøkonomien"
B.V. Gnedenko.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING"
Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarioum"
Projektrapport af Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET"
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER"
red. Jørgen Larsen.

12/79. "Lineære differentialligninger og differentialligningssystemer"
Mogens Brun Heefelt.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "Books about Mathematics: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".
Else Høyrup.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt." Specialeopgave af Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

../.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen"
Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde university centre (Denmark), 1978. Preprint.
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARSINOGENE STOFFER".
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken.
Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of relativity".
Helge Kragh.

24a/80 "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE" 1. En analyse.
24b/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE" 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER" Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler.
Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS"
Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentaalligningsmodeller"
Projektrapport af Tommy R. Andersen, Per H.H.Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Oluf Danielsen.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE"
Projektrapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER OG MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK-NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER: I-II."
Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO.1.
Bent Sørensen.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN ?" Fire artikler.
Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE". ENERGY SERIES NO.2.
Bent Sørensen.

ISSN 0106-6242