

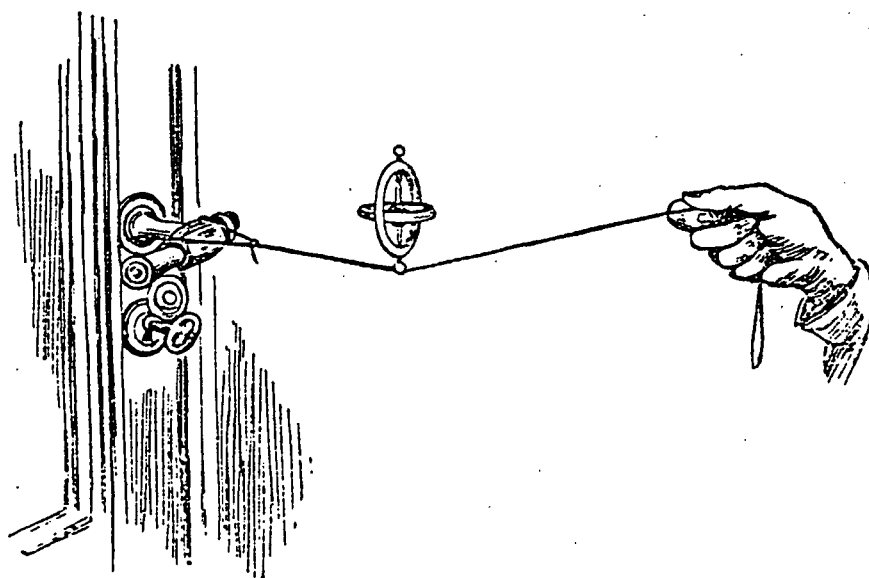
TEKST NR 296

1995

RETIKULÉR

den klassiske mekanik

af Peder Voetmann Christiansen



TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

RETIKULÉR den klassiske mekanik
af: Peder Voetmann Christiansen

IMFUFA tekst nr. 296/95

130 sider

ISSN 0106-6242

Abstract

Dette er et sæt kursusnoter, anvendt til dybdemodulkurset i Analytisk Mekanik på fysikoverbygningen i foråret 1995. Noterne giver en introduktion til energibånds-semiotikken og eksempler på anvendelsen af denne modelbygningsteknik og filosofi til klassisk mekaniske problemstillinger. De traditionelle metoder, Lagrange- og Hamilton- formalismen omtales, men får ikke så stor vægt i fremstillingen som normalt. Der lægges stor vægt på direkte modellering (retikulation) af systemer med de constraints, de nu engang har, og tilsvarende mindre vægt på brugen af "kanoniske" impulser og koordinater. Tensorer får en ret udførlig behandling og benyttes til diskussion af både stive og deformerbare legemer.

Hovedformålet med denne tilgang til den klassiske mekanik har været at bibringe kursusedtagerne et kreativt og pragmatisk forhold til modelbygning i fysikken. Som led i kurset er benyttet et program til numerisk integration og grafisk behandling af differentiallyigningsmodeller. Dette program, CTS, er kort omtalt i et appendix. Desuden er benyttet en traditionel lærebog, *H. Goldstein, Classical Mechanics*, samt en opgavesamling til energibåndsteknikken fra den tidligere introduktion i IMFUFA tekst nr. 8. Den herværende tekst forudsætter imidlertid ikke kendskab til de tidligere tekster af forfatteren i serien om energibånds-semiotikken (IMFUFA teksterne 8, 22 og 238).

Forsidetegning fra Ellinger: Naturen og dens kræfter. (1897).

Indhold

Kapitel 1.	Energibåndets semiotik	
1.1	De tre tegnklasser	side 1
1.2	Strøm-orienteringsreglen	side 3
1.3	Energibånd og byggesæt	side 4
Kapitel 2.	Det basale byggesæt	
2.1	Kilder	side 10
2.2	Lagre	side 11
2.3	Transformere	side 15
2.4	Gyratorer	side 16
2.5	Samlere	side 17
2.6	Netværks-topologi	side 22
2.7	Transducere	side 24
2.8	Lække	side 24
Kapitel 3.	Hastigheds constraints	
3.1	Stiv stang	side 26
3.2	Signalspor	side 28
3.3	Rulning på skinne	side 28
3.4	Loops	side 31
3.5	Inertikræfter	side 32
3.6	Rullende kugle	side 33
Kapitel 4.	Hamiltons princip	
4.1	Tellegens teorem	side 37
4.2	Virtuelle arbejder og d'Alemberts princip	side 39
4.3	Lagrange funktion og virkningsintegral	side 40
4.4	Lagrange ligningerne	side 43
4.5	Hjul på skinne	side 44
Kapitel 5.	Hamilton ligninger og Poisson paranteser	
5.1	Hamilton funktionen	side 46
5.2	Hamiltons ligninger	side 47
5.3	Poisson paranteser	side 48
5.4	Diagonalisering og Einsteins konvention	side 49
5.5	Poisson retikulationen	side 52
5.6	Elastisk pendul	side 53
5.7	Massemidtpunkt og reduceret masse	side 55
Kapitel 6.	Lagrange retikulationen	
6.1	Transponering	side 58
6.2	Lagrange paranteser	side 60
6.3	Metoden	side 61
6.4	Dobbeltpendulet	side 62
6.5	Lorentz kraften	side 67

Kapitel 7.	Vektorbånd og tensorer	
7.1	Vektorbåndets skalarprodukt	side 69
7.2	Tensor-symboler og indekser	side 70
7.3	Samlere og lagre	side 72
7.4	Transformere og -ducere	side 73
7.5	Gyratorer	side 75
7.6	Simultanfelter	side 77
7.7	Gyrolække i standard retikulationer	side 78
7.8	Lotka princippet	side 80
Kapitel 8.	Drejning og deformation	
8.1	Unitære transformationer	side 82
8.2	Euler vinklerne	side 85
8.3	Generatorer for drejning	side 87
8.4	Eulers og Chasles teorem	side 89
8.5	Coriolis- og centrifugalkraft	side 91
8.6	Deformationstensoren	side 95
8.7	Spændingstensoren	side 96
8.8	Bulk og shear moduler	side 97
8.9	Youngs modul og Poissons forhold	side 100
8.10	Lydbølger	side 102
Kapitel 9.	Stive legemers dynamik	
9.1	Inertimoment-tensoren	side 104
9.2	Euler ligningerne	side 106
9.3	Fri rotation	side 108
9.4	Rulning af inhomogen kugle	side 109
9.5	Behandling af ikke-holonome constraints	side 113
9.6	Snurretoppen	side 114
9.7	Jordens nutation og precession	side 119
Appendix.	Modelbehandling med CTS	side 120
Stikordsregister		side 125

Kapitel 1

Energibåndets semiotik

1.1. De tre tegnklasser

Et tegn er noget, der betyder noget for nogen. Tegnet er ifølge Peirce en *treleddet relation* mellem 1. en *tegnbærer*, der formidler mellem 2. et *objekt* og 3. en *interpretant*. Alt efter karakteren af denne formidling skelner vi mellem tre hovedtyper af tegn:

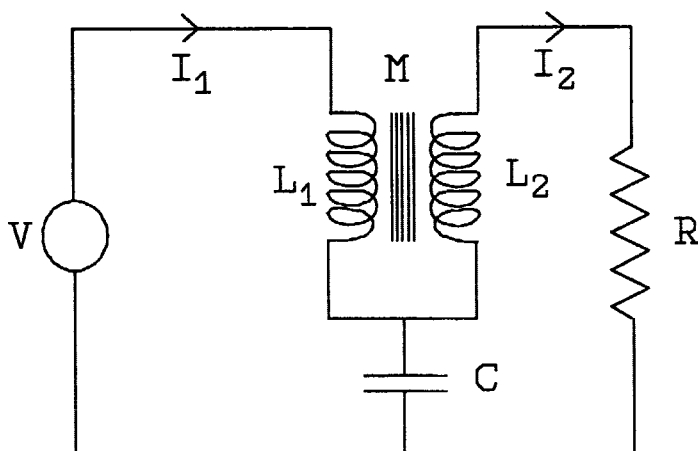
1. Et ikon formidler en *potentiel* relation mellem objekt og interpretant, dvs. en relation, der "ikke rigtig er der". Det kan f.x. være, at objektet er noget rent spekulativt, som f.x. en engel eller en drage eller en matematisk ret linje. Vi har en ikonisk forestilling om, hvordan disse objekter "ser ud", men vi kender dem kun som billeder, ikke som materielle genstande. Vi kan derfor også sige, at et ikon er "et billedagtigt tegn", men det skal forstås på den måde, at objektet (hvis det overhovedet findes) er sat "i skyggen" af ikonet. Matematikken handler om ikoner. Fysikken benytter ikoner i form af diagrammer, kurver osv., der danner grundlaget for matematificeringen.

2. Et index formidler en *aktuel* hentydningsrelation. Et index har imidlertid ikke nogen generel betydning; det viser blot, at objektet findes, og det tjener til at skelne et bestemt objekt fra andre objekter. En pegefinger er et index for det objekt, den peger på (index betyder pegefinger). Et fodspor i sandet er et index for en person, der har gået der. Et personnummer er et index for en bestemt samfundsborger. Et portrætfotografi kan betegnes som et index for en bestemt person, fordi vi kan gøre rede for en aktuel kausal relation mellem personen, lyset, linsen, emulsionen, fremkaldelsen, der har frembragt netop dette billede. Et malet portræt vil være mindre indeksikalt og mere ikonisk end fotografiet.

3. Et symbol formidler en *generel* betydning fra objektet til interpretanten. Dvs. tegnrelationen er for symbolet *vanemæssig*, den beror på en tillært regel. Ord er symboler, fordi vi kun forstår dem i kraft af at vi har lært sproget. Hvis vi ser f.x. tegnet "O", kan vi opfatte det ikonisk ("en cirkel") eller indeksikalt ("det er nok lavet af en laserprinter"), men symbolsk bliver det først, når vi ser det som medlem af en generel klasse af tegn, "O-er", der kan findes i mange varianter og kvaliteter, men hvor det konventionelle tilhørsforhold til klassen er det vigtigste.

De tre kategorier af tegnformidling er ikke ligestillede: en højere kategori må nødvendigvis bygge på og indeholde de lavere. Et symbol, som er et generelt tegn, må nødvendigvis opbygges via noget ikonisk og noget indeksikalt. Først må forbindelsen mellem objekt og interpretant være potentielt til stede, dvs. der må foreligge et ikon, før forbindelsen kan aktualiseres, så en specifik, indeksikal udpegning af et objekt kan finde sted. Og en generel formidling, symbolet, som henviser til en klasse af objekter, må nødvendigvis bygge på en indeksikal henvisning til noget individuelt.

Betragt f.x. nedenstående diagram af et elektrisk netværk (fra eksamensopgaven i elektrodynamik, januar 95). Figuren viser ikoner for ledninger (streger), en spændingskilde (cirklen), en induktiv transformator med to spoler på en jernkerne, en kondensator og en modstand. Symbolerne V , L_1 , L_2 , M , C og R henviser til fysiske størrelser (talværdi og måleenhed) for hhv. spænding, selvinduktioner, gensidig induktion, kapacitet og modstand, men hvis de bare var anbragt tilfældigt på papiret, ville de ikke have den symbolske betydning. Symbolerne får deres betydning ved deres *nærhed til ikonerne*. Nærheden er altså det indeksikale element i disse symboler. Spændingssymbolet V kræver også et indeks for *orientering*, da det angiver en forskel i elektrisk potential mellem spændingskildens to poler, og her fungerer papirets op-ned dimension som orienteringsindeks, idet det underforstås, at den øverste terminal er "plus-polen". For de to strømsymboler I_1 og I_2 er der foruden nærheds-indekset til ledningsikoner også angivet orienterings-indekser i form af to pile. Det, som disse pile udpeger, er *et valg mellem to mulige retninger på ledningen*, og uden denne retningsangivelse ville strømsymbolets betydning være uklar.

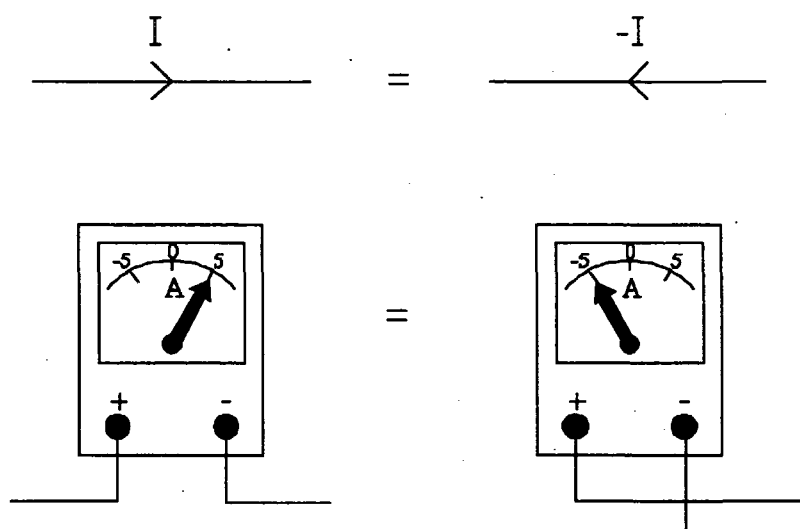


Figur 1 El-diagram med ikoner, indekser og symboler.

1.2. Strøm-orienteringsreglen.

Symbolet " I_1 " på figur 1 står for den strøm, et ampèremeter ville vise, hvis det blev indsat i ledningen, således at gennemløbsretningen fra plus-polen til minus-polen er i pilens retning. Hvis vi vender pilen, men fastholder måleforskriften, skal vi også vende ampèremetret, og det vil så vise værdien $-I_1$, men det er stadig den samme fysiske situation, vi beskriver. Vi kan derfor formulere følgende *strøm - orienteringsregel for elektriske ledninger*:

Den samme fysiske situation kan beskrives med to forskellige valg af orientering på langs af ledningen. Hvis man vender orienteringen, skal man samtidigt skifte fortegn på det symbolske udtryk for strømmen.



Figur 2 El-strøm-orienteringsregel og dens begrundelse i måleforskriften for elektrisk strøm.

Semiotikken tillader en præcisering af den normale sprogbrug vedrørende orienteringskonventionen. Det er strengt taget meningsløst at sige "strømmen skifter fortegn, når vi vender orienteringen", for da strømmen er en fysisk størrelse, og da det er den samme fysiske situation, vi betragter med to forskellige orienteringer, er strømmen præcis den samme. Det er præcis *det symbolske udtryk for strømmen*, der skifter fortegn. De to lednings-ikoner på figur 2, der begge er "påklædt" med orienterings-index og strøm-symbol er altså to forskellige tegn, der henviser til det samme objekt, men med to forskellige symbol-beskrivelser. Semiotikken hævder, at *symbolet er arbitrært*, dvs. det er afhængigt af valgte konventioner, som ikke har noget med objektet at gøre, men det skal altså forstås på den måde, at der er visse spilleregler for, hvordan den symbolske fremtrædelsesform må ændres, når konventionerne ændres, og disse

spilleregler må overholdes strengt, hvis vi skal vide, hvilket objekt, symbolet hentyder til.

Strøm-orienteringsreglen genfindes i andre sammenhænge, f.x. ved angivelse af lineære hastigheder. Hvis vi skubber til et objekt med en stiv stang, vil objektet måske begynde at flytte sig i den retning, det bliver skubbet, og stangen vil forskydes og glide i sin længderetning med samme hastighed som objektet. Stangens hastighed er da en variabel, der er *analog* til strømmen i en elektrisk ledning i den forstand, at dens måleforskrift kræver en orientering i den ene eller den anden retning på langs af stangen. Hvis orienteringen indikeres med en pil, betyder et hastighedssymbol "v" i forbindelse med dette index "hastigheden af stangen i retning af pilen", og hvis den samme fysiske situation beskrives med den modsatte orientering, skal symbolet "v" ændres til "-v".

Elektriske ledninger og stænger til at skubbe med har flere ting fælles: Begge tjener til overførsel af energi fra et sted til et andet. I begge tilfælde beskrives energioverførselen ved to variable, spænding og strøm for ledningen, skubbekraft og hastighed for stangen. Både for strømmen i ledningen og hastigheden af stangen gælder, at deres måleforskrift kræver en orientering, og at et skift af orientering kan beskrive en uændret fysisk situation, hvis der samtidigt skiftes fortegn på det symbolske udtryk for hhv. strømmen og hastigheden. I den forstand kan vi hævde, at *strømme og hastigheder er analoge*, idet vi betragter dem som knyttet til et index (pilen), der angiver orientering på langs af et ikon (stregen). Stregen bliver derved et ikon for både ledningen og stangen, eller mere abstrakt, for en *elementær energetisk vekselvirkning*, der involverer to variable, "spænding" og "strøm", forstået alment, så det også kan betyde "skubbekraft" og "glidehastighed", "pumpestryk" og "pumpehastighed", "kemisk potential" og "reaktionshastighed", eller hvad der nu er relevant i en given materiel sammenhæng. Dette grundlæggende ikon kaldes *energibåndet*.

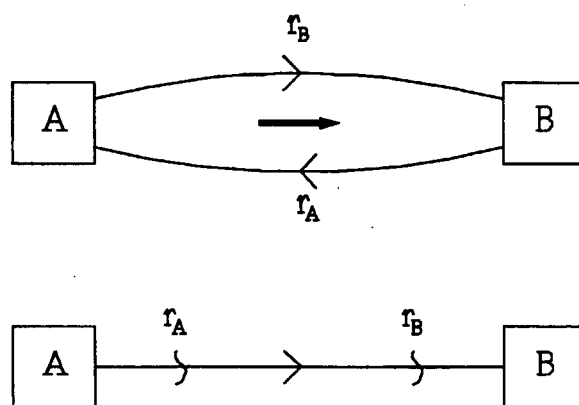
1.3. Energibånd og byggesæt.

Et energibånd er et ikon for en *vekselvirkning med mulig energioverførsel*. Strengt taget kender vi ikke andre former for vekselvirkning i fysikken, energien er fysikkens "valuta", som må udveksles mellem forskellige systemdele, hvis der overhovedet skal ske noget, men energibåndets tegnsystem kan også anvendes i andre sammenhænge, f.x. økonomiske, hvor valutaen er penge. Variablene spænding og strøm for energibåndet, hvis produkt giver energioverførslen pr. tidsenhed, kan for det økonomiske vekselvirkningsbånd være hhv. varens pris og antal varer overført pr. tidsenhed, således at deres produkt giver den overførte pengemængde pr. tidsenhed.

Når vi taler om *vekselvirkning* mellem to systemkomponenter A og B, skal det opfattes helt bogstaveligt: A virker på B, og B virker på A. Vi kan sige, at As virkning på B formidles af en fysisk størrelse r_B , og Bs virkning på A formidles af en fysisk størrelse r_A . Disse to størrelser vil i den klassiske mekanik kunne beskrives med symbolske variable, såkaldte *rate variable*, men i første omgang vil vi ikke forudsætte, at de er direkte målelige, men blot opfatte dem som indekser. Når vi tegner energibånds-ikonet som en streg, der forbinder de to systemkomponenter A og B, kan vi angive kausaliteten af de to rate variable på den måde, at vi indicerer r_B (input til B, output fra A) nærmest B og r_A (input til A, output fra B) nærmest A. Desuden skal energibåndet forsynes med en pil til angivelse af energistrømmens orientering.

I almindelighed må vi opfatte r_A og r_B som *indeksikale vektorer*, dvs. som vektorer, der ikke er skrevet ud i koordinater. Den symbolske angivelse af talværdier for vektorkoordinater kræver jo både et valg af koordinatsystem og nogle måleforskrifter, men vi ønsker at kunne tale om disse størrelser som noget, der eksisterer uafhængigt af disse konventioner, og derfor holder vi os i første omgang til at opfatte " r_A " og " r_B " som symbolske indekser, knyttet til et par ikoniske indekser, som er et par mærker på energibåndsikonet, hvis placering angiver kausaliteten.

Selv om vi ikke har talkoordinater for de to indeksikale vektorer i energibåndet, vil vi alligevel regne med, at der er defineret et *indre produkt* eller *skalarprodukt* for dem. Et skalarprodukt af to vektorer er jo, som navnet siger, en *skalar*, dvs. en størrelse, som er uafhængig af det valgte koordinatsystem. Energistrømmen, w , dvs. den overførte energi pr. tidsenhed i retning af den angivne orientering, skal altså defineres ved skalarproduktet af de indeksikale vektorer r_A og r_B .

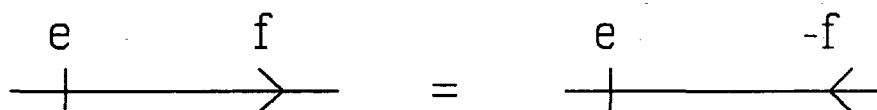


Figur 3 Øverst: signal-flow diagram for vekselvirkning.
Nederst: energibånd med kausalitet og orientering.

For et energibånd vil vi påstå, at dets to variable tilhører to forskellige klasser, som vi kalder *strømme* og *spændinger*. Disse to klasser defineres ved, at de opfører sig forskelligt ved *tidsvendning*: strømme skifter fortegn, spændinger gør

ikke. Vi vil benytte to indekser, x og o , til at skelne mellem de to slags opførsel ved tidsvending: x -variable skifter fortegn, o -variable gør ikke. Vi kan derfor karakterisere *strømmen* som en x -rate, *spændingen* som en o -rate. Desuden har vi set, at strømme og spændinger (deres symbolske udtryk) opfører sig forskelligt ved vending af energibåndets orientering: strømme skifter fortegn, spændinger ikke. Det er på ingen måde indlysende, at fortegnsskift ved tidsvending hænger entydigt sammen med fortegnsskift ved vending af den rumlige orientering, og der kan da også angives modeksempler. Men for de anvendelser, vi er interesserede i i denne sammenhæng, kan vi roligt regne med, at strøm-orienteringsreglen gælder.

Vi vil derfor gøre energibåndets indicering noget simplere ved at lade orienteringspilen fungere som index for strømmen. Spændingen indiceres så med en lige tværstreg på båndet. Herved får strøm-orienteringsreglen en naturligt udseende fremstilling, som vist nedenfor.



Figur 4 Energibåndets indekser og strøm-orienteringsreglen.

De to symboler "e" og "f" har en indeks-funktion lige som strengen og pilen, idet de hentyder til de engelske ord "effort" for spænding og "flow" for strøm.

Forskellen på strømme og spændinger, som den kommer til udtryk i strøm-orienteringsreglen, udtrykkes ofte ved at sige, at strømme er *gennem*-variable, medens spændinger er *tvær*-variable. Dette er også meget rimeligt, når vi tænker på elektriske netværk, hvor måleforskriften for spændingen i hvert enkelt punkt kan angives "globalt", f.x. "spændingen i forhold til jord", hvorimod strømmen kræver en lokal orientering af hver enkelt ledning. For andre typer af energibånd er beskrivelsen imidlertid knapt så dækkende. F.x. for den stive stang, hvor spændingen er en skubbekraft og strømmen en glidehastighed, går både spændingen og strømmen på langs af energibåndet.

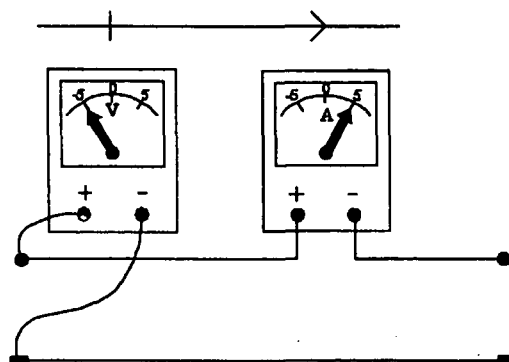
Lad os tænke på energibåndsbeskrivelsen af situationen "A skubber B" for at se, hvad strøm-orienteringsreglen egentlig udtrykker i dette tilfælde. Det er klart, at der ligger en retningsangivelse fra A til B, når vi siger "A skubber B", selv om der jo ikke er sagt noget om, at B flytter sig. Det kan f.x. være, at B glider hen mod A, men det er alligevel A, der skubber B. Hvis vi orienterer energibåndet i retning fra A til B og kalder skubbekraften K , så skal hastigheden v måles i retning fra A til B, men orienteringen er også knyttet til kraften, som vi vil sige går fra A til B, og produktet Kv angiver energioverførslen fra A til B pr. sekund. Skubbekraften K kan kun være positiv, for energi-

overførslen er jo det arbejde, A udfører på B, og det vil være positivt, når B glider væk fra A ($v > 0$) og negativt, når B glider i retning af A ($v < 0$).

Hvis vi nu vender orienteringen, så den går fra B til A, så skal kraften være uændret K , men hastigheden skal ændres til $-v$. Samtidigt må vi ændre på den verbale beskrivelse af K ; nu er det den kraft, som B skubber A med. Strømorienteringsreglen, som siger, at det er det samme K , når det er den samme situation, vi ser på med den modsatte orientering, er altså i dette tilfælde ækvivalent med *loven om aktion og reaktion*: Når A skubber på B med en vis kraft K , så skubber B på A med samme kraft K . Selv om kraften er en størrelse med retning, når vi taler om, at et system påvirker et andet, så er den alligevel den samme, når retningen skifter. Dette er en følge af strømorienteringsreglen, og vi kan altså sige, at loven om aktion og reaktion ikke er egentlig naturlov, men en semiotisk lov. Energibandsformalismen har bl.a. til formål at indbygge semiotiske love i det benyttede tegnsystem, lige som f.x. loven om kræfternes parallelogram indbygges i tegnet for kraften som en vektor.

En opskrift på, hvordan energibåndet og de øvrige eb-ikoner kan realiseres materielt, således at det hører sammen med entydige måleforskrifter for eb-variable, kaldes et *byggesæt*. Vi vil foreløbig kun diskutere selve energibåndet i nogle forskellige byggesæt.

I *det elektriske byggesæt* består energibåndet af en elektrisk dobbeltledning. Spændingen, som er en *tværvare*, er spændingsforskellen mellem de to ledninger, så for at få entydighed i spændingsdefinitionen, må det være muligt at se forskel på de to ledninger. Vi kan f.x. lade den ene ledning være forsynet med "runde terminaler" og den anden med "flade terminaler" og så definere energibåndets spænding som forskellen mellem den runde terminal og den flade terminal elektriske potential. Strømmen defineres som strømmen i "den runde ledning" i retning af den valgte orientering. Figuren nedenfor viser, hvordan voltmeteret og ampèremetret skal indsættes for at kunne give det symbolske udtryk for spændingen og strømmen.



Figur 5 Energibånd og måleforskrifter i det elektriske byggesæt.

Et byggesæt, hvor energibåndet er en stiv stang, man kan skubbe med, som omtalt i det foregående, kan kaldes et *longitudinalt mekanisk byggesæt*, fordi både strømmen og spændingen (glidehastigheden og skubbekraften) måles på langs af stangen. Spændingen måles f.x. ved sammentrykningen af en fjeder, anbragt for en af stangens ender. Hvis stangen kun kan skubbe, har byggesættet den begrænsning, at spændingerne kun kan være positive. Denne mangel kan udbedres, hvis stængerne forsynes med kroge i enderne, så man også kan trække med dem. En træksituation svarer så til, at spændingen er negativ. Vi kan også tænke på et longitudinalt mekanisk byggesæt, hvor energibåndene er tråde, man kun kan trække med. Med de samme måleforskrifter som for stængerne, vil trådene have den begrænsning, at spændingerne kun kan være negative.

I et *transversalt mekanisk byggesæt* består energibåndene af stive aksler, der kan rotere om deres længdeakse. Akslerne kan være forsynede med tandhjul af en bestemt størrelse i enderne. For dette byggesæt er både strømmene og spændingerne *tværvARIABLE*. Med en given orientering af energibåndet fra A til B kan strømmen defineres som vinkelhastigheden i den omløbsretning, der sammen med orienteringen danner en højreskrue. Spændingen vil da være det kraftmoment, som system A påvirker system B med. Man overbeviser sig let om, at strøm-orienteringsreglen gælder, og at det uændrede spændingsfortegn ved orienteringsskift udtrykker loven om aktion og reaktion for kraftmomenter.

Det transversale mekaniske byggesæt lider ikke af begrænsninger i forhold til eb-formalismens muligheder, som både det longitudinalt mekaniske og det elektriske byggesæt har. Faktisk kan alle de grundlæggende ikoner realiseres transversalt mekanisk, men nogle af dem (f.x. o-samleren, der er en slags differentiale) kræver ganske kompliceret "finmekanik", hvorimod man i det elektriske byggesæt har mulighed for at "snyde" sig over begrænsningerne ved brug af nogle aktive elektroniske komponenter, som f.x. operationsforstærkere, uden at det stiller store krav til håndværksmæssig kunnen.

Et *hydraulisk byggesæt* har energibånd i form af stive rør, hvorigennem en usammentrykkelig væske kan strømme. Hvis strømmen defineres som den lineære hastighed af væsken i retning af orienteringen, vil spændingen være den kraft, hvormed væsken trykker på en plade for enden af røret. Med dette byggesæt er det meget enkelt at lave en *jævnstrømstransformator* ved blot at sammensætte to rør med forskelligt tværsnitsareal. Da væsketrykket er det samme i de to rør, vil spændingerne forholde sig til hinanden lige som rørenes tværsnitsarealer.

EB-byggesættet er det diagramsprog, vi skal benytte til udvikling af formalismen i det følgende. Det består ikke af materielle komponenter, men af ikoner, der kan påklædes med indekser og symboler efter bestemte regler (som f.x. strøm-orienteringsreglen). Ikonerne kan med større eller mindre held

realiseres inden for et materielt byggesæt som et af de ovenfor omtalte. I EB-byggesættet kan benyttes *basale ikoner* eller *højere ikoner*. Der er ingen grænse for, hvor mange højere ikoner, man kan definere, men man må så vidt muligt sørge for, at ikonets form skal udtrykke symmetrien i den funktion, ikonet skal beskrive, og at indekser og symboler kan tilføjes ikonet, således at symbolernes betydning bliver præciseret. De *basale ikoner* er et velafgrænset sæt af ikoner, som tilsammen udgør et *fuldstændigt sæt* til beskrivelse af alle dynamiske systemer i fysikken. Samlingen af basale ikoner udgør *det basale byggesæt*, som altså er en delmængde af eb-byggesættet. Ethvert højere ikon i eb-byggesættet kan i princippet reduceres til basale ikoner. Udførelsen af denne (ofte ret vanskelige) reduktionsopgave kaldes *retikulation*, dvs. netværksstrukturering.

Der gives ingen garanti for, at det basale byggesæt virkelig udgør et fuldstændigt sæt inden for fysikken, men heller ingen eksempler på fysiske systemer, der med sikkerhed *ikke* kan retikuleres helt ned til basale ikoner. Påstanden om fuldstændighed må altså tages med et gran salt. For *lineære* systemer kan den bevises, men for ikke lineære systemer kan en fuldstændig retikulation vise sig så besværlig, at man står sig ved at beskrive visse dele af funktionen med højere ikoner. I den analytiske mekanik vil vi stille os tilfreds med en delvis retikulation, der tillader et enkelt højere ikon, nemlig multiport-lager for potentiel energi. Desuden vil vi tillade ikke-lineære *styringer* af visse basale ikoner, transformere, transducere og gyatorer.

Kapitel 2

Det basale byggesæt

2.1 Kilder

Det grundlæggende ikon i det basale byggesæt er *det simple energibånd*, hvor strøm og spænding er reelle, éndimensionale vektorer, eller skalarer. Da det er klassisk mekanik, vi her er interesserede i, vil vi uden videre gå ud fra, at strømmen og spændingen kan udtrykkes symbolsk med *reelle tal* og *måleenheder*, der udtrykker resultatet af *potentielle målinger*. Vi regner altså med, at en måling af strøm og spænding kan udføres efter veldefinerede forskrifter, og at en sådan måling ikke vil medføre en nævneværdig forstyrrelse af den målte størrelse. Vi regner endvidere med, at strømmen og spændingen kan skelnes fra hinanden ved tidsvendingskriteriet, og at strøm-orienteringsreglen gælder, således som beskrevet i foregående afsnit.

Ethvert ikon har et vist antal *porte*, hvor energibånd kan tilsluttes. Selve energibåndet har to ender, som også er to porte. Energibåndet er altså et *toport ikon*, der kan kaldes *ideel transmitter* (for energi).

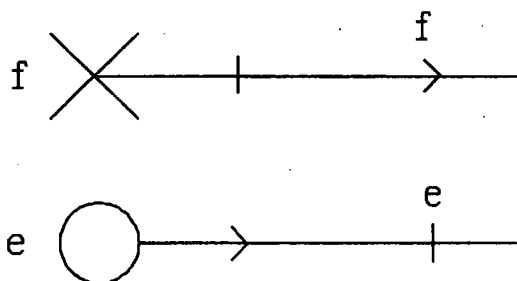
Ikonerne i det basale byggesæt kan inddeles i tre kategorier, der kaldes *aktive*, *passive* og *dissipative*.

Et *aktivt* system fastsætter suverænt output-energibandsvariablene i alle sine porte uden hensyn til input-variablene. For et *passivt* system er output variablene entydigt bestemt af de nuværende og de fortidige værdier af input variablene. Af og til skelnes i denne gruppe mellem *rent passive* systemer, hvor outputtene kun afhænger af de øjeblikkelige (nutidige) inputs og *reaktive* systemer, hvor også de fortidige værdier af inputtene er med til at bestemme de nutidige outputs. *Dissipative* systemer har et overvejende passivt output, som er bestemt af nutidige og fortidige inputs, således at systemet altid forbruger (dissiperer) energi. Imidlertid er der for dissipative systemer også en aktiv komponent i outputtet, som er uafhængig af input-værdierne. I reglen vil den aktive komponent være lille i forhold til den passive komponent, og vi skelner da mellem *signalet*, som er det passive response og *støjen*, som er den aktive komponent.

I det basale byggesæt repræsenterer *kilderne* (x- og o-kilde) de aktive systemer, *transformere*, *transducere*, *gyratorer* og *samlere* er rent passive (ligesom det

rene energibånd, som er en *transmitter*, svarende til en transformer med omsætningsforholdet 1), *lagrene* (x- og o-lager) er reaktive, og *lækkene* er dissipative.

Kilderne er aktive 1-porte. Da der kun er to slags energibandsvariable, strømmen og spændingen, i den ene port, er der kun to slags kilder: *x-kilden* eller *strømkilden* og *o-kilden* eller *spændingskilden*.



Figur 6 Kilderne.

Det fremgår af definitionen på figur 6, at en kilde ikke nødvendigvis afgiver energi. Hvis produktet af strøm og spænding med de angivne orienteringer er negativt, vil kilden modtage energi. Hvis f.x. en vindmølle driver en asynkron generator, der er tilsluttet el-nettet, så vil nettet kunne beskrives ved tre spændingskilder, svarende til de tre 50 Hz faser. Disse faser leverer til generatoren et magnetfelt, der drejer med 50 omdrejninger i sekundet, og hvis vindmøllen driver ankeret rundt lidt hurtigere end dette, vil input strømmen have det fortegn (afhængigt af orienteringen), der svarer til, at møllen leverer energi til de tre o-kilder (sml. dybdeopgaven i elektrodynamik, juni 91, 2).

Det ses endvidere, at energibandskausaliteten er meget vigtig i definitionen af kilderne. Hvis vi prøver at forbinde to kilder af samme type med hinanden gennem et enkelt energibånd, opstår der en *kausal konflikt*, som ikke kan løses, uden at tilføje flere ikoner. Derimod er der ikke noget i vejen for at forbinde to kilder af modsat type.

2.2 Lagre

Lagrene er reaktive 1-porte. Ligesom for kilderne er der to slags: *x-lageret* eller *det kinetiske energi lager* og *o-lageret* eller *det potentielle energi lager*. Grunden til, at der kun er de to slags lagre, er igen, at der kun er to slags variable i det tilsluttede energibånd. For x-lageret er outputtet en strøm, der er bestemt af de fortidige værdier af input-spændingen, og for o-lageret er outputtet en

spænding, der er bestemt af de fortidige værdier af input-strømmen. Den reaktive virkning fremkommer for begge variable ved at input rate variabelen (spænding for x-lageret, dvs o-rate, og strøm for o-lageret, dvs. x-rate) integreres over tid til en *level* variabel, der tilknyttes lageret og bestemmer dets *energifunktion*. Da en o-rate integreres til en x-level og en x-rate til en o-level, får x-lageret tilknyttet en x-level, der indiceres med indexet x i lagerets ikon, og o-lageret får en o-level, der indiceres med et o i lagerikonet. Ikonet for lageret er et "fuglehus". Hvis vi kalder rate-variablen R, level-variablen L og energifunktionen E(L), har vi altså:

$$L(t) = \int_{-\infty}^t R(t') dt' + L(-\infty) \quad (1)$$

Konstanten $L(-\infty)$ repræsenterer egentlig et aktivt bidrag til lagerets, ellers reaktive response. Man vil dog ofte kunne se bort fra systemernes hukommelse om den uendeligt fjerne fortid; hvis ikke, siger vi, at systemet er *ikke-ergodisk*. Hvis der er lække i systemet, vil disse ofte gøre systemet ergodisk, så vi kan se bort fra konstanten i (1), men det rene lager er altså ikke-ergodisk. Hvis vi i stedet skriver

$$\frac{dL}{dt} = R \quad (2)$$

slipper vi for at tage stilling til ergodicitetsproblemet, men den beregningsmæssige kausalitet går stadig fra rate til level: ændringer i level variabelen beregnes ved integration af rate variabelen over det forløbne tidsrum. Vi siger, at rate- og level-variablen er forbundne ved *kinematisk kausalitet*.

Når level variabelen L og energifunktionen E(L) er kendt, kan vi beregne beregne output variabelen i det tilsluttede energibånd. Hvis dette bånd er orienteret *ind mod lageret*, skal tilvæksthastigheden af energifunktionen jo være givet ved produktet af de to variable i energibåndet, så hvis vi kalder output variabelen for U, har vi:

$$\frac{dE(L)}{dt} = \frac{dE(L)}{dL} \cdot \frac{dL}{dt} = U \cdot R \quad (3)$$

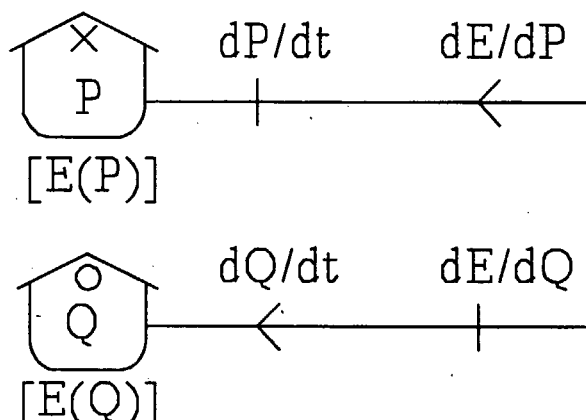
Ved sammenligning med (2) får vi derfor

$$U = \frac{dE}{dL} \quad (4)$$

Vi ser heraf, at hvis E er en lineær funktion af L, $E = U \cdot L + E_0$, så er U uafhængig af L og dermed også af R. I dette tilfælde er lageret altså ikke

reaktivt, men aktivt, og vi kalder det derfor et *aktivt lager*, selv om dets aktivitet altså indskrænker sig til at holde output variabelen konstant, uanset, hvad der sker.

Hvis derimod U er en lineær funktion af L , taler vi om et *lineært lager*. I dette tilfælde er energifunktionen altså *kvadratisk* i L .

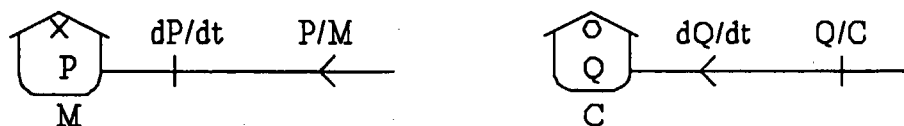


Figur 7 Den almindelige definition af lagre.

Level variablene P og Q for henholdsvis x- og o-lageret kaldes i mekanikken henholdsvis *generaliseret impuls* og *generaliseret koordinat*. Rate variablene kaldes tilsvarende *generaliseret hastighed* (strømmen) og *generaliseret kraft*.

For *lineære lagre* indfører vi en konstant, *lagerkapaciteten* til at udtrykke den kvadratiske energifunktion og dermed også den lineære sammenhæng mellem level variabelen og output rate variabelen:

$$E(P) = \frac{P^2}{2M} \quad ; \quad E(Q) = \frac{Q^2}{2C} \quad (5)$$



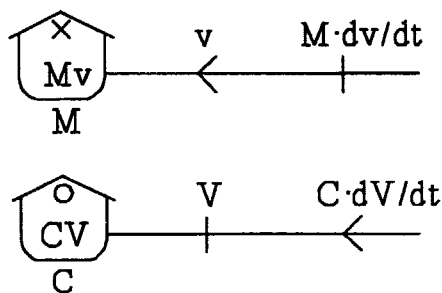
Figur 8 Lineære lagre.

Kapaciteten M af det lineære x-lager kaldes *trægheden* eller *inertansen* (eng. *inertance*), og kapaciteten C af det lineære o-lager kaldes *føjeligheden* (eng. *compliance*). For elektriske systemer svarer det lineære x-lager til en selv-induktion, hvis kapacitet kaldes *induktansen*. Her reserveres ordet "kapacitet"

dog i reglen til kapaciteten af det lineære o-lager, som svarer til en kondensator. Den reciprokke egenskab af føjeligheden C , $G = 1/C$, kaldes *stivheden*.

Det lineære x-lager kan f.x. være en partikel med massen M , impulsen P og hastigheden $v=P/M$, eller det kan være et svinghjul med inertimomentet M , impulsmomentet P og vinkelhastigheden $\omega=P/M$. Det lineære o-lager kan som nævnt være en kondensator med kapaciteten C , ladningen Q og spændingen $V=Q/C$, eller det kan være en fjeder med stivheden (kraftkonstanten) $k=1/C$, sammentrykningen Q og kraften $F=k \cdot Q$. Strækningen af fjederen er så $x=Q/k$, fjederkraften i retning bort fra fjederen er $F=-k \cdot x$ (Hooks lov).

Porten til et lager har en kausal preference: x-lageret skal "helst" have spændingsinput, o-lageret skal "helst" have strøminput. Dette er den såkaldte *integrale* kausalitet, hvor ændringer i level-variablen beregnes ved integration af rate-variablen over tid. Hvis man forbinder en o-kilde med et o-lager eller en x-kilde med et x-lager, er der en kausal konflikt, men den er ikke uløselig. Kilden betragtes som mere "stædig" i sin kausalitet end lageret og påtvinger således lageret sin kausalitet. Lageret må således finde sig i at få *differentiel* kausalitet. For en spændingskilde forbundet med en kondensator sker der det, at spændingen V bestemmer ladningen på kondensatoren: $Q=C \cdot V$, og denne bestemmer så strømmen ved differentiation: $J=dQ/dt$.

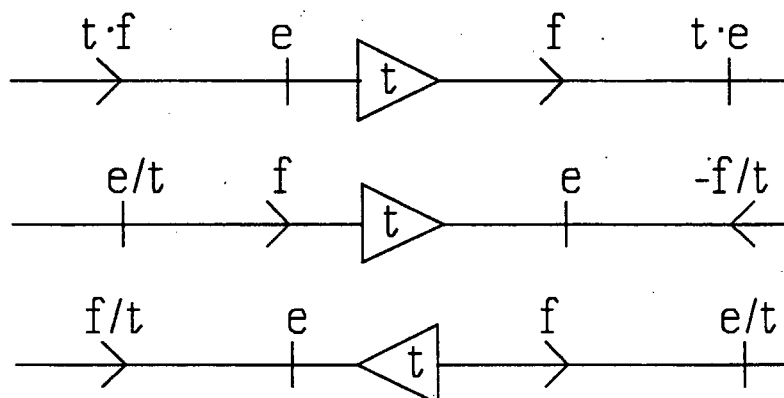


Figur 9 Lineære lagre med differentiel kausalitet.

Der er beregningsmæssige grunde til at foretrække den integrale kausalitet frem for den differentielle, men også fysiske. Hvis vi vil påtrykke en partikel en alt for hurtigt varierende hastighed $v(t)$, vil "inertikraften" $M \cdot dv/dt$ blive for stor til, at systemet kan holde til det (bare tænk på, at partiklen er hovedet af en hammer, og strømkilden, som vil påtvinge hammerhovedet et øjeblikkeligt stop, er en finger).

2.3 Transformere

Vi ser dernæst på **transformeren**, som er en passiv toport. Det basale byggesæts transformer er ideel i den forstand, at den hverken oplagrer eller dissiperer energi. Dvs. energistrømmen ind til primærporten skal være den samme som energistrømmen ud af sekundærporten. Vi tegner transformerikonet som en ligebenet trekant med primærporten midt på grundlinjen og sekundærporten i vinkelspidsen overfor. Omsætningsforholdet t defineres som forholdet mellem sekundærspændingen og primærspændingen. Når energistrømmene i de to porte skal være de samme, må t også være forholdet mellem primærstrømmen og sekundærstrømmen. Dvs. hvis spændingen er input til transformeren på primærsiden, må den være output på sekundærsiden, og omvendt. Den enkelte port har altså ingen kausal preference, men når kausaliteten i den ene port er fastsat, må kausaliteten i den anden port rette sig derefter. Hvis vi forbinder spændingskilder til begge sider af en transformer, er der en uløselig kausal konflikt.



Figur 10 Transformerdefinitionen i tre forskellige udgaver.

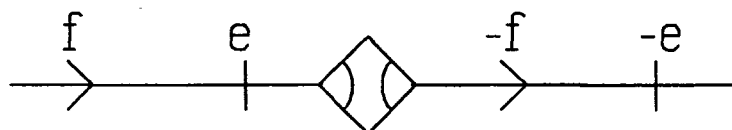
Ved sammenligning af den øverste og den nederste fremstilling af transformerdefinitionen på figur 10 finder vi følgende regel for *vending af ikonet*:



Figur 11 Vending af transformer-ikonet.

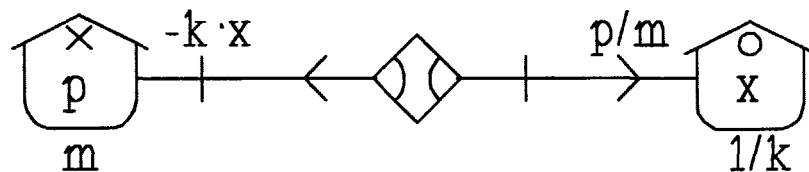
I det specielle tilfælde, hvor $t = 1/t$, kan vi altså ikke kende forskel på primær- og sekundærsiden, og vi bør derfor bruge et *symmetrisk* ikon. Der kun de to muligheder $t = 1$ og $t = -1$ for en ikonsymmetrisk transformer, og den første

mulighed er den ideelle transmitter, som selve energibåndet fremstiller. Den anden mulighed, $t = -1$, fortjener imidlertid et særligt ikon, *den symmetriske transformer*.



Figur 12 Den symmetriske transformer.

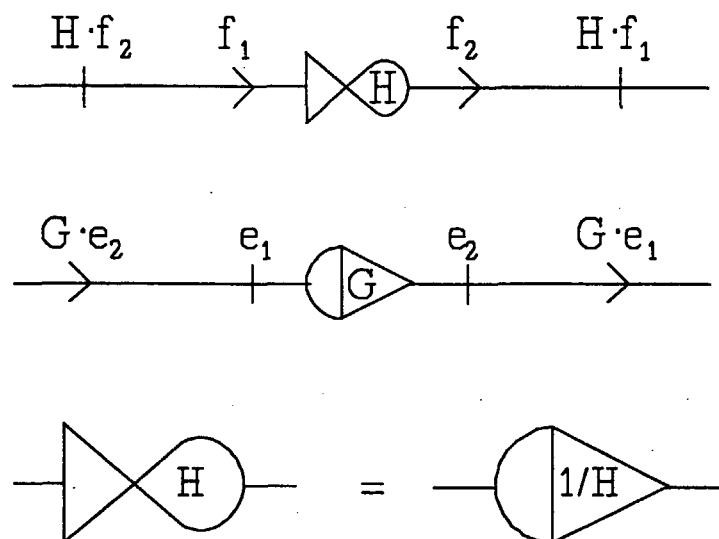
Som et eksempel på brugen af den symmetriske transformer vil vi se på en *harmonisk oscillator*, en partikel med massen m , der er bundet til en fjeder med kraftkonstanten k . Oscillator-opførslen fås i det væsentlige ved at forbinde et lineært x -lager med et lineært p -lager, men der er så et problem med orienteringen, for når hastigheden $v = p/m$ er orienteret ind mod x -lageret, er den orienteret væk fra p -lageret, så hvis vi ønsker, at p -niveauet skal være partiklens position på x -aksen, bliver hastigheden orienteret efter den negative x -akse, hvilket virker unaturligt. Problemet løses ved at indsætte en symmetrisk transformer i det forbindende bånd, som vist nedenfor.



Figur 13 Harmonisk oscillator.

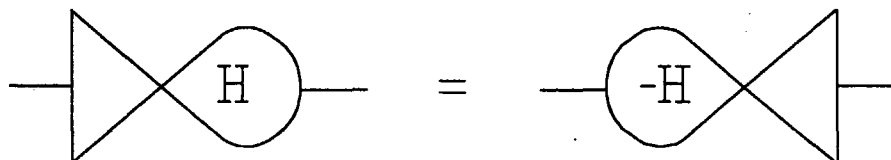
2.4 Gyrotorer

En anden passiv toport er **gyratoren**. Her er der enten spændingsinput i begge porte eller strøminput i begge porte. Gyrotorens omsætningsforhold defineres som forholdet mellem sekundær strøm og primær spænding eller som forholdet mellem sekundær spænding og primær strøm. Da der således er to muligheder for betydning af symbolet for omsætningsforholdet, må vi have to forskellige ikoner, som kaldes o -gyratoren og x -gyratoren. Der er altså ikke tale om to i fysisk forstand forskellige funktioner; en x -gyrator kan udskiftes med en o -gyrator, samtidigt med at symbolet for omsætningsforholdet ændres til sin reciprokke værdi.



Figur 14 Gyratordefinitioner. Øverst x-gyrator, i midten o-gyrator, nederst ækvivalens. Primærsider til venstre.

Ved brug af strøm-orienteringsreglen i begge porte indses, at ikonvending af begge gyrator-ikoner kan foretages ved, at man samtidig skifter fortegn på omsætningsforholdet.



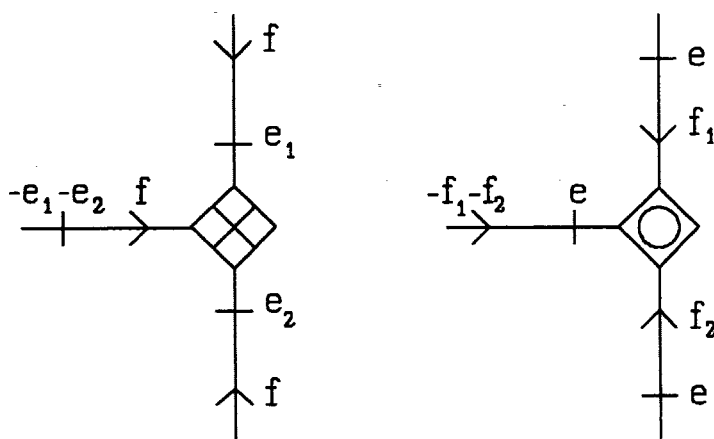
Figur 15 Ikonvending af gyrator.

Ligningen $H = -H$ har kun løsningen $H = 0$, en værdi, der ikke er tilladt som omsætningsforhold for en gyrator. Dvs. en ikonsymmetrisk gyrator indgår ikke i det basale byggesæt.

2.5 Samlere

Indtil nu har vi kun defineret 1-porte og 2-porte, dvs. vi har ingen mulighed for at beskrive forgrening af energistrømme. Denne mulighed indføres med **samlerne**, der er passive n -portede med $n \geq 2$. Vi skal først se på samlerne som

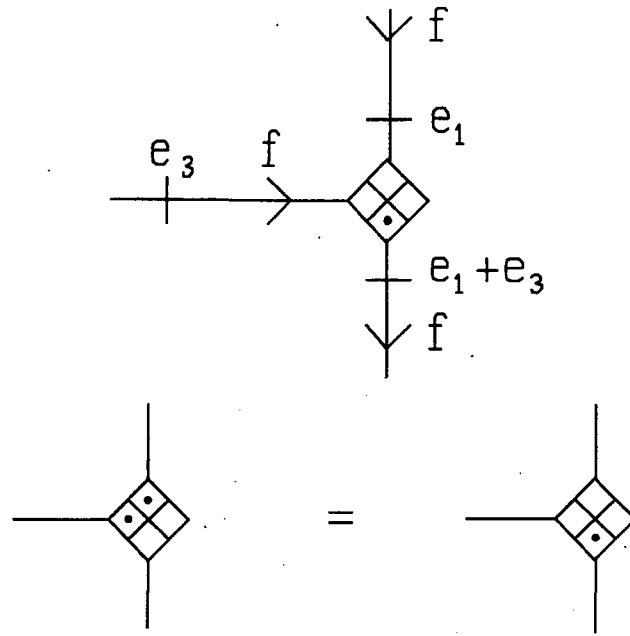
3-porte. Lige som transformerne og gyratorerne er samlerne ideelle elementer, der hverken oplagrer eller dissiperer energi. Hvis alle porte orienteres ind mod samleren, skal summen af produkterne af strøm og spænding i portene være nul. Der er to simple måder, dette kan opfyldes på: enten ved at lade strømmen være den samme i alle portene; så skal summen af spændingerne være nul. Dette er **x-samleren**. Vi siger, at x-samleren står for en *distributiv strømrelation* og en *konservativ spændingsrelation*. Den anden mulighed er at lade spændingen være den samme i alle porte; så skal summen af strømmene være nul. Dette er **o-samleren**, som har en *distributiv spændingsrelation* og en *konservativ strømrelation*. Den variabel, som har en distributiv relation, må være input til samleren i netop ét bånd. Dette bånd kaldes *det stærke bånd* og siges at have *stærk kausalitet*, medens de andre bånd kaldes *svage* og har *svag kausalitet*.



Figur 16 3-port samlere.

Selv om de to samlerdefinitioner fremtræder fuldstændig symmetrisk med hensyn til strømme og spændinger på figur 16, er der alligevel en forskel, som skyldes, at strøm-orienteringsreglen behandler strømme og spændinger forskelligt. Hvis vi for en o-samler vender orienteringen i en eller flere porte, har det ingen betydning for samlerens distributive relation, som jo kun handler om spændingen. Strømfortegnene i den konservative strømrelation vil derimod ændres, men det vil være intuitivt klart, hvordan de afspejler orienteringen, så man i stedet for at sige "summen af de indgående strømme er nul" f.x. må sige "summen af de indgående strømme er lig med den udgående strøm". For x-samleren er det mere problematisk, for her skal fortegnet i den distributive strømrelation ændres, hvor orienteringen skiftes, medens der er uændrede fortegn i den konservative spændingsrelation. Det er ofte mere bekvemt at have et fast fortegn i den distributive relation. Hvis en tre port x-samler har indgående orientering i et af båndene og udgående i de to andre, kan vi indsætte en symmetrisk transformator i den port, som har afvigende orientering, så vil vi få samme strøm i alle tre porte. Vi vil derfor indføre et særligt ikon: **den prikkede x-samler**, hvor den indsatte symmetriske transformator er

"opsuget" af x-samler ikonet og markeret med en prik ved den pågældende port. Der kan godt være flere prikker, men i fysisk forstand er en 3 port x-samler med prikker ved port 1 og 2, men ingen ved port 3, det samme som en, der har en prik ved port 3, men ingen ved portene 1 og 2.

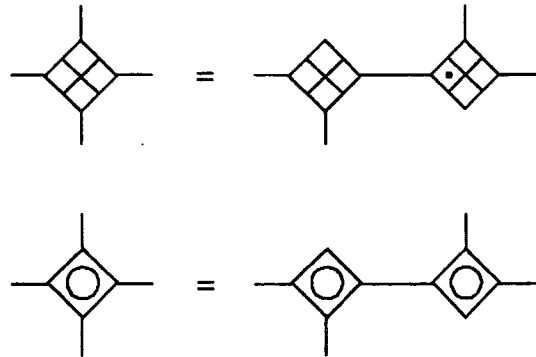


Figur 17 Den prikkede x-samler.

For *det elektriske byggesæt* svarer x-samleren til en serieforbindelse og o-samleren til en parallelforbindelse, og de to konservative betingelser svarer til *Kirchhoffs love*, maskeloven for x-samleren og knudeloven for o-samleren. For *det longitudinalt mekaniske*, som også kan kaldes *det rheologiske byggesæt* er det imidlertid omvendt: x-samleren er en parallelforbindelse og o-samleren en serieforbindelse. En 3 port samler med én prik svarer i rheologien til en togrenet gaffel, hvor skaftet er den prikkede port og de to grene de uprikkede porte. I det transversalt mekaniske byggesæt svarer x-samleren til et enkelt tandhjul, som alle de tilsluttede akslers tandhjul kan rulle på, medens o-samleren er et mere kompliceret *differentiale*.

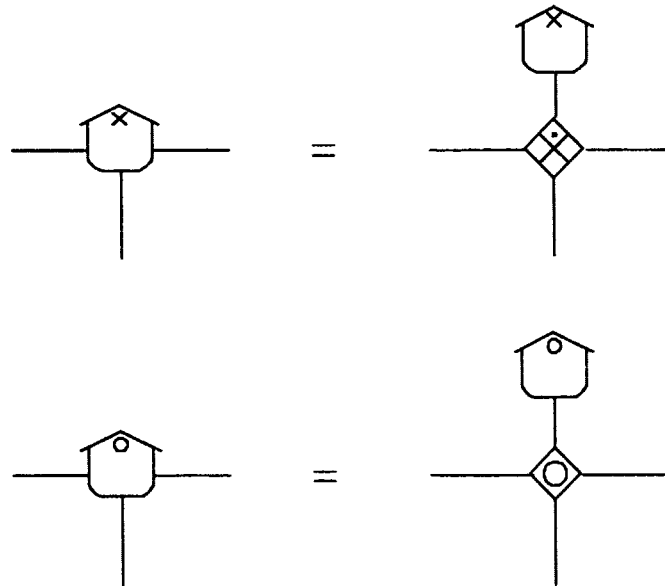
Med indførelsen af 3-port samlerne er det basale byggesæt i stand til at opbygge systemer med vilkårligt højt antal porte. Peirce indførte i sin relationslogik grundformerne *monadiske*, *dyadiske* og *triadiske* relationer og viste så i sit *valensteorem*, at alle *n-adiske* relationer med $n > 3$ kan opbygges ved hjælp af de tre grundformer. I det basale byggesæt har vi tilsvarende indført 1-porte, 2-porte og 3-porte. Her svarer kilderne til de monadiske relationer. Lagrene og lækkene (som endnu ikke er formelt definerede) svarer til dyadiske relationer mellem strøm og spænding i samme bånd, transformere og gyratorer har et par af dyadiske relationer mellem variable i to forskellige porte, og 3-port samlerne har et par af triadiske relationer, den ene mellem strømmene og den anden mellem spændingerne i de tre forskellige porte. Svarende til valensteoremets kan

vi nu vise, at n -port samlere med $n > 3$ (multiport samlere) kan fremstilles af 3-port samlere. Nedenfor vises kun konstruktionen for $n = 4$. Bemærk, at der i konstruktionen af 4-port x -samleren også indgår et dyadisk element, nemlig prikken (den symmetriske transformer).



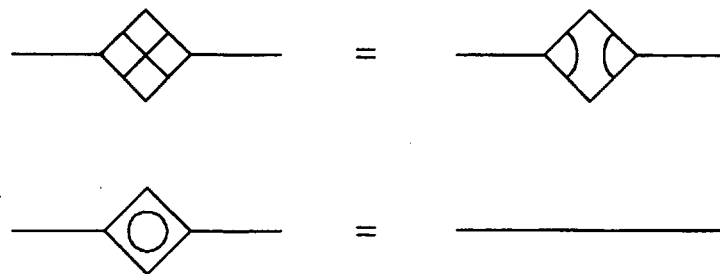
Figur 18 Opbygning af multiport samlere.

Med multiport samlere kan vi nu også definere "multiport lagre". Her er ikke tale om ægte multiport lagre, der har lige så mange level variable som porte (herom mere senere, de ægte multiport lagre hører ikke til i det basale byggesæt, men er højere ikoner).



Figur 19 Uægte multiport lagre.

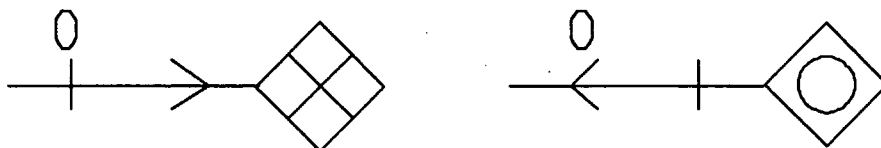
Vi kan også gå den anden vej og reducere antallet af porte på samlerne. Med to porte bliver samlerne til de to allerede kendte symmetriske transformere.



Figur 20 Topport samlere.

Man kan altså godt undvære topport samlerne i det basale byggesæt, men i den generaliserede version af eb-teknikken, hvor der arbejdes med komplekse vektorbånd i vilkårlige metrikker (IMFUFA tekst 238) får man brug for dem, da identiteterne i figur 20 ikke altid gælder.

Derimod har **1-port samlere** en vigtig funktion i det basale byggesæt. Da en samler altid skal have ét stærkt bånd, må 1-port samlerens ene bånd være stærkt. Dvs. 1-port x-samleren skal have strøminput, og output-spændingen må være nul på grund af den konservative spændingsrelation, der jo nu kun indeholder ét led i summen. Tilsvarende må 1-port o-samleren have spændingsinput, og output strømmen må være nul. Vi ser heraf, at 1-port samlerne ikke er passive, men aktive, idet *1-port x-samleren er en spændingskilde med spændingen nul*, og *1-port o-samleren er en strømkilde med strømmen nul*. Sådanne elementer er nyttige til angivelse af *grænsebetingelser* eller *katastrofer*. Hvis man forbinder et lager med en 1-port samler af modsat type (altså et x-lager med en o-samler, eller omvendt), vil samleren øjeblikkeligt "dræbe" lageret, idet den påtvinger lageret differentiell kausalitet og nulstiller level variablen. I det elektriske byggesæt svarer 1-port x-samleren til en *kortslutning*, og 1-port o-samleren til en *afbrudt forbindelse*.



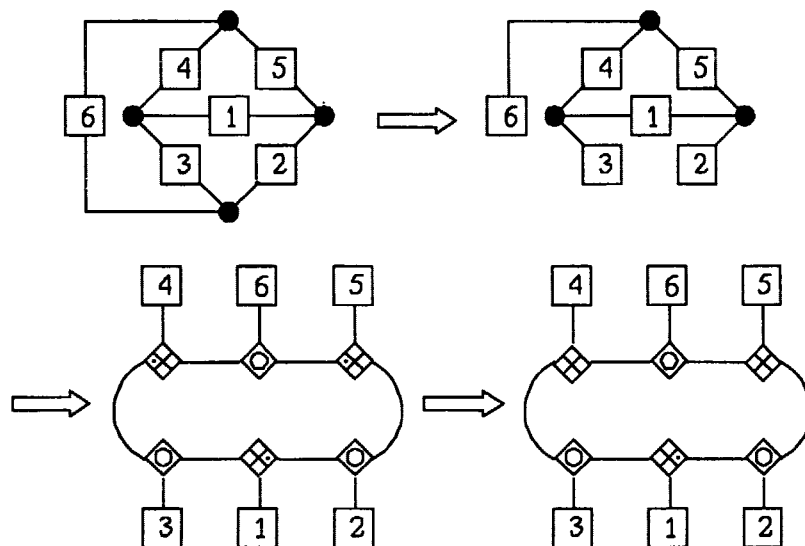
Figur 21 1-port samlere.

2.6 Netværks-topologi

Begrænsningerne i det elektriske byggesæt viser sig, når vi prøver at oversætte visse eb-sytemer til elektriske netværk. Omvendt går det let nok: enhver *lineær graf*, dvs. en struktur af knuder, forbundet med grene, kan oversættes til en EB-samlerstruktur efter følgende simple opskrift:

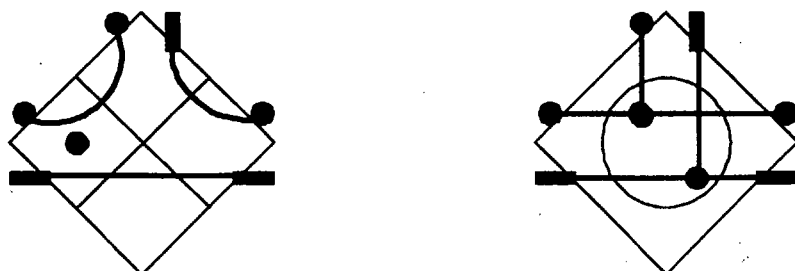
- 1) I den lineære graf vælges en "referenceknude" ("jord"), som skæres bort.
- 2) De resterende knuder oversættes til o-samlere.
- 3) Hver gren i grafen, som ikke er forbundet med referenceknuden, oversættes til energibånd med indsat 3-port prikket x-samler, forbundet med de o-samlere, som svarer til de knuder, der er forbundet med grenen i grafen. Prikken skal sidde ved en af de porte, der vender mod en af de to knuder. Den tredje port (den ydre) er forbundet til det system, som er indsat i grenen i den elektriske graf.
- 4) EB-grafen kan evt. simplificeres ved at flytte rundt med prikkerne: en prik i en bestemt port kan flyttes over i de to andre porte (sml. figur 17). Herfra kan den vandre ud i båndene. Når den møder en samler, deler den sig og fortsætter ud i de andre bånd fra samleren. Når den møder en anden prik, ophæves begge. Prikker i ydre porte forsvinder.

Nedenfor vises metoden anvendt på en tetraeder-graf (en Wheatstone-bro).



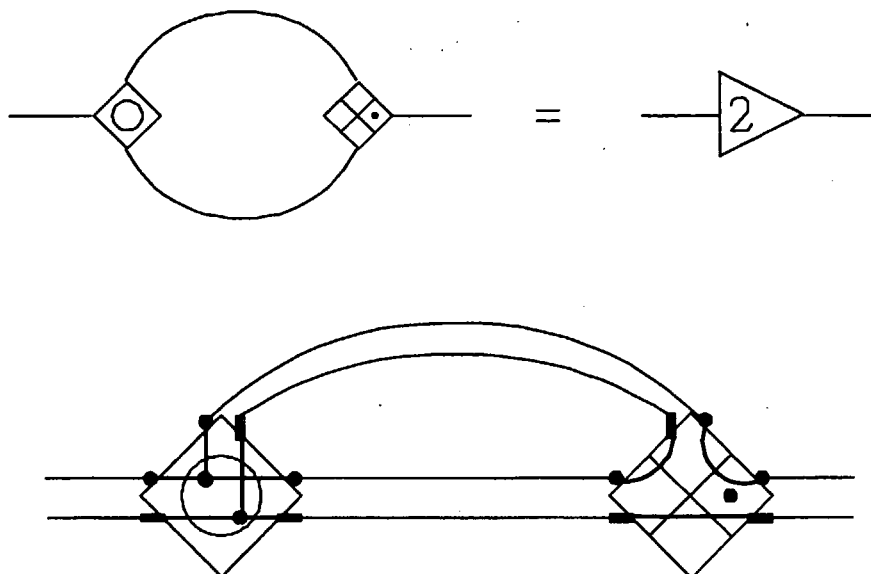
Figur 22 Oversættelse af elektrisk netværk til samlerstruktur.

Hvis vi stopper efter punkt 3 i denne metode, er det også nemt at se, at oversættelsen kan gøres den modsatte vej: En EB-samlersstruktur, der kun består af o-samlere og 3-port prikkede x-samlere med prikken i en indre port, kan altid oversættes tilbage til et elektrisk netværk. For at gøre dette, skal man blot benytte de nedenfor angivne opskrifter på samlerne i det elektriske byggesæt. Bemærk, at der *ikke* indgår nogen transformere i den prikkede x-samlers. Dvs. hvis man i det elektriske byggesæt skal bruge *uprikkede* x-samlere, får man brug for symmetriske transformere, og man kan sige, at vanskeligheden ved at konstruere jævnstrømstransformatorer er en alvorlig begrænsning af det elektriske byggesæt.



Figur 23 Samlere i det elektriske byggesæt.

I det basale byggesæt er det ellers nemt nok at lave en transformer, når man bare har samlere. Nedenfor vises en opskrift, men også, hvor galt det kan gå, hvis man forsøger at realisere den med brug af samlerne på figur 23.



Figur 24 Mislykket forsøg på at lave en elektrisk jævnstrømstransformer.

2.7 Transducere

Vi har nu stort set afsluttet gennemgangen af de aktive og passive elementer i det basale byggesæt, men mangler lige at omtale **transduceren**, en passiv toport, der fungerer som "interface" mellem to forskellige energetiske medier (evt. to forskellige byggesæt). Vi vil definere transduceren simpelt som *en transformer med dimension*. En gyrator kan også fungere som transducer (f.x. en elektromotor), hvis dimensionen af dens omsætningsforhold afviger fra forholdet mellem strøm og spænding i primærporten. De formelle EB-definitio-ner kan i alle tilfælde henføres til figur 10 og figur 14.

2.8 Lække

De dissipative elementer repræsenteres i det basale byggesæt af **lækkene**. Et dissipativt system har både et passivt *response* på de påtrykte signaler, men også en aktiv *støj*. F.x. for en ohmsk modstand R med strøminput J er spændingsoutputtet givet ved

$$V = RJ + \delta V \quad (6)$$

hvor δV er støjen, som i de fleste sammenhænge er lille i forhold til det passive response RJ . For *lineære lække* som den ohmske modstand bestemmes støjens størrelse af modstanden R og den absolutte temperatur T i *fluktuations-dissipationsteoremet*. Hvis tiden i en numerisk integration deles op i skridt med længden δt , kan støjbidraget for hvert enkelt skridt i *den klassiske grænse* udtrykkes som

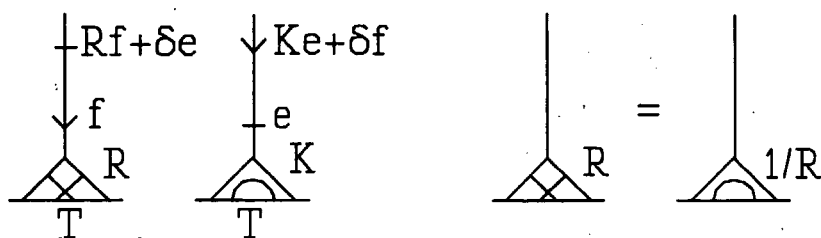
$$\delta V = N \left(\sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot kT}{\delta t}} \right) \quad (7)$$

hvor k er Boltzmanns konstant, og hvor $N(b)$ er et normalfordelt tilfældigt tal med middelværdien 0 og spredningen b. Da støjen går omvendt proportionalt med kvadratroden af skridtlængden δt , har det altså strengt taget ingen mening at tale om *den øjeblikkelige værdi* af output variabelen fra en læk. Der er tale om *hvid støj*, der er ligeligt fordelt over alle frekvenser og derfor divergerer over et uendelig lille tidsinterval. Man taler i den forbindelse om en *ultraviolet katastrofe*. Den klassiske grænse, hvor (7) gælder er defineret ved

$$\delta t > \frac{\hbar}{kT} \quad (8)$$

men for mindre tidsintervaller, hvor kvantemekanikken gør sig gældende, bliver den ultraviolette katastrofe bare endnu værre.

Vi vil her nøjes med at se på *lineære lække*. Ligesom for gyratorer benyttes to forskellige ikoner, en x-læk og en o-læk, ikke fordi der er tale om fysisk forskellige funktioner, men fordi ikonet skal kunne definere betydningen af symbolet, som for x-lækken er en *modstand* (resistans) og for o-lækken en *ledningsevne* (admittans) eller *bevægelighed* (mobilitet).



Figur 25 Lineære lække.

Hermed afsluttes gennemgangen af det basale byggesæt.

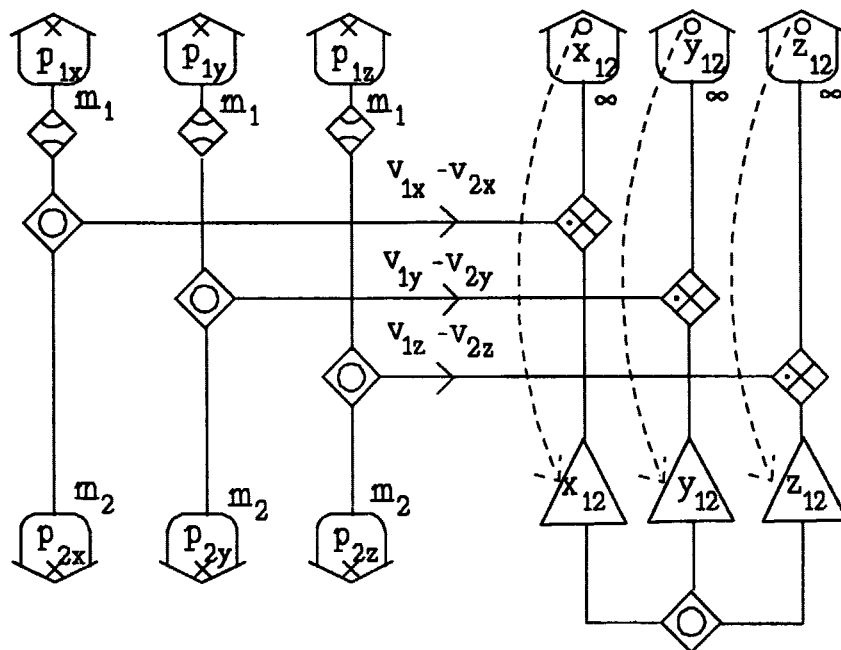
Kapitel 3

Hastigheds constraints

3.1 Stiv stang

I den analytiske mekanik forsøger man at formulere systemets bevægelsesligninger i termer af et sæt *uafhængige generaliserede koordinater*. Det er imidlertid ikke altid, at de *constraints*, der er pålagt bevægelsen, er *holonome*, således at de tillader elimination af afhængige variable. Alle constraints i en energibandsmodel skal kunne formuleres som relationer mellem energibåndenes variable, dvs. det er *hastigheds-constraints*, og det er ikke sikkert, at de er *integrable* til relationer mellem o-levels, som jo er den variabel-klasse, de generaliserede koordinater tilhører. I et EB-diagram henføres constraint relationerne til *skeletdiagrammet*, dvs. den topologiske del af diagrammet, der skildrer systemets forbundethed ved hjælp af samlere og transformere.

Lad os som eksempel betragte to partikler med masser m_1 og m_2 , der kan bevæge sig i tre dimensioner, men som er forbundne med en stiv, masseløs stang. På nedenstående diagram vises 6 x-lagre for de 2×3 impulskomponenter og 3 o-lagre for de relative koordinater $x_{12} = x_1 - x_2$ osv.



Figur 26 Bevægelse af to partikler forbundet med stiv stang.

De tre o-lagre er såkaldt *cykliske lagre*, der angives som lineære lagre med kapaciteten ∞ , dvs. output spændingen fra dem er nul. Vi regner altså ikke med, at der er *egentlige kræfter* forbundet med de relative koordinater (de er cykliske), men, som vi skal se, bevirker skeletdiagrammets struktur, at der optræder *constraint kræfter*, som beskriver virkningen af den stive stang. I diagrammet optræder tre *styrede transducere*, hvis omsætningsforhold er givet ved de tre relative koordinater. Styringen angives med en punkteret pil, der udgår fra det ikoniske index (o) for level variabelen i lageret og ender ved det styrede ikon. Sådanne styringer kan i princippet angive vilkårlige funktionelle sammenhænge, men det er i EB-spillets ånd at undgå for indviklede sammenhænge og (som her) nøjes med *lineære styringer*. Da strømmene på sekundærsideerne af transducerne er de tre relative hastigheder, $v_{1x} - v_{2x}$, osv, er primærstrømmene lig med produktet af de relative hastigheder og de relative koordinater. De tre primærbånd er forbundet til samme o-samler, hvis konservative strømrelation således udtrykker, at

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x_2)(v_{1x} - v_{2x}) + (y_1 - y_2)(v_{1y} - v_{2y}) + (z_1 - z_2)(v_{1z} - v_{2z}) &= 0 \quad (9) \\ \text{eller: } \frac{d}{dt}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

dvs. at afstanden mellem de to partikler er konstant, hvilket jo netop er det, den stive stang sørger for.

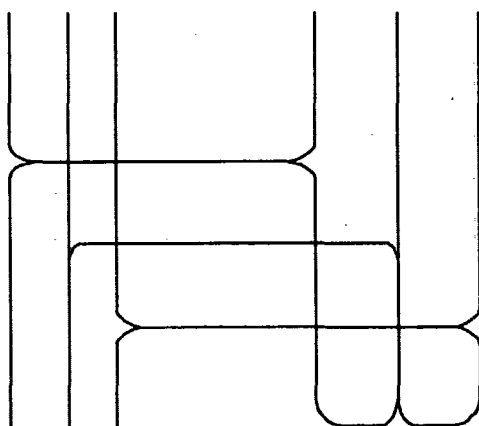
Da o-samleren skal have ét stærkt bånd og to svage, må vi vælge et af de tre bånd til at have den modsatte kausalitet af de to andre. Lad os vælge y-båndet som det stærke. Så skal der også træffes et valg af stærkt bånd ved den o-samler, der sidder mellem de to p_y -lagre til venstre i figuren, og det må betyde, at ét af disse to x-lagre må påtrykkes differentiell kausalitet, f.x. p_{2y} -lageret. Der vil da som outputspænding fra dette lager optræde en *inertikraft*

$$f_{2y}^{(i)} = m_2 \cdot \frac{dv_{2y}}{dt} \quad (10)$$

og dette spændingssignal vil distribueres ud fra o-samleren til venstre og videre til o-samleren tilhøjre, hvorfra det igen vil distribueres og give anledning til spændingsinput til de øvrige x-lagre i diagrammet. På denne måde beskriver EB-diagrammet altså *constraint kræfterne* som hidrørende fra kausale constraints i skeletdiagrammet, der fører til differentiell kausalitet i et eller flere x-lagre. Antallet af lagre med differentiell kausalitet svarer til antallet af constraints. I dette tilfælde er der kun ét constraint, som udtrykkes ved den stive stang og den symbolske betingelse (9).

3.2 Signalspor

For at få en hurtig oversigt over kausaliteten i en EB-diagram kan man benytte en grafisk teknik, som kaldes *signalspor*. Ideen i denne fremstillingsmåde er, at en samler svarer til et jernbane-skiftespor. For en o-samler vil spændings-signalet, der går ind til samleren i det stærke bånd distribueres ud til de svage bånd, og et strømsignal, der kommer ind i et af de svage bånd, vil gå videre til det stærke bånd, men der er *ingen signalvej* fra et svagt bånd til et andet svagt bånd. Signalspors-strukturen for det gennemgåede eksempel, hvor vi vælger at pålægge p_{2y} -lageret differentiell kausalitet bliver da som vist nedenfor.

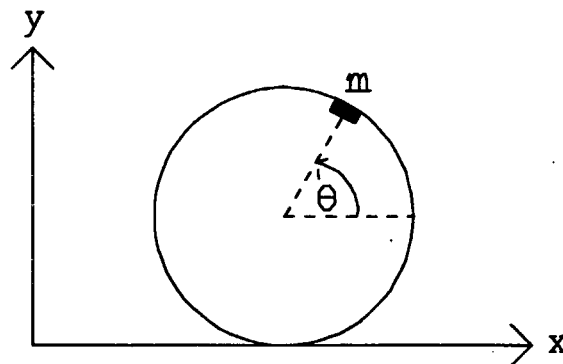


Figur 27 Signalspor for EB-diagrammet figur 26.

I dette tilfælde er der tale om et *holonomt* constraint, dvs. det kan formuleres som en reduktion i antallet af uafhængige koordinater. De oprindelige 6 koordinater $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ (som ikke er vist på figur 26) kan udtrykkes som funktioner af 5 *uafhængige generaliserede koordinater*, som kan være de tre koordinater for massemidtpunktet plus to vinkelkoordinater, som angiver retningsvektoren mellem de to partikler. Vi skal ikke i dette afsnit gå ind på, hvordan et EB-diagram for de generaliserede koordinater og impulser kan konstrueres, men vender tilbage til dette spørgsmål i et senere afsnit.

3.3 Rulning på skinne

Et andet eksempel vedrører *rulning*. Vi betragter et stift, masseløst hjul, som kan rulle på en skinne. På randen af hjulet er der anbragt en partikel med massen m , som er påvirket af et konservativt kraftfelt med potentialet $U(x,y)$, hvor x og y er partiklens retvinklede koordinater (skinnen har $y=0$).

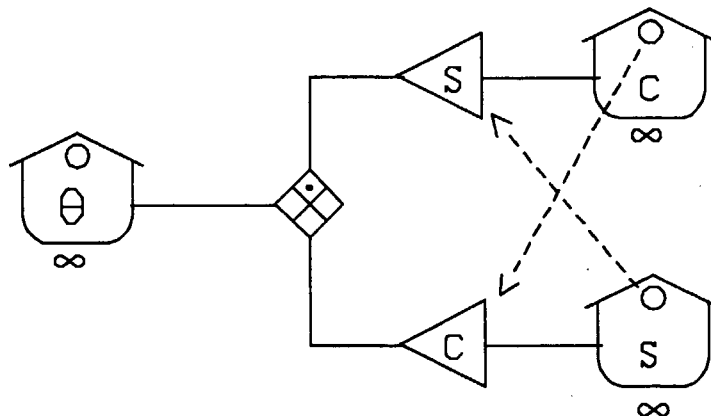


Figur 28 Hjul på skinne.

I dette tilfælde er der kun én generaliseret koordinat, som kan være vinklen θ . For at beregne kraften på partiklen skal vi imidlertid kende dens retvinklede koordinater x og y , så vi får brug for de ikke lineære funktioner $\cos\theta$ og $\sin\theta$. For at vise princippet om frembringelse af ikke lineære funktioner ved lineære styringer af transformere fra level variable, skal vi lige se, hvordan det gøres i dette tilfælde. Vi indfører to levels c og s (som skal være henholdsvis $\cos\theta$ og $\sin\theta$) foruden θ . Vi har så:

$$\dot{c} = -s \dot{\theta} \quad ; \quad \dot{s} = c \dot{\theta} \quad (11)$$

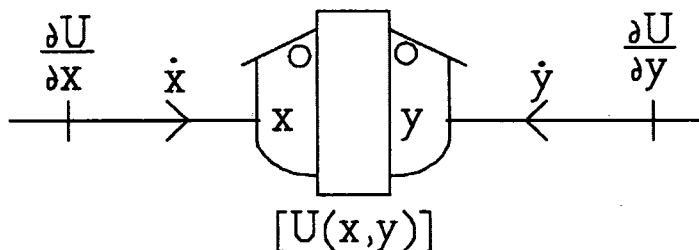
hvor prikken over symbolerne angiver differentiation med hensyn til tiden. Disse relationer kan så udtrykkes ved følgende diagram:



Figur 29 Fremstilling af $c=\cos\theta$ og $s=\sin\theta$ ved lineære styringer.

For at få de rigtige funktioner skal man vælge begyndelsesværdier, så $c=1$ og $s=0$ for $\theta=0$. Et af lagrene i figur 29 må have differentiell kausalitet, og det kan jo ikke i almindelighed lade sig gøre for aktive lagre, men når de som her alle er cykliske, forsvinder problemet, for når alle outputspændingerne er nul, er den konservative spændingsrelation for x -samleren jo automatisk opfyldt.

De egentlige (ydre) kræfter, der påvirker partiklen, vil vi skildre generelt ved en potentialfunktion $U(x,y)$, og denne må så i diagrammet angives ved et højere ikon: *multiport lageret for potentiel energi*, her med to porte for x og y .

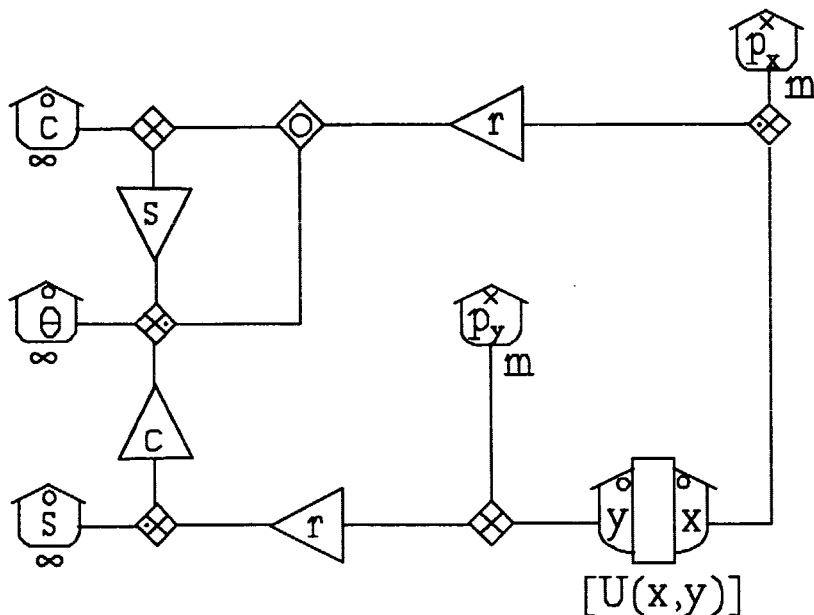


Figur 30 Toport lager for potentiel energi.

Betingelsen for, at hjulet ruller på skinnen er følgende constraint mellem vinkelhastigheden og partiklens to hastighedskomponenter:

$$\dot{x} = r \cdot (\dot{\theta} - \dot{\theta}) ; \dot{y} = r \cdot \dot{\theta} \tag{12}$$

hvor r er hjulets radius. Vi kan så tegne diagrammet, hvor rulningsbetingelsen (12) indgår sammen med delene på figur 29 og 30:



Figur 31 EB diagram for hjul på skinne (figur 28).

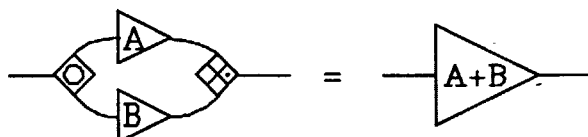
Vi har her undladt at angive styringspile fra s - og c -lagrene til de to transformere (sml. figur 29), idet styringerne fremgår af transformer-symbolerne.

$$e_2 = G \cdot (e_2 - e_1) \Rightarrow e_2 = - \frac{G}{1 - G} \cdot e_1 \quad (13)$$

Vi kunne imidlertid have ladet som om, der var stærk kausalitet, dvs. at vi i forvejen kendte e_2 og ville beregne e_1 . Så ville der ikke være noget loop, og diagrammet giver direkte:

$$e_1 = \left(1 - \frac{1}{G}\right) \cdot e_2 \quad (14)$$

hvilket vi også kunne finde ved at bruge ikonformlen



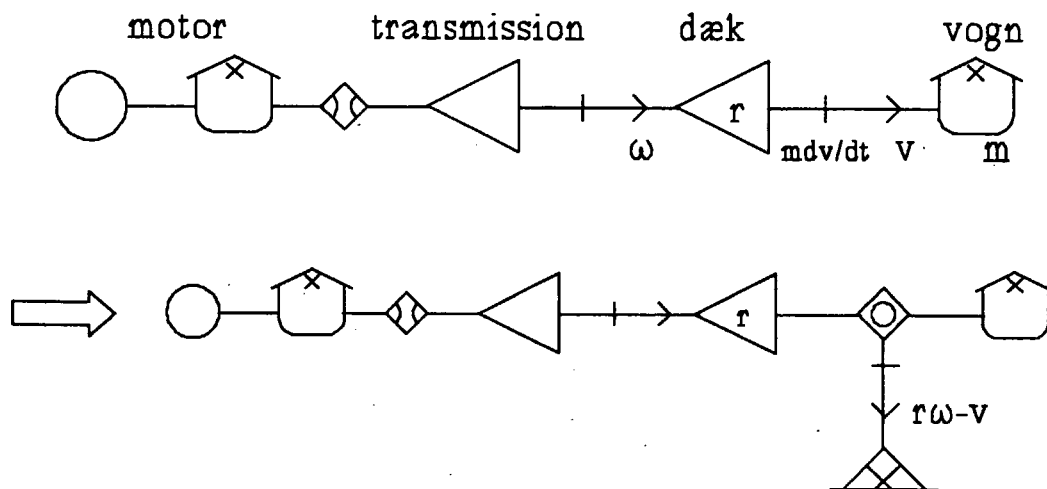
Figur 34 Addition af transformere.

Vi ser af (13), at et loop bliver kritisk, når forstærkningsfaktoren bliver 1. I vores eksempel med hjulet, sker det for $s=-1$, dvs. når massen m befinder sig nede i berøringspunktet mellem hjulet og skinnen. I den situation går det altså ikke at tillægge p_y -lageret differentiell kausalitet, men man må i stedet lade det gå ud over p_x -lageret. Hvis vi havde valgt denne løsning fra starten, ville der ikke være noget loop i signalruterne, og vi ville undgå problemet med forstærkningsfaktoren, der kan blive 1. Selv om energibåndstrukturen tillader flere former for kausalitet, er det altså ikke sikkert, at de er lige gode for beregningerne. Optegning af signalsporene er en god metode til at finde den bedste kausalform, som i almindelighed er den, der har det færreste antal loops.

3.5 Inertikræfter

Differentiel kausalitet på x -lagre er en uundgåelig konsekvens af hastighedsconstraints, og de heraf følgende inertikræfter ($m \cdot dv/dt$) er et memento til modelbyggeren om, at disse constraints kan bryde sammen i højfrekvens grænsen. Hvis en bil prøver at accelerere meget hurtigt fra start, når lyset bliver grønt, hviner dækkene mod vejbanen, hvilket svarer til, at rullebetingelsen

bryder sammen under inertikraftens pres, og der dukker en læk op, som beskriver faststofgnidningen mellem dækkene og vejbanen.



Figur 35 Sammenbrud af rulnings constraint ved hurtig bilstart.

3.6 Rullende kugle

Som et sidste eksempel skal vi se på et ikke-holonomt constraint: En kugle, der ruller på en plan. Der skal 5 generaliserede koordinater til at specificere kuglens position: 2 retvinklede koordinater til at angive centerets placering over planen og 3 vinkler (f.x. Euler vinklerne, der senere skal gennemgås) til at angive orienteringen af et til kuglen fast knyttet koordinatsystem i forhold til laboratorie-systemet. Rullebetingelsen giver i dette tilfælde to hastigheds constraints, men det er ikke muligt at reducere antallet af koordinater, dvs. de to constraints er ikke integrable. Årsagen til dette er, at kuglen kan rotere om en lodret akse uden at flytte sig i planen, så for enhver position i planen er alle orienteringer mulige.

De gængse metoder i den analytiske mekanik, Lagrange- og Hamilton-formalismen, kommer til kort over for ikke-holonome constraints, men, som vi skal se, frembyder de ikke noget alvorligt problem for en energibånds-reticulation.

Vi vil antage, at kuglens massefordeling er symmetrisk, således at massetætheden kun afhænger af afstanden fra centrum. Herved bliver dynamikken særlig simpel, for det betyder, at kuglens inertimoment, I , er en konstant, uafhængig af den øjeblikkelige omdrejningsakse. Hvis kuglen er massiv med

konstant massetæthed (billardkugle), er $I = (2/5)MR^2$, hvor M er kuglens masse og R dens radius. Hvis al massen ligger ude ved overfladen (bordtennisbold), er inertimomentet $I = (2/3)MR^2$.

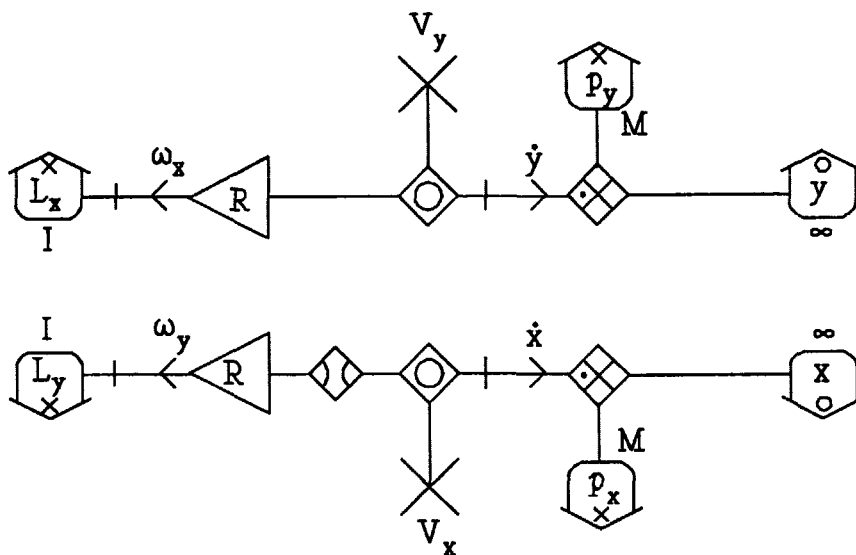
At inertimomentet således er en skalar (og ikke en 3*3 symmetrisk tensor, som vi senere skal komme ind på) betyder, at impulsmomentvektoren altid har samme retning som den øjeblikkelige omdrejningsvektor:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \tag{15}$$

De to rulnings-constraints vedrører så alene x - og y -komponenterne af omdrejningsvektoren; ω_z beskriver blot et "neutralt spin", som ikke får kuglen til at flytte sig i planen, men ω_x får den til at rulle i den negative y -akses retning, og ω_y ruller den i den positive x -retning. Hvis planen selv flytter sig i forhold til laboratoriesystemet, således at berøringspunktet har hastigheds-komponenter V_x og V_y , ændrer centerkoordinaterne x og y sig med hastighederne

$$\dot{x} = V_x + R\omega_y ; \dot{y} = V_y - R\omega_x \tag{16}$$

Med indførelse af lineære x -lagre for impulsmomentet og den lineære impuls får vi EB-diagram, der er delt op i to separate halvdele:



Figur 36 Kugle, der ruller på en bevægelig plan.

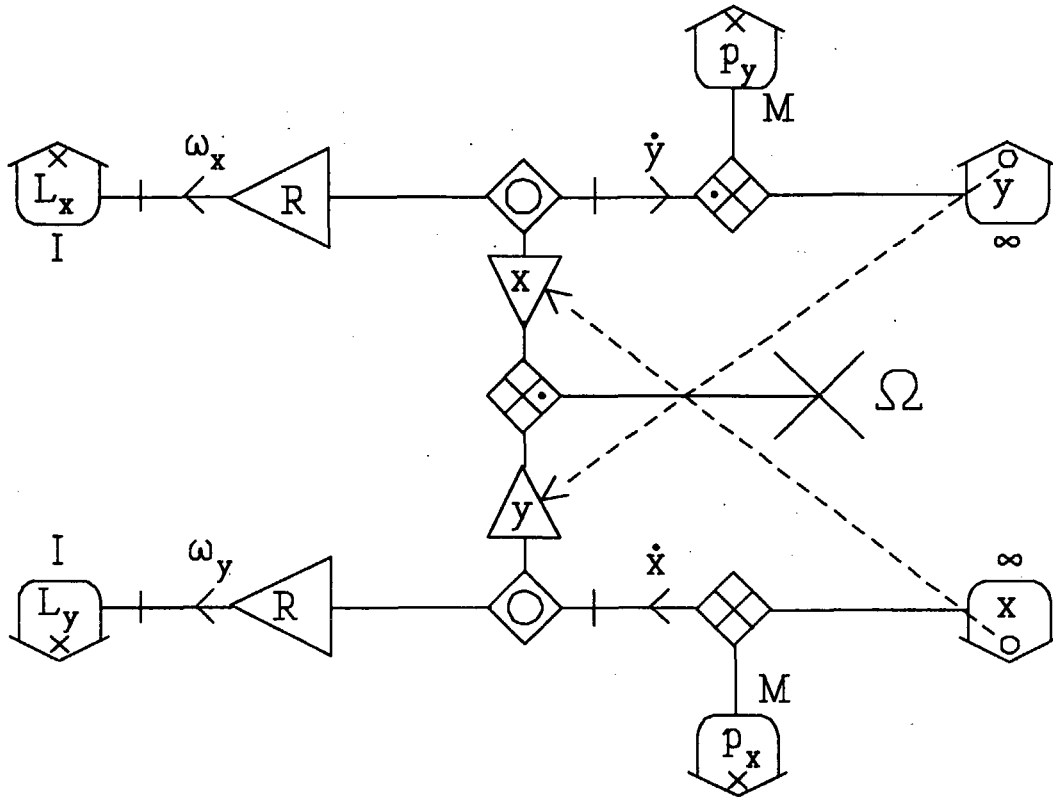
Der er her angivet differentiell kausalitet på de to p-lagre. Inertikraften fra disse lagre giver så følgende kraftmoment, der bestemmer ændringshastigheden af impulsmomentet:

$$M_x = \dot{L}_x = RM \dot{y} \quad ; \quad M_y = \dot{L}_y = -RM \dot{x} \quad (17)$$

De to halvdele af diagrammet kan komme til at hænge sammen, hvis hastighederne V_x og V_y er afhængige af berøringspunktets position (x,y) . Dette er tilfældet for det berømte eksempel **rullende kugle på gramfonplade**. Hvis gramfonpladen drejer med den faste vinkelhastighed Ω , har vi:

$$V_y = \Omega x \quad ; \quad V_x = -\Omega y \quad (18)$$

Diagrammet for denne bevægelse kan så tegnes med en fast strømkilde Ω , der virker gennem to styrede transducere, x og y :



Figur 37 Kugle, der ruller på roterende skive.

Kuglens hastighed fås nu af (16) og (18):

$$\dot{x} = R \frac{L_y}{I} - \Omega y \quad ; \quad \dot{y} = \Omega x - R \frac{L_x}{I} \quad (19)$$

Ved en yderligere differentiation og benyttelse af impulsmomentsætningen (17) får vi så:

$$\ddot{x} = -\frac{\Omega \dot{y}}{1 + \frac{MR^2}{I}} ; \quad \ddot{y} = \frac{\Omega \dot{x}}{1 + \frac{MR^2}{I}} \quad (20)$$

hvilket kan integreres til

$$\dot{x} = -\alpha \Omega y + v_{0x} ; \quad \dot{y} = \alpha \Omega x + v_{0y} \quad (21)$$

hvor vi har indført betegnelsen α for den dimensionsløse konstant i (20):

$$\alpha = \left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)^{-1} \quad (22)$$

som vil være 2/7 for en billardkugle og 2/5 for en bordtennisbold. Indsættelse af (21) i (20) giver så:

$$\ddot{x} = -(\alpha \Omega)^2 \left(x + \frac{v_{0y}}{\alpha \Omega}\right) ; \quad \ddot{y} = -(\alpha \Omega)^2 \left(y - \frac{v_{0x}}{\alpha \Omega}\right) \quad (23)$$

Vi ser heraf, at kuglen vil bevæge sig i en *cirkelbane* med centrum i punktet $(-v_{0y}/(\alpha \Omega), v_{0x}/(\alpha \Omega))$. Vinkelhastigheden i denne bevægelse vil være $\alpha \Omega$, altså 2/7 af skivens vinkelhastighed for en billardkugle, 2/5 for en bordtennisbold.

Eksemplet viser, at hastigheds-constraints kan føre til en opførsel, der umiddelbart virker besynderlig. Hvis man anskuer sagen fra et roterende koordinatsystem, der følger med gramfonpladen, skulle man tro, at centrifugalkraften ville trække kuglen længere og længere væk fra centrum. Det vil selvfølgelig også ske, hvis kuglen begynder at glide i stedet for at rulle. Set fra det roterende system vil banekurven være en rosette, som er lukket, hvis og kun hvis α er et rationalt tal.

Vi har med dette eksempel set, at ikke-holonome constraints kan behandles med energibåndsteknikken, men i det følgende vil vi dog regne med, at de er holonome, så det er muligt at indføre uafhængige generaliserede koordinater.

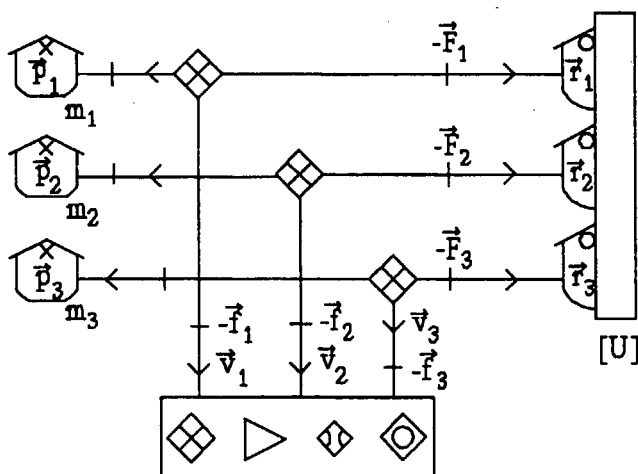
Kapitel 4

Hamiltons princip

4.1 Tellegens teorem

Når vi reticulerer et system af partikler med masser m_i , som er pålagt visse constraints (stive stænger, rulning, mm), har vi set, at disse constraints kan formuleres inden for den del af diagrammet, som kaldes *skeletdiagrammet*, dvs. den del, der kun indeholder samlere, transformere og transducere. En bestemt impuls \vec{p}_i beskrives som forbundet med stedvektoren \vec{r}_i gennem en x-

samler som på figur 31, 36 og 37. Vi tillader os altså her at benytte vektor-symboler for både level- og rate-variablene, selv om vektorbånd går ud over rammerne for det basale byggesæt. Et vektor-lager er blot en sammenfatning af tre lagre, et for hver vektorkomponent, og et vektorbånd svarer til tre almindelige bånd. Energistrømmen i vektorbåndet er skalarproduktet af strøm- og spændingsvektoren. Den kinetiske energi i systemet kan så beskrives ved uafhængige, lineære x-lagre, men for den potentielle energi må vi i almindelighed benytte en multiport o-lager, hvis energifunktion kan afhænge af samtlige stedvektorer. Spændingerne fra potentiel energi lageret definerer så de *egentlige* eller *ydre* kræfter i systemet, \vec{F}_i , medens spændingerne fra skeletdiagrammet, \vec{f}_i , beskriver *constraint* kræfterne. Tilstedeværelsen af constraints medfører differentiell kausalitet på nogle af x-lagrene, og de herfra stammende *inertikræfter* er så bestemmende for constraint kræfterne.



Figur 38 Partikelsystem med hastigheds constraint.

Grunden til, at et skeletdiagram som det på figur 38 ikke kan have samme kausalitet i alle porte, er, at det repræsenterer to sæt *uafhængige* relationer: et sæt strømrelationer og et sæt spændingsrelationer. Det er afgørende, at der ikke indgår gyratorer i skeletdiagrammet, for disse ville blande strømrelationerne sammen med spændingsrelationerne. Når de to sæt relationer er uafhængige, kan vi ikke have strøminput i alle portene, for så ville spændingerne være ubestemte (og strømmene ville være overbestemte).

En anden vigtig egenskab ved skeletdiagrammet er, at det hverken kan oplagre eller dissipere energi. Der gælder derfor følgende *arbejdsprincip* for skeletdiagrammet for et n-partikelsystem, når alle porte er orienteret ind mod, eller væk fra, skeletdiagrammet:

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (24)$$

Uafhængigheden af de to sæt relationer tillader os imidlertid en langt mere vidtgående konklusion. Hvis strømrelationerne er opfyldt og spændingsrelationerne er opfyldt, hver for sig, så behøver strømmene og spændingerne slet ikke høre til samme fysiske situation for det betragtede system. Gyldigheden af arbejdsprincippet (24) hænger jo kun på relationerne i skeletdiagrammet. Dvs. hvis vi fjernede alle andre ikoner end skeletdiagrammets og tilføjede nogle andre ikoner, som ville give samme kausalitet i skeletdiagrammets porte, så ville (24) også gælde for strømmene og spændingerne i det nye system. Eller hvis spændingerne i (24) er for det oprindelige system og strømmene for det nye system, gælder den stadig, eller hvis spændingerne er til ét tidspunkt og strømmene til et andet tidspunkt for det oprindelige eller det andet system; - det forringer på ingen måde gyldigheden af (24), hvis skeletdiagrammet er uændret. Dette er *Tellegens teorem*, som kan udtrykkes på formen

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_i^{(1)} \cdot \vec{v}_i^{(2)} = 0 \quad (25)$$

hvor supskripterne (1) og (2) hentyder til, at spændingerne og strømmene kan høre til to forskellige fysiske situationer. Det er dog vigtigt, at *skeletdiagrammet er det samme* for de to situationer. Ofte vil skeletdiagrammet indeholde transformere og transducere, som er *styrede* af o-levels. Hvis man løsriver skeletdiagrammet fra det oprindelige system og lader det indgå i et andet system, så skal disse styrede elementer beholde deres oprindelige værdier; ellers kan man ikke regne med, at (25) gælder.

4.2 Virtuelle arbejder og d'Alemberts princip

Hvis vi nu anvender (25) for to forskellige situationer, hvor spændingerne (constraint kræfterne) er de samme, men hvor strømmene (hastighederne) afviger med beløbene $\delta \vec{v}_i$, så kan vi trække den ene version af (25) fra den anden og få

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \delta \vec{v}_i = 0 \quad (26)$$

Ændringene af hastighedsvektorerne kaldes *virtuelle*, dvs. tænkte, for det er ikke sikkert, at de kan forekomme i det rigtige system, uden at level-variablene og dermed de herfra styrede elementer ændres. Når vi taler om virtuelle ændringer, er det altså ændringer, der alene vedrører de dynamiske variable i det løsevne skeletdiagram, men ikke ændre på relationerne mellem disse variable.

Vi kan lave en tilsvarende sætning, hvor strømmene holdes fast, men hvor spændingerne ændres virtuelt, eller vi kan have virtuelle ændringer af både strømme og spændinger.

Virtuelle ændringer er "udenfor tiden", eller de kan tænkes at foregå i deres egen virtuelle tid, der ikke har noget at gøre med tiden i det oprindelige system. Vi kan derfor frit integrere de virtuelle strømændringer i (26) over den virtuelle tid til virtuelle ændringer af stedvektorerne, således at vi får:

$$\sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (27)$$

altså: *det virtuelle arbejde af constraint kræfterne er nul*. De constraints, der er tale om, skal altså være fuldstændig *stive*, ikke noget med stænger, der kan bøjes eller snore, der kan strækkes, eller delvist slip af rullebetingelser. Ellers ville vi jo heller ikke kunne skildre systemets constraints ved skeletdiagrammet, der hverken kan oplagre eller dissipere energi.

Går vi nu tilbage til det oprindelige system (sml. figur 38) og udnytter de konservative spændingsrelationer mellem constraint kræfterne i (27), de eksterne kræfter fra multiport o-lageret og de samlede kræfter, der er rate-variable for impulserne, får vi:

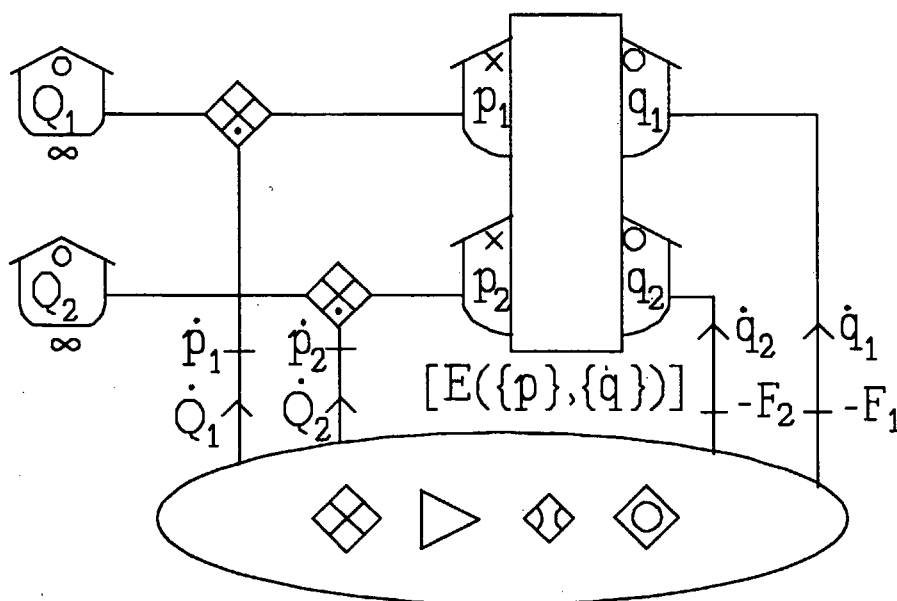
$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (28)$$

Dette er *d'Alemberts princip*.

Fordelen ved denne formulering for mekanikken er, at enhver hentydning til de i almindelighed ukendte constraint kræfter forsvinder. Når vi her har udledt det ud fra Tellegens teorem, som er en moderne formulering, der oftere sættes i relation til elektriske netværk end til mekaniske problemer, er det for at vise, at d'Alemberts princip kan opfattes som et specialtilfælde af en langt mere almen lov. Tellegens teorem er blevet kaldt "den dybeste af alle naturlove", men egentlig er det en semiotisk lov, ikke en naturlov.

4.3 Lagrange funktion og virkningsintegral

Vi vil nu antage, at der er tale om holonome constraints, som tillader indførelse af et sæt uafhængige generaliserede koordinater, q_1, q_2, \dots, q_m , hvor m , antallet af generaliserede koordinater, er mindre end $3n$, som er antallet af cartesiske koordinater af n -partikelsystemet. Differensen $3n-m$ er så lig med antallet af constraints. Vi vil regne med, at de generaliserede koordinater er o -levels, dvs. invariante ved tidsvending, og at de generaliserede hastigheder derfor er x -rates, dvs. strømme. De funktioner, der udtrykker de oprindelige cartesiske koordinater ved de generaliserede koordinater, kan derfor antages at være *uafhængige af x -variable*. Systemets kinetiske energi kan så udtrykkes ved et sæt x -levels, de *generaliserede impulser*, p_j , der kan antages at være lineære funktioner af de generaliserede hastigheder, hvor koefficienterne gerne må afhænge af o -levels (de generaliserede koordinater), men ikke af x -variable. Der må være lige så mange generaliserede impulser, som der er generaliserede hastigheder og generaliserede koordinater. En reticulation i termer af disse variable vil da indeholde et skeletdiagram, der har lige mange porte med strøminput og spændingsinput. Foruden q_j erne og p_j erne, der tilsammen bestemmer energien $E(\{p_j\}, \{q_j\})$, indfører vi cykliske koordinater Q_j , som er de integrerede strøminput til skeletdiagrammet.



Figur 39 System med uafhængige generaliserede koordinater.

Tellegens teorem i varianten (27) giver nu med betegnelserne fra figur 39:

$$\sum_{j=1}^m [p_j \delta Q_j - F_j \delta q_j] = 0 \tag{29}$$

Dette er også en formulering af d'Alemberts princip (28) i termer af generaliserede koordinater og impulser. Vi har ikke forudsat nogen speciel definition af de generaliserede impulser, bortset fra, at de er lineært forbundet med de generaliserede hastigheder \dot{q}_j , og derfor optræder der i forbindelse med de tidsafledede af impulserne virtuelle ændringer af nogle andre koordinater end q_j erne, de cykliske koordinater Q_j .

Vi indfører nu en funktion L , som vi senere kan identificere med systemets *Lagrange funktion*:

$$L(\{p\}, \{\dot{Q}\}, \{q\}) = \sum_{j=1}^m p_j \dot{Q}_j - E(\{p\}, \{q\}) \tag{30}$$

Den virtuelle ændring af L er så:

$$\delta L = \sum_{j=1}^m (p_j \delta \dot{Q}_j + \dot{Q}_j \delta p_j) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial E}{\partial p_j} \delta p_j + \frac{\partial E}{\partial q_j} \delta q_j \right) \quad (31)$$

For de partielt afledede af energifunktionen E gælder imidlertid (sml. figur 39):

$$\frac{\partial E}{\partial p_j} = \dot{Q}_j \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial q_j} = -F_j \quad (32)$$

så vi får:

$$\delta L = \sum_{j=1}^m (p_j \delta \dot{Q}_j + F_j \delta q_j) \quad (33)$$

Vi betragter nu det såkaldte *virkningsintegral*:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (34)$$

hvor t_1 og t_2 er to vilkårlige faste tidspunkter. Vi skal undersøge virtuelle ændringer af virkningsintegralet for virtuelle ændringer af de generaliserede koordinater, der forsvinder til disse to tider. Da skeletdiagrammet på figur 39 giver en lineær relation mellem strømmene, kan vi regne med, at δQ_j erne forsvinder til tiderne t_1 og t_2 , når δq_j erne gør det. Partiel integration af første led i (33) giver så:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \delta \dot{Q}_j dt = [p_j \delta Q_j]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta Q_j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta Q_j dt \quad (35)$$

Med brug af Tellegen/d'Alembert princippet (29) finder vi derfor:

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m (F_j \delta q_j - \dot{p}_j \delta Q_j) dt = 0 \quad (36)$$

hvilket er *Hamiltons princip*.

4.4 Lagrange ligningerne

Foreløbig kan vi ikke stille så meget op med Lagrange funktionen og Hamiltons princip, fordi L , som defineret i (30), afhænger af størrelserne \dot{Q}_j og p_j , som vi ikke ved noget om. Vi kan imidlertid regne med, at energien E kan skrives som en sum af den kinetiske energi T og den potentielle energi U , således at U kun afhænger af de generaliserede koordinater (q_j) og T kun af de generaliserede koordinater og deres tidsafledede, de generaliserede hastigheder. Endvidere kan vi regne med, at T kan udtrykkes som en kvadratisk form i de generaliserede hastigheder, og dermed også som en kvadratisk form i de generaliserede impulser p_j :

$$T = \sum_{jk} T_{jk}(q) p_j p_k ; T_{kj} = T_{jk} \quad (37)$$

Vi har så:

$$\frac{\partial T}{\partial p_j} = \dot{Q}_j = 2 \sum_k T_{jk} p_k \quad (38)$$

Vi kan heraf udlede Eulers sætning for homogene udtryk af 2. grad:

$$\sum_j p_j \dot{Q}_j = 2T \quad (39)$$

Ved indsættelse af dette i (30) og benyttelse af $E = T + U$, får vi:

$$L = T - U \quad (40)$$

Hvis vi udtrykker T ved generaliserede hastigheder og koordinater og U ved generaliserede koordinater, har vi altså L som funktion af generaliserede hastigheder og koordinater:

$$L = L(\{\dot{q}\}, \{q\}) \quad (41)$$

Vi kan så udnytte Hamiltons princip (36) ved at indføre virtuelle ændringer af q erne, der forsvinder i endepunkterne t_1 og t_2 :

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0 \quad (42)$$

Da δq_j erne er uafhængige og kan være vilkårlige funktioner af tiden (der blot skal forsvinde i t_1 og t_2), når vi frem til *Lagrange ligningerne*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (43)$$

Disse ligninger er oftest den mest direkte tilgang til beregninger for et konservativt system med holonome constraints. Systemet beskrives således ved én 2. ordens differentiallyingning for hver generaliseret koordinat. For at integrere bevægelsesligningerne skal man altså kende de generaliserede koordinater og de generaliserede hastigheder til begyndelsestidspunktet. En EB reticulation fører til to 1.ordens differentiallyingninger for hver koordinat og er på den måde nærmere beslægtet med Hamiltons ligninger, som vi skal se på i næste afsnit. Både EB teknikken og Hamilton ligningerne kræver nemlig generaliserede impulser, lige så mange som de generaliserede koordinater. Vi savner endnu nogle præcise forskrifter for, hvordan impulserne defineres, og EB teknikken giver en stor frihed hertil, medens Hamilton formalismen er meget restriktiv og kræver *kanoniske* impulser.

4.5 Hjul på skinne

Som et eksempel på anvendelsen af Lagrange formalismen og efterfølgende EB reticulation vender vi tilbage til systemet på figur 28, det masseløse hjul med en partikel på randen. Som generaliseret koordinat kan vi benytte vinklen Θ , men vi vælger i stedet at regne vinklen fra bundstillingen af partiklen, så vores koordinat bliver $\phi = \pi/2 + \Theta$. Partiklens cartesiske koordinater er så:

$$x = r(\sin\phi - \phi) \quad ; \quad y = r(1 - \cos\phi) \quad (44)$$

Vi indfører nu betegnelserne $s = \sin(\phi/2)$ og $c = \cos(\phi/2)$ og får følgende udtryk for den kinetiske energi:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2mr^2s^2\dot{\phi}^2 \quad (45)$$

Lagrange ligningen (43) for ϕ giver nu:

$$2mr^2s(2s\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) + \frac{dU}{d\phi} = 0 \quad (46)$$

idet den potentielle energi U kan udtrykkes som funktion af ϕ . Det er således en rimelig kompliceret 2. ordens differentilligning, vi får af Lagrange, hvilket hænger sammen med, at den kinetiske energi afhænger af ϕ .

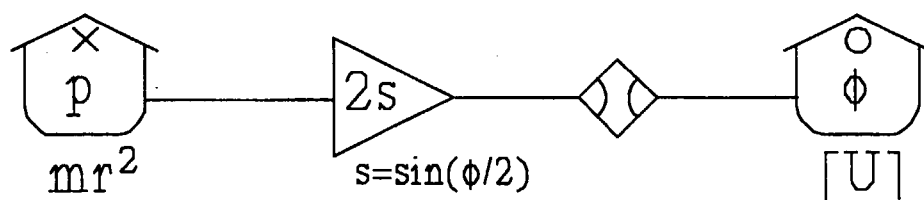
For at lave en EB reticulation sørger vi først for, at definere en impuls p , således at den kinetiske energi kan rummes i et simpelt, lineært x-lager:

$$p = 2mr^2s\dot{\phi} \quad ; \quad T = \frac{p^2}{2mr^2} \quad (47)$$

Ved kombination af (47) med (46) får vi så:

$$\dot{p} = 2mr^2s\ddot{\phi} + mr^2\dot{\phi}^2 = - \frac{1}{2s} \frac{dU}{d\phi} \quad (48)$$

Vi kan da tegne følgende simple EB diagram for systemet:



Figur 40 Hjul med partikel på skinne (figur 28), $\phi=0+\pi/2$.

Denne retikulation er ikke problemfri, bl.a. fordi $s=0$, når partiklen er i bundstilling, hvilket giver ligningerne en singularitet. Man kan også undre sig over, at hjulet skal dreje to gange rundt, før s får samme værdi igen. Disse problemer har en løsning, men vi skal ikke opholde os mere med det nu.

Kapitel 5

Hamilton ligninger og Poisson paranteser

5.1 Hamilton funktionen

I foregående afsnit, ligning (30), indførte vi Lagrange funktionen L som en funktion af tre sæt størrelser: koordinaterne q , impulserne p , og endelig de tidsafledede, \dot{Q} , af de cykliske koordinater Q . Differentialformen af L , svarende til ligning (33), viste sig dog fri for differentialer af p , så vi kan opfatte L som funktion af de to sæt uafhængige variable q og \dot{Q} . Impulserne p og kræfterne F kan så bestemmes ved de partielle differentiationer

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} ; F_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (49)$$

Friheden til at vælge impulserne p afspejler sig således i, at de generaliserede hastigheder, der indgår i L , ikke er hastighederne af de valgte generaliserede koordinater q , men af de cykliske koordinater Q . Vi indfører nu *de kanoniske impulser* P ved definitionen

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k p_k \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_j} \quad (50)$$

Lagrange ligningen (43) kan så udtrykkes på formen

$$\dot{P}_j = F_j \quad (51)$$

Bevægelsesligningen ser altså meget simpel ud, når vi som impulser vælger de kanoniske. Hvis $p_j = P_j$, får vi af (50)

$$\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{jk} \quad (52)$$

Dvs. så er de cykliske koordinater Q det samme som de oprindeligt indførte generaliserede koordinater q . Vi indfører nu systemets *Hamiltonfunktion*

$$H(\{P\}, \{Q\}) = \sum_j P_j \dot{Q}_j - L(\{\dot{Q}\}, \{Q\}) \quad (53)$$

hvor vi nu bruger Q i stedet for q for at understrege, at impulserne P_j og koordinaterne $Q_j (=q_j)$ er parvist *kanonisk konjugerede*. Et tilbageblik på (30) viser, at Hamiltonfunktionen er det samme som systemets energifunktion E , når denne udtrykkes som funktion af de kanonisk konjugerede impulser og koordinater.

5.2 Hamiltons ligninger

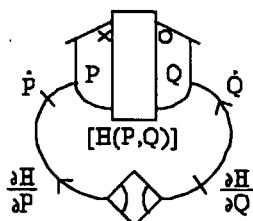
Ligning (53) er et eksempel på en såkaldt *Legendre transformation*, som bruges, når man vil skifte fra et sæt uafhængige variable til et andet. Eksempelvis, i termodynamikken udtrykkes differentialet af den indre energi, U , ved differentialet af entropien S : $dU = TdS - PdV$, så hvis man vil bruge temperaturen T som uafhængig variabel i stedet for S , indfører man Helmholtz potentialet $F = U - TS$ og får: $dF = dU - TdS - SdT = -SdT - PdV$. For Hamiltonfunktionen får vi:

$$dH = \sum_j [P_j d\dot{Q}_j + \dot{Q}_j dP_j - P_j d\dot{Q}_j - F_j dQ_j] = \sum_j [\dot{Q}_j dP_j - F_j dQ_j] \quad (54)$$

Heraf, og af (51), udleder vi så *Hamiltons ligninger*:

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} ; \dot{P}_j = - \frac{\partial H}{\partial Q_j} \quad (55)$$

Disse ligninger har en meget simpel fortolkning i EB sproget. Hele systemet beskrives ved et multiport lager med m koordinater og m hertil konjugerede impulser. Lageret har energifunktionen H , og hvert par, P og Q er simpelt forbundne gennem en symmetrisk transformer, som vist nedenfor.



Figur 41 EB fremstilling af Hamiltons ligninger.

Simpelheden af figur 41 er nu ikke nogen dyd, set fra et EB synspunkt. Den viser jo blot, at Hamilton formalismen lægger al den dynamiske information ind i det symbolske udtryk for H som funktion af de kanoniske variable. Der bliver således ingen mulighed for at fremvise denne information ikonisk, hvilket jo er formålet med EB teknikken. Det viser sig da også i mange tilfælde, at de hamiltonske ligninger langt fra er simple at behandle. I reglen vil det være lettere at bruge Lagrange ligningerne.

Som eksempel kan vi igen se på den til et hjul bundne partikel. Af (45) finder vi den kanoniske impuls:

$$P \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 4mr^2 s^2 \dot{\phi} \quad (56)$$

Hamiltonfunktionen, $\bar{H} = T + U$, hvor T er udtrykt ved P og ϕ , er så

$$H(P, \phi) = \frac{P^2}{8mr^2 s^2} + U(\phi) \quad ; \quad (s = \sin \frac{\phi}{2}) \quad (57)$$

og Hamilton ligningerne (55) giver (den første fremgår af (56)):

$$\dot{\phi} = \frac{P}{4mr^2 s^2} \quad ; \quad \dot{P} = \frac{cP^2}{8mr^2 s^2} - \frac{dU}{d\phi} \quad ; \quad (c = \cos \frac{\phi}{2}) \quad (58)$$

Disse differentialligninger er noget mere komplicerede end Lagrange ligningen (46) og betydeligt værre end EB ligningerne (47) og (48).

5.3 Poisson paranteser

At energien er bevaret for et Hamiltonsk system ser ud til at fremgå direkte af figur 41. Der er dog den mulighed, som ikke fremgår af diagrammet, at der kan være tidsafhængige constraints i systemet, som kan udføre arbejde og derfor ændre energien. Sådanne tidsafhængige constraints ødelægger ikke gyldigheden af d'Alemberts princip, for de virtuelle ændringer, der her er tale om, forgår jo i en virtuel tid, der er uafhængig af systemtiden. Både Lagrange og Hamiltonligningerne vil derfor gælde uændret, men både Lagrange funktionen L og Hamiltonfunktionen H , hvori de tidsafhængige constraints er indbyggede, vil komme til at afhænge explicit af tiden. Af (55) finder vi så, at ændrings-hastigheden af energien er givet ved:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial P_j} \dot{P}_j + \frac{\partial H}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (59)$$

For en vilkårlig anden funktion, A, af Perne, Qerne og t finder vi tilsvarende af (55):

$$\frac{dA}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial H}{\partial P_j} - \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial H}{\partial Q_j} \right] + \frac{\partial A}{\partial t} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (60)$$

hvor vi har indført *Poisson parantesen* af to størrelser A og B:

$$[A, B] = \sum_j \left[\frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial P_j} - \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial B}{\partial Q_j} \right] \quad (61)$$

For de kanoniske variable finder vi:

$$[Q_i, Q_j] = 0 ; [P_i, P_j] = 0 ; [Q_i, P_j] = \delta_{ij} \quad (62)$$

I kvantemekanikken spiller Poisson paranteserne en vigtig rolle, idet den kvantemekaniske *kommutator* af to operatører A og B svarer til den klassiske Poisson parantes af de tilsvarende klassiske observable ganget med $i\hbar$.

5.4 Diagonalisering og Einsteins konvention

Vi skal nu se, hvordan brugen af Poisson paranteser giver en simpel opskrift på, hvordan en del af Hamiltonfunktionen kan retikuleres ud på EB ikoner. Vi vil antage, at det drejer sig om et konservativt system, hvor Hamiltonfunktionen kan skrives som summen af en potentiel energi U, der kun afhænger af koordinaterne (som vi nu igen vil kalde q i stedet for Q) og en kinetisk energi T, der kan afhænge af både impulserne og koordinaterne. Desuden antages, at systemet er *autonomt*, dvs. at tiden ikke indgår explicit:

$$H(\{P\}, \{q\}) = T(\{P\}, \{q\}) + U(\{q\}) \quad (63)$$

Endvidere vil vi antage, at den kinetiske energi er kvadratisk i impulserne (sml. (37)):

$$T(\{P\}, \{q\}) = T_y(\{q\}) P_i P_j ; T_{ji} = T_{ij} \quad (64)$$

Her har vi nu indført *Einsteins summationskonvention*, dvs. der er implicit summation over dobbelt forekommende indekser. I (64) er T_{ij} et tensorsymbol (den reciprokke inertanstensor) med to indekspladser, og de to indekser i og j på pladserne forekommer hver også på vektorsymbolerne P_i og P_j . Der skal derfor summeres over dem, så det resulterende udtryk afhænger ikke af i og j . Vi siger derfor, at i og j i (64) er *dummy indekser*.

En kvadratisk form kan *diagonaliseres* ved indførelse af nye impulser

$$p_i = a_{ij}(\{q\}) P_j \quad (65)$$

Diagonalisering kan gennemføres på mange måder, og vi kan yderligere kræve, at a_{ij} erne vælges således, at *inertanserne i det nye udtryk for den kinetiske energi bliver uafhængige af koordinaterne*, så vi har:

$$T = T(\{p\}) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (66)$$

(Her har vi ikke benyttet Einstein konventionen, da det er lidt uklart, om indekset i forekommer to eller tre gange. Man kunne eventuelt skrive

$$T = \frac{p_i p_i}{2m_i}$$

hvor parantesen efter indekset på m_i angiver, at det ikke skal tælles med, men så er det næsten nemmere at bruge den traditionelle skrivemåde).

Den omvendte relation, P_j erne som funktioner af p_j erne, udtrykkes så ved den reciprokke matrix a^{-1} .. :

$$P_j = a^{-1}_{jk} p_k \quad (67)$$

Når vi udtrykker energien som funktion af de kanoniske impulser P_j , vil vi stadig kalde den H , men når vi bruger de nye impulser p_j , kalder vi den E . De generaliserede hastigheder er så:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} = \frac{\partial E}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} = v_k a_{kj} \quad (68)$$

hvor vi har indført vektorsymbolet v . for samlingen af output strømme fra de x -lagre, som de enkelte led i (66) svarer til, altså $v_k = p_k/m_k$.

De tidsafledede af de nye impulser fås ved differentiation af (65):

$$\dot{p}_j = a_{jk} \dot{p}_k + \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l p_k \quad (69)$$

Nu er problemet så, at de tidsafledede af de kanoniske impulser gerne skulle udtrykkes ved de afledede af den nye energifunktion $E(p,q)$. Sammenligner vi differentialformerne af H og E , finder vi:

$$dH \equiv \dot{q}_l dP_l - \dot{P}_l dq_l = dE \equiv v_k dp_k + e_k dq_k \quad (70)$$

hvor e_k er outputspændingen fra k -porten i det nye lager for den potentielle energi U . Ved at sætte $dp_k = 0$ (alle k) og $dq_l = 0$ for $l \neq k$ og dividere med dq_k finder vi (med brug af (67)):

$$e_k = \frac{\partial E}{\partial q_k} = \dot{q}_l \frac{\partial P_l}{\partial q_k} - \dot{P}_k = \dot{q}_l \frac{\partial a_{lm}^{-1}}{\partial q_k} p_m - \dot{P}_k \quad (71)$$

Ved yderligere at benytte (68) og (67) fås:

$$\dot{P}_k = v_r a_{rl} \frac{\partial a_{lm}^{-1}}{\partial q_k} p_m - e_k = -v_r \frac{\partial a_{rl}}{\partial q_k} a_{lm}^{-1} p_m - e_k = -v_r \frac{\partial a_{rl}}{\partial q_k} P_l - e_k \quad (72)$$

Endelig finder vi så, ved at benytte dette og (68) i (69) følgende udtryk:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_j &= -a_{jk} e_k - C_{jk} v_k \\ \text{hvor } C_{jk} &= \left(a_{jr} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_r} a_{kr} \right) P_l \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Vi ser altså, at input spændingen til det j te x -lager er sammensat af to typer af led: dels en række led, der er givet ved output spændingerne fra o -lagerets porte (e_k), og dels en række led, der er givet ved output strømmene fra de andre x -lagre (v_k). Størrelserne a_{jk} må derfor opfattes som *transformere* (eller -ducere), medens C_{jk} erne er *gyratorer*. Det ses, at gyrator tensoren C .. er antisymmetrisk, så hvis der er m x -lagre, kan der højst være $m(m-1)/2$ gyratorer, medens der højst kan være m^2 transformere.

5.5 Poisson retikulationen

Ser vi nu tilbage på definitionen af Poisson paranteserne (61), viser det sig, at vi får en meget simpel fortolkning af transformerne og gyratorerne, idet:

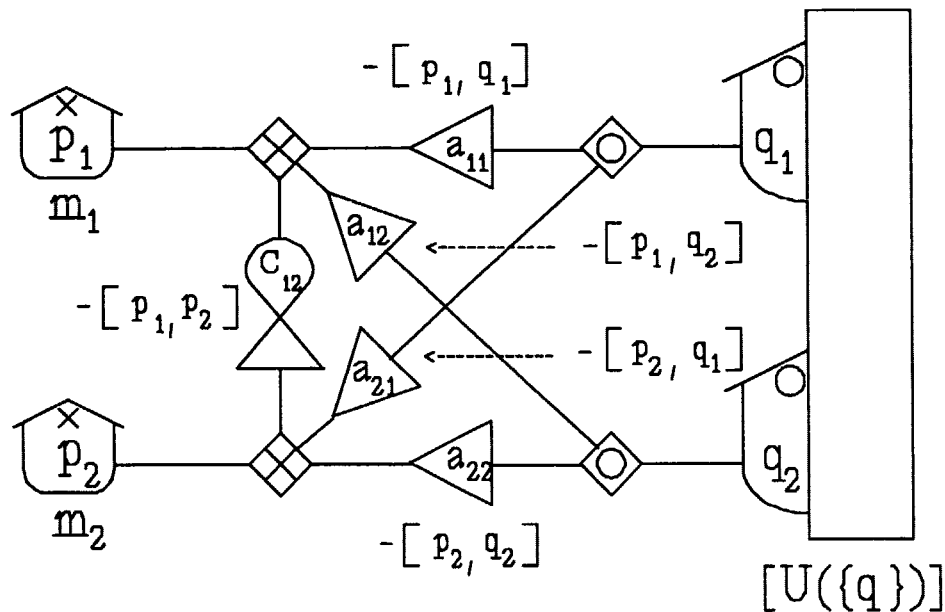
$$[p_i , q_j] = -a_{ij} ; [p_i , p_j] = -C_{ij} \tag{74}$$

Ligning (73) kan derfor skrives på formen

$$\dot{p}_j = [p_j , q_k] \frac{\partial E}{\partial q_k} + [p_j , p_k] \frac{\partial E}{\partial p_k} \tag{75}$$

Hvis p'erne og q'erne er kanoniske konjugerede, så $E = H$, ser vi af (62), at (75) er identisk med Hamiltons ligning for den tidsafledede af P. Den anden bevægelsesligning (68), som også kan udtrykkes ved Poisson paranteserne mellem p'erne og q'erne går så over i den anden Hamilton ligning.

For et system med to generaliserede koordinater og impulser (som er det mindste, der skal til for at inkludere en gyrator), kan vi nu sammenfatte de formelle udredninger til følgende diagram:



Figur 42 Retikulation med Poisson paranteser.

I praksis vil man altid kunne sørge for, at antallet af transformere i diagrammet bliver mindre end m^2 . Den diagonaliserende matrix a.. vil kunne laves på *nedre trekantform*, dvs. således at alle pladser over diagonalen er nul. Antallet af

transformere bliver så $m(m+1)/2$. Desuden vil man ved passende skalering af inertanserne m_i kunne opnå, at visse transformere får værdien 1, så de kan erstattes af simple energibånd.

5.6 Elastisk pendul

Som eksempel på anvendelsen af Poisson retikulationen ser vi på **det elastiske pendul**. Det består af en stiv, masseløs stang, der kan dreje frit i planen om et ophængningspunkt O. En partikel med massen m er anbragt på stangen, så den frit kan glide på denne, men partiklen er fastgjort til den ene ende af en masseløs fjeder med kraftkonstanten k og ligevægtslængden L . Fjederens anden ende er fastgjort i O. Vi beskriver systemet med to generaliserede koordinater: stangens drejningsvinkel fra bundstillingen, $q_2 = \theta$, og dens afstand fra O, $q_1 = \lambda$, som også er fjederens længde.

Systemets potentielle energi er så

$$U(\lambda, \theta) = \frac{1}{2} k (\lambda - L)^2 - mg\lambda \cos\theta \quad (76)$$

hvor g er tyngdeaccelerationen.

Den kinetiske energi er:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\lambda}^2 + \lambda^2 \dot{\theta}^2) \quad (77)$$

Da de generaliserede hastigheder ikke indgår i U , og da $L = T - U$, er de kanoniske impulser, ifølge definitionen (50), givet ved:

$$P_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = m\dot{\lambda} \quad ; \quad P_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\lambda^2 \dot{\theta} \quad (78)$$

og den kinetiske del af Hamilton funktionen er så:

$$T(P_1, P_2) = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m\lambda^2} \quad (79)$$

Det ses, at T allerede er diagonal i de to impulser, men inertansen for P_2 afhænger af koordinaten λ . De nye impulser kan derfor vælges som:

$$p_1 = p_\lambda = P_1 \quad ; \quad p_2 = p_\theta = \frac{P_2}{\lambda} \quad (80)$$

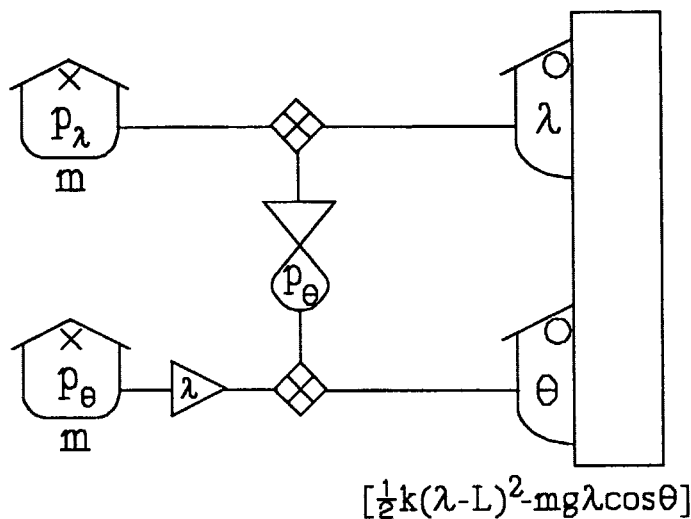
Matrixkoefficienterne a_{ij} i (65) er da givet ved:

$$a_{11} = 1 \quad ; \quad a_{12} = a_{21} = 0 \quad ; \quad a_{22} = \frac{1}{\lambda} \tag{81}$$

og hermed er transformerne i figur 42 bestemt. Der kan kun være én gyrator, $C_{21} = -C_{12}$, og den bestemmes af (73) og (81):

$$C_{21} = - \frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} a_{11} P_2 = \frac{P_2}{\lambda^2} = \frac{P_\theta}{\lambda} \tag{82}$$

Med lidt ekstra manipulation af ikoner kan diagrammet simplificeres en smule. En transformer kan "trækkes igennem" en treport samler, så den forsvinder fra det bånd, hvor den sad, og dukker op i de to andre. Når en transformer kommer til at stå på sekundærsiden af en x-gyrator og vender trekantspidsen samme vej, kan den indgå i gyratoren, hvis omsætningsforhold så bliver multipliceret med transformerens. Det resulterende diagram på figur 43 har så transformeren nærmest x-lagrene og gyratoren nærmest o-lagrene. Derved kommer det til at svare til den opskrift, der skal gennemgås i næste afsnit, og som i de fleste tilfælde vil være nemmere at benytte end Poisson retikulationen. Når systemet er så simpelt som det elastiske pendul, er der dog ingen større forskel i brugen af de to metoder.



Figur 43 Elastisk pendul.

Igen kan man ved sammenligning med Lagrange- og Hamilton-ligningerne for samme system konstatere, at energibånds-retikulation kan give et simplere og mere beregningseffektivt sæt af bevægelsesligninger. Årsagen hertil er, at udskillelsen af den kinetiske energi fra den potentielle gør spændingerne fra o-lagrene uafhængige af x-levels.

5.7 Massemidtpunkt og reduceret masse

Som et andet eksempel på Poisson retikulation ser vi på systemet af **to partikler, forbundet med en stiv stang**, som tidligere er behandlet (figur 26). Da der er ét hastigheds constraint, som er holonomt, kan de oprindelige 6 koordinater reduceres til 5 generaliserede koordinater. Som de første 3 vælger vi de sædvanlige koordinater, X, Y og Z for *massemidtpunktet*, hvis stedvektor er defineret ud fra de to partiklers masser og stedvektorer således:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (83)$$

De sidste to generaliserede koordinater kan vælges to vinkelkoordinater, θ og ϕ for den relative stedvektor af partikel 2 i forhold til partikel 1:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = L (\sin\theta \cos\phi , \sin\theta \sin\phi , \cos\theta) \quad (84)$$

hvor L er stangens længde. Med betegnelse M for den totale masse $m_1 + m_2$ er de to partiklers stedvektorer nu givet ved

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} ; \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (85)$$

Vi kan så udtrykke den kinetiske energi ved de 5 generaliserede hastigheder:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu L^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \quad (86)$$

hvor vi har indført betegnelsen μ for *den reducerede masse*:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (87)$$

Den kanoniske impuls, der er konjugeret til massemidtpunktets stedvektor, er så den totale impuls af topartikelsystemet:

$$\vec{P} \doteq \frac{\partial T}{\partial \vec{R}} = M \dot{\vec{R}} \quad (88)$$

Den kinetiske del af Hamiltonfunktionen for massemidpunktets bevægelse er helt uafhængig af den relative koordinater, og vi vil derfor lade den ude af betragtning.

Hvis massemidpunktskoordinaterne X, Y og Z er de første 3 generaliserede koordinater, kan vi lade θ være q_4 og ϕ være q_5 . De hertil konjugerede kanoniske impulser findes så ved differentiationer af udtrykket (86) for T:

$$P_4 \doteq \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta} \quad ; \quad P_5 \doteq \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (89)$$

hvor $I = \mu L^2$ er inertimomentet om massemidpunktet. Den kinetiske energi, udtrykt ved de kanoniske impulser er så:

$$T = \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{2M} + \frac{P_4^2}{2I} + \frac{P_5^2}{2I \sin^2 \theta} \quad (90)$$

dvs. den er allerede diagonal, men mangler at blive gjort uafhængig af koordinaterne. Vi lader de tre første impulser være uændrede, og også den fjerde, men ændrer den femte, altså:

$$p_4 = p_\theta = P_4 \quad ; \quad p_5 = p_\phi = \frac{P_5}{\sin \theta} \quad (91)$$

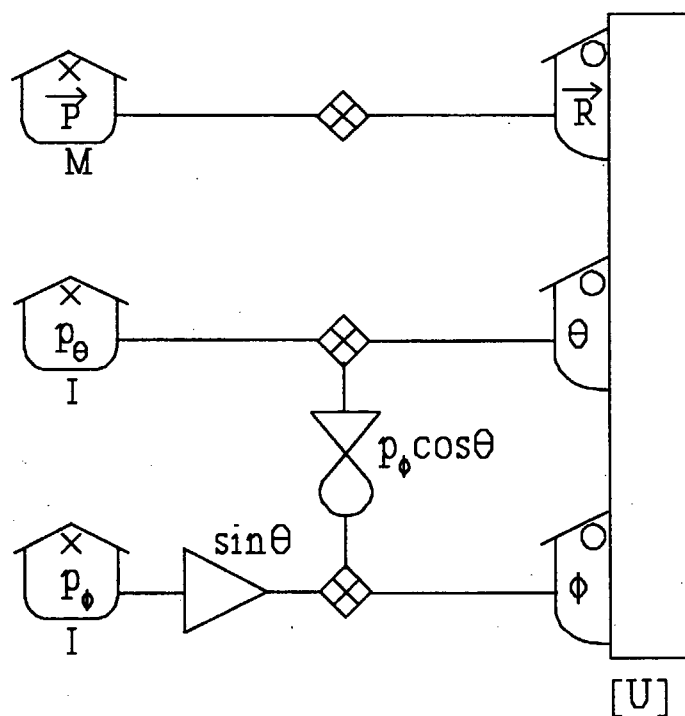
Matricen a.. er altså diagonal med 1 på diagonalpladserne, undtagen sidste plads, hvor vi har

$$a_{55} = \frac{1}{\sin \theta} \quad (92)$$

Vi kan så bestemme gyrotoren (73):

$$C_{54} = - \frac{\partial a_{55}}{\partial q_4} a_{44} P_5 = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} P_5 = \cot \theta \cdot p_\phi \quad (93)$$

Vi er nu i stand til at tegne diagrammet og lave ikoniske småforandringer, som på figur 43, så vi ender med følgende diagram:



Figur 44 To partikler, forbundet med stiv stang.

Her kan man yderligere simplificere ved at indføre cykliske lagre for $\sin\theta$ og $\cos\theta$ efter opskriften på figur 29 og således opnå, at der kun forekommer lineære styringer i diagrammet.

Begge disse to eksempler viser, at man får en pænere retikulation ved at flytte transformerne over i venstre side af diagrammet, altså nærmest x-lagrene og lade gyratorfeltet være nærmest o-lagrene. Dette er faktisk hovedindholdet i den alternative metode, Lagrange retikulationen, som skal gennemgås i næste afsnit. Poisson retikulationen har også den ulempe, at den opererer med de kanoniske impulser, selv om disse ikke optræder som x-levels. Denne ulempe undgås også ved Lagrange retikulationen.

Kapitel 6

Lagrange retikulationen

6.1 Transponering

Den væsentligste ulempe ved Poisson retikulationen, figur 42, er, at den skal gå omvejen over de kanoniske impulser, P_j , som indgår i formlen (73) for gyroto-
rerne, selv om den færdige EB model betjener sig af de impulser p_j , der diago-
naliserer den kinetiske energi og gør denne uafhængig af koordinaterne. Denne
omvej kan undgås, hvis vi i første omgang koncentrerer os om Lagrange forma-
lismens udtryk for den kinetiske energi som funktion af de generaliserede
hastigheder og så indfører nye hastigheder

$$v_i = b_{ij} (\{q\}) \dot{q}_j \quad (94)$$

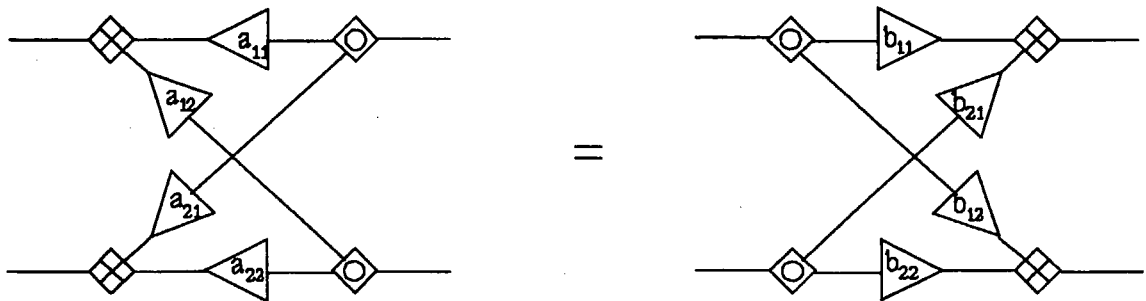
således at den kinetiske energi bliver diagonal og koordinatuafhængig, når den
udtrykkes ved disse nye hastigheder:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (95)$$

De hastigheder, v_i , der blev indført i Poisson retikulationen som p_i/m_i opfylder
disse krav, men der er ingen grund til først at bestemme de kanoniske impul-
ser. Når det er de samme v 'er, der er tale om, kan vi også se en forbindelse
mellem b.. matricen i (94) og a.. matricen i (65). Når vi sammenholder (94) med
(68) får vi nemlig

$$v_i = b_{ij} \dot{q}_j = b_{ij} v_k a_{kj} \Rightarrow b_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \text{ eller } b_{ij} = a_{ji}^{-1} \quad (96)$$

Altså b.. er den *transponerede* af den reciprokke til a.. matricen (transponering
er ombytning af rækker og søjler, for reelle matricer det samme som hermi-
tesk konjugering). Ser vi på transformer feltet a.. på figur 42, kan vi få b.. frem
ved vending af hele ikonet:



Figur 45 Ikonvending af transformer-felt.

Den nye retikulation benytter således de samme p'er som Poisson retikulatio-
nen, men transformer feltet er vendt. Det gamle felt a.. gav en simpel
omregning af spændingerne fra højre til venstre side af diagrammet; det nye felt
b.. giver en simpel omregning af spændingerne, når vi går fra venstre til højre.
Da spændingerne i venstre side er de tidsafledede af p'erne, tager vi udtrykket
for dem, den første af ligningerne (73), og ganger den fra højre med b_{ji} :

$$\dot{p}_j b_{j i} = - b_{j l} a_{j k} e_k - b_{j l} C_{j k} v_k = - e_l - b_{j l} C_{j k} v_k \quad (97)$$

Heri indføres så (94):

$$e_l = - \dot{p}_j b_{j l} - b_{j l} C_{j k} b_{k l} \dot{q}_l = - \dot{p}_j b_{j l} - D_{ij} \dot{q}_j \quad (98)$$

hvor

$$D_{ij} = b_{m l} C_{m k} b_{k j}$$

Dette udtryk for matricen D.. viser sig at blive overraskende simpelt, når vi
indsætter udtrykket (73) for C.. og benytter (67) og (96). Vi finder:

$$D_{ij} = p_k \left(\frac{\partial b_{k l}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{k j}}{\partial q_l} \right) \quad (99)$$

Da det er de nye p'er, der indgår i (99), har vi opnået, at enhver hentydning til
de kanoniske impulser er forsvundet, og i tilgift har vi fået et udtryk for D..,
som er langt simplere end det gamle udtryk for C.. . D'erne er naturligvis
gyratorer, men de sidder på den anden side af transformer feltet, end de gør på
figur 42.

6.2 Lagrange paranteser

Lige som elementerne a.. og C.. lader sig udtrykke ved Poisson paranteser, kan vi udtrykke de nye elementer b.. og D.. ved *Lagrange paranteser*. Hvis vi har et sæt af uafhængige størrelser, som kan erstatte de kanoniske tilstandsvariable, q'erne og P'erne, således at alle q'erne og P'erne kan udtrykkes ved disse størrelser, så kan vi definere Lagrange parantesen { A , B } for to af disse størrelser ved:

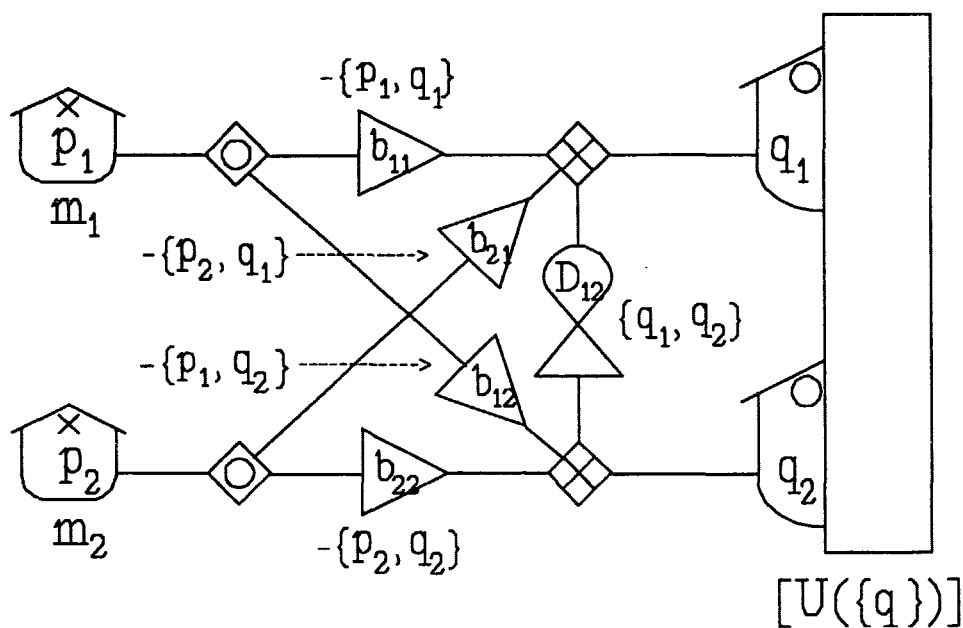
$$\{ A , B \} = \frac{\partial q_i}{\partial A} \frac{\partial P_i}{\partial B} - \frac{\partial P_i}{\partial A} \frac{\partial q_i}{\partial B} \tag{100}$$

Man viser nu let, at de nye elementer b.. og D.. kan defineres som:

$$b_{ij} = - \{ p_i , q_j \} ; D_{ij} = \{ q_i , q_j \} \tag{101}$$

altså på en måde, der fuldstændig svarer til (74), bortset fra fortegnet af D..

Vi ser således, at Poisson retikulationen på figur 42 kan erstattes med nedenstående *Lagrange retikulation*:



Figur 46 Lagrange retikulationen.

6.3 Metoden

Henvisningen til Lagrange paranteserne har kun teoretisk interesse; det er ikke meningen, at den skal benyttes i praksis, for det ville jo ifølge definitionen (100) medføre, at man alligevel blev nødt til at indføre de kanoniske impulser. Lad os kort repetere, hvad man skal gøre for at benytte opskriften på figur 46.

- 1) Vælg et passende sæt af uafhængige generaliserede koordinater, $\{q\}$.
- 2) Udtryk den kinetiske energi ved de generaliserede hastigheder:

$$T(\{q\}, \{\dot{q}\}) = \frac{1}{2} M_{ij}(\{q\}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (102)$$

3) Bestem en diagonaliserende matrix $b_{ij}(\{q\})$ og et sæt hastigheder v_i som i (94), således at T kan skrives som i (95) med koordinatuafhængige inertanser m_i . Som x -levels benyttes de generaliserede impulser $p_i = m_i v_i$. Det anbefales at lade $b_{..}$ have *øvre trekantform* (nuller under diagonalen), således at der højst optræder $m(m+1)/2$ transformere $b_{..}$ for et system med m frihedsgrader. Om man vælger øvre eller nedre trekantform er uvæsentligt, men hvis $a_{..}$ matricen har nedre trekantform, vil $b_{..}$ have den øvre.

4) Bestem de $m(m-1)/2$ gyratorer af (99).

5) Tegn diagrammet efter figur 46 og simplificer det eventuelt ved brug af regler for flytning, vending og sammensmeltning af ikoner.

Når EB diagrammet er på plads, er det som regel en simpel sag at nedskrive bevægelsesligningerne, dvs. de *rate ligninger*, der giver de tidsafledede af level variablene som funktioner af level variablene. På dette punkt er Lagrange retikulationen dog sværere at arbejde med end Poisson retikulationen. Både på figur 42 og på figur 46 er portene til lagrene tilsluttet et *simultanfelt*, bestående af samlere, transformere (-ducere) og gyratorer, men på figur 42 er portene tilsluttet med *stærk kausalitet*, hvor de på figur 46 er tilsluttet med *svag kausalitet*. Det betyder, at der med figur 46 kan optræde *loops* i signalruterne, således at man bliver nødt til at løse et sæt af simultane ligninger, før rate ligningerne kan opskrives. For et system med to frihedsgrader kan signalsporene se ud som på figur 47b (der er flere muligheder). Hvis $b_{..}$ er på øvre trekantform, bortfalder sporet med b_{21} , og der bliver intet loop. Ellers vil loopet have en forstærkningsfaktor

$$G = \frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}} \quad (103)$$

som får den kritiske værdi 1, når determinanten af $b_{..}$ er nul, dvs. når $b_{..}$ ikke har nogen reciprok matrix, hvilket den jo ifølge (96) skal have.



Figur 47 a: signalspor for Poisson retikulationen figur 42.
b: mulige signalspor for Lagrange retikulationen figur 46.

For at demonstrere, at de to metoder er ækvivalente, ser vi på det elastiske pendul igen, denne gang med Lagrange metoden. Vi har allerede bestemt de diagonaliserende p 'er i (80) og a.. i (81), så vi finder $b_{..}$ af (96):

$$b_{11} = 1 \quad ; \quad b_{12} = b_{21} = 0 \quad ; \quad b_{22} = \lambda \quad (104)$$

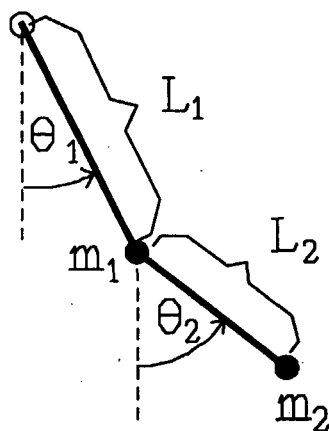
Af (99) fås så:

$$D_{21} = p_2 \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = p_0 \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} = p_0 \quad (105)$$

Figur 46 giver da direkte et diagram, der er identisk med figur 43.

6.4 Dobbeltpendulet

Et noget mere indviklet eksempel er **det matematiske dobbeltpendul**, der består af to stive, masseløse stænger med partikler i endepunkterne. Den første stang drejer om et fast punkt, og den anden stang drejer om endepunktet af den første stang. Som generaliserede koordinater benyttes de to stængers vinkler med lodlinjerne, θ_1 og θ_2 .



Figur 48 Det matematiske dobbeltpendul.

Den potentielle energi er:

$$U(\theta_1, \theta_2) = - (m_1 + m_2)gL_1 \cos\theta_1 - m_2gL_2 \cos\theta_2 \quad (106)$$

Hastighedsvektorerne for de to partikler er:

$$\vec{r}_1 = L_1 \dot{\theta}_1 (\cos\theta_1, \sin\theta_1) \quad ; \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + L_2 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_2, \sin\theta_2) \quad (107)$$

Heraf findes den kinetiske energi:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \frac{1}{2} m_2L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (108)$$

Vi skal så forsøge at bestemme en diagonaliserende matrix b_{ij} på øvre trekantform. Vi har en vis frihed til at skalere koefficienterne, da det jo blot vil afspejle sig i inertianserne for de nye x-lagre, så vi sætter $b_{11} = 1$ og skal så bestemme b_{12} og b_{22} således at T bliver diagonal og koordinatuaafhængig, når den udtrykkes ved hastighederne

$$v_1 = \dot{\theta}_1 + b_{12}\dot{\theta}_2 \quad ; \quad v_2 = b_{22}\dot{\theta}_2 \quad (109)$$

Disse ligninger løses med hensyn til de gamle hastigheder (hvilket svarer til at bestemme matricen a_{ij}) og indsættes i udtrykket (108). I det resulterende udtryk skal vi så have leddet med produktet v_1v_2 til at forsvinde.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)L_1^2 \left(v_1 - \frac{b_{12}}{b_{22}}v_2 \right)^2 + m_2L_1L_2\cos(\theta_1-\theta_2) \left(v_1 - \frac{b_{12}}{b_{22}}v_2 \right) \frac{v_2}{b_{22}} + \frac{1}{2}m_2L_2^2 \left(\frac{v_2}{b_{22}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)L_1^2 v_1^2 + \frac{m_2L_1L_2\cos(\theta_1-\theta_2) - (m_1+m_2)L_1^2 b_{12}}{b_{22}} v_1 v_2 + \\
&\quad \frac{(m_1+m_2)L_1^2 b_{12}^2 - 2m_2L_1L_2\cos(\theta_1-\theta_2)b_{12} + m_2L_2^2}{2b_{22}^2} v_2^2
\end{aligned}$$

Krydsproduktleddet forsvinder for

$$b_{12} = \frac{m_2L_2}{(m_1+m_2)L_1} \cos(\theta_1-\theta_2) \quad (110)$$

og når dette indsættes i sidste led, finder vi, at leddet bliver uafhængigt af θ_1 og θ_2 , når

$$b_{22} = \sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1+m_2} \cos^2(\theta_1-\theta_2)} \quad (111)$$

Det sidste udtryk kunne ganges med en vilkårlig konstant, hvilket blot ville ændre på størrelsen af inertansen for p_2 lageret. Med valget (111) fås:

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)L_1^2 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2 v_2^2 \quad (112)$$

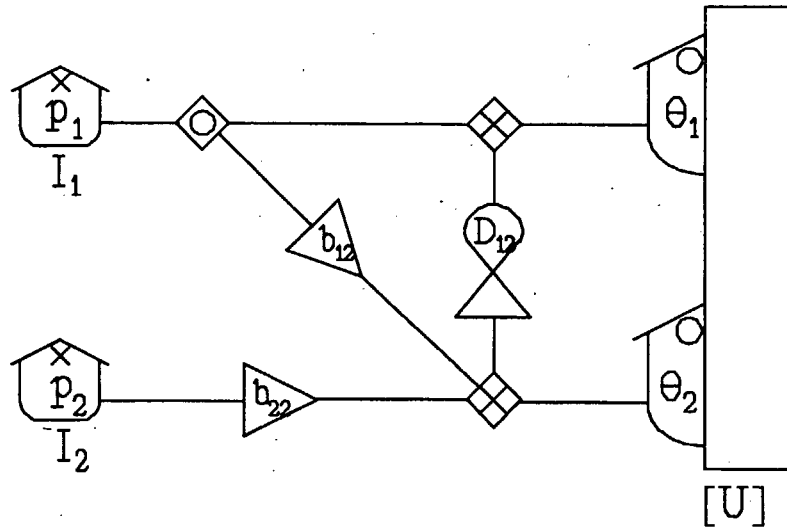
dvs. de to inertanser bliver givet ved:

$$I_1 = (m_1+m_2)L_1^2 \quad ; \quad I_2 = m_2L_2^2 \quad (113)$$

Vi mangler så blot at bestemme gyratoren af (99):

$$\left. \begin{aligned}
D_{12} &= p_k \left(\frac{\partial b_{k1}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial b_{k2}}{\partial \theta_1} \right) = -p_1 \frac{\partial b_{12}}{\partial \theta_1} - p_2 \frac{\partial b_{22}}{\partial \theta_1} = \\
&\frac{m_2 \sin(\theta_1-\theta_2)}{m_1+m_2} \left(p_1 \frac{L_2}{L_1} - p_2 \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1+m_2} \cos^2(\theta_1-\theta_2)}} \right)
\end{aligned} \right\} (114)$$

Vi kan så tegne diagrammet efter figur 46:



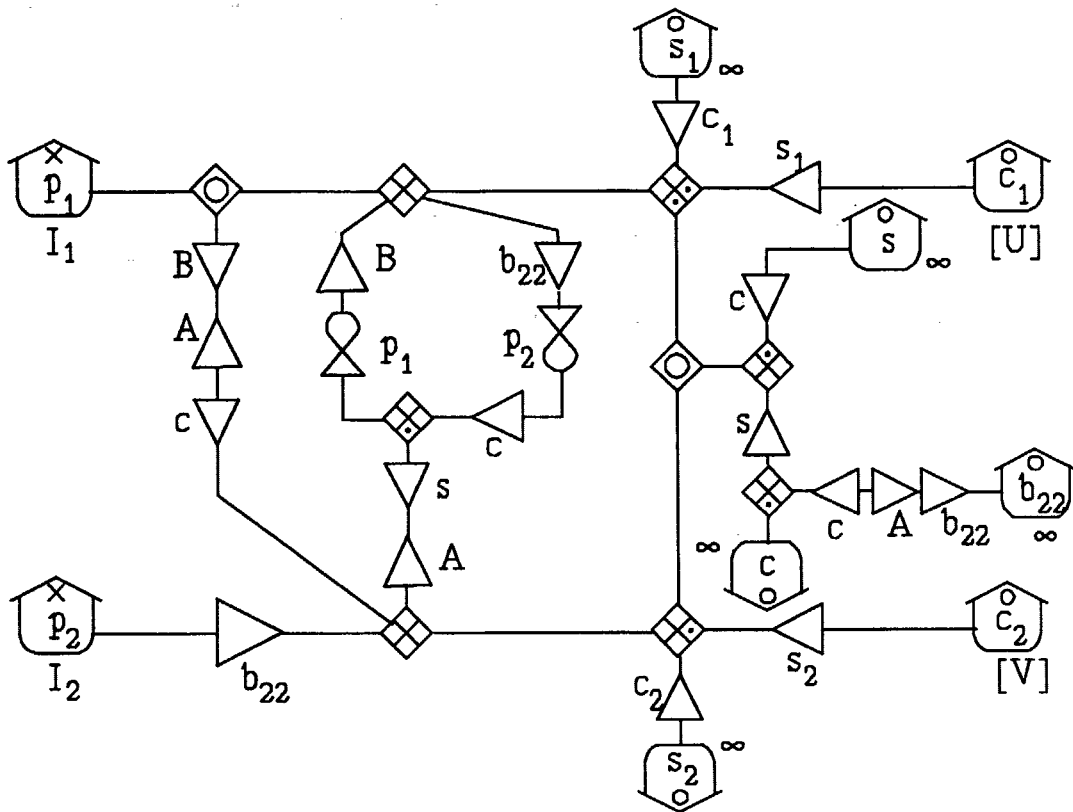
Figur 49 Lagrange retikulation af dobbeltpendulet, figur 48. Symbolerne refererer til følgende ligninger: U:(106), b_{12} :(110), b_{22} :(111), I_1 - I_2 :(113), D_{12} :(114).

Rate ligningerne for dobbeltpendulet, opskrevet i den mest hensigtsmæssige rækkefølge, er så:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \frac{p_2}{I_2 b_{22}} & ; & & \dot{\theta}_1 &= \frac{p_1}{I_1} - b_{12} \dot{\theta}_2 \\ \dot{p}_1 &= - \frac{\partial U}{\partial \theta_1} - D_{12} \dot{\theta}_2 & ; & & \dot{p}_2 &= \frac{1}{b_{22}} \left(- \frac{\partial U}{\partial \theta_2} + D_{12} \dot{\theta}_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Da diagrammet indeholder mange ikke-lineære styringer, kan man overveje en mere tilbundsående retikulation. I almindelighed kan det potentielle energifelt også diagonaliseres til uafhængige o-lagre, som enten er lineære eller aktive. Når U som i (106) involverer cosinus og sinus af θ_1 og θ_2 , kan disse frembringes ved konstruktionen på figur 29. Der vil så kun forekomme to aktive lagre (svarende til spændingskilder), der beskriver tyngdefeltets påvirkning af de to partikler via cosinus leddene i (106). På lignende måde kan man lade diagrammet udregne cosinus og sinus til differensen $\theta_1 - \theta_2$, som skal bruges til styring af transformerne og gyrotorerne. Der vil ikke dukke nye gyrotorer op, når man således retikulerer relationer mellem o-level variablene, for disse relationer er uafhængige af x-levels.

Størrelsen b_{22} , som indeholder en kvadratrod, kan også retikuleres lineært ud til et cyklisk lager, som så også kan bruges til styring af gyrator feltet. Dette felt, som er det mest indviklede i beregningen, kan reduceres til en differens mellem to gyratorer, som så hver for sig kan kombineres med transformere, til man ender med diagrammet nedenfor. I en beregning, baseret på dette diagram, skal man blot sørge for, at de funktionelle sammenhænge mellem de mange o-levels er opfyldt ved starten af integrationen, så vil diagramstrukturen sørge for, at de bevares under integrationen, således at de ikke-lineære funktioner kun skal benyttes én gang for alle.



Figur 50 Tilbundsgående retikulation af dobbeltpendulet. Symbolerne A, B, U og V forklares i teksten nedenfor.

På figuren er af pladshensyn benyttet korte betegnelser for de konstante transformere A og B:

$$A = 1 + \frac{m_1}{m_2} ; B = \frac{L_2}{L_1}$$

samt for de lineære energifunktioner for de aktive c_1 - og c_2 -lagre, U og V:

$$U = (m_1 + m_2)gL_1c_1 ; V = m_2gL_2c_2$$

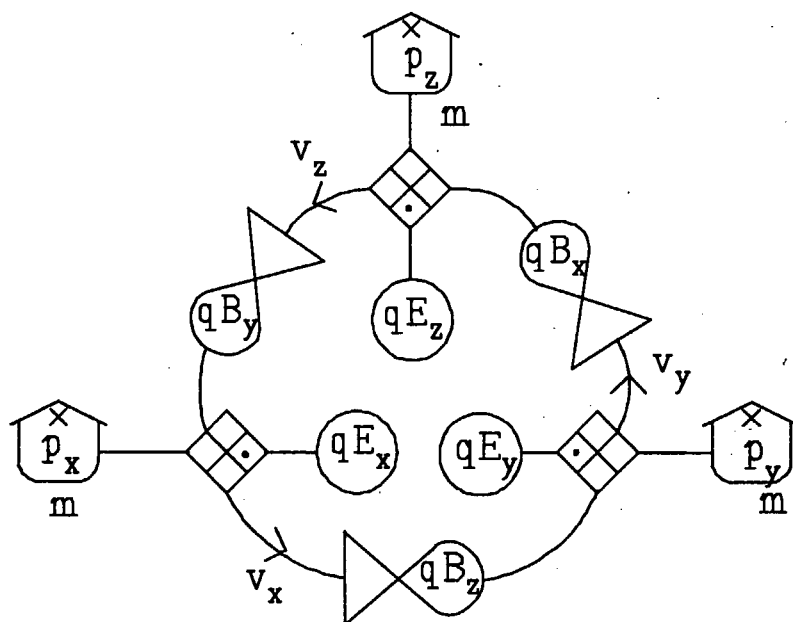
Cykliske lagre for θ_1 og θ_2 kan let tilføjes, men er ikke nødvendige.

6.5 Lorentz kraften

Et eksempel, der falder uden for de to retikulationsmetoder i dette og det foregående afsnit, men som kan behandles med indførelse af en generaliseret Lagrange- og Hamilton funktion, er bevægelsen af en **ladet partikel i et elektromagnetisk felt**. For en partikel med ladningen q , der bevæger sig med hastigheden \vec{v} og er påvirket af den elektriske feltstyrke \vec{E} og den magnetiske induktion \vec{B} er kraften givet ved Lorentz' udtryk (vi benytter SI systemet):

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (116)$$

Dette udtryk kan let retikuleres ved at angive det elektriske felt med spændingskilder og det magnetiske med gyratorer:



Figur 51 Lorentz kraft på partikel (masse m , ladning q).

Af figuren ses umiddelbart, at magnetfeltet ikke kan udføre arbejde, men det elektriske felt kan. I en statisk situation kan E feltet afledes af en potentiel energi $U = q\phi$, hvor ϕ er det elektriske potential, og spændingskilderne kan da erstattes af porte til et 0-lager med energifunktionen U . Herved kommer diagrammet til at minde om Poisson retikulationen figur 42, men med den væsentlige forskel, at transformere feltet a.. mangler. Imidlertid kan der, ifølge (73) ikke forekomme gyratorer i Poisson retikulationen, hvis der ikke er koordinatafhængige transformere. Derfor kan figur 51 ikke føres ind under Poisson retikulationen og heller ikke under den hermed ækvivalente Lagrange retikulation, figur 46.

I en dynamisk situation, hvor felterne er tidsafhængige, kan man ikke nøjes med at beskrive det elektriske felt som afledt af en potentialfunktion, for tidsafhængige magnetfelter vil inducere elektriske felter med rotation. Maxwells ligninger siger:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (117)$$

dvs. B-feltet er *altid* divergensfrit, og det kan derfor skrives som rotationen af et vektorfelt \vec{A} , *det magnetiske vektorpotential*. Den anden ligning i (117) giver da, at summen af \vec{E} og den partielt tidsafledede af \vec{A} er et rotationsfrit felt, der derfor kan udtrykkes som (minus) gradient af en skalar potentialfunktion ϕ :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = - \nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (118)$$

dvs. i retikulationen vil der foruden et potentielt energi lager med energifunktionen $q\phi$ også optræde tre spændingskilder, som er de partielt tidsafledede af \vec{A} feltet.

Retikulation af partiklens bevægelse i et tidsafhængigt elektromagnetisk felt er således ikke i sig selv et problem, men den falder udenfor de beskrevne forbindelser til Lagrange og Hamilton formalismene. Imidlertid *findes* der en Lagrange funktion, som via Lagrange ligningerne (43) svarer til Lorentz kraften (116), nemlig

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (119)$$

Vi kan da heraf også bestemme en Hamilton funktion ved (53):

$$H(\vec{P}, \vec{r}) = \vec{P} \cdot \vec{v} - L \quad (120)$$

hvor den kanoniske impuls er givet ved (50), altså:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad (121)$$

Vi finder da følgende udtryk for Hamiltonfunktionen, som vil være explicit tidsafhængigt, når \vec{A} og ϕ er det:

$$H(\vec{P}, \vec{r}, t) = \frac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \quad (122)$$

og dette udtryk er *ikke* homogent kvadratisk i \vec{P} 'erne, som Poisson metoden forudsætter.

Kapitel 7

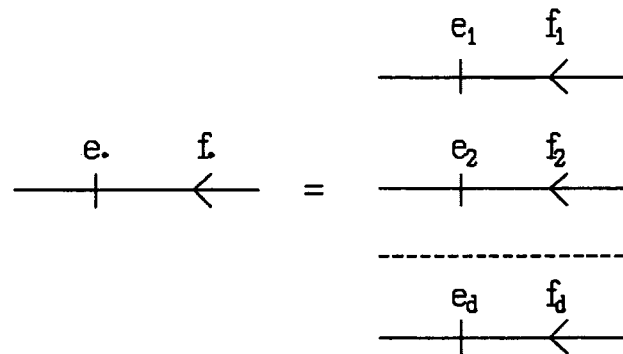
Vektorbånd og tensorer

7.1 Vektorbåndets skalarprodukt

Vi har allerede adskillige gange, senest på figur 44, tilladt os at tegne EB diagrammer, hvor både rate- og level-variablene er vektorer. Udvidelsen af reglerne for det basale byggesæt er problemfri, når vi kan bruge almindelig *euklidisk* vektorregning, dvs. når skalarproduktet af to vektorer er givet ved summen af produkterne af de to vektorers koordinater. Dette vil vi forudsætte i dette afsnit, lige som vi vil begrænse os til *reelle* vektorer. Den almene teori for komplekse vektorbånd med ikke-euklidiske metrikker er behandlet i IMFUFA tekst 238.

For et vektorbånd i d dimensioner er både strømmen og spændingen d dimensionale vektorer, og energistrømmen er givet ved skalarproduktet af strøm og spænding. Hvis der er givet et ortogonalt koordinatsystem, kan strømmen og spændingen fremstilles ved sæt af d koordinater, og skalarproduktet er summen af produkterne af de enkelte koordinater. Dette betyder, at vektorbåndet kan retikuleres ud på d *skalarbånd*, dvs. de bånd, som vi kender fra det basale byggesæt. Da strøm-orienteringsreglen skal gælde for vektorbåndet, såvel som for de enkelte skalarbånd, må det gælde, at alle strømvektorens koordinater er strømme, og alle spændingsvektorens koordinater er spændinger. (I den almene teori vises, at forekomsten af ikke-euklidiske metrikker hænger sammen med, at nogle af strømvektorens koordinater er spændinger, og de tilsvarende koordinater af spændingsvektoren er strømme, men det vil vi altså ikke gå nærmere ind på her). Derimod vil vi *ikke* altid kræve, at alle koordinaterne af spændingsvektoren (og strømvektoren) har samme fysiske dimension.

Vi vil angive en vektor med et symbol, forsynet med en prik, som er et *ikonisk index*, altså f.x. e . for spændingsvektoren, f . for strømvektoren. Prikken angiver en "tom plads" for et *symbolsk index*, f.x. e_i . Når den tomme plads fyldes ud, angiver det indicerede vektorsymbol f_i den i 'te koordinat af vektoren. Vektorbåndet og dets opløsning på skalarbånd kan altså fremstilles på følgende måde:



Figur 52 Euklidisk vektorbånd i d dimensioner.

Skalarproduktet af to vektorer $e.$ og $f.$ vil vi angive som $e.f.$ eller som $e_i f_i$, idet vi bruger Einsteins konvention med summation over dobbelte, dummy indekser. Når vi således kombinerer denne sumkonvention med brugen af prikkerne som tomme indekspladser, indfører vi følgende semiotiske regel:

Når der forekommer to tomme indekspladser med et enkelt symbol imellem, skal vi forestille os, at disse to pladser udfyldes med et par af dummy indekser, og summationen udføres.

$$e. f. = e_i f_i = \sum_{i=1}^d e_i f_i \tag{123}$$

7.2 Tensor-symboler og indekser

Vi vil nu generalisere notationen til at omfatte *tensorer af rang n*. Den normale, fysiske definition af en tensor hentyder til, hvordan en sådan størrelse transformerer ved ændring af koordinatsystemet. Denne diskussion udsætter vi lidt, og foreløbig giver vi kun en semiotisk karakteristik af en tensor.

En tensor af rang n er et symbol med n tomme indekspladser.

Således betegner $A_{..}$ en tensor af rang 3. En vektor $f.$ er en tensor af rang 1, en skalar a er en tensor af rang 0. Hvis indekspladserne fyldes helt eller delvist ud, reduceres tensorens rang tilsvarende, f.x. er $A_{.j}$ af rang 1, dvs. en d dimensional vektor, og vektorkoordinaten f_k er en skalar.

Vi vil benytte ovenstående regel om udfyldning af nærliggende tomme indekspladser (med et enkelt symbol imellem) med dummy indekser for

tensorer af vilkårlig rang. Denne operation kaldes *kontraktion* af indekspladser. Ser vi f.x. på udtrykket $A..f.$, skal det fortolkes som

$$A..f. = A.._k f_k = \sum_{i=1}^d A.._i f_i \quad (124)$$

$$A_i . f. = A_{ij} f_j = \sum_{k=1}^d A_{ik} f_k$$

dvs. der er tale om et produkt af en $d \times d$ matrix $A..$ med en d dimensional vektor $f.$, der skrives som en søjlevektor til højre for matricen. Derimod betyder $f.A..$, at vektoren $f.$ skal skrives som rækkevektor og ganges på matricen fra venstre, og det er som bekendt noget andet. Et udtryk som $A..B..$ betyder en sædvanlig række-søjle multiplikation af to matricer, og resultatet er en ny $d \times d$ matrix, dvs. en tensor af rang 2, hvis to tomme indekspladser er den første og den fjerde prik i $A..B..$, de to midterste indekspladser er forsvundet ved kontraktionen. Igen vil det være noget andet end $B..A..$, *tensormultiplikation er i almindelighed ikke kommutativ*.

En anden form for tensorprodukt, hvor der ikke finder nogen kontraktion af indekspladser sted, er *det direkte produkt*. Ser vi på det direkte produkt af to vektorer $e.$ og $f.$, skriver vi det $e. \otimes f.$, og det vil være en tensor af rang 2, altså når det udskrives i koordinater en matrix, hvor $e.$'s indeks fungerer som rækkeindeks og $f.$'s indeks som søjleindeks. Matricen for produktet $f. \otimes e.$ vil altså være den transponerede, hvor der er byttet om på række- og søjleindekser. Det direkte produkt af en tensor af rang m med en tensor af rang n vil være en tensor af rang $m+n$, hvorimod det kontraherede produkt vil være en tensor af rang $m+n-2$.

Af og til har man brug for at kontrahere et par tensorindeksor, uden at der noget produkt. Hvis de to indekspladser er naboer, kan man angive kontraktionen med en forbindelsesstreg. Således betegner $A.._.$ *sporet af matricen A*, altså summen af dens diagonalelementer. Sporet kan også betegnes $Sp(A..)$ (tysk *Spur*) eller $Tr(A..)$ (engelsk *trace*).

$$A.._ . = A_{ii} = Tr(A..) = \sum_{k=1}^d A_{kk} \quad (125)$$

Sporet af en matrix er en skalar.

Vi vil i det følgende kun få brug for tensorer af rang 0, 1 og 2, og vil ofte benytte betegnelserne hhv. skalar, vektor og matrix. Der er dog en forskel på en 2. rangs tensor og en matrix, for en almindelig matrix er et rektangulært tal-skema, hvor antallet af rækker og antallet af søjler kan være forskellige, medens en matrix, der svarer til en anden ordens tensor altid er kvadratisk. En

tensor er desuden en *fysisk* størrelse og eksisterer som sådan uafhængigt af det koordinatsystem, der tillader os at udtrykke den *matematisk* som en kvadratisk matrix. Den samme forskel eksisterer for vektorer, altså tensorer af rang 1, for en fysisk vektor forudsætter ikke en koordinatrepræsentation, der lader os skrive den ud som en række eller en søjle af tal (+ tallenes fysiske dimension). Den semiotiske tensordefinition, vi har benyttet, svarer til den fysiske i den forstand, at et tensorsymbol som $A_{..}$, der repræsenterer en bestemt fysisk størrelse, vil være uændret ved koordinattransformationer, hvorimod matrixelementerne A_{jk} naturligvis vil ændres. For en *egentlig* fysisk tensor vil matrixelementerne ændres på en bestemt måde, der kan udtrykkes ved transformationsmatricen for koordinatsystemet, som vi snart skal se.

7.3 Samlere og lagre

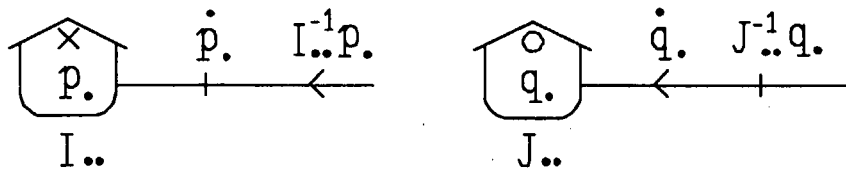
Vi vender nu tilbage til EB teknikken for at generalisere de grundlæggende ikoner til d dimensionale euklidiske vektorbånd. Vi har allerede set på selve energibåndet i figur 52. En **samlere** for vektorbånd (x- eller o-) kan så tilsvarende retikuleres ud på d samlere af samme type fra det basale byggesæt. Prikken har samme betydning, nemlig en symmetrisk transformer med det skalare omsætningsforhold -1 , men da transformeres omsætningsforhold for vektorbånd i almindelighed er tensorer af rang 2, vil der være andre symmetriske transformere end de to, vi har i det basale byggesæt. Alle definitionerne på figur 16 - 21 kan overføres uændret.

Et **1-port vektorlager** (x- eller o-) har som level variabel en d dimensional vektor, der er det tidslige integral af input rate vektoren. Når vektorerne fremstilles ved koordinater, kan lageret oversættes til et d -port lager med simple porte, hvor alle levels er af samme type. Af særlig interesse er de *lineære* vektorlagre, hvor output rate vektoren er en lineær funktion af level vektoren. Vi karakteriserer det lineære x-lager ved en *inertanstensor* $I_{..}$ og det lineære o-lager ved en *føjelighedstensor* $J_{..}$ (engelsk: *compliance*). Omregningen fra level til output rate sker ved brug af de reciprokke tensorer $I^{-1}..$, som ikke rigtig har noget navn, men som kunne kaldes *lethedstensoren*, og $J^{-1}.. = G_{..}$, som kaldes *stivhedstensoren*. Energien af et lineært lager er kvadratisk i level vektoren:

$$E(p.) = \frac{1}{2} p. I^{-1}.. p. \quad \text{for x-lager} \quad (126)$$

$$E(q.) = \frac{1}{2} q. J^{-1}.. q. \quad \text{for o-lager}$$

I nogle tilfælde, hvor inertans- eller føjelighedstensoren er en skalar gange enhedsmatricen $\delta_{..}$, angives blot skalaren, f.x. for et impulslager for en partikel med massen m , hvor $I_{..} = m \delta_{..}$, skriver vi blot m (sml. figur 44).



Figur 53 Lineære vektorlagre.

Sammenfattende kan vi kalde tensorerne $I_{..}$ og $J_{..}$ for de lineære x- og o-lagre for *kapacitanstensorerne*. Vi kan vise, at disse tensorer er *symmetriske* eller *hermiteske*, hvilket for reelle tensorer er det samme. Det samme vil så gælde for deres reciprokke tensorer, og vi vil blot vise sætningen for stivhedstensoren $G_{..}$ for et lineært o-lager. For den k 'te koordinat af spændingsvektoren gælder:

$$e_k = \frac{\partial E}{\partial q_k} = G_{kj} q_j \Rightarrow \frac{\partial e_k}{\partial q_j} = G_{kj} = \frac{\partial^2 E}{\partial q_j \partial q_k} \quad (127)$$

på den anden side har vi også

$$e_j = \frac{\partial E}{\partial q_j} = G_{jk} q_k \Rightarrow \frac{\partial e_j}{\partial q_k} = G_{jk} = \frac{\partial^2 E}{\partial q_k \partial q_j} \quad (128)$$

og da de to dobbelt afledede af energifunktionen er identiske, ses at $G_{..}$ er symmetrisk.

7.4 Transformere og -ducere

Vi ser dernæst på **transformere/transducere**. Da vi ikke forlanger, at alle koordinater af spændingsvektoren skal have samme dimension, kan der i omsætningstensoren fra primær- til sekundærporten optræde nogle matrixelementer med dimension, andre uden, så vi vil i denne forbindelse ikke skelne mellem -formere og -ducere og holder os til betegnelsen transformere. Kaldes omsætningstensoren for $a_{..}$ er relationen mellem sekundærspændingen $e^{(2)}$. og primærspændingen $e^{(1)}$. :

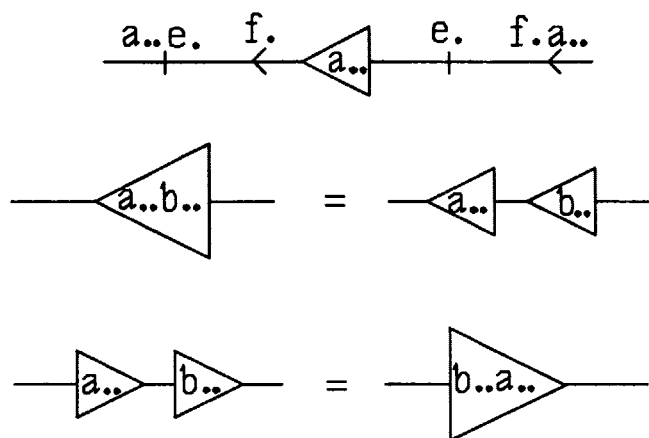
$$e^{(2)} = a.. e^{(1)} \quad (129)$$

Da tensoren $a..$ ganges på primærspændingen fra venstre, virker det mest naturligt, hvis vi i definitionstegningen af transformeren lader primærsiden være til højre og vælger spændingsinput her, således at spændingssignalet går fra højre til venstre. Strømsignalet går så fra venstre til højre. Da energistrømmen på sekundærsiden skal være den samme som på primærsiden, har vi:

$$\left. \begin{aligned} f_l^{(2)} e_l^{(2)} &= f_l^{(2)} a_{lk} e_k^{(1)} = f_k^{(1)} e_k^{(1)} \\ \Rightarrow f_k^{(1)} &= f_l^{(2)} a_{lk} \text{ eller: } f^{(1)} = f^{(2)} a.. = a^{+..} f^{(2)}. \end{aligned} \right\} (130)$$

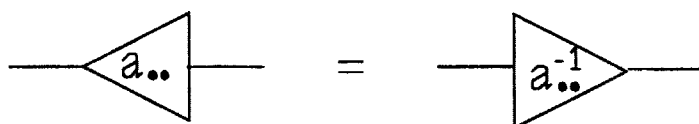
hvor vi har indført den *hermiteske konjugerede* eller den *transponerede* (hvilket for reelle tensorer er det samme) tensor $a^{+..}$, dvs. den, der fremgår af $a..$ ved ombytning af række- og søjleindekser.

Reglen om at lade primærsiden være til højre i diagrammerne bliver endnu mere velbegrunderet, når vi ser på *sammensætning* af transformere, som illustreret nedenfor.



Figur 54 Definition og sammensætning af transformere.

Af definitionen fås umiddelbart følgende regel for *vending af ikonet*:



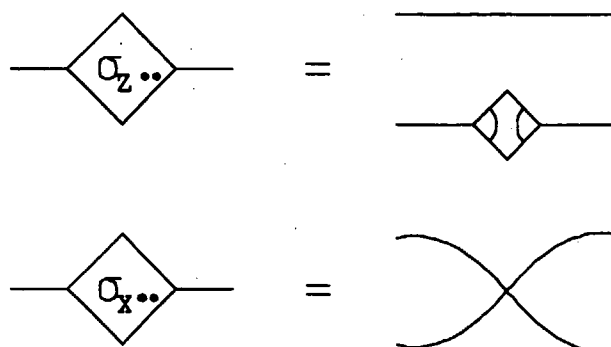
Figur 55 Vending af transformer ikonet.

Hvis man for $d=2$ retikulerer denne regel ud på basale ikoner, fås et billede, der svarer til figur 45, hvor tensoren $b_{..}$ er den transponerede af den reciprokke af $a_{..}$. Årsagen til denne transponering er, at i matrixelementet a_{ij} refererer indekset i til bånd nr. i på sekundærsiden af $a_{..}$, men i b_{ij} refererer i til primærsiden af $b_{..}$.

Når omsætningsforholdet er en tensor, er der flere muligheder for *ikonsymmetri*, som jo svarer til, at ligningen $a^{-1}.. = a_{..}$ er opfyldt. I to dimensioner har vi således de to *Pauli matricer* σ_z og σ_x (σ_y er ikke reel og kan derfor ikke anvendes her).

$$\sigma_{z..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_{x..} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (131)$$

Ikonsymmetrien fremgår umiddelbart, når man retikulerer dem ud:



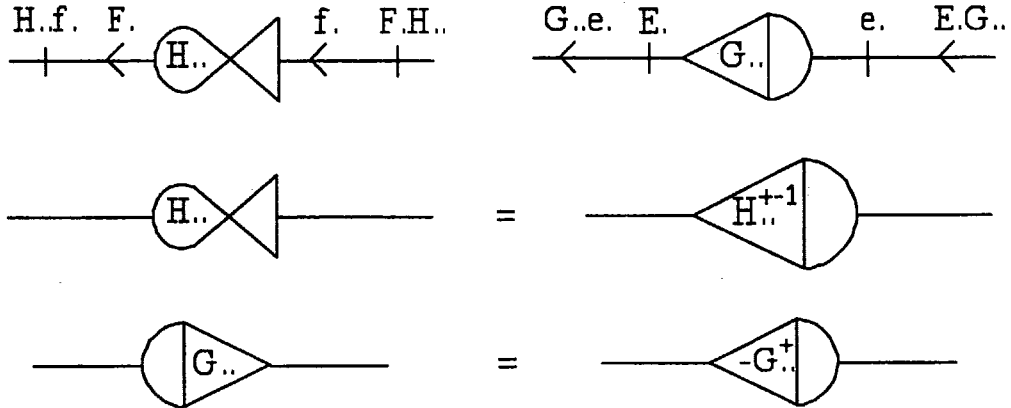
Figur 56 Pauli matricer som ikonsymmetriske transformere.

Iøvrigt vil enhver kombination på formen $\cos\phi\sigma_{z..} + \sin\phi\sigma_{x..}$ også være ikonsymmetrisk, men det vil ikke fremgå umiddelbart af deres retikulation til basale ikoner.

7.5 Gyrotorer

Gyrotorer behandles på lignende måde. Hvis vi ser på en o-gyrotator med omsætningstensoren $G_{..}$ og med spændingsinput på begge sider, så skal sekundærstrømmen være $f^{(2)} = G_{..}e^{(1)}$, og primærstrømmen skal, for at energistrømmen kan være den samme på begge sider, være $f^{(1)} = e^{(2)}.G_{..}$.

Regler for gyrotorer, herunder ikonvending, angives nedenfor.

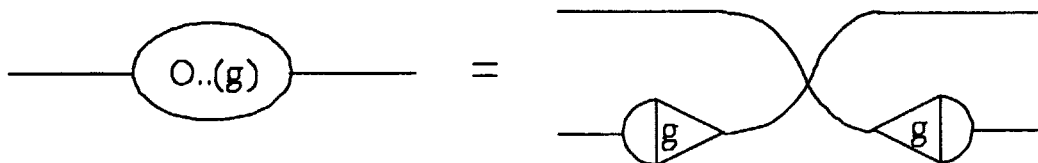


Figur 57 Definition og regler for vektorbåndsgyrotorer.

Af reglen for ikonvending ses, at en gyrotor er *ikonsymmetrisk*, hvis dens tensor $G..$ er *antihermitesk*, dvs. antisymmetrisk for reelle tensorer. For $d=1$, i det basale byggesæt findes der ikke ikonsymmetriske gyrotorer (bortset fra $G=0$, som vi ikke regner med, og, for komplekse skalarbånd, de imaginære gyrotorer, $G=+ig$ og $G=-ig$). For $d=2$ har vi imidlertid en endimensional familie af ikonsymmetriske gyrotorer:

$$O..(g) = ig\sigma_y .. = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix} \quad (132)$$

som kan retikuleres ud på følgende måde:



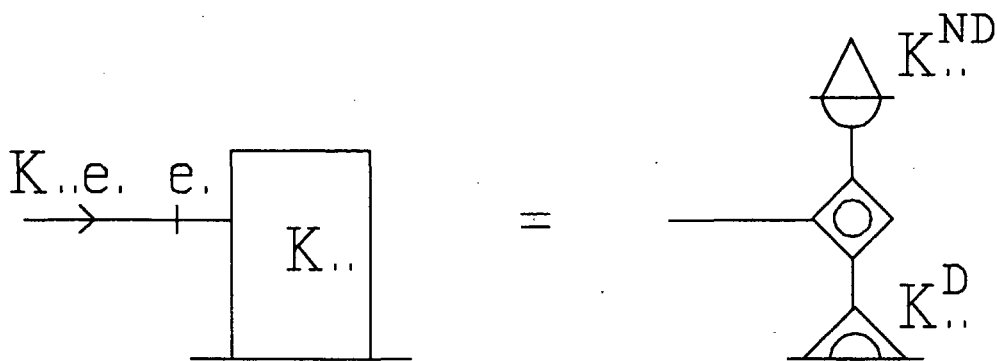
Figur 58 Ikonsymmetrisk gyrotor for $d=2$.

7.6 Simultanfelter

De sidste elementer fra det basale byggesæt, som skal generaliseres til vektorbåndsformalismen er **lækkene**. Vi skal her kun interessere os for det passive aspekt af de dissipative systemer; støjen lades ude af betragtning. En læk er så en *passiv 1-port*, som når den retikuleres ud på det basale byggesæt svarer til et *simultanfelt*. Vi må da tage i betragtning, at simultanfelter fra det basale byggesæt kan indeholde meget andet end lække, nemlig samlere, transformere og gyratorer, og at disse andre elementer ikke er dissipative. Spørgsmålet er derfor, om passive 1-porte for vektorbånd nødvendigvis er generaliseringer af lækkene fra det basale byggesæt.

Lad os se på en passiv 1-port med spændingsinput e . og admittans-tensoren $K_{..}$. Output strømmen er så $f = K_{..}e$. og energistrømmen, som er den dissiperede energi, idet vi lader orienteringen være ind mod 1-porten, er givet ved $w = e.f = e.K_{..}e$. Det er nu let at se, at det kun er den hermiteske eller symmetriske del af $K_{..}$, der bidrager til dissipationen. Dvs. vi kan opdele $K_{..}$ i en dissipativ del $K^D_{..}$ og en ikke-dissipativ del på følgende måde:

$$K^D_{..} = \frac{1}{2} (K_{..} + K^{+..}) \quad ; \quad K^{ND}_{..} = \frac{1}{2} (K_{..} - K^{+..}) \quad (133)$$



Figur 59 Opdeling af passiv 1-port i dissipativ og ikke-dissipativ del.

Oprindeligt definerede vi forskellen på strømme og spændinger ved at sige, at strømme skifter fortegn ved *tidsvending*, medens spændinger er invariante ved denne operation. Dvs. bevægelsesligningerne er invariante, hvis vi skifter fortegn på tiden og samtidig substituerer for alle strømme og spændinger:

$$f. \rightarrow f^T. = -f. ; e. \rightarrow e^T. = e. \quad (134)$$

Desuden skal der skiftes fortegn på alle x-levels, medens o-levels bevares. Parametre, der forbinder variable af samme x/o type, dvs. lagerkapaciteter og transformere, skal bevares, hvorimod der skal skiftes fortegn på alle parametre, der forbinder variable af forskellig x/o type, dvs. lække og gyratorer.

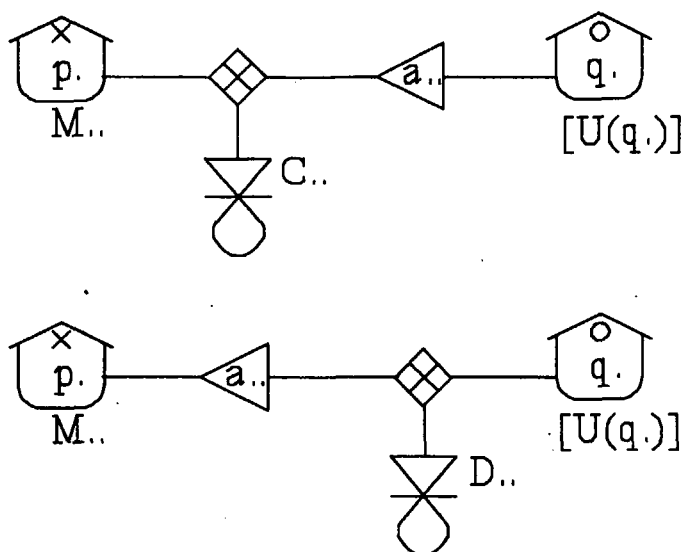
Det er nu klart, at tensoren $K..$ må skifte fortegn ved tidsvending, og det samme må gælde for både $K^D..$ og $K^{ND}..$. I $K^{ND}..$ kan der ikke indgå lække, dvs. de eneste parametre i $K^{ND}..$, der kan få tensoren til at skifte fortegn ved tidsvending, er gyratorer. Med andre ord: Hvis der *ikke* indgår gyratorer i den basale retikulation af feltet $K..$, er dets ikke-dissipative del $K^{ND}..$ fraværende, og så må matricen $K..$ være *symmetrisk*. Omvendt: hvis der i retikulationen af $K..$ indgår et sæt $\{g\}$ af gyratorer, så kan et fortegnsskift på alle disse ved tidsvending kun give sig til kende i den ikke-dissipative del $K^{ND}..$, dvs. den antisymmetriske del af matricen $K..$, og det vil derfor virke som en transponering af matricen. Kombineres denne regel med symmetrien af den dissipative del, når vi frem til *Onsagers symmetrirelation*:

$$K_{j,i}(\{g\}) = K_{i,j}(\{-g\}) \quad (135)$$

7.7 Gyrolække i standard retikulationer

Vi har således set, at der i vektorbåndsformalismen dukker en ny type af passiv 1-port op, som ikke findes i det basale byggesæt, nemlig et ikke-dissipativt felt med antisymmetrisk response-tensor, som i sin basale retikulation indeholder gyratorer. Vi kalder en sådan 1-port en **gyrolæk**, selv om den egentlig ikke er en læk, da den jo ikke kan modtage energi, og vi afbilder den som en gyrator med kun én port og med en tværstreg gennem gyrator-ikonet. Der er både en x-gyrolæk og en o-gyrolæk. Ikonet for den sidste er vist på figur 59.

De to retikulationsopskrifter for konservative, holonome systemer, Poisson metoden, figur 42, og Lagrange metoden, figur 46, kan nu fremstilles ved vektorbåndsformalismen og brug af x-gyrolæk ikonet:



Figur 60 Øverst: Poisson, figur 42. Nederst: Lagrange, figur 46.

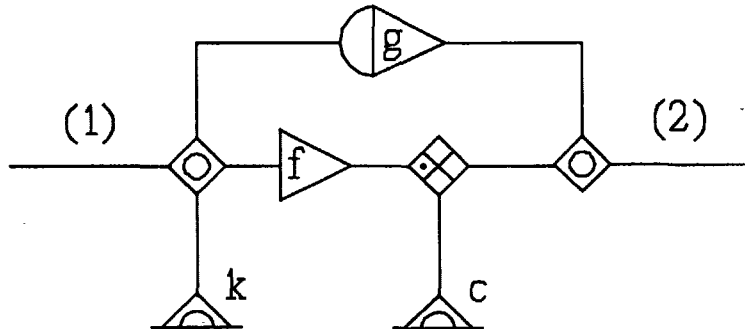
Det er den samme transformere $a..$ i de to diagrammer, selv om vi i figur 46 foretrak at udtrykke den ved dens reciprokke og transponerede $b..$. Det fremgår ikke af figur 60, at inertanstensoren $M..$ er på diagonalform, men det er heller ikke så væsentligt som det, at den er uafhængig af koordinatvektoren $q.$. Relationen mellem de to gyrolække $C..$ og $D..$ kan udledes ved at trække transformeren på det nederste af diagrammerne i figur 60 gennem samleren. Man finder derved:

$$C.. = a..D..a^{*}.. \tag{136}$$

hvilket stemmer med den tidligere udledte relation (sml. (98)).

7.8 Lotka princippet

For $d=2$ kan et passivt felt altid retikuleres efter følgende opskrift:

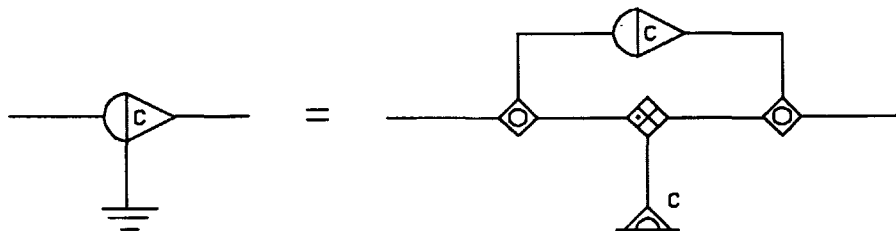


Figur 61 Lineær passiv 1-port med $d=2$ eller skalar 2-port.

Her er kun den begrænsning på de fire parametre, at lækkene ikke må være negative. Denne generelle regel sikrer, at termodynamikkens anden hovedsætning altid er opfyldt for energibandsmodeller. $K..$ matricen for systemet på figur 61 er:

$$K.. = \begin{pmatrix} k + cf^2 & g - cf \\ -g - cf & c \end{pmatrix} \quad (137)$$

Et vigtigt specialtilfælde er $g = cf$, som medfører, at strømmen i bånd 1 er uafhængig af spændingen i bånd 2. Hvis yderligere $k = 0$ og $f = 1$, har vi en **samlebåndsgyrator**:



Figur 62 Samlebåndsgyrator.

I almindelighed er gyratorer svære at realisere i passive systemer. De kræver f.x. et magnetfelt, der skal være meget kraftigt, hvis gyrotoreffekten skal være sammenlignelig med de dissipative effekter. Samlebåndsgyratoren findes derfor kun i aktive komponenter, som operationsforstærkere, eller i kemiske reaktioner langt fra ligevægt.

Modellen på figur 61 anvendes oftest med $g = 0$ til at skildre en "lineær fabrik", der omdanner et "råstof" i port 1 til et "produkt" i port 2. Produktiviteten af fabrikken er så:

$$P \doteq -f_2 e_2 = c (f e_1 - e_2) e_2 \quad (138)$$

og effektiviteten er:

$$\eta \doteq \frac{P}{f_1 e_1} = \frac{c (f e_1 - e_2) e_2}{[(k + c f^2) e_1 - c f e_2] e_1} \quad (139)$$

Hvis vi betragter e_1 som en given størrelse og e_2 som justerbar, ser vi, at produktiviteten er maksimal for

$$e_2 = \frac{1}{2} f e_1 \quad (140)$$

Effektiviteten er for denne værdi af e_2 ikke *maksimal*, men *optimal* og har værdien:

$$\eta_{opt} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2k}{c f^2} \right]^{-1} \leq \frac{1}{2} \quad (141)$$

Dette princip, at den optimale effektivitet for maksimal produktivitet ikke kan blive større end 50%, kaldes *Lotka princippet* (opkaldt efter økologen A. Lotka). Princippet gælder ikke, hvis der indgår en gyrator i "fabrikken". Den gyratorfrie model kan f.x. beskrive et termoelement, som omdanner en varmestrøm i port 1 til en elektrisk strøm i port 2. Lækken k er så relateret til varmeledningsevnen, c er den elektriske ledningsevne, og f er Peltier koefficienten. For dette eksempel vil det dog være umuligt at komme i nærheden af en optimal effektivitet på 50%.

Onsagers symmetrirelation (135) kan vises at gælde også for passive felter med strøminput i nogle porte og spændingsinput i andre. De kræver blot, at orienteringen i portene med strøminput er væk fra feltet, når de er ind mod feltet i portene med spændingsinput. Vi siger da, at der er valgt K-tegn i alle porte, fordi pilen i signaltegnet vender ind mod strengen som i bogstavet K. Vi har her igen en *semiotisk lov*, som automatisk er opfyldt for EB modeller.

Kapitel 8

Drejning og deformation

8.1 Unitære transformationer

En af tensorformalismens fordele er, at den gør det nemmere at skelne mellem en fysisk størrelse, som er en tensor, og dens matematiske representation, som er en samling tal, f.x. ordnet i en matrix (for en 2. rangs tensor). Talskemaet er i semiotisk forstand *mere symbolsk* end selve tensorsymbolet, fordi det refererer til en konvention, som den fysiske størrelse er uafhængig af, nemlig *koordinatsystemet*. Når vi udfylder tensorsymbolets ikoniske indekser, prikkerne, med symbolske indekser, f.x. i, j, k osv., refererer disse numre til grundvektorerne i det valgte koordinatsystem. Disse grundvektorer, n^i , må opfylde ortogonalitetsbetingelsen:

$$n^i \cdot n^j = \delta_{ij} \quad (142)$$

og de symbolsk indicerede koordinater af hhv. en vektor v . og en 2. rangs tensor $A_{..}$ er så defineret ved:

$$v_i = n^i \cdot v \quad ; \quad A_{ij} = n^i \cdot A_{..} \cdot n^j \quad (143)$$

Opretter vi nu et andet koordinatsystem, hvor vi bruger de græske bogstaver α, β, γ osv. til at skelne mellem grundvektorerne, n^α , så må ortogonalitetsbetingelsen (142) stadig være opfyldt for de "græske" grundvektorer, og de "græske" koordinater for *de samme tensorer* v . og $A_{..}$ er:

$$v_\alpha = n^\alpha \cdot v \quad ; \quad A_{\alpha\beta} = n^\alpha \cdot A_{..} \cdot n^\beta \quad (144)$$

Vi kan altså ved at fastholde tensorsymbolet, men ændre på de symbolske indekser for koordinaterne, vise, at det er koordinatsystemet, vi har ændret på, medens de fysiske størrelser er uændrede.

Lad os nu antage, at overgangen fra det oprindelige system n^i til det nye system n^α er en "drejning af akserne" i det d -dimensionale rum, uden translation, dvs. begyndelsepunktet ligger fast. Overgangen er så givet ved en matrix $U_{\alpha i}$:

$$n^\alpha = U_{\alpha i} n^i \quad (145)$$

hvor vi som sædvanlig summerer over dobbelt forekommende indekser, selv om de her står i forskellig højde. Ortogonalitetsbetingelsen for de nye grundvektorer giver så i forbindelse med samme betingelse (142) for de gamle:

$$n^\alpha \cdot n^\beta = U_{\alpha i} n^i \cdot U_{\beta j} n^j = U_{\alpha i} U_{\beta i} = U_{\alpha} \cdot U^*_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (146)$$

Vi ser altså, at rækkevektorerne i $U_{..}$ tilfredsstiller ortogonalitetsbetingelsen (eller *ortonormeringsbetingelsen*, som man ofte siger, da vektorerne både er ortogonale og normerede til enhedslængde). Endvidere ser vi, at den hermiteske konjugerede matrix $U^*_{..}$ er lig med den reciproke matrix til $U_{..}$:

$$U^*_{..} = U^{-1}_{..} \quad (147)$$

Vi siger, at en matrix, der tilfredsstiller (147) er *unitær*.

Når grundvektorerne i koordinatsystemet ændres ved transformationen (145), ændres koordinaterne af vektoren v , (143) og (144), efter formlen

$$v_\alpha = U_{\alpha i} n^i \cdot v = U_{\alpha i} v_i \quad (148)$$

Her kan vi ikke bare erstatte de symbolske indekser med ikoniske indekspladser, for det ville føre til ligningen $v = U_{..} v$, som jo åbenlyst er forkert, da $U_{..}$ ikke er enhedstensoren. Koordinatskiftet virker kun på de symbolsk indicerede koordinater, men ikke på selve vektorsymbolet.

For 2. rangs tensoren $A_{..}$ ændres matrixelementerne ved koordinattransformationen på følgende måde:

$$A_{\alpha\beta} = U_{\alpha i} A_{ij} U_{\beta j} = U_{\alpha i} A_{ij} U^*_{j\beta} \quad (149)$$

Disse udtryk, (148) og (149) benyttes ofte som *definition* af, at en størrelse er en tensor. De udtrykker simpelthen, at selve den fysiske størrelse er uændret, når koordinatsystemet ændres.

For en transformer med tensoren $a_{..}$ (figur 54) er det jo sådan, at spændingen ganges med $a_{..}$, når vi går fra primær- til sekundærsiden, og strømmen ganges med $a^{+1}_{..}$ samme vej. Dvs. hvis tensoren $a_{..}$ er unitær, er det den samme matrix, som strømvektoren og spændingsvektoren skal ganges med, når vi går fra primær- til sekundærsiden. En unitær transformer virker derfor på både strømvektorens og spændingsvektorens *koordinater* på samme måde som en overgang til et nyt koordinatsystem ville virke.

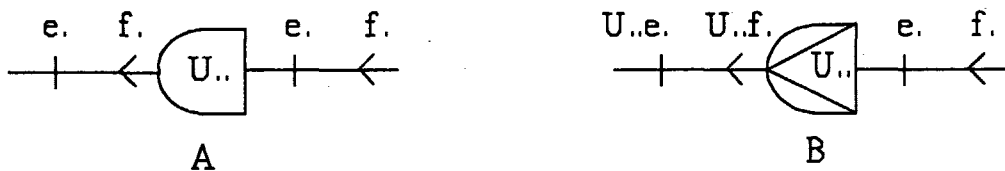
Virningen af en unitær transformer er imidlertid en anden end virningen af et koordinatskift, for transformeren $U_{..}$ *ændrer* faktisk primærstrømmen f og

primærspændingen e . til sekundærstrømmen f . og sekundærspændingen e' . på følgende måde:

$$f' = U.. f. ; e' = U.. e. \quad (150)$$

Den unitære transformer *drejer* begge vektorer på samme måde, medens koordinatsystemet ligger fast.

Da vi godt kan have brug for at angive drejninger af koordinatsystemet i EB modeller og skelne dem fra drejninger af de fysiske størrelser, indfører vi to nye ikoner, der begge karakteriseres ved en unitær tensor $U..$. Koordinatskift-ikonet er fysisk uvirksomt og kan i princippet indsættes overalt i båndene i en EB model, men drejnings-ikonet står for en unitær transformer, der udfører fysisk drejning:



Figur 63 Unitære transformationer. A: koordinatskift. B: drejning.

Hvis en unitær transformer også er *hermitesk*, $U^{+..} = U..$, bør den have et symmetrisk ikon, jfr. figur 55. Pauli spinmatricerne (131) er både unitære og hermiteske.

Forskellen på koordinatskift- og drejnings-ikonet eksisterer kun i den egentlige vektorbåndsformalisme. Hvis vi retikulerer vektorbåndene ud på skalarbånd, der repræsenterer vektorernes enkelte koordinater, kan vi ikke se forskellen; begge ikonerne på figur 63 vil kunne oversættes til identiske felter, bestående af samlere og transformere fra det basale byggesæt. Når vi derfor i det følgende diskuterer opbygning af de unitære matricer i forbindelse med drejninger af koordinatsystemet, er det lige så vel drejninger af de fysiske vektorer, vi diskuterer.

I vektorbåndsformalismen har vi jo tilladt, at de enkelte koordinater af spændings- eller strømvektoren kan have forskellig fysisk dimension, f.x. kan e_1 være en kraft [N] og e_2 et kraftmoment [N*m], svarende til, at f_1 er en hastighed [m/s] og f_2 en vinkelhastighed [s^{-1}]. Da man ikke kontinuert kan ændre en fysisk dimension til en anden, kan egentlige drejninger mellem sådanne størrelser ikke komme på tale. Vi kan imidlertid godt definere en transformer $D..$, som er unitær i den forstand, at den påvirker spændings- og strømvektoren på samme måde, når vi går fra primær- til sekundærsiden:

$$e'_{.} = D..e. \ ; \ f'_{.} = D..f. \quad (151)$$

Hvis vi angiver dimensionen af et symbol ved at skrive symbolet i en firkantet parentes og benytter, at produktet af dimensionerne af spænding og strøm i samme skalarbånd altid er det samme [J/s], får vi:

$$[D_{ij}] = \frac{[e'_{i}]}{[e_{j}]} = \frac{[f'_{i}]}{[f_{j}]} = \frac{[e_{j}]}{[e'_{i}]} \quad (152)$$

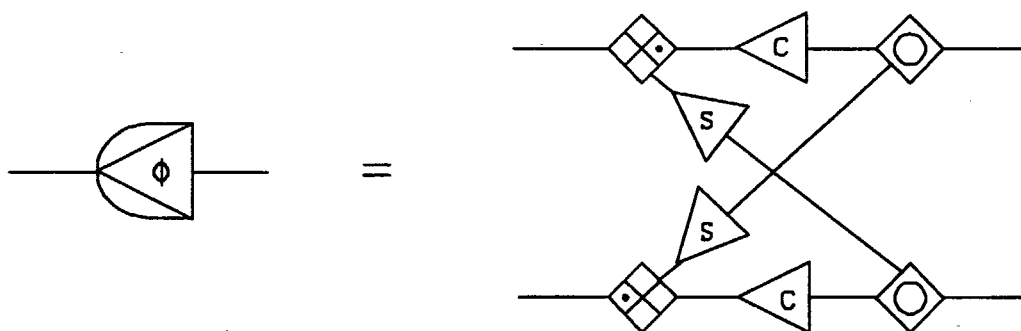
Det fremgår heraf, for det første, at *alle matrixelementer af D.. er dimensionsløse*, så der er tale om en ægte transformer. For det andet: Hvis e'_i og e_j har forskellig dimension, så må matrixelementet D_{ij} være nul. Hvis vi betragter det dimensionerede vektorrum som opdelt i underrum, hvor spændingerne i et enkelt underrum alle har samme dimension, så kan D.. beskrive drejninger inden for hvert enkelt underrum, men kan ikke koble fra et underrum til et andet. Vi finder derfor nødvendigvis de samme underrum med de samme dimensioner på sekundærsiden som på primærsiden, men der er ikke nødvendigvis overensstemmelse mellem indeksnumrene for underrummene på de to sider. Ikonerne på figur 63 kan også benyttes i dette tilfælde.

8.2 Euler vinklerne

I det følgende vil vi forudsætte, at alle vektorkoordinaterne har samme dimension, så der kan foretages uindskrænkede drejninger i vektorrummet. Vi ser først på tilfældet $d = 2$. Hvis det nye koordinatsystems x-akse er drejet vinklen $-\phi$ i forhold til den gamle x-akse, så vil den hertil svarende fysiske drejning dreje enhver vektor vinklen $+\phi$, og matricen U.. i (145) og (148), som udfører denne drejning, er givet ved:

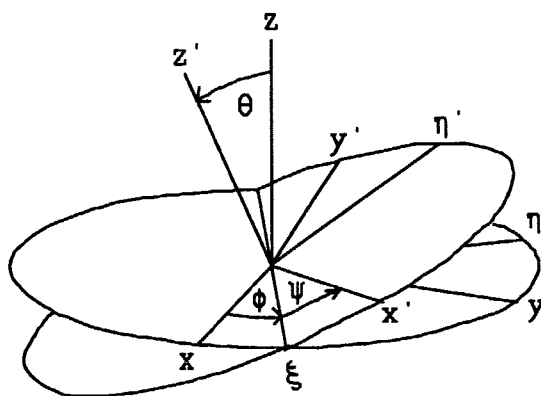
$$U(\phi) .. = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (153)$$

Hertil svarer følgende retikulation, hvor vi for kortheds skyld skriver c for $\cos\phi$ og s for $\sin\phi$ og nøjes med at angive ϕ i drejnings-ikonet:



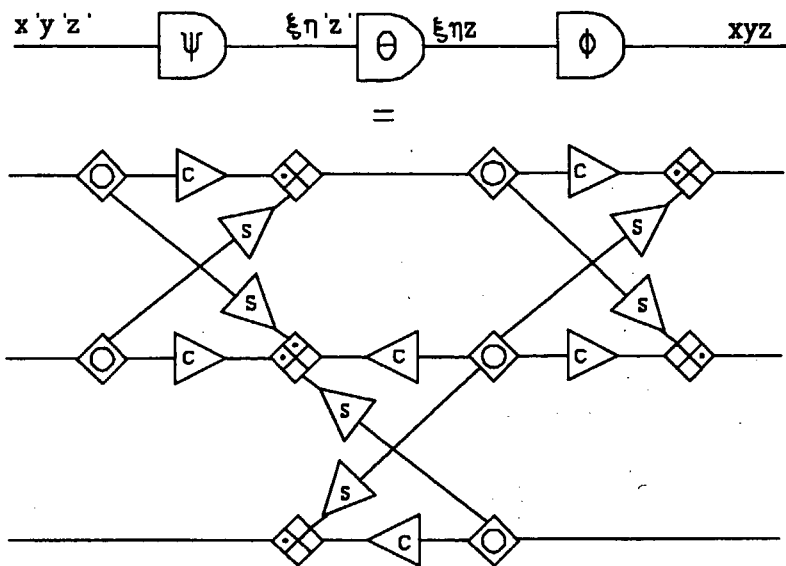
Figur 64 Drejning vinklen ϕ i to dimensioner.

I tre dimensioner angives drejninger af koordinatsystemet ofte ved de tre *Euler vinkler*, ϕ , θ og ψ . Disse definerer drejningen i tre tempi, som vist på figuren nedenfor. Først drejes vinklen ϕ om z -aksen, så xyz går over i $\xi\eta z$. Dernæst drejes vinklen θ om ξ -aksen, så $\xi\eta z$ går over i $\xi\eta'z'$, og endelig drejes vinklen ψ om z' -aksen, så $\xi\eta'z'$ går over i $x'y'z'$.



Figur 65 Euler vinklerne.

Når vi retikulerer disse drejninger af koordinatsystemet ved brug af figur 64, må vi huske på, at denne opskrift beskriver den fysiske drejning $+\phi$, når vi går fra primærsiden til sekundærsiden eller en drejning af koordinatsystemet på $+\phi$, når vi går fra sekundærsiden til primærsiden. "Det gamle koordinatsystem" er altså på sekundærsiden af koordinatskiftikonet. Hvis vi vender ikonet svarer det til at skifte fortegn på drejningsvinklen. Vi kommer da frem til nedenstående retikulation af Euler drejningerne, hvor vi har vendt den midterste drejningstransformer omvendt af de to yderste for at reducere antallet af samlere.



Figur 66 Drejning ved Euler vinkler.

8.3 Generatorer for drejning

De todimensionale drejningsmatricer $U(\phi)_{..}$ i (153) udgør en såkaldt *Lie gruppe*, som er endimensional og parametriseret ved vinklen ϕ . Gruppen er *kommutativ*, og der gælder:

$$U(\phi_2)_{..} U(\phi_1)_{..} = U(\phi_1 + \phi_2)_{..} \tag{154}$$

Ser vi på en *infinitesimal* drejning vinklen $d\phi$, har vi til første orden i $d\phi$:

$$U(d\phi)_{..} = \begin{pmatrix} 1 & -d\phi \\ d\phi & 1 \end{pmatrix} = 1 + d\phi \cdot I_z \tag{155}$$

hvor vi for nemheds skyld skriver 1 i stedet for symbolet $\delta_{..}$ for enhedstensoren, og hvor I_z er den såkaldte *generator for drejning om z-aksen* (der er ganske vist ikke nogen z-akse i det todimensionale koordinatsystem, men vi skal snart videre til tre dimensioner).

$$I_{z..} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{156}$$

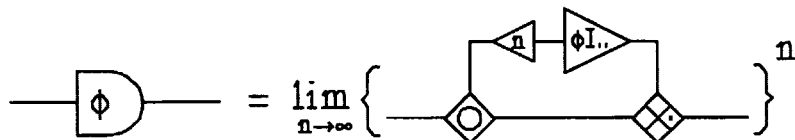
Ganges generatoren $I_{z..}$ med sig selv, fås $(I_{z..})^2 = -1$ (eller $-\delta_{..}$). Det betyder, at alle lige potenser af $I_{z..}$ bliver + eller - enhedsmatricen, medens alle de ulige potenser bliver + eller - $I_{z..}$ selv. Vi får da:

$$\exp(\phi I_{z..}).. \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi I_{z..})^n}{n!} = \cos\phi \cdot \delta_{..} + \sin\phi \cdot I_{z..} = U(\phi).. \tag{157}$$

Det er i denne forstand, at $I_{z..}$ kaldes generator for Lie gruppen af drejninger om z-aksen. (NB: prikkerne på en tensor inde i et funktionsudtryk er "lukkede"). En anden, mere anskuelig, belysning af begrebet generator fås af formelen

$$\exp(\phi I_{z..}).. = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\phi}{n} I_{z..} \right)^n \tag{158}$$

som viser, at drejnings- eller koordinatskift-ikonet ϕ kan betragtes som en uendelig *kaskadekobling* af transformere, der hver især kun afviger infinitesimalt fra enhedstransformeren.



Figur 67 Kaskadekoblingsprincippet for generatoren.

I tre dimensioner kan vi tilsvarende indføre generatoren for drejninger om hhv. x-aksen, y-aksen og z-aksen:

$$I_{x..} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; I_{y..} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; I_{z..} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{159}$$

Drejning af koordinatsystemet udgør så en tredimensional Lie gruppe, der f.x. kan parametriseres ved Euler vinklerne, jfr. figur 66:

$$\begin{aligned}
 U(\phi, \theta, \psi) &= \exp(\phi I_z) \exp(\theta I_x) \exp(\psi I_z) = \\
 &\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \quad (160) \\
 &\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Den tredimensionale drejningsgruppe er ikke kommutativ. De tre generatorer adlyder kommutator-relationerne:

$$[I_x, I_y] = I_z \quad ; \quad [I_z, I_x] = I_y \quad ; \quad [I_y, I_z] = I_x \quad (161)$$

Vi benytter her de firkantede paranteser, ligesom i kvantemekanikken, til at betegne *kommutatoren* af to størrelser: $[A, B] = AB - BA$, og ikke som tidligere til at betegne Poisson parantesen. Generatorerne for drejningsgruppen er i øvrigt i kvantemekanikken knyttet til de tre impulsmoment-operatorer.

8.4 Eulers og Chasles teorem

Enhver matrix i den tredimensionale drejningsgruppe svarer ifølge *Eulers teorem* til en drejning u om en bestemt enhedsvektor \bar{n} . Teoremet følger af, at *egenværdierne* for d dimensionale unitære drejningsmatrixer må have følgende egenskaber:

- 1) Der er d egenværdier, som er komplekse tal med numerisk værdi 1.
- 2) Når matrixerne er reelle, er egenværdierne enten reelle eller parvist komplekskonjugerede.
- 3) Produktet af egenværdierne er lig med matrixens determinant, som for en unitær, reel matrix enten er +1 eller -1.
- 4) En drejningsmatrix må have determinanten 1, da den kan frembringes kontinuert ud fra enhedsmatrixen. Dvs. produktet af egenværdierne for en drejningsmatrix må være +1.

For de tredimensionale drejningsmatricer må der være én reel egen værdi, λ_1 , og to komplekst konjugerede λ_2 og λ_3 , begge med den numeriske værdi 1. Dvs. produktet $\lambda_2\lambda_3$ har værdien 1, og derfor må λ_1 også være 1.

Betragter vi de tredimensionale drejningsmatricer som udtryk for en fysisk drejning (ikke et koordinatskift) er der altså én ikke-udartet egen værdi +1 og derfor et éndimensionalt underrum af *egenvektorer*, som går over i sig selv ved drejningen. Dette underrum fastlægger retningen af enhedsvektoren \bar{n} .

Der skal to vinkler til at fastlægge retningen af \bar{n} :

$$\bar{n} = (\sin v \cos w, \sin v \sin w, \cos w) \quad (162)$$

Generatoren for drejning om \bar{n} er:

$$I_{v,w} = n_x I_x + n_y I_y + n_z I_z = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \quad (163)$$

og drejningen vinklen u om \bar{n} kan da udtrykkes som

$$\exp(u I_{v,w}) = \begin{pmatrix} n_x^2 + (n_y^2 + n_z^2)c & n_x n_y (1-c) - n_z s & n_z n_x (1-c) + n_y s \\ n_x n_y (1-c) + n_z s & n_y^2 + (n_z^2 + n_x^2)c & n_y n_z (1-c) - n_x s \\ n_z n_x (1-c) - n_y s & n_y n_z (1-c) + n_x s & n_z^2 + (n_x^2 + n_y^2)c \end{pmatrix} \quad (164)$$

hvor $c = \cos u$ og $s = \sin u$. De tre vinkler u , v og w er en parametrisering af den tredimensionale drejningsgruppe, som i princippet er lige så god som Euler vinklerne, men sværere at anvende i praksis. Omregning fra det ene til det andet sæt parametre er heller ikke let at gennemføre i praksis.

Betydningen af Eulers teorem for de stive legemers mekanik ligger ikke så meget i det resulterende udtryk (164) for en endelig drejning, men snarere i ideen om, at en hvilken som helst *infinitesimal* bevægelse af legemet i forhold til et fast begyndelsespunkt i legemet, f.x. massemidtpunktet eller et fastgjort omdrejningspunkt, kan udtrykkes ved hjælp af generatoren (163). Hvis et punkt i et fast legeme med stedvektor \bar{r} i forhold til det faste punkt, undergår en infinitesimal flytning til et nyt sted \bar{r}' , så kan denne flytning karakteriseres ved en enhedsvektor \bar{n} og en infinitesimal vinkel du svarende til (155):

$$\bar{r}' = (1 + du \cdot I_{\bar{n}}) \bar{r} \quad (165)$$

hvor vi nu har anvendt traditionel vektornotation med \bar{n} givet ved matricen (163). Den infinitesimale ændring $d\bar{r} = \bar{r}' - \bar{r}$ er så givet ved

$$d\bar{r} = du \cdot \bar{n} \times \bar{r} \quad (166)$$

Den relative hastighed af punktet \bar{r} i forhold til det faste punkt kan så udtrykkes ved vinkelhastighedsvektoren $\bar{\omega} = (du/dt)\bar{n}$:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (167)$$

Dvs. den øjeblikkelige bevægelse i forhold til det faste punkt i legemet er en rotation med vinkelhastighedsvektoren $\bar{\omega}$. Den samlede bevægelse er derfor en sum af en rotation og en translation af det faste punkt. Denne sætning kaldes *Chasles teorem*.

8.5 Coriolis- og centrifugalkraft

Lad os afrunde denne diskussion af rotation ved at se på bevægelse i et system med en fast rotation med vinkelhastighed $\bar{\omega}$. Hvis vi sammenligner ændringshastighederne af en vektor \bar{s} i laboratoriesystemet (L) og det roterende system (R), har vi:

$$\left(\frac{d\bar{s}}{dt}\right)_L = \left(\frac{d\bar{s}}{dt}\right)_R + \bar{\omega} \times \bar{s} \quad (168)$$

Lader vi nu \bar{s} være hastigheden af en partikel med massen m i forhold til laboratoriesystemet:

$$\bar{v}_L = \bar{v}_R + \bar{\omega} \times \bar{r}_R \quad (169)$$

finder vi

$$\left(\frac{d\bar{v}_L}{dt}\right)_L = \left(\frac{d\bar{v}_L}{dt}\right)_R + \bar{\omega} \times \bar{v}_L = \left(\frac{d\bar{v}_R}{dt}\right)_R + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_R + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_R) \quad (170)$$

Vi ønsker nu at diskutere bevægelsen i forhold til det roterende system og udelader derfor subskriptet R. Da den egentlige kraft på partiklen er givet ved masse gange acceleration i forhold til laboratoriesystemet, vil der foruden denne kraft optræde fiktive kræfter i det roterende system, så den samlede effektive kraft på partiklen ser ud til at være givet ved:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + 2m \vec{v} \times \vec{\omega} + m (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} \quad (171)$$

Her er andet led *Coriolis kraften* og tredje led *centrifugalkraften*.

Der er mange måder, hvorpå man kan retikulere bevægelsen i forhold til det roterende system, men de er ikke alle lige tilfredsstillende. Først kan vi observere, at udtrykket for Coriolis kraften ligner den magnetiske del af Lorentz kraften (116) på en partikel med ladning q . Hvis en ladet partikel er påvirket af et homogent magnetfelt og i øvrigt er bundet til et kraftcentrum, så vil den magnetiske kraft ophæves af Coriolis kraften i et system, der roterer med vinkelhastigheden

$$\vec{\omega}_L = - \frac{q}{2m} \vec{B} \quad (172)$$

I det roterende system vil der ganske vist være en centrifugalkraft, som ikke har noget elektromagnetisk modstykke, men denne vil være af anden orden i magnetfeltet og i øvrigt holdes i skak af bindingen til kraftcentret. For svage magnetfelter vil det derfor gælde, at situationen i det system, der roterer med *Larmor frekvensen* $\vec{\omega}_L$ er den samme, som den var i laboratoriesystemet, inden magnetfeltet blev lagt på. Dette er *Larmors teorem*.

Ækvivalensen mellem Coriolis- og Lorentz kraften muliggør en Lagrange'sk eller Hamiltonsk beskrivelse af partiklens bevægelse i det roterende system, analog til (119) og (122), men det er utilfredsstillende at få centrifugalkraften ind i billedet som en konservativ kraft, der afledes af et potential, så vi vil angive en retikulation, der mere klart viser, hvad der foregår.

Hvis partiklen på en eller anden måde (f.x. ved gnidning) vekselvirker med det roterende system, så skal den maskine, der holder rotationen i gang, udføre et arbejde, for at vinkelhastigheden $\vec{\omega}$ kan holdes konstant. Vi vil derfor indføre en strømkilde $\vec{\omega}$ til at skildre virkningen af drevet. Det arbejde, som drevet skal udføre, når partiklen flytter sig stykket $d\vec{r}$ i det roterende system, er:

$$\left. \begin{aligned} dw_d &= d \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_L^2 \right) = m (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{p}' \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r}) = (\vec{p}' \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r} \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

hvor vi har indført vektoren $\vec{p}' = m(\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r})$, som er partiklens impuls i forhold til *laboratoriesystemet*, omregnet til det roterende system. Hvis partiklen ligger stille i det roterende system, er \vec{p}' altså konstant, men \vec{p}_L , impulsen i laboratoriesystemet, er ikke konstant. Drevet skal altså tilføre energi med hastigheden

$$\frac{dw_d}{dt} = (\vec{p}' \times \vec{\omega}) \cdot \vec{v} \quad (174)$$

Dette svarer til, at strømkilden $\vec{\omega}$ virker gennem en gyrator, der på sekundærsiden har hastigheden \vec{v} som inputstrøm. Spændingen i sekundærporten er så

$$\vec{p}' \times \vec{\omega} = H.. \omega. \quad (175)$$

hvor $H..$ er gyratorens tensor, som altså må være

$$H.. = \begin{pmatrix} 0 & -p'_z & p'_y \\ p'_z & 0 & -p'_x \\ -p'_y & p'_x & 0 \end{pmatrix} \quad (176)$$

Det er altså en antihermitesk gyrator, dvs. den er ikonsymmetrisk, jfr. figur 57.

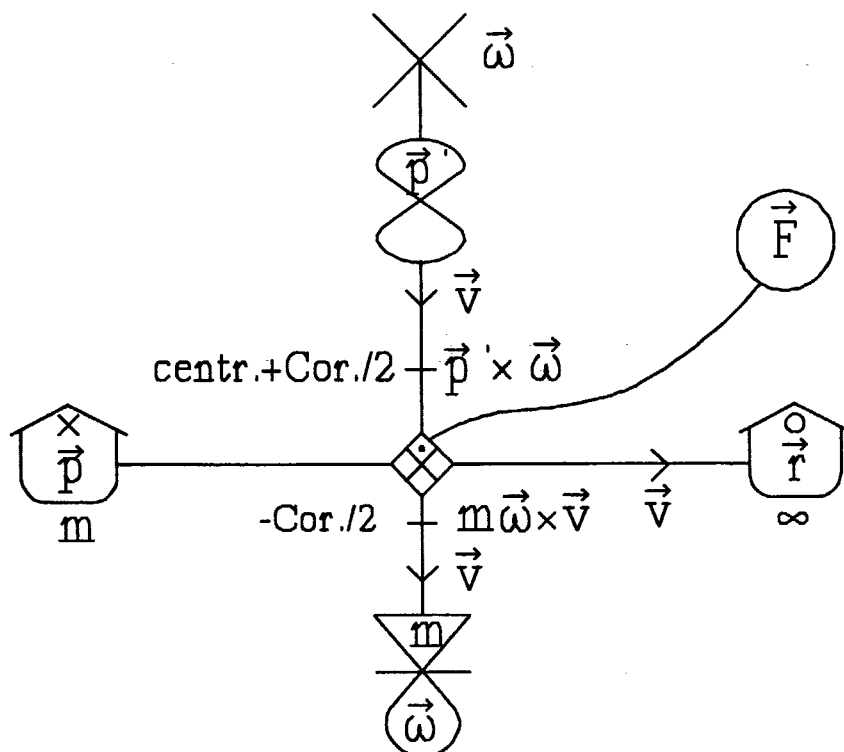
Outputspændingen (175) fra denne gyrator er:

$$\vec{p}' \times \vec{\omega} = m (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{\omega} = m \vec{v} \times \vec{\omega} + m (\vec{\omega} \times \vec{r}') \times \vec{\omega} \quad (177)$$

dvs. den gør rede for *halvdelen* af Coriolis kraften og *hele* centrifugalkraften. Den anden halvdel af Coriolis kraften leveres af en gyrolæk med tensoren

$$C.. = m \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (178)$$

I stedet for at angive tensorerne i den symmetriske gyrator og gyrolækken på figur 68 vil vi angive de to vektorer \vec{p}' og $m\vec{\omega}$, som de ganger inputstrømmen vektorielt med. I tre dimensioner vil der altid være en sådan vektor forbundet med disse to ikoner, idet det kan vises, at når deres antihermiteske matrix transformerer som en tensor ved koordinatskift, jfr. (149), så vil de tre matricelementer på pladserne 32, 13 og 21 transformere som x-, y- og z-koordinaten af en vektor, altså ifølge (148). Hvis man udvider koordinatskiftene til sådanne, der ændrer systemets "håndethed", dvs. unitære transformationer med determinanten -1 (i stedet for +1, som alle transformationer, der kan frembringes kontinuert af enhedsmatricen, har) skelner man mellem *polære* eller *egentlige* vektorer, der bevares ved en sådan transformation, og *axiale* eller *pseudo* vektorer, der vendes. Her er \vec{p}' polær og $\vec{\omega}$ axial. Vektorproduktet af to polære er axiale, men hvis den ene faktor er axial, er produktet polært.



Figur 68 Partikel i roterende system.

Forklaringen på strømkilden, at den beskriver det arbejde, som drevet skal udføre for at fastholde vinkelhastigheden, gælder kun, når partiklen kan fastholdes og styres rundt på en kontrolleret måde i det roterende system. Ser vi på en *fri* partikel, som slet ikke vekselvirker med det roterende system (måske er dette system en fiktiv konstruktion), skal drevet faktisk ikke udføre noget arbejde. Alligevel siger modellen på figur 68, at der fra kilden flyder energi ind i systemet med en hastighed, som er skalarproduktet af centrifugalkraften og hastigheden af partiklen. Dette fiktive arbejde bliver til bevægelsesenergi af partiklen i det roterende system, men hvis man ikke kan bremse partiklen ned i forhold til dette system, kan man ikke få fat i denne energi, så vi kan forestille os, at den "flyder tilbage til kilden", som derfor ikke i realiteten skal udføre noget arbejde. Hvis man i det roterende system kan få fat i partiklen og bremse den ned, kan man omdanne dens bevægelsesenergi til noget andet, f.x. til varme, og så kommer kilden til at levere alt det arbejde i virkeligheden, som har været fiktivt under partiklens frie bevægelse. De kræfter i det roterende system, som bruges til nedbremsning af partiklen giver anledning til et kraftmoment på drevet, som derfor skal udføre et arbejde for at fastholde vinkelhastigheden.

8.6 Deformationstensoren

For *stive legemer* er der ifølge Chasles teorem kun to mulige bevægelsesformer, nemlig translation og rotation. I virkelighedens verden er der imidlertid ingen absolut stive legemer, for sådanne ville jo kunne overføre signaler med uendelig udbredeshastighed, og det er ifølge relativitetsteorien umuligt, da ingen signaler kan udbrede sig hurtigere end lyset. For udstrakte legemer, der her skal beskrives som kontinuerte, vil forandringer i bevægelsestilstanden give anledning til deformationer, som skaber elastiske spændinger. Forstyrrelser kan så fra et lokalt udgangspunkt brede sig via lydbølger til andre dele af stoffet. Vi skal kort se på, hvordan deformationer og spændinger beskrives med vektorbånd og tensorer.

Vi vil nøjes med at se på *små deformationer* af elastiske legemer. Vi kan frit vælge et punkt O som et fast punkt i stoffet og begyndelsespunkt for vores koordinatsystem. Et punkt med stedvektor \bar{r} i ligevægt kan så antages at blive forskudt til et nyt punkt $\bar{r}' = \bar{r} + \bar{u}$, hvor forskydningsvektoren \bar{u} er lille i forhold til \bar{r} og lineær i \bar{r} . Med den nye tensornotation, hvor vi skriver r . i stedet for \bar{r} , har vi:

$$r'. = A..r. = (\delta.. + D..) r. ; u. = D..r. \quad (179)$$

At forskydningen er lille, betyder, at $A..$ kun afviger lidt fra enhedstensoren $\delta..$. *Determinanten* af $A..$, $\det(A..)$ er derfor tæt på 1, og dens afvigelse fra 1 behøver vi kun udtrykke til første orden i elementerne af $D..$. Da $\det(A..)$ er en sum af en række produkter, der hver for sig indeholder 0 eller mindst to faktorer uden for diagonalen af $A..$ (altså fra $D..$), behøver vi kun medtage det ene led, hvor alle faktorerne er fra diagonalen og udvikle det til første orden i diagonalelementerne fra $D..$, så vi får:

$$\det(A..) \approx \prod_{k=1}^d (1 + D_{kk}) \approx 1 + \sum_{k=1}^d D_{kk} = 1 + \text{Tr}(D..) \quad (180)$$

Grundvektorerne for koordinatsystemet, n^k . går ved transformationen over i

$$n'^k. = A.._k = n^k. + D.._k \quad (181)$$

og rumfanget af enhedscellen, udspændt af de forskudte grundvektorer, er givet ved determinanten (180), så sporet af $D..$, $\text{Tr}(D..)$, er den relative rumfangsforøgelse.

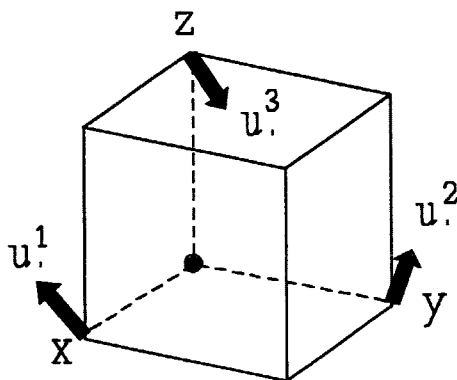
Hvis $D..$ har en antisymmetrisk del, er det en rotation, jfr. (163) og (167), og da dette emne allerede er behandlet, vil vi se bort fra den antisymmetriske del. *Deformationstensoren D er altså symmetrisk.*

For $d=3$ skal der 9 matricielementer til for at karakterisere en tensor, eller mere alment, 9 parametre. De tre sorteres vi fra, fordi de svarer til en rotation. Det er de tre koordinater af *den axiale vektor*, som bestemmer de antisymmetriske tensorer i tre dimensioner. Den resterende del, deformationstensoren, har 6 parametre. Herfra kan vi udskille en *skalar*, den relative rumfangsforøgelse, *bulk* delen, som er sporet af deformationstensoren. Endelig er der den resterende *shear* del, bestemt ved de 5 parametre for symmetriske, sporeløse tensorer.

8.7 Spændingstensoren

Lad os betragte en terning med kantlængder L i retning af de tre koordinataksler. Forskydningen af den flade, som er for enden af den k 'te koordinatakse er så ifølge (181):

$$u^k = D_{,k}L \quad (182)$$



Figur 69 Deformation af terning.

For at udføre disse tre forskydninger skal vi påvirke hver af de tre sideflader med en kraft, der er proportional med fladens areal L^2 . Vi kan sammenfatte de 3 koordinater for de tre kræfter i en *spændingstensor* $S_{..}$, således at kraften på fladen for enden af den k 'te koordinatvektor er:

$$F^k = S_{..}n^k.L^2 = S_{,k}L^2 \quad (183)$$

Hvis terningen er indstøbt i kontinuert stof, er (183) den kraft, som stoffet på ydersiden af fladen påvirker stoffet på indersiden af fladen med. Nu forestiller vi os i stedet, at disse kræfter stammer fra ydre kilder. Hvis forskydningerne ændres infinitesimalt, skal kilderne levere arbejdet:

$$d\omega = F^k \cdot du^k = S_{\cdot k} dD_{\cdot k} L^3 = S_{ik} dD_{ik} L^3 \quad (184)$$

Vi ser altså, at arbejdet pr. rumfangsenhed er givet ved et dobbelt kontraheret produkt af spændingstensoren og differentialet af deformationstensoren. Nu er $D_{\cdot\cdot}$ jo symmetrisk og har kun 6 forskellige elementer, dvs. der er kun 6 forskellige arbejdsporte, hvor igennem omverdenen kan vekselvirke med systemet. Der kan derfor også kun være 6 forskellige komponenter af spændingstensoren, svarende til disse 6 arbejdsporte, og derfor er spændingstensoren også symmetrisk. Det siges ofte, at spændingstensorens symmetri kan vises ud fra impulsmomentsætningen, og det er også rigtigt, men beviset er kompliceret og ikke nødvendigt, da symmetrien er en følge af den almene energibåndsløik.

8.8 Bulk og shear moduler

Det dobbelte skalarprodukt i (184) viser, at rummet af symmetriske tensorer af rang 2 kan opfattes som et vektorrum (rang 1) med 6 dimensioner. Ser vi på, hvordan disse 6 dimensionale vektorer transformerer ved drejninger i det tredimensionale rum, finder vi, at der er et 1-dimensionalt *invariant* underrum, *skalarerne*, som er *sporet af tensorerne*. De resterende, *spørløse* tensorer udgør et femdimensionalt vektorrum, som transformerer ved drejninger. Hvis vi kalder sporet af $D_{\cdot\cdot}$ for ρ , kan vi skrive:

$$D_{\cdot\cdot} = D'_{\cdot\cdot} + \frac{1}{3}\rho\delta_{\cdot\cdot} \quad (185)$$

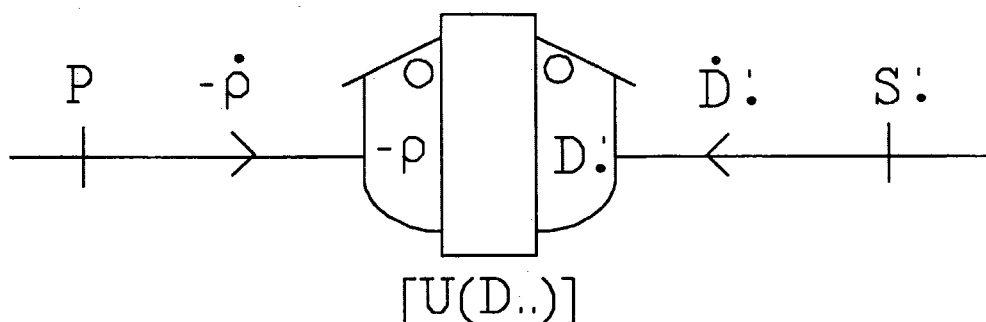
hvor $D'_{\cdot\cdot}$ er spørløs. Spændingstensoren kan tilsvarende skrives:

$$S_{\cdot\cdot} = S'_{\cdot\cdot} - P\delta_{\cdot\cdot} \quad (186)$$

hvor $S'_{\cdot\cdot}$ er spørløs, og hvor P er *trykket*. Arbejdet (184) på en enhedsterning er så:

$$\left. \begin{aligned} d\omega &= (S'_{ik} - P\delta_{ik}) d(D'_{ik} + \frac{1}{3}\rho\delta_{ik}) \\ &= S'_{ik} dD'_{ik} - P d\rho = S'_{\cdot\cdot} dD'_{\cdot\cdot} - P d\rho \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

idet vi opdeler de 6 arbejdsporte i et skalarbånd ($P d\rho$ leddet) og et femdimensionalt vektorbånd.



Figur 70 Opdeling af deformationsporte i skalart bånd og femdimensionalt vektorbånd.

Grundvektorer for det femdimensionale vektorrum af sporløse, symmetriske matricer skal være normerede og ortogonale i henhold til det dobbelte skalarprodukt. Vi kan vælge følgende:

$$\sigma^1. = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2. = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3. = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (188)$$

$$\sigma^4. = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^5. = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Alle sporløse, symmetriske tensorer, og hermed alle *shear* deformationer og spændinger, kan på entydig måde skrives som en superposition af disse fem ortonormerede grundvektorer.

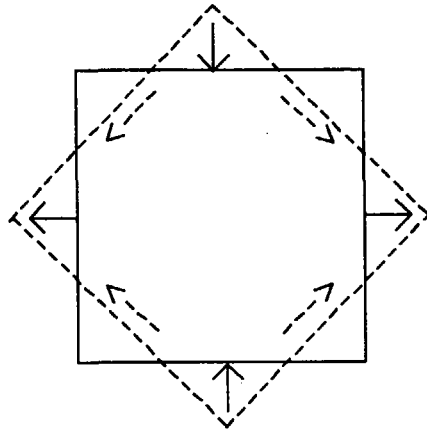
Spændingstensorens 6 komponenter må for små deformationer være lineære funktioner af de 6 deformationer. En lineær sammenhæng må i almindelighed formidles af en matrix med 36 elementer, men eksistensen af en energifunktion $U(D..)$, som spændingerne kan afledes af, sikrer, at denne matrix er *symmetrisk* (hermitesk), så der højst kan være 21 forskellige *stivheds-koefficienter* eller *elastiske moduler* (jfr. (128)). For flydende stoffer vil spændingerne også afhænge af *deformationshastighederne*, hvilket kan skildres ved at koble et *lækfelt af viskositeter* (også symmetrisk) til lagringsfeltet på figur 70. Alternativt kan man sige, at viskositeterne giver anledning til frekvensafhængighed af elasticitetsmodulet, men det vil vi ikke komme nærmere ind på her.

For *krystaller* kan bestemte symmetrier føre til en væsentlig reduktion i antallet af uafhængige moduler. Således kan det vises, at *kubiske* krystaller, som har flest symmetrier, kun har tre forskellige. Alligevel har disse krystaller jo bestemte symmetriretninger og er derfor mindre symmetriske end *isotrope* stoffer, der udviser fuld symmetri over for enhver drejning. For isotrope stoffer er der kun to forskellige moduler, som vi nu skal se på.

For *isotrope stoffer* gælder *Curie-Prigogine princippet*, som siger, at der ikke kan være nogen kobling mellem skalare størrelser og vektorstørrelser, eller mere alment, mellem tensorfelter af forskellig rang. Det må betyde, at vi i første omgang kan splitte lageret på figur 70 op i et skalart lager og et vektorlager med uafhængige energifunktioner. For det skalare lager har vi en *bulk modulus*:

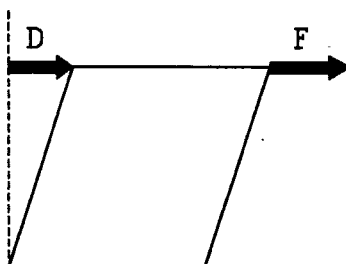
$$K = - \frac{dP}{dp} \quad (189)$$

Desuden må det gælde, at vektorlageret er karakteriseret ved et enkelt, skalart modul G' . Det er jo ret klart, at de tre grundvektorer σ^1 , σ^2 og σ^3 i (188) er ligestillede med hensyn til rummets retninger, men hvad med σ^4 og σ^5 ? Ved rumlige drejninger vil disse sidste to faktisk blandes med de første tre, f.x. vil en drejning på 45° om z -aksen føre σ^4 over i σ^3 , hvilket illustreres af nedenstående figur:



Figur 71 Ændring af grundvektorer for shear deformation ved drejning.

Modulet G' for vektorlageret er dog ikke det samme som det, man normalt kalder shear modulet G . Årsagen er, at G defineres som forholdet mellem kraft og deformation på enhedsterningens sideflade, når deformationen er som vist på figur 72:



Figur 72 Definition af shear modulet G .

Deformationen i figur 72 er beskrevet ved tensoren

$$\begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (190)$$

men denne er jo ikke symmetrisk, så for at finde deformationstensoren skal vi fratække dens antisymmetriske del. Vi får så:

$$D_{..} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{D}{2} & 0 \\ \frac{D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{D}{\sqrt{2}} \sigma^3. \quad ; \quad S_{..} = G' D_{..} = \begin{pmatrix} 0 & F & 0 \\ F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (191)$$

og hermed:

$$F = G' \frac{D}{2} = G D \Rightarrow G' = 2G \quad (192)$$

Modulet for shear vektorlageret, G' , er altså det dobbelte af det normalt definerede shear modul G .

8.9 Youngs modul og Poissons forhold

Selv om der kun er de to uafhængige elastiske moduler K og G for et isotropt stof, ser man ofte andre størrelser omtalt. Vi skal her se på *Youngs modul*, E , som er et elastisk modul, og *Poissons forhold*, ν , som er dimensionsløst.

Antag, at vi *trækker* i stoffet i z -retningen, så spændingstensoren er

$$S_{..} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \quad (193)$$

Trykket og den relative rumfangsforøgelse er så:

$$P = -\frac{1}{3} \text{Tr} (S_{..}) = -\frac{s}{3} ; \quad \rho = -\frac{P}{K} = \frac{s}{3K} \quad (194)$$

Youngs modul er defineret som forholdet mellem trækspændingen s og den relative strækning, Δ , i z -retningen. For at finde Δ skal vi bestemme deformationstensoren, hvor Δ er zz -komponenten, og derfor må vi udnytte proportionaliteten mellem den sporløse spændingstensor og den sporløse deformations tensor, givet ved modulet $G' = 2G$.

Først finder vi den sporløse spændingstensor af (193):

$$S'_{..} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}s & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}s \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{3}} s \sigma^5. \quad (195)$$

Så den sporløse deformationstensor er givet ved

$$D'_{..} = \frac{1}{G'} S'_{..} = \begin{pmatrix} -\frac{s}{3G'} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s}{3G'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2s}{3G'} \end{pmatrix} \quad (196)$$

Selve deformationstensoren findes så ved at lægge $\rho/3$ til i diagonalen (jfr. (185)), hvor ρ er givet ved (194):

$$D_{..} = \begin{pmatrix} \frac{s}{9K} - \frac{s}{3G'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{9K} - \frac{s}{3G'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{9K} + \frac{2s}{3G'} \end{pmatrix} \quad (197)$$

Vi finder da, at Youngs modul er:

$$E \doteq \frac{s}{D_{zz}} = \left(\frac{1}{9K} + \frac{2}{3G'} \right)^{-1} = \frac{3G}{1 + \frac{G}{3K}} \quad (198)$$

Samtidig med, at materialet strækkes i z-retningen, vil det trække sig sammen i x- og y-retningerne. Forholdet mellem sammentrækningen og strækningen definerer Poissons forhold:

$$-v \doteq \frac{D_{xx}}{D_{zz}} = E \frac{D_{xx}}{s} = E \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} \right) \quad (199)$$

Ved at sammenholde (198) og (199) finder vi følgende relationer:

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{3K - 2G}{3K + G} ; E = 2G (1 + v) \quad (200)$$

Poisson forholdet v er altid mindre end $1/2$. Grænseværdien $1/2$ svarer til det fuldstændigt usammentrykkelige stof ($K=\infty$).

8.10 Lydbølger

Ligesom der er to forskellige elastiske moduler, er der to former for lydudbredelse: transversal og longitudinal. De transversale bølger er ren shear bevægelse med hastigheden

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}} \quad (201)$$

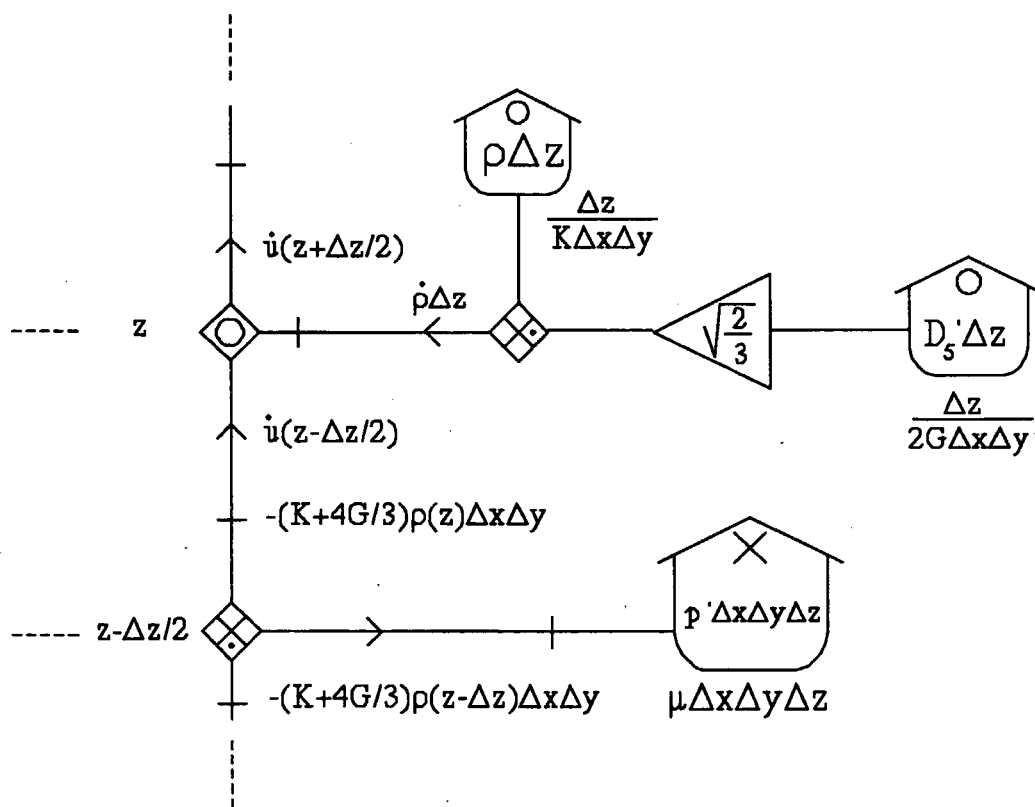
hvor μ er massefylden.

De longitudinale bølger er derimod ikke rent skalare rumfangsændringer, for hvis forskydningerne kun er i bølgens retning, dvs. hvis kun zz-komponenten af deformationsændringen er forskellig fra nul, når bølgen går i z-retningen, så har deformationstensen en komponent både som skalar og som et shear element, nærmere betegnet σ^s . Hastigheden af de longitudinale bølger er derfor bestemt ved en kombination af bulk og shear modulet. Man finder:

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\mu} \left(K + \frac{4}{3}G \right)} \quad (202)$$

Den longitudinale hastighed er derfor altid større end den transversale.

Nedenfor vises, hvordan den partielle differentiaalligning for longitudinal lydudbredelse i z-retningen kan retikuleres med en diskret celle-struktur. Cellen $\Delta x \Delta y \Delta z$ repeteres i z-retningen, og man lader Δz gå mod nul.



Figur 73 Celle-retikulation af longitudinal lydbølge i z-retning.

Kapitel 9

Stive legemers dynamik

9.1 Inertimoment-tensoren

Den i foregående kapitel gennemgåede teori for drejninger i det tredimensionale rum er grundlaget for de stive legemers *kinematik*, for disse transformationer er de eneste, som lader alle afstande være uændrede, hvilket jo netop udgør den totale mængde af constraints på bevægelsen af massepunkterne i et stift legeme. Et stift legeme er et grænsetilfælde er et elastisk stof, når stivhedsmodulerne K og G går mod uendelig, og, som påpeget tidligere er denne grænse uforenelig med relativitetsteorien, idet den fører til uendelige lydhastigheder (jfr. (201) og (202)). De faktiske lydhastigheder i selv de stiveste legemer er dog altid mindre end en tiendedel promille af lyshastigheden i vacuum, så den praktiske grænse for anvendeligheden af idealisationen "et stift legeme" sættes ikke af relativitetsteorien. Hvis et "stift" legeme har en udstrækning L og en karakteristisk tid T for ændringer af bevægelsestilstanden, så kan det kun opfattes som stift, når L/T er væsentligt mindre end den mindste af lydhastighederne.

Bevægelsen af et stift legeme er ifølge Chasles teorem en sum af en translation af et fast punkt i legemet og en rotation om dette punkt. Hvilket punkt i legemet, der skal udnævnes til "det faste", afhænger af omstændighederne. Ofte vil det være *massemidtpunktet*, hvis stedvektor er den vægtede middelværdi af de enkelte massedeles stedvektorer

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (203)$$

hvor M er den samlede masse. Valget af dette punkt som reference har flere fordele. Således kan legemets samlede impuls beskrives som impulsen af en partikel med massen M i massemidtpunktet:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} \quad (204)$$

Det samlede impulsmoment kan udtrykkes som summen af impulsmomentet af denne fiktive partikel og impulsmomentet af den relative bevægelse:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{R} + \vec{r}_i) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i) = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}'_i \quad (205)$$

Det ses heraf, at impulsmomentet i et koordinatsystem, der bevæger sig med samme hastighed som massemidtpunktet, vil være uafhængig af det valgte begyndelsespunkt.

Endelig gælder *Königs sætning*, der siger, at den samlede kinetiske energi er summen af massemidtpunktets translatoriske energi og den relative kinetiske energi i et system, der følger med massemidtpunktet:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (206)$$

Disse sætninger, (204)-(206) gælder for et vilkårligt partikelsystem og forudsætter intet om stivheds-constraints.

Hvis et stift legeme har et punkt, som er fastgjort i forhold til laboratoriesystemet, eller som er pålagt et simpelt hastigheds-constraint (f.x. berøringspunkt ved rulning) vil det imidlertid være mere naturligt at benytte dette punkt som referencepunkt for den relative bevægelse.

Bevægelsen af et stift legeme har højst 6 frihedsgrader, nemlig de tre koordinater for referencepunktet (f.x. massemidtpunktet) i forhold til laboratoriesystemet K_L , og desuden tre koordinater, der beskriver legemets orientering i et koordinatsystem K_R , der translatorisk følger med referencepunktet. Disse sidste tre koordinater beskriver så en drejning af et til legemet fast knyttet koordinatsystem K_B i forhold til K_R og kan f.x. være de tre Euler vinkler (figur 65), der fører K_R over i K_B . Hvis bevægelsen er pålagt hastigheds-constraints ud over de indre stivheds-constraints, f.x. et fastgjort punkt eller rulning på en flade, vil antallet af generaliserede koordinater være mindre end 6, hvis der er tale om holonome constraints.

Den øjeblikkelige bevægelse af legemet i forhold til K_R kan ifølge (167) beskrives som en rotation med den øjeblikkelige vinkelhastighedsvektor $\vec{\omega}$. Impulsmomentet i forhold til K_R er så:

$$\vec{L}_R = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \quad (207)$$

Med brug af tensornotationen kan vi skrive:

$$L_{R.} = I ..\omega. \quad \text{hvor} \quad I .. = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i^2 \delta_{..} - r_i . \otimes r_i .] \quad (208)$$

hvor *inertimoment-tensoren* $I ..$ er en symmetrisk 2. rangs tensor.

Hvis vi bruger massemidtpunktet som referencepunkt, kan den relative kinetiske energi altså udtrykkes ved et vektor x -lager som på figur 53, hvor x -level variabelen er impulsmomentvektoren $L_{R.}$, hvor input spændingen er kraftmomentet i massemidtpunkts-systemet K_R , og hvor output strømmen er den øjeblikkelige vinkelhastighed.

Da inertimoment-tensoren er symmetrisk (hermitesk), har den tre reelle egenværdier, *principalværdierne* af inertimomentet, som er positive, da den kinetiske energi er positiv definit. Hvis de tre egenværdier er forskellige, vil der til hver af dem svare et endimensionalt underrum af egenvektorer. Disse tre retninger, som er faste i forhold til legemet og indbyrdes ortogonale, definerer legemets *hovedakser*. Vi kan lade disse hovedakser definere retningerne af de tre koordinataksler i det til legemet fast knyttede koordinatsystem K_B . Hvis der er to eller tre sammenfaldende egenværdier af inertimoment-tensoren, vil der til disse svare et to eller tredimensionalt rum af egenvektorer, og man kan frit vælge en hovedakse inden for dette rum; de andre akser skal da være ortogonale til den først valgte. Hvis legemet f.x. er en homogen terning, kan man klart vælge hovedakser i retning af terningens kanter, men da de tre principalværdier er ens, er alle retninger lige gode, så det er ikke nødvendigt, at hovedakserne vælges parallelle med kanterne. En homogen terning er derfor i henseende til inertimomenterne lige så symmetrisk som en homogen kugle.

9.2 Euler ligningerne

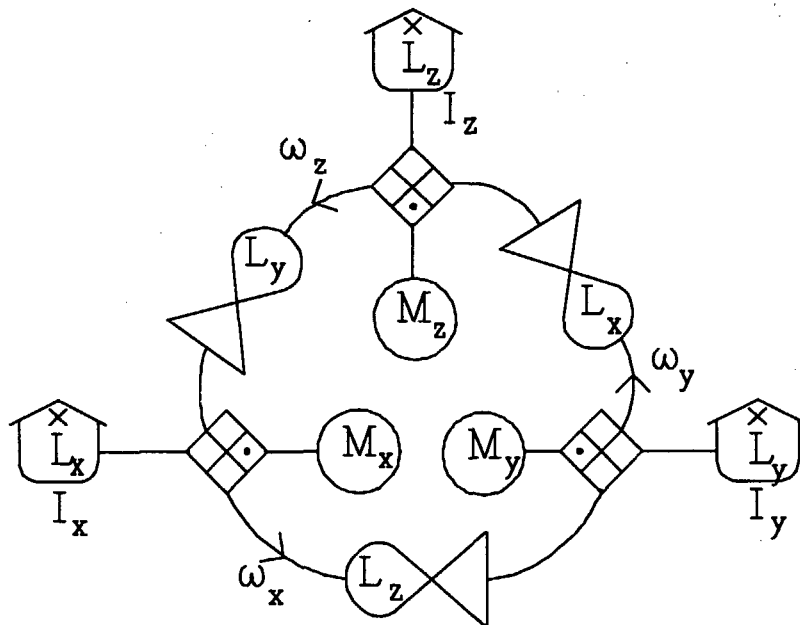
Når K_B er indrettet efter hovedakserne, er inertimoment-tensoren på diagonalform i dette system, og sammenhængen mellem impulsmoment og vinkelhastighed er særlig simpel. Vi taler stadig om impulsmoment og vinkelhastighed i forhold til det ikke roterende system K_R , men vi ønsker at angive deres koordinater i forhold til det roterende system K_B . Den hastighed, som disse koordinater ændrer sig med er ikke blot de tre koordinater af kraftmomentet i K_R , men inkluderer et fiktivt kraftmoment, som skyldes, at akserne af K_B ændrer retning ved rotationen. For den k 'te grundvektor af K_B har vi:

$$\dot{\vec{n}}_k = \vec{\omega} \times \vec{n}_k \tag{209}$$

Hvis kraftmomentet er \vec{M} og impulsmomentet er \vec{L} , fås:

$$\left. \begin{aligned} \dot{L}_k &= \frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \vec{n}_k) = \vec{M} \cdot \vec{n}_k + \vec{L} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{n}_k) \\ &= [\vec{M} + (\vec{L} \times \vec{\omega})] \cdot \vec{n}_k \end{aligned} \right\} \tag{210}$$

Dette er *Eulers ligning* for et stift legemes bevægelse, og den kan retikuleres ud med en gyrtorstruktur, der minder om den for Lorentz kraften på en ladet partikel (figur 51), men med den forskel, at gyrtorerne nu er styret af selve de impulsmoment-koordinater, de kobler imellem, og ikke af et udefra kommende felt.



Figur 74 Euler ligningerne.

9.3 Fri rotation

Lad os starte med at se på en *fri rotation*. Hvis legemet ikke er påvirket af noget kraftmoment, er impulsmomentet \bar{L} konstant, men dens koordinater i K_B ændrer sig efter Euler ligningerne, og vinkelhastighedsvektoren $\bar{\omega}$ vil i almindelighed ikke være konstant.

En asteroide af uregelmæssig form langt ude i rummet kan derfor have en kompliceret rotation, hvor polerne hele tiden flytter sig. Det kan vises, at polbevægelsen kan skildres som rulning af en ellipsoide på en plan. Denne *inerti-ellipsoide* har halvaksler efter de tre hovedakser, hvis længder er omvendt proportionale med inertitensorens principalværdier. Betingelsen, at den kinetiske energi er konstant, svarer til, at $\bar{\omega}$ er bundet til overfladen af inerti-ellipsoiden.

Euler ligningerne for vinkelhastighedens tre koordinater i K_B siger:

$$\left. \begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x &= (I_y - I_z) \omega_y \omega_z \\ I_y \dot{\omega}_y &= (I_z - I_x) \omega_z \omega_x \\ I_z \dot{\omega}_z &= (I_x - I_y) \omega_x \omega_y \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

Lad os antage, at vi til et givet tidspunkt har $\omega_z = \Omega$, $\omega_x = \omega_y = 0$. Ligningerne (211) giver så, at denne rotationsform vil være konstant i tiden. Spørgsmålet er imidlertid, om løsningen er *stabil*. Hvis vi tildeler ω_x og ω_y nogle små værdier δ_x og δ_y og lineariserer bevægelsesligningerne (211), får vi:

$$I_x \dot{\delta}_x = (I_y - I_z) \Omega \delta_y \quad ; \quad I_y \dot{\delta}_y = (I_z - I_x) \Omega \delta_x \quad (212)$$

og heraf ved yderligere differentiation af den første ligning:

$$\ddot{\delta}_x = \Omega^2 \frac{(I_y - I_z)(I_z - I_x)}{I_x I_y} \delta_x \quad (213)$$

Hvis faktoren foran δ_x er negativ, vil rotationen om z-aksen være stabil, hvis den er positiv, vil den være ustabil. Hvis I_z er enten den mindste eller den største af de tre principalværdier, er rotationen stabil, men hvis I_z ligger mellem I_x og I_y , er den ustabil.

Hvis legemet er symmetrisk om z-aksen, er $I_x = I_y$, og en rotation om z-aksen vil være stabil. For endelige værdier af ω_x og ω_y giver (211), at ω_z vil bevare sin værdi Ω , medens ω_x og ω_y varierer harmonisk med *precessionsfrekvensen*

$$\omega_p = \left| \Omega \left(1 - \frac{I_z}{I_x} \right) \right| \quad (214)$$

Nordpolen vil vandre rundt i en cirkel med denne frekvens. For Jorden beregnes ω_p til ca 1/300 af Ω , så nordpolen skulle vandre rundt med en periode på 300 døgn. Observationer har haft vanskeligt ved at påvise denne bevægelse; radius i nordpolens bevægelse rundt om den gennemsnitlige nordpol ser ud til at være mindre end 5 meter.

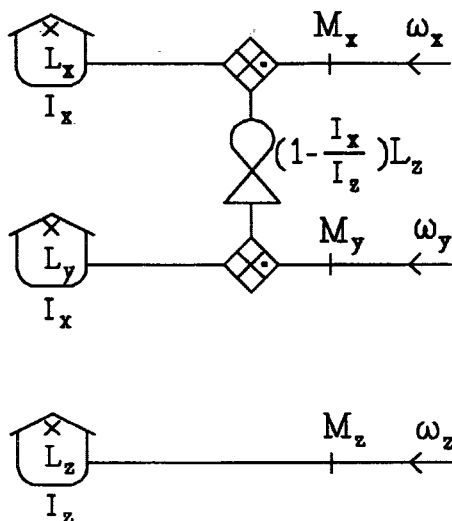
Denne precession af den frie rotation for et omdrejningssymmetrisk legeme må ikke forveksles med den precession, der skyldes jordaksens hældning i forhold til Ekliptika. Denne hældning giver anledning til et kraftmoment fra solen, som ændrer jordaksens stilling i forhold til fiksstjernerne med en periode på ca 26000 år. Denne precession er "ydre" i modsætning til den ovenfor beskrevne "indre" precession, hvor impulsmomentet kun ændres i forhold til legemets egne hovedakser, men er konstant i inertialsystemet.

9.4 Rulning af inhomogen kugle

Som et andet eksempel på anvendelsen af Euler ligningerne vil vi diskutere bevægelsen af en *inhomogen kugle, der ruller på en bevægelig plan*. Vi har tidligere set på rulning af en *homogen kugle* på en roterende skive (figur 37). I det homogene tilfælde, hvor der kun er ét inertimoment, giver Euler ligningerne ikke noget bidrag til ændringen af impulsmomentet i K_B ; kun det ydre kraftmoment virker, og hele diskussionen gennemføres simplest i inertialsystemet. Vi vil nu antage, at den indre massefordeling i kuglen er inhomogen, så inertimoment-tensoren har tre forskellige principalværdier. Den ydre form antages imidlertid stadig at være en perfekt kugle.

Beskrivelsen af den kinetiske energi som knyttet til tre simple x-lagre for impulsmoment koordinaterne i K_B kan opfattes som et eksempel på den diagonalisering af den kinetiske energi, der blev benyttet i forbindelse med Poisson- og Lagrange-retikulationerne, figur 42 og 46, og gyrtorstrukturen på figur 74 svarer formelt til gyrolækken i vektorbånds fremstillingen af Poisson-retikulationen, øverst på figur 60. Transformerer en a.. på figur 60 kunne da være den unitære transformation, der giver overgangen fra K_R til K_B i termer af Euler vinklerne, og de samme Euler vinkler kunne være generaliserede koordinater. Tilstedeværelsen af det ikke holonome rulnings constraint betyder imidlertid, at vi ikke kan overtage Poisson-retikulationen direkte.

Der skal 5 koordinater til at angive kuglens position, nemlig de tre Euler vinkler (eller tilsvarende) til rotationen af K_B i forhold til K_R , samt to almindelige koordinater, X og Y til translationen af K_R i forhold til K_L . Som referencepunktet R i kuglen, begyndelsespunktet for K_R , vil vi benytte dens centrum, som ikke behøver at være massemidtpunktet, når massefordelingen er inhomogen. Vi vil dog regne med, at *massemidtpunktet er sammenfaldende med centret*, for at det ikke skal blive for indviklet. Hele kuglens masse er M, og dens radius r. Vi kan antage, at der er et sædvanligt tyngdefelt, og at den bevægelige plan (grammofonpladen), som rulningen foregår på, er vandret, men når massemidtpunktet er i centrum, sørger tyngdefeltet blot for, at kuglen bliver på planen, men har ellers ingen indflydelse på bevægelsen. Vi vil endvidere simplificere problemet ved at antage, at massefordelingen er rotationssymmetrisk om z-aksen, så der kun er to forskellige inertimomenter, I_z og $I_x (=I_y)$. Euler ligningerne simplificeres derved så meget, at vi kun behøver én gyration:



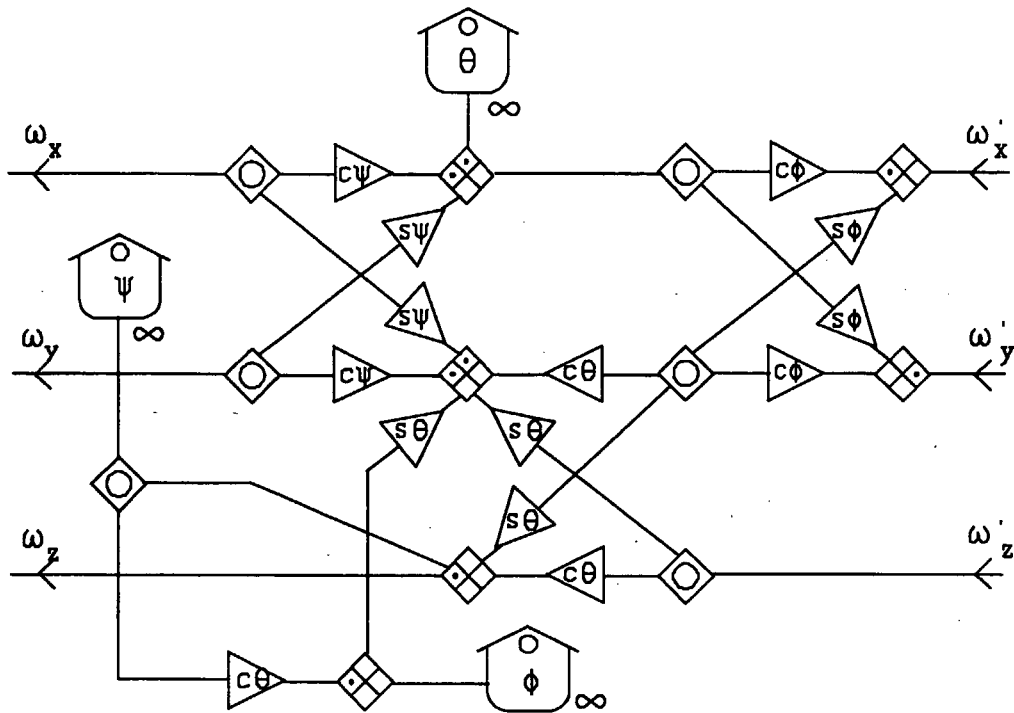
Figur 75 Euler ligninger for omdrejningssymmetri, $I_y = I_x$.

Vi benytter umærkede koordinater for K_B og mærkede for K_L , så vinkelhastighedsvektoren i K_R hedder $(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$. Omregningen fra K_B til K_R foretages ved hjælp af Euler matricen (160).

Der er dog endnu et kinematisk problem, som vi mangler at løse: Hvad er sammenhængen mellem vinkelhastigheden og ændringshastighederne af de tre Euler vinkler? Vi skal ikke gå i detaljer med denne udregning, men blot anføre resultatet:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_y &= \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

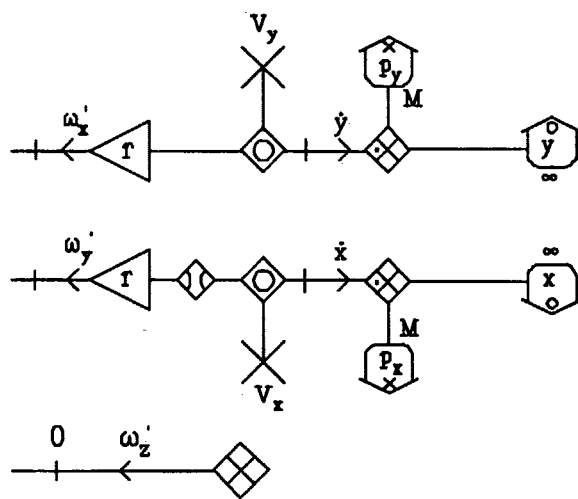
Disse formler kan så let tilføres retikulationen af drejningsmatricen figur 66 (NB: de mærkede koordinater er nu på højre side, men betydningerne er ellers uændrede).



Figur 76 Euler vinkler og transformation fra K_B (venstre) til K_R .

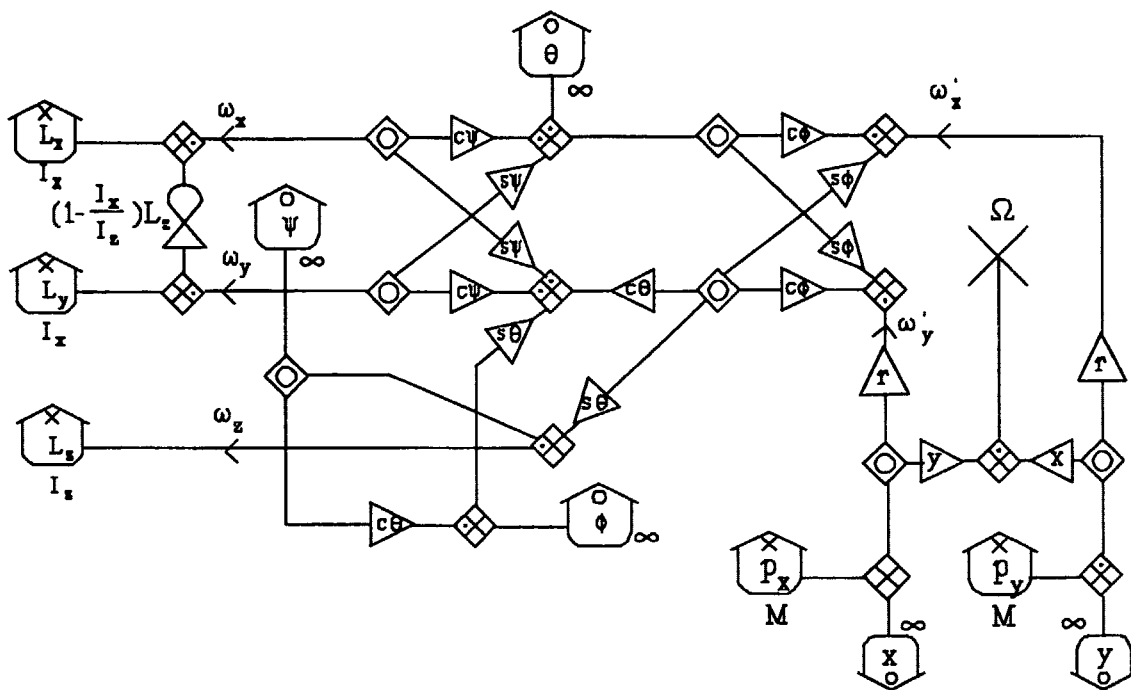
Efter omregningen til K_R kan vi formulere de hastigheds constraints, som rulningen medfører, efter figur 36 og, for en roterende skive, figur 37. Endelig kan vi sammenstykke figur 75 og 76 med rulle constraintet og den translatoriske bevægelse i K_L til det færdige diagram.

Det særlige ved rullebetingelsen, som gør problemet ikke-holonomt, er, at kuglen kan spinne om z-aksen i K_L uden at det påvirker den translatoriske bevægelse. Dette kan angives ved en 1-port x-samler forbundet til ω'_z båndet.



Figur 77 Rullebetingelse, jfr. figur 36.

Nulspændingen fra denne aktive komponent (jfr. figur 21) "dræber" den nederste o-samler til højre på figur 76 og alle dens tilsluttede bånd. Når hastighederne af berøringspunktet defineres som på en grammofonplade, jfr. (18), når vi frem til nedenstående model:



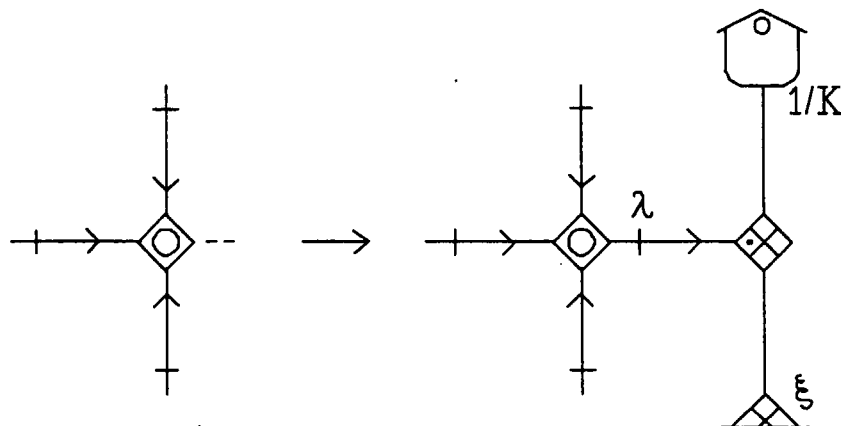
Figur 78 Anisotrop kugle på grammofonplade.

9.5 Behandling af ikke-holonome constraints

De to hastigheds-constraints svarende til o-samlerne længst til højre på figur 78 fører til differentiell kausalitet på to af x-lagrene. Hvilke to x-lagre, det skal gå ud over, beror på en vurdering af signalvejene. Den simpleste struktur af signalsporene, uden loops, opnås, når L_x - og L_y -lageret får differentiell kausalitet og udgår af integrationen.

Et program til numerisk integration af differentiaalligninger (som CTS) kan dog ikke uden videre udføre den nødvendige differentiation, og forsøg på at indbygge det fører let til unøjagtigheder, som er alt for grove i forhold til den nøjagtighed, integrationen udføres med, når der benyttes f.x. en 4. ordens Runge Kutta metode (som i CTS). Der er imidlertid udviklet metoder til at undgå differentiell kausalitet, bl.a. den såkaldte Lagrange-multiplikator metode, som også kan benyttes i tilfælde, hvor hastighedsbetingelserne er holonome, men hvor det er for besværligt at finde frem til de uafhængige generaliserede koordinater. Oversat til EB-sprog går metoden ud på, at man opsøger de o-samlere, som ved integral kausalitet ville komme til at mangle det stærke bånd. Man tilføjer så for hver af disse samlere et stærkt bånd med en input spænding λ_i og søger så løbende under integrationen at bestemme λ_i erne, således at strømmene i de tilføjede stærke bånd bliver nul. Da de ukendte spændinger λ_i , som er constraint-kræfterne bestemmer de tidsafledede af x-level variablene, og dermed de tidsafledede af strømmene, må man i praksis operere med de tidsafledede hastigheds constraints til bestemmelse af λ_i erne.

En programmeringsteknisk simpel (men "beskidt") måde at gøre dette på, er at lade det tilføjede stærke bånd forbinde til en "støddæmper" bestående af en x-samler med et o-lager og en læk, et såkaldt Voigt element.



Figur 79 Løsning af kausal konflikt med "støddæmper".

Modulet K kan i dette tilfælde fortolkes fysisk som vedrørende små deformationer af ujævnheder ved kontakten mellem kuglen og underlaget. For at disse

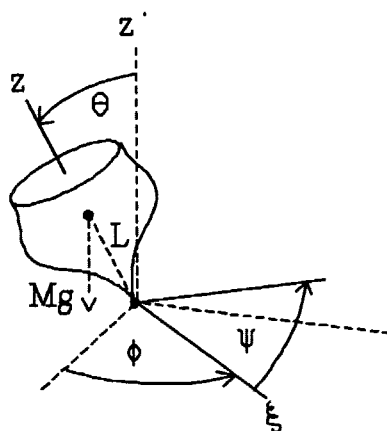
deformationer kan være små, må K vælges tilpas stor. Modstanden ξ har til formål at dæmpe svingninger, som ellers let kan tage overhånd, specielt i et ellers udæmpet system som det foreliggende. Forholdet $\xi/K = \tau$ er en karakteristisk tid for støddæmperens virkning, som gerne skal være lille i forhold til modellens reelle svingningstider. Energitalbet i lækken ξ skal være lille og må eventuelt kompenseres for på anden vis.

9.6 Snurretoppen

Brugen af Euler ligningerne og Euler vinklerne er et alternativ til de tidligere gennemgåede Poisson- og Lagrange-retikulationer, som jo kommer til kort over for ikke-holonome constraints. Hvis problemet er holonomt, og hvis det er nemt at finde frem til et sæt uafhængige generaliserede koordinater, vil det være simplere at benytte Lagrange-retikulationen. Som et eksempel på dette skal vi se på *den symmetriske top med et fastholdt omdrejningspunkt*.

Vi antager, at legemet har en symmetriakse, z -aksen, og at det fastgjorte omdrejningspunkt ligger på denne akse. Toppen har massen M , og dens massemidtpunkt ligger i afstanden L fra omdrejningspunktet. Vi regner med et normalt tyngdefelt med accelerationen g , og vi lægger laboratoriesystemets z' -akse i retning af vertikalen. Toppens position kan da beskrives ved tre generaliserede koordinater, som passende kan vælges som de tre Euler-vinkler

$$q_1 = \psi \quad ; \quad q_2 = \phi \quad ; \quad q_3 = \theta \quad (216)$$



Figur 80 Symmetrisk top med fastgjort punkt.

I dette tilfælde vil det naturlige referencepunkt være det fastgjorte omdrejningspunkt og ikke massemidtpunktet. Der er da ingen forskel på K_R og K_L . På grund af omdrejningssymmetrien er der kun to principalværdier af inertitensoren, I_z og $I_x (= I_y)$ ligesom for kuglen, vi før behandlede. Man skal imidlertid være opmærksom på, at inertimomenterne, som nu er med hensyn til omdrejningspunktet, ikke er de samme som inertimomenterne med hensyn til massemidtpunktet, når de to punkter ikke er sammenfaldende. Hvis toppen f.x. er en homogen kugle med radius r og omdrejningspunkt på overfladen ($L=r$), finder man $I_z = (2/5)Mr^2$, da centrum ligger på omdrejningsaksen, men for I_x og I_y får man et ekstra bidrag svarende til en partikel med massen M i afstanden r fra omdrejningsaksen, altså $I_x = I_y = (7/5)Mr^2$.

For at bruge Lagrange-retikulationen skal vi først bestemme den kinetiske energi som funktion af de generaliserede koordinater og deres hastigheder. Med brug af (215) finder vi:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_x (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 = \\ &\frac{1}{2} I_x (\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta)^2 \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

Det ses umiddelbart, at vi kan diagonalisere den kinetiske energi og gøre den uafhængig af de generaliserede koordinater ved at indføre (vinkel)hastighederne

$$v_1 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \quad ; \quad v_2 = \dot{\phi} \sin\theta \quad ; \quad v_3 = \dot{\theta} \quad (218)$$

hvilket svare til, at tensoren $b_{..}$ i (96) er:

$$b_{..} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (219)$$

De tre x-levels (impulsmomenter) er så:

$$p_1 = I_z v_1 \quad ; \quad p_2 = I_x v_2 \quad ; \quad p_3 = I_x v_3 \quad (220)$$

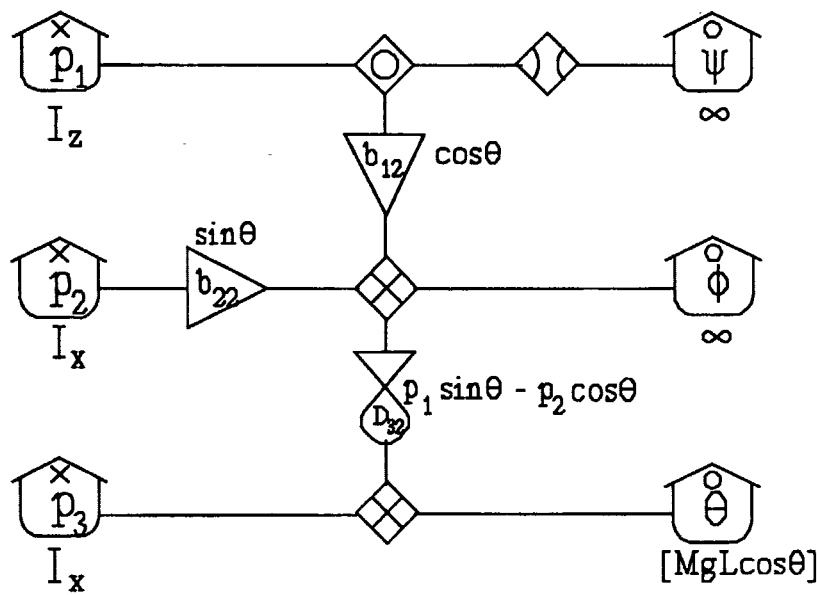
og gyratoren D_{32} kan bestemmes af (99):

$$D_{32} = - p_k \frac{\partial b_{k2}}{\partial q_3} = p_1 \sin\theta - p_2 \cos\theta \quad (221)$$

Den potentielle energi i tyngdefeltet er $U(\theta) = MgL \cos\theta$, og da Lagrange-funktionen $L = T - U$ således er uafhængig af ψ og ϕ (q_1 og q_2), er de hertil konjugerede kanoniske impulser bevægelseskonstanter:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &\doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) = p_1 ; & P_2 &\doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \\ I_x \dot{\phi} \sin^2\theta + I_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \cos\theta &= p_2 \sin\theta + p_1 \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

Retikulationen efter Lagrange metoden, figur 46, kan nu udføres med o-levels (216), x-levels (220), transformerne (219) og gyratoren (221):



Figur 81 Lagrange retikulation af symmetrisk top.

Det specielt interessante ved snurretoppen er jo, at tyngdekraften ikke kan lægge den ned, når den snurrer. Lad os se, hvordan bevægelsesligningerne gør rede for dette fænomen. Rate-ligningerne for diagrammet figur 81 er:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p_1}{I_z} - \frac{p_2}{I_x} \cot\theta ; & \dot{\phi} &= \frac{p_2}{I_x \sin\theta} ; & \dot{\theta} &= \frac{p_3}{I_x} ; & \dot{p}_1 &= 0 \\ \dot{p}_2 &= \frac{p_3}{I_x} (p_1 - p_2 \cot\theta) ; & \dot{p}_3 &= MgL \sin\theta - \frac{p_2}{I_x} (p_1 - p_2 \cot\theta) \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Lad os starte med at finde en løsning, hvor aksens vinkel med lodlinjen, dvs. θ , er konstant. Vi ser da, at p_3 må være nul. Så vil p_2 også være konstant, og kun de to vinkler ψ og ϕ kan ændre sig. Da p_3 skal holde sig konstant på værdien nul, får vi af den sidste af ligningerne i (223), samt de to første:

$$I_z \dot{\phi} \left[\dot{\psi} + \dot{\phi} \left(1 - \frac{I_x}{I_z} \right) \cos\theta \right] = MgL \quad (224)$$

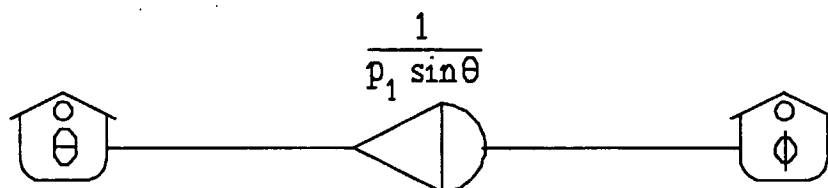
Vi er nu specielt interesserede i en situation, hvor toppens rotationshastighed om sin akse er meget større end precessionsfrekvensen:

$$|\dot{\psi}| \gg |\dot{\phi}| \Rightarrow |\omega_z| \gg |\dot{\phi}| \quad (225)$$

I denne grænse giver (224):

$$\dot{\phi} \approx \frac{MgL}{I_z \dot{\psi}} \approx \frac{MgL}{p_1} = \frac{MgL \sin\theta}{p_1 \sin\theta} \quad (226)$$

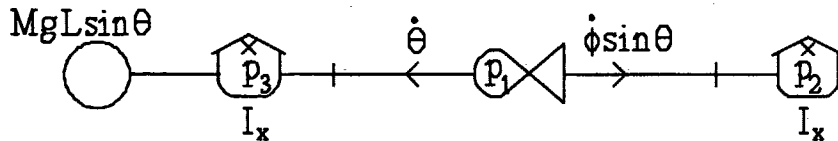
hvilket viser, at toppen opfører sig som en ideel gyrtator. Det er faktisk denne sammenhæng mellem precessionsfrekvens og kraftmoment, der har givet navn til gyrtatorfunktionen i netværksteorien. Det var Tellegen, der "opfandt" elementet og navngav det.



Figur 82 Den hurtigtsnurrende top som ideel gyrtator.

Gyrtatorfunktionen går jo begge veje, så hvis der optræder et kraftmoment i forbindelse med ϕ -lageret, f.x. hvis man prøver at bremse toppens precession, vil den reagere med en lodret θ -bevægelse.

En nøjere diskussion af aksebevægelser for den hurtigtsnurrende top kræver dog, at vi medtager de to x-levels p_2 og p_3 . De cykliske koordinater ϕ og ψ har ingen indflydelse på dynamikken, og p_1 , som er konstant, behøver ikke at optræde som en level-variabel. I grænsen (225) kan vi desuden se bort fra den tilbagegående gyrtator $p_2 \cos\theta$, og kernen i dynamikken er så den nedenfor viste "gyroskopiske oscillator".



Figur 83 Den gyroskopiske oscillator: nutation af top.

Når θ -lageret her er erstattet med en spændingskilde, er det fordi de såkaldte *nutations-svingninger* af den gyroskopiske oscillator har en meget lille amplitude for en hurtig top, så $\sin\theta$ er næsten konstant. Til gengæld er nutationsfrekvensen meget høj, da den er givet ved:

$$\omega_n = \frac{p_1}{I_x} \quad (227)$$

Antagelsen om, at θ kan betragtes som næsten konstant, er kun berettiget, hvis det kan vises, at amplituden af nutationen er lille. Lad os beregne denne amplitude for en situation, hvor toppen startes med $p_2 = p_3 = 0$ og $\theta = \theta_0$ med en vilkårlig værdi af ϕ , f.x. $\phi = 0$ til tiden $t = 0$. Bevægelsesligningerne for figur 83 giver så:

$$\dot{p}_2 = 0 \quad ; \quad \dot{p}_3 = MgL \sin\theta_0 \quad \text{for } t = 0 \quad (228)$$

og ved integration af bevægelsesligningerne med antagelsen $\theta = \theta_0$ findes løsningen

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= A (1 - \cos\omega_n t) \quad ; \quad p_3 = A \sin\omega_n t \\ \text{hvor } A &= \frac{I_x MgL \sin\theta_0}{p_1} \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

Ved benyttelse af sammenhængen mellem impulserne og de generaliserede hastigheder (angivet på figur 83) får vi så:

$$\phi = \frac{MgLI_x}{p_1^2} (\omega_n t - \sin\omega_n t) \quad ; \quad \theta = \theta_0 + \frac{MgLI_x}{p_1^2} \sin\theta_0 (1 - \cos\omega_n t) \quad (230)$$

Det ses, at amplituden i denne bevægelse er lille for en hurtig top, hvor den kinetiske energi i bevægelsen om symmetriaksen er meget større end den maksimale potentielle energi i tyngdefeltet. Toppens akse starter med at bevæge sig nedad, men retter sig hurtigt op og tegner en cykloide:



Figur 84 Nutation. θ lodret nedad. ϕ vandret.

Den *gennemsnitlige* precessionshastighed for denne bevægelse svarer til (226) og o-gyratorfunktionen fra θ til ϕ på figur 82. Den gennemsnitlige θ -værdi er konstant, hvilket også svarer til figur 82, da output spændingen fra ϕ -lageret jo er nul.

9.7 Jordens nutation og precession

Jorden kan betragtes som en symmetrisk top med rotationspunkt i massemidt-punktet. Drejningsmomentet fra solens og månens gravitationsfelter er da nul, men der vil på grund af jordens let fladtrykte form være et ganske svagt drejningsmoment fra de kombinerede tidevandsfelter, som søger at dreje jordaksen vinkelret på Ekliptikas plan. Den resulterende precession af jordaksen i forhold til fiksstjernerne har en periode på ca 26000 år.

Nutationen eksisterer jo uafhængigt af et eventuelt drejningsmoment, og dens periode er næsten sammenfaldende med det sideriske døgn, idet

$$\omega_n = \frac{p_1}{I_x} = \frac{I_z}{I_x} \Omega \quad (231)$$

og I_z er jo, som tidligere nævnt, kun ca 1/300 større end I_x . Set i forhold til jordens eget system (K_b) kommer nutationen derfor til at foregå med frekvensen

$$\omega'_n = \Omega \left(\frac{I_z}{I_x} - 1 \right) \quad (232)$$

dvs. den bliver uskelnelig fra den "indre precession", som karakteriserer den frie rotation af et omdrejningssymmetrisk legeme, jfr. (214). Denne effekt er, som nævnt, vanskelig at påvise, idet den drukner i "astronomisk nutation", som skyldes variationer i tidevandsfeltet.

Appendix

Modelbehandling med CTS

A1. Generelt om programmet

CTS - navnet betyder **Continuous Time Simulation** - er et program til numerisk integration, grafisk fremstilling og fil-administration af dynamiske modeller, der er beskrevet ved et sæt sammenhørende 1. ordens differentiaalligninger. Programmet er til DOS-PCer og fungerer under Turbo Basic compileren fra firmaet Borland og er tilgængeligt fra RUCs lokalnet under IMFUFA menuen. Herfra kan også en udførlig dokumentation af programmet hentes frem. CTS er udarbejdet af forfatteren i samarbejde med Heine Larsen.

I CTS defineres modellen ved sættet af level variable, $LE(1)$, - - , $LE(n)$, som defineres af brugeren, samt $LE(0)$, som er *tiden*, t , der administreres af CTS. Brugeren skal indskrive sin modeldefinition i form af et sæt rate-ligninger i Basic i et rammeprogram. Heri indskrives også bl.a. output ligninger. Både rate og output udtrykkene skal defineres ved sættet af level variable, samt ved brugerdefinerede eksterne konstanter.

Integrationsmetoden i CTS er en 4. ordens Runge Kutta metode med variabel skridtlængde $RA(0)$. Brugeren skal altså ikke angive skridtlængden, men fastsætter i stedet et tal DG , som er antallet af betydende cifre, som resultaterne skal gælde og fremvises med. Desuden fastsætter brugeren et output-interval OI , som dels er den maksimale skridtlængde, dels et fast interval for output, og endelig styrer programmets første gæt på skridtlængden, som sættes til $1/8$ af OI . En tredje CTS-konstant, reference-level værdien LR har også betydning for nøjagtigheden, idet fejlen i det store og hele beregnes som en relativ fejl i forhold til LR .

Der opereres med fire typer af nummererede datafiler i CTS:

a) *Modelfiler* indeholder oplysninger om antallet af level variable, samt disses værdier og kommentarer om deres betydning. Desuden navne og kommentarer til output variable, og navne, værdier og kommentarer til eksterne konstanter.

b) *Resultatfiler* indeholder værdier af output variablene fra en hel kørsel.

c) *Skalafil*er sætter værdier på akserne for afbildninger af output variable, herunder tiden. CTS har dog også mulighed for automatisk fastsættelse af skalaer.

d) *Billedfiler* kan laves både i et internt format til brug i CTS og i et eksternt format (PCX) til brug i andre programmer, som f.x. WordPerfect.

A2. Lidt om integrationsmetoden

Selv om CTS brugeren ikke behøver at vide noget om integrationsmetoden, skal det alligevel kort antydes, hvordan den fungerer. Lad os for simpelhedens skyld antage, at vi blot har en enkelt differentialligning

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \mathbf{A(1)}$$

Lad os endvidere antage, at vi kender værdien af x , $x = x_0$ til tiden $t = t_0$, og vi vil beregne værdien $x = x_3$ til tiden $t = t_3 = t_0 + \Delta t$, hvor Δt er skridtlængden. Dette interval deles nu op i tre underintervaller, idet vi for $i = 0, 1, 2, 3$ definerer

$$t_i = t_0 + i \frac{\Delta t}{3} \quad \mathbf{A(2)}$$

Desuden defineres koefficienterne u_i som

$$u_0 = u_3 = 1 \quad ; \quad u_1 = u_2 = 3 \quad \mathbf{A(3)}$$

Der laves nu tre fremskrivninger x_1, x_2, x_3 af x til tiderne t_i på grundlag af tilvæksterne

$$k_i = \frac{\Delta t}{3} f(x_i, t_i) \quad \text{for } i = 0, 1, 2, 3 \quad \mathbf{A(4)}$$

De tre fremskrivninger foretages ved formlen

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + g_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \\ \text{hvor } g_0 &= 0 \quad \text{og } g_i = u_{i-1} k_{i-1} - 2 g_{i-1} \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{A(5)}$$

Til sidst korrigeres den sidste fremskrivning med ligningen

$$x_3 = x_0 + \frac{3}{8} \sum_{i=0}^3 u_i k_i \quad \mathbf{A(6)}$$

og herefter kan integrationen fortsætte med næste skridt, hvor det gamle t_3 er det nye t_0 , og hvor det netop beregnede x_3 bliver det nye x_0 .

På grundlag af de to første fremskrivninger vurderer CTS, om det er nødvendigt at formindske skridtlængden. Første fremskrivning giver

$$x_1 = x_0 + \frac{\Delta t}{3} f(x_0, t_0) \quad \mathbf{A(7)}$$

altså en simpel Euler-fremskrivning, hvor man bare "går ud efter tangenten" i intervallets begyndelsespunkt. Den anden fremskrivning er:

$$x_2 = x_0 + \frac{2\Delta t}{3} f(x_1, t_1) + \frac{\Delta t}{3} [f(x_1, t_1) - f(x_0, t_0)] \quad \mathbf{A(8)}$$

Det sidste led giver oplysning om fejlen på en simpel Euler integration. Da denne fejl pr. skridt er proportional med Δt^2 , og da fejlen pr. skridt af den fuldendte 4. ordens Runge Kutta beregning er proportional med Δt^5 , foretager CTS en sammenligning af den fra anden fremskrivning skønnede fejl med den af brugeren accepterede fejl i potensen $2/5$. Hvis fejlen er for stor, halveres skridtlængden, og beregningen af skridtet startes forfra. Hvis fejlen er for lille, gennemføres beregningen af det påbegyndte skridt, men før beregning af næste skridt, fordobles skridtlængden.

Det af brugeren fastsatte output interval fungerer som øvre grænse for skridtlængden. Ved starten af en integration sættes skridtlængden til $1/8$ af OI, så hvis OI er meget lille i forhold til modellens karakteristiske tider og den valgte nøjagtighed, vil CTS efter tre fordoblinger af skridtlængden benytte OI som fast skridtlængde. Hver gang der er gået et helt antal output intervaller fra starttiden, skal CTS producere output, så hvis afstanden til et output tidspunkt er mindre end den for tiden benyttede skridtlængde, tilpasses skridtlængden, så man rammer output tiden. Efter output genoptages beregningen med den før benyttede skridtlængde.

A3. Modeleksempel

Vi ser på *det elastiske pendul*, figur 43. Som level variable benyttes:

LE(1) = λ , pendulets længde (m). Startværdi 1.

LE(2) = θ , pendulets udsving fra bundstillingen (rad). Startværdi 0.

LE(3) = p_λ , radial impuls (k^*m/s). Startværdi 0.

LE(4) = p_θ , tangentiel impuls (k^*m/s). Startværdi 7.

Som output variable benyttes:

$x = \lambda \sin\theta$, partiklens vandrette koordinat (m).

$y = -\lambda \cos\theta$, partiklens lodrette koordinat (m).

$E = (p_\lambda^2 + p_\theta^2)/(2m) + \frac{1}{2}k(\lambda - L)^2 - mg\lambda \cos\theta$, energien (J).

Udregning af energien tjener som kontrol af integrationens nøjagtighed. Systemets energi skal være konstant, men fejl ved Runge Kutta integrationen bevirker en svagt faldende tendens. Ved kørslen over 1000 skridt (t fra 0 til 20) ses dog mindre end én promilles fald i energien.

Som *eksterne konstanter* benyttes:

$m = 1$. Partiklens masse (k).

$k = 100$. Fjederkonstant (k/s^2).

$L = 1$. Fjederens ligevægtslængde (m).

$g = 9.82$. Tyngdeacceleration (m/s^2).

Desuden benyttes CTS konstanterne

DG = 4. Antal betydende cifre.

LR = 1. Reference level.

OI = 0.02. Output interval.

Modellens *rate ligninger* kan nu formuleres:

$$RA(1) = LE(3)/m$$

$$RA(2) = LE(4)/(m*LE(1))$$

$$RA(3) = k*(L-LE(1)) + m*g*\cos(LE(2)) + LE(4)^2/(m*LE(1))$$

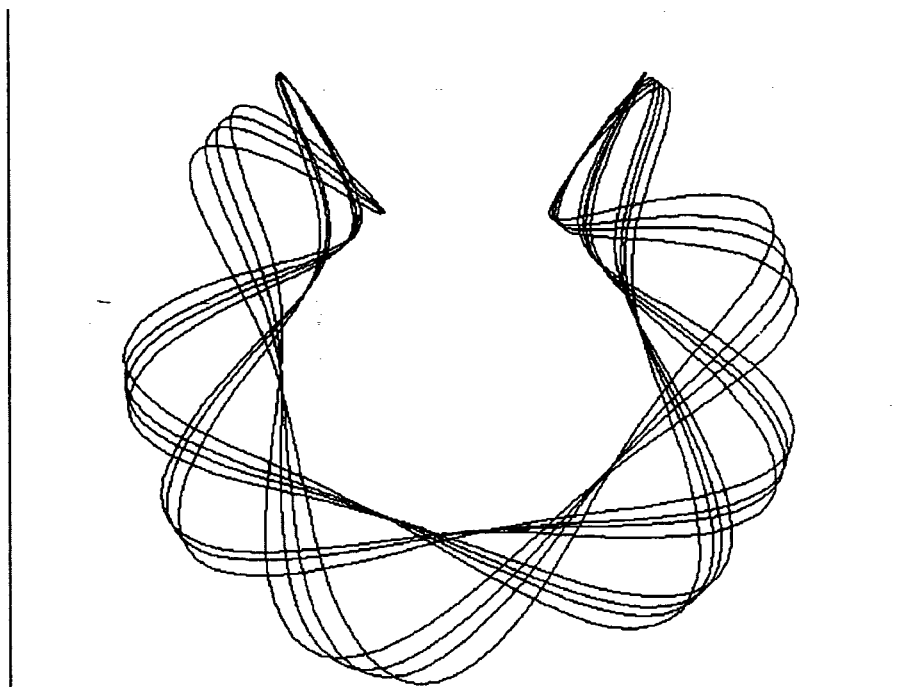
$$RA(4) = -m*g*\sin(LE(2)) - LE(3)*LE(4)/(m*LE(1))$$

Da rate ligningerne skal gennemløbes mange gange under integrationen (mindst 4 gange pr. skridt), kan det være en fordel at afkorte beregningerne ved brug af *interne konstanter*, som kun skal beregnes én gang ved starten af integrationen. F.x. kan man i ovenstående rate ligninger indføre den interne konstant $mgg = m*g$ og derved spare et par multiplikationer i rate ligningerne.

Efter afsluttet integration er output variablene for hvert skridt indlagt i maskinens lager og kan herfra lagres i en resultatfil. Resultaterne giver mulighed for bl.a. todimensionale plot, hvor hver output variabel (incl. tiden) kan tilskrives hver af de to akser. Som skala på akserne kan man lade CTS

benytte de under integrationen bestemte minimums- og maksimumsværdier af output variablene, eller man kan selv fastsætte en skala.

På nedenstående plot af x og y for det elastiske pendul er fastsat en skala fra -2 til 2 for x og fra $-1,7$ til $1,3$ for y . Da skærmens dimensioner ved VGA grafik er ca $4/3$, fås herved et plot, der ligner bevægelsen af partiklen i det rigtige rum.



Figur A1 Bevægelse af partiklen i det elastiske pendul.

Der er her tilsyneladende tale om en *næstenperiodisk* bevægelse, hvilket er forståeligt i betragtning af samspillet mellem de to indbyggede perioder for hhv. pendulbevægelsen og fjederens svingninger. For systemer med tre eller flere level variable er det almindeligt at finde næstenperiodisk opførsel, som i specielle tilfælde kan være periodisk.

En tredje mulig bevægelsesform, som kræver mindst tre level variable, er *kaos*. Det elastiske pendul er ikke kaotisk, men dobbeltpendulet udviser både næstenperiodiske og kaotiske bevægelsesformer. Det er som regel nemt at afgøre ved visuel inspektion af løsningskurverne, om der er kaos eller ej, men der er i nogle tilfælde brug for kvantitative metoder, såsom beregning af *Liapounov eksponenter*, for at afgøre spørgsmålet. CTS tilbyder forskellige muligheder for undersøgelse af kaotiske bevægelser, men det vil føre for vidt at komme ind på dem her.

- Admittans 25
Aktion og reaktion 7
Aktive systemer 10
Aktivt lager 13
Arbejdsprincip 38
Axial vektor 93
- Bevægelighed 25
Bevægelseskonstanter 116
Bulk modul 99
- Celle retikulation 103
Centrifugalkraft 92
Chasles teorem 91
Compliance 13
Constraints 26
Coriolis kraft 92
CTS 113, 120
Curie-Prigogine princip 99
Cyklisk koordinat 40
Cyklisk lager 27
Cykloide 118
- D'Alemberts princip 40
Deformation 95
Deformationstensor 95
Determinant 95
Diagonalisering 50
Differentiale 19
Differentiel kausalitet 14
Direkte produkt 71
Dissipation 77
Distributiv 18
Dobbeltpendul 62
Drejning 82
Dummy indekser 50
Dyadisk 19
- Effektivitet 81
Egentlig vektor 93
Egenverdier 89
Egenvektorer 90
Einsteins konvention 49
Elastisk modul 98
Elastisk pendul 53, 123
Energibånd 4
- Energifunktion 12
Energistrøm 5
Elektrisk felt 67
Elektromagnetisk felt 67
Euler ligninger 106
Eulers teorem 89
Euler vinkler 85
- Faststofgnidning 33
Felt 59, 67
Fluktuations-dissipationsteorem 24
Forskydning 95
Forstærkningsfaktor 31
Frihedsgrader 61
Fri rotation 108
Føjelighed 13
- Generaliserede hastigheder 40
Generaliserede impulser 40
Generaliserede koordinater 40
Generator 87
Grammofonplade 35, 112
Gyrator 16
Gyrolæk 78
Gyroskopisk oscillator 117
- Hamiltonfunktion 46
Hamiltons ligninger 47
Hamiltons princip 42
Harmonisk oscillator 16
Hermitesk konjugeret 74
Hermitesk tensor 73
Hjul 28, 44, 48
Holonome constraints 26
Hovedakser 106
Hvid støj 24
- Ikke-holonome constraints 33
Ikon 1
Ikoniske indekser 5, 82
Ikonsymmetri 75
Ikonvending 17
Impuls 13
Impulsmoment 14
Indeks 1
Induktans 13

- Inertans 13
Inertikræfter 14, 32
Inertimoment 14
Input 5
Integral kausalitet 113
Interpretant 1
Isotrope stoffer 99
- Jorden 109
Jævnstrømstransformer 23
- K-tegn 81
Kanoniske impulser 44
Kanonisk konjugerede 47
Kapacitet 13
Katastrofer 21
Kausalitet 5
Kausal konflikt 11
Kinematik 104
Kinematisk kausalitet 12
Kinetisk energi 49
Kirchhoffs love 19
Klassisk grænse 24
Kommutator 49, 89
Konservativ 18
Kontraktion 71
Koordinatskift 83
Kortslutning 21
Kubiske krystaller 99
Kugle 33, 106, 109
- Laboratoriesystem 92
Ladet partikel 67
Lagrange funktion 41
Lagrange ligningerne 43
Lagrange multiplikator 113
Lagrange paranteser 60
Lagrange retikulation 57
Larmors teorem 92
Ledningsevne 25
Legendre transformation 47
Lethedstensor 72
Level variable 12
Lie gruppe 87
Lineær fabrik 81
Lineær graf 22
- Lineært lager 13
Longitudinal lydbølge 103
Longitudinalt mekanisk byggesæt 8
Loop 31
Lorentz kraft 67
Lotka princip 80
Lydbølger 95
Læk 11, 24
- Magnetfelt 11, 67
Massemidtpunkt 28, 55, 90
Matrix 50, 71
Modstand 2, 24
Monadisk 19
Multiport lager 30, 47
Måleforskrift 3
- Nutation 118
- o-gyrator 16
o-kilde 10
o-lager 11
o-læk 25
Onsager relationer 78
Optimal effektivitet 81
Orientering 2
Ortogonal 69
Ortonormering 83
o-samler 18
Output 5
- Passive systemer 10
Pauli matricer 75
Peirce 1, 19
Peltier koefficient 81
Poissons forhold 100
Poisson paranteser 46
Polær vektor 93
Potential energi 9
Precession 108, 117
Prik 19, 29, 69
Primær 15
Principalværdi 106
Produktivitet 81
Pseudovektor 93

- Rate ligninger 61
Rate variable 5
Reaktive systemer 10
Reciprok matrix 50
Referenceknode 22
Relative koordinater 26
Resistans 25
Retikulation 9
Roterende system 91
Rulning 28, 105
Runge Kutta 120
- Samlebåndsgyrator 80
Samler 10, 17
Sekundær 15
Semiotik 1
Semiotisk lov 7, 40, 81
Shear deformation 98
Shear modul 99
Signalspor 28
Signaltegn 81
Simultan tilbagekobling 31
Simultanfelt 61
Skalar 5, 34, 70
Skalarbånd 69
Skalarprodukt 5
Skeletdiagram 37
Skinne 28
Snurretop 114
Sporet af matrix 71
Spørløs tensor 97
Spænding 2, 4, 5
Spændingskilde 2, 11
Spændingstensor 96
Stabil 108
Stive legemer 90, 95, 104
Stiv stang 4, 8, 26, 55
Stivhed 14
Strøm 3, 4, 5
Strømkilde 11
Strøm-orienteringsreglen 3
Styringer 9
Stærk kausalitet 18
Støddæmper 113
Støj 24
Svag kausalitet 18
- Symbol 1
Symbolske indekser 5, 82
Symmetrisk gyrator 17, 76
Symmetrisk tensor 34
Symmetrisk top 114
Symmetrisk transformer 16
- Tellegens teorem 38
Tensor 34, 69
Termoelement 81
Tetraeder-graf 22
Tidevandsfelter 119
Tidsvending 5
Tomme indekspladser 70
Transformer 15
Transducer 24
Transmitter 10
Transversal lydbølge 102
Transversalt mekanisk byggesæt 8
Triadisk 19
Tryk 97
Træghed 13
- Ultraviolet katastrofe 24
Unitær transformer 83
Uægte multiport lager 20
- Valensteorem 19
Vektorpotential 68
Vinkelhastighed 8, 14, 30, 84
Virkningsintegral 40
Virtuelle arbejder 39
Viskositet 98
Voigt element 113
- Wheatstone-bro 22
- x-gyrator 16
x-kilde 11
x-lager 11
x-læk 25
x-samler 18
- Youngs modul 100

Liste over tidligere udkomne tekster
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan
ske til IMFUFA's sekretariat
tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

- 227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm,
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,
Pernille Postgaard, Thomas B.Schröder,
Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,
Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og
en skitse til et alternativ baseret
på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier
-
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and
Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional
Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT
LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent
en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild
og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY
CONVERSION"
by: Bent Sørensen
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk
problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse
af energiens bevarelse og isærdeles om
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz
udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host
mortality on the dynamics of an endemic
disease and
Instability in an SIR-model with age-
dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL
BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen
-

- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for
den matematiske udvikling
af: Claus Dråby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for
optimering af broreparationer
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma
Tulinus, Ivar Zeck
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN
Et 1.modul fysikprojekt
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse
i CT-scanning
Projektrapport
af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og Christine Iversen
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b
/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske
halvledere
Specialerapport
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske
Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CON-
DUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY
DISORDERED NON-METALS
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH
BOUNDARY
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the
Jahresbericht Addendum to Schappacher,
Scholz, et al.
by: B. Booss-Bavnbek
With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors,
J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner,
J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch,
J.Radkau and T.Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET
VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen,
Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreassen
and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgård,
Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk
Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning
Teori og model
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse
Materiale til et statistikkursus
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED
af: Peter Barremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent
Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-
electric Spherical Shell (Preprint)
by: T. Christensen and N.B.Olsen
- 257/93 Modelling af dispersion i piezoelektriske
keramikker
af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen,
Christina Specht, Mikko Østergård
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra og analyse"
af: Mogens Brun Beefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW
TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN
DIMENSIONS 2, 3, AND 4
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

- 261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93
- 262/93 Separability and the Jones
Polynomial
by: Lars Kadison
- 263/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra
og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt
- 264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen
-
- 265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED
SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his
sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert
and Gestur Olafsson
- 266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i
laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen,
Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik
Lindelof, Peder Voetmann Christiansen
- 267/94 Kom til kort med matematik på
Eksperimentarium - Et forslag til en
opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via
en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson,
Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 269/94 Dimensionsanalyse en introduktion
metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen,
Ken Andersen, Nikolaj Hermann,
Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA
AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen
- 271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets
fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel
- 273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann,
Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen
- 274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse
anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine
Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth
Helmgård
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen
- 275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis,
Per Gregersen, Kristina Vejrv
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af
problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann
Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas
Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 278/94 The Models Underlying the Anaesthesia
Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen
(RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen
(Herlev University Hospital), Stig Andur
Pedersen (Roskilde University)
- 279/94 Description of a method of measuring the shear
modulus of supercooled liquids and a comparison
of their thermal and mechanical response
functions.
af: Tage Christensen
- 280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann
- 281/94 Modellering af Det Cardiovasculære System med
Neural Puls kontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen,
Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen
- 282/94 Parallele algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen,
Niels Bo Johansen

- 283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)
af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen
- 284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke
lige ve' det!
Gymnasie matematikkens begrundelsesproblem
En specialerapport af Peter Hauge Jensen
og Linda Kyndlev
Vejleder: Mogens Niss
- 285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and
its diploid host
by: Viggo Andreassen and
Freddy B. Christiansen
- 286/94 The energy master equation: A low-temperature
approximation to Bässler's random walk model
by: Jeppe C. Dyre
- 287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the
Calculation of Time Auto-Correlation Functions
by: Jeppe C. Dyre
- 288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION
by: Bent Sørensen
- 289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square
Displacement in Extremely Rugged Energy
Landscapes with Equal Minima
by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen
- 290/95 Modellering af uregelmæssige bølger
Et 3.modul matematik projekt
af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson,
Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 291/95 1st Annual Report from the project
LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH
ENERGY SYSTEM
an example of using methods developed for the
OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study
by: Bent Sørensen
- 292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3
af: Bent Sørensen
- 293/95 Geometridiskussionen - hvor blev den af?
af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen
Vejleder: Anders Madsen
- 294/95 Universets udvidelse -
et metaprojekt
Af: Jesper Duelund og Birthe Friis
Vejleder: Ib Lundgaard Rasmussen
- 295/95 A Review of Mathematical Modeling of the
Controlled Cardiovascular System
By: Johnny T. Ottesen