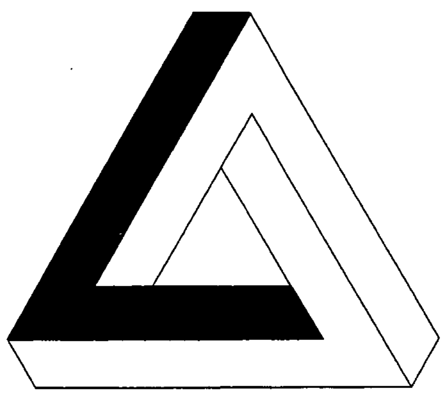
TEKST NR 293 1995

Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen

Geometridiskussionen

— hvor blev den af?



MATEMATIK, MODUL 3
IMFUFA, RUC
EFTERÅR 1994

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Geometridiskussionen - hvor blev den af?
Matematik, Modul 3

af: Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen
Vejleder: Anders Madsen

IMFUFA tekst nr. 293/95 75 sider ISSN 0106-6242

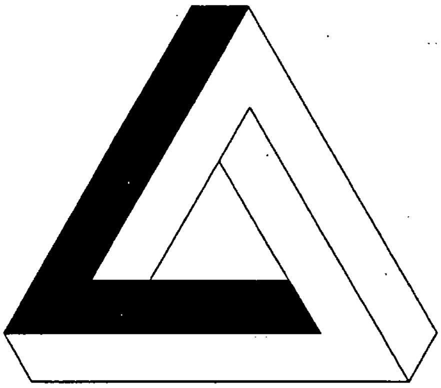
Abstrakt

Dette projekt er en historisk gennemgang af geometriundervisningen i den danske gymnasieskole. Med udgangspunkt i de reformdiskussioner, der har været gennem det sidste århundrede undersøges hvilket gemetrisyn matematikundervisningen repræsenterer.

Lotte Ludvigsen & Jens Frandsen

Geometridiskussionen

— hvor blev den af ?



Matematik, modul 3
Imfufa, RUC
Efterår 1994

Forord

Dette projekt er et 3. moduls formidlings projekt på RUC's matematikuddannelse. Udarbejdet af Lotte Ludvigsen og Jens Frandsen, og vejledt af Anders Hede Madsen. Vi vil gerne rette en tak til Torben Christoffersen og Bent Hirsberg for assistance. Vi vil gerne rette en særlig tak til Mogens Niss og Lisbeth Helmgaard for uvurdelig støtte og vejledning gennem hele projektet.

Abstrakt

Dette projekt er en historisk gennemgang af geometriundervisningen i den danske gymnasieskole. Med udgangspunkt i de reformdiskussioner, der har været i gennem det sidste århundrede undersøges hvilket geometrisyn matematikundervisningen repræsenterer.

Indhold

Kapitel 1

Indledning

Organiseret matematikundervisning har altid været en del af de mere civiliserede samfund. De ældste eksempler på konstruerede matematikopgaver har man fundet på Moskva-papyrussen fra ca. 1850 år f.v.t. [22].

En naturlig del af det at undervise er overvejelser om, hvordan dette skal foregå mest hensigtsmæssigt. Derfor må man formode, at didaktiske overvejelser, har eksisteret lige så længe, som der har foregået undervisning.

Selvom problematikken vedrørende måder at undervise på har interesseret mennesker længe, er det først inden for de sidste 100 år, at disse overvejelser har fået tillagt et vist videnskabeligt præg. Matematikkens didaktik har kun eksisteret som videnskabeligt arbejdsfelt de sidste ca. 30 år. Årsagen til denne meget sene videnskabeliggørelse skal ses i lyset af, at det først er i dette århundrede, at den brede befolkning har modtaget matematikundervisning. Med videnskabeliggørelsen af og den stigende interesse for didaktik og i vores tilfælde specielt matematikdidaktik, er der kommet en næsten hel uoverskuelig mængde litteratur, og følgelig er mængden af indfaldsvinkler og holdninger til emnet enormt.

Gennem tiderne har incitamenterne for at lære matematik været forskellige, men med den industrielle revolution steg behovet for uddannede med matematisk indsigt. Siden er antallet af mennesker, der skal modtage undervisning (ikke bare i matematik) steget. Idag har vi eksempelvis en situation, hvor hele den danske befolkning skal igennem et 9-årigt undervisningsforløb, hvori matematik spiller en væsentlig rolle. Ydermere vil ca. 40% af en årgang efter folkeskolen vælge at fortsætte i gymnasiet, HF eller lignende [26].

Til trods for at mange synes at matematik er et svært stof at tilegne sig, bliver de fleste idag udsat for at skulle lære det. Derfor er det i dag mere end nogensinde nødvendigt at overveje hvilken matematik, der skal undervises i og hvordan man mest hensigtsmæssigt får den formidlet.

Geometrien har i de sidste næsten 2000 år været en af de væsentlige matematiske discipliner – et redskab, måske et af de mest virkelighedsnære og konkrete, til brug for vores forståelse af det rum vi lever i. Geometriens vigtighed i hverdagen understreges af den udvikling, faget som videnskabsfag har undergået. Fra at være en disciplin, der primært omhandlede konstruktion v.h.a. passer og lineal til at være en abstrakt og analytisk disciplin.

I de matematiske kredse er der en udbredt enighed om, at der allerede fra de små klasser i folkeskolen skal undervises i de geometriske aspekter [28]. Men formålet med den geometriske undervisning og dermed indholdet, omfanget og undervisningsmetoden hersker der derimod stor uenighed omkring.

Denne diskussion er imidlertid ikke ny. Den rolle, geometrien skal spille i de studerendesuddannelses forløb, har været et ivrigt diskuteret emne blandt dette århundredes matematikere. I midten af 1900-tallet gennemgik geometripensummet i skolen en radikal ændring. Dette skete som konsekvens af et seminar, der i 1959 afholdtes i Frankrig (Royaumont seminaret [13]), hvor folkeskole- og gymnasiematematikken var til debat. Udgangspunktet for seminaret var dels, at den matematiske udvikling på universiteterne havde gennemgået en kolossal udvikling, men at dette ikke i nævneværdig grad havde sat sit spor på den matematikundervisning, der blev givet i gymnasiet. Samtidig betød industrialiseringen et stigende behov for matematikere, forskere, økonomer osv., hvis matematiske evner var mere rettet mod de tekniske fag. Af bekendtgørelsen for gymnasiet fra 1961 fremgik det, at der fremover skulle lægges mindre vægt på geometrien, og at man i stedet skulle koncentrere sig om de nye emner som abstrakt algebra, vektorrum, mængdelære, sandsynlighedsregning osv. Denne nye undervisningsstruktur gik under betegnelsen *den ny matematik*[1].

Når denne diskussion stadig er interessant skyldes det, at der i dag hersker den holdning, at beslutningerne fra 1959 var forhastede. Geometriundervisningen og formålet med denne danner rammen for en konference, der afholdes i okt. 1995, i Catania i Italien. Konferencens titel er *Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century*, og ved denne lejlighed er det første gang geometrien i undervisningen tages op til en offentlig diskussion.

Vores hensigt med dette projekt er at bidrage til debatten om geometriundervisningen. Vi vil undersøge hvilken udvikling geometriundervisningen gennem tiden har undergået og hvad er begrundelserne for denne udvikling.

[1] Af det engelske *New Math*. Til tider også omtalt som 60'er matematikken

Vi har valgt at benytte den lejlighed, der byder sig i udformningen af matematikuddsnnelsens 3. modul på RUC, til at få et indblik i den teoretiske didaktik. Gennem dette arbejde håber vi at erhverve os nogle erfaringer, vi senere kan få glæde af i en undervisningssituation. Geometridiskussionen er meget bred i sin karakter, hvorfor vi håber at berøre mange aspekter af det didaktiske arbejdsfelt.

Vi håber gennem arbejdet med dette projekt at få et overblik over de diskussioner, man i tidens løb har haft om geometriundervisningen og derigennem blive i stand til at give et bud på en undervisning, der efter vores overbevisning er hensigtsmæssig. Det essentielle spørgsmål i forbindelse med projektet bliver derved:

> *Med udgangspunkt i de erfaringer man fik gennem 60'er matematikken – hvilken geometriundervisning bør man give gymnasieeleverne i 1995?*

Dette spørgsmål er naturligvis meget stort og vidtfavnende. At give et fornuftigt svar på dette spørgsmål vil kræve at vi afdækker:

1 De erfaringer man har gjort sig:

- Hvilken undervisning gav man eleverne før og efter reformen?
- Begrundelsesdiskussion – hvad ønskede man at eleverne skulle lære?
- Hvori bestod forskellen på den viden den enkelte elev erhvervede sig før og efter reformen?
- Hvori lå problemerne med med den nye matematik undervisning?

2 Hvad og hvordan:

- Hvilken erfaringer resulterer ovenstående i?
- Hvilke ideer kan vi få fra den erkendelsesmæssige forskning?
- Hvilke ideer kan vi få fra den pædagogiske forskning?
- Hvad er vores bud på en fornuftig geometriundervisning?

3 Evaluering:

- Udarbejdelse af undervisningsmateriale.
- Afprøvning af undervisningsmateriale.

– Vurdering af resultatet.

Da tidsrammen for projektet er godt 4 måneder, er dette spørgsmål et vel ambitiøst udgangspunkt for projektet. I det følgende afsnit vil vi placere vores problem inden for en didaktisk ramme og derigennem forsøge at få indsnævret og afgrænset vores problemområde.

1.1 Afgrænsning

Det er umiddelbart klart, at det netop præsenterede spørgsmål ikke er tilstrækkeligt afgrænset. For at blive i stand til at foretage en yderligere afgrænsning, er det nødvendigt at placere vores projekt i den matematiske didaktiske kontekst. På denne måde vil vi kunne identificere de didaktiske arbejdsfelter, der skal være genstand for vores arbejde.

I første omgang vil vi se på, hvilke emner, der ligger gemt bag begrebet *didaktik*. En lexikal definition lyder [37]:

> Af græsk *didakti´kē ´technē*: Undervisningskunst.
> Læren om undervisningens og læreprocessens mening, mål og indhold (mens metode omfatter vejen fremgangsmåden og midler); Didaktik + metodik udgør faget undervisningslære.

En pædagogisk definition finder man eksempelvis i *Pædagogisk Opslagsbog* [25]:

> Næppe mange pædagogiske udtryk har haft og har fortsat et så varieret betydningsindhold som ordene didaktik og metodik.
> Den leksikale oversættelse af *didaktik* er oftest undervisningslære, og ordet spænder da over teorier, synspunkter og overvejelser vedrørende alle forhold, som har med undervisning at gøre, f.eks. dens indhold, hjælpemidler, form og formål, og tillige alt, hvad eleverne må foretage sig for at tilegne sig, hvad der er tilsigtet med undervisningen.
> Ved *metodik* forstår man sædvanligvis en planmæssig fremgangsmåde til opnåelse af et formål, og er dette formål at lære nogen noget, bliver udtrykket meget nær synonymt med didaktik.

Med disse definitioner dækker vores problemformulering i virkeligheden både over videnskabsfeltet didaktik og metodik. En mere tidssvarende definition af begrebet finder vi hos Niss[2] i [27]:

> Matematikkens didaktik er det videnskabelige arbejdsfelt der søger at identificere, karakterisere og forstå de fænomener og processer der indgår — eller kunne indgå — i både faktisk og potentiel matematikundervisning og matematiktilegnelse. Med hensyn til forståelse af sådanne fænomener og processer står bestræbelser på at afdække mekanismer og årsagssammenhænge i centrum.
>
> I behandlingen af den beskrevne opgave beskæftiger matematikkens didaktik sig med alle forhold der måtte have betydning for matematikundervisning og -tilegnelse, uanset hvilke videnskabelige, psykologiske, værdimæssige, samfundsmæssige eller andre sfærer de stammer fra, ligesom den også betjener sig af betragtninger, metoder og resultater fra andre discipliner og fagområder. Matematikkens didaktik rummer forskellige former for virksomhed, rækkende fra teoretisk og empirisk grundforskning, over anvendt forskning og udviklingsarbejde, til reflekteret praksis.

Selvom Niss' definition ikke ligefrem begrænser indholdet af ordet matematikdidaktik, er den meget mere præcis i sin beskrivelse, og derfor nemmere at bruge til vores formål. Niss fortsætter med at karakterisere hovedtræk af matematikkens didaktik i to dimensioner:

Objektdimensionen Der indeholder de dele eller genstande som didaktikken studerer. Niss ser her to overordnede genstandsfelter:

- **Matematiktilegnelse** eller læring, der omfatter alt hvad der har at gøre med individets tilegnelse af forestillinger i og om matematik i bred forstand.
- **Matematikundervisningens kompleks** , der omfatter alt hvad der har at gøre med bevidst *formidling* af matematik til en eller flere modtagere.

Perspektivdimensionen Der omhandler sigtet med den matematikdidaktiske virksomhed. Forskning i perspektivdimensionen antager to retninger,

[2]Mogens Niss er professor ved IMFUFA Roskilde Universitetscenter og blandt de mest markante danske didaktikere.

Deskriptiv eller analytisk retning hvor man beskæftiger sig med hvad der rent *faktisk* findes/foregår/gælder og af hvilke årsager.

Normativ retning der omhandler hvad der *bør* findes/foregå/gælde og med hvilke begrundelse.

Denne opdeling resulterer i et skema, hvori den didaktiske forskning kan indsættes (se figur 1.1). Denne lidt firkantede måde at anskue det didaktiske forskningsfelt på, har den store fordel, at man (vi) på en langt mere nuanceret måde kan trække linierne op for vores projekt. Problemområdet

Perspektiv Objektiv	**Deskriptivt/Analytisk** Hvad findes/foregår/gælder der *faktisk*, og af hvilke årsager?	**Normativt** Hvad *bør* findes/foregår/gælde, og med hvilke begrundelser?
Matematiktilegnelse Fokus på den *lærende*		
Matematik undervisningens kompleks Fokus på *formidlingen* af matematik		

Figur 1.1: Niss' skematiske fremstilling af matematikdidaktikkens forskningsområde. Spørgsmålene under punkterne 1–3 side 3 vil, hvis de bliver indsat i skemaet, berøre alle fire hovedområder.

i dens nuværende udformning omhandler, som før omtalt, den rolle geometrien gennem tiden har spillet i gymnasieundervisningen. Vores indgang til emnet er således af analytisk karakter. Eftersom vi har til hensigt at undersøge, hvilken viden eleverne erhverver sig gennem undervisningen dækker problemfeltet både over de lærende og formidlerne. Da formålet med projektet er at give et bud på i *hvad og hvordan* vi synes der skal undervises, vil projektet også være normativt i sin karakter. Det vil sige, at vi med vores spørgsmål forsøger at dække hele det didaktiske arbejdsfelt.

1.1.1 Indsnævring

Med problemfeltets nuværende udseende ville dette 4 måneders projekt blive vel tyndbenet, da vi i så fald skulle medtage stort set alle aspekter af det didaktiske arbejdsfelt. Derfor er vi nødt til at foretage en indsnævring af vores problemfelt.

For projektgruppen er der ikke tvivl om, at vi finder den normative side af sagen mest spændende. Vores dilemma er, at vores forudsætninger for at tage den normative diskussion ikke vil være tilstrækkelige, før vi har været den analytiske proces igennem. Derfor har vi valgt at lægge vægten i projektet på den analytiske del af problemfeltet. Med dette udgangspunkt vil vi forhåbentlig i en fremtidig undervisningssituation, stillet overfor spørgsmål af normativ karakter, være i stand til at foretage kvalificerede valg.

I og med at dette projekt har en omdrejningsakse, der hedder *den ny matematik*, må projektet nødvendigvis afspejle de diskussioner og tekster, der eksisterer om emnet. Dette vil sige, at vi primært vil fokusere på matematikundervisningens kompleks og sekundært på matematiktilegnelsen.

Et skematisk fremstilling af dette ses i figur 1.2.

Perspektiv / Objektiv	**Deskriptivt/Analytisk** Hvad findes/foregår/gælder der *faktisk*, og af hvilke årsager?	**Normativt** Hvad *bør* findes/foregår/-gælde, og med hvilke begrundelser?
Matematiktilegnelse Fokus på den *lærende*		
Matematik undervisningens kompleks Fokus på *formidlingen* af matematik		

Figur 1.2: Afgrænsning af vores projekt i matematikdidaktikkens problemområde.

1.2 Problemformulering

Vi kan inden for disse rammer præcisere, hvad vi mener med det overordnede spørgsmål på side 3.

> *Med udgangspunkt i de erfaringer man fik gennem 60'er matematikken – hvilken geometriundervisning bør man give gymnasieeleverne i 1995 ?*

Vi har fået afgrænset ovenstående spørgsmål til at omhandle de erfaringer man gjorde sig omkring *den ny matematik*. Vi må således koncentrere os om de på side 3 under punkt 1 nævnte spørgsmål:

- Hvilken undervisning gav man eleverne før og efter reformen?
- Begrundelsesdiskussion - hvad ønskede man, at eleverne skulle lære?
- Hvori bestod forskellen på den viden den enkelte elev erhvervede sig før og efter reformen?
- Hvori lå problemerne med med den nye matematik undervisning?

En mere konkret og arbejdsvenlig problemformulering kommer til at lyde:

1. Hvad var argumentationen bag den udvikling geometriundervisningen i gymnasiet gennemgik med 60'er reformen?
2. I hvor høj grad anså man de kvalifikationer, geometrien kunne give eleven, for vigtige, og på hvilken måde fik man tilgodeset disse værdier i den ny matematikundervisning i gymnasiet?
3. Hvilke begrundelser har været fremlagt for at genindføre dele af geometrien i gymnasiet? Hvilken rolle ønskede man med 80'er reformen at geometriundervisningen skulle spille i gymnasieudannelsen?

1.2.1 Metode

I forbindelse med besvarelsen af ovenstående problemformulering er vi stødt på to væsentlige problemer:

1. Vores interesse i geometriundervisningen og diskussionerne af denne er situationen i Danmark. Diskussionerne foregik (og foregår) imidlertidig på internationalt plan, hvilket ikke gør det muligt for os at se isoleret på debatten i Danmark.
2. Vi har i ovenstående fremstillet geometrien som værende kilden til projektet, hvorimod diskussionerne man havde primært drejede sig om matematikundervisningen som helhed.

Ad 1 Vi har måtte se i øjnene, at det er meget småt med litteratur, der redegør for de didaktiske overvejelser, man i Danmark har haft om matematikundervisningen/geometriundervisningen. De beslutninger, man har taget i Danmark, er ofte sket på baggrund af internationale diskussioner. I vores søgen efter begrundelserne for geometriundervisningens udvikling, har vi derfor måtte tage udgangspunkt i den internationale debat og derefter på baggrund af vejledninger, bekendtgørelser for gynasiet og de enkelte danske kommentarer vi har fundet frem til undersøge, hvordan man i Danmark har forholdt sig til diskussionerne.

Ad 2 Til vores overraskelse har vi måtte konstatere, at de didaktiske diskussioner som vi opfattede som væsentlige for udviklingen i Danmark kun i ringe grad omhandlede geometriundervisningen.

I vores søgen efter begrundelser har vi i dels fulgt debatten om gymnasiereformerne, som de har taget sig i ud i LMFK's meddelser fra 1979 til 1994[3] samt læst referatet af landsmødet i 1981, hvor man udarbejdede det første udkast til reformen. Da vi ikke der fandt relevante diskussioner, tog vi kontakt til tre af de didaktikere, der gennem tiden har deltaget i de danske reformdiskussioner Torben Christoffersen[4], Bent Hirsberg[5] og Mogens Niss. Alle tre har fortalt os, at der ikke findes litteratur omhandlende geometridiskussionen. Torben Christoffersen fortalte, at geometrien som sådan ikke blev debatteret; det lå bare i luften, at alle syntes den burde have en mere central plads i undervisningen.

På grund af ovenstående problemer har vi måtte gå frem efter en anden metode end vi i første omgang havde forestillet os.

For at besvare spørgsmål 1 tager vi udgangspunkt i diskussionerne på Royaumont seminaret, der anses som værende afgørende for 60'ernes reformarbejde. En analyse af baggrunden for seminaret samt af diskussionerne på seminaret om hvilken matematik man anså som essentiel i elevernes uddannelse vil sætte os i stand til at forstå, hvorfor geometriundervisningen måtte gennemgå en sådan forandring.

Besvarelsen af spørgsmål 2 kræver i første omgang, at vi gør os klart hvilke kvalifikationer, man mener at geometrien kan bidrage til. Da man ikke i væsentlig grad har diskuteret geometrien som sådan, har vi i dette arbejde

[3]Månedsblad udgivet af matematik, fysik og kemilæreforeningerne. Bladet indeholder div. meddelelser om konferencer, efteruddannelseskurser, referater af samme samt diskussionsindlæg fra foreningernes medlemmer.

[4]Fagkonsulent i matematik

[5]Gymnasielærer i matematik

måtte gå nogle omveje. For det første har vi undersøgt hvilke formål, der var med matematikundervisningen i Danmark, dengang geometrien udgjorde en væsentlig del af matematikundervisningen og hvilke argumenter, man dengang brugte for denne prioritering af matematikken. For det andet har vi i telefoninterviews med Torben Christoffersen, Bent Hirsberg og Mogens Niss fundet frem til hvilke formål i hvert fald tre af reformisterne mener, at der er med geometriundervisningen. I et forsøg på at vurdere, hvorvidt man i udformningen af 60'er reformen anså de kvalifikationer geometrien kan bidrage til for vigtige, må vi undersøge hvilke formål, der var med matematikundervisningen på det pågældende tidspunkt og sammenligne det med de tidligere fundne formål med geometriundervisningen.

Formålet med matematikundervisningen kan til en vis grad findes i bekendtgørelser og anordninger, men ofte vil se, at de offentligt udtalte begrundelser ikke er helt dækkende for de faktiske begrundelser. F.eks. er matematik til tider blevet anset som værende et redskab til at sortere eleverne, naturligvis uden at dette formål har fremgået som værende en af begrundelserne for matematikundervisningen. For at finde de faktiske årsager til matematikundervisningen må vi undersøge hvilke argumenter, der er blevet fremført i de diskussioner, som var afgørende for reformarbejdet. For at kunne foretage en sammenligning må vi finde frem til en måde at gruppere de forskellige fremførte begrundelser på. Den opdeling vi har valgt at benytte, har vi fra IMFUFA teksten *Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!* [16], der beskæftiger sig med matematikundervisningens begrundelsesproblem. Deri findes frem til, at begrundelserne for matematikundervisningen i gymnasiet kan opdeles i følgende punkter:

1. Studieforberedende begrundelser.

2. Erhvervsforberedende begrundelser.

3. Almendannende begrundelser.
   Med almendannelse forstår vi den viden, der anses som nødvendig for at kunne begå sig både som privat person og som en del af samfundet.

4. Formaldannende begrundelser.
   Ved formaldannelse forstår vi den indvirkning selve arbejdet med matematikken har på den menneskelige psyke, som at ændre arbejdsvaner eller skærpe den logiske sans. Det afgørende ved formaldannelse, at der sker en overførelse af de egenskaberne man har opnået gennem matemetikken til andre områder af individets liv.

5. Demokratimæssige begrundelser.
   Hermed forstår vi viden, der er nødvendig for kritisk at kunne deltage i den demokratiske debat.

6. Andre begrundelser.
   Dette kunne f.eks. være æstetiske begrundelser, der baserer sig på fascination af matematikkens indre skønhed eller glæden som løsningen af et bestemt matematisk problem kan give.

I vurderingen af hvorvidt man fik tilgodeset de værdier i *den ny matematik* må vi dels tage udgangspunkt i diskussionerne af 60'er reformen og dels se på den debat, der var omkring det senere reformarbejde. Da uddannelsen af eleverne ikke alene foregår i gymnasiet, kan vi i denne sammenhæng ikke se helt bort fra de diskussioner, der har været af matematikundervisningen i folkeskolen.

Igennem dette arbejde vil vi forhåbentlig ligeledes blive i stand til at besvare problemformuleringens sidste spørgsmål.

1.2.2 Læsevejledning

Den rækkefølge i besvarelsen af spørgsmålene, vi med dette metodeafsnit har skitseret, er dog ikke den vi har valgt at gå frem efter i projektrapporten. Vi vil her give en kronologisk fremstilling, da vi mener, at læseren ved at følge den historiske udvikling frem til Royaumontseminaret vil have bedre forudsætninger for at kunne forstå diskussionerne, der var i forbindelse med 60'er reformen.

1.3 Hvad er geometri?

Vi vil i projektrapporten omtale forskellige typer af geometrier. For at sikre at alle (også dem, der er vokset op med 60'er reformen) ved, hvori forskellen på de forskellige geometrier består, er her en oversigt.

I den klassiske, syntetiske geometri opereres kun med de elemæntære geometriske begreber punkt, linie, vinkel, længde, areal osv. Man kan tegne et punkt, afsætte et limiestykke med en given længde, tegne en cirkel osv., under iagttagelse af bestemte regler. Man kan også definere flytninger, geometriske vektorer og lignende.

I den analytiske geometri indføres koordinatsystemer og alle begreber "algebratiseres". Et punkt bliver et talsæt, en linie defineres ved hjælp af en parameterfremstilling eller et ligningssystem.

Affin afbildning: I stedet for at beskrive et punkts beliggenhed efter det sædvanelige retvinklede koordinatsystem så kan de entydigt beskrives ved linearkombination af et sæt vektorer. Et punktet beskrives derved af de affine koordinater. I plangeometrien bliver en linie grafen for en affin funktion og i rumgeometrien bliver en plan grafen for en affin funktion.

Kapitel 2

Geometriundervisningen indtil 1960'erne

Vi vil i dette kapitel forsøge at finde frem til de argumenter, man i tidens løb har haft for at give eleverne undervisning i geometri. Sideløbende hermed vil vi give et indtryk af matematikundervisningens stilling i Danmark i perioden op til Royaumont seminaret i 1959.

2.1 Før 1903

Indtil omkring år 1800 var Euklids *Elementerne* de grundlæggende bøger i geometriundervisningen. Enten brugte man dem direkte, eller også brugte man, som i Danmark, forskellige omskrivninger der i opbygning lå tæt op ad *Elementerne*. I begyndelsen af det 18. århundede begyndte man at sætte spørgsmålstegn ved den pædagogiske præsentation af geometrien i *Elementerne*. I stedet begyndte nyt undervisningsmateriale med et klarere pædagogisk sigte at dukke op [36].

Gennem middelalderen indtil omkring 1800-tallet havde matematikken, de steder hvor der blev undervist i det, et klart implicit formål, nemlig det anvendelsesorienterede. Matematik bestod af to ting, dels regning, som var relateret til handel, og dels geometri, som eksempelvis blev brugt til navigation.

Indtil omkring år 1900 var eksplicitte argumenter for at undervise i geometri meget sparsomme. Det betyder dog ikke, at man ikke har haft holdninger til hvad det var, geometrien kunne tilføre eleverne.

Implicit kan man i love, bekendtgørelser, ordninger mm. se afspejlet hvilke holdninger, til geometrien der har ligget bag udformningerne. I 1850-ordningen ("Den Madvigske Ordning"[1]) er der ikke givet et eksplicit formål med matemtikundervisningen, men om rammerne for indholdet hedder det i ordningens §4 stk. 10 og 11 [12]:

Geometri Undervisningen heri, der ligeledes går gennem hele skolen og forberedes ved geometrisk tegning, indbefatter foruden den almindelige plangeometri også stereometri og plangeometri, hvortil føjes en sådan kort oversigt over det vigtigste af astronomien, at den, uden vanskelig kalkul eller detalje, kan give en tydelig anskuelse af himmellegernes forhold, af lovene for deres bevægelse og af måden, hvorpå disse love erkendes, samt over hovedsætningerne af den matematiske geografi.

I ovenstående gemmer der sig to ting. For det første nævnes astronomien og den matematiske geografi, hvilket indikerer en vis anvendelsesorienteret vægt i undervisningen. For det andet er ordningens indhold udarbejdet af universitetsfolk hvilket gjorde, at matematikundervisningen primært var studieforberedende. I 1858 blev indholdet præciseret nærmere i en bekendtgørelse, der næsten udelukkende blev til på baggrund af et forslag fra 1855, udarbejdet af Ramus og Holten[2] [12]. I præciseringen af indholdet af geometriundervisningen hedder det [26, p. 5]:

Plangeometri Linier, vinkler, trekanter, polygoner, cirklen og rette linier ved cirklen. Kongruens. Ligedannethed. Almindelige konstruktioner. Længder og arealer.

Stereometri Planer og linier i rummet, vinkler, hjørner og polyedre. Ligedannethed. Cylindre, kegler og kugler. Længde, areal og rumfang.

Trigonometri De trigonometriske funktioner med hovedvægt på cos og sin. Grundrelationerne. Trekantstilfældene. Tabeller. Den sfæriske trigonometris grundformler.

Af denne præcisering kan vi ikke bare læse, at den klassiske geometri har været central for geometriundervisningen, men også at der på dette tidlige tidspunkt i Danmark har været undervist i analytisk geometri. Ramus og

[1]Madvig, Johan Nicolai (1801–86), filolog og politiker, kultusminister 1848–51. Kultusministeriet (1848-1916) varetog de opgaver der idag varetages af kirke- og undervisningsministerierne.

[2]Universitetsprofessorer i henholdsvis matematik og fysik.

Holten brugte ikke geometrien (og de egenskaber den måtte have) som argumentation for den opstramningen af 1850-ordningen, som bekendtgørelsen rent faktisk var. Deres argumentation var, at matematik er vigtig, især hvis man skulle læse videre på universitetet. Deres holdning var med andre ord, at sigtet med matematikundervisningen var, at den skulle være studieforberedende.

Bekendtgørelsen fra 1858 nævner også matematikfagets andet hovedemne, nemlig aritmetik. Hvilken vægt de to hovedemner har haft, har vi ikke kunnet finde materiale om, men ifølge Fabricius-Bjerres [12] optælling af lærebøger fra den tid, ved vi at 21 af 36 bøger alene omhandlede ét eller flere aspekter af geometrien. Ingen af disse bøger er oversættelser af Euklids *Elementerne*. Det lader ikke til at *Elementerne* har været gængs undervisningsmateriale i Danmark siden starten at 1800-tallet, omend de med stor sandsynlighed har været grundlag for mange lærebogsforfattere.

Ramus og Holten's lærebøger i geometri var ifølge Fabricius-Bjerre [12] de mest udbredte under Den Madvigske Ordning. De indledtes med formel logik, hvilket indikerer en vis vægtning af de stringente og deduktive egenskaber ved geometrien.

Endelig skal vi fra denne periode nævne professor Steen. Han udgav i perioden 1849—67 seks lærebøger i geometri. Grundideen i bøgerne var at opbygge geometrien omkring iagttagelse og behandling af simple figurer fra virkeligheden (hverdagen). Steens grundsynspunkt var, at geometrien skulle behandles deduktivt.

I de sidste 30 år af 1800-tallet, omhandlede diskussionerne det positive kontra det negative i, at man ved Den Hall'ske Ordning i 1871 havde indført en todeling af den lærde skole i en sproglig-historisk og en matematisk-naturvidenskabelig linie. Indholdsmæssigt skete der et lille skred i pensum; lidt mere funktionsbehandling til fordel for sfærisk geometri [12]. I forbindelsen med en evaluering af grendelingen, hedder det bl.a. fra C. M. Gertz[3] og J. Petersen[4] i 1889 [2, p. 160]:

> Ved Mathematikundervisningen er der i de senere Aar her i Landet foretaget en Frontforandring, som kort maa omtales. Mathematiken betragtedes tidligere nærmest som et Materiale for Indøvelsen af den formelle Logik; man lagde Hovedvægten paa, at Disciplene lærte at gjengive et Bevis i en logisk uangribelig Form, samt at han lærte at anvende visse bestemt afstukne Methoder.

[3]Professor i filologi, Undervisningsinspektør.

[4]Matematiker 1839—1910. Undervisningsinspektør efter Gertz. Mest kendt som grundlægger af grafteorien.

Gertz og Petersens udtalelse kan betragtes som en fremhævelse af den vigtigste brik i matematikundervisningen indtil 1880'erne, nemlig den formelle logik. De tænker her på logik i forbindelse med opbygningen af et deduktivt bevis. Og fortsat:

> Det staar ogsaa udenfor al Tvivl, at denne Side af Undervisningen er meget vigtig og paa ingen Maade maa forsømmes; men man mener nu at kunne opnaa meget mere: man mener, at Mathematikundervisningen kan drives saaledes, at den i høj Grad bidrager til at udvikle Elevens Selvstændighed. Tidligere nøjedes man med at lære ham at gaa sikkert paa banede Veje, vel forsynede med Vejvisere; nu vil man lære ham selv at bane sig Vej.

Der understreges her vigtigheden af, at eleven lærer at tænke deduktivt. Deres betragtninger går vel og mærke på hele matematikundervisningen og ikke bare geometrien. Det er tydeligt, at de tillægger matematikken som helhed, at være formaldannende.

Om perioden generelt har der i love, ordninger mv. været lagt mest vægt på, hvad eleverne skulle lære set ud fra universitetes synspunkt. Dvs. at matematikken primært skulle være studieforberedende. Selv om man ikke har gjort sig den ulejlighed at nedskrive det i formålsparagraffen, vil det være forkert at hævde, at man ikke kunne se nogle kvaliteter i geometrien. Holdningen har været, at matematikken og i særdeleshed geometrien var selvforklarende. Det var simpelthen indlysende og hævet over enhver tvivl (og diskussion), at geometriens deduktive væsen var den vigtigste brik i en elevs matematiske dannelse. Dette understreges bl.a. af, at de sproglige klasser, som med Den Hall'ske Ordning havde meget lidt matematik, skulle have geometri (og ikke anden matematik), da de derved fik styrket deres logiske sans. Så kort sagt: Diskussionerne gik generelt ikke på hvad og hvorfor, men på hvad og hvordan.

2.2 Almenskoleloven af 1903

Som følge af systemskiftet i 1901 var der politisk grundlag for en gennemgribende ændring af skolesystemet. I. C. Christensen[5] indførte, med Gertz som drivkraft, Almenskoleloven af 1903 [12, 10]. Den lærde skole blev delt i

[5] I. C. Christensen (1856–1930), MF for venstre 1890–1924, kultus- og statsminister 1901–05.

realskolen og gymnasiet. Gymnasiet blev tredelt; en ny- og klassisk-sproglig gren samt en matematisk-naturvidenskabelig gren.

Denne lov skulle vise sig at blive grundlaget for de kommende næsten 60 års undervisning i Danmark.

Gymnasiets overordnede formål var ifølge 1903-loven at være almentdannende, men først i 1906 anførtes et formål for matematikundervisningen, og det kun for sproglige [39]:

> Formaalet for Undervisningen paa de to sproglige Linier skal ikke saa meget være at bibringe Eleverne omfattende Kundskaber i Matematik, ..., som at skole Elevernes Tænkeevne ved at indøve den gennem Matematikkens stringente Betragtningsmaader. Ved Undervisningen bør man derfor særlig lægge vægt på en udtømmende og omhyggelig teoretisk Behandling af de optagne Afsnit.

Indholdet i undervisningen for de sproglige klasser var givet ved to overordnede emnegrupper; Aritmetik & Algebra og Geometri. Hvordan man tidsmæssigt fordelte de to emner, har vi ikke fundet litteratur om, men ifølge pensumplanen ser det ud som om fordelingen er ca. 50—50.
I formålet med matematikundervisnigen er der en klar vægtning af de formaldannende egenskaber ved matematikken. At matematikken har været formaldannende, var der på det tidspunkt bred enighed omkring. Man må derfor også have ment at geometrien som emnegruppe kunne bidrage til formaldannelsen af eleverne.

Almenskoleloven af 1903 [39] bød for den matematiske gren af gymnasiasterne på elevdemokrati. Der skulle læses 6 emnegrupper, hvoraf de 5 var fastlagt i bekendtgørelsen. Disse var: Artimatik & Algebra, Plangeometri, Trigonometri, Stereometri og Analytisk Plangeometri. Det sidste emne skulle være enten et forløb behandlende emnerne aritmetik & algebra, analytisk geometri og steometri eller infinitesimalregning. Efter 1913 læste alle klasser infinitesimalregning [26], dvs. et skridt væk fra geometrien.

At det netop blev infinitesimalregning og ikke det mere geometrisk orienterede forløb, er der ikke nogen åbenlys forklaring på.

Gertz var som før omtalt en af hovedkræfterne bag almenskoleloven, og var fortaler for de formaldannende egenskaber ved geometrien.
I opposition til denne holdning er T. Bonnesen[6]. I artiklen *Matematikken i Gymnasiet: Overvejelser og forslag* [6] skriver Bonnesen:

[6]Professor i matematik. Medlem af samme arbejdsgruppe som Gertz under udarbejdelsen af almenskoleloven.

> Matematikundervisningen har kun Værdi, men da ogsaa en ganske overordentlig stor Værdi, ved den Rolle, matematikken spiller i det praktiske Liv, og kun ved at fremdrage Anvendelsen som det væsentlige, vil det være muligt at udvikle den rette Forstaaelse og interesse hos Eleverne.

Bonnesen fremhæver i denne forbindelse funktionsbegrebet som noget særdeles centralt, idét dette ikke bare bruges af fysikere og teknikere, men også læger, jurister, statistikere o.m.a., der næsten dagligt bliver præsenteret for grafer, statistikker og andre data. Han opsummerer med at foreslå indførsel af retvinklede koordinatsystemer og grafisk fremstilling allerede i mellemskolen.

Bonnesen tillægger ikke geometrien den store vægt, men vil på den anden side heller ikke fornægte visse positive sider af den. Han tænker her på de deduktive egenskaber, da han i [6] fremhæver:

> Man kan ikke helt forbigaa Rumsansen.

Rumsansen er for Bonnesen et positivt og nødvendigt træk ved geometrien, som det er nødvendigt at undervise i.

Endelig skal vi nævne Johs. Mollerup fra denne periode. Han argumenterer i artiklen *Om undervisning i matematik* [24] for, at gymnasiet trænger til en “opstramning”. Matematik som undervisningsfag og i særdeleshed geometri lider alt for meget under, at man ikke opstiller det nødvendige system af grundsætninger. Mollerup, som tydeligvis hælder til samme side som Gertz og Petersen, siger om geometrien:

> ... omtrendt alene, kan varetage en uundværdlig Udvikling af Elevernes logiske Evne, idet den forbereder dem til Ræsonnementer, der daglig forefalder i Livet.

Altså en meget klar understregning af de formaldannende egenskaber ved geometrien.

Diskussionerne i begyndelsen af dette århundrede gik altså dels på forsvaret af de formaldannende egenskaber ved matematikken, repræsenteret ved den deduktive klassiske geometri, og dels på det anvendelsesorientrede repræsenteret ved funktionsbegrebet, infinitesimalregning mm.

Måske var det denne polarisering af diskussionen, der i årene 1916 til 23 fik professor Hjelmslev til at udgive fire lærebøger (Elementær Geometri

1, 2, 3 & 4). Hjelmslev indførte i sine lærebøger, det han kalder virkelighedsgeometri, dvs. geometri med udgangspunkt i den virkelighed, den studerende befinder sig i (eller omgivet af). Virkelighedsgeometri bygger ikke på den abstrakte geometris aksiomatiske grundlag (og deduktionsmetode), men er bygget op omkring induktion [17].

I 1935 kom en ny ordningen, dog uden de store radikale ændringer. Med denne ordning skulle matematikken for de sproglige grene være mere anvendelsesorienteret. For første gang blev der nu anført et formål med matematikundervisningen for matematikerne:

> Formaalet med Undervisningen er at bibringe Eleverne Kendskab til de reele Tal og disses Anvendelse til Beskrivelsen af Funktioner, samt Kendskab til Simple Figurer saavel i Planen som i Rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger.

I bekendtgørelsen [40] af samme år uddybes dette:

> Undervisningen bør i saa høj Grad som muligt tilstræbe en Sammenhæng mellem de forskellige Dele af Stoffet, og Funktionsbegrebet træder herved naturligt i forgrunden.
>
> ...
>
> Der bør endvidere lægges Vægt paa at udvikle Elevernes Rumsans (eventuelt ved Anvendelse af retvinklet Projektion).

Af 1935-ordningen kan det iøvrigt ses, at man har lagt vægt på den udviklingsretning Bonnesen og til dels Hjelmslev stod for. Dvs. et lille skridt væk fra den klassiske geometri til fordel for udbygning af funktionsbegrebet og den analytiske geometri, hvor argumentet igen er anvendelsesorienteret, i og med at stadig flere og flere studerende gennem deres fremtidige studie/erhverv har brug for at kende til funktionsbegrebet.

I 1953 kommer endnu en ordning. Ordningen indebar for de sproglige klasser at matematik helt afskaffedes. For de matematiske klassers vedkommende er formålet med undervisningen stort set identisk med 1935-ordningens, bortset fra at der angives et formaldannende argumet for undervisningen:

> ... at udvikle og skole deres evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform ...

Den klassiske geometri må nu for alvor vige pladsen for funktionsbegrebet og den analystiske geometri, dog uden at være helt forsvundet, hvilket kan ses af indholdsfastsættelsen [26], der stadig indeholdt lidt syntetisk geometri. Dette var som før omtalt en naturlig følge af den udvikling, der havde været i et halvt århundrede.

2.3 Opsamling

Før århundredeskiftet var matematikundervisningen, i den højere skole i Danmark, selvfølgelig langt fra universitetets niveau. Men i og med at det var universitetsfolk, der i høj grad stod for udformning og planlægning af love, bekendtgørelser mm., var matematikundervisningen rettet mod universitetsuddannelsen, dvs. matematikken var primært studieforberedende. I den praktiserede undervisning var den klassiske geometri udgangspunktet for matematikken. Geometriens rolle i undervisningen var at styrke den "logiske tænkning" dvs. en vægtning af de formaldannende egenskaber.

Efter århundredeskiftet og frem til 60'erne spillede geometrien også en central rolle. Formålet var at træne elevernes rumforståelse. Den var stadig en stor del af fundamentet for matematikundervisningen, selvom den med tiden blev gjort mere og mere analytisk. Pensummet blev ændret en del, til fordel for en mere videnskabsrelevant matematik, hvor især funktionsbegrebet havde en central rolle. Denne modernisering af gymnasiets pensum, hvorved skellet til universiteterne blev forsøgt ujævnet, var imidlertid speciel for Danmark. Den udvikling fandt ikke i samme grad sted i de øvrige europæiske lande. Skellet mellem den indledende skole og universitet blev derfor i mange lande opfattet som stort.

Man havde i Danmark løbende forsøgt at harmonisere forholdte mellem gymnasiet og de højere læreanstalter. Derved blev geometrien mere analytisk fremstillet og funktionsbegrebet fik en mere central placering i undervisningen. Diskussionerne omhandlede altså ikke hvorvidt den klassiske geometri kunne bidrage til elevens dannelse, men hvorvidt det var nødvendigt at give eleven forståelse af den analytiske geometri og funktionsbegrebet. Da formålet med undervisningen primært var studieforberedende valgte man at sætte funktionsbegrebets anvendelsesværdi prioriteret højt.

Kapitel 3

Royaumont seminaret

Når vi har valgt at gøre 1959 til et skillepunkt i geometriens historie skyldes det, at man i dette år afholdt et seminar i OEEC-regi[1] (Royaumont seminaret), der havde til formål at afklare spørgsmål vedrørende matematikundervisningen i folke- og gymnasieskolen. Seminaret fik revolutionerende følger for undervisningsstrategien i Danmark og i de øvrige deltagende lande. Til seminaret havde man inviteret 3 personer fra hvert af OECD-landene[2] - en matematiker, en matematikunderviser og en ledende person fra undervisningsministeriet. Formålet med seminaret var at finde et fælles grundlag for en ny skolereform, der tog hensyn til de nye matematiske behov, som var opstået i løbet af de sidste 100 år. En af konsekvenserne af seminaret var, at man nedsatte et udvalg, der på baggrund af diskussionerne på seminaret, udarbejdede en ny skolereform, som blev indført i det danske skolesystem i 1961.

Formålet med dette kapitel er at redegøre dels for baggrunden for reformen og dels for reformens betydning for geometriundervisningen. Dette vil blive gjort gennem en undersøgelse af hvilke kræfter, der igangsatte diskussionerne, hvilke diskussioner man havde og hvilke konsekvenser, de fik for udformningen af undervisningen. Et af de mest fremtrædende argumenter for at diskutere en skolereform var, at skellet mellem skoleundervisningen og den øvrige matematiske verden efterhånden var blevet problematisk stort. For at forstå matematikreformen og de diskussioner, der forårsagede den, må vi derfor i første omgang betragte de tendenser inden for matematikforskningen, der var årsag til, at universitetsverdenen havde fjernet sig fra

[1] OEEC forkortelse for "Organisation for European Economic Co-operation" Oprettet i 1948 og forløberen for OECD.

[2] Organisation for Economic Co-operation and Development, sammenslutning fra 1960 bestående af de vesteuropæiske lande, Canada og USA.

den indledende skole. Samtidig er det også nødvendigt at forstå, at en så gennemgribende reform ikke finder sted uden at der fra det omgivne samfund er et udtalt ønske herom. Derfor hører der til forståelsen af reformskiftet også en betragtning af de stærke samfundsmæssige og økonomiske drivkræfter, der lå bag.

Kapitlet vil være opdelt således, at vi ser på den samfundsmæssige og økonomiske udvikling og på hvilke krav disse sætter til matematikundervisningen. Endvidere vil vi i kapitlet analysere de diskussioner, der fandt sted på Royaumont seminaret, hvilke retningslinier for reformskiftet man nåede til enighed om og hvilke konsekvenser det fik for skoleundervisningen i Danmark. Behandlingen af Royaumont seminaret er baseret på en rapport, udarbejdet af professor Howard F. Fehr *New Thinking in School Mathematics* [13]. Rapporten giver referater af de indlæg, der var på seminaret, samt en beskrivelse af de konklusioner, der blev draget på baggrund af indlæggene.

3.1 Den matematiske udvikling

I de 100 år forud for seminaret var der mange forsøg på at identificere det essentielle ved matematikken. Matematikere som Gottlob Frege og Bertrand Russell foretog i slutningen af 1800-tallet en dybtgående analyse af matematikkens begreber og teorier. Formålet med arbejdet var at skabe et fælles fundament for de matematiske discipliner. Arbejdet resulterede i *logicismen*, der var et forsøg på at beskrive de strukturelle sammenhænge i matematikken ved hjælp af logiske begreber. Der opstod imidlertidig problemer ved forsøget på at opbygge en matematisk struktur baseret på de logiske begreber, da det viste sig, at man undervejs måtte gøre sig nogle ikke-logiske antagelser [30, p. 20].

En af årsagerne til dette grundlagsarbejde kan findes i en erkendelse af, at der i matematikken eksisterede selvmodsigelser inden for de grundliggende begreber [10, p. 32]. I gennem det 19. århundrede havde det f.eks. lykkedes Decennier at finde eksempler, hvor de Euklidske plangeometriske aksiomer ikke var opfyldt [9, p. 7]. Ligeledes viste det sig også, at den Cantorianske mængdelære var inkonsistent og gav anledning til en række paradokser. Disse og andre modsigelser resulterede i *grundlagskrisen*. Flere af datidens matematikere forsøgte at finde en løsning på denne grundlagskrise.

Bl.a. forsøgte David Hilbert at komme ud af grundlagskrisen ved at opstille matematikken i formelle systemer og gennem analyser af disse sikre sig, at matematikken blev konsistent. Hilberts program bestod af tre punkter [5, p. 31]:

1. En formel definition af et "matematisk bevis".

2. En fastlæggelse af et passende grundlæggende aksiomssystem.

3. Et konsistens-bevis for aksiomssystemet, dvs. et bevis for, at der ved korrekt bevisførelse (i henhold til punkt 1) med anvendelse af aksiomerne fra punkt 2 ikke opstår selvmodsigelser.

Problemerne med det formalistiske grundlag var, at man ikke blot skulle sikre sig konsistens i den nuværende matematik, men at man også skulle sikre sig, at der ikke engang i fremtiden ville kunne opstå inkonsistens i de matematiske teorier [30, p. 23].

I midten af 30'erne blev på initiativ af de franske matematikere André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chevalley og Henri Cartan [5, p. 24] dannet en arbejdsgruppe, som ligeledes forsøgte sig med det matematiske grundlagsarbejde. Gruppen, der hurtigt voksede til 10 personer, skrev under pseudonymet Nicolas Bourbaki. Oprindeligt var formålet med arbejdsgruppen at skrive en lærebog i analyse, som gav de studerende en let indføring i alle de nye matematiske resultater. Bourbaki gruppen udførte et stort arbejde med at give en grundlæggende fremstilling af analysen, men efterhånden udviklede projektet sig til at blive en systematisk fremstilling af store dele af matematikken. Bourbakisterne var i deres grundlagsarbejde på mange områder inspireret af Hilberts formalistiske ideer om, at et aksiomatisk-deduktivt program var en forudsætning for grundlagsdiskussionen. Bourbakisterne arbejdede på at analysere og strukturere de matematiske teorier og på denne måde finde et fælles aksiomatisk fundament. De forsøgte at samle den efterhånden meget forgrenede videnskab (både den gamle matematik og den nye abstrakte) i en aksiomatiseret og formalistisk matematik. For at kunne gennemføre Bourbaki-programmet var det nødvendigt at konstruere et formelt sprog, hvori matematikken kunne formuleres. Det aksiomatiske grundlag for universaliteten af matematikken blev det mængdeteoretiske og gruppen identificerede med udgangspunkt i mængdeteorien 3 typer af strukturer (de såkaldte moderstrukturer), der var gennemgående i opbygningen af enhver matematisk struktur [30]:

- En mængde med en komposition.

- En mængde med en ordningsrelation.

- En mængde med et omegnssystem.

Dette aksiomatisk-deduktive program udgjorde grundlaget for Bourbakisternes *strukturalisme*. Ideen med at danne et aksiomatisk grundlag for hele matematikken med udgangspunkt i topologien og den moderne algebra fandt hurtigt anerkendelse. De nye begreber fra mængdelæren havde deres anvendelse ved at de kunne udtrykke matematiske sætninger præcist og hurtigt. Samtidig blev det nye sprog af mange opfattet som den eneste måde, hvormed man på en hensigtmæssig måde kunne holde styr på den nye matematik.

Samtidig med at matematikkens indre selvmodsigelser havde været med til at sætte skub i grundlagsdiskussionerne, havde de også haft en anden effekt. F.eks. havde arbejdet med at belyse parallelaksiomets rolle i den euklidske geometri affødt en lang række udgaver af ikke-euklidsk geometri. De ikke-euklidske systemer var lige så konsistente som den euklidske, men mange havde problemer med at acceptere, at det var relevant at studere systemer, hvor det aksiomatiske grundlag ikke havde nogen mening i fysikken.

På internationalt plan rejste sig en diskussion om vigtigheden af den nye abstrakte matematik. Den nye matematik udgjorde efterhånden grundlaget for al forskning og ansås af mange for at være en nødvendighed for den videre udvikling. Den matematiske udvikling på universiteterne havde ikke væsentlige konsekvenser for den matematik, der blev undervist i på skolerne. Udviklingen af universitetsmatematikken skabte derfor et stort skel mellem skolematematikken og den øvrige matematikverden. Derfor mente man, at det var tid til at diskutere den nye matematiks rolle på de indledende niveauer.

Den udvikling, der skete internationalt, var ikke markant i Danmark, idet Danmark internationalt set var langt foran med hensyn til moderniseringen af gymnasiets undervisning. I mange af de øvrige lande tog matematikundervisningen stadig udgangspunkt i Euklids *Elementerne*. Universitetets struktur havde heller ikke ændret sig væsentligt i Danmark, hvorfor skellet ikke i samme grad var iøjenfaldende. Derfor var der ikke mange danskere, der blandede sig i diskussionen. Blandt de danske debattører kan man bl.a finde Svend Bundgaard, Ole Rindung og Bent Christiansen.

3.2 Den samfundsmæssige udvikling

Matematikken har altid fundet sin anvendelse uden for sit eget felt. Den har dels været et vigtigt værktøj i fysikken og dels i forbindelse med handel. Som nævnt i forrige kapitel, har matematikkens anvendelse i samfundet sat sit præg på indholdet af den undervisning, man har valgt at give eleverne i skolen [13, p. 49]. Igennem det 19. århundrede var undervisningen direkte relateret til spørgsmål i fysikken, opmålinger, navigation eller handel. Igennem de sidste ca. 100 år forud for Royaumont seminaret, var der i mellemtiden sket en stor udvikling rent matematisk og med den nye matematik blev der åbnet muligheder for at bruge matematikken til løsning af en anden type problemer. De nye matematiske tanker gav matematikken langt større potentiel anvendelighed og der skete en matematisering af en lang række andre videnskaber. Økonomiske og befolkningsmæssige udviklingsmodeller begyndte at skyde frem og blev bredt accepteret som udgangspunkt ved beslutningsmæssige processer. At forstå og beherske matematikken var blevet en forudsætning for at kunne begå sig i den øvrige videnskabelige verden. F.eks. nævner professor Albert W. Tucker [13, p. 52] at der er matematiske emner, der måske ikke har særlig relevans i fysikken, men som finder stor anvendelse i samfundsvidenskaben. Det drejer sig f.eks. om:

- Den diskrete matematik. Tidligere blev der lagt stor vægt på kontinuitet, til trods for at mange virkelige situationer er bedre tjent med en diskret fremstilling.

- Brugen af sandsynlighedsregning og statistik fandt hurtigt sin anvendelse f.eks i forbindelse med kvalitetskontrol.

- Matrixalgebraen, der gør det muligt at løse lineære programmeringsproblemer.

Med det teknologiske og økonomiske opsving i midten af 1950'erne kom der en voksende interesse for den kommende arbejdskraft. Der opstod et behov for at kvalificere folk, så de kunne imødese det stigende krav om teknologisk kompetence.

Den stigende efterspørgelse på uddannede teknikere, økonomer, folk til offentlig administration osv. medførte, at der fra samfundets og økonomiske organisationers side blev investeret kraftigt i uddannelsessystemet [30]. Da hele den teknologiske verden var blevet mere og mere afhængige af matematikken, var det i høj grad matematikundervisningen, der prægede diskussionerne. I Danmark nedsatte man i 1956 *teknikerkommissionen*, der med betænkningen fra 1959 *Teknisk og naturvidenskabelig arbejdskraft* beskæftigede sig med de fremtidige behov for tekniske uddannede samt skitserede rammerne for de uddannelser, der skulle dække behovet. Med denne betænkning havde man fra administrativt og politisk hold gjort klart hvordan uddannelsessystemet skulle være med til at løse problemet med teknikermanglen.

En af forudsætningerne for Royaumont seminaret var derfor, at en evt. ny undervisningsreform skulle tage hensyn til de nye krav samfundet og teknologien stillede. Matematikundervisningens opgave var ikke længere kun at uddanne fremtidige matematikstuderende, men i høj grad at forme hele den fremtidige uddannede arbejdsstyrke.

3.3 Diskussioner og konklusioner på Royaumont seminaret

Baggrunden for seminaret var et ønske om en forbedring af skolens matematikundervisning, især i de ældste klasser. Profssor Howard F. Fehr skriver i rapportens indledning [13, §3]:

> The demand for scientists and engineers – all of whom must have sound knowledge and understanding of mathematics – is growing. New application of mathematics in industry and in other branches of economic activity are leading to a demand for more mathematicians with new kind of skills. All these demands are creating a need for a re-appraisal of the content and methods of school mathematics.

At en forbedring af matematikundervisningen nødvendigvis betød, at der i undervisningen bl.a. måtte tages hensyn til de forandringer, der var sket i samfundet, er et meget godt billede af udgangspunktet for den debat der var på seminaret.

Vi har i vores fremstilling af debatten valgt at lægge vægt på et af de mest revolutionerende oplæg og hvilke diskussioner det affødte. Oplægget blev holdt af Dieudonné, der var yderst radikal i forhold til det matematiske pensum. Hans oplæg skulle ifølge rapporten [13, p. 31] have vakt en livlig diskussion, men desværre er det kun konklusionerne, der er gengivet i rapporten. Når vi har valgt at tage udgangspunkt i Dieudonnés oplæg skyldes det, at hans holdning var kendetegnende for det reformarbejde, der fulgte efter seminaret. Der vil til sidst i oplægget blive suppleret med enkelte bemærkninger fra øvrige deltagere. Disse bemærkninger skal dels tilføje diskussionerne nogle yderligere indgangsvinkler og dels synliggøre den overensstemmelse, der tilsyneladende var mellem oplægsholderne.

3.3.1 Dieudonné

Som tidligere medlem af Bourbakigruppen og professor på Institut des Hautes Études Scientifiques i Paris beskæftigede Dieudonné sig hovedsageligt med hvordan de ældste klasser i skolen skulle fungere i forhold til, hvad der forventedes af de elever, der skulle fortsætte på universitetet og de tekniske læreanstalter. Formålet med oplægget var som Dieudonné indledningsvis skrev at undersøge [13, §84]:

- What mathematical background professors in these institutions would like to find in the students at the end of their secondary school years.
- What they actually get.
- How it would be possible to improve the existing situation.

Dieudonné påstod, at de kvalifikationer skolen gav eleverne var utilstrækkelige eller forkerte i forhold til at starte på universitetet og bemærkede at problemet var stadigt stigende. Universitetets matematikundervisning lå så langt fra den matematik, der blev undervist i på gymnasiet. Det spring, der skete rent matematisk fra gymnasiet til universitetet gav nogle vældige problemer for eleverne. For det første havde eleverne svært ved at acceptere den store ændring i matematikken - nye emner og en ny begrebsverden. For det andet tog det tid at blive fortrolig med det nye sprog og de nye symboler og da det stadigt forventedes, at eleverne mestrede de gamle discipliner som algebra og analytisk geometri, blev pensummet for omfattende. Mange lærere oplevede derfor, at eleverne kun opnåede en overfladisk og tåget forestilling om, hvad det hele drejede sig om. Derfor mente Dieudonné, at nogle af de opgaver, der påhvilede universiteterne, skulle varetages af gymnasierne. Dette ville kræve en reorganisering af undervisningen på de indledende niveauer, således at man allerede på et tidligt niveau introducerede begreber som mængder, afbildninger, grupper, vektorrum osv.

Man var allerede så småt på de franske gymnasier begyndt at indføre vektoralgebra og en smule analytisk geometri - men undervisningen havde stadig vægten på klassisk geometri mere eller mindre med udgangspunkt i Euklid med lidt algebra og talteori. Dieudonné mente, at der måtte gøres noget nu ellers ville der opstå en situation, hvor man var forhindret i videre fremskridt. Han mente, at mottoet for nye reform burde være:

> Euclid must go!

Her tænkte Dieudonné ikke på den euklidske geometri, men på den euklidske fremstilling, som man møder den i *Elementerne*.

Dieudonnés argumentation for afskaffelsen af den euklidske geometri

De strukturalistiske forsøg på at karakterisere matematikken ved hjælp af fundamentale strukturer satte også sit spor på den euklidske geometri. Derom sagde Dieudonné [13, §102]:

> This has made it possible to reorganise the Euclidean *corpus*, putting it on simple and sound foundations, and to re-evaluate its importance with regard to modern mathematics – separating what is fundamental from a chaotic heap of results with no significance except as scattered relics of clumsy methods or an obsolete approach.

Det fundamentale i den euklidske geometri kan i følge Dieudonné principelt læres i løbet af blot 3 timer – en med aksiomsystemet – en med nyttige konsekvenser og muligheder – og en med eksempler på interessante øvelser. Og videre sagde han [13, §104 & §108]:

> *Everything else* which now fills volumes of "elementary geometry" – and by that I mean, for instance, *everything* about triangles (it is perfectly feasible and desirable to describe the whole theory without even *defining* a triangle!), almost everything about inversion, systems of circles, conics, etc – has just as mush relevance to what mathematicians (pure and applied) are doing today as magic squares or chess problems!
>
> ...
>
> The basic notions (point, line, distance, angle) are never given a strict axiomatic definition; they are introduced by direct appeal to intuition, although their exact relation to the physical objects they are supposed to "idealise" is never made very clear. As no complete system of axioms is ever stated, it is, of course, completely impossible to check the correction of any proof.

Til dem, der troede på den euklidske tradition og mente, at det var den eneste måde at få elevernes sind åbne for matematikken, sagde Dieudonné, at det kunne man ikke vide for man havde aldrig prøvet at gøre det anderledes. Og selvom tidens matematikere til trods for deres uddannelse havde opnået nogle imponerende resultater, var det ikke noget argument for fortsat at bruge de gamle undervisningsprincipper. De matematikere, der havde stået for udviklingen ville formentlig have kunnet klare det samme helt uden at have modtaget undervisning indtil deres 16. år. Han mente endvidere, at alle de tilstedeværende på deres krop måtte have mærket den lidelse de havde måtte gå igennem for at komme af med den dårlige vane og forkerte synspunkter, som resultat af den gammeldags undervisning.

Hvad skal i følge Dieudonné træde i stedet for euklid

Dieudonné beskæftigede sig i sit oplæg med hvilken matematik, der skulle substituere den euklidske geometri, for at undervisningen i skolen på fornuftig vis understøttede det matematiske pensum på universiteterne. Nedenstående punkter er nogle af de væsentlige emner, som han mente burde indgå i undervisningen [13, §113].

- Matrices and determinants of order 2 and 3.
- Elementary calculus (functions of *one* variable).
- construction of the graph of a function and of a curve given in parametric form (using derivatives).
- Elementary properties of complex numbers.
- Polar co-ordinates.

Disse emner ville blive fulgt op på universitetet af emner som [13, §144]:

- Linear algebra in its general form (vector spaces of arbitrary dimension, general theory of matrices and determinants).
- Quadratic forms and finite dimensional Euclidean spaces.
- Derivatives and integrals of functions of serveral real variables, with their various applications. Differential and partial differential equations. Elementary differential geometry.
- Elementary theory of metric spaces, Banach spaces, Hilbert space and other functional spaces. Elementary functional analysis.

Han mente, at den store forskel på undervisningen på den indledende skole og på universitetet burde være abstraktionsniveauet. At emnerne, der introduceres i folke- og gymnasieskolen alle havde et intuitivt aspekt, hvor de på universitetet blev mere abstrakte. Med denne opdeling af emnerne mente Dieudonné ikke, at undervisningen i den indledende skole ville involvere dybere og mere abstrakt tænkning end den klassiske geometri, der var på daværende tidspunkt.

Dieudonné mente, at eleverne på de højere klassetrin burde introduceres for den formelle matematik, men mente, at en aksiomatisering af matematikken kun kunne bære frugt når eleven var fortrolig med det korresponderende stof, hvorfor der konstant måtte appelleres til intuitionen. Når logiske slutninger præsenteres, skal det altid ske helt ærligt - man skal ikke forsøge at dække over huller eller mangler. Det sidste hængte han op på den euklidske geometri, der præsenteredes ved en række definitioner, der som han sagde ikke definerede noget som helst overhovedet og som ikke kan undergå en logisk analyse. Hvorfor man ikke var i stand til at give eleverne en fuldstændig deduktiv teori, startende fra en basis af aksiomer.

Deiudonné sagde, at han ikke ville minimere vigtigheden af geometrien i matematikken - den havde aldrig haft en større rolle. Det var tydeligt, at anvendt matematik havde sin baggrund i geometrien. Det han angreb i skoleundervisningen var derfor undervisningsmetoden - ikke at hovedformålet med undervisningen var, at eleverne fik trænet og udviklet en intuitiv forståelse af rum. Hvis et af skolens formål var at forberede kommende universitetsstuderende, skulle undervisningen ikke være baseret på løsning af kunstige, komplicerede og ubrugelige opgaver, men i stedet skulle man forsøge at klarlægge de geometriske basisideer. Dieudonné sagde f.eks. [13, §151]:

> For instance, whereas the notion of *vector* has paramount importance everywhere in modern science, the notion of *triangle* is an artificial one, with practically no applications outside the highly specialised fields of astronomy and geodesy.

Diskussion af Dieudonné's oplæg

For Deiudonné var formålet med undervisningen tydeligvis at forberede eleverne til universitetet. Han fokuserede på, hvilke emner man på universitetet ønskede, at de studerende havde stiftet bekendtskab med. Hans oplæg indeholdt ingen overvejelser om, hvorvidt det universitetsforberedende pensum på fornuftig vis kunne bidrage til uddannelsen af de resterende elever. Dieudonné kommenterer ikke matematikkens almendannende værdi. Dieudonné præciserede i oplægget, at han kun anskuede situationen fra et universitets synspunkt og derfor var klar over, at der lå visse begrænsninger for konklusionerne. Geometriens rolle i uddannelsen af eleverne var i følge Dieudonné at udvikle deres intuitive forståelse af rum. Dette ud fra en studie- og erhvervsforberedende begrundelse om at de geometriske ideer spillede en stor rolle i den videregående matematik og at anvendt matematik har baggrund i geometrien.

Deiudonné's oplæg skulle ifølge rapporten have provokeret de øvrige deltagere og de efterfølgende diskussionerne var livlige. Rapporten gengiver imidlertidig kun de punkter man kunne nå til enighed om. Følgende er et udpluk af konklusionerne på baggrund af Dieudonnés oplæg.

På daværende tidspunkt brugtes for meget af elevernes tid på at lære geometri eller andre emner, der havde meget lidt relevans for den fremtidig matematikstuderende.

Man kunne dog ikke bare fjerne den euklidske geometri fra undervisningen. Det var vigtigt, at eleverne havde en vis rutine i geometrisk fremstilling, da stort set al matematisk behandling kræver geometrisk repræsentation.

Selv eksemplet med trekanten, som Dieudonné fremhævede som unyttig, kunne forsvares. For figuren har dybe rødder i den menneskelige intellektuelle udvikling. Den er det eneste stive polygon og som sådan har den stor vigtighed for praktisk naturvidenskab.

Den indledende geometriundervisning skulle ske gennem intuitiv og eksperimentelle procedurer og her var trekanten af største vigtighed. I forhold til Dieudonné's udsagn om stringent matematik - "i logisk demonstration må alting være i orden" - mente man, at meget af den euklidske geometri er korrekt ud fra dette synspunkt, hvorfor man med god samvittighed kunne undervise i disse dele.

Der kunne ikke opnåes enighed om på hvilket alderstrin elverne skal introduceres for den formelle geometri, men alle var enige om, at en fuldstændig aksiomatisering skulle vente til de sidste år af undervisningsforløbet.

Den eneste kommentar til at ikke alle elever skulle fortsætte på universitetet var, at man på et tidspunkt måtte skille de elever fra, der ikke skal læse matematik, da disse ikke havde samme behov for at lære stringent matematik.

3.3.2 Bemærkninger fra prof. W. Servais

Den belgiske professor W. Servais, sekretær for den internationale kommission for studie og forbedring af matematisk undervisning afholdt et oplæg, hvori han diskuterede omfanget og metoden, hvormed man kunne få indført de sidste 100 års matematiske begivenheder og opdagelser i undervisningen.

Professor W. Servais sagde, at alene af den grund at mængder udgør basis for konstruktion af matematikken, var det nødvendigt at introducere mængdelæren på et så tidligt stadie i undervisningsforløbet som muligt. I det han tilføjer [13, §229 & §231]:

> ... Moreover, sets have a bearing on everyday life and, from the phychological point of view, the concepts underlying them are among those most easily acquired from or simulated activities with tangible objects and concrete aggregates.
>
> ...
>
> Finally, the rudimentary algebra of sets gives examples of operational properties not involing numbers, so that it is realised from the start that the field og algebra is not confined to the algebra of numerical operations.

Han mente ikke, at en modernisering af matematikken kunne ske ved blot at indføje nye emner i det gamle pensum. Hele strukturen måtte pány bygges op fra grunden.

Uden at kommentere, hvilken rolle geometri burde have i undervisningen, kommer Servais' holdning klart til syne i oplægget. Servais var tilhænger af, at lade de strukturalistiske ideer forme undervisningen. Han lagde vægt på mængdebegreberne og den moderne algebra og støttede derved indirekte Dieudonné i, at den klassiske geometri spillede en for stor rolle i undervisningen.

3.3.3 Bemærkninger fra Dr. Botsch

Dr. Otto Botsch, rektor på Helmholtz gymnasiet i Tyskland, havde udarbejdet en række geometribøger, hvori han introducerede bevægelsesgeometri, afbildningsgeometri og reflektionsgeometri. Udgangspunktet for lærebøgerne var Felix Klein's ide om transformation af planer. Felix Klein havde udarbejdet et undervisningsprogram for geometri baseret på gruppeteori, og mere end halvdelen af de tyske skoler eksperimenterede på dette tidspunkt med denne tilgang til geometriundervisningen.

Botsch sagde i sit oplæg [13, §273]:

> Euclid's system has outlasted centuries of development in mathematics. The aims of modern instruction in the schools transcends the limits of Euclid less than we might suppose. But Euclid is a prefabricated house, and its instruction is static. It is our aim to make instruction dynamic, and this cannot be done by

> giving our pupils a systematically ordered catalogue of tasks to accomplish, which is essentially what we do in teaching Euclid.

Botsch foreslog, at undervisningen i geometri startede med en introduktion af translation/forskydninger, rotation og reflektion af simple geometriske figurer og at man derigennem langsomt kunne opbygge en mere generaliseret anvendelse af grupper af transformation [13, §279]:

> Translation in space leads to a geometry of vector which, at the beginning, we can limit to addition, subtraction and multiplication by a scalar. At a later stage the scalar product can be introduced, for by its use many interesting theorems can be proved, and it is also helpful in the study of analytical geometry. Vectors in space are also indispensable in modern physics and correlation problems in statistical analysis.

Botsch's oplæg fremprovokerede megen diskussion. Fra Fehrs rapport fra seminaret kan det ses, at diskussionen omhandlede formålet med geometriundervisningen. I referatet fra diskussionen skriver Fehr bl.a. [13, §283]:

> The first problem concerned the nature of an axiomatic structure and how the proposed programme could give the same understanding of postulates, definitions, undefined terms and theorems as is now posible in the teaching of Euclidean geometry. In geometric instruction, it is essential that pupils come to understand the difference (a) between that which they admit and that they prove; (b) between the termination of intuitive methods and the use of deductive reason; and (c) between the physical objekt and its representation by drawing and abstracted concept used in formal deduction.

Man var på seminaret enige om at introduktionen af vektorgeometri på et tidligt tidpunkt i skoleforløbet ville forberede eleven på universitetet og samtidig gøre undervisningen dynamisk. Problemet med det foreslåede undervisningsprogram var at skabe klarhed over, hvad der skulle accepteres intuitivt og hvad der var det aksiomatiske udgangspunkt.

Med denne holdning var der en klar tilkendegivelse af at det væsentlige i geometriundervisningen er dens anvendelse i fysikken. Herved blev vektorbegrebet og de affine afbildninger centralt placeret.

3.3.4 Bemærkninger fra Dr. Marshall H. Stone

Oplægget fra Dr. Marshall H. Stone fra University of Chicago var langt mere moderat med hensyn til moderniseringen af den indledende skole. Han mente dog, at der var sket større matematisk udvikling de sidste 100 år end i hele den tidligere historie og at moderniseringen af pensummet på universiteterne havde medført en forvridning mellem gymnasiets og universitetets matematiske undervisningsniveau. Derfor kunne man ikke længere negligere, at noget af den moderne matematik måtte introduceres i den indledende skole [13, p. 16].

Dr. Marshall H. Stone kommenterede som den eneste deltager problemerne med den voksende gruppe af elever, der skulle modtage matematisk undervisning. Han bemærkede [13, §34—36]:

> The task of organizing mass education at the secondary level is made difficult, in consequence, by the necessity of dealing effectively with large numbers of students widely spread out on the scale of intelligence and similarly scattered in respect to both motivation and interests. The obvious course of offering diverse types of curriculum for students of differing ability and objectives is sometimes hindered by the increased costs which may be entailed or by the opposition, as in the United States, of those who conceive of democracy in baldly egalitarian term.
>
> In the long run, however, there can be no other solution to the problem of mass education in a democracy, as justice, social necessity and common sense all require us to give every future citizen just as must education as he is capable of absorbing effectively.
>
> It is perhaps worthwhile to emphasize the element of social necessity, because the point is not frequently enough made in contemporary discussions of educational problems that we need to give quite as much attention in our schools to the technical preparation of skilled workers as to the training of future university students, engineers and scientists.

Dr. Stone kommenterede imidlertidig ikke hvordan matematikundervisningen skulle lægge op til uddannelsen af de nye matematikstuderende, men havde dog følgende bemærkning [13, §25]:

> The educated man, whom we envisage as the end product of our elaborate educational process, should not be left some 200

> years behind the times in mathematics, merely because he is not to be a specialist in science or mathematics.

Stones oplæg bliver i rapporten fremhævet som værende toneangivende for seminaret. Stone berører de samfundsmæssige problemer, der er årsagen til at matematikken skal moderniseres. Stone er i midlertid den eneste, der omtaler disse problemer og dette uden at komme med et løsningsforslag. En modernisering betyder for deltagerne tydeligvis at de begreber og symboler skal introduceres i gymnasiet og at der skal lægges vægt på emner, der har anvendelighed naturvidenskaben.

3.3.5 Konklusionerne på Royaumont seminaret

På trods af at man på seminaret ikke blev enige om et konkret reformforslag, omfanget af og tilgangen til geometriundervisningen, var der dog stor enighed blandt de 17 deltagerlande om størstedelen af forslagene.

Der var enighed om, at undervisningen skulle gennemgå en udvikling, således at der ikke længere skulle lægges vægt på kompleks manipulation, men på logik og strukturer. Dette ville kræve en anderledes repræsentation, hvor der blev benyttet symbolisme og klare definerede koncepter. Brugen af symboler skulle være med til at skabe klarhed og konsistens i matematikken og samtidig være med til at klargøre sammenhængen mellem de forskellige matematiske emner. Der blev krævet at vægten i stedet for at ligge på den euklidske klassiske geometri skulle ligge på at skabe en helhed i matematikken. På denne måde ville det være muligt at nedbryde det store skel, der var mellem skolen og universitetet. [13, §374 & §359]:

> What is needed is not an algebra syllabus alongside arithmetic, geometry, trigonometry and analysis syllabi, but a combined syllabus giving unity to mathematics. The discussions of the seminar are to be viewed as ideas on the way that algebra must be developed as we teach a unified programme. The reform will gradually change our present algebra syllabus – which is largely a set of separate topics – into one which will be a continuous development, through the use of the fundamental laws of number, and thus set the basis for the later study of mathematical structures. ...
>
> However, if Euclid is modified, then much about triangles and several topics, such as invension, systems of circles, etc., as usually given, must go. All this can be replaced by a programme of

elementary mathematics in which deductive geometry is treated by use of vector or real numbers and later merge with algebra, through the study of matrices, determinants, graphs, complex numbers and polar co-ordinates. Trigonometry enters naturally, not as a separate subject but as a part of algebra and geometry and later as a part of analysis.

3.4 Opsamling og diskussion

Formålet med Royaumont seminaret var at udarbejde retningslinier for et konkret reformforslag for undervisningen i gymnasiet og de ældste folkeskoleklasser. Professor Howard F. Fehr præsenterede i rapportens indledning en række samfundsrelaterede begrundelser for seminarets baggrund, men det var ikke de samfundsmæssige perspektiver, der prægede diskussionerne på seminaret. Stone berørte i sit oplæg de nye krav samfundet satte til matematikundervisningen, men kom ikke med noget bud på, hvordan man skulle imødekomme dem. De diskussioner, der var direkte relateret til udformningen af den nye skolereform, handlede primært om, hvordan man skulle tilrettelægge pensummet, så det tog hensyn til den matematiske udvikling. Oplæggene og de efterfølgende diskussioner koncentrerede sig primært om hvilke produkter, man ønskede at eleverne skulle stifte bekendtskab med igennem skoleforløbet.

Forslagenes indhold var i harmoni med de bourbakistiske ideer i den forstand, at man tillagde undervisningen et strukturalistisk syn. Resultatet af seminaret var, at de matematiske strukturelle sammenhænge skulle være klare og den nye terminologi skulle indføres på et så tidligt tidspunkt som muligt.

En stor del af diskussionerne på Royamontseminaret tog udgangspunkt i en kritik af den euklidske geometriundervisning. Denne kritik var ikke rettet mod euklidske geometri som sådan, men snarere på den præsentation af geometrien Euklid giver i *Elementerne*. Størstedelen af geometriundervisningen i de europæiske skoler tog gennem det 19. og i starten af det 20. århundrede udgangspunkt i 9 af disse bøger, og i England blev de uden store ændringer brugt som tekstbøger. [33, p. 7]. Når den Euklidske fremstilling, der var aksiomatisk-deduktiv, i så høj grad havde præget undervisningen i skolerne, skyldes det, som vi nævnte det i kapitel 2, at matematikundervisningen tidligere ansås som værende formaldannende. Den aksiomatisk-deduktive tilgang som sås i Euklids *Elementerne* var et skoleeksempel på strigent og logisk tænkning. Da matematikken tidligere som formål havde haft at "styrke tænkemusklen" og ansås som middel til at træne og skærpe den logiske sans, var den euklidske fremstilling velegnet.

For strukturalisterne var den aksiomatisk-deduktive indgangsvinkel også vigtig. Man fremhævede dog ikke det formaldannende ved den aksiomatisk-deduktive undervisning. Strukturalisterne ønskede at samle de traditionelt skarpt adskilte matematiske emner som analyse, differentialregning, geometri og algebra. Det aksiomatiske grundlag var givet ved de strukturer, der skulle samle matematikken. Formålet med denne samling var at lette tilgangen til den moderne matematik for de efterhånden mange studerende. Det vil sige, at formålet med matematikundervisningen havde bevæget sig fra af være af formaldannende karakter til at være udelukkende studieforberedende.

Kritikken af den euklidske fremstilling drejede sig ikke i så høj grad om formen som mængden af tid, der blev brugt på den. Man mente at vægten i undervisningen blev lagt på mekaniske færdigheder, hvor løsning af konstruktionsopgaver var baseret på udenadlærte sætninger og beviser og mekaniske metoder. Da vægten med den strukturalistiske ide blev lagt på en præsentation af de strukturelle sammenhænge i matematikken, blev geometriens rolle i uddannelsen af eleverne mindre essentiel end den før havde været. Essentielt for matematikken blev de begreber, der ifølge den strukturalistiske tanke, fik matematikken til at hænge sammen (mængdelæren og funktionsbegrebet). Geometrien som man ikke anså som uvæsentlig skulle nu præsenteres med udgangspunkt i disse begreber. Formålet med geometrien var ikke længere at skærpe elevernes logiske sans, men nu udelukkende at give eleverne en forståelse af rum. Den rumlige forståelse kunne ligesåvel opnås gennem en undervisning baseret på affin geometri repræsenteret ved hjælp af vektorer, der havde langt større anvendelighed i fysikken.

3.5 Konsekvenser af seminaret

Selvom debatten på Rouyamont var international og kun ganske få danskere deltog i de efterfølgende diskussioner, fik konklusionerne fra seminaret afgørende konsekvenser for det danske skolesystem. Dette skal ses i lyset af, at der fra samfundets side var stor velvilje i at reformere de naturvidenskabelige fag. De danske matematikere, der havde blandet sig i de internationale diskussioner, var overbeviste om, at man gennem den struktuelle undervisning ville fremme elevernes matematiske indsigt. Da man anså matematikundervisningen som værende central i den teknologiske udvikling var det nødvendigt at følge de internationale strømninger.

En af konsekvenserne af seminaret blev, at man sammensatte en ekspertgruppe, der på baggrund af de retningslinier man kom frem til på seminaret, skulle udarbejde konkrete forslag til en ny reform. Gruppen mødtes i Dubrovnik i det tidligere Jugoslavien i 1960, hvor de udarbejdede rapporten *Synopses for Modern Secondary School Mathmatics*. Rapporten lægger op til, at der i den fremtidige undervisning skal tages udgangspunkt i topologien. Begreber og symboler fra mængdelæren skal introduceres tidligt i undervisningen, således at de kan udgøre fundamentet for introduktionen af f.eks. vektorrum og lineære afbildninger.

I 1960 blev der udpeget en nordisk komité bestående af 4 medlemmer fra hver af de nordiske lande. De danske medlemmer i gruppen var Agnete Bundsgaard, Bent Christiansen, Erik Kristensen og Ole Rindung. Initiativerne fra komitéen fik stor indflydelse på undervisningsreformen i Danmark.

I 1960 udkom betænkningen for gymnasieundervisningen [42]. Her i foreslog man matematik genindført for sproglig gren. Om formålet med matematikundervisningen hed det [42, p. 58]:

For sproglige er formålet:
Formålet med undervisningen er dels at give eleverne et indtryk af matematisk tankegang og metode, dels at give dem nogle matematiske hjælpemidler i hænde, som kan være dem til nytte inden for andre fag i skolen og under deres senere virke.

For matematikere er formålet:
at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber og tankegange,
at vække deres sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet,
at øve dem i behandlingen af konkrete problemer, herunder udførelse af numeriske regninger, samt
at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder.

Udviklingen af rumsansen eller for den sags skyld skærpelsen af elevernes tænkeevne er således ikke længere explicit et mål med undervisningen i geometri.

I afsnittet om læseplaner for matematikundervisningen [42, p. 46] kommenteres:

> Med optagelsen på emnelisten af en række almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra har udvalget ønsket at skabe en egnet ramme for en udvikling hen imod en nærmere kontakt imellem den undervisning, der gives i skolen og den form hvori nutidens matematik fremtræder. En sådan udvikling ønsker udvalget stimuleret.
> For i hovedtræk at karaktisere den ændring i forhold til den nuværende ordning, som det foreliggende forslag for den matematisk-fysiske gren vil medføre, kan det nævnes, at følgende områder er reduceret eller helt bortfaldet: konstruktionslæren, logaritmiske trekantberegninger, keglesnitslæren, stereometriens indledende sætninger, den sfæriske geometri. I stedet er bl.a. følgende nye områder medtaget: en række almene begreber fra mængdelære og algebra, vektore som hjælpemiddel i den analystiske geometri, analytiske rumgeometri, og der er desuden indført et valgfrit emne.

Samme sted føres argumentation for, at der ikke på den matematiske linies samfunds- og naturfagsgrene ikke skal undervises i geometri [42, p. 58]:

> På den matematiske linies samfunds- og naturfagsgrene er undervisningen koncentreret om funktionslæren og læren om tallene, mens de geometriske emner, der tages op på den matematiske-fysiske gren, ikke er medtaget her, hvor fagets timetal er mindre. Dette emnevalg er begrundet med et ønske om, at matematikundervisningen på disse grene skal omfatte et afsnit af matematikken, der fører frem til videregående resultater, og som samtidig spiller en fremtrædende rolle for anvendelserne.

I september 1961 udkom de efterfølgende vejledende bestemmelser. For matematisk gren skal følgende behandles i geometriundervisningen [43, p. 32]:

5. *Plangeometri*
Det retvinklede koordinatsystem. Koordinatskifte.
Vektorer og deres koordinater. Regning med vektorer, herunder to vektorers skalære produkt.
Den rette linjes analytiske fremstillinger.
Afstande og vinkler.
Cirklens analytiske fremstillinger.
Areal af trekant og parellelogram.
Definition og analytisk fremstilling af parabel, ellipse og hyperbel.

Afbildninger af planen på sig selv:
Parallelforskydning, drejning, spejling, multiplikation og sammensætning af disse afbildninger. Ret affinitet.

6. *Rumgeometri*
Det retvinklede koordinatsystem.
Vektorer og deres koordinater. Regning med vektorer, herunder to vektorers skalære produkt.
Den rette linjes parameterfremstilling.
Planens analytiske fremstillinger.
Afstande og vinkler.
Kuglens ligning. Sfæriske koordinater. Sfærisk afstand mellem to punkter (cosinusrelationen).
Polyedre, Eulers polyedersætning, de regulære polyedre.
Rumfang af prisme, pyramide, omdrejningscylinder, omdrejningskegle og kugle.
Overflade af omdrejningscylinder, omdrejningskegle og kugle; areal af sfærisk trekant.
Kongruens og symmetri.

Som det kan ses kommer vektorbegrebet til at spille en central rolle. Der bliver arbejdet med koordinatskifte, parallelforskydning og drejninger af koordinatsystemet. Udformningen ligger altså tæt op ad Dr. Botschs forslåede program. Der skal ikke undervises i geometri på den sproglige linie.

Nye lærebogssystemer, der satte begreberne fra mængdelæren centralt, blev udviklet og i 1965 begyndte ændringerne for alvor at træde i kraft.

Efterkrigstidens årgange var store og dette mærkedes i 60'erne i gymnasiet. Den store tilgang til gymnasierne resulterede i en mangel på både bygninger og lærere. Læremanglen var en af årsagerne til timenedsættelsen i 1968. Der skete følgende ændring: Nedsættelsen af timeantallet betød, at det matema-

	1961	1968
Sproglige	3+3+0	2+2+0
Mat-Sam	5+4+3	5+3+3
Mat-Fys	5+6+6	5+5+6

Tabel 3.1: Ugentlig timetal i matematik for henholdsvis 1. 2. & 3. g. i 1961 og 1968.

tiske pensum måtte revideres, bl.a. udgik det valgfrie emne. Overgangen til

5-dages skoleugen medførte, at der i 1971 kom en ny gymnasiereform. Med denne udgik rumgeometrien af det matematisk-fysiske pensum. At det var rumgeometrien, der gled ud, skyldes i følge Mogens Niss, at rumgeometrien havde fået så lille en plads i pensummet, at eleverne alligevel ikke opnåede en tilfredsstillende indsigt i det rumgeometriske emne. Man mente derfor, at det var her eleverne mistede mindst.

I folkeskolen begyndte *den ny matematik* også lidt efter lidt at gøre sig gældende. De første konsekvenser sås i folkeskolens ældste klasser, men efterhånden blev der udviklet lærebøger, der lige fra de første år indfører det nye begrebsapparat.

Det havde tidligere været folkeskolen opgave at introducere eleverne for de simple geometriske figurer og deres egenskaber, men i 1975 gled den sidste rest af konstruktionslæren ud. Det vil sige at eleverne ikke længere mødte op på gymnasiet med de forventede forudsætninger. Det var derfor nødvendigt at varetage denne opgave i gymnasiet i det omfang tiden tillod det.

Kapitel 4

Efter Royaumont seminaret

Formålet med dette og det efterfølgende kapitel er, at finde frem til de begrundelser, der lå bag reformen med, hvilken den klassiske geometri og den analystiske rumgeometri blev genindført. Vi havde oprindeligt forestillet os, at dette spørgsmål kunne besvares ved, at undersøge de diskussioner man havde af 60'er matematikken og af forslagene til den nye reform, der trådte i kraft i gymnasierne i 1988. Desvære har vi måtte konstatere, at der er forbavsende lidt litteratur om årsagerner dertil.

Derfor har vi valgt, at tage udgangspunkt i de diskussioner man efter 60'er reformen havde om matematikundervisningen i almindelighed. Disse diskussioner kan imidlertid i høj grad hjælpe os til at forstå, hvorfor geometriundervisningen igen skulle gennemgå en ændring.

Efter Royaumont seminaret gik der forholdsvis kort tid, før den endelige reform blev introduceret i gymnasiet. Det var langt fra alle, der var lige begejstrede for de ændringer, dette ville medføre. Årene efter 1961 var præget af en livlig diskussion af *den ny matematik*. Vi vil undersøge, hvilke tendenser der var i disse matematikdiskussioner.

For os at se var der primært to spørgsmål, der prægede debatten:

> Er matematisk indsigt at have indblik i de logiske matematiske strukturer?
>
> &
>
> Hvilken rolle skal matematikfaget i gymnasiet spille? Skal det være studieforberedende eller almendannende?

4.1 Tendenser i 60'erne

Tendensen i 60'erne var i høj grad en diskussion af de strukturalistiske tanker, som var hovedideen bag reformbevægelse. Det store spørgsmål var, om man lærte at tænke matematisk ved at have indsigt i matematikkens strukturelle sammenhænge.

Den strukturalistiske ide var, at matematisk erkendelse bestod i at have indsigt i de logisk definerede matematiske strukturer. Vejen til denne erkendelse af matematikken gik igennem en aksiomatisk-deduktiv matematikundervisning.

Bent Christiansen, der var en af de danske reformister og stor tilhænger af de strukturalistiske ideer, foretog i *Mål og Midler i den elementære matematikundervisning* [10] i 1967, den første danske didaktiske analyse af den strukturelle 60'er matematik. Bent Christiansen mente ikke, at matematikundervisningen kunne bidrage til elevernes evne til at tænke logisk. Dermed mente han ikke, at matematikken slet ikke indeholdt nogen formaldannende egenskaber. F.eks. mente han, at de principper og arbejdsmetoder man anvendte i matematikken, ville kunne finde anvendelse uden for matematikken. Netop på grund af denne transferværdi mente han, at eleverne burde erfare disse gennem undervisningen. Som eksempel på disse principper fremhæver han [10, p. 46]:

Specialisering
Generalisering
Problemformulering
Problemanalyse
Vurdering af givne datas tilstrækkelighed
Vurdering af en formuleret løsnings relevans
Klassificering
Systematisering
Reorganisering
Symbolisering
Formalisering
Algebraisering
Præcision i sprogbrug
Induktivt ræsonnement
Deduktivt ræsonnement

Om disse principper i undervisningssituationen siger Bent Christiansen:

> De principper og arbejdsmetoder, som er anført i listen foran, og som ovenfor er blevet kort kommenteret, har været anvendt til alle tider. Det er i midlertidig meget væsentligt, at man i den hidtidige tradition ikke har fremdraget disse områder til direkte omtale eller behandling. Dels har man ment, at direkte omtale lå uden for skoleelevers horisont, dels har man savnet en passende terminologi, som kunne gøre områderne nogenlunde tilgængelige for overvejelser, og endelig har man savnet ydre inspiration til at tage sådanne spørgsmål op til drøftelse ved undervisningen. Det kan på denne baggrund ikke undre, at kun få elever på egen hånd har kunnet nå frem til bevidst erkendelse af de nævnte almindelige principper og arbejdsmetoder.
> Imidlertid har den omfattende forsøgsundervisning, som har fundet sted i de senere år, med stedse større tydelighed vist, at det - gennem brug af nye faglige hjælpemidler og nye pædagogiske metoder - er muligt at gøre mange af de nævnte metoder og principper til genstand for egentlig behandling i forbindelse med selve den indledende matematikundervisning.
> De faglige hjælpemidler, som der her er tale om, er de såkaldte hjælpebegreber fra mængdelæren, specielt relations- og funktionsbegrebet.

Bent Christiansen påpeger, at hvis kendskab til disse principper og arbejdsmetoder er det væsentlige i matematikundervisningens almendannende værdi, er det vigtigt, at de træder i forgrunden så tidligt som muligt. Den primære årsag til dette kan ses i lyset af at kun ca. 35 procent af datidens elever blev undervist i det større matematikpensum for klasserne 7-10 og endnu færre kom i gymnasiet.

At de strukturalistiske ideer kunne bidrage til elevens indsigt i disse principper og arbejdsmetoder, var der i midlertid mange, der ikke var enige i.

4.1.1 Genetikerne

Et af kritikpunkterne gik på den aksiomatisk-deduktive undervisning, som også var udgangspunktet for den euklidske fremstilling. Kritikken var ikke ny, men gik helt tilbage til det 16. århundrede [33], hvor den første kritik af Euklids syntetiske metode begyndte. Blandt de tidlige kritikere kan nævnes Antoine Arnauld (1612–1694) og Alexis Claude Clairaut (1713–1763), der anses for at være nogle af pionererne i den forbindelse [33]. Det væsentlige i kritikken var, at man gennem den deduktive stil får skjult de virkelige matematiske processer. Eleverne får ikke nogen fornemmelse af, hvordan begreberne og teorierne i virkeligheden er blevet til. I den aksiomatisk-deduktive tilgang blev der i langt højere grad fokuseret på de produkter matematikken repræsenterer, fremfor de matematiske processer, der er langt forud for produkterne. Mange kritikere var tilhængere af det genetiske synspunkt.

Ideen bag det genetiske synspunkt var, at der i undervisningen primært skulle lægges vægt på det heuristiske element. Genetikerne mente, at man ved at fokusere på de matematiske processer frem for produkterne, dels ville have lettere ved at fange elevernes interesse og dels ville give dem en matematikforståelse, der var langt mere i overensstemmelse med den måde matematikere udfører sit hverv på. Genetikerne mente altså, at eleverne ikke ville opnå en indsigt i de matematiske principper og arbejdsmetoder, hvis man ikke eksplicit i undervisningen gjorde opmærksom på, hvordan disse principper og arbejdsmetoder, havde gjort sig gældende i den eksisterende matematik.

Der var delte meninger om, hvordan man skulle tilrettelægge undervisningen, så den tog hensyn til de heuristiske elementer. Clairaut, der var tilhænger af den historie-genetiske ide, har følgende kommentar [33, p. 11]:

> According to my deliberations, this science (i.e. geometry), as all the other sciences, must have developed stepwise. Apparently there were particular needs that induced the first step; and these first steps should not lie outside the scope of beginners because they were beginners who first took them. Engaged by this idea, I considered returning to what might have given birth to geometry; and I endavoured to elaborate the principles by means of a tryly natural method that can be assumed equal to that used by the first discoverers, only keeping in mind the need to avoid the incorrect trials they necessarily had to make. Land-surveying appeared to me most suitable for generating the first principles of geometry.
> ...In order to follow a path similar to that of inventors, I intended to let the beginners discover those principles which make land-surveying possible, as well as measuring distance independently of whether they are accessible or not, etc.
> ... If the first originators of mathematics precented their discoveries by using the "theorem-proof" pattern then they doubtlessly did this in order to give their work an excellent shape or to avoid the hardship of reproducing the train of thought they followed in their own investigations. Be that as it may, to me it looked much

> more appropriate to keep my readers continuously occupied with solving problems, i.e. with searching for means to apply some operation or discover some unknown truth by determing the relation between entities being given and those unknown and to be found. In this way, with every step they take, beginners learn to know the motive of the inventor; and thereby they can more easily acquire the essence of discovery.

Tilhængere af den logisk-genetiske ide mente, at den historiske tilvejebringelse af de matematiske begreber og teorier ikke altid var den mest hensigtsmæssige rent pædagogisk. Man kan jo let lede eleverne på vildspor ved at lære dem om de fejl, matematikerne i tidens løb har lavet. Derimod mente de, at der eksisterer en logisk rækkefølge i matematikken og at teoriernes frembringelse kan læres ved at følge denne.

Med den strukturalistiske undervisningsreform kom der igen gang i diskussionen om det genetiske princip. Med den nye reform var der ikke ændret væsentligt ved undervisningens fokus; udgangspunktet var stadig det aksiomatisk-deduktive element og produkterne var stadig det centrale. Et af de væsentligste indlæg i debatten var Imre Lakatos' videnskabsteoretiske bog *Proofs and refutation, The logic of mathematical discovery* [19]. Lakatos mener, at det væsentlige i den matematiske videnskab er vekselspillet mellem gæt og gendrivelser/modbeviser. Til bogen knytter han nogle didaktiske overvejelser på baggrund af hans konklusioner. Om den aksiomatiske-deduktive undervisningsform, som han kalder "det euklidske ritual", siger han [30, p. 52]:

> This style starts with a painstakingly started list of *axioms*, *lemmas* and/or *definitions*. The axioms and definitions frequently look artificial and mystifyingly complicated. One is never told how these complications arose. The list of axioms and definitions is followed by the carefully worded *theorems*. These are loaded with heavy-going conditions; it seems impossible that anyone should ever have guessed them. The theorem is followed by the *proof*.

4.1.2 Piaget & strukturelismen

Som reaktion på den genetiske kritik af den ny matematik argumenterede strukturalisterne for, at det var pædagogisk-psykologisk forsvarligt at lade de logiske matematiske strukture være udgangspunktet for undervisningen.

Til dette forsvar fandt strukturalisterne støtte i udviklingspsykologen Jean Piagets arbejde. Piaget forsøgte med sit arbejde at finde frem til, hvordan barnet bliver i stand til at udvikle sig rent intellektuelt. Piaget forsøgte at identificere de operationelle strukturer, man kan observere hos barnet i denne udviklingsfase [31, p. 45]. I et forsøg på at klassificere disse strukturer kom Piaget frem til 3 hovedgrupper af strukturer:

- Strukturer, der omfatter klasser og tal.
- Strukturer, der omfatter ordning og rækkefølge.
- Strukturer, der bygger på love om nærhed, sammenhæng og grænser.

Disse strukturer har en vis lighed med strukturalisternes moderstrukturer.

- En mængde med en komposition.
- En mængde med en ordningsrelation.
- En mængde med et omegnssystem.

Det var netop denne sammenhæng, der for strukturalisterne legaliserer *den ny matematik*. Hermed var de matematiske strukturer ikke bare en logisk ordning af matematikken, men strukturerne var også en naturlig del af det handlingsmønster barnet udviser i sin intellektuelle udvikling.

Denne brug af Piagets arbejde har imidlertid sidenhen mødt skarp kritik. Kritikken gik i høj grad på hvorvidt det er muligt at sammenligne en logisk-matematisk struturering med en psykologisk strukturering.

Vi vil ikke yderligere behandle Piagets arbejde og kritikken af denne, da det er vores indtryk at denne sammenligning aldrig blev taget rigtig alvorligt; i så fald var det kun i 60'erne og i starten af 70'erne. Vi har ikke mødt nogen antydninger af at dette arbejde har afspejlet sig i de senere reformdiskussioner. Da dette arbejde trods alt var udgangspunktet for en række diskussioner umiddelbart efter indførelsen af *den ny matematik*, har vi valgt at give en mere udførlig gennemgang, som kan findes i bilag A.

4.2 Tendenser i 70'erne

Efterhånden som man gennem 70'erne kunne se resultatet af den ny matematikundervisning, blev kritikken mere skarp. I 1973 udgav Morris Klein, en fremtrædende genetiker i USA, *Why Johnny Can't Add* [23], der fik stor betydning i USA [20]. Bogen blev hurtigt oversat til dansk (*Hvorfor kan Jørgen ikke regne?*), og blev central i den danske debat.

Klein havde to væsentlige kritikpunkter. For det første var der kritik af den traditionelle aritmetikundervisning (i USA). Der blev ifølge Klein lagt for stor vægt på mekaniske processer, og eleverne lærte derfor, at matematik var noget man skulle lære uden ad og ikke noget man skulle forstå.

For det andet fremførte Klein en kritik af *den ny matematik*. Han mente, at mængdelæren for det første gjorde overdreven brug af symboler, der gjorde børn ængstelige og desuden var svære at huske. For det andet var mængdelæren en hul formalisme, der hindrede børn i en intuitiv forståelse af matematikken.

Kleins kritik fik som før omtalt stor betydning i USA. Men var hans kritik berettiget i Danmark?

Emil Kruse var i [18] kritisk overfor Kleins kritik af *den ny matematik*. Han mente ikke, at kritikken umiddelbart kunne overføres på Danmark; primært fordi det i Danmark efter 1976 ikke var obligatorisk at undervise i mængdelære i folkeskolen. Kruse mente dog, at Kleins bog kunne bruges som et godt udgangspunkt i diskussioner om, hvordan man forhindrede børn i at få vanskeligheder med matematik.

At *den ny matematik* i Danmark gav problemer, var der imidlertid mange der var enige i. Bl.a. skrev Jens Høyrup i *Den nye matematik* [15, p. 6]:

> Enkelte skolepsykologers undersøgelser tyder på, at faldet i talfærdighed er stærkest hos den nye undervisnings elever, uanset at de skulle <u>forstå</u> fremgangsmåderne bedre end traditionelt underviste kammerater. Der anes også et fald i problemløsningsfærdigheden, altså i evnen til at analysere et problem og derved finde ud af, hvordan det klares matematisk. Problemløsningsfærdigheden var ellers den traditionelle undervisnings ømme punkt, og den kreative anvendelse af matematikken et hovedformål for reformatorerne.

At eleverne med *den nye matematik* ikke fik indarbejdet fundamentale regnefærdigheder, kunne selvfølgelig ikke negliceres, men Høyrup mente endvidere heller ikke, at *den nye matematik* kunne bidrage til elevernes indsigt i de principper og arbejdsmetoder, der oprindeligt var tilsigtet [14, p. 12]:

> Det har gennem århundrede været hævdet, at ved at arbejde med den deduktivt opbyggede matematik kunne man træne sig

> i at tænke logisk. Den formulering er kommet noget i vanry på det sidste, og høres ikke meget længere. Reelt går den dog igen i en lidt ændret skikkelse. Inden for nogle skoler af den "nye matematik" er det nemlig almindeligt at hævde, at man ved arbejdet med (den form for) matematik lærer at generalisere og tænke i strukturer, hvis logiske sammenhæng man så bedre kan forstå og behandle (det er vistnok især i Vesttyskland, at man tror på eksistensen af en særlig "strukturmatematik"). Det er i den sammenhæng, man skal se troen på, at man ved at beskæftige sig med matematiske relationer inden for en mængde M (relationerne opfattet som en delmængde af $M \times M$) ikke blot forstår enkelte matematiske relationer (som "gå op i", "være vinkelret på" o.s.v.) bedre, men også bedre kan trænge ind til et eller andet egentligt (strukturelt?) indhold i almene, ikke-matematiske relationer såsom "være i familie med", "have lappet venstre fordæk på" eller "være yngre end".

Der er ikke tvivl om, at selvom Kruse ikke mente, at Kleins kritik kunne overføres direkte til Danmark, var det i høj grad mange af de samme problemer, man oplevede i Danmark. Med timenedsættelsen i 1971 blev situationen ikke bedre. Mange lærere følte sig presset rent tidsmæssigt og følte derved ikke, at der var tid til at skabe den helhed i matematikken, der var ideen med den ny matematik.

4.3 Tendenser i 80'erne

Der har igennem tiden været fremført mange argumenter for en undervisning baseret på det heuristiske idegrundlag. I 60'erne og 70'erne var de genetiske ideer, der var de centrale i debatten. Med den genetiske ide var eleven stadig i den modtagende rolle. Tendensen i slutningen af 70'erne var, at man ønskede eleven i en rolle, hvor han selv deltog aktivt i undervisningen. De matematiske processer ansås stadig for centrale, men væsentligst var det at eleven selv kom igennem disse processer, og altså på den måde selv er den, der opdager matemaktikken. Tendensen var altså, at man mente, at en indsigt i matematikkens arbejdsmetoder og principper, kun kunne læres ved at eleven selv anvendte dem.

Et væsentlig og ofte fremført argument var som her fremført af to af de oftest referede problemløsningsentusiaster (fra Schoenfelds gennemgang af litteratur omhandlende problemløsning *Learning to thing mathematically:*

Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics [29]). Halmos [29, p. 339] sagde i 1980 om problemløsning:

> I do believe that problems are the heart of mathematics, and I hope that as teachers, in the classroom, in seminars, and in the books and articles we write, we will emphasize them more and more, and that we will train our student to be better problems posers and problems solvers than we are.

Pólya sagde 1954 [29, p. 339]:

> Mathematical fact are first guessed and then proved. ⋯ If the learning of mathematics has anything to do with the discovery of mathematics the student must be given some opportunity to do problems in with he first guesses and then proves some mathematical fact on a appropriate level.

De matematiske emner, der underkastedes problemløsning, kunne (selvfølgelig) være vidt forskellige. Flere matematikere har imidlertid hævdet, at klassisk geometri var særdeles velegnet til problemføsning; dels fordi det teoretiske grundlag var meget lille og kunne klares på meget få undervisningstimer, og dels fordi den klassiske geometri indeholdt en næsten uudtømmelig kilde af problemstillinger. Om dette sagde Borgersen, der havde gennemført flere forskelling problemløsnings-kurser [7, p. 32]:

> Elementary geometry is excellent for problem solving from scratch, and it is possible to reach interesting and deep results without a battery of tools.

Et andet argument var, at eleverne gennem problemløsning blev mere engagerede i deres undervisning.

4.3.1 80'ernes reformarbejde

Den procentvise andel af en årgang, der valgte en gymnasial uddannelse, havde op gennen 60'erne og 70'erne været stødt stigende. Med afskaffelse af realskolen i 1975 opfattede mange gymnasiet som en naturlig forlængelse af folkeskolen [8, p. 212]. Den store tilgang til gymnasiet satte for alvor gang i diskussionen om matematikundervisningen som værende almendannende. Den udformning matematikundervisningen havde fået med 60'er reformen, hvor det studieforberedende omend uofficielt havde været en central begrundelse, måtte tages op til fornyet revision. Udgangspunktet for 80'ernes reformarbejde var et klart ønske om et mere almendannende gymnasium, hvor der var tid til at give elverne en tilbundsgående forståelse af de behandlede emner omend på et mere intuitivt niveau end tidligere. Derfor skulle der i undervisningen i højere grad satses på dybde frem for bredden.

D. 6.-8. maj 1981 afholdte man et landsmøde (*Landsmødet om matematikken i Danmark*), der skulle klarlægge matematikkens status i Danmark. På dette måde blev der taget stilling til hvilke aspekter af matematikken der, skulle bidrage til elevens almene dannelse. Følgende er et udpluk fra landsmødes rekommendationer, hvori disse aspekter omtales [8, p. 179]:

> Det er udvalgets opfattelse, at alle elever af hensyn til deres personlige og samfundsmæssige liv skal undervises i matematik, og at enhver systematisk undervisning i matematik må bibringe eleverne indsigt i
>
> 1. matematiks specielle natur, som bl.a. kommer til udtryk ved den proces, der består i intuitiv forståelse af en sammenhæng, formulering af en sætning og bevis for denne,
> 2. nogle matematiske emner, der er centrale derved, at de indgår i mange forskellige anvendelser, samt eksempler på sådanne anvendelser,
> 3. nogle autentiske anvendelser af matematik, der behandles, fordi anvendelsesområdet er af væsentlig, samfundsmæssig betydning,
> 4. dele af matematikkens historie og matematik i kulturel, filosofisk, historisk og samfundsmæssig sammenhæng.

Holdningen på landsmødet var, at fordi matematik indgår på alle niveauer i samfundet, må matematikforståelse nødvendigvis indgå i en elevs almene dannelse. Man mente, at en indsigt i disse 4 aspekter kunne give eleverne den rette matematiske forståelse.

Matematiklæreforeningen påpegede den 1. dec. 1981 i LMFK's månedsblad nødvendigheden i at styrke forsøgsundervisningen for på denne måde at danne et erfaringsgrundlag for reformdiskussionerne. I et forsøg på lette adgangen til forsøgsarbejdet i gymnasierne udarbejdede man i Dansk matematikforenings regi en rammeansøgning til direktoratet. I forsøgsbekendtgørelsen udgjorde rekommandationerne fra landsmødet rammerne for de alternative forsøgsundervisningsforløb. I rammeansøgningen var der således lagt op til at undervisningsforløb, der tilgodeså et af de 4 aspekter kunne indgå i den sædvanelige undervisning på bekostning af bestemte dele af pensummet.

Ideen med denne forsøgsbekendtgørelse var at gøre det obligatoriske pensum mindre for derved at give læreren større handlefrihed med hensyn til tilrettelæggelsen af undervisningen, give plads til fordybelser i enkelte emner samt tilgodese alternative arbejdsformer, så som gruppearbejde, feltarbejde og tværfagligt arbejde. Problemløsning blev altså en væsentlig del af denne forsøgsordning.

En lang række forsøg med udgangpunkt i denne forsøgsbekendtgørelse blev igangsat i forskellige gymnasieklasser. På baggrund af evalueringsrapporter fra disse forsøg blev der formuleret en ny bekendtgørelse [44], der trådte i kræft i det danske gymnasium i 1988. Bekendtgørelsen var i høj grad inspireret af forsøgsbekendtgørelsen fra 1981. I 88-bekendtgørelsen blev der ikke i samme grad lagt vægt på elevernes forståelse af matematikkens aksiomatisk-deduktive element. Det obligatoriske pensum blev reduceret således at der var plads til inddragelse af aspekterne. Aspekt 2 og 3 blev i 88-bekendtgørelsen slået sammet til *modelaspektet*.

Det historiske aspekt Eleverne skal opnå kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng.

Modelaspektet Undervisningen skal give eleverne kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelighedsmuligheder og begrænsinger samt sætte dem i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces.

Matematikkens indre struktur Eleverne skal opnå forståelse af de for matematik karakteristise tankegange og metoder og indsigt i, hvordan disse indgår i udvikling og strukturering af matematiske emneområder.

Alle gymnasieklasser på matematisk linie med matematik på obligatorisk niveau og på sproglige linie med matematik på højt niveau, skulle efter 88 behandle disse aspekter i undervisningen.

Med 88-reformen fik geometriundervisningen på obligatorisk niveau følgende udformning:

2. *Geometri.*
Undervisningen skal uddybe elevernes kendskab til grundlæggende geometriske begreber, og eleverne skal gennem arbejde med analytiske beskrivelse af punktmængder i planen indse, hvordan den analytiske geometri giver et alternativ til den sædvanlige geometri som redskab til behandling af geometriske problemer. Eleverne skal erhverve fortrolighed med trigonometri som et beregningsmæssigt værktøj.
Emner: Trekant, retvinklet trekant og ensvinklet trekant. Analytisk beskrivelse af simple punktmængder i planen. Afstande i planen. Sinus, cosinus og tangens. Beregning af sider og vinkler i trekanter.

Geometrien på matematisk linie højt niveau fik følgende udformning:

1. *Plan- og rumgeometri. Vektorer.*
Undervisningen skal udbygge elevernes kendskab til geometrisk og analytisk beskrivelse af plane og rumlige punktmængder. Eleverne skal opnå fortrolighed med vektorbegrebet i to og tre dimentioner og kunne benytte vektorregning som et beregningsmæssigt værktøj.
Emner: Vektorer i planen og rummet, vektores koordinater. Regning med vektorer, herunder skalarprodukt af to vektorer. Tværvektor, vektorprodukt. Projektion af vektor på vektor. Analytisk beskrivelse af simple punktmængder i planen og rummet. Afstand, vinkel og skæring mellem punktmængder.

Som det kan ses af ovenstående fik vektorbegrebet med 88-reformen en anden rolle i geometriundervisningen end den havde i *den ny matematik*. På det obligatoriske niveau bliver eleverne undervist i klassisk og analytisk geometri. Det væsentlige i undervisningen på dette niveau er at give eleverne en forståelse af de plangeometriske begreber og af sammenhængen mellem den klassiske og den analytiske geometri. Først på højt niveau ser vi vektorbegrebet indført. Matematikkens anvendelse i fysikken er altså ikke længere den væsentligste faktor i udvælgelsen af emner. På højt niveau bliver rumgeometrien genindført. Da eleverne på højt niveau kan forvente at møde vektorbegrebet i fysikundervisningen, er der her lagt stor vægt på, at de opnår fortrolig med vektorer i rummet.

Kapitel 5

Diskussion

I dette kapitel vil vi samle op på de diskussioner, vi har mødt gennem protektrapporten og undersøge hvorvidt disse kan hjælpe os til besvarelse af vores spørgsmål om geometriundervisningen. Vi vil gå frem efter den i kapitel 1 beskrevne metode. Det vil sige, at vi i første omgang udelukkende vil undersøge hvilke formål med geometriundervisningen, der gennem tiden har været.

Derefter vil vi forsøge at sammenholde disse begrundelser med diskussionerne op igennem 60'erne, 70'erne og 80'erne for på denne måde at finde frem til, hvilket geometrisyn man har i dag og hvilket formål man med 88-reformen mente geometriundervisningen skulle have.

5.1 Begrundelser for geometriundervisningen

Som vi så i kapitel 4 var begrundelserne for matematikundervisningen med 88-reformen primært af almendannende karakter. Som vi tidligere har gjort opmærksom på blev der op til 88-reformen ikke diskuteret, hvorvidt geometrien (såvel den klassiske som den analytiske) skulle indgå i den almene dannelse af eleverne. Ifølge Mogens Niss havde man aldrig været i tvivl om at geometrien var en så væsentlig del af matematikken, at man i undervisningen ikke bare kunne undlade det geometriske aspekt. Det havde heller aldrig været ideen med 60'er reformen. Når resultatet af 60'er reformen alligevel var, at geometrien næsten var reduceret helt væk[1], var det ikke fordi man

[1]Med 71- reformen var rumgeometrien helt udgået af pensum

ønskede det sådan, men det skete som en uheldig konsekvens af nedskæring af timeantallet. At det faktisk var denne måde det forholdt sig på med geometrien, er der flere bemærkninger i LMFK bladene, der tyder på. F.eks. kan man i nr. 4 1982 p. 29 se følgende bemærkning:

> ... Vi var så hurtige til at hoppe på et tog, der kørte så hurtigt forbi en station, der hed geometri. Alle - eller i hvert fald mange - vender sig i øjeblikket om, klør sig i nakken og spør': "Hov, hvor Søren blev geometrien af?".

Og i samme år i nr. 3 i et referat fra kurset "Tradition og nytænkning i matematikundervisningen":

> Ikke særligt overraskende var "funktioner" og "geometri" hyppige forslag til det nye gymnasium.

I dette afsnit vil vi forsøge at finde frem til de argumenter, vi har set fremført for geometriundervisningen. Hvad er det eleverne lærer gennem geometrien, der gør at så mange mener, at den bør have en mere central plads i matematikundervisningen?

Som vi så det i kapitel 2, var den primære begrundelse for geometriundervisningen i Danmark før århundredeskiftet af studieforberedende karakter. Man anså den klassiske geometriundervisning som eksemplarisk for det aksiomatiske-deduktive aspekt og formålet var dels at give eleverne en forståelse af matematikkens indre natur samt træne deres logiske sans.

Trænigen af elevernes rumsans har til alle tider været fremført som et væsentligt argument for geometriundervisningen. Med indførelsen af den analytiske geometri var det elevernes forståelse af rummet, der var den primære begrundelse for at undervise i geometri.

En anden årsag til, at geometrien har været anset som væsentlig i undervisningssammenhæng er at geometrien, serverer et begrebsapperat, der er centralt for vores forståelse af megen anden matematik. Begreber som længde, cirkel, vinkel osv. stammer alle fra geometrien og beherskelse af disse hænger udtrykkeligt sammen med den geometriske forståelse.

Begrundelserne går ofte ligeledes i retning af vigtigheden i at træne elevernes evne til at visualisere og til at udarbejde geometriske repræsentationer. Denne begrundelse så vi bl.a. fremført i diskussionerne af Dieudonnes oplæg side 31.

Geometrien er svær at komme udenom, hvis man vil bestrakte matematikken i historisk perspektiv. De geometriske ideer er uafhængigt af hinanden blevet udviklet i flere forskellige kulturer og har gennem en periode på 2000 år udgjort den væsentligste matematiske beskæftigelse. På side 46, hvor Clairaut omtaler den genetiske undervisning, bliver geometrien fremhævet som eksempel. Selvom Clairaut ikke direkte kommenterer det, er det tydeligt at han anser geometrien som værende essentiel i matematikkens historiske udvikling.

Yderligere har der været begrundelser, der har gået på det æstetiske i geometrien. I kapitel 2 side 18 blev geometrien med Hjelmslevs virkeligheds-geometri fremhævet, som et omverdensbeskrivende sprog. Hvor objekter fra elevernes hverdag beskrives indenfor geometriens rammer og derved give et smukt eksempel på matematikkens udtrykskraft.

5.2 Geometrisyn

I forrige kapitel så vi at diskussionerne af den ny matematik i høj grad omhandlede, hvordan man skulle forholde sig til på den ene side den intuitive, heuristiske, omverdensorienterede matematikbeskæftigelse og på den anden side den abstrakte stringente matematikundervisning. Et andet problem, der var centralt for debatten, var vægtningen mellem det almendannede gymnasium og det studieforberedende gymnasium. Med udgangspunt i de forskellige tendenser der var i diskussionerne, vil vi undersøge hvilke af ovenstående formål de tilgodeser og hvilket geometrisyn, dette giver anledning til. Her igennem vil vi ydermere se på hvilke egenskaber ved geometrien, der er blevet fremhævet ved de forskellige geometriopfattelser. Vi håber at dette arbejde kan bidrage til besvarelse af vores spørgsmål om hvilken rolle geometriundervisningen med 88-reformen skulle spille.

Geometri som en aksiomatiserbar teori
Som vi har set gennem dette projekt har det aksiomatiske geometrisyn i høj grad afspejlet sig i den undervisning, der blev givet i gymnasierne indtil starten af 1980'erne. Gennem mange generationer var det Euklids systematiske fremstilling, der udgjorde forbilledet for undervisningen. Som vi også var inde på tidligere ansås arbejdet med den klassiske geometri som værende eksemplarisk hvad angår deduktiv bevisførelse. Herigennem antog man, at eleverne fik udviklet deres logiske sans og deres selvstændighed ikke bare i forbindelse med deres videre matematiske beskæftigelse men også i al almindelighed.

I begyndelsen af dette århundrede begyndte udviklingen at gå i retningen af en mere analytisk geometriundervisning og med 60'er reformen var det de affine afbildninger, der udgjorde grundstenen i opbygningen af geometriundervisningen. Fremstillingen var stadig aksiomatisk-deduktiv, men formålet med undervisningen var ændret i takt med at man gik bort fra den klassiske geometri. Man anså med det strukturalistiske program geometrien som væsentlig fordi den leverer modeller for vektorrum, metriske rum og topologiske rum og derved tjener til videre strukturbetragtninger. Som vi tidligere så, udtalte Diedonné i forbindelse med Royaumont seminaret, at formålet med geometriundervisningen var at udvikle elevernes forståelse af rum. Denne forståelse mente han skulle opnås gennem beskæftigelse med vektorbegrebet, der var af største vigtighed i den moderne naturvidenskab. Formålet med den strukturalistiske aksiomatiske geometriundervisning var derfor hovedsageligt baseret på et studieforberedende grundlag. Det aksiomatiske-deduktive aspekt var også væsentlig for den strukturalistiske undervisning, men det ansås ikke som værende specielt geometriens opgave at træne elevernes evne til at foretage logiske ræsonnomenter.

Erfaringerne fra 60'er matematikken betød, at elevernes intuitive forståelse med 88-reformen blev sat i højsædet. Dette resulterede i, at introduktionen af det aksiomatisk-deduktive aspekt ikke længere var en naturlig del af undervisningsforløbet. På trods af tendensen til at undervise i mere intuitiv matematik, anses det aksiomatisk-deduktive aspekt stadig af mange som værende essentielt for at forstå matematikkens natur, dens muligheder og begrænsninger. Da der med den klassiske geometri er ganske få trin ned til det aksiomatiske grundlag, opfattes geometrien af mange som værende særdeles velegnet til introduktionen af dette aspekt.

Dette skulle ifølge både Torben Christoffersen og Bent Hirsberg have været en af årsagerne til at flere mente at geometrien skulle genindføres. Torben Christoffersen mener, at en af årsagerne til at eleverne gennem geometrien har lettere ved at forstå matematikkens natur er den støtte eleven finder rent visuelt i geometrien, idet figuren er med til at styre deres tanker. Det er umiddelbart til at se, hvis man tænker forkert, hvilket gør at de har lettere ved at komme igennem et deduktivt bevis. Men den visuelle støtte, eleven finder, udgør samtidig en risiko for at matematikken bliver identificeret med objektet og eleven derfor ikke til fulde forstår nødvendigheden i et bevis ("Man kan jo se at det er rigtigt!"). At introduktionen af det aksiomatisk-deduktive aspekt er reduceret til geometrien betyder, at der ydermere ligger et job i at gøre eleven opmærksom på nødvendigheden af bevisførelsen. Hvordan dette gøres ligger imidlertidig uden for rammerne af dette projekt.

Med det pensum, der kom med 88-reformen, blev geometrien ikke opfattet som en aksiomatiserbar teori. Også i geometrien blev lagt vægt på den intuitive forståelse. Hvis "geometrien som aksiomatiserbar teori" skal tilgodeses i undervisningen (hvilket mange synes den skal) kan geometrisynet i midlertid inddrages under behandling af bekendtgørelsen aspekt 3.

Geometrien som et problemfelt for heuristisk undervisning
En tendens man kunne spore gennem diskussionen af *den ny matematik* var en udvikling i retning af en undervisning hvor den intuitive forståelse af matematikken og matematikkens anvendelse i andre områder fik høj prioritet. Den matematiske proces ansås af mange som værende central for den matematiske erkendelse. I starten placerede den heuristiske undervisningsstruktur eleven i den modtagende rolle (som man gjorde i den traditionelle undervisning), men efterhånden gik bestræbelserne på at gøre eleven aktiv i undervisningssituationen. Med 88-reformen blev der åbnet mulighed for, at der i undervisningen kunne indgå gruppearbejdsforløb, hvor grupper af elever arbejdede sammen om mindre problemløsningsprojekter. Et heuristisk undervisningsforløb i geometri har, som vi så det i forrige kapitel, snarere til formål at lære eleven noget om den matematiske proces end om geometrien som matematisk emne. Forløbet kan imidlertidig være orienteret således at det geometrisyn, der bliver repræsenteret kan dække såvel det aksiomatisk-deduktive geometrisyn som geometrien som en rumteori eller geometrien som kulturhistorie. I forbindelse med problemløsning er geometrien flere steder fremhævet som værende særligt velegnet netop på grund af dens mange muligheder. Hans-Joachim Vollrath fremhæver i sin artikel [36] om forskellige opfattelser af geometrien i forhold til den didaktiske debat geometrien som værende et godt udgangspunkt for problemløsning, fordi den stiller et overskueligt forråd af tillokkende problemer til rådighed. Problemer, som ikke bare fascinerer matematikere, men også fænger ikke-matematikere.

I Hans Erik Borgersens beskrivelse [7] af et open ended problemløsningsforløb[2] i geometri han gennem en årrække (1986 - 1990) har gennemført på Adger College, skriver han:

> In school, geometry has traditionally been presented deductively. Our experience is that open ended problems in geometry are excellent for exploring the creative and intuitive part as well. Doing open ended problem solving in elementary geometry requires lots of work with concrete materials (models, drawing and

[2]Open ended problemløsning er når der arbejdes med problemer, hvor resultatet ikke er en på forhånd er fastlagt løsning, men at besvarelsen kan udvikles og føre nye spørsmål med sig. Derved ligger den anvendte metode til løsningen af problemet også åben for eleven.

calculations), and with trying, testing and qualified guissing. It is possible to reach interesting and deep results at all levels of knowing without a battery of tools. Starting with an open ended problem and ending with a written paper, you are forced to go through the whole process and to use yourself and the mathematics you have assimilated.

Med 88-reformen er der i langt højere grad end tidligere åbnet mulighed for inddragelse af det heuristiske element. Det heuristiske element er ikke nødvendigvis en del af undervisningen, men kan unden problemer indgå. Ved behandlingen af de tre aspekter er der lagt op til, at der kan anvendes alternative arbejdsformer som tilgodeser det heuristiske element.

Geometri som en teori for rummet

Ordet "geometri" kommer fra græsk og betyder "jordmåling" [3, p. 8]. Selvom man i antikkens grækenland forsøgte at aksiomatisere den geometriske viden, opfattede man geometrien som jordens matematik; et redskab til at beskrive og forstå den omliggende verden.

Et af de mest fremhævede argumenter for geometriundervisnigen har altid været at give eleverne en forståelse af rum og af figurer i rummet og deres egenskaber. Mange undervisningsforløb, har med udgangspunkt i elevernes omverden og med støtte fra elevernes intuitive kendskab til objekterne i denne verden forsøgt, at få geometriske tanker og metoder til at vokse frem (eksempler på dette så vi i kapitel 2 side 18). Metoder og ideer, der kan anvendes ved konstruktion og studie af modeller af den virkelige verden eller modeller i fysikken.

Med *den ny matematik* var det primært geometriens anvendelse i fysikken, der blev genstand for undervisningen i gymnasiet. Derved blev der i den geometriske fremstilling langt vægt på vektorbegrebet.

Ved at drage paralleler til andre geometrier (Projektive, affine eller ikke euklidske geometrier) kan der opstå diskussioner om modelbeskrivelsers forhold til virkeligheden.

Ved at anskue geometrien som en teori for rummet bliver det essentielle, at eleven opnår en forståelse af de geometriske ideer og metoder. Herunder ligger der yderligere at eleverne skal kunne forstå sammenhængen mellem forskellige geometrier.

Med 88-reformen blev der i obligatoriske pensum lagt vægt på at eleverne fik en forståelse af rummet. På det obligatoriske niveau omhandlede dette imidlertid kun det to-dimentionelle rum. På højt niveau, hvor rumgeometrien igen var blevet indført, blev der lagt vægt på geometrien som et redskab i fysikken, hvorved at vektorbegrebet stadig havde central placering. På begge niveauer bliver der draget sammenligninger mellem de behandlede geometrier.

Geometrien som kulturhistorie
Matematikkens historiske udvikling har af flere matematikere gennem tiden været fremhævet som værende væsentlig for elevernes matematiske forståelse. Mange mener, at en indsigt i de processer, der ligger forud for en teoris opståen, vil give eleven en forståelse af matematisk beskæftigelse. Derigennem vil eleven forstå, at matematikken ikke "er noget der altid har været der", men at matematikken er et fag i stadig udvikling; en udvikling man kan deltage i og tage stilling til.

I denne hammenhæng er geometrien af største vigtighed. Geometrien har gennem ca. 2000 år været den væsentligste matematiske beskæftigelse. Vor tids geometri er resultat af flere århundreders forskning og er et fag i stadig udvikling. Desuden er geometriens bidrag til vores matematiske og kulturelle arv så væsentlig at den er svær at forbigå i forståelsen af matematikkens væsen og tilblivelse.

5.2.1 Opsamling

Diskussionerne op til 88-reformen afspejler klart et ønsker om et mere almendannende gymnasium. Af reformen fremgår det, at som led i elevernes almene dannelse må matematikundervisningen, give eleverne indsigt i følgende 3 aspekter:

Det historiske aspekt
Modelaspektet
Matematikkens indre struktur

Gennem ovenstående gennemgang af de fire forskellige geometrisyn ses det at det i denne forbindelse er væsentligt at få inddraget det geometriske emne i undervisningen.

Til forståelse af matematikken historiske udvikling er geometrien, i kraft af sin lange tradition og sin store inflydelse på vor tids matematiske beskæftigelse, i høj grad væsentlig.

I forbindelse med modelaspektet er det vigtigt at eleverne har en indsigt i rummet og de geometriske figurer og deres egenskaber. Geometrien serverer modeller, der har stor anvendelse inden for fysikken. Endvidere er geometrien i mange sammenhænge netop blevet fremhævet som værende velegnet for modelbetragtninger, fordi man her kan tage udgangspunkt i en virkelighed, eleven på forhånd har en intuitiv forståelse af. Som det ses på side 53 er det netop dette aspekt, der tilgodeses med det obligatoriske geometri pensum. Vægten lægges i pensummet på elevernes forståelse af rummet og de geometriske figurer.

Da det aksiomatisk-deduktive element af mange anses som værende centralt for præsentationen af matematikkens indre struktur, er geometrien også i denne sammenhæng et særdeles godt udgangspunkt. Da den klassiske geometri i sin fremstilling aldrig bevæger sig ret langt væk fra sit aksiomatiske grundlag, har eleven lettere ved at følge den deduktive gennemgang.

I forbindelse med behandlingen af disse tre aspekter er der med 88-reformen lagt op til, at der kan benyttes arbejdsformer der tilgodeser det heuristiske element. I denne forbindelse er geometrien blevet fremhævet, fordi den tilbyder en stor mængde problemer, der ikke ikke kræver dyb indsigt i matematiske teorier.

5.3 Konklusion

1. Hvad var argumentationen bag den gennemgribende udvikling geometriundervisningen i gymnasiet tog med 60'er reformen?

2. I hvor høj grad anså man de kvalifikationer, geometrien kunne give eleven, for vigtige, og på hvilken måde fik man tilgodeset disse værdier i den ny matematikundervisning i gymnasiet?

3. Hvilke begrundelser har været fremlagt for at genindføre dele af geometrien i gymnasiet? Hvilken rolle ønskede man med 80'er reformen at geometriundervisningen skulle spille i gymnasieudannelsen?

Ad 1

Efterkrigsårenes positive teknologisyn gjorde at man fra samfundets side var villig til at ofre tid og ressourcer på en forbedring af skolens matematiske og naturvidenskabelige undervisning. For matematikkens vedkommende betød en forbedring, at undervisningen i højere grad end tidligere skulle ligne den moderne matematiske videnskab i sprog og symbolbrug. Derved kom de moderne strukturbegreber til at forme indholdet af undervisningen i de danske gymnasier og centralt for undervisningen blev begreber hentet fra mængdelæren.

Som led i denne modernisering af matematikken skete der også store ændringer i geometriundervisningen. For det første blev der rykket ved geometriens status i undervisningen. Hvor vægten tidligere havde ligget på den klassiske og analytiske geometri blev der med moderniseringen lagt vægt på de logiske matematiske strukturer. For det andet skete der en modernisering i forhold til geometriens anvendelsesværdi i fysikken. Derved blev geometriundervisningen baseret på vektorbegrebet og de affine afbildninger.

Ad 2

En del af diskussionerne på Royaumont seminaret udsprang af, at man i mange lande stadig hovedsageligt underviste i klassisk geometri. Da man ikke i samme grad som tidligere anså matematikken som formaldannende i forbindelse med "træning af den logiske sans" mente mange, at geometriundervisningen var spild af tid.

Strukturalisterne anså derimod det aksiomatisk-deduktive aspekt som værende essentielt for elevernes forståelse af matematikkens indre struktur, men det ansås ikke kun som værende geometriens opgave at bidrage til denne indsigt. Med *den ny matematik* blev det aksiomatiske grundlag givet ved de logiske strukturer og derved kom det aksiomtisk-deduktive aspekt til udtryk gennem behandlingen af hele det matematiske område.

Det væsentlige i geometriundervisningen var med *den ny matematik* at give eleverne en indføring i de geometriske begreber og at give dem en forståelse af rum. Det viste sig imidlertid, at det strukturalistiske program efterlod så lidt plads til rumgeometrien, at mange elever ikke opnåede denne indsigt. Da man så i 68 ydermere skar i timetallet og der derfor måtte reduceres i pensummet var rumgeometrien et oplagt offer, da det alligevel var her eleverne fik mindst udbytte af undervisningen. Så selvom det oprindeligt havde været hensigten med 60'er reformens geometriundervisning at bidrage til elevernes rumlige forståelse, blev konsekvensen at geometriundervisningen i gymnasierne blev reduceret til at omhandle plangeometrien. Også på det plangeometriske niveau opstod der konsekvenser, man ikke helt havde forudset. Det havde tidligere været folkeskolens opgave at introducere eleverne for de simple geometriske figurer og deres egenskaber. Men *den ny matematik* gjorde sig også gældende der og i 1975 røg den sidste rest af konstruktionslæren ud af folkeskolen. Det vil sige, at eleverne ikke længere mødte op med de forventede forudsætninger og det var derfor nødvendigt at varetage denne opgave i gymnasiet, i det omfang tiden tillod det. Fordi den indledende præsentation af de plangeometriske begreber, blev relativt overfladisk behandlet, mistede eleverne også den mest grundliggende indsigt i geometrien.

At præsentere geometrien i historiske sammenhæng, ansås ikke af strukturalisterne som værende vigtig i elevernes uddannelse. Essentielt for undervisningen var, at eleverne opnåede indsigt i de matematiske teorier og ikke i hvordan disse var opstået.

Ad 3

Der har i den officielle debat kun været fremført ganske få argumenter - om overhovedet nogen - for at genindføre de geometriske emner i gymnasieundervisningen. Alligevel kan man i 88-reformen se, at det geometriske pensum er vokset. Det rumgeometriske emne er igen at finde i gymnasiets pensumliste for matematik på højt niveau. At der ikke har været en egentlig diskussion af, hvorfor man ønskede geometrien tilbage skyldes, at man aldrig har været uenige om, at geometrien var en væsentlig del af matematikken og at dette naturligvis skulle afspejle sig i undervisningen. Man havde altid anset det for vigtigt, at eleverne fik udviklet et fornuftigt geometrisk begrebsapparat og en forståelse af rummet, så at geometriundervisningen mere eller mindre forsvandt med 60'er reformen skal snarere ses som en uheldig konsekvens af tidspres og ikke fordi det på noget tidspunkt havde været ønsket.

Med 88-reformen var formålet primært at, matematikken skulle bidrage til elevernes almene dannelse. Dette skulle ske ved, at give eleven indsigt i de tre aspekter - det historiske aspekt, modelaspektet og matematikkens indre struktur.

Som vi så det i diskussionen, er det ved behandlingen af disse tre aspekter, ikke bare en god ide men også vigtig, at inddrage geometrien. Der er altså mange gode grunde til at lade geometrien få en central rolle i undervisningen. Hvis udbyttet af undervisningen skal være optimal i forbindelse med elevernes almene dannelse bør geometrien introduceres i undervisningen i mange forskellige sammenhænge og alle fire geometrisyn bør behandles.

Med en sådan tilrettelæggelse af undervisningen bør geometrien udgøre en stor del af det matematiske pensum. Men som reformen blev udformet, udgør geometrien trods alt stadig en meget beskeden andel af pensummet. Det interessante har derfor været at undersøge hvilket geometrisyn, der bliver fremhævet med reformen.

I det obligatoriske pensum lægges der vægt på at præsentere geometrien som en teori for rummet. Det er geometrien som redskab i modelsammenhæng, der anses som værende det essentielle.

De andre geometrisyn, som under reformdiskussionerne blev fremhævet som værende væsentlige, har mulighed for at blive inddraget under behandlingen af de tre aspekter.

Dette er naturligvis kun en mulighed. Hvorvidt dette vil være løsningen, er en beslutning, der med 88-reformen er blevet lagt i hænderne på den enkelte lærer.

Litteratur

[1] Andersen, Tom J., et al. *Geometri, skole og virkelighed.* IMFUFA tekst nr. 19. RUC, 1979.

[2] Asmussen, A. F. (red.) *Meddelelser angaaende de lærde Sloler med dertil hørende Realundervisning i Kongeriget Danmark for Skoleaaret 1889—90.* Ministeriet for Kirke- og Undervisningsvæsenet.

[3] Axelsen, Ib (red.) *Gads Matematik. Geometri.* Gjellerup & Gad, København, 1986.

[4] Bjerg, Jens og Hans Vejleskov. *Tænkning og udviklingsforløb - Jean Piagets teori.* Munksgaard, 4. reviderede udgave 1977.

[5] Blomhøj, Morten et al. *Treenigheden Bourbaki.* IMFUFA tekst nr. 94. RUC, 1985.

[6] Bonnesen, T. Matematikken i gymnasiet: Overvejelser og forslag. *Matematisk Tidsskrift A*, 1905.

[7] Borgesen, Hans Erik. Open ended problemsolving in geometry. *Nordisk matematikkdidaktikk*, Vol. **2**, nr. 2, 1994.

[8] Branner-Jørgensen, Bodil et al. (red.). *Rapport fra landsmødet om matematikken i Danmark 1981. Del I & II* Dansk Matematisk Forening, København 1981.

[9] Brodén, Torsten. *Matematikken og de eksakte Naturvidenskaber i det nittende Aarhundrede.* Nordisk Forlag, 1925.

[10] Christiansen, Bent. *Mål og Midler i den elementære Matematik undervisning.* Munksgaard, 1967.

[11] Christiansen, Bent. *Tendenser i udviklingen af geometriundervisningen.* Matematisk Institut, Danmarks Lærehøjskole, 1983.

[12] Fabricius-Bjerre, Fr. *Matematikkens stilling i den højere skole fra 1850 til vore dage.* Særtryk af matematisk tidsskrift A, No. 3, 1929.

[13] Fehr, Howard F. *New Thinking in School Mathematics* OECD, Paris 1959.

[14] Høyrup, Jens. *Matematikundervisning: Reformer, formål og bivirkninger.* Fortryk af artikel til Dansk Pædagogisk Tidsskrift. RUC, 1974.

[15] Høyrup, Jens. *"Den Nye Matematik" Summarisk gennemgan af en undervisningsreform.* Fortryk af en artikel til Politisk Revy. RUC, 1974.

[16] Jensen, Peter Hauge og Linda Kyndlev. *Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!* IMFUFA tekst nr. 284. RUC, 1994

[17] Jensen, V.A.C. Virkelighedsgeometri som skolefag. *Matematisk Tidsskrift A*, 1927.

[18] Kruuse, Emil. Hvorfor er der så mange elever, der har svært ved at regne? *Den ny matematik i Danmark*, Nordisk Forlag, 1979.

[19] Lakatos, Imre. *Proofs and Refutations, The Logic of mathematical Discovery.* Cambridge University Press, Cambridge 1976.

[20] Hansen, Vagn Lundsgaard. Efter Morris Kleine - Hva' så! Eller hva' nu? *Den ny matematik i Danmark*, Nordisk Forlag, 1979.

[21] Heegaard, Poul. *Der Mathematikunterricht in Dänemark.* Nordisk Forlag, 1912.

[22] Hirsberg, Bent og Klaus Holth. *Tal og Geometri.* Forlaget Trip, 1985.

[23] Klein, Morris. *Why Johnny Can't Add.* St. Martins' Press. New York, 1973.

[24] Mollerup, Johannes Om undervisning i matematik. *Matematisk Tidsskrift A*, 1903

[25] Muschinsky, Lars Jokob et al. (red.). *Pædagogisk opslagsbog.* Christian Ejlers Forlag, 2. udgave, 1984.

[26] Niss, Mogens. *Et rids af den gymnasiale matematikundervisnings historie 1850 til nu.* Arbejdspapir, RUC 1980.

[27] Niss, Mogens. *Centrale problemstillinger i matematikkens didaktik i 1990'erne.* 15. Nordiske LMFK-kongres, 1993.

[28] Niss, Mogens et al. *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century.* Discussion Document for an ICMI Stydy.

[29] Schoenfeld, Alan H. Learning to thing mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of Research on Mathematics Thinking and Learning,* Edited by Douglas A. Grouws. Macmillan 1992.

[30] Skovsmose, Ole. *Didaktiske arbejdspapirer 1, Forandring i matematikundervisningen.* Nordisk forlag A/S, 1981.

[31] Skovsmose, Ole. *Didaktiske arbejdspapier 2, Matematikundervisning og kritisk pædagogik.* Nordisk forlag A/S, 1981.

[32] Skovsmose, Ole. *Didaktiske arbejdspapier 3, Alternativer i matematikundervisningen.* Nordisk forlag A/S, 1981.

[33] Steiner, Hans-Georg. Two kinds of "Elements" and the Dialectic between Synthetic-deductive and Analytic-genetic Approaches in Mathematics. *For the Learning of Mathematics.* Vol. **8**, nr. 3, 1988.

[34] Vejleskov, Hans (red.). *Den kognitive udvikling belyst ved Jean Piagets teorier og eksperimenter.* Særtryk af Dansk pædagogisk Tidsskrift nr. 2—3, 1969.

[35] Vejleskov, Hans. En psykolog snakker med - eller - hvad med Piaget. *Den ny matematik i Danmark.* Nordisk Forlag, 1979.

[36] Vollrath, Hans-Joachim. Forskellige opfattelser af geometriens forhold til matematikundervisningen. *Nordisk Matematisk Tidsskrift.* Årgang 33, Hefte 1. Universitetsforlaget, 1985.

[37] *Gyldendals Fremmedordbog* Redigeret af Sven Brüel og Niels Åge Nielsen. Gyldendal, 9. udgave, 1983.

[38] *Lectures on Modern Teaching of Geometry and Related Subjekts.* Rapport fra møde i Århus, 1960 Elementær afdeling, nr. 7. Århus universitet 1960

[39] *Bekendtgørelse angaaende undervisning i gymnasiet.* Bekendtgørelse nr. 265. Kultusministeriet 4/12 - 1906.

[40] *Bekendgørelse angaaende undervisning i gymnasiet.* Bekendtgørelse nr. 69. Undervisningsministeriet 13/3 - 1935.

[41] *Bekendtgørelse om undervisning i gymnasiet.* Bekendtgørelse nr. 130. Undervisningsministeriet 9/4 - 1953.

[42] *Det Nye Gymnasium.* Betænkning nr. 269 Undervisningsministeriet, 1960.

[43] *Vejledende bestemmelser vedrørende undervisningen i gymnasiet.* Undervisningsministeriet, 1961.

[44] *Bekendtgørelse om gymnasiet.* Bekendtgørelse nr. 176. Undervisningsministeriet 9/3 - 1990.

Bilag A

Piaget & strukturalismen

At den strukturalistiske undervisningsform var en hensigtsmæssig måde, at give elverne matematisk indsigt blev af mange legitimeret af erkendelsesteoretikeren Jean Piagets[1] teorier. I dette bilag vil vi forsøge at redegøre for strukturalisternes erkendelsesteoretiske argumentation. Den første del vil primært være en kort gennemgang af Piagets erkendelsesteori. Efterfølgende vil vi gennemgå strukturalisternes fortolkning af Piagets arbejde og undersøge hvorledes det indgik i argumentationen for 60'er matematikken. Til sidst vil vi præsentere nogle af de vigtigste kritikpunkter af forbindelsen mellem Bourbakis moderstrukturer og Piagets erkendelsesstrukturer.

Det essentielle for Piagets forskning var den menneskelige erkendelses udvikling; hvad var udgangspunktet for erkendelsen og hvordan udviklede mennesket sig til at kunne udtrykke en logisk struktur. Udgangspunket for Piagets erkendelsesteori var individets erkendelses genese. Han lagde i sit arbejde mindre vægt på hvilke begreber, holdninger og tænkemåder barnet måtte overtage fra kulturen.

Den grundlæggende ide bag Piaget erkendelsesteoretiske arbejde var, at en person ikke kunne opnå erkendelse ved at iagttage objekter, men gennem de handlinger personen udførte med objektet.

Hvilken erkendelse personen opnåede igennem aktiviteten, afhang af personens forudsætninger. Her skelnede Piaget mellem to typer af forudsætninger. Der var de *specifikke erfaringer* og de *generelle erfaringer*. De specifikke erfaringer var et udtryk for personens individuelle erfaring med det pågældende objekt, hvilken erfaring personen tidligere havde fået med det pågældende

[1] Piaget startede sin faglige karriere med at tage en biologisk uddannelse. Efter at have afsluttet denne startede han i 1920 på et filosofisk og psykologisk studie. Hans første udgivelse om kognitiv udvikling udkom i 1924 [4]

objekt. De generelle erfaringer var et udtryk for hvilke muligheder personen generelt havde for at opleve og handle med pågældende objekt. De generelle erfaringer opfattede Piaget som værende identiske for personer på samme alder. Således ville to børn på 5 år have samme generelle erfaringer, mens en 12-årig formentlig ville have nogle andre. Selvom de to 5-årige havde de samme generelle erfaringer, kunne de godt befinde sig på forskellige udviklingsniveauer.

Piaget opererede med 4 forskellige udviklingsnivauer, der hver især er kendetegnet ved en bestemt erkendelsesstruktur [34]:

Sanse-motorisk periode Strækker sig fra 0 til omkring 2 års alderen. Her vil barnet opleve gennem sine sanser og muskler. De føler, smager, lugter, bevæger sig selv og de objekter de kommer i forbindelser osv.

Præ-operationel periode Strækker sig fra 2 til omkring 7 års alderen. Barnet begynder at benytte sprog, forestillinger, tegninger og andre symboler. Barnets erkendelse i denne periode er præget af selvcentrering, intuition og manglende systematik. Barnet er f.eks ude af stand til at gennemføre en handling i omvendt rækkefølge. Endvidere vil barnet i denne periode centrere sin opmærksomhed på ét objekt ad gangen.

Konkret-operationel periode Strækker sig fra 7 til omkring 12 års alderen. Barnet begynder at udvise en vis systematik i sine handlinger, barnet begynder her at beskæftige sig med reversibilitet. Overgangen til operationel tænkning er et spørgsmål om den operative side af erkendelsen. De operationer barnet udfører kan nu manipuleres som en sammenhængende struktur, hvis elementer alle er til rådighed på samme tid. Men operationer er forbundet til konkrete objekter, dvs. barnet er endnu ikke i stand til at foretage abstrakt manipulation.

Formel-operationel periode Strækker sig fra 12 års alderen og frem. Her bygger erkendelsen på strukturer, som udviser en systematik mindre afhængigt af om situationen er konkret og overskulig. Personen bliver i stand til at arbejde formelt, overskue komplekse situationer og foretage hypotetiske antagelser.

Hvad en person er i stand til at udføre og erkende ved objektet afhænger af den struktur, personen har opbygget. Når et barn forsøger at bearbejde sine oplevelser sker det i overensstemmelse med dets erkendelsesstruktur. Barnet forsøger at strukturere den nye oplevelse inden for sit struktursystem - den ydre påvirkning optages i den eksisterende struktur. Piaget kaldte dette for assimilering. Hvis denne strukturering ikke lykkedes ville oplevelsen blive afvist. Hvis assimileringen ofte ikke lykkedes, ville det efterhånden give anledning til en akkommodation, dvs. at den allerede opbyggede struktur ændredes i overensstemmelse med den ydre påvirkning. Barnet skifter altså udviklingsnivau. Piaget mente, at de mentale strukturer en person har opbygget er identiske for alle personer på samme udviklingsniveau.

Det interessante i denne forbindelse var Piagets teori om, hvorledes et menneskes matematiske erkendelse opstod. Piaget forsøgte med sit arbejde at finde frem til hvordan barnet blev i stand til at udvikle sig rent intellektuelt. Piaget forsøgte at identificere de operationelle strukturer, man kunne observere hos barnet i denne udviklingsfase [31, p. 45]. I et forsøg på at klassificere disse strukturer kom Piaget frem til 3 hovedgrupper af strukture:

- Strukturer, der omfatter klasser og tal.
- Strukturer, der omfatter ordning og rækkefølge.
- Strukturer, der bygger på love om nærhed, sammenhæng og grænser.

Piaget mente, at disse hovedgrupper er fundamentale i mennesket. Uafhængigt af personlige erfaringer et menneske måtte have erhvervet sig, er det denne type operationer mennesket anvender på objekter. De personlige erfaringer influerer på, hvilke ting mennesket er i stand til at erkende. Hvilke objekter vi er i stand til at erkende er altså afhængig af udviklingsnivauet, men den udviklingsmæssige erkendelsesproces er identisk for alle personer. Det var Piagets hovedgrupper, der fik Bourbakis opmærksomhed. De tre hovedgrupper blev sammenlignet med Bourbakis tre moderstrukturer.

Den umiddelbare overensstemmelse mellem bourbakisternes matematiske strukturer og Piagets fundamentale erkendelsesmæssige strukturer blev genstand for stor opmærksomhed. Sammenhængen blev af bourbakisterne set som et udtryk for at moderstrukturerne ikke blot var et udtryk for en logisk ordning af matematikken, men også et resultat af et naturligt erkendelsesmæssigt udviklingsforløb hos mennesket. Dette legitimerede for bourbakisterne den strukturalistiske undervisning.

Et argument fra strukturalisternes side har været, at børn ifølge Piaget begynder at tænke *konkret operationelt* i 5-8 års alderen. Dette skulle retfærdiggøre strukturalisternes indførelse af mængdelæren på de helt små klassetrin. Om dette sagde Hans Vejleskov i *En psykolog snakker med - eller - hvad med Piaget?* [35]:

Bourbakis moderstrukturer	Piagets operationelle strukturer
En mængde med en komposition.	Strukturer, der omfatter klasser og tal.
En mængde med en ordningsrelation.	Strukturer, der omfatter ordning og rækkefølge.
En mængde med et omegnssystem.	Strukturer, der bygger på love om nærhed, sammenhæng og grænser.

Tabel A.1: Strukturalismes syn på sammenfaldet mellem Bourbakis moderstrukturer og Piaget erkendelses strukturer.

> Mange "oversætter" dette til, at ved skolegangens begyndelse er børnene så småt "i stand til at tænke logisk, når blot de tænker på noget konkret". Dette er en helt forkert "oversættelse" - en misforståelse.
> Min forklaring er følgende: Ordet *konkret* lægger sig til ordet *operationel*. Det er altså nogle operationer, der er konkrete; dem begynder barnet at kunne udføre - og dette har betydning for hvordan det tænker - dvs., hvordan det opfatter forskellige ting og hændelser, og hvordan det løser opgaver i forbindelse hermed.

Vejleskov forsætter med at redegøre for, at konkrete handlinger er handlinger, der kan udføres i praksis som f.eks. at gå to skridt til højre, eller at dele skakbrikker op i sorte og hvide eller i officerer og bønder eller begge dele. Disse handlinger kunne også nemt udføres af en 3-4 årig. Hvis sådanne konkrete handlinger skal være konkrete operationer skal barnet udtrykke en vis form for systematik, der primært består i at handlingen kan opvejes af en modhandling. Dvs. at gå to skridt til venstre eller lægge de hvide og sorte brikker i én bunke osv. Om dette sagde Vejleskov:

> Det betyder ikke, at barnet skal kunne formulere sig sprogligt om reglen og f.eks. kunne sige: "Når man går to skridt til venstre, er man, hvor man startede". Nej, barnet skal give udtryk for denne systematik i sin måde at handle og forklare på i forskellige situationner og behøver ingenlunde at være sig selve reglen bevidst

Vejleskov anklagede *den ny matematik* for at ville sætte 1. klassesbarnet i stand til at udtrykke denne systematik. Han sagde afsluttende:

Ja, hvis "den ny matematik" defineres ved sit indhold - mængdelære, positionssystemer, modulær matematik, uligheder osv. - har Piaget's forståelse af barnets udvikling intet med begyndermatematik at gøre.

Der var enkelte antydninger om at Piaget udelukkende var indblandet i debatten for at legitimere Bourbakis produktorienterede undervisningsform. Dette ses bl.a. i Høyrups artikel *Matematikundervisning: Reformer, formål og bivirkninger* [14]:

> ... Min tilbageholdenhed har for det første rent kronologiske årsager. Henvisningerne til den generelle udviklingssykologi var nemlig ikke almindelig i de første års reformarbejde. De kom først til for alvor godt ind i tredserne (sådan cirka).
> ... Piaget er altså for mig at se først og fremmest blevet anvendt som påskud, og kun i mindre omfang er han blevet brugt efter fortjeneste, som ægte inspiration.

I dag er der i hvert tilfælde bred enighed om at strukturalismen og Piagets teorier ikke har noget med hinanden at gøre. Skovsmose udtrykker denne holdning klart i [31, p. 54]:

> Gennem den påstand, at der eksisterer en genetisk relation mellem handlingsmønstre og matematiske strukturer, kommer Piagets teori, efter min mening, til at udøve en falsk legitimering af den strukturelt prægede 60'er-matematik.

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT

by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium

af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard

Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"

by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøde Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christianse

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thierse Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydnin

En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" o en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semioti

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hanse

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hanse

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdage af energiens bevarelse og især deles c de af Mayer, Colding, Joule og Helmhc udførte arbejder"

af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østerg

Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endem disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENS BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS - Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks' betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251|93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252|93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 Kuglepakning

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 Regressionsanalyse

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED

af: Peter Harremoës

256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-electric Spherical Shell (Preprint)

by: T. Christensen and N.B.Olsen

257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker

af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen

269/94 Dimensionsanalyse en introduktion metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann, Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen

271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen

272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel

273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann, Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen

274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine Green, Anja Skjoldborg Hansen. Lisbeth Helmgaard
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen

275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek

276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis, Per Gregersen, Kristina Vejrø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen

278/94 The Models Underlying the Anaesthesia Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen (RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen (Herlev University Hospital), Stig Andur Pedersen (Roskilde University)

279/94 Description of a method of measuring the shear modulus of supercooled liquids and a comparison of their thermal and mechanical response functions.
af: Tage Christensen

280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann

281/94 Modellering af Det Cardiovaskulære System med Neural Pulskontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen, Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen

282/94 Parallelle algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen, Niels Bo Johansen

283/94 Grænser for tilfældighed

(èn kaotisk talgenerator)

af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen

284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det!

Gymnasiematematikkens begrundelsesproblem

En specialerapport af Peter Hauge Jensen og Linda Kyndlev

Vejleder: Mogens Niss

285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and its diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

286/94 The energy master equation: A low-temperature approximation to Bässler's random walk model

by: Jeppe C. Dyre

287/94 A Statistical Mechanical Approximation for the Calculation of Time Auto-Correlation Functions

by: Jeppe C. Dyre

288/95 PROGRESS IN WIND ENERGY UTILIZATION

by: Bent Sørensen

289/95 Universal Time-Dependence of the Mean-Square Displacement in Extremely Rugged Energy Landscapes with Equal Minima

by: Jeppe C. Dyre and Jacob Jacobsen

290/95 Modellering af uregelmæssige bølger

Et 3.modul matematik projekt

af: Anders Marcussen, Anne Charlotte Nilsson, Lone Michelsen, Per Mørkegaard Hansen

Vejleder: Jesper Larsen

291/95 1st Annual Report from the project

LIFE-CYCLE ANALYSIS OF THE TOTAL DANISH ENERGY SYSTEM

an example of using methods developed for the OECD/IEA and the US/EU fuel cycle externality study

by: Bent Sørensen

292/95 Fotovoltaisk Statusnotat 3

af: Bent Sørensen