TEKST NR 269 1994

Dimensionsanalyse
en introduktion

Tine Guldager Christiansen
Ken Andersen
Nikolaj Hermann
Jannik Rasmussen

Vejleder: Jens Højgaard Jensen

metaprojekt, fysik

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde

DIMENSIONSANALYSE en introduktion

Projektrapport af Tine Guldager Christiansen, Ken Andersen, Nikolaj Hermann og Jannik Rasmussen

Vejleder: Jens Højgaard Jensen

IMFUFA tekst nr. 269/94, RUC. 60 sider ISSN 0106-6242

ABSTRACT:

Dimensionsanalyse er en metode, der kan anvendes til at finde proportionaliteter, når man har en ide om hvilke fysiske størrelser, der indgår i et problem. Ud fra kravet om dimensional homogenitet kan man opstille et ligningssystem, hvis løsning giver proportionaliteten mellem de indgående størrelser. Projektet indledes med en beskrivelse af grundlaget for dimensionsanalyse, som udgøres af størrelsesregning og enhedssystemets opbygning. Derefter gennemgåes to metoder til dimensionsanalyse, Rayleighs metode og Pi-teoremet, som er demonstreret ved hjælp af et eksempel. Eksempler er herefter brugt til at demonstrere brugen af dimensionsanalyse i forskellige sammenhænge, specielt med henblik på hvordan man ved passende valg af enhedssystem kan optimere sin analyse. Sammenhængen mellem dimensionsanalyse og skalering er kort gennemgået ved hjælp af et simpelt eksempel.

Forord

Nærværende IMFUFA-tekst er oprindelig lavet som et meta-projekt på fysikuddannelsen på RUC i efteråret 1993. Der er kun lavet mindre rettelser i projektet for at lave denne tekst. Dette betyder, at nogle af de kapitler, som i projektet er med for at opfylde studieordningen, ikke har den store relevans for denne tekst. Dette er fortrinsvis kapitel 5 og kapitel 6.

Ud over at introducere til dimensionsanalyse, håber vi at teksten kan være med til at give en større forståelse for betyningen af størrelsesregningen i fysikken. Ellers er der bare at sige: God læsning.

Indhold

Indledning

Hvad er dimensionsanalyse? Man kan forestille sig flere svar på dette spørgsmål:

- En metode til at undersøge om enhederne i en fysisk ligning stemmer?
- En metode til at finde sammenhænge mellem fysiske størrelser?
- En metode der bruges i forbindelse med skalering i modelforsøg?

Alle svarene er rigtige. Dimensionsanalyse er det man gør når man regner udelukkende på størrelsers dimensioner. Det bruges ofte til at foretage enhedstjek, og det betragtes ofte som tvivlsomt, ligefrem at forsøge at udlede nogle sammenhænge udelukkende ud fra nogle størrelsers dimensioner, fordi det er vanskeligt at argumentere for resultatets validitet.

Dette projekt er et forsøg på at lave en "menigmands guide" til dimensionsanalysens mange aspekter, til brug for lærere og studerende på IMFUFA. Projektet forsøger at komme hele vejen rundt om metoden, startende med grundlaget for metoden; størrelsesregningen og enhedssystemet, og sluttende med at kigge nærmere på hvordan metoden virker, samt hvor i fysikken den anvendes. Hele vejen igennem lægges der vægt på en gennemgang v.h.a. eksempler.

Det der gør dimensionsanalysen til en unik og interessant metode i fysikken, er dens åbenlyse, men alligevel vanskeligt gennemskuelige, sammenhæng med enhedssystemet. I dag betragtes enhedssystemet som noget "der bare er der". Men ideen om et konsistent enhedssystem er først opstået for ca. 100 år siden, og det udseende SI-systemet har i dag er i høj grad fastlagt ud fra konventioner. Dimensionsanalysens sammenhæng med enhedssystemet i fysikken, gør det nødvendigt at arbejde med selve grundlaget for fysikken, nemlig størrelsesregningen, som kan betragtes som fysikkens sprog.

Projektet er skrevet på 1.modul af fysikuddannelsen på Roskilde Universitetscenter. Projektet er et meta-projekt; "om fysik". Dette opfyldes gennem at se på metoden i alle dens aspekter i fysikken, og ikke blot gennemgå de tekniske detaljer. Vores tilgang til at skrive “om” dimensionsanalysen har været at undersøge metoden “indefra og ud”, hvilket er afspejlet i projektets umiddelbare vægtning af netop de tekniske detaljer.

Kapitel 1

Størrelsesregning og enhedssystemer

For at kunne anvende dimensionsanalyse til mere end rent simple formål, er det en fordel at have et vist indblik i to af fysikkens begrebssystemer, nemlig størrelsesregningen og enhedssystemet. Disse vil blive gennemgået i det følgende kapitel.

1.1 Matematificering af fysikken og indførelsen af størrelsesregning

Oprindelig var fysik ikke en videnskab med den stærke tilknytning til matematik som vi kender idag. Den fysiske tænkning foregik i høj grad på et retorisk og kvalitativt plan. Enkelte isolerede grene af fysikken var dog tidlig matematificerede. F.eks. skriver Jan de Boer (1988), at allerede grækernes astronomi var rent matematisk. Et andet kendt eksempel på tidlig anvendelse af matematik, er Galileis formuleringer af lovene for frit fald og projektilbaner. Men indtil begyndelsen af det 19.århundrede, var matematificeringen hovedsageligt koncentreret omkring mekanikken. Derefter skete der for alvor en matematificering af store dele af fysikken, som dannede baggrunden for klassiske teoretiske fysisk (*ibid*).

I forbindelse men en kvantificering af fysikken indførtes enheder på de målte størrelser. De anvendte enheder var da både en nødvendighed og en begrænsning, da ligninger kun blev skrevet til at gælde i bestemte enheder (de Boer, 1988). Da der samtidig fandtes et væld af forskellige nationale og personlige enhedssystemer, kan dette i nogen grad have hæmmet fysikkens udvikling.

Efterhånden skete der dog en ensretning hen imod det franske metersystem (MGS), som blev indført kort efter den franske revolution. Dette blev det første skridt på vejen mod en generel formulering af fysiske lovmæssigheder.

1.1.1 Fysiske størrelser

Den første formelle definition af begrebet *fysisk størrelse* bliver ofte tilskrevet Maxwell (Stille, 1955 og de Boer, 1988), som i sin "Treatise on electricity and magnetism" fra 1873 beskriver en fysisk størrelse (quantity) som bestående af to komponenter: Et navn på en *standardreference*, og en talstørrelse, som beskriver det antal gange standarden skal regnes for at få den ønskede størrelse. Den formelle definition af en fysisk størrelse bliver af Wallot i 1922 skrevet som (Stille, 1955):

$$A = \{A\}[A]_e$$

hvor $\{A\}$ er en talværdi og $[A]_e$ er en enhed af samme "art" som størrelsen A. $[A]_e$ betyder en vilkårlig enhed med *dimensionen* $[A]$. Enheden angiver en referencemængde af den bemeldte fysiske størrelse, og talværdien hvor mange gange man skal tage referencen for at få størrelsen.

Dimensionen er en generalisering af enheder, f.eks. er længde $[L]$ en dimension, og meter et eksempel på en enhed med dimensionen længde. Den umiddelbare fordel ved at regne med fysiske størrelser er, at en ligning bliver uafhængigt af valget af enhedssystem. Det gælder nemlig at:

$$A = \{A\}[A]_e = 1/x\{A\}x[A]_e$$

hvilket betyder, at man kan benytte enheden $x[A]_e$ istedet for $[A]_e$, mod at benytte $\{A\}/x$ som talværdi. En sådan ændring kaldes en *enhedstransformation*. F.eks. er 10 meter = 1000 centimeter. Indførelsen af størrelser gør de fysiske ligninger uafhængige af enhedssystem, på samme måde som vektorer gør ligningerne uafhængige af koordinatsystem. Det kræver blot at de to enhedssystemer er *kohærente*.

Et par ord om notation: Formen $Dim[A]$ bruges ofte for at angive dimensionsformlen for størrelsen A. Vi anvender ikke formen $Dim[A]$, men bruger udelukkende hårde paranteser, også omkring dimensioner opskrevet i fundamentale dimensioner, hvilket ikke er en konvention, som alle benytter.

1.1.2 Fundamentale og afledede dimensioner

Når man skal definere dimensionen for en størrelse, har man to muligheder: Enten kan man vælge at dimensionen skal være fundamental eller også skal den være afledet. Fundamentale dimensioner er kendetegnet ved at være uafhængige af alle andre dimensioner. Det betyder, at mens en afledet dimension ændrer sig, hvis der bliver ændret på de fundamentale dimensioner, så sker der ikke noget med en fundamental dimension, hvis der bliver ændret på de andre. De fundamentale dimensioner vælges ofte således, at det er muligt at fastlægge en referencestørrelse man direkte kan sammenligne med. I mekanikken benyttes ofte de tre fundamentale dimensioner længde $[L]$, tid $[T]$ og masse $[M]$, da det er bekvemmeligt at kunne fastlægge referencestørrelser for disse dimensioner. Dimensionerne for andre størrelser kaldes afledede dimensioner og defineres ud fra de fundamentale dimensioner. Hastighed, f.eks. er defineret som:

$$v = \xi \frac{dl}{dt} = \xi \frac{\{dl\}[l]_e}{\{dt\}[t]_e} \Rightarrow \tag{1.1}$$

$$[V] = \frac{[L]}{[T]} \tag{1.2}$$

hvor $[V]$ er dimensionen af hastigheden v. Ligningen 1.1 er *definitionsligningen* for den fysiske størrelse hastighed, mens 1.2 angiver dimensionsformlen (ofte bare benævnt dimensionen) for hastighed (Massey, 1971, s.51). Ofte sættes den numeriske faktor $\xi = 1$. Et enhedssystem hvor alle numeriske konstanter er lig 1 kaldes for kohærent. Det gælder at man kan skifte mellem to kohærente enhedssystemer uden at ændre de numeriske konstanter i de fysiske ligninger.

Hvilke dimensioner der vælges som fundamentale, og hvilke der vælges som afledede er ikke naturbestemt. Der er ingen grund til at en hvilken som helst dimension ikke kan vælges som fundamental dimension. Dog skal det helst være muligt at skabe en praktiske anvendelig referencestørrelse. Fra et rent praktisk synspunkt vil det være uhensigtsmæssigt at vælge dimensionen for massefylde $[ML^{-3}]$ som fundamental dimension, da en given massefylde ikke direkte kan sammenlignes med en standardmassefylde. Derimod kan kraft godt vælges som fundamental dimension, da det er muligt at sammenligne kræfter direkte (Massey 1971, s.49).

1.1.3 Dimensional homogenitet

Som det kan ses, har symbolerne for fysiske størrelser, en udvidet betydning i forhold til den betydning der ligger i simple matematiske symboler. Det betyder også at den almindelige algebra ikke gælder for regning med fysiske størrelser. Addition, subtraktion eller lighed af to størrelser har kun mening, hvis de to størrelser har samme dimension. Det fører til kravet om *dimensional homogenitet* i størrelsesligninger, som siger, at hvert led i en ligning skal have samme dimension. Fourier den første til at kræve dimensional homogenitet i sine ligninger i begyndelsen af det 19. århundrede (de Boer, 1988). Dimensional homogenitet er dog ikke nogen garanti for at to størrelser er ens, da to afledede størrelser kan have samme dimensionsformel. Et eksempel fra SI-systemet er kraftmoment og energi, hvor det gælder at $[\tau] = [E] = [ML^2T^{-2}]$.

Kravet om dimensional homogenitet er ikke helt så simpelt, hvis man tillader transcendentale funktioner. Transcendentale funktioner er en fælles betegnelse for funktioner, der ikke kan gives ved et algebrarisk udtryk kun bestående af variable og konstanter. Eksempler på transcendentale funktioner er: trigonometriske-, hyperbolske-, logaritme-, eksponentiel- og besselfunktioner. Den normale konvention blandt fysikere er, at man undgår at benytte transcendentale funktioner på størrelser med dimension, da det ikke er muligt at fortolke en fysisk mening af udtryk som f.eks. $e^{10sek.}$. Normalt vil man komme udenom problemet ved at dividere med en karakteristisk størrelse med en tilsvarende dimension f.eks. $e^{10sek./t_0}$, og på denne måde opnå en dimensionsløs størrelse.

P.g.a. de anderledes regneregler for f.eks. logaritme funktioner er det muligt at omskrive fysiske ligninger til en form, så de umiddelbart ser ud til at være i modstrid med både kravet om at den variable i en transcendental funktion skal være dimensionsløs, og kravet om dimensional homogenitet. F.eks. kan udtrykket for bevægelse med jævn acceleration skrives som:

$$\ln s = \ln a + 2\ln t - \ln 2 \tag{1.3}$$

Omend det er en rodet opskrivning er den dog fuldt ud analog til:

$$\ln \frac{s}{\frac{1}{2}at^2} = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{2}at^2$$

Hvilket igen er ækvivalent til den normale fysiske ligning. Så vi må konkludere, at kravet om dimensional homogenitet er opfyldt for formel 1.3. Alligevel vil vi advare kraftigt mod at anvende trancendentale funktioner på fysiske størrelser. En af begrundelserne, er den fuldstændige mangel på konvention omkring notation, når det gælder en enhed, der har været "udsat" for en trancendental funktion.

1.1.4 Konstanter

Man kan tale om to typer ligninger i fysikken: Definitionsligninger og empiriske ligninger. En definitionsligning er en ligning, som definerer en ny afledet størrelse ud fra andre afledede eller fundamentale størrelser. Et eksempel er definitionen af kraft, $F = Kma$. Størrelsen kraft er normalt defineret således at konstanten $K = 1$, og dermed dimensionsløs, og man skriver $F = ma$. I empiriske ligninger kræves ofte en dimensional konstant, for at kravet om dimensional homogenitet er opfyldt. Et eksempel er den universelle gravitationskonstant G i massetiltrækningsloven, som har dimensionsformlen $[G] = [M^{-1}L^3T^{-2}]$. Man kunne have valgt omvendt, således at massetiltrækningsloven var definitionsligningen for kraft, og således have sat $G = 1$. Dette havde så krævet en dimensional konstant i bevægelsesligningen, som så ville hedder: $F = Kma$, hvor $[K] = [ML^{-3}T^2]$.

1.2 Enhedssystemets udvikling

For at belyse hvilke krav der stilles til et enhedssystem, vil vi give en kort historisk gennemgang af udviklingen af enhedssystemerne.

Det var først i slutningen af det 19. århundrede, at man udviklede det første overordnede enhedssystem: CGS, med centimeter, gram og sekund som de fundamentale enheder, og de andre mekaniske enheder som afledede enheder af de fundamentale. Det betød at man for første gang havde en formel baggrund for at omregne enheder, ikke bare fra en længde til en anden, men feks. fra energi til kraft gange længde.

På samme tid opstod behovet for en udvidelse af enhedssystemet til også at omfatte de nyere fagområder, som elektromagnetismen og termodynamikken. I første omgang fastholdt man, kun at have de tre mekaniske grundenheder fra CGS som fundamentale, og benyttede så to forskellige definitionsligninger for elektricitetslære og magnetisme, hvilket gav to forskellige overbygninger på CGS-systemet: ESU (ElektroStatic Units) og EMU (ElektroMagnetic Units).

ESU er defineret ved, at man sætter konstanten i Coulombs lov til 1, og bruger den til definitionsligning for ladning:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow$$

$$[q] = [\sqrt{Fr^2}] = [L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]$$

EMU er defineret ved at benytte en analogi til Coulombs lov for kraften imellem to magnetiske monopoler, med konstanten 1, som definitionsligning:

$$F = \frac{\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r^2} \Rightarrow$$

$$[\mathcal{M}] = [\sqrt{Fr^2}] = [L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]$$

Der var to problemer ved ESU og EMU. Det ene var, at der opstod ikke-heltallige potenser af de fundamentale mekaniske enheder. Det kan sagtens lade sig gøre at definere enhedssystemer, hvor det er helt indlysende at de afledte enheder må indeholde brøker af de fundamentale. Hvis vi f.eks definerer areal som en fundamental dimension og ikke længde, hvilket der ikke er noget der forbyder os, vil [L] = $[A^{1/2}]$. Men der var alligevel folk som W. Williams (1892)[1], som mente, at så længe $[L]$, $[M]$ og $[T]$ var valgt som fundamentale dimensioner, var det de mest fundamentale dimensioner man havde, og det gav derfor ingen mening at snakke om disse størrelser i ikke-heltallige potenser. Bridgman (1922) derimod mener, at det er lige så logisk som at have negative potenser. Et andet og langt alvorligere problem var at ESU og EMU blev benyttet samtidigt. Dette medførte at en fysisk størrelse kunne have to forskellige dimensioner, hvilket gav problemer for bl.a. dimensionsanalysen. Hvis man benytter både ESU og EMU i forbindelse med CGS er det ikke længere et konsistent enhedssystem.

Disse problemer førte til en diskussion af hvor mange fundamentale dimensioner, man skulle definere for de mekaniske og elektromagnetiske fagområder.

1.2.1 Valg af fundamentale dimensioner

Ligesom det er arbitrært hvilke dimensioner der bliver valgt til at være fundamentale, er det formelt set også arbitrært, hvor mange der defineres som fundamentale (Massey, 1971). Men her kommer der også visse praktiske hensyn i spil. Hvis man benytter få fundamentale dimensioner, vil der ikke være så mange oplysninger indeholdt i dimensionen af en størrelse opgivet i fundamentale dimensioner, da der så vil være mange forskelligartede fysiske størrelser med sammen dimension. Hvis man derimod vælger mange fundamentale dimensioner, vil relationerne mellem de forskellige størrelser blive sløret af en mængde af dimensionale konstanter. I yderste konsekvens gælder det, at hvis alle dimensioner er defineret som fundamentale, vil det slet ikke være muligt at regne med dimensioner, da de alle er uafhængige. Der er også fysikere, der går tæt på en anden yderlighed idet de kun opererer med én fundamental dimension.

Når det nu har vist sig at antallet af dimensioner er arbitrært, gælder det om at foretage det mest praktiske valg. Det mest naturlige er at lade de enkelte fagområder definere hver en fundamental dimension, da man derved slipper for at benytte mindre generelle udtryk som definerende ligninger (se

[1] Ifølge Bridgman (1922).

Tabel 1.1: Wallots model for antallet af fundamentale dimensioner.

Fagområder	Antal dimensioner
Geometri	1
Mekanik (geometri, kinematik og dynamik)	3
Mekanik og termodynamik	4
Mekanik, termodynamik og elektromagnetisme	5
Mekanik, termodynamik, elektromagnetisme og fotometri	6

tabel 1.1). Indenfor mekanikken og elektrodynamikken er der 4 områder: Geometri, kinematik, dynamik og elektromagnetisme (Wallot, 1957). Derfor ville det mest naturlige være, at have 4 fundamentale dimensioner til at dække disse områder, og ikke kun 3, som man havde med CGS. Hvis man derimod betragter elektricitet og magnetisme som to forskellige fænomener, vil det kræve en selvstændig dimension for magnetisme. Ifølge denne tankegang vil det være unaturligt at have selvstændige dimension for både elektricitet og magnetisme, hvis man beskriver dem som samme fænomen. I termodynamikken vælger man som regel temperatur som fundamental dimension, men der kunne være områder, hvor det var ønskeligt at at bevare temperatur som en afledet dimension. Den fundamentale dimension for fotometrien, strålingsintensitet med en bestemt fordeling, står lidt udenfor de andre. Da det er de færreste fysikere, der beskæftiger sig med problemstillinger, hvor denne dimension er brugbar, er der ingen udtryk der forbinder denne dimension til de afledede dimensioner indenfor andre fagområder.

1.2.2 SI-systemet

Det blev efterhånden klart, at man havde et behov for at indføre et nyt enhedssystem, der opfyldte kravet om både at være konsistent og kohærent. Derfor nedsattes i 1947 et udvalg, der bl.a. skulle udarbejde et nyt enhedsystem (de Boer, 1989). Dette førte til indførelsen af SI-systemet, bestående af de syv enheder meter, sekund, kilogram, Kelvin, Ampere, mol og candela. Valget af disse fundamentale enheder falder godt i tråd med Wallots systematiske opstilling. Indførslen af mol som fundamentale enhed strider dog mod Wallots tankegang. Det hænger sammen med at mol er en noget anderledes enhed end de andre, da mol i højere grad er et tal end en egentlig enhed. Mol blev formodentlig indført med det formål at have et koherænt enhedssystem med rimelige størrelsesordener for både mikro- og makroskopiske problemstillinger. Candela er defineret som intensiteten af lys udstrålet vinkelret fra et areal på 1/60000 m^2 ved perfekt sortlegeme stråling, ved frysepunktet af rent platinium ved en atmosfæres tryk (101325 Pa). Ifølge denne definition er candela ikke formelt en fundamental enhed, idet den er afhængig af valget af andre fundamentale enheder, men man har af praktiske årsager valgt at gå bort fra den tidligere definition af candela ved hjælp af et standard stearinlys, da det medførte for store usikkerheder.

Det har været overvejet at lave ændringer af SI-systemet, bl.a. at gøre vinkel til en fundamental enhed, men det blev vurderet at ulemperne langt overstiger fordelene herved (Højgaard, internt notat). Men i det store hele er debatten om ændringer af SI-systemet forstummet, og der er intet der tyder på at det vil blive ændret foreløbigt, bl.a. fordi selv de mindste ændringer sætter et kæmpe maskineri igang.

1.3 Hvorfor størrelsesregning?

Efter nu have gennemgået størrelsesregningen og set baggrunden for det konsistente enhedssystem, kan man indvende, at størrelsesregningen dybest set er triviel, og kun god som metode til at checke udregninger gennem kravet om dimensional homogenitet. Den store styrke der ligger i at anvende størrelsesregning er dog, at man er blevet istand til at skrive generelle ligninger for naturlige fænomener, der er uafhængige af valget af enheder. Ydermere skal man ikke overse den kvalitative, og til dels også kvantitative, beskrivelse af en fysisk størrelse der ligger i dimensionsformlen. Den information, der ligger i dimensionsformlen åbner muligheden for to stærke metoder, nemlig dimensionsanalyse og modelforsøg, hvor vi i det følgende vil koncentrere os om den første.

I gennemgangen af baggrunden for enhedssystemer har vi set, hvorledes et system der kun bygger på de tre mekaniske grundenheder (CGS) ikke rigtigt magtede at beskrive resten af fysikken tilfredsstillende, og antallet af fundamentale enheder blev derfor udvidet til 7 i SI-systemet. Det er iøvrigt blevet klart, at et enhedssystem ikke er naturgivent, men i høj grad arbitrært, og det udseende som SI-systemet har i dag, i høj grad skyldes "praktiske" overvejelser.

Kapitel 2

Dimensionsanalyse

Dimensionsanalysen er ikke en særlig gammel metode. Vi har først set den beskrevet i begyndelsen af dette århundrede, bl.a. af Rayleigh (1915), som også benævner metoden "The Principle of Similitude". Han skriver:

> "It happens not infrequently that results in form of "laws" are put forward on the basis of elaborate experiments, which might have been predicted *a priori* after af few minutes consideration"

Med "a few minutes consideration" mener han altså gennem dimensionsanalysen. Metoden er specielt blevet forbedret af Buckingham (1914) med pi-teoremet, som er en generel metode til dimensionsanalyse. Metoden blev hurtigt alment accepteret, og Bridgmans værk: "Dimensional analysis" fra 1922 anses for autoritativt på området.

Dimensionsanalyse bliver ofte anvendt i en simpel form, uden at der gøres rede for det formelle fundament for metoden (f.eks. Smith 1990, eller Sørensen, 1979). Ydermere har man ofte den fornemmelse, at metoden kun kan bruges til at vise noget man godt ved i forvejen. Vi vil i en gennemgang af teori og eksempler, vise metodens generalitet, samt hvorledes metoden bygger på sproget i fysikken, nemlig størrelsesregningen. Men først vil vi opstille det teoretiske fundament for anvendelse af størrelsesregningen i dimensionsanalyse. Vi anvender to metoder: Rayleighs metode, som fortrinsvis anvendes på simple problemstillinger, samt Buckinghams metode, også kaldet pi-teoremet, som er en mere formaliseret metode.

2.1 Teorien for simpel dimensionsanalyse

Dimensionsanalysen benytter kravet om dimensional homogenitet til at undersøge, hvorledes en given størrelse afhænger af andre givne størrelser. Formelt ønsker man at finde den funktion, ϕ, hvor det gælder at:

$$Q = \phi(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n)$$

hvor Q er den størrelse man ønsker at finde og Q_i er de størrelser, som Q menes at afhænge af. Det kan vises, at denne funktion altid vil være et potensprodukt af de indgående størrelser multipliceret med en konstant. Det gælder nemlig, at enhver funktion kan skrives som en Weierstrass-approximation (Massey, 1971 s.55):

$$\begin{aligned}\phi(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \quad &\approx \quad k_1(Q_1^{a_{11}} Q_2^{a_{12}} \cdots Q_n^{a_{1n}}) + k_2(Q_1^{a_{21}} Q_2^{a_{22}} \cdots Q_n^{a_{2n}}) + \\ &\cdots + k_m(Q_1^{a_{m1}} Q_2^{a_{m2}} \cdots Q_n^{a_{mn}})\end{aligned}$$

hvor $k_1, k_2, \ldots, k_m$ er dimensionsløse konstanter. Da den dimensionale homogenitet skal være opfyldt, må hvert led i approximationen have samme dimension, hvilket medfører at eksponenterne må være ens så længe Q-erne er uafhængige, altså $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{m1}, \ldots, a_{m1} = a_{m2} = \cdots = a_{mn}$, hvorefter Q kan skrives:

$$Q = k(Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} \cdots Q_n^{a_n})$$

Eksponenterne $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kan bestemmes ud fra kravet om dimensional homogenitet i ovenstående ligning. Det eneste der ikke kan bestemmes er den dimensionsløse konstant, k.

2.1.1 Eksempel 1: Hastighed af dybvandsbølger

Som en illustration af et problem der kan løses v.h.a. simpel dimensionsanalyse, vil vi forsøge at finde hastigheden af dybvandsbølger. Vi starter med at opremse de størrelser, der har betydning for hastigheden af vandbølger. Først er der bølgelængden λ, med dimensionen $[L]$. Det der skaber bølgerne er tyngdekraftens virkning på vandet. Vi kan derfor skrive yderligere to størrelser op, nemlig massefylden af vandet, $[\varrho] = [ML^{-3}]$, samt tyngdeaccelerationen, $[g] = [LT^{-2}]$. Vi ser bort fra vanddybden, da vi kigger på bølger der bevæger sig på så dybt vand, at vanddybden ikke har betydning. Ydermere antager vi at bølgelængderne er så store, at effekter hidrørende fra overfladespændingen ikke berører problemet. Vi får så, at dimensionen for vandbølgernes hastighed kan skrives som:

$$[v] = [\lambda^a \varrho^b g^c]$$

hvis dette skrives i fundamentale enheder fås:

$$[LT^{-1}] = [L]^a [ML^{-3}]^b [LT^{-2}]^c$$

ud fra dette kan der opstilles tre ligninger med tre ubekendte:

$$\begin{array}{lrl} L: & 1 = & a - 3b + c \\ T: & -1 = & -2c \\ M: & 0 = & b \end{array}$$

Heraf fås: $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ og $c = \frac{1}{2}$. D.v.s. at vores analyse viser, at massefylden ikke indgår i problemet alligevel. Vi kan så skrive hastigheden som:

$$v \propto \sqrt{\lambda g} \tag{2.1}$$

Det ses af (2.1), at hastigheden af dybvandsbølger er proportional med kvadratroden af bølgelængden. Den analytisk beregnede hastighed for dybvandsbølger, er for store bølgelængder givet ved:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$$

Den numeriske faktor $\sqrt{1/(2\pi)}$ bliver altså *ikke* fundet ved dimensionsanalysen. Normalt vil de numeriske faktorer være af størrelsesordenen 10^0, da de på grund af enhedssystemets opbygning ofte vil bunde i geometriske forhold.

Det er allerede på dette tidspunkt klart, at validiteten af resultatet af dimensionsanalysen er totalt afhængig af de udgangsbetingelser, der blev taget i starten af analysen. Hvis vi glemmer at tage en størrelse med, som har betydning for systemet, er det ikke muligt at opnå det rigtige resultat på nogen måde. Ligeledes vil det ikke være muligt, at finde en entydig løsning ved hjælp af simpel dimensionsanalyse, hvis vi medtager for mange indgående størrelser. Hvis vi f.eks. ikke havde kigget på *dyb*vandsbølger, havde det været nødvendigt at medtage vand dybden, og ville ikke vide hvordan vi skulle håndtere de to længder. Det er selvfølgeligt ikke hensigtmæssigt, at det er nødvendigt at kigge på sådanne idealiserede tilfælde, og derfor vil nu introducere nogle metoder, der kan håndtere flere dimensionsløse størrelser.

2.2 Rayleighs metode

Da mere interessante problemstillinger, end det vist i eksempel 1, oftest har flere indgående størrelser end antallet af fundamentale enheder vil vi fremover koncentrere os om disse tilfælde. En metode til at løse sådanne problemer er Rayleighs metode (se f.eks. Rayleigh, 1915). Metoden illustreres lettest med et eksempel på løsningen af en opgave:

2.2.1 Eksempel 2a: Hastighed af regndråber

Vi ønsker at finde den terminale hastighed, som en kugleformet regndråbe opnår ved fald i et tyngdefelt. Dråben påvirkes af to modsat rettede kræfter: Tyngdekraften, $F_{tyngde} = mg$ og en gnidningskraft med luften, F_{gnid}. Gnidningskraften afhænger af dråbens radius, r og af dråbens hastighed, v. Ydermere afhænger den af nogle materialespecifikke parametre for luften. Hvis luften regnes for usammentrykkelig, er de eneste nødvendige matrialespecifikke parametre massetætheden, ϱ og viskositeten η. Det må endvidere gælde at regndråbens hastighed er konstant når $F_{tyngde} - F_{gnid} = 0$. Ud fra dette opstilles et udtryk, der sikrer dimensional homogenitet:

$$\begin{aligned} [mg] &= [v^w r^x \varrho^y \eta^z] \Rightarrow \\ [v] &= [r^a \varrho^b (mg)^c \eta^d] \end{aligned} \tag{2.2}$$

hvor w, x, y og z samt a, b, c og d er konstanter. Bemærk at vi bevarer antagelsen om at m og g optræder i samme potens, da de begge kun indgår i tyngdekraften. Ved indsættelse af fundamentale dimensioner fra SI-systemet i 2.2 fås:

$$[LT^{-1}] = [L]^a [ML^{-3}]^b [MLT^{-2}]^c [MT^{-1}L^{-1}]^d$$

Dette giver anledning til følgende tre ligninger med fire ubekendte:

$$\begin{aligned} L: &\quad 1 = a - 3b + c - d \\ T: &\quad -1 = -2c - d \\ M: &\quad 0 = b + c + d \end{aligned}$$

Tre ligninger med fire ubekendte kan ikke løses entydigt. Men løsningen kan udtrykkes med en fri parameter. Det vil så give (udtrykt ved c) $a = -1$, $b = c - 1$ og $d = 1 - 2c$. Ved indsættelse i (2.2) kan hastigheden udtrykkes som:

$$v \propto r^{-1} \varrho^{c-1} (mg)^c \eta^{1-2c} = \frac{\eta}{r\varrho} \left(\frac{mg\varrho}{\eta^2} \right)^c$$

Således at vi har ét produkt uden c i potenserne og ét produkt med et vilkårligt c i potenserne. Den generelle løsning bliver da:

$$v \propto \frac{\eta}{r\varrho}\left(\left(\frac{mg\varrho}{\eta^2}\right)^{c_1} + \left(\frac{mg\varrho}{\eta^2}\right)^{c_2} + \cdots + \left(\frac{mg\varrho}{\eta^2}\right)^{c_n}\right) = \frac{\eta}{r\varrho}\phi\left(\frac{mg\varrho}{\eta^2}\right) \quad (2.3)$$

hvor ϕ er en ukendt, vilkårlig funktion.

Selv om vi stadig ikke har en eksakt formel for hastigheden, da det kun er en proponalitet vi har fundet og ϕ er ubestemt, har vi dog reduceret det oprindelige problem med fire variable, til et problem som kun afhænger af en ukendt konstant, tre størrelser i et kendt forhold og en ukendt funktion af en dimensionløs størrelse. Udtrykket (2.3) indeholder altså en del mere information end den viden, at hastigheden afhænger af de fire størrelser, vi lagde ud med. I tilfældet $\phi(x) = x$ fås:

$$v \propto \frac{mg}{r\eta} \quad (2.4)$$

Det ses, at luftens massefylde forsvinder, mens luftens viskositet dominerer. Dette tyder på udelukkende laminar strømning, hvor energien går til gnidning. Dette svarer til Stokes lov, som siger at for lave hastigheder er gnidningskraften proportional med hastigheden gange viskositeten. I tilfældet $\phi(x) = \sqrt{x}$ fås:

$$v \propto \frac{1}{r}\sqrt{\frac{mg}{\varrho}}$$

Her forsvinder viskositeten, og massefylden af luften dominerer. Det sker ved høje hastigheder, hvor turbulens dominerer, og dråbens potentielle energi bruges til at sætte luften i bevægelse. I området mellem disse to grænser hersker der en blanding af laminar og turbulent strømning. Den præcise sammenhæng må fastlægges eksperimentelt.

2.3 Pi-teoremet

Pi-teoremet er også kendt under navnet Vashys teorem, Buckinghams metode eller den generelle metode.

Pi-teoremet er en formalisering af Rayleighs metode. Rayleighs metode forekommer at være intuitiv, og man vil ofte ubevidst anvende denne i tilfælde, hvor antallet af indgående størrelser ikke væsentligt overstiger antallet af fundamentale dimensioner. I de simple dimensionsanalyser har Rayleighs metode derfor sin fordel. Pi-teoremet giver fundamentet til en mere stringent formaliseret analyse. Men selv om dimensionsanalysen metodisk gribes anderledes an ved anvendelse af pi-teoremet, giver det ikke divergerende resultater, og man er ikke med pi-teoremet i stand til at løse problemer, der ikke lader sig løse ved Rayleighs metode (Massey, 1971 s.63).

Pi-teoremet går ud på at reducere antallet af ligninger og ubekendte inden selve ligningssystemet løses. De indledende manøvrer er identiske med Rayleighs. Først findes de relevante fysiske størrelser. Derefter udvælges et nødvendigt og tilstrækkeligt antal uafhængige størrelser ud, således at de danner en base for dimensionerne af de indgående størrelser. Ud fra basen er det så muligt at danne dimensionerne af de øvrige størrelser. At basen skal være uafhængig betyder, at det ikke må være muligt at konstruere en dimensionsløs størrelse af basen. Det er uhensigtsmæssigt at vælge den størrelse man ønsker at finde som en del af basen. For i så fald, er det ikke muligt at isolere denne størrelse hvis der optræder flere dimensionsløse størrelser. Desuden er det oftes tilrådeligt at vælge størrelserne med de simpleste dimensioner for basen. Man har altså en situation med m variable som beskriver et fysisk fænomen:

$$\phi(D_1, D_2, \ldots, D_k, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-k}) = 0 \tag{2.5}$$

hvor de første k variable $(D_1, D_2, \ldots, D_k)$ er uafhængige (basen), mens de resterende $(m-k)$ variable $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-k}$ er afledede størrelser af basen. Pi-teoremet siger da at man, frem for at betragte ϕ, kan nøjes med at betragte en funktion af $(m-k)$ dimensionsløse størrelser. Disse dimensionsløse størrelser kaldes pi-erne ("pi" for produkt). Vi vil ikke her vise teoremet, men nøjes med demonstrere den metode som teoremet danner grundlag for.

Hvert pi konstrueres ud fra basen, samt én størrelse udenfor basen:

$$\Pi_{Q_1} = Q_1(D_1^{a_1} D_2^{a_2} \cdots D_k^{a_k})$$

Hvor a_1, a_2, $\ldots, a_k$ er entydigt bestemt, når det skal være opfyldt at Π_{Q_1} er dimensionsløst: $[\Pi_{Q_1}] = [1]$. Dette følger af at enhederne i basen er uafhængige af hinanden. Funktionen i ligning 2.5, kan da erstattes af en anden funktion, ϕ_1:

$$\phi_1(D_1, D_2, \ldots, D_k, \Pi_{Q_1}, \Pi_{Q_2}, \ldots, \Pi_{Q_{m-k}}) = 0$$

og idet alle de uafhængige variable indgår i pi-erne, siger pi-teoremet (Buckingham, 1914), at ϕ_1 kan udtrykkes som en funktion udelukkende af disse:

$$\phi_2(\Pi_{Q_1}, \Pi_{Q_2}, \ldots \Pi_{Q_{m-k}}) = 0$$

Ønsker man nu at finde en udtryk for en af de afledede størrelser som funktion af de øvrige kan denne isoleres i udtrykket og man får f.eks.:

$$Q_1 \propto D_1^{-a_1} D_2^{-a_2} \cdots D_k^{-a_k} \phi_3(\Pi_{Q_2}, \ldots, \Pi_{Q_{m-k}})$$

Et eksempel der illustrerer dimensionsanalyse ud fra pi-teoremet vil være på sin plads her. Som eksempel vil vi bruge regndråbens hastighed. Ikke fordi det forventes at give et andet resultat end tidligere, (tværtimod, forventer vi at se det samme som før) og heller ikke fordi det vil give en simplere analyse at benytte pi-teoremet her; men for at illustrere gangen i analysen, bruger vi endnu engang eksemplet med regndråben.

2.3.1 Eksempel 2b: Hastighed af regndråber

De relevante størrelser der må indgå er vist i tabel (2.1).

Tabel 2.1: De indgående størrelser og deres dimensioner

		dimension		
Størrelse	symbol	M	L	T
Dråbens hastighed	v	0	1	-1
Tyngdeaccelerationen	g	0	1	-2
Dråbens radius	r	0	1	0
Dråbens masse	m	1	0	0
Luftens viskositet	η	1	-1	-1
Luftens densitet	ϱ	1	-3	0

Disse størrelser kan udtrykkes ved grundenhederne M, L og T, og uanset hvilken basis man vælger, skal den derfor bestå af tre uafhængige størrelser. Hastigheden må ikke indgå i basen, da det jo er hastigheden vi vil finde i sidste ende. Vi vælger nu η, ϱ og r som base, og skal danne tre dimensionsløse størrelser af de resterende. Først findes Π_v:

$$[\Pi_v] = [LT^{-1}][ML^{-1}T^{-1}]^a[ML^{-3}]^b[L]^c = [1]$$

når dette løses fås $a = -1$, $b = 1$ og $c = 1$, og dermed

$$\Pi_v = v\frac{\varrho r}{\eta}$$

På samme vis findes Π_g

$$[\Pi_g] = [LT^{-2}][ML^{-1}T^{-1}]^a[ML^{-3}]^b[L]^c = [1]$$

hvilket medfører:

$$\Pi_g = g\frac{\varrho^2 r^3}{\eta^2}$$

og Π_m:

$$[\Pi_m] = [M][ML^{-1}T^{-1}]^a[ML^{-3}]^b[L]^c = [1]$$

hvilket medfører:

$$\Pi_m = m\frac{1}{\varrho r^3}$$

hvorefter v kan udtrykkes:

$$v \propto \eta\varrho^{-1}r^{-1}\phi(\Pi_g, \Pi_m)$$

Dette var en dimensionsanalyse ud fra pi-teoremet uden andre fysiske overvejelser end det kræver at finde de relevante indgående størrelser. Men som tidligere kan vi opnå et mere præcist resultat ved at stille nogle flere krav til, hvordan de fem størrelser, som hastigheden af regndråben skønnes afhængig af, skal indgå i forhold til hinanden. Det er muligt at reducere antallet af variable ved en metode der er analog til fremgangsmåden i eksempel 2a. Man kan indse, at massen og tyngdeaccelerationen må indgå som et produkt. Dette kan opnås ud fra pi-erne ved at gange Π_m med Π_g. Vi får da et nyt pi:

$$\Pi_{mg} = \Pi_m\Pi_g = \frac{mg\varrho}{\eta^2}$$

og hastigheden kan skrives som:

$$v \propto \frac{\eta}{r\varrho}\phi\left(\frac{mg\varrho}{\eta^2}\right) \tag{2.6}$$

Den samme reduktion af pi-er kunne være opnået på flere forskellige måder. Vi kan, som i eksempel 2a, indse at m og g må optræde som et produkt allerede i starten af analysen. En anden, og oftere anvendt metode, er at antage at kraften er endnu en fundamental dimension, således at der istedet for tre uafhængige størrelser i basen kan vælges fire. Derved havde vi kun fået to pi-er, og derved en funktion af én dimensionsløs størrelse, som ligning (2.6). Dette er muligt da den resulterende kraft er nul, når dråben opnår terminalhastighed, hvorfor der ikke er nogen udveksling mellem kraft og acceleration. Det bliver uddybet i næste kapitel.

Kapitel 3

Eksempler på dimensionsanalyse

I det foregående afsnit har vi vist tre simple eksempler på dimensionsanalyse, som skulle illustrere gangen i en sådan. Vi så, hvordan det ikke er muligt at løse ligningssystemet fuldstændigt, hvis man opererer med flere størrelser, end der er fundamentale dimensioner. I disse tilfælde kommer det ikke til at betyde, at analysen bliver umulig at gennemføre. Den proportionalitetssammenhæng der udledes, vil indeholde en ukendt funktion af de dimensionsløse tal, som kan dannes ud fra de indgående størrelser. Regndråbe-eksemplet illusterer dette, men vi så endvidere i eksemplet, hvordan det er muligt at reducere antallet af dimensionsløse størrelser ved at betragte kraften som en fundamental dimension.

Dette kapitel har til formål at vise flere eksempler på, at man kan forbedre resultatet af en dimensionsanalyse. Ved at tilføje systemet flere fundamentale dimensioner, kan man skærpe resultatet af analysen, således at det indeholder mere eksakt information. Der er flere muligheder for at tilføje en ny fundamental dimension. Den mest basale måde at gøre det, er som foreslået regndråbe-eksemplet, at ophøje en af de afledede dimensioner til en fundamental. I nogle tilfælde vil det give pote, i andre vil det betyde at endnu en størrelse – en dimensional konstant – skal tilføjes analysen, og man er dermed lige vidt. En anden mulighed er at indføre en helt ny dimension i analysen, men også her kan det betyde, at en dimensional konstant skal tages i betragtning.

Vi har prøvet at hente eksemplerne i dette kapitel fra fysikkens forskellige fagområder. Eksemplerne på dimensionsanalyse som forekommer, er baseret på den generelle metode, som pi-teoremet lægger op til. Denne metode kommer nu til sin ret, da dens force netop er at håndtere situationer, hvor antallet af indgående størrelser overstiger antallet af fundamentale dimensioner.

3.1 Temperatur i dimensionsanalyse

En stor del af diskussionen omkring dimensionsanalysen i begyndelsen af dette århundrede drejede sig om, hvilke dimensioner, der kunne vælges som fundamentale, og hvilke der ikke kunne (f.eks. Rayleigh, 1915, Bridgman, 1922). Et af emnerne i diskussionen var dimensionen af størrelsen temperatur. I det tidlige CGS-enhedssystem opererede man kun med tre grundlæggende enheder, og følgelig var der ingen selvstændig dimension i termodynamikken. Derfor fik temperatur dimensionen kinetisk energi, hvilket også følger meget naturligt af den kinetiske gasteori. Modstanderne af at anvende temperatur som fundamental dimension indvendte, at dimensionen af en størrelse var et udtryk for størrelsens "natur", og at man derfor ikke kunne vælge fundamentale dimensioner "efter behag" (Massey, 1971). Hvis man ikke anvendte dimensionen kinetisk energi for temperatur, ville man altså miste noget fysisk indsigt.

Grunden til denne forvirring har nok været, at størrelsesregningen endnu var et nyt værktøj, og man har da forvekslet værktøjet med en fysisk teori. Et værktøj skal konstrueres så det er bedst egnet til den opgave det skal udføre, mens en fysisk teori beskriver fænomener i naturen, hvilke man ikke kan lave om på. Det står dog klart i dag, at størrelsesregningen er et af fysikernes grundlæggende værktøj, og man kan derfor frit vælge hvilke dimensioner, der er fundamentale, hvilket vi også har vist i kapitel 1.

Det blev også klart, at man med fordel kunne arbejde med temperatur som en størrelse med fundamental dimension, hvilket siden blev formaliseret i SI-systemet. Med indførelsen af temperatur som fundamental dimension kræves også en dimensional konstant, nemlig Boltzmanns konstant k_B, som fik dimensionen energi pr. temperatur, og SI-enheden Joule$\cdot$K^{-1}. Ydermere blev der med SI også indført den fundamentale dimension mol, hvilket ændrede den dimensionale konstant til gaskonstanten $R = N_A k_B$ med dimensionen energi pr. temperatur pr. mol, og SI-enheden Joule $\cdot$ K$^{-1}\cdot$mol^{-1}.

Anvendelsen af temperatur som fundamental dimension giver selvfølgelig en fordel i dimensionsanalysen, men det giver også et nyt problem, nemlig at afgøre hvorvidt den dimensionale konstant, skal indgå i analysen. Den dimensionale konstant er enten gaskonstanten eller Boltzmanns konstant afhængig om man regner på molære størrelser eller ej.

3.1.1 Eksempel 3: Tryk af en ideal gas

Vi har konstrueret et simpelt eksempel hvor det er uden betydning for resultatet af dimensionsanalysen, om enhedsystemet har temperatur som fundamental dimension. Vi vil forsøge at beregne trykket af en ideal gas. Vi forstiller os en beholder med det molære volumen V_m, indeholdende en ideal gas med trykket p. En ideal gas består af monoatomare molekyler, og det antages at det volumen som selve molekylerne optager er nul, samt at der ikke er nogen gensidig påvirkning mellem molekylerne. Vi forsøger først at regne med dimensionen af temperatur lig dimensionen af kinetisk energi. De indgående størrelser bliver da som i tabel 3.1.

Tabel 3.1: De indgående størrelse ved tryk af ideal gas.

		dimension			
Størrelse	symbol	M	L	T	mol
Molære volumen af beholderen	V_m	0	3	0	-1
Tryk	p	1	-1	-2	0
Avogadros konstant	N_A	0	0	0	-1
Temperatur	T	1	2	-2	0

Der er fire indgående størrelser og fire fundamentale dimensioner. Dette kan løses simpelt, og vi får:

$$p \propto \frac{N_A T}{V_m} \tag{3.1}$$

Analysen kan også gennemføres ved at regne med temperatur som fundamental dimension. Da der er en sammenhæng mellem temperatur og tryk, krævers det at gaskonstanten også tages med som indgående størrelse.
Her er nu fem indgående størrelser og fem fundamentale dimensioner. Tryk-

Tabel 3.2: De indgående størrelser ved tryk af ideal gas, med temperatur som fundamental dimension.

		dimension				
Størrelse	symbol	M	L	T	θ	mol
Volumen af beholderen	V	0	3	0	0	0
Antal mol gas	n	0	0	0	0	1
Tryk	p	1	-1	-2	0	0
Temperatur	T	0	0	0	1	0
Gaskonstanten	R	1	2	-2	-1	-1

ket kan da skrives som:

$$p \propto \frac{nRT}{V} \tag{3.2}$$

hvilket svarer til den velkendte tilstandsligning for en ideal gas: $pV = nRT$. Ligningerne (3.1) og (3.2) er identiske, bortset fra at i ligning (3.1) skal temperatur regnes i enheden kinetisk energi for at sikre dimensional homogenitet.

I dette tilfælde har det været nødvendigt for os at anvende gaskonstanten (eller Boltzmanns konstant) som indgående størrelse. Dette skyldes, at vi i dette tilfælde har regnet på et system, hvor der sker omsætning mellem tryk, volumen og temperatur. Dette svarer til en omsætning mellem mikroskopisk og makroskopisk energi. I problemer der ikke indeholder omsætning af molekylernes kinetiske energi (mikroskopisk energi) til en højere form for energi, f.eks. volumenarbejde er det ikke nødvendigt at inkludere gaskonstanten som indgående størrelse. Det kunne f.eks. være idealiserede problemer med varmetransport, hvor der ikke sker nogen omsætning af molekylernes kinetiske energi til andre former for energi.

Et yndet trick ved dimensionsanalyse på problemer omhandlende varmetransport er at lade varmemængden Q være en fundamental dimension (f.eks. Massey, 1971 & Rayleigh, 1915). Dette er tilladeligt i de tilfælde, hvor der ikke eksisterer overførsel af varme til energi i andre former, f.eks. til mekanisk energi, eller omvendt. Man kan se brugen af varme som fundamental dimension på samme måde som kraft kan bruges som fundamental dimension i problemer i statikken.

Vi vil nu se på et eksempel fra Massey (1971), som udnytter temperatur som fundamental dimension, *uden* samtidig at have gaskonstanten med. Yderemere benytter han også varmemængden og kraften som fundamentale dimensioner.

3.1.2 Eksempel 4: Konvektion

Vi forestiller os et varmt legeme som er nedsænket i en kold stillestående væske. Legemet har kontakt til en varmekilde, og betragtes som en perfekt varmeleder, således at det har en konstant temperatur. Legemet vil da varme væsken lige omkring legemet op til en højere temperatur end resten af væsken. Da den opvarmede væskes massefylde er mindre end den kolde væskes massefylde, vil den opvarmede væske stige opad. Derved vil ny kold væske komme hen til legemet og blive opvarmet o.s.v.. Dette kaldes *naturlig konvektion*, modsat tvungen konvektion, hvor den kolde væske er i konstant bevægelse p.g.a. ydre forhold, f.eks. ved en strømning omkring det varme legeme. Vi ønsker nu at finde varmetransportkoefficienten, som er den mængde varme der ledes bort fra legemet pr. arealenhed pr. tid og pr. temperaturforskel mellem legemet og væsken. De relevante indgående størrelser er vist i tabel 3.3.

Tabel 3.3: De indgående størrelser ved konvektion.

		dimension					
Størrelse	symbol	Q	F	M	L	T	θ
Varmetransportskoefficient	h	1	0	0	-2	-1	-1
Temperaturforskel $T_{kilde} - T_{væske}$	ΔT	0	0	0	0	0	1
Størrelse af legemet	λ	0	0	0	1	0	0
Væskens termiske ledningsevne	κ	1	0	0	-1	-1	-1
Væskens specifikke varmekapacitet	C_p	1	0	-1	0	0	-1
Væskens massefylde	ϱ	0	0	1	-3	0	0
Tyngdeaccelerationen	g	0	1	-1	0	0	0
Varmeudvidelseskoefficienten	α	0	0	0	0	0	-1
Væskens viskositet	η	0	1	0	-2	1	0

Der er ni indgående størrelser, men regnet i SI-enheder er der kun fire fundamentale dimensioner (M, L, T og θ). Massey har derfor forøget antallet af fundamentale dimensioner. Først antages at varme er en fundamental dimension. Kravet for at varme kan antages som fundamental er, at der ikke forekommer omsætning af varme til mekanisk energi i problemet. Da hastigheden af den strømmende væske er lille, er den mængde varme der omsættes til mekanisk energi ad denne vej forsvindede i forhold til de varmemængder, der er tale om. Ydermere, er de accelerationer der forekommer ved bevægelse af væsken så små, at vi kan regne kraft som fundamental dimension, ligesom vi kunne i eksemplet med regndråben.

Væskens termiske ledningsevne er defineret ved Fouriers lov, som giver energistrømtætheden, d.v.s. den mængde energi pr. tid der passerer et enhedsareal placeret vinkelret på varmestrømsretningen:

$$j_E = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

Dimensionen for energistrømtætheden er $[QL^{-2}T^{-1}]$. Det ses da at κ må have dimensionen $[QL^{-1}T^{-1}\theta^{-1}]$, eller skrevet i SI-dimensioner: $[MLT^{-3}\theta^{-1}]$. κ siger altså noget om, hvor hurtigt væsken omkring legemet bliver opvarmet. Varmeudvidelseskoefficienten α er defineret ved:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial T}\right)_p \qquad (3.3)$$

α, viser altså den relative densitetsændring af væsken når denne opvarmes. Det negative fortegn viser, at ved en temperaturstigning bliver densiteten mindre, og det er netop denne ændring, der giver anledning til en opdrift. Tyngdeaccelerationen får i det "nye" enhedssystem dimensionen $[FM^{-1}]$, og viskositeten får dimensionen $[FL^{-2}T]$. Da disse to størrelser er de eneste som indeholder dimensionen kraft, er det tydeligt at de skal kombineres, så de tilsammen giver den hastighed hvormed den opvarmede væske stiger til vejrs. Jo sejere væske, jo langsommere konvektion.

Vi kan nu begynde med dimensionsanalysen, og vælger en passende base bestående af ΔT, λ, κ, C_p, ϱ og g. Det dimensionsløse produkt for h dannes af dimensionen for h gange med de 6 størrelser i basen, hver opløftet i en ukendt potens:

$$[\Pi_h] = \left[\frac{Q}{L^2T\theta}\theta^a\lambda^b\left(\frac{Q}{LT\theta}\right)^c\left(\frac{Q}{M\theta}\right)^d\left(\frac{M}{L^3}\right)^e\left(\frac{F}{M}\right)^f\right] = [1]$$

hvilket giver:

$$\Pi_h = \frac{h\lambda}{\kappa}$$

På samme måde findes

$$\Pi_\alpha = \Delta T\alpha \quad \text{og} \quad \Pi_\eta = \frac{\eta\kappa}{C_p\lambda^3\varrho^2 g}$$

Dermed er vi nået så langt vi kan med dimensionsanalysen alene, og vi kunne nu skrive en ligning for h. Den ville indeholde en funktion af to dimensionsløse størrelser (Π_α og Π_η). Massey fortsætter lidt endnu med at forsimple problemet v.h.a. fysiske argumenter.

En yderligere reduktion af pi-er kan opnås ved at indse at g og α må optræde som et produkt. Det er nemlig således, jvf. ligning (3.3), at en densitetsændring $\partial\varrho$ får et lille volumen dV til at blive påvirket med en opdriftskraft $g\partial\varrho dV$. Densitetsændringen er givet ved $\partial\varrho/\varrho = \partial T\alpha$ og ved substitution af $\partial\varrho$ fås opdriften til $\varrho g\alpha\partial TdV$. Vi må derfor forvente at Π_α og Π_η indgår som Π_α/Π_η, og vi får da at:

$$\Pi_{\alpha/\eta} = \Pi_\alpha/\Pi_\eta$$

og alt i alt:

$$h \propto \frac{\kappa}{\lambda}\phi\left(\frac{\Delta T\alpha C_p m\lambda^3\varrho^2 g}{\eta\kappa}\right) \tag{3.4}$$

Selvom vi endnu ikke har opnået en fuldstændig løsning af problemet, er vi kommet langt i forhold til de ni størrelser, vi lagde ud med. En stor del af reduktionen skyldes dog fysiske argumenter, og ikke dimensionsanalysen. Dette er meget typisk, og man vil sjældent se dimensionsanalyse anvendt, uden at problemet ikke også bliver reduceret v.h.a. fysiske argumenter. Dette viser endnu engang, at dimensionsanalysen ikke er en maskine der giver bare giver resultater, men et værktøj, som ved korrekt anvendelse og kombineret med en fysisk forståelse af en problemstilling kan give gode resultater.

3.2 Vinkler

I SI-systemet betragtes vinkler som en størrelse, der er afledt af længde. Vinklen φ måles som buelængde, b over radius, r, og har derfor dimensionen $[LL^{-1}] = [1]$. Taler man om enheden radianer, f.eks. i en vinkelhastighed, ω, er det underforstået at radianer har dimensionen [1], og $[\omega] = [T^{-1}]$. Men indførsel af vinkler som en fundamental dimension er en oplagt mulighed, og det var med i overvejelserne omkring fastlæggelsen af SI-systemet (H. Højgaard Jensen, internt notat). Fordelen vil bl.a. være, at med vinklen som fundamental dimension kan det gøres muligt, at skelne størrelserne kraftmoment og energi fra hinanden ud fra deres dimension. Spørgsmålet er så, om det har nogen betydning for dimensionsanalysen, og det skal vi her prøve at kigge på. Man kunne frem for den gældende definition af vinklen, vælge at skrive:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{b}{r}$$

og lade φ_0 definere en dimension, $[\Omega]$, som relaterer til en enhed, der angiver vinklen som en del af en cirkel. Skal φ f.eks. have enheden radianer, kan vi bestemme $\varphi_0 = 1$ radian. Indførslen af vinkel som fundamental dimension får konsekvenser for en lang række områder af fysikken, idet dimensionen for mange fysiske størrelser kommer til at involvere vinklen. Hvis:

$$[\omega] = \left[\frac{d\varphi}{dt}\right] = [\Omega T^{-1}]$$

følger det at vinkelaccelerationen α har dimensionen:

$$[\alpha] = \left[\frac{d\omega}{dt}\right] = [\Omega T^{-2}] \tag{3.5}$$

Men ønsker vi at finde hastigheden, i en jævn cirkelbevægelse med vinkelhastigheden ω kan vi ikke benytte den sædvanlige relation, $v = r\omega$, hvor r er cirklens radius. Denne ligning er ikke dimensional homogen, hvis hastighed defineres ud fra ligningen $v = dl/dt$. Derfor skal vinkelkonstanten φ_0 indgå i relationen, således at:

$$v = \frac{1}{\varphi_0} r\omega$$

For visse størrelser er det ikke indlysende hvordan de afhænger af vinklen. Lad os betragte impulsmomentet. Det kan skrives som:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{3.6}$$

Størrelsen af et krydsprodukt kan som bekendt skrives ved produktet af længden af vektorerne og sinus til vinklen mellem dem. Sædvanligvis er argumentet til trigonometriske funktioner dimensionsløst. Men nu har vinklen fået dimension og der er flere forskellige valgmuligheder for, hvordan man skal benytte de trigonometriske funktioner. Den første mulighed er, at indføre en karakteristisk vinkel, hver gang man benytter en trigonometrisk funktion. Skal man for eksempel tage sinus til vinklen φ, skrives det $\sin(\varphi/\varphi_0)$. Ved hjælp af φ_0 bibeholdes et dimensionsløst argument. Så er man sikker på at kravet om dimensional homogenitet kan opfyldes, og det er da også den konvention, der lettest indføres i det eksisterende system. En anden mulighed er at tildele f.eks. $\sin(\varphi)$ en dimension, hvilket der er følgende ulemper ved: For det første er det ikke længere muligt at foretage en Taylor-rækkeudvikling uden at bryde den dimensionelle homogenitet, da:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \tag{3.7}$$

$$[\sin\varphi] = [\Omega] - [\Omega^3] + [\Omega^5] - \cdots (-1)^n [\Omega^{2n+1}] \tag{3.8}$$

hvilket ikke er dimensional homogent. Derudover vil det kræve en mængde yderligere formelle ændringer i andre dele af fysikken. Vi vælger derfor at benytte os af den første mulighed.

Ud fra denne konvention beholder impulsmomentet, $\mathbf{L}$ dimensionen $[ML^2T^{-1}]$, hvis det defineres som $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$. $|\mathbf{L}|$ kan skrives $rp\sin(\varphi/\varphi_0)$, hvor φ er vinklen mellem $\mathbf{r}$ og $\mathbf{p}$. Den dimensionale konstant φ_0 sikrer, at argumentet til sinusfunktionen er dimensionsløst.

Men man kan istedet vælge at definere $|\mathbf{L}|$ ud fra relationen til inertimoment og vinkelhastighed, selv om det måske ikke er den mest indlysende definitionsligning:

$$\begin{aligned} L &= I\omega = mr^2\omega \Rightarrow \\ [L] &= [mr^2\omega] = [ML^2\Omega T^{-1}] \end{aligned}$$

Nu vil ligning 3.6 ikke længere være definitionsligning, og man er nødt til at indsætte den dimensionale konstant, φ_0 for at bevare et konsistent enhedssystem, således at:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\varphi_0}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

En tredie mulighed er, hvis man som udgangspunkt arbejder i polære koordinater, at definere kraftmomentet ud fra den analytiske mekanik, hvilket giver anledning til følgende impulsmoment (Højgaard, internt notat):

$$L = \frac{1}{\varphi_0^2} I\omega \Rightarrow \tag{3.9}$$

$$[L] = [ML^2\Omega^{-1}T^{-1}] \tag{3.10}$$

Anvendes en af de to sidste muligheder for definition af L, og defineres kraftmoment som:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

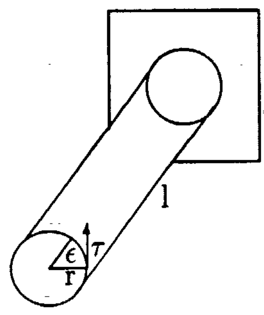
har man et enhedssystem, hvor dimensionerne af energi og kraftmoment adskiller sig ved hjælp af dimensionen vinkel.

Vi vil nu prøve at drage nytte af at indføre vinkel som fundamental dimension i dimensionsanalysen. Men det kræver meget omhyggelige overvejelser af, hvordan vinklen indgår i de forskellige størrelsers dimension. For det er, som det fremgår af det ovenstående, ikke indlysende hvordan et enhedssystem med vinkler ser ud, da der er flere muligheder tilstede, for at vælge definitionsligninger.

Vi ser nu på to eksempler på dimensionsanalyse hvor det forsøgsvis prøves at drage nytte af at indføre vinkler, som en uafhængig dimension. I det første eksempel viser det sig, at det forbedre dimensionsanalysens resultat, mens det i det næste eksempel ikke ændrer på resultatet. Efter eksemplerne vil det blive diskuteret hvornår den dimensionale konstant, φ_0 skal indgå i dimensionsanalysen.

3.2.1 Eksempel 5: Torsion

Dette eksempel er lidt af en klassiker indenfor dimensionsanalysen, både Taylor og Massey benytter det som et eksempel på brugen af vinkel som fundamental dimension. Det er i begge tilfælde det eneste eksempel, de viser hvor de opnår noget ved det. En elastisk stang med et uniformt cirkulært tværsnit, er fastgjort i den ene ende. Den udsættes for en kraft, som bevirker at stangen vrides (torsion). Skal stangen kun vrides og ikke forskydes longitudinalt, må den kraft, der påføres stangen, være vinkelret på stangens længdeakse. Denne kraft er altså tangential. De to størrelser, som vi ønsker at finde en sammenhæng mellem, er kraftmomentet τ og den vinkel stangen drejes i endepunktet, φ.



Figur 3.1: Vridningen af en stang.

Vi betragter de øvrige størrelser, der må indgå i analysen. Stangens størrelse er selvfølgelig relevant, så længden, λ og diameter, d må komme i betragtning, men vi kan gøre det hele lidt simplere ved at betragte vridningen pr. enhedslængde, φ_λ. Egenskaberne af stangens materiale har også betydning for, hvor meget den vrides ved en bestemt kraft, og vi har derfor brug for et udtryk for materialets modulus af stivhed. Da stangen kun forskydes i en tværgående retning i forhold til længdeaksen er det shear modulus, vi skal betragte. Vi kigger lige på dimensionen af denne.

Der er følgende sammenhæng mellem en transvers forskydning pr. enhedslængde (shear strain, som kan måles i en forskydningsvinkel, ϵ,) tangential kraft pr. arealenhed (shear stress, σ) og stangens shear modulus, G

$$\sigma = G\epsilon \tag{3.11}$$

Er vinkler på sædvanlig vis dimensionsløse, er shear strain dimensionsløst, og shear modulus og stress får derfor samme enhed, nemlig $[\sigma] = [G] = [ML^{-1}T^{-2}]$.

I en dimensionsanalyse, der skal afklare sammenhængen mellem kraftmoment og vridning pr. længdeenhed, indgår de fire størrelser τ, G, d og φ_λ.

Med fire størrelser og tre fundamentale dimensioner forventer vi kun at danne ét dimensionsløst produkt, men det er kun muligt at sammensætte en base af to uafhængige størrelser. Dette skyldes at kraftmoment og shear modulus er

Tabel 3.4: Indgående størrelser med standard-dimensioner.

Størrelse	symbol	dimension M	L	T
Kraftmoment	τ	1	2	-2
Shear modulus	G	1	-1	-2
Vridning pr længdeenhed	φ_λ	0	-1	0
Diameter	d	0	1	0

de eneste indgående størrelser der indeholder masse- og tids-dimensioner og, som det ses af tabel3.4, optræder i samme forhold. Vi lader basen indeholde G og d. Det første dimensionsløse produkt skal sammensættes af vridning pr. længdeenhed φ_λ og diameteren d:

$$\Pi_{\varphi_\lambda} = [d\varphi_\lambda] = [LL^{-1}]$$

Det andet dimensionsløse produkt kan sammensættes af basen og kraftmoment på følgende vis:

$$\Pi_\tau = \frac{Gd^3}{\tau}$$

og vi har fundet sammenhængen:

$$\tau \propto Gd^3\, \phi(d\varphi_\lambda)$$

hvor ϕ er en vilkårlig funktion. Dermed har vi ikke opnået væsentlig yderligere information end den antagelse, vi havde som udgangspunkt; nemlig at der er en sammenhæng mellem størrelsen af kraftmomentet og størrelsen af vridningen.

Nu vil vi så prøve at indføre dimensionen $[\Omega]$ for vinkel. Lad os se på, hvordan de indgående størrelser er afhængige af vinklen og dermed ændrer dimension, hvis denne gøres til en fundamental enhed. Det ses af ligning 3.11, at shear modulus så bliver afhængig af vinklen, da $[\epsilon] = [\Omega]$. Shear modulus må så have dimensionen:

$$[G] = [ML^{-1}T^{-2}\Omega^{-1}]$$

Kraften F som påføres stangen er stadig den samme, vinkelret på længdeakse, og tangential til stangens cirkulære tværsnitsareal. Ud fra denne beregnes kraftmomentet, τ ved at krydse kraft- og stedvektoren. Stedvektoren ligger fra tværsnittets massemidtpunkt til kraftens angrebspunkt.

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow \tau = rF \sin\left(\frac{\pi}{2\varphi_0}\right)$$

Defineres kraftmomentet således, kan der ikke indgå vinkel i dimensionen, da $\sin(\pi/2\varphi_0)$ er dimensionsløs. Da kraften desuden påføres stangens overflade, og denne har et cirkulært tværsnit, står kraftvektoren altid vinkelret på stedvektoren, og relationen mellem kraft og kraftmoment kan skrives $\tau = rF$.

De fire størrelser har altså følgende dimensioner (se tabel 3.5). Vi kan se bort fra kravet fra T, da det tidligere har vist sig at det sætter samme krav som M.

Tabel 3.5: Indgående størrelser med vinkel som fundamental dimension.

		dimension			
Størrelse	symbol	M	L	T	Ω
Kraftmoment	τ	1	2	-2	0
Shear modulus	G	1	-1	-2	-1
Vridning pr længdeenhed	φ_λ	0	-1	0	1
Diameter	d	0	1	0	0

Med fire indgående størrelser og tre fundamentale dimensioner dannes et dimensionsløst produkt:

$$\Pi_\tau = \frac{d^4 G \varphi_\lambda}{\tau}$$

og τ kan udtrykkes som:

$$\tau \propto d^4 G \varphi_\lambda$$

hvilket må siges at være en overraskende sammenhæng. Man ville ikke umiddelbart forvente at kraftmomentet er proportional med diameteren i fjerde potens.

I dette tilfælde kunne vinklen med fordel opfattes som en fundamental størrelse, frem for en afledet dimensionsløs størrelse. Det gav en fundamental dimension mere til dimensionsanalysen og dermed et pi mindre. Men ikke i alle tilfælde er det en effektiv måde at reducere antallet af dimensionsløse størrelser på.

3.2.2 Eksempel 6: Svingningstiden af et pendul

Vi ønsker ved dimensionsanalyse at finde svingningstiden af et pendul. Pendulet består af en masseløs snor af længde λ og et lod med massen m. Ved pendulets maximale udsving måles vinklen φ mellem snoren og den lodrette position. Dimensionsanalysens relevante størrelser er indeholdt i tabel 3.6.

Tabel 3.6: Indgående størrelse i dimensionsanalyse af pendulsvingning med standard-dimensioner.

Størrelse	symbol	dimension M	L	T
Vinkel af max. udsving	φ	0	0	0
Længde af snor	l	0	1	0
Masse af lod	m	1	0	0
Tyngdeaccelerationen	g	0	1	-2
Svingningstid	P	0	0	1

Ud fra dette findes sammenhængen:

$$P \propto \sqrt{\frac{l}{g}}\phi(\varphi)$$

Det viste sig – måske overraskende – at massen ikke er en relevant størrelse, når man betragter svingningstiden for et pendul. Ydermere kan vi se, at vi ikke har fået nogen oplysning om, hvordan svingningstiden afhænger af størrelsen af udsvinget, idet vinklen som beskrev dette udsving kun indgår som en dimensionløs størrelse. Igen ser vi på et eksempel hos Massey, hvor han indfører vinklen som fundamental dimension (se tabel 3.7).

Tabel 3.7: Indgående størrelser med vinkel som fundamental dimension.

Størrelse	symbol	dimension M	L	T	Ω
Vinkel af max. udsving	φ	0	0	0	1
Længde af snor	l	0	1	0	0
Masse af lod	m	1	0	0	0
Tyngdeaccelerationen	g	0	1	-2	0
Svingningstid	P	0	0	1	0

Dimensionen Ω indgår kun i vinklen og ikke i nogen af de øvrige størrelser. Derfor får vi nu resultatet:

$$P \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Der er altså fundet frem til at svingnigstiden er uafhængig af vinklen. Men lad os prøve at sammenligne resultatet med den analytiske løsning. Denne findes ved at overveje de kræfter, der virker på loddet, (tyngdekraften og snorekraften). Udfra disse opstilles differentialligningen (opskrevet uden vinkel som fundamental dimension):

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\sin\varphi$$

Løsningen til ligningen er en periodisk funktion med perioden:

$$P = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\varphi + \frac{9}{64}\sin^4\frac{1}{2}\varphi + \cdots\right)$$

Dette stemmer fint overens med resultatet fra den første dimensionsanalyse, men er i strid med den sidste analyse, hvor vi fandt at udtrykket for pendulets svingningstid er uafhængigt af φ. Kun for små vinkler vil denne approximation være korrekt, da sinus-leddene her er af lille størrelsesorden.

Dette eksempel kommenterer Massay med, at resultatet ikke er i direkte modstrid til den analytiske løsning, hvis man tolker det således at vinklen ikke kan have direkte effekt på de øvrige størrelser. Når resultatet ser ud som det gør, skriver han at det

> "...indicates only that α [vinklen] does not enter the sought-for relation in such a way that a change of the scale of measurement for angle would affect any of the numbers in the relation." (Massey 1971, s. 74).

Vi er ikke tilfredse med denne konklusion, for der må være begået en fejl i dimensionsanalysen, og den ønsker vi at finde. Vi betragter derfor systemet igen.

Ud over tyngdekraften virker der en anden kraft på systemet, nemlig snorekraften. Bevægelsen som loddet foretager, er en cirkelbevægelse. Den resulterende kraft er givet ved:

$$F = \frac{1}{\varphi_0}ma_t \tag{3.12}$$

Vinkelkonstanten φ_0 indgår, fordi vi arbejder i et enhedssystem, hvor vinkel er en fundamental dimension. Der er dimensional homogenitet i ligningen, da a_t er tangential-accelerationen, som er defineret:

$$a_t = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

og har altså dimensionen $[L\Omega T^{-2}]$. Hermed er vi blevet klar over hvorfor φ_0 skulle indgå i analysen. Den optrådte nemlig i en relation, som var relevant for systemet. Men det var ikke umiddelbart indlysende, at det var tilfældet, faktisk er der tale om at vi måtte et godt stykke ind i en analytisk løsning af problemet for at indse det. Vi har både indført en ny fundamental dimension og en ny størrelse i analysen. Dermed har vi ikke formindsket antallet af dimensionsløse størrelser, og har altså ingenting vundet ved at indføre vinkel som fundamental dimension, blot ser vores pi nu ud som følger

$$\Pi_\varphi = \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

Resultatet af analysen bliver hermed korrekt, men identisk med resultatet fra analysen, hvor vinklen var dimensionsløs.

3.3 Fundamentale længder

Nu har vi i en række eksempler set at det er muligt at forbedre dimensionsanalysen ved at benytte flere fundamentale dimensioner. Det er derfor en fristende tanke at gøre forskellige retninger af længden til uafhængige størrelser, således at f.eks. $[\varrho] = [ML_x^{-1}L_y^{-1}L_z^{-1}]$.

Der er forskellige synspunkter i litteraturen om dette. Massey (1971, s.71) mener ikke at der er noget at vinde ved at indføre flere længder, og han kategoriserer eksemplerne i den øvrige litteratur i to kategorier: (1) Dem der er forkerte (evt. kun delvis forkerte, idet de beskriver specialtilfælde istedet for generelle forhold), eller (2) Dem hvor det samme resultat kunne være opnået ved andre metoder. Han mener dog ikke at være i stand til at give en kortfattet redegørelse for hvorfor der ikke kan opnås noget ved at indføre flere længder, men nøjes med at konstaterer at det eneste der opnås er kompleksitet og forvirring.

Et eksempel på en forfatter, der benytter sig af flere fundamentale størrelser for længde, er Taylor (1974, s. 23). Han er af den overbevisning, at så længe det er muligt at skelne imellem de forskellige længder, er det lige så fornuftigt, at vælge forskellige længder som fundamentale dimensioner, hvis det kan øge antallet af uafhængige størrelser, som det er at vælge enhver anden dimension som fundamental. Og efter hans mening kan man vælge fire (!) fundamentale længder, så længe det blot er muligt at skelne. Han har et eksempel hvor han benytter flere længder:

3.3.1 Eksempel 7: Torsionsegensvingning

Igen kigger vi på torsion i en elastisk stang. Denne gang vil vi gerne finde den laveste frekvens for torsionsegensvingning.

De indgående størrelser Taylor antager indgår i problemstillingen er: Frekvensen (ω), densiteten (ϱ), shear modulus (G), Newtons proportionalitetskonstant (g_0), længden af stangen (l) og stangens diameter (d). Grunden til at Newtons proportionalitetskonstant indgår som parameter er, at Taylor har den vane at vælge kraft som fundamental størrelse sammen med M, L og T, også i de problemstillinger hvor Newtons 2. lov indgår. Dette medfører at han i de tilfælde er nød til at indføre g_0, der sikrer den dimensionale homogenitet.

Først laver vi dimensionsanalysen uden at splitte op i retninger (se tabel 3.8).

Tabel 3.8: De indgående størrelser ved torsionsegensvingning af elastisk stang.

		dimension			
Størrelse	symbol	F	M	L	T
Egenfrekvens	ω	0	0	0	-1
Densitet	ϱ	0	1	-3	0
Shear-modulus af stangen	G	1	0	-2	0
Newtons proportionalitetskonstant	g_0	-1	1	1	-2
Stangens længde	l	0	0	1	0
Stangens diameter	d	0	0	1	0

Det er muligt at lave to dimensionsløse størrelser:

$$\Pi_\omega = \frac{\omega^2 \varrho l^2}{g_0 G} \tag{3.13}$$

og

$$\Pi_d = \frac{l}{d} \tag{3.14}$$

Egenfrekvensen er derfor givet ved:

$$\omega \propto \frac{1}{l}\sqrt{\frac{g_0 G}{\varrho}}\phi\left(\frac{l}{d}\right) \tag{3.15}$$

Vi genkender $\sqrt{g_0 G/\varrho}$ som hastigheden af torsionsbølgen. For at opnå et mere entydigt resultat vælger Taylor nu at indføre longitudial længde langs

Tabel 3.9: Indgående størrelser med to uafhængige længder.

Størrelse	symbol	F	M	L_t	L_l	T
Frekvens	ω	0	0	0	0	-1
Densitet	ϱ	0	1	-2	-1	0
Shear-modulus	G	1	0	-3	1	0
Newtons prop.	g_0	-1	1	1	0	-2
Længde	l	0	0	0	1	0
diameter	d	0	0	1	0	0

med stangen og transversal længde på tværs med stangen som fundamentale dimensioner. Shear strain er nu ikke længere dimensionsløs, men har dimensionen $[L_t L_l^{-1}]$, mens shear stress har dimensionen $[F L_t^{-2}]$, da stresset angriber på endefladen af stangen. Da shear modulus er forholdet mellem stress og strain bliver dimensionen $[F L_t^{-3} L_l]$. Han antager også at Newtons 2. lov kun har betydning i den transversale retning, hvilket er rimeligt idet problemstillingen udelukkene beskæftiger sig med shear strain. Det er nu kun muligt at danne én dimensionsløs størrelse.

$$\Pi_\omega = \frac{\omega^2 \varrho l^2}{g_0 G} \tag{3.16}$$

Egenfrekvensen er nu bestemt ved:

$$\omega \propto \frac{1}{l}\sqrt{\frac{g_0 G}{\varrho}} \tag{3.17}$$

Dette viser, at diameteren er uden betydning for egenfrekvensen. Umiddelbart ser det ud til, at vi har vundet noget ved at indføre de to former for længde. Massey vil nok mene at han kunne opnå samme resultat ved en anden metode, men det virker som om det rent faktisk er lykkedes for Taylor at konstruere et eksempel hvor det er muligt at benytte uafhængige længder. At det så kræver et stort overblik at benytte sig af dem er en anden sag. Konklusionen må være at der ikke er noget principielt i vejen med at benytte uafhængige længder, men at det er i meget få tilfælde hvor det rent faktisk er muligt.

3.4 Dimensionale konstanter

Vi har nu set på en række eksempler, hvor dimensionsanalyser er søgt forbedret, ved indførelsen af flere fundamentale dimensioner. Som det er fremgået af eksemplerne, er der ikke altid en fordel forbundet hermed. I nogle tilfælde følger der en dimensional konstant med i købet, og man har ikke opnået noget ved sine anstrengelser. I et forsøg på at uddrage nogle generelle betingelser for, hvornår man med held kan indføre flere fundamentale dimensioner, vil vi i dette kapitel sammenholde resultatet af vores eksempler med nogle overvejelser omkring dimensionale konstanter.

Vi vil først komme med nogle generelle betragtninger over, hvornår en dimensional konstant er med i en dimensionsanalyse, for derefter at diskutere, hvornår det er hensigtsmæssigt at gøre en dimension fundamental. Spørgsmålet om, hvor og hvornår en dimensional konstant er blandt de indgående størrelser, optræder nemlig længe før vi begynder at manipulere med afhængigheden af dimensionerne, ved at gøre en dimension fundamental. I enhver dimensionsanalyse er det nødvendigt at kunne overskue, hvilke dimensionale konstanter, der skal indgå i analysen. Der kan selvfølgelig være tilfælde, hvor det vil fremgå om man har glemt en af de indgående størrelser, fordi der ikke eksistere nogen løsning til det ligningssystem, man får sat op. Men forglemmelser kan også medføre et fejlagtigt resultat, og det er derfor vigtigt at kunne ræsonnere sig frem til de indgående konstanter.

I litteraturen omkring dimensionsanalyse formuleres princippet for at finde de rigtige indgående konstante størrelser på forskellig vis. Taylor skriver, at en dimensional konstant skal indgå, hvis den optræder i relevante love (Taylor 1974, s. 36). Det leder naturligt til spørgsmålet om, hvordan man finder de relevante love. En lidt anden formulering finder vi hos Bridgman. Han skriver, at de eneste dimensionale konstanter, som kan optræde i det endelige resultat, er de konstanter, vi skal bruge for at opskrive bevægelsesligningen ("equation of motion") for systemet (Bridgman 1922, s 52). Bevægelser skal i denne sammmenhæng ikke forstås udelukkende som en mekanisk term, men kan bruges i en generel betydning om ændringer i systemet, uanset om det er indenfor mekanikken eller f.eks. termodynamikken. At have kendskab til systemets bevægelsesligning, drejer sig om at kende problemstillingens natur, og vide hvilke love der styrer variationerne i systemet. Vi vil her bruge mekanikken til at illustrere betydningen af bevægelsesligninger. I mekanikken har vi et kendskab til kraft og bevægelse; en ændring i et mekanisk system er forbundet med, at det påvirkes af en kraft. Derfor må man kigge nærmere på de kræfter, der indgår, når vi skal overveje bevægelserne i systemet. Kraft er defineret ud fra Newtons anden lov, men de kræfter, som styrer bevægelserne i systemet, er ikke nødvendigvis kun relateret til de indgående størrelser ved definitionsligningen. Er systemet domineret af gravitationelle vekselvirkninger må man have fat i G, den universielle gravitationskonstant, idet kraft er relateret til masse, længde og tid ud fra følgende ligning, hvor

G, opretholder den dimensionale homogenitet.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{3.18}$$

Dimensionen af G er $[L^3M^{-1}T^{-2}]$. Det gælder for eksempel i en analyse af planeters baner, at ligning 3.18 er nødvendig for at opstille bevægelsesligningen og derfor skal G være blandt de indgående størrelse.

Generelt kan det udtrykkes således, at hvis en dimensional konstant indgår i en ligning, som relaterer størrelser med betydning for systemet, skal den inddrages.

Selv om det er en vag definition, der ikke ligefrem giver en metode til at arbejde efter (men snarere fører flere spørgsmål med sig), må vi stille os tilfredse; det er svært at komme tættere på et svar uden at gå til de enkelte tilfælde. Enhver analyse skal bygge på en god fysisk forståelse af problemstillingen. Det er nødvendigt at have en idé om hvilken retning en analytisk løsning af problemet ville gå i, og dermed en intuition for hvilke konstanter, der skal involveres.

Dette er også gældende, og kommer endda stærkere til udtryk, når man prøver at forbedre sin analyse. Som tidligere nævnt kan man kun ændre antallet af fundamentale dimensioner i kraft af, at en dimensional konstant også introduceres i ligningssystemet. Spørgsmålet er blot om denne konstant kan udelades af analysen. Det vil man gerne undgå, for som Bridgeman udtrykker det: "The dimensional constants are to be regarded as an evil..."

Dimensionale konstanters job er at sikre homogeniteten i de ligninger, der ikke er definitionsligninger. Det er vigtigt at mærke sig, før der manipuleres med enhedssystemet. For de nye konstanter optræder efter sammen princip, som de velkendte konstanter i SI-systemet. Som udgangspunkt arbejder man oftes i en dimensionsanalyse efter SI-systemets konventioner om, hvilke sammenhænge, der er gældende. Men når man ophøjer kraft til at være en fundamental dimension, følger man ikke SI-systemet længere. Det er sammenhængen mellem dimensionerne for kraft, længde, tid og masse, som man sætter ud af spil. Men naturlovene kan ikke sættes ud af kraft ved at man ændrer enhedssystemet, og derfor ændrer Newtons anden lov udseende med den ny notation for at undgå inkonsistens i form af ligninger, der ikke har dimensional homogenitet. Det er klart, at der må optræde en dimensional konstant, der sikrer den dimensionale homogenitet:

$$F = \frac{1}{g_0}ma$$

Den numeriske værdi af g_0 er 1 og den har dimensionen $[F^{-1}MLT^{-2}]$. Det ligning ingår nu i bevægelsesligning for systemet når der er relation mellem kraft, masse og acceleration i systemet, hvorfor konstanten g_0 skal tages med i analysen som indgående størrelse. Derfor er det kun en fidus at arbejde med kraft som uafhængig dimension, hvis størrelsen kraft ikke påvirker systemet i form af, at der sker en acceleration. I eksemplet med regndråben var vi netop interesseret i at finde en terminal hastighed. Dvs, at vi betragtede et system uden acceleration og derfor er det ikke nødvendigt at inddrage g_0.

På samme vis kan man i dimensionsanalysen have fordel af, at sammenhængen mellem temperatur og kinetisk energi beskrevet ved en dimensional konstant i termodynamikken. Det kan enten være R, gaskonstanten, som har dimensionen $[ML^2T^{-2}\theta^{-1}mol^{-1}]$ eller Boltzmanns konstant der har dimensionen $[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$ afhængigt af om der regnes i mol. En af disse skal indgå i analysen, med mindre der i det betragtede system ikke indgår nogen udveksling mellem mikro- og makro-skopisk energi. For i det tilfælde er de to størrelser uafhængige, og man skal udelade konstanten i analysen.

Vi fandt i eksemplerne andre muligheder for at opnå flere fundamentale dimensioner i analysen. Der var i eksempel 5, 6 og 7 tale om at indføre en helt ny dimension, hvor vi tidligere har nøjedes med at forfremme en afledet dimension. Man kan mene, at vi essentielt set gør det samme her. For vinklen har hele tiden optrådt som en størrelse med dimensionen $[L]/[L]$, og er altså afledt af længde. Men da $[L/L] = [1]$ kan vinklen kun indgå i dimensionsanalysen som et selvskrevent pi, og det har ikke tidligere været nødvendigt at vide om vinklen påvirkede andre indgående størrelser. Det viste sig at give større problemer at arbejde med, fremfor når man skal vurdere om to velkendte indgående størrelser er relaterede i systemet.

Det er sværere at gennemskue, om man laver en fejl, når man arbejder med en utraditionel dimension. Dels er spørgsmålet om vinklen skal indgå i de øvrige afledede dimensioner, og dels om man, som i eksempel 6, begår en fejl ved at udelade den dimensionale konstant. Tidligere har vi taget dimensionale konstanter med når vi "regnede med", at de måtte indgå i sammenhængen, udfra vores kendskab til forskellige fysiske relationer. Vi er ikke vant til at arbejde med vinkelkonstanten og har af samme grund ingen intuition om, hvornår den skal optræde. Yderligere er dette slet ikke entydigt, da man selv skal beslutte, hvilke ligninger, der er definitionsligninger. Afhængig af hvordan det hele defineres vil vinkelkonstanten optræde i mange ligninger, hvor nogle kan tænkes at være relevante for systemet. At det bliver mere besværligt skyldes også at vinkel indgår i definitionsligninger, hvor transcendentale funktioner indgår.

Det er et grundlæggende krav til dimensionsanalysen, at man har overblik over, hvilke relationer der har betydning for systemet. Dette krav gør det naturligvis sværere at arbejde med et til lejligheden konstrueret enhedssystem, med et antal utraditionelle fundamentale dimensioner. I tilfældet med de forskellige længder har vi dog ikke talt om en dimensional konstant. Men det skyldes, at man aldrig vil finde på at indføre forskellige længde-dimensioner i situationer, hvor der er en sammenhæng mellem længderne, så man derfor får brug for en dimensional konstant.

Kapitel 4

Modelforsøg og skalering

Når man laver modelforsøg vil man gerne kunne omregne fra model til virkelighed. For at dette skal være muligt skal de samme størrelsesligninger gælde i begge systemer. Dette sætter nogle særlige bånd på hvordan det er muligt at skalere modellen. Det skal først og fremmest gælde, at forhold for alle størrelser af samme art skal være identiske fra model til virkelighed. Det er kun muligt at definere et skaleringsforhold for hver art størrelse, hvis det skal være muligt generelt at omregne værdier for denne størrelse og alle størrelser der er afledet heraf fra model til virkelighed. Dette forhold kalder vi for $K_a = a'/a$, hvor a er størrelsen i det virkelige system, og a' er størrelsen i modellen.

Hvis vi har størrelsesligningen: $s = vt$ som har relevans for vores system, og alle tre størrelser indgår i problemstillingen, sætter det et bånd på vores skaleringer, da det skal gælde at:

$$s' = v't' \Rightarrow K_s s = K_v v K_t t \Rightarrow \frac{K_s}{K_v K_t} s = vt \Rightarrow s = vt$$

for at den samme størrelsesligning skal gælde for begge systemer, hvilket kun er opfyldt når $K_s/K_v K_t = 1$. Istedet for at kigge på enkelte ligninger kan man nøjes med at undersøge de dimensionsløse størrelser, og holde dem konstant mht. skalering (Massey 1971, s.92). Dette gør dimensionsanalysen til et vigtigt redskab, når man fortager modelforsøg.

For nu at give et eksempel på, hvordan man foretager skalering, kigger vi nu igen på regndråbeeksemplet. Vi ønsker at lave en opstilling til at finde terminalhastigheden for regndråben, men vi ønsker ikke at opstillingen skal fylde for meget. Så istedet vil vi kigge på en dråbe tyk olie i en let væske, da denne dråbe hvis den har en passene densitet, vil tilbagelægge en kortere afstand inden den opnår tilnærmelsesvis terminalhastighed.

Vi har tidligere fundet to dimensionsløse produkter: $\Pi_{mg} = \varrho mg/\eta^2$ og $\Pi_v = vr\varrho/\eta$ i eksempel 2b. Det sidste dimensionsløse produkt Π_v kaldes for Reynolds tal, og optræder ofte i modelforsøg inden for hydrodynamikken. Hvis de to dimensionsløse produkter skal være konstante giver det følgende bånd på skaleringsfaktorene: Fra Π_F får vi: $K_\eta = \sqrt{K_{mg}K_\varrho}$, og fra Π_v får vi $K_\eta = K_v K_r K_\varrho$.

Når man taler om masse, er det normalt en masse vejet i luft. Det betyder at den masse, der indgår for dråben, er dråbens masse minus massen af den fortrængte luft. Når vi nu skal angive massen af oliedråben, der falder gennem væsken, er det ikke oliedråbens masse der skal indgå, men dens masse i væsken. D.v.s sige oliedråbens masse minus massen af den fortrængte væske.

Da $K_{mg} = K_F$ er uhensigtmæssig at skalere med, vil vi istedet benytte K_r. Det gælder at hvis vi ikke ændrer g og densitetsforskellen mellem dråbe og medie, så må $K_F = K_r^3$, da $mg = kr^3\Delta\varrho g$.

Da vi har to pi-er er der to bånd på skaleringsfaktorene. Det er hastigheden vi gerne vil skalere, men det er muligt for skaleringsfaktoren for hastighed at løbe frit, hvorfor det er uhensigtsmæssigt at lægge en skaleringsfaktor for hastigheden fast. Vi kan altid bagefter finde forholdet den skaleres med, så vi kan regne modelhastigheden om til en hastighed af regndråber. valget af K_η og K_ϱ er derimod begrænset af hvilke væsker vi kan vælge som medie. Skaleringsfaktoren for r findes ved:

$$\left.\begin{array}{l} K_\eta = \sqrt{K_F K_\varrho} \\ K_F = K_r^3 \end{array}\right\} \Rightarrow K_r = K_\eta^{2/3} K_\varrho^{-1/3}$$

Skaleringsfaktoren for v findes ved:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{K_r^3 K_\varrho} = K_v K_r K_\varrho \\ K_r = K_\eta^{2/3} K_\varrho^{-1/3} \end{array}\right\} \Rightarrow K_v = K_\eta^{1/3} K_\varrho^{-2/3}$$

I vores model vælger vi nu at erstatte luften med vand som omgivelse for dråben:

$$\begin{array}{ll} \eta_{luft} = 1.81 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s} & \eta_{vand} = 1.01 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s} \\ \varrho_{luft} = 1.29\ \mathrm{kg/m^3} & \varrho_{vand} = 1.00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \end{array}$$

Dette matrialevalg giver os følgende skaleringsfaktorer:

$$\begin{aligned} K_\eta &= \frac{1.01 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}}{1.81 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}} = 55.8 \\ K_\varrho &= \frac{1.00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}}{1.29\ \mathrm{kg/m^3}} = 775 \end{aligned}$$

som vi kan benytte til at beregne, hvor stor en dråbe vi skal anvende i vores modelforsøg, og hvilken skalering vi opnår for hastigheden:

$$K_r = \frac{K_\eta^{2/3}}{K_\varrho^{1/3}} = \frac{55.8^{2/3}}{775^{1/3}} = 1.59$$

$$K_v = \frac{K_\eta^{1/3}}{K_\varrho^{2/3}} = \frac{55.8^{1/3}}{775^{2/3}} = 4.53 \cdot 10^{-2}$$

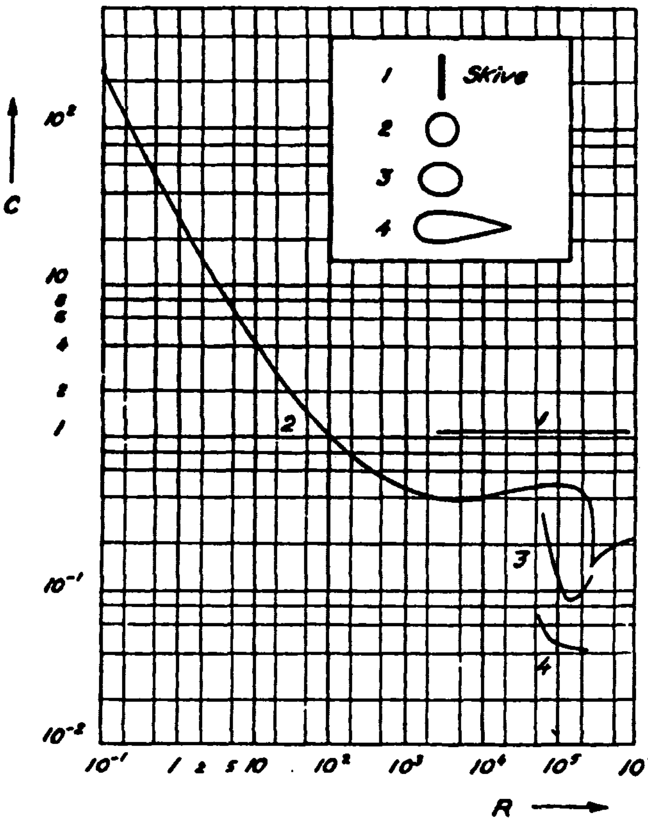
Vi har opnået at skalere hastigheden ned til 4.5% af hastigheden i luft. Derfor skal dråben falde tilsvarende kortere for at opnå terminalhastigheden. I dette tilfælde ville det måske være lettere blot at gå ud og måle de aktuelle hastigheder regndråber falder med. Men hvis man skal undersøge aerodynamikken af en fly-vinge kan det være praktisk at benytte en mindre model af vingen. Hvilket også gør det mere økonomisk overkommeligt at foretage undersøgelsen.

Specielt når man skalerer fænomener af turbulent karakter, er det vigtigt at holde de dimensionsløse produkter konstante. Det har vi tilsyneladende også gjort i dette eksempel, men det bygger på den idealisering, at luften og væsken er usammentrykkelig. Hvis vi vælger ikke at lave den idealisering, medfører det at der kommer til at indgå en ekstra størrelse, som leder til endnu et dimensionsløst produkt. Den ekstra indgående størrelse er kompressibilitetsmodulet (bulk-modulus) K. Det har dimensionen $[ML^{-1}T^{-2}]$, og kan sammen med ϱ og v danne det dimensionsløse produkt:

$$\Pi_K = \frac{v}{\sqrt{K/\varrho}}$$

hvor $\sqrt{K/\varrho}$ er lydhastigheden. Dette dimensionsløse produkt kaldes Machtallet, og det bør også holdes konstant, hvis man vil lave en præcis skalering. Men vi mener ikke, vores antagelse er helt urimelig, da regndråber falder med ca. 7 m/s. Denne hastighed er lille sammenlignet med lydhastigheden. Det skulle ikke ved hastigheder på op til 20 m/s i luft være nødvendigt at holde Mach-tallet konstant for at opnå en god skalering (Højgaard 1963, s. 110).

Der er lavet mange eksperimenter, der viser hvad der sker når man ikke holder f.eks. Reynolds tal konstant. Dette er vigtigt, fordi man ved hjælp af disse systematiske undersøgelser kan korrigere for, at man i nogle tilfælde ikke har mulighed for at holde det konstant. På figur 4.1 kan man se hvad det betyder for modstandskoefficienten at Reynolds-tallet ikke holdes konstant. Modstandskoefficienten C er defineret som:



Figur 4.1: Modstandskoefficienten C som funktion af Reynolds-tal R ved forskellige geometrier (Højgaard 1963, s. 112)

$$C = \frac{2F_{gnid}}{\varrho v^2 A}$$

hvor F_{gnid} er gnidningskraften og A er arealet af legemet vinkelret på strømmen. De små tegninger viser hvad for en geometri der passer til hvilken kurve. Regndråben ligger med et Reynolds-tal på ca. $2 \cdot 10^2$, hvis vi antager at $r = 0,5$ mm. Denne værdi ligger i et område der kan karakteriseres som potentialstrømning med laminart grænselag og hvirvelafløsning (Højgaard 1963, s. 113)

Kapitel 5

Dimensionsanalysens grundlag

Formålet med dette kapitel er, at gå lidt tættere ind på dimensionsanalysen, for at se hvorfor den virker. Vi kunne godt have ønsket at bygge denne undersøgelse på et litteraturstudium, men litteraturen om dimensionsanalysen synes hovedsageligt at beskrive metoden, fremfor at filosofere over den. Undersøgelsen kan splittes op i to dele: 1) Den fysiske forståelse, og 2) *selve* dimensionsanalysen.

5.1 Fysisk forståelse

Gennem eksemplerne er det vist, hvorledes en god fysisk forståelse for den undersøgte problemstilling kan føre til en præcision af det opnåede resultat. Men behovet for en fysisk forståelse begynder langt før. Først og fremmest skal det vurderes hvilken diciplin af fysikken problemet hører hjemme i, samt gøres klart hvilke størrelser og dimensionale konstanter der indvirker på problemet. Allerede her er en vis fysisk grundviden, eller fysisk intuition, påkrævet. Næste trin i analysen kan være at reducere antallet af pi-er. En måde at gøre dette, er at "forfremme" en afledet størrelse til en fundamental størrelse. Typiske afledede størrelser der kan blive forfremmet er kraften og varmemængden. At gennemskue hvilke afledede størrelser der kan forfremmes, uden samtidig at introducere en ny dimensional konstant i problemet, kræver nogle fysiske argumenter, jvf. kapitel 3.4. I visse problemer kan man ydermere med fordel definere nogle helt nye fundamentale dimensioner, f.eks. transversal/longitudinal længde. Dette kræver endnu engang en forståelse af fysikken i problemet. Endelig er det muligt at forsimple resultatet ved yderligere fysiske argumenter, som f.eks. reduktionen fra tre til to dimensionsløse størrelser i eksemplet med naturlig konvektion (eksempel 4). Alt i alt må det endnu engang konkluderes, at en dimensionsanalyse kræver en vis viden om fysikken i det undersøgte problem. En computer kan ikke lave dimensionsanalyse!

Men en computer kan godt udføre det hårde arbejde med at finde de dimensionsløse størrelser, hvis den bliver fodret med de indgående størrelser samt deres dimensioner. Men hvor kommer den information der danner de dimensionsløse størrelser egentlig fra? I første omgang fra de indgående størrelsers dimensioner, men hvor kommer de fra? Som vist i kapitel 1, stammer en størrelses dimension fra definitionsligningen for størrelsen.

5.2 "Definitionsligningsanalyse"

Man kan se dimensionen af en størrelse som en forkortelse af definitionsligningen. Forkortelsen fjerner evt. numeriske faktorer, og introducerer en mere generel notation for de indgående størrelser i definitionsligningen; dimensionerne, som er bestemt af de fundamentale dimensioner. Det er klart, at man ikke får al information fra definitionsligningen med over i dimensionen. Det er f.eks. derfor at energi og kraftmoment har samme dimension i SI-systemet. Et andet eksempel på mistet information er størrelsen *strain*, som er defineret som deformation pr. længde, hvilket er dimensionsløst. De forsøg vi har gjort med at indføre nye fundamentale størrelser, som vinkel og retninger, kan ses som et forsøg på at genskabe noget af den information der ellers bliver tabt i dimensionen. Men bortkastningen af information giver netop den generalisation der gør, at man kan lave dimensionsanalyse.

Vi vil nu, gennem et par eksempler, forsøge at illustrere hvordan dimensionsanalysen udnytter definitionsligningerne, men også hvorledes man ved *ikke* at generalisere løber ind i en del problemer. Vi starter med at kigge på eksempel 2 med regndråben igen. For nemheds skyld nøjes vi med at se på det tilfælde hvor hastigheden af dråben er så lille, at der er tale om viskøs gnidning. Det kunne f.eks. være en let kugle der falder gennem vand. Vi kigger først på dimensionsanalysen. De indgående størrelser ses i tabel 5.1.

I det tilfælde hvor kun M, L og T er fundamentale størrelser, fås hastigheden som:

$$v \propto \sqrt{rg}\,\phi\left(\frac{\eta^2 r^3}{m^2 g}\right) \tag{5.1}$$

og altså en funktion af én dimensionsløs størrelse. Det er ikke samme resultat, som vi har set i de øvrige gennemgange af eksemplet, hvilket skyldes at vi ikke har antaget en sammenhæng mellem m og g, som i kapitel 2. Denne

Tabel 5.1: De indgående størrelser, og deres dimensioner, med to forskellige sæt fundamentale størrelser

		dimensioner						
Størrelse	symbol	M	L	T	F	M	L	T
Dråbens hastighed	v	0	1	-1	0	0	1	-1
Tyngdeaccelerationen	g	0	1	-2	1	-1	0	0
Dråbens masse	m	1	0	0	0	1	0	0
Viskositeten	η	1	-1	-1	1	0	-2	1
Dråbens radius	r	0	1	0	0	0	1	0

sammenhæng kan opnås ved at vælge kraften som den fjerde fundamentale dimension, hvilket giver:

$$v \propto \frac{mg}{\eta r} \tag{5.2}$$

som svarer til løsningen med $\phi(x) = x$ i ligning 2.4, eller $\phi(x) = x^{-1/2}$ i ligning 5.1. Lad os nu kigge nærmere på definitionsligningerne for de indgående størrelser (se tabel 5.2).

Tabel 5.2: Definitionsligninger for de indgående størrelser med to forskellige sæt fundamentale størrelser. a_{ff} er accelerationen i et frit fald (altså uden gnidningskræfter) i jordens tyngdefelt.

	Definitionsligninger	
Størrelse	Normal	Med kraft som fundamental størrelse
v	$v = dl/dt$	$v = dl/dt$
g	$g = a_{ff}$	$F = mg$
m	-	-
r	$r = kK$	$r = kK$
η	$F = -K\eta v$	$F = -K\eta v$

Der er to tilfælde; "standard-tilfældet", hvor definitionsligningerne er fra SI-systemet, og det "udvidede" tilfælde, hvor kraft er valgt som den fjerde fundamentale størrelse. I SI-tilfældet er definitionsligningerne som man skulle forvente. Bemærk dog definitionsligningen for η hvor der optræder en konstant K, som er en karakteristisk længde af legemet. Da radius er valgt som dråbens karakteristiske længde (men en anden karakteristisk længde end K), definerer vi $r = kK$, hvor k er en proportionalitetskonstant. Hvis kraft vælges som fundamental dimension, definerer vi tyngdeaccelerationen ud fra Newtons anden lov, svarende til valget af dimensionen af kraft i tabel 5.1.

Vi kigger nu nærmere på det tilfælde hvor kraft er valgt som fundamental dimension. Vi ønsker at finde hastigheden, og skriver derfor definitionsligningerne for de fire andre størrelser. Ved at substituere fås:

$$\left.\begin{array}{l} F = mg \\ F = -K\eta v \\ r = kK \end{array}\right\} \Rightarrow v = -k\frac{mg}{r\eta} \tag{5.3}$$

hvilket er resultatet af dimensionsanalysen i ligning (5.2), bortset fra, at vi her har fået et lighedstegn i stedet for proportionalitetstegnet samt et minus. Vi har dog også fået en faktor k med i ligning (5.3), som vi ikke har i ligning (5.2), men den kan vi bestemme hvis vi kender K.

Vi har nu set et eksempel på, at man ved at arbejde med definitionsligningerne kan få et resultat, der svarer til resultatet af dimensionsanalysen. Derudover viser eksemplet også noget om hvad der egentlig sker, når man forfremmer en afledet dimension til en fundamental dimension i dimensionsanalysen. Som det ses af tabel 5.2, svarer det til at ændre på en (eller evt. flere) af definitionsligningerne.

Det er klart, at "definitionsligningsanalysen" som metode betragtet er kritisabel. Ovenstående analyse er da heller ikke ment som et forsøg på at introducere en ny metode, men som et forsøg på at undersøge dimensionsanalysens grundlag. Det er heller ikke altid lige til at lave en definitionsligningsanalyse, på samme måde som vist ovenfor, og det er ikke altid man kan komme igennem til et resultat overhovedet. Lad os f.eks. prøve at lave en definitionsligningsanalyse på eksempel 1, dybvandsbølger. De indgående størrelser og deres definitionsligninger ses i tabel 5.3.

Tabel 5.3: De indgående størrelser og deres definitionsligninger ved analyse af hastigheden af dybvandsbølger.

Størrelse	symbol	definitionsligning
Bølgens hastighed	v	$v = dl/dt$
Bølgelængden	λ	$\lambda = l$
Tyngdeaccelerationen	g	$g = a_{ff}$

Her er det ikke ligetil at kombinere definitionsligningerne som i dråbeeksemplet, og vi kan altså ikke lave en definitionsligningsanalyse.

Det ses altså, at det ikke er lige så simpelt at lave en definitionsligningsanalyse, som at lave en dimensionsanalyse. Vi mener dog, gennem eksemplet med definitionsligningsanalyse på regndråben, at have løftet lidt af sløret for hvordan dimensionsanalysen egentlig virker. Det er klart, at det er den generalisation der ligger i skridtet fra definitionsligning til dimension, der netop gør at det overhovedet er en fordel at regne på dimensionerne. Uden den generalisation kan man ligeså godt lave den analytiske løsning af problemet, som definitionsligningsanalysen på regndråbeeksemplet da *næsten* også er. Desuden kan vi konkludere, at dimensionsanalysen har sin styrke i kraft af den måde enhedssystemet er konstrueret ud fra definitionsligningerne, samt hvorledes definitionsligningerne oversættes til dimensioner (= hvor mange og hvilke dimensioner der er valgt som fundamentale). Antallet af fundamentale dimensioner er vigtigt. Hvis der er mange fundamentale dimensioner, giver dimensionsanalysen færre pi-er. Til gengæld bliver der mange dimensionelle konstanter, som kan optræde som indgående størrelser. Hvis der er få fundamentale dimensioner giver dimensionsanalysen mange dimensionsløse størrelser, så alt i alt er valget af antallet af fundamentale dimensioner en balancegang mellem mængden af dimensionale konstanter og mængden af dimensionsløse størrelser. Men i SI-systemet er antallet af fundamentale dimensioner valgt, så det passer godt som udgangspunkt for en dimensionsanalyse.

En væsentlig egenskab, eller begrænsning om man vil, ved dimensionsanalysen er dens afhængighed af konventionerne i størrelsesregningen og enhedssystemet. Dette får Bridgman til at betegne dimensionsanalysen som "en analyse af en analyse" (Bridgman, 1922 s.52), hvormed han mener, at den er en analyse af den kendte fysik, som er en analyse af naturen. Dette betyder at dimensionsanalysen kun kan udlede sammenhænge der bygger på de almindeligt anvendte definitionsligninger i fysikken (*ibid* s.53). Dette kan fortolkes derhen, at metoden kun kan vise ting der er kendt i forvejen, hvilket selvfølgelig er en mistolkning. Vi har jo set hvorledes dimensionsanalysen bruges i forbindelse med modelforsøg, hvor man netop regner på ting der ikke, eller kun vanskeligt, kan løses analytisk. Man kan derfor udvide Bridgmans formulering af dimensionsanalysen til ikke blot at være en analyse af en analyse, men også en analyse af de analyser, der endnu ikke er foretaget.

Til tider bliver dimensionsanalysen foretaget v.h.a. nogle antagelser, der kun er mulige hvis man kender det endelige udtryk, hvilket ikke er hensigtmæssigt da det reducerer dimensionsanalysen til en form for enhedstjek. Denne brug af dimensionsanalysen har ført til den vildfarelse at dette er det eneste dimensionsanalysen rent faktisk kan benyttes til. Læseren burde være blevet overbevist om det fejlagtige i dette, igennem læsningen af dette projekt.

Kapitel 6

Anvendelse af dimensionsanalysen

Efter nu at have været rundt om dimensionsanalysen, og belyst den fra forskellige vinkler, mangler vi at redegøre for hvorledes metoden rent faktisk bliver anvendt i fysikken. En indgangsvinkel til en sådan diskussion af dimensionsanalysen er, at se på hvorledes metoden er opstået. Som det er blevet gennemgået i kapitel 2, blev metoden udviklet i begyndelsen af dette århundrede, anført af folk som Rayleigh og Buckingham. Dette skete efter at størrelsesregningen havde været formuleret i nogen tid, og erkendelsen af nødvendigheden af et konsistent og kohærent enhedssystem begyndte at opstå. Ud af dette opstod dimensionsanalysen. Det virker nærmest som om den blev "opdaget" som en sidegevinst ved størrelsesregningen. På dette tidspunkt var størrelsesregning stadigvæk en rimelig ny forteelse, og den var ikke alment anvendt. Det er derfor ikke underligt, at metoden i starten har været til diskussion, bl.a. i Nature. Da størrelsesregningen og enhedssystemet i vid udstrækning bygger på konventioner, er det klart, at dimensionsanalysen også bygger på disse konventioner, som vi også har forsøgt at vise i kapitel 5. Metoden kan derfor ikke sammenlignes med en gængs fysisk teori, der bygger på sammenhænge i naturen, men må snarere betegnes som et stykke værktøj.

Idag er metoden dog alment accepteret, og anvendes i forskellige former og med forskellige resultater for øje i flere forskellige sammenhænge i fysikken. Det er oprindeligt eksperimentialfysikere som Bridgman, Buckingham og Rayleigh der har udviklet dimensionsanalysen. Ved anvendelse i eksperimentelle sammenhænge benyttes metoden som et instrument til at rationalisere eksperimenter, idet man ved at kigge på de dimensionsløse størrelser får færre parametre, der skal undersøges eksperimentielt. Ydermere er metoden grundlaget for skalering af de indgående størrelser i modelforsøg, hvilket er meget anvendt indenfor f.eks. hydrodynamikken. Flere af de nyere bidrag til litteraturen omkring dimensionsanalysen er kommet fra ingeniører (f.eks. Langhaar, 1951 & Taylor, 1974). Dette tyder igen på at metoden bruges i anvendt fysik.

Formålet med anvendelse af metoden i eksperimentelle sammenhænge er at finde sammenhænge mellem fysiske størrelser, eller ved modelforsøg, at finde dimensionsløse størrelser. Som værktøj i den teoretiske fysik har den simple dimensionsanalyse været brugt til at finde planck-længder, -tider, -masser og -energier (f.eks. Sørensen, 1987), eller i forbindelse med Diracs overvejelser indenfor kosmologien (Kragh, 1979). Her er formålet i højere grad at finde den numeriske værdi af de resulterende tider, længder o.s.v., end det at finde sammenhænge mellem de indgående størrelser. Denne anvendelse bygger i høj grad på den antagelse, at den ubestemte numeriske konstant i dimensionsanalysen er af størrelsesordenen 10^0.

En helt tredje anvendelse af dimensionsanalysen er som dagligdags hjælpemiddel. Enhver fysiker foretager, nærmest pr. automatik, et enhedstjek af udledte udtryk. Hvis man er i tvivl om formen på et simpelt udtryk, hvor de indgående størrelser er kendt, bringes det også ofte på ret form ved hjælp af en simpel dimensionsanalyse.

Konklusion

Vi har nu lavet en beskrivelse og en diskussion af dimensionsanalysen, fra dens fundament i størrelsesregningen, til anvendelsen af metoden i fysikken. Det mest iøjenfaldende karakteristika ved metoden er dens nære tilknytning til størrelsesregningen og enhedssystemet, begreber som har været tilbagevendende f.eks. i diskussionerne om dimensionale konstanter og analysens grundlag. Det er derfor klart, at et grundigt kendsskab til enhedssystemets natur er en forudsætning for en succesfuld dimensionsanalyse. Dette gælder dog kun i de mere raffinerede anvendelser af dimensionsanalysen. I den daglige brug af metoden, udnytter man netop SI-systemet alene, og har ikke brug til at sætte sig ud over det.

Vi har dog set i kapitel 1, at størrelsesregningen stadig er til diskussion på visse punkter, f.eks. m.h.t. notation og transcendentale funktioner.

Størrelsesregningen er konstrueret som et sprog til at lave analytisk fysik uafhængigt af valget af enheder. Det er fascinerende at fysikken som videnskab har været i stand til at konstruere et konsistent sprog, der som en sidegevinst giver en metode som dimensionsanalysen, der kan bruges til at nærme sig løsningen på problemer der ikke umiddelbart kan løses analytisk, jvf. kapitlet om modelforsøg.

Litteraturliste

de Boer, Jan: Symbols and notations in mathematics and physics. University of Amsterdam 1988 - ikke publiceret.

de Boer, Jan: The origin of the physical quantity concept. London 1989 - ikke publiceret.

Bridgman, P.W.: Dimensional analysis. New Haven 1922.

Buckingham, E.: Physical Review nr 4 s. 345. 1914.

Bunge, Mario: Scientific Research I + II vol. 3 Heidelberg 1967.

Chiswell og Grigs: SI Units. Australia 1971.

Duncan, W.J.: Dimensions, method of. Encyclopaedic dictionary of physics vol s 415. 1961.

Duncan W.J.: Physical similarity and dimensional analysis. London 1953.

Fues, E.: Zeitschrift für Physik nr. 107 s. 662. 1937.

Glazebrook, Richard: Nature nr 128 s. 17. 1931.

Glazebrook, Richard: Physical Society Proceeding nr. 48. London 1935.

Jensen, H. Højgaard: Angle and solid angle as base quantity; consequences for ISO 31. 1980. - ikke publiceret.

Jensen, H. Højgaard: Deformerbare stoffers mekanik. København 1963.

Kragh, Helge: Methodology and philosophy of science in Paul Diracs Physics. Tekst nr. 27 fra IMFUFA Roskilde 1979.

Langhaar, Henry L.: Dimensional analysis and theory of models. New York 1951.

Massey, B.S.: Units, dimensional analysis and physical similarity. London 1971.

McFarlane, W.: Units, absolute systems of. Encyclopaedic dictionary of physics vol 7 s 538. 1962.

McGreevy, T.: Units, Giorgi and C.G.S systems. Encyclopaedic dictionary of physics vol 7 s 541. 1962.

Raghunath, H.M.: Dimensional analysis and hydraulic model testing. New York 1967.

Smith, Henrik: Indledning til kvantemekanik. Forelæsningsnoter fra Fysisk laboratorium, Københavns universitet. København 1990.

Sommerfeld, Arnold: Electrodynamics. London 1952.

Staicu, C.I.: Restricted and general dimensional analysis Treatment of exp. data. Bucharest 1982.

Stille, Ulrich: Messen und rechen in der Physik. Braunschweig 1955.

Sørensen, Bent: Superstrenge en teori om alt og intet. København 1987.

Taylor, Edward S.: Dimensiona analysis for engineres. Oxford 1974.

Vigoreux, P.: Units and standards of electromagnetism. London 1971.

Wallot, Julius: Grössengleichungen, Einheiten und Dimensionen. Leipzig 1957.

Watkins, M.L.: Units and dimensions (electrostatic). Encyclopaedic dictionary of physics vol 7 s 540. 1962.

Wild, E.: Units, system of. Encyclopaedic dictionary of physics vol 7 s 547. 1962.

Wolfe, H.C.: Units, Gravitational system of. Encyclopaedic dictionary of physics vol 7 s 544. 1962.

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

223/92 *THE FUNCTIONAL DETERMINANT*

by: Thomas P. Branson

224/92 *UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES*

by: Jeppe C. Dyre

225/92 *"HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium*

af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard

Vejleder: Petr Viscor

226/92 *"METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"*

by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"

En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"

af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård

Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS

- Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN .

af: Ania Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 *EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV*

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251|93 *Genotypic Proportions in Hybrid Zones*

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252|93 *MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER*

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 *Kuglepakning*

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 *Regressionsanalyse*

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 *TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED*

af: Peter Harremoës

256/93 *Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-electric Spherical Shell (Preprint)*

by: T. Christensen and N.B.Olsen

257/93 *Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker*

af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

258/93 *Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"*

af: Mogens Brun Heefelt

259/93 *STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES*

by: Jeppe C. Dyre

260/93 *PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4*

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones Polynomial
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen

265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert and Gestur Olafsson

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen, Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på Eksperimentarium - Et forslag til en opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek

268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen