

# **Life is like a sewer...**

**Et projekt om modellering af aorta via en  
model for strømning i kloakrør**



**Af:**

*Anders Marcussen*

*Anne C. Nilsson*

*Lone Michelsen*

*Per M. Hansen*

**Vejleder**

*Jesper Larsen*

**TEKSTER fra**

**IMFUFA**

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Life is like a sewer ...

Et projekt om modellering af aorta via en model for strømning i kloakrør

af: Anders Marcussen, Anne Nilsson, Lone Michelsen, Per M. Hansen

Vejleder: Jesper Larsen

IMFUFA tekst nr. 268/94

105 sider

ISSN 0106-6242

---

### Abstrakt.

Rapporten er skrevet af 4 studerende på IMFUFA, og er et 2.modul matematik model-projekt, skrevet i efteråret 1993.

Rapporten indeholder resultatet af gruppens simuleringer af trykprofilens udbredelse i hovedpulsåren aorta via kloakmodellen MOUSE. I rapporten redegøres for, at der kan skabes analogi mellem de ligninger der beskriver strømninger i ikke-fyldte rør, og de ligninger der beskriver strømninger i fuldtløbende rør, under tryk. I rapporten videreføres denne analogi til også at indbefatte blodstrømningen i aorta. Rapporten omfatter derudover en grundig beskrivelse af MOUSE og aorta, samt en teoretisk argumentation for, at trykprofilen ned gennem aorta bliver mere stejl og amplituden højere med afstanden fra hjertet.

*Life is like a sewer-  
What you get out of it,  
depends on what you put into it.*  
Tom Lehrer.

# Indhold

Indledning	6
Læsevejledning	9
<b>1 Beskrivelse af aorta</b>	<b>11</b>
1.1 Hjerte-kar systemet	12
1.2 Hjertet	13
1.3 Aorta	15
<b>2 Beskrivelse af strømninger i rør</b>	<b>23</b>
2.1 Generelle definitioner	24
2.2 Strømninger i delvist fyldte rør	25
2.2.1 Kontinuitetsligningen for delvist fyldte rør	25
2.2.2 Bevægelsesligningen for strømning i delvist fyldte rør	28
2.3 Strømning i fuldtløbende rør	39
2.3.1 Kontinuitetsligningen for fuldtløbende rør	43
2.3.2 Bevægelsesligningen for fuldtløbne rør	44
2.3.3 Analogi til aorta	45
2.3.4 Vores model for aorta	47

<b>3</b>	<b>Trykbølgers ændring ned gennem aorta</b>	<b>49</b>
3.1	Hyperbolske bølgeligninger . . . . .	50
3.1.1	Den ikke-lineære bølgeligning . . . . .	51
3.1.2	Løsningen til den ikke-lineære bølgeligning . . . . .	53
3.2	Pulsbølgers profilændring ned gennem aorta . . . . .	54
3.3	Beskrivelse af hvorfor amplituden af trykprofilen bliver større . . . . .	59
<b>4</b>	<b>MOUSE og tilpasning af vores aorta-model</b>	<b>63</b>
4.1	Pipe-flow modellen . . . . .	64
4.2	Betingelser for vellykket simulering med pipe-flow modellen . . . . .	66
4.3	Tilpasning af aorta-modellen til MOUSE . . . . .	69
4.3.1	Diskretisering af vores model . . . . .	69
4.3.2	Skalering af data fra aorta . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Design og evaluering af simuleringer</b>	<b>75</b>
5.1	Design af simuleringer . . . . .	75
5.2	Vores forventninger . . . . .	79
5.3	Resultaterne af simuleringerne . . . . .	80
5.3.1	Første simulering . . . . .	81
5.3.2	Anden simulering . . . . .	84
5.4	Samlet vurdering af simuleringerne . . . . .	85
	<b>Diskussion</b>	<b>87</b>
	<b>Konklusion</b>	<b>90</b>
	<b>Perspektivering</b>	<b>91</b>

*INDHOLD* \_\_\_\_\_ 5

**Bilag 1** 93

**Bilag 2** 94

**Symbolliste** 101

**Litteraturliste** 103



# Indledning

Ikke alle patienter overlever en narkose, og i nogle af disse tilfælde er årsagen uheld i forbindelse med narkosen. Disse uheld skyldes i enkelte tilfælde, at narkoselægen og narkosesygeplejersken har misfortolket signalerne fra apparaturet, og derfor ikke taget de nødvendige forholdsregler for at sikre patientens helbred. Dette kan ske i situationer, hvor patienten eksempelvis lider af en sjælden allergi, som ikke er bekendt før operationen.

Der er derfor interesse i at udvikle en anæstesisimulator<sup>1</sup>, idet det er den eneste måde narkoselæger og narkosesygeplejersker kan opnå en egentlig træning i at give den rigtige narkose i specielle tilfælde, uden at det kan få fatale følger for patienten.

Dette er blandt andet én af grundene til, at der i de senere år har eksisteret et tæt samarbejde mellem IMFUFA<sup>2</sup>, Forskningscentret Risø og anæstesiaafdelingen på Herlev sygehus om at få udviklet en anæstesisimulator. Der er p.t. udviklet en anæstesisimulator, som står på anæstesiaafdelingen på Herlev sygehus. Den er stadig på forsøgsstadiet, men er dog i nogle tilfælde blevet brugt i undervisningsøjemed.

I oktober 1993 blev der på IMFUFA holdt et seminar om denne anæstesisimulator, hvor der deltog læger fra anæstesiaafdelingen på Herlev sygehus, og forskere og studerende fra IMFUFA. Her blev det klart, at selv om simulatoren idag giver en temmelig virkelighedsnær simulering af kroppens respiration og blodkredsløb, er der stadig en række områder, hvor simulatoren er mangelfuld. Ét af de områder, der blev fremhævet som værende vitalt for en bedre simulering, var en bedre

---

<sup>1</sup>En anæstesisimulator simulerer blandt andet et menneskes respiration og blodkredsløb under narkose.

<sup>2</sup>Institut for studiet af Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelse i samfundet, Roskilde Universitetscenter.



beskrivelse af blodkredsløbet. Dette har sin forklaring i, at simulatoren herved bedre vil være i stand til at simulere ikke-normale tilstande, som er det egentlige formål med simulatoren. Til denne bedre beskrivelse af blodkredsløbet, hører en bedre beskrivelse af blodets strømning i hovedpulsåren aorta og i den forbindelse pulsølgebredelsen i rørvæggen.

Vi havde imidlertid en anden model som udgangspunkt. Den model som var genstand for vores interesse, var industristandarden MOUSE<sup>3</sup>, udviklet på Dansk Hydraulisk Institut (DHI). MOUSE er et program, benyttet i mange kommuner i Danmark, der simulerer strømninger i kloaksystemer. Vi havde, via en velinformeret kilde, fået oplyst, at der i programmet var indlagt en analogi mellem stømninger ved fri vandoverflade, til strømninger i fuldtløbende rør, under tryk. Der hvor vi fandt det interessant at udfordre MOUSE, var modellens simulering af strømninger i elastiske rør og her nærmere specifikt strømninger i den elastiske hovedpulsåre aorta. I stedet for selv at udvikle et program, fandt vi en vis idé i at vise, at det var muligt at benytte en allerede eksisterende model på et nyt område.

Ideen var derfor, at simulere en overtrykssituation i et kloakrør i MOUSE, og se om vi kunne få samme effekter frem som opstår i aorta, når blodet strømmer ud fra hjertet. Disse overvejelser førte frem til følgende problemformulering:

**Er det muligt at konstruere en model der, via MOUSE, kan simulere pulsølgens profilændring ned gennem aorta ?**

Dette blev yderligere specificeret i løbet af semestret, til en nærmere præcisering af, hvad det er ved trykprofilen vi er interesserede i at simulere. Dette er nærmere uddybet i slutningen af kapitel 1.

Lad det være sagt med det samme, projektet udviklede sig desværre ikke som vi havde forventet. Udover at simulere selve aorta, havde vi håbet på at udbygge dette simple rørsystem med forgreninger og se på deraf følgende effekter på pulsølgens trykprofil. Det er specielt forgreningerne der er komplicerede at modellere.

Imidlertid har vi brugt mange timer foran computeren og manualen til MOUSE, i et forsøg på bare at finde ud af hvad et kloaksystem egentlig består af og kan beskrives ved. Ligeledes brugte vi meget tid

---

<sup>3</sup>Modelling Of Urban SEwers.

på at "oversætte" det vi så i MOUSE, til situationen i aorta. I løbet af projektperioden har vi i den forbindelse opnået fuld forståelse for, at der er visse modellove der skal overholdes, når en dimensionsmessig lille model, som vores model af aorta, skal skaleres op i en størrelsesorden der svarer til et rør i et kloaksystem.

Vi vil benytte lejligheden til at sige tak til ingeniør Lars Yde fra DHI, som lige til det sidste har været meget behjælpelig med at få programmet til at køre og give os svar på, hvad vi måtte være i tvivl om.

Derudover vil vi rette en stor tak til vores vejleder Jesper Larsen, som trods mange "sorte øjeblikke" alligevel holdt liv i vores forhåbninger.

En tak til Viggø Andreasen er også berettiget, for sine behjælpelige øjeblikke.

Sidst men ikke mindst, en stor tak til Dansk Hydraulisk Institut, for lån af programmet MOUSE.

## Læsevejledning

Rapporten er skrevet til studerende og forskere med interesse i simulering af hjerte-karsystemet.

Den overordnede opdeling af rapporten, bygger på idéen om, at for at vide hvad der kommer ud, er det nødvendigt at vide hvad der kommer ind. Vi bliver derfor nødt til at kende til aortas fysiologi for at forstå udseendet af pulsølgenes trykprofil. Ligeledes bliver vi nødt til at kende teorien bag programmet for MOUSE, for at kunne forstå, hvorfor resultaterne fra simuleringerne bliver som de bliver.

I kapitel 1 gennemgås derfor de data for aorta, vi mener er nødvendige, til modeleringen af aorta. Sidst i kapitlet redegøres for de essentielle træk ved trykprofilen, vi er interesserede i at modellere. I kapitel 2 redegøres for det teoretiske grundlag MOUSE bygger sine beregninger på. Her gennemgås den analogi der er skabt i programmet, således at strømninger i fuldtløbende rør under tryk, kan beskrives ved samme ligninger som strømninger ved fri vandoverflade. Denne analogi benytter vi sidst i kapitlet til at argumentere for at også blodstrømningen i aorta kan beskrives ved disse ligninger. Med baggrund i analogibetrægtningerne

opstiller vi sidst i kapitel 2 vores model af aorta. Kapitel 3 indeholder en teoretisk beskrivelse af, hvorfor trykprofilen ændres ned gennem aorta. Dette kapitel er med, idet vi finder det interessant at beskrive og kan altså sagtens springes over uden at det giver forståelsesproblemer i det følgende. I kapitel 4, beskrives MOUSE STANDARD, som er det program vi har benyttet os af i vores simuleringer. Derudover beskriver vi hvilke tilpasninger af vores model af aorta vi har været nødt til at gennemføre, for at MOUSE kan benyttes. Kapitel 5 er kapitlet hvor vi gør rede for de konkrete inputdata vi har benyttet os af, vores forventninger til simuleringen med MOUSE og selve præsentationen af vores resultater.

Herefter følger en diskussion, konklusion og perspektivering. Bagest i rapporten findes i bilag 1, det regneark vi benyttede som en hjælp til vores udregninger, og i bilag 2, et udpluk af vores simuleringer. Allersidst, foran litteraturlisten, findes en meget nyttig symbolliste, hvor de relevante symboler i rapporten bliver forklaret.

Der er nu ikke andet tilbage end at sige Rigtig God Læselyst.

Med Venlig Hilsen Anders og Anne, Lone og Per.

# Kapitel 1

## Beskrivelse af aorta

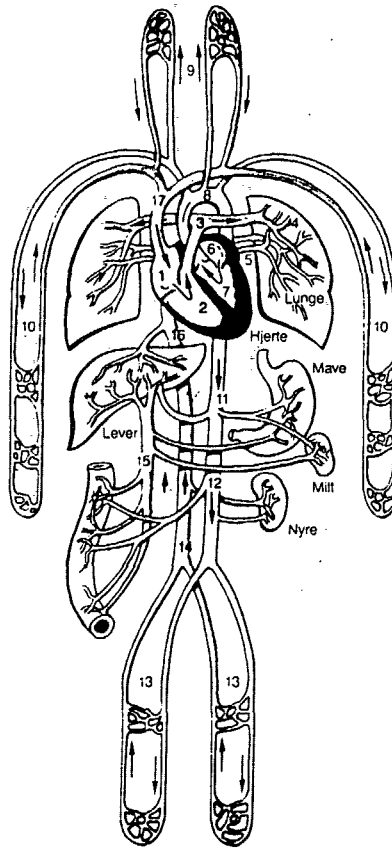
Ved enhver form for modellering er det vigtigt med en god fysisk forståelse af det, der skal modelleres. Dette vil i vores tilfælde sige en god forståelse af de mekanismer, der virker i aorta.

Vi er i vores kildemateriale stødt på meget varierende værdier af de fysiologiske data for aorta. Dette skyldes blandt andet, at aortas fysiologi varierer meget fra person til person alt efter alder, kondition, helbred mm. Derudover er det rent teknisk et problematisk sted i kroppen at komme til at måle. De data for mennesker vi benytter os af i kapitlet er derfor approksimative og skal ses som det bedste (og eneste) det har været muligt for os at få fat i. I vores beskrivelse af aortas fysiologi har vi ofte set os nødsaget til, at benytte data fra hunde, hvilket de fleste indenfor området iøvrigt benytter sig af.

I kapitlet vil vi først, som en introduktion til beskrivelsen af aorta, kort gennemgå kroppens blodkredsløb og hjertets pumpefunktion. Herefter vil de fysiske data (længde, forgreninger) og de mere funktionelle data (arealudvidelse som funktion af tryk, eftergivelse som funktion af afstand fra hjertet mm.) for aorta blive beskrevet. Det er hovedsagligt ved beskrivelsen af aortas funktionelle data, at vi benytter os af data fra hunde.

Vi vil benytte figur 1.5 på side 16 som vurderingsgrundlag for, om vores model af aorta er tilfredsstillende.

## 1.1 Hjerte-kar systemet



**Figur 1.1:** Hjerte-kar systemet. 1.Højre forkammer, 2.Højre hjertekammer, 3.Lungearterie, 4.Lungekapillærer, 5.Lungevene, 6.Venstre forkammer, 7.Venstre hjertekammer, 8.Aortabuen, 9.Halspulsårer, 10.Armarteriel vene, 11.Aortastammen, 12.Aorta med arterier til mave, lever, nyrer og tarme, 13.Benarterier/venner, 14.Nedre hulvene, 15.Portåren, 16.Nedre hulvene, 17.Øvre hulvene. [Rank, 92]

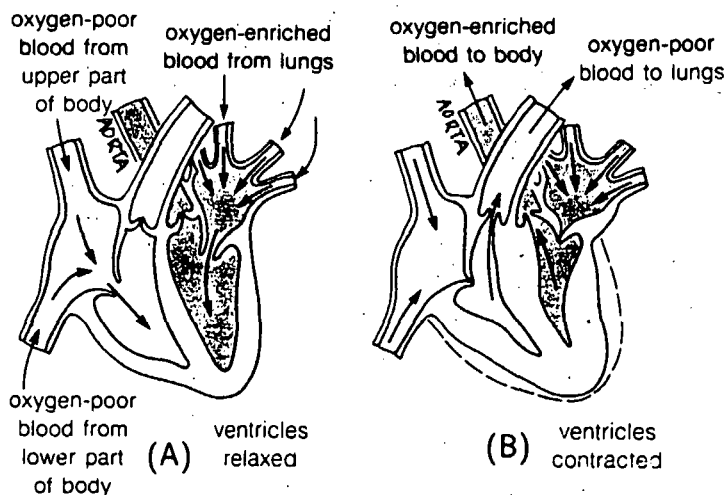
Som det ses af figur 1.1 består hjerte-kar systemet overordnet af to kredsløb: Det systemiske kredsløb (legemskredsløbet), som sørger for at blodet når rundt til hele kroppen, og det pulmonære kredsløb (lungekredsløbet), som sørger for at blodet iltes.

Hjertet består af 4 kamre, højre og venstre atrium (forkammer) og højre og venstre ventrikel (hjertekammer). Fra hjertets venstre ventrikel pumpes blodet ud i det systemiske kredsløb. Her løber blodet først

igennem hovedpulsåren aorta (se figur 1.1 nr. 8, 11 og 12), der senere forgrener sig i arterier, der igen forgrener sig i tyndere blodårer. På blodets vej tilbage til hjertet samler de mindste blodårer, kapillærene, sig i venulerne, der samler sig i større og større vener og blodet løber til sidst via kroppens største vene, vena cavæ, ind i hjertets højre atrium. Herfra pumpes blodet ind i hjertets højre ventrikel, for derefter at blive pumpet ud i det pulmonære system, som strukturelt er opbygget på samme måde som det systemiske kredsløb. Efter blodets iltning, løber det tilbage til hjertet og ind i venstre atrium, hvorfra det pumpes videre ind i den venstre ventrikel og kredsløbet er fuldendt.

## 1.2 Hjertet

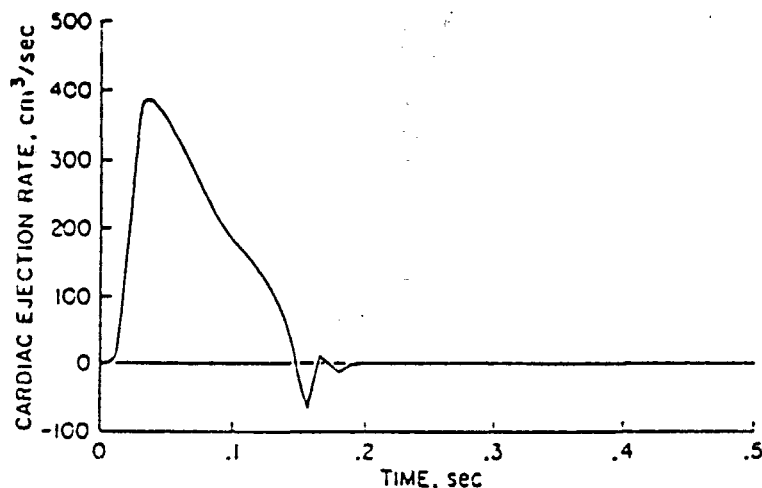
Hjertet kan opfattes som en dobbeltpumpe, hvor højre hjertedel pumper blod ud i det pulmonære kredsløb, og venstre hjertedel ud i det systemiske kredsløb. Blodet pumpes rundt i kroppen ved hjertemusklens sammentrækning (systole) og afslapning (diastole) se figur 1.2. I et normalt voksent menneske i hvile slår hjertet 60-75 slag i minuttet [Cambell, 88].



**Figur 1.2:** Skematisk tegning af hjertet. Pilene angiver blodets strømning under diastolen (A) og systolen (B). [Taggart, 87]

Når hjertet er afslappet, fyldes de tomme ventrikler med blod fra atrium, hvorved trykket stiger. I den venstre ventrikel i et menneske,

som pumper blodet ud i aorta, stiger trykket fra 0 mmHg til omkring 120 mmHg [Smith, 90]. Som følge af trykforskellen mellem ventriklerne og trykket i de arterier der støder op til, åbnes de semilunare hjerteklapper og ventriklernes indhold af blod tømmes, for det systemiske kredsløbs tilfælde, i aorta. Herefter slapper hjertet af igen og hjertets cykel starter forfra. Hele hjertecyklen tager for et menneske ca. 0.8 s, hvoraf blodudstrømningen i aorta tager ca. 0.3 s. Vi vil i vores modellering benytte os af data fra hunde. Som det fremgår af figur 1.3, tager hjertecyklen for en hund ca. 0.5 s, hvor den venstre ventrikels indhold af blod tømmes ud i aorta i løbet af ca. 0.15 s. At kurven et øjeblik bliver negativ skyldes, at en lille smule blod suges tilbage i hjertet, ved starten af diastolen [Yin, 87].

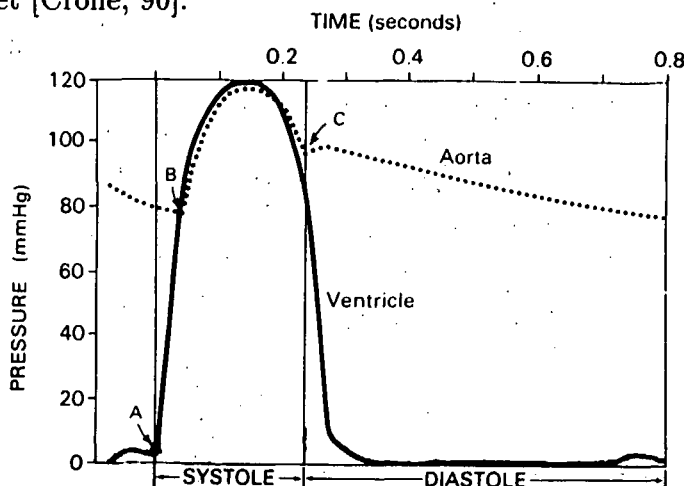


**Figur 1.3:** Figuren er baseret på data fra en 30 kg hund, hvis hjertet slår 120 gange i minuttet. Figuren viser hjertets udpumpningsrate som funktion af tiden, meget tæt på hjertet. Ved ét hjerteslag strømmer 30 ml blod ud i hundens aorta. [Anliker, 71]

Når hjerteklapperne åbnes er strømmingen i aorta tæt på hjertet karakteriseret som turbulent<sup>1</sup>, hvilket betyder at hastigheden varierer voldsomt med tid og sted. Strømmingen er dog kun turbulent lige når blodudtømmningen fra hjertet foregår, og kun tæt op til hjertet, hvorefter strømmingen er laminar, hvilket den iøvrigt er hele tiden i resten af

<sup>1</sup>Om der opstår turbulens afhænger af arteriens radius  $r$ , blodets massefylde  $\rho$  og hastighed  $v$ , og blodets viskositet  $\mu$ . Disse parametre er samlet i den dimensionsløse konstant Reynolds tal  $R_e$ , hvor  $R_e = \frac{2rv}{\mu}$ .  $R_e > 1000$  karakteriserer turbulent strømning.

kredsløbet [Crone, 90].



**Figur 1.4:** Venstre ventrikels systole og diastole, og aortas tilsvarende trykbølge for et menneske. Frit efter [Smith, 90].

Dét blodtryk der kommer som følge af hjertemusklens arbejde, presser blodet ud til de mindste kapillærer. Gennem den første trediedel af den venstre ventrikels systole, bliver to trediedel af ventriklens blodvolumen tømt i aorta (i et voksent normalt menneske svarer dette til omkring 80 ml), hvorved trykket i aorta stiger til det der kaldes det systoliske tryk (som er 120 mmHg for et menneske). På figur 1.4 starter ventriklens systole i punktet *A*, og hjerteklapperne ud til aorta åbnes i *B*. Den hurtige udtømmning bliver fuldt op af en langsommere udtømmning i de sidste to trediedel af ventriklens systole. Når trykket i ventriklen er faldet til en værdi der er under trykket i aorta, lukkes hjerteklapperne (i punktet *C*) og ventriklerne fyldes igen. Det laveste tryk på kurven kaldes det diastoliske tryk og er for den menneskelige aorta 80 mmHg.

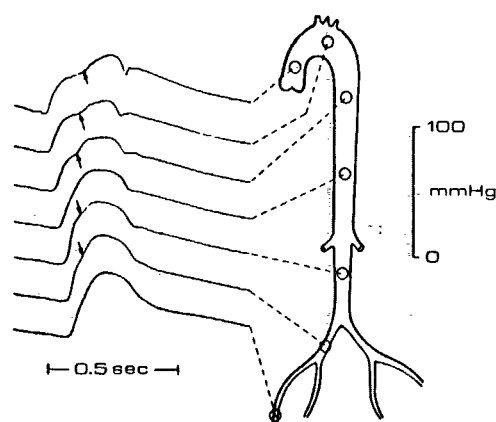
Værdierne for det systoliske og diastoliske tryk er målt på en person der ligger ned. Hvis personen stod op ville det være nødvendigt at tage højde for det ekstra tryk vægten fra en ovenliggende blod søjle ville udøve. Ligeledes er trykforskellen 80 mmHg/ 120 mmHg målt lige i begyndelsen af aorta.

### 1.3 Aorta

Aorta er blodkredsløbets største arterie. Aorta forgrener sig i mindre arterier og de to største forgreninger af den menneskelige aorta sker



ca. 3 cm fra hjertet, hvor 17% af hjertets slagvolumen (mængden af blod der pumpes ud i aorta ved ét hjerteslag) løber ud til hovedet og armene, og ca. 40 cm fra hjertet, hvor 18% af slagvolumet løber til tarmsystemet [Anliker, 71]. Aorta deler sig i to mindre arterier ca. 54 cm fra hjertet (den såkaldte bifurkation) og det er denne længde vi regner for aortas længde.



**Figur 1.5:** Eksempler på trykkurvens udseende som funktion af tiden, ned gennem den menneskelige aorta. [Yin, 87]

Det meste af den energi der tildeles blodet ved ventriklernes systole konverteres til potentiel energi i aortas arterievæg og i de større arterier, der udvider sig og derved opbevarer en del af hjertets slagvolumen. Senere overføres noget af energien igen til blodet under diastolen, hvor aorta og de større arterier trækker sig sammen og blodet sendes videre ud til resten af kroppens hovedafsnit. Aorta og de større arterier har tykke vægge, med glat muskulatur. Dette, samt det store indhold af elastiske fibre (lange tråde af proteinet elastin) medvirker til rørvæggens styrke og elasticitet [Rank, 92][Campbell, 87]. Rørvæggens elastiske egenskab gør, at aorta og de større arterier fungerer som et trykreservoir, der udjævner forskellen i blodtrykket, længere ude i kredsløbet [Taggart, 78]. Alt i alt medvirker aorta således til at bevare en jævn blodstrøm i de mindre blodårer i kredsløbet.

Som det ses af figur 1.5 ændrer trykprofilen sig ned gennem aorta. Dette skyldes blandt andet at aortas diameter og dermed tværsnitsareal bliver mindre med afstanden fra hjertet, men også at compliance (eftergive-

ligheden) mindskes med afstanden fra hjertet [Lighthill, 89]. Efter den egentlige top ses en mindre hævning, den dikrote hævning. Der er forskellige teorier om hvorfor den opstår. Nogle mener den skyldes det lille "smæk" der kommer som følge af, at de semilunare hjerteklapper lukkes [Crone, 90][Smith, 90][Ingram, 86]. C.S.Peskin har i sin afhandling [Peskin, 76] teoretisk argumenteret for, at udbredelsen af en kraftig bølge ned gennem et konisk rør, vil medføre en løbende refleksion fra rørvæggen. Peskin forklarer den dikrote hævning i aorta ud fra denne teori.

I det følgende tages udgangspunkt i den artikel [Anliker, 71] har skrevet i tidskriftet *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol.22, 1971. I artiklen opstilles nedenstående udtryk for pulsølgenes hastighed  $c$  baseret på eksperimentelt målte data. I udtrykket er forudsat, at bølgehastigheden afhænger lineært af trykket.

$$c(p, x) = (k_0 + k_1 p)(1 + nx) \text{ cm/s}$$

$k_0$ ,  $k_1$  og  $n$  er eksperimentelt bestemte konstanter,  
 $p$  er trykket målt i mmHg og  
 $x$  er afstanden fra hjertet målt i cm.

Ud fra pulsølgenes analytisk beregnede hastighed og den eksperimentelt bestemte sammenhæng mellem aortas diameter og afstanden fra hjertet (målt på hunde, ved et normaltryk på 100 mmHg) angives i artiklen ligeledes et udtryk for tværsnitsarealet  $A$  som funktion af trykket  $p$  og afstanden fra hjertet  $x$ .

$$A(p, x) = A(p_0, 0)e^{-\alpha x + (p - p_0)/\rho c(p, x)c(p_0, x)}$$

$p_0$  er normaltrykket 100 mmHg =  $1.33 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ ,  
 $\alpha$  er en konstant og  
 $\rho$  er blodets densitet  $1.06 \text{ g/cm}^3$ .

Anliker udfører i sin artikel [Anliker, 71] numeriske beregninger på aortas pulsølgehastighed og tværsnitsareal som funktion af trykket og afstanden fra hjertet for aorta. I artiklen regnes der på et såkaldt *standard tilfælde*, hvilket betyder, at alle udregninger er baseret på en 30 kg hund, med et hjerte der slår 120 gange i minuttet og et slagvolumen på ialt 30 ml (jævnfør figur 1.3).

Følgende ligninger angives som beskrivelse for aortas tværsnitsareal og pulsølgehastighed som funktion af trykket og afstanden fra hjertet

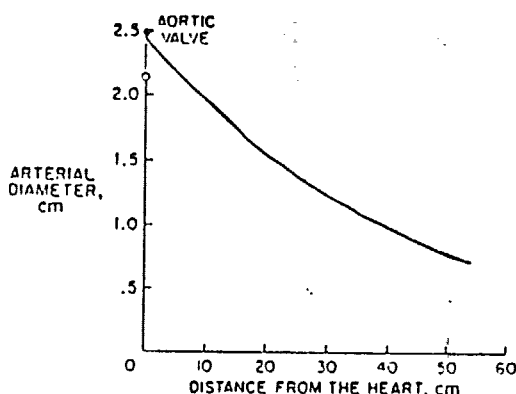
$$A(p, x) = 4.63e^{-0.045x + (p-p_0)/\rho c(p, x)c(p_0, x)} \quad \text{hvor } x \leq 54 \text{ cm}$$

hvor pulsølgehastigheden er udregnet ved

$$c(p, x) = (97 + 2.03p)(1 + 0.02x) \text{ cm/s}$$

hvor trykket indsættes i mmHg og afstanden indsættes i cm.

Figur 1.6 viser hvordan aortas diameter ændres som funktion af afstanden fra hjertet, ved trykket 100 mmHg. Diameteren er fundet ud fra arealet  $A(133, x)$ , idet det antages at aorta er cirkulær.



**Figur 1.6:** Aortas diameter som funktion af afstanden fra hjertet, givet ved 100 mmHg. Frit fra [Anliker, 71].

I hvilken grad en blodåre kan udvide sig, afhænger af blodårens eftergivelighed, også kaldet compliance ( $C$ ). Ved compliance forstås sammenhængen mellem volumentilvækst og trykændring ved en given volumenændring.

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

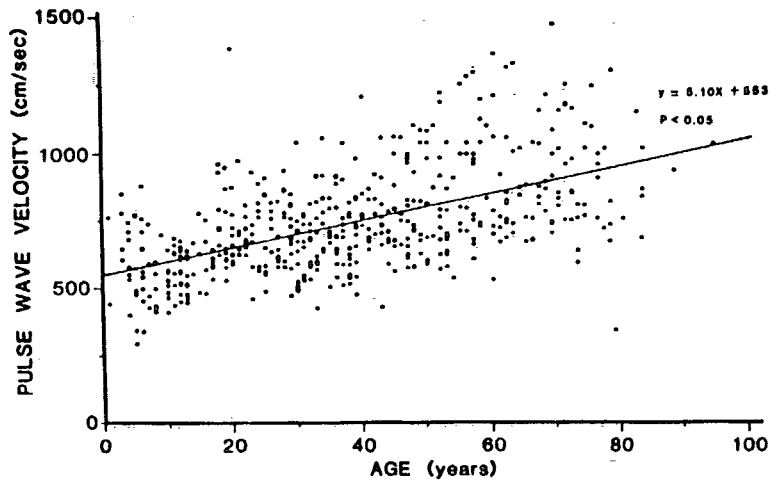
I et stift system er compliance nul. I et eftergiveligt system som aorta vil et tilstrømmet væskevolumen medføre en given trykforøgelse  $\Delta p$  og en volumentilvækst  $\Delta V$ . Jo mere aorta udvider sig, jo mere vil den modsatrettede kraft på arterievæggen presse for at få arterievæggen

tilbage til udgangspositionen, og jo højere blodtryk kræves der altså for at forårsage en volumentilvækst. Dette betyder, at compliance ved konstant  $x$  bliver mindre jo mere aorta udvider sig og er altså ikke en lineær funktion af trykket. Dog skal det lige tilføjes at størrelsen af compliance ikke umiddelbart kan sammenlignes forskellige steder i aorta, men skal ses i relation til blodårenes tværsnitsareal (i den forbindelse tales der om den specifikke compliance).

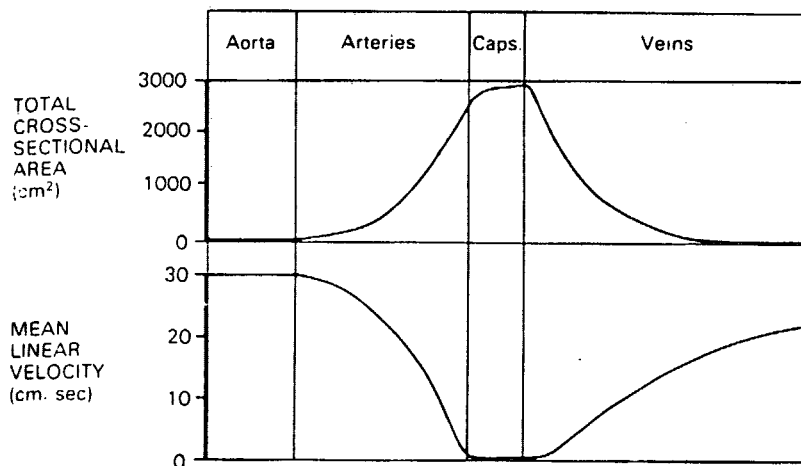
Det systoliske/diastoliske tryk i aorta tæt ved hjertet er for et normalt ungt menneske 120/80 mmHg. Gennemsnittet på 100 mmHg ændrer sig meget lidt ned gennem aorta og de store arterier. Gennemsnitstrykket er kun faldet til 90 mmHg i blodårer med en diameter på 10 mm [Rank, 92]. Pulsbølgens form og amplitude ændrer sig imidlertid en del med afstanden fra hjertet (se figur 1.5). Udsvinget imellem det systoliske og det diastoliske tryk forstørres, idet det diastoliske tryk mindskes og det systoliske tryk øges. Størrelsen af den trykstigning, der kommer i aorta som følge af den venstre ventrikels systole, er afhængig af aortas specifikke compliance. I aorta bliver den specifikke compliance mindre med afstanden fra hjertet.

Pulsbølgens hastighed ned gennem aorta er væsentlig hurtigere end blodets strømningshastighed. Pulsbølgens udbredelsehastighed afhænger, som tidligere omtalt, af tværsnitsarealet og compliance. Disse parametre varierer meget fra person til person, alt efter alder, kondition og helbred. I [Yin, 87] er der vist data for udbredelsehastigheden som funktion af alder, målt på et stort antal kinesere (se figur 1.7). Det ses, at gennemsnittet inden for en levealder stiger fra 6 m/s til 12 m/s. Herudover er spredningen også stor indenfor hver aldersgruppe. I andre kilder hævdes hastigheden at variere fra 4 m/s til 6 m/s.

Blodets strømningshastighed er i gennemsnit i den menneskelige aorta 0.30 m/s [Smith, 90]. Idet blodårenes tværsnitsareal fra aorta til de mindste kapillærer mindskes, ville man intuitivt tro, at blodets flow ned gennem det systemiske kredsløb ville stige. Det er imidlertid det totale tværsnitsareal en væske gennemløber, der danner baggrund for væskens flow. Det samlede tværsnitsareal af kapillærene er meget større (3000 cm<sup>2</sup>) end det samlede tværsnitsareal for aorta (5 cm<sup>2</sup>), hvorfor blodets strømningshastighed falder med afstanden fra hjertet [Rank, 92]. I det foregående er de vigtigste data omkring aorta gennemgået. I vores modellering er det primært trykprofilen i figur 1.5 vi vil benytte som vurderingsgrundlag for om vores resultater fra simuleringen af aorta kan siges at være tilfredsstillende.



**Figur 1.7:** Ændring af aortas pulsølgehastighed, som funktion af alder. [Yin, 87]



**Figur 1.8:** Sammenhængen mellem tværsnitsareal og blodets gennemsnitshastighed i det systemiske kredsløb. [Smith, 90]

- Vi er interesserede i at simulere, at amplituden af trykprofilen bliver højere med afstanden fra hjertet.
- Derudover håber vi, at kunne simulere en bølge der bliver stejlere med afstanden fra hjertet.
- Om muligt er vi interesserede i, at kunne forklare dannelsen af

den dikrote hævning.



## Kapitel 2

# Beskrivelse af strømninger i rør

Vi vil i dette kapitel gennemgå det teoretiske grundlag for MOUSE, som vi senere vil benytte til at simulere blodstrømningen i aorta. Gennemgangen består hovedsagligt i, at udlede de grundlæggende ligninger, der benyttes i beskrivelsen af strømninger i delvist og helt fyldte rør, samt at skabe analogi mellem de to strømningsformer<sup>1</sup>.

Ligningerne, der benyttes til at beskrive væskestrømning, er henholdsvis kontinuitets- og bevægelsesligningen. Disse ligninger bygger på lovene for masse- og impulsbevarelse. I første del af kapitlet vil vi udlede kontinuitets- og bevægelsesligningen for strømninger i delvist fyldte rør. I anden del vil vi udlede samme ligninger, men denne gang for strømninger i fuldtløbne rør.

At ligningerne for de to situationer falder forskelligt ud skyldes, at hvor man ved delvist fyldte rør kan antage, at trykket er atmosfærisk og densiteten konstant, må man for fuldtløbende rør tage højde for et eventuelt overtryk og deraf følgende densitetsændring af væsken og/eller deformation af røret.

Senere i kapitlet vil vi argumentere for at der, under de rette antagelser, kan skabes en analogi mellem strømning i helt og delvist fyldte rør. Vi

---

<sup>1</sup>Dette kapitel er i store træk en kommenteret gennemgang af Anders Sjöbergs *Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem*.



vil vise at der er analogi mellem både kontinuitets- og bevægelsesligningerne.

Analogien mellem de to kontinuitetsligninger skabes ved at indføre en fiktiv spalte i toppen af det fuldtløbende rør. Ved overtryk kan vandet stige op i spalten, og dermed kan det tværsnitsareal, vandet flyder igennem, øges analogt med situationen for delvist fyldte rør. Analogien mellem de to bevægelsesligninger opnås direkte, ved at antage, at man kan se bort fra de ændringer af væskens densitet og rørets tværsnitsareal, der kommer som følge af en trykstigning.

Det, at der kan skabes analogi mellem de to systemer, er essentielt for vores projekt, da det betyder, at de forholdsvis simple ligninger for strømning ved fri vandoverflade, kan benyttes til at beskrive de noget mere komplicerede strømninger i fuldtløbende og elastiske rør som for eksempel aorta.

Kapitlet afsluttes med, at vi opstiller den model for aorta, vi senere vil benytte i vores simuleringer af blodstrømningerne.

## 2.1 Generelle definitioner

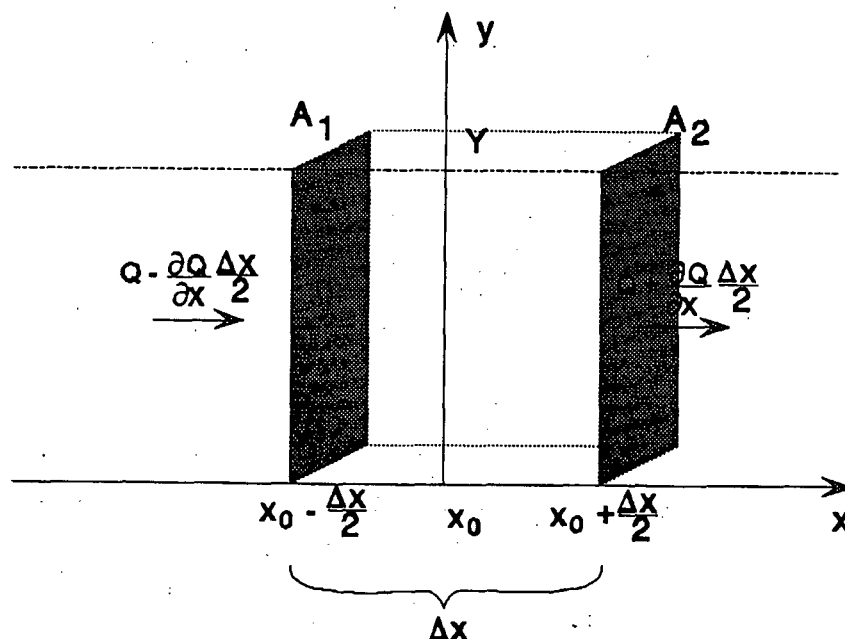
- *Et rør.* De rør vi beskæftiger os med er rette, cirkulære og koniske.
- *Laminar strømning.* Sempel strømning hvor væskepartiklerne bevæger sig i lag. Lille Reynoldstal ( $R < 1000$ ) [Rubinow, 75].
- *Turbulent strømning.* Kaotisk strømning hvor væskepartiklerne bevæger sig i alle retninger. Stort Reynoldstal ( $R > 1000$ ) [Rubinow, 75].
- *Våd perimenter.* Den våde perimenter  $L$  er den del af rørets indre omkreds, der er dækket af vand.
- *Densitetshomogen.* At en væske er densitetshomogen vil sige, at den er usammentrykkelig.
- *Hydrostatisk tryk.* Er når trykket er ens fordelt over vandoverfladens bredde ( $z$ -retningen).

## 2.2 Strømninger i delvist fyldte rør

Vi vil ved udledningen af kontinuitetsligningen og bevægelsesligningen, kun undersøge disse ligninger i én dimension, nemlig bevægelsesretningen, kaldet  $x$ -retningen. Dette kan vi gøre fordi vi antager at strømmingen ud over at være laminar, kun har hastighed i  $x$ -retningen, da vi kun tillader det delvist fyldte rør at hælde med en lille vinkel  $\theta$  i forhold til vandret. Herudover antager vi at væsken er densitetshomogen, og trykket er hydrostatisk.

### 2.2.1 Kontinuitetsligningen for delvist fyldte rør

Vi starter med at udlede kontinuitetsligningen. Dette gør vi ved hjælp af et differentielt lille kontrolvolumen, der er defineret som vist på figur 2.1.



Figur 2.1: Kontrolvolumenet i delvist fyldt rør.

Vanddybden (højden) defineret som funktion af både tid og sted er  $Y = Y(x, t)$  og er vinkelret på bunden. Tværsnitsarealet for væsken

defineres som  $A = A(x, Y)$  i  $yz$ -planet. Sidst defineres gennemstrømningen (flow'et) af væsken gennem kontrolvolumenet som  $Q = Q(x, t)$ . Kontinuitetsligningen er baseret på loven om at væskestrømningens masse er konstant. For at udlede kontinuitetsligningen undersøger vi det forømtalte kontrolvolumen, som er differentielt lille og har længden  $\Delta x$ .

Da densiteten af væsken er konstant, er der et konstant forhold  $\rho V = m$  mellem kontrolvolumenets masse og dets volumen. Det ses, at hvis massen er konstant, da er det betragtede volumen også konstant. Der vil gælde, at den indstrømmende væske minus den udstrømmende væske vil være lig med en volumenændring.

Vi kan nu opskrive volumenændringen for det delvist fyldte rør. Vi Taylorudvikler til første orden fra punktet  $x_0$  (se figur 2.1).

Den indstrømmede væskemængde i kontrolvolumenet skrives som

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \left( \left( x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) - x_0 \right) + O(\Delta x)^2$$

Og den udstrømmede væske skrives som

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \left( \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - x_0 \right) + O(\Delta x)^2$$

Da vi har, at volumenforøgelsen  $\frac{\partial A}{\partial t} \Delta x$  skrives som den indstrømmede væskemængde minus den udstrømmede væskemængde, får vi at der gælder

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x = \\ \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \left( \left( x_0 - \frac{\Delta x}{2} \right) - x_0 \right) + O(\Delta x)^2 \right) - \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \left( \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - x_0 \right) + O(\Delta x)^2 \right) = \\ - \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x + O(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

⇕

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Delta x = O(\Delta x)^2$$

⇕

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{O(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Lader vi nu  $\Delta x \rightarrow 0$ , finder vi udtrykket for kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Ligningen beskriver sammenhængen mellem en arealændring pr. tidsenhed, og strømningshastigheden af væsken. Det ses, at hvis tværsnitsarealet af røret er konstant, vil  $Q$  ligeledes være konstant.

Vi kan også skrive kontinuitetsligningen på en anden måde ved, at definere tværsnitsarealet af væsken i vores delvist fyldte rør som

$$A = \int_0^Y b(x, y) dy \quad (2.2)$$

hvor  $b(x, y)$  er en given overfladebredde til et givent sted  $x$  og dybde  $y$ . Dette integreret fra bunden op til højden af vandoverfladen  $Y$ , giver tværsnitsarealet  $A$ .

Vi differentierer udtrykket for arealet (2.2) med hensyn til tiden  $t$ , og får

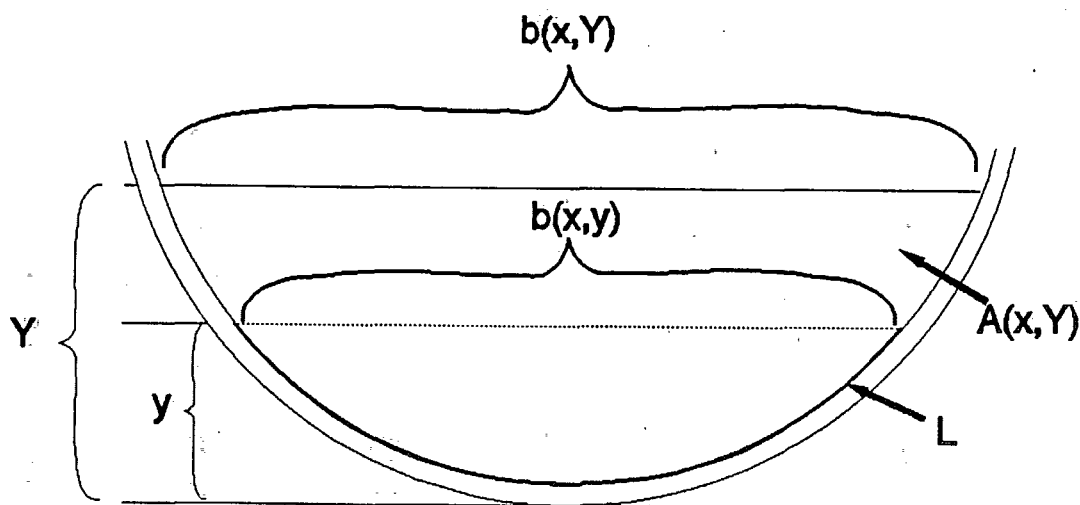
$$\frac{\partial A}{\partial t} = b(x, Y) \frac{\partial Y}{\partial t}$$

Det ses at ændringen af tværsnitsarealet kan skrives som bredden af vandoverfladen ganget med højdeændringen.

Vi kan nu skrive vores kontinuitetsligning (2.1) som

$$B \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

hvor  $B = b(x, Y)$ .



**Figur 2.2:** Tværsnitsarealet  $A(x, Y)$  af et delvist fyldt rør, med vandhøjden  $Y$  vandoverfladens bredde  $b(x, Y)$  og den våde perimeter  $L$ .

### 2.2.2 Bevægelsesligningen for strømning i delvist fyldte rør

Vi vil nu udlede bevægelsesligningen for strømning i delvist fyldte rør. Ligningen er baseret på Newtons anden lov, der beskriver sammenhængen mellem kraft og acceleration.

Den resulterende kraft, der virker på det på side 25 definerede kontrolvolumen, kan opskrives som følgende

$$\bar{F}_{res} = \bar{F}_t + \bar{F}_p + \bar{F}_{gn} = \frac{d}{dt}(\Delta m \bar{v})$$

Vektorsummen  $\bar{F}_{res}$  udgøres af tyngdekraften  $\bar{F}_t$ , trykkraften  $\bar{F}_p$  og gnidningskraften  $\bar{F}_{gn}$ .  $\bar{F}_{res}$  er lig med impulsændringen.

### Impulsændring i kontrolvolumenet

Vi starter med at finde et udtryk for forandringen af impulsen i kontrolvolumenet ( $\frac{d}{dt}(\Delta m \bar{v})$ ). Dette kan skrives som nettoudstrømningen af impuls plus øgningen pr. tidsenhed af bevægelsesmængden i kontrolvolumenet.

$$\frac{d}{dt}(\Delta m \bar{v}) = \int_A \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{n} dA) + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \bar{v} dV \quad (2.4)$$

hvor  $\bar{v}$  er hastighedsvektoren i  $x$ ,  $y$ , og  $z$ -retningen.

Det første integrale i udtrykket beskriver den væskemængde, der strømmer igennem den flade som har normalvektor  $\bar{n}$ .  $\bar{v}$  er hastighedsvektoren for væskens bevægelse. Det ses, at når blot vi undersøger væskens bevægelse i  $x$ -retningen, så er vektorerne  $\bar{n}$  og  $\bar{v}$  parallelle. Der integreres over den flade  $A$  som væsken gennemstrømmer og dermed fås, at nettoudstrømningen kan skrives som differensen mellem udstrømningen gennem fladerne  $A_1$  og  $A_2$ . Det andet integrale beskriver den mængde væske, som pr. tid gennemstrømmer kontrolvolumenet. Det ses, at ved at integrere over kontrolvolumenet, fås det andet bidrag til ændringen af bevægelsesmængden.

Da vi har antaget, at væsken kun bevæger sig i  $x$ -retningen og at væskens densitet er konstant  $\rho_0$ , kan ligningerne skrives som

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta m v) &= \rho_0 \int_{A_2} v^2 dA - \rho_0 \int_{A_1} v^2 dA + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_A v dA \right) \Delta x = \\ &= \rho_0 \left( \int_{A_2} v^2 dA - \int_{A_1} v^2 dA \right) + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_A v dA \right) \Delta x. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Vi definerer

$$I(x) \equiv \int_A v^2 dA$$

hvoraf det følger, at

$$\int_{A_2} v^2 dA = I\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

og

$$\int_{A_1} v^2 dA = I(x_0 - \frac{\Delta x}{2}).$$

Differensen  $I(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - I(x_0 - \frac{\Delta x}{2})$  Taylorudvikles i punktet  $x_0$ , hvilket giver

$$\begin{aligned} \left( I(x_0) + \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x)^2 \right) - \left( I(x_0) - \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + O(\Delta x)^2 \right) = \\ \frac{\partial I}{\partial x} \Delta x + O(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Vi kan nu indsætte dette i ligningen (2.4) og få

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta mv) &= \rho_0 \frac{\partial I}{\partial x} \Delta x + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_A v dA \right) \Delta x + O(\Delta x)^2 = \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_A v^2 dA \right) \Delta x + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_A v dA \right) \Delta x + O(\Delta x)^2 = \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) \Delta x + \rho_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta x + O(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

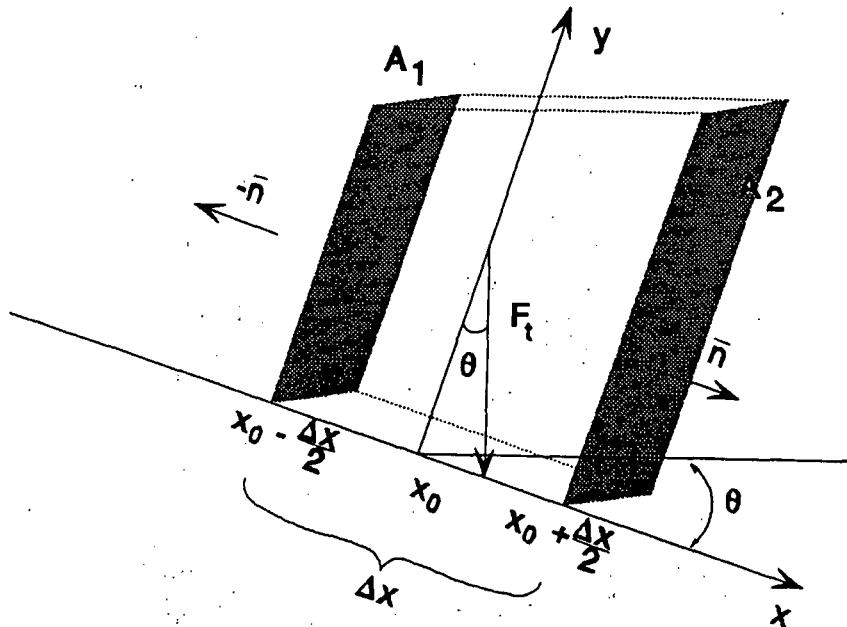
idet  $\beta$  defineres som  $\beta = \frac{A}{Q^2} \int_A v^2 dA$  og  $Q = vA$ .

Vi har alt i alt

$$\frac{d}{dt}(\Delta mv) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) \Delta x + \rho_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta x + O(\Delta x)^2.$$

### Tyngdekraftens bidrag

Som sagt kan den resulterende kraft, der påvirker kontrolvolumenet, opdeles i tre forskellige kræfter. Vi starter med at beskrive tyngdekraften. Når røret, og dermed kontrolvolumenet, hælder med en vinkel  $\theta > 0$  har tyngdekraften en indvirkning på væskens strømning. Det er denne krafts projektion på  $x$ -retningen vi er interesserede i at finde, idet denne giver et bidrag til væskens bevægelse.



**Figur 2.3:** Tyngdekraftens ( $\bar{F}_t$ ) bidrag til bevægelsesmængden i kontrolvolumenet i et rør med hældningen  $\theta$ .

Figur 2.3 viser kontrolvolumenet, hvor vi ser tyngdekraftens projektion på  $x$ -retningen som et bidrag til væskebevægelsen. Tyngdekraftens projektion ind på  $x$ -retningen er

$$\bar{F}_{t,x} = mg \sin \theta$$

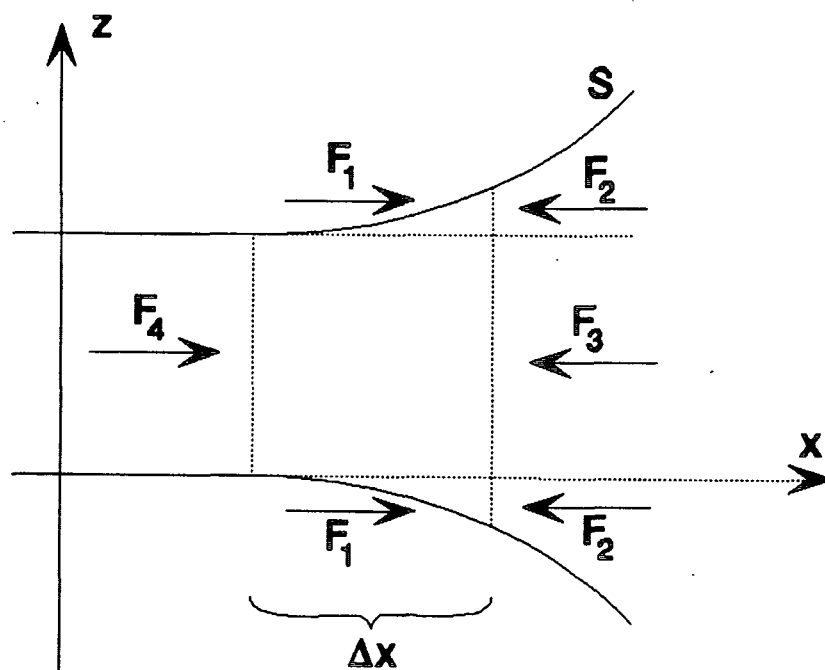
hvor  $m$  er massen af kontrolvolumenet og kan skrives som  $m = V\rho_0$  hvor  $V$  er kontrolvolumenets volumen, og  $\rho_0$  er densiteten for væsken i kontrolvolumenet. Volumenet kan skrives som  $V = A\Delta x$ , hvor  $A$  er arealet af kontrolvolumenet og  $\Delta x$  er længden af det. Vi kan nu skrive tyngdekraftens projektion som

$$\bar{F}_{t,x} = V\rho_0 g \sin \theta = A\Delta x\rho_0 g \sin \theta$$

hvor vi definerer  $\sin \theta \equiv I_0$  og får:

$$\bar{F}_{t,x} = A\Delta x\rho_0 g I_0$$





Figur 2.4: Figuren viser de kræfter, der virker på kontrolvolumenet.

### Trykkraftens bidrag

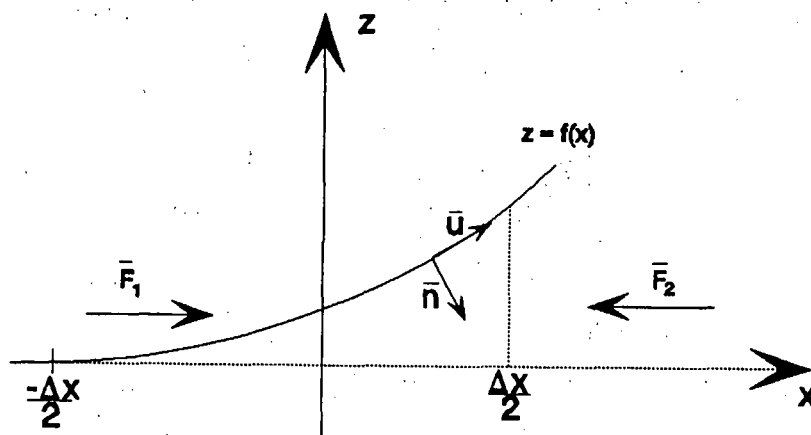
Vi vil nu finde den resulterende trykkraft virkende på kontrolvolumenet i det koniske rør. Figur 2.4 viser kontrolvolumenet set oppe fra, hvor æsken bevæger sig i  $x$ -retningen.

Trykkraften kan ud fra figur 2.4 opskrives som

$$\bar{F}_p = (\bar{F}_1 - \bar{F}_2) + (\bar{F}_4 - \bar{F}_3)$$

Vi ønsker at finde differensen mellem  $F_1$  og  $F_2$ , idet vi vil godtgøre at den vil gå mod nul for  $\Delta x$  gående mod nul. Figur 2.5 er en forstørrelse af det differentielt lille væskeelement, hvorpå  $F_1$  og  $F_2$  virker. Røret udvider sig langs kurven  $S$ , der er givet på formen  $z = f(x)$ .

Kraften  $\bar{F}_2$  er den trykkraft de omkringliggende væskepartikler udøver vinkelret på kontrolvolumenets ene endeflade, fra  $z = 0$  til  $z = f(\frac{\Delta x}{2})$  med arealet  $f(\frac{\Delta x}{2})\Delta y$ .  $\bar{F}_2$  kan idet  $p = \frac{F}{A}$  skrives som



Figur 2.5: Udvidelsen af kontrolvolumenet.

$$\bar{F}_2 = p\left(\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) f\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y$$

Det skal bemærkes, at  $\bar{F}_2$  virker på kontrolvolumet i dybden  $y$ .

Kraften  $\bar{F}_1$  er givet som  $x$ -aksens komponent til de kræfter der virker på rørets yderside fra  $-\frac{\Delta x}{2}$  til  $\frac{\Delta x}{2}$ . For at finde  $\bar{F}_1$  opskriver vi enhedsvektorerne  $\bar{u}$  og  $\bar{n}$ . Vi ønsker at finde denne komponent som funktion af  $x$ , idet vi sidenhen kan integrere over kontrolvolumenets længde  $\Delta x$ . Vi udnytter også at trykket i væsken  $p(x, y, t)$  er hydrostatisk.

Fra differentialgeometrien ved vi, at  $\bar{u}$  og  $\bar{n}$  kan skrives som

$$\bar{u} = \frac{(1, f'(x))}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

og

$$\bar{n} = \frac{(f'(x), -1)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

Vektorerne ses på figur 2.5 hvor det også ses, at  $\bar{n}$  er lig med  $-\hat{u}$ . Vi er kun interesserede i at undersøge  $\bar{F}_1$  i  $x$ -retningen. Derfor ganges  $\bar{n}$  med  $(1, 0)$ , hvilket ved at integrere over længden af kurven  $S$  giver følgende udtryk for  $\bar{F}_1$

$$\bar{F}_1 = \int_{x=-\frac{\Delta x}{2}}^{x=\frac{\Delta x}{2}} p(x, y, t) \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \Delta y ds \quad (2.6)$$

Trykket  $p(x, y, t)$  virker i  $x$ -retningen og afhænger af højden  $y$  som regnes vinkelret på papiret. Det ses, at ved at integrere trykket over  $ds$ , fås trykkraften. Imidlertid ønsker vi at finde komponenten i  $x$ -retningen, så vi integrerer med hensyn til  $dx$ . Vi udnytter, at vi undersøger et differentielt lille væskeelement. Vi kan derfor med god tilnærmelse antage, at den differentielt lille trekant illustreret på figur 2.5 er retvinklet. Ifølge Pythagoras kan  $ds$  da skrives som

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) dx^2} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)} \cdot dx$$

Vi udnytter at  $f'(x) = \frac{dz}{dx}$  og kan dermed skrive

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Dette udtryk for  $ds$  indsættes nu i udtrykket for  $\bar{F}_1$  i ligningen (2.6)

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} p(x, y, t) \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \sqrt{1 + f'(x)^2} \Delta y dx = \\ &= \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} p(x, y, t) f'(x) \Delta y dx \end{aligned}$$

Vi anvender partiel integration, idet der står et produkt af to funktioner.

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} p(x, y, t) f'(x) \Delta y dx = \\ & \left( [p(x, y, t) f(x)]_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} - \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} p'(x, y, t) f(x) dx \right) \Delta y = \\ & \left( p\left(\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) f\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - p\left(-\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) f\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) - \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} p'(x, y, t) f(x) dx \right) \Delta y\end{aligned}$$

Vi ved at

$$p\left(\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) f\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y = \bar{F}_2$$

og vi udnytter at  $f\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$ . Vi kan derfor skrive

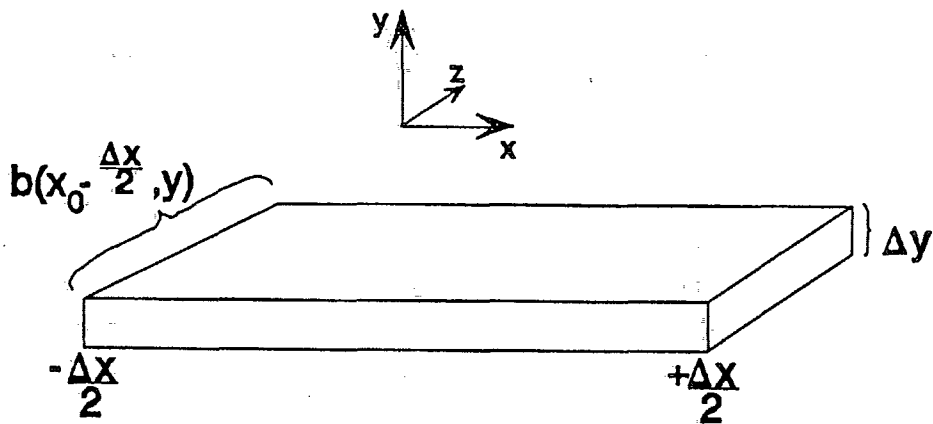
$$\bar{F}_1 - \bar{F}_2 = - \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} p'(x, y, t) f(x) \Delta y dx$$

Højresiden kan Taylorudvikles ud fra punktet  $-\frac{\Delta x}{2}$ , hvilket giver

$$\begin{aligned}- \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} & \left( p'\left(-\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) + \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) p''\left(-\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) + O(\Delta x)^2 \right) \times \\ & \left( f\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) f'\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + O(\Delta x)^2 \right) \Delta y dx\end{aligned}$$

Da  $f\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$ , fås ved at gange ud

$$\begin{aligned}- \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} & \left( p'\left(-\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) + \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) p''\left(-\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) + O(\Delta x)^2 \right) \times \\ & \left( \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) f'\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + O(\Delta x)^2 \right) \Delta y dx = \\ - \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} & \left( p'\left(-\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) f'\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) +\end{aligned}$$



Figur 2.6: Snit af kontrolvolumenet i  $xz$ -retningen

$$p''(-\frac{\Delta x}{2}, y, t) f'(-\frac{\Delta x}{2})(x + \frac{\Delta x}{2})^2 + O(\Delta x)^2) \Delta y dx =$$

$$-\Delta y \left( p'(-\frac{\Delta x}{2}, y, t) f'(-\frac{\Delta x}{2}) \frac{(\Delta x)^2}{2} + O(\Delta x)^2 \right) =$$

$$O(\Delta x)^2$$

Vi har alt i alt at

$$\bar{F}_1 - \bar{F}_2 = O(\Delta x)^2.$$

Vi har nu vist, ved at betragte et differentielt lille væskeelement, at forskellen mellem kræfterne  $\bar{F}_1$  og  $\bar{F}_2$  er af størrelseordenen  $O(\Delta x)^2$ .

Vi går nu over til at bestemme differensen mellem kræfterne  $\bar{F}_3$  og  $\bar{F}_4$ . Vi opskriver den differentielle kraftpåvirkning i dybden  $y$ , på den kvadratiske pladeskive med tykkelse  $\Delta y$ . Se figur 2.6.

Ved at udnytte at bredden af skiven er den samme fra  $x = -\frac{\Delta x}{2}$  til  $x = \frac{\Delta x}{2}$  kan kraftforskellen mellem  $\bar{F}_3$  og  $\bar{F}_4$  udtrykkes ved arealet af endeskiverne ganget med trykforskellen.

$$\bar{F}_4 - \bar{F}_3 = b(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y \left( p(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, t) - p(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, t) \right)$$

Vi rækkeudvikler ud fra punktet  $x_0$ , og får derfor

$$b(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y \left( p(x_0, y, t) + \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y, t) \left( (x_0 - \frac{\Delta x}{2}) - x_0 \right) + O(\Delta x)^2 \right) -$$

$$b(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y \left( p(x_0, y, t) + \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y, t) \left( (x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - x_0 \right) + O(\Delta x)^2 \right) =$$

$$b(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y (-\Delta x) \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y, t) + O(\Delta x)^2 \quad (2.7)$$

Vi rækkeudvikler også  $b(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y)$  i punktet  $x_0$ , hvilket giver

$$b(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y) = b(x_0, y) + \frac{\partial b}{\partial x} \left( (x_0 - \frac{\Delta x}{2}) - x_0 \right) + O(\Delta x)^2 = b(x_0, y) + O(\Delta x)$$

Ved at indsætte dette i (2.7) får vi alt i alt

$$(\bar{F}_1 - \bar{F}_2) + (\bar{F}_4 - \bar{F}_3) = -b(x_0, y) \Delta y \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y, t) + O(\Delta x)^2$$

Det hydrostatiske tryk defineres som

$$p = \rho_0 g Y \cos \theta$$

hvor  $\theta$  er kontrolvolumenets hældning i forhold til vandret. Vi kan derfor skrive

$$\Delta \bar{F}_p = -b(x_0, y) \Delta y \Delta x \rho_0 g \frac{\partial Y}{\partial x} \cos \theta + O(\Delta x)^2$$

Vi ser, at trykket differentieret med hensyn til  $x$  kun afhænger af højden  $Y$ . Vi integrerer nu på begge sider af lighedstegnet og får

$$\bar{F}_p = -\left(\int_0^Y b(x_0, y) dy\right) \Delta x \frac{\partial Y}{\partial x} \rho_0 g \cos \theta + O(\Delta x)^2$$

Vi ser, at det kun er  $b(x_0, y)$ , der skal integreres med hensyn til  $y$ , og vi ved fra tidligere at

$$\int_0^Y b(x_0, y) dy = A,$$

hvilket til slut giver os det søgte udtryk for den resulterende trykkraft virkende på kontrolvolumnet

$$\begin{aligned} \bar{F}_p &= -A \Delta x \rho_0 g \frac{\partial Y}{\partial x} \cos \theta + O(\Delta x)^2 \\ &= -A \Delta x \rho_0 g \frac{\partial Y}{\partial x} + O(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

hvis  $\cos \theta \approx 1$

### Friktionskraftens bidrag

Vi har indtil videre bestemt tyngdekraftens projektion ind på bevægelsesretningen og den samlede trykkraft på kontrolvolumenet. Vi mangler at få defineret friktionskraften som virker på kontrolvolumenets bund og sider. Friktionskraften er altid rettet imod bevægelsesretningen og kan skrives som

$$\bar{F}_{gn} = -\sigma L \Delta x$$

hvor  $L$  er den våde perimeter og  $\sigma^2$  er et tryk over arealet  $L\Delta x$ , også kaldet en forskydningsspænding. Vi definerer  $I_f \equiv \frac{\sigma L}{\rho_0 g A}$  hvilket giver følgende udtryk for friktionskraften

$$\bar{F}_{gn} = -A\Delta x I_f \rho_0 g.$$

### Bevægelsesligningen

Vi kan nu opskrive det samlede udtryk for bevægelsesmængden som

$$\frac{d}{dt}(\Delta m v) = \bar{F}_t + \bar{F}_p + \bar{F}_{gn}$$

⇕

$$\rho_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta x + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) \Delta x + O(\Delta x)^2 =$$

$$A\Delta x \rho_0 g I_0 - A\Delta x \rho_0 g \frac{\partial Y}{\partial x} - A\Delta x I_f \rho_0 g + O(\Delta x)^2$$

Ved at dividere igennem med  $\rho_0$  og  $\Delta x$ , og ved at lade  $\Delta x$  gå mod nul, bliver ovenstående til

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Y}{\partial x} = gA(I_0 - I_f)$$

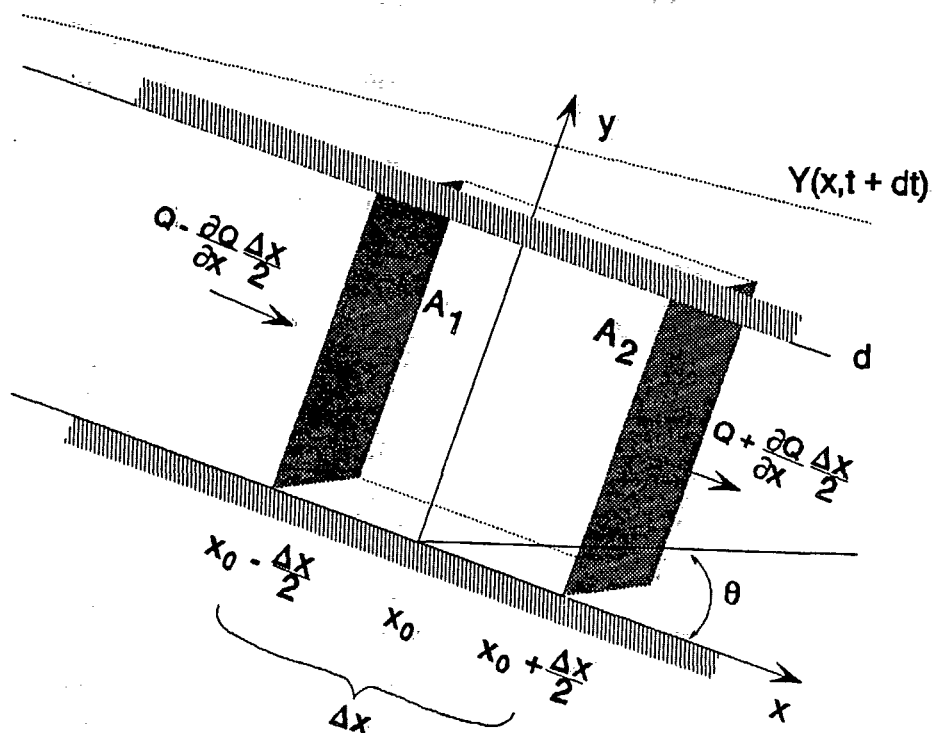
Dette udtryk er den ligning vi søgte, nemlig bevægelsesligningen for væskestrømning ved fri vandoverflade.

## 2.3 Strømning i fuldtløbende rør

En forøgelse af massen i kontrolvolumenet kan for fyldte rør kun ske ved komprimering af vandet eller ved en udvidelse af røret. I kontinuitets- og bevægelsesligningen for strømning i fyldte rør, skal der derfor tages hensyn til vandets kompressibilitet og rørets mulighed for at udvide sig. Der betragtes, på samme vis som for strømning med fri vandoverflade, et kontrolvolumen med længden  $\Delta x$ . Dog er vanddybden her altid lig med rørets diameter  $d$ , og der regnes med et varierende overtryk  $\Delta p$ .

<sup>2</sup> $\sigma = \frac{F_{\parallel}}{\Delta A}$  hvor  $F_{\parallel}$  er kraftens parallel komponent langs  $\Delta A$ , og måles i  $\frac{N}{m^2}$ .





**Figur 2.7:** Kontrolvolumenet for det fuldtløbende rør med diameter  $d$  og tryklinien  $Y$ .

- $Q = \frac{dV}{dt}$  (Volumenændring med hensyn til tiden  $t$ )
- $V = A\Delta x$  (volumenet af kontrolvolumenet)
- $\Delta p = \rho g \Delta y$  (Trykændringen ved hydrostatisk trykfordeling, dvs. stillestående vand).

## Densiteten

Et udtryk for densitetstilvæksten kan opskrives som

$$\Delta\rho = \frac{\rho}{E_v} \Delta p$$

Densiteten vokser proportionalt med trykket, og er omvendt proportionalt med vandets elasticitetskonstant  $E_v$ . Idet  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$  kan en førsteordens approksimation for  $\Delta\rho$  findes som

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0\Delta p}{E_v} + \frac{\Delta\rho\Delta p}{E_v} \approx \frac{\rho_0\Delta p}{E_v} = \frac{\Delta p}{a_0^2}$$

hvor  $a_0 = \sqrt{\frac{E_v}{\rho_0}}$  hvilket er lydets hastighed i vandet<sup>3</sup>. Ved at integrere udtrykket  $\Delta\rho = \frac{\Delta p}{a_0^2}$  over intervallet  $y = d$  til  $y = Y$  fås et udtryk for sammenhængen mellem  $\rho$  og  $\rho_0$ .

$$\Delta\rho = \frac{\Delta p}{a_0^2} = \frac{\rho g \Delta y}{a_0^2}$$

I grænsen for  $\Delta\rho \rightarrow 0$  fås

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_d^Y \frac{g dy}{a_0^2}$$

⇕

$$\ln(\rho) - \ln(\rho_0) = \frac{g(Y-d)}{a_0^2}$$

⇕

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{g(Y-d)}{a_0^2}$$

⇕

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = e^{\frac{g(Y-d)}{a_0^2}}$$

⇕

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{g(Y-d)}{a_0^2}}$$

Ved at Taylorudvikle i punktet  $x_0 = x$  fås

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{g(Y-d)}{a_0^2}\right) \quad (2.8)$$

Af dette ses, at densitetsændringen vil være meget beskeden selv ved store trykændringer. Det vil derfor i mange tilfælde kunne forsvares at sætte  $\rho = \rho_0$ .

<sup>3</sup>Lydets hastighed i et materiale afhænger af materialets elasticitet.

### Trykket

Udtrykket for densiteten (2.8) benyttes nu til at finde et udtryk for overtrykket  $\Delta p$  i vandet.

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= \int_d^Y g\rho_0 \left(1 + \frac{g(Y-y)}{a_0^2}\right) dy = \\
 &= \int_d^Y g\rho_0 dy + \int_d^Y \frac{g^2\rho_0(Y-y)}{a_0^2} dy = \\
 &= g\rho_0[y]_d^Y + \frac{g^2\rho_0 Y[y]_d^Y}{a_0^2} - \frac{g^2\rho_0[y^2]_d^Y}{2a_0^2} = \\
 &= g\rho_0(Y-d) + \frac{g^2\rho_0 Y(Y-d)}{a_0^2} - \frac{g^2\rho_0(Y^2-d^2)}{2a_0^2} = \\
 &= g\rho_0(Y-d) + \frac{2g^2\rho_0 Y(Y-d)}{2a_0^2} - \frac{g^2\rho_0(Y-d)(Y+d)}{2a_0^2} \\
 \Downarrow \\
 \Delta p &= g\rho_0(Y-d) \left(1 + \frac{g(Y-d)}{2a_0^2}\right) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

### Tværsnitsarealet

Efter at have fundet et udtryk for overtrykket, går vi over til at opskrive et udtryk for tilvæksten i rørets tværsnitsareal  $\Delta A$ , som følge af en trykændring. Rørets udvidelse er omvendt proportional med rørmaterialets elasticitet  $E_r$  og af rørvæggens tykkelse  $e$

$$\Delta A \approx \frac{A_0 d \Delta p}{e E_r} = \frac{A_0 \Delta p}{\rho_0 a_r^2}$$

hvor<sup>4</sup>  $a_r = \sqrt{\frac{E_r e}{\rho_0 d}}$

Tværsnitsarealet  $A = A_0 + \Delta A$  ved overtrykket  $\Delta p$  kan via udtrykket (2.9) omskrives til

<sup>4</sup> $a_r$  er lydets hastighed i rørmaterialet (for beton ca. 1400 m/s).

$$A = A_0 \left( 1 + \frac{g(Y-d)(1 + g(Y-d)/2a_0^2)}{a_r^2} \right)$$

hvilket kan tilnærmes til

$$A = A_0 \left( 1 + \frac{g(Y-d)}{a_r^2} \right) \quad (2.10)$$

da  $a_0^2$  er meget stor<sup>5</sup>.

Efter således at have beskrevet ændringer i densitet, tryk og tværsnitareal for strømning i fyldte rør, kan kontinuitetsligningen skrives op under hensyntagen til disse faktorer:

### 2.3.1 Kontinuitetsligningen for fuldtløbende rør

Som for strømning med fri vandoverflade gælder også her princippet om masse bevarelse. Det vil sige, at nettotilførslen af masse til kontrolvolumenet er lig med forøgelsen af kontrolvolumenets masse

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho Q) dx dt + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) dx dt = 0$$

Ved hjælp af kædereolen og ved at dividere igennem med  $\rho$  fås

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

For at skabe en analogi til strømning ved fri vandoverflade omskrives sidste del af kontinuitetsligningen vha. (2.8) og (2.10) og sammenhængen  $\frac{A}{\rho} = \frac{A_0}{\rho_0}$ . Denne sammenhæng fås ved at kombinere (2.8), (2.10) og ved samtidig at antage at  $a_0 = a_r$ <sup>6</sup>.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

<sup>5</sup>For vand er  $a_0 = 1435 \text{ m/s}$ . [Sjöberg, 76]

<sup>6</sup>Denne antagelse er problemfri, når man regner på kloakrør, men for aorta er  $a_{r \text{ aorta}}$  en del mindre end  $a_{0 \text{ aorta}}$  ( $a_{0 \text{ aorta}} \approx a_{0 \text{ vand}}$ ). Fejlen vil dog ikke være større end en faktor 0.5 da aortas tværsnitareal maksimalt udvider sig med 50%, hvis man ser bort fra det korte stykke lige ved hjertet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{A_0 g(Y-d)}{a_r^2} + \frac{A_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0 g(Y-d)}{a_0^2} \right) = \\ A_0 g \frac{1}{a_r^2} \frac{\partial Y}{\partial t} + A_0 g \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial Y}{\partial t} = \\ A_0 g \frac{\partial Y}{\partial t} \left( \frac{1}{a_r^2} + \frac{1}{a_0^2} \right) \end{aligned}$$

Dette indsat i (2.11) giver

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{g A_0}{a^2} \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

hvor  $a = \frac{a_0}{\sqrt{1+a_0^2/a_r^2}}$ . Der indføres nu et  $B = \frac{g A_0}{a^2}$ , hvor  $B$  kan opfattes som bredden af en fiktiv spalte i toppen af røret. Hvis man samtidig hermed ser bort fra  $\frac{Q}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ , hvilket man med rimelighed kan gøre, da densiteten varierer meget lidt over  $x$ , bliver kontinuitetsligningen

$$B \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

hvilket er kontinuitetsligningen for strømninger ved fri vandoverflade.

### 2.3.2 Bevægelsesligningen for fuldtløbne rør

De resulterende kræfter, der virker på kontrolvolumenet, kan på samme måde som for strømning ved fri vandoverflade, udregnes for strømning i fyldte rør. Når man tager hensyn til at densiteten og tværsnitsarealet ikke er konstante fås følgende bevægelsesligning

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \rho \frac{Q^2}{A} \right) + A \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g A (I_0 - I_f) \quad (2.13)$$

Hvis man sætter  $\rho = \rho_0$ <sup>7</sup>,  $A = A_0$ <sup>8</sup> og benytter sammenhængen  $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 g \frac{\partial Y}{\partial x}$  ses, at bevægelsesligningen (2.13) er helt analog til

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial Y}{\partial x} = g A (I_0 - I_f)$$

<sup>7</sup>At antage at  $\rho = \rho_0$  er, med de trykændringer vi arbejder med, også en rimelig antagelse for blod, idet  $a_0$  aorta er meget stor.

<sup>8</sup>Dette er som før nævnt en noget grov approksimation når det gælder aorta.

hvilken vi genkender som bevægelsesligningen for strømning ved fri vandoverflade<sup>9</sup>.

Disse analogiovervejelser legitimerer, at man, under de rette betingelser, kan benytte de relativt simple sammenhænge ved strømning med fri vandoverflade, til også at beskrive de mere komplicerede rørstrømninger.

### 2.3.3 Analogi til aorta

Den rørstrømning vi interesserer os for er blodets strømning i aorta. Da aorta er et meget elastisk rør, er det ikke umiddelbart indlysende, at man kan benytte ligningerne for strømninger i floder og kloakrør til beskrivelsen af strømningen i aorta. Derfor vil vi nu vise, at man ved valg af et passende udtryk for den fiktive spalte med bredden  $B$ , kan skabe en model, hvor man kan benytte bevægelses- og kontinuitetsligningen for delvist fyldte rør, til beskrivelse af blodstrømningen i aorta.

Kontinuitetsligningen ændres ikke af, at man går fra at beskrive strømninger i delvist fyldte ueftergivelige rør, til at beskrive strømninger i fuldtløbende elastiske rør. Derimod er bevægelsesligningen noget anderledes. Til en fuldstændig beskrivelse af strømninger i elastiske rør anvendes normalt *Navier-Stokes'* bevægelsesligning givet ved

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F_{\text{ext}} = 0 \quad (2.14)$$

De første to led i 2.14 beskriver inertikrafterne pr. masseenhed, tredje led beskriver trykkrafterne, fjerde led, hvor  $\mu$  er væskens viskositet, udtrykker gnidningskrafterne i væsken og det femte led står for de ydre kræfter, der påvirker væsken. I det femte led er det hovedsagligt tyngdeaccelerationen der har betydning. Da denne ikke indvirker nævneværdigt på vores system kan vi se bort fra dette led. Ligeledes antager vi at kunne se bort fra det fjerde led i ligningen.

Vi har valgt at benytte nedenstående forsimplede udgave af *Navier-Stokes'* ligning bevægelsesligning for aorta.

<sup>9</sup>  $A$  i bevægelsesligningen for strømning ved fri vandoverflade svarer til  $A_0$  i bevægelsesligningen for strømning i fuldtløbende rør. Dette fordi begge, i modsætning til  $A$  for fuldtløbende rør, er uafhængige af trykket.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

Dette kan ved hjælp af relationen mellem tryk og tværsnitsareal,  $p = P(A)$ , og det pr. definition givne  $P'(A) \equiv \frac{\partial p}{\partial A}$  omskrives til

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} P'(A) \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

Ved at gange igennem med  $A$ , benytte kontinuitetsligningen (2.1) og relationen  $Av = Q$  fås

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2}{\partial x A} + \frac{A}{\rho} P'(A) \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Vi lader os nu inspirere af Sjöbergs metode og skaber analogi mellem aortas og de delvist fyldte rørs bevægelsesligning ved, at definere en spalte med bredden  $B$  i "toppen af aorta".

Tværsnitsarealet ( $A$ ) af et væskefyldt rør med en spalte i toppen, kan skrives som summen af arealet af selve røret ( $A_r$ ), plus arealet af den del af spalten vandet er steget op i (se figur 2.8)

$$A = A_r + B \cdot (Y(x, t) - d)$$

hvor  $B$  er bredden af spalten,  $Y(x, t)$  er den totale vandhøjde og  $d$  er rørets diameter.

Arealændringen som funktion af stedet kan derfor skrives som

$$\frac{\partial A}{\partial x} = B \frac{\partial Y}{\partial x}$$

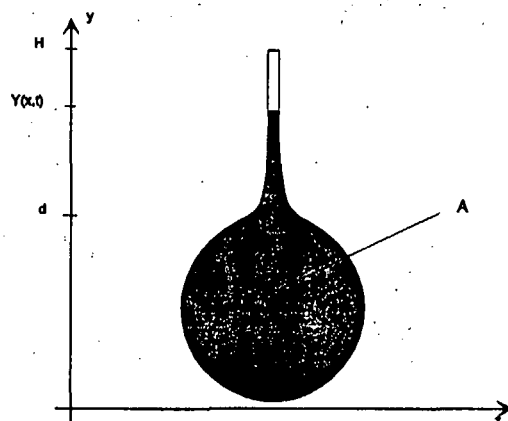
Hvis vi nu antager, at spaltebredden er givet ved

$$B = \frac{\rho g}{P'(A)}$$

kan bevægelsesligningen (2.15) for aorta omskrives til

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{A}{\rho} P'(A) \cdot B \frac{\partial Y}{\partial x} = -gA \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Dette er netop bevægelsesligningen for strømning ved fri vandoverflade hvis hældningen  $\theta \approx 0$  og hastighedsfordelingskoefficienten  $\beta = 1$ .



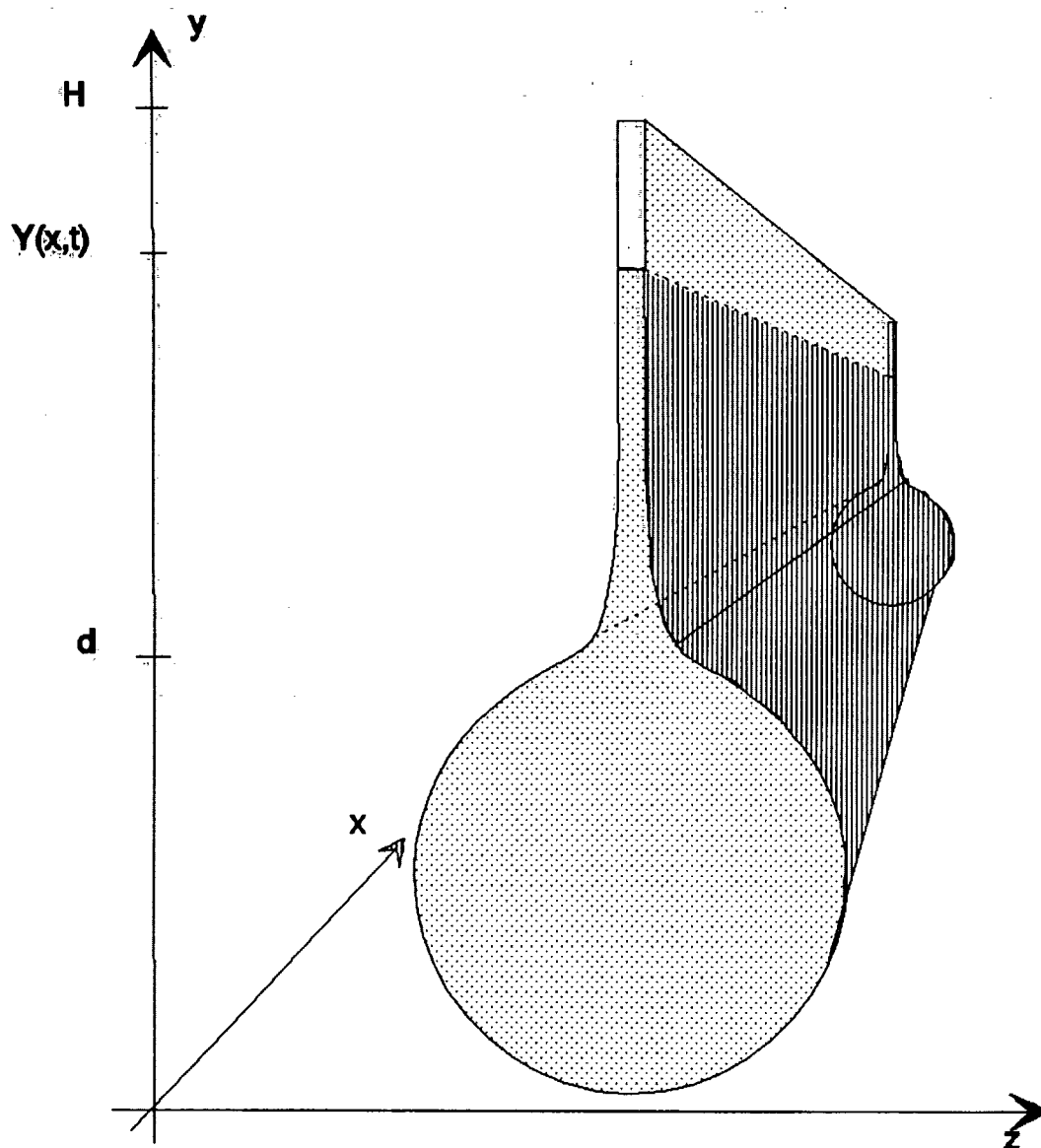
**Figur 2.8:** Tværsnit af et rør med diameter  $d$ , vandhøjde  $Y(x, t)$  og areal  $A$ .

### 2.3.4 Vores model for aorta

Ovenstående udregninger viser, at man ved at vælge spaltebredden  $B = \frac{\rho g}{P'(A)}$  kan skabe en analogi mellem strømmingen i aorta og strømninger i rør med fri vandoverfladde. Dette betyder, at man kan opstille en model til beskrivelse af blodets strømning i aorta, hvor man, i stedet for at benytte *Navier-Stokes'* ligning, kan benytte bevægelsesligningen for strømning i delvist fyldte rør, og istedet for et elastisk rør, benytter et stift rør med en spalte i toppen.

Vores model til beregning af strømmingen ned gennem aorta vil altså bestå i et stift cirkulært rør, med et tværsnitsareal, der gradvist indsnævres. Længden af røret sættes til 54 cm, og tværsnitsarealet varieres ifølge formlen  $A(x) = 4.63e^{-0.045x}$  (hvor  $p = p_0$ ) fra ca.  $5 \text{ cm}^2$  ved hjertet, til  $0.5 \text{ cm}^2$  ved bifurkationen. Dette rør vil i toppen have en spalte, hvis bredde er udtrykt ved formlen  $B = \frac{\rho g}{P'(A)}$ . Spaltens bredde afhænger af relationen mellem tryk- og arealændring  $P'(A)$ . Da dette forhold forandres ned gennem aorta (eftergiveligheden bliver mindre når afstanden til hjertet vokser) vil spaltebredden ligeledes forandres (mindskes). Figur 2.9 illustrerer vores model af aorta.





**Figur 2.9:** Illustration af vores model af aorta. Dimensionerne af tværsnitsarealet er gældende for  $p = p_0$ .

## Kapitel 3

# Trykbølgens ændring ned gennem aorta

I dette kapitel gøres analytisk rede for, hvorfor profilen af trykbølgen ned gennem aorta bliver stejlere og højere med afstanden fra hjertet.

I begyndelsen af kapitlet er en generel introduktion til hyperbolske bølgeligninger og deres løsning<sup>1</sup> Med udgangspunkt i kontinuitetsligningen og bevægelsesligningen for strømninger i fuldtløbende rør, og sammenhængen mellem tryk og arealudvidelse for aorta, vil vi senere i kapitlet udlede den ikke-lineære hyperbolske bølgeligning, som beskriver puls-bølgeudbredelsen i aorta. Aorta er i denne sammenhæng forsimplet til et ensformigt cylindrisk rør. Ud fra bølgeligningen argumenteres herefter for, hvorfor puls-bølgens profil ned gennem aorta bliver stejlere med afstanden fra hjertet. Sidst i kapitlet vil vi, ud fra en antagelse om energibevarelse, udvide beskrivelsen af trykbølgeudbredelsen i et uniformt rør, til også at beskrive udbredelsen i et rør hvor både tværsnitsarealet mindskes og rørvæggen bliver stivere<sup>2</sup>. Ud fra dette kan vi forklare, hvorfor puls-bølgens profil ned gennem aorta bliver stejlere og højere.

---

<sup>1</sup>Til dette afsnit er der hentet inspiration fra kapitel 1 og kapitel 2 i G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear waves*.

<sup>2</sup>Til dette afsnit er der hentet inspiration fra kapitel 12 i *Mathematical Bio Fluid Dynamics* af James Lighthill.

### 3.1 Hyperbolske bølgeligninger

Det er hyperbolske partielle differentiaalligninger, der benyttes til beskrivelse af bølgers udbredelse i et elastisk rør, og prototypen på en hyperbolsk bølgeligning er

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

hvor  $\phi$  er en funktion afhængig af  $x$  og  $t$ , og  $c_0$  er en konstant. Superpositionsprincippet gælder for denne bølgeligning. Dette betyder, at løsninger til den lineære bølgeligning kan adderes til nye løsninger. Bølgeligningen har den generelle løsning

$$\phi = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)$$

hvor  $f$  og  $g$  er arbitrære funktioner.

Løsningen er en kombination af to bølger, én med profil beskrevet via  $f$  der bevæger sig mod voksende  $x$ , og én med profil beskrevet via  $g$ , der bevæger sig mod aftagende  $x$ . Begge bølger udbreder sig med den konstante hastighed  $c_0$ . Det ville være langt mere simpelt med kun én bølge, og dette tilfælde fås ved en faktorisering af bølgeligningen som nedenfor

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi = 0$$

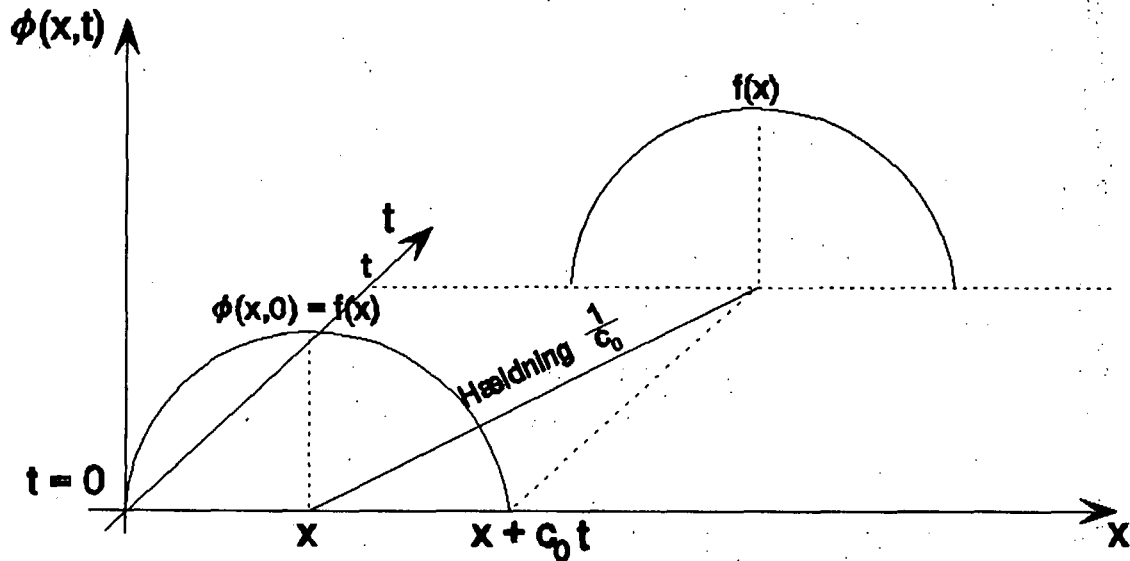
og herefter nøjes med at betragte den éne af bølgerne, eksempelvis bølgen, der bevæger sig mod voksende  $x$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

med den generelle løsning

$$f(x - c_0 t)$$

En specifik løsning findes ved at definere begyndelsesbetingelserne for bølgeudbredelsen. At løsningen er en bølge indses ved at betragte en profil  $f(x)$ , med eksempelvis begyndelsesbetingelsen  $\phi(x, 0)$ . Denne profil vil gentage sig selv afstanden  $c_0 t$  længere henne, til tiden  $t$  (se figur 3.1). Den lineære bølgeligning beskriver således udbredelsen af en bølge der ikke ændrer form.



Figur 3.1: Illustration af bølgeudbredelse, beskrevet ved bølgeligningen med løsningen  $f(x - c_0 t)$ , og med begyndelsesbetingelsen  $\phi(x, 0) = f(x)$ .

### 3.1.1 Den ikke-lineære bølgeligning

Det ikke-lineære tilfælde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

hvor  $c(\phi)$  ikke længere er konstant, men en given funktion af  $\phi$ , er en del mere kompliceret at løse. Man kan imidlertid tænke på udtrykket som den totale afledte til funktionen  $\phi(x, t)$ , i ethvert punkt langs en kurve i  $xt$ -planet, med hældningen  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c(\phi)}$

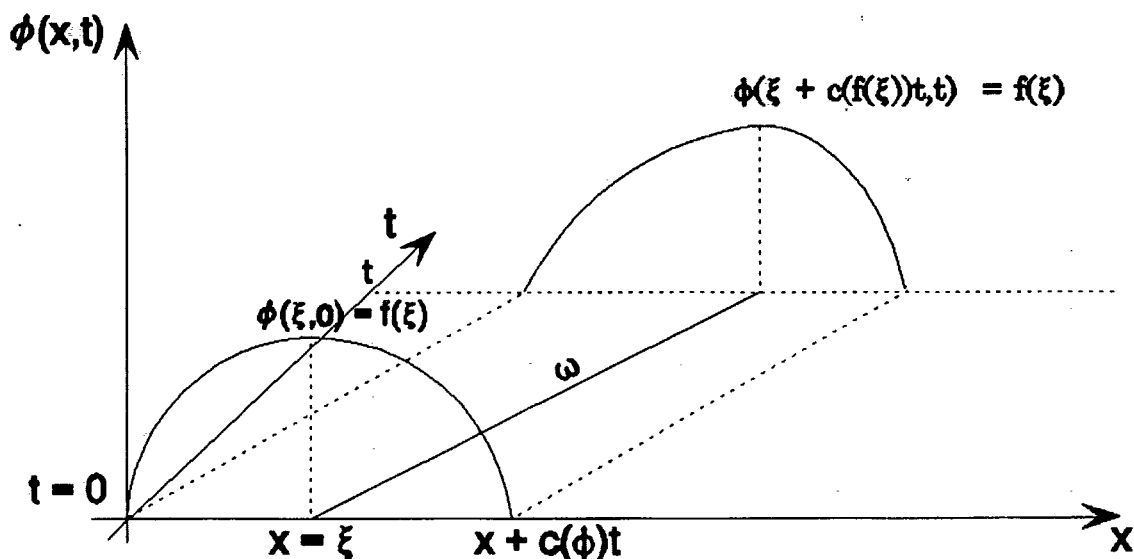
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + c(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

hvor det antages at  $x$  afhænger af  $t$ . For denne kurve i  $xt$ -planet vil det da gælde, at  $\frac{d\phi}{dt} = 0$ , hvorfor  $\phi$  er konstant på hele kurven, hvoraf det følger, at  $c(\phi)$  ligeledes er konstant. Kurven må derfor være en ret linje med hældningen  $\frac{1}{c(\phi)}$ .

Hver enkelt linje bestemmer hvorledes et enkelt punkt på bølgen  $\phi(x, t)$  udbreder sig, hvorfor linjerne generelt betegnes som de karakteristiske linjer (kurver)<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Det er kun i nogle tilfælde at  $\phi(x, t)$  er konstant på hele linjen, og altså ikke en del af definitionen på en karakteristisk kurve.

De karakteristiske kurver for bølgen defineret ved  $\phi(x, t)$  i  $xt$ -planet er, som det ses på figur 3.2, rette linjer med hældningen  $\frac{1}{c(\phi)}$ . Som det ses varierer hældningen, idet  $c(\phi)$  er afhængig af hvilket punkt på bølgen linjen skal beskrive. At linjernes hældning er varierende bevirker, at bølgeudbredelsen medfører en ændring af bølgens form.



Figur 3.2: Illustration af bølgeudbredelse, beskrevet ved bølgeligningen med løsningen  $f(x - c(\phi)t)$ , og med begyndelsesbetingelsen  $\phi(x, 0) = f(x)$ .

Lad os anskue et tilfælde med begyndelsesbetingelsen  $t = 0$ , og  $\phi(x, 0) = f(x)$ . Vi antager nu, at den karakteristiske kurve  $\omega$  skærer  $x$ -aksen i et punkt  $x = \xi$ , hvilket medfører at hældningen af  $\omega$  er givet ved

$$\frac{1}{c(\phi(\xi, 0))} = \frac{1}{c(f(\xi))}$$

Idet vi nu kender linjens skæringspunkt med  $x$ -aksen, nemlig  $(x, t) = (\xi, 0)$ , og linjens hældning, nemlig  $\frac{1}{c(f(\xi))}$ , vil et udtryk for  $\omega$  kunne skrives som

$$x = \xi + c(f(\xi))t$$

hvor værdien af  $\phi(\xi, 0)$  på hele kurven konstant vil være  $f(\xi)$  (se iøvrigt figur 3.2).

I vores eksempel tog vi udgangspunkt i et fast  $x$ , nemlig skæringspunktet på  $x$ -aksen  $x = \xi$ . Imidlertid kan  $\xi$  vælges frit på  $x$ -aksen, uden at dette ændrer på resultaterne.

### 3.1.2 Løsningen til den ikke-lineære bølge ligning

I det følgende vil vi analytisk gøre rede for, at  $\phi(x, t) = f(\xi)$  er løsning til den ikke-lineære bølge ligning

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

under hensyntagen til at  $\xi$  kan vælges frit på  $x$ -aksen.

Nedenfor differentieres derfor  $\phi(x, t)$  med hensyn til  $x$  og  $t$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Idet  $\xi$  implicit er givet ved udtrykket  $x = \xi + F(\xi)t$ , hvor  $F(\xi) = c(f(\xi))$ , kan den partielle afledede af  $\xi$  med hensyn til  $x$  udregnes som:

$$1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F(\xi)}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} t$$

som kan omskrives til

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{\partial F(\xi)}{\partial x} t}$$

og den partielle afledede af  $\xi$  med hensyn til  $t$  udregnes som:

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial F(\xi)}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} t + F(\xi)$$

som kan omskrives til

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{F(\xi)}{1 + \frac{\partial F(\xi)}{\partial t} t}$$

Indsættes disse afledte udtryk i udtrykkene for  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  og  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  fås følgende udtryk

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \xi}}{1 + \frac{\partial F(\xi)}{\partial x} t}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial \xi} F(\xi)}{1 + \frac{\partial F(\xi)}{\partial t} t}$$

Ved at indsætte udtrykkene for  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  og  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  i bølgeligningen  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + c(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$  indses det nemt, at  $\phi(x, t) = f(\xi)$  er løsning.

Idet

$$\xi = x - c(f(\xi))t$$

følger det, at  $\phi(x, t) = f(x - c(f(\xi))t) = f(x - c(\phi)t)$  er løsning til den ikke-lineære bølgeligning. Som det blev omtalt tidligere, i forbindelse med den lineære bølgeligning, er løsningen dog kun en beskrivelse af bølgeudbredelsen i retningen voksende  $x$ . Den tilsvarende udledning kunne også gennemføres for en bølge der bevægede sig i den modsatte retning. Det er imidlertid ikke muligt i forbindelse med den ikke-lineære bølgeligning

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c(\phi)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

at faktorisere ligningen, idet udbredeshastigheden  $c$  afhænger af  $\phi$ . Dette betyder at superpositionsprincippet ikke gælder i dette tilfælde.

Bølgens udbredelse og ændring af form fremkommer ved, at hvert punkt på kurven, fastsat af begyndelsesbetingelsen eksempelvis  $\phi(x, 0) = f(x)$ , udbredes horisontalt til tiden  $t$  ved at gå afstanden  $c(\phi)t$  mod voksende  $x$ . Denne afstand er afhængig af, hvilket punkt på kurven man er interesseret i. Altså hvor stor  $\phi$  er. Om bølgetoppen, når bølgen udbreder sig, bevæger sig mod voksende eller aftagende  $x$  afhænger af, om funktionen af  $c(\phi)$  er voksende eller aftagende, altså om differentialkvotienten  $\frac{\partial c(\phi)}{\partial \phi} = c'(\phi)$  er større end eller mindre end nul. Hvis  $c'(\phi) > 0$ , vil høje værdier af  $\phi$  betyde høje værdier af  $c(\phi)$ . Bølgetoppen vil derfor bevæge sig hurtigere end værdier længere nede af bølgen og bølgens front vil derfor blive mere og mere stejl som bølgen udbreder sig mod voksende  $x$ . Hvis  $c'(\phi) < 0$ , vil trykbølgen udbrede sig "omvendt".

### 3.2 Pulsbølgens profilændring ned gennem aorta

Vi skal i dette afsnit beskrive hvorfor pulsølgen ned gennem aorta bliver mere og mere stejl. Som det lige er vist i forrige afsnit, kan en bølgeudbredelse klarlægges ved at finde løsningen til bølgeligningen.

Vi vil i dette afsnit opstille bølgeligningen for aorta, (som er ikke-lineær) via kontinuitets ligningen og bevægelsesligningen. Herefter er det muligt, at undersøge om  $c(\phi)$  er en voksende eller aftagende funktion, og beskrive hvorfor pulsølgen, som funktion af tiden  $t$ , bliver mere og mere stejl.

Vi starter med at opskrive kontinuitetsligningen og bevægelsesligningen for aorta. Kontinuitetsligningen for aorta er givet ved

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

og bevægelsesligningen er givet ved

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right) = - \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

hvor  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{Q^2}{A} \right)$  kaldes for det konvektive led.

Hvis vi antager, at trykket afhænger af arealet  $p = P(A)$  gælder der at

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A}{\rho} P'(A) \frac{\partial A}{\partial x}$$

hvor vi udnytter at  $P'(A) \equiv \frac{\partial p}{\partial A}$ . Desuden har vi følgende definition (Se gennemgang i kapitel 2)

$$\frac{A}{\rho} P'(A) \equiv c(A)^2$$

hvor  $c(A)$  er pulsølgenes hastighed som funktion af arealet et bestemt sted i aorta. Hvis man ser bort fra det konvektive led i bevægelsesligningen for aorta ( $\beta = 0$ ), kan bevægelsesligningen skrives som

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Vi differentierer nu kontinuitetsligningen med hensyn til tiden  $t$  og får

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} = 0$$

Og differentierer bevægelsesligningen med hensyn til  $x$  og får

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x} \right) = 0$$



Ved kombination af kontinuitetsligningen og bevægelsesligningen fås bølgeligningen for aorta

$$\frac{\partial}{\partial x}(c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x}) = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Da  $c$  er en funktion af  $A$  kan bølgeligningen for aorta ikke umiddelbart løses. Vi vil derfor vise, at løsninger til (3.2), også er løsning til (3.1) (som kan løses eksakt)

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Ligning (3.2) differentieres med hensyn til tiden  $t$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(c(A) \frac{\partial A}{\partial x}) = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial c(A)}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial x} + c(A) \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial x} = 0 \quad (3.3)$$

og med hensyn til  $x$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(c(A) \frac{\partial A}{\partial x}) = 0 \quad (3.4)$$

Hvis vi nu ganger ligning (3.4) med  $c(A)$ , og trækker resultatet fra ligning (3.3), hvilket vi kan gøre uden problemer, idet begge ligninger er nul, får vi

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial c(A)}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial x} + c(A) \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial x} - c(A) \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial x} - c(A) \frac{\partial}{\partial x}(c(A) \frac{\partial A}{\partial x}) = 0 \quad (3.5)$$

Vi benytter at

$$\frac{\partial}{\partial x}(c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x})$$

kan omskrives som

$$\frac{\partial}{\partial x}(c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x}) = c(A) \frac{\partial}{\partial x}(c(A) \frac{\partial A}{\partial x}) + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial c(A)}{\partial x}$$

⇕

$$-c(A) \frac{\partial}{\partial x}(c(A) \frac{\partial A}{\partial x}) = c(A) \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial c(A)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x})$$

Dette indsættes i ligning (3.5) og vi får

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial c(A)}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial x} + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial c(A)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x}) = 0$$

⇕

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\partial c(A)}{\partial t} + c(A) \frac{\partial c(A)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x}) = 0$$

Idet vi benytter at  $c(A)$  er en sammensat funktion, omskrives ligningen til

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{\partial c(A)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} + c(A) \frac{\partial c(A)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x}) = 0$$

I de store parenteser kan vi yderligere sætte  $\frac{\partial c(A)}{\partial A}$  udenfor, og vi får dermed

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial c(A)}{\partial A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x}) = 0$$

som ved omrokering kan skrives som

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (c(A)^2 \frac{\partial A}{\partial x}) = - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial c(A)}{\partial A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (3.6)$$

Vi ser nu, at den hyperbolske ligning som står i den store parentes er nul (jævnfør ligning (3.2)). Ovenstående ligning er da netop bølgeligningen (3.1), som vi tidligere konstaterede, vi ikke umiddelbart kunne løse.

Vi har derfor vist, at den ikke-lineære hyperbolske ligning, der beskriver en bølgeudbredelse i et lige elastisk rør mod voksende  $x$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c(A) \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

har samme løsning som den bølgeligning vi søgte løsning en til. Problemet er derfor reduceret til, at vi blot skal løse den ikke-lineære ligning, for at sige noget om, hvordan pulsølgen udbreder sig ned gennem aorta. Dog skal det lige tilføjes, at ligningen ikke forklarer hvorfor pulsølgens amplitude bliver højere, idet alle punkter på bølgen jo udvikles i horisontal retning.

Som det blev udledt tidligere, er én af løsningerne til den ikke-lineære bølgeligning, der beskriver en bølge der bevæger sig i retningen mod voksende  $x$ , et udtryk på formen

$$A(x, t) = f(x - c(A)t)$$

Dette udtryk vil imidlertid vise pulsølgens ændring til et fast  $t$  og varierende  $x$ . For at sammenligne udbredelsen med nogle figurer vi



### 3.3 Beskrivelse af hvorfor amplituden af trykprofilen bliver større

Vi har hidtil i dette kapitel betragtet en meget forsimplet udgave af aorta, bestående af et langt cirkulært rør med konstant tværsnitsareal og konstant elasticitet, som funktion af stedet. Løsningen til bølgeligningen beskrev trykprofilens formændring ned gennem aorta, med konstant amplitude. Det viser sig imidlertid, ud fra eksperimentielle data, at trykprofilen ikke blot bliver mere og mere stejl, men også at trykprofilens amplitude ændrer sig. Man er derfor nødt til, for at få et mere realistisk billede af den virkelige aorta, at gøre løsningen til bølgeligningen mere informationsrig. Dette gøres ved at gøre rørets udformning mere lig den virkelige aorta. En mere realistisk model af aorta fås ved at forsøge at gøre røret konisk og mindre elastisk med afstanden fra hjertet, idet dette stemmer bedre overens med den virkelige aorta.

Den lidt mere komplicerede løsning til bølgeligningen bygger som udgangspunkt på at der ikke sker nogen energidissipation. Fra kapitel 1 ved vi, at aorta er opbygget af glat muskulatur og at der derfor er en ringe gnidning mellem aortavæggen og blodvæsken. Derfor kan forudsætningen om energibevarelse godt forsvares. Energiligningen kan skrives som følger

$$Ap_e^2 = \text{konstant.}$$

$p_e$  er det udøvende tryk på aortavæggen, givet ved  $p_e = p - p_0$  hvor  $p_0$  er trykket ved hydrostatisk trykfordeling, og  $\mathcal{A}$  kaldes for admitansen og defineres som

$$\mathcal{A} \equiv \frac{A}{\rho \cdot c(A)}$$

hvilket beskriver forholdet mellem tværsnitsarealet  $A$  og bølgehastigheden  $c(A)$ . For at kunne redegøre for om admitansen ned gennem aorta er en voksende eller aftagende størrelse, vil vi se på hvad  $\mathcal{A}$  udtrykker. Denne omskriver vi, via udtrykket  $c(A)^2 = \frac{A}{\rho} \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial A}}$ , til at være givet ved

$$\mathcal{A} = \frac{A}{\rho \cdot c(A)} = \frac{A}{\rho} \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A}}} = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial A}}}$$

Tæt på hjertet, hvor compliance er stor, skal der ikke bruges noget særligt stort tryk, før der sker en udvidelse af aorta. Det ses derfor, at lille trykændring, giver en stor admitans. Længere nede i aorta, hvor compliance er mindre, skal der bruges et stort tryk for blot at få en lille tværsnitsarealudvidelse. Dette giver en lille admitans.  $\mathcal{A}$  bliver således mindre med afstanden fra hjertet.

Løsningen til bølgeligningen givet ved  $g(t - \frac{1}{c(A)}x)$  beskrev bølgeudbredelsen i et rør med konstant  $c(A)$ . Hvis man skal simulere puls bølgeudbredelsen i et rør med varierende tværsnitsareal og compliance, bliver vi nødt til at diskretisere aorta i små uniforme rør. Ved at definere rørlængderne til infinitesimal små størrelser, er det herefter muligt at integrere over den samlede længde og få den samlede bølgeudbredelse. Dette giver nedenstående udtryk,

$$g(t - \int_0^x \frac{1}{c(A)} dx)$$

Herefter opstilles via energiligningen følgende udtryk [Lighthill, 89]

$$p_e = \sqrt{\frac{\mathcal{A}(0)}{\mathcal{A}(x)}} g(t - \int_0^x \frac{1}{c(A)} dx)$$

hvor  $g(t)$  er bølgeformen ved  $x = 0$  og  $\int_0^x \frac{1}{c(A)} dx$  er den tid det tager bølgen at bevæge sig fra 0 til  $x$ . Det ses, at hvis vi betragter det simple tilfælde hvor aorta er et uniformt rør med samme tværsnitsareal, så er admitansen ved hjertet  $\mathcal{A}(0)$  og langt fra hjertet  $\mathcal{A}(x)$  den samme, altså konstant. Desuden er  $\frac{1}{c(A)}$  konstant, idet tværsnitsarealet udvider sig lige meget ved voksende  $x$ . Derfor bliver løsningen som den vi kender

$$p_e = g(t - \frac{1}{c(A)} \int_0^x dx) = g(t - \frac{1}{c(A)} x)$$

Grunden til, at man skal integrere over  $x$ , er netop fordi tværsnitsarealet ikke er konstant over  $x$ , men kun over de enkelte rørstykker. Dette gør at hastigheden for hvert rørstykke er forskellig, men konstant i hver rørsektion.

For endelig at kunne beskrive trykprofilens amplitudeændring, skal vi blot vurdere på forholdet mellem admitanserne, som netop er amplitudens ændring af trykprofilen ned gennem aorta.

$$\sqrt{\frac{A(0)}{A(x)}} = \sqrt{\frac{A(0,t)}{A(x,t)}} \sqrt{\frac{c(A(x,t))}{c(A(0,t))}}$$

Det ses at første kvadratrod er større end 1, idet  $A(0,t) > A(x,t)$ . Anden kvadratrod er også større end 1, idet  $c(A(x,t)) > c(A(0,t))$ . Vi kan derfor se, at amplituden for større og større  $x$ , vil vokse ned gennem aorta. Det vil sige, at trykprofilen ned gennem aorta bliver højere og højere (større amplitude), samtidig med at den som tidligere skrevet, bliver mere og mere stejl<sup>4</sup>. Dette er helt i overensstemmelse med de eksperimentelle data på området.

---

<sup>4</sup>I *Partial Differential Equation in Biology, Lecture notes from The Courant Institute (1976)* har C.S.Peskin mere uddybende teoretisk beskrevet, hvordan at pulsølgen bliver mere og mere stejl, ud fra bølgeligningen og at trykprofilens amplitude bliver større.



## Kapitel 4

# MOUSE og tilpasning af vores aorta-model

I dette kapitel følger en generel beskrivelse af MOUSE, og en nærmere gennemgang af de dele af MOUSE, der har relevans for simuleringen af blodgennemstrømning i aorta. I sidste del af kapitlet vil vi gøre rede for de tilpasninger af aorta-modellen der er nødvendige for, at MOUSE kan benyttes til simuleringen.

I 1985 markedsførte Dansk Hydraulisk Institut (DHI) software pakken MOUSE. MOUSE modellerer afstrømning til kloaksystemer i byområder, og selve strømningen i kloakrørene. I byområder er det indholdet af bakterier, der er én af de største trusler mod vandkvaliteten. I forbindelse med kraftige regnskyld er der desuden problemer med overbelastning af rensningsanlæg. Disse problemer er blandt andet nogle af grundene til, at der idag udvikles mere og mere komplekse modeller over kloaksystemer, for at forbedre kendskabet til strømforløbet i ekstreme situationer og begrænse forureningen. [Danish Hydraulics, 93]

Siden 1985 er MOUSE blevet udvidet med adskillige ekstra moduler, og benyttes idag af et stort antal kommuner i Danmark, samt i mange andre områder uden for Danmarks grænser.

MOUSE kan anvendes på et hvilket som helst rørsystem med fri vandoverflade, samt på fuldtløbende rør under tryk. Programmet fås i en standard version (STANDARD MOUSE), hvortil der kan tilføjes et antal ekstra moduler. Til vores simulering benytter vi kun STANDARD MOUSE, som er tilstrækkelig når det drejer sig om et så forholdsvist



simpelt rørsystem som dét vi vil benytte os af (et antal rørsektioner i lige forlængelse af hinanden og ét væskeinput)<sup>1</sup>.

MOUSE indeholder to modeller - en afstrømningsmodel (*run-off* model) og en rørstrømningsmodel (*pipe-flow* model) som tager udgangspunkt i de indtastede data. Først og fremmest er det data, der vedrører selve strukturen af kloaksystemet (rør, brønde, pumper mm.). Derudover er det for *run-off* modellen data, der vedrører oplandet til brøndene og tidsserier over randbetingelser eksempelvis nedbørsmængder. Til *pipe-flow* modellen benyttes, udover de strukturelle data, data der har med de hydrauliske randbetingelser at gøre (vandhøjder i udløb og indstrømning til brønde).

Resultaterne af modelberegningerne kan ses enten i tabelform eller i form af diagrammer, typisk en tidsserie over en rørsektions vandhøjde eller flow et bestemt sted i kloaksystemet.

Til simulering af blods strømning i aorta benytter vi *pipe-flow* modellen, og kun for strømninger i fuldtløbende rør.

## 4.1 Pipe-flow modellen

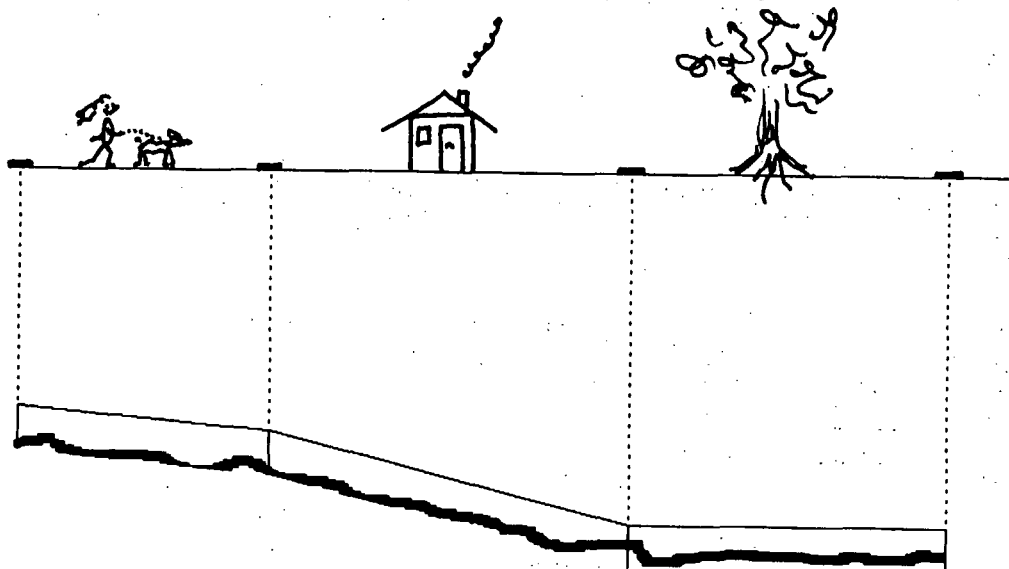
Et kloaksystem i MOUSE består grundlæggende af et antal brønde, hvorimellem et vilkårligt antal rørsektioner forbindes. Brøndene defineres ud fra et sæt koordinater og niveauet af henholdsvis bunden og toppen af brønden.

Rørsektionerne er defineret som et lige rør lagt mellem de to brønde. Rørsektionernes længde er implicit givet ved afstanden mellem brøndene. For hver rørsektion angives dets geometriske struktur (cirkulært, "æggeformet", "dansk æggeformet" ("rundt" æg) eller kvadratisk), diameteren for røret, rørets hældning i forhold til vandret og rørets materiale. Arten af rørmaterialet har betydning for friktionen i røret og angives i MOUSE ved et Manningtal (se senere i kapitlet).

I det tilfælde hvor simuleringen angår strømninger i fuldtløbende rør under tryk, er der i programmet indlagt en fiktiv lodret spalte i toppen af røret (se senere). Et givent overtryk i rørene ville, hvis rørene var

---

<sup>1</sup>Når vi i det følgende omtaler MOUSE, er det STANDARD MOUSE version vi henviser til.



**Figur 4.1:** Eksempel på profil af en kloaksektion.  
Frit efter [MOUSE-manual, 93].

elastiske og væsken usammentrykkelig, forårsage en tværsnitsudvidelse. Dette er der i programmet kompenseret for ved, at vandet i stedet stiger op i spalten og på denne måde udvider tværsnitsarealet. Spaltens bredde afhænger af hvor elastisk rørmaterialet er. Kloakrør er ikke særlig elastiske, hvorfor spaltebredden i MOUSE er sat til 1% af rørets diameter. Der er imidlertid også en mulighed for at definere en vilkårlig rørgeometri og i fuldtløbende rør, en vilkårlig spaltegeometri. Det er denne måde at definere rørsektionerne på, som vi benytter os af i vores modellering.

Udover rør og brønde hører der til et kloaksystem endvidere ét eller flere udløb, ellers vil vandet hobe sig op og ikke komme ud af systemet. Dette kan imidlertid også kontrolleres via pumper, eller overløbsbygværk. Pumpefunktionen kan defineres som værende konstant (en konstant væskemængde pumpes væk pr. tidsenhed), eller den kan sættes til at gå i gang når en defineret maksimal vandstand i brønden er nået. Pumpen kan eventuelt have relevans for os, i forbindelse med forgreninger til aorta.

Efter således at have defineret kloaksystemets struktur, indtastes randbetingelserne som i vores tilfælde vil være en tidsserie over et vandinput i den første brønd, samt en vandhøjde i udløbet. Hvis vandhøjden i udløbet sættes højere end den største rørdiameter, sikres fuldtløbende rør

i hele systemet, idet vandhøjden i udløbet danner grundlag for begynderens vandhøjden horisontalt i hele rørsystemet. Det er dog også muligt at definere en tidsserie over vandhøjden i udløbet.

Randbetingelserne og de strukturelle data, danner grundlag for pipe-flow simuleringen.

Resultatet af simuleringen kan ses i form af

- Tabeller over udregnede data for hele simuleringen.
- Tidsserier af beregnede værdier for vandhøjden, flow'et og hastigheden i brøndene og i udvalgte punkter i rørsektionerne (i starten af røret og minimum 3 steder inde i røret).
- Inflow og outflow volumen, og differencen mellem inflow og outflow (som helst skal være nul, ifølge kontinuitetsligningen), præsenteret i form af tabeller og grafer.
- En profil af hele rørsystemet, fra bunden af rørene til jordoverfladen, og en animeret kurve der indikerer vandhøjden i rørsystemet, i den tidsperiode som programmet har simuleret i.

## 4.2 Betingelser for vellykket simulering med pipe-flow modellen

Pipe-flow modellen baserer sine udregninger på kontinuitets- og bevægelsesligningerne, der blev udledt i kapitel 2. De ligninger der gælder for strømninger i rør med fri overflade, generaliseres til også at gælde for strømninger i fuldtløbende rør. Som det blev vist tidligere, gøres dette ved at indføre en fiktiv spalte i toppen af røret. Spaltens bredde afhænger af væskens og rørets elastiske egenskaber.

Generaliseringen af ligningerne til også at gælde for fuldtløbende rør er hensigtsmæssig, idet der på denne måde ikke er forskel på, om programmet skal simulere strømninger med fri vandoverflade eller under tryk i fuldtløbende rør.

For at beregningerne skal være gældende, er der gjort en del forudsætninger.

- Hældningen  $I_0$  af røret skal være lille (mindre end 1%, jævnfør kapitel 2), hvilket gør at strømmingen er næsten horisontal. Her ved minimeres tyngdekraftens påvirkning af væskens strømning. Hældningen af røret specificeres i programmet implicit ved defineret af brøndenes dybde.
- Bølgelængden skal være stor i forhold til vanddybden, hvorved strømlinierne bliver næsten parallelle med bunden. Dette leder til, at trykfordelingen kan antages at være hydrostatisk.
- Rørets friktion bliver i programmet defineret ved indtastning af rørmaterialets "ruhed", som er udtrykt ved rørets Manningtal ( $M$ ). Manningtallet er givet ved

$$M = \frac{25.4}{k^{1/6}} \quad [m^{1/3}/s]$$

hvor  $k$  er en "ækvivalent sand-ruhed", der henviser til størrelsen af de sandkorn, som påklæbet på væggene i et tilsvarende glat rør, ville give samme modstand som den virkelige rørvæg [Pedersen, 88]. Jo mindre Manningtal, des større ruhed har røret, og des højere tryk er der derfor påkrævet, for at drive vandet gennem røret. Manningtallet i MOUSE varierer i intervallet 10 – 120. Et Manningtal på 120 svarer til ruheden i et nyt galvaniseret stålrør, og ca. 40 svarer til et naturligt vandløb [Pedersen, 88].

I MOUSE udregnes gnidningen via *Manning-formlen*, som er en approksimeret formel, der benyttes til bestemmelse af gnidningen i ru rør. Manning-formlen er givet ved

$$v = M \cdot R^{2/3} \cdot I_f^{1/2}$$

hvor  $v$  er væskens hastighed,  $R$  er den hydrauliske radius (som er  $\frac{A}{L}$ , hvor  $L$  er den våde perimenter) og  $I_f$  er friktionshældningen, som ved vandrette rør er ensbetydende med hældningen af energilinien.

- Et sidste punkt der er værd at nævne er, at der i programmet er fastlagt visse rammer for værdierne af de indtastede data. Alle input skal angives i SI-enheder. Dette er intet problem når modellen benyttes til at simulere kloaksystemer, som den jo er udviklet til. Imidlertid giver denne fastlæggelse af størrelsen af de indtastede data et betydningsfuldt problem når MOUSE benyttes til at simulere aorta, med dimensioner meget mindre end kloakrør. Dette omtales nærmere i afsnit 4.3.2.

Analytisk løsning af ligningerne i programmet er kun mulig i få tilfælde med et begrænset anvendelsesområde. Ligningerne i MOUSE løses derfor numerisk. Programmet udregner variationen af vanddybden  $y$  og flow'et  $Q$  i hele rørsektionen som funktion af tiden, udfra de indtastede randbetingelser.

I *pipe-flow* modellen eksisterer der tre forskellige hydrauliske beskrivelser af flow-forløbet: *Kinematic wave model*, *Diffusive wave model* og *Dynamic wave model*. Alle tre kan benyttes til at simulere strømmingen i kloakrør og udvælgelsen sker på baggrund af det problem der skal analyseres.

- *Kinematic wave model*. Flow-forholdende i stejle, delvist fyldte rør, hvor accelerationen er forholdsvis lille og strømmingen næsten uniform, kontrolleres hovedsagligt af balancen mellem tyngdekraften og friktionskræfter [MOUSE-manual, 93]. I bevægelsesligningen er der derfor set bort fra inertikrafter og trykkrafter. DHI råder brugeren til at benytte denne simuleringsmodel med omtanke [MOUSE-manual, 93].
- *Diffusive wave model*. Denne model tager udover tyngdekraften og friktionskræfter også højde for trykkrafter. Herved er det muligt at simulere tilbagestrømning [MOUSE-manual, 93].
- *Dynamic wave model*. Denne model tager højde for alle kræfter, hvilket vil sige at modellen regner på hele bevægelsesligningen. Dette betyder, at denne model er den mest præcise, når det drejer sig om at simulere overtryk og tilbagestrømning af vand [MOUSE-manual, 93]. Ligeledes angiver DHI i manualen til MOUSE, at den dynamiske bølgemodel er bedst til at simulere pludselige ændringer i flow.

Vi benytter den dynamiske bølge model, idet den er i stand til at simulere strømninger i fuldtløbende rør, og derudover er den bedre end de to andre modeller til at simulere pludselige ændringer i strømmingen.

Modelberegningerne begrænses ved at definere simuleringstiden. Simuleringen angives i hele minutter og har betydning for hvor lang en tidsperiode computeren skal regne på. Derudover angives længden af tidsskridtene (i sekunder), som har betydning for de numeriske beregningers nøjagtighed.

Indlagt i pipe modellens kørsel er den såkaldte *Hot-start*, som gør det muligt at starte en ny simulering, med randbetingelser, der svarer til slutdata fra en tidligere kørsel. Denne facilitet kan være relevant i vores simulering, i det øjeblik vi er interesserede i, at sende en pulsølge afsted i forlængelse af den foregående. Det kan imidlertid også simuleres ved at lade flow'ets tidsserie være 3 pulsølger, hvilket i praksis kan være smart da *Hot-start* simuleringen kun kan startes efter et helt antal minutter.

### 4.3 Tilpasning af aorta-modellen til MOUSE

Hovedpulsåren aorta og en kloak synes umiddelbart vidt forskellige, men set fra en overordnet synsvinkel har de mange ligheder. Begge kan beskrives som et rørsystem, hvori der strømmer en væske. Langs aorta er der en række forgreninger, der leder blodet ud til forskellige dele af kroppen. På samme måde vil der ofte være en række mindre tilledninger til en hoved kloakledning. Man kan ligeledes opfatte et kraftigt regnskyl og den dermed følgende forøgelse af strømningshastigheden, som en analogi til hjertets pulseren.

Der er selvfølgelig også mange punkter hvor aorta ikke ligner en kloak særlig meget, og det er her vi bliver nødt til at lave nogle ændringer og approksimationer for at kunne benytte MOUSE til at simulere aorta.

I det følgende vil vi beskrive, hvordan vi får tilpasset vores model af aorta til MOUSE.

#### 4.3.1 Diskretisering af vores model

Vi vil simulere aorta ved i programmet at definere et rør, svarende til vores model af aorta, og give et vandinput til den første brønd, der svarer til slagvolumenet fra hjertet.

Aorta er et konisk rør, og dette forhold har stor betydning for trykprofilens udseende ned gennem aorta. Det er imidlertid ikke muligt at definere et konisk rør i MOUSE. Vi har derfor været nødt til at dele

vores model af aorta op i en række kortere rør med mindre og mindre diameter. Der er altså tale om en diskretisering.

Når et elastisk rør som aorta udvider sig under øget tryk, vil der være et bestemt forhold mellem arealforøgelsen og trykstigningen ( $P'(A) = \frac{\partial p}{\partial A}$ ). Rørens geometri i MOUSE skal derfor modsvare forholdet mellem trykstigning og arealforøgelse i aorta.

Forholdet mellem arealforøgelse og trykstigning fås i MOUSE ved at definere bredden af den fiktive spalte. Fra kapitel 2 har vi et udtryk for spaltens bredde, der tager hensyn til aortas tværsnitsarealudvidelse i forhold til en given trykstigning.

$$B = \frac{\rho g}{P'(A)}$$

hvor  $\rho$  er densiteten,  $g$  er tyngdeaccelerationen og  $P(A)$  er trykkets afhængighed af arealet.

Ved at benytte  $B$  som beregningsgrundlag for spaltens bredde, kan vi således benytte MOUSE *pipe-flow* model til at beskrive blodets strømning i aorta.

For at kunne udregne spaltens bredde, er det nødvendigt at kende  $P'(A)$ . Fra kapitel 1 har vi, at aortas tværsnitareal kan skrives som

$$A(p, x) = A(p_0, 0)e^{-\alpha x + (p-p_0)/(\rho c(p, x)c(p_0, x))} \quad (4.1)$$

hvor  $c(p, x)$  er givet ved  $c(p, x) = (k_0 + k_1 p)(1 + nx)$  cm/s.

Ligning (4.1) omskrives til

$$A = A_0 \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{\frac{p-p_0}{\rho c c_0}}$$

hvor  $A = A(x, t)$ ,  $A_0 = A(p_0, 0)$ ,  $c = c(p, x)$  og  $c_0 = c(p_0, x)$  og det er nu en simpel sag at differentiere arealet med hensyn til trykket

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} (A_0 e^{-\alpha x} e^{\frac{p-p_0}{\rho c c_0}}) = A_0 e^{-\alpha x} \frac{\partial}{\partial p} (e^{\frac{p-p_0}{\rho c c_0}}) = \\ &A_0 e^{-\alpha x} e^{\frac{p-p_0}{\rho c c_0}} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p-p_0}{\rho c c_0} \right) = A \frac{1}{\rho c_0} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p-p_0}{c} \right) = \\ &A \frac{1}{\rho c_0} \left( \frac{c - (p-p_0)k_1(1+nx)}{c^2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \frac{1}{\rho c_0} \left( \frac{c + (-pk_1 + p_0k_1)(1 + nx)}{c^2} \right) &= \\
 A \frac{1}{\rho c_0} \left( \frac{(k_0 + k_1p - pk_1 + p_0k_1)(1 + nx)}{c^2} \right) &= \\
 A \frac{1}{\rho c_0} \left( \frac{(k_0 + p_0k_1)(1 + nx)}{c^2} \right) &= A \frac{1}{\rho c_0} \left( \frac{c_0}{c^2} \right) = A \frac{1}{\rho c^2}
 \end{aligned}$$

Udtrykket for  $B$  kan derfor skrives som

$$B = \frac{\rho g}{\frac{\partial p}{\partial A}} \Leftrightarrow B = \frac{gA}{c^2}$$

Vi har altså, at kvadratet på pulshastigheden er omvendt proportional med spaltens bredde, som implicit er et udtryk for mediets eftergivelighed. Som det ses, vil en lille eftergivelighed modsvares af en stor pulsølgehastighed, hvilket stemmer godt overens med vores intuition om, at pulshastigheden i et stift materiale (f.eks. jern) er større end i et blødt materiale (f.eks. gummi).

Hvis vi regner med, at der er et gennemsnitstryk på ca. 100mmHg i aorta, kan vi nu, ud fra de oplyste konstanter fra kapitel 1, udregne pulsølgehastigheden forskellige steder i aorta (idet hastigheden afhænger af afstanden  $x$ ). Eftersom aorta bliver mindre eftergivelig med afstanden fra hjertet, bliver bredden af spalten selvfølgelig tilsvarende mindre.

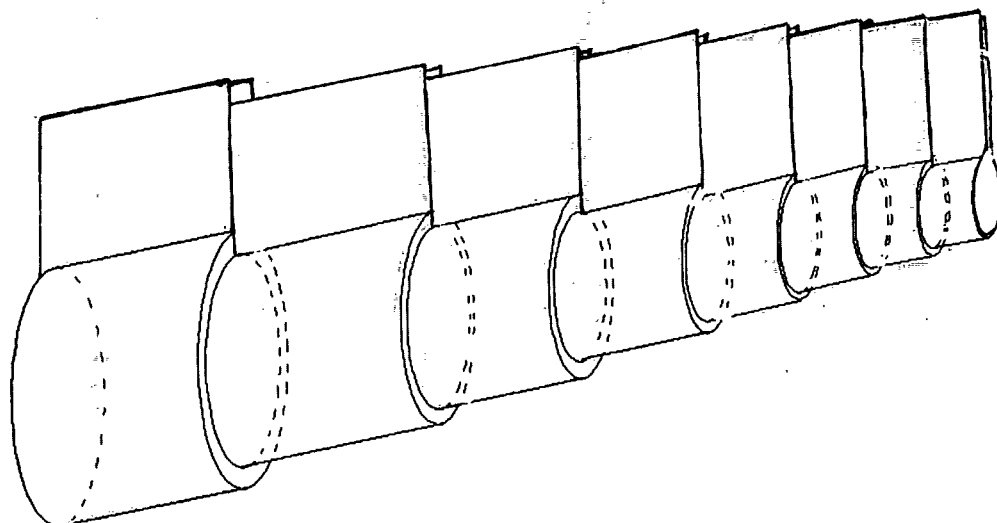
I figur 4.2 ses vores diskretiserede model af aorta, hvis struktur umiddelbart passer til det, der er muligt at definere i MOUSE.

### 4.3.2 Skalering af data fra aorta

MOUSE er som bekendt designet til at simulere strømning i kloaksystemer, hvor rørdiameter, længde mm. er væsentligt forskellig fra dimensionerne i aorta.

Denne forskel i dimensioner skaber problemer, idet vores data ligger uden for det interval programmet accepterer. Derfor er vi nødt til, at skalere vores data så de kommer inden for det interval programmet accepterer.





**Figur 4.2:** Diskretiseret model af aorta. Tværsnitsarealet mindskes med afstanden fra hjertet. Derudover indsnævres spalten, i relation til aortas mindre eftergivlighed med afstanden fra hjertet.

For at bevare sammenhængen mellem model og virkelighed skal Froudes modellov være opfyldt. Froudes tal ( $\mathcal{F}$ ) er givet ved

$$\mathcal{F}^2 = \frac{l^2}{g h t^2}$$

hvor  $l$  er en karakteristisk længde,  $g$  er tyngdeaccelerationen,  $t$  er en karakteristisk tid og  $h$  er en karakteristisk højde. Froudes modellov siger, at dette tal skal være det samme i modellen ( $M$ ), som i naturen ( $N$ ).

Vi definerer nu følgende skaleringskonstanter

- $\lambda_l$  er skaleringskonstanten for  $xz$ -retningen (længden og bredden).
- $\lambda_h$  er skaleringskonstanten for  $y$ -retningen (højden).
- $\tau$  er skaleringskonstanten for tiden.
- $\zeta$  er skaleringskonstanten for tyngdeaccelerationen.

Fra Froudes modellov har vi nu at

$$\mathcal{F}_N^2 = \mathcal{F}_M^2$$

$\Downarrow$ 

$$\frac{l_N^2}{g_N h_N t_N^2} = \frac{l_M^2}{g_M h_M t_M^2}$$

 $\Downarrow$ 

$$\frac{g_M h_M}{g_N h_N} = \left(\frac{l_M}{l_N}\right)^2 \left(\frac{t_N}{t_M}\right)^2$$

Idet værdierne fra modellen nu defineres som værdien i naturen, ganget med den relevante skaleringskonstant, fås

$$\frac{\zeta g_N \lambda_h h_N}{g_N h_N} = \left(\frac{\lambda_l l_N}{l_N}\right)^2 \left(\frac{t_N}{\tau t_N}\right)^2$$

 $\Downarrow$ 

$$\zeta \lambda_h = \left(\frac{\lambda_l}{\tau}\right)^2$$

Denne ligning angiver forholdet mellem vores skaleringskonstanter. Der er som det ses fire værdier i modellen vi kan variere. Vi har altså rig mulighed for at skalere vores empiriske data for aorta, og dermed tilpasse aortas dimensioner til kloakmodellen, hvorefter simuleringerne kan begynde.



## Kapitel 5

# Design og evaluering af simuleringer

Vi vil nu gennemgå, hvordan vi har designet vores simuleringer, og begrunde de valg vi har foretaget. Dernæst vil vi beskrive, hvad vi havde forventet at få ud af simuleringerne og til sidst, hvad vi egentligt fik ud af dem. Data vedrørende rørdesign og indstrømning kan ses i bilag 1. Resultater fra simuleringerne med MOUSE kan ses i bilag 2.

### 5.1 Design af simuleringer

Som det blev beskrevet i kapitel 4, er det nødvendigt at skalere data for aorta for at kunne indtaste dem i MOUSE, og vi fandt frem til følgende forhold mellem skaleringskonstanterne

$$\zeta \lambda_h = \left(\frac{\lambda_l}{\tau}\right)^2$$

hvor  $\zeta$  er skaleringskonstanten for tyngdeaccelerationen,  $\lambda_h$  er skaleringskonstanten for højden,  $\lambda_l$  er skaleringskonstanten for længden og bredden og  $\tau$  er skaleringskonstanten for tiden.

Den mindste tidsenhed vi kan indtaste i MOUSE er 1 s, hvilket er uhensigtsmæssigt for os, da hjertets systole kun tager ca. 0.14 s (se figur 5.4). Vi vil derfor gerne have stor skalering af tiden, hvilket vil sige så stort  $\tau$  som muligt. Samtidig hermed vil vi gerne have en stor skaleringsfaktor for længden, da man i MOUSE helst ikke må have

rørstykker, der er mindre end 15 m lange, da dette kan give ustabilitet i beregningerne. Skaleringsfaktoren for længden og bredden begrænses dog af, at der er et øvre loft for, hvor store rørens tværsnitsarealer kan være. Vi har valgt at skalere højden forskelligt fra længden og bredden, fordi spaltens højde, under hensyntagen til vores andre ønsker for skaleringen, ellers ville blive for lille, i forhold til den trykstigning simuleringen ville give.

Vi har ved hjælp af "trial and error" metoden fundet frem til følgende skaleringskonstanter, der opfylder Froudes modellov og gør os i stand til at indtaste data fra aorta i MOUSE.

- $\zeta = \frac{1}{2}$
- $\lambda_h = 2$
- $\lambda_l = 440$
- $\tau = 440$

Under normale omstændigheder skal man, når man skalerer højde og længde forskelligt, kompencere ved at ændre på friktionen i modellen. I vores tilfælde burde friktionen sættes ned, men da vi i forvejen har tænkt os at vælge programmets laveste friktion, kan vi ikke gøre mere ved det.

At  $\lambda_l$  og  $\tau$  er ens er hensigtsmæssigt, idet vi så kan aflæse direkte på hastighedsprofilen.

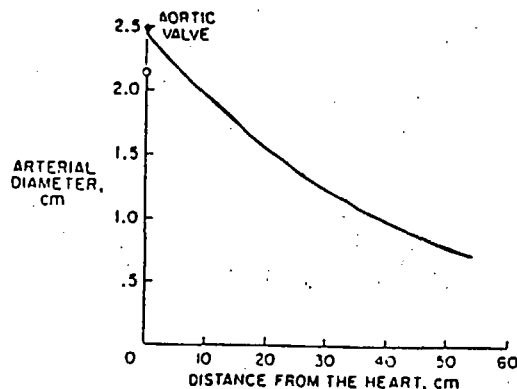
Vi har nu bestemt de skaleringskonstanter, der er nødvendige for at kunne indtaste vores data i MOUSE, og vi kan gå videre til designet af selve det rørsystem, hvori pulsølgen i aorta skal simuleres.

Aorta er med god tilnærmelse et konisk rør, men som det blev beskrevet i kapitel 4, er det ikke muligt at definere et konisk rør i MOUSE. Vi må derfor opdele vores rør i flere rørstykker, der gradvist får mindre og mindre diameter.

Figur 5.1 viser aortas diameter som funktion af afstanden fra hjertet givet ved udtrykket<sup>1</sup>

$$d(x) = 2.43e^{-0.0225x}$$

<sup>1</sup>Udtrykket svarer til udtrykket i kapitel 1 for arealet som funktion af afstanden fra hjertet, og konstant tryk på 100mmHg.



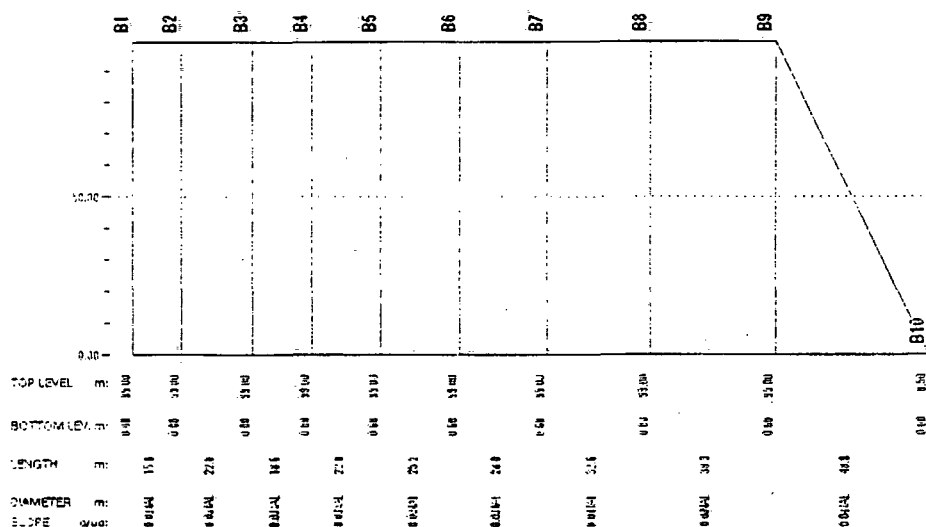
**Figur 5.1:** Aortas diameter som funktion af afstanden fra hjertet.  
[Anliker, 71]

Diskretiseringen af aorta kan foretages på flere forskellige måder. Vi har valgt at opdele rørene således, at rørenes diameter ændres med den samme størrelse ned gennem rørsystemet. Herved får vi flest rør, der hvor diameteren ændrer sig meget og færre hvor ændringen er mindre. Vi har valgt at sætte ændringen af diameteren fra rør til rør til 0.2 cm. Idet aortas samlede længde er 54 cm, får vi på denne måde ialt 9 rørstykker.

Når man som vi, vælger at designe rørenes geometri selv, skal man i programmet angive rørets "våde" areal  $A_r$ , spaltens bredde  $B$  og den hydrauliske radius ( $\frac{A}{L}$ ) for stigende vandhøjde  $Y$ . Efter at have skaleret rørsektionernes data (længde og diameter) beregnede vi de dertilhørende værdier for rørsektionernes geometri. Som omtalt i kapitel 2 har vi valgt at designe modellen af aorta som et konisk cirkulært rør med en spalte i toppen. Ved skalering blev rørsektionernes cirkulære tværsnitsareal dog til en meget flad ellipse, hvorfor vi tilnærmede rørsektionernes tværsnitsareal til et rektangel.

I MOUSE angav vi de relevante data for rørenes geometri ved  $Y = 0$ ,  $Y = d$  og  $Y = H$ , hvor  $d$  er rørsektionens diameter<sup>2</sup>, og  $H$  er  $y$ -værdien i toppen af spalten, som skal være større end den maksimale vandhøjde i spalten under simuleringen.

<sup>2</sup>Rørets diameter er her gennemsnittet af diameteren for det aktuelle rørstykke af aorta.



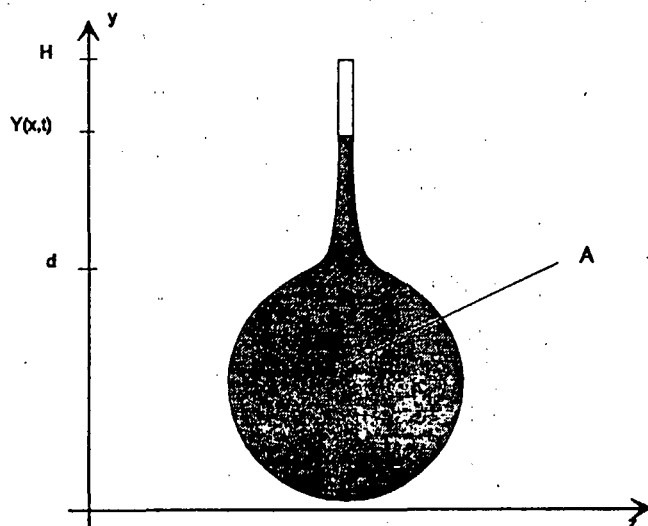
**Figur 5.2:** Rørsystemets layout i MOUSE. B1, B2, osv er betegnelserne for brøndene. Nederst ses data for top (jordoverfladen) og bund af brøndene samt rørens længde og hældning.

Arealet angav vi ved  $Y = 0$  til at være 0, ved  $Y = d$  til at være arealet af den skalerede cirkel approksimeret ved et rektangel ( $A_r$ ) og ved  $Y = H$  til at være arealet af rektanget plus arealet af spalten  $A = A_r + (H - d) \cdot B$ . Rørsektionernes spaltebredde udregnede vi som beskrevet i kapitel 4. Den våde perimeter  $L$  udregnede vi udfra samme approksimation af røret som ovenfor.

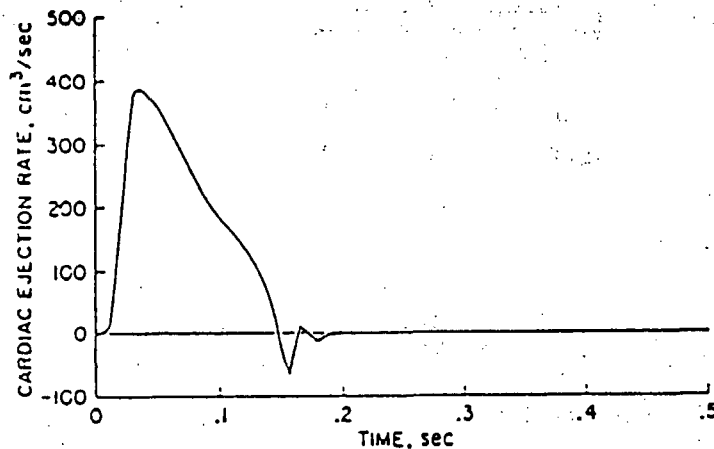
Pulsbølgen i aorta kommer, som beskrevet i kapitel 1, som et resultat af, at hjertet pumper blod ud i aorta. Pulsbølgen i vores model bliver simuleret ved at diskretisere bølgen i figur 5.4. Tiderne blev valgt på en måde således, at vi fik kurvens karakteristiske form bevaret.

Under simuleringerne er det vigtigt, at vi hele tiden har fuldtløbende rør, hvis vores model skal passe til aorta. Dette sikres ved at definere en mindste vandhøjde i udløbet for vores rørsystem i MOUSE, som er lidt højere end rørens diameter. Vandet står lidt op i spalten, hvorved der dannes et overtryk i rørene. Dette overtryk kan sammenlignes med det diastoliske tryk i aorta.

Vi har nu beskrevet hvordan vores rørsystem, samt input og output til dette er bestemt og defineret i MOUSE. Af praktiske årsager blev alle data indtastet i et regneark, og dette er at finde i bilag 1. Vi kan nu gå videre til at beskrive, hvad vi forventer os af simuleringerne.



**Figur 5.3:** Skematisk tegning af røret med spalten. I MOUSE angiver vi arealet, bredden og den hydrauliske radius til højderne  $Y = 0$ ,  $Y = d$  og  $Y = H$ .



**Figur 5.4:** Hjertets slagvolumen for en hund, målt som en funktion af tiden [Anliker, 71]. Se iverigt kapitel 1.

## 5.2 Vores forventninger

I kapitel 1 satte vi os nogle forventninger til pulsølgen udbredelse ned gennem aorta, og ligeledes til blodets flow og hastighedsprofil.

Vores evalueringskriterie for anvendeligheden af MOUSE ved simuleringer af aorta, var først og fremmest om den kunne skabe en trykprofil, der lignede den på figur 1.5 skitserede. Figuren viser et tryk, som svinger mellem 80 og 120 mmHg hvilket svarer til et udsving fra 1.08 til



1.62 mH<sub>2</sub>O. Trykforskellen på 40 mmHg svarer altså til 0.54 mH<sub>2</sub>O og skaleret med hensyn til tyngdekraften ( $\zeta = \frac{1}{2}$ ) får vi en forventet trykstigning på 1.1 mH<sub>2</sub>O. Når afstanden til hjertet øges, vokser udsvinget mellem det systolske og det diastolske tryk, trykprofilen bliver stejlere og dens amplitude øges.

Trykbølgens hastighed er en stigende funktion af trykket og afstanden fra hjertet. Et lineært tilnærmet udtryk for sammenhængen, omtalt i kapitel 1, er givet ved

$$c(p, x) = (97 + 2.03p)(1 + 0.02x) \text{ cm/s}.$$

Man kan få et overslag for trykbølgens udbredelseshastighed ved at indsætte middeltrykket på 100 mmHg og  $x$ -værdien for midten af aorta dvs. 27 cm, i ovenstående udtryk. Herved får man, at pulsølgenes hastighed i gennemsnit vil være på 4.6 m/s. I vores simuleringer vil dette svare til, at pulsølgen vil være ca. 54 s om at nå enden af røret, da dette er 248 m langt<sup>3</sup>.

Blodets gennemsnitshastighed er på 0.30 m/s, og er faldende ned gennem aorta. Med et slagvolumen, der skaleret er på 11.6 m<sup>3</sup> forventes flow'et målt tæt på hjertet, at give en graf som figur 5.4. Figuren viser, at flow'et stiger kraftigt fra nul og toppe inden for 0.05 s, ved en værdi på ca. 400 cm<sup>3</sup>/s. Ved at skalere fås et forventet maksimum på 0.35 m<sup>3</sup>/s inden for 22 s. Herefter forventes flow'et at falde til 0 m<sup>3</sup>/s og være konstant indtil næste pulsølge.

### 5.3 Resultaterne af simuleringerne

I de følgende afsnit vises resultatet af simuleringerne med MOUSE. De skal absolut ses som toppen af isbjerget, idet der var mange begyndelsesvanskeligheder. Manualen til MOUSE er skrevet til læsere, der antages at have en hvis indsigt i, hvordan et kloaksystem fungerer. Derudover er der altid, ved begyndelse på noget nyt, en opstartperiode, hvor intet fungerer, og intet synes at have sammenhæng med dét, der var forventet. Overskriften på følgende afsnit: *første simulering*, skal derfor tages med et gran salt.

<sup>3</sup>Der er lagt 5 m til det første rør, da vi ellers får et rør der er mindre end 15 m langt.

### 5.3.1 Første simulering

Ved at anvende data fra regnearket i bilag 1 udførte vi den første simulering. Vandstanden i udløbet blev sat til 0.5 m, da vi så har konstant fyldte rør, og Manningtallet blev sat til det størst mulige man kan angive i MOUSE, nemlig 120, hvilket giver den mindst mulige friktion.

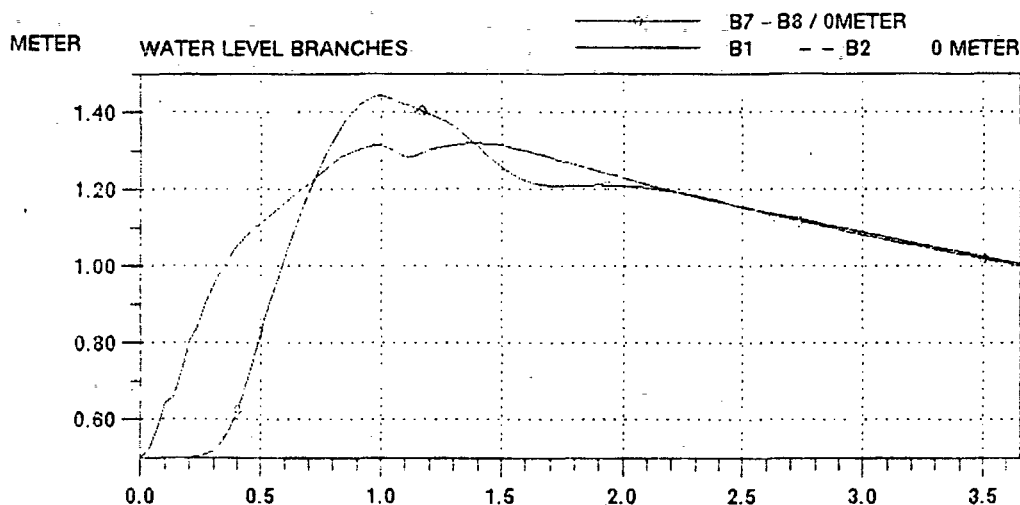
Resultatet af simuleringerne kan ses på figurerne 5.5 til 5.7. Figureerne viser for hastigheden og flow'ets vedkommende, profiler målt som funktion af tiden i første og sidste rørstykke i modellen. Vandstandens ændring ned gennem røret har vi dog valgt at illustrere ved profiler fra første og syvende rørstykke. Dette problem skyldes den måde vi har defineret udløbet på, og det at MOUSE lader de sidste profiler flade ud, så de til sidst kommer på niveau med vandhøjden i udløbet. Da dette er en egenskab ved programmet, der ikke har nogen relation til pulsølgen i aorta, har vi valgt at se bort fra vandhøjderne målt i de sidste rørstykker. Fejlen kunne være undgået hvis vi havde defineret udløbet anderledes, men dette vil vi behandle nærmere i perspektivering. Iøvrigt skal det bemærkes, at tidsskalaen på graferne går til 3.66 min., hvilket svarer til 3 min. og 40 s, som netop er varigheden af det skalerede hjerteslag. Vi vil nu gennemgå resultaterne.

#### Trykprofilen

Figur 5.5 viser trykprofilen ved 0 m og 128 m i rørsystemet, hvilket i aorta svarer til 0 cm og 29 cm. Det ses, at vandstanden ved begyndelsen af det første rør (B1-B2) stiger fra 0.50 m til ca. 1.35 m, hvilket svarer til en trykstigning på ca. 0.85 m. Dette er lidt mindre end den forventede trykstigning på 1.1 m<sup>4</sup>. Trykprofilen ved 128 m når ca. 0.15 m højere op i spalten end den første, hvilket svarer til at trykforskellen ændres med 11.1 mmHg. Dette stemmer godt overens med, at forskellen mellem det diastolske og systolske tryk er stigende ned gennem aorta.

Trykbølgen ved 128 m starter efter ca. 20 s, hvilket svarer til en gennemsnits trykudbredelsehastighed for de første 30 cm af aorta på ca. 6 m/s, hvilket er lidt mere end den forventede værdi på 4.6 m/s. Dette

<sup>4</sup>I flere kilder, blandt andre [Anliker, 71] og [Yin, 87], angives forskellen mellem det systolske og det diastolske tryk tæt ved hjertet dog til at være noget lavere.



**Figur 5.5:** Vandhøjden som funktion af tiden, målt 0 m og 128 m inde i rørsystemet, dvs. 0 cm og 27 cm nede i aorta.

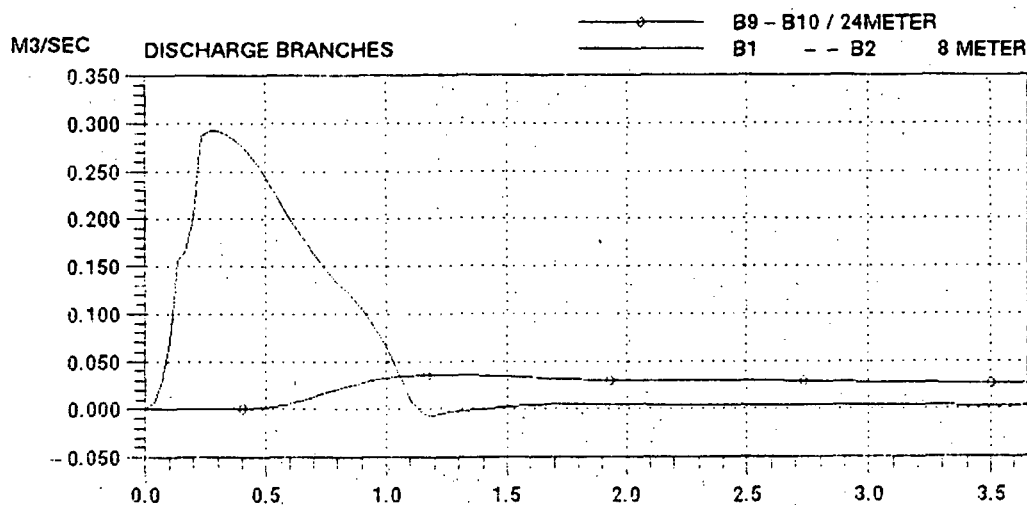
kan tyde på, at rørsystemet er en smule for stift, hvilket der kan kompenseres for, ved at gøre spalten bredere. Dette vil på den anden side få trykprofilen til at flade mere ud. Som beskrevet i kapitel 1 er der stor variation i størrelsen af pulsølgehastigheden. Imidlertid er det sikkert, at pulsølgehastigheden stiger ned gennem aorta. Afslæses trykprofilens begyndelsestidspunkt i det sidste rør (se bilag 2) kan det ses, at den gennemsnitlige udbredelseshastighed for hele røret er 8 m/s. Trykbølgens hastighed er således stigende ned igennem røret, og viser derfor den rigtige tendens, hvilket er vigtigst i denne sammenhæng.

Udover at trykprofilen stiger, bliver den også stejlere på den side, der er tættest på  $y$ -aksen, når den bevæger sig ned gennem røret.

På graferne ses også, at der kommer en ekstra bølgetop lige efter den egentlige bølges top. Vi mener, at dette er den dikrote hævnning, omtalt i kapitel 1. Dens tilstedeværelse kan ikke, som mange kilder hævder, forklares af at hjerteklapperne giver et lille "smæk", idet vores rørsystem ikke har nogen simulering af hjerteklapperne. Derimod har vi et konisk rør, og vi mener derfor, at den dikrote hævnning er en reaktion på den store trykbølge, der presses ned gennem det koniske rør. Denne effekt er nærmere beskrevet af [Peskin, 76].

Ovenstående træk ved vores simulering af trykprofilen er i det store hele i god overensstemmelse med vores evalueringskrav, fremsat i kapitel 1.

## Flow'et



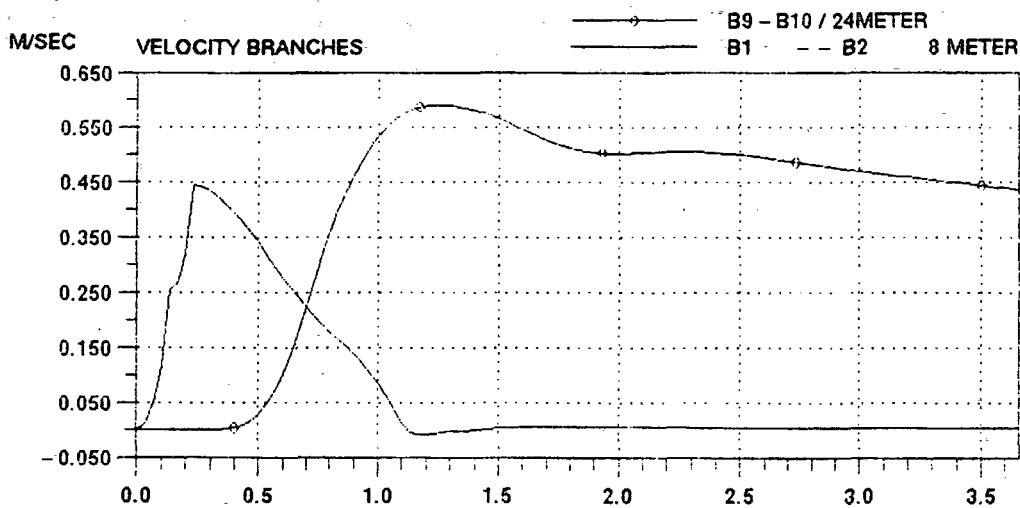
**Figur 5.6:** Flow som funktion af tiden, målt 8 m og 223 m (24 m inde i rørstykket fra B9 til B10) inde i rørsystemet. I aorta svarer dette til 2 cm og 51 cm.

Flow'et til  $x = 0$  er vores begyndelsesbetingelser, og det er derfor ikke overraskende, at flowprofilen har den rigtige facon i starten af rørsystemet. Det interessante er, hvordan flowprofilen udvikler sig længere inde i røret. Det ses af figuren, at flow'et falder markant samtidig med, at profilen udflades. Flowprofilen i den sidste del af røret falder dog, i modsætning til den første profil, ikke til nul. Dette passer med vores forventninger om, at aorta virker som en buffer der sørger for, at der hele tiden er strømning i blodet.

### Strømningshastigheden

Strømningshastigheden i starten af rørsystemet når op på et maksimum på 0.45 m/s hvorefter den falder til nul efter ca. 1 minut. Længere nede i rørsystemet begynder den maksimale hastighed at falde, indtil trediesidste rør, hvor hastigheden begynder at stige igen. I sidste rørstykke stiger hastigheden til 0.55 m/s, falder derefter kun langsomt og bliver ikke nul inden den næste bølge starter.

Denne ændring af strømningshastigheden ned gennem aorta finder vi noget underlig. Det stemmer godt overens med virkeligheden, at strømningshastigheden falder. I aorta skyldes faldet imidlertid, at blodvolumenet ned gennem aorta mindskes, i forhold til tværsnitsarealet, som



**Figur 5.7:** Strømningshastigheden som funktion af tiden, 8 m og 223 m inde i rørsystemet, dvs. 2 cm og 51 cm nede i aorta.

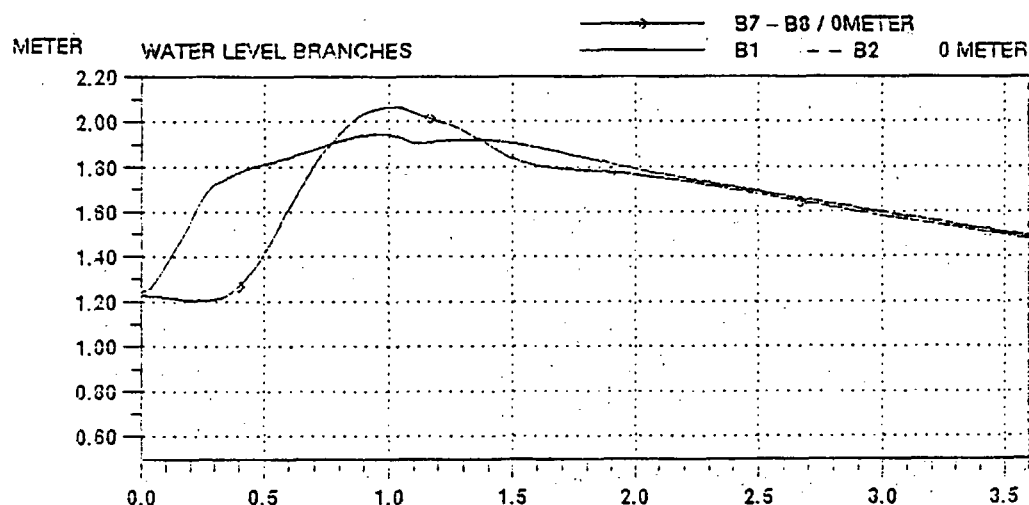
følge af at aorta forgrener sig [Campbell, 87]. Disse forgreninger er ikke medtaget i vores modellering af aorta og der er derfor ikke klart hvorfor strømningshastigheden falder.

At strømningshastigheden stiger til sidst, kan vi ikke forklare i relation til aorta. En forklaring kunne dog være, at det skyldes effekter fra udløbet, idet den uventede strømningshastighed forekommer i de sidste rør, hvor også flow'et får en uforudsigelig karakter.

### 5.3.2 Anden simulering

I første simulering sendte vi kun en enkelt bølge gennem vores rørsystem. Da hver bølge i aorta bliver efterfulgt af en tilsvarende bølge, med et fast interval, ville det være interessant at se, hvad der skete når vi prøvede at efterligne disse forhold i vores rørsystem. Vi kørte derfor en simulering hvor vi sendte tre bølger afsted efter hinanden. Bølgerne blev sendt afsted med et interval på 4 min. Dette passer ikke helt til den skalerede varighed af et pulsslæg på 3 min og 40 s, men skyldes, at det i MOUSE kun kan lade sig gøre at sende bølgerne afsted ved hele minuttal. Resultaterne ses på figur 5.8.

Det ses af figur 5.8, at trykprofilerne bevarer deres karakteristiske form, men at systemet er ude af balance, da trykprofilerne ikke når ned til det niveau hvorpå de starter. Dette bevirker, at for hvert pulsslæg vil trykket blive større end det foregående, hvilket også ses på figur 5.8 hvor



**Figur 5.8:** Trykprofilen som funktion af tiden efter der er sendt 3 bølger igennem rørsystemet. Først sendes 2 bølger igennem systemet og til tiden  $t = 0$  på grafen bliver der sendt en tredje bølge igennem. Trykket er målt 0 m og 128 m inde i rørsystemet, dvs. 0 cm og 27 cm nede i aorta.

vandet når op omkring 2.1 m. Hvis vi fortsatte med at simulere flere efterfølgende bølger vil trykket stige og flowet gennem røret dermed også stige. Vandstanden vil derfor nå en maksimum værdi som ligger væsentligt over det forventede.

## 5.4 Samlet vurdering af simuleringerne

Alt i alt er resultaterne af vores simuleringer meget tilfredsstillende i forhold til vores forventninger. Her tænkes primært på trykprofilen og dens forventede form og ændring ned gennem aorta. Når man tager i betragtning, at der er foretaget betydelige approksimationer og afrundinger i vores design af modellen og i valg af inputdata, kan de kvantitative forskelle mellem vores forventede og beregnede resultater heller ikke siges at være alarmerende.

Der er dog forskellige ting vi gerne ville have gjort bedre. Vi kunne have valgt, at diskretisere aorta i kortere rørsektioner, i et håb om at gøre resultaterne mere præcise. Det er dog ikke indlysende, at en finere røropdeling ville give bedre resultater, da vi ville blive nødt til at indføre flere brønde, hvis indvirkning på strømningen vi ikke kender.

Herudover ville vi også gerne have defineret et udløb, der havde en rimelig analogi til aortas bifurkation. Dette for at undgå, at profilerne i de sidste rørsektioner bliver fejlagtige. Hvis dette ikke kunne lade sig gøre, ville vi definere en meget lang rørsektion før udløbet, hvilket ville forskyde fejlen til først at opstå efter det område vi ville simulere.

Endelig ville vi gerne have tilpasset vores skaleringer lidt smartere i forhold til MOUSE. Vi ville gerne have gjort rørene lidt længere og skaleret tiden, så et hjerteslag passede med et helt antal minutter.

Imidlertid vil vi ikke med sikkerhed kunne vurdere, om vores resultater bliver bedre af, at vi retter på vores model, idet vores sammenligningsgrundlag (de eksperimentelle data) er meget vagt.

## Diskussion

Formålet med vores projekt var, at undersøge om en industristandard kan benyttes på et område, der umiddelbart virker langt fra det til tænkte. Mere præcist, ville vi undersøge om MOUSE kunne benyttes til at simulere pulsølgenes profilændring ned gennem aorta.

Til denne undersøgelse var det selvsagt nødvendigt, at skaffe information om aorta. Her opstod vores første problemer, idet det viste sig overordentligt vanskeligt at finde præcise data for den menneskelige aorta. Dette er der selvfølgelig flere gode grunde til, blandt andet at aorta er et noget kompliceret sted at komme til at måle. Herudover kan vi forstå på diverse kilder, at data varierer meget fra individ til individ alt efter alder, helbred mm. I mangel af data fra mennesker har vi, for en stor dels vedkommende, benyttet data fra hunde. I de kilder hvorfra vi har hentet vores hundedata, er aorta skaleret op, så den får en længde svarende til et menneske. Dette er sandsynligvis gjort ud fra ønsket om at lave en model, der netop simulerer den *menneskelige* aorta så virkelighedsnært som muligt. Denne sammenblanding af hunde- og menneskedata gav os problemer, idet det skabte usikkerhed om hvilke værdier vi skulle evaluere vores resultater imod. Det har været vanskeligt for os at vurdere fejlen, ved at benytte data fra hunde, idet vi ikke ved hvor stor den funktionelle forskel er til et menneske. Vores oprindelige hensigt var at simulere pulsølgen i den *menneskelige* aorta, men i princippet kunne vi lige så godt vurdere MOUSE's anvendelighed ud fra, om programmet var i stand til at simulere pulsølgenes udbredelse i en *hunds* aorta. Hvis MOUSE kan regne på data fra en hund, vil det sandsynligvis også kunne lade sig gøre at regne på data fra et menneske. I fald det viste sig, at MOUSE var anvendelig, ville manglen på data for mennesker være et problem, der ikke vedkom vores problemstilling.

Et af de væsentligste problemer i vores forsøg på at besvare problemformuleringen er derfor, at vi har savnet et præcist og sammenhængende



sæt af data til at bygge vores model over og til at vurdere vores resultater imod. Som en følge af de mange vanskeligheder med at finde de ønskede data, indskrænktes vores ambitioner sig efterhånden til, at teste en meget simpel og approksimativ model for aorta. Vores evalueringskrav blev indskrænket til en kvalitativ, snarere end en kvantitativ, analyse af trykprofilens ændring ned gennem aorta, hvor de eksakte værdier blev sekundære i forhold til de rette tendenser i udviklingen.

I kapitel 3 gav vi en teoretisk underbyggelse af de forventninger vi havde fra kapitel 1 til trykprofilens form og forandring, hvilket vi ville benytte til evalueringen af vores resultater. Vi blev bekræftet i at trykprofilens front burde blive stejlere og amplituden højere.

Efter at have samlet hvad vi kunne finde af data om aorta, gik vi over til at gennemgå den teoretiske baggrund for MOUSE. Vi så hvordan der var analogi mellem strømning i delvist fyldte og fuldtløbende rør, og vi viste, at man kan videreføre denne analogi til også at gælde for aorta. Med denne teori i ryggen kunne vi opstille en simpel model for aorta, der tager hensyn til at aorta er konisk, elastisk og at elasticiteten aftager ned gennem aorta.

For at kunne benytte MOUSE måtte vi tilpasse vores model så den kunne benyttes i programmet. Dette resulterede i en række approksimationer og fejlkilder. De væsentlige tilpasninger, der blev foretaget med modellen var diskretiseringen og skaleringen. Diskretiseringen giver selvfølgelig en fejlagtig gengivelse af rørets form. Denne fejl ville have været mindre, hvis vi havde indført en finere opdeling af rørsektionerne. Imidlertid ville dette have betydet flere brønde i rørsystemet, hvilket også er en fejlkilde. Til dette kan vi blot notere os, at vi ikke kender nok til programmets beregningsmetoder til at vurdere hvilken fejl, der har størst betydning. Den anden væsentlige ændring er skaleringen. Heri ligger en fejl da røret, der sandsynligvis i forvejen har for ru overflade, faktisk burde være blevet gjort glattere, som kompensation for skaleringerne. Desuden kunne skaleringskonstanterne have været valgt smartere. Vi kunne have valgt tidsskaleringen, så pulsen havde været et helt antal minutter. Dette ville betyde, at vi kunne benytte *Hot-start* uden den fejlagtige forskydning af bølgen vi har haft. Det ville også have været smartere, hvis vi havde haft en større skalering på længden. Da ville vi have undgået at vores første rørsektioners længde lå under de kritiske 15 m.

En anden fejl vi har måttet medtage, for at kunne benytte MOUSE til at simulere vores simple model for aorta, er at MOUSE's udløb ikke stemmer særligt godt overens med forholdene ved aortas bifurkation. Dette skyldes, at det definerede tryk i udløbet holdes konstant og lig med mindstetrykket i hele rørsystemet, hvorimod trykket for enden af aorta er pulserende. Denne fejl kunne dog have været skudt noget væk fra det område vi interesserede os for, ved at indføre en ekstra lang rørsektion mellem den del af røret der skulle simulere aorta og udløbet. Vi kunne måske også have skabt en bedre analogi til aortas bifurkation ved at definere to mindre rør istedet for det nuværende udløb, men på nuværende tidspunkt ved vi hverken nok om MOUSE eller forholdene i bunden af aorta til at kunne vurdere denne mulighed.

At MOUSE benytter Manningtallet er også en fejkilde. Manningtallet udtrykker rørets ruhed, hvor selv det største Manningtal (dvs. den mindste friktion) formodentlig vil give en fejlagtig gengivelse af aortas rørvæg, der har en glat struktur.

Efter denne lange opremsning af approksimationer og fejkilder, både selvforskyldte og uundgåelige, vil vi gå over til at gennemgå vores resultater.

Først og fremmest skal det siges, at de tre væsentligste krav til simuleringen af trykprofilen, at fronten bliver stejlere, at amplituden vokser og at der opstår en dikrot hævnings, alle i mere eller mindre tydelig grad er opfyldt. Ændringen af amplituden er ikke så udtalt som vi har set på diverse grafer, men vi har ikke præcise værdier at sammenligne med. At fronten bliver stejlere ses tydeligt, men vi kunne godt have tænkt os at, pulsølgenes udbredelseshastighed var noget mindre. Hvad vi nok er mest overraskede over og begejstrede for er, at det er lykkedes os at få den dikrote hævnings frem i vores simuleringer. Dette giver os mulighed for med rimelig sikkerhed, at kunne afkræfte teorien om, at den dikrote hævnings forårsages af, at hjerteklapperne lukkes, idet der ikke er defineret hjerteklapper eller lignende i vores model. Derimod kan vores simuleringer underbygge teorien om, at den dikrote hævnings skyldes en effekt der kommer fra det koniske rørs væg, når man sender en kraftig bølge igennem systemet.

Om simuleringerne af flow'ets ændring kan siges, at det udjævnes ned gennem aorta, hvilket svarer til vores forventninger, uden at vi dog har nogle præcise værdier at sammenligne det med.

Hastighedsprofilernes udvikling har vi derimod svært ved at forklare. At hastigheden falder er i overensstemmelse med hvad der sker i aorta. Da hastighedsfaldet i aorta skyldes, at en stor del af blodet ledes væk fra aorta via forgreninger, kan dette ikke forklare at hastigheden falder i modellen. Umiddelbart skulle man mene, at hastigheden burde stige, idet tværsnitsarealet mindskes. Dette er endnu et eksempel på, at vi ikke kender nok til programmets beregningsmetoder.

Alt i alt kan siges, at vi er godt tilfredse med resultaterne af simuleringerne.

## Konklusion

Simuleringen med MOUSE, af pulsølgenes profilændring ned gennem aorta, må siges at være meget tilfredsstillende, idet vores tre evalueringskrav til trykølgenes form blev opfyldt. Simuleringer med MOUSE viste, at trykprofilen blev mere stejl og dens amplitude højere med stigende afstand fra hjertet. Derudover mener vi at kunne forklare den efterfølgende mindre hævning på trykprofilet som den dikrote hævning, dannet udfra rørvæggens refleksion.

MOUSE kan altså godt benyttes til at simulere pulsølgenes profilændring ned gennem aorta.

## Perspektivering

Som det blev nævnt i indledningen til rapporten har vi, pga. en række uheldige omstændigheder, ikke nået at undersøge de områder hvor vi formoder at MOUSE har sin virkelige styrke i forhold til gængse modelleringer af aorta, nemlig i simuleringen af aortas forgreninger. Her kunne det vise sig, at simuleringer med MOUSE ville give en bedre beskrivelse af blodets hastighed og tryk i aorta, end hvad vi nåede at få frem ved vores simple model.

Den mængde blod der forsvinder ud af aorta gennem forgreninger modelleres ofte ved en "udsivningsfunktion" således, at udsivningen fra forgreninger kan opfattes som kontinuert, istedet for diskret. Denne tilnærmelse benyttes, da den er lettere at indarbejde i en differential-ligningsmodel. Tilnærmelsen er f.eks. benyttet af Max Anliker et al. i [Anliker, 71] og som forfatteren også selv konkluderer er metoden ikke særlig tilfredsstillende. I MOUSE er det netop muligt at definere et hovedrør med en række forgreninger, hver med en specifik diameter og udstrømningsbetingelse. Det betyder, at man vha. MOUSE formentlig kunne konstruere en meget virkelighedsnær model af udstrømningen fra aorta og dermed komme væsentligt nærmere en vellignende model af aorta.

Hvis ønsket er, at udvikle modellen for aorta til brug i anæstesisammenhæng, og stadig benytte MOUSE, vil arbejdet blive lettet væsentligt og resultaterne formentlig væsentligt mere pålidelige, hvis der af DHI foretages nogle mindre ændringer i MOUSE.

For det første vil brugen af MOUSE i forbindelse med aortamodeller blive væsentligt lettet, hvis dét interval som MOUSE accepterer data i ændres, hvorved man eventuelt helt kan undgå at skalere data for aorta.

For det andet skal det være muligt at starte en simulering med *Hot-start* til et vilkårligt tidspunkt, og ikke som nu, til et helt antal minutter.

Som en sidste ting ville det være rart, når man alligevel var igang med at rette programmet til, at brugergrænsefladen blev bragt up to date og antallet af skærm og printer drivere blev forøget. Ligesom det ville være rart hvis programmet blev bedre til at køre over et netværk.

# Bilag 1

Dette bilag indeholder en udskrift af det regneark, vi har benyttet til at beregne værdierne i vores rørsystem samt data for det diskretiserede flow.

Skaleringsfaktor for t:	440	440	440	440	440
Skaleringsfaktor for g:	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
Skaleringsfaktor for l:	440	440	440	440	440
Skaleringsfaktor for h:	2	2	2	2	2
<hr/>					
Aortas diameter [cm]:	2.4	2.2	2	1.8	1.6
Rørhøjde [m]:	0.048	0.044	0.04	0.036	0.032
Rørbredde [m]:	10.56	9.68	8.8	7.92	7.04
Længde af rørstykket [m]:	15.58964	33.37967	52.95155	74.70234	99.17869
Spaltebredde [m]:	0.189	0.137	0.098	0.068	0.046
A i top af rør [m <sup>2</sup> ]:	0.507	0.426	0.352	0.285	0.225
R i top af rør [m]:	0.024	0.022	0.02	0.018	0.016
Våd perimenter [m]:	21.216	19.448	17.68	15.912	14.144
<hr/>					
Vanddybde (y) [m]:	99	99	99	99	99
A i højden y [m <sup>2</sup> ]:	19.229	14.027	10.038	7.016	4.759
R i højden y:	0.088	0.065	0.047	0.033	0.022
Våd perimenter [m]:	219.12	217.36	215.6	213.84	212.08
<hr/>					
Q-værdier					
<hr/>					
Tid i virkeligheden [s]:	0	0.0311	0.0389	0.0578	0.0767
Q i virk. [cm <sup>3</sup> /s]:	0	386.667	377.77	324.44	251.111
Tid i model [s]:	0	13.684	17.116	25.432	33.748
Q i model [m <sup>3</sup> /s]:	0	0.340267	0.332438	0.285507	0.220978

Skaleringsfaktor for t:	440	440	440	440
Skaleringsfaktor for g:	0.5	0.5	0.5	0.5
Skaleringsfaktor for l:	440	440	440	440
Skaleringsfaktor for h:	2	2	2	2

Aortas diameter [cm]:	1.4	1.2	1	0.8
Rørhøjde [m]:	0.028	0.024	0.02	0.016
Rørbredde [m]:	6.16	5.28	4.4	3.52
Længde af rørstykket [m]:	127.1629	159.8312	199.0735	248.2194
Spaltebredde [m]:	0.03	0.018	0.01	0.005
A i top af rør [m <sup>2</sup> ]:	0.172	0.127	0.088	0.056
R i top af rør [m]:	0.014	0.012	0.01	0.008
Våd perimter [m]:	12.376	10.608	8.84	7.072

Vanddybde (y) [m]:	99	99	99	99
A i højden y [m <sup>2</sup> ]:	3.107	1.928	1.115	0.583
R i højden y:	0.015	0.009	0.005	0.003
Våd perimter [m]:	210.32	208.56	206.8	205.04

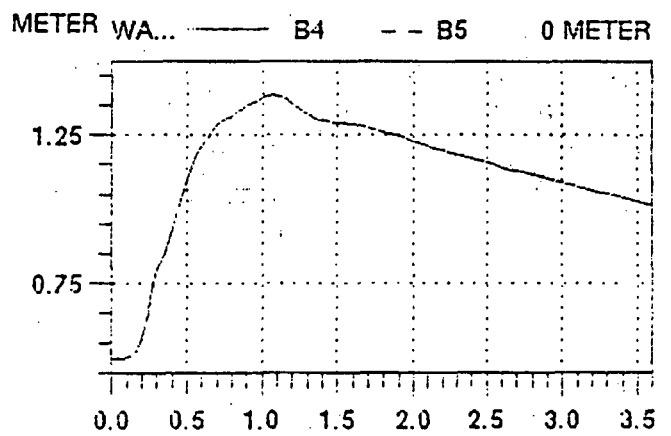
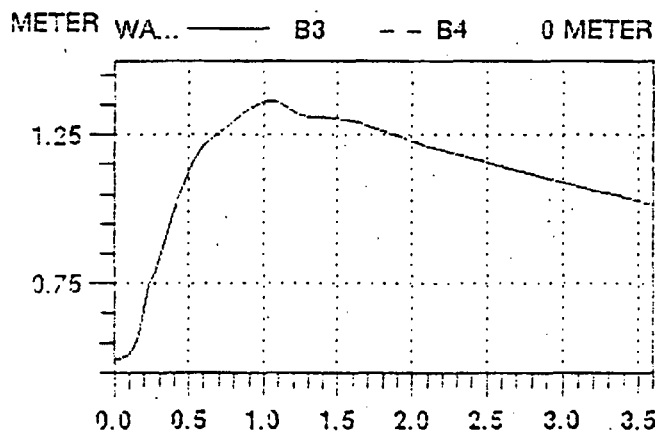
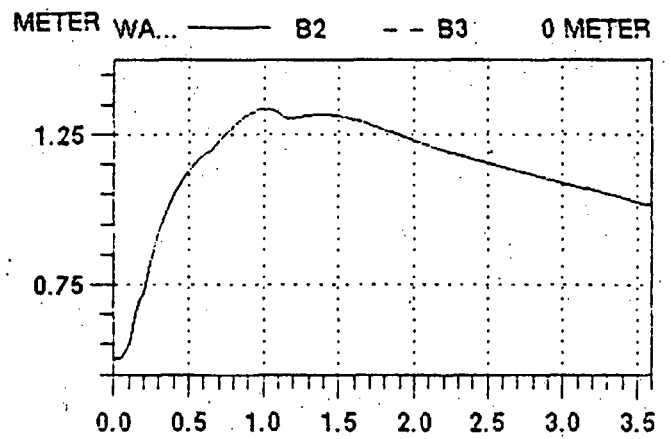
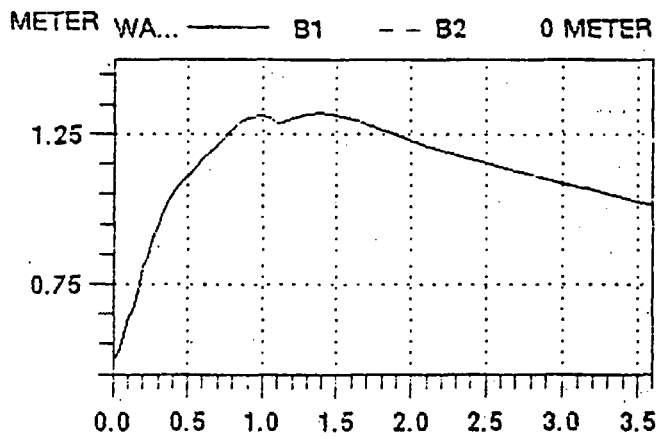
## Q-værdier

Tid i virkeligheden [s]:	0.0922	0.111	0.1333	0.148
Q i virk. [cm <sup>3</sup> /s]:	200	155.556	86.667	0
Tid i model [s]:	40.568	48.84	58.652	65.12
Q i model [m <sup>3</sup> /s]:	0.176	0.136889	0.076267	0

## Bilag 2

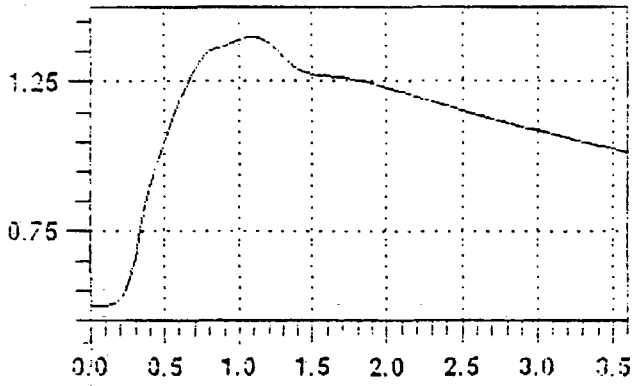
Dette bilag indeholder graferne for trykket, flowet og strømningshastigheden i alle de 9 rørstykker i vores rørsystem.

### Tryk

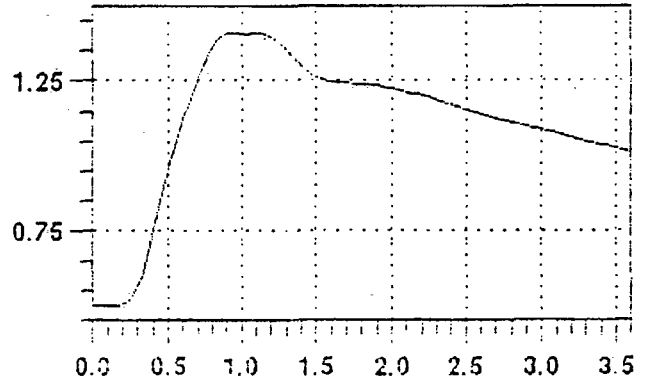




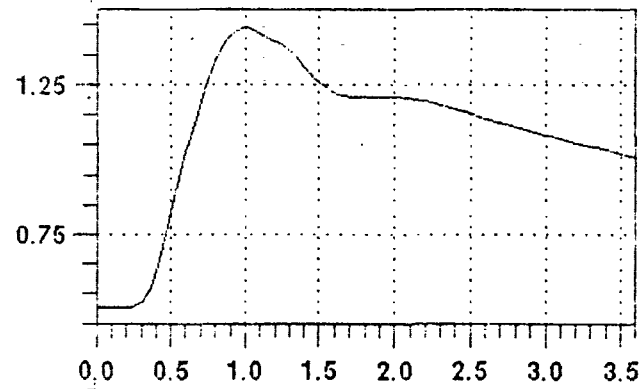
METER WA... — B5 — B6 0 METER



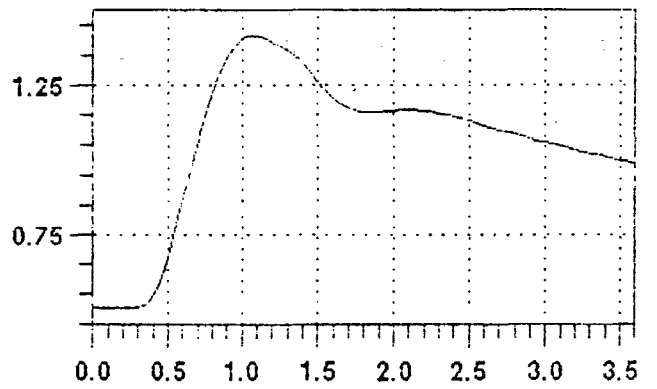
METER WA... — B6 — B7 0 METER



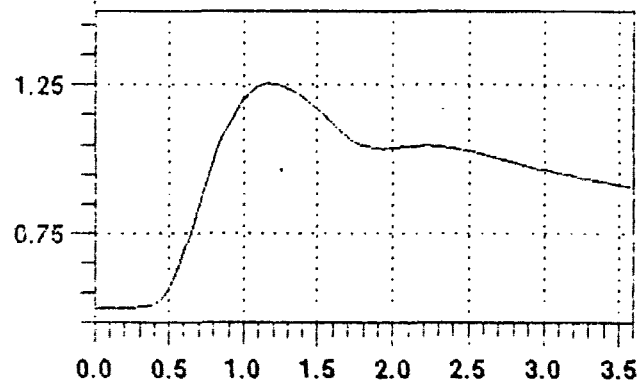
METER WA... — B7 — B8 0 METER



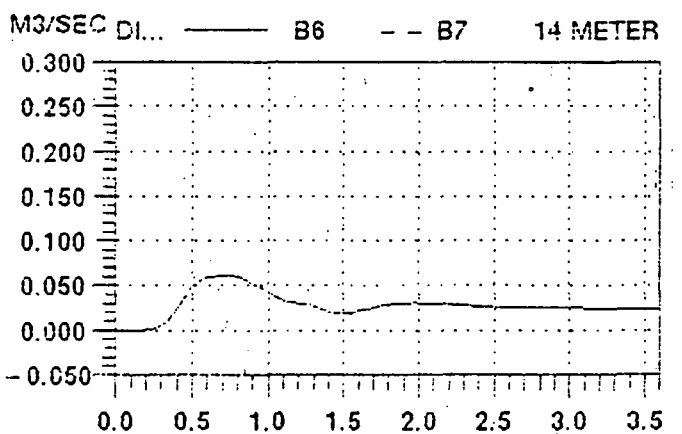
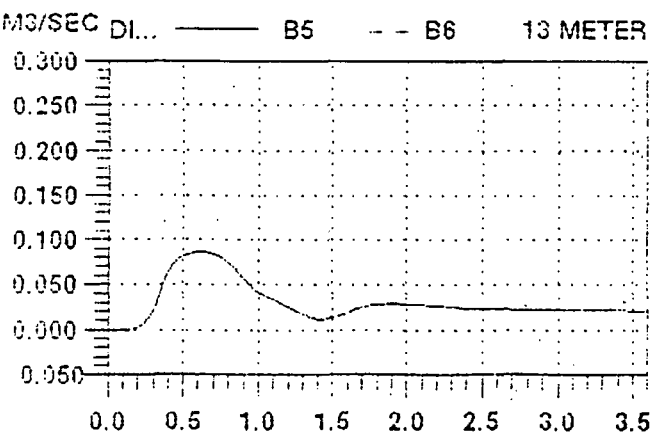
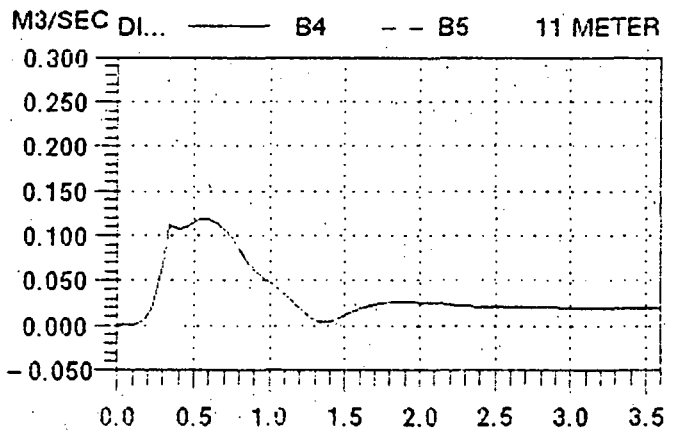
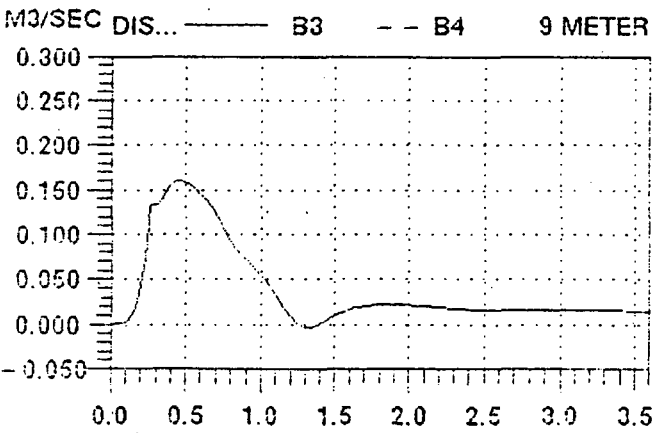
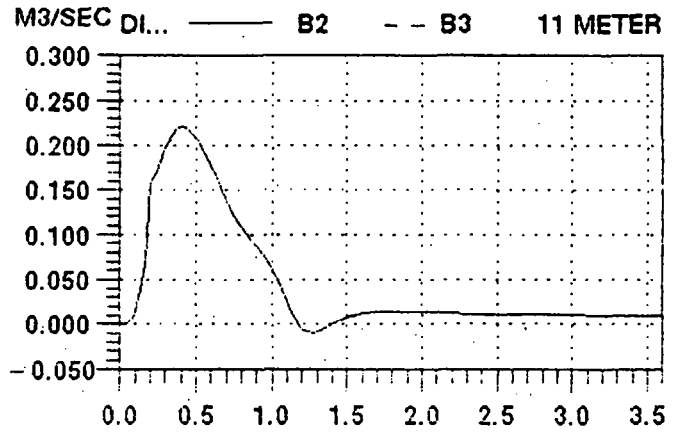
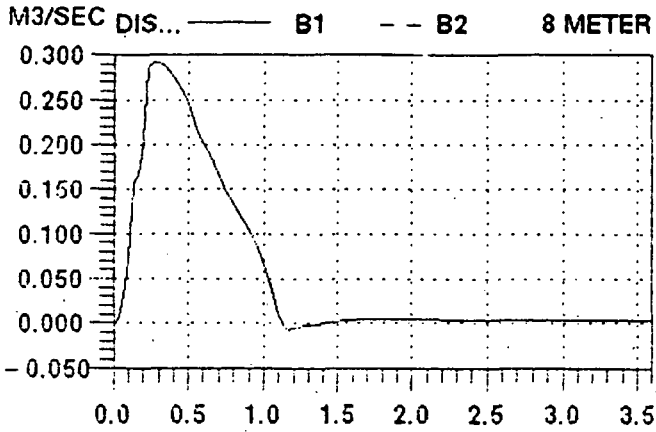
METER WA... — B8 — B9 0 METER

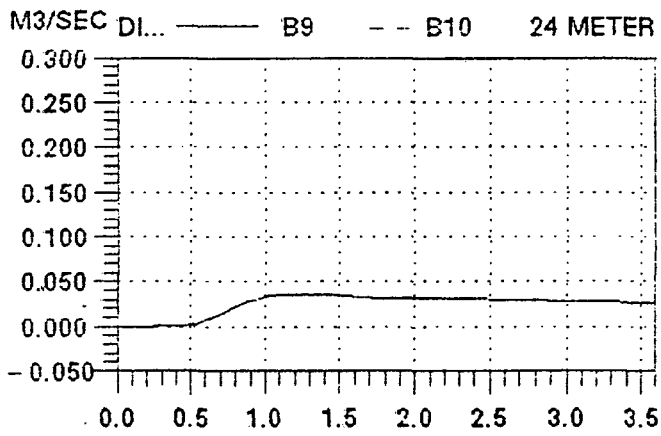
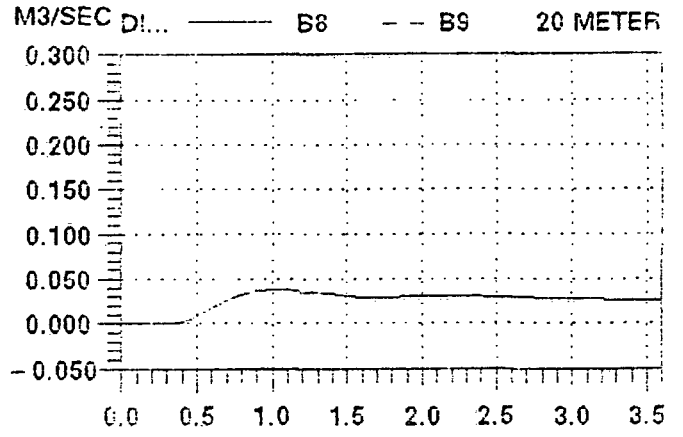
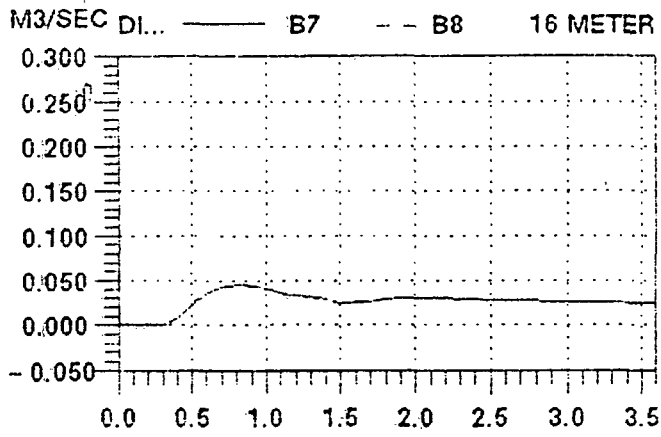


METER W... — B9 — B10 0 METER



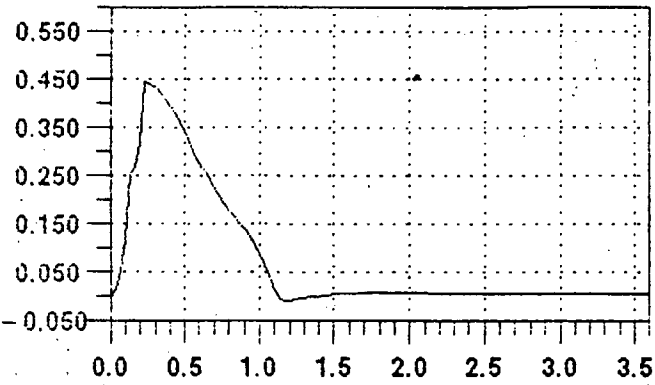
# Flow



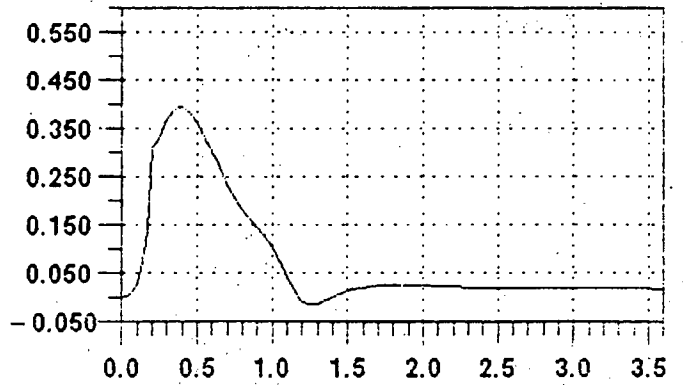


# Hastighed

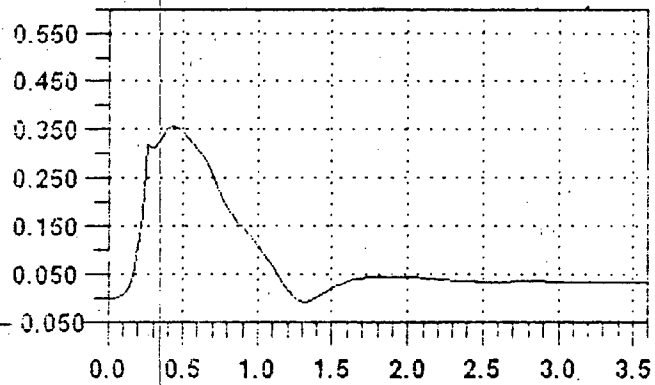
M/SEC VE... — B1 - - B2 8 METER



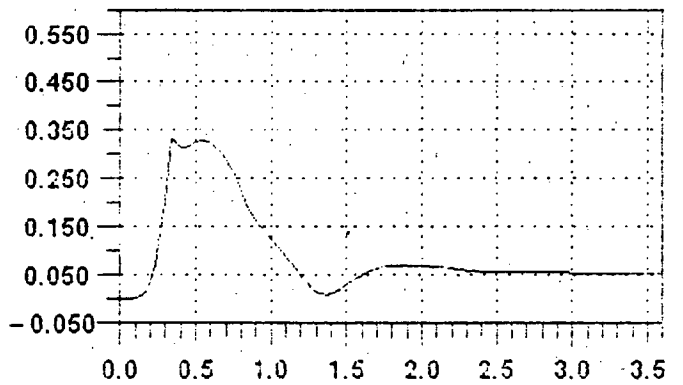
M/SEC VE... — B2 - - B3 11 METER



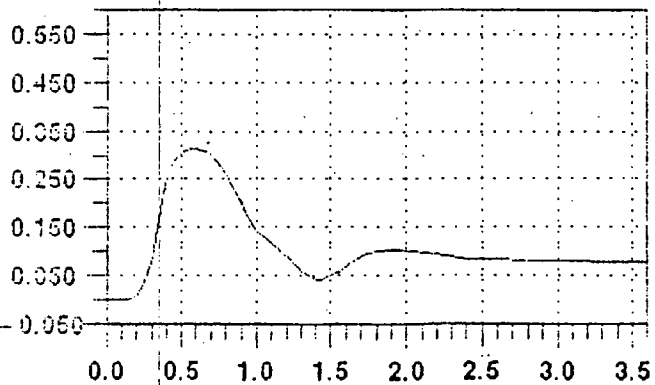
M/SEC VE... — B3 - - B4 9 METER



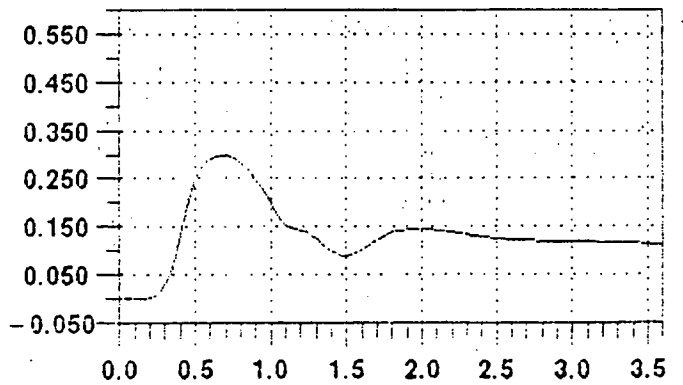
M/SEC VE... — B4 - - B5 11 METER



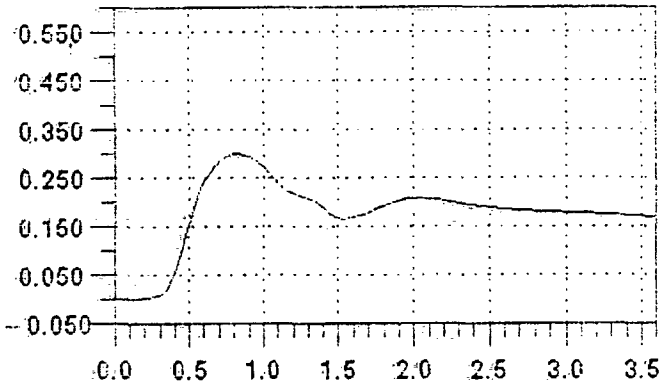
M/SEC VE... — B5 - - B6 13 METER



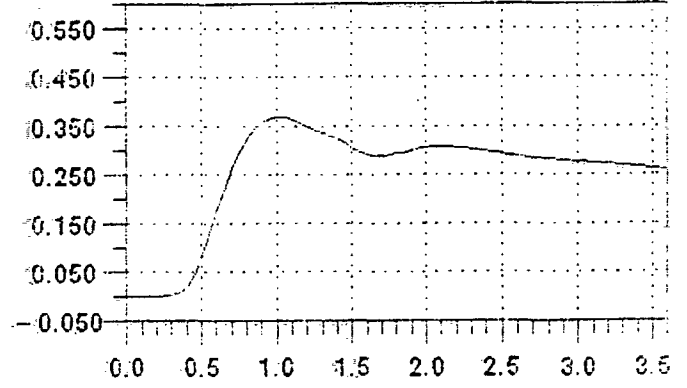
M/SEC VE... — B6 - - B7 14 METER



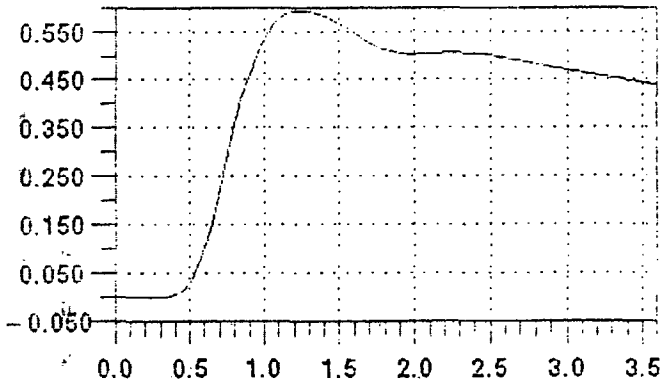
M/SEC VE... — B7 - - B8 16 METER



M/SEC VE... — B8 - - B9 20 METER



M/SEC VE... — B9 - - B10 24 METER



# Symbolliste

Symbol	Beskrivelse
$a_0$	Lydens hastighed i en væske.
$a_r$	Lydens hastighed i et rørmateriale.
$a$	En sammenhæng mellem $a_0$ og $a_r$ .
$c$	Pulsbølgens hastighed.
$d$	Diameter.
$e$	Rørvæggens tykkelse.
$g$	Tyngdeaccelerationen.
$h$	Højde.
$k_0, k_1$	Eksperimentielt bestemte konstanter.
$l$	Længde.
$m$	Masse.
$n$	Eksperimentielt bestemt konstant.
$\bar{n}$	Normal vektor.
$p$	Tryk.
$p_0$	Atmosfærisk tryk.
$t$	Tid.
$\bar{u}$	Tangent til kurven $S$ .
$v$	Væskens hastighed.
$x$	Bevægelsesretningen, afstanden til hjertet (indløb).
$y$	Højderetningen.
$z$	Brederetningen.
$A$	Areal.
$A_0$	Areal ved $p = p_0$ .
$A_1, A_2$	Kontrolvolumenets endeflader.
$\mathcal{A}$	Admitansen.
$B$	Bredden af vandoverfladen, bredden af spalten.
$C$	Compliance.
$E_r$	Elasticitetskonstant for rørmaterialet.
$E_v$	Elasticitetskonstant for væsken.

---

$\mathcal{F}$	Froudes tal.
$\overline{F}_{gn}$	Gnidningskraften.
$\overline{F}_{res}$	Den resulterende kraft.
$\overline{F}_p$	Trykkraften.
$\overline{F}_t$	Tyngdekraften.
$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$	Trykkrafter virkende på kontrolvolumenet.
$I_0$	Defineres som $\sin\theta$ .
$I_f$	Friktionskraften.
$L$	Den våde perimeter.
$M$	Manningtal.
$Q$	Flow.
$R$	Hydraulisk radius.
$Re$	Reynolds tal.
$S$	Kurve for kontrolvolumenets udvidelse.
$V$	Volumen.
$Y$	Vandhøjde.
$\alpha$	En konstant.
$\beta$	Forkortelse for $\frac{A}{Q^2} \int_A v_x^2 dA$ .
$\zeta$	Skaleringskonstant for tyngdeaccelerationen.
$\theta$	Rørets hældning.
$\lambda_h$	Skaleringskonstant for højde.
$\lambda_l$	Skaleringskonstant for længde og bredde.
$\mu$	Viskositeten.
$\rho$	Densitet.
$\rho_0$	Densitet til $p = p_0$ .
$\sigma$	Forskydningsspændingen.
$\tau$	Skaleringskonstant for tiden.

# Litteraturliste

Ames, William F.: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Nelson, 1969.

Anliker, Max; Rockwell, Robert L. & Ogden, Eric: *Nonlinear Analysis of Flow Pulses and Shock Waves in Arteries*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Vol. 22, 1971.

Batchelor, G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press 1970.

Berger, Stanley A.: *Flow in Large Blood Vessels*. Contemporary Mathematics, Volume 141, 1993.

Boisen, Anja; Birkelund, Karen & Olufsen, Mette: *Rupnok*. Roskilde Universitetscenter, IMFUFA, Tekst nr. 219, 1992.

Campbell, Niel A.: *Biology*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Melno Park, California 1987.

Crone, C. et al.: *Fysiologi*. Foreningen af Danske Lægestuderendes Forlag, København 1990.

*Danish Hydraulics*. Dansk Hydraulisk Institut, No. 13, 1993.

Hilmer, J.; Borup, R.; Veirø, K.; Andersen, G.; Hansen, J. G.; Steenstrup, F. R.: *Matematisk model af blodtrykket i aorta*. Nat. Basis. RUC 1993.

Hwang, Ned H. C.; Gross, David R. & Patal, Dali J.: *Quantitative Cardiovascular Studies*. University Park Press, Baltimore 1979.

Ingram, David & Block, Ralph, editors: *Mathematical Methods in Medicine*. Part 1 and 2, John Wiley & Sons, Chichester 1986.



John, Fritz: *Partial Differential Equations*. Fourth Edition, Springer-Verlag, New York 1982.

Lighthill, Sir James: *Mathematical Bio Fluid Dynamics*. 3. edition, J. W. Arrowsmith 1989.

*MOUSE User's Guide & Technical Reference*. Danish Hydraulic Institute, 1993.

Pedersen, Fl. Bo: *Hydraulik for bygningsingenører*. Den private ingeniørfond Danmarks Tekniske Højskole, Lyngby 1988.

Peskin, C. S. & Hoppensteadt, F. C.: *Mathematics in Medicine and the Life Sciences*. Springer-Verlag, New York 1992.

Rank, Jette & Larsen, Vagn Juhl: *Fysiologi grundbogen*. 1. udgave, Gyldendal 1992.

Rubinow, S. I.: *Introduction to Mathematical Biology*. John Wiley & Sons, New York 1975.

Sjöberg, Anders: *Beräkning av icke stationära flödesförlopp i reglerade vattendrag och dagvattensystem*. Chalmers Tekniske Högskola, Meddelande nr. 87, Göteborg 1976.

Smith, James J. & Kampine, John P.: *Circulatory Physiology- the essentials*. Williams & Wilkins, 3. edition, 1990.

Starr, Cecie & Taggart, Ralph: *Biology*. Wadsworth Publishing Company, Belmont 1978.

Whitham, G. B.: *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, New York 1974.

Yin, Frank C. P., editor: *Ventricular/Vascular Coupling*. Springer-Verlag, New York 1987.

Liste over tidligere udkomne tekster  
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan  
ske til IMFUFA's sekretariat  
tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

- 
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING  
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"  
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"  
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"  
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen  
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"  
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH  
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"  
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and  
Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional  
Groups and Algebras Related to Quantum Physics  
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT  
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT  
LOW TEMPERATURES  
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent  
en-krystallinsk silicium  
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,  
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild  
og Thomas Hougaard  
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL  
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY  
CONVERSION"  
by: Bent Sørensen

- 227/92 "Computersimulering og fysik"  
af: Per M.Hansen, Steffen Holm,  
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,  
Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder,  
Ivar P. Zeck  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"  
Fire artikler af:  
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,  
Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"  
En diskussion af informationsteorien  
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og  
en skitse til et alternativ baseret  
på andenordens kybernetik og semiøtik.  
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk  
problem"  
et matematisk projekt af  
Karen Birkelund, Bjørn Christensen  
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model"  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en  
matematisk model" Kildetekster  
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,  
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen  
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse  
af energiens bevarelse og isærdeles om  
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz  
udførte arbejder"  
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård  
Vejleder: Dorthe Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host  
mortality on the dynamics of an endemic  
disease and  
Instability in an SIR-model with age-  
dependent susceptibility  
by: Viggo Andreasen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL  
BOUNDARY VALUE PROBLEM"  
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS  
- Modul 3 fysik projekt -  
af: Thomas Jessen
-

- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN  
af: Anja Boisen, Peter Bøggild  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen  
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology  
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)  
Vektorbånd og tensorer  
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse Matematik 2. modul  
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen  
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler. Om særlige matematiske fysiske betydning for den matematiske udvikling  
af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen  
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1  
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel  
Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer  
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck  
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN  
Et 1. modul fysikprojekt  
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann  
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning  
Projektrapport  
af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen  
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b /93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere  
Specialerapport  
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade  
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN  
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS  
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P. Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.  
by: B. Booss-Bavnbek  
With comments by W. Abikoff, L. Ahlfors, J. Cerf, P.J. Davis, W. Fuchs, F.P. Gardiner, J. Jost, J.-P. Kahane, R. Lohan, L. Lorch, J. Radkau and T. Soderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV  
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen  
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones  
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andréassen and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER  
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmsgaard, Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning  
Teori og model  
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse  
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse  
Materiale til et statistikkursus  
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED  
af: Peter Harremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-electric Spherical Shell (Preprint)  
by: T. Christensen and N.B. Olsen
- 257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker  
af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård  
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"  
af: Mogens Brun Heefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW TEMPERATURES  
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN DIMENSIONS 2, 3, AND 4  
by: B. Booss-Bavnbek, K.P. Wojciechowski

261/93 OPGAVESAMLING  
Bredde-kursus i Fysik  
Eksamensopgaver fra 1976-93

262/93 Separability and the Jones  
Polynomial  
by: Lars Kadison

263/93 Supplerende kursusmateriale til  
"Lineære strukturer fra algebra  
og analyse" II  
af: Mogens Brun Heefelt

264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2  
af: Bent Sørensen

---

**265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED  
SYMMETRIC SPACES**

**To Sigurdur Helgason on his  
sixtyfifth birthday**

**by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert  
and Gestur Olafsson**

266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i  
laterale supergitre  
Fysikspeciale af: Anja Boisen,  
Peter Bøggild, Karen Birkelund  
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik  
Lindelof, Peder Voetmann Christiansen

267/94 Kom til kort med matematik på  
Eksperimentarium - Et forslag til en  
opstilling  
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen  
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek