

TEKST NR 263

1993

**Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra og
analyse" II**

Revideret udgave

af: Mogens Brun Heefelt

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse II
(revideret udgave)

af: Mogens Brun Heefelt

IMFUFA tekst nr. 263/93

33 sider

ISSN 0106-6242

Abstract.

Denne tekst er supplerende materiale til kurset "Lineære strukturer fra algebra og analyse" og indeholder sætninger og eksempler om invariante under- rum, nulrum for lineære differentialoperatorer, diagonalisering af matricer og jordans normalform samt supplerende opgaver og de sidste seks eksamenssæt i kurset.

Teksten læses som supplement til **Griffel: Linear Algebra and its Applications, Vol. I + II**. Denne tekst erstatter IMFUFA-tekst 258 med samme titel.

Afsnit A: Invariante underrum

I dette afsnit vil vi vise nogle sætninger om invariante underrum, som vil blive anvendt i de to følgende afsnit.

Lad os betragte et vektorrum V over \mathbb{C} , og lad $A: V \rightarrow V$ være en lineær operator på V . Er videre W et underrum af V , da kaldes W et **invariant underrum over for A** , hvis

$$Aw \in W \text{ for alle } w \in W$$

dvs, at

$$A(W) \subseteq W.$$

Eksempel A1. Er v_1 en egenvektor for operatoren A svarende til egenværdien λ_1 , vil $W = \text{Sp}\{v_1\}$ være et invariant underrum over for A , da det for alle $w \in W$ gælder, at $Aw = \lambda_1 w$. #

Eksempel A2. Betragtes egenrummet E_λ for A svarende til egenværdien λ , vil også dette underrum i V være invariant over for A , da det for alle $v \in E_\lambda$ gælder, at $Av = \lambda v$. #

Er p et polynomium af n -te grad med reelle koefficienter, fx

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

kan man for den lineære operator A definere, at

$$p(A) = a_0 + a_1 A + \dots + a_n A^n.$$

Ved simpel udregning ses da, at

$$Ap(A) = p(A)A.$$

Er q tilsvarende et polynomium af k -te grad med reelle koefficienter, defineres på samme måde

$$q(A) = b_0 + b_1 A + \dots + b_k A^k.$$

Man får igen ved simple udregninger, at

$$q(A)p(A) = p(A)q(A)$$

da $A^i A^j = A^j A^i$.

Eksempel A3. Er p et polynomium af grad n , og er $W = N(p(A))$ - nulrummet for $p(A)$ - skal vi se, at W er invariant over for A .

Er $w \in W$, dvs at $p(A)w = 0$, kan vi slutte, at

$$p(A)(Aw) = p(A)Aw = Ap(A)w = 0$$

hvilket viser, at $Aw \in W$. #

Sætning A1. Vi betragter nu en operator $T: V \rightarrow V$, der antages nilpotent af grad k dvs, at der findes et $v \in V$ således at

$$T^{k-1}v \neq 0 \quad \text{og} \quad T^k v = 0.$$

Det skal da vises, at mængden

$$S = \{T^{k-1}v, T^{k-2}v, \dots, Tv, v\}$$

vil være lineær uafhængig, samt at $W = \text{Sp}(S)$ vil være invariant over for T .

Betragtes nu linearkombinationen

$$c_1 T^{k-1}v + c_2 T^{k-2}v + \dots + c_{k-1}Tv + c_k v = 0$$

skal man vise, at man kun finder den trivielle linearkombination. Lader vi T^{k-1} virke på linearkombinationen, fås

$$c_k T^{k-1}v = 0.$$

Da $T^{k-1}v \neq 0$ bliver $c_k = 0$. Lader vi dernæst T^{k-2} virke på linearkombinationen, får man

$$c_{k-1} T^{k-1}v = 0,$$

heraf følger tilsvarende at $c_{k-1} = 0$. Sådant fortsættes med T^j for $j = k-2, \dots, 0$ og man ser, at $c_{k-2} = \dots = c_2 = c_1 = 0$.

Da $T(T^j v) = T^{j+1}v$ bliver $T(S) \subset S$, og da tillige S er en basis for W , er W invariant over for T . #

Eksempel A4: Er $A: V \rightarrow V$ givet, og er λ en egen værdi for A , således at operatoren

$$T = A - \lambda I$$

er nilpotent af grad k , da vil - som vist i sætningen - S være lineær uafhængig. Af

$$\begin{aligned} A(T^j v) &= A(A - \lambda I)^j v \\ &= A(A - \lambda I)^j v - \lambda(A - \lambda I)^j v + \lambda(A - \lambda I)^j v \\ &= (A - \lambda I)^{j+1} v + \lambda(A - \lambda I)^j v \\ &= T^{j+1} v + \lambda T^j v \end{aligned}$$

ses, at $A(T^j v)$ altså kan skrives som linearkombination af elementer i S (der jo er en basis for W). Således er $A(W) \subset W$. #

Sætning A2. Lad nu p være et polynomium af grad n , og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t)p_2(t)$, hvor p_1 og p_2 begge er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Lad V være nulrummet for operatoren $p(A) - N(p(A))$, da skal vi vise, at

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

dvs V er en direkte sum af $W_1 = N(p_1(A))$ og $W_2 = N(p_2(A))$.

Da p_1 og p_2 har største fælles divisor 1, findes polynomier q_1 og q_2 , således at

$$q_1(t)p_1(t) + q_2(t)p_2(t) = 1,$$

og derfor er

$$(*) \quad q_1(A)p_1(A) + q_2(A)p_2(A) = I.$$

Med $v \in V$, er jfr (*)

$$v = q_1(A)p_1(A)v + q_2(A)p_2(A)v.$$

Her vil det første led på højre side i ligningen tilhøre W_2 , da

$$p_2(A)[q_1(A)p_1(A)v] = q_1(A)p_1(A)p_2(A)v = q_1(A)p(A)v = 0,$$

da $v \in N(p(A))$. Tilsvarende vises, at det andet led tilhører W_1 , og således er V sum af W_1 og W_2 . Vi mangler at vise, at summen er direkte, dvs at udtrykket

$$v = w_2 + w_1$$

med $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$, er entydigt fastlagt af v . Lader vi nu $q_1(A)p_1(A)$ virke på summen er

$$q_1(A)p_1(A)v = q_1(A)p_1(A)w_2$$

da $p_1(A)w_1 = 0$. Anvendes dernæst (*) på w_2 bliver

$$w_2 = q_1(A)p_1(A)w_2 = q_1(A)p_1(A)v,$$

da $p_2(A)w_2 = 0$. Tilsvarende bliver

$$w_1 = q_2(A)p_2(A)v,$$

og dermed er w_1 og w_2 entydigt fastlagt ud fra v . #

Denne sætning kan umiddelbart generaliseres til:

Sætning A3. Lad p være et polynomium af grad n , og lad der være givet faktoropløsningen $p(t) = p_1(t) \cdots p_k(t)$, hvor p_1, \dots, p_k alle er af grad ≥ 1 og med største fælles divisor 1. Da er

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_k(A)).$$

Dette vises ved induktion. For $k = 2$ er det vist i sætning A2. Lad os nu antage, at sætningen er korrekt for $k = j$, dvs at

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_j(A)),$$

når $p(t) = p_1(t) \cdot \dots \cdot p_j(t)$, og polynomierne har største fælles divisor 1. Vi betragter nu

$$p(t) = p_1(t) \cdot \dots \cdot p_j(t) \cdot p_{j+1}(t)$$

hvor polynomierne har største fælles divisor 1. Da nu produktet af de første j af polynomierne, dvs

$$q(t) = p_1(t) \cdot \dots \cdot p_j(t)$$

opfylder sætningen, vil

$$N(q(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_j(A)).$$

Samtidig er $p(t) = q(t) \cdot p_{j+1}(t)$,

hvor q og p_{j+1} har største fælles divisor 1; ifølge sætning A2 bliver da

$$N(p(A)) = N(q(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Med $N(q(A))$ indsat bliver derfor

$$N(p(A)) = N(p_1(A)) \oplus \dots \oplus N(p_j(A)) \oplus N(p_{j+1}(A)).$$

Hermed er sætningen bevist. #

En simpel konsekvens af denne sætning bliver nu:

Sætning A4. Lad polynomiet p have følgende faktoropløsning

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1} (t - a_2)^{m_2} \dots (t - a_k)^{m_k},$$

hvor alle a_i -er er forskellige. Da vil $N(p(A))$ være direkte sum af underrummene U_1, U_2, \dots, U_k , hvor

$$U_i = N((A - a_i I)^{m_i}).$$

Afsnit B: Nulrum for lineære differentialoperatorer

I denne tekst skal vi arbejde på at bestemme en basis for nulrummet til en lineær differentialoperator af n -te orden, fx

$$L = D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0D^0$$

hvor alle b_i er reelle konstanter. I hele dette afsnit vil differentialoperatoren D virke på vektorrummet C^∞ , rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner.

Er polynomiet

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0,$$

kan vi direkte benytte sætning A3 på differentialoperatoren D og finde en basis for nulrummet $N(p(D))$.

Man skal iøvrigt være opmærksom på, at spørgsmålet om at finde en basis for dette nulrum, betyder det samme som at finde samtlige løsninger til den n -te ordens lineære differentiaalligning

$$(D^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0D^0)f(t) = 0.$$

Da vi fortsat arbejder i et vektorrum V over \mathbb{C} , har polynomiet p en faktoropløsning i førstegradspolynomier som forudsat i sætning A3, dvs

$$p(t) = (t - a_1)^{m_1}(t - a_2)^{m_2}\dots(t - a_k)^{m_k},$$

og ifølge sætningen kan en basis for $N(p(D))$ findes, når man har fundet en basis for hvert af nulrummene $U_i = N((D - a_iD^0)^{m_i})$.

Til dette formål får vi brug for følgende sætning:

Sætning B1. $(D - aD^0)^m f(t) = e^{at}D^m(e^{-at}f(t))$

Dette vises ved induktion efter m . For $m = 1$ får man

$$\begin{aligned} e^{at}D(e^{-at}f(t)) &= e^{at}[-ae^{-at}f(t) + e^{-at}f'(t)] \\ &= f'(t) - af(t) = (D - aD^0)f(t). \end{aligned}$$

Antages sætningen nu korrekt for $m = k$, skal man vise, at den også gælder for $m = k + 1$. Det gælder altså at

$$(D - aD^0)^k f(t) = e^{at}D^k(e^{-at}f(t)),$$

som vi skal bruge på formen

$$e^{-at}(D - aD^0)^k f(t) = D^k(e^{-at}f(t)).$$

Da er

$$\begin{aligned} e^{at}D^{k+1}(e^{-at}f(t)) &= e^{at}D[D^k(e^{-at}f(t))] = \\ e^{at}D[e^{-at}(D - aD^0)^k f(t)] &= \\ e^{at}[-ae^{-at}(D - aD^0)^k f(t) + e^{-at}D(D - aD^0)^k f(t)] &= \\ (D - aD^0)(D - aD^0)^k f(t) &= (D - aD^0)^{k+1} f(t). \quad \# \end{aligned}$$

Vi kan nu af denne sætning se, at en bestemmelse af nulrummet for operatoren $(D - aD^0)^m$, bliver at finde de funktioner f , som opfylder

$$(D - aD^0)^m f(t) = 0 \quad \text{eller} \quad D^m(e^{-at}f(t)) = 0.$$

Funktioner, der opfylder $D^m g(t) = 0$, er alle polynomier af grad højst $m - 1$, dvs

$$e^{-at}f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}$$

hvor alle c_i kan vælges frit. Derfor er

$$f(t) = (c_0 + c_1 t + \dots + c_{m-1} t^{m-1}) e^{at}$$

eller

$$N((D - aD^0)^m) = \text{Sp}\{e^{at}, te^{at}, \dots, t^{m-1}e^{at}\}.$$

Eksempel B1. Er $L = D^2 + 4D + 3D^0$ er det tilhørende andengrads-polynomium $p(t) = t^2 + 4t + 3 = (t + 1)(t + 3)$, og derfor bliver nulrummet $N(L) = \text{Sp}\{e^{-t}, e^{-3t}\}$.

Eksempel B2. Er $L = D^2 + 4D + 4D^0$ er det tilhørende andengrads-polynomium $p(t) = t^2 + 4t + 4 = (t + 2)^2$, og derfor bliver nulrummet $N(L) = \text{Sp}\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$.

Eksempel B3: Er $L = D^4 - 2D^2 + D^0$ er det tilhørende fjerdegrads-polynomium $p(t) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t + 1)^2(t - 1)^2$, og derfor bliver nulrummet $N(L) = \text{Sp}\{e^{-t}, te^{-t}, e^t, te^t\}$.

Indtil nu har der kun været behandlet den situation, hvor faktoropløsningen er reel, men vi ved, at fx andengradspolynomiet

$$p(t) = t^2 + 4t + 5 = (t + 2 + i)(t + 2 - i).$$

Vi ved imidlertid også, at de komplekse rødder i et andengrads-polynomium med reelle koefficienter vil være komplekst konjugerede, dvs er $\alpha + i\beta$ rod vil også $\alpha - i\beta$ være rod, og man har at

$$p(t) = (t - (\alpha + i\beta))(t - (\alpha - i\beta)) = t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 + \beta^2$$

Derfor vil nulrummet for $p(D) = D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$ have basis

$$\{e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t}\}.$$

Disse funktioner er imidlertid ikke reelle, og tilhører derfor ikke C^∞ . Vi skal dog undersøge, om det med en passende valgt (kompleks) linearkombination af disse funktioner er muligt at finde en reel funktion. Hertil kan vi benytte, at

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

og man kan således omskrive et element i nulrummet på følgende måde

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}[(c_1+c_2)\cos\beta t + i(c_1-c_2)\sin\beta t] \\ &= k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

og netop når

$$c_1 = (k_1 - ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 + ik_2)/2$$

med $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, vil f blive en reel funktion.

Vi kan således se, at også $\{e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t\}$ vil være en basis for $N(p(D))$, og den har tilmed den fordel, at dens elementer er reelle funktioner.

Eksempel B4. Er $L = D^2 + 4D + 5D^0$ er det tilhørende andengradspolynomium $p(t) = t^2 + 4t + 5 = (t + 2 + i)(t + 2 - i)$ som vist ovenfor, og man har da $N(L) = \text{Sp}\{e^{-2t}\cos t, e^{-2t}\sin t\}$.

Hvis $\alpha + i\beta$ er rod i polynomiet med multiplicitet k , vil tilsvarende $\alpha - i\beta$ være rod i polynomiet med multiplicitet k , og man kan på en tilsvarende måde som ovenfor vise, at de to komplekse basiselementer $t^i e^{(\alpha+i\beta)t}$ og $t^i e^{(\alpha-i\beta)t}$ kan erstattes med de to reelle basiselementer

$$t^i e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{og} \quad t^i e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Således kan vi nu opsamle vores resultater om fastlæggelse af en basis for nulrummet til den lineære differentialoperator $L = p(D)$ hvor

$$p(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1t + b_0.$$

a) Er a en enkelt reel rod i $p(t)$ vil

$$e^{at} \in N(L)$$

b) Er a en reel rod med multiplicitet k i $p(t)$ vil

$$e^{pt}, te^{pt}, \dots, t^{k-1}e^{pt} \in N(L)$$

- c) Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ enkle, komplekst konjugerede rødder i $p(t)$, vil

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t \in N(L)$$

- d) Er endelig $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ komplekst konjugerede rødder med multiplicitet k i $p(t)$, vil

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t \in N(L)$$

Egenrum for lineære differentialoperatorer.

I Griffel, kapitel 5G er vist, at hvis μ er egenværdi for en lineær afbildning $g: V \rightarrow V$, vil samtlige egenvektorer for g svarende til egenværdien μ - sammen med 0-elementet - være et underrom. Dette underrom kaldes egenrummet for μ - E_μ . Det er endvidere vist, at dette egenrum er nulrummet for afbildningen $g - \mu i$, dvs $E_\mu = N(g - \mu i)$.

Er således $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ en lineær differentialoperator kan man efterspørge egenfunktionerne for L svarende til en egenværdi μ , dvs finde samtlige funktioner $f \in C^\infty$, som opfylder

$$Lf = \mu f,$$

hvilket jfr den nævnte sætning svarer til at finde en basis for nulrummet $N(L - \mu D^0)$.

Afsnit C: Diagonalisering af matricer og JORDAN's normalform

Som det fremgår af Griffel, kapitel 8A kan en $n \times n$ matrix A diagonaliseres hvis og kun hvis der findes en basis for \mathbb{C}^n af egenvektorer for matricen A .

Med udgangspunkt i denne sætning antager vi nu, at A har egenverdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (hvor flere egenverdier kan være ens) med de tilhørende egenvektorer v_1, \dots, v_n (som er lineært uafhængige). Der gælder da, at

$$\forall i : Av_i = \lambda_i v_i.$$

Indføres nu matricen $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, vil S i søjlerne netop have alle de lineært uafhængige egenvektorer. Da er

$$\begin{aligned} AS &= (Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n) \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= SD \end{aligned}$$

hvor D er en diagonalmatrix med egenverdierne i diagonalen, netop opskrevet i den samme rækkefølge, som egenvektorerne er opskrevet i transformationsmatricen S . Da søjlerne i S er lineært uafhængige svarer $AS = SD$ til at

$$D = S^{-1}AS.$$

Spørgsmålet er nu, hvad der sker, når man ikke har en basis for \mathbb{C}^n af egenvektorer for A .

For det første kan man nøjes med at undersøge de egenverdier, hvor

$$gm(\lambda) < algm(\lambda).$$

Til de øvrige egenverdier er der egenvektorer "nok". Mangler der egenvektorer suppleres listen af egenvektorer (der er dog altid mindst én) med det antal lineært uafhængige vektorer, der svarer til differensen

$$algm(\lambda) - gm(\lambda).$$

Det kan vises, at man altid på en nøje foreskreven måde kan finde en sådan lineært uafhængig mængde knyttet til egenværdien λ .

Tilfældet $gm(\lambda) = 1$.

Vi betragter først det tilfælde, hvor den aktuelle egen værdi har $gm(\lambda) = 1$ og $algm(\lambda) = k$. Således er den eneste egenvektor bestemt af

$$Av_1 = \lambda v_1 \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_1 = 0$$

De resterende vektorer skal da bestemmes af følgende algoritme

$$Av_2 = \lambda v_2 + v_1 \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_2 = v_1$$

$$Av_3 = \lambda v_3 + v_2 \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_3 = v_2$$

⋮

$$Av_k = \lambda v_k + v_{k-1} \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}$$

Påstanden, som vi benytter uden bevis, er da, at man altid kan finde disse vektorer v_2, v_3, \dots, v_k , og vi skal senere vise, at disse sammen med v_1 vil udgøre en lineært uafhængig mængde.

Sættes som før $S = (v_1, v_2, \dots, v_k)$

bliver $AS = (Av_1, Av_2, \dots, Av_k)$

$$= (\lambda v_1, \lambda v_2 + v_1, \dots, \lambda v_k + v_{k-1})$$

$$= S \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= SJ$$

Denne matrix J kaldes en **jordanmatrix**, og den består af egen værdierne for A i diagonalen og af et 1-tal lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i S står en "konstrueret" (eller "synetisk" fremstillet) vektor. De k lineært uafhængige vektorer, der udgør søjlerne i S , kaldes tilsvarende en **jordanbasis**.

Eksempel C1. Med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bliver det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3$, dvs $\lambda = 1$ er den eneste egen værdi. Af $(A - \lambda E)v_1 = 0$ kan man nu bestemme egenvektorerne svarende til egen værdien 1, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og man får, at $-z = 0$ og $x + y = 0$. Således bliver den eneste egenvektorretning fastlagt til fx

$$v_1 = (-1, 1, 0)^T.$$

Benyttes nu algoritmen skal vi altså finde v_2 , således at

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvilket giver $-z = -1$ og $x + y = 1$ dvs

$$v_2 = (1, 0, 1)^T$$

Bemærk at man lige så vel kunne have valgt $(0, 1, 1)^T$ eller $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^T$

Algoritmen skal fortsættes, således at man finder v_3 af

$$(A - \lambda E)v_3 = v_2,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der giver $-z = 1$ og $x + y = 0$, dvs vektorretningen bliver fx

$$v_3 = (0, 0, -1)^T.$$

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og for at sikre at der er regnet rigtig skal $AS = SJ$, hvilket en simpel udregning bekræfter. #

Vi skal nu vise, at den konstruerede mængde $R = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ er lineært uafhængig.

Sættes nu $T = A - \lambda E$, bliver $Tv_k = v_{k-1}$, $T^2v_k = Tv_{k-1} = v_{k-2}$, ..
... , $T^{k-1}v_k = v_1$ samt $T^k v_k = Tv_1 = 0$ (da v_1 er en egenvektor). Da er T en nilpotent operator af grad k , og mængden

$$R = \{T^{k-1}v_k, T^{k-2}v_k, \dots, Tv_k, v_k\},$$

er ifølge sætning A1 lineært uafhængig. Vi så samtidig i eksempel A4, at underrummet $W = \text{Sp}(R)$ var invariant under A , og med R som basis for W viste vi tillige i eksempel A4, at

$$A(T^j v_k) = T^{j+1} v_k + \lambda T^j v_k$$

og den til A svarende matrix i basen R er netop jordanmatrixen J .

Tilfældet $gm(\lambda) > 1$.

Vi går nu over til det tilfælde, hvor der er flere lineært uafhængige egenvektorer svarende til egenværdien λ , men færre end den algebraiske multiplicitet, fx $algm(\lambda) = k$. Er v_1, v_2, \dots, v_j , det maksimale antal lineært uafhængige egenvektorer, således at $gm(\lambda) = j < k$, ved vi fra eksempel A1, at hver af disse er basis for et 1-dimensionalt underrum, der er invariant over for A .

Man bestemmer - i princippet - den eller de manglende vektorer lige som i tilfældet $gm(\lambda) = 1$, men det er nu ikke umiddelbart klart, hvilken vektorretning i egenrummet E_λ man skal benytte. Men påstanden er, at man altid kan finde en vektorretning $u \in E_\lambda$, således at algoritmen fra før vil fungere, dvs at

$$Av_{j+1} = \lambda v_{j+1} + u \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_{j+1} = u$$

$$Av_k = \lambda v_k + v_{k-1} \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}.$$

Vælges nu som før disse vektorer som søjlerne i S , dvs

$$S = (u, v_{j+1}, \dots, v_k)$$

Da bliver

$$\begin{aligned} AS &= (Au, Av_{j+1}, \dots, Av_k) \\ &= (\lambda u, \lambda v_{j+1} + u, \dots, \lambda v_k + v_{k-1}) \\ &= SJ \end{aligned}$$

hvor J igen er en jordanmatrix, men nu med $k-j+1$ rækker og søjler. Sammenholder vi imidlertid dette invariante underrum med det invariante underrum, der blev udspændt af de resterende $j-1$ egenvektorer, vil A i en basis udspændt af disse to underrum tilsammen være repræsenteret af matrixen

$$\begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

hvor der står egenværdier i diagonalen og 1-taller lige over diagonalen i netop de sidste $k-j$ søjler, svarende til at de tilhørende vektorer ikke er egenvektorer, men er "syntetisk" frem-

stillede vektorer.

Skal man rent praktisk finde den påståede vektorretning u ($\in E_\lambda$), som skal benyttes ved beregningen af de resterende "syntetiske" vektorer, tager man udgangspunkt i matrixligningen

$$(A - \lambda E)v_{j+1} = u.$$

Vektoren u må således tilhøre billedrummet for matricen $A - \lambda E$, hvilket imidlertid er identisk med, at vektoren kan udspændes af søjlerne i matricen $A - \lambda E$. Da matricen $A - \lambda E$ er 'kraftigt' singular vil billedrummet for den som regel være udspændt af en eller meget få lineært uafhængige søjler.

Som i tilfældet $gm(\lambda) = 1$ kan man også her vise, at den konstruerede mængde $R = \{u, v_{j+1}, \dots, v_k\}$ vil være lineært uafhængig.

Er $T = A - \lambda E$, bliver $Tv_k = v_{k-1}$, .., $T^{k-j}v_k = u$ og $T^{k-j+1}v_k = Tu = 0$, og derfor bliver $R = \{T^{k-j}v_k, \dots, Tv_k, v_k\}$, som jfr eksempel A4 er lineært uafhængig.

Eksempel C2. Matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E) = -(1 + \lambda)^3$, dvs den eneste egen værdi er -1 med $algm(-1) = 3$. Af $(A - \lambda E)v = 0$ får man tre ens ligninger af formen

$$x - 2y + z = 0,$$

der jo udspænder en plan i \mathbb{R}^3 , dvs $gm(-1) = 2$, og en basis for egenrummet E_{-1} er fx

$$\{(2, 1, 0)^T; (1, 0, -1)^T\}.$$

Da matricen

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

må det betyde, at vektorretningen $(1, 1, 1)^T \in E_{-1}$ udspænder billedrummet for matricen $A - \lambda E$, og den vil derfor være det eneste mulige bud på vektoren u . Således vil matrixligningen

$$(A - \lambda E)v_3 = u$$

give tre identiske ligninger

$$x - 2y + z = 1$$

og man får fx $v_3 = (1, 0, 0)^T$.

Bemærk, at man også kunne have valgt $(0, 0, 1)^T$ eller $(0, -\frac{1}{2}, 0)^T$.

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at egenvektoren $(1, 1, 1)^T$ skal stå i matricen S som den sidste af de to lineært uafhængige egenvektorer. Den er benyttet til konstruktionen af den ekstra vektor, og den er derfor det første element i basen R for det invariante underrum. Det bekræftes let ved udregning, at $AS = SJ$. #

Opsummering

Vi betragter nu $n \times n$ -matricen A, som man om muligt vil diagonalisere. Man finder da først samtlige egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ over \mathbb{C} , den samlede algebraiske multiplicitet af alle egenverdier er n. Derpå bestemmer man for hver egenverdi λ_i samtlige egenvektorer og om nødvendigt de "syntetiske" vektorer, således at disse vektorer tilsammen udspænder et underrum U_i , hvor $\dim U_i = \text{algm}(\lambda_i)$. Som vi så vil U_i være invariant over for A, og derfor vil

$$\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \dots \oplus U_m.$$

I denne basis kan vi fastlægge den til A svarende matrix ved at sammensætte den af blokke, der kun vedrører et underrum, således som det er vist i det foregående.

Afsnit D: Supplerende opgaver

1. C^0 er mængden af alle reelle, kontinuerte funktioner. Der er givet følgende mængder

$$F_1 = \{ f \in C^0 \mid f(1) = 0 \}$$

$$F_2 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 1 \}$$

$$F_3 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der er underrum i C^0 .

2. P_3 er mængden af alle reelle polynomier af højst tredje grad. Idet p' betyder den afledede af p , defineres følgende mængder

$$Q_1 = \{ q \in P_3 \mid q'(t) - 2q(t) = t^3 \}$$

$$Q_2 = \{ q \in P_3 \mid tq'(t) - 2q(t) = 0 \}$$

$$Q_3 = \{ q \in P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 2q(t) = 0 \}$$

$$Q_4 = \{ q \in P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 3q(t) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i P_3 . Bestem endvidere samtlige de polynomier, som tilhører mængden Q_3 henholdsvis mængden Q_4 .

3. C^p er mængden af alle reelle, p gange (kontinuerte,) differentiable funktioner. Idet f' betyder den afledede af f , defineres følgende mængder

$$G_1 = \{ f \in C^1 \mid f' + af = 0 \}$$

$$G_2 = \{ f \in C^1 \mid f' + f^2 = 0 \}$$

$$G_3 = \{ f \in C^2 \mid f'' + af' + bf = 0 \}$$

hvor a og b er reelle tal. Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i C^1 .

4. En kvadratisk matrix A kaldes skæv-symmetrisk, hvis det gælder at $A^T = -A$.
- Vis, at ethvert diagonalelement i en skæv-symmetrisk matrix vil være 0.
 - Nedskriv en 3×3 skæv-symmetrisk matrix.
 - Vis, at såfremt en matrix skal være både symmetrisk og skæv-symmetrisk, må den være 0-maticen.

d. Vis, at enhver kvadratisk matrix kan skrives som sum af en symmetrisk og en skæv-symmetrisk matrix.

5. Der er givet matricerne

$$\begin{aligned} E(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & E(1,2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E(2,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & E(2,2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vis da, at $E(i,j) \cdot E(j,k) = E(i,k)$ for alle $i,j,k = 1,2$ og at $E(i,j) \cdot E(k,l) = 0$, hvis $i,j,k,l = 1,2$ og $j \neq k$.

Vis derpå, at enhver reel 2×2 -matrix på entydig måde kan skrives som linearkombination af disse fire matricer.

$M_{2,2}$ betegner mængden af alle reelle 2×2 -matricer. Vis, at $M_{2,2}$ er et vektorrum, og fastlæg rummets dimension.

6. Fastlæg samtlige reelle 2×2 -matricer B , der vil kommutere med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(dvs $AB = BA$). Vis, at mængden af sådanne matricer B vil være et underrum i $M_{2,2}$, og bestem underrummets dimension.

7. Vi skal nu generalisere opgave 5 til $n \times n$ -matricer. Således står $E(i,j)$ for den $n \times n$ -matrix, der har 1 på den i,j -te plads og 0 på alle øvrige pladser. Godtgør da, at

$$E(i,j) \cdot E(k,l) = \delta_{j,k} \cdot E(i,l)$$

hvor $i,j,k,l = 1,2, \dots, n$ ($\delta_{j,k} = 1$ for $j = k$ og ellers $= 0$). Idet $M_{n,n}$ betegner mængden af alle reelle $n \times n$ -matricer, skal det vises, at $M_{n,n}$ er et vektorrum, og bestem rummets dimension.

8. $U_{n,n}$ betegner mængden af alle reelle, øvre $n \times n$ -trekantmatricer. Godtgør, at $U_{n,n}$ er et underrum i $M_{n,n}$, og bestem dimensionen af $U_{n,n}$. Tilsvarende betegner $S_{n,n}$ mængden af alle reelle, symmetriske $n \times n$ -matricer og $T_{n,n}$ mængden af alle de skæv-symmetriske. Vis, at såvel $S_{n,n}$ som $T_{n,n}$ er underrum i $M_{n,n}$ og bestem rummets dimensioner.

9. Idet P_2 er mængden af alle reelle polynomier af højst anden grad betragtes de fire polynomier

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 2t^2 + t, & p_1(t) &= t^2 \\ p_2(t) &= -t^2 + t + 1, & p_3(t) &= -t - 1 \end{aligned}$$

Vis, at disse fire er lineært afhængige, og bestem et lineært uafhængigt sæt af tre af disse polynomier.

Vis endelig, at ethvert element i P_2 kan skrives som linearkombination af disse tre polynomier.

10. Man betragter vektorrummet \mathbb{C}^3 over \mathbb{C} . Der er givet følgende sæt af vektorer

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ (1, 0, 0); (0, 1, i); (1, i, -1) \} \\ S_2 &= \{ (1, -1, i); (i, 0, 1); (0, 1, i) \} \\ S_3 &= \{ (i, i, i); (1, 1, -1); (1, i, 0) \} \end{aligned}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der lineært uafhængige, og bestem koordinaterne til vektoren $(1, 2i, -3)$ med hensyn til S_2 .

11. Vis, at hvert af følgende sæt af polynomier i P_3 (rummet af alle reelle polynomier af grad ≤ 3) vil udgøre en basis for P_3 .

$$\begin{aligned} \{ 1, 1 + t, t + t^2, t^2 + t^3 \} \\ \{ 1, 1 + t, 1 + t^2, 1 + t^3 \} \end{aligned}$$

og fastlæg koordinaterne til polynomiet $p(t) = t^3 - t^2$ i forhold til hver af baserne.

12. Betragt vektorrummet \mathbb{C}^3 over \mathbb{R} . Hvilken dimension har dette vektorrum (se tillige i Griffel, kapitel 3, opgave 24).

13. Løs ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. Angiv for hver værdi af det reelle tal a mængden af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned}x &+ z + aw = 1 \\x + y + z &= 1 \\y + z - w &= 1 \\x + y &- w = 1\end{aligned}$$

15. Bestem det reelle tal b således, at ligningssystemet

$$\begin{aligned}x - y + z + w &= 1 \\y + z + w &= 0 \\-x + y - 4z + 5w &= b + 4 \\2x - 2y + 5z + bw &= 1\end{aligned}$$

har mindst en løsning, og fastlæg for hvert sådant b samtlige løsninger til systemet.

16. Der er givet matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestem såvel række- som søjlerang for matricen B . Betegner M en matrix på trappeform, som er rækkeækvivalent med B , skal man udregne B^2 og M^2 . Vil disse to matricer have samme rækkerang?

17. Angiv en basis for løsningsrummet for ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 0 & -x - 2y + 3z &= 0 \\4x + 8y - 12z &= 0 & x - y + 5z &= 0,\end{aligned}$$

og bestem de talsæt $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= b_1 & -x - 2y + 3z &= b_2 \\4x + 8y - 12z &= b_3 & x - y + 5z &= b_4\end{aligned}$$

har mindst én løsning.

18. Bestem det reelle tal b således at ligningssystemet

$$\begin{aligned}4x - 5y - 2z + 3w &= 3 \\3x - 2y - 5z + 4w &= 4 \\2x - 5y + 4z - w &= b\end{aligned}$$

har mindst én løsning. Bestem den fuldstændige løsning til

ligningssystemet med dette valg af b.

19. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 2 \\3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 3.\end{aligned}$$

20. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem løsningsmængden til ligningssystemet $Ax = 0$. Fastlæg derpå vektoren b, således at ligningssystemet $Ax = b$ har mindst én løsning.

21. Idet P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredje grad, defineres operatorerne $Q_1, Q_2: P_3 \rightarrow P_3$ ved

$$Q_1p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t)$$

$$Q_2p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 3p(t)$$

for alle reelle t. Bestem nulrum og billedrum for begge operatorer.

22. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, er de fire differentialoperatorer $L_1, L_2, L_3, L_4: C^\infty \rightarrow C^\infty$ givet ved

$$L_1f = f'' - 2f' - 3f$$

$$L_2f = f'' - 2f' + f$$

$$L_3f = f'' - 2f' + 5f$$

$$L_4f = f' + f$$

Bestem en basis for hvert af nulrummene $N(L_1), N(L_2)$ og $N(L_3)$. Fastlæg dernæst en basis for hvert af nulrummene $N(L_2 \circ L_2)$ og $N(L_4 \circ L_1)$.

23. Når $M_{3,3}$ er rummet af alle reelle 3×3 -matricer, defineres en lineær afbildning $f: M_{3,3} \rightarrow M_{3,3}$ ved, at $f(X) = M \cdot X$, idet matricen M er fastlagt ved

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem nulrum og billedrum for afbildningen f .

24. Lad de lineære afbildninger $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ og $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i en passende valgt basis være givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$, og fastlæg på denne baggrund $B(gf)$.

25. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for $B(f)$, $N(f)$ samt for $B(f) \cap N(f)$, og benyt dette til at bestemme en basis for $B(f^2)$.

26. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

og bestem en basis for såvel $B(g)$ som for $N(g)$. Godtgør, at $B(g) = N(g)$, og bestem på denne baggrund $B(g^2)$.

27. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er for alle tal $a, b \in \mathbb{R}$ givet ved

$$Lf = f'' + af' + bf.$$

Bestem tallene a og b , når funktionerne

$$\phi_1(t) = e^{-t} \quad \text{og} \quad \phi_2(t) = e^{2t}$$

er basis for nulrummet $N(L)$. Bestem tillige en basis for nulrummet, hvis $a = 7$ og $b = 10$.

28. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^3 - 3D - 2D^0)f.$$

Fastlæg en basis for nulrummet $N(L)$ samt en basis for egenrummet svarende til -4 .

29. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f.$$

Vis, at det tilhørende polynomium vil have rødderne i og $-i$ med multiplicitet 2, og fastlæg derpå en basis for nulrummet $N(L)$ af reelle funktioner.

30. Fastlæg det reelle tal a , således at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & a \end{pmatrix}$$

vil have egenværdien -1 .

31. Lad $A_{s,t}$ betegne matricen

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Bestem tallene s og t , når vektoren $(1,1,1)$ er egenvektor for matricen $A_{s,t}$, find derpå samtlige egenværdier for matricen. Er det muligt at bestemme en basis for \mathbb{R}^3 af egenvektorer for matricen?

32. Bestem samtlige egenværdier til matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og bestem de tilhørende egenvektorer. Kan man fastlægge en basis af egenvektorer for B ?

33. Der er givet en lineær afbildning $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + 4D + D^0)f.$$

Vis, at funktionen $\phi(t) = te^{-2t}$ tilhører egenrummet svarende til egenværdien -3 , og bestem derpå en basis for dette rum.

34. Bestem det reelle tal s således, at matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & s & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenværdien -1 . Bestem i dette tilfælde alle egenværdier og egenvektorer. Kan matricen diagonaliseres?

35. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fastlæg en basis for \mathbb{R}^4 , som består udelukkende af egenvektorer for f .

36. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi og én egenvektor, og bestem derpå en basis for \mathbb{R}^3 , så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

37. Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi med to lineært uafhængige egenvektorer, og bestem derpå en basis for \mathbb{R}^3 , så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix.

38. Bestem den løsning til det lineære differentiaallignings-system

$$f_1' = 2f_1 + f_2 - f_3$$

$$f_2' = f_1 + f_2 - f_3$$

$$f_3' = f_1 + f_2$$

som opfylder, at $f(0) = (3, 2, 1)^T$.

39. Bestem den løsning til det lineære differentiaallignings-system

$$g_1' = -11g_1 + g_2 + 2g_3$$

$$g_2' = 4g_1 - 11g_2 - 4g_3$$

$$g_3' = -4g_1 + 2g_2 - 5g_3$$

som opfylder, at $g(0) = (1, 2, -1)^T$.

Opgavesæt A:

- A 1. Angiv for alle talpar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ antallet af løsninger til ligningssystemet

$$x - y + z - 2w = -1$$

$$x + 2z - w = 2$$

$$y + z + 2w = a$$

$$-x + y - z + bw = 1$$

og løs derpå ligningssystemet for $(a, b) = (3, 2)$.

- A 2. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at A ikke kan diagonaliseres.

Vis dernæst, at A ved et passende basisskifte kan bringes på jordans normalform.

Benyt fx dette til at løse differentiaalligningssystemet

$$f'(t) = Af(t), \quad \text{med } f(0) = (1, 1, 1, 1)^T.$$

- A 3. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte diffe-

rentiable funktioner, defineres en operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Bestem a og b således at funktionen

$$\alpha: t \rightarrow te^{-2t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien 8, og fastlæg endelig en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien 8.

- A 4. Lad U og V betegne henholdsvis nulrum og billedrum for en lineær afbildning g af \mathbb{R}^4 ind i sig selv fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en basis for hvert af rummene U , V og $U \cap V$. Fastlæg på denne baggrund en basis for billedrummet for g^2 .

Opgavesæt B:

- B 1. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. Vis, at funktionen

$$\alpha: t \rightarrow t \cos t$$

tilhører nulrummet for operatoren $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ givet ved

$$Lf = (D^4 + 2D^2 + D^0)f,$$

og fastlæg herefter en basis for nulrummet. Fastlæg tillige en basis for egenrummet svarende til egenværdien 1.

- B 2. Lad A være matricen givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad f og g være de lineære afbildninger svarende til henholdsvis A og A^T .

Bestem ortogonale baser for nulrummet for $f - N(f)$ - og for billedrummet for $g - B(g)$. Vis, at disse to baser udgør en orthogonal basis for \mathbb{R}^5 .

B 3. Lad B betegne matricen

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

hvor (a,b,c) er et sæt af komplekse tal, hvorom det gælder, at $(1,1,1)$ er en egenvektor for B . Find samtlige egenverdier for B .

Afgør hvornår B er regulær, og vis, at nulrummet i modsat fald har dimension 1.

Begrund, at enhver basis bestående af egenvektorer vil være ortogonal, hvis a , b og c er reelle tal.

B 4. De to matricer V og U er givet ved

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bevis, at $U = V + V^2 + V^3$, $U^4 = V^4 = 0$
og $UV = VU = U - V$.

Sætter vi $A_t = E + tV$ og $B_t = E + tU$
vis da, at $B_t^{-1} = A_{-t}$.

Vis endelig, at det for alle reelle $t \neq 0$ gælder, at A_t er jordans normalform for B_t , og bestem en matrix S_t , så

$$B_t = S_t A_t S_t^{-1}.$$

Opgavesæt C:

C 1. De lineære afbildninger $f, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & -10 \\ -3 & -5 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$ og at $B(g) \cap N(f) = \{0\}$, og bestem $B(gf)$ og $B(fg)$.

- C 2. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle talpar (a,b) en lineære operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f.$$

Fastlæg talparret (a,b) , således at funktionen

$$\beta: t \rightarrow e^{-t}\cos 2t$$

tilhører nulrummet for L .

Bestem derpå en basis for nulrummet, samt en basis for egenrummet svarende til egenværdien -10 .

- C 3. Vis, at matricen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu + 4)(\mu + 2)^3,$$

og vis tillige, at egenrummet svarende til egenværdien -2 vil have dimension 2.

Foretag derpå et basisskifte, således at matricen A vil transformere til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at bestemme løsningen til differentiaalligningssystemet

$$f'(t) = Af(t), \quad \text{hvor} \quad f(0) = (0, 1, 2, 0)^T.$$

- C 4. $P_3[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 3. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Fastlæg en ortogonal basis for underrummet

$$Q = \{ p \in P_3 \mid p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0 \}.$$

Beskriv dernæst de polynomier, der tilhører Q^\perp (det ortogonale komplement til Q) og vis, at polynomierne

$$\alpha(t) = 5t^2 - 1, \quad \beta(t) = 7t^3 - 3t$$

er en ortogonal basis for Q^\perp .

De ortogonale baser i Q og Q^\perp vælges nu som basis for P_3 . Bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 + 3.$$

Opgavesæt D:

D 1. Lad U og V være nulrum og billedrum for den lineære afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, der er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en parameterfremstilling for hvert af rummene U , V og $U \cap V$, og fastlæg endelig billedrummet for afbildningen f^2 .

D 2. $P_2[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

Med Q betegnes det underrum, der udspændes af polynomierne

$$\alpha(t) = t + 1, \quad \beta(t) = t^2 - t.$$

Vis, at $\{\alpha, \beta\}$ er en ortogonal basis for Q .

Bestem derpå en basis for det ortogonale komplement til Q - kaldet Q^\perp .

Man vælger nu disse baser for Q og Q^\perp som basis for hele P_2 , og bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 - 3.$$

D 3. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en lineær operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lg = (D^3 - 3D + 2D^0)g.$$

Fastlæg en basis for nulrummet for L .

Funktionen

$$\alpha: t \rightarrow te^{-t}$$

tilhører et egenrum for L . Bestem den tilhørende egenverdi samt en basis for egenrummet.

D 4. Den lineære afbildning $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at afbildningen F vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)^2$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg endelig en basis i \mathbb{R}^4 , således at den til F svarende matrix i denne basis vil være på Jordans normalform.

Opgavesæt E:

E 1. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Bestem en ortogonal basis for både billedrummet - $B(f)$ - og nulrummet - $N(f)$ - for denne afbildning.

Vis, at disse baser tilsammen vil udgøre en ortogonal basis for \mathbb{R}^4 , og fastlæg endelig en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2 .

E 2. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle $a, b \in \mathbb{R}$ en operator $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ ved

$$Lf = (D^2 + aD + bD^0)f.$$

Bestem tallene a og b , således at funktionen

$$\beta: t \rightarrow te^{-t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien -4 .

Fastlæg derpå en basis for nulrummet for L - $N(L)$.

En anden operator $M: C^\infty \rightarrow C^\infty$ er defineret ved

$$Mf = (D + 3D^0)f$$

Bestem endelig en basis for nulrummet svarende til den sammensatte operator $M \circ L$.

E 3. Vis, at matricen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^3$$

og vis endvidere, at matricen A ikke kan diagonaliseres. Foretag derpå et basisskifte, således at matricen A transformeres til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at vise, at samtlige løsninger til differentiaalligningssystemet

$$f'(t) = Af(t) \quad \text{vil konvergere mod } 0 \text{ for } t \rightarrow \infty.$$

E 4. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er i standardbasen givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis, at de tre vektorer

$$u_1 = (1, -1, 0)^T, \quad u_2 = (2, -1, -1)^T, \quad u_3 = (0, 0, -1)^T$$

kan vælges som basis i \mathbb{R}^3 .

Et element $x \in \mathbb{R}^3$ har i standardbasen et koordinatsæt x_s og i u -basen - $\{u_1, u_2, u_3\}$ et koordinatsæt x_u . Fastlæg koordinatskiftematrixen P , således at

$$x_u = Px_s$$

Fastlæg endelig den til g svarende matrix i u -basen.

Opgavesæt F:

F 1. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i standardbasen fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestem en basis for såvel nulrummet - $N(f)$ - som billedrummet - $B(f)$ - for denne afbildning.

Bestem tillige en basis for $N(f) \cap B(f)$ samt en basis for billedrummet svarende til afbildningen f^2 .

F 2. En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -11 & 1 & 2 \\ 4 & -11 & -4 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Vis, at g kun vil have én egenværdi, samt at den til g svarende matrix ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis for \mathbb{R}^3 , så den til g svarende matrix i denne basis vil være en jordanmatrix, og opskriv endelig denne jordanmatrix.

F 3. Bestem samtlige egenværdier inden for \mathbb{C} for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at A kan diagonaliseres inden for \mathbb{C} .

Benyt fx dette til at bestemme den reelle løsning til differentialligningssystemet

$$f'(t) = Af(t), \quad f(0) = (1, -1, 1, 0)^T.$$

F 4. I \mathbb{R}^5 er de to underrum U og V givet ved

$$U = \text{Sp}\{(1, 0, 1, 0, -2); (2, 0, 0, 1, -3); (p, 1, 0, 0, -4)\}$$

$$V = \text{Sp}\{(-1, 3, 1, 2, 0); (-3, 1, -1, 0, q)\}$$

Fastlæg konstanterne p og q , således at $U \perp V$. De her fundne værdier af p og q anvendes i det følgende.

Bestem derpå en ortogonal basis for såvel U som V .

Fastlæg endelig en mulig matrix for en lineær afbildning $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, hvor $V = B(F)$ - billedrummet for F - og en matrix for en lineær afbildning $G: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, hvor $U = N(G)$ - nulrummet for G .

Opgavesæt G:

G 1. En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

\mathbb{R}^4 er i det følgende forsynet med det sædvanlige indre produkt. Vis da, at $N(f) \perp B(f)$ - dvs at nulrum og billedrum for f vil være ortogonale.

Fastlæg derpå en ortogonal basis for såvel $N(f)$ som $B(f)$, og vis at disse baser tilsammen vil være en ortogonal basis for \mathbb{R}^4 .

Fastlæg tilslut en ortogonal basis for $B(f^2)$ - billedrummet for afbildningen $f \circ f$.

G 2. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. En lineær differentialoperator L på dette rum er givet ved

$$L = D^2 - 2D + D^0.$$

Bestem en basis for nulrummet - $N(L)$, samt en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien -4 .

Bestem endelig en basis for egenrummet for operatoren $L \circ L$ svarende til egenværdien 16 .

G 3. Vis, at vektorerne

$$b_1 = (1, 1, 1)^T, \quad b_2 = (-1, 0, 1)^T, \quad b_3 = (2, 1, -1)^T$$

vil være en basis for \mathbb{R}^3 .

En lineær afbildning $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er i standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ givet ved

$$g(e_1) = 2e_2 + e_3$$

$$g(e_2) = e_1 + 3e_3$$

$$g(e_3) = e_1 + e_2.$$

Opskriv den til g svarende matrix i standardbasen, og fastlæg tillige den til g svarende basis i forhold til b -basen - $\{b_1, b_2, b_3\}$.

G 4. Bestem samtlige egenverdier for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og vis, at matricen A ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg derpå en basis i \mathbb{R}^4 således, at den til A svarende matrix i denne basis vil være på jordans normalform.

Benyt fx dette til at bestemme den løsning til det lineære differentiaalligningssystem

$$f'(t) = Af(t)$$

som opfylder $f(0) = (1, 2, 0, -1)^T$.

Opgavesæt H:

H 1. Rummet \mathbb{R}^4 tænkes forsynet med standardbasen. I \mathbb{R}^4 er givet underrummene

$$U = \text{Sp}\{(1, 2, -1, 1)^T; (3, 1, 0, 2)^T\}$$

$$V = \text{Sp}\{(1, 1, 1, -2)^T; (3, 0, 2, -1)^T\}$$

Vis, at $\dim(U \cap V) = 1$, og fastlæg en basis for $U \cap V$.

Fastlæg dernæst en ortogonal basis $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ i \mathbb{R}^4 , således at $b_1, b_2 \in U$ og $b_2, b_3 \in V$.

Om en lineær afbildning $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vides, at

$$N(f) = U \quad \text{og} \quad B(f) = V$$

Fastlæg på denne baggrund en mulig matrixrepræsentation for f i B -basen, og bestem endelig med den valgte matrix en basis for $B(f^2)$.

H 2. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. På dette rum er givet en fjerde ordens lineær differentialoperator L , ved

$$L = D^4 + a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0 D^0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Om denne operator L oplyses, at

a) funktionen $\alpha: t \rightarrow t$ tilhører egenrummet for L svarende til egenværdien $4/3$, og

b) funktionen $\beta: t \rightarrow te^t$ tilhører nulrummet for L .

Fastlæg på denne baggrund differentialoperatoren L .

H 3. Vis, at matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4)^2,$$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Foretag et basisskifte, så matricen vil transformere til en jordanmatrix.

H 4. P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredje grad. På dette rum defineres for alle heltallige værdier af n en lineær operator L_n ved

$$L_n p(t) = (1 - t^2)p''(t) - 2tp'(t) + np(t).$$

Bestem de til L_n svarende egenverdier og egenpolynomier, og fastlæg de værdier af n , for hvilke L_n vil være invertibel. Bestem endelig for $n = 6$ og for $n = 8$ - om muligt - et polynomium p , der opfylder ligningen

$$L_n p(t) = 5t^3 + 3t^2.$$

[Vink: Man kan med fordel benytte en til L_n svarende matrixrepræsentation].

Liste over tidligere udkomne tekster
tilsendes gerne. Henvendelse herom kan
ske til IMFUFA's sekretariat
tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

-
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Ólafsson and
Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional
Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT
LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent
en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,
Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild
og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY
CONVERSION"
by: Bent Sørensen
- 227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M. Hansen, Steffen Holm,
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,
Pernille Postgaard, Thomas B. Schrøder,
Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,
Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og
en skitse til et alternativ baseret
på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk
problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse
af energiens bevarelse og isærdeles om
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz
udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorte Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host
mortality on the dynamics of an endemic
disease and
Instability in an SIR-model with age-
dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL
BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen
-

- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for
den matematiske udvikling
af: Claus Dråby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for
optimering af broreparationer
af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma
Tulinus, Ivar Zeck
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN
Et 1.modul fysikprojekt
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse
i CT-scanning
Projektrapport
af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og Christine Iversen
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a+b
/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske
halvledere
Specialerapport
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade
Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske
Forskningsråd, RUC, IMFUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CON-
DUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY
DISORDERED NON-METALS
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH
BOUNDARY
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the
Jahresbericht Addendum to Schappacher,
Scholz, et al.
by: B. Booss-Bavnbek
With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors,
J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner,
J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch,
J.Radkau and T.Söderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET
VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV
Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen,
Tomas Højgård Jensen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreassen
and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER
Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmggaard
Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk
Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning
Teori og model
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse
Materiale til et statistikkursus
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED
af: Peter Harremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent
Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-
electric Spherical Shell (Preprint)
by: T. Christensen and N.B.Olsen
- 257/93 Modellering af dispersion i piezoelektriske
keramikker
af: Pernille Postgaard, Jamik Rasmussen,
Christina Specht, Mikko Østergård
Vejleder: Tage Christensen
- 258/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra og analyse"
af: Mogens Brun Heefelt
- 259/93 STUDIES OF AC HOPPING CONDUCTION AT LOW
TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 260/93 PARTITIONED MANIFOLDS AND INVARIANTS IN
DIMENSIONS 2, 3, AND 4
by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

- 261/93 OPGAVESAMLING
Bredde-kursus i Fysik
Eksamensopgaver fra 1976-93
- 262/93 Separability and the Jones
Polynomial
by: Lars Kadison
- 263/93 Supplerende kursusmateriale til
"Lineære strukturer fra algebra
og analyse" II
af: Mogens Brun Heefelt
- 264/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 2
af: Bent Sørensen
-
- 265/94 SPHERICAL FUNCTIONS ON ORDERED
SYMMETRIC SPACES
To Sigurdur Helgason on his
sixtyfifth birthday
by: Jacques Faraut, Joachim Hilgert
and Gestur Olafsson
- 266/94 Kommensurabilitets-oscillationer i
laterale supergitre
Fysikspeciale af: Anja Boisen,
Peter Bøggild, Karen Birkelund
Vejledere: Rafael Taboryski, Poul Erik
Lindelof, Peder Voetmann Christiansen
- 267/94 Kom til kort med matematik på
Eksperimentarium - Et forslag til en
opstilling
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 268/94 Life is like a sewer ...
Et projekt om modellering af aorta via
en model for strømning i kloakrør
af: Anders Marcussen, Anne C. Nilsson,
Lone Michelsen, Per M. Hansen
Vejleder: Jesper Larsen
- 269/94 Dimensionsanalyse en introduktion
metaprojekt, fysik
af: Tine Guldager Christiansen,
Ken Andersen, Nikolaj Hermann,
Jannik Rasmussen
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 270/94 THE IMAGE OF THE ENVELOPING ALGEBRA
AND IRREDUCIBILITY OF INDUCED REPRESENTATIONS OF EXPONENTIAL LIE GROUPS
by: Jacob Jacobsen
- 271/94 Matematikken i Fysikken.
Opdaget eller opfundet
NAT-BAS-projekt
vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 272/94 Tradition og fornyelse
Det praktiske elevarbejde i gymnasiets
fysikundervisning, 1907-1988
af: Kristian Hoppe og Jeppe Guldager
Vejledning: Karin Beyer og Nils Hybel
- 273/94 Model for kort- og mellemdistanceløb
Verifikation af model
af: Lise Fabricius Christensen, Helle Pilemann,
Bettina Sørensen
Vejleder: Mette Olufsen
- 274/94 MODEL 10 - en matematisk model af intravenøse
anæstetikas farmakokinetik
3. modul matematik, forår 1994
af: Trine Andreasen, Bjørn Christensen, Christine
Green, Anja Skjoldborg Hansen, Lisbeth
Helmgård
Vejledere: Viggo Andreasen & Jesper Larsen
- 275/94 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht
2nd Edition
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 276/94 Dispersionsmodellering
Projektrapport 1. modul
af: Gitte Andersen, Rehannah Borup, Lisbeth Friis,
Per Gregersen, Kristina Vejrbø
Vejleder: Bernhelm Booss-Bavnbek
- 277/94 PROJEKTARBEJDSPÆDAGOGIK - Om tre tolkninger af
problemorienteret projektarbejde
af: Claus Flensted Behrens, Frederik Voetmann
Christiansen, Jørn Skov Hansen, Thomas
Thingstrup
Vejleder: Jens Højgaard Jensen
- 278/94 The Models Underlying the Anaesthesia
Simulator Sophus
by: Mette Olufsen(Math-Tech), Finn Nielsen
(RISØ National Laboratory), Per Føge Jensen
(Herlev University Hospital), Stig Andur
Pedersen (Roskilde University)
- 279/94 Description of a method of measuring the shear
modulus of supercooled liquids and a comparison
of their thermal and mechanical response
functions.
af: Tage Christensen
- 280/94 A Course in Projective Geometry
by Lars Kadison and Matthias T. Kromann
- 281/94 Modellering af Det Cardiovasculære System med
Neural Puls kontrol
Projektrapport udarbejdet af:
Stefan Frello, Runa Ulsøe Johansen,
Michael Poul Curt Hansen, Klaus Dahl Jensen
Vejleder: Viggo Andreasen
- 282/94 Parallele algoritmer
af: Erwin Dan Nielsen, Jan Danielsen,
Niels Bo Johansen

- 283/94 Grænser for tilfældighed
(en kaotisk talgenerator)
af: Erwin Dan Nielsen og Niels Bo Johansen
- 284/94 Det er ikke til at se det, hvis man ikke
lige ve' det!
Gymnasiematematikens begrundelsesproblem
En specialerapport af Peter Hauge Jensen
og Linda Kyndlev
Vejleder: Mogens Niss
- 285/94 Slow coevolution of a viral pathogen and
its diploid host
by: Viggo Andreasen and
Freddy B. Christiansen
- 286/94 The energy master equation: A low-temperature
approximation to Bässler's random walk model
by: Jeppe C. Dyre