

## OM MATEMATISKE MODELLER

- Jens Højgaard Jensen:  
Matematiske modeller  
er væsensforskellige,  
selv om de ser ens ud.
  
- Jens Højgaard Jensen:  
Beregning af grundvandssænkning  
som følge af vandforbrug -  
anvendt matematik (og fysik)  
på gymnasieniveau.
  
- Erik Odgaard Gade, Orla Johannsen,  
Henrik Lau, Finn Christensen Physant,  
Peter Schou Sørensen, Ariceu Vieira,  
Jens Højgaard Jensen:  
Matematiske modeller  
og videnskabsteoretiske  
problemer ved modeldannelse.

## TEKSTER fra

# IMFUFA

**ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER**  
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES  
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

### Forord.

Denne tekst består af tre dele.

For det første en projektrapport udarbejdet på 4. semester i den naturvidenskabelige basisuddannelse på RUC. Mit engagement i rapporten har været, at jeg var vejleder for projektet, dvs. et undervisningsmæssigt engagement.

For det andet og tredje to artikler skrevet af mig med sigter, der rækker "ud af huset". Det kunne man bredt fortolket kalde et forskningsmæssigt engagement.

Det fremgår af de to artikler og projektrapporten, at det er svært at se om artiklernes udseende skyldes projektarbejdet eller om projektrapportens udseende skyldes forfatteren til de to artiklers påvirkning som vejleder. Det kunne man så - igen bredt fortolket - tage som udtryk for et eksempel på integration af forskning og undervisning.

Når jeg har taget initiativ til at sammenstille de tre dele, er det fordi jeg faktisk mener, at de som helhed er et eksempel på integration af forskning og undervisning. Og fordi eksemplet har interesse derved, at den universitetsundervisning, der er på tale, ikke er specialeundervisning men begynderundervisning.

Sammenvævningen af universitetslæreres artikelskriverier og studenters rapportskriverier er ved de traditionelle universiteter velkendt i forbindelse med netop specialeundervisning. I den øvrige undervisning er sammenhængen mellem forskning og undervisning alene indirekte.

Mit ærinde her er at demonstrere, at der på RUC er muligheder for at udstrække den for universiteternes væsen og funktion afgørende direkte integration af forskning og undervisning langt ud over specialeundervisningen.

Om eksemplet virker overbevisende eller ej afhænger naturligvis af den betydning, der lægges i ordet "forskning".

I det naturvidenskabelige forskningsmiljø indbefatter forskningsbegrebet næppe arbejde af den art, der ligger bag indholdet i teksten her. Efter min erfaring er forskningsbegrebet helt behersket af erfaringerne fra netop naturvidenskabelig forskning. Og det er der jo i alle tilfælde ikke tale om her, selv om det er naturvidenskaberne, det handler om.

Hvordan landet ligger indenfor humaniora ved jeg mindre om. Men det er min fornemmelse, at teksterne godt her kunne karakteriseres som resultat af (evt. ukvalificeret) forskning.

Det indhold, jeg mener det frugtbart at lægge i forskningsbegrebet i sammenhængen her, er: aktiviteter, der rækker ud over undervisningen, og som tager sigte på erkendelsesudvidelse hos én selv eller andre.

Det er i denne brede forstand af forskning, at betydningen af universitetstraditionen om integration af forskning og undervisning, efter min mening, bedst forstås. Når undervisningen siges at kunne inspirere forskningen og forskningen siges at kunne kvalificere undervisningen, betyder det for mig, at der i den måde universiteterne, som institutioner er udviklet på, er skabt muligheder for et vekselspil mellem det langsigtede og det kortsigtede og mellem det interne og det udadvendte.

Og det er i denne brede forstand, at jeg mener, at eksemplet er en demonstration af, at der på RUC er muligheder for at udstrække integrationen af forskning og undervisning langt ud over specialeundervisningen.

Det er selvfølgelig ikke altid mulighederne udnyttes. Heller ikke på den naturvidenskabelige basisuddannelse. Der findes meget projektarbejde, der ikke i særlig grad kvalificeres af det omgivende forskningsmiljø eller inspirerer til forskningsmæssig viderebearbejdelse. Og der udføres forskning, som er løsrevet fra undervisningen.

Men der findes altså nogle muligheder, som ikke er til stede i de fleste andre universitetsmiljøer. Personligt kan jeg ikke forestille mig, at kunne og ville have taget emnerne i de to artikler, jeg har skrevet, op, hvis det ikke var for det tværfaglige undervisningsmiljø i basisuddannelsen. Hvorfra skulle man ellers hente inspiration til at integrere erfaringer med fysik, matematik, fiskeribiologi, hydrologi, videnskabsteori, mm.?

Jens Højgaard Jensen

Denne artikel vil også blive trykt i et kommende nummer af "Naturkampen".

"I mørke er alle katte grå":

MATEMATISKE MODELLER ER VÆSENSFORSKELLIGE, SELVOM DE SER  
ENS UD.

Af Jens Højgaard Jensen.\*)

Matematiske modeller anvendes i stadig større dele af samfundet. Det er vigtigt at have øje for hvilke interesser, der skjuler sig bag. Men det er også vigtigt at kunne gennemskue deres forskelligartede karakter. De kan være teoretisk mere eller mindre velbegrundede, selvom de umiddelbart virker som et fedt. Og den tilsyneladende lighed gør, at tvivlsomme modeller låner autoritet hos mere troværdige. Det søges i artiklen først og fremmest illustreret ved en konkret sammenligning af en simpel fiskeribiologisk model med en simpel klassisk mekanisk model.

Matematiske modeller anvendes i fysik, kemi, biologi, medicin, økonomi mm. De anvendes af ingeniører og administratorer til både tekniske og organisatoriske formål.

Efter sigende<sup>1</sup> blev Vietnam-krigen bl.a. retfærdiggjort af Pentagon ved hjælp af en matematisk optimeringsmodel. Det økonomiske råd benytter en matematisk model som forudsætning for dets udtalelser om den danske nationaløkonomi<sup>2</sup>. Og OECD har forsøgt sig med at lancere en matematisk model til brug for planlægningen af uddannelsessystemerne i medlemslandene<sup>3</sup>.

Effekten af små doser kræftfremkaldende stoffer diskuteres ud fra matematiske modeller<sup>4</sup>, og det samme gør sandsynligheden for uheld på A-kraftværker<sup>5&6</sup>.

Men mest omfattende er selvfølgelig den traditionelle brug af matematiske modeller til beregning af elektriske kredsløb, bygningskonstruktioner, møllevinge profiler osv.

I alle tilfældene medfører brugen af matematik, at den udenforstående stilles svagt i forhold til de, der har udarbejdet modellerne. I alle de nævnte tilfælde kræver det forskellige former for ekspertise at kigge modelbyggerne over skulderen.

En bedre matematisk uddannelse af befolkningen vil - alt andet lige - selvfølgelig forbedre mulighederne for folkelig indsigt og kontrol. Men at modvirke umyndiggørelsen, som den stigende brug af matematiske modeller medfører, af denne vej alene er udsigtsløs. Ekspertene er specialiserede i brugen af matematik på økonomiske problemer, på medicinske problemer, på bygningskonstruktionsproblemer osv. og i forskellige dele af matematikken. Og den stigende brug af matematik i fremtiden vil ske via øget specialisering. Medens det menigmand har brug for, er overblik. Kontrol med specialisterne gennem direkte matematisk indsigt ville kræve, at menigmand var bedre matematisk uddannet end specialisterne tilsammen.

En form for overblik almindelige mennesker kan betjene sig af for at værge sig mod det matematiske uhyre, er politisk og samfundsmæssigt overblik. Hvilke interesser skjuler sig bag Rasmussen-rapporten? Hvem udpeger det økonomiske rådets formandskab? Hvem har økonomisk udbytte af hvilken type møllevinge, der anvendes i en given sammenhæng? Et sådant overblik tjener til at skærpe årvågenheden og giver mod til at stille kritiske spørgsmål på trods af den matematiske afmagt.

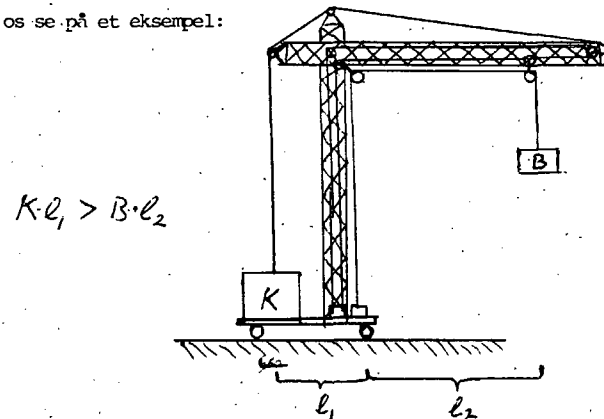
Nogle vil mene, at det politiske overblik er tilstrækkeligt. Det matematiske uhyre er ikke noget uhyre. Det er en neutral ting, der kan bruges på godt og ondt. Til syvende og sidst er det alene et spørgsmål om hvem der bruger det. I de rigtige hænder kan det kun være et gode, som må udvikles så meget, det lader sig gøre<sup>7</sup>. Synspunktet forudsætter opfattelsen af et nuværende eller snarligt kommende samfund som klasseløst. I et klassesamfund vil naturligvis først og fremmest den herskende klasse nemlig have mulighed for at benytte sig af de manipulationsmuligheder matematiske modelleres uigennemskuelighed giver.

Andre vil mene, at selve brugen af matematiske tænke måder og anvendelsen af en teknisk-naturvidenskabelig rationalitet er et dominerende træk ved undertrykkelsen i det moderne samfund<sup>8</sup>. Det er naturligvis ikke således, at f.eks. matematiske modeller blot er fup og svindel. Selv modellen for krigsførelsen i Vietnam har formodentlig en kerne af instrumentel rationalitet i sig. Uden et rationelt indhold kunne modellerne ikke bruges undertrykkende ved at virke overbevisende. Det afgørende er, at

netop f.eks. matematiske modelleres delrationalitet forfører til en fælles form for rationalitet menneskene imellem, der på grund af dens indskrænkethed fører til en helt irrationel samfundsmæssig udvikling. For at sande dette kræves filosofisk overblik.

Jeg mener, at det er blødt, at regne matematiske modeller for politisk neutrale, forstået på den måde, at de ikke i sig selv har en politisk funktion, men alene givès politisk indhold afhængigt af, hvem der bruger dem. På den anden side er en forkastelse af dem som først og fremmest ideologisk form også urealistisk.

Lad os se på et eksempel:



Figuren er en principskitse af en byggekran. Hvornår vælter kranen? Ifølge den klassiske mekanik vil kranen vippe omkring det forreste hjul, når belastningen, B, gange afstanden fra B til hjulet,  $l_2$ , er større end kontravægten, K, gange afstanden fra K til hjulet,  $l_1$ . Som sikkerhedsforskrift må man derfor kræve, at

$$K \cdot l_1 > B \cdot l_2$$

eller at den tilladte maksimalbelastning er mindre end den

kritiske værdi for belastningen:  $E_{kr} = K \cdot l_1 / l_2$  .

Ikke ret mange, der kan gennemføre denne beregning vil betvivle dens objektive udsagnskraft og nægte at lade sig vejlede af den på forhånd ved fastsættelse af maksimalbelastningen for en kran, forud for at den tages i brug. Beregningen er idealiseret, idet vægten af krankonstruktionen er antaget ikke at spille nogen rolle i forhold til B og K. Men den kan uden vanskeligheder udvides til at tage hensyn til vægten af krankonstruktionen.

Alle mennesker - uanset om de kan udføre beregninger af denne art eller ej - tror jeg, har en erfaringsbaseret fornemmelse af, at der findes en belastningsgrænse for konstruktioner som en kran. Og jeg tror de fleste - med god ret - vil fæste mere lid til påstanden, at den kan beregnes, end at den ikke kan det.

Beregningen er ikke neutral. F.eks. kan den aflede opmærksomheden fra, at kranen kan havarere af andre grunde end at B er for stor i forhold til  $K \cdot l_1 / l_2$ . Men den er objektiv. Og den kan have praktisk værdi for både entreprenøren og bygningsarbejderen.

Med eksemplet har jeg villet illustrere, at det politiske problem, som den om sig gribende brug af matematiske modeller er, ikke kan imødegås ved en generel mistænkliggørelse af modellerne, f.eks. gennem filosofisk begrundede påstande om umuligheden af at etablere objektive sandheder. Praksis viser, at f.eks. fysikkens matematiske modeller anvendt i tekniske sammenhænge leverer stribevis af troværdige forudsigelser. Og det ved de fleste.

Men de fleste "ved" også, at matematisk formuleret videnskab er troværdig langt ud over de grænser, hvor det er tilfældet, på grund af en fejlagtig generalisering ud fra netop bl.a. erfaringerne med dele af den matematisk formulerede fysik. Matematikkens utilnærmelighed for de fleste gør det muligt at spille på en forveksling af ensartet form med ensartet indhold.

Lad os se på et eksempel: Sandsynlighedsberegningerne for uheld på A-kraftværker i den såkaldte Rasmussen-rapport<sup>6</sup>. Og lad os sammenligne eksemplet med kraneksemplet.

I Rasmussen-rapporten regnes på sandsynlighederne for at forskellige hændelser indtræffer i A-kraftværker. Hændelserne kan opstå på forskellige måder. Sandsynligheden for at hændelsen x indtræffer,  $P_x$ , er da summen af sandsynlighederne for de forskellige måder,  $P_{x,i} = 1 \dots n$ , hændelsen kan indtræffe på:

$$P_x = P_{x1} + P_{x2} + \dots + P_{xn}.$$

De forskellige forløb af omstændigheder, der kan føre frem til hændelsen, er hver for sig sammensat af en række delhændelser. For at et bestemt uheldsforløb skal indtræffe, skal både det, det, det, og det ske. Sandsynlighederne  $P_{x1}$  fremkommer derfor som produkter af sandsynligheder for delhændelserne:

$$\text{f.eks.} \quad P_{x1} = P_{x11} \cdot P_{x12} \cdot P_{x13} \dots P_{x1m}$$

, hvor  $P_{x11}$  f.eks. kan være sandsynligheden for at en ventil er i stykker på et givet tidspunkt.

Rasmussen-rapporten med bilag er på flere tusinde sider, men dette er groft taget gangen i den.

Hvorfor er Rasmussen-rapporten under al kritik? Den slags regnestykker kan vel være meget rimelige. Ja, det er vel direkte uansvarligt ikke at arbejde så langt som muligt med dem, når vi nu har A-kraftværker spredt rundt omkring i verden. Der er vel behov for at få vurderet risikoen forbundet med dem, som der er behov for at kunne forudsige under hvilke omstændigheder kranen vælter.

I det væsentlige er Rasmussen-rapporten blevet kritiseret for at være et bestillingsarbejde for A-kraftinteressenter. Med de enorme økonomiske interesser, der er involveret i sagen, er den bestilt til at fremkomme med beroligende små sandsynligheder for alvorlige A-kraftværkssammenbrud. Den politiske sammenhæng

gør det nærliggende at være mistænkssom. Men der er også grund til at være mistænkssom over for entreprenørinteresserne bag krankonstruktioner. Alligevel er der ikke grund til at nære samme mistro til de to matematiske modeller. Udover forskellen i omfang af de to problemsæt, adskiller de sig af hvad man kunne kalde videnskabsteoretiske grunde.

Den vigtigste måde Rasmussen-rapporten har været imødegået på, har været ved modregnestykker, der gav helt andre sandsynligheder. Kranregnestykket kan ikke på samme måde problematiseres. Hvoraf forskellen?

A-kraft risiko beregningerne er idealiserede. Dels er delhændelsen  $x_{11}$  antaget at indtræffe uafhængigt af delhændelsen  $x_{12}$ , fordi sandsynligheden for at de indtræffer samtidigt derved matematisk simpelt kan udregnes som produktet af sandsynlighederne for hændelserne hver for sig. Men det kan være, at sandsynligheden for samtidige hændelser er større end beregnet, fordi den ene hændelse påvirker chancen for den anden. F.eks. kan fejlaflæsning af instrument 1 forvirre operatøren, så sandsynligheden for fejlaflæsning af instrument 2 øges ved det. Dels er der ved beregningen af sandsynligheden for hændelsen  $x$  kun medtaget de  $n$  forløb, man har kunnet komme på, der fører til  $x$ . Men der kan være andre forløb, som der altså ikke er taget højde for.

Idealiseringen som sådan er imidlertid ikke fældende for beregningerne. Ved opstilling af enhver matematisk model foretages idealiseringer. I kraneksemplet så vi f.eks. bort fra massen af krankonstruktionen. Rasmussen-rapportens forfattere er selvfølgelig også klar over, at der kan være problemer med de nævnte idealiseringer og har forsøgt at tage højde derfor. Den afgørende forskel er, at det i kraneksemplet er muligt at vurdere størrelsen af de fejl, der begås ved idealiseringerne, medens dette ikke er tilfældet ved risikoberegningerne. Det skyldes, at kranproblemet kan placeres indenfor en teoretisk ramme - den klassiske mekanik -, medens der ikke findes en tilsvarende teoretisk ramme for vurdering af risikoproblemet ved A-kraft værker.

Den matematiske model til vurdering af kranens maksimumsbelastning er en teoretisk model, medens Rasmussen-rapporten er en simulationsmodel.

I det følgende vil jeg forsøge at illustrere forskellen mellem teoretiske modeller og simulationsmodeller nøjere ved hjælp af et eksempel på hver. Og jeg vil ud fra de to eksempler forsøge at vise, hvordan verifikationsproblemet er forskelligt for teoretiske modeller og simulationsmodeller.

Jeg håber, at jeg har fået antydning af betydningen af den skelnen eksemplerne skal illustrere: Rasmussen-rapporten har kunnet kritiseres for at være et bestillingsarbejde. Men det er der så meget, der er, uden at det alene af den grund kan afvises. Rasmussen-rapporten har kunnet kritiseres for at være baseret på forsimplede og idealiserede forudsætninger. Men det er tilfældet for enhver operationel model. Det afgørende ved Rasmussen-rapporten er, at der ikke findes nogen måde at vurdere berettigelsen af de grundlæggende idealiseringer klart på, og der herved bliver rige muligheder for at dens konklusioner kan bruges i overensstemmelse med ønskerne hos dem, der har bestilt den. I forhold til den offentlige meningsdannelse om rapporten er dette indirekte blevet demonstreret gennem modregnestykker. Så langt så godt. Men det kan pointeres direkte ud fra karakteren af modellen. Og det har betydning i alle de tilfælde, hvor det ikke er overkommeligt, at mobilisere modregnestykker.

Efter gennemgangen af de to eksempler på henholdsvis en teoretisk model og en simulationsmodel, vil jeg kort vende tilbage til Rasmussen-rapporten.

#### Fiskeribiologisk model til beregning af maksimalt vægtudbytte i dambrug - som eksempel på en simulationsmodel.

Modellen tjener til at give svar på følgende problem:

Til hvilket tidspunkt skal en dam tømmes for fisk, for at vægtudbyttet bliver størst muligt, forudsat at fiskene får så meget foder, som de kan æde?

Modellen har, så vidt jeg ved, ikke umiddelbart den store praktiske interesse for f.eks. ørreddambrugere, fordi dammene

tømmes, når ørrederne har "portionsstørrelse", og ikke når vægtudbyttet er maksimalt. Men den viser grundstrukturen i de fiskeribiologiske modeller for havfiskeriet, som indgår i beslutningsgrundlaget for kvotefastsættelser m.m. Disse modeller er videreudviklinger af modellen her, hvor der tages højde for, at det ved havfiskeri ikke er muligt, som i et dambrug, at fange alle fiskene, når de netop har den optimale alder. Bortset fra de tekniske komplikationer, der følger heraf, svarer de til modellen for dambrug.

Når der er en optimal opfiskningsalder for fiskene i et dambrug, skyldes det, at den enkelte fisk med alderen øger sin vægt samtidigt med at man må regne med at antallet af fisk falder på grund af dødelig sygdom m.m. Når ynglen netop er sat ud i dammen, vejer den praktisk taget ikke noget. Og venter man meget længe med at tømme dammen, vil alle fiskene være døde forinden. Der må derfor være et tidspunkt indimellem, hvor antallet af fisk i dammen gange vægten af den enkelte fisk er maksimalt. For at lave en model til beregning af dette tidspunkt, må man have en model for antallet af fisk som funktion af tiden og en model for vægten af den enkelte fisk som funktion af tiden.

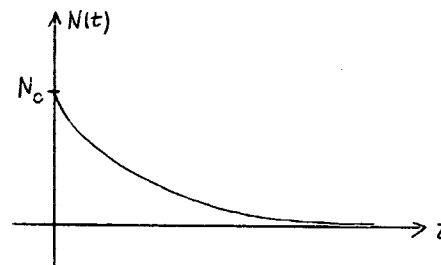
For antallet af fisk som funktion af tiden,  $N(t)$ , antages:

$$1) \frac{dN}{dt} = -MN$$

og at  $N$  til tiden  $t = 0$  er  $N_0$ . Ligningen beskriver, at antallet af fisk daler -  $dN/dt$  (=tilvæksten i antal fisk pr. tidsenhed) er negativ -, og at antallet af fisk, der dør på et givet tidspunkt, kun afhænger af hvor mange der er. Det er ved opstillingen af ligningen antaget, at der pr. tidsenhed dør den samme brøkdelen af fiskene-, d.v.s. fiskene har den samme dødelighed,  $M$ , - i alle aldre.

Løsningen til 1) er:

$$N(t) = N_0 e^{-Mt}$$



Løsningen kan efterprøves ved at indsætte i ligning 1).

For vægten af den enkelte fisk som funktion af tiden,  $W(t)$ , antages:

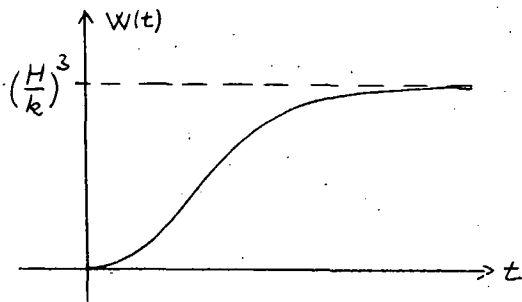
$$2) \frac{dW}{dt} = H \cdot W^{2/3} - kW$$

og at  $W$  til  $t=0$  er praktisk taget 0. Ligningen beskriver vægttilvæksten pr. tidsenhed,  $\frac{dW}{dt}$ , som sammensat af et stofopbygningsled,  $H W^{2/3}$ , og et stofnedbrydningsled,  $kW$ . Stofopbygningsledet udtrykker vægtudbyttet af fiskens næringsoptagning, idet det er forudsat, at der ikke er noget fødemangelproblem. Stofopbygningen er antaget at stige proportionalt med fiskens tarmoverflade, som, forudsat at store og små fisk er ligedannende, er proportional med  $w^{2/3}$ . Stofnedbrydningsledet udtrykker det vægttab pr. tidsenhed fisken ville lide, hvis den ikke tog føde til sig. Dette vægttab, som har at gøre med de af fiskens funktioner, som ikke vedrører optagelsen og omdannelsen af føde, er

antaget proportionalt med fiskens vægt.

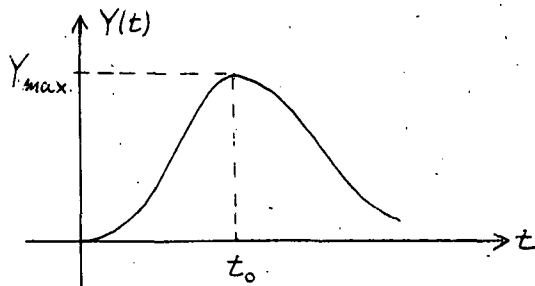
Løsningen til 2) er:

$$W(t) = \left(\frac{H}{k} (1 - e^{-\frac{k}{3}t})\right)^3$$



Løsningen kan efterprøves ved at indsætte i ligning 2).  
For den samlede vægt,  $Y(t)$ , af fiskene i dammen gælder:

$$Y(t) = N(t) \cdot W(t)$$



Tidspunktet,  $t_0$ , hvor den samlede vægt er optimal,  $Y(t_0) = Y_{max}$ , kan findes ved differentiation af  $Y(t)$ :

$$\frac{dY}{dt} = N \cdot \frac{dW}{dt} + \frac{dN}{dt} \cdot W = N(HW^{\frac{2}{3}} - kW) - M \cdot N \cdot W =$$

$$N \cdot W^{\frac{2}{3}} (H - (M+k)W^{\frac{1}{3}}) = 0 \text{ for } W^{\frac{1}{3}} = \frac{H}{M+k}, \text{ d.v.s.}$$

$$\text{for } \frac{H}{k} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) = \frac{H}{M+k}; \quad 1 - e^{-\frac{k}{3}t} = \frac{k}{M+k}; \quad e^{-\frac{k}{3}t} = \frac{M}{M+k};$$

$$\frac{k}{3} t = \ln\left(\frac{M+k}{M}\right) \text{ eller for:}$$

$$t = t_0 = \frac{3}{k} \ln\left(\frac{M+k}{M}\right)$$

Det, vi har udledt her, er den formel, der giver svaret på det problem, der ligger bagved formuleringen af modellen: Hvornår skal dammen tømmes, for at vægtudbyttet bliver størst? Kendes værdierne af  $k$  og  $M$ , kan  $t_0$  bestemmes. Med de ikke helt urealistiske talværdier:

$$k = 1,3 \text{ år}^{-1}$$

$$\text{og } M = 0,2 \text{ år}^{-1}$$

bliver f.eks.:  $t_0 = 4,6 \text{ år}$ .

Dammen skal altså i dette tilfælde tømmes 4,6 år efter at ynglen er sat ud for at give det største vægtudbytte.

Klassisk mekanisk model til beregning af placering af TV-satellit - som eksempel på en teoretisk model.

Modellen tjener til at give svar på følgende problem:

Hvordan skal en satellit placeres i omløb om jorden for at følge med jordens daglige omdrejning om sin egen akse, således at den får en konstant position i forhold til jordens overflade?



Modellen har praktisk betydning for de forskellige vese-  
rende planer om TV-transmission ved hjælp af tilbagekastning  
af fjernsynsbølgerne fra satellitter i stedet for det nuværen-  
de transmissionssystem. Det duer ikke, at den satellit en given  
sender, skal benytte sig af, med mellemrum befinder sig over  
den modsatte side af jordkloden. I praksis er beregninger over  
placering af TV-satellitter kraftigt udbyggede i forhold til  
modellen her. Men modellen udgør rygraden i sådanne beregnin-  
ger.

Til løsning af problemet er det nødvendigt, at vide hvilke  
kræfter en satellit er påvirket af, samt hvordan satellittens  
bevægelse afhænger af disse kræfter.

Om kræfterne antages, at der kan ses bort fra virkningerne  
af massetiltrækningskræfterne fra solen, månen og planeterne,  
således at kun massetiltrækningskraften fra jorden tages i be-  
trægtning. Ifølge Newtons gravitationslov er kraftpåvirkningen  
mellem to masser,  $m_1$  og  $m_2$ , der befinder sig afstanden  $r$  fra  
hinanden:  $K = G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$ , hvor  $G$  er en universel konstant. For  
en kugle, hvor massefylden overalt er den samme i samme afstand  
fra centrum, kan det regnes ud, at kraftpåvirkninger fra kuglen  
på en genstand uden for kuglen er den samme som kraftpåvirknin-  
gen fra et legeme med samme masse som kuglen, placeret i kug-  
lens centrum. Jorden regnes for en sådan kugle. Satellitten er  
da påvirket af kraften:

$$1) \quad K = G \cdot \frac{m_j \cdot m_s}{r^2}$$

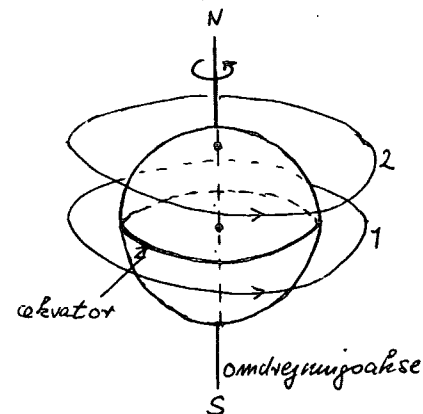
, hvor  $m_j$  = jordens masse,  $m_s$  = satellittens masse og  $r$  = afstan-  
den fra jordens centrum til satellitten. Kraften er rettet mod  
jordens centrum.

Når kraftpåvirkningen er kendt, er satellittens bevægelse i-  
følge den klassiske mekanik bestemt af Newtons 2. lov:

$$2) \quad K = m_s \cdot a$$

, hvor accelerationen,  $a$ , har samme retning som kraften. Da  
kraften har retning mod jordens centrum, må dette også gælde  
for accelerationen.

For at satellitten til ethvert tidspunkt kan stå over det  
samme punkt på jordoverfladen, er det nødvendigt, at satellit-  
ten bevæger sig jævnt rundt i en cirkel med centrum på jordens  
omdrejningsakse, således at den bevæger sig én gang rundt i  
cirklen på et døgn, d.v.s. for hver gang jorden drejer én gang  
rundt om sin egen akse. På figuren er antydnet to sådanne satel-  
litbaner.



Men kun bane 1 er mulig ifølge Newtons 2. lov. Acceleration i  
en jævn cirkelbevægelse er nemlig rettet mod cirkelns centrum.  
Og ifølge Newtons 2. lov skal den ligesom massetiltrækningskraf-  
ten være rettet mod jordens centrum, som det kun er tilfældet  
for bane 1.

Satellittens bane må altså ligge i samme plan som ækvator.

Det, der mangler for at svare på det opstillede problem er  
herefter at bestemme den nødvendige radius i sådan en bane.

Sammenhængen mellem acceleration,  $a$ , fart,  $v$ , og radius,  $r$   
i en jævn cirkelbevægelse kan udregnes til:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Da vi forlanger et omløb pr. døgn, må vi have:

$$v = \frac{2\pi r}{1 \text{ døgn}}$$

eller

$$a = \frac{4\pi^2 r}{(1 \text{ døgn})^2}$$

Ifølge Newtons 2. lov (ligning 2)) kan den ønskede bevægelse altså lade sig gøre, hvis satellitten er påvirket af en kraft af størrelsen:

$$K = m_s \cdot \frac{4\pi^2 r}{(1 \text{ døgn})^2}$$

Dette er ifølge Newtons massetiltrækningslov (ligning 1)) tilfældet for den værdi af r, der tilfredsstiller ligningen:

$$G \cdot \frac{m_j \cdot m_s}{r^2} = m_s \cdot \frac{4\pi^2 r}{(1 \text{ døgn})^2}$$

d.v.s.

$$r = \sqrt[3]{G \cdot \frac{m_j \cdot (1 \text{ døgn})^2}{4\pi^2}}$$

Indsættes talværdier for G og  $m_j$  fås:

$$r = 42200 \text{ km}$$

=====



TV-satellitten skal altså nødvendigvis placeres 42200 km fra jordens centrum i en bane over ækvator for til enhver tid at stå over det samme sted set fra jorden.

Sammenligning af de to modeller.

De to regnestykker har som de fleste matematiske modelberegninger en formel lighed i deres udseende.

For en udenforstående virker de oftest lige så ens som køerne på marken for byboen. Der findes store og små, og der findes røde og sortbrogede. Men bortset herfra er en ko blot en ko. Og en matematisk model er bogstavregning.

For de, der har taget matematisk studentereksamen, er en matematisk model måske mere end blot bogstavregning. Der findes forskellige slags bogstavregning. Og matematiske modelberegninger indebærer mere end blot matematiske manipulationer, selvom det oftest er dem, der i lærebogsfremstillinger optager det meste af pladsen. Men den formelle struktur opleves alligevel ens fra gang til gang uanset de matematiske teknikkers forskellighed, sådan som det er skitseret i grove træk i omstående skema over de to regnestykker.

	Model for Procedure	Ørreddam	TV-satellit
1.	Præcisering af problem ↓	Tidspunkt for maksimalt vægtudbytte	Placering, så den følger med jorden i dens drejning om akse
2.	Fremdragelse af bestemmende ligninger ↓	1) $\frac{dN}{dt} = -MN$ 2) $\frac{dW}{dt} = HW^{2/3} - kW$	1) $K = G \cdot \frac{m_s \cdot m_j}{r^2}$ 2) $K = m_s \cdot a$
3.	Matematiske manipulationer, som leder frem til: ↓		
4.	Bogstavudtryk for det efterspurgte ↓	$t_0 = \frac{3}{k} \ln \left( \frac{M+k}{M} \right)$	$r = \sqrt{\frac{3 G m_j (1 \text{ døgn})^2}{4 \pi^2}}$
5.	Svar på problem ved indsættelse af talværdier = facit	$t_0 = 4,6 \text{ år}$	$r = 42.200 \text{ km}$

I gymnasieundervisningen er punkterne 1 og 2 i proceduren noget læreren eller lærebogsforfatteren (mest det sidste) står for, mens elevernes aktive medvirken sker under punkterne 3, 4 og 5. Som følge heraf vil en eventuel kritisk opmærksomhed typisk være rettet mod: a) "facit er usikkert, fordi de indsatte talværdier (f.eks. talværdien for ørredartens dødelighed, M, eller talværdien for jordens masse,  $m_j$ ) er unøjagtige" eller/og b) "det hele er ikke rigtig til at stole på, fordi der er valgt urealistiske udgangspunkter (f.eks. at store og små fisk er ligedannede eller at jorden er kuglerund)".

Denne form for kritik er relevant på samme måde for både simulationsmodeller og teoretiske modeller. Og svaret på kritikken vil også være af samme slags for de to former for modeller: krav om flere empiriske undersøgelser eller/og krav om udbygning af modellen, således at den nærmer sig kompleksiteten af det den skal beskrive. Det er en kritik, der retter sig mod teknisk forbedring af eksisterende modeller.

Men det er ikke denne form for kritisk indblik man først og fremmest har brug for som udenforstående. Den udenforståendes problem er ikke: "Hvordan forbedres modellerne?". Det er teknikeren/eksperternes (fiskeribiologens, satellitingeniørens) problem som tekniker/ekspert. Den udenforståendes problem er: "Hvor gode er modellerne?", "på hvilken måde tør jeg stole på teknikernes udsagn?" Og svaret på disse spørgsmål afhænger af om der er tale om simulationsmodeller eller teoretiske modeller, henholdsvis hvad det er for en slags teknikere, der er på tale.

Hvordan kan man da som udenforstående skelne mellem simulationsmodeller og teoretiske modeller som udgangspunkt for en stillingtagen?

Det første man må gøre sig klart er, at konstruktionen af en matematisk model i det mindste indebærer følgende to ting:

- 1) Placering af fænomenet, der skal modelleres, i et modelunivers, som består af en række fænomener og dertil hørende matematik, som beskriver fænomenerne analogt: fænomenet minder om....., og når der er tale om den slags fænomener, plejer man at tage hul på dem ved at..... . I de to gennemgåede eksempler på matematiske modeller, er fænomenet "ørreddam" placeret i modeluniverset: "populationsdynamik" og fænomenet "TV-satellit" pla-

ceret i modeluniverset: "klassisk mekanik".

2) Idealisering (afgrænsning og simplificering) af fænomenet, der skal modelleres, således at den matematiske behandling bliver overkommelig inden for rammerne af det valgte modelunivers: ved beskrivelsen af fænomenet ser vi bort fra..... og regner med at..... med god tilnærmelse kan beskrives som..... . I "Ørreddammodellen" er den aldersuafhængige dødelighed og ligedannetheden af store og små fisk eksempler på idealiseringer. I "TV-satellitmodellen" er den kuglerunde jord og borttænkningen af månen og solens indvirkninger eksempler på idealiseringer.

Det er som sagt punkt 2), det er nemmest at få øje på. Det er dette punkt, der optræder på ensartet måde i den skematiske sammenligning af ørreddamsmodellen og TV-satellitmodellen. Men det er i punkt 1) den afgørende forskel mellem de to modeller skal søges. Nærmere betegnet i den forskelligartede karakter af de modeluniverser, de to modeller er hentet ud fra.

Modeluniverset "klassisk mekanik" holdes først og fremmest sammen af forestillingen om nogle få, ufravigelige og fælles væsenstræk ved de fænomener, det omhandler. Det er dem, der i eksemplet "TV-satellit" udtrykkes i de to bestemmende ligninger. Dels ligning 1) (Newtons gravitationslov), der ifølge den klassiske mekanik gør krav på at beskrive den gensidige tiltrækning mellem vilkårlige to masser i verden, dels ligning 2) (Newtons II lov), der gør krav på at beskrive sammenhængen mellem påvirkning og bevægelse af alle massegenstande i verden. Disse væsenstræk er ikke umiddelbart selvfølgelige. F.eks. er det ud fra dagligdags erfaringer mere nærliggende at regne  $kraft = masse \times hastighed$ , som Aristoteles og hans efterkommere gjorde indtil renessancen, end  $kraft = masse \times acceleration$ . Men de bekræftes til gengæld af de videnskabelige erfaringer, der er gjort med dem til at forklare en mangfoldighed af tilsyneladende forskelligartede fænomener (f.eks. planeternes bevægelse, projektilbaner, tidevandet).

Modeluniverset "populationsdynamik" er ikke holdt sammen af nogle få væsenstræk på tilsvarende måde. Populationsdynamikken giver ikke i samme grad en fælles forståelse af tilsyneladende uafhængige fænomener. Den beskæftiger sig nærmere med at udvikle en fælles beskrivelse af fænomener, der i forvejen umiddelbart

opfattes som beslægtede. De ufravigelige udgangspunkter for de to bestemmende ligninger i eksemplet "ørreddam" er alene det alle ved i forvejen: fisk dør, optager stof og udskiller stof.

Holdt op mod hinanden vil det måske ikke være en urimelig sprogbrug at kalde modeluniverset "klassisk mekanik" for en teori og i modsætning hertil nøjes med at kalde "populationsdynamik" for netop et modelunivers. TV-satellitmodellen er da en teoretisk model, fordi den er afledt af en teori, medens ørreddamsmodellen er en simulationsmodel, fordi den ikke er afledt af en teori.

Spørgsmålet om forskelligartede modeller er altså blevet til et spørgsmål om forholdet mellem begreberne model og teori (fremtrædelse/væsen).

Det en udenforstående har brug for, for at kunne skelne mellem teoretiske modeller og simulationsmodeller, er altså en overbliksmæssig fornemmelse for, hvad der findes teorier om her i verden og i hvilken forstand. Ikke abstrakte videnskabsteoretiske skemaer, men konkrete modstillinger af de forskellige former for faglighed, der findes i de forskellige fag.

Almene videnskabsteoretiske tankegange har efter min erfaring kun en relativ betydning. De samme begreber og modstillinger lader sig alt efter sammenhængen anvende vidt forskelligt. Det gælder også modstillingerne teori/modelunivers, teoretisk model/simulationsmodel og teori/model. Når jeg ikke har kaldt populationsdynamik for en teori, er det således ikke udtryk for en slags karaktergivning, men for at fastholde en forskel til klassisk mekanik i forhold til problemet om den samfundsmæssige brug af matematiske modeller. I anden sammenhæng er det ikke urimeligt at kalde populationsdynamik for teoretisk biologi. Men i forhold til emnet for artiklen her er det nødvendigt at bruge videnskabsteoretiske begreber til at skelne mellem fagene med i modsætning til den almene videnskabsteoretiske diskussion, hvor netop forskellene som regel sløres. På trods af risikoen for at blive beskyldt for fagstolthed eller lignende (Jeg er fysiker af uddannelse).

Pointen er altså, at når matematiske modeller udspringer af fysiske, kemiske, biologiske, medicinske, økonomiske osv. problemstillinger, så forudsætter en stillingtagen en konkret for-

næmmelse af først og fremmest forskelligartetheden af de teoretiske baggrunde, der opereres på.

Men hvilken betydning har det for troværdigheden af en matematisk model om den er mere eller mindre teoretisk begrundet? Kan man bedre stole på en teoretisk model end på en simulationsmodel?

Svaret på det sidste spørgsmål er klart nok: Det kan man ikke gå ud fra. De idealiseringer, der er foretaget ved opstillingen af en teoretisk model, kan være så grove, at modellen bliver helt misvisende i forhold til det, der ønskes belyst. Og en simulationsmodel kan være så efterprøvet, at der ikke er nogen grund til at betvivle, at den beskriver, det der er på tale, dækkende.

Betydningen af at skelne mellem teoretiske modeller og simulationsmodeller ligger altså ikke i at denne skelnen automatisk afspejler sig i deres troværdighed. Hvad er da betydningen? Betydningen ligger i at forskellen afspejler sig i måden troværdigheden kan bedømmes på.

Som omtalt foretages der ved konstruktion af enhver matematisk model en afgrænsning og simplificering af fænomenet, der skal modelleres. Det er et grundlæggende vilkår og der er ikke noget principielt galt heri. Men det rejser et krav om, at indflydelsen af idealiseringerne kan vurderes. Og det lader sig ikke gøre på samme måde for simulationsmodeller og teoretiske modeller.

For simulationsmodellers vedkommende kan de foretagne idealiseringer alene vurderes ved efterprøvning på et erfaringsmateriale, der anses for tilsvarende til det, der skal modelleres.

For teoretiske modellers vedkommende kan de foretagne idealiseringer desuden vurderes ud fra den teori, modellen er afledt af. Eller den kan vurderes alene ud fra denne teori.

Lad os se på eksemplet med TV-satellitten. En af idealiseringerne her var, at jorden betragtedes som kuglerund. Men det er den jo ikke, og vi må f.eks. regne med en større kraftpåvirkning på satellitten fra jorden, hvis den befinder sig over en bjergkæde end hvis den befinder sig over et af oceanerne. Hvilken rolle spiller det for beregningen af baneradius? Det kan vi få en fornemmelse af ved at se på formlen  $r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_j (1 \text{ døgn})^2}{4\pi^2}}$ .

Over bjergkæden må vi regne med en større effektiv værdi af  $m_j$  end over oceanet og dermed en større baneradius ifølge formlen. Hvor meget større? Jordens radius er ca. 6.000 km. Bjergkædens højde kan vi sætte til 6 km. En overdrivelse af bjergkædens indvirkning vil være at sige, at den medfører en satellitbaneradius, som den man ville få, hvis jordens radius var 6 km større end den er. Vi har da:

$$\frac{r^*}{r} = \sqrt[3]{\frac{m_j^*}{m_j}} = \sqrt[3]{\frac{R^{*3}}{R^3}} = \frac{R^*}{R} = \frac{6006}{6000}$$

,hvor \* indicerer korrigerede størrelser og R betyder jordens radius. Der kan altså højst være tale om en fejl i resultatet  $r = 42.200 \text{ km}$  på 1 0/00 på grund af bjergkæder o.lign.

Den anden afgørende idealisering, der lå til grund for TV-satellitbaneberegningen, var at der blev set bort fra indvirkninger af sol og måne. Denne idealisering kan også vurderes ud fra den klassiske mekanik. Og Newton kunne (jeg ved ikke om han gjorde det) 300 år før opsendelsen af satellitter foruden at beregne TV-satellitbaneradiusen foretage begge disse vurderinger af beregningens pålidelighed. Den teoretiske model kan altså gøres til genstand for en teoretisk kontrol.

Noget tilsvarende kommer ikke på tale for simulationsmodeller.

Ørreddamsmodellen kan f.eks. godt kritiseres for, at antagelser om, at den enkelte fisks stofopbygning pr. tidsenhed er proportional med  $w^{2/3}$ , er usikker. Men der findes ikke nogen indirekte måde til at diskutere hvor usikker. I fiskeribiologien skrives ofte  $w^q$  i stedet for  $w^{2/3}$  i de tilsvarende ligninger. Og q bestemmes da direkte på linie med konstanterne H, k og M ved fitning til foreliggende data. Der kan på denne måde foretages en direkte empirisk kontrol af modellerne ved at undersøge variationen af de fundne værdier af q for varierende datasæt. Men en indirekte teoretisk kontrol svarende til den i satellit-eksemplet ville f.eks. forudsætte at der var erkendte, teoretiske grænser (f.eks. termodynamisk begrundet eller hvad ved jeg) for hvilke værdier q kunne antage. Og det er der ikke.

Baggrunden, henholdsvis teoretiske modeller og simulationsmodellers troværdighed kan vurderes på, er altså forskellig.

Udover det allerede skrevne kan denne forskellighed illustreres ud fra spørgsmålet: Hvilke videnskabelige konsekvenser kan det få, at empirien strider mod en given model?

Hvad, hvis den efterspurgte baneradius i TV-satellitmodellen i praksis viser sig at være f.eks. 35.000 km og ikke 42.200 km som beregnet?

Så står hele den klassiske mekanik for fald.

Hvad, hvis tidspunktet for maksimalt vægtudbytte i ørredamsmodellen i praksis viser sig at være f.eks. 10 år og ikke 4,6 år som beregnet?

Så var ørreddamsmodellen en dårlig beskrivelse, som trænger til at blive forbedret.

Hvis ørreddamsmodellen ikke virker, giver det anledning til omfortolkning af de erfaringer angående ørreddamme, som foreligger. Men hvis TV-satellitmodellen ikke virker, kan det give anledning til omfortolkning af alle mulige erfaringer, der ikke umiddelbart har noget med satellitter at gøre. Næmlig alle de erfaringer af forskellig art, der hidtil har ladet sig forklare inden for rammerne af den klassiske mekanik.

Kort sagt læner den teoretiske model sig - ved at være indlejret i en teori - til et meget mere "globalt" sæt af erfaringer end simulationsmodellen, der tværtimod har en "lokal" erfaringshorisont. Og forskellen mellem hvordan troværdigheden af de to slags matematiske modeller kan vurderes på, hænger netop sammen med denne forskel i erfaringsgrundlag.

Men hvilken praktisk-politisk rolle, mener jeg da, at den - efterhånden lidt indviklet fremstillede - meget omtalte forskel spiller? Her vil jeg gerne vende tilbage til Rasmussen-rapporten.

Vi har set, at der for de modeller, der er kaldt teoretiske, gælder, at deres brugbarhed kan vurderes ved hjælp af den teori, de er udledt af. Og at en sådan vurdering ikke lader sig gøre for simulationsmodeller. De kan alene vurderes ved afprøvning på praktiske situationer af samme slags, som dem, de skal anvendes på.

Men en praktisk afprøvning af Rasmussen-rapporten kan kun lade sig gøre gennem en mængde A-kraftuheld, som ikke er accepta-

ble, og som det bl.a. er modellens postulerede formål at medvirke til at undgå. Og den hviler ikke på noget teoretisk grundlag.

Det er derfor nærmest en tros sag, om man tør tro på rapporten. Eller rettere sagt et spørgsmål om at vurdere de interesser, der står bag.

Jeg mener, det er politisk vigtigt, at så mange som muligt kan ræsonnere som her gjort. Som tidligere nævnt er det især vigtigt over for alle de andre tilfælde, hvor der anvendes matematiske modeller, og hvor skepsisen ikke mobiliseres gennem modregnestykker. Og som også tidligere nævnt er konklusionen ikke givet på forhånd. Den beror netop på den skelnen, artiklen har handlet om.

For at kunne ræsonnere og konkludere som gjort, og selv kunne lodde dybden heraf, er det nødvendigt at have en fornemmelse af, hvad der findes hvilken slags teorier for her i verden, og om de lader sig benytte som grundlag for kvantificerbare modeller.

Hvis det stod til mig, blev udviklingen af en sådan fornemmelse, gjort til en væsentlig del af "almendannelsen" i fremtidens gymnasium - uanset elevmotivationen i første omgang.

For øjeblikket sker det ikke.

Fagenes forskellighed bearbejdes ikke. Tværtimod. De fremstilles nærmest som ens, fordi de af kollegiale grunde skal regnes for "lige gode".

Heller ikke inden for et fag som fysik betones den nødvendige skelnen. F.eks. fremstilles Ohm's lov (simpel simulationsmodel) og Coulomb's lov (hjørnesten i elektricitetslærens teoretiske fundament) som sidestillede.

Og når matematikundervisningen undtagelsesvist tager emnet matematikkens anvendelser op, tror jeg oftest at det nærmere sker for at demonstrere det glade budskab om matematikken som et universalinstrument end det modsatte.

Jeg mener som sagt, det burde være anderledes. Men det står ikke til mig at ændre det.

PS. Spørgsmålet om sandhed eller falskhed af teorier er ikke behandlet i artiklen. Heller ikke problemet om hvad matematik egentlig er for noget - videnskabsteoretisk set - er emnet. Det

samme gælder de samfundsmæssige årsager til og konsekvenser af den stigende brug af matematiske modeller.

Det har først og fremmest været meningen, at komme med nogle "erkendelsesteoretiske instrumenter", som jeg mener kan være vigtige i konkrete politiske sammenhænge, hvor matematiske modeller spiller en rolle.

LITTERATUR:

\*) Artiklen er skrevet på baggrund af:

Erik Odgaard Gade, Orla Johannsen, Henrik Lau, Finn Christensen Physant, Peter Schou Sørensen, Ariceu Vieira Teixeira, Jens Højgaard Jensen:

"Matematiske modeller og videnskabsteoretiske problemer ved modeldannelse"

RUC/NAT/BAS 4. semester, forår 1979,

som er resultatet af et projektarbejde, som jeg i Den naturvidenskabelige basisuddannelse, RUC, var vejleder for.

- 1) Jack N. Shuman: Mathematical Model Building and Public Policy: The Games Some Bureaucrats Play"; Technological Forecasting and Social Change 9, 309-334 (1976).
- 2) Marianne Birkmose, m.fl.: "En undersøgelse af modellen SMEC II", projektrapport i matematikuddannelsen, RUC, 1975.
- 3) Organization for Economic Cooperation and Development: "Econometric Models of Education: Some Applications". Paris: OECD, 1965.
- 4) "Statistik i Kræftforskningen", Tekst nr. 16, IMFUFA, RUC.  
"Statistiske modeller til bestemmelse af sikre doser for car-siogene stoffer", Tekst nr. 20, IMFUFA, RUC.  
Projektrapporter af Michael Olsen og Jørn Jensen.
- 5) RAMA, nr. 1, Studenterrådet ved Københavns Universitet, 1979.
- 6) "Reactor Safety Study: an assesment of accident risk in U.S. commercial nuclear powerplants". Report No. WASH 1400, Nuclear Regulatory Comission, Washington D.C.
- 7) Jvf. f.eks.: B.V. Gnedenko: "Matematikkens forhold til samfundsøkonomien", Tekst nr. 7, IMFUFA, RUC.
- 8) Jvf. f.eks.: Herbert Marcuse: "Det endimensionale menneske", Gyldendals Uglebøger.

Denne artikel har også været trykt i "Meddelelser fra matematiklærerforeningen og foreningen af fysik- og kemilærere ved gymnasier og seminarier", nr. 7, november 1979, og "Byggesten" nr. 14.

BEREGNING AF GRUNDVANDSSÆNKNING SOM FØLGE AF VANDBØRING  
- ANVENDT MATEMATIK (OG FYSIK) PÅ GYMNASIENIVEAU.

Af Jens Højgaard Jensen, RUC.  
Vejleder: Gruppe 3, NAT-BAS, hus 202, forår 1979, RUC.

Indledning.

Ved læsning af "MFK-90 debat" har det slået mig, at parolen om en anvendelsesorienteret undervisning går igen direkte eller indirekte i ret mange af debatindlæggene om gymnasiets matematik-undervisning.

Ved gruppe 3, NAT-BAS, hus 202, forår 1979, RUC's hjælp er jeg samtidig blevet opmærksom på dele af hydrogeologien som et eksempel på anvendt matematik (og fysik), der på den ene side er hentet fra det virkelige liv og på den anden side ligger inden for gymnasiepensumets rækkevidde.

Jeg vil med artiklen her beskrive eksemplet som en beskeden støtte til at anvendelser af matematik og fysik inddrages i undervisningen.

Men før jeg gør det, kan jeg ikke lade være med at komme med nogle bemærkninger om parolen om en anvendelsesorienteret undervisning i matematik og fysik.

Så vidt jeg forstår situationen, hænger brugen af ordet anvendelsesorientering sammen med en stigende opmærksomhed på fagene matematik og fysik's relative isolation i gymnasiet. Bl.a. på grund af den øgede søgning til gymnasiet er der stigende vanskeligheder med at motivere eleverne for nogle fag, hvis placering på skemaet kun kan begrundes med henvisning til kommende studier eller deres samfundsmæssige betydning i al almindelighed. Der er behov for at eleverne i konkrete undervisningsforløb kan opleve, at fagene ikke er skolastisk eksersits, men at galskaben er godt for noget. Der er kort sagt brug for en anvendelsesbaseret undervisning. Inddragelse af anvendelser kan i stigende grad blive et nødvendigt middel i undervisningen.

Men dyrkelsen af anvendelser kan efter min mening ikke være et mål i sig selv - en orientering. Netop den større søgning og den dermed forbundne forskydning af gymnasiet fra at være en stu-



dieforberegende uddannelse til at være en almen uddannelse, gør den instrumentalistiske opfattelse af fagene matematik og fysiks rolle, der kan lægges i parolen om anvendelsesorientering, i stigende grad ubrugelig. Det, der er brug for, er nærmere en overblikorienteret undervisning. Det kan godt være, eleverne ikke umiddelbart er motiveret for en sådan undervisning. Især ikke hvis overblikket forudsætter indsigt i matematik eller fysik. Men uanset motivation, er overblik afgørende for ikke at blive u-myndiggjort i et samfund som vores. I et af indlæggene i "MFK-90 debat" har jeg antydnet, hvad det er for en slags overblik faget fysik efter min vurdering burde bidrage til at udvikle hos eleverne.

Den hydrogeologi, som nu skal beskrives, har for gruppe 3 sammen med arbejdet med en satellitbaneberegning og en fiskeribiologisk model tjent som middel til at realisere målet: At øge overblikket over den forskelligartede karakter og brug/misbrug af matematiske modeller. Motivationen til at tage dette problem op skyldtes et tidligere projekt om vandindvinding i Suså-området.

Beregning af grundvandssænkning som følge af vandboring  
- anvendt matematik.

Et af hydrogeologiens hovedproblemer er at forudsige ændringer i grundvandsforholdene som følge af vandboring i området omkring boringen. Som regel er de geologiske forhold for sammensatte til at simple matematiske modeller kan anvendes direkte. Alligevel indeholder kapitlet om grundvandssænkning i lærebogen i hydrogeologi for ingeniørstuderende på D.T.H. først og fremmest en gennemregning af nedenstående simple matematiske modeller. Retfærdiggørelsen herfor er, at de virkelige forhold kan forsøges modeleret ved passende kombination af de simple modeller. I det følgende betragtes derfor en række geologisk set idealiserede tilfælde.

Bestemmende ligninger.

Udgangspunktet for alle regningerne er dels kontinuitetsligningen, dels den såkaldte Darcy's lov for sammenhængen mellem transport-

hastigheden,  $v$ , af strømmende vand og det trykfald pr. længdeenhed,  $-\frac{dp}{dx}$ , der får vandet til at strømme:

$$1) \quad v = -k \cdot \frac{dp}{dx}$$

,hvor den såkaldte permeabilitet (eller gennemstrømmelighedscoefficient),  $k$ , er en karakteristisk konstant for det materiale, vandet strømmer igennem.

Darcy's lov fremstilles i den omtalte lærebog som en ren erfaringssag. Det samme gælder det forhold, at  $k$  ofte findes at variere proportionalt med  $d^2$ , hvor  $d$  er den gennemsnitlige diameter af kornene i materialet, der gennemstrømmes. Så vidt jeg kan se, kan begge dele imidlertid gøres til genstand for nøjere overvejelser som vist i det næste afsnit om grundvandssænkning og anvendt fysik.

Kontinuitetsligningen udtrykker i hvert enkelt tilfælde, at der til ethvert område pr. tidsenhed tilføres lige så meget vand, som der føres bort fra området pr. tidsenhed, idet den situation, der regnes på i alle modellerne, er den stationære.

I alle modellerne går der ud fra at det vandførende lag, der pumpes vand op fra, har et vanduigennemtrængeligt lag under sig. Man taler da om trykhøjden, som den højde vandet i en brønd, der når ned til det vandførende lag, vil stå i over grænsefladen mellem de to lag, som følge af trykket,  $P$ , ved grænsefladen. Hvis det vandførende lag, der pumpes vand op fra, ikke er klemt inde mellem vandspærrende lag både over og under det, men rækker op ad til jordens overflade, er trykhøjden det samme som højden af grundvandsspejlet over det vandspærrende lag. Man taler i dette tilfælde om et frit grundvandsspejl. I tilfældet hvor det vandførende lag er spærret inde, taler man om artesisk grundvand.

I alle tilfælde er det problem, der stilles, at finde trykhøjden,  $y$ , som funktion af afstanden til boringen,  $x$ . Da sammenhængen mellem trykhøjde,  $y$ , og tryk ved grænsefladen,  $P$ , er:  $P = \rho g y$ ,  $\rho$ =vands massefylde,  $g$ =tyngdeacceleration, kan Darcys lov omformes til:

$$2) \quad v = -K \cdot \frac{dy}{dx}$$

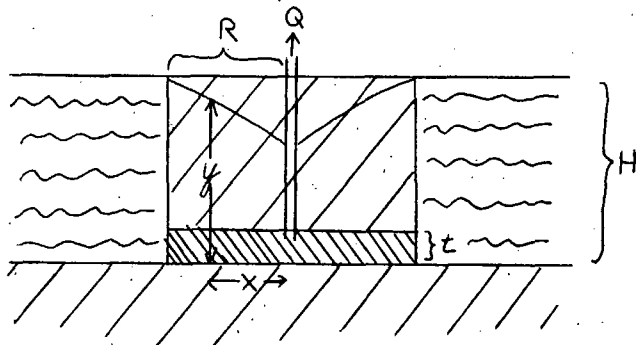
, hvor  $K = \rho g k$ .

6 simple modeller for 6 idealiserede tilfælde.

I alle tilfældene betyder Q rumfanget af det vand, der pumpes op pr. tidsenhed.

a. Boring i midten af artesisk åre i ø i ferskvandssø.

(Modellen kan som tilnærmelse godt bruges på andre forhold end denne ekstreme situation).



Figuren forestiller et lodret snit.

- /// = vandspærrende lag.
- //// = vandførende lag (åre).
- ~~~~ = vand.

Problemet er:  $y = y(x)$ ?

Kontinuitetsligningen får i dette tilfælde udseendet:

$$Q = v(x) \cdot t \cdot 2\pi x$$

, hvor t er tykkelsen og b bredden af den vandførende åre. Ligningen udtrykker, at den mængde vand, der oppumpes pr. tidsenhed, skal være lig den mængde vand der strømmer gen-

nem et vilkårligt tværsnit af åren pr. tidsenhed ganget med 2 på grund af tilførslen fra begge sider.

Indsættes det udtryk for  $v(x)$ , der fås af kontinuitetsligninger i ligning 2) fås (idet x og v regnes positive i modsatte retninger):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2btK}$$

til bestemmelse af  $y=y(x)$ . Ved integration fås:

$$y = \frac{Q}{2btK} \cdot x + C$$

Da  $y=H$  for  $x=R$  er  $C=H - \frac{Q}{2btK} \cdot R$ , dvs.

$$y = H - \frac{Q}{2btK} \cdot (R-x) \quad \text{eller for}$$

$$\text{sænkningen } s = H - y = \frac{Q}{2btK} \cdot (R-x)$$

b. Boring i centrum af artesisk lag i cirkulær ø i ferskvandssø.

Den samme figur som ved tilfælde a. kan forestille et lodret snit.

Kontinuitetsligningen får i dette tilfælde udseendet:

$$Q = v(x) \cdot t \cdot 2\pi x$$

og udtrykker, at der til et område omkring boringen med radius x for alle x skal gælde, at der gennem det vandførende lag pr. tidsenhed tilføres lige så meget vand, som der oppumpes.

Indsættes det udtryk for  $v(x)$ , der fås af kontinuitetsligningen i ligning 2) fås:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi tK} \cdot \frac{1}{x}$$

$$dy = \frac{Q}{2\pi tK} \cdot \frac{dx}{x}$$

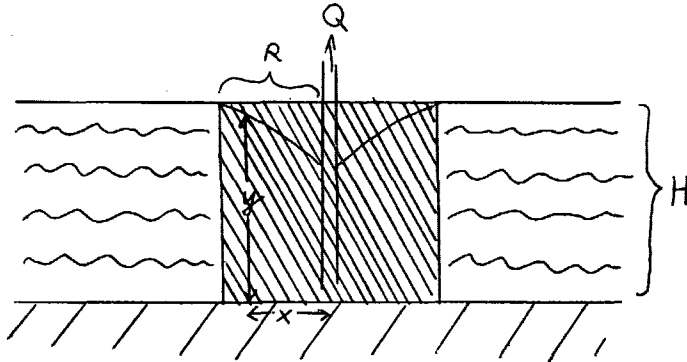
$$y = \frac{Q}{2\pi tK} \cdot \ln x + C \quad \text{og da}$$

$$C = H - \frac{Q}{2\pi tK} \cdot \ln R$$

$$y = H - \frac{Q}{2\pi tK} \cdot \ln \left( \frac{R}{x} \right) \quad \text{eller for sænkningen}$$

$$s = H - y = \frac{Q}{2\pi tK} \cdot \ln \left( \frac{R}{x} \right)$$

c. Boring i midten af lodret vandførende lag i ø i ferskvandssø.



Problemet er:  $y = y(x)$ ?

Kontinuitetsligningen:  $Q = v(x) \cdot b \cdot y(x) \cdot 2$   
sammenholdt med 2) giver:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2bK} \cdot \frac{1}{y}$$

$$y dy = \frac{Q}{2bK} \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{Q}{2bK} \cdot x + C \quad , \text{hvor}$$

$$C = \frac{1}{2} H^2 - \frac{Q}{2bK} \cdot R \quad \text{og altså}$$

$$y = \left( H^2 - \frac{Q}{bK} \cdot (R-x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

d. Boring i centrum af cirkulær ø med frit grundvandsspejl i ferskvandssø.

Samme figur for lodret snit som ved c.

Kontinuitetsligningen:  $Q = v \cdot 2\pi x \cdot y$   
sammenholdt med 2) giver:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi K} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$$

$$y dy = \frac{Q}{2\pi K} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{Q}{2\pi K} \cdot \ln x + C \quad , \text{hvor}$$

$$C = \frac{1}{2} H^2 - \frac{Q}{2\pi K} \cdot \ln R \quad \text{og altså}$$

$$y = \left( H^2 - \frac{Q}{\pi K} \cdot \ln \left( \frac{R}{x} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

e. Boring i midten af lodret vandførende lag i ø i ferskvandssø, hvor det vandførende lag tilføres vand fra oven som følge af nedbør på øen.

Kontinuitetsligningen får i dette tilfælde udseendet:

$$Q = (V(x) \cdot y(x) \cdot b + k' \cdot x \cdot b) \cdot 2$$

, hvor  $k'$  = tilført nedbørmængde pr. tidsenhed pr. arealenhed af jordoverfladen af det vandførende lag.

Sammenholdt med 2) fås:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2bK} \cdot \frac{1}{y} - \frac{k'}{K} \cdot \frac{x}{y}$$

$$ydy = \frac{Q}{2bK} \cdot dx - \frac{k'}{K} \cdot xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{Q}{2bK} \cdot x - \frac{k'}{2K} \cdot x^2 + C \quad , \text{ hvor}$$

$$C = \frac{1}{2}H^2 - \frac{Q}{2bK} \cdot R + \frac{k'}{2K} \cdot R^2 \quad \text{og altså}$$

$$y = \left( H^2 - \frac{Q}{bK} \cdot (R-x) + \frac{k'}{K} \cdot (R^2-x^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

f. Boring i centrum af cirkulær ø med frit grundvandspejl i ferskvandssø, hvor det regner på øen.

Kontinuitetsligningen:

$$Q = v(x) \cdot 2\pi x \cdot y(x) + k' \cdot 2\pi x^2$$

, hvor  $k'$  = nedsivende nedbør på øen pr. arealenhed pr. tidsenhed, giver sammen med 2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi K} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} - \frac{k'}{K} \cdot \frac{x}{y}$$

$$ydy = \frac{Q}{2\pi K} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{k'}{K} \cdot xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{Q}{2\pi K} \cdot \ln x - \frac{k'}{2K} \cdot x^2 + C \quad , \text{ hvor}$$

$$C = \frac{1}{2}H^2 - \frac{Q}{2\pi K} \cdot \ln R + \frac{k'}{2K} \cdot R^2 \quad \text{og altså}$$

$$y = \left( H^2 - \frac{Q}{2\pi K} \cdot \ln \left( \frac{R}{x} \right) + \frac{k'}{K} \cdot (R^2-x^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Kommentarer.

I praksis er problemerne naturligvis sjældent omkring vandboring i øer i ferskvandssøer. Men forholdene kan være tilsvarende. F. eks. kan tilfælde b. repræsentere den situation, at vandtilførslen til en boring i et område, i det væsentlige ikke skyldes nedbør på området, men tilstrømning fra grundvandsreservoirer, der får deres vand fra andre nedbørsområder. F. eks. kan tilfælde f. repræsentere en situation, hvor R ikke betyder radius af en ø, men radius i det område omkring boringen inden for hvilket, der sker en nedsivning af nedbør svarende til oppumpningen (indvindingsområdet) (y sættes lig H i den afstand  $x = R$ , der svarer til  $v(x) = 0$  i kontinuitetsligningen).

De fire sidste tilfælde er alle udregnet under den forudsætning, at  $\frac{dy}{dx} \ll 1$  for alle værdier af x større end radius af borehullet, således at trykgradienterne og strømningshastighederne kan regnes for vandrette. Hvis forudsætningen ikke holder, gælder Darcys lov ikke i den simple form, den her er anvendt i.

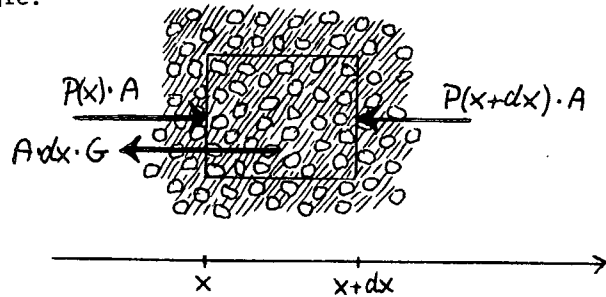
Når jeg har anført så mange regnestykker, er det for at illustrere, at problemet om beregning af grundvandssænkning netop indeholder en vifte af modeller. Det skulle derfor være muligt i undervisningen efter gennemregning af et eller nogle af tilfældene at involvere eleverne i selv at opstille modeller for andre tilfælde. Netop opstillingen af en matematisk model er måske en mere afgørende ting for eleverne at få erfaring med end løsningsmetoder til givne matematiske problemer.

Nogle forudsætninger for beregningerne  
- anvendt fysik.

Som omtalt kan Darcys lov - ligning 1) (og 2)) - , så vidt jeg kan se, udledes af den almindelige bevægelsesligning i mekanikken, dvs. Newtons 2. lov, hvilket gør en vurdering af de tilnærmelser, den er baseret på, mulig. Ligeledes kan den afgørende størrelse for grundvandssænkingsberegningerne, nemlig permeabiliteten, k, diskuteres teoretisk fysisk. Det er disse to emner, dette afsnit handler om. Selvom udledningen af Darcys lov næppe egner sig for gymnasiet, er den taget med af hensyn til lærerne. I modsætning hertil egner diskussionen af hvilke forhold der bestemmer størrelsen af permeabiliteten sig efter min vurdering godt som både eksperimentelt og teoretisk indslag i fysikundervisningen.

Udledning af Darcy's lov.

Som nævnt gælder Darcy's lov som tilnærmelse kun for vandret strømning. Vi vil se på en vandret strømning og anvende Newtons 2. lov på vandet i kassen på figurens vandrette bevægelse mod højre.



////// = vand

○○○○ = jordpartikler

Massen af vandet i kassen er  $\rho \cdot A \cdot dx$ , hvor A er arealet af de af kassens sider, der er vinkelret på vandets transporthastighed, v.

Vandet er dels påvirket af tryk fra vandet uden for kassen, dels af kraften  $A \cdot dx \cdot G$ , der skyldes vekselvirkningen mellem vandet i kassen og jordpartiklerne i kassen. Newtons 2. lov siger altså:

$$\rho A dx \cdot \frac{dv}{dt} = A \cdot P(x) - A \cdot P(x+dx) - A dx \cdot G$$

eller

$$3) \quad \rho \frac{dv}{dt} = - \frac{dP(x)}{dx} - G$$

Byttes rundt på ligning 3), så den får udseendet:

$$4) \quad - \frac{dP}{dx} = \rho \frac{dv}{dt} + G$$

udsiger den i ord, at trykfaldet pr. længdeenhed dels skal sikre vandets acceleration, dels overvinde gnidningsmodstanden ved transport gennem jordpartikelsystemet.

Darcy's lov fremgår af ligning 4) med antagelserne:

$$a) \quad \rho \frac{dv}{dt} \ll G$$

$$b) \quad G = \gamma \cdot v$$

,idet man da får:

$$5) \quad v = -k \cdot \frac{dP}{dx} ; \quad k = \frac{1}{\gamma}$$

Antagelserne bag Darcy's lov er altså dels, at det trykfald, der under praktisk forekommende geologiske omstændigheder skal til for at sikre den nødvendige acceleration, er forsvindende i forhold til det trykfald, der skal til for at overvinde gnidningsmodstanden, dels at gnidningsmodstanden kan regnes for proportional med transporthastigheden af det strømmende vand.

Antagelsen  $G = \gamma \cdot v$  må anses for rimelig for tilstrækkeligt små værdier af v, da  $G = 0$  for  $v = 0$ . Ved hvilke værdier af v antagelsen bliver uholdbar, kan næppe vurderes ved andet end eks-

perimeter. Derimod er det muligt at lave en vurdering af antagelsen  $\rho \frac{dv}{dt} \ll G$ . Idet

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$$

ses, da  $G = \gamma \cdot v = \frac{1}{k} v = \frac{\rho g}{K} v$

, at antagelsen alment kan udtrykkes som:

$$|\frac{dv}{dx}| \ll \frac{g}{K}$$

Ved boringer i artesiske lag, hvor  $v = v(x)$  er bestemt af kontinuitetsligningen med udseendet:

$$Q = v(x) \cdot t \cdot 2\pi x \text{ fås specielt:}$$

$$x \gg \left( \frac{K}{g} \cdot \frac{Q}{2\pi t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Så længe radius i borehullet er meget større end størrelsen på højre side af uligheden, er det således tilladeligt at bero på den approksimation, som Darcy's lov er, for sammenhængen mellem strømningshastighed og trykgradient uden for borehullet. I den omtalte lærebog i hydrogeologi findes følgende tal angivet for et eksempel på en artesiske boring (side 182):

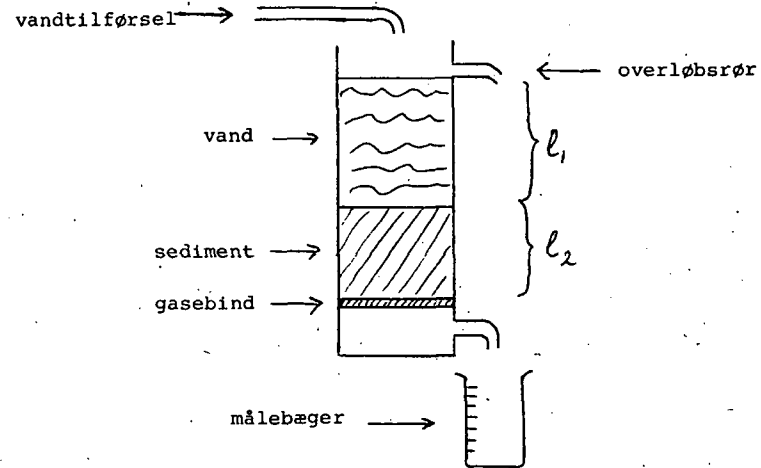
$$K = 9 \cdot 10^{-4} \frac{m}{sek}; Q = 5 \frac{l}{sek}; t = 5m, \text{ hvoraf } \left( \frac{K}{g} \cdot \frac{Q}{2\pi t} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.2 \cdot 10^{-4} m$$

til sammenligning med at radius af borehullet angives til at være 0.1 m. Det virker således, som om det kun er under meget specielle hydrogeologiske omstændigheder, at accelerationsleddet i ligning 4) kan have betydning for beregning af grundvandssænkning. Hvis man derimod skal beregne vandhøjden i et badekar omkring udløbet efter at proppen er trukket op, er leddet afgørende.

Eksperimentel vurdering af Darcy's lov og størrelsen af permeabiliteten, k.

Antagelsen om hastighedsproportional gnidningsmodstand kan vurderes eksperimentelt.

Nedenstående figur viser den forsøgsopstilling, der normalt anvendes af hydrogeologer, når k skal bestemmes for en sedimentprøve. Opstillingen er befriende simpel og kan uden videre etableres som led i elevforsøg på ethvert gymnasium.



Det sediment, der skal undersøges, placeres i cylinderen oven på det fastspændte gasebind, og der fyldes vand i cylinderen fra en vandhane, således at der kommer til at stå vand i en fast højde over sedimentet bestemt af placeringen af overløbsrøret. Herefter måles vandmængden, der løber ud af cylinderen under gasebindet pr. tidsenhed ved hjælp af stopur og målebægeret. Permeabiliteten fås så af formlen:

$$k = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{Q}{A \cdot \rho g}, \text{ hvor}$$

$Q$  = vandmængde, der løber ned i målebæger pr. tidsenhed,  
 $A$  = cylinderens tværsnitsareal.

Da strømmingen er lodret, er formelen ikke udledt af den simple udgave af Darcy's lov, men af ligningen:

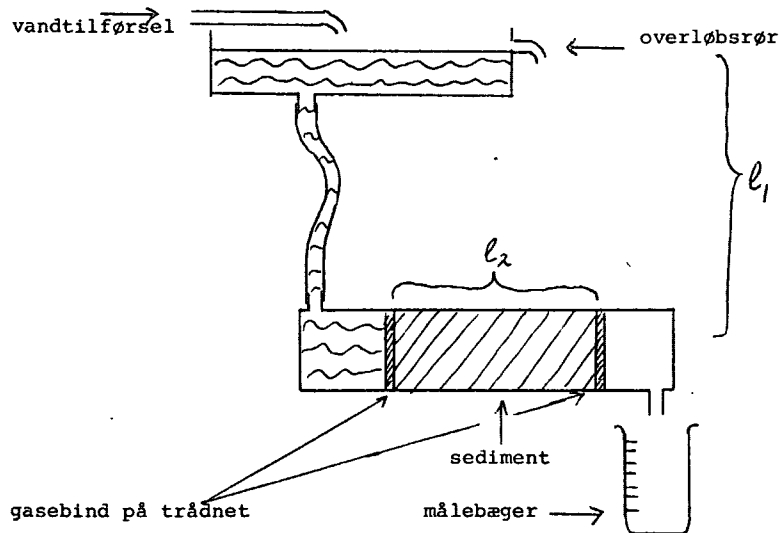
$$\frac{dP}{dx} = -(\gamma v - \rho g)$$

for trykvariationen gennem sedimentet. Da trykket ved gasebindet, er lig atmosfæretryk og trykket ved grænsefladen mellem vandsøjle og sediment er  $\rho g l_1$  over atmosfæretryk, har vi

$$\rho g l_1 = (\gamma v - \rho g) l_2 \quad , \text{ der sammenholdt}$$

med  $k = \frac{1}{\gamma}$  og  $A \cdot v = Q$  giver formelen.

En mere pædagogisk opstilling, hvor det er den simple udgave af Darcy's lov, der er i spil, er vist i princippet på nedenstående figur.



På den ene side er  $-\frac{dP}{dx} = -\frac{P_{atm.} - (P_{atm.} + \rho g l_1)}{l_2} = \rho g \frac{l_1}{l_2}$ .

På den anden side er  $v = \frac{Q}{A}$ . Da  $l_1$  kan varieres, kan proportionaliteten mellem  $-\frac{dP}{dx}$  og  $v$  efterprøves. Formlen for  $k$  ses i dette tilfælde at være:

$$k = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{Q}{A \cdot \rho g}$$

Teoretisk vurdering af permeabilitetens afhængighed af kornstørrelsen i sedimentet.

Som omtalt anføres det i den omtalte lærebog, at det er en erfaring, at  $k$  er proportional med  $d^2$ , hvor  $d$  er en typisk diameter for de korn sedimentet består af. Ved at købe en pose sand og sortere sandskornene gennem en serie sier kan sammenhængen efterprøves eksperimentelt ved brug af en af de skitserede opstillinger. Men den kan også bevises teoretisk ved en dimensionsanalyse, som gymnasieelever, så vidt jeg kan se, godt kan delagtiggøres i.

Af Darcy's lov:  $v = -k \frac{dP}{dx}$  fremgår det, at  $k$ 's dimension må være:

$$[k] = \frac{[v] \cdot [dx]}{[dP]} = \frac{\frac{L}{T} \cdot L}{\frac{M}{L^2} \cdot \frac{L}{T^2}} = \frac{L^3 \cdot T}{M}$$

De fysiske størrelser,  $k$  kan afhænge af, er udover  $d$ , vandets viskositet  $\mu$ , vandets massefylde  $\rho$  og kornenes form. En given fordeling af kornformer og en given fordeling af kornenes orienteringsretninger kan karakteriseres ved en række dimensionsløse tal. Der må derfor gælde:

$$k = d^\alpha \cdot \mu^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot F(f)$$

,hvor  $F$  er en dimensionsløs størrelse, der afhænger af kornformer og orienteringer, og  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\gamma$  må vælges således, at højresiden får den rigtige dimension. Da:

$$[d] = L ; [\nu] = \frac{M}{T \cdot L} ; [\rho] = \frac{M}{L^3}$$

må der altså kræves at

$$\frac{L^3 \cdot T}{M} = L^\alpha \cdot \frac{M^\beta}{T^\beta \cdot L^\beta} \cdot \frac{M^\gamma}{L^{3\gamma}}$$

Ligningen kan kun opfyldes for dimensionen T, hvis  $\beta = -1$ . Dette taget i betragtning, kan den kun opfyldes for dimensionen M, hvis  $\gamma = 0$ . Herefter kan den kun opfyldes for dimensionen L, hvis  $\alpha = 2$ . Under forudsætning af hastighedsproportional gnidning gælder det således entydigt, at

$$k = \frac{d^2}{\mu} F(f)$$

Formlen skal forstås således, at hvis det geometriske billede af sediment 1 fremgår af det geometriske billede af sediment 2 ved at alle længder er ganget med  $\epsilon$ , da er  $k$  for sediment 1  $\epsilon^2$  gange større end  $k$  for sediment 2.

#### Slutbemærkninger.

Som omtalt i indledningen, mener jeg ikke, at dyrkelsen af et emne, som det fremstillede i sig selv tjener noget formål i gymnasiet. Om det har mening afhænger af den sammenhæng, det fremgår af, og de problemer, det skal tjene til at belyse.

Umiddelbart virker det som om, der er basis for et tværfagligt samarbejde. Vandindvindingsproblemer har både geologiske, geografiske, biologiske, kemiske, samfundsfaglige og måske historiske ender. Og med ovenstående kan de fag, der som regel er henvist til kulden i den slags samarbejder - matematik og fysik - åbenbart også være med. Men på hvilken måde?

Hvis begrundelsen for at tage vandindvindingsproblemer op f.eks. er stillingtagen til en lokal sag, tror jeg ud fra erfaringerne på RUC, at eleverne vil finde, at inddragelse af den omtalte matematik og fysik er at skyde spurve med kanoner. Enten vil eleverne

vige uden om eller, hvis de ikke får lov til det, få bekræftet fornemmelsen af de to fags uvirkelighed og ubrugelighed. Størstedelen af det tekniske beslutningsgrundlag for vandindvindingsager er formodentlig udarbejdet af folk, der ikke forstår den matematiske og fysiske baggrundsviden eller ikke har den present. Der indsættes i formler, som regnes for etableret én gang for alle. Når det er sådan, hvorfor skulle gymnasieeleverne så udlede formlerne for at kunne tage stilling?

Hvis begrundelsen for at tage vandindvindingsproblemer op er, at de skal bruges som eksempel på "ekspertificering" af politiske prioritetsproblemer, kan den omtalte matematik og fysik få en mindre påklistret funktion i sammenhængen, set fra elevernes synsvinkel.

Hvis endeligt grundvandssænkingsmodeller tages op som en af flere matematiske modeller til belysning af emnet brug og misbrug af matematik, er det klart, at matematisk forståelse af modellerne er nødvendig. Faktisk er fysisk forståelse også nødvendig for at kunne vurdere deres karakter eller status.

Erfaringerne fra basisuddannelsen på RUC får mig til at mene, at elevernes motivation umiddelbart er større for at arbejde med en lokal vandindvindingsag end deres motivation for at arbejde med problemet brug/misbrug af matematik i al sin abstrakthed.

Det ideelle undervisningsforløb til at give eleverne forståelse af den samfundsmæssige betydning af matematik og eksakt naturvidenskab på godt og ondt, ville derfor være et, hvor de starter med et konkret problem, som f.eks. én lokal vandindvindingsag, derigennem opdager, at f.eks. problemet brug/misbrug af matematik er vedkommende, og derfor i anden omgang bliver i stand til at gå ind i dette mere abstrakte problem på en motiveret måde.

Jeg er godt klar over, at jeg i disse slutbemærkninger har udtrykt mig, som om jeg diskuterede den naturvidenskabelige basisuddannelse på RUC og ikke gymnasiets undervisning i matematik og fysik. Men måske er det sådan, at en så radikal omlægning, som svarende til basisuddannelserne på RUC, er nødvendig, hvis fagene matematik og fysik ikke fortsat skal optræde isoleret i gymnasiet. Det er efter min mening ikke de to mindst væsentlige fag til at bidrage til udvikling af elevernes omverdensforståelse. Men fagenes abstrakthed og tilsyneladende uforbundethed til hverdagen



kræver, at de indplaceres i en med de øvrige fag sammenhængende strategi for hele gymnasieforløbet, hvis et afgørende formål med fagene skal være at give overblik, der rækker ud over fagene selv.

Litteratur:

J.J. Linde-Jensen m.fl.: Vandforsyningsteknik-Teknisk hygiejne,  
kap. 5. Polyteknisk Forlag, 1976.

P.S. Efter at have skrevet artiklen på grundlag af den refererede lærebog fra DTH, har jeg undersøgt en af dens baggrundskilder:

"Frank Engelund: On the Laminar and Turbulent Flows  
of Ground Water through homogeneous Sand, Danish Academy of technical Sciences. Transactions No. 3, 1953."

For en ordens skyld skal det nævnes, at der heri findes behandlinger, der dækker de supplerende "originale" beregninger i artiklen fra min side.



**MATEMATISKE MODELLER  
OG VIDENSKABSTEORETISKE  
PROBLEMER VED MODELDANNELSE**

UDARBEJDET I PERIODEN 1/2 1979 - 22/5 1979 PÅ RUC/NAT/BAS 4. SEMESTER.

MATEMATISKE MODELLER OG VIDENSKABSTE-  
ORETISKE PROBLEMER VED MODELANNELSE.

AF

ERIK ODGAARD GADE

ORLA JOHANNSEN

HENRIK LAU

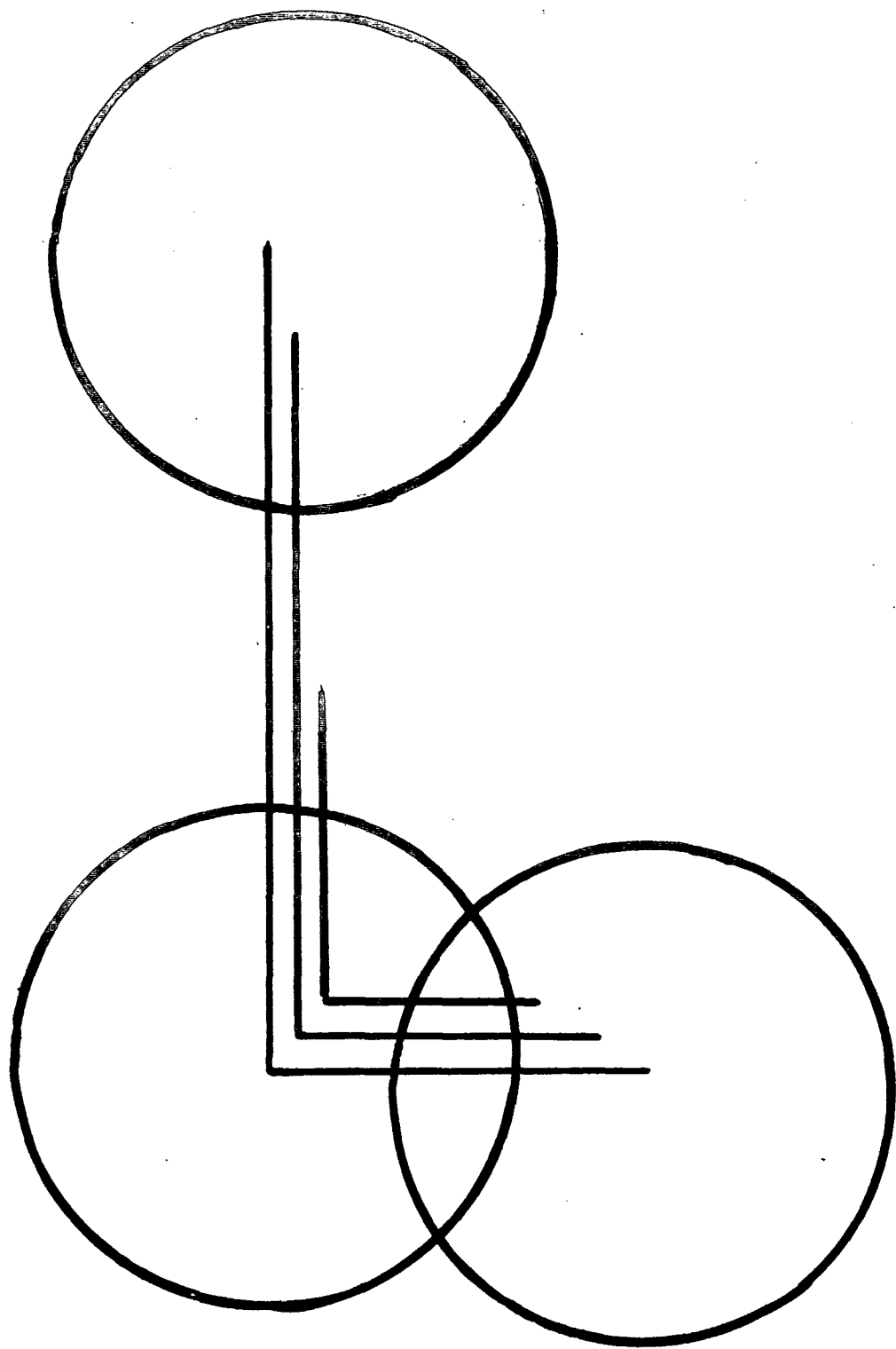
FINN CHRISTENSEN PHYSANT

PETER SCHOU SØRENSEN

ARICEU VIEIRA

JENS HØJGÅRD JENSEN

<u>INDHOLD:</u>	side.		side
	8		
	9		
1.	12		
1.1	13		
1.2	13		
1.3	17		
2.	20		
2.1	21		
2.2	22		
2.3	27		
2.3.1	27		
2.3.2	28		
2.4	30		
2.4.1	30		
2.4.2	33		
2.4.3	34		
2.4.4	34		
2.4.5	36		
2.4.6	37		
2.5	39		
2.5.1	39		
2.5.2	39		
2.5.3	40		
		2.5.4 Udvælgelsen - en vigtig del af model- bygningen	42
		2.6 Modevaluering	44
		2.6.1 Sand/falsk-sondringen	44
		2.7 Teorier som teorier	48
		3 MODEL ANALYSE	50
		3.1 Indledning	51
		3.2 Problem 1: Plcering af en TV-satellit	52
		3.2.1 Samlet kraft på en satellit	52
		3.2.2 Satellittens bevægelse	53
		3.2.3 Placering af TV-satellit	54
		3.3 Problem 2: Berigning af grundvandssænkning	57
		3.3.1 Trykforhold og grundvandsbevægelse	58
		3.4 Problem 3: Maksimalt vægtudbytte i dam- brug	65
		3.4.1 Antal fisk som funktion af tiden	65
		3.4.2 Fiskens vægt som funktion af tiden	66
		3.4.3 Den maksimale vægt i dammen	68
		3.5 De tre modeller sammenlignes	71
		3.5.1 Ligheder ved de tre modeller	71
		3.5.2 Forskelle ved de tre modeller	73
		3.5.3 Model 1: Placering af TV-satellit	75
		3.5.4 Model 3: Maksimal vægtudbytte i dambrug	77
		3.5.5 Model 2: Beregning af grundvandssænkning	82
		3.5.6 Opsummering	84
		4 KONKLUSION	88
		4.1 Konklusion	89
		Bilag A Himmelmekanik	92
		Tillæg	105
		Bilag B Hydrologi	108
		Ekspimentelt arbejde: Undersøgelse af permeabilitet	120
		Bilag C Udledning af den simple fangstligning	131
		Litteraturliste	143



**TIL HUSET**

## FORORD

I dette projekt vil vi beskrive forskellige problemer omkring matematiske modeller og deres resultater.

Projektet er praktisk talt opdelt i to dele. For det første en generel videnskabsteoretisk afdeling, hvor der behandles forskellige problemstillinger ved modeldannelse. Den anden del behandler mere konkrete matematiske problemstillinger. Tre modeller bliver sammenlignet både indbyrdes og i forhold til det generelle modelafsnit. Følgende problem er opstillet inden udarbejdelsen af de to afsnit:

Projektets formål er, at klarlægge hvad matematiske modeller er - både abstrakt og konkret. Ved at gennemgå og sammenligne følgende tre modeller:

- en himmelmekanikmodel,
- en model af grundvandssænkning og
- en én-arts fiskerimodel,

ønsker vi at verificere en hypotese om, at nogle matematiske modeller søger legitimation v.h.a. "lighed" med andre på et falsk grundlag.

Sideløbende med det egentlige projektarbejde, har vi deltaget i et kursus omhandlende videnskabsteoretiske problemer ved modeldannelse. Kurset skulle bruges til udbygning af første del af projektet. Som følge af det nære forhold mellem projekt og kursus har vores kursusvejleder Stig Andur Pedersen også været os behjælpelig med specielt fremstillingen af projektets første del.

Projektets egentlige vejleder Jens Højgaard Jensen har fortløbende kommenteret og kritiseret vort arbejde og dermed ydet sit til det endelige resultat.

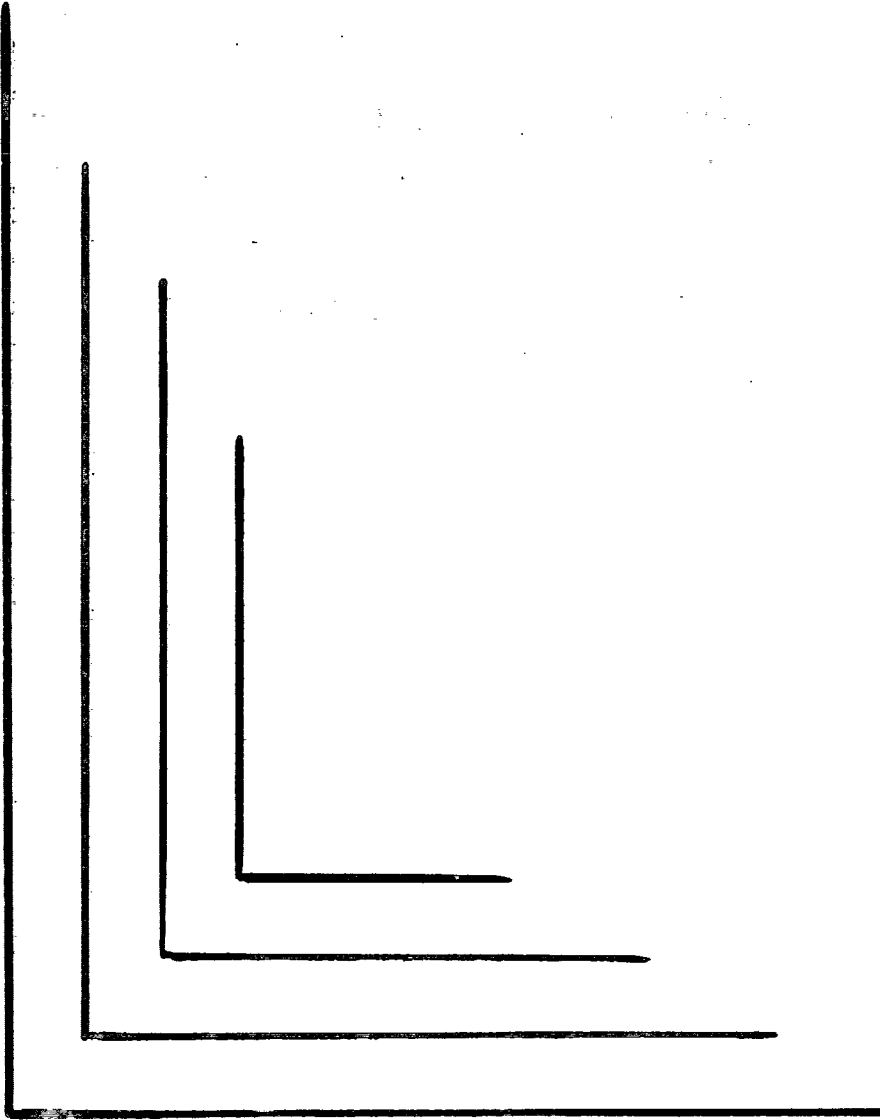
Arbejdsproceduren: vi har så vidt muligt forsøgt at gennemføre gruppearbejdet v.h.a. gruppediskussion/kritik af sædvanligvis skriftlige oplæg udarbejdet af en eller flere af os.

# KAPITEL 1

## MOTIVER FOR PROJEKTET

### Indhold:

- 1.1 To holdninger til naturvidenskab-  
ben.
- 1.2 Filosofisk baggrund for to hold-  
ninger til naturvidenskaben.
- 1.3 Vor stillingtagen til naturviden-  
skab.



## 1 MOTIVER FOR PROJEKTET

### 1.1 To holdninger til naturvidenskab

Grunden til at vi er gået igang med et projekt om matematiske modeller, skal søges i den store og accelererende autoritet og betydning, matematiske modeller har i det samfund, der omgiver os.

Endvidere gør det sig gældende for matematiske modeller, at der i disse findes en indgang til diskussionen om videnskabens rolle i samfundet. En behandling af meta-aspekter<sup>+</sup> omkring matematiske modeller er derfor i et vist omfang en behandling af meta-aspekter vedrørende den ganske videnskab.

At behandle matematiske modeller bliver alt i alt ganske interessant, fordi der om videnskab i samfundsmæssig sammenhæng findes særdeles divergerende meninger.

Ved at kigge på den velkendte A-kraft-debat (hvor der benyttes matematiske modeller til sikkerhedsvurderinger, f.eks. Rasmussen-rapporten) kan der således uden videre fremdrages to meget divergerende syn vedrørende videnskab i samfundsmæssig sammenhæng:

A mener, at videnskaben ikke er neutral og benyttes til at manipulere og udbytte arbejderklassen samt til at styrke kapitalen.

B mener, at videnskaben er rigtig (om ikke sand) og neutral i forhold til sine samfundsmæssige omgivelser.

Ser vi nærmere på holdningernes filosofiske rødder, fås en mere generel indgang til sagen.

### 1.2 Filosofisk baggrund for to holdninger til naturvidenskab

Lad os her kort skitsere de før omtalte holdningers videnskabsteoretiske baggrund - dette giver en noget grundigere indgang til holdningerne, end den vi præsenteres for

<sup>+</sup>) Meta-aspekter vedrørende matematik beskæftiger sig ikke med konkret matematik, men med forhold omkring matematikken.

i dagspressen og samtidig et mere solidt grundlag at tage stilling udfra.

Ikke nok med at disse to grundlæggende modsatte holdninger optræder i den daglige polemik; også blandt egentlige filosofiske skoler er holdningerne kommet til knæsettelse. Og ikke blot repræsenteres de af decideret forskellige politiske fløje - begge grundholdninger findes på én og samme fløj, f.eks. hos det man kunne kalde for den brede venstrefløj.

Vi vil i det følgende eksemplificere denne venstrefløjs to fundamentalt forskellige opfattelser v.h.a. en eksponent for hver. Lenin repræsenterer det videnskabspositive syn, der betragter teknologi og naturvidenskab som værende neutrale i politisk henseende. Marcuse lader vi repræsentere det videnskabsnegative syn, som anser både teknologi og naturvidenskab for altid på en eller anden måde at være bærere af politiske motiver.

De her omtalte syn præsenterer selv sagt de herrers syn på videnskab i det kapitalistiske samfund - ellers ville det være urimeligt at sammenligne deres udtalelser.

Det videnskabspositive syn: Her altså eksemplificeret ved Lenin. Dickson skriver (i "Alternative Technology") introducerende om Lenins syn på teknologi (her: anvendt naturvidenskab) i enhver samfundsformation:



"The idea that the processes of industrial production develop according to an internal logic of their own, providing merely the tools for economic development independent of political motive, was later taken up by Lenin." /Dickson: "Alternative Technology", s 54/.

Med sit naturvidenskabsneutrale (og derfor i Lenins politiske strategi positive) syn gør Lenin den kapitalistiske naturvidenskab og videnskaben i det hele taget til, som Dickson siger:

"....not only a usefyl tool for capitalism, but the answer for socialist production too." /Dickson: Alternative Technology, s 56/.

Hvor løsrevet Lenin ser teknologien og naturvidenskaben fra politiske motiver, kommer frem i hans ønske om at adoptere en helt konkret sag fra det kapitalistiske samfund til sin socialisme. Den konkrete sag var i dette tilfælde Taylor systemet, hvilket kort skitseret var et af de første forsøg på en videnskabelig effektivisering af arbejdsprocesser generelt.

Lenin skriver selv om Taylor systemet og om at adoptere det til det sovjetiske system:

"The Taylor system, is a combination of the refined brutality of bourgeois exploitation and a number of the greatest scientific achievements in the field of analysing the mechanical motions of work..... The Soviet Union must at all costs adapt all that is valuable in the achievements of science and technology in this field .... We must organize in Russia the study and teaching of the Taylor system and systematically try it out and adopt it to our own ends." /Lenin 1918: Collected Works vol. 27, s 257-259./

Hermed er naturvidenskaben og teknologien som rent neutrale størrelser præsenteret. Lad os herefter se på det modsatte syn for at sætte det foregående i relief.

Det videnskabsnegative syn: Her eksemplificeret ved Marcuse. Marcuse erkender såvel teknologien og naturvidenskaben, som al menneskelig viden som størrelser, der aldrig har været og aldrig vil blive bærere af adjektiverne sand eller objektiv (hos Marcuse også: neutral). Denne holdning hos Marcuse synes at være begrundet i hans meninger om sandhed:

"Uanset hvordan man definerer sandhed og objektivitet forbliver de stadig bundet til de mennesker, der udfører dem i teori og praksis, og med deres evne til at begribe og forandre deres egen verden." /Marcuse: Det én-dimensionale menneske, side 177/

Marcuse mener, at ikke kun er teknologien partisk, fordi den er anvendt; men også at den grundlæggende naturvidenskab ikke er neutral, fordi denne ikke kan løsrydes fra sine anvendelsesbånd.

"Jeg tror, at der allerede i den rene videnskab lå en bestemmelse af den retning, den skulle blive anvendt i, selv når den ikke havde noget praktisk formål for øje, og at man kan bestemme det punkt, hvor teoretisk fornuft bliver til samfundsmæssig praksis." /Marcuse: Det én-dimensionale menneske, side 158/

Marcuse skriver videre om videnskabsprocedure generelt:

"Det, jeg forsøger at vise, er, at videnskaben, i kraft af sin egen metode og sine begreber, har projekteret og fremmet et univers, hvori beherskelsen af naturen er blevet ved med at være bundet til beherskelsen af mennesket - en forbindelse, der let kan blive fatal for dette univers som helhed." /Marcuse: Det én-dimensionale menneske, side 175/

Efter denne korte skitsering af de to diametralt modsatte holdninger til naturvidenskab mener vi at have sat dette projekts tema i et større perspektiv og fortsætter nu med en stillingtagen.

### 1.3. Vor stillingtagen til naturvidenskab.

Begge i 1.2. nævnte grundholdninger anser vi for fejlagtige. Lenins, fordi han ikke inddrager det faktum, at naturvidenskaben (eksisterende i et samfund) må være underlagt samfundets strukturer. Naturvidenskaben er jo menneskeskabt - skabt af mennesker udfra normer og ideologier, som optræder bevidst og ubevidst. Derfor er naturvidenskaben ikke neutral.

Marcuses, fordi han ikke inddrager det faktum, at man ved et vue tilbage i videnskabens historie kan få øje på en akkumulation af viden i form af antagelser, som for os synes indlysende at benævne ihvertfald mere sand end tidligere antagelser. F.eks.: nu; solen antages at være centrum for universet. Før; jorden antages at være centrum for universet.

Bemærk at dér i det foregående er blevet skelnet mellem naturvidenskabens objektivitet og naturvidenskabens neutralitet (som det gøres hos Callinicos i "Byggesten", nr. 10), derved mener vi, at være kommet i besiddelse af en forklaring, der redegør for fejl hos såvel Lenin som Marcuse. Dette er en forklaring, der på en og samme tid gør det muligt at kritisere og anerkende dele af naturvidenskaben.-Og at der bør eksistere kritik og anerkendelse side om side, når man taler om naturvidenskaben i samfundet, stemmer meget bedre overens med virkeligheden end Lenins og Marcuses synspunkter. Det foreliggende projekt er et forsøg på at give os belæg for de her fremsatte påstande.- Og derfor problemformuleringen:

Projektets formål er, at klarlægge hvad matematiske modeller er - både abstrakt og konkret. Ved at gennemgå og sammenligne følgende tre modeller:

en himmelmekanikmodel,

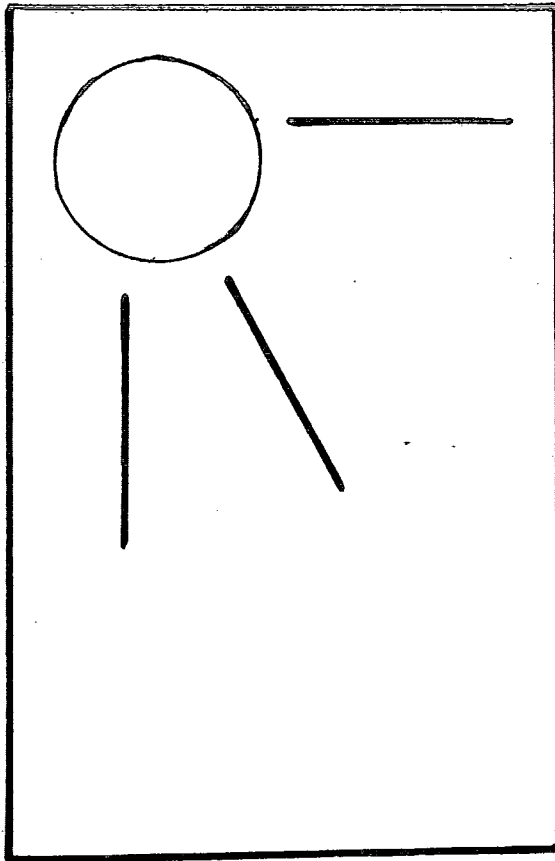
en model af grundvands sænkning og

en én-arts fiskerimodel,

ønsker vi at verificere en hypotese om, at nogle matematiske modeller søger legitimation v.h.a. "highed" med andre på et falsk grundlag.

## KAPITEL 2

### MODELLER TEORETISK



#### Indhold:

- 2.1 Indledning.
- 2.2 Modelbegrebet.
- 2.3 Matematiske modellers oprindelse.
- 2.4 Vores modelsystem.
- 2.5 Modeldannelse.
- 2.6 Modevaluering.
- 2.7 Teorier som teorier.

## 2.1. INDLEDNING

I dette kapitel vil vi udvikle et stykke værktøj, hvorefter vi kan analysere (og kvalitetsvurdere) matematiske modeller. Med et sådant værktøj vil vi kunne nuancere vort syn på disse modeller og dermed løse de i denne rapportes indledning stillede problemer. Først og fremmest vil det være nødvendigt at indsnævre det dagligdags meget upræcist anvendte modelbegreb. Ved hjælp af et generelt modelbegreb fundet hos Harré placeres det modelbegreb, vi agter at benytte os af i en større sammenhang.

Modeller generelt



Matematiske modeller

Da dette ovenfor nævnte udvalgte modelbegreb kan omskrives til det af Uffe Juul Jensen i "Videnskabsteori" benyttede, vil vi faktisk gøre dette under henvisning til, at netop en sådan omskrivning vil gøre det muligt for os at gennemføre sandheds- og teorivurderinger af modellerne. Samme sandring, som Uffe Juul Jensen betjener sig af, kan vi imidlertid selv udvikle gennem det begrebslige modsætningspar - visen/fænomen. Ved denne udvikling kan vi opnå flere ting:

- 1) Vi får på et grundlæggende plan et overblik over de af os foretagne modelopdelingers rimelighed.
- 2) Vi kan tilpasse terminologien i vor modelopdeling med henblik på de problemer, der skal løses. — Og dette alt imens vi kan trække på det af Uffe Juul Jensen udviklede system.

Kvalitetsvurderingen vil blive knyttet an til en sandhedsdimension i afsnit 2.6.1.

Fredevejle i dette kapitel er mestparten vidt historiske tanker vedrørende modelbegrebet. Dette er gjort for at sætte problematikken fra projektets indledning i en større sammenhæng - dels i form af de udvalgte modellens betydning samfundsmæssigt - dels i form af udviklingstendenser hos modellerne.

Vi skulle med ovennævnte få fat i et brugbart værktøj til at udføre omtalte kvalitetsvurdering af matematiske modeller.

## 2.2. MODELBEGREBET

Ordet model er meget anvendt selv i dagligdagen som i videnskabelig sprogbrug, men det forreste gør sig klart, hvad det egentligt dækker over. Vi tar alle en intuitiv fornemmelse af, hvad en model er, enten små modeller af Eiffeltårnet, fotomodeller eller S-tog planer, fiskeri-modeller m.fl. Vi vil først i dette afsnit gøre rede for modelbegrebet, og herefter præcisere hvad vi mener, når vi taler om en model.

Videnskabsteoretikerer Harré har udviklet et modelsystem, der omfatter praktisk taget alle typer modeller. Dette modelsystem vil vi i det følgende give en grov beskrivelse af.

Harré deler modeller ind i to grundlæggende typer:

- 1) De modeller for hvilke det gælder, at model-  
emnet (det modellen er model af) er lig med  
modelkilden (det man bruger til at bygge mod-  
ellen af, f.eks. matematik).
- 2) De modeller for hvilke, det gælder, at model-  
emnet er forskelligt fra modelkilden.

Disse to typer kan videre anddeles i et række under-  
typer:

1) Modeller for hvilke det gælder at modelemnet er lig modelkilden

A) Skalamodeller. Disse adskiller sig kun fra deres emne i størrelse. F.eks. er en legetøjsbil en skalamodel.

B) Forbedrede modeller. Disse modeller er på et eller flere områder forbedrede i forhold til deres emne. Der findes to slags forbedrede modeller - abstraktionerne og idealiseringerne. Abstraktionerne udmærker sig ved at have færre egenskaber end deres emne. F.eks. er en ståltrådsmodel af blodkredsløbet en abstraktion. Den har ikke sit emnes kemiske struktur, elasticitet o.s.v. Idealiseringerne er modeller, hvis egenskaber er idealiserede i forhold til deres emne i henhold til visse normer. F.eks. er mannequiner idealiserede udgaver af en kvinde, idealiserede i henhold til mænds normer for, hvordan en pige bør se ud.

C) Klassemodeller. Kilde og emne for en klassemodel er altid en klasse. Modellens egenskaber fås ved at tage gennemsnittet af de egenskaber, der er karakteriserer emneklassen. Denne type modeller kan kun eksistere i fantasien. F.eks. er det praktisk umuligt at have en familie med 1,57 børn (hvilket måske er gennemsnittet)

2) Modeller for hvilke det gælder at modelemnet er forskelligt fra modelkilden.

Disse modeller kan inddeles på to forskellige måder; efter deres relation til deres kilde (det man bygger modellen af) og efter deres relation til modelemnet (det modellen er model af). De to inddelinger går på tværs af hinanden. En given model vil altså være at finde i begge inddelinger.

A) Inddeling efter relation til emne

Partielle analoger. Modellens og modelemnets start og sluttilstande er analoge, men processerne er ikke analoge.

Fuldkomne analoger. Både start og sluttilstand og pro-

ces er analoge for model og modelemne.

Partiel homolog. Modellens og emnets processer er identiske, mens start og sluttilstand er analoge.

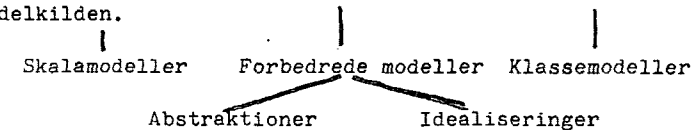
B) Inddeling efter relation til kilde

Semiforbunden. Modellens kilde er dels visse principper hentet fra en videnskab dels nykonstruerede principper.

Enkelt forbunden. Modellens principper er hentet fra én videnskab. F.eks. er principperne, der anvendes i fiskerimodeller, hentet fra matematikken.

Multiforbunden. Modellens principper er hentet fra flere forskellige videnskaber. F.eks. er atommodellen konstrueret ud fra både mekaniske og elektromagnetiske principper.

1) Modeller for hvilke det gælder, at modelemnet er lig modelkilden.



2) Modeller for hvilke det gælder at modelemnet er forskelligt fra modelkilden

A) Inddeling i relation til emne

- Partielle analoger
- Fuldkomne analoger
- Partielle homologer

B) Inddeling i relation til kilde

- Semiforbunden
- Enkelt forbunden
- Multiforbunden

Figur 2.1. Skema over Harrés modelsystem.

Harrés modelsystemer, som det ses, meget omfattende, og vi kan i praksis bruge det på alle de modeller, vi kommer ud for. Dog viser det sig ofte, at en given model er en kombination af de modeltyper, Harré opererer med.

Harrés modelsystem er velegnet til at give et overblik over selve modelbegrebet. Her i projektet vil vi imidlertid operere med et andet, mindre omfattende modelbegreb, som er en delmængde af Harrés system; nemlig de matematiske modeller. Det i det følgende anvendte modelsystem har vi fra Uffe Juul Jensens Videnskabsteori 1, hvori der arbejdes med tre modeltyper:

Black-box modeller. Disse modeltyper beskriver sammenhængen mellem et systems ydre træk, og de påvirkninger systemet udsættes for. En black-box model fortæller intet om hvorfor systemet opfører sig som det gør. En båndoptager kan være et eksempel på en black-box model. Hvis man i en eller anden situation hører sin egen stemme uden, at man selv siger noget, vil man have fået en tilfredsstillende forklaring, dersom man får at vide, at stemmen kommer fra en båndoptager til trods for, at kun de færreste ved hvordan en båndoptager fungerer.

Grey-box modeller. En grey-box model redegør for nogle helt generelle ved træk ved et system, som er skyld i dets adfærd. Et eksempel på en grey-box model er problematikken omkring kræft. Man ved, at visse stoffer er kræftfremkaldende i visse mængder, men man ved ikke hvilken mekanisme, der gør, at de er kræftfremkaldende.

Teoretisk-mekaniske modeller. Disse modeller specificerer hvilke mekanismer, der ligger bag et systems adfærd. Et eksempel på en teoretisk-mekanisk model er Newtons himmelmekanik. Denne forklarer hvordan og hvorfor, himmellegemerne bevæger sig på en bestemt måde.

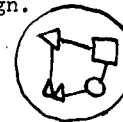
Vi vil kort se på, hvor Uffe Juul Jensens modeller er placeret i Harrés system. I første omgang skal vi ned i den gruppe for hvilke, det gælder, at modelemnet er forskelligt fra modelkilden (2). Lad os her se på inddelingen efter relation til emne (A). Modelkilden er der jo ikke tag-

et hensyn til i Uffe Juul Jensens modelinddeling. Det ses, at en black-box model nøje svarer til en partiel analog i Harrés system. Black-box modellen er jo netop karakteriseret ved, at den ikke beskriver mekanismerne (hos Harré: processerne), men derimod de ydre træk (hos Harre: start og sluttilstande). En teoretisk-mekanisk model svarer så til en fuldkommen analog. I en fuldkommen analog er processen analog for model og modelemne - med andre ord, er mekanismerne beskrevet. Og i Uffe Juul Jensens system er en teoretisk-mekanisk model jo netop defineret som en model, der beskriver mekanismerne. En grey-box model er en mellemting mellem en black-box model og en teoretisk-mekanisk model. Således er den også i Harrés system en mellemting mellem en partiel analog og en fuldkommen analog.

Vi har nu gjort rede for Uffe Juul Jensens modelsystem, som vi agter at benytte. Dette system er velegnet til inddeling af de matematiske modeller med henblik på en kvalitetsvurdering.

Inden for den mængde af modeller, som vi kalder matematiske modeller, må vi skelne mellem:

- 1) Prognose/styring/kontrol modeller, hvis primære formål er at give en beskrivelse af fænomeners adfærd og komme med kvantitative udsagn.



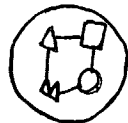
virkelighed



model

Figur 2.2 Prognose/kontrol/styring modeller, hvis primære formål er at beskrive fænomener, kræver ikke at mekanismerne bag fænomenerne er kendte. Blot skal fænomenerne kunne beskrives.

2) Erkendelses modeller, hvis formål er at producere erkendelse, d.v.s. beskrive de mekanismer der ligger bag fænomener.



virkelighed



model

Figur 2.3 Både fænomenerne og mekanismerne bag fænomenerne, skal kunne forklares i erkendelsesmodeller.

En præcisering af hvad vi forstår ved en model må være på sin plads nu:

En model er en samling indbyrdes påvirkende objekter og mekanismer der korresponderer mere eller mindre med et virkelighedsområde. Modellens adfærd skal alene forstås ud fra de objekter og mekanismer der indgår i modellen.

### 2.3 MATEMATISKE MODELLERS OPRINDELSE

Inden vi fortsætter modeludviklingen, vil det være ganske oplagt at se nærmere på udviklingstendenserne for og betydningen af de matematiske modeller. Et kendskab til den samfundsmæssige benyttelse vil præcisere problematikken fra projektets indledning. At vi kigger på prognose/styring/kontrol modeller og erkendelsesmodeller hver for sig vil siden vise sig at være af betydning.

#### 2.3.1 Baggrund for oprindelse af prognose/styring/kontrol modeller

Siden begyndelsen af 60'erne har udviklingen af matematiske modeller til prognose, styring eller kontrol af forskellige samfundsforhold taget form. Dette skyldes, dels at det i samfundet er blevet mere nødvendigt at foretage

indgreb i styringsøjemed, dels at der er foregået en udvikling af værktøjet. D.v.s. relevante matematiske og datalogiske teorier og metoder, først og fremmest operationsanalyse, simulationsteknik m.m. Det nævnte behov, for et bedre udbygget beslutningsgrundlag, d.v.s. et større kendskab til konsekvenserne ved indgreb udefra, skyldes dels den udvidelse af produktionen, der er sket siden 2. verdenskrig, og dels at selve produktionsprocessen er blevet mere kompliceret.

Denne udvikling af produktionen har stillet en lang række krav til et bedre beslutningsgrundlag. Med den intensive udvikling kræves udvidelser af de almene produktionsbetingelser. Den ekstensive udvidelse har medført et stigende forbrug af ressourcer. Dette har skabt behov for nogle nuancerede (eksakte) metoder såvel matematiske som datalogiske til styring og kontrol af produktionen, herunder miljø- og resource planlægning.

Denne udvikling har medført fremkomsten af bl.a. matematiske modeller til regulering af havets fiskeresourcer, hydrologiske modeller til konsekvensberegning ved grundvandsudvinding, spildevandsmodeller til beregning af de nødvendige renseforanstaltninger, finanspolitiske modeller til vurdering af forskellige politiske indgrebs virkning o.s.v.

#### 2.3.2. Baggrund for oprindelse af erkendelsesmodeller

Oprindelsen af erkendelsesmodeller er af en hel anden karakter. Gennem hele videnskabshistorien har erkendelsesmodeller haft en afgørende betydning, da de er et vigtigt element i selve teoridannelsen. I overensstemmelse med den materialistiske opfattelse opnår vi gennem den videnskabelige erkendelse en erkendelse af stadig dybere lag af den materielle virkelighed. At opnå sådan en erkendelse fordrer, at der bestandig må konstrueres nye begreber, som kan specificere materielle systemer og egenskaber ved dis-

se. Det er netop i disse sammenhænge, at erkendelsesmodellerne tjener deres formål.

Dette vil vi illustrere ved et eksempel hentet fra Uffe Juul Jensens Videnskabsteori 1, konstruktion af en model til forståelse af det menneskelige nervesystem. (understregningerne er vore).

"I 1811 og 1822 gennemførte henholdsvis Charles Bell (1774-1842) og Magendie (1783-1855) fysiologiske eksperimenter" .. "Ifølge hvilken det bl.a. fremgår, at der findes to forskellige typer nerve-tråde"..."I forlængelse af denne opdagelse rejste der sig en række problemer, bl. a. i forbindelse med forståelsen af de legemlige reflekser. Hvorledes kan man forklare, at visse dele af en organisme automatisk reagerer på en bestemt måde, når den udsættes for visse påvirkninger?"..."Charles Sherrington fremførte en model til forståelse af denne konstaterede sammenhæng. Han dannede begrebet om en refleks-bue, der var baseret på den antagelse, at der mellem de neuroner, hvor igennem de impulser går, der bestemmer refleksen, er mindre modstand mod passage end mellem de øvrige. Et centralt element i denne model er den antagelse, at nervetrådene ikke er et kontinuert net af neuroner. Neuronerne forbindes af strukturer, som han kalder synapser, og en vigtig del af Sherrington's model udgøres af hans antagelser om forskellige egenskaber hos disse synapser"..."  
"En række eksperimentelle data har senere vist utilstrækkeligheden i denne refleks-bue model:"

I eksemplet illustreres den dialektik mellem modeldannelse og nye begreber, der er nødvendig for at nå til erkendelse, d.v.s. afdække nye mekanismer bag fænomenerne.

Efter nu at have kigget på nogle historiske dimensioner til perspektivering af modelbegrebet, bør vi være udrustet til modellering af vort eget modelsystem.

## 2.4. VORES MODELSYSTEM

### 2.4.1 Sondringen væsen/fænomen

I det følgende vil vi uddybe vores modelsystem. Vi vil begrunde vores modelopdeling ud fra sondringen væsen/fænomen.

Denne skelnen mellem væsen og fænomen, vi her vil bringe på tale, har en længere historie bag sig. Den kan således over en 2000-årig periode findes hos folk som Platon, Kant og Marx. Vi knytter i det følgende an til den omtalte opdeling gennem en metodekilde vedrørende et værk af Marx, "Kapitalen". Grunden til dette er, at det ville være forbundet med en betydelig mængde arbejde at ekstrahere væsen/fænomen sondringen hos for eksempel de før nævnte videnskabsmænd. Med den valgte indføring mener vi, at meget vindes i klarhed, og kun lidt tabes i form af egentlige filosofiske overvejelser.

Endvidere agter vi at overføre sondringen væsen/fænomen til sondringen teoretisk-mekaniske modeller/black-box modeller. Dette sker i og med, at de teoretisk-mekaniske modeller beskriver væsenet, og black-box modeller beskriver fænomenerne.

Herefter følger indføringen:

"Hvilken struktur er karakteristisk for kapitalismen? Marx opfatter kapitalismen (og det kunne i denne sammenhæng være enhver undersøgt genstand, vor tilføjelse) som en totalitet, - bestående af en overflade af fremtrædelsesformer og en indre kerne eller "dyb", væsenet. Fremtrædelsesformerne er det umiddelbart iagttagelige og ydre, mens væsenet er den indre natur af eller den indre sammenhæng mellem fremtrædelsesformerne. Disse sidste er ofte bedrageriske, - ikke fordi de er uvirkelige, men fordi den umiddelbare sammenhæng mellem fremtrædelsesformerne ofte netop kun er tilsyneladende. Det bagved liggende væsen angiver derimod den indre og skjulte sammenhæng (lovæssighed) mellem formerne. Væsenet er sandheden om fremtrædelsesformerne....."



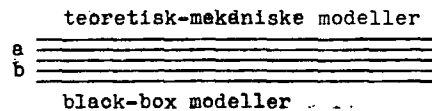
"Det er vigtigt at fremhæve, at der ikke er tale om en sondring mellem forskellige virkelighedsgrader: Væsen og den form, hvori væsenet fremtræder, er begge lige reele. Endvidere er sondringen relativ; hvad der i én sammenhæng er væsen, kan være fremtrædelsesform i en anden sammenhæng....."  
 (Lundkvist: Introduktion til metoden i kapitalen)

Før vi således kan levere en definition af begreberne black-box og teoretisk-mekanisk model, vil det som anført i citatet være såvel praktisk som nødvendigt at gøre sondringen mellem begreberne til en relativ størrelse. Dette forhold vil vi anskueliggøre ved hjælp af følgende skematisering:



Figur 2.4 Noget (bredt forstået) kan være væsentligt - andet fænomologisk. Det væsentlige er imidlertid kun væsentligt, dersom det ses relateret til noget mindre (henholdsvis mere) væsentligt. Med omvendt fortegn gælder det samme om det fænomeologiske.

Den samme inddeling kan benyttes til at sætte forskellige matematiske modeller i bås med:

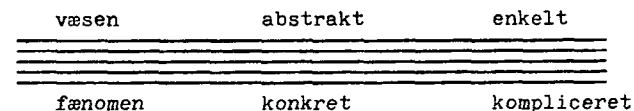


Figur 2.5 Om teoretisk-mekaniske og black-box modeller gælder det samme, som der gælder om det væsentlige og det fænomeologiske. Se fig.2.4 En teoretisk-me-

kanisk model er teoretisk i sin egen- skab af at være mere teoretisk end en mindre (henholdsvis mere) teoretisk- mekanisk model. Det tilsvarende gør sig gældende med omvendt fortegn for black-box modeller.  
 (At en model er placeret på linien a, vil sige, at denne er mere teoretisk funderet end en placeret på b)

For at få et rimeligt brugbart system ud af disse for- an nævnte skematiseringer, må der nedfældes et regelsæt til betjening af disse. Man bør således nok forlange af en model på linie a, at den skal kunne rumme eller for- klare indtil flere modeller på linie b.

På skemaerne fra figur 2.4 og 2.5 kan endvidere i vis- se situationer indsættes følgende begreber:



Figur 2.6 Ligesom væsen/fænomen kan også andre begreber skematiseres. Her: abstrakt/ konkret og enkelt/kompliceret

Lad os her med det samme slå fast, at det kun er i vis- se situationer, f.eks. væsenet er enkelt (det kunne rent faktisk tænkes at være ret kompliceret).<sup>†</sup>"Væsen"tligt at holde sig for øje her er 1) abstrakt/konkret og enkelt/ kompliceret følger ikke tvingende nødvendigt som sondring- af væsen/fænomen og 2) sondringerne i sig selv er ikke en skelnen mellem forskellige grader af virkeligheden - dette ser således ud:

+) Bemærk den daglige brug af ordet, væsent- lig - denne brug er nøje forbundet med den omtalte skelnen.



Figur 2.7 Virkeligheden er den samme uanset hvilket niveau mellem væsen og fænomen, der knyttes an til.

Hermed er vi kommet i besiddelse af et begrebssæt til skabelse af et modelsystem. Dettets skala indeholder i den ene ende black-box (fænomeologiske) modeller og i den anden ende teoretisk-mekaniske modeller. Dette modelsystem præsenteres i følgende afsnit.

#### 2.4.2 Black-box modeller

Black-box modeller er af deskriptiv karakter og har ikke som intention at skulle forklare noget. Efter indsamling af empirisk materiale formuleres en sådan black-box model som en ad hoc-model, d.v.s. modellen tilpasses de indhøstede data. I "Noen matematiske modeller i økologi" (af Jon Reed) benyttes en 2-arts model<sup>+</sup> (los-hare), der er et godt eksempel på disse black-box modeller. Den behandler fænomenet, periodiske svingninger i dyrebestande. Fænomenet er netop et fænomen, da der som Reed siger kun findes hypoteser til forklaring af dette:

"Enkelte økologer,....,tillegger klimavariasjoner en vesentlig betydning som utløsende faktor for populasjonsbølger. Den alternative hypotese er at svingningerne forårsakes av det vi kan kalle "indre mekanismer" i økosystemet."  
(Reed: Noen matematiske modeller i økologi)

+) Et kendt økologisk fænomen er de regelmæssige populationssvingninger, som kan observeres for en hel række dyrebestande i naturen. Disse svingninger har man indarbejdet i nogle matematiske modeller.

Endvidere må vi her i overensstemmelse med det indledende afsnit omtale denne black-box model som værende relativt fænomeologisk - den kan kun beskrives som mere henholdsvis mindre fænomeologisk/teoretisk end en anden model. (Dette forhold skal selvfølgelig holdes in mente under læsningen af følgende definition af den teoretisk-mekaniske model)

#### 2.4.3 Teoretisk-mekaniske modeller

I modsætning til black-box modellerne er de teoretisk-mekaniske modeller af forklarende karakter. Her er ikke blot tale om en registrering af nogle data, hvis sammenhænge man kun ønsker at beskrive. En teoretisk-mekanisk model specificerer de mekanismer som, ifølge den videnskabelige ontologi, anses for virksomme bag den manifesterede adfærd (fænomenerne). En teoretisk-mekanisk model er således altid i overensstemmelse med den videnskabelige ontologi<sup>+</sup>.

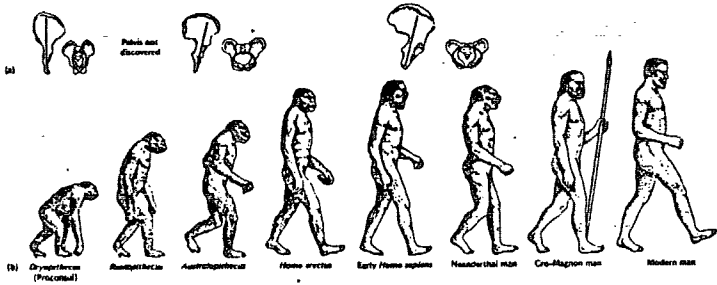
Et eksempel på en teoretisk-mekanisk model er udviklingsmodeller baseret på Darwins evolutionsteori, der bygger på variationen mellem individer og udvælgelse af de til det eksisterende miljø bedst egnede. Udviklingsmodeller beskriver nøje de mekanismer der ligger bag en arts udvikling (et fænomen), og er i overensstemmelse med den videnskabelige ontologi.

#### 2.4.4 Om modellens udvikling

Vores netop definerede modelskelnen er ikke absolut eller endelig - tværtimod. Denne er i høj grad dynamisk, og da netop udviklingstendenserne for modellerne er af stor betydning for deres eksistensmuligheder som henholds-

+) Ontologi: Læren om det værende. Filosofiske teorier om de generelle træk ved verdens beskaffenhed (materialismen og idealismen er eksempler på ontologier).

vis black-box, grey-box og teoretisk-mekaniske modeller, vil vi i det følgende interessere os for disse tendenser.



En illustration af menneskets udviklingsmodel, en teoretisk-mekanisk model baseret på Darwins evolutionsteori.

Ividenskabelig sammenhæng sker det ofte, at en model udvikler sig. Der er to grundlæggende forskellige måder, hvorpå en model kan udvikle sig. En black-box model kan udvikle sig til en grey-box model og videre til en teoretisk-mekanisk model, og en teoretisk-mekanisk model kan få status af en black-box model. Et eksempel på den førstnævnte udvikling er skitseret i fig. 2.8.

Mendel konstaterede en række karakteristiske statistiske sammenhænge i fordelingen af de arvelige egenskaber, da han betragtede det afkom, der kom ud af hans krydsninger.

Forskning viste, at der var en sammenhæng mellem de kromosomer, man havde konstateret i cellekernen, og arveanlæggene, de såkaldte gener. Generne opfattes som perler på en snor.

En mere specifik teoretisk model blev dannet på basis af teorien om, at den genetiske information bringes videre fra generation til generation gennem de såkaldte DNA molkyler, der findes i kromosomerne.

Figur 2.8 På figuren ses hvordan en model udvikler sig fra at være en black-box model til en teoretisk-mekanisk model.

Vi ser, at udviklingen fra black-box model til teoretisk-mekanisk model er karakteriseret ved, at modellen udbygges, der tilføjes nye begreber til modellen. Udviklingen fra teoretisk-mekanisk model til black-box model foregår på en lidt anden måde. Et eksempel på denne udvikling er himmelmekanikmodellen (se eventuelt bilag A). Keplers himmelmekanik var, da den kom frem, en teoretisk-mekanisk model. Herefter kom Newtons himmelmekanik, der var mærkbart bedre til at forklare fænomenerne end Keplers model. Keplers himmelmekanik ændrede status fra teoretisk-mekanisk model til black-box model, den forklarede ikke længere fænomenerne i overensstemmelse med den herskende videnskabelige ontologi.

Vi ser, at en udvikling fra black-box model til teoretisk-mekanisk model er en udvikling af selve modellen, mens en udvikling den modsatte vej snarere er en udvikling i modellens status end i selve modellen.

Efter denne udviklingsbeskrivelse vil vi give et bud på en genkendelsesprocedure til genkendelse af henholdsvis black-box og teoretisk-mekaniske modeller. Budet går på at stille spørgsmål til modellerne.

#### 2.4.5 Black-box og teoretisk-mekaniske modeller kan skelnes fra hinanden ved hjælp af hvorfor/hvordan spørgsmål

Black-box modeller er modeller, der blot beskriver eller ordner data og leverer en ad hoc-beskrivelse af, hvordan tingene tager sig ud. Black-box modellernes modsætning findes i de teoretisk-mekaniske modeller, hvori der forklares, hvorfor tingene hænger sammen, som de gør. Grunden til at blande spørgsmålene hvorfor/hvordan ind i dette skal findes i en erkendelsesteoretisk sammenhæng. Ønsket om at finde svar på det ene henholdsvis det andet spørgsmål afhænger nemlig af den enkelte videnskabsudøvers praksis.

Hvordan: Her vil vi fremdrage den gamle græske mediciner Hippokrates, om hvis filosofiske linie Arne Næss skriver i "Filosofiens historie":

"Af størst interesse for metodelæren (som en del af filosofien) er den retning der i første række lagde an på at beskrive selve sygdomsforløbet (fænomenerne, vor tilføjelse). De fleste teorier gik kun ud på at der forelå en korrelation mellem variationer i sygdomsbillederne og chancerne for bedring eller død. På grundlag af disse antagelser opstillede man så et system af regler for behandling, som byggede på generalisationer af de korrelationsforhold, der allerede var blevet udvist af tidligere sygdomstilfælde."  
/Næss:"Filosofiens historie."/

I forbindelse med ovennævnte praksis er det eneste, man ønsker, en praktisk sammenhæng mellem sygdom og kur. Det eneste spørgsmål, lægerne stiller, er: "Hvordan hænger sygdom og kur sammen?"

Hvorfor: Lad os her vende tilbage til Keplers himmelmekanik. Det centrale ved himmelmekanikken er, at man ved udledning af Keplers love ved newtonsk mekanik får en forklaring på både hvordan og hvorfor de i modellen inddragne himmellegemer bevæger sig, som de gør.

#### 2.4.6 Hörz betjener sig også af "vort"-modelskema

Flere har betjent sig af lignende sondringer mellem modeller, som vi har gjort her, f.eks. H.Hörz. I "Philosophische Probleme der Modellierung" benytter H.Hörz sig af en skelnen mellem to modelbegreber; det drejer sig om modeller "Als-ob-Theorie" og modeller "Als-ob-Objekt". Her følger først Hörz' egen definition og derefter den efterhånden tri-vielle skematisering:

"Der konkrete Erkenntnisprozess, für den die Modellierung genutzt wird, kann im wesentlichen vom Experiment oder von der Theorie ausgehen. Dabei haben die Modelle entweder den Charakter einer Als-ob-Theorie oder eines Als-ob-Objekts"  
/Hörz: "Philosophische Probleme der Modellierung" s. 12/

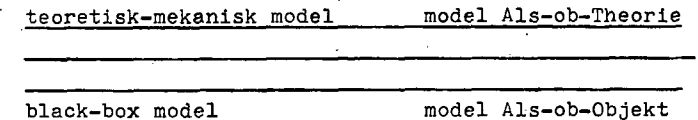


Fig. 2.9 Sammenhængen mellem vor og Hörz modelsondring.

## 2.5 MODEL DANNELSEN

Vi vil i det følgende gå i detaljerne med hensyn til selve dannelsen af modeller. Ved at gøre dette kan vi finde ud af, hvor forskellen på modeller grundlægges.

### 2.5.1 Matematiske modeller er abstraktioner af virkeligheden

Det er vigtigt at gøre sig klart, at en matematisk model fremkommer som resultat af en forenklingsproces. En matematisk model er ikke et nøjagtigt billede af virkeligheden, idet der foretages nogle abstraktioner fra denne virkelighed. Dannelsen af matematiske modeller udspringer ikke blot af en registrering og opsummering af forskellige data, men også af en aktiv udvælgelse og abstraktion af de systemer og objekter, der skal indgå i modellen.

Ved selve modeldannelsen må der først foregå en afgrænsning af det virkelighedsområde, modellen skal beskrive. Dernæst skal der træffes nogle valg med hensyn til de systemer og objekter, vi vil lade det valgte virkelighedsområde repræsentere af.

En sådan udvælgelse og abstraktion er nødvendigt, idet der mellem et givet virkelighedsområdes objekter og fænomener ofte eksisterer utallige sammenhænge. Eksistensen af disse mange sammenhænge eller systemer er netop begrundelsen for at arbejde med modeller overhovedet. Modellen gør det således muligt at overskue, forstå og manipulere et virkelighedsområde, der under normale omstændigheder fremtræder som yderst komplekst.

### 2.5.2 Abstraktionsniveau afhænger af modelformål

Valget af systemer og objekter, samt det abstraktionsniveau modellen skal befinde sig på, afhænger på afgørende vis af, hvilke træk ved virkeligheden, modellen skal belyse. Der skal altså tages stilling til, hvorvidt modellen nu skal anvendes til erkendelse/forklaring af kausale sammenhænge, eller om modellen skal bruges til prognoser, styring eller kontrol.

Generelt kan det siges, at såfremt modellens formål er erkendelse af kausale sammenhænge, har modellen oftest et højt abstraktionsniveau. Dette afhænger valget af systemer og objekter naturligvis også af. Herover for står modeller, der anvendes til prognoseformål. Disse modeller har som hovedregel et lavt abstraktionsniveau. Jo lavere abstraktionsniveau en model har, desto flere spørgsmål til den fænomenologiske virkelighed kan oversættes til spørgsmål til modellen. Med andre ord betyder dette også, at modeller, der synes at fjerne sig mere og mere fra erfaringen (højt abstraktionsniveau), er i stand til at give en dybere forståelse af denne. En forklaring af dette fænomen finder vi hos Uffe Juul Jensen

"...gennem den bestandigt højere grad af abstraktion opnås en specifikation og beskrivelse af stadigt mere centrale elementer i de undersøgte systemer....Jo mere avanceret vor praksis bliver, des mere specifikke modeller vil være nødvendige, dels for at forstå de forandringer, vor praksis fører med sig, dels for at sættes os i stand til at udvide denne."  
/Juul Jensen: Videnskabsteori, s 133/

Vi må her gøre opmærksom på, at man ikke må forveksle abstraktion med kompleksitet. Har man udtalt sig om en models kompleksitet, har man ikke dermed sagt noget om, hvor abstrakt modellen er og omvendt.

### 2.5.3 Udvalgelsen af objekter og systemer kan være funderet mere eller mindre teoretisk

Modeldannelsen kræver en klar bevidsthed om, hvad modellen skal bruges til. Dertil følger sig en udvælgelse og abstraktion af de systemer og objekter, der skal være modellens bærende elementer. Udvalgelsen og abstraktionen af systemer og objekter forudsætter, at der eksisterer en række hypoteser, antagelser eller teorier, hvorefter selve modelrepræsentationen kan foregå. Denne repræsentation udtrykker både hvilke

objekter, der indvirker på hinanden, og måden dette sker på. Det er således udvælgelsen af hypoteser, teorier, forestillinger om væsentligt og uvæsentligt m.v. omkring det virkelighedsområde, modellen skal beskrive, der bliver bestemmen- de for hvor teoretisk funderet en model bliver, og i hvor høj grad en model kan besidde adjektiverne ideologisk og subjektiv m.m.

+) Ideologisk knytter her an til ideologi i følgende betydning: en samling anskuelser, vurderinger, holdninger og normer som danner baggrund for en bestemt måde at opfatte mennesket og samfundet på f.eks. den konservative, den liberale, den kommunistiske eller den katolske ideologi.

Endvidere kunne også den Marx'ske terminologis betydning af begrebet anvendes her; altså som falsk bevidsthed. Dvs. det anvendes om tanker og ideer, der ikke rummer en bevidsthed om deres eget materielle grundlag, som af samme grund ikke gennemskuer eksisterende samfundsmæssige forhold som betingede og foranderlige.

Formen ideologien vil give sig udtryk på, vil som oftest være universaliseringer. Disse kan beskrives som eviggørelser - eller opretholdere af status quo. Dette vil i samfundsmæssig sammenhæng f.eks. sige en eviggørelse af klassebegrebet eller produktionsforholdene til en given tid. Ideologien vil derfor per definition arbejde i den herskende klas- ses interesser til et givet tidspunkt.

%) Subjektiv: D.v.s. på grundlag af personlig vurdering.

2.5.4 Udvælgelsen - en vigtig del af modelbygningen

Udvælgelsen er en basal faktor i modelbygningen og således også en væsentlig del af erkendelsespraksis. Der vil jo altid være tale om en udvælgelse, i det øjeblik man ønsker at betjene sig af kilde (situationer og forandringer) fra den materielle virkelighed, da denne i sig selv er en uendelig mængde af situationer og forandringer (kilder).

At udvælgelsen de facto er pladsgivende for subjektive og ideologiske elementer i videnskabsprocessen, er en anden og særdeles betydningsfuld side af sagen. Denne skal vi vende tilbage til senere under de evaluerendesider af modelsagen.

Men ikke nok med at der forekommer en selektionspraksis ved "emnevalget", men også "problemløsningsvalget" eksisterer en sådan praksis (skitseret herunder).

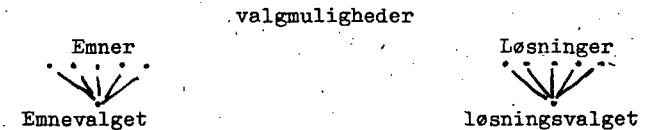


Fig. 2.10. I modeltegningen er der 2 grundlæggende valg : emnevalget og løsningsvalget. I begge valg kan subjektive og ideologiske elementer gøre sig gældende.

Problemløsningsvalget er en valgsituation, man f.eks. kommer i, når man med matematik vil beskrive udviklingen i fiskebestande. Hvor mange faktorer skal inddrages i løsningen?: Skal der tages hensyn til, at fisk spiser fisk? Skal det forhold, at fiskenes velvære er temperaturafhængigt, næringsstofafhængigt etc., inddrages i modellen?

Som dette eksempel antyder udgør selektionsprocessen en væsentlig del af vejen frem mod en videnskabelig model, og at denne proces umiddelbart skulle være fuldstændig værdifri, kan der naturligvis sættes et stort spørgsmålstegn ved:

"En bestemt situation eller sammenhæng kan med andre ord søges forklaret på en række forskellige måder ved at placere den inden for et snævre eller videre system i den materielle virkelighed. Hvilket system, vi vælger i en konkret situation, vil være bestemt af, hvilke praktiske interesser og behov vi har, samt af, hvilket teoretiske stade vi befinder os på.  
/Juul Jensen: Videnskabsteori I, s 108/.

Vi vil nu opsummere de væsentligste ting i det foregående i et skema:

## 2.6 MODELEVALUERING

I det foregående har vi udviklet et værktøj til analyse af matematiske modeller. Vi kan med dette værktøj placere en given matematisk model i forhold til andre matematiske modeller og til modeller i al almindelighed. Med andre ord, vi har fået nuanceret vort modelbegreb. Vi vil nu forfine dette værktøj, så det kan bruges til kvalitetsvurdering af de forskellige modeltyper, vi beskæftiger os med. En kvalitetsvurdering er noget mere problematisk end en analyse, man er, i det mindste for black-box og grey-box modelleres vedkommende, nødt til at se på modellens brug og på, hvor godt den lever op til sit formål.

### 2.6.1 Sand/falsk-sondringen

Et spørgsmål, man uundgåeligt stiller sig selv, er, om den ene eller den anden modeltype kan siges at være mere sand end en anden modeltype. For at kunne besvare dette spørgsmål må vi have en definition på, hvad vi forstår ved sandhed. Vi har brugt J.L.Mackies definition. Den lyder: At sige at et udsagn er sandt, er at sige at tingene er, som de i udsagnet siges at være. Denne definition er egentlig banal. For eksempel udsagnet, "Der er kaffe i kanden", er sandt, hvis der faktisk er kaffe i kanden. Overfører vi denne sandhedsdefinition på modeller, får vi, at en black-box model er sand, dersom den beskriver systemets fænomener i overensstemmelse med det virkelige systems fænomener, og dersom den ikke postulerer at kunne beskrive systemets mekanismer. Begge betingelser må være opfyldt. På samme måde får vi, at en teoretisk-mekanisk model er sand, såfremt den beskriver et systems mekanismer, som de faktisk er. Det lyder jo meget ligetil, men der er et problem: hvordan kontrollerer vi, at modellerne beskriver tingene, som de faktisk er? Ja, for en black-box models vedkommende skulle man umiddelbart tro, at det kunne gøres ved at sammenligne modellen med virkeligheden, da det jo er de ydre træk en black-box model beskriver. I praksis er det sjældent så ligetil. En meget almindelig black-box

### Modeldannelse generelt

En bestemt situation eller sammenhæng kan søges forklaret på en række forskellige måder ved at placere den indenfor et snævrere eller videre virkelighedsområde. Hvilket område vi vælger i én konkret situation, kan være bestemt af, hvilke interesser og behov vi har, samt af hvilket teoretisk stade vi befinder os på, men vil ofte være givet på forhånd.

Når vi har fastlagt, hvilket system vi vil søge det analyserede fænomen placeret i, forestår det afgørende videnskabelige problem, hvorledes vi kan opnå en forklaring af fænomenet indenfor det valgte system.

Også på dette trin af videnskabsprocessen er udvælgelsen de karakteristiske træk. Det undersøgte fænomen søges forklaret ved at udskille visse aspekter ved det foretrukne system. Vi ser bort fra en række forhold og egenskaber i systemet, vi abstraherer fra disse, danner en model af systemet med det formål at beskrive de egenskaber og tilstande ved det, der kan forklare, hvorledes det udvikler sig og giver sig udtryk i bestemte fænomener.

Modelobjekt:  
En række elementer i det udvalgte system

System:  
Objekt sammensat af andre objekter, der indvirker på hinanden, således at systemets totale adfærd må forstås ud fra de objekter eller elementer, der indgår i det, samt ud fra disses indbyrdes adfærd.

### Modeltyper

**Black-box** model:  
Beskriver kun ydre træk ved det undersøgte system.

Grey-box model:  
Specificerer helt generelt træk ved systemet der er skyld i dets adfærd.

Teoretisk-mekanisk model:  
Specificerer de mekanismer der ligger bag systemets ydre adfærd.

### Hvorfor/hvordan

Spørgsmål:  
Hvordan: Mere eller mindre løst, den ydre struktur fastlagt  
Hvorfor: Uløst

Spørgsmål:  
Hvordan: Løst  
Hvorfor: Uløst

Spørgsmål:  
Hvordan: Løst  
Hvorfor: Løst

### Eksempel på modeludvikling

Mendel konstaterede en række karakteristiske statistiske sammenhænge i fordelingen af de arvelige egenskaber, da han betragtede det afkom, der kom ud af hans krydsninger.

Forskning viste, at der var en sammenhæng mellem de kromosomer, man havde konstateret i cellekernen, og arveanlæggene, de såkaldte gener. Generne opfattes som perler på en snor.

En mere specifik teoretisk model blev dannet på basis af teorien om, at den genetiske information bringes videre fra generation til generation gennem de såkaldte DNA-molekyler, der findes i kromosomerne.



model er prognose modellen. Netop prognose modellen byder på mange problemer, hvad kontrol angår. Karakteristisk for alle prognosemodeller er, at man først kan kontrollere deres rigtighed, når man ikke mere har brug for modellen. Når det tidsrum, prognosemodellen har gyldighed i, er passeret, og man kan se om den passede eller ej, har kontrollen ingen betydning i praksis. Derimod ville det være en fordel, dersom man kunne sige noget om modellens sandhedsværdi, før det tidsrum, som modellen udtaler sig om, er passeret. Et andet problem ved prognosemodeller er, at de ofte er selvopfyldende eller selvrefuterende. Dette skyldes, at de indgår som en del af det system, de udtaler sig om. En økonomisk model vil ofte være selvopfyldende. Man prøver nemlig på at få modellens forudsigelser til at stemme overens med prognosen. Modsat vil en model, der forudsiger katastrofer, tit være selvrefuterende, idet man, når en katastrofe forudsiges, tager forholdsregler mod katastrofen. Det kan altså være umuligt, at kontrollere om en prognosemodel er sand eller falsk, fordi den ændrer sine egne forudsætninger. Vi skulle nu have fået en fornemmelse af, hvilke problemer kontrol af black-box modeller kan byde på.

Er det en teoretisk-mekanisk model, vi har fat i, stiller tingene sig noget anderledes. Det er ikke så ligetil, at kontrollere om en model beskriver de virkelige mekanismer. Vi må derfor sige, at en teoretisk-mekanisk model er sand, såfremt den beskriver et systems mekanismer i overensstemmelse med den herskende videnskabelige ontologi. Heraf følger at en teoretisk-mekanisk model altid vil være sand. Når den videnskabelige ontologi (det vil i praksis sige teorier) ændrer sig, og modellen ikke længere er i overensstemmelse med denne, har modellen heller ikke mere status af en teoretisk-mekanisk model (jævnfør afsnit 2.4.4). Summa summarum, en black-box model kan være sand, en teoretisk-mekanisk model er altid sand.

Ligesom sandhedsbegrebet ikke behøver at optræde som et endeligt og absolut begreb, behøver heller ikke (et i denne sammenhæng meget væsentligt begreb) teoribegrebet at optræde som et sådant.

## 2.7 Teorier som teorier

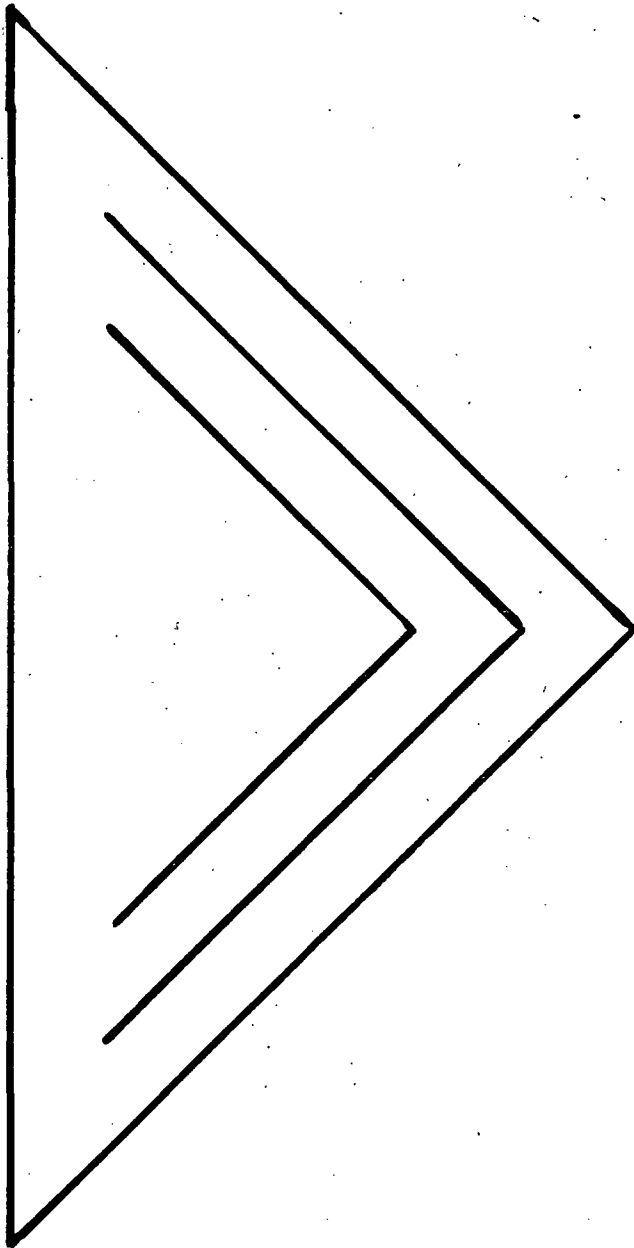
Vi benytter til stadighed begrebet teori undervejs i vor projektrapport. For at kunne placere en teori i en større sammenhæng vil vi se nærmere på teorien i dennes faktiske omgivelser: historien, samfundet og det videnskabelige miljø.

Vi vil præsentere et bud på, hvorfor en teori på et givet tidspunkt i historien faktisk ophøjes til en sådan. Dette bud er hentet fra T.Kuhn's "Videnskabens revolutioner". Kuhn betjener sig af teoribegrebet i en meget vid betydning, og han præciserer begrebet i ordet: paradigme. Kuhn opremser endvidere forskellige fælles egenskaber hos teorier - det er disse fælles egenskaber, der gør teorier til teorier.

Fra Kuhn's side angives fire "fællesnævner", men, som han konstaterer, er det betydningsfuldhed, der fremdrager følgende fire frem for andre:

- 1) Der kræves en vis form for kausalitetsstyrke i forhold til de dybest liggende eksisterende teorier.
- 2) Der kræves en rimelig overensstemmelse med tidens ontologi. D.v.s. teorier er ikke teorier, dersom disse vælter hele den accepterede ontologis fundament.
- 3) Teorien skal kunne bære betegnelsen praktisk - altså være mulig at omgås rent teknisk.
- 4) Simpelhed, numerisk præcision og konsistens er også generelle krav til teorierne (paradigmerne).

Vi er nu i besiddelse af det i indledningen nævnte værktøj. Med det i hånden kan vi karakterisere matematiske modeller. Det vil i samme hånd vending sige kvalitetsvurde-re, da karakteristikken er knyttet an til et sandhedsbegreb. Med dette kan man give en beskrivelse af matematiske modelers anvendelsesmuligheder/forklaringsmuligheder.



## KAPITEL 3

### MODEL ANALYSE

#### Indhold:

- 3.1 Indledning.
- 3.2 Problem 1: Placering af en TV-satellit.
- 3.3 Problem 2: Beregning af grundvandssænkning.
- 3.4 Problem 3: Maksimalt vægtudbytte i dambrug.
- 3.5 De tre modeller sammenlignes.

### 3.1 INDLEDNING

I kapitel 2 har vi forsøgt at udvikle et værktøj, hvormed vi kan vurdere og skelne mellem matematiske modeller. Dette værktøj skal i dette kapitel søges anvendt på tre konkrete matematiske modeller.

De udvalgte modeller er valgt således, at de er repræsentative for de tre modeltyper i det modelskema, vi benytter. Som repræsentant for de teoretiskmekaniske modeller har vi valgt en model til beregning af en TV-satellits placering i rummet. For grey-box og black-box modellernes vedkommende benytter vi henholdsvis en model til beregning af grundvandssænkning ved vandindvinding og en model til beregning af maksimalt vægtudbytte i et dambrug.

For hver model vil vi gennemføre en problemløsning, der alle giver et entydigt svar på de forelagte data. Af disse svar kan man (naturligvis) ikke gennemskue, hvilken teoretisk erkendelse modellerne, og dermed beregningerne bygger på. Dette kræver en nærmere analyse af modellerne. Det vil sige en analyse, der gør rede for, hvordan modellerne forholdt sig til de mekanismer, der ligger bag de fænomener, modellerne skal beskrive. Vi vil i dette kapitel derfor også forsøge en sådan analyse ved at sammenligne de tre modeller og forholde dem til deres teoriladethed, det vil sige modellernes indhold af teoretisk erkendelse.

### 3.2. PROBLEM 1: PLACERING AF EN TV-SATELLIT

Modellen, som følger herefter, skal stå som en repræsentant for de teoretisk-mekaniske modeller, og modellen skal bruges til at beregne i hvilken højde over jorden, en TV-satellit skal placeres, for at den altid vil stå over det samme sted på jorden. Selvom modellen er udledt af to almengyldige love, er resultatet, som modellen giver, ikke tilstrækkeligt i praksis. Der er således udeladt forskellige faktorer, som gør, at man ikke kan bruge satellitmodellens resultater til mere end et første skøn. Ved nøjagtige beregninger af en satellits bane, må der således tages højde for bl.a. jordens inhomogenitet og månens, solens og de nærmeste store planeters massetiltrækning.

Uddybning af problem: I hvilken afstand skal en satellit kredse omkring jorden, for at den set fra jorden til enhver tid vil stå over det samme sted på jordoverfladen.

Til løsning af dette problem er det nødvendigt, at vide hvilke kræfter en satellit er påvirket af, samt hvordan satellittens bevægelse afhænger af disse kræfter.

#### 3.2.1. Samlet kraft på en satellit.

Satellitten er påvirket af massetiltrækningskraften. Herunder antages, at det kun er jorden, som påvirker satellitten; i virkeligheden vil der være påvirkninger fra solen, månen m.m. En anden antagelse, som gøres her, er, at satellitten bevæger sig i et lufttomt rum, således at vi kan se bort fra de gnidningskræfter, der påvirker satellitten.

Ifølge massetiltrækningsloven er kræfterne tiltrækningen mellem to masser,  $m_1$  og  $m_2$ , der befinder sig afstanden  $r$  fra hinanden, givet ved:

1) 
$$K = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

hvor G er en universel konstant.

Med hensyn til kraftpåvirkningen, kan det regnes ud, at kraftpåvirkningen fra en kugle med samme massefylde overalt i kuglen er den samme som kraftpåvirkningen fra et legeme med samme masse som kuglen, placeret i kuglens centrum. Vi vil derfor betragte jorden som en kugle med massen jævnt fordelt. Den samlede kraft på satellitten bliver da:

$$K = G \cdot \frac{m_J \cdot m_S}{r^2}$$

hvor  $m_J$  = jordens masse,  $m_S$  = satellittens masse og  $r$  = afstanden fra jordens centrum til satellitten.

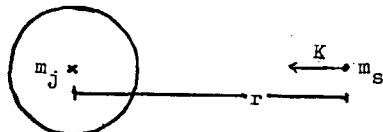


Fig.3.1. Figuren viser de indgående størrelser i massetiltrækningsloven. Bemærk at kraften er rettet mod jordens centrum.

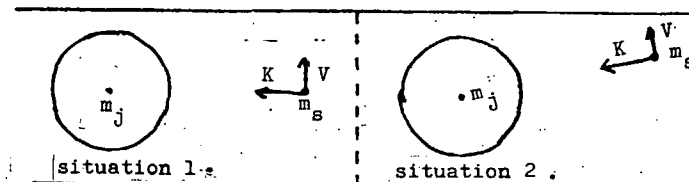
### 3.2.2. Satellittens bevægelse

Når kraftpåvirkningen er kendt, er satellittens bevægelse bestemt af bevægelsesligningen (Newtons 2.lov):

2) 
$$K = m \cdot a$$

Accelerationen og kraften har samme retning. Da kraften har retning mod jordens centrum, gælder dette også for accelerationen.

Hvis satellitten til et givet tidspunkt har en hastighed, som vist på figuren i situation 1:



vil massetiltrækningen medføre, at denne hastighed ændres. Da ændringen har retning mod jordens centrum, vil hastigheden i den senere situation 2 stadig ligge i papirets plan. Der virker ingen kræfter til at trække satellitten bort fra papirets plan. Satellitten må derfor bevæge sig i planer, der indeholder jordens centrum.

### 3.2.3. Placering af TV-satellit

For at satellitten til ethvert tidspunkt kan stå over det samme punkt på jordoverfladen, er det nødvendigt, at satellitten bevæger sig rundt i en cirkel med centrum på jordens omdrejningsakse. Satellitten må således bevæge sig én gang rundt i cirklen for hver gang jorden drejer én gang rundt om sin egen akse.

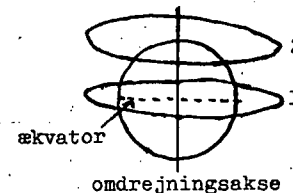


Fig.3.2. Ifølge bevægelsesloven  $K=ma$  er satellittens acceleration rettet mod jordens centrum. Dette er dog kun opfyldt for banekurve 1.

Både banekurve 1 og banekurve 2 (fig.3.2) vil have centrum på jordens omdrejningsakse. Men ifølge bevægelsesloven skal accelerationen i bevægelsen være rettet mod centrum af jorden. Dette forhold er ikke opfyldt for banekurve 2. Kun banekurve 1, der ligger i ækvator-planen, er fysisk mulig.

Det er nu vist, at satellittens bane nødvendigvis må ligge i samme plan som ækvator, og at den må bevæge sig én gang rundt i banen på et døgn. Det sidste, der nu mangler til løsning af problemet, er, i hvilken højde satellitten skal placeres for at følge jordrotationen. Imidlertid må vi først have et udtryk for accelerationen i satellitbevægelsen.

Satellitten vil i en afstand  $r$  fra centrum af jorden have en acceleration, der er givet ved:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Her kan hastigheden  $v$  erstattes af

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

hvor  $T$  = omløbstiden, her 1 døgn. Hastigheden af satellitten i en afstand  $r$  fra jordens centrum udtrykkes af  $v$ . Satellittens acceleration udtrykkes derfor som:

$$a = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Udtrykket for  $a$  kan nu indsættes i bevægelsesligningen. Denne ligning vil sammen med udtrykket for massetiltrækning kunne løse vores problem:

$$G \frac{m_j \cdot m_s}{r^2} = K = m_s \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$r^3 = G \frac{m_j T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{G \frac{m_j T^2}{4\pi^2}}$$

Satellitten skal altså bringes til at kredse om jorden i afstanden  $r$  fra jordens centrum, med en hastighed  $v = (2\pi r)/T$ , der er afstemt herefter.

Med data på de forskellige indgående parametre vil  $r$ ,

når  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

$$m_j = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$T = 8,64 \cdot 10^4 \text{ sek}$$

blive lig med,  $r = 42200 \text{ km}$ . Det betyder endvidere, at satellittens hastighed er ca  $11000 \text{ km/t}$ .

TV-satellitten skal altså placeres 42200 km fra jordens centrum i en bane over ækvator, for til enhver tid at stå over det samme sted set fra jorden.

3.3. PROBLEM 2: BEREGNING AF GRUNDVANDSSÆNKNING

Beregningsmodellen i det følgende, er valgt som en repræsentant for grey-box modellerne.

Modellen har til formål, at beregne en grundvands-senkning ved vandindvinding. Enhver vandindvinding skaber nemlig en såkaldt sænkningstragt, hvor grundvandstanden er faldende ind mod indvindingsboringen. Et hovedproblem i vandplanlægningen er således at beregne udbredelsen og dybden af en sådan sænkningstragt, når en vandindvinding skal påbegyndes.

Den her viste model indeholder de samme bestemte ligninger, dog efter en omformning, der normalt anvendes ved sænkningberegninger.

Skal modellen anvendes i praksis er det nødvendigt at tage hensyn til et områdes geologiske struktur, grundvandets lokale strømningforhold osv. Dette ser vi bort fra, idet vi kun koncentrerer os om de bestemte ligninger.

3.3. Problem 2: Beregning af grundvandssenkning.

Uddybning af problem: Hvor stor vil grundvandssenkningen blive i en givet afstand fra en vandindvindingsboring.

Til løsning af problemet er det nødvendigt at vide, hvordan grundvandets trykforhold ændres på grund af vandets bevægelse, og hvor hurtigt vandet bevæger sig mod boringen.

3.3.1. Trykforhold og grundvandsbevægelse.

Grundvandets bevægelse kan beskrives ved hjælp af mekanikens bevægelsesligning. Selvom grundvandet bevæger sig i et net af hulrum og gange, kan grundvandet betragtes som et samlet system, hvorpå der kan udføres nogle fysiske overvejelser og beregninger. Disse overvejelser og beregninger har deres udspring i Newtons 2.lov:

$$K = m \cdot a$$

Når grundvandet bevæger sig langsomt gennem jordlagene, udsættes det for to slags kraftpåvirkninger, hvilket er illustreret ved figuren herunder.

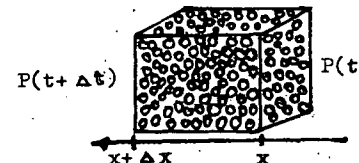


Fig.3.3. Figuren viser et lille udsnit af et vandførende lag. To slags kræfter påvirker kassen: 1) kræfter fra vandtrykket udenfor kassen, hvor  $P(x) \neq P(x + \Delta x)$  og 2) gnidningskræfter inde i kassen.

Figuren viser et lille udsnit af et vandførende lag. Vandet, som er indeholdt i dette udsnit eller i denne kasse, er for det første påvirket af vandtrykket udenfor kassen. Denne påvirkning giver anledning til en samlet kraft på kassen, der er forskellig fra nul, såfremt trykket varierer. Det vil

sige, at  $P(x) = P(x + \Delta x)$ , hvor  $P$  er trykket. For det andet påvirkes vandets bevægelse i kassen af gnidningen mod jordpartiklerne.

Eftersom disse to kraftpåvirkninger er bestemmende for grundvandets bevægelse, kan Newtons 2.lov formuleres således:

$$1) \quad \rho \frac{dV}{dt} = -\frac{dP}{dx} - G$$

hvor  $\rho$  = vandets massefylde,  $G$  = gnidningskraft pr. volumenenhed

$\frac{dV}{dt}$  = vandets acceleration,

$\frac{dP}{dx}$  = trykændring pr. længdeenhed

Bytter vi rundt på ligning 1) fås:

$$2) \quad -\frac{dP}{dx} = \rho \frac{dV}{dt} + G$$

Hermed har vi et udtryk, der fortæller, at trykfaldet pr. længdeenhed, dels skal bruges til at accelerere vandet, dels til at overvinde gnidningsmodstanden mod vandets bevægelse. I praksis viser det sig, at det nødvendige trykfald til acceleration af vandet under normale forhold er forsvindende lille sammenlignet med trykfaldet, der er nødvendigt for at overvinde gnidningsmodstanden. Derfor vil vi smide accelerationsleddet  $\rho (dV/dt)$  bort i ligning 2). Vi har så at

$$3) \quad -\frac{dP}{dx} = G$$

Sættes  $G = \chi V$ , hvor  $\chi$  er en gnidningskoefficient og  $V$  er vandets transporthastighed fås:

$$4) \quad \frac{dP}{dx} = -\chi V$$

Imidlertid ønsker vi ikke et udtryk, der kan beskrive trykket  $P$ 's variation med stedet  $x$ , men et udtryk der kan beskrive trykhøjden  $y$  i en indvindingsboring. Trykhøjden  $y$  er forårsaget af trykket  $P$ , en sammenhæng, der kan skrives som

$P = \rho gy$ , hvor  $g$  er tyngdeaccelerationen.

Indsættes  $P = \rho gy$  i den reducerede bevægelsesligning 4) har vi

$$5) \quad \rho \frac{dy}{dx} = -\chi V$$

$$6) \quad V = -\frac{\rho \rho}{\chi} \frac{dy}{dx}$$

$$7) \quad \boxed{V = -k \frac{dy}{dx}}$$

hvor  $k = (\rho \rho) / \chi$ .

Med ligning 7) har vi fået et udtryk, der fortæller, hvordan sammenhængen mellem grundvandets trykforhold og strømningshastighed er.

Til løsning af vores problem må vi foruden Newtons bevægelseslove dog også inddrage en anden fysisk lovmæssighed, nemlig loven om massebevarelse udtrykt ved en kontinuitetsligning. Grundvandets strømningshastighed kan formuleres ud fra et krav om massebevarelse. Hermed menes, at der ikke kan forsvinde eller opstå masse, og for stationære vandstrømme vil der heller ikke ophobes masse i et givet område. Til forskel fra bevægelsesligningen vil kontinuitetsligningen have et varieret udseende, alt afhængig af hvilken type grundvandsreservoir, der er tale om og om nedsivende regnvand indgår i ligningen.

Her vil vi betragte et såkaldt artesiske grundvandsreservoir (dvs. grundvandet står under tryk) placeret i en ø. (se eventuelt bilag) Se figur 3.4.

Vi abstraherer nu en smule fra virkeligheden, og betragter en cirkulær ø, der befinder sig i en ferskvandssø. Nederst ved søbunden består øen af et vandførende lag med tykkelsen  $t$  og permeabiliteten  $k$ . Øens øvre jordlag består af vandstandsende ler, hvilket betyder, at overfladevand (regn m.m.) ikke siver ned til det vandførende lag ved søbunden. Vi regner således kun med, at grundvandsreservoir (det vandfø-

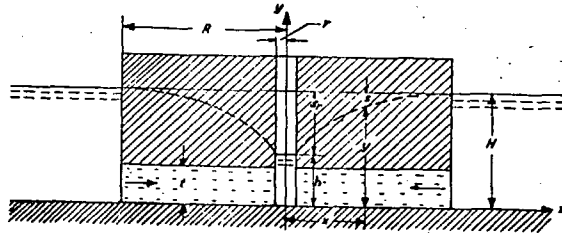


Fig.3.4. Punkter af den viste sænkingskurve kan findes ved at udføre observationsboring ned til det vandførende lag ved søbunden. Når der ikke pumpes, vil vandstanden i observationsboringen svare til søens vandspejl.

rende lag ved søbunden) får tilført vand ved indsviing fra søen. På søen er der placeret en boring, hvorfra der pumpes vandmængden  $Q$  op. Derved kan kontinuitetsligningen for et artesiske grundvandsreservoir udtrykkes som:

$$8) \quad Q = V 2\pi x t$$

hvor  $Q$  = den oppumpede vandmængde,  
 $x$  = afstanden fra boring og  
 $t$  = det vandførende lags tykkelse.

Ligningen 8) udtrykker, at den vandmængde der pumpes op pr. tidsenhed,  $Q$ , er lig med mængden af vand, der pr. tidsenhed strømmer fra søen gennem det vandførende lag og ind i et område med radius  $x$  omkring indvindingsboringen. Ligningen gælder for alle værdier af  $x$  så længe  $x$  er mindre end søens radius. Med ligning 8) har vi fået en ligning, der beskriver grundvandets strømningshastighed  $V$  som funktion af stedet  $x$  på søen.

Grundvandssænkningen ved vandindvinding kan nu beregnes ved indsættelse af bevægelsesligningen 7) i kontinuitetsligningen 8) for et artesiske grundvandsreservoir:

$$8) \quad Q = V 2\pi x t$$

$$9) \quad Q = k \frac{dy}{dx} 2\pi x t$$

$$10) \quad dy = \frac{Q}{2\pi k t} \frac{dx}{x}$$

Ved integration af 10) fås

$$11) \quad y = \frac{Q}{2\pi k t} \ln(x) + C$$

Indsættes nu  $H = y$  (grundvandet trykniveau) for  $x=R$  (søens radius) i ligning 11) fås:

$$12) \quad H = \frac{Q}{2\pi k t} \ln(R) + C$$

Ved subtraktion af ligning 11) og 12) findes en ligning, der beskriver sænkingskurvens form:

$$13) \quad H - y = \frac{Q}{2\pi k t} \ln\left(\frac{R}{x}\right) = S_x$$

Grundvandets sænkning i selve boringen findes endelig ved at indsætte borerørets radius  $r = x$  i 13)

$$14) \quad S_r = \frac{Q}{2\pi k t} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

Det er nu muligt at beregne grundvandssænkningen ved en givet oppumpning.

I det følgende gengiver vi et beregningseksempel fra "Vandforsyningsteknik" (J.J.Linde-Jensen et.al.).



En fabrik får sit vand fra en boring, der er nedført gennem et homogent og overalt lige tykt sandlag med artesisk vand (radius 600 m). Boringen er forsynet med et 0,2 m (radius 0,01 m) filterrør. Fra boringen oppumpes kontinuert 0,02 m<sup>3</sup>/s, hvorved vandspejlet i et observationsrør i 100 meters afstand fra boringen sænkes 2,5 meter. En by påtænker at anlægge en boring i 300 m afstand fra fabrikken i samme sandlag. Fra boringen regner man med året rundt at indvinde 0,04 m<sup>3</sup>/sek.

Problemet er nu, hvor stor bliver vandspejlsænkningen i fabrikkens boring på grund af indvindingen fra de to boringer.

Til beregningen bruges formel 14), hvor data er:

$$Q_{\text{fabrik}} = 0,02 \text{ m}^3/\text{sek}$$

$$Q_{\text{by}} = 0,04 \text{ m}^3/\text{sek}$$

$$S_{\text{fabrik}} = 2,5 \text{ m}$$

$$R = 600 \text{ m. (radius af reservoir)}$$

$$r_1 = 100 \text{ m (afstand mellem fabriksboring og observationsrør)}$$

$$r_2 = 0,1 \text{ m (radius af filterrør)}$$

$$r_3 = 300 \text{ m (afstand mellem fabriksboring og byboring)}$$

$$2\sqrt{kt} = \text{ukendt konstant (k = permeabilitetskoefficient og t = tykkelse af sandlag)}$$

Beregning af ukendt konstant:

$$2\sqrt{kt} = \frac{Q_{\text{fabrik}}}{S_{\text{fabrik}}} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right)$$

$$2\sqrt{kt} = \frac{0,02}{2,5} \ln\left(\frac{600}{100}\right)$$

$$2\sqrt{kt} = 0,0143$$

Det reelle problem kan nu løses.

Samlet sænkning i fabrik = sænkning fra fabrik + sænkning fra byen.

$$S_s = \frac{Q_{\text{fabrik}}}{2\sqrt{kt}} \ln\left(\frac{R}{r_2}\right) + \frac{Q_{\text{by}}}{2\sqrt{kt}} \ln\left(\frac{R}{r_3}\right)$$

$$S_s = \frac{0,02}{0,0143} \ln\left(\frac{600}{0,1}\right) + \frac{0,04}{0,0143} \ln\left(\frac{600}{300}\right)$$

$$\underline{\underline{S_s = 14 \text{ meter}}}$$

Grundvandet vil altså blive sænket 14 meter i fabrikkens boring, når byen begynder sin påtænkte indvinding.

3.4 PROBLEM 3: MAKSIMALT VÆGTUDBYTTET I DAMBRUG

Black-box modellen vi her vil præsentere kaldes "ørreddam-modellen". Med denne model vil vi beregne det tidspunkt, hvor en dams samlede biomasse har størst vægt. De to bestemmende ligninger, der indgår i modellen, er de samme ligninger, der anvendes i prognosemodeller for fiskeriet.

Ørreddam-modellen, som den er vist i denne beregning, kan umiddelbart bruges i praksis på ørreddammen (og kun dammen). Overføres modellens principper til havet, volder indsamlingen af det nødvendige data-materiale problemer.

Uddybning af problem: Til hvilket tidspunkt skal en dam tømmes for fisk, for at vægtudbyttet bliver størst muligt, forudsat at fiskene får så meget foder, som de kan æde.

Til løsning af dette problem er det nødvendigt at vide, hvordan antallet af fisk ændre sig med tiden, samt hvordan vægten af en fisk ændrer sig med tiden.

3.4.1 Antal fisk som funktion af tiden

Til tiden  $t = 0$  blev der i dammen udsat  $N_0$  antal fiskeyngel. Sandsynligheden for at en fisk dør af sygdom, ulykker m.m. pr. tidsenhed kaldes  $M$ . Det er en biologisk erfaring at dødeligheden  $M$  kan regnes for at være uafhængig af fiskens alder. Det vil sige, at  $M$  er en konstant uafhængig af tiden.

1) 
$$\frac{dN}{dt} = -MN$$

Af ligningen, der bestemmer antallet af fisk som funktion af tiden, ses, at  $dN/dt$  er negativ, hvilket betyder, at der bliver færre fisk som tiden går, og at ændringen har størrelsen  $MN$ .

De funktioner  $N = N(t)$ , der er løsning til 1), har alle formen:

$$N(t) = C \cdot e^{-Mt}$$

Løsningen, der passer med  $N = N_0$  til  $t = 0$ , fås ved at vælge integrationskonstanten  $C$  lig med  $N_0$ .

$N(t)$  bliver så:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-Mt}$$

Denne funktion har et udseende som vist på figur 3.5.



Fig.3.5. Funktionen  $N(t) = N_0 e^{-Mt}$ 's grafiske billede.

3.4.1. Fiskens vægt som funktion af tiden

Den enkelte fisks vægt øges ved, at fisken spiser og optager næring gennem tarmvæggen. Fiskens evne til at øge sin vægt antages at være proportional med fiskens tarmoverflade. Regnes store og små fisk for ligedannede, er tarmoverfladen proportional med vægten opløftet til potensen  $2/3$ . Potensen  $2/3$  udtrykker ligedannedhed. Afviger potensen fra  $2/3$  betyder dette at fisk af forskellig størrelse ikke er ligedannede.

Fiskens vægt påvirkes ikke kun af, at den spiser. Dens biologiske funktioner (ånding m.m.) foregår uafhængig af næringsoptagelsen, hvilket bevirker, at fisken hele tiden

forbruger og udskiller stof. Dette kan regnes som et vægttab pr. tidsenhed, der er proportionalt med vægten.

Fiskens ændring af vægt pr. tidsenhed  $dW/dt$  bliver:

Tilvækst = stofopbygning - stofnedbrydning.

$$2) \quad \frac{dW}{dt} = H W^{2/3} - kW$$

hvor  $k$  og  $H$  er fysiologiske konstanter, der er artsafhængige.  $H$  karakteriserer den mængde næringsstof fisken netto har til rådighed til stofopbygning.  $k$  karakteriserer stofudskillelse (se evt. bilag).

For at finde de funktioner  $W = W(t)$ , der tilfredsstiller ligning 2), sættes  $W = x^3$ . Indsættes dette i 2) fås:

$$3x^2 \frac{dx}{dt} = Hx^2 - kx^3$$

$$3) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{H}{3} - \frac{k}{3}x$$

De funktioner  $x = x(t)$ , der er løsning til ligningen

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{3}x$$

har formen

$$x(t) = C \cdot e^{-\left(\frac{k}{3}t\right)}$$

Da den konstante værdi  $H/k$  for funktionen  $x$  tilfredsstiller 3), har alle de funktioner  $x = x(t)$ , der er løsning til 3) formen

$$x(t) = \frac{H}{k} + C e^{-\frac{k}{3}t}$$

De funktioner  $W = W(t)$  der tilfredsstiller 2) ser da ud som følger

$$W(t) = x^3 = \left(\frac{H}{k} + C e^{-\frac{k}{3}t}\right)^3$$

Det antages nu, at vægten af de fisk, der udsættes i dammen til  $t = 0$ , er praktisk taget nul.

For at tilfredsstille kravet  $W = 0$  for  $t = 0$  må vi da vælge  $C = -H/k$ , og vi har

$$W(t) = \left(\frac{H}{k}(1 - e^{-\frac{k}{3}t})\right)^3$$

Denne funktion har et grafisk billede som vist på figur 3.6.

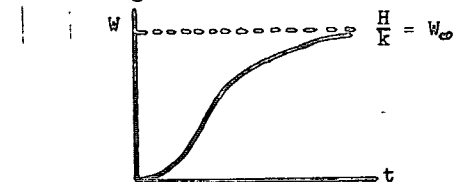


Fig 3.6. Kurven viser skematisk hvorledes en fisk vokser som funktion af tiden.

#### 3.4.2. Den maksimale vægt i dammen

Det må så gælde at antallet af fisk i dammen på et givet tidspunkt gange vægten af den enkelte fisk til dette tidspunkt må svare til den samlede vægt af fiskene,  $Y(t)$ . Den samlede vægt af fiskene bliver da:

$$Y(t) = N(t) W(t)$$

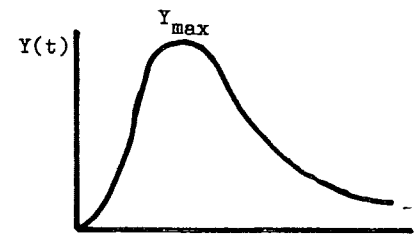


Fig 3.7. Figuren illustrerer denne funktion  $Y(t)$  grafisk.

Da  $N(t)$  er 0 for  $t = \infty$  og  $W(t)$  er 0 for  $t = 0$  er  $Y(t)$  nul for både  $t=0$  og  $t = \infty$ .

Funktionen må derfor have et maksimum. Vi kan nu se, at det problem, som vi har stillet os, svarer til det  $t$  hvor  $Y(t)$  er størst (sammenlign m. fig 3.7.)

Ved differentiering fås:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \frac{dN}{dt} W + N \frac{dW}{dt} \\ &= -MN \left( \frac{H}{K} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) \right)^3 + 3N \left( \frac{H}{K} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) \right)^2 \left( -\frac{H}{K} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) \right)^3 \\ &= H \left( \frac{H}{K} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) \right)^2 H \left[ -\frac{H}{K} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) + e^{-\frac{k}{3}t} \right] \end{aligned}$$

Heraf ses, at  $dY/dt = 0$  for  $t = 0$ ,  $t = \infty$  og det  $t$ , der tilfredsstiller  $[ ] = 0$  er

$$-\frac{M}{K} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) + e^{-\frac{k}{3}t} = 0$$

$$-\frac{M}{K} (1 - e^{-\frac{k}{3}t}) = -e^{-\frac{k}{3}t}$$

$$\frac{M}{K} - \frac{M}{K} e^{-\frac{k}{3}t} = e^{-\frac{k}{3}t}$$

$$\frac{M}{K} = \frac{M}{K} e^{-\frac{k}{3}t} + e^{-\frac{k}{3}t}$$

$$\frac{M}{K} = \left( \frac{M}{K} + 1 \right) e^{-\frac{k}{3}t}$$

$$t = \frac{3}{k} \ln \left( \frac{M+K}{M} \right)$$

som er svaret på vores problem. Bemærk, at den maksimale vægt kun afhænger af  $k$  og  $M$ , og ikke af  $H$  (nettostofmængde, der er til rådighed til opbygning).

Med talværdierne for  $k = 1,326 \text{ år}^{-1}$   
og  $M = 0,2 \text{ år}^{-1}$   
bliver  $t = 4,6 \text{ år}$

Dammen skal altså tømmes 4,6 år efter at ynglen er sat ud for at give det største vægtudbytte.

Modelskema.

Betegnelser	Ligning	Kommentar
<u>Himmelmekanik</u>		Teoretisk ligning. Dvs. ligningens objekter og sammenhængene mellem dem.
Massetil-trækningsloven	$K = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$	
	$K = \text{kraft}$	
	$G = \text{universel konstant}$	
	$m = \text{masse}$	
	$r = \text{afstanden mellem } m_1 \text{ og } m_2.$	

Satellitens bevægelse	$a = \text{acceleration}$	Teoretisk ligning.
	$K = m a$	

Satellitens placering.	$r = \sqrt[3]{\frac{G m_1 T^2}{4 \pi^2}}$	$m = \text{satellitens masse}$ spilder ingen rolle for svaret.
------------------------	---	---

<u>Grundvands-sænkning.</u>	$V = \text{hastighed}$	$kV$ er en idealisering af vandets gnidning med jordpartiklerne. Bevægelsesligningen bliver på grund af kv (delvist) idealiseret. Bevægelsesligningen har dog en teoretisk baggrund, da den er afledt fra Newtons 2.loV.
<u>Grundvands-hastighed</u>	$S \frac{dV}{dt} = \frac{dp}{dx} - \gamma V$	$V = k \frac{dy}{dx}$
	$Q = \text{oppumpning}$	
	$t = \text{(lagets tykkelse)}$	
	$r = \text{afstand (radius)}$	$Q = V 2\pi r x t$

<u>Grundvands-sænkning</u>	$S_r = \frac{Q}{2\pi r k t} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$	Kontinuitetsligningen er afledt teoretisk, med udgangspunkt i massebevarelse.
	$S_r = \text{sænkning}$	
	$R = \text{det cirkulære lags radius}$	
	$r = \text{borerørets radius}$	

<u>Fiskerimodel</u>		Bag M eksisterer ingen teoretisk forståelse. Funktionen $N(t)$ er der således ingen teoretisk baggrund for. Ligningen bliver herved idealiseret
Antal fisk som funktion af tiden.	$\frac{dN}{dt} = -MN$	
	$N(t) = N_0 e^{-Mt}$	

Vægten af en fisk som funktion af tiden.	$\frac{dw}{dt} = Hw^{2/3} - kw$	$w(t) = \frac{k}{w_0(1-e^{-k(t-t_0)})^3}$
	$w = \text{vægt}$	
	$H = \text{stofoptag}$	For $H$ og $k$ eksisterer ingen teoretisk forståelse.
	$k = \text{stofudskilning}$	Parametrene tillægges efter data. Ligningen bliver derved idealiseret.

Tidspunkt for maksimalt vægtudbytte	$Y(t) = N(t)w(t)$	$t = \frac{2}{k} \ln\left(\frac{M+k}{M}\right)$
	$Y = \text{vægtudbytte}$	
	$N(t) = \text{Antal fisk}$	Bemærk her at $H$ (stofoptag) ikke har indflydelse på løsningen.

### 3.5 DE TRE MODELLER SAMMENLIGNES

I kapitel 2 nævnte vi, at enhver form for matematisk modeldannelse kræver en udvælgelse af systemer og objekter og en eller anden form for abstraktion. Det samme gælder naturligvis også de i foregående afsnit viste modeller. Med udgangspunkt i de foretagene valg vil vi i det følgende afsnit sammenligne de tre modeller og forsøge at placere modellerne i vort modelsystem. Dette er givet ikke uproblematisk, idet der sandsynligvis er områder, hvor en systematisering virker firkantet eller grotesk. Imidlertid har vi dog ment, at der eksistere nogle træk ved modellerne, som gør, at en systematisering vil give en klarere forståelse af, de ligheder og forskelle modellerne indeholder.

Om den matematiske model vil vi kunne sige, at denne indebærer to ting:

- 1) en placering af problemstillingen i et teoriunivers - det vil sige, at der må foretages et valg af de systemer/objekter/mekanismer hos problemstillingen, som modellens bestemmende ligninger skal fremstille.
- 2) en afgrænsning og simplificering af problemstillingen - det vil sige, at der må foretages et valg med hensyn til de randfænomener, vi ønsker at medtage ved problemløsningen.

#### 3.5.1 LIGHEDER VED DE TRE MODELLER

Betragter vi de tre modeller nærmere, vil vi finde nogle ligheder (og forskelle) hos dem. Karakteristisk for disse ligheder er, at de kun udtrykker modellens overflade. I modelleksemplerne har vi forsøgt, at tydeliggøre disse ligheder ved at gengive modellerne efter samme skema - et skema som vi naturligvis ikke vil finde på samme måde, hvor der er tale om "rigtige" modeller. Imidlertid har vort ønske været, at vise hvordan modellerne på overfladen ligner hinanden,

selvom modellernes teoretiske grundlag er af vidt forskellig natur.

For alle tre beregningseksempler gælder, at vi står over for et praktisk problem, som vi søger at løse ved hjælp af en matematisk model. Denne skal levere et svar i form af en enkelt talangivelse.

Løsningen af dette praktiske problem indebærer således en omformulering fra det praktiske problem til et matematisk problem. Denne omformulering er baseret på en udvælgelse og abstraktion af de objekter og mekanismer fra problemets virkelighedsområde, der er nødvendigt for problemløsningen. Objekterne og mekanismerne er givet ved henholdsvis nogle tal og et antal ligninger for hver model. Objekterne, der alle har et bogstavsymbol, er i princippet dem, vi enten skal finde ved hjælp af en matematisk model, eller også er de kendte (og kan måles) og indgår som sådan i problemløsningen. Modellens ligninger repræsenterer som nævnt de mekanismer, der styrer objekterne. (At der i de her viste modelleksempler forekommer to bestemmende ligninger pr. model er dog en tilfældighed). De tre modeller repræsenterer endelig alle idealiseringer af det virkelighedsområde, problemløsningen berører. Vi har således for tydeliggørelsens skyld fremstillet modellernes konkrete virkelighedsområde betydeligt mere enkelt, end sandt er.

Det væsentlige ved denne præsentation af modelleksemplerne er dog den måde, modellerne fremstår på - nemlig som ensartede og lige velfunderede modeller. Disse forhold har vi her forstærket ved at gengive modellerne efter samme metode. Dog er vi af den mening, at matematiske modeller også i almindelighed fremstår på en sådan måde, at de alle mere eller mindre ligner hinanden, uden at man er i stand til (eller har baggrund for) at erkende de forskelle, der faktisk eksisterer. Herved kan modellerne, hvis teoretiske eller empiriske fundament er mindre veludbygget, få urimelig megen betydning, når modellernes resultater skal anvendes i en argumentation. Dette forstærkes ydeligere af den autorit-

tet matematikken almindelig omgøres med - en autoritet, der er opstået som følger af bl.a. matematikundervisningens løsning af problemer som enten sande eller falske. Heri ligger intuitivt, "...at matematikken giver fastslåede sande eller falske udsagn om virkeligheden. Den komplekse verden og proces, der ligger bag en matematisk model og tilblivelse af denne, bliver i elevernes (folks; vor tilføjelse) bevidsthed reduceret til entydigt fremkomne resultater"./Tanker om en praksis, s. 27/.

3.5.2 Forskelle ved de tre modeller

Vi har allerede antydnet, at der eksisterer en række væsentlige forskelle mellem de tre modeller, vi har vist. I dette afsnit vil vi gøre nærmere rede herfor.

Tidligere har vi nævnt, at det praktiske problem kræver en omformulering, såfremt problemet skal gøres til genstand for en matematisk behandling. Denne omformulering fra det praktiske problem til det matematiske problem bygger på en række teorier, hypoteser og antagelser om det virkelighedsområde problemet tilhører. Den teoretiske erkendelse af de områder modellerne repræsenterer er imidlertid meget forskellig. Af samme grund bliver den matematiske models mekanismer, der udtrykkes ved hjælp af ligninger, også af forskellig natur. Ligningerne vil således i yderpunkterne være helt teoretisk afledt eller blot skabt til lejligheden (til én bestemt model) uden tilbundsgående forståelse af ligningens objekter, og de sammenhænge disse indgår i.

I skema 3.1. er de tre modellers bestemmende ligninger (de ligninger, som fastlægger sammenhænge mellem modellernes objekter) rubriceret efter den teoriladethed ligningerne besidder. Med teoriladethed vil vi forstå den grad af teoretisk erkendelse, der ligger bag modellens objekter og mekanismer udtrykt gennem ligningerne. Dette er således vores kriterie for en placering af de tre modeller i systemet "teoretisk-mekanisk model, grey-box model og black-box model".

<u>Model 1.</u> (satellitplac.)	Begge bestemmende ligninger er teoretisk funderet.	Teoretisk-mekanisk model
<u>Model 2.</u> (grundvandssænk)	Kontinuitetsligningen er teoretisk funderet. Bevægelsesligningen er teoretisk afledt, dog med et fænomenologisk funderet indhold	Grey-box model
<u>Model 3.</u> (ørreddam)	Begge bestemmende ligninger er fænomenologisk funderet.	Black-box model.

Skema 3.1. Skemaet viser de i afsnit 3.2-3.4 gennemgåede modeller placeret efter deres teoriladethed.

En rubricering af denne art vil dog uden tvivl kunne give anledning til en række diskussioner, idet opfattelserne af hvorvidt en teori er mere teoretisk end en anden er delte. Man fristes til at sige, at alt er relativt - altså helt afhængig af hvilke teorier, der sammenlignes indbyrdes. Dog er vi af den opfattelse, at der vil kunne skelnes (omend mere eller mindre klart) mellem modeller, hvis indhold af enten teoretisk eller fænomenologisk karakter. Således er den teoretisk-mekaniske model i højere grad en del af et teoriunivers end den fænomenologiske model. Dette kan illustreres på denne måde:

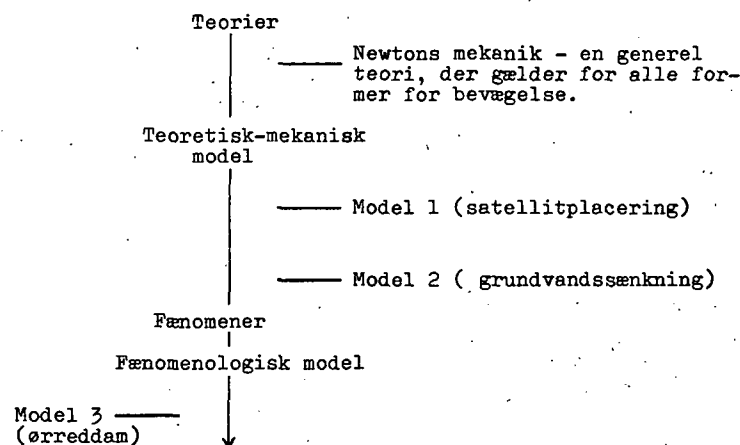


Fig.3.6. Figuren viser skematiseret en placering af modellerne 1, 2 og 3 efter deres teoriladethed. Model 1 og 2 er en del af et teoriunivers (Newtons mekanik). Model 3 har ikke et entydigt teoriunivers at referere til.

Som vi allerede har antydnet i skema 3.1. og nu også i figur 3.6 har vi placeret model 1 i kassen for teoretisk-mekaniske modeller og model 3 under black-box modeller. Model 2 har vi placeret i kassen med grey-box modeller. Denne inddeling forekommer at være temmelig entydig. Blot må den kun opfattes som en skematisk illustration af en virkelighed, der er langt mere kompleks, og hvor grænserne flyder ud. (Vi har egentlig dannet os en model). Men lad os sammenligne yderpunkterne - model 1 og 3 - og senere problematisere disse ved hjælp af model 2.

### 3.5.3 Model 1: Placering af TV-satellit

I model 1 består de to bestemmende ligninger af to lov-mæssigheder - nemlig

$$\text{massetiltrækningsloven } K = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ og}$$

$$\text{bevægelsesloven } K = m \cdot a$$

Disse to love hører hjemme i den Newtonske mekanik, der er en generel teori om legemers ligevægt og bevægelse. Teorien er generel, fordi den bestemmer bevægelsen af alt stof overalt i universet : på jorden såvel som i himmelen. Gennem massetiltrækningsloven har vi således et matematisk udtryk, der giver en bestemmelse af den universelle kraft, som holder planeterne i deres baner omkring solen, holder månerne i deres baner omkring planeterne, giver faldende legemer den bevægelse, vi iagttager, holder genstande fast ved jorden og forårsager tidevandst og meget mere. For bevægelsesloven har vi ligeledes et generelt udtryk om, hvordan alle legemer bevæger sig under indflydelse af kræfter.

Newtons mekanik er altså en påstand om, hvordan en ganske bestemt del af virkeligheden fungerer. Imidlertid er der ikke tale om en hvilken som helst påstand, idet vi får en bestemmelse (der er bekræftet til overensstemmelse) af de indre mekanismer, som forklarer en lang række ydre fænomener, vi oplever i virkeligheden. At vi ikke kalder Newtons mekanik for en teoretisk-mekanisk model, men en generel teori, hænger sammen med, at den generelle teori ikke refererer til enkelte isolerede systemer (f.eks. kun model 1), men er et udtryk for en større teoridannelse, der gælder for mange andre systemer (f.eks. også model 2)(se figur 3.6.)

På grundlag af den Newtonske mekanik - den generelle teori - er vi således i stand til at danne en matematisk model, som kan forklare, hvorledes en TV-satellit skal placeres i rummet.

Vi har flere gange understreget, at vore modeller er meget simplificerede i forhold til de faktiske omstændigheder. Således kræver en satellitplacering meget komplicerede beregninger, der bl.a. skal tage højde for tiltrækningskræfterne fra solen og månen, jordens inhomogenitet m.m. Dette har til konsekvens, at den matematiske model "fyldes" med fænomenologiske træk, hvis baggrund og fulde forståelse ikke er kendt. Modellen må, for at kunne simulere forskellige



fænomener fra virkeligheden, indrage et stort empirisk materiale.

Imidlertid betyder det udbyggede teoretiske fundament modellen for satellitplaceringen bygger på, at de abstraktioner vi nødvendigvis må foretage for at kunne beregne et komplekst system, kan vurderes i forhold til hinanden. Der vil således være en forståelse af hvilke mekanismer i modellen, der er væsentlige, og hvilke der har mindre betydning i forbindelse med den konkrete problemløsning. Med denne baggrund vil abstraktionernes konsekvens for modelberegningerne kunne vurderes og om nødvendigt korrigeres. Dette forhold, mener vi, står i modsætning til den rent fænomenologiske model - modellen til beregning af vægtudbytte i dambrug.

3.5.4 Model 3: Maksimalt vægtudbytte i dambrug

Model 3, der har til formål at beregne tidspunktet for det maksimale vægtudbytte i en ørreddam, indeholder de samme bestemte ligninger, som anvendes i prognosemodeller, hvis udsagn i dag kan bruges til at afpasse fiskeriindsatsen efter det ønskede udbytte. Forskellen mellem en ørreddam og havet er "blot", at fiskene i havet ikke er delt op i bassiner, hvor de har samme alder og størrelse, men hele tiden blandes. Dette må der naturligvis tages højde for, når fangsttidspunktet for størst vægtudbytte skal beregnes. Desuden indvirker langt flere ukontrollerbare forhold på fiskene i havet (temperatur, føde, iltforhold, rovdyr m.m.) end en ørreddam. Imidlertid adskiller de to modeller sig i deres anvendelse af bestemte ligninger ikke fra hinanden (se evt. bilag).

De to bestemmende ligninger udtaler sig henholdsvis om

$$\begin{aligned} \text{antallet af fisk til et givet tidspunkt } \frac{dN}{dt} &= -MN \text{ og} \\ \text{vægten af en fisk til et givet tidspunkt } \frac{dW}{dt} &= Hw^{2/3} - kw \end{aligned}$$

Ligningen, som bestemmer antallet af fisk som funktion af tiden, består kun af den simpleste eksponentialfunktion, der kan opstilles. Funktionen  $dN/dt = -MN$ , hvis løsning er  $N(t) =$

$N_0 e^{-Mt}$  udtrykker, at antallet af fisk fra en årgang som funktion af tiden er faldende.

EkspONENTEN M, som "styrrer" funktionen, kaldes den naturlige dødelighed. Det vil sige en dødelighed, der der forårsages af sygdom og ulykker i ørreddammen. Fiskene i havet udsættes ydeligere for faktorer som predation, sult m.m. M indeholder altså en række komponenter, som der ikke findes teoretisk forståelse af. Der eksisterer f.eks. ingen teori, som kan forklare alderens og sygdommens indflydelse på dødeligheden både som to enkeltstående fænomener og som samvirkende fænomener, der indbyrdes påvirker hinanden. Dødeligheds-ekspONENTEN M må derfor fastsættes på grundlag af empirisk materiale, hvilket for en ørreddams vedkommende ikke er umuligt. I ørreddammen vil man således kunne bestemme antallet af fisk (N) nøje. Samme muligheder eksisterer imidlertid ikke, når M og N skal overføres til f.eks. et system som havet. I naturen er det f.eks. meget vanskeligt at erhverve datamateriale til bestemmelse af M,

" .... når det ikke drejer sig om dyr med adskilte generationer. Metoder til at aldersbestemme organismer - som kun kendes for et begrænset antal former - er ikke tilstrækkelige med mindre man kender aldersstrukturen til forskellige tider eller har begrundet formodning om, at aldersstrukturen holder sig konstant, hvad man sjældent kan forvente." /Almen økologi, T. Fenchel, s.30/.

En bestemmelse af N (antal dyr) volder ikke mindre problemer snarere tværtimod.

Ligningen, der udtrykker vægten af én fisk til et givet tidspunkt  $dW/dt = Hw^{2/3} - kw$ , er en sammenskrivning af nogle antagelser om fisksstofopbygning og stofnedbrydning - to forhold, der er sat på matematisk form. (se bilag C).

For stofopbygningens vekommende gælder, at der gøres nogle antagelser om den del af fiskens næringsoptagelse, som faktisk udnyttes, og hvordan dette forholder sig til udbuddet af føde. Der er således erfaring for, at dyrs ekskrementer indeholder ufordøjede næringsstoffer, og at bakterier o.a. i tarmkanalen omsætter en del af den ædte føde. Dette bevirker, at ikke al den ædte føde optages gennem tarmvæggen. Med stigende fødeniveau viser det sig yderligere, at fødemængden, der optages gennem tarmvæggen, aftager. Føden udnyttes altså ringere ved højt fødeniveau og udnyttes bedre ved lavt niveau.

Stofnedbrydningen hos fisk (og alle andre dyr) sker ved forbrug af næring (stof) til energikrævende processer og stofskiftet. Således sættes forbrugt af næring til de dominerende energikrævende processer som fødeoptagelse, fordøjelse, aktiv transport gennem membraner og syntese (assimilation) til at være proportionale med den faktisk optagne fødemængde (gennem tarmen).

Stofskiftet, der er uafhængigt af hvorvidt fødeoptagelse finder sted, antages endelig at være proportionalt med dyrets iltabsorberende overflade (gæller, lunger, hud).

Ovenstående er udtryk for en typisk modeldannelse, hvor en lang række objekter og systemer gives nogle sammenhænge, der omformuleres til funktionsdygtigt matematik. Til forskel fra model 1 bygger model 3 på en lang række antagelser om hvordan nogle sammenhænge eksisterer. Således gøres der antagelser om, hvordan en population af fisk reduceres som funktion af tiden, og hvordan fiskens stofprocesser foregår. Disse antagelser sker ikke med baggrund i en teoretisk forståelse af kausale sammenhænge, d.v.s. hvorfor tingene hænger sammen på bestemte måder, men i højre grad med baggrund i en fænomenologisk beskrivelse af, hvordan tingene hænger sammen. Een grund hertil kan være, at :

"Biologien... traditionelt (er) en deskriptiv videnskab, og økologer har i vid udstrækning følt deres opgave løst ved biotop for biotop at beskrive og måske kvantificere fauna og flora i tid og rum eventuelt i relation til abiotiske faktorer, men ofte uden at analysere væsentlige årsagssammenhænge. En sådan fremgangsmåde kan lidt groft sammenlignes med en fysiker, der minutløst - sikkert med det bedste apparatur og en statistisk behandling af data - beskriver det ene spil billard efter det andet, men uden at være i stand til at ekstrahere lovene om inertie eller det elastiske stød fra det forvirrede billede, som mange kugler og kegler samt uregelmæssigheder i bordets felt ville være ansvarlig for. /Almen økologi, Tom Fenchel s. 12/.

Herved adskiller model 3 sig i sit væsen fra model 1. Hvorvidt dette har betydning for modellens brugbarhed må absolut ses i relation til den pågældende models formål. I det konkluderende afsnit forsøger vi at redegøre nærmere for denne problematik. Her skal vi blot nævne, at ørreddam-modellen anvendt på ørreddamme med alle de kontrol-muligheder dette indbærer, vil kunne give modellen en udformning, der får modellen til at simulere godt. Mere problematisk er det at overføre ørreddam-modellens bestemmende ligninger til anvendelse i fiskerimodeller for større havområder. I dette tilfælde vil fremskaffelsen af det empiriske datamateriale volde vanskeligheder. Ligeledes vil de foretagne abstraktioner og mangler i datamaterialet ikke kunne vurderes i forhold til deres betydning, eftersom modellen ikke har et teoretisk erkendelsesmæssigt fundament, hvor modellens objekter og systemer kan placeres i forhold til hinanden. Dette står netop i modsætning til den teoretisk-mekanisk model, med hvilken vi er i stand til at præcisere de indre mekanismer, der er årsag til et systems ydre fænomenologiske adfærd.

Her må det være på sin plads at bemærke, hvorvidt der overhovedet er mening i, at sammenligne en model, der behandler et ikke-biologisk system med en model, der behandler et biologisk system.

Til dette må vi svare, at en sammenligning som denne, der er af kvalitativ art, ikke er urimelig. I princippet er det for modeldannelsen ligegyldigt om fænomenerne, modellen har til opgave at beskrive eller forklare, er af fysisk, kemisk, biologisk eller samfundsmæssig oprindelse. Imidlertid er de forskellige fænomeners kompleksitet langt fra af samme natur, hvorfor væsenstrukturen hos et givet fænomen kan være yderst vanskeligt at erkende - om væsenet overhovedet kan erkendes.

Skulle der gives et bud på, hvordan en fænomenologisk model som ørreddam- modellen kan få et teoretisk erkendelsesmæssigt fundament at stå på, er en definition af, hvad liv egentlig er, måske nødvendig. (En entydig definition af liv eksisterer således ikke). Følgende citat viser måske et perspektiv:

"Det er et spørgsmål om at forstå liv. Vi er forlængst kommet ud over et tidligere traditionelt synspunkt, at der i levende celler må være et bestemt livsprincip. Det hele er i virkeligheden fysik og kemi, og hemmeligheden er at kunne forstå så mange sammenhængende fænomener som muligt. Når man kan begynde at forstå cellens netværk af kontrolfunktioner, så kan man senere overføre denne viden til mere komplicerede systemer for at ende med en forståelse af noget så avanceret som den menneskelige organisme. For biologer er der ikke længere nogen tvivl om, at den endelige beskrivelse af liv skal hentes i fysikkens og kemiens begrebsverden. /Interview med mikrobiologen Ole Maaløe i Politiken 11-5-79/.

Denne holdning erklæres af andre som reduktionistisk eller som en forfladigelse af livet. Ovenstående citat er derfor blot ét syn på, hvad liv er, idet

"The vitalists (adherents to the philosophy of vitalism) take the view that living phenomena cannot be included under the heading of chemistry and/or physics, but rather that there is a kind of directing force or spirit resident within the living organism. Vitalists believe that this life force is beyond human comprehension and that a distinct and inviolable barrier exists between the living and the nonliving world. /Biology a human approach/.

Væsenstrukturen hos model 3 kan (måske) af ovenstående grunde være vanskelig at identificere. Een ting, mener vi dog, må stå fast, og det er, at model 3 i forhold til model 1 ikke har et entydigt teoriunivers at referere til, hvorfor modellen må bære karakteristikkene "fænomenologisk".

### 3.5.5 Model 2: Beregning af grundvandssænkning

Model 1 og 3 har vi placeret i henholdsvis de teoretiske og den fænomenologiske del af modelverdenen. Imellem disse to yderpunkter (i forhold til modelsystemet, vi refererer til) findes der adskillige andre. Et eksempel herpå er model 2. Ved hjælp af denne model vil vi i det følgende afsnit forsøge at problematisere væsenstrukturen i modeller ydeligere.

I afsnit 2.4.4 nævnte vi, at en fænomenologisk model med tiden kan "vandre" mod en teoretisk erkendelse (og omvendt). For model 3's vedkommende så vi, at dette kan afstedkomme betydelige vanskeligheder, og der vil næppe kunne opnås teoretisk erkendelse af alle fænomenologiske modeller. Således kan et fænomen, en given model skal simulere være så kompliceret, at den indre mekanisme, der står bag fænomenet, ikke kan erkendes. Model 2, hvis formål er beregning af grundvandssænkning ved vandindvindning, mener vi, kan illustrere et sådant forhold.

I model 2 indgår der to bestemmende ligninger, nemlig en kontinuitetsligning  $Q = V 2g^x t$  og

en bevægelsesligning  $\frac{dV}{dt} = \frac{dP}{dx} - G$

reduceres til  $V = k \frac{dy}{dx}$

Kontinuitetsligningen vil ~~v~~ ikke ofreså mange ord på. Denne ligning udtrykker den fysiske lovmæssighed, at masse altid bevares. Der vil således ikke kunne forsvinde eller opstå masse. Kontinuitetsligningen udtrykker blot et bogholderi, hvor der holdes regnskab med et givet områdes vandbeholdning.

Bevægelsesligningen  $(dV/dt) = (dP/dx) - G$  er, som nævnt under beregningseksemplet, en omformulering af Newtons 2. lov. Af samme grund kan bevægelsesligningen henføres til et teoriunivers, der omhandler alle bevægelsesformer.

At model 2 alligevel placeres under grey-box modellerne, skyldes det forhold, at vi, for at kunne benytte bevægelsesligningen, må indføre en antagelse om hastighedsproportional gnidning. Denne antagelse kan ikke forklares eller vurderes indenfor teoriuniverset. Der er her tale om et fænomen, som besidder en sådan kompleksitet, at fænomenet til dags dato ikke har været muligt at forklare teoretisk. Gnidningskraften kan altså kun beskrives, ikke forklares.

Grundvandets bevægelse kan altså ved hjælp af et teoriunivers, der omhandler alle former for bevægelse, forklares på helt generelt plan. Dette teoriunivers kan blot ikke bruges til at forklare gnidningskraftens natur, hvorfor vi har en grey-box model.

### 3.5.6 Opsummering

Gennem denne sammenligning af model 1, 2 og 3 mener vi at kunne spore en eksistens af væsentlige kvalitative forskelle blandt matematiske modeller - forskelle som ved modellernes umiddelbare fremtrædelse skjuler en masse kompliceret (og nødvendig) matematik.

Ser vi tilbage til indledningen af disse modelanalyserende afsnit, nævnte vi, at den matematiske model indebærer to ting:

- 1) en placering af problemstillingen i et teoriunivers - det vil sige, at der må foretages et valg af de systemer/objekter/mekanismer hos problemstillingen, som modellens bestemmende ligninger skal fremstille.
- 2) en afgrænsning og simplificering af problemstillingen - det vil sige, at der må foretages et valg med hensyn til de randfænomener, vi ønsker at medtage ved problemløsningen.

Forholder vi de tre modeller til pkt. 1: en placering af problemstillingen i et teoriunivers, vil vi mene, at de kvalitative forskelle mellem modellerne netop skyldes en tilknytning eller mangel på tilknytning til et teoriunivers.

Således kan model 1 (satellitplacering) henføres til et teoriunivers, ud fra hvilket vi er i stand til at vurdere de valgte objekter, systemer og mekanismer. Vi vil med teoriuniverset som fundament kunne vurdere, hvad der er væsentligt, og med hvilken vægt de foretagne abstraktioner (pkt.2) påvirker modellens resultater. Der er tale om en teoretisk-mekanisk model.

Model 2 (grundvandssænkning) benævnes derimod som en grey-box model, fordi vi kun kender de helt generelle

bagvedliggende mekanismer, der er bestemmende for grundvandets bevægelse - nemlig Newtons 2. lov. Imidlertid har vi ingen teoretisk erkendelse af et forhold som gnidningskraften, der spiller en dominerende rolle ved grundvandsberegninger. Det generelle teoriunivers, denne grey-box model har som udgangspunkt, sætter os således i stand til at forklare efter hvilke principper, grundvandsbevægelsen må rette sig efter. Den dominerende gnidningskraft kan dog kun beskrives.

Endelig eksisterer der for model 3 (maksimalt vægtudbytte), som understreget tidligere, ikke noget entydigt teoriunivers, modellen kan referere til. Det manglende teoriunivers betyder, at valget af objekter, systemer og mekanismer blot kan baseres på teoristumper, empiri, datamateriale osv. En sammenhængende teoretisk erkendelse, der kan knytte de nævnte elementer sammen, eksisterer ikke. De bestemmende ligninger i model 3 beskriver derfor kun et systems adfærd (dødelighed og vækst) uden at forklare hvilke mekanismer, der bestemmer adfæren.

Med hensyn til pkt. 2: en afgrænsning og simplificering af den problemstilling modellen skal behandle, er dette forhold ens for alle tre modeltyper. Hos alle modeller foretages der abstraktioner fra virkeligheden, det vil sige der foretages nogle valg med hensyn til hvilke randfænomener, modellen henholdsvis skal indrage og se bort fra. F.eks. betragtes jorden som homogen (faktisk er der jo "ujævnheder") ved satellitberegninger, grundvandsreservoirer tillægges en bestemt form (cirkulært eller aflangt), og der abstraheres fra grundvandets acceleration ved sænkingsberegninger. For ørredam-modellens vedkommende antages en række sammenhænge, der naturligvis indebærer, at andre sammenhænge udelades.

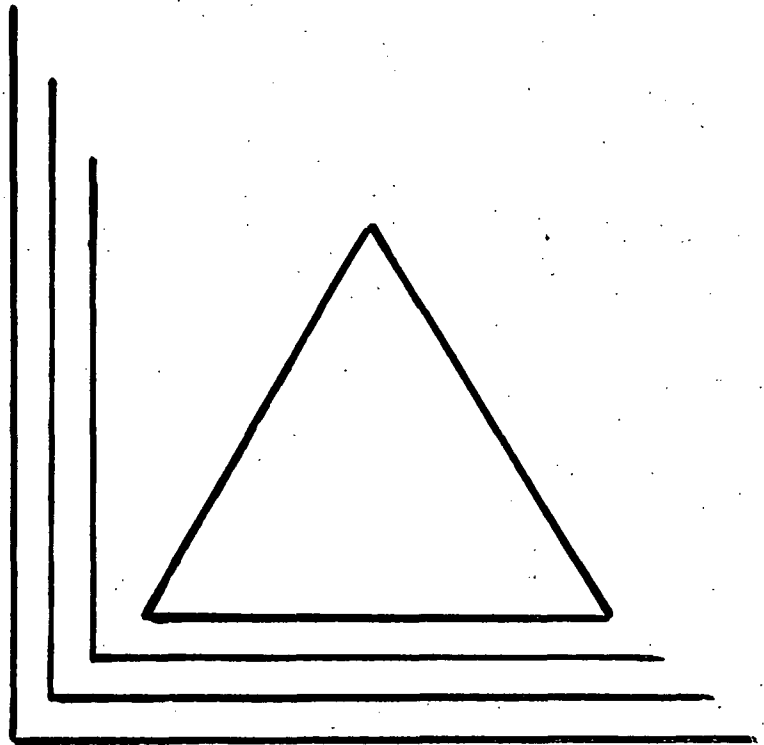
En afgrænsning af problemstillingen er nødvendig for modeldannelse. Denne gør ikke en teoretisk-mekanisk model mindre teoretisk holdbar. Tværtimod kan randfænomenernes betydning for modellens resultater vurderes, såfremt modellen har et teoriunivers at støtte sig til. Samme mulighed eksis-

terer ikke for en black-box model, idet de enkelte objekters og systemers indflydelse på problemløsningen ikke kan vurderes på samme måde, som hos en teoretisk-mekanisk model.

Kort kan vi derfor konkludere, at en models placering i et teoriunivers indebærer, at valget af modellens objekter, systemer og mekanismer samt problemstillingens afgrænsning og simplificering kan vurderes i forhold til hinanden.

# KAPITEL 4

## KONKLUSION



#### 4 KONKLUSION

Vi har i problemformuleringen opstillet som opgave: ".. at klarlægge hvad matematiske modeller er - både abstrakt og konkret." Besvarelsen af denne opgave ligger i rapporten i form af kapitlerne 2 og 3 - og vi agter at lade de to kapitler stå som en sådan.

Vi fremkommer med henblik på sammenligningen af de tre af os udvalgte matematiske modeller med et værktøj til kvalitetsvurdering af matematiske modeller generelt. Resultatet af vores sammenlignende evaluering af de tre modeller kan rummes i følgende to punkter:

Vi får:

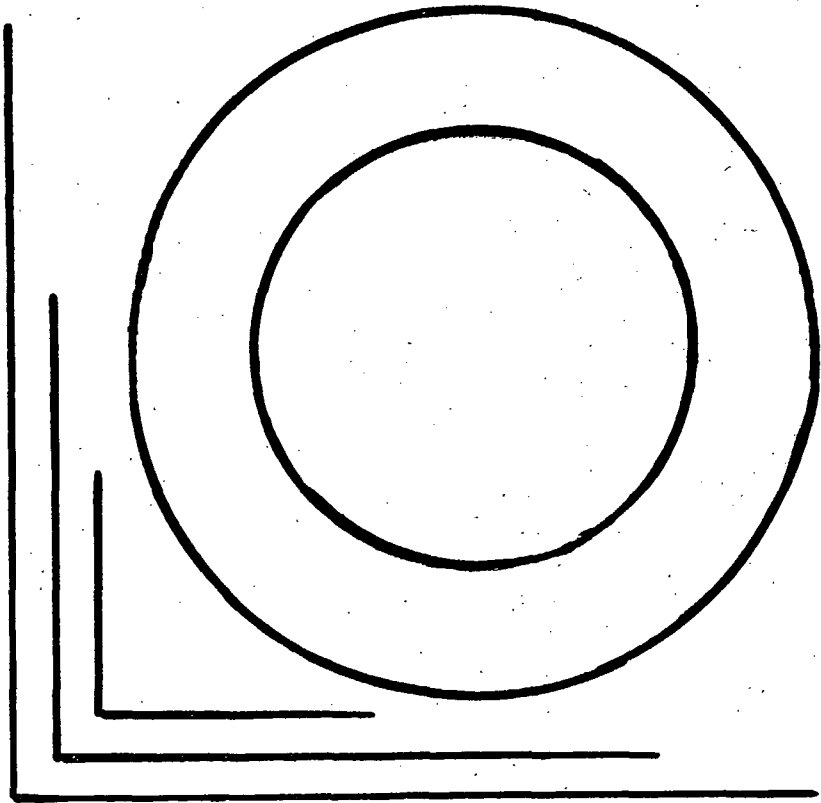
- 1) at matematiske modeller **bredt set kan sammenblendes** til en uadskillelig masse. Særligt let vil dette hænde for ikke-fagfolk. Og dette påtrods af 2.
- 2) at matematiske modeller generelt er kvalitetsforskellige - i særdeleshed med hensyn til deres teoretiske grundlag og afprøvningsmuligheder.

Af 1 og 2 konkluderer vi, at kvalitetsforskellige matematiske modeller p.g.a. uigennemskuelig lighed indbyrdes vil kunne legitimere hinanden på et falsk grundlag.

For de modeller, vi har kaldt teoretiske, gælder der, at deres brugbarhed kan vurderes ved hjælp af den teori, de er udledt af. For de modeller, vi har kaldt fænomenologiske, kan en sådan vurdering ikke lade sig gøre. De kan alene vurderes ved afprøvning på praktiske situationer af samme slags, som dem, de skal anvendes på. Der er derfor grund til at være meget skeptisk overfor noget som verdensmodeller, A-kraftsikkerhedsmodeller o.lign., da de ikke er teoretiske og da en praktisk afprøvning ikke kan lade sig gøre eller for A-kraftsikkerhedsmodellernes vedkommende kun kan lade sig gøre gennem en mængde A-kraftuheld, som ikke er acceptable, og som det er modellens postulerende formål at medvirke til at undgå.

**BILAG A**

**HIMMELMEKANIK**





HIMMELMEKANIK

Omkring senmiddelalderen (år 1500) begyndte der at opstå nye tanker, omkring forholdet mellem stat og kirke. Denne udvikling forløb parallelt med opbygningen af et nyt verdensbillede.

Indtil da havde verdensbilledet haft jorden som centrum. Copernicus (1473-1543) fremsatte som en af de første, en teori med solen som det hvilende centrum. (Arestarkos fremsatte allerede i det 3. århundrede sådan en teori, men denne måtte vige på grund af ontologien). Copernicus indsats var hovedsagelig en nyfortokling af allerede eksisterende empiriske data. Dette nye system medførte, at en del fænomener kunne forklares på en ny måde. Døgnbevægelsen forklares ved, at planeterne roterer en gang om sin egen akse. De andre bevægelser stammer fra, at planeterne kredser om solen.

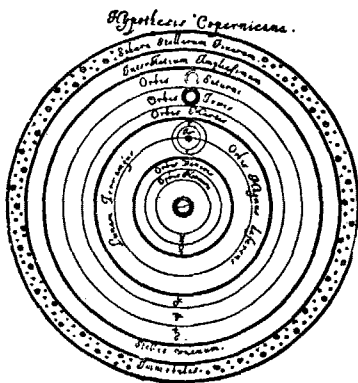


Fig. 1 Det Copernicanske verdensbillede med solen som centrum.

Det Copernicanske system havde imidlertid også en række mangler, idet det ikke kunne forklare bl.a. følgende for-

hold;

- Hvis jorden bevæger sig med stor fart omkring solen, hvordan kan det så være, at vi ikke mærker det og hvorfor falder legemer lige ned (Et argument man brugte, for at jorden stod stille).
- Hvorfor viser fixstjernerne ingen parallaxe, som følge af jordens bevægelse.

Copernicus antog at der var parallaxe, men at den grundet stjernernes store afstande, blot var umulig at måle. Denne forklaring virkede ikke overbevisende på Tycho Brahe (1546-1601).

- Hvis stjerneparallaxe manglede, så må, kunne Brahe vise, afstanden solen-stjerner være mindst 700 gange afstanden solen-saturn, Hvilket ville betyde, at der mellem den yderste planet og stjernerne var et umådeligt tomt rum helt uden himmellegemer. Men det var for Brahe utænkkelig, at Gud ville ødsle sådan med pladsen i sin rationelt skabte verden, et sådant billede ville ikke blot reducere solen og jorden til petitesser i universet, men det uhyre tomrum ville i sin overflodighed være uværdigt og uforståeligt for skaberen.
- /DR's hæfte side 26/

Tycho Brahe afviste de hidtidige systemer og konstruerede i stedet sit eget. Jorden befinder sig hvilende i universets centrum og omkring den kredser månen og solen, mens planeterne kredser cirkulært om solen.

Tycho Brahe forøgede og forbedrede måleresultaterne for himmellegemerne radikalt, gennem en lang række af observationer.

- + Parallaxe: Vinklen mellem to sigtelinier til samme fixstjerne. En fixstjernes årlige parallaxe er den vinkel, jordbanens radius har, hvis den blev set fra jorden.

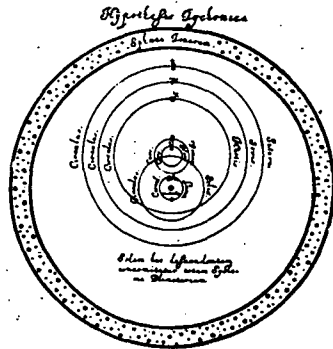


Fig. 2 Det Tychoniske verdensbillede med jorden som hvilende centrum omkring hvilken solen og månen kredser, planeterne kredser om solen.

Tycho Brahes efterfølger blev Johannes Kepler (1571-1630), som derved arvede den største og nøjagtigste samling planetobservationer (især af Mars), man på dette tidspunkt kendte.

Keplers naturfilosofi var;

- "...at vise, at den himmelske maskine ikke er en slags guddommelig, livagtig skabning, men er en slags urværk (og den som tror, at et ur har en sjæl, han tilskriver urmageren æren for værket), for så vidt at næsten alle de mangfoldige bevægelser er forårsaget af en særdeles enkel magnetisk og materiel kraft, ligesom alle et urs bevægelser er forårsaget af en simpel vægt. Og jeg viser endvidere, hvorledes disse fysiske årsager kan tilskrives numeriske og geometriske udtryk." /DR's hæfte side 28/

Kepler tog som udgangspunkt for sine himmelberegninger det Copernicanske system. Hans grund til at fastholde dette system synes at have været den centrale rolle han umid-

delbart tillage solen, som universets motor og Guds bolig.

Keplers største indsats (man siger, at han regnede på det i en 30 års tid) var hans beregninger af Mars'bane ud fra Tycho Brahes observationer. Han konkluderede, de såkaldte 1. og 2. Keplerske love, som fremkom i året 1609.

- 1.lov: Planeterne bevæger sig på ellipser med solen placeret i det ene brændpunkt.
- 2.lov: Hvis planeten bevæger sig i tidsrummet,  $\Delta t$ , vil det beskrivne areal altid være det samme uanset hvor i banen planeten befinder sig.

Udledning af Keplers 2.lov. (arealoven)

(Historisk blev Keplers love udledt i rækkefølgen 2,1,3)

Keplers problem var i første omgang, at bestemme Mars cirkulære banekurve, dens centrum og eventuelle excentricitet, d.v.s. solens placering uden for banekurvens midtpunkt.

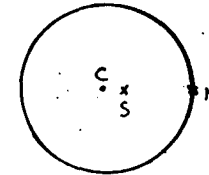


Fig. 3 Excentricitet. Den afstand solen ligger forskudt fra centrum.

Efter at han havde bestemt jord og Mars banerne (se tillæg), samt forkastet det gamle dogme, at planeterne bevæger sig jævnt i deres cirkel, analyserede Kepler variationerne i Mars'banehastighed.

Han konstaterede ved iagttagelse, at til den tid,  $\delta t$ , hvor planeten tilbagelægger en lille del af banen,  $\delta s$ , er proportional med afstanden til solen,  $r$ ;

$$\delta t = c \cdot r \quad , \text{hvor } c = \text{konstant.}$$

Derved fås for hastigheden  $v$ ;

$$v = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\delta s}{c \cdot r}$$

$$v r = \frac{\delta s}{c} = \text{konstant}$$

$$v r = \text{konstant.}$$

som var den første version af Keplers 2.lov, Afstandsloven.

Til Udledning af den endelige 2.lov, antager Kepler, at solens feltstyrke, d.v.s. den kraft solen påvirker andre legemer med, er proportional med  $r^{-n}$ , hvor  $r$  er afstanden fra solen til legemet.

Hvis kraften udstråler i rum, er  $n = 2$ , og hvis kraften udstråler i plan, er  $n = 1$ .

Feltstyrken er altså;

$$F \sim r^{-n}, \text{ hvor } n=1 \text{ eller } 2.$$

Kraften er ifølge Aristotelæsk dynamik;

$$F = m \cdot v$$

(Dette har Newton senere vist er forkert:  $F=m \cdot a$ )

Derved fås;

$$m \cdot v = k \cdot r^{-n}, \text{ hvor } k = \text{proportional konstant}$$

$$v \cdot r^n = k/m = \text{konstant}$$

Da  $r$  og  $v$  er omvendt proportionale, fra afstandsloven, er der overensstemmelse, hvis

$$n = 1$$

Det er nok lidt af en overraskelse, at Kepler nåede frem til, at solkraften kun udbreder sig i planet.

Det var ikke muligt, at beregne en planets position efter et længere tidsrum,  $\Delta t$ , ved afstandsloven, da integralregning ikke var kendt på dette tidspunkt. Kepler opfattede denne størrelse som udtrykt ved en sum over alle radierne,  $\sum r_i$ , og gættede på, at denne sum i det mindste tilnærmelsesvis var givet ved det i  $\Delta t$  overstrøgne areal;

$$\Delta t = \text{konstant} \cdot \Delta A$$

Keplers 2.lov, arealloven.

Kepler når frem til en korrekt lov, på grundlag af nogle forkerte antagelser.



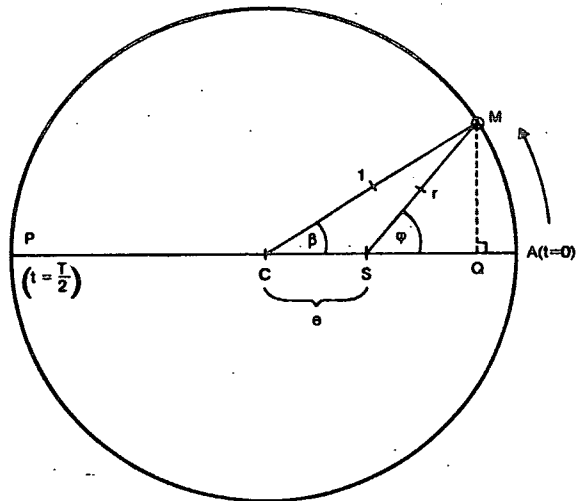
$$\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \cdot \Delta \alpha$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \dot{\alpha} = \text{konstant.}$$

Fig. 4 Beregning af arealloven ved vektorregning.

Udregning af Keplers 1.lov.

Ud fra arealloven ville Kepler finde Mars afstand og retning fra solen til et givet tidspunkt. Ved denne beregning tog Kepler udgangspunkt i rent cirkulære baner.



- $\beta$  = excentrisk anomali
- $\phi$  = sand anomali
- M = Mars (eller anden planet)
- S = Solen
- C = cirkelns geometriske centrum
- e = excentricitet =  $\frac{CS}{CA}$

Fig. 5 Udledning af Keplers 1.lov sker på rent geometrisk vis.

Udledningen af den 1.lov sker på rent geometrisk vis.

1) A(ASM) = A(ACM) - A(SCM)

2) A(ASM) = 1/2 beta - 1/2 e sin beta

Mellenregning fra 1) til 2);

A(ACM);

Definition på radian:



beta=1 hvis r=1

beta=1/r

A(beta) = (beta/2pi) \* pi \* r^2 = 1/2 \* beta \* r^2, hvor cirkelens areal = pi \* r^2, og CM = r = 1.

A(ACM) = 1/2 beta

A(SCM);

Pr. definition er; A(SCM) = 1/2 |CM|CS| sin beta = 1/2 \* 1 \* e sin beta

A(SCM) = 1/2 \* e sin beta

Ifølge Keplers 2.lov, er A(ASM) et mål for tiden fra A til M, se figur 5. Derved kan vi få;

3) (1/2 \* (beta - e sin beta)) / t = (pi \* r^2) / T

4) t = (T / pi) \* 1/2 \* (beta - e sin beta)

For at finde afstanden, r=r(t), og retningen, phi=phi(t), fra solen til Mars, anvendes først cos-relationen på 4CMS;

(afstand): r = sqrt(1 + e^2 - 2e cos beta)

phi(t) bestemmes ved hjælp af CM's projektion på AP, idet QS=CQ-SC eller

r cos phi = cos beta - e

(retning): cos phi = (cos beta - e) / r

For et givet t kan beta = beta(t) bestemmes fra 4) og indsættes i

afstands- og retningsformlen, og derved er r og phi bestemt.

Kepler beregnede, ud fra denne procedure, Mars bane igen. Han fandt herved en afvigelse på ca. 8' fra Tycho Brahes data. For beta = 45 degrees blev den beregnede phi 8' større, end den skulle være, og for beta = 135 degrees blev den 8' for lille. Disse afvigelser var mere, end Kepler kunne tolerere: Årsagen måtte være, enten at metoden, d.v.s. arealoven, var forkert, eller at antagelsen om den cirkulære bane ikke kunne holde. Hvis det var det sidstnævnte, måtte Marsbanen befinde sig inden for cirklen. Kepler måtte nu, om end modstræbende, konkludere; (1.lov):

"...at planetens bane ikke er en cirkel - den buer indad på begge sider og udad igen ved dens modsatte ender. En sådan kurve kaldes en oval. Banen er ikke en cirkel, men en oval figur". /DR's hæfte side 38-39/

Udledning af Keplers 3.lov.

- 3.lov: Kvadraterne på planeternes omløbstider forholder sig som tredje potens af deres middelfstand fra solen

Konstant = A^3 / T^2, hvor A = middelfstand, T = omløbstiden.

Kepler fremkom med sin 3.lov i året 1619, efter endeløse forsøg på at finde det harmoniske i dataene.

I det følgende udleder vi Keplers 3.lov ved hjælp af Newtons mekanik - de to bevægelseslove og loven om universel massetiltrækning.

De universelle bevægelseslove.

- Så længe et legeme ikke påvirkes af kræfter udefra, vil det forblive i den tilstand, i hvilket det er, hvile eller en jævn retliniet bevægelse.
- Ændringer i bevægelsen er proportional med den be-

vægende kraft, der påvirker legemet, den sker i retning af den rette linie, langs hvilken kraften virker

Disse to love kan sammenfattes til; (Newtons 2.lov)

$$K = m \cdot a \quad , \text{ hvor } K = \text{den påvirkende kraft,} \\ A = \text{accelerationen og } m = \text{masse.}$$

Den universelle massetiltrækningslov. (Gravitationsloven)

- Mellem to masser,  $m_1$  og  $m_2$ , der befinder sig i afstanden  $r$  mellem hinanden, er tiltrækningskraft,  $K$ , gravitationen, der er ligefrem proportional med  $m_1$  og  $m_2$  og omvendt proportional med  $r^2$ .

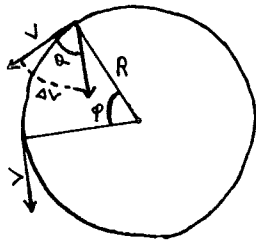
$$K = \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot G$$

Ved en jævn cirkelbevægelse ved vi, at accelerationen rettet mod centrum er givet ved;

$$1) \quad A = v^2/R ,$$

hvor  $v$ =farten i cirkelbevægelsen,  $R$ =cirkelradius.

Mellemregning til udledning af 1)



$$\text{der gælder; } \varphi = \frac{v \cdot \Delta t}{R}$$

$$\text{og } \Delta v = v \cdot \varphi$$

derved kan dannes;

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \cdot \varphi}{\Delta t} = \frac{v \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t \cdot R} = \frac{v^2}{R}$$

$$A = v^2/R$$

Fig. 6 Udledning af  $A = v^2/R$ .

Indsættes 1) i Newtons 2.lov;

$$2) \quad K = m A = m \frac{v^2}{R}$$

Den kraft der forårsager planeternes bevægelse, er massetiltrækningskraften fra solen. Denne er givet ved gravitationsloven, hvor  $m_1$  er solens masse. Vi kan derved få;

$$3) \quad \frac{m_1 m_2}{R^2} \cdot G = m_1 \frac{v^2}{R}$$

I løbet af omløbstiden,  $T$ , bevæger planeten sig rundt langs omkredsen  $2\pi R$ . Sammenhængen mellem  $v$  og  $T$  kan derved udtrykkes som;

$$4) \quad v = \frac{2\pi R}{T}$$

Indsættes 4) i 3) fås;

$$5) \quad G \frac{m_1 m_2}{R^2} = m_1 \frac{1}{R} \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2$$

$$6) \quad G \frac{m_1}{R^2} = \frac{1}{R} \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$7) \quad \frac{G m_2}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2}$$

Vi er således nået frem til Keplers 3.lov ud fra Newtons mekanik.

At udregne Keplers 1. og 2.lov på grundlag af Newtons mekanik vil være ret omfattende, hvorfor vi her kun vil vise sammenhængen mellem himlens og jordens fysik.

Der kan bevises, at der eksisterer en tiltrækningskraft mellem et lille legeme og et stort, som var det store legemes masse koncentreret i centrum.

Tiltrækningen af et lille legeme ved jordoverfladen er;

$$8) \quad K = G \frac{m M}{R_J^2}$$

$$9) \quad \frac{K}{m} = \frac{G M}{R_J^2} ,$$

hvor  $M$ =jordens masse,  $R_j$ =jordens radius.

Den acceleration legemet vil være udsat for ved et frit fald, tyngdeaccelerationen  $g$ , kan udtrykkes ved;

$$10) K = m \cdot A$$

$$11) K/m = A$$

11) og 9) kan sammenfattes til;

$$12) A = \frac{K}{m} = \frac{G M}{R_j^2} = g$$

Ved omskrivning af Keplers 3.lov, fås et udtryk for månens bevægelse om jorden.

$$13) \frac{G M}{4 \pi^2} = \frac{R^3}{T^2}$$

$$14) G M = 4 \pi^2 \frac{R^3}{T^2}$$

Indsættes 14) i 12) fås endelig et udtryk, hvor tyngdeaccelerationen er udregnet fra himmelmeknikken;

$$g = \frac{4 \pi^2 R^3}{T^2 R_j^2}$$

Ved indsættelse af de kendte værdier;  $R/R_j=60$ , hvor  $R$ =afstanden fra jorden til månen,  $R_j=6400$  km.,  $T=28$  dage, fås;

$$g = 9,9 \text{ m/sek}^2$$

Dette er i god overensstemmelse med de erfaringer man har fra faldforsøg.

Tingene stemmer overens. Massetiltrækningsloven og de almene bevægelseslove sætter os i stand til at forklare de jordiske bevægelser ud fra iagttagelser af de himmelske.

/Jens' manuskript side 27-34/.

TILLÆG: beregningen af jord og Mars banen.

Jordbanens form blev undersøgt ved en geometrisk metode.

Lad os forestille os, at vi iagttager jorden fra Mars med et mellemrum af 1,88 år, d.v.s. Mars omløbstid omkring. Iagttageren befinder sig således samme sted i banen.

Afstanden fra solen til Mars må være konstant. Vinklerne  $v$  og  $u$  (se figur 7) kan findes ved observationer af solen og Mars (afstanden mellem to stjernebilleder.  $x$  kan da beregnes ( $180-v-u=x$ ). Derved kan afstanden solen-jorden findes;

$$\frac{s}{\sin v} = \frac{j}{\sin u} = \frac{m}{\sin x}$$

Ud fra mindst tre værdier  $SJ$  og  $v$  kan jordcirklen konstrueres og excentriciteten bestemmes.

Kepler bestemte excentriciteten til at være 0,018. (d.v.s. at solen var ca 2% af jordradiusen forskudt fra centrum).

Ud fra jordbanen kunne han nu bestemme Marsbanen. Når  $J_1$  og  $J_2$  kendes kan  $M$  bestemmes, idet  $J_1M$  og  $J_2M$  kendes fra trekanten  $SJM$ .

Ved at lave tilsvarende bestemmelser af  $M, M', M'' \dots$  kan Marsbanen konstrueres.

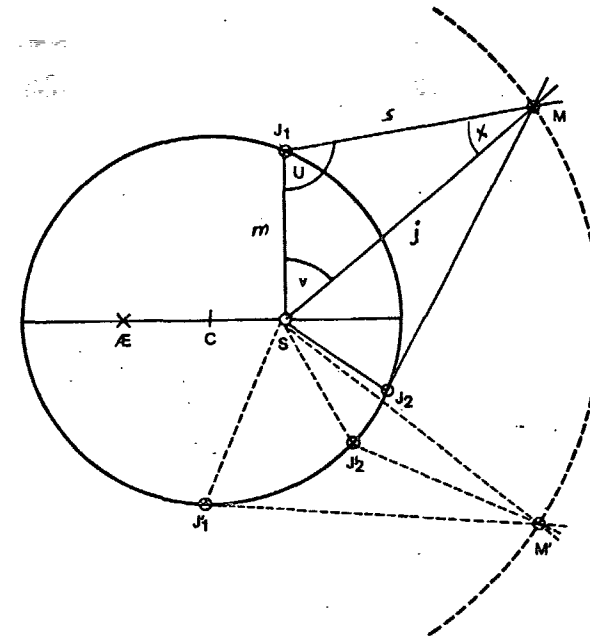
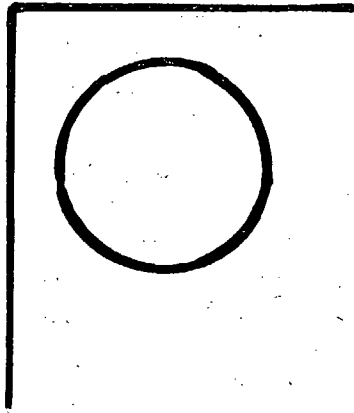
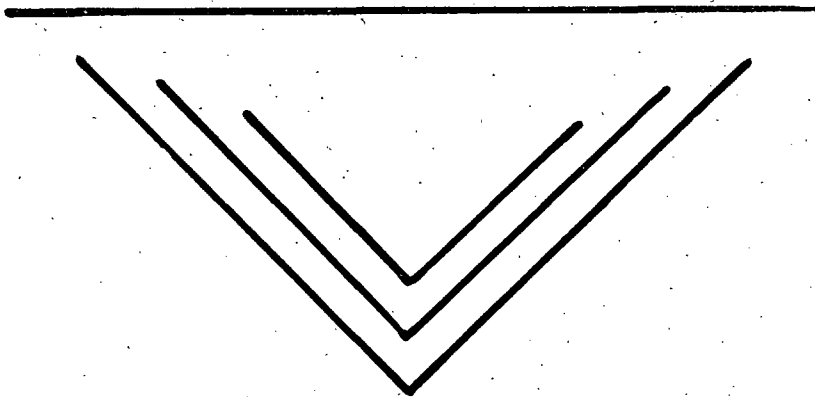


Fig. 7 Keplers bestemmelse af jordens og Mars baner.



**BILAG B**

**HYDROLOGI**





PROBLEMSTILLINGEN OMKRING DE HYDROLOGISKE MODELLER

I Danmark baseres vandforsyningen næsten udelukkende på forekomsten af grundvand og kun i mindre omfang på overfladevand.

Årligt dannes omkring 4700 mill m<sup>3</sup> grundvand, der sat i forhold til et samlet forbrug af grund- og overfladevand på 1210 mill m<sup>3</sup>/år (1977) således i teorien ville kunne tilfredsstille en betydelig stigning i vandforbruget.

Udnyttelsen af grundvand er dog betinget af en række naturgivne faktorer som tilstedeværelsen af vandførende lag og vandets kemiske sammensætning. Disse af naturen bestemte forhold er således et produkt af et givet indvindingsområdes geologiske udvikling. En opgørelse af vandressourcen vil derfor til enhver tid være afhængig af den indsats - både økonomisk og teknisk - man er rede til at ofre for at fremskaffe og rense de fornødne mænder vand.

Vandbalancen.

Når man skal opgøre hvor meget vand, der findes i et givet område, opstilles normalt den såkaldte vandbalanceligning, der er en opgørelse over tilgående og fragående vandmængder, samt de deraf følgende eventuelle ændringer i vandmængden i det betragtede grundvandsmagasin. Vandbalanceligningen udtrykker således blot et massebevaringsprincip. Ligningen indeholder følgende elementer:

$$N = E + A_o + A_u + R$$

- hvor N = nedbøren
- E = fordampning
- A<sub>o</sub> = overfladisk afstrømning
- A<sub>u</sub> = underjordisk afstrømning
- og R = ændring af vandmængden i grundvandsmagasinet.

De forskellige led i ligningen fremgår af figur 1, som viser vandets kredsløb i naturen. Ligningen her kan kun anvendes for et bestemt afgrænset område, hvor der ikke foretages kunstige indgreb i kredsløbet, som f.eks. grundvandsindvinding.

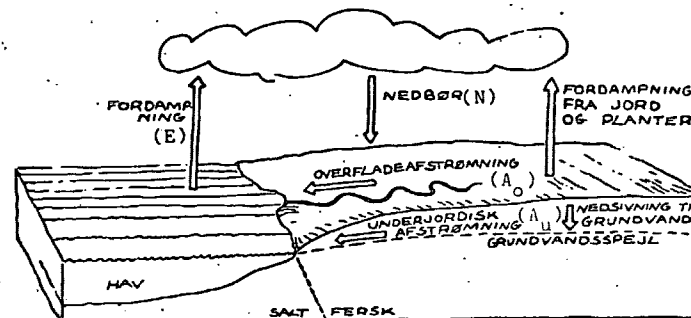


Fig. 1. Det hydrologiske kredsløb i naturen. Nedbør og fordampning er "motoren" og solen er energikilden i vandets kredsløb. Nedsivning og overfladisk afstrømning er bindeled mellem nedbør og fordampning. De atmosfæriske strømninger forskyder store vandmasser over lange afstande.

I naturen bestemmes vandbalancen og dermed grundvandsressourcen inden-for et vandløbssystems topografiske opland. (se fig. 2)

At opstille en total vandbalance for et opland kan være meget vanskeligt, idet de enkelte størrelser i vandbalanceligningen er problematiske at bestemme og kræver lange dataserier.

Indvindingen af grundvand i et givet opland vil påvirke vandbalancen ved, at der til de naturgivne led kommer det kunstige Q, der udtrykker oppumpningen. Herefter får vandbalanceligningen følgende udseende:

$$N = E + A_o + A_u + R + Q$$

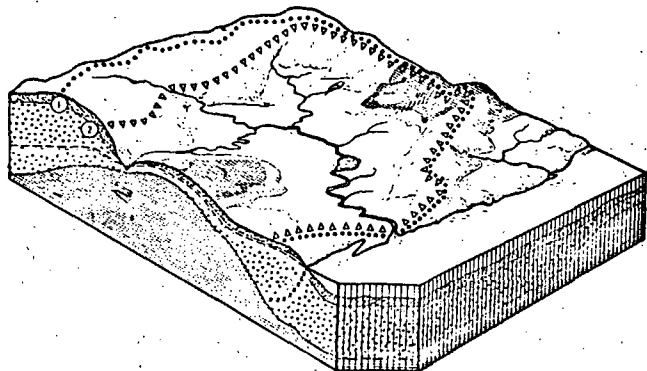


Fig. 2. Det topografiske opland er det område, hvor al nedbør ad overfladen strømmer ned mod vandløbssystemet, mrk. 1. Grundvandsoplandet 2 er derimod det område, hvor grundvandet strømmer mod vandløbssystemet. Bemærk, at de to oplande nødvendigvis ikke behøver at falde sammen.

Sænkningstragte.

Når en indvinding af grundvand starter, vil der på grund af oppumpningen forsvinde noget vand fra undergrunden, hvorved grundvandspejlet/trykniveauet bliver sænket. Denne sænkning har ideelt set form som en tragt (fig. 3).

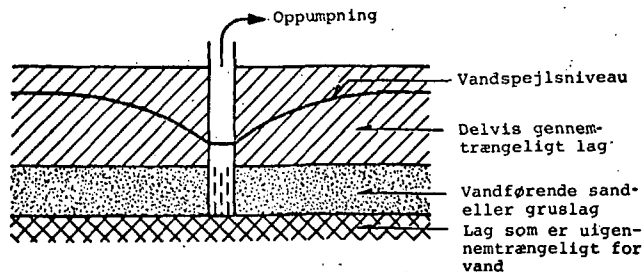


Fig. 3. Figuren viser en skitseret sænkningstragt.

Der forekommer to reservoirtyper: grundvandsreservoirer med frit vandspejl og artesiske grundvandsreservoirer.

Frit vandspejl

Ved grundvandsreservoirer med frit vandspejl forstås grundvandsreservoirer, hvor den mættede zone er under atmosfærisk tryk, og den overflade, hvor væsketrykket er lig atmosfærens, defineret som grundvandspejlet.

Artesisk vandspejl

Ved artesiske grundvandsreservoirer forstås reservoirer, i hvilke vandet står under tryk fra impermeable eller svagt permeable dæklag. Vandstanden i en artesiske boring vil indstille sig over underkanten af dæklaget. Denne grundvandsstand kaldes grundvandets trykniveau.

Umiddelbart efter oppumpningens start er det vandmagasinet i selve borehullet, der udnyttes. Oppumpningen bevirker et trykfald ned gennem boringen og ud i de nærmeste dele af det vandførende lag. Trykfaldet medfører en frigørelse af vand, som strømmer mod boringen. Efter kort tids pumpning vil der være etableret en sænkningstragt i det vandførende lag omkring boringen.

En sænkningstragt kan have en udbredelse på 16-20 km. i diameter, alt afhængig af jordlagenes sammensætning, og om grundvandet står under tryk eller ikke.

Efter længere tids pumpning kan sænkningstragten få en sådan udbredelse og dybde, at grundvandspejlet/trykniveauet kommer til at ligge væsentligt under det oprindelige niveau. Dette betyder ofte, at en eventuel grundvandsudsivning til kilder, vandløb, søer og vådbundsområder kan blive væsentligt begrænset eller helt ophøre. Eftersom hovedparten af grundvandet normalt strømmer mod vandløb og søer, vil der således ved større indvindinger opstå bivirkninger i form af periodevis tørlægning af vandløb,

mindre søer og vådbundsområder (og brønde) samt periodevis tiltagende forurening af samme. Grundvandsindvindinger får ofte til følge, at forholdet mellem den underjordiske afstrømning og den overfladiske ( $A_u$  og  $A_0$ ) forrykkes.

På længere sigt skal der efter en påbegyndt vandindvinding dog indtræde stabile tilstande, hvor grundvandsspejlet/trykniveauet er stabilt. I modsat fald tømmes indvindingsmagasinet. Derfor kan der maksimalt indvindes en vandmængde svarende til den vandtilførsel, der finder sted gennem lækager (indsivning af vand fra andre grundvandsforekomster) og ned-sivning af overfladevand. Et hovedproblem er derfor at beregne udbredelsen og dybden af sænkningstragten. Herved kan det nemlig forudses om grundvandets trykniveau fortsat vil falde, eller med andre ord om grundvandsmagasinet tømmes. Ligeledes vil det kunne vurderes (dog i sammenhæng med en række andre undersøgelser), hvorvidt vandindvindingen får følgevirkninger for diverse våde biotoper.

BEREGNING AF SÆNKNINGSTRAGTE.

Ved beregninger af sænkningstragte benyttes en række love (regler) fra hydrodynamikken - læren om væskers bevægelse.

Grundvand er således en væske, der er under stadig bevægelse gennem til tider meget komplicerede geologiske formationer. De geologiske formationer har ofte en sådan sammensat natur, at der kun vanskeligt kan tegnes et entydigt billede af grundvandets veje gennem undergrunden.

Grundvandets bevægelse bestemmes først og fremmest af jordlagernes permeabilitet og porestørrelse. Det er jordens porer, der udfører den dobbelte funktion at være både transportsystem og magasin for vandet i jorden. Porene danner i de fleste danske jorde et uregelmæssigt net af små og store gange og hulrum. De jorde, som således i vandforsyningsøjemed er fordelagtige, skal have en grovkornet og porøs struktur - f.eks. grus og sand. Er grundvandzonen derimod opbygget af finkornede lag som ler, vil grundvandsbevægelsen være så langsom, at vandindvinding ikke er mulig. I praksis betegnes ler som vandstandsende, omend der foregår en meget langsom strømning. (se tabel 1.)

Jordart	Filterhastighed
Groft sand	10 m pr. døgn
Lerblandet sand	10 cm pr. døgn
Sandblandet ler	1 cm pr. døgn
Ler	2-0 mm pr. døgn

Tabel 1. Gennemstrømningshastigheden for vand ved strømning i forskellige jordarter. Det kan ses, at gennemstrømningen gennem groft sand er stor, hvorimod vandets bevægelse i ler er praktisk talt nul./1, s 18/

Grundvandets bevægelse i jordens net af porer er som nævnt et kompliceret foretagende, der kun kan overskues i grove træk. Undergrunden er på intet sted opbygget homogent, hvorved undergrundens geologi, jordlagernes mægtighed, placering og udbredelse kun vanskeligt kan klarlægges nøje.

Det er derfor ikke muligt at redegøre for grundvandets bevægelse i alle dets detaljer. Man må nøjes med, at erkende nogle generelle træk ved grundvandets bevægelse gennem forskellige geologiske formationer.

To grundlæggende ligninger

Enhver beregning af grundvandsbevægelser, herunder også beregninger af sænkningstragte, bygger på to grundlæggende ligninger - nemlig en

bevægelsesligning og en  
kontinuitetsligning

Bevægelsesligningen

Bevægelsesligningen udtaler sig om, hvordan vandet rent fysisk bevæger sig efter ganske bestemte lovmæssigheder. Selvom grundvandet bevæger sig i et net af hulrum og gange, kan grundvandet betragtes som et samlet system, hvorpå der kan udføres nogle fysiske overvejelser og beregninger. Disse overvejelser og beregninger har deres udspring i Newtons 2. lov, der siger at

$$\text{Kraften (F)} = \text{massen (m)} \cdot \text{accelerationen (a)}$$

Når grundvandet bevæger sig langsomt gennem jordlagene udsættes det for to slags kraftpåvirkninger, hvilket er illustreret ved figuren herunder.

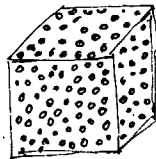


Fig. 4 Figuren viser et lille udsnit af et vandførende lag. To slags kræfter påvirker vandet i kassen: 1) kræfter fra vandtrykket udenfor kassen, hvor  $P(x)=P(x+dx)$  og 2) gnidningskræfter inde i kassen.

Figuren viser et lille udsnit af et vandførende lag. Vandet, som er indeholdt i dette udsnit eller i denne kasse, er for det første påvirket af vandtrykket udenfor kassen. Denne påvirkning giver anledning til en samlet kraft på kassen, der er forskellig fra nul, såfremt trykket varierer. Det vil sige, at  $P(x+dx)=P(x)$ , hvor P er trykket. For det andet påvirkes vandets bevægelse i kassen af gnidningen mod jordpartiklerne.

Eftersom disse to kraftpåvirkninger er bestemmende for grundvandets bevægelse, kan Newtons 2. lov formuleres således:

$$1) \quad \rho \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dx} - G$$

hvor  $\rho$  = vandets massefylde,  $dv/dt$ =vandets acceleration,  $dp/dx$ =trykændring pr. længdeenhed og  $G$ =gnidningskraft pr. volumenhed.

$$2) \quad \rho \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dx} - \gamma v$$

hvor  $\gamma$  er en gnidningskoefficient.

Indsættes for  $p = \rho \cdot g \cdot y$ :  $\frac{dp}{dx} = \rho g \frac{dy}{dx}$  i 2) fås

$$3) \quad \rho \frac{dv}{dt} = \rho g \frac{dy}{dx} - \gamma v$$

som divideret med  $\rho g$  giver

$$4) \quad \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dx} - \frac{\gamma v}{\rho g}$$

sættes  $\frac{\gamma}{\rho g} = \frac{1}{k}$  fås

$$5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{k} v$$

Da  $\frac{dv}{dt}$  kan omskrives til  $\frac{dv}{dt} = \left| \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \right| = \frac{dv}{dx} v$  og dette indsættes i 5) fås følgende udtryk:

$$6) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g} \frac{dv}{dx} v + \frac{1}{k} v$$

Vands strømning gennem forskellige jordtyper har været genstand for mange undersøgelser. Disse undersøgelser har vist, at vandets strømningshastighed på afgørende vis afhænger af jordtypernes kornstørrelse og porøsitet, det vil sige permeabilitetskoefficienten  $k$ . Den hydrauliske gradient (potentialefaldet i strømrretningen) og vandets viskositet, der er en funktion af temperaturen, spiller også ind, men ikke på helt samme dominerende måde som koefficienten  $k$ .

I praksis betyder dette, at leddet

$$\left| \frac{1}{g} \frac{dv}{dx} \right| v,$$

der udtrykker accelerationen i 6), ikke får nogen betydning, idet accelerationen er yderst ringe på grund af de store gnidningskræfter. Smides accelerationsleddet bort, bliver 6) til

$$7) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{k} v$$

$$8) v = k \frac{dy}{dx}$$

Vandstrømmens hastighed  $v$  er således i praksis bestemt af permeabilitetsforholdene i jordlagene vandet passerer - udtrykt ved  $k$  - og potentialeforholdene (grundvands trykforhold)  $\frac{dy}{dx}$ .

Ligning 7) kaldes også Darcy's lov. Denne lov er sandsynliggjort gennem en række eksperimentelle forsøg med vandstrømning gennem sand indlejret i en cylindrisk beholder. (se næste afsnit (eksperimentelt arbejde)). Darcy's lov udgør ba-

sis for adskillige kvantitative metoder til vurdering af grundvandsressourcer og beregning af sænkningstragte. Denne bevægelsesligning er således fælles for alle beregninger af grundvandsstrømme henholdsvis sænkningstragte.

#### Kontinuitetsligningen

Kontinuitetsligningen, der er den anden nødvendige ligning til beregning af sænkningstragte, er et udtryk for massebevarelse. Hermed menes, at der ikke kan forsvinde eller opstå masse, og for stationære vandstrømme vil der heller ikke kunne ophobes masse i området, vi betragter. Til forskel fra bevægelsesligningen, vil kontinuitetsligningen have et varieret udseende, alt afhængig af hvilken type grundvandsreservoir, der er tale om, og om infiltration indgår i ligningen.

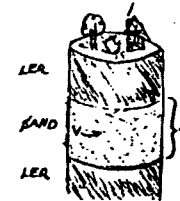
I princippet drejer det sig om fire ideelle typer reservoirer, henholdsvis to hvor grundvandsspejlet er artesisk og to hvor grundvandsspejlet er frit. Ligningerne er konstrueret således, at oppumpningen  $Q$  er lig med den pågældende reservoirtypes kontinuitetsligning UDEN infiltration.

#### Grundvandsstrømning med artesisk vandspejl

For et grundvandsreservoir, hvor grundvandsspejlet er artesisk, gælder det for et cirkulært vandførende lag, at kontinuitetsligningen kan udtrykkes som

$$1) Q = v 2\pi x t$$

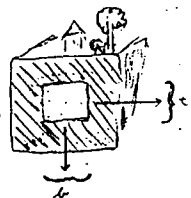
Ligning 1) udtrykker, at den mængde vand der pumpes op pr. tidsenhed,  $Q$ , er lig den mængde vand, der strømmer ind i et område med radius  $x$  og tykkelsen  $t$  omkring indvindingsboringen.



Er det vandførende lag derimod indesluttet af uigennemtrængelige lag - som en "vandåre" - vil der gælde følgende udtryk:

$$2) \quad Q = v b t$$

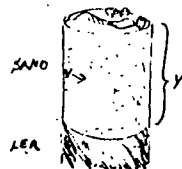
Her er b lig med bredden af "vandåren" og t lig med tykkelsen.



Grundvandsstrømning med frit vandspejl

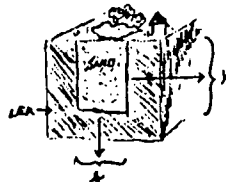
Er grundvandsspejlet ikke artesisk men frit, gælder det for et vandret cirkulært lag, at oppumpningen

$$3) \quad Q = v 2 \pi r y$$



Den fjerde reservoirtype er endelig et vandførende lag beliggende mellem to horisontale uigennemtrængelige geologiske formationer. Således vil oppumpningen Q fra dette reservoir svare til

$$4) \quad Q = v b y$$



Med den reducerede bevægelsesligning og den relevante kontinuitetsligning, kan sänkninger ved vandindvinding beregnes.

EKSPERIMENTELT ARBEJDE: UNDERSØGELSE AF PERMEABILITET.

Formålet med dette eksperiment er, at finde forskellige jordarters permeabilitet. Permeabiliteten er en vigtig faktor ved beregninger af grundvandsbevægelser.

Ved vandindvinding bestræber man sig på at bruge grundvandsreservoir med en så stor permeabilitet som muligt, fordi det derved er nemmere at pumpe vandet op.

En af de vigtige love som bruges ved beregning af grundvandsbevægelser er Darcy's lov:

$$V = k \frac{dp}{dx}$$

Loven udtrykker vandets hastighed V som funktion af permeabiliteten k og trykændringen dp/dx.

Permeabilitetens(k) afhængighed af kornstørrelsen.

Inden det egentlige eksperiment begynder vil vi udlede permeabilitetens afhængighed af jordtyperne rent teoretisk. Permeabiliteten må være bestemt af følgende forhold:

$$k = k(d, \mu, \rho, e)$$

hvor d er kornstørrelsen

$\mu$  er vandets viskositet (sejhed)

$\rho$  er vandets massefylde og

e er en størrelse, som afhænger af kornets form

$$\frac{a}{b} = e$$

Ved hjælp af Darcy's lov kan k's dimension (benævnelse) findes:

$$V = k \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{L}{T} = [k] \frac{M L}{T^2 L^3}$$

([x] betyder dimensionen af x)

$$[k] = \frac{L^3 T}{M}$$

hvor L står for dimensionen længde, M dimensionen masse og

og T dimensionen, tiden.

Permeabiliteten  $k$  må altså afhænge af størrelserne  $d$ ,  $\mu$ ,  $S$ , og  $e$  på en sådan måde, at det samlede udtryk for  $k$  får dimensionen  $\frac{L^3 T}{M}$ .

$k$ 's afhængighed af  $d$ ,  $\mu$ ,  $S$  og  $e$  skrives derfor som

$$k = d^\alpha \mu^\beta S^\gamma f(e)$$

$f(e)$  er et dimensionsløst tal, der afhænger af  $e$ , som er dimensionsløs. Kravet om at højre siden af ligningen skal have dimensionen  $(L^3 T)/M$  fastsætter herefter  $\alpha, \beta, \gamma$  entydigt. Da  $[d] = L$ ,  $[\mu] = M/(TL)$  og  $[S] = M/L^3$  skal gælde at

$$\frac{L^3 T}{M} = L^\alpha \frac{M^\beta}{T^\beta L^\beta} \frac{M^\gamma}{L^3 \gamma}$$

Dette kan lade sig gøre, hvis potenserne på henholdsvis  $T$ ,  $M$ ,  $L$  er de samme på begge sider af ligningen.

$\alpha, \beta$  og  $\gamma$  kan derfor findes ved tre ligninger med tre ukendte.

$$\begin{aligned} (\text{potensen på } T) \quad 1 &= -\beta \\ (\text{potensen på } M) \quad -1 &= \beta + \gamma \\ (\text{potensen på } L) \quad 3 &= \alpha - \beta - 3\gamma \end{aligned}$$

Herefter bestemmes de tre potenser entydigt:  $\beta = -1$ ;  $\gamma = 0$  og  $\alpha = 2$ .

$k$  vil derfor være

$$k = \frac{d^2}{\mu} f(e)$$

I vores forsøg anses vandet for at have den samme viskositet gennem hele forsøget. Kornenes form anses for at være ens. Disse to antagelser betyder at  $f(e)$  og  $\mu$  er konstanter.

Hvis det er tilfældet, at  $k$  er proportional med  $d^2$ , betyder det, at der ved indtegnning af  $k$  som funktion af  $d$  på dobbelt-logaritmisk papir, skal være en lineær sammenhæng med en tilvækst på 2.

$$\log k = 2 \log d + \log\left(\frac{f(e)}{\mu}\right)$$

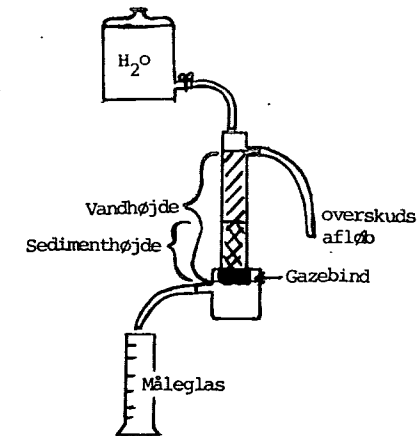
hvor  $f(e)/\mu = A$  er liniens skæring med  $y$  akse.

$$\log k = 2 \log d + \log A$$

Forsøgsudstyr.

Til den egentlige forsøgsopstilling blev brugt en stor vandbeholder med afløb i bunden, 50 cm langt glasrør med diameter på 3,6 cm og afløb i siden, 100 ml måleglas, 500 ml måleglas, glas med afløb i siden, et stykke gazebind, 3 slanger og et stop ur. Udover materialet til forsøgsopstillingen blev brugt en rystemaskine til sortering af sedimentprøverne. Sedimenterne blev sorteret i 5 forskellige størrelser: 2 mm, 1 mm, 0,5 mm, 0,25 mm og 0,125 mm.

Forsøgsopstilling.



En slange leder vand fra den store vandbeholder ned i røret med afløb i siden. I bunden af dette rør er gazebindet anbragt, og fra afløbet i siden er der tilsluttet en slange, der leder det overskydende vand væk. Under gazebinder er anbragt et måleglas med afløb i siden; til afløbet er sat en slange som leder

vandet ned i et måleglas.

Forsøgsvejledning.

Sedimentet (grus og sand) blev først sorteret i rystemaskinen, som ryster prøverne i 10 min. Ved de store kornstørrelser (2 og 1 mm) bliver der sorteret ca. 300 ml, medens der for de øvrige blev anvendt 150 ml.

Herefter bliver hver sedimentprøve hver for sig hældt i røret med afløb, således at sedimentprøven ligger ovenpå gazebindet. Der åbnes nu for vandet, som strømmer ned gennem sedimentprøven. Inden den egentlige måling foretages, skal vandsøjlen, som dannes over prøven, indstille sig i en bestemt højde fra sedimentprøven op til overløbet. Samtidigt skal glasset under gazebindet være fyldt så meget, at der kommer en stadig strøm af vand ud gennem glassets overløb. Under overløbet er anbragt et måleglas (for de små kornstørrelser 100 ml og de store 500 ml). Når vandet strømmer gennem sedimentet skal ventes ca. 2 min før den første tidsmåling foretages. Tiden, der måles, er den tid, som det tager for 100 ml henholdsvis 500 ml vand at strøme gennem sedimentet. Udover tiden skal højden af sedimentet måles og højden af vandsøjlen (vandsøjleens højde måles fra bunden af glasrøret og op til afløbsrøret).

For at kunne bedømme usikkerheden målfes tiden 5 gange.

Grunden til at der for de store sedimentkorn er brugt 300 ml sediment og at der tages tid på gennemsivning af 500 ml vand, skyldes at vandet strømmer meget hurtigt gennem disse sedimentprøver.

Resultater. Skema 1.

Sedimentstørrelse i mm.	Vandmængde i ml.	Sedimenthøjde i cm.	Vandhøjde af rør i cm.	Radius af rør i cm	Tid i sek.				
					1	2	3	4	5
0,125	100	13,7	41,7	1,9	145,8	148,7	151,4	154,6	155,7
0,250	100	13,5	41,7	1,9	70,8	79,9	76,0	76,4	75,7
0,500	100	13,3	41,7	1,9	27,5	27,1	30,1	29,1	29,5
1,000	500	24,5	41,7	1,9	65,5	64,8	65,5	65,7	65,5
2,000	500	24,4	41,7	1,9	27,0	26,8	27,0	27,0	27,0

Ud fra flg. formel er det muligt at beregne permeabiliteten:

$$k = \frac{\text{vandmængde} \cdot \text{sedimenthøjde}}{\text{vandhøjde} \cdot \text{tid} \cdot \text{areal af rør}}$$

k får en benævnelse på cm<sup>3</sup>/cm<sup>2</sup>/sekund, hvilket betyder, at k er en værdi, der udtrykker mængden af vand, som strømmer gennem en arealenhed pr. tidsenhed.

Ud fra oplysningerne i skema 1. bliver permeabiliteten som anført i skema 2.

Skema 2.

Sedimentstørrelse i mm.	permeabiliteten for tid					Gennemsnit
	1	2	3	4	5	
0,125	0,021	0,021	0,021	0,020	0,020	0,0206
0,250	0,044	0,039	0,041	0,041	0,041	0,0412
0,500	0,114	0,116	0,104	0,108	0,106	0,1096
1,000	0,442	0,446	0,442	0,440	0,442	0,4424
2,000	1,067	1,077	1,067	1,067	1,067	1,069



### Behandling af resultater.

Af skema 2 fremgår tydeligt, at permeabiliteten afhænger af kornstørrelsen, således har den største kornstørrelse på 2 mm også den største permeabilitet, medens prøven på 0,125 mm den mindste permeabilitet.

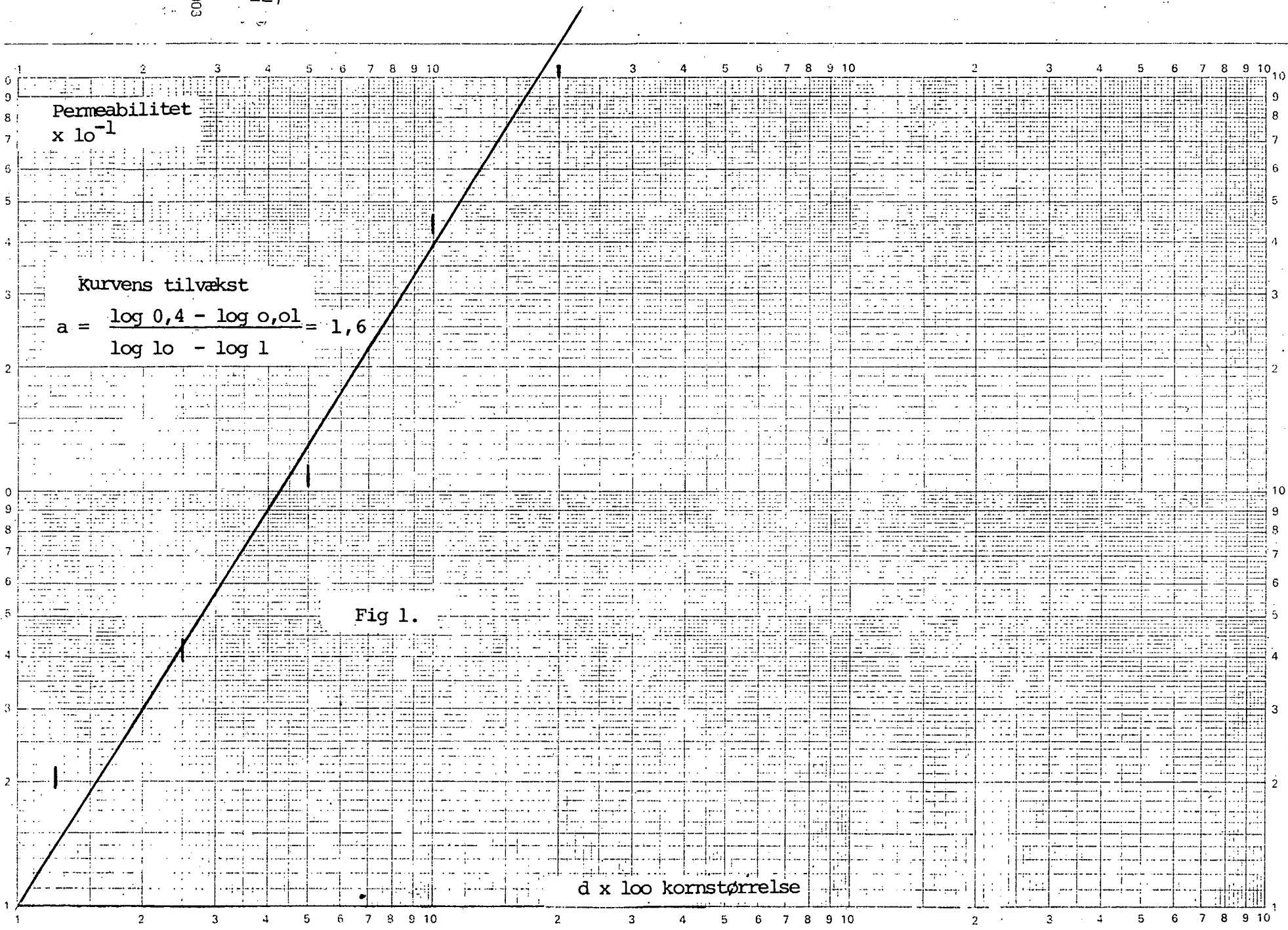
Ved indtegnning af permeabiliteten som funktion af kornstørrelsen på et dobbeltlogaritmeblad vil man kunne konstatere om der er overensstemmelse mellem forsøgsresultater og den teoretiske formel for  $k$ .

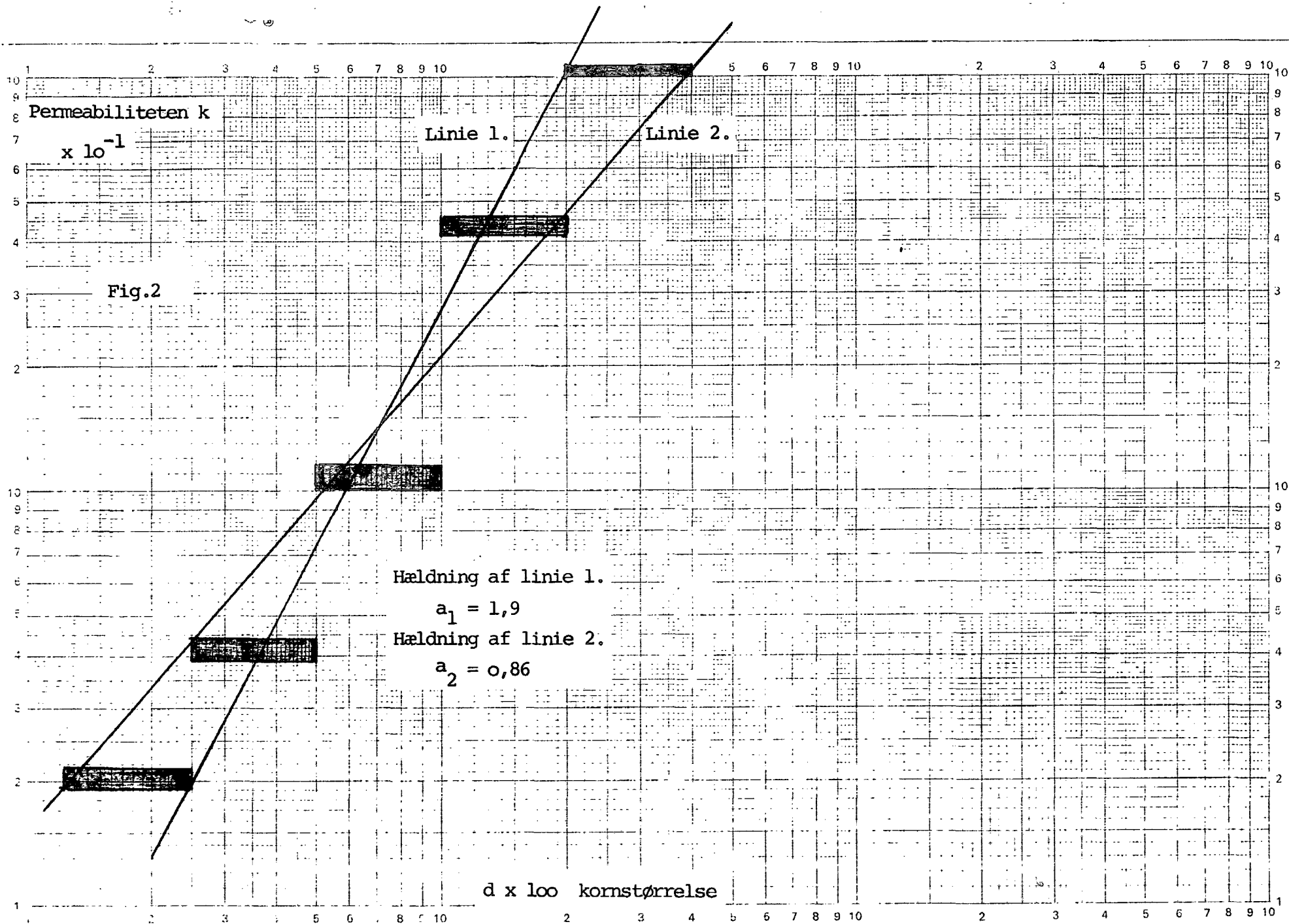
Det ses, at der kan konstrueres en linie mellem de 5 punkter på figur 1. Hældningen på linien svarer til potensen af korndiameteren  $d$ , som ifølge teorien skal være 2. Hældningen på den bedste linie er 1,6. Afvigelsen fra vores teoretisk udledte værdi er stor. En af fejlkilderne er sandsynligvis at kornstørrelserne ikke har været sorteret godt nok. Denne sortering har ikke været mulig af tekniske grunde, da der kun fandtes sietilrystemaskinen i de størrelser, som vi brugte. Kornstørrelserne har formodentlig afvejet an del fra, hvad vi har opereret med. Således vil f.eks. sedimentkornene, der efter rystningen befandt sig på siet med størrelsen 0,125 mm, sandsynligvis have en størrelse på mellem 0,25 og 0,125 mm. Denne usikkerhed på kornstørrelserne er svær at vurdere, men ved at antage at permeabilitetsværdien for hver kornstørrelse gælder indenfor det interval, som hver sedimentprøve af tekniske grunde må ligge, kan dette gøres. Endvidere må selve permeabilitetsværdien have en usikkerhed på ca. 5%, da der i tidsmålingerne var en afvigelse på 5 % mellem største og mindste værdi. Dette betyder at den virkelige permeabilitetsværdi må ligge i den "kasse", som dannes på grundlag af afvigelserne (se fig.2).

På figur 2 ses, at hældningen på de to linier er 1,9 og 0,86, hvilket betyder, at der er en stor usikkerhed på tallene i vores eksperiment. Gennemsnitshældningen på fig 2 er 1,38. Denne værdi har en usikkerhed på ca. 40%. Hvis denne usikker-

hed er den samme for hældningen på fig.1, betyder det at hældningen 1,6 med usikkerhed bliver  $1,6 \pm 0,6$ .

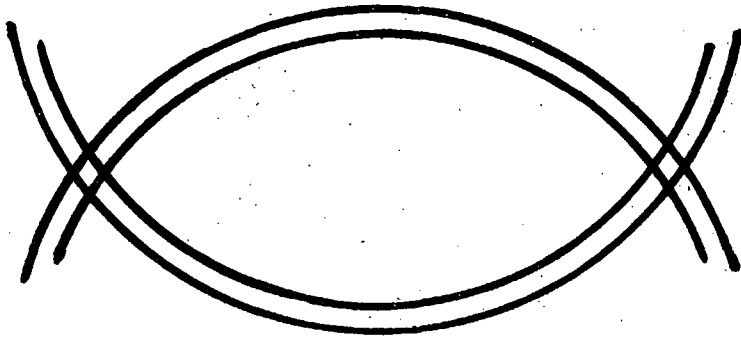
Man må på dette eksperiment konkludere, at permeabiliteten af en jordart er afhængig af kornstørrelsen. Her må vi konstatere at permeabiliteten højst sandsynligt afhænger af diameteren af kornene i anden, som vi kom frem til teoretisk.





**BILAG C**

**DEN SIMPLE FANGSTLIGNING**



UDLEDNING AF DEN SIMPLE FANGSTLIGNING.

Fiskerikvoter fastsættes på grundlag af en matematisk model.

Efter anden verdenskrig begyndte en udbygning af den danske fiskeriflåde. Udbygningen forløb næsten problemløst, og fiskeriudbyttet steg kraftigt. Man havde i 1950-erne en forstilling om, at havets ressourcer af fisk var udtømmelige, men i midten af 1960-erne begyndte fiskeriudbyttet at blive mindre for de mest befiskede arter, så som sild. For Nordsøsilens vedkommende blev der allerede i 1971 indført restriktioner i form af fredning i visse måneder. Disse restriktioner blev et par år senere gjort til et direkte fiskeriforbud.

	Samlet fangstmængde til EF.	Heraf til Danmark	Heraf til Storbritannien.
	i tons:		
Tunge	8000	384	384
Torsk	197944	38117	84353
Hvilling	146029	66243	37715
Kuller	89610	19666	57348
Sej	162418	41074	25788
Rødspætte	91795	22236	24819
Brisling	296350	232240	61861
Makrel	28442	19453	4646
Sperling	272000	252000	20000
Ialt i Nordsøen	1292588	691413	316914
Fra andre farvande	626485	3912	286928
Ialt	1919073	695325	603842

Tab.1 Tabellen viser den Nordatlantiske Fiskerikommission forslag til kvoter i Nordsøen i 1978. Disse kvoter omfatter de vigtigste arter for fiskeriet, dog er sild undladt, da fiskeristoppet stadig er opretholdt.

Som følge af overbefiskningen af de mest befiskede arter blev der i 1975 fastsat kvoter for fiskeriet i Nordsøen. Kvoterne blev fastsat i den Nordatlantiske Fiskerikommission. Der blev fastsat kvoter for de fleste befiskede arter i det nordeuropæiske område. For Nordsøen blev der fremsat et forslag til kvoter i 1978. (se tabel 1).

Kvoterne blev fastsat på grundlag af en matematisk model kaldet den simple fangstligning eller Beverton og Holt's fangstligning.

$$Y = FRe^{-M(t_c - t_r)} W_{\infty} \sum_0^3 \frac{1}{F + M + nK} U_n e^{-nK(t - t_0)}$$

hvor

- Y = fangst
- F = fiskeriintensitet
- R = antal rekrutter
- M = naturlig dødelighed
- $W_{\infty}$  = fiskeartens gennemsnitlige maksvægt
- $U_n$  = konstant som er n-afhængig
- K = artsafhængig konstant, som udtrykker fiskens forbrug af føde
- t = beregningstidspunkt
- $t_c$  = tidspunkt hvor fiskene er store nok til at blive fanget
- $t_0$  = integrationskonstant
- $t_r$  = tiden hvor fiskene rekrutteres til fangstpladserne
- $t_L$  = tidspunkt hvor fisken når sin maksimumstørrelse.

I den simple fangstligning er der nogle af de indgående faktorer, der kan være svære at bestemme entydigt. F.eks. er M en af de konstanter, som volder besvær, men den er oftest fastsat til 0,2. Som det fremgår af fig. 1 indvirker M en del på resultatet, således vil der ske en væsentlig nedgang i antallet af fisk såfremt M sættes til 0,4.

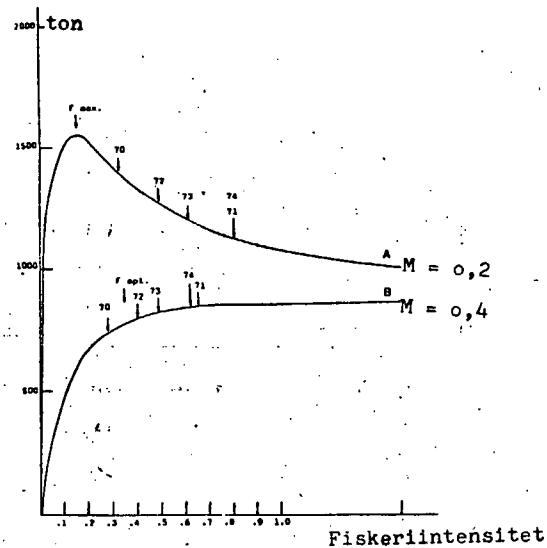


Fig. 1 Figur for sammenhængen mellem fangstudbytte og fangstindsats i Kattegats torskefiskeri.

Udledning af den simple fangstligning

Modellen bygger på helt generelle antagelser, om opbygning og nedbrydning af stof hos alle levende væsner;

$$\text{tilvækst} = \text{opbygning} - \text{nedbrydning}$$

Denne antagelse kan skrives matematisk som;

$$\frac{dW}{dt} = F(\frac{dr}{dt}) - G(W, F(\frac{dr}{dt}))$$

Ud af formlen ses, at tilvæksten udtrykkes som differensen mellem opbygningen, der er en funktion af fødemængden, og nedbrydningen, der er en funktion af fiskens størrelse og fødemængde.

Opbygningsleddet  $F(\frac{dr}{dt})$

I opbygningsleddet ( $\frac{dr}{dt}$ ) antages, at mængden af føde, der ædes, er proportional med fiskens tarmoverflade, gennem hvilken føden skal optages. Hvis dyrets enkelte dele vokser som ligedannede dele, er det en biologisk erfaring at tarmoverfladen er proportional med  $W^{2/3}$ , hvor  $W$  er fiskens vægt. I formlen skrives  $W^m$  i stedet for  $W^{2/3}$ , da der her ved er åbnet mulighed for, at der mellem fiskens legemer ikke er ligedannedhed.

En anden antagelse bygger på, at der næppe kan være føde til stede i ubegrænsede mængder. Derfor må opbygningsleddet også være afhængig af fødeniveauet  $f$ .

Den sidste størrelse som indvirker på opbygningsleddet er en stofskiftekonstant  $h$ , som udtrykker fiskens evne til at opbygge nyt stof.

Opbygningsleddet får, som følge af ovenstående flg. udseende;

$$\frac{dr}{dt} = fhW^m$$

Af dette led forudsætter man, at alt optagen føde anvendes til at opbygge nyt stof. Det er dog ikke tilfældet, idet ekskrementer indeholder ufordøjede næringsstoffer, og bakterier i tarmkanalen omsætter en del af den ædte føde. Det er derfor kun en del af døden - kaldet  $\beta$  - som optages af fisken gennem tarmvæggen. Ved iagttagelser har man konstateret at  $\beta$  afhænger af fødeniveauet. Således aftager  $\beta$  med stigende fødeniveau og tiltager ved faldende niveau. En

funktion som beskriver dette forhold er;

$$\beta = \beta_0(1-Af)$$

hvor  $\beta_0$  og A er funktioner af den ægte føde, som optages gennem tarmvæggen.

Opbygningsleddet ser derfor ud som følger;

$$F(dr/dt) = \beta_0(1-Af) fhW^m$$

Nedbrydningsleddet G(W, F(dr/dt))

En del af den optagne føde bliver brugt som energi til udførelse af arbejde i forbindelse med fødeoptagelsen og fordøjelsen. Derfor må en del  $\alpha$ , af den optagne fødemængde blive brugt til arbejde. Den forbrugte fødemængde antages herved at være proportional med den optagne fødemængde;  $\alpha \rho dr/dt$ .

Uafhængig af fordøjelsen foregår der hele tiden en nedbrydning af energi, som bruges til at opretholde de livsnødvendige funktioner, så som ånding. Dette energi forbrug, der antages at være proportionalt med den iltabsorberende overflade, udtrykkes som  $KW^n$ , hvor K og n er konstanter, som er afhængig af nedbrydningen.

På grundlag af ovenstående bliver nedbrydningsleddet til;

$$G(W, F(dr/dt)) = \alpha \beta_0(1-Af) fhW^m + KW^n$$

Som følge af opbygnings- og nedbrydningsleddet er tilvækstleddet udtrykt som:

$$\frac{dW}{dt} = \beta_0(1-Af) fhW^m - (\alpha \beta_0(1-Af) fhW^m + KW^n)$$

$$\frac{dW}{dt} = \beta_0(1-Af) fhW^m - \alpha \beta_0(1-Af) fhW^m - KW^n$$

udenfor en parentes sættes;  $(1-Af) fhW^m$

$$\frac{dW}{dt} = \beta_0(1-Af) fhW^m (1-\alpha) - KW^n$$

herefter sættes  $\beta_0(1-Af) fh(1-\alpha) = H$

$$\frac{dW}{dt} = HW^m - KW^n$$

H indsættes fordi udtrykket bliver mere overskueligt bl.a. ved differentiering.

Ved at sætte  $dW/dt=0$ , kan den maksimale vægt for en fisk beregnes

$$\frac{dW}{dt} = 0$$

$$HW^m - KW^n = 0$$

$$KW^n = HW^m$$

$$\frac{W^n}{W^m} = \frac{H}{K}$$

$$W^{n-m} = \frac{H}{K}$$

$$W = \left(\frac{H}{K}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

Dette udtrykker vækstligningens asymptote for  $t \rightarrow \infty$ , hvor  $W_\infty$  udtrykker den maksimale vægt fisken kan få;

$$W_\infty = \left(\frac{H}{K}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

Differentialligningen  $dW/dt = HW^m - KW^n$  kan kun løses direkte for visse værdier af m og n. Bertalanffy har sat m og n henholdsvis til 2/3 og 1.

For at finde løsningen, vil en omskrivning lette arbejdet, således sætter vi;

$$W = x^3$$

$$W = W(x(t)).$$

Derved får  $dW/dt$  formen;

$$\frac{d(x^3)}{dt} = H(x^3)^{2/3} - K(x^3)^1$$

$$3x^2 \frac{dx}{dt} = Hx^2 - Kx^3$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Hx^2}{3x^2} - \frac{Kx^3}{3x^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{H}{3} - \frac{Kx}{3}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{Kx}{3} = \frac{H}{3}$$

Den nu fremkomne differentiaalligning er inhomogen, Denne kan løses ved a) først at finde en løsning til den homogene ligning, og b) derefter gætte en løsning til den inhomogene ligning. Ved at summere de to løsninger får man samtlige løsninger til ligningen.

a) Løsning til den homogene ligning;

$$\frac{dx}{dt} + \frac{Kx}{3} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{K}{3}x$$

Det fremgår af denne ligning at en umiddelbar løsning vil være en eksponentialfunktion, da det er den eneste funktion, som differenteret giver sig selv. Der gættes derfor på en løsning som;

$$x(t) = c \cdot e^{-K/3 \cdot t}, \text{ hvor } c \text{ er en konstant.}$$

b) Vi gætter herefter en løsning til den inhomogene ligning;

$$x = H/K$$

Summen af a) og b);

$$x(t) = \frac{H}{K} + c \cdot e^{-K/3 \cdot t}$$

når  $x = 0$  til  $t = t_0$  kan  $c$  findes;

$$0 = \frac{H}{K} + c \cdot e^{-K/3 \cdot t_0}$$

$$c = -\frac{H}{K} e^{K/3 \cdot t_0}$$

$x(t)$  bliver med ovenstående ligning indsat på  $c$ 's plads;

$$x(t) = \frac{H}{K} - \frac{H}{K} e^{-K/3 \cdot t} \cdot e^{K/3 \cdot t_0}$$

$$x(t) = \frac{H}{K} - \frac{H}{K} e^{-K/3 \cdot (t-t_0)}$$

$$x(t) = \frac{H}{K} (1 - e^{-K/3 \cdot (t-t_0)})$$

Der er nu fundet en løsning til  $dx/dt$ . Herefter er det muligt at udskifte  $x$  med  $W$  i henhold til vores omskrivning  $W = x^3$ .

$$W = x^3 = \left(\frac{H}{K}\right)^3 (1 - e^{-K/3 \cdot (t-t_0)})^3$$

Fra før hvor  $W_\infty$  blev udledt, viste vi at;

$$W_\infty = \left(\frac{H}{K}\right) \frac{1}{n-m}$$

Ved indsættelse af værdierne fra Bertalanffy for  $m$  og  $n$  fås;

$$W_\infty = \left(\frac{H}{K}\right) \frac{1}{1-2/3}$$

$$W_\infty = \left(\frac{H}{K}\right)^3$$

Det kan ses at  $\left(\frac{H}{K}\right)^3$  kan erstattes af  $W$ . Derfor bliver

$$W(t) = W_\infty (1 - e^{-K/3 \cdot (t-t_0)})^3$$

Ligningen udtrykker at  $W(t)$  foruden at afhænge af  $W_\infty$  også bestemmes af nedbrydningskonstanten  $K$ .

$W(t)$  har et grafisk udseende som nedstående figur,

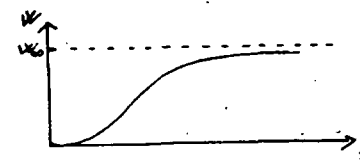


Fig. 2 Funktionen  $W(t)$ .

Funktionen  $W(t)$  kaldes for Bertalanffys vækstligning. Ud fra denne ligning har Beverton og Holt opstillet deres simple fangstligning, efter hvilken fiskerikvoterne fastsættes.

I den simple fangstligning antages at;

$$\frac{dN}{dt} = -MN_t$$

for  $t_r < t < t_c$ , hvor  $t_r$ =rekrutterings tidspunkt og  $t_c$ =tids-



punkt hvor fiskene er store nok til at blive fanget. Det vil sige, at så længe fiskene er under fangststørrelse vil det kun være  $M$ , den naturlige dødelighed, som påvirker bestanden.

Løsningen til  $dN/dt$  bliver

$$N_t = N_0 e^{-Mt}$$

hvor  $N$  er antallet af fisk til  $t=0$ .

Hvis  $N=R$  medfører det, at starttidspunktet for beregningerne rykkes frem til  $t_r$ , som er tidspunktet, hvor fiskene rekrutteres.

$N_t$  bliver da;

$$N_t = R e^{-M(t-t_r)}$$

Denne ligning udtrykker, at antallet af fisk til tiden  $t$  er afhængig af antallet af rekrutter til tiden  $t_r$  og den naturlige dødelighed.

Antallet af rekrutter, som når en alder, hvor de kan fanges, udtrykkes som  $N_t=R'$  for  $t=t_c$  derfor bliver

$$R' = R e^{-M(t_c-t_r)}$$

Det tidspunkt, hvor fiskene når en størrelse, hvor de kan fanges, forøges dødeligheden med  $F$ , som udtrykker fiskeriintensiteten.

For  $t > t_c$  ser  $N_t$  ud som følger

$$N_t = R' e^{-(M+F)(t-t_c)}$$

Hovedessensen i den simple fangstligning er udtrykket

$$Y = FN_t W_t \quad , \text{hvor } Y = \text{den samlede fangst og } F = \text{fiskeriintensiteten.}$$

Den samlede fangst over intervallet  $[t_c, t_L]$  findes ved integration;

$$Y = \int_{t_c}^{t_L} FR' W e^{-(F+M)(t-t_c)} \sum_0^3 U_n e^{-nK(t-t_0)} dt$$

$$\text{hvor } W_t = W_\infty \sum_0^3 U_n e^{-nK(t-t_0)} \quad , \text{og } U_0=1, U_1=-3, U_2=3, U_3=-1,$$

hvilket er en matematisk omskrivning af Bertalanffy's ligning

$$W_t = W_\infty (1 - e^{-K/3(t-t_0)})^3 \quad \text{og} \quad K/3 = K$$

I funktionen  $Y$  kan  $(t-t_0)$  erstattes af;

$$(t-t_0) = (t-t_c) + (t_c-t_0)$$

Dette betyder at  $Y$  får flg. udseende;

$$Y = FR' W_\infty \sum_0^3 U_n \int_{t_c}^{t_L} e^{-(F+M)(t-t_c)} e^{-nK(t-t_c)} e^{-nK(t_c-t_0)}$$

$$Y = FR' W_\infty \sum_0^3 U_n \int_{t_c}^{t_L} e^{-(F+M+nK)(t-t_c)} e^{-nK(t_c-t_0)}$$

Denne omskrivning betyder, at det kun er  $e^{-nK(F+M+nK)(t-t_c)}$  som skal integreres, da de øvrige størrelser er konstanter. Ved integrering fås derfor;

$$Y = FR' W_\infty \sum_0^3 U_n e^{-nK(t_c-t_0)} \frac{1}{F+M+nK} 1 - e^{-(F+M+nK)(t_L-t_c)}$$

Da  $t_L$  er forholdsvis stor vil det sidste led ikke få nogen betydning. Derfor får den simple fangstligning, ved ind-

sættelse af  $R' = R e^{-M(t_c-t_r)}$  flg. udseende;

$$Y = FR e^{-M(t_c-t_r)} W_\infty \sum_0^3 U_n \frac{e^{-nK(t_c-t_0)}}{F+M+nK}$$

Den simple fangstligning ser grafisk ud som figur 3.

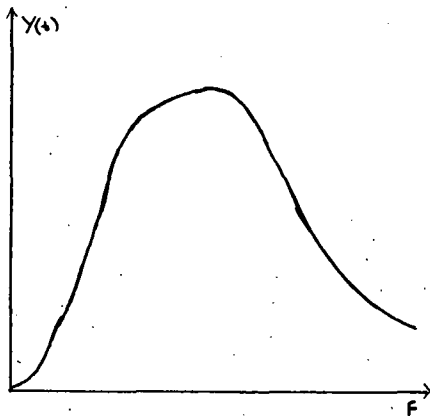


Fig. 3 Grafen viser fangsten  $Y$  som funktion af fiskeriintensiteten  $F$ . Af grafen kan ses, at hvis man bliver ved med at øge fiskeriintensiteten vil udbyttet ikke blive ved med at stige.

LITTERATURLISTE

- Andersen, Jan : Fiskeriet, Staten & SID.  
et.al. RUC 1978.
- AUC-gruppen : Sænkingsbillede og vands strømning  
ved geoteknisk anlæg.  
AUC 1978
- Barnes, B. : Scientific knowledge and sociological  
theory. Kapitel 6.  
Routledge & Kegan Paul.
- Bertelsen, S. : Anvendelse af elektronisk databehand-  
ling ved vurdering af grundvandsres-  
sourcer.  
Art. fra Vandteknik årg. 41 nr.3. juni 1973
- Birkemose, M : En undersøgelse af modellen Smec II  
RUC 1975.
- Büchel, W : Gesellschaftlichen Bedingungen der  
Naturwissenschaft.  
Drittes kapitel.
- Cohen, I.B. : Fysikkens gennembrud.  
Gyldendal 1962.
- Dickson, D : Alternative technology and the poli-  
tics of technical change.  
Fontana/Collins 1976.
- Fenchel, T. : Almen økologi.  
Akademisk Forlag 1977.
- Haman, Z. : Anvendelse af hydrologiske modeller  
ved grundvandsprognoser.  
Art.fra Vandteknik årg.41 nr 5 okt. 1973
- Hansen, H.B. : Modeller og problemløsning.  
Naturvidenskabeligt grundkursus  
RUC 1973

- Hansen, M. : Et formidlingsprojekt om følgevirknin-  
et.al. ger ved vandindvinding.  
RUC. Nat-Bas 1979.
- Harré, R. : The principals of sceintific thinking.
- Højgaard-Jensen, J. : Manuskript til "Om Fysik".
- Høyrup, E. : Matematikken i samfundet.  
et. al. Gyldendals Samfundsbibliotek 1973.
- Jensen, A. : Tanker om en praksis.  
et. al. RUC 1978.
- Juul-Jensen, U.: Videnskabsteori 1.  
Berlinske Forlag 1978.
- Jæger, B. : Den teknologiske udvikling indenfor fis-  
et. al. keriet, specielt med henblik på not og  
bomtrawl.  
RUC. Nat-Bas 1978.
- Kragh, H. : Fysik i idehistorisk belysning.  
et. al. Danmarks radio 1978.
- Kuhn, T.S. : Videnskabernes revolutioner.  
Fremad 1973.
- Lenin, V.I. : Collected Works. Volume 27.  
Moscow 1965
- Linde-Jensen, J.: Vandforsyningsteknik  
et. al. Polyteknisk forlag 1976.
- Lund, C.C. : Regulering af Nordsøsilden.  
et. al. RUC. Nat-Bas 1978.
- Lundkvist, A. : Til kritikken af den politiske økonomi.  
Modtryk.
- Mackie, J.L. : Truth, probability and paradox. Kapitel 2.  
Oxford 1973.
- Marcuse, H. : Det endimensionale menneske.  
Gyldendals Uglebøger.

- Mertz, E.L. : Bulletin No.5  
Geoteknisk Institut.  
København 1959.
- Meyerheim, M : Det hele er i virkeligheden fysik og kemi.  
Art. fra Politiken d. 11-5-1979.
- Næss, A. : Filosofiens Historie
- Poulsen, V. : Den lille geoteknikker, grus-sand-ler.  
Varv, København 1976.
- Richter, W. : Abriss der Hydrologie, kapitel 6.1, 6.3.1  
et. al. og 6.3.2  
E. Schweizerbartsche Verlagsbuchhandlung  
Stuttgart 1975.
- Sherman, I.W. : Biology, a Human Approach.  
et. al. Oxford University Press  
Fourth printing 1977.
- Ursin, E. : En fysiologisk vækstmodel baseret på  
opbygning og nedbrydning.  
Charlottenlund 1972.

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt  
Anne Jensen, Marianne Kesselhahn, Lena Lindenskov og Nicolai Lomholt.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.  
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Kreinøe og  
Peter H. Lassen. Vejleder: Bernhelm Booss
- 3/78 "Opgavesamling", breddekursus i fysik.  
Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer, Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "Tre essays" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og  
videnskabsrindalismen.  
Mogens Niss.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE"  
Helge Kragh.
- 6/78 "Nogle artikler og debatindlæg om - læreruddannelse og undervisning i fysik,  
og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret"  
Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "Matematikens forhold til samfundsøkonomien"  
B.V. Gnedenko.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.  
Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING"  
Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariorum"  
Projektrapport af Lasse Rasmussen.  
Vejleder: Anders Madsen.
- 
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET"  
Projektrapport af Jan Christensen og Jeanne Mortensen  
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER"  
red. Jørgen Larsen.
- 12/79 "Lineære differentialligninger og differentialligningssystemer"  
Mogens Brun Heefelt.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET". Projektrapport af Gert Kreinøe.  
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "Books about Mathematics: History, Philosophy, Education, Models, System  
Theory, and Works of Reference etc. A Bibliography".  
Else Høyrup.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor  
termodynamisk ligevægt". Specialeopgave af Leif S. Striegler.  
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.

- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN". Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen"  
Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings of an International Workshop, Roskilde  
university centre (Denmark), 1978. Preprint.  
Bernhelm Booss & Mogens Niss (eds.).
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".  
Projektrapport af Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".  
Projektrapport af Michael Olsen og Jørn Jensen.  
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET - FORMÅL OG KONSEKVENSER".  
Projektrapport af Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)". 1-port lineært response og støj i fysikken.  
Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY OF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role of  
relativity".  
Helge Kragh.
- 
- 24a/80 "MATEMATIKOPPFATTELSER HOS 2.G'ERE" 1. En analyse.
- 24b/80 "MATEMATIKOPPFATTELSE HOS 2.G'ERE" 2. Interviewmateriale.  
Projektrapport af Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.  
Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER" Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER". En projektrapport og to artikler.  
Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS"  
Helge Kragh.
- 28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes visco-  
elastiske egenskaber".  
Projektrapport, speciale i fysik, af Gert Kreinøe.  
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiailligningsmodeller"  
Projektrapport af Tommy R. Andersen, Per H.H.Larsen og Peter H. Lassen.  
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".  
Oluf Danielsen.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE"  
Projektrapport af Troels Lange og Jørgen Karrebæk.  
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANS-  
MÅLINGER OG MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".  
Projektrapport, speciale i fysik, af Crilles Bacher og Preben Jensen.  
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK-NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER: I-II."  
Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT OF WIND ENERGY UTILIZATION". ENERGY SERIES NO.1.  
Bent Sørensen.
- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".  
Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN ?" Fire artikler.  
Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE". ENERGY SERIES NO.2.  
Bent Sørensen.

ISSN 0106-6242