TEKST NR 258 1993

Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Supplerende kursusmateriale til "Lineære strukturer fra algebra og analyse"

af: Mogens Brun Heefelt

IMFUFA tekst nr. 258/93 30 sider ISSN 0106-6242

Abstract.

Denne tekst indeholder to mindre tekster samt supplerende opgaver, der skal anvendes på kurset "Lineære strukturer fra algebra og analyse", på matematikuddannelsen på RUC.

Materialet er tænkt benyttet sammen med bog af D.H.Griffel: Linear Algebra and its Applications. Vol I + II, Ellis Horwood, 1990.

Indhold

1. Nulrum for lineære differantialoperatorer (9 sider)

2. Diagonalisering af matricer og JORDAN's normalform (7 sider)

3. Supplerende opgaver (12 sider)

Nulrum for lineære differentialoperatorer

I denne tekst skal vi arbejde på at bestemme basis for enten nulrum eller egenrum af en lineær differentialoperator af n-te orden fx

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 D^0$$

hvor alle a_i er reelle konstanter (i princippet kunne de også være reelle funktioner).

I hele denne tekst arbejder vi med, at operatorerne virker på C^∞, rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner.

Operatorer af første orden

På dette rum betragtes først den lineære differentialoperator

$$L_1 = D - aD^0 \; ; \qquad a \in \mathbb{R}$$

Da svarer en bestemmelse af nulrummet for L_1 - $N(L_1)$ til at løse den lineære, homogene differentialligning af første orden

$$(D - aD^0)f(t) = 0 \qquad \text{eller} \qquad f'(t) = af(t).$$

Denne differentialligning har som bekendt den fuldstændige løsning

$$f(t) = ce^{at} \; ; \qquad c \in \mathbb{R}$$

dvs $N(L_1) = Sp\{e^{at}\}$, og derfor er $\dim N(L_1) = 1$.

Operatorer af anden orden

Har man tilsvarende den lineære differentialoperatoren af anden orden

givet ved $L_2 \colon C^\infty \to C^\infty$

$$L_2 = D^2 + aD + bD^0 \; ; \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

kan man foretage følgende omskrivning:

$$\begin{aligned}
(D - pD^0)\circ(D - qD^0)f &= (D - pD^0)(f' - qf) = \\
(f' - qf)' - p(f' - qf) &= f'' - qf' - pf' + pqf = \\
f'' - (p + q)f' + pqf &= (D^2 - (p + q)D + pqD^0)f
\end{aligned}$$

hvor p og q er reelle (eller komplekse) tal. Da kan vi se, at man kan skrive

$$D^2 + aD + bD^0 = (D - pD^0)\circ(D - qD^0)$$

hvis og kun hvis

$$p + q = -a \quad \text{og} \quad pq = b,$$

hvilket netop svarer til, at p og q skal være rødder i andengradsligningen

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Derfor kan man finde nulrummet for L_2 ved at løse diffentialligningen

$$(D - pD^0)\circ(D - qD^0)f = 0$$

Sættes nu $g = (D - qD^0)f$, svarer det til at løse de to sammenhørende differentialligninger

$$(D - pD^0)g(t) = 0 \quad \text{og} \quad (D - qD^0)f(t) = g(t)$$

eller

$$g'(t) = pg(t) \qquad \text{og} \qquad f'(t) = qf(t) + g(t)$$

Den første ligning har som før den fuldstændige løsning

$$g(t) = ce^{pt}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Da bliver den fuldstændige løsning for den anden ligning fastlagt af

$$\begin{aligned} f(t) &= c_2e^{qt} + e^{qt}\int ce^{pt}e^{-qt}dt \\ &= c_2e^{qt} + ce^{qt}\int e^{(p-q)t}dt \end{aligned}$$

Hvis $p \neq q$ bliver

$$f(t) = c_2e^{qt} + \frac{c}{p-q}e^{qt}e^{(p-q)t}$$

eller

$$f(t) = c_1e^{pt} + c_2e^{qt} \ ; \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

og derfor bliver $N(L_2) = Sp\{e^{pt},\ e^{qt}\}$, og dermed bliver

$$\dim N(L_2) = 2.$$

Hvis derimod $p = q$ finder man, at den fuldstændige løsning er

$$f(t) = c_1te^{pt} + c_2e^{pt} \ ; \qquad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

og derfor bliver $N(L_2) = Sp\{e^{pt},\ te^{pt}\}$, og dermed bliver igen

$$\dim N(L_2) = 2.$$

Bemærk, at rødderne i andengradsligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ kan være komplekse (og da komplekst konjugerede, fx $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$). Denne situation er omfattet af tilfældet $p \neq q$, men ved at benytte

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

kan man vise, at den fuldstændige løsning kan omskrives til

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \\ &= e^{\alpha t}[(c_1+c_2)\cos\beta t + i(c_1-c_2)\sin\beta t] \\ &= k_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + k_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

netop når

$$c_1 = (k_1 - ik_2)/2 \quad \text{og} \quad c_2 = (k_1 + ik_2)/2$$

med $k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$.

Så også i dette tilfælde er $\dim N(L_2) = 2$, idet nulrummet er fastlagt ved $N(L_2) = \mathrm{Sp}\{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t\}$.

Eksempel 1: Er operatoren $L = D^2 + 4D + 3D^0$, skal man løse andengradsligningen $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, der har rødderne -1 og -3, og derfor er $N(L) = \mathrm{Sp}\{e^{-t},\ e^{-3t}\}$.

Eksempel 2: Er operatoren $L = D^2 + 4D + 4D^0$, skal man løse andengradsligningen $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, der har -2 som dobbeltrod, og derfor er $N(L) = \mathrm{Sp}\{e^{-2t},\ te^{-2t}\}$.

Eksempel 3: Er operatoren $L = D^2 + 4D + 5D^0$, skal man løse andengradsligningen $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, der har de komplekst konjugerede rødder $-2 + i$ og $-2 - i$, og derfor får man, at

$$N(L) = \mathrm{Sp}\{e^{-2t}\cos t,\ e^{-2t}\sin t\}.$$

Operatorer af tredie orden

Vi betragter videre differentialoperatoren $L_3\colon C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$L_3 = D^3 + aD^2 + bD + cD^0\ ; \qquad a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

Da kan man som for en anden ordens operator finde reelle (eller komplekse) tal p_1, p_2 og p_3, således at

$$(D - p_3D^0)\circ(D - p_2D^0)\circ(D - p_1D^0) = D^3 + aD^2 + bD + aD^0$$

netop når p_1, p_2 og p_3 er rødder i trediegradsligningen

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Når man skal finde nulrummet for L_3 - $N(L_3)$, svarer det til at løse differentialligningen

$$(D^3 + aD^2 + bD + cD^0)f(t) = 0.$$

Den kan så omskrives til

$$(D - p_3D^0)\circ(D - p_2D^0)\circ(D - p_1D^0)f(t) = 0,$$

Den løses ved at løse de tre sammenhørende differentialligninger

$$(D - p_3D^0)f_3(t) = 0, \quad (D - p_2D^0)f_2(t) = f_3(t)$$
$$\text{og} \quad (D - p_1D^0)f_1(t) = f_2(t)$$

hvor de to første løses som vist i forrige afsnit. I fortsættelse af det foregående kan man således se, at der netop vil være tre lineært uafhængige funktioner, der udspænder nulrummet $N(L_3)$.

Eksempel 4: I det specialtilfælde, hvor p_3, p_2 og p_1 har den fælles værdi p, kan vi af forrige afsnit se, at

$$f_2(t) = c_1te^{pt} + c_2e^{pt}$$

Indsættes denne funktion i den sidste ligning ovenfor, bliver

$$f_1(t) = c_1t^2e^{pt}/2 + c_2te^{pt} + c_3e^{pt},$$

og derfor er $N(L_3) = Sp\{e^{pt}, te^{pt}, t^2e^{pt}\}$.

Operatorer af n-te orden

Generelt kan differentialoperatoren L_n: $C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} +\ldots+ a_1D + a_0D^0$$

sammensættes af de første ordens differentialoperatorer

$$(D - p_nD^0)\circ(D - p_{n-1}D^0)\circ\ldots\circ(D - p_1D^0)$$

netop når alle p_i-erne er rødder i n-te gradsligningen

$$(*) \qquad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} +\ldots+ a_1\lambda + a_0 = 0,$$

og en n-te gradsligning har altid n (muligvis komplekse - og da komplekst konjugerede) rødder - regnet med multiplicitet.

Vi har nu i analogi med L_1, L_2 og L_3, at $N(L_n)$ er rummet af samtlige løsninger til differentialligningen

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} +\ldots+ a_1D + a_0D^0)f(t) = 0.$$

Der vil være netop n lineært uafhængige løsninger, der opfylder:

a) Er p en enkelt reel rod i ligningen (*) vil

$$e^{pt} \in N(L_n)$$

b) Er p en reel rod med multiplicitet k i ligningen (*) vil $\{e^{pt}, te^{pt}, \dots , t^{k-1}e^{pt}\} \subseteq N(L_n)$

c) Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ enkle, komplekst konjugerede rødder i ligningen (*), vil

$$\{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t\} \subseteq N(L_n)$$

d) Er endelig $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ komplekst konjugerede rødder med multiplicitet k i ligningen (*), vil

$$\{e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ \dots ,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ \dots ,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t\} \subseteq N(L_n)$$

Eksempel 5: Er operatoren $L = D^3 - 3D - 2D^0$, skal man løse ligningen $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$, der har rødderne 2 og -1, hvor -1 er dobbeltrod. Derfor bliver $N(L) = Sp\{e^{2t}, e^{-t}, te^{-t}\}$.

Eksempel 6: Er operatoren $L = D^4 + 2D^2 + D^0$, skal man løse ligningen $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$, og med omskrivningen

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2$$

ser man, at $-i$ og i vil være rødder med multiplicitet 2. Derfor bliver $N(L) = Sp\{\cos t, t\cos t, \sin t, t\sin t\}$.

Alternativ fremstilling

Man kan imidlertid også bestemme en basis for nulrummet svarende til en n-te ordens lineær differentialoperator på en anden måde. Igen omskriver man den n-te ordens lineære differentialligning

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0D^0)f(t) = 0.$$

til første ordens lineære differentialligninger. Man indfører nu funktionerne

$$f_1 = f,\quad f_2 = Df,\ \dots ,\ f_n = D^{n-1}f$$

og herved kan man dels opskrive ligningerne

$$f_1' = f_2\ ,\quad f_2' = f_3\ ,\ \dots ,\quad f_{n-1}' = f_n$$

og dels ved indsættelse i den oprindelige ligning få

$$f_n' = D^nf = - a_0f_1 - a_1f_2 - \dots - a_{n-1}f_n.$$

Disse ialt n lineære differentialligninger af første orden kan nu med fordel opskrives på matrixform $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$ således

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots\cdots\cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}$$

Skal dette ligningssystem løses, skal matricen enten diagonaliseres eller (i det mindste) bringes på jordans normalform. Hertil skal vi bestemme samtlige egenværdier for matricen **A**.

Vi skal altså bestemme det karakteristiske polynomium, dvs

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

eller

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-\lambda \end{vmatrix}$$

Ganges først alle søjler med (-1), og foretages herefter følgende søjleoperationer:

$$s_{n-1} = s_{n-1} + \lambda s_n, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad s_1 = s_1 + \lambda s_2$$

bliver

$$p(\lambda) = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & -1 \\ F(\lambda) & * & * & \cdots\cdots & * & * \end{vmatrix}$$

hvor $F(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$, og hvor * betyder et led uden interesse, da man udvikler determinanten efter første søjle. Dette giver

$$p(\lambda) = (-1)^n(-1)^{n+1}F(\lambda)(-1)^{n-1}$$

eller

$$p(\lambda) = (-1)^n(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)$$

Egenværdierne for matricen **A** er altså samtlige rødder i ligningen

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

som er identisk med ligningen (*) i den forrige fremstilling.

Skal man herefter bestemme den eller de egenvektorer, som svarer til den fundne egenværdi, skal man jo finde samtlige vektorer, som opfylder

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = 0.$$

Dette giver følgende sammenhørende ligninger

$$-\lambda x_1 + x_2 = 0 \quad , \quad -\lambda x_2 + x_3 = 0$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$- a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots\ldots - a_{n-2}x_{n-1} - (a_{n-1} - \lambda)x_n = 0.$$

Disse kan omskrives til

$$x_2 = \lambda x_1 \quad , \quad x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1 \quad ,$$

$$x_4 = \lambda x_3 = \lambda^3 x_1 \quad , \ \ldots \ , \quad x_n = \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-1} x_1$$

hvilket betyder, at den sidste linie omskrives til

$$-x_1(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) = 0$$

eller

$$-x_1 p(\lambda) = 0.$$

Da λ er rod i det karakteristiske polynomium, er $p(\lambda) = 0$, og vi kan derfor vælge x_1 frit fx til $x_1 = 1$. Da bliver egenrummet svarende til egenværdien λ

$$E_\lambda = \mathrm{Sp}\{(1,\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^{n-2},\lambda^{n-1})^T\},$$

dvs uanset hvilken algebraisk multiplicitet λ har, er $gm(\lambda) = 1$. Derfor vil matricen $\mathbf{A}$ transformere til en jordanmatrix med maksimalt antal 1-taller over diagonalen, nemlig for alle egenværdier med algebraisk multiplicitet større end 1.

I sådanne tilfælde skal man altså bestemme en vektor $\mathbf{v}_2$, som opfylder

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

hvor jo $\mathbf{v}_1 = (1,\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^{n-1})^T$. Man får da de sammenhørende ligninger

$$- \lambda x_1 + x_2 = 1 \quad , \quad - \lambda x_2 + x_3 = \lambda$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$- a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots - (a_{n-1} - \lambda)x_n = \lambda^{n-1}$$

Disse kan nu omskrives til

$$x_2 = 1 + \lambda x_1 \quad , \quad x_3 = \lambda + \lambda x_2 = 2\lambda + \lambda^2 x_1$$

$$x_4 = \lambda^2 + \lambda x_3 = 3\lambda^2 + \lambda^3 x_1 \quad , \quad \ldots\ldots$$

$$x_n = \lambda^{n-2} + \lambda x_{n-1} = \lambda^{n-2} + \lambda^{n-2}(n-2 + \lambda x_1) = (n-1)\lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}x_1,$$

hvilket betyder, at den sidste ligning omskrives til

$$- x_1(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n)$$
$$- (a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1}) = 0$$

eller

$$- x_1 p(\lambda) - p'(\lambda) = 0.$$

Er $\mathrm{algm}(\lambda) \geq 2$, dvs når såvel $p(\lambda) = 0$ som $p'(\lambda) = 0$ kan en "syntetisk" vektor fx vælges til

$$\mathbf{v}_2 = (0,1,2\lambda,3\lambda^2,\ldots,(n-1)\lambda^{n-2})^T,$$

(hvor man har sat $x_1 = 0$).
Bemærk, at vektoren $\mathbf{v}_2$ fremkommer af vektoren $\mathbf{v}_1$ ved differentiation mht λ.

Er $\mathrm{algm}(\lambda) \geq 3$ kan man tilsvarende bestemme en vektor $\mathbf{v}_3$ af

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2.$$

Denne vektor er fx

$$\mathbf{v}_3 = (0,0,1,3\lambda,6\lambda^2,\ldots,(n-1)(n-2)\lambda^{n-3}/2)^T$$

Bemærk, at $\mathbf{v}_3$ vil fremkomme af $\mathbf{v}_2$ ved differentiation mht λ, og derefter division med 2.

Når transformationsmatricen $\mathbf{S}$ er færdigkonstrueret efter denne recept, kan vi overgå til løsning af differentialligningssystemet $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t)$. Bemærk, at vi udelukkende er interesseret i at finde f_1 (første koordinat i $\mathbf{f}$). Benyttes som sædvanlig transformationen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$, vil differentialligningssystemet blive overført i

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{g}(t)$$

hvor $\mathbf{J}$ er en jordanmatrix med 1-taller lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i $\mathbf{S}$ står en "syntetisk" vektor.

Er ξ en egenværdi for $\mathbf{A}$ med $\mathrm{algm}(\xi) = k$ (> 1), vil som før vist $\mathrm{gm}(\xi) = 1$, og derfor vil den $k \times k$-delmatrix $\mathbf{J}_\xi$ af $\mathbf{J}$, som svarer til ξ, have formen

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

og den del af differentialligningssystemet, som skal løses svarende til ξ, bliver derfor

$$g_1'(t) = \xi g_1(t) + g_2(t) \quad , \quad g_2'(t) = \xi g_2(t) + g_3(t)$$

$$\ldots .$$

$$g_{k-1}'(t) = \xi g_{k-1}(t) + g_k(t) \quad , \quad g_k'(t) = \xi g_k(t)$$

Løses dette system bagfra, finder vi at

$$g_k(t) = c_k e^{\xi t}$$

$$g_{k-1}(t) = c_k t e^{\xi t} + c_{k-1} e^{\xi t}$$

$$\cdots$$

$$g_2(t) = \frac{c_k}{(k-2)!} t^{k-2} e^{\xi t} + \ldots + c_2 e^{\xi t}$$

$$g_1(t) = \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\xi t} + \ldots + c_2 t e^{\xi t} + c_1 e^{\xi t}$$

Da imidlertid den del af transformationsmatricen **S**, som er knyttet til egenværdien ξ, er en nedre trekantmatrix med et 1-tal på første plads i første søjle (jfr udregningen af $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ osv), vil man af transformationen $\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{g}(t)$ få, at

$$f_1(t) = g_1(t) + \text{bidrag fra øvrige egenværdier}$$

dvs nulrummet for differentialoperatoren

$$L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0 D^0$$

vil indeholde

$$\mathrm{Sp}\{e^{\xi t}, te^{\xi t}, \ldots, t^{k-1}e^{\xi t}\}.$$

Som man vil se stemmer dette overens med punkt b) på side 5 i den første fremstilling. Bemærk iøvrigt, at denne gennemregning også gælder for en kompleks egenværdi $\alpha + i\beta$, og da den komplekst konjugerede værdi $\alpha - i\beta$ samtidigt vil være egenværdi og med samme algebraiske multiplicitet, får man resultaterne i punkt c) og d) på side 5.

Egenrum for en differentialoperator

I Griffel, kapitel 5G er vist, at hvis μ er egenværdi for en lineær afbildning g: V -> V, vil samtlige egenvektorer for g svarende til egenværdien μ - sammen med 0-elementet - være et underrum. Dette underrum kaldes egenrummet for μ - E_μ. Det er endvidere vist, at dette egenrum er nulrummet for afbildningen $g - \mu i$, dvs $E_\mu = N(g-\mu i)$.

Er således $L: C^\infty \to C^\infty$ en lineær differentialoperator kan man efterspørge egenfunktionerne for L svarende til en egenværdi μ, dvs at finde samtlige funktioner $f \in C^\infty$, som opfylder

$$Lf = \mu f,$$

hvilket jfr den nævnte sætning svarer til at finde en basis for nulrummet $N(L - \mu D^0)$.

Diagonalisering af matricer og JORDAN's normalform.

Indledning

Som det fremgår af Griffel, kapitel 8A kan en n×n matrix A diagonaliseres hvis og kun hvis der findes en basis for $\mathbb{R}^n$ af egenvektorer for matricen A.

Med udgangspunkt i denne sætning antager vi nu, at A har egenværdierne $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (hvor flere egenværdier kan være ens) med de tilhørende egenvektorer $v_1,\ldots,v_n$ (som er lineært uafhængige). Der gælder då, at

$$\forall i : Av_i = \lambda_i v_i.$$

Indføres nu matricen $S = (v_1,v_2,\ldots,v_n)$, vil S i søjlerne netop have alle de lineært uafhængige egenvektorer. Da er

$$AS = (Av_1,Av_2,\ldots,Av_n) = (\lambda_1 v_1,\lambda_2 v_2,\ldots,\lambda_n v_n)$$

$$= (v_1,v_2,\ldots,v_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= SD$$

hvor D er en diagonalmatrix med egenværdierne i diagonalen, netop opskrevet i den samme rækkefølge, som egenvektorerne er opskrevet i transformationsmatricen S. Da søjlerne i S er lineært uafhængige svarer AS = SD til at

$$D = S^{-1}AS.$$

Spørgsmålet er nu, hvad der sker, når man <u>ikke</u> har en basis for $\mathbb{R}^n$ af egenvektorer for A.

For det første kan man nøjes med at undersøge de egenværdier, hvor

$$gm(\lambda) < algm(\lambda).$$

Til de øvrige egenværdier er der egenvektorer "nok". Mangler der egenvektorer suppleres listen af egenvektorer (der er dog altid mindst én) med det antal lineært uafhængige vektorer, der svarer til differensen

$$algm(\lambda) - gm(\lambda).$$

Det kan vises, at man altid på en nøje foreskreven måde kan finde et sådant lineært uafhængigt sæt knyttet til egenværdien λ.

Tilfældet gm(λ) = 1

Vi betragter først det tilfælde, hvor den aktuelle egenværdi har gm(λ) = 1 og algm(λ) = k. Således er den eneste egenvektor bestemt af

$$Av_1 = \lambda v_1 \qquad \text{eller} \qquad (A - \lambda E)v_1 = 0$$

De resterende vektorer skal da bestemmes af følgende algoritme

$$Av_2 = \lambda v_2 + v_1 \qquad \text{eller} \qquad (A - \lambda E)v_2 = v_1$$

$$Av_3 = \lambda v_3 + v_2 \qquad \text{eller} \qquad (A - \lambda E)v_3 = v_2$$

$$\vdots$$

$$Av_k = \lambda v_k + v_{k-1} \qquad \text{eller} \qquad (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}$$

Påstanden er da, at man altid kan finde disse vektorer $v_2, v_3, \ldots, v_k$, og vi skal senere vise, at disse sammen med v_1 vil udgøre en lineært uafhængig mængde.

Sættes som før $\quad S = (\ldots, v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots)$

bliver $\quad AS = (\ldots, Av_1, Av_2, \ldots, Av_k, \ldots)$

$$= (\ldots, \lambda v_1, \lambda v_2 + v_1, \ldots, \lambda v_k + v_{k-1}, \ldots)$$

$$= S \begin{pmatrix} \cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots \\ \cdots & \lambda & 1 \;\cdots\; 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \lambda \;\cdots\; 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 \;\cdots\; \lambda & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 \;\cdots\; 0 & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= SJ$$

Denne matrix J kaldes en **jordanmatrix**, og den består af egenværdierne for A i diagonalen og af et 1-tal lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i S står en "konstrueret" (eller "syntetisk" fremstillet) vektor.

<u>Eksempel 1:</u> Med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bliver det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^3$, dvs $\lambda = 1$ er den eneste egenværdi. Af $(A - \lambda E)v_1 = 0$ kan man nu bestemme egenvektorerne svarende til egenværdien 1, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og man får, at $-z = 0$ og $x + y = 0$. Således bliver den eneste egenvektorretning fastlagt til fx

$$v_1 = (-1,1,0)^T.$$

Benyttes nu algoritmen skal vi altså finde v_2, således at

$$(A - \lambda E)v_2 = v_1,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvilket giver $-z = -1$ og $x + y = 1$ dvs

$$v_2 = (1,0,1)^T$$

Bemærk at man lige så vel kunne have valgt $(0,1,1)^T$ eller $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T$

Algoritmen skal fortsættes, således at man finder v_3 af

$$(A - \lambda E)v_3 = v_2,$$

eller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der giver $-z = 1$ og $x + y = 0$, dvs vektorretningen bliver fx

$$v_3 = (0,0,-1)^T.$$

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og for at sikre at der er regnet rigtig skal AS = SJ, hvilket en simpel udregning bekræfter. #

__Øvelse 1:__ Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kun vil have én egenværdi og én egenvektor, og bestem derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix. #

Vi skal nu vise, at **mængden $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, der er fastlagt som nævnt på side 2, er lineært uafhængig.**

Sættes nu $T = A - \lambda E$, bliver $Tv_k = v_{k-1}$, $T^2v_k = Tv_{k-1} = v_{k-2}$, ... , $T^{k-1}v_k = v_1$ samt $T^kv_k = Tv_1 = 0$ (da v_1 er en egenvektor) 1)

Vi tager nu udgangspunkt i linearkombinationen

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + c_kv_k = 0$$

og vi skal altså vise, at alle $c_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,k$. Udtrykt med T bliver linearkombinationen til

$$(*) \qquad c_1T^{k-1}v_k + c_2T^{k-2}v_k + \ldots\ldots\ldots + c_kv_k = 0$$

Lader vi nu T^{k-1} virke på (*) får vi, at

$$c_kT^{k-1}v_k = 0 \quad \text{eller} \quad c_kv_1 = 0$$

(da jo $T^{k+j}v_k = 0$ for alle $j \geq 0$). Da v_1 er egenvektor, er $v_1 \neq 0$ og således er $c_k = 0$.

Lader vi tilsvarende T^{k-2} virke på (*), bliver

$$c_{k-1}T^{k-1}v_k + c_kT^{k-2}v_k = 0 \quad \text{eller} \quad c_{k-1}v_1 + c_kv_2 = 0$$

Da jo $c_k = 0$ og $v_1 \neq 0$ bliver $c_{k-1} = 0$.

Lader vi herefter T^{k-i}, $i = 3,\ldots,k$ virke på (*) får vi successivt $c_{k-2} = \ldots = c_1 = 0$, og dermed er det vist, at mængden

$$\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_k\}$$

er lineært uafhængig. #

1) En matrix T, der opfylder, at $T^ju \neq 0$ når $j < k$ og $T^ku = 0$ for alle $u \neq 0$, kaldes **nilpotent af grad k.**

Tilfældet gm(λ) > 1

Vi går nu over til det tilfælde, hvor der er flere lineært uafhængige egenvektorer svarende til egenværdien λ, men færre end den algebraiske multiplicitet. Egenrummet E_λ antages nu at være udspændt af vektorerne $v_1, v_2, \dots, v_j$, dvs $gm(\lambda) = j$. Videre er $algm(\lambda) = k > j$. Man bestemmer - i princippet - den eller de manglende vektorer lige som i tilfældet $gm(\lambda) = 1$, men det er nu ikke umiddelbart klart, hvilken vektorretning i E_λ man skal benytte. Men påstanden er, at man altid kan finde mindst én vektorretning $u \in E_\lambda$, således at algoritmen fra før vil fungere, dvs at

$$\begin{aligned} Av_{j+1} &= \lambda v_{j+1} + u \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_{j+1} = u \\ &\vdots \\ Av_k &= \lambda v_k + v_{k-1} \quad \text{eller} \quad (A - \lambda E)v_k = v_{k-1}. \end{aligned}$$

Vælges nu som før disse vektorer som søjlerne i S, dvs

$$S = (\dots, v_1, \dots, v_{j-1}, u, v_{j+1}, \dots, v_k, \dots)$$

hvor de første j vektorer $v_1, \dots, v_{j-1}, u$ er egenvektorer og valgt således at de er lineært uafhængige. Da bliver

$$\begin{aligned} AS &= (\dots, Av_1, \dots, Av_{j-1}, Au, Av_{j+1}, \dots, Av_k, \dots) \\ &= (\dots, \lambda v_1, \dots, \lambda v_{j-1}, \lambda u, \lambda v_{j+1}+u, \dots, \lambda v_k + v_{k-1}, \dots) \\ &= S \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \lambda & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \\ &= SJ \end{aligned}$$

hvor J er en jordanmatrix med egenværdierne i diagonalen og med 1-tal lige over diagonalen i netop de søjler, hvor der i S står en "syntetisk" fremstillet vektor.

Som i tilfældet $gm(\lambda) = 1$ kan man også her vise, at den konstruerede **mængde $\{v_1, \dots, v_{j-1}, u, v_{j+1}, \dots, v_k\}$ vil være lineært uafhængig.**

Ideen i beviset er den samme som før. Er $T = A - \lambda E$, bliver $Tv_k = v_{k-1}, \;..\; , T^{k-j}v_k = u$ og $T^{k-j+1}v_k = Tu = 0$. Igen betragtes linearkombinationen

$$c_1v_1 + .. + c_{j-1}v_{j-1} + c_ju + c_{j+1}v_{j+1} + .. + c_kv_k = 0$$

eller

$$(*) \quad c_1v_1 + .. + c_{j-1}v_{j-1} + c_jT^{k-j}v_k + c_{j+1}T^{k-j-1}v_k + .. + c_kv_k = 0$$

Lader vi T^{k-j} virke på (*) fås, at

$$0 = c_kT^{k-j}v_k = c_ku$$

og da $u \neq 0$ bliver $c_k = 0$. Tilsvarende får man som før successivt, at $c_{k-1} = ... = c_{j+1} = c_j = 0$, og da $\{v_1,....,v_{j-1}\}$ var antaget lineært uafhængig, vil også $c_1 = ... = c_{j-1} = 0$. Herefter er beviset gennemført. #

<u>Eksempel 2:</u> Matricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

har det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E) = -(1 + \lambda)^3$, dvs den eneste egenværdi er -1 med $\operatorname{algm}(-1) = 3$. Af $(A - \lambda E)v = 0$ får man tre ens ligninger af formen

$$x - 2y + z = 0,$$

der jo udspænder en plan i $\mathbb{R}^3$, dvs $\operatorname{gm}(-1) = 2$, og en basis for egenrummet E_{-1} er fx

$$\{(2,1,0)^T;(1,0,-1)^T\}.$$

Af $(A - \lambda E)v_3 = u$ får man de tre ligninger

$$x - 2y + z = u_1$$

$$x - 2y + z = u_2$$

$$x - 2y + z = u_3.$$

Da påstanden er, at v_3 altid kan konstrueres ud fra en vektor $u \in E_{-1}$, og da ligningerne kun giver mening, når $u_1 = u_2 = u_3$, må dette betyde at vektorretningen $(1,1,1)^T \in E_{-1}$, hvilket også let ses af

$$(1,1,1)^T = (2,1,0)^T - (1,0,-1)^T.$$

Af de tre identiske ligninger

$$x - 2y + z = 1$$

får man $v_3 = (1,0,0)^T$.

Bemærk at man lige så vel kunne have valgt fx $(0,0,1)^T$ eller $(0,-\frac{1}{2},0)^T$.

Herefter bliver matricerne

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at egenvektoren $(1,1,1)^T$ er medtaget i matricen S som den sidste af de to lineært uafhængig egenvektorer. Det bekræftes let ved udregning, at AS = SJ. #

<u>Øvelse 2:</u> Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

kun vil have en egenværdi med to lineært uafhængige egenvektorer, og bestem derpå en basis for $\mathbb{R}^3$, så B vil blive transformeret over i en jordanmatrix. #

Afsluttende kan vi altså konstatere, at en matrix enten kan diagonaliseres eller kan transformeres til en jordanmatrix. Denne jordanmatrix vil i diagonalen have alle egenværdierne for matricen gentaget svarende til den algebraiske multiplicitet, og lige over diagonalen vil der stå 1-tal i netop de søjler, som svarer til søjler i transformationsmatricen S, hvor der står "syntetiske egenvektorer".

Supplerende opgaver

1. C^0 er mængden af alle reelle, kontinuerte funktioner. Der er givet følgende mængder

$$F_1 = \{ f \in C^0 \mid f(1) = 0 \}$$
$$F_2 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 1 \}$$
$$F_3 = \{ f \in C^0 \mid f(0) = 0 \wedge f(1) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der er underrum i C^0.

2. P_3 er mængden af alle reelle polynomier af højst tredie grad. Idet p' betyder den afledede af p, defineres følgende mængder

$$Q_1 = \{ q \in P_3 \mid q'(t) - 2q(t) = t^3 \}$$
$$Q_2 = \{ q \in P_3 \mid tq'(t) - 2q(t) = 0 \}$$
$$Q_3 = \{ q \in P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 2q(t) = 0 \}$$
$$Q_4 = \{ q \in P_3 \mid t^2q''(t) - 2tq'(t) + 3q(t) = 0 \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i P_3. Bestem endvidere samtlige de polynomier, som tilhører mængden Q_3 henholdsvis mængden Q_4.

3. C^p er mængden af alle reelle, p gange (kontinuerte,) differentiable funktioner. Idet f' betyder den afledede af f, defineres følgende mængder

$$G_1 = \{ f \in C^1 \mid f' + af = 0 \}$$
$$G_2 = \{ f \in C^1 \mid f' + f^2 = 0 \}$$
$$G_3 = \{ f \in C^2 \mid f'' + af' + bf = 0 \}$$

hvor a og b er reelle tal. Afgør da hvilke af disse mængder, der vil være underrum i C^1.

4. En kvadratisk matrix A kaldes skæv-symmetrisk, hvis det gælder at $A^T = -A$.
   - a. Vis, at ethvert diagonalelement i en skæv-symmetrisk matrix vil være 0.
   - b. Nedskriv en 3×3 skæv-symmetrisk matrix.
   - c. Vis, at såfremt en matrix skal være både symmetrisk og skæv-symmetrisk, må den være 0-maticen.

d. Vis, at enhver kvadratisk matrix kan skrives som sum af en symmetrisk og en skæv-symmetrisk matrix.

5. Der er givet matricerne

$$E(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis da, at $E(i,j) \cdot E(j,k) = E(i,k)$ for alle $i,j,k = 1,2$ og at $E(i,j) \cdot E(k,l) = 0$, hvis $i,j,k,l = 1,2$ og $j \neq k$. Vis derpå, at enhver reel 2×2-matrix på entydig måde kan skrives som linearkombination af disse fire matricer. $M_{2,2}$ betegner mængden af alle reelle 2×2-matricer. Vis, at $M_{2,2}$ er et vektorrum, og fastlæg rummets dimension.

6. Fastlæg samtlige reelle 2×2-matricer B, der vil kommutere med matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(dvs $AB = BA$). Vis, at mængden af sådanne matricer B vil være et underrum i $M_{2,2}$, og bestem underrummets dimension.

7. Vi skal nu generalisere opgave 5 til n×n-matricer. Således står $E(i,j)$ for den n×n-matrix, der har 1 på den i,j-te plads og 0 på alle øvrige pladser. Godtgør da, at

$$E(i,j) \cdot E(k,l) = \delta_{j,k} \cdot E(i,l)$$

hvor $i,j,k,l = 1,2,\cdot\cdot,n$ ($\delta_{j,k} = 1$ for $j = k$ og ellers $= 0$). Idet $M_{n,n}$ betegner mængden af alle reelle n×n-matricer, skal det vises, at $M_{n,n}$ er et vektorrum, og bestem rummets dimension.

8. $U_{n,n}$ betegner mængden af alle reelle, øvre n×n-trekantmatricer. Godtgør, at $U_{n,n}$ er et underrum i $M_{n,n}$, og bestem dimensionen af $U_{n,n}$. Tilsvarende betegner $S_{n,n}$ mængden af alle reelle, symmetriske n×n-matricer og $T_{n,n}$ mængden af alle de skæv-symmetriske. Vis, at såvel $S_{n,n}$ som $T_{n,n}$ er underrum i $M_{n,n}$ og bestem rummenes dimensioner.

9. Idet P_2 er mængden af alle reelle polynomier af højst anden grad betragtes de fire polynomier

$$p_0(t) = 2t^2 + t \quad , \qquad p_1(t) = t^2$$
$$p_2(t) = -t^2 + t + 1, \qquad p_3(t) = -t - 1$$

Vis, at disse fire er lineært afhængige, og bestem et lineært uafhængigt sæt af tre af disse polynomier.
Vis endelig, at ethvert element i P_2 kan skrives som linearkombination af disse tre polynomier.

10. Man betragter vektorrummet $\mathbb{C}^3$ over $\mathbb{C}$. Der er givet følgende sæt af vektorer

$$S_1 = \{ (1,0,0);\ (0,1,i);\ (1,i,-1) \}$$
$$S_2 = \{ (1,-1,i);\ (i,0,1);\ (0,1,i) \}$$
$$S_3 = \{ (i,i,i);\ (1,1,-1);\ (1,i,0) \}$$

Afgør da hvilke af disse mængder, der lineært uafhængige, og bestem koordinaterne til vektoren $(1,2i,-3)$ med hensyn til S_2.

11. Vis, at hvert af følgende sæt af polynomier i P_3 (rummet af alle reelle polynomier af grad ≤ 3) vil udgøre en basis for P_3.

$$\{ 1,\ 1 + t,\ t + t^2,\ t^2 + t^3 \}$$
$$\{ 1,\ 1 + t,\ 1 + t^2,\ 1 + t^3 \}$$

og fastlæg koordinaterne til polynomiet $p(t) = t^3 - t^2$ i forhold til hver af baserne.

12. Betragt vektorrummet $\mathbb{C}^3$ over $\mathbb{R}$. Hvilken dimension har dette vektorrum (se tillige kapitel 3 opgave 24).

13. Løs ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. Angiv for hver værdi af det reelle tal a mængden af løsninger til ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x \quad\quad + z + aw &= 1 \\
x + y + z \quad\quad &= 1 \\
y + z - w &= 1 \\
x + y \quad\quad - w &= 1
\end{aligned}
$$

15. Bestem det reelle tal b således, at ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x - y + z + w &= 1 \\
y + z + w &= 0 \\
-x + y - 4z + 5w &= b + 4 \\
2x - 2y + 5z + bw &= 1
\end{aligned}
$$

har mindst en løsning, og fastlæg for hvert sådant b samtlige løsninger til systemet.

16. Der er givet matricen

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}
$$

Bestem såvel række- som søjlerang for matricen B. Betegner M en matrix på trappeform, som er rækkeækvivalent med B, skal man udregne B^2 og M^2. Vil disse to matricer have samme rækkerang?

17. Angiv en basis for løsningsrummet for ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= 0 \qquad & -x - 2y + 3z &= 0 \\
4x + 8y - 12z &= 0 \qquad & x - y + 5z &= 0,
\end{aligned}
$$

og bestem de talsæt $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ for hvilke ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= b_1 \qquad & -x - 2y + 3z &= b_2 \\
4x + 8y + 12z &= b_3 \qquad & x - y + 5z &= b_4
\end{aligned}
$$

har mindst én løsning.

18. Bestem det reelle tal b således at ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
4x - 5y - 2z + 3w &= 3 \\
3x - 3y - 5z + 4w &= 4 \\
2x - 5y + 4z - w &= b
\end{aligned}
$$

har mindst én løsning. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet med dette valg af b.

19. Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 3. \end{aligned}$$

20. Der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

og bestem løsningsmængden til ligningssystemet $Ax = 0$. Fastlæg derpå vektoren b, således at ligningssystemet $Ax = b$ har mindst én løsning.

21. Idet P_3 er rummet af alle reelle polynomier af højst tredie grad, defineres operatorerne Q_1, Q_2: $P_3 \to P_3$ ved

$$Q_1p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t)$$

$$Q_2p(t) = t^2p''(t) - 2tp'(t) + 3p(t)$$

for alle reelle t. Bestem nulrum og billedrum for begge operatorer.

22. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, er de to differentialoperatorer L_1, L_2: $C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$L_1f = f'' + 4f' + 3f$$

$$L_2f = f'' + 4f' + 5f.$$

Bestem en basis for hver af nulrummene $N(L_1)$ og $N(L_2)$, når det oplyses, at funktionen ϕ: $t \to e^{at}$ for passende valg af $a \in \mathbb{C}$ vil tilhøre nulrummet. Hvad bliver nulrummenes dimension?

23. Når $M_{3,3}$ er rummet af alle reelle 3×3-matricer, defineres en lineær afbildning $f: M_{3,3} \to M_{3,3}$ ved, at $f(X) = M \cdot X$, idet matricen M er fastlagt ved

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestem nulrum og billedrum for afbildningen f.

24. Lad de lineære afbildninger $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ og $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ i en passende valgt basis være givet ved matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$.

25. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, og differentialoperatoren $L: C^\infty \to C^\infty$ er for alle tal $a, b \in \mathbb{R}$ givet ved

$$Lf = f'' + af' + bf.$$

Bestem tallene a og b, når funktionerne

$$\phi_1(t) = e^{-t} \quad \text{og} \quad \phi_2(t) = e^{2t}$$

er basis for nulrummet $N(L)$. Bestem tillige en basis for nulrummet, hvis $a = 7$ og $b = 10$.

26. Fastlæg det reelle tal a, således at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & a \end{pmatrix}$$

vil have egenværdien -1.

27. Lad $A_{s,t}$ betegne matricen

$$\begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Bestem tallene s og t, når vektoren (1,1,1) er egenvektor for matricen $A_{s,t}$, find derpå samtlige egenværdier for matricen. Er det muligt at bestemme en basis for $\mathbb{R}^3$ af egenvektorer for matricen?

28. Bestem samtlige egenværdier til matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og bestem de tilhørende egenvektorer. Kan man fastlægge en basis af egenvektorer for B?

29. Der er givet en lineær afbildning L: $C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = f'' + 4f' + f.$$

Vis, at funktionen $\phi(t) = te^{-2t}$ tilhører egenrummet svarende til egenværdien -3, og bestem derpå en basis for dette rum.

30. Bestem det reelle tal s således, at matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & s & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har egenværdien -1. Bestem i dette tilfælde alle egenværdier og egenvektorer. Kan matricen diagonaliseres?

31. En lineær afbildning f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fastlæg en basis for $\mathbb{R}^4$, som består udelukkende af egenvektorer for f.

Opgavesæt A:

A 1. Angiv for alle talpar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ antallet af løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z - 2w &= -1 \\ x + 2z - w &= 2 \\ y + z + 2w &= a \\ -x + y - z + bw &= 1 \end{aligned}$$

og løs derpå ligningssystemet for $(a,b) = (3,2)$.

A 2. Der er givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vis, at **A** ikke kan diagonaliseres.
Vis dernæst, at **A** ved et passende basisskifte kan bringes på jordans normalform.
Benyt fx dette til at løse differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{f}(t),$$

med $\mathbf{f}(0) = (1,1,1,1)^T$.

A 3. Idet C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Bestem a og b således at funktionen

$$\alpha: t \to te^{-2t}$$

er egenfunktion for L svarende til egenværdien 8, og fastlæg endelig en basis for egenrummet for L svarende til egenværdien 8.

A 4. Lad U og V betegne henholdsvis nulrum og billedrum for en lineær afbildning g af $\mathbb{R}^4$ ind i sig selv fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en basis for hvert af rummene U, V og $U \cap V$. Fastlæg på denne baggrund en basis for billedrummet for g^2.

Opgavesæt B:

B 1. C^∞ er rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner. Vis, at funktionen

$$\alpha: t \to t\cos t$$

tilhører nulrummet for operatoren $L: C^\infty \to C^\infty$ givet ved

$$Df = (D^4 + 2D^2 + D^0)f,$$

og fastlæg herefter en basis for nulrummet. Fastlæg tillige en basis for egenrummet svarende til egenværdien 1.

B 2. Lad **A** være matricen givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og lad f og g være de lineære afbildninger svarende til henholdsvis **A** og $\mathbf{A}^T$.

Bestem ortogonale baser for nulrummet for f - N(f) - og for billedrummet for g - B(g). Vis, at disse to baser udgør en ortogonal basis for R^5.

B 3. Lad **B** betegne matricen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

hvor (a,b,c) er et sæt af komplekse tal, hvorom det gælder, at (1,1,1) er en egenvektor for **B**. Find samtlige egenværdier for **B**.

Afgør hvornår **B** er regulær, og vis, at nulrummet i modsat fald har dimension 1.

Begrund, at enhver basis bestående af egenvektorer vil være ortogonal, hvis a, b og c er reelle tal.

B 4. De to matricer **V** og **U** er givet ved

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bevis, at $\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^3$, $\qquad \mathbf{U}^4 = \mathbf{V}^4 = \mathbf{0}$

og $\mathbf{UV} = \mathbf{VU} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$.

Sætter vi $\mathbf{A}_t = \mathbf{E} + t\mathbf{V}$ og $\mathbf{B}_t = \mathbf{E} + t\mathbf{U}$

vis da, at $B_1^{-1} = \mathbf{A}_{-1}$.

Vis endelig, at det for alle reelle $t \neq 0$ gælder, at $\mathbf{A}_1$ er jordans normalform for $\mathbf{B}_t$, og bestem en matrix $\mathbf{S}_t$, så

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{S}_t\mathbf{A}_1\mathbf{S}_t^{-1}.$$

Opgavesæt C:

C 1. De lineære afbildninger $f,g\colon R^4 \to R^4$ er i en passende valgt basis givet ved matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & -10 \\ -3 & -5 & -6 & 8 \\ -3 & -6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vis, at $B(f) = N(g)$ og at $B(g) \cap N(f) = \{0\}$, og bestem $B(gf)$ og $B(fg)$.

C 2. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres for alle reelle talpar (a,b) en lineære operator $L\colon C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lf = (D^3 + aD + bD^0)f.$$

Fastlæg talparret (a,b), således at funktionen

$$\beta\colon t \to e^{-t}\cos 2t$$

tilhører nulrummet for L.
Bestem derpå en basis for nulrummet, samt en basis for egenrummet svarende til egenværdien -10.

C 3. Vis, at matricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

vil have det karakteristiske polynomium

$$p(\mu) = (\mu + 4)(\mu + 2)^3,$$

og vis tillige, at egenrummet svarende til egenværdien -2 vil have dimension 2.
Foretag derpå et basisskifte, således at matricen $\mathbf{A}$ vil transformere til en jordanmatrix, og benyt fx dette til at bestemme løsningen til differentialligningssystemet

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{Af}(t), \quad \text{hvor} \quad \mathbf{f}(0) = (0,1,2,0)^T.$$

C 4. $P_3[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 3. grad givet på intervallet $[-1,1]$. På dette

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b /93. Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 *EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV*

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251/93 ***Genotypic Proportions in Hybrid Zones***

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252/93 ***MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER***

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 ***Kuglepakning***

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 ***Regressionsanalyse***

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 ***TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED***

af: Peter Harremoës

256/93 ***Determination of the Frequency Dependent Bulk Modulus of Liquids Using a Piezoelectric Spherical Shell (Preprint)***

by: T. Christensen and N.B.Olsen

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ baseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

D 3. Idet C^∞ betegner rummet af alle reelle, vilkårligt ofte differentiable funktioner, defineres en lineær operator $L: C^\infty \to C^\infty$ ved

$$Lg = (D^3 - 3D + 2D^0)g.$$

Fastlæg en basis for nulrummet for L.

Funktionen $\alpha: t \to te^{-t}$ tilhører et egenrum for L.

Bestem den tilhørende egenværdi samt en basis for egenrummet.

D 4. Den lineære afbildning $F: R^4 \to R^4$ er i den sædvanlige basis givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at afbildningen F vil have det karakteristiske polynomium $p(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda + 2)^2$

og vis, at matricen ikke kan diagonaliseres.

Fastlæg endelig en basis i R^4, således at den til F svarende matrix i denne basis vil være på Jordans normalform.

rum defineres det indre produkt

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Fastlæg en ortogonal basis for underrummet

$$Q = \{ p \in P_3 \mid p(1) = 0 \wedge p(-1) = 0 \}.$$

Beskriv dernæst de polynomier, der tilhører $Q^{\perp}$ (det ortogonale komplement til Q) og vis, at polynomierne

$$\alpha(t) = 5t^2 - 1 \quad , \quad \beta(t) = 7t^3 - 3t$$

er en ortogonal basis for $Q^{\perp}$.

De ortogonale baser i Q og $Q^{\perp}$ vælges nu som basis for P_3. Bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 + 3.$$

Opgavesæt D:

D 1. Lad U og V være nulrum og billedrum for den lineære afbildning f: $R^4 \to R^4$, der er fastlagt ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Angiv en parameterfremstilling for hvert af rummene U, V og $U \cap V$, og fastlæg endelig billedrummet for afbildningen f^2.

D 2. $P_2[-1,1]$ er vektorrummet bestående af alle reelle polynomier af højst 2. grad givet på intervallet [-1,1]. På dette rum defineres det indre produkt

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Med Q betegnes det underrum, der udspændes af polynomierne

$$\alpha(t) = t + 1 \quad , \quad \beta(t) = t^2 - t.$$

Vis, at $\{ \alpha , \beta \}$ er en ortogonal basis for Q.

Bestem derpå en basis for det ortogonale komplement til Q - kaldet $Q^{\perp}$.

Man vælger nu disse baser for Q og $Q^{\perp}$ som basis for hele P_2, og bestem i denne basis koefficienterne for polynomiet

$$\mu(t) = t^2 - 3.$$