

**Modellering af dispersion i
piezoelektriske keramikker**

Pernille Postgaard

Jannik Rasmussen

Christina Specht

Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

Modellering af dispersion i piezoelektriske keramikker

af: Pernille Postgaard, Jannik Rasmussen, Christina Specht, Mikko Østergård

Vejleder: Tage Christensen

IMFUFA tekst nr. 257/93

73 sider

ISSN 0106-6242

Abstract

Nærværende tekst omhandler modellering af piezoelektriske keramikkers frekvensafhængige opførsel. Keramikernes disperse egenskaber er forsøgt modelleret ved at gøre materialeparametrene til frekvensafhængige potensfunktioner.

Det viser sig at termodynamikkens anden hovedsætning giver et bånd på værdierne af potenserne. Dette bånd har vi undersøgt eksperimentelt, og indført i modellen af PZ29.

Indførslen af de frekvensafhængige materialeparametre giver en klar forbedring af overensstemmelsen mellem målinger og beregninger.

Indholdsfortegnelse

Kapitel 1 Indledning	3
1.1 Fremstilling af den piezoelektriske keramik	3
1.2 Fremstilling af problem	5
Kapitel 2 Opstilling af model	7
2.1 Den konstitutive relation	7
2.2 Den radielle bevægelsesligning	8
2.3 Løsning af differentialligning for $u_r(r)$	10
2.4 Kapacitet af skive	12
Kapitel 3 Modificering af modellen	14
3.1 Sammenligning af måling og umodificeret model	14
3.2 Modificering af parametre	17
3.3 De enkelte parametres betydning	19
3.4 Måling af C_{clamp}	22
3.5 Temperatur og hukommelse i keramikkerne	27
Kapitel 4 Resultater	32
4.1 Fittede grafer for PZ29	32
4.2 Fittede grafer for PZ27 og PZ26	36
4.3 Problemer	41
4.5 Evaluering af modellen	45
Appendiks A Grundlæggende elasticitetsteori	47
A.1 Spændingstensoren	47
A.2 Straintensoren	51
A.3 Elasticitetsmodultensoren	52
A.4 Newtons 2. lov	53
Appendiks B Energibåndsteknik	55
B.1 Et-port systemer	55
B.2 Responsefunktionerne	56
B.3 To-port systemer	59

Appendiks C Forsøgsbeskrivelse	61
C.1. Apparatur og opstilling	61
C.2. Måling af C_{clamp}	62
Appendiks D Fitteprogram	65
D.1 Programbeskrivelse	65
D.2 Fitteprogram	67
Appendiks E Materialeparametre	71
Litteraturliste	72

Kapitel 1

Indledning

Kapitlet indeholder en beskrivelse af de piezoelektriske keramikker. Vi kommer ind på, hvordan de fremstilles, og hvordan den elektriske del relateres til den mekaniske. Endvidere beskrives, hvad piezokeramikker anvendes til her på instituttet, og den konkrete problemstilling for nærværende rapport fremstilles.

1.1 Fremstilling af den piezoelektriske keramik

Vi benytter alle piezoelektriske keramikker eller krystaller i vores dagligdag. De findes f.eks. i fjernbetjeningen til TV/video, mikrofonen i en telefon, højttalere, lightere, pick-up'er og blitz'. De har den særlige egenskab, at de kan omsætte mekanisk energi til elektrisk energi og vice versa. De finder derfor også stor anvendelse indenfor fysikken, hvor de bl.a. anvendes til spændingstransformatorer, i elektrontunnellingmikroskoper, ultrasonisk apparatur og her på instituttet til bestemmelse af seje væskers viskoelasticitet.

De piezoelektriske keramikker fremstilles ved, at man blander ferroelektrisk, polykrystallinsk materiale. Disse faste stoffer reagerer kemisk og blandingen brændes efterfølgende ved høj temperatur. Dernæst pulveriseres den for at opnå ensartethed, og et bindemiddel tilsættes. Keramikken er isotrop, og hvert korn har et elektrisk moment, da det er lavet af ferroelektrisk materiale. Disse polarisationer ligger vilkårligt i keramikken. Den trykkes nu til den ønskede geometriske facon, og beklædes med et tyndt ledende lag på begge sider. Det er så herefter, at keramikken gøres piezoelektrisk; man lægger et kraftigt E-felt over den. Dette kaldes at "pole" keramikken, og den bliver hermed permanent polariseret i retning af det pålagte E-felt. Det samlede dipolmoment er nul, da der ligger sig ladninger på overfladen, som kompenserer for denne effekt. Man har således ensrettet de forskellige polarisationer, der er i keramikken. Det er dog ikke muligt at polarisere den 100%, men det er muligt at opnå gode resultater i bestemte ferroelektriske materialer f.eks. bly-zirconat-titanat [Gallego-Juárez;90], som de i projektet anvendte keramikker består af. Det er her vigtigt at notere sig, at polariseringen medfører, at der ikke længere er isotropi i keramikken i den retning; E-feltet er lagt. Derimod bibeholdes den i de øvrige retninger vinkelret på denne. I keramikken vil der altså ikke være forskel på retninger vinkelret på polariseringen.

Sker der en mekanisk påvirkning af keramikken, som medfører, at den deformeres, vil den få et samlet dipolmoment, der kommer til udtryk som en spændingsforskel over keramikken. Det kaldes den direkte piezoelektriske effekt, og relaterer altså en påført mekanisk spænding til en ændring i polarisationen i keramikken. Det, der kaldes den omvendte effekt, relaterer så et påført E-felt (spænding) til en dimensionel ændring (strain). De elektriske og elastiske forhold i en piezoelektrisk keramik er altså koblede [Gallego-Juárez;89].

I lineære medier, under indflydelse af et E-felt, vil den elektriske relation kunne skrives som:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1)$$

hvor D er det elektriske forskydningsfelt, og ϵ er permittiviteten af materialet. Den tilsvarende mekaniske relation for samme stof, hvor det er påført en mekanisk spænding σ , er givet ved:

$$\vec{\epsilon} = s \vec{\sigma} \quad (1.2)$$

hvor s er føjeligheden af materialet, og ϵ er strain.

I det piezoelektriske materiale, kan vekselvirkningen mellem de elastiske og elektriske variable beskrives ved flg. lineære relationer:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= d \vec{\sigma} + \epsilon^o \vec{E} \\ \vec{\epsilon} &= s^E \vec{\sigma} + d \vec{E} \end{aligned} \quad (1.3)$$

hvor d er en piezoelektrisk konstant. Suffix σ og E betyder henholdsvis fastholdt spænding og E-felt. Den første ligning beskriver den direkte piezoelektriske effekt, og den anden den omvendte.

Det er muligt at opstille to gange fire lineære piezoelektriske relationer (fire for den direkte effekt og fire for den omvendte). Hvilke, der vælges, afhænger af valget af uafhængige variable – en mekanisk og en elektrisk. Et eksempel på en af de fire relationer er i tensornotation givet ved:

$$\begin{aligned} D_m &= d_{mi} \sigma_i + \epsilon_{mk}^o E_k \\ \epsilon_i &= s_{ij}^E \sigma_j + d_{mi} E_m \end{aligned} \quad (1.4)$$

Her er enkelt-index på D og ϵ betegnelse for retningen. Hvorledes spændings- og strain-tensorerne ser ud, og hvilke symmetriforhold, der gør sig gældende, er beskrevet i appendiks A.

Når relationerne i (1.3) anvendes i arbejdet med de piezoelektriske keramikker, skal der ligeledes ses på disses geometriske udformning. Ses der på en cirkulær skive, som er påtrykt et E-felt i 3-retningen (z-retningen), er der f.eks. givet:

$$\begin{aligned} D_3 &= \epsilon_{33}^0 E_3 + d_{31} \sigma_1 + d_{32} \sigma_2 + d_{33} \sigma_3 \\ e_1 &= s_{11}^E \sigma_1 + s_{12}^E \sigma_2 + s_{13}^E \sigma_3 + d_{31} E_3 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Udfra de to gange fire relationer (hvor de to er beskrevet i (1.4)) kan de enkelte konstanter direkte bestemmes [Gallego-Juárez;89]. For eksempel er d givet ved:

$$d = \left(\frac{\partial D}{\partial \sigma} \right)_E = \left(\frac{\partial e}{\partial E} \right)_\sigma \quad (1.6)$$

Forskellige piezoelektriske keramikker har forskellige værdier for de piezoelektriske konstanter. Der er også forskel på permittiviteten af de forskellige typer keramikker. Et af de andre punkter, hvor der er stor forskel, er deres temperaturtolerance. Nogle har f.eks. et meget højt curiepunkt, hvorfor de er meget anvendelige i forsøg, hvor der arbejdes med høje temperaturer. Curiepunktet er grænsetemperaturen, hvor polarisationen ødelægges.

1.2 Fremstilling af problem

På IMFUFA anvender Niels Boye Olsen og Tage Christensen piezokeramisk materiale til måling af seje væskers viskoelasticitet, (det er ikke denne, de er direkte interesserede i, men glasovergangen for forskellige seje væsker). De har konstrueret nogle kugleskaller vha. halvkugleskaller af piezokeramisk materiale. Ved at fylde disse skaller med den seje væske, der ønskes undersøgt, og måle den elektriske impedans, kan de indirekte finde væskens viskoelasticitet. Ideelt set vil den tomme kugleskal, der blot indeholder luft, have en mekanisk impedans, der er lig nul. Er der derimod væske i kugleskallen, vil denne koble til keramikken, og der vil kunne måles en impedans, der afhænger af den pågældende væskes impedans. Først foretages en referencemåling af kugleskallen uden væske i, og herefter en måling med væske i. Det, der egentlig måles, er kapaciteten af en fri kugleskal og en indspændt. Ved at se hvor meget væsken er i stand til at dæmpe piezokeramikens bevægelse, fås der et mål for, hvor stiv væsken er. Når der anvendes en kugleskal, er det for at få et mål for væskens bulkmodulus. Ved anvendelse af skiver, finder man væskens shearmodulus.

Det, der har givet anledning til projektet, er, at den opstillede model ikke helt passer. Indtil nu har PZ26 og PZ27 været i anvendelse, men man vil gerne gå over til at anvende PZ29, da denne har en højere koblingsfaktor. Dette bevirker, at der kommer et større spænd mellem C_{fr} og C_{clamp} , hvilket giver en større målenøjagtighed. Desværre er der større dispersion i PZ29 end i PZ26, hvilket betyder, at der ikke vil være meget vundet ved at gå over til PZ29. Det vil der være, hvis denne dispersion kan modelleres og indpasses i modellen. Projektet behandler modellering af dispersionen og tilpasning af modellen.

Problemformulering:

Den pt. eksisterende model af piezoelektriske keramikkers transduceregenskaber tager ikke højde for dispersion. Dette medfører utilfredsstillende målesikkerhed, og der ønskes derfor en beskrivelse af keramikernes materialeparametre, der inddrager denne.

Da PZ29 vil være mest interessant for fremtidig brug, for så vidt tabet kan modelleres, skal vi primært beskæftige os med denne keramik. Der er dog også foretaget målinger på PZ26 og PZ27.

Fremgangsmåden i det følgende er den, at der først opstilles en ideel, tabsfri model (kapitel 2), som derefter modificeres til at tage højde for dispersion (kapitel 3). Der er sideløbende foretaget målinger af kapacitansen af de forskellige skive-kondensatorer, der sammenlignes med modellen. Endvidere er kapacitansen af en indspændt skive (PZ29) målt, og der er foretaget nogle målinger ved varierende temperatur (hvilket vi dog ikke forsøger at modellere). Endelig fittes de fra modellen beregnede kurver til de målte, i et forsøg på at finde bedre værdier af materialeparametrene end de af producenten opgivne (kapitel 4).

Endvidere er der fem appendices: to baggrundsorienterende (grundlæggende elasticitetsteori og energibåndsteknik), to tekniske (forsøgsbeskrivelse og fitteprogram), samt en tabel indeholdende værdier af materialeparametre for keramikkerne.

Kapitel 2

Opstilling af model

I dette afsnit vil vi opstille et udtryk for kapaciteten af en cirkulær, piezoelektrisk, keramisk skive, påtrykt et E -felt i z -aksens retning. Det er interessant at finde et udtryk for kapaciteten, da det viser sig, at denne er afhængig af forskydningen, hvorfor vi kan få oplysninger om keramikens piezoelektriske egenskaber uden at måle direkte på udsvinget.

Da vi på forhånd ved, at en sådan påvirkning vil medføre en deformation i radiel retning (r -retning), vil vi opstille Newtons 2. lov for en skive af et homogent stof, der deformeres i r -retningen. Herefter omformes dette udtryk, via de konstitutive relationer, til et udtryk for deformationen af en skive af piezoelektrisk materiale, og der opstilles en differentiaalligning i $u_r(r)$ (udsving i radiel retning som funktion af radius), som løses.

2.1 Den konstitutive relation

I kapitel 1, ligning (1.3), beskrives en generel konstitutiv relation for piezoelektriske keramikker. Det viser sig, at man i forskellige specialtilfælde kan se bort fra visse elementer i denne. Vi arbejder med en cirkulær skive, der er meget tynd, hvilket betyder, at vi kan tillade os, at reducere det generelle udtryk på følgende måde:

Det antages at spændingstensoren i cylinderkoordinater er diagonal i det lokale koordinatsystem.

For små frekvenser (0 - 500 kHz) vil bølgelængden af udsvinget i z -aksens retning, være meget større end tykkelsen af skiven. For PZ29 er Youngs modul i z -retningen $4,8 \cdot 10^{10}$ N/m² og massefylden er $7,40 \cdot 10^3$ kg/m³, hvilket svarer til en bølgehastighed på ca. $2,5 \cdot 10^3$ m/s. Ved 500 kHz giver dette en bølgelængde på 5 mm, hvor skivens tykkelse er 0,5 mm. Spændingsgradienten i denne retning vil således være tæt på nul. Da spændingen ved skivens overflade er nul, antages z -komponenten at have denne værdi overalt.

Da spændingen påtrykkes i z-retningen, må der endvidere gælde:

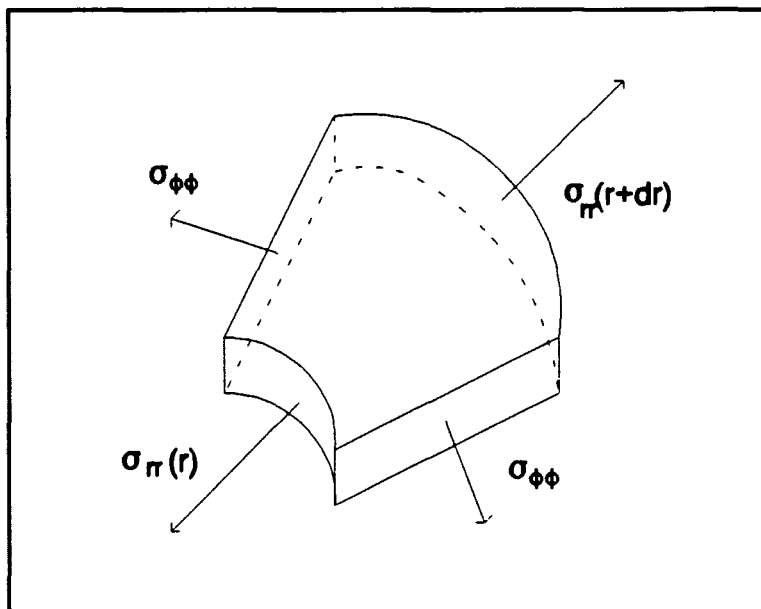
$$E_r = 0 \quad , \quad D_r = 0 \quad , \quad E_\phi = 0 \quad , \quad D_\phi = 0 \quad (2.1)$$

Føjelighedstensorens symmetri medfører at $s_{12} = s_{21}$ (se afsnit A.3), mens $d_{13} = d_{31}$ og $d_{23} = d_{32}$ ifølge Onsager-relationerne. Da der ikke er forskel på r- og ϕ -retningen, må $s_{11} = s_{22}$ og $d_{13} = d_{23}$. Den konstitutive relation kan således skrives op som følger:

$$\begin{pmatrix} e_{rr} \\ e_{\phi\phi} \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & d_{13} \\ s_{12} & s_{11} & d_{13} \\ d_{13} & d_{13} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\phi\phi} \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

2.2 Den radielle bevægelsesligning

Vi vil nu opstille Newtons 2. lov for radielle deformationer i en homogen, cirkulær skive uden tangentialspændinger. Betragt et infinitesimalt udsnit af en skive, beskrevet i cylindriske koordinater. Da der ses bort fra vibrationer i z-aksens retning, vil kraften og dermed spændingen i denne retning være nul. Den resulterende kraft på skiveudsnittet vil altså være summen af kræfterne på de fire flader parallelt med z-aksens retning:



Figur 2.1 Udsnit af skive med normalspændinger. Af symmetri-grunde er der ingen tangentialspændinger.

$$dF = \rho r d\phi h dr \frac{\partial^2 u_r(r)}{\partial t^2} = \sigma_{rr}(r + dr) \cdot h(r + dr) d\phi - \sigma_{rr}(r) \cdot h r d\phi - 2 \sigma_{\phi\phi} \sin \frac{d\phi}{2} h dr \quad (2.3)$$

hvor h er skivens tykkelse og ρ er massefylden. For $d\phi \rightarrow 0$ og $dr \rightarrow 0$ fås:

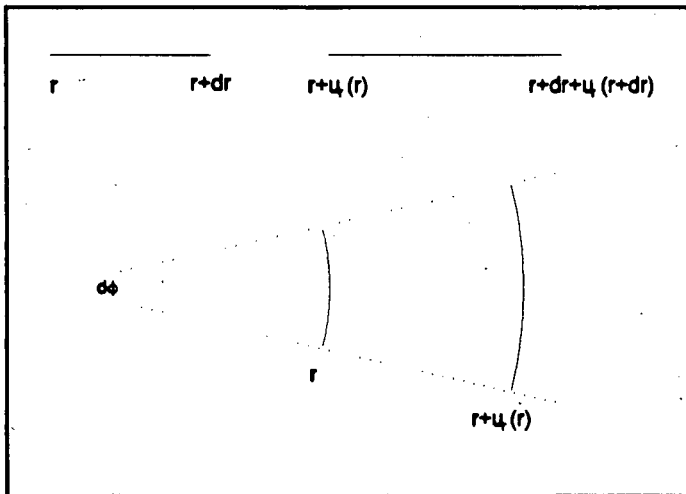
$$\rho \frac{\partial^2 u_r(r)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rr}(r) - \frac{1}{r} \sigma_{\phi\phi} \quad (2.4)$$

Som det ses, er den opstillede ligning udtrykt ved spændinger. Vi er imidlertid interesserede i at lave hele udtrykket til en differentiallyingning i $u_r(r)$, hvorfor vi omskriver ligningerne via den konstitutive relation. Det ses, at sammenhængen mellem spænding og strain må se således ud:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= s_{11} \sigma_{rr} + s_{12} \sigma_{\phi\phi} + d_{13} E_z \\ \epsilon_{\phi\phi} &= s_{12} \sigma_{rr} + s_{11} \sigma_{\phi\phi} + d_{13} E_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ud fra disse to ligninger ses det, at udtrykkene for spændingerne må være:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{s_{11}}{s_{11}^2 - s_{12}^2} \epsilon_{rr} - \frac{s_{12}}{s_{11}^2 - s_{12}^2} \epsilon_{\phi\phi} - \frac{d_{13}}{s_{11} + s_{12}} E_z \\ \sigma_{\phi\phi} &= -\frac{s_{12}}{s_{11}^2 - s_{12}^2} \epsilon_{rr} + \frac{s_{11}}{s_{11}^2 - s_{12}^2} \epsilon_{\phi\phi} - \frac{d_{13}}{s_{11} + s_{12}} E_z \end{aligned} \quad (2.6)$$



Figur 2.2 Forskydning af et radielt liniestykke og en storcirkel i radial retning.

Går man tilbage til definitionen af strain, ser man, at der er en simpel sammenhæng mellem strain og forskydningsfelt, $u_r(r)$. Betragt et liniestykke med endepunkterne r og $(r + dr)$, punktet r føres over i punktet $(r + u_r(r))$ og punktet $(r + dr)$ føres over i punktet $(r + dr + u_r(r + dr))$, ved en deformation.

Ligeledes vil det gælde, at et liniestykke $r d\phi$ føres over i liniestykket $(r + u_r(r)) d\phi$.

Man kan altså opstille følgende udtryk for de to ϵ 'er:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{u_r(r+dr) - u_r(r)}{dr} = \frac{\partial u_r(r)}{\partial r} \\ \epsilon_{\phi\phi} &= \frac{(r + u_r(r))d\phi - rd\phi}{rd\phi} = \frac{u_r(r)}{r} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Indsættes udtrykkene fra (2.6) og (2.7) i (2.4) fremkommer følgende udtryk, som udelukkende er afhængigt af $u_r(r)$:

$$\frac{s_{11}}{s_{11}^2 - s_{12}^2} \left(\frac{\partial^2 u_r(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r(r)}{\partial r} - \frac{u_r(r)}{r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_r(r)}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

Da $u_r(r) = u_r e^{-i\omega t}$ får man:

$$\frac{\partial^2 u_r(r)}{\partial r^2} = -\omega^2 u_r(r) \quad (2.9)$$

2.3 Løsning af differentiaalligning for $u_r(r)$

Vi vil nu argumentere for, at den opstillede ligning er en besseldifferentiaalligning i $u_r(r)$, hvorfor løsningen kan opskrives som en besselfunktion. Differentiaalligningen omskrives til:

$$\frac{\partial^2 u_r(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r(r)}{\partial r} + \left(\omega^2 \rho \frac{s_{11}^2 - s_{12}^2}{s_{11}} - \frac{1}{r^2} \right) u_r(r) = 0 \quad (2.10)$$

Som det ses, kan denne ligning ikke umiddelbart løses med en besselfunktion, da den variable (r) har en dimension, og den variable i en besseldifferentiaalligning skal være dimensionsløs.

For at opstille en ligning, der med sikkerhed er en besseldifferentiaalligning, definerer vi en funktion $z_v(kr)$, der afhænger af noget dimensionsløst, nemlig radius r multipliceret med bølgetallet k .

$$f(r) = z_v(kr), \quad \frac{\partial f(r)}{\partial r} = \frac{\partial z_v(kr)}{\partial (kr)} k, \quad \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z_v(kr)}{\partial (kr)^2} k^2 \quad (2.11)$$

Funktionen $z_v(kr)$ opfattes nu som løsning til en besseldifferentialligning. Vi kan derfor skrive:

$$\frac{\partial^2 z_v(kr)}{\partial (kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{\partial z_v(kr)}{\partial (kr)} + \left(1 - \frac{v^2}{(kr)^2}\right) z_v(kr) = 0, \quad (2.12)$$

hvor v er besselfunktionens orden. Heraf følger:

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) f(r) = 0, \quad (2.13)$$

for $k = \omega \sqrt{\rho \frac{s_{11}^2 - s_{12}^2}{s_{11}}}$ og $v = 1$.

Som det ses, vil denne ligning være identisk med den for skiven opstillede differentiaalligning, hvis man definerer k og v som ovenfor og sætter $f(r) = u_r(r)$. Dette medfører, at man får en fuldstændig besselløsning $u_r(r) = AJ_1(kr) + BY_1(kr)$.

Den situation, vi er interesserede i at beskrive, fordrer to randbetingelser: at udsvinget i centrum af skiven ($r = 0$) er 0 og at spændingen på kanten af skiven ($r = R$) er 0:

$$\begin{aligned} u_r(0) = 0 &\rightarrow B = 0 \quad \text{da} \quad Y_1(0) = \infty \wedge J_1(0) = 0 \\ \sigma_{rr}(R) = 0 &\rightarrow \left(\frac{\partial u_r(r)}{\partial r}\right)_R - \frac{s_{12}}{s_{11}} \frac{1}{R} u_r(R) + \left(\frac{s_{12}}{s_{11}} - 1\right) d_{13} E_z = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Før funktionen $J_v(z)$ gælder rekursionsformlen:

$$\frac{\partial J_v}{\partial z} = J_{v-1} - \frac{v}{z} J_v, \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Indsættes løsningen $u_r(r) = AJ_1(kr)$ i anden randbetingelse, fås ved brug af ovenstående udtryk:

$$u_r(r) = \frac{\left(1 - \frac{s_{12}}{s_{11}}\right) d_{13} E_z \frac{1}{k}}{J_0(kR) - \frac{1}{kR} \left(1 + \frac{s_{12}}{s_{11}}\right) J_1(kR)} J_1(kr) \quad (2.16)$$

Dette må betyde, at skivens udsving i randen $r = R$ bliver:

$$u_r(R) = \frac{\left(1 - \frac{s_{12}}{s_{11}}\right) d_{13} E_z R}{kR \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} - \left(1 + \frac{s_{12}}{s_{11}}\right)} \quad (2.17)$$

Der vil være resonans, når nævneren er lig nul.

2.4 Kapacitet af skive

Som tidligere nævnt vil vi finde et udtryk for skivens kapacitet. Da relationen mellem C og V er $C = Q/V$, vil vi først opstille et udtryk for Q . Da D_x og D_y er nul, ved vi fra Maxwells ligninger at:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{fri} \\ Q &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r D_z(r) d\phi dr \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ifølge den konstitutive relation gælder følgende sammenhæng mellem D_z og E_z :

$$D_z(r) = \frac{d_{13}}{s_{11} + s_{12}} \left(\frac{\partial u_r(r)}{\partial r} + \frac{u_r(r)}{r} - 2d_{13} E_z \right) + \epsilon_{33} E_z \quad (2.19)$$

Benyttes at $d/dr (r u_r) = r du_r/dr + u_r$, vil der altså for Q gælde:

$$Q = 2\pi R \frac{d_{13}}{s_{11} + s_{12}} u_r(R) + \pi R^2 E_z \left(\epsilon_{33} - \frac{2d_{13}^2}{s_{11} + s_{12}} \right) \quad (2.20)$$

Det i formel (2.17) opstillede udtryk for udsvinget i randen $u_r(R)$ indsættes, hvorved man når frem til følgende udtryk for ladningen:

$$Q = \left(\frac{2d_{13}^2}{s_{11} + s_{12}} \frac{\left(1 - \frac{s_{12}}{s_{11}}\right)}{kR \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} - \left(1 + \frac{s_{12}}{s_{11}}\right)} + \epsilon_{33} - \frac{2d_{13}^2}{s_{11} + s_{12}} \right) \pi R^2 E_z \quad (2.21)$$

Indsættes udtrykket for det elektriske felt i en pladekondensator, $E_z = V/h$, hvor h er afstanden mellem pladerne, og udtrykkene:

$$k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{(s_{11} + s_{12})\epsilon_{33}}, \quad \sigma_p = -\frac{s_{12}}{s_{11}} \quad (2.22)$$

hvor k_p er koblingsfaktoren og σ_p er Poissons forhold, fremkommer følgende udtryk:

$$C_{fri} = \left(\left(\frac{1 + \sigma_p}{kR \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} - 1 + \sigma_p} - 1 \right) k_p^2 + 1 \right) \epsilon_{33} \frac{\pi R^2}{h} \quad (2.23)$$

Når skiven er indspændt (clampet), vil $u_r(R) = 0$. Ved indsættelse af dette i (2.20), fremkommer følgende simple udtryk for kapaciteten af en indspændt skive:

$$C_{clamp} = (1 - k_p^2) \epsilon_{33} \frac{\pi R^2}{h} \quad (2.24)$$

Et interessant grænsetilfælde er kapaciteten for en fri skive ved frekvensen nul. Betragtes (2.23) ses, at man må undersøge grænseværdien af C_{fri} for $kR \rightarrow 0$. Man får:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow kR \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} = kR \frac{1 - \frac{(kR)^2}{2^2} + \dots}{\frac{kR}{2} + \frac{(kR)^3}{2^2 \cdot 4} + \dots} \approx 2 \quad (2.25)$$

Dette giver et udtryk for C_0 :

$$C_0 = \epsilon_{33} \frac{\pi R^2}{h} \quad (2.26)$$

Dette udtryk vil endvidere være en god approximation for lave frekvenser.

Endelig vil det være interessant at vide, ved hvilken frekvens kapaciteten for den fri skive har samme værdi som kapaciteten for den indspændte skive:

$$C_{fri} = C_{clamp} \Rightarrow \frac{J_1(kR)(1 + \sigma_p)}{kR J_0(kR) - (1 - \sigma_p) J_1(kR)} = 0 \Rightarrow J_1(kR) = 0 \quad (2.27)$$

Dette vil være tilfældet, hvis $kR = 3,832$. Indsættes dette i det i ligning (2.13) definerede udtryk for k , kan ω bestemmes.

Kapitel 3

Modificering af modellen

I dette kapitel vil vi modificere det beregnede udtryk for kapacitansen af den piezoelektriske skive. Det skyldes, at der, som det bliver beskrevet i 3.1, ikke er overensstemmelse mellem den målte kapacitans og den kapacitans, der beregnes ud fra de af producenten opgivne værdier.

Målestrategien i forløbet er gået ud på, at vi for forskellige måleserier har foretaget målinger i de samme frekvensintervaller, og fået dækket hele det ønskede frekvensbillede. Yderligere er der taget nogle "nærbilleder" omkring resonansfrekvenserne. Endelig er der foretaget logaritmiske målinger i starten af frekvensområdet, fordi dispersionen tydeligt kan aflæses her. I målingerne af "nærbilleder" er der taget 101 målepunkter, i de logaritmiske 81 målepunkter og i hele frekvensbilledet 303 målepunkter.

Vi har foretaget målinger på en skive af PZ29 materialet under flere forskellige forhold. Først er der målt på den frie skive. Derefter er der målt på skiven liggende løst på en ståklods, for at se hvordan denne påvirker kapacitansen af skiven. Endelig er skiven pålimet ståklods og der er foretaget målinger under størkning og hærkning af limen og til slut på den indspændte skive (se appendiks C), hvor limen regnes for færdighærdet. På PZ26 og PZ27, som ind imellem anvendes som reference til PZ29, har vi målt på de frie skiver.

3.1 Sammenligning af måling og umodificeret model

I dette afsnit sammenlignes tre karakteristiske målinger af PZ29 med de tilsvarende modelberegne værdier ved brug af de af producenten opgivne parameterværdier (se appendiks E). Disse er givet ved:

$$s_{11} = 1.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2\text{N}^{-1}$$

$$s_{12} = -7.7 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2\text{N}^{-1}$$

$$e_{33} = 2.56 \cdot 10^{-8} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$$

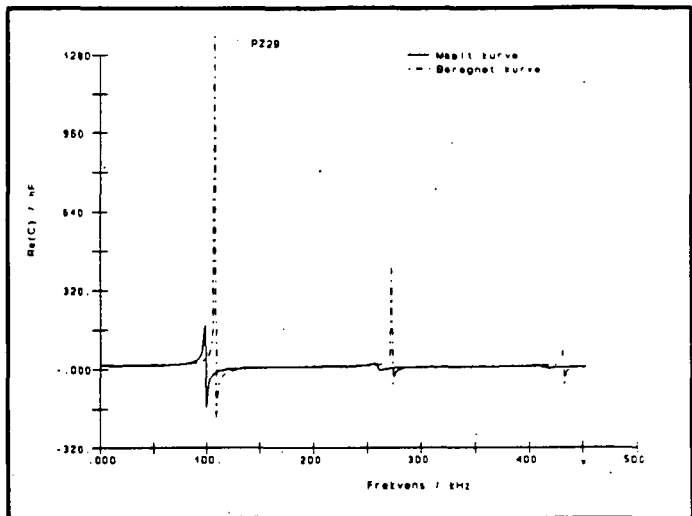
$$d_{13} = -2.2 \cdot 10^{-10} \text{ CN}^{-1}$$

$$R = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$h = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

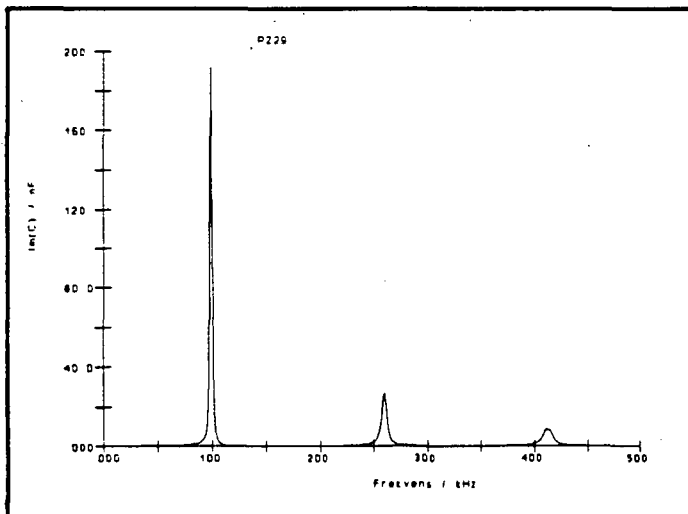
$$\rho = 7.4 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$$

Værdien for s_{11} har vi beregnet, idet der fra producenten er opgivet Youngs modul i radiel retning $Y_{11} = 5.8 \cdot 10^{10}$ Nm^2 og s_{11}^E er dennes inverse [Mason;54]. Værdien for ϵ_{33} er udregnet fra $K_3 = \epsilon_{33}/\epsilon_0 = 2900$. Endelig er s_{12} beregnet ud fra $k_p = 0.63$, hvor $k_p^2 = 2d_{13}^2/(s_{11}+s_{12})\epsilon_{33}$ [Ferropem;92]. Grafene viser kapacitansen som funktion af frekvensen.



Figur 3.1 Plot af den beregnede kurve for kapaciteten af PZ29 og den tilsvarende målte kurve. Der er foretaget måling over 1-454 kHz.

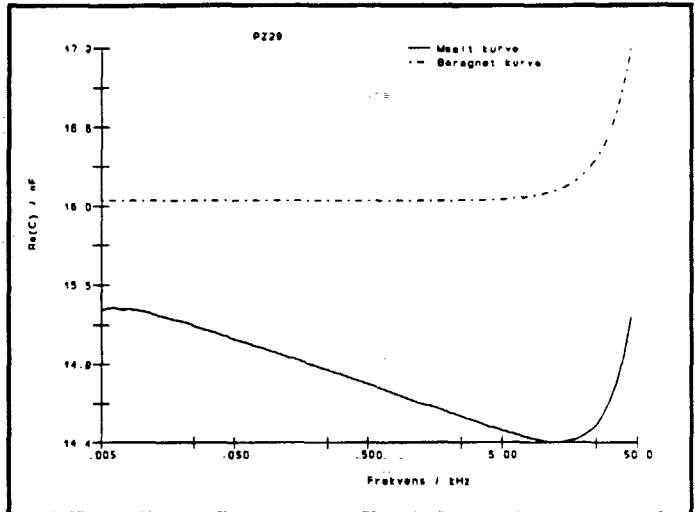
På figur 3.1 vises realdelen af den målte kapacitans af en lineær måling 1-454 kHz. Denne sammenlignes med den tilsvarende beregnede kapacitans - se (2.23). Det er en måling, der strækker sig over 3 resonanser i det radiale udsving. Der kan konstateres en forskel på, hvor i frekvensbilledet henholdsvis de beregnede og målte resonanser ligger. Endvidere skal det bemærkes, at der er stor forskel på højden af de målte resonanser i forhold til de beregnede. Dette skyldes, at der ikke er taget højde for et energitab i den beregnede kurve.



Figur 3.2 Plot af imaginærdelen af den målte kapacitans i frekvensbilledet 1-454 kHz.

At der i den målte kapacitans findes en imaginærdel (figur 3.2), er netop et udtryk for dette tab i den piezokeramiske skive. Tabet kan defineres som $D(C(\omega)) = \text{Im}(C(\omega))/\text{Re}(C(\omega))$. Det er nødvendigt at beskrive tabet, ud fra både en elektrisk, en mekanisk og en piezoelektrisk tabsfaktor [Holland;67]. Det kan vises at der er en sammenhæng mellem dispersion og dissipation, således at disse altid optræder sammen. I afsnit 3.2 kommer vi nærmere ind på, hvorledes tabet modelleres.

På figur 3.3 ses den reelle del af en logaritmisk måling 0.005–45 kHz som sammenlignes med den tilsvarende beregnede. Sammenlignes dette frekvensbillede med figur 3.1, kan man tydeligt se, at der også sker et tab under 50 kHz. Der vil tilsvarende findes en imaginær del for den målte kapacitans, se figur 4.15.

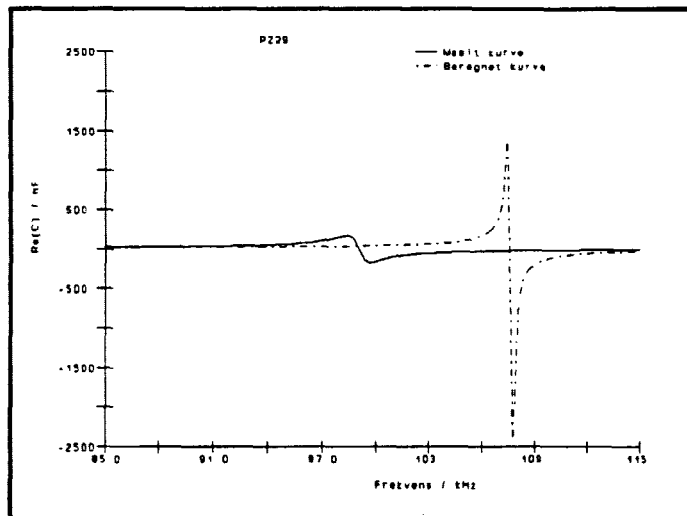


Figur 3.3 Plot af en logaritmisk måling 0.005–45 kHz som sammenlignes med den tilsvarende beregnede kurve.

Endelig er der figur 3.4, der viser realdelen af den første resonans i et "nærbillede". Der er ligeledes her indtegnet den beregnede kurve til sammenligning. Det er en lineær måling 85–115 kHz. Det ses tydeligt, at den målte resonans er forskudt mod venstre i forhold til den beregnede resonanskurve. Den første resonans ligger altså ved en lavere frekvens end beregnet.

Det er en lineær måling 85–115 kHz. Det ses tydeligt, at den målte resonans er forskudt mod venstre i forhold til den beregnede resonanskurve. Den første resonans ligger altså ved en lavere frekvens end beregnet.

Faldet af realdelen af kapacitansen i lavfrekvensområdet (se figur 3.3) er på et dobbeltlogaritmisk plot tilnærmelsesvist givet ved en ret linie, hvilket indikerer at kapacitansen afhænger af frekvensen som en potensfunktion.

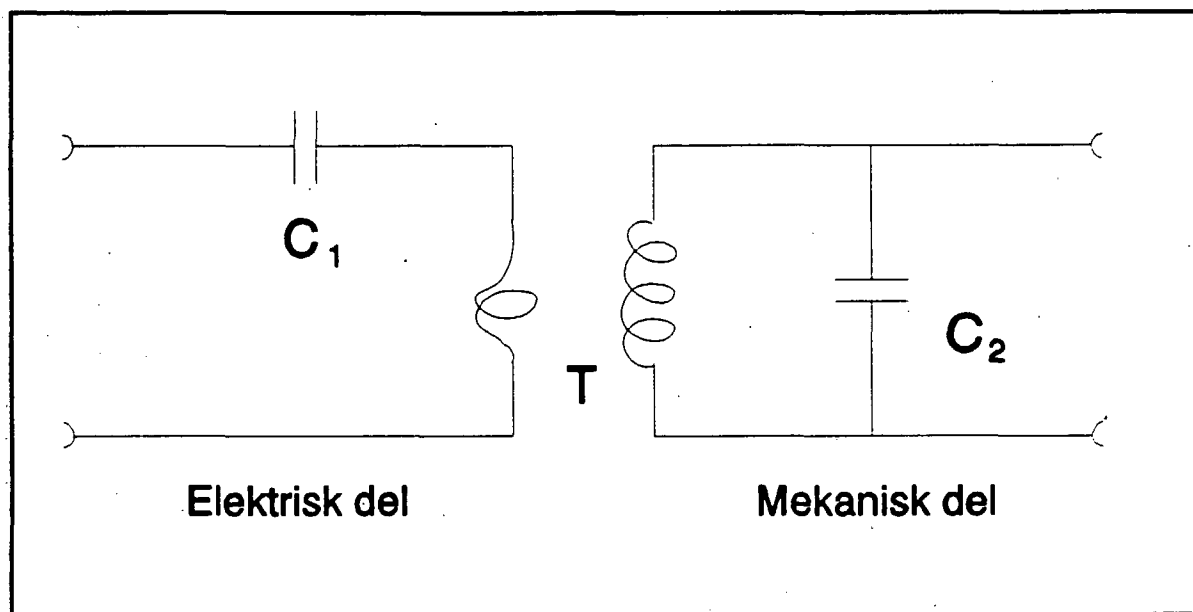


Figur 3.4 Figuren viser en måling i frekvensintervallet 85–115 kHz sammenholdt med den tilsvarende beregnede kurve.

Det er tidligere vist (se (2.26)) at kapacitansen i lavfrekvensområdet er proportional med parameteren ϵ_{33} , hvorfor det er en nærliggende antagelse, at denne kan beskrives som en kompleks størrelse, der afhænger af frekvensen som en potensfunktion. Der skal i det følgende ud fra energibåndstekniske overvejelser (jfr. appendiks B) argumenteres for, at tabet kan indføres vha. komplekse potensfunktioner af frekvensen.

3.2 Modificering af parametre

For at danne sig et overblik over hvad der foregår, når der lægges en spænding over piezokeramikken, kan det være hensigtsmæssigt at opstille det ækvivalente kredsløb. Da skiven imidlertid må opfattes som en uendelig række koblede, differentielle elementer (ringe), der både deformerer transversalt (ændrer radius) og longitudinalt (ændrer bredde), vil dette være en yderst kompliceret sag. Derimod kan der opstilles et meget simpelt ækvivalent kredsløb for en kugleskal, pga. dennes høje grad af symmetri. Der kan i det lavfrekvente område ses bort



Figur 3.5 Energibandsmodel af piezoelektrisk kugleskal. Strøm og spænding i den mekaniske del modsvarer volumen hastighed og mekanisk spænding i kuglen.

fra ændringer i skallens tykkelse, mens isotropi i θ - og ϕ -retningen medfører, at alle tangentielle deformationer er ens. Det ækvivalente kredsløb kommer således til at bestå af to kondensatorer, der kobles vha. en transformator, som vist på figur 3.5. En frit bevægelig kugle beskrives ved at kortslutte den mekaniske side, mens en fuldstændig indspændt kugle beskrives ved at afbryde den mekaniske side. Det følger heraf, at den ene kondensator må sidde i serie og den anden i parallel, da hele systemet ellers ville kunne kortsluttes eller afbrydes, blot ved at manipulere med den ene side, hvilket ikke er tilladeligt.

Den her skitserede model er ideel i den forstand, at den ikke indeholder dissipative elementer. Da vi imidlertid er interesserede i at opstille en model, der tager højde for dispersion, må sådanne indføres i kredsløbet. Dette gøres normalt ved at indskyde modstande, men en sådan fremgangsmåde ville i dette tilfælde, hvis det overhovedet lader sig gøre, resultere i et så kompliceret kredsløb, at hele ideen går tabt. I stedet benyttes et lille energibåndsteknisk kneb.

Når s betegner Laplacefrekvensen, $-i\omega$, er krybefunktionen af henholdsvis en kondensator, en modstand og en selvinduktion givet ved (jfr. figur B.2):

$$J_C(\omega) = C \quad , \quad J_R(\omega) = \frac{1}{sR} \quad , \quad J_L(\omega) = \frac{1}{s^2L} \quad (3.1)$$

Krybefunktionerne af de forskellige lineære komponenter afhænger således af henholdsvis s^0 , s^{-1} og s^{-2} . Det lader altså til, at eksponenten på s er afgørende for hvilken type komponent, der er tale om, idet denne løber fra 0 til -2 . En svagt dissiperende kondensator kan altså tilsyneladende beskrives ved at lade kapacitansen afhænge af $s^{-\alpha}$, hvor α er tæt på 0. Det er således nærliggende at gætte på, at C_1 og C_2 er givet ved henholdsvis:

$$\tilde{C}_1(\omega) = C_1 \left(-i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\alpha} \quad , \quad \tilde{C}_2(\omega) = C_2 \left(-i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\beta} \quad , \quad (3.2)$$

hvor ω_0 er en karakteristisk frekvens (f.eks. 1. resonansfrekvens).

Når der kortsluttes henholdsvis afbrydes på den mekaniske side i kredsløbsmodellen, findes følgende udtryk for C_{fri} og C_{clamp} :

$$C_{fri} = C_1 \quad , \quad C_{clamp} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{T^2 C_2} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

Sammenholdes det første af disse udtryk med lavfrekvensapproximationen (2.26) for en piezoskive, må C_1 associeres til ϵ_{33} , hvorfor det antages, at denne afhænger af frekvensen med eksponenten α . De øvrige materialeparametre falder ikke ligeså let ud af modellen, og de får heller ikke en ligeså simpel potensafhængighed, men det kan ikke være helt ved siden af at gætte på, at de er frekvensafhængige, og følger en simpel potenslov, når permittiviteten øjensynlig gør det. Vi antager derfor følgende frekvensafhængighed for materialeparametrene:

$$\epsilon_{33}(\omega) = \epsilon_{330} \left(-i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\alpha} \quad (3.4)$$

$$s_{11}(\omega) = s_{110} \left(-i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\beta} \quad , \quad s_{12}(\omega) = s_{120} \left(-i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\beta} \quad (3.5)$$

$$d_{13}(\omega) = d_{130} \left(-i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\gamma} \quad (3.6)$$

3.3 De enkelte parametres betydning

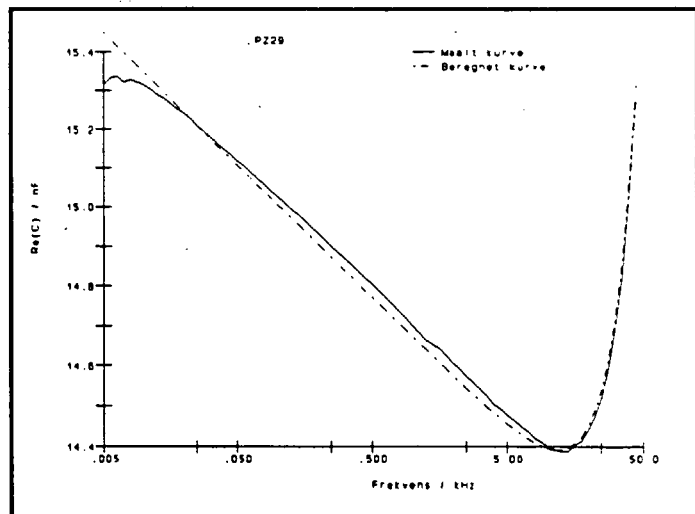
Værdierne af de i modellen indgående parametre findes ved at fitte beregnede kurver til de målte, vha. en ASYST fitteprocedure (jfr. appendiks D). Da der indgår temmelig mange frie variable og programmet kræver ret gode gæt for at fungere, ville det være rart, hvis vi kunne identificere betydningen af de forskellige variable, som karakteriserer egenskaberne af keramikken. På den måde kan værdierne tilnærmes, før den egentlige fitteprocedure påbegyndes. På grund af skivens symmetri er der kun fire uafhængige materialeparametre: ϵ_{33} , s_{11} , s_{12} og d_{13} , hvis vi regner reelt, men dertil kommer så yderligere tre variable fra potensfunktionerne, (da vi regner med, at funktionerne for s_{11} og s_{12} har samme potens).

Ligesom det i foregående afsnit gjaldt for kuglemodellen, har den mekaniske del af keramikken ingen betydning for kapacitansen ved lave frekvenser, da forholdet mellem besselfunktionerne er længe om at ændre sig, hvorfor det ved lave frekvenser gælder at:

$$C \approx \epsilon_{33} \frac{\pi R^2}{h} \quad (3.7)$$

Dette betyder, at det udelukkende vil være ϵ_{33} , der bestemmer størrelsen af kapacitansen ved lave frekvenser, og det må derfor være imaginærdelen af ϵ_{33} , der står for tabet. Derfor vælger vi at lave et særskilt fit for ϵ_{330} og α ud fra en logaritmisk måling ved lave frekvenser, så vi får to frie parametre mindre i fittet over hele frekvensintervallet. Disse størrelser har ikke nogen signifikant betydning for udformningen af resonanserne. ϵ_{330} skalerer hele kurven og α betyder stort set intet ved højere frekvenser.

Den beregnede kurve figur 3.6 svarer til den funktion, der er blevet fittet med hensyn til ϵ_{330} og α . Det er udelukkende α , der bestemmer hældningen af kurven. Den målte kurve afbøjer ved frekvenser under ca. 25 Hz. Denne effekt er vi ikke i stand til at modellere, men om det er en effekt, der skyldes keramikens egenskaber eller målebroyen, ved vi ikke.



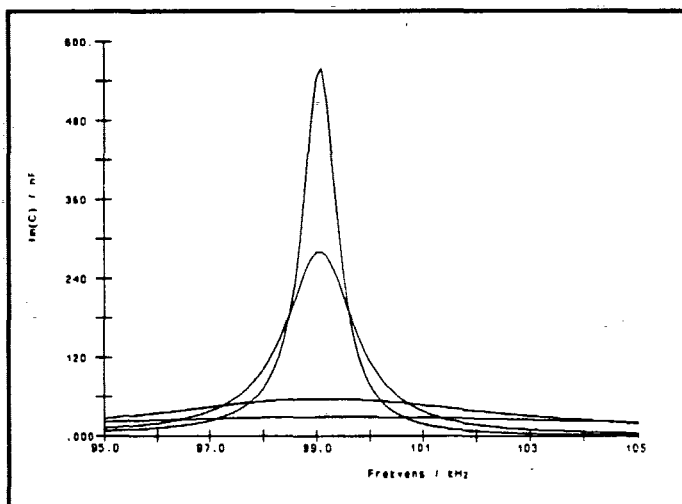
Figur 3.6 Dobbeltlogaritmisk plot af kapacitans for 0.005 til 45 kHz midlet over 30 målinger.

Hvilke oplysninger kan så opnås ud fra resonanstoppenes placeringer? Der vil indtræde resonans når nævneren i formel (2.23) er nul. Betingelsen er:

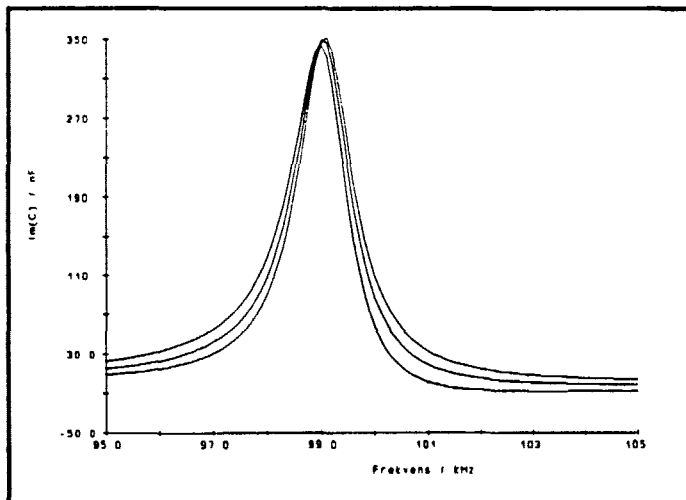
$$kR \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} = 1 - \sigma_p \quad (3.8)$$

hvor k er givet i formel (2.13). Dette er udelukkende afhængigt af størrelserne af s_{11} og s_{12} , hvilket betyder, at vi kan finde første bud på værdierne for s_{110} og s_{120} udelukkende ud fra resonanstoppenes placeringer, da realdelene af s_{11} og s_{12} er væsentligt større end imaginærdelene.

Der er også oplysninger gemt i resonanstoppenes udformning. Hvis funktionerne for s_{11} og s_{12} er reelle, vil resonanstoppenes i princippet være uendelig høje. Hvis vi derimod indfører komplekse funktioner, vil vi have et tab, der sørger for, at resonanstoppenes får en udformning mere i stil med de målte værdier. Det viser sig, at det er imaginærdelen af funktionerne for s 'erne, der er bestemmende for højden af resonanserne (se figur 3.7).



Figur 3.7 Plot af imaginærdelen ved første resonans for variabelt β . Mindre β giver højere resonansstop.



Figur 3.8 Plot af imaginærdelen på første resonansstop for variabelt γ . Større γ giver større skævvridning.

De imaginære resonansstoppe har en tendens til skævvridning, og det viser sig, at det er imaginærdelen af d_{13} , der er bestemmende for denne effekt.

Det bemærkes på figur 3.8, at imaginærdelen bliver negativ for store værdier af γ . Dette svarer til, at der er en negativ admittans, hvilket ikke er fysisk muligt, da det strider mod termodynamikkens anden hovedsætning. Det viser sig, at denne giver nogle bånd på forholdet mellem imaginærdelene.

Hvis vi kigger på et system med en eller flere energiporte, kan vi tale om systemets energidissipation, som summen af energistrømme i energibåndene.

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \operatorname{Re}(f_i e^{-i\omega t}) \operatorname{Re}(e_i e^{-i\omega t}) \quad (3.9)$$

Kigger vi i stedet på energidissipationen pr. periode (D):

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{4} \sum_i f_i^* e_i + f_i e_i^* \quad (3.10)$$

og indfører responsefunktion R_{ij} , som er den responsefunktion, der forbinder spænding med strøm, dvs. admittansen, får vi:

$$D = \frac{1}{4} \sum_{ij} (R_{ij} + R_{ij}^*) e_i^* e_j \quad (3.11)$$

Ifølge anden hovedsætning, må energidissipationen pr. periode, for et passivt system, være større end eller lig nul. Dette medfører, at realdelen af admittansen skal være positiv, da $\operatorname{Re}(R_{ij}) = 1/2 (R_{ij} + R_{ij}^*)$. Vi er mere interessede i krybefunktionen end admittansen. Forholdet mellem de to responsefunktioner er:

$$\tilde{Y}(\omega) = -i\omega \tilde{J} \quad (3.12)$$

hvilket medfører, at imaginærdelen af den generelle konstitutive relation skal være positiv definit, og dette må selvfølgelig også gælde for den reducerede konstitutive relation (2.2). Derfor medfører anden hovedsætning, at følgende krav skal være opfyldt:

$$s_{11}'' \geq 0, \quad \epsilon_{33}'' \geq 0 \quad (3.13)$$

$$s_{11}''/2 - s_{12}''/2 \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\epsilon_{33}''(s_{11}'' + s_{12}'') - 2d_{13}''/2 \geq 0 \quad (3.15)$$

Hvis kravet fra (3.15) skal være opfyldt giver det et bånd på potenserne fra (3.4) – (3.6). Båndet er:

$$\alpha + \beta = 2\gamma \quad (3.16)$$

Da k_p er givet ved:

$$k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{(s_{11} + s_{12})\epsilon_{33}} \quad (3.17)$$

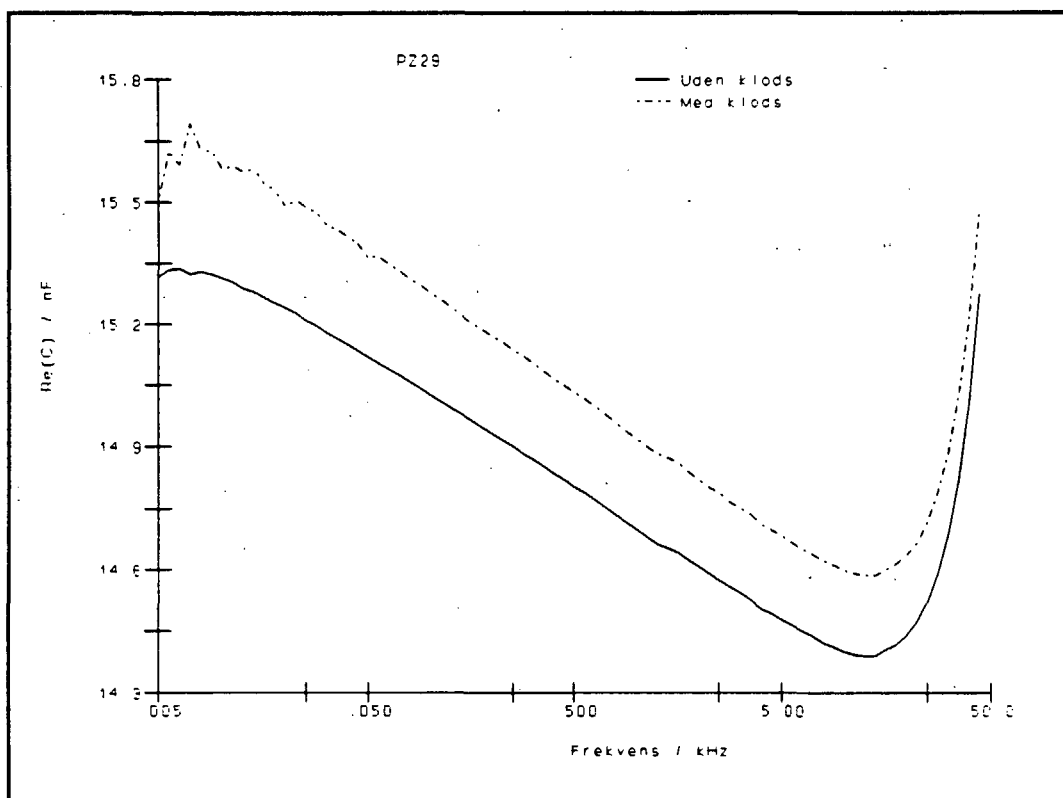
er det ovenstående bånd ensbetydende med at k_p er konstant, dette har vi undersøgt eksperimentelt, hvilket beskrives i næste afsnit.

Alle disse oplysninger giver os mulighed for at tilnærme værdierne, før vi begynder at fitte til de målte kurver. Nogle af de bedst fittede kurver er vist i kap 4, hvor de fundne værdier af parametrene også optræder i tabel 4.1.

3.4 Måling af C_{clamp}

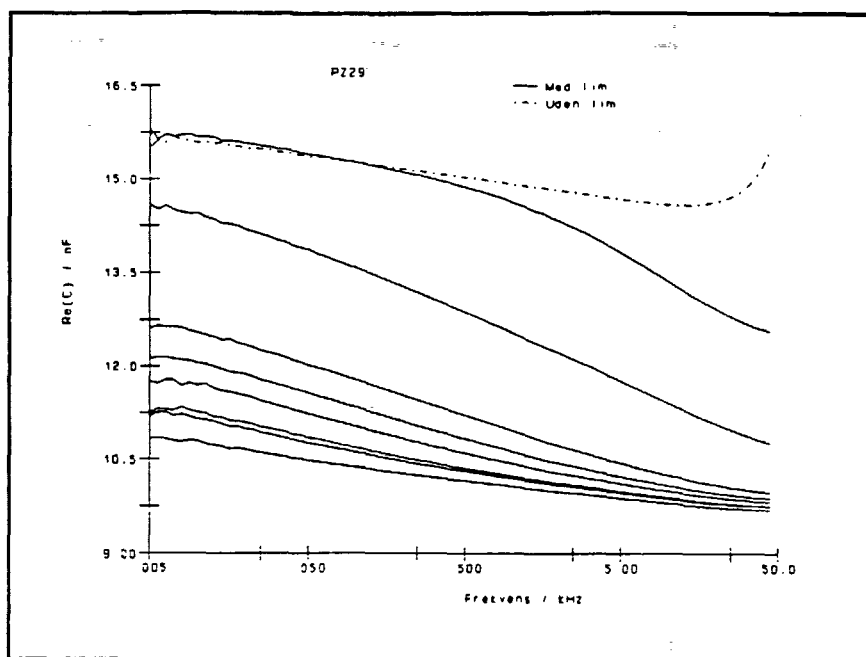
For at underbygge teorien om, at koblingsfaktoren er konstant, og for eventuelt at bestemme dens værdi, har vi taget en række målinger på skiven, der er limet fast til en cylindrisk klods af rustfrit stål (se appendiks C), for på denne måde at opnå en situation, hvor skiven er indspændt.

Før vi limede, foretog vi en række målinger, hvor skiven var placeret på klodsen, på samme måde som den senere skulle limes, for således at undersøge om klodsen havde en indvirkning på skivens kapacitans. Det ses af figur 3.9 at realdelen stiger en smule i forhold til det tidligere niveau.

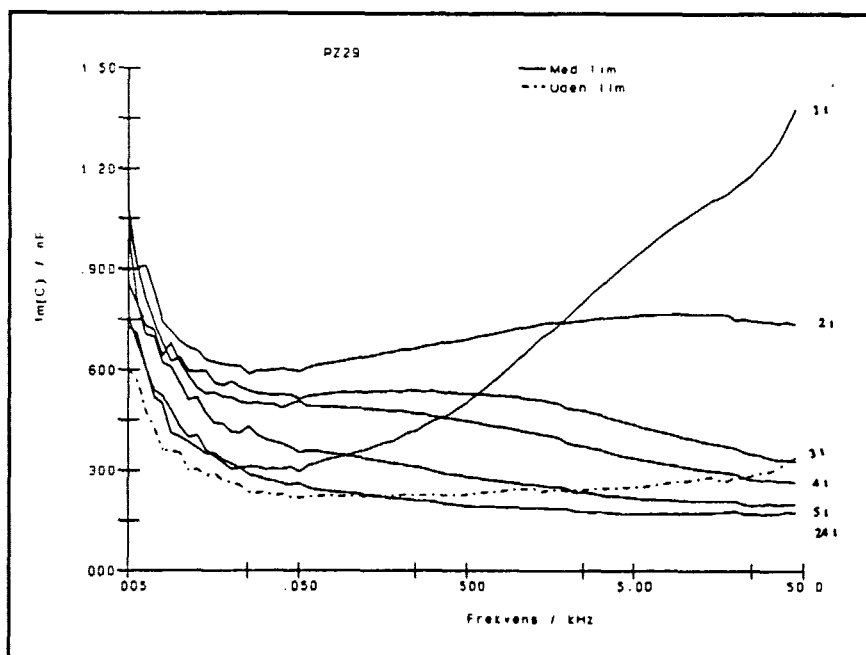


Figur 3.9 Logaritmisk plot af realdelen af kapacitansen. Målingen af kapacitansen uden klods er en midling over 30 målinger.

Vi har foretaget en række målinger af kapacitansen for PZ29, under størknings- og hærtningsprocessen for at kunne vurdere, hvornår limen var færdighærdet.



Figur 3.10 Realdelen af kapacitansen under størknings- og hærdningsprocessen. De øverste målinger er taget med et tidsinterval på ca. en time, den nederste er målt dagen efter.

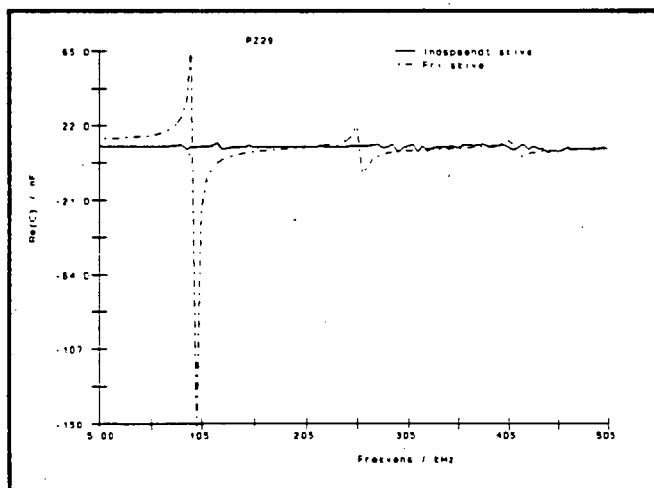


Figur 3.11 Imaginærdel af kapacitansen under størkningsprocessen. Til højre for kurverne står antal timer siden limningen.

Som det ses af figur 3.10 falder realdelen af kapacitansen efterhånden som limen hærder. På de første målinger ses tydeligt, at kapacitansen er større for lave frekvenser end for høje, og at den falder med et "s-agtigt" svaj. Dette skyldes formodentlig glasovergangen i den hærdende lim, således at limen for lave frekvenser opfører sig som en væske, og for høje som et fast stof. Endvidere kan man iagttage, at glasovergangen optræder for lavere og lavere frekvenser jo længere tid, der er gået efter limningen. Dette skyldes, at limen hærder.

Af figur 3.11 ses at imaginærdelen af kapacitansen stiger voldsomt i den første måleserie. Dette ses som et resultat af både stigningen i den fri skives opførsel og den pukkel, der vil fremkomme på imaginærdelen ved glasovergangen. På imaginærdelen kan man, som på realdelen, se, at effekten fra glasovergangen rykker længere og længere ned i frekvens og samtidig bliver mindre udtalt.

De sidste målinger er taget med ca. en dags mellemrum. Disse målinger er desværre destrueret, hvorfor de ikke vises på figuren. De viste, at både for real- og imaginærdelens vedkommende lå kurverne stort set oven i hinanden, og på næsten samme niveau som den nederste kurve på figur 3.10. Dette tages som en indikation af, at limen på dette tidspunkt var færdighærdet.



Figur 3.12 Det ses, at den indspændte skive har en lavere kapacitans end den frie for lave frekvenser, og at de to kurver nærmer sig hinanden for højere frekvenser.

For at vurdere hvor godt skiven er indspændt, har vi beregnet skæringspunktet mellem kurven for skiven liggende løst på klodsen og kurven for den perfekt indspændte skive. I slutningen af kapitel 2 opstilles en betingelse for dette skæringspunkt. Ud fra denne findes, at C_{clamp} skærer $C_{\text{fri,klods}}$ ved $\nu = 184 \text{ kHz}$. Ved denne værdi er $C_{\text{fri,klods}} = 8,4 \text{ nF}$, og værdien for den indspændte skive er $C_{\text{clamp,målt}} = 9,7 \text{ nF}$. Da kurven for den indspændte skive er faldende, betyder det, at den målte kurve ligger højere end den beregnede, hvorfor man må konkludere, at skiven ikke er fuldstændigt indspændt.

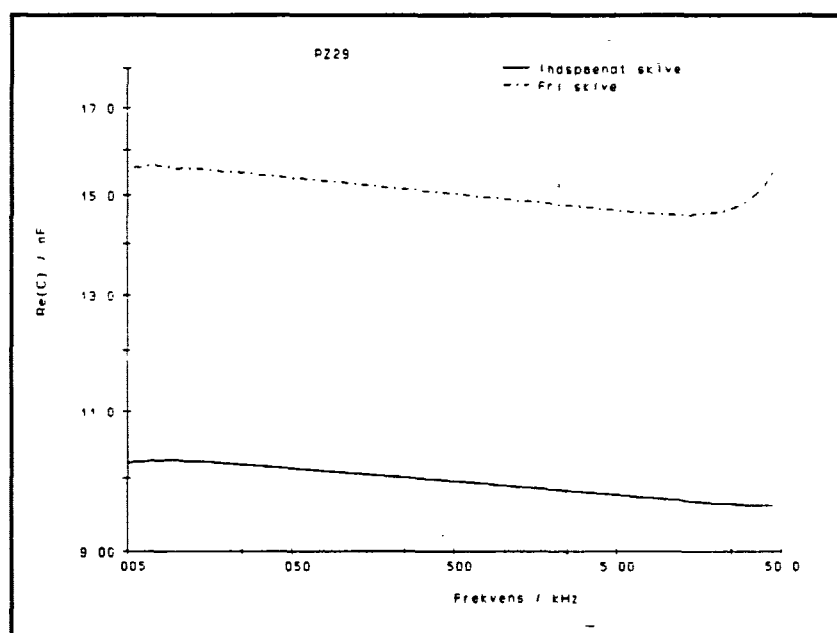
På figur 3.12 kan man se, at målingen af den indspændte skive har nogle hak, specielt omkring første resonans og ved høje frekvenser. Dette er en bekræftelse af, at den ikke er fuldstændigt indspændt. Det ses dog, at den indspændte måling for forholdsvis lave frekvenser (0 - 300 kHz), ligger meget mere konstant end målingen af den frie skive.

Vi kan finde k_p ved at kigge på det lavfrekvente område, vi ser på udtrykket for C_{clamp} , (2.24), og benytter lavfrekvensapproximationen for C_{fri} , (2.26), hvorved koblingsfaktoren kan bestemmes ved:

$$\frac{C_{clamp}}{C_{fri}} = \frac{e_{33} \frac{\pi R^2}{h} (1 - k_p^2)}{e_{33} \frac{\pi R^2}{h}} = 1 - k_p^2 \quad (3.18)$$

Af udtrykkene for C_{clamp} og C_{fri} i det lave frekvensområde ses det, at hvis koblingsfaktoren er konstant, må et logaritmisk plot af C_{clamp} og C_{fri} have samme hældning.

På figur 3.13 ses, at hældningen af kapaciteten for den frie skive på klods uden lim og den indspændte skive er næsten ens, hvorfor noget tyder på, at koblingsfaktoren er stort set konstant. Se også figur 4.17.



Figur 3.13 Dobbellogaritmisk plot af realdelen af kapacitansen for hhv. den indspændte og den frie skive på klods. Det ses, at hældningerne er stort set ens.

3.5 Temperatur og hukommelse i keramikkerne

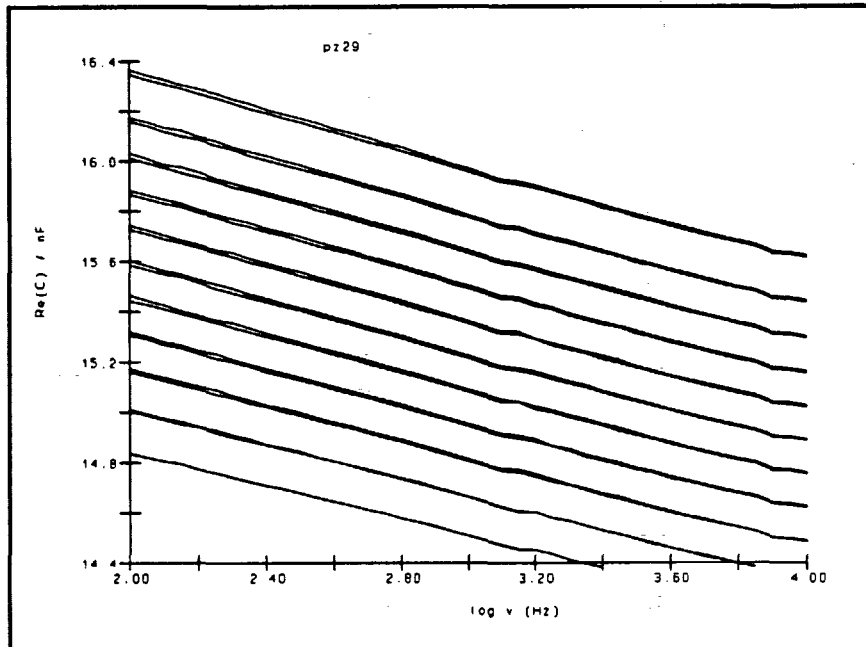
Afsnittet handler om keramikernes temperaturafhængighed og hukommelse, samt betydningen af disse for resultaterne. Endvidere beskrives til slut nogle målinger, hvor resonanserne har et mærkeligt udseende.

På figur 3.14 – 3.15 ses en måling af kapacitansen, der er foretaget ved at lade temperaturen stige 20 K og derefter falde igen til begyndelsestemperaturen. Denne målerække er lavet for at se, hvordan kapacitansen ændres med temperaturen. Ligeledes ønskes det undersøgt, om kapacitansen har samme værdi før og efter, keramikken har været opvarmet. Man vil på figur 3.14 bemærke, at kurverne er stort set ækvidistante, hvilket betyder, at kapacitansen stiger proportionalt med temperaturen. Der er sket en stigning på ca. 0.075 nF pr. kelvin. På figur 3.15 ses, at kurverne her også er nærmest ækvidistante, men at kapaciteten kun falder med ca. 0.060 nF pr. kelvin. Kapacitansen falder altså ikke tilsvarende, når temperaturen igen sænkes... Der er dog kun tale om en forskel på ca. 0.2 nF (før og efter temperaturmålingen), hvilket svarer til ca. 1% af startkapacitansen.

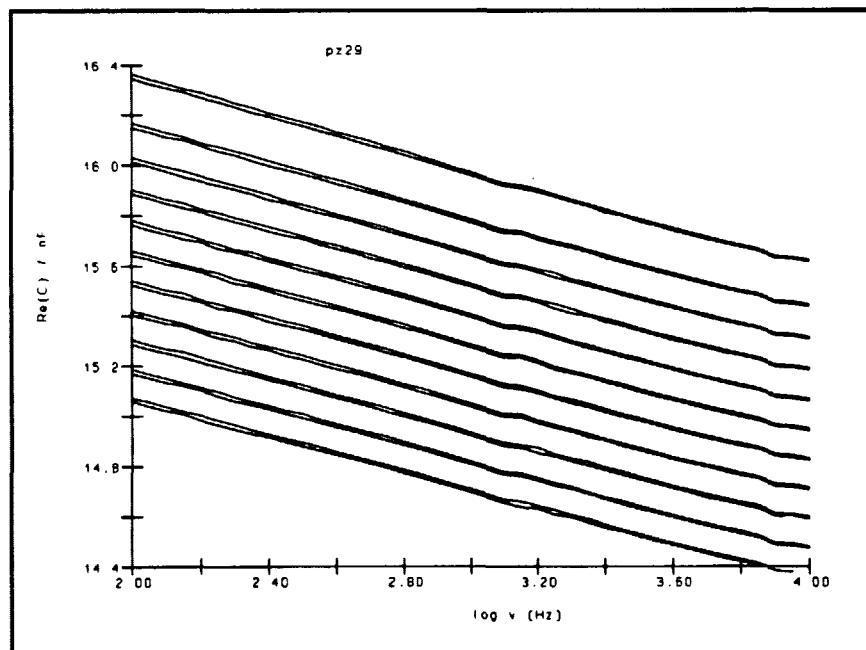
På figur 3.16 – 3.17 ses en temperaturmåling af kapacitansen, der denne gang er foretaget ved at lade temperaturen falde og derefter stige igen. Man vil her bemærke, at i begge tilfælde ændres kapaciteten ca. 0.1 nF pr. kelvin. I dette tilfælde har kapacitansen altså samme værdi efter temperaturmålingen som før.

Der er altså forskel på om temperaturen stiger og falder eller falder og stiger. I det tilfælde, hvor man først går op i temperatur (og derefter ned) kommer keramikernes "gode" hukommelse til udtryk, idet kapacitansen ikke helt er faldet til samme niveau, som ved begyndelsestemperaturen. Der er altså tale om hysteres.

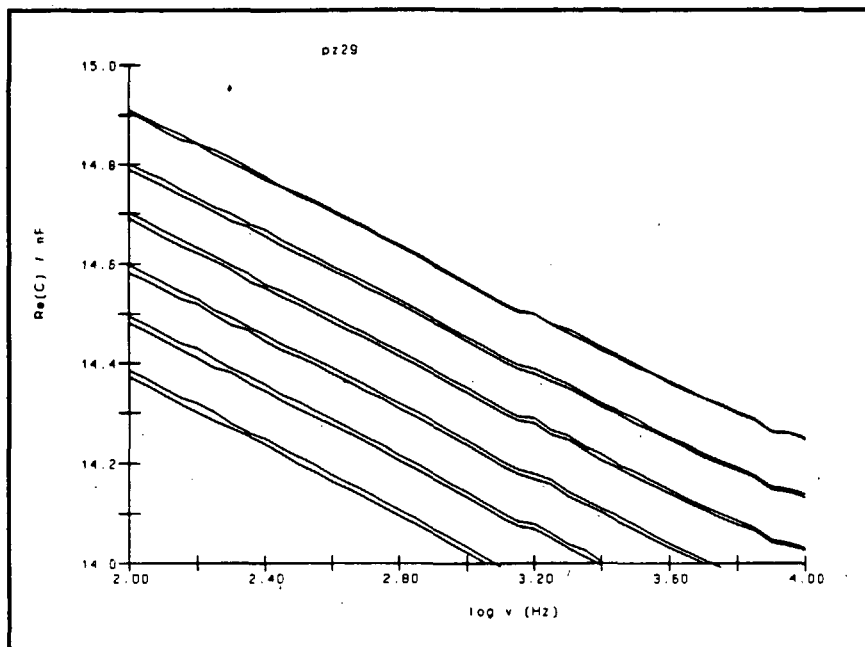
Hysteresen i keramikkerne har i vores forsøgsrække ikke været af så stor betydning, hvad angår fluktuationer i laboratoriets temperatur, da temperaturen har ligget i intervallet 298–300 K. Derimod er det vigtigt, at keramikken har haft tid til at falde til ro ved stuetemperatur, efter der er loddet tilledninger på, hvor keramikken har været opvarmet. Hukommelsesproblemet er løst ved, at de har ligget i min. 3–4 dage mellem lodning og målinger for at være faldet til et rimeligt niveau. Hvor længe keramikkerne skal ligge, før der foretages målinger, kommer selvfølgelig an på, hvor god lodningen har været. Har man været mindre heldig og varmet en del, varer det tilsvarende længere inden forhistorien er glemt.



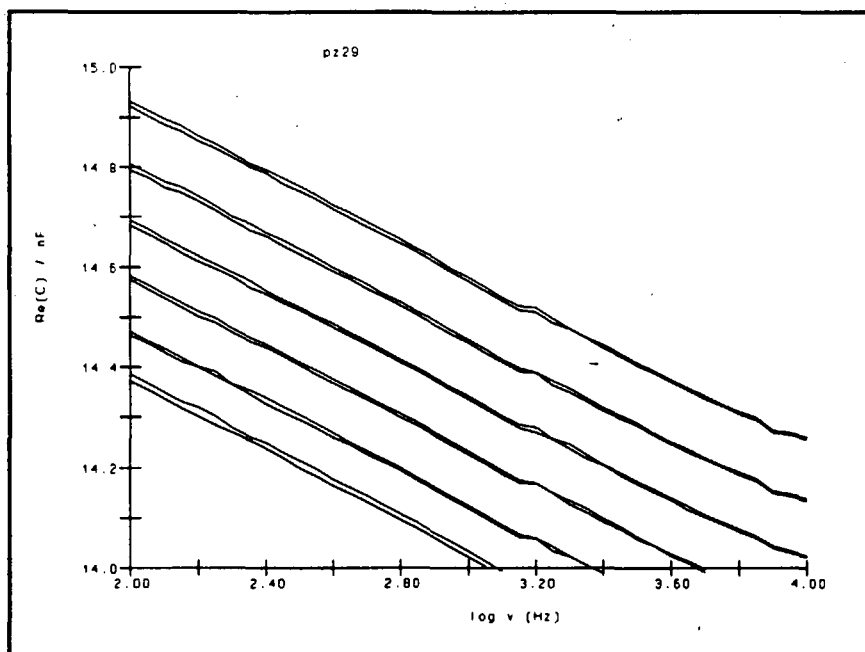
Figur 3.14 Plot af logaritmiske målinger foretaget ved 300–320–300 K. Figuren viser første del; 300–320 K. Der er foretaget to målinger ved hver temperatur og der er 15 min. mellem hver måling. Hvert temperaturspring er på 2 K.



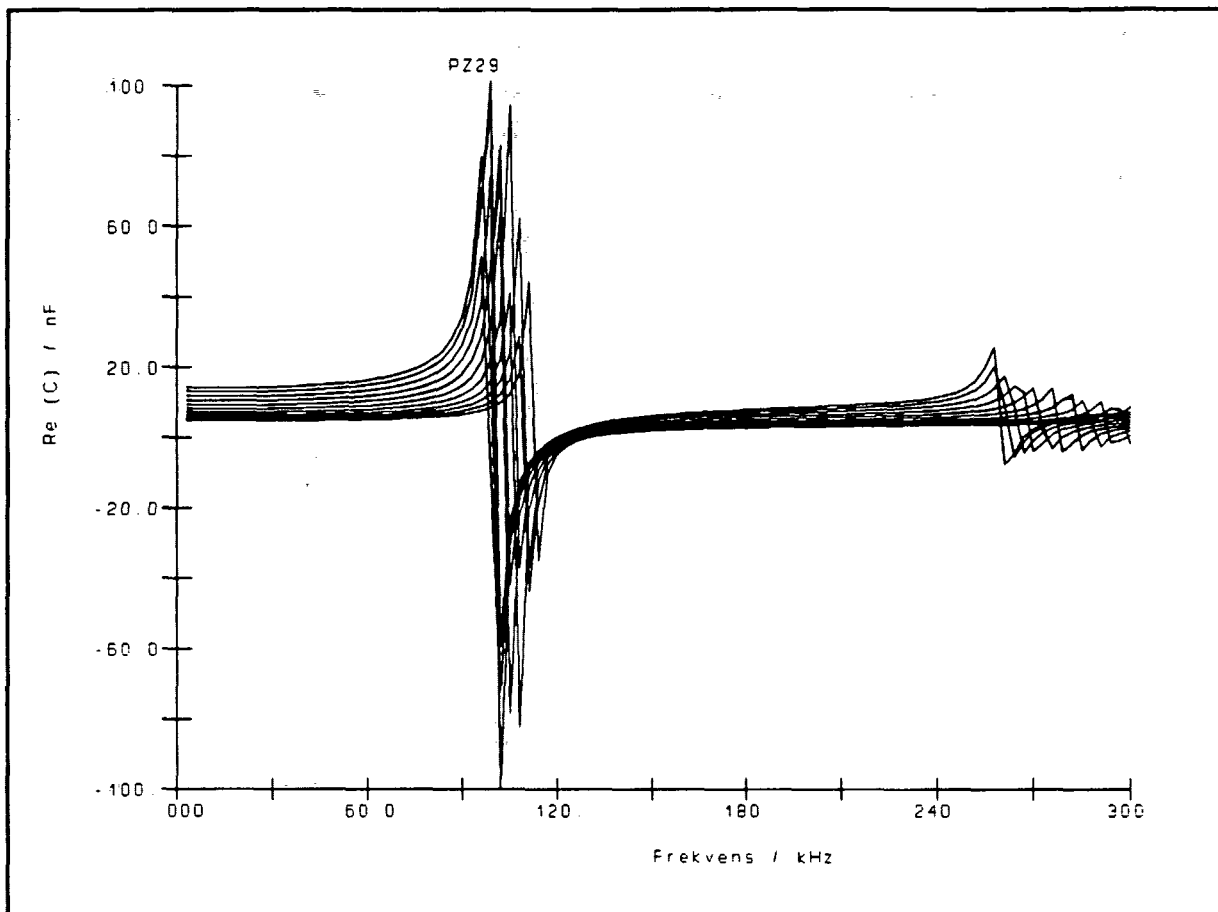
Figur 3.15 Plot af logaritmiske målinger foretaget ved 300–320–300 K. Figuren viser anden del; 320–300 K.



Figur 3.16 Plot af logaritmiske målinger foretaget ved 300-290-300 K. Figuren viser første del; 300-290 K.

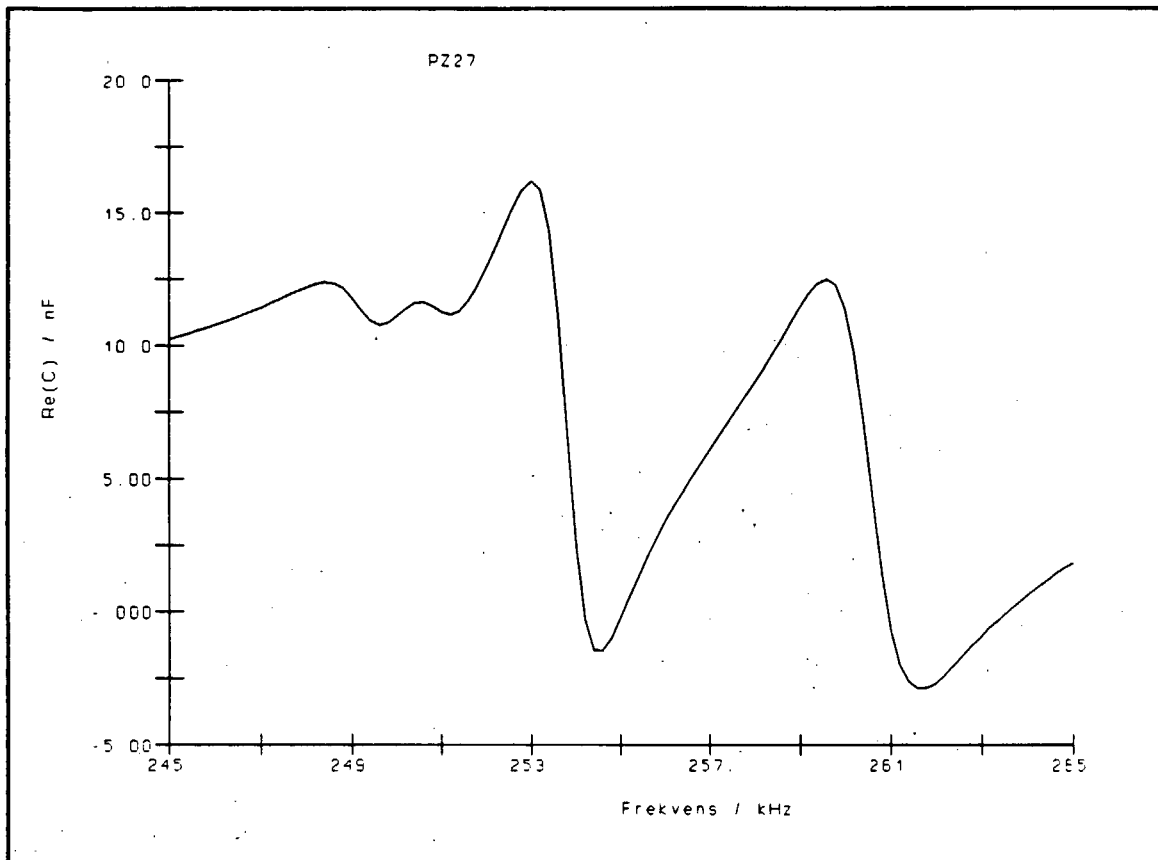


Figur 3.17 Plot af logaritmiske målinger foretaget ved 300-290-300 K. Figuren viser anden del; 290-300 K.



Figur 3.18 Plot af kapacitans for temperatur gående fra 300 K til 100 K, med 20 K mellem hver måleserie. Resonanserne indtræder ved højere frekvens for lavere temperaturer.

De foregående temperaturmålinger er kendetegnet ved at være foretaget ved forholdsvis beskedne temperaturændringer. Så længe dette er tilfældet, vil det gælde, at kapacitanskurverne vil have en rimelig ensartet udformning, og blot være skaleret, idet den mest temperaturfølsomme parameter, ϵ_{330} , vil ændre værdi. Hvis der derimod måles ved store temperaturændringer vil dette ikke længere gælde. Resonanserne vil også blive forskudt (se figur 3.18) hvilket betyder at s'erne må have ændret værdier, det vil altså ikke længere blot være ϵ_{330} , der ændrer sig betydeligt. Hvis man ser på resonansernes udformning, er der noget, der kunne tyde på, at det mekaniske tab bliver mindre, idet resonanserne bliver en anelse skarpere.



Figur 3.19 Der ses her en måling, hvor resonansen har en "underlig" top. Resonansen er ikke skarpt defineret.

Til sidst skal nævnes, at vi på nogle målinger har set "underlige" resonanser – se figur 3.19. Disse, gætter vi på, kan have en eller flere af flg. årsager: For det første er det vigtigt, at tilledningerne loddes præcist på i midten af skiven, så der ikke opstår et samlet drejningsmoment på skiven. For det andet skal der ikke anvendes ret meget loddetin til påsættelse af tilledningerne, idet dette medfører en påvirkning af skiven. Der vil ske en lille dæmpning i skivens svingninger, enten som følge af loddeklattens masse, eller som følge af, at den i et lille område indspænder skiven. Endelig er der den tredje mulighed, at man under lodningen har berørt skiven med loddekolben. Det er umuligt ikke at opvarme skiven lidt, men berøring med loddekolben bør undgås. Er det sket, er det muligt at polingen, og dermed den piezoelektriske effekt, er blevet ødelagt i et lille område. Curiepunktet er 235°C for PZ29 (men der anbefales en arbejdstemperatur under 180°C) [Ferroperm;92], og loddekolben er ca. 350°C .

Kapitel 4

Resultater

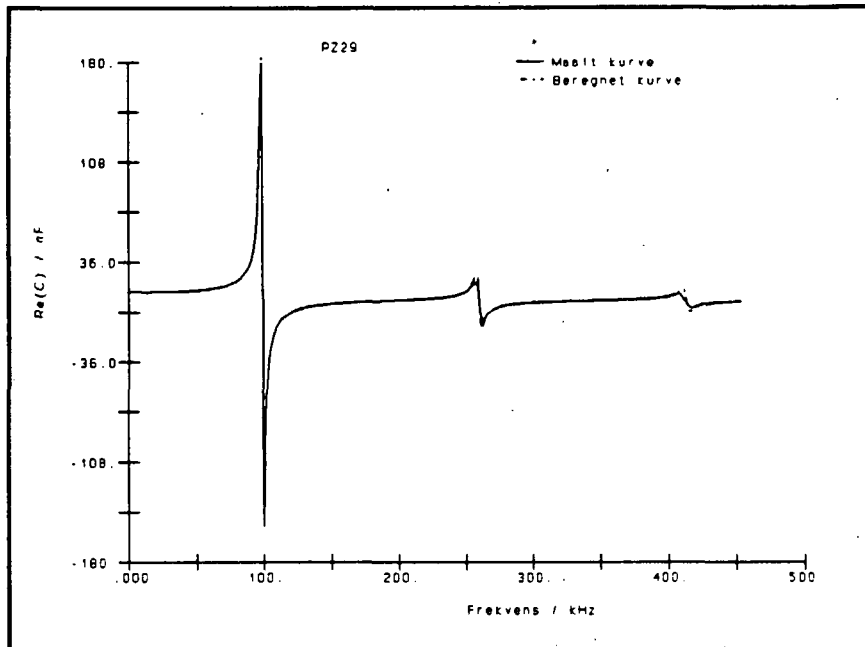
Vi har nu opstillet en model med den hensigt at give en kvantitativ beskrivelse af energitabet i PZ29, som det kommer til udtryk i kapacitansen. Den tabsfrie model, der opstilledes i kapitel 2, er i kapitel 3 modificeret ved at lade piezokeramikkernes elektriske permittivitet, mekaniske føjeligheder og piezoelektriske konstant være komplekse, frekvensafhængige potensfunktioner. Bestemmelsen af eksponenterne i disse funktioner er altså afgørende for beskrivelsen af tabet. Til det formål er anvendt en fitteprocedure i ASYST (jfr. appendiks D). I det følgende gives eksempler på de bedst fittede grafer, der sammenlignes med de tilhørende målinger, dels for PZ29 og dels for PZ27 og PZ26. De fundne værdier af eksponenter og materialeparametre findes i tabel 4.1, mens de af producenten angivne værdier af materialeparametrene er gengivet i appendiks E.

4.1 Fittede grafer for PZ29

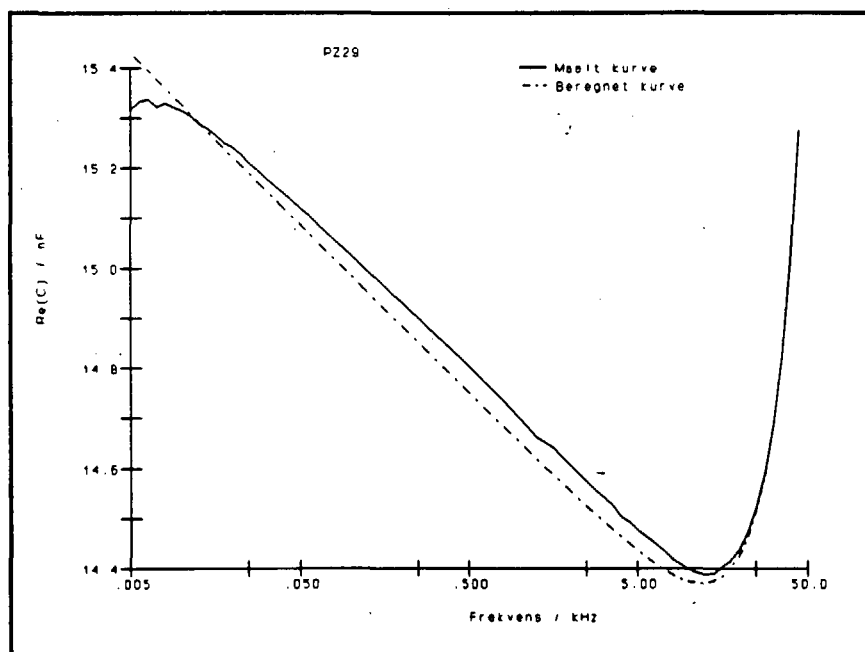
Af figur 4.1 fremgår, at modellen kvalitativt har opfanget kapacitetens frekvensafhængighed. Da vi imidlertid er interesserede i en bestemmelse af de indgående parametres talværdier, vil vi i det følgende kigge nærmere på udvalgte områder af kurven og den tilhørende imaginærdel. Særlig interesse har området fra 0 – 45 kHz, da dispersionen her kommer klart til udtryk i et fald i kapaciteten, og resonanserne, hvor tabet afspejler sig i bredden af toppene på imaginærdelen.

Figur 4.2 viser omtalte fald i lavfrekvensområdet. Afbøjningen af den målte kurve på de første 25 Hz skyldes muligvis målebroen, mens det er usikkert om den opadgående krumning, den målte kurve udviser i forhold til den fittede i intervallet fra 0.025 – 15 kHz, har samme årsag. Det er under alle omstændigheder ikke en effekt, der indfanges af modellen. Der har også været problemer med at modellere den tilhørende imaginærdel (se figur 4.15).

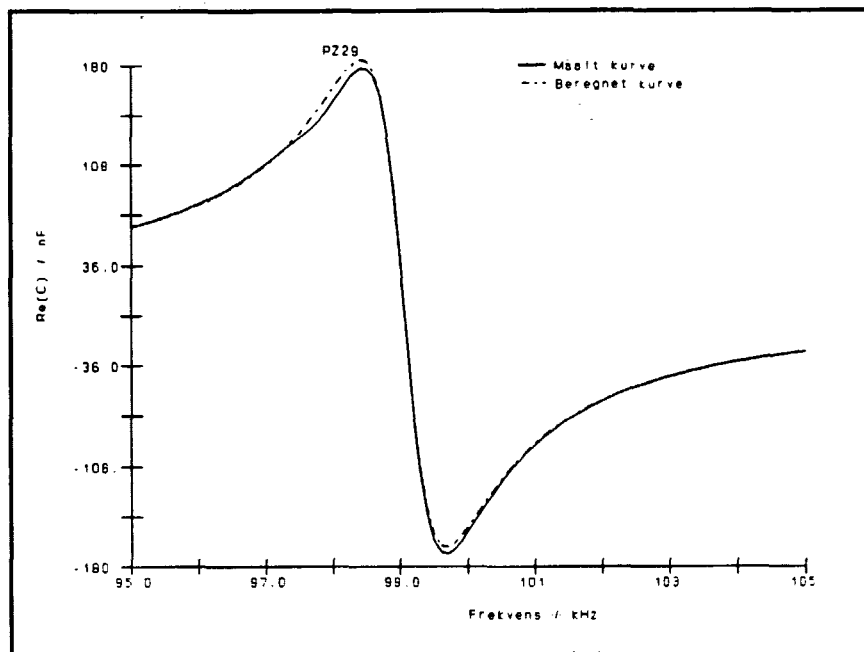
Figur 4.3 viser den første resonans. Der bemærkes en vis uoverensstemmelse omkring 98 kHz, hvor den målte kurve har fået et ekstra "svaj". Dette er en afspejling af problemet med "hak" i resonanserne, som er omtalt i afsnit 3.5. Den tilhørende imaginærdel vises på figur 4.4. Der er bemærkelsesværdigt god overensstemmelse, når der ses bort fra førømtalte svaj i den målte kurve. Noget kan således tyde på, at modellen er i stand til at beskrive tabet kvantitativt.



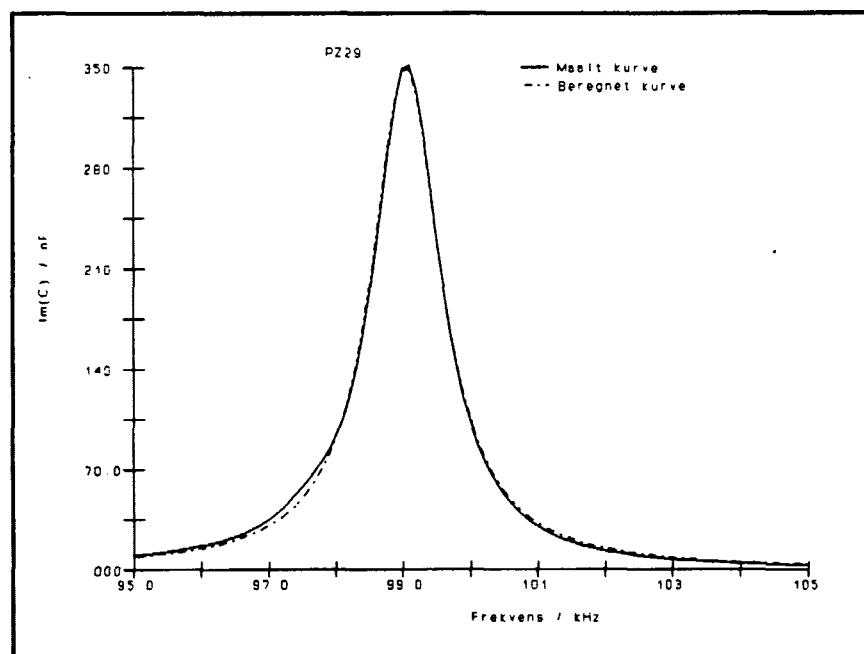
Figur 4.1 Kurve fittet til en lineær måling over tre resonanser.



Figur 4.2 Logaritmisk måling over de første 45 kHz (midlet over 30 målinger for at eliminere statistiske fluktuationer stammende fra målebrosen) og tilhørende fittet kurve.

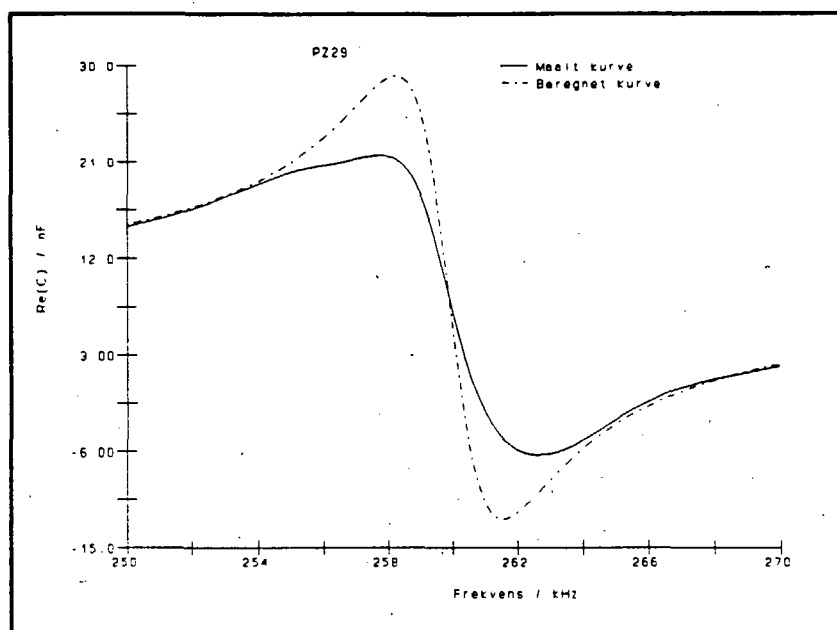


Figur 4.3 Realdel af kapacitansen ved første resonans.

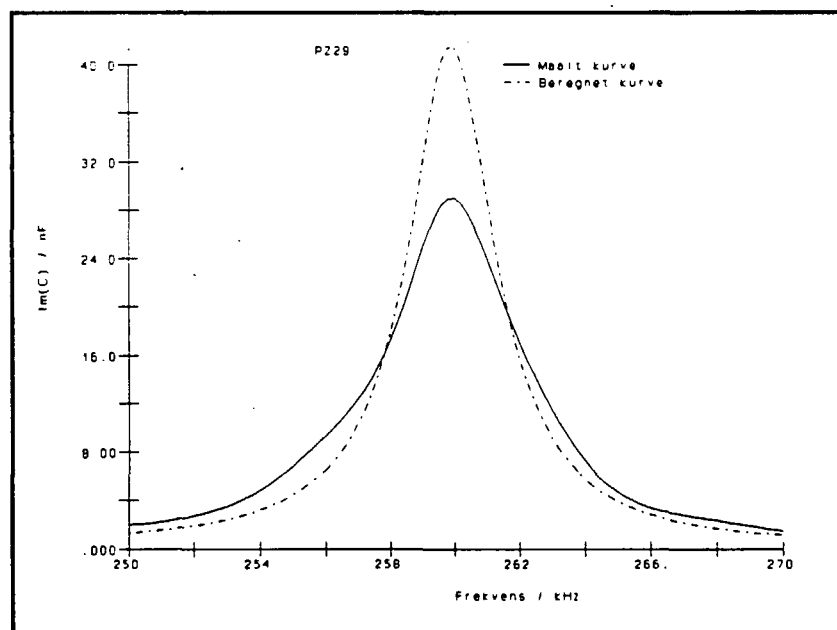


Figur 4.4 Imaginærdel af kapacitans ved første resonans.

Under fitte-processen er der imidlertid lagt mest vægt på første resonans (da denne er den mest interessante ved målinger på seje væsker), og for at det hele ikke skal være lutter fryd og gammen, vises tillige real- og imaginærdel ved anden resonans (figur 4.5 og 4.6), hvor ligheden med den målte kurve er mindre slående. Specielt ses det, at den fittede imaginærdel er for høj og smal, hvilket indikerer at modellen giver for lille et tab ved højere frekvenser. Dette er dog tilsyneladende den pris, der må betales for at få den til at passe ved de lavere frekvenser.



Figur 4.5 Realdel af kapacitans ved anden resonans.

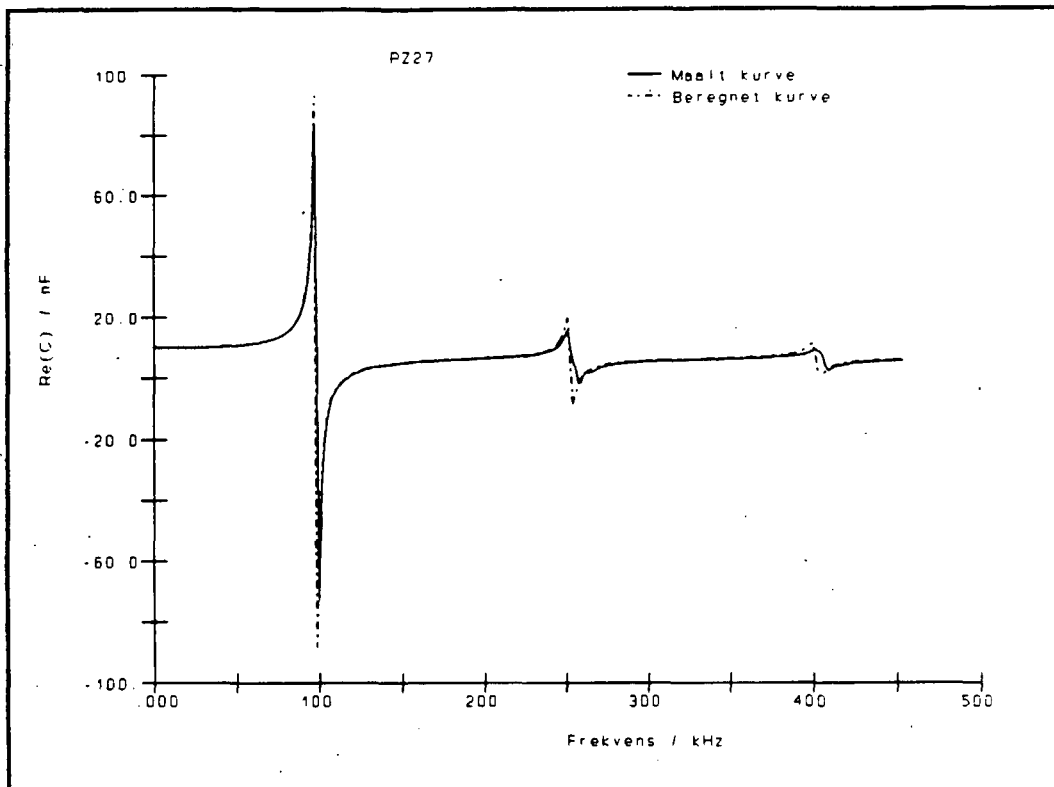


Figur 4.6 Imaginærdel af kapacitans ved anden resonans.

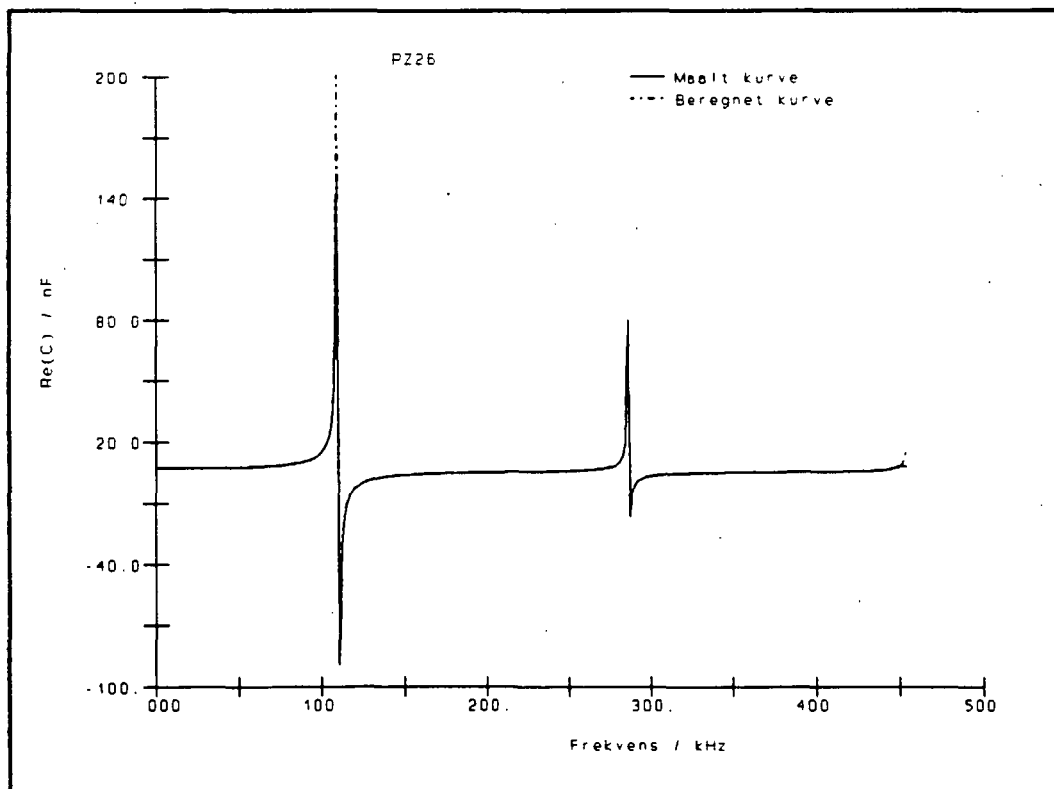
4.2 Fittede grafer for PZ27 og PZ26

Udover PZ29, som vi har lagt mest vægt på, er der fittet til målinger på tilsvarende skiver af PZ27 og PZ26. De bedste fit til disse to keramikker vises på de følgende sider. Det vil bemærkes, at resultaterne her langt fra har samme overbevisningskraft, som for PZ29. Dette kan have rent praktiske årsager, idet fittene til disse målinger er lavet på en enkelt dag, i modsætning til fittet på PZ29, som der er arbejdet med i flere måneder. Der er således grund til at formode, at der ikke er tale om optimale fit. Desuden er målingerne på PZ27 og PZ26 ikke ligeså pæne som dem på PZ29, hvilket nok har besværliggjort arbejdet for fitteproceduren. En nærmere granskning af figurerne 4.7 - 4.14 vil dog vise, at der endvidere er forskel på fittene på 26'eren og 27'eren, idet førstnævnte er det værste. Sammenholdes dette med informationen om at PZ26 har det mindste tab, kan man udkaste den forsigtige teori, at modellen virker bedre på keramikker med større tab. Der er da heller ikke umiddelbart nogen grund til at anvende den på PZ26, da den hidtil anvendte tabsfrie model virker tilfredsstillende for denne keramik (i forbindelse med målinger på seje væsker). Det bemærkes imidlertid at PZ26 har meget skarpe resonanser, hvilket betyder, at der kræves flere målepunkter for at give et fyldestgørende billede af resonanstoppe. Dette kan muligvis have den konsekvens, at fitteproceduren kræver flere målepunkter for PZ26 for at opnå ligeså gode resultater som ved de andre keramikker.

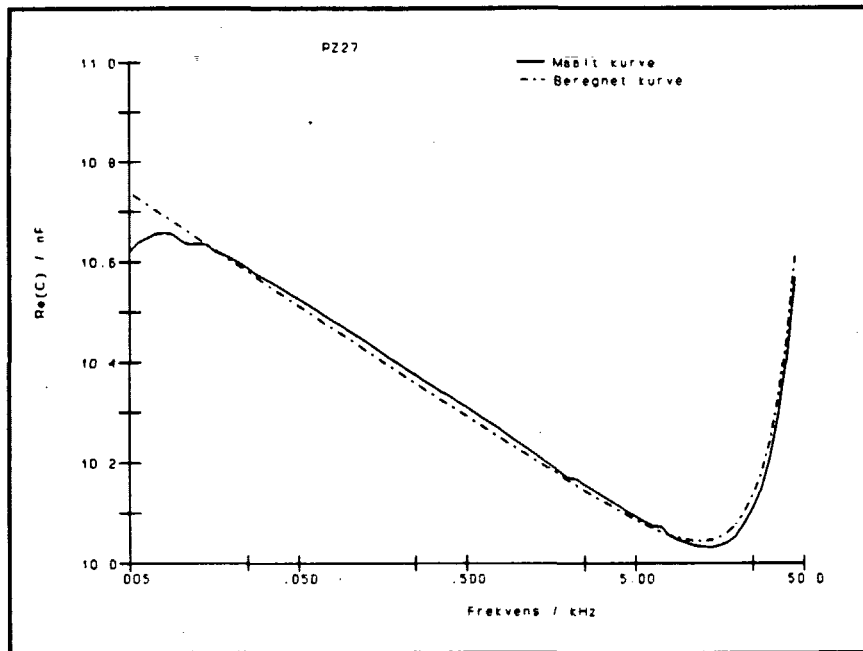
De følgende fit er i øvrigt, i modsætning til de foregående, foretaget med 7 frie parametre, dvs. kravet $\alpha + \beta = 2\gamma$ er ikke indlagt i modellen, da dette krav først blev formuleret senere. Dette betyder således at resultaterne ikke er i overensstemmelse med termodynamikkens anden hovedsætning.



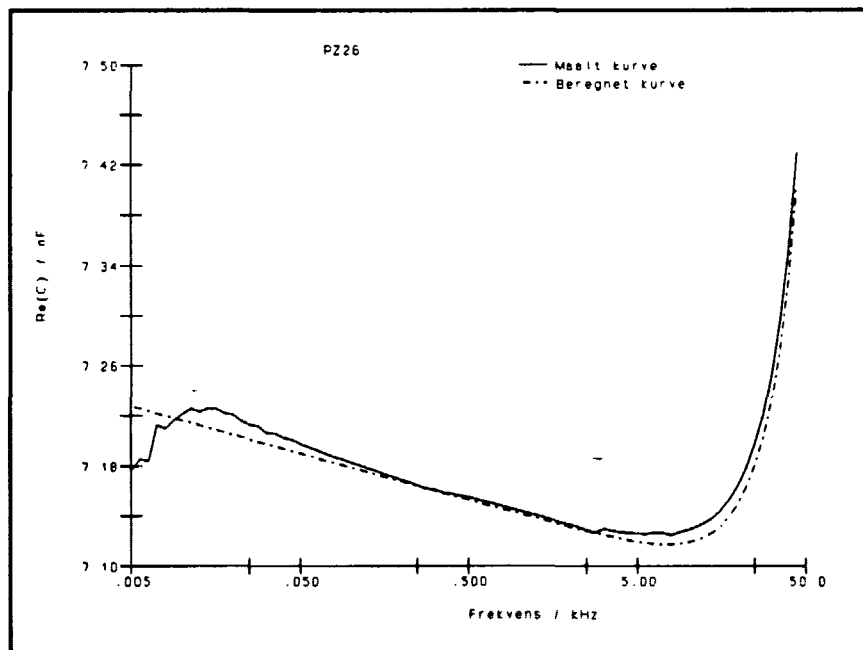
Figur 4.7 Realdel af kapacitansen for PZ27 fra 1 til 454 kHz.



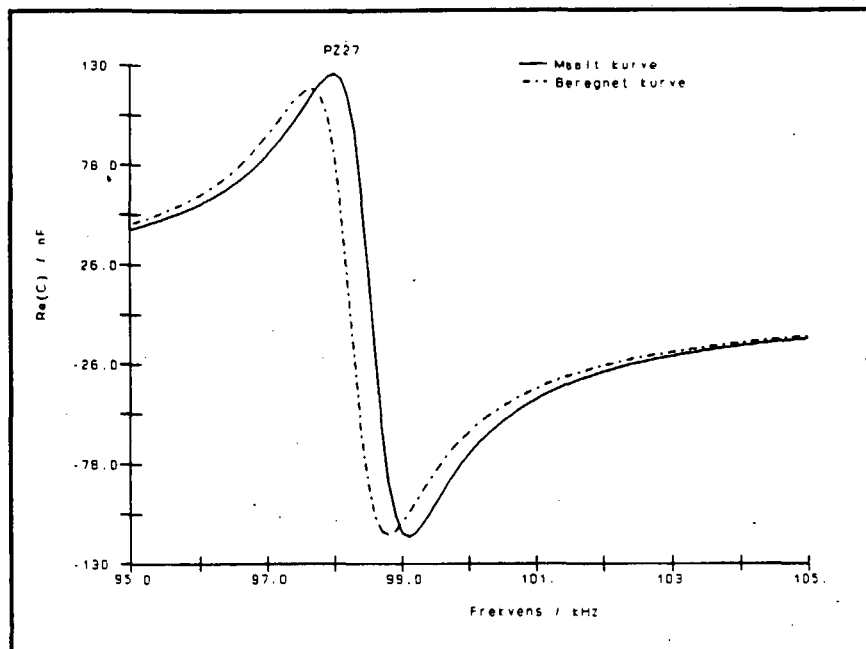
Figur 4.8 Realdel af kapacitansen for PZ26 fra 1 til 454 kHz.



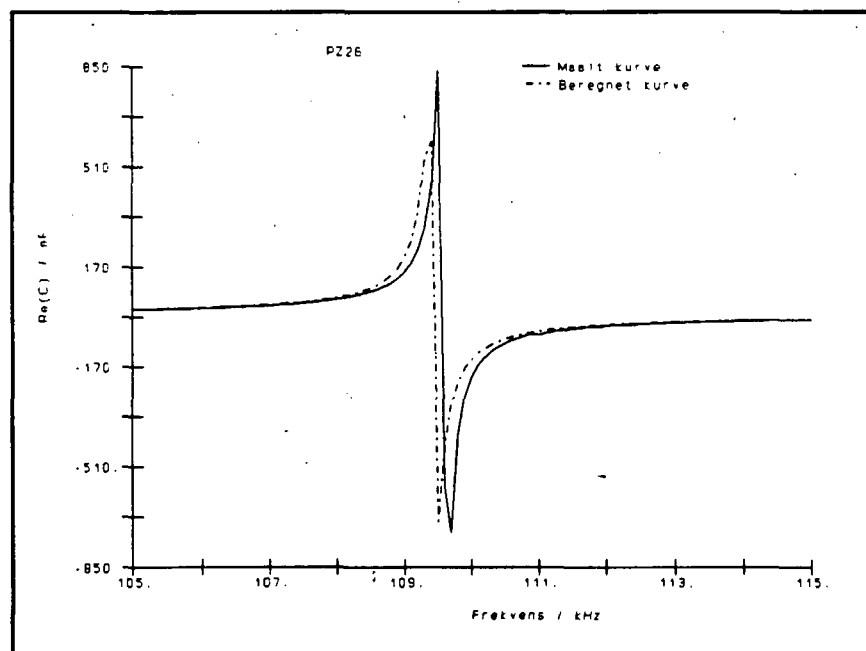
Figur 4.9 Middelværdi af realdel af 30 logaritmiske målinger på PZ27. Kurven har en noget svagere hældning end PZ29, men udviser det samme "svaj".



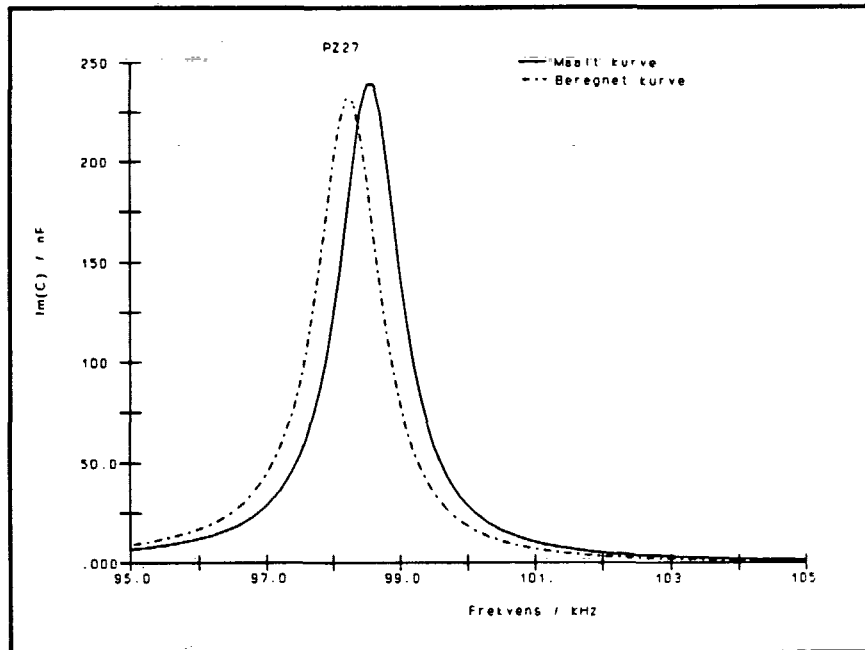
Figur 4.10 Middelværdi af realdel af 30 logaritmiske målinger på PZ26. Her ses en meget svagere hældning end i de to andre keramikker, og "svajet" går den anden vej.



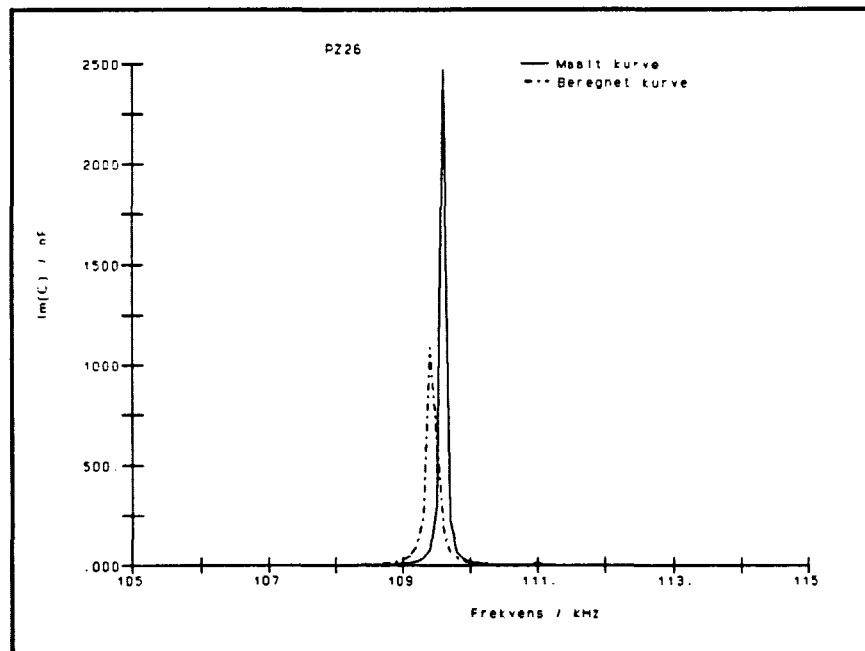
Figur 4.11 Realdel af kapacitansen ved første resonans for PZ27. Resonansen er sammenlignelig med den for PZ29 (figur 4.3).



Figur 4.12 Realdel af kapacitansen ved første resonans for PZ26. Denne har en høj resonanstop, som følge af det lille tab.



Figur 4.13 Imaginærdel af kapacitansen ved første resonans for PZ27. Toppen har ca. samme halvældbredde som PZ29 (figur 4.4).



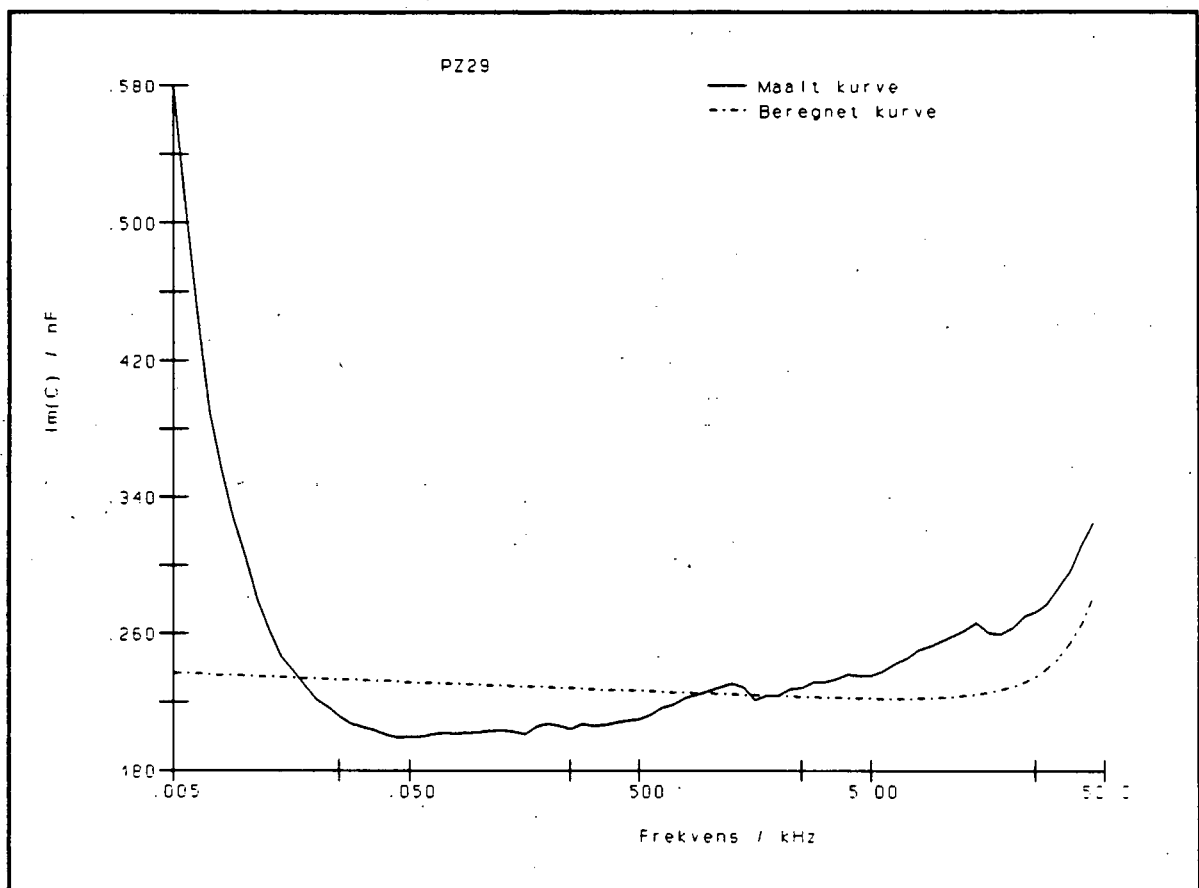
Figur 4.14 Imaginærdel af kapacitansen ved første resonans for PZ26. Det lille tab resulterer i en høj, smal resonanstopp.

4.3 Problemer

Dette afsnit handler om nogle af de problemer, vi har haft. I det følgende beskrives disse, samt hvorledes de er forsøgt løst.

Modstand

Som det er fremgået af projektet, har det været lettere at fitte nogle dele af kurven end andre. En af de ting, vi har haft svært ved at indpasse i modellen, er den stigning, der ses på imaginærdelen af frekvensområdet under 50 kHz, se figur 4.15.



Figur 4.15 Sammenligning mellem imaginærdelen af målt og beregnet kurve. Der er målt i frekvensintervallet 0.005-45 kHz og den beregnede kurve er baseret på egne data se tabel 4.1.

Vi har prøvet at vurdere, om denne stigning skyldes modstand i tilledningerne eller i det ledende lag. Først har vi ved anvendelse af et multimeter forsøgt at måle, hvor stor denne modstand er. Ved måling af både tilledninger og elektrodelag viste multimeteret ikke rigtig noget, hvilket betyder, at modstanden er mindre end 0.1 ohm. Dernæst er der opstillet et overslag (4.1), for at se hvor meget en modstand på under 0.1 ohm kunne betyde for stigningen på imaginærdelen. Der er i det flg. foretaget den antagelse, at modstanden sidder i serie med kapacitoren (hvilket er tilfældet, hvis den sidder i tilledningerne).

$$\tilde{Z} = R - \frac{1}{i\omega C}$$

$$\tilde{C} = \frac{C}{1 - i\omega RC} \quad , \quad C = C' + iC'' \quad (4.1)$$

$$\tilde{C} = \frac{C'(1 + i\omega RC') + iC''(1 + \omega RC'')}{(1 + \omega RC'')^2 + (\omega RC')^2}$$

Da C' er i størrelsesordenen 10^{-8} F, C'' er i størrelsesordenen 10^{-10} F, ω ca. $2\pi \cdot 5$ kHz og $R_{\max} = 0.1$ ohm, betyder det, at nævneren kan sættes lig 1.

$$\tilde{C} = C' + iC'' + i\omega RC''^2 + i\omega RC'^2 \quad (4.2)$$

Der ses nu kun på imaginærdelen, da det er denne, der beskriver tabet.

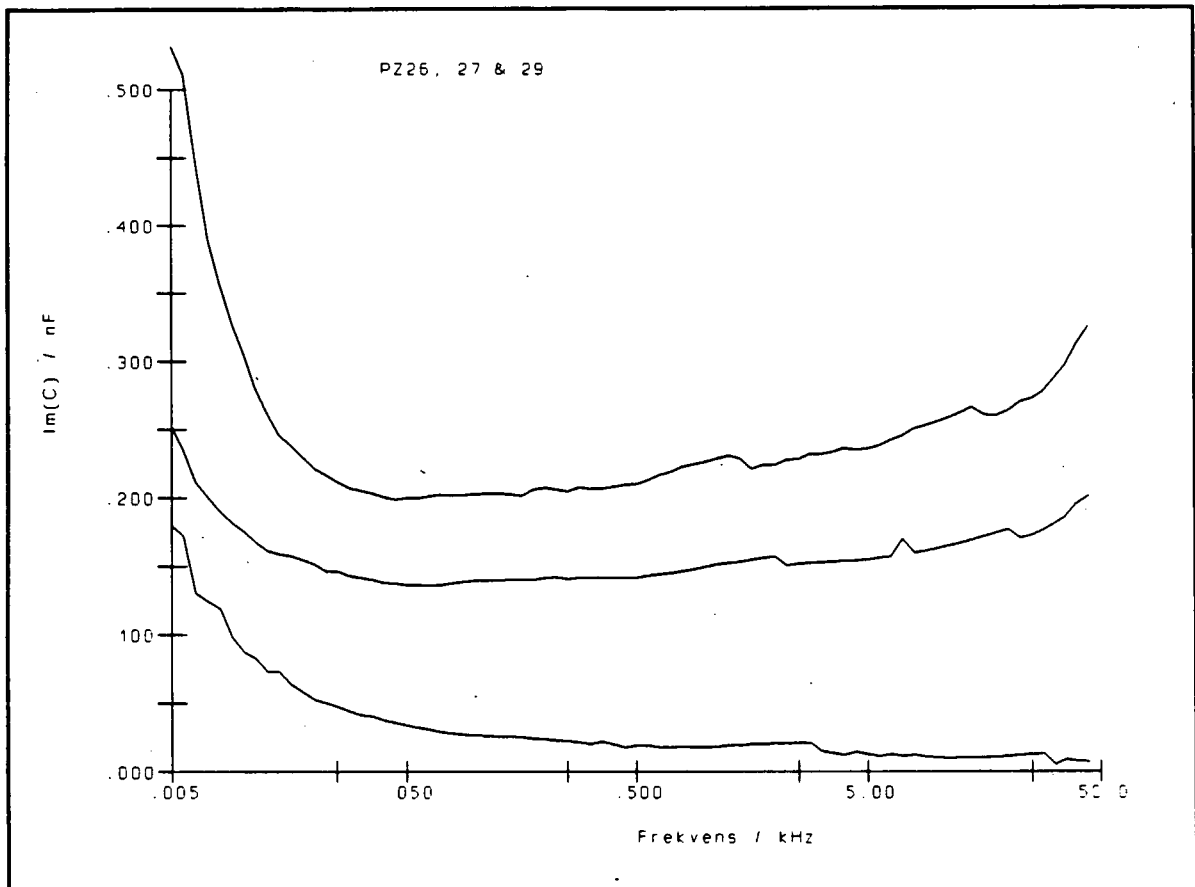
$$\text{Im}(\tilde{C}) = C''(1 + \omega RC' \frac{C'}{C''}) \quad (4.3)$$

Der er set bort fra leddet $\omega RC''^2$, da det er langt mindre end $\omega RC'^2$.

På figur 4.15 kan man på den målte kurve se, at ved 0.05 kHz er imaginærdelen af kapacitansen ca. 0.20 nF og ved 5 kHz ca. 0.24 nF, hvilket giver en stigning på 0.04 nF, svarende til ca. 20%. Indsættes værdierne for C' , C'' , R samt ω , giver dette kun en stigning på ca. 0.3%.

Vi er derfor kommet frem til, at enten er antagelsen om en enkelt seriemodstand ikke god nok, eller også er det simpelthen en anden effekt, der kan iagttages. Der er derfor foretaget målinger på PZ26 og PZ27 i samme frekvensområde for at se, hvordan imaginærdelen af kapacitansen på disse opfører sig. Som det ses, er der ingen stigning for PZ26, hvorfor der ikke kan ligge modstand i tilledningerne. Derimod kan modstanden godt ligge i elektrodelaget, da de forskellige keramikker kan være påført forskellige ledende lag.

Efter at have foretaget målinger på den indspændte skive, hvor effekten ikke ses (figur 3.11), kunne svaret være, at det er stigningen mod første resonans, der ses på imaginærdelen på et meget tidligt tidspunkt. Endvidere er der en større dissipation i PZ29 end PZ26, hvilket giver en bredere resonans på imaginærdelen. Det passer godt med figur 4.16 og vores antagelse om, at effekten skyldes første resonans.

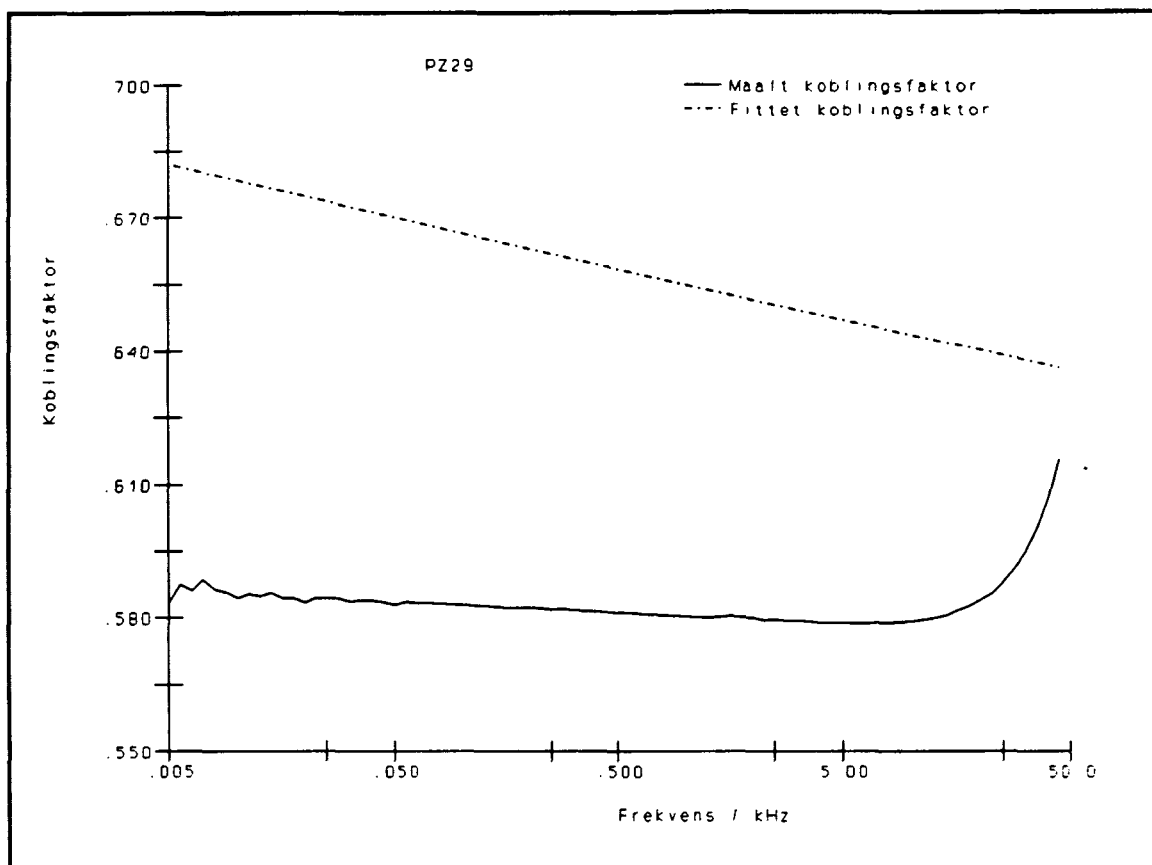


Figur 4.16 Frekvensbilledet er 1-45 kHz og det er logaritmiske målinger. Øverste graf viser PZ29, midterste PZ27 og nederste PZ26.

Koblingsfaktor

Ud fra de i afsnit 3.4 beskrevne målinger af C_{clamp} , har vi konkluderet, at koblingsfaktoren er konstant. Dette opnås i modellen ved at indlægge kravet $\alpha + \beta = 2\gamma$. Man kunne dog forestille sig at fitteproceduren automatisk ville finde frem til denne sammenhæng, når man lod α , β og γ variere uafhængigt (hvilket vi længe gjorde). Dette lader imidlertid ikke til at være tilfældet. Koblingsfaktoren i et sådant fit kommer derimod til at afhænge af frekvensen som en potensfunktion. På figur 4.17 ses et plot af koblingsfaktoren for et sådant fit sammenholdt med den "målte" kurve.

Kurven for den "målte" koblingsfaktor er fundet ud fra: $C_{\text{clamp}}/C_0 = 1 - k_p^2$, og den fittede er fundet ved indsættelse af de forskellige værdier i (2.22). Da udtrykket for C_0 kun er en god approksimation for lave frekvenser, vil udregningen af den "målte" koblingsfaktor kun gælde under resonansområdet, hvilket er forklaringen på den pludselige stigning af kurven i slutningen af afbildningsintervallet.



Figur 4.17 Koblingsfaktoren afbildet som funktion af frekvensen (på logaritmisk akse). Hældningen af den fittede kurve er stejlere end hældningen af den målte.

Det ses, at hældningen af de to grafer er meget forskellig. Den målte koblingsfaktor er stort set konstant, dog med et svagt fald, mens den "fittede" har en langt stejlere hældning. Man kan ikke sammenligne niveauet af de to kurver, da den fittede beskriver en fuldstændig indspændt skive, og målingen er foretaget på en kun delvist indspændt skive. Havde den virkelige skive været bedre indspændt (C_{clamp} mindre), ville niveauet af k_p have ligget højere, og den ville muligvis have været konstant.

Resultatet af at fitte med α , β og γ som frie parametre har yderligere den uheldige konsekvens, at et af de i afsnit 3.3 beskrevne krav (se (3.15)), der følger af termodynamikkens anden hovedsætning, ikke opfyldes. Dette skyldes at eksponenten γ bliver utilladeligt stor, hvilket endvidere medfører, at imaginærdelen af den fittede kurve nogle steder bliver negativ.

Disse problemer undgås, som sagt, ved eksplicit at lægge båndet på eksponenterne ind i fitteprogrammet. Herved forøges det besvær man må gennemgå for at nå et pænt resultat, men det lader sig dog gøre, hvorfor problemerne med anden hovedsætning må tilskrives en mangelfuld fitteproces.

4.4 Værdier af modelparametre

I tabel 4.1 angives de værdier af parametrene, som er fundet ved fitting af de beregnede kurver til de målte, mens de fra producentens side angivne værdier findes i appendiks E.

Parameter	Enhed	PZ26	PZ27	PZ29	PZ29 _{kp}
ϵ_{330}	$C^2/Nm^2 \cdot 10^{-8}$	1.13	1.56	2.23	2.23
s_{110}	$m^2/N \cdot 10^{-11}$	1.31	1.80	1.65	1.66
s_{120}	$m^2/N \cdot 10^{-12}$	-4.20	-7.18	-5.37	-5.38
d_{130}	$m/V \cdot 10^{-10}$	-1.19	-1.72	-2.24	-2.24
α	$\cdot 10^{-3}$	2.25	9.16	9.76	9.75
β	$\cdot 10^{-3}$	0.71	7.32	8.00	8.00
γ	$\cdot 10^{-3}$	1.72	22.8	16.5	8.88
k_{p0}		0.53	0.59	0.63	0.63
σ_p		0.32	0.40	0.32	0.32
$\Delta C/C_{clamp}$		0.39	0.54	0.67	0.66

Tabel 4.1 Fittede parameterværdier fundet ud fra målinger ved ca 25 °C. Parametre med 0 i indeks svarer til de tilsvarende parametre uden 0 i appendiks E. I sidste kolonne er koblingsfaktoren holdt konstant.

Koblingsfaktoren k_{p0} er beregnet ud fra den sædvanlige definition (se (2.22)), idet værdierne af ϵ_{330} , s_{110} , s_{120} og d_{130} er indsat. Størrelsen $\Delta C/C_{clamp}$, hvor $\Delta C = C_0 - C_{clamp}$, er medtaget fordi denne er mere sigende end koblingsfaktoren i forbindelse med målinger på seje væsker; forholdet beregnes ud fra:

$$\frac{\Delta C}{C_{clamp}} = \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \quad (4.4)$$

Tallene i de tre første kolonner i tabel 4.1 er fundet ud fra en model uden krav om overholdelse af termodynamikkens anden hovedsætning. Betragter man potensernes størrelser vil man da også bemærke at kravet $2\gamma = \alpha + \beta$ ikke er opfyldt. Kravet er indeholdt i modellen, der giver parameterværdierne i sidste kolonne.

4.5 Evaluering af modellen

Den modificerede model har åbenbart haft en vis succes med at beskrive dispersionen i PZ29 kvantitativt, hvilket har været det vigtigste formål med den. Imidlertid er der altså også forskellige mere eller mindre graverende uoverensstemmelser.

At det ikke har været muligt på den korte tid at fitte ordentligt til målingerne på PZ27 og PZ26, skal der nok ikke drages forhastede konklusioner af, idet fitteprocessen har vist sig at være meget følsom overfor små ændringer i betingelserne, og det således kræver lang tid og mange forsøg, før det virker ordentligt. Endvidere er potensbåndet ikke indlagt i disse fit, hvorfor de ikke er i overensstemmelse med termodynamikkens anden hovedsætning.

En brist ved modellen er dens manglende evne til at indfange stigningen i imaginærdelen ved lave frekvenser for PZ29 og PZ27. Det vides ikke rigtig, hvad der forårsager denne stigning, men det bedste gæt er, som nævnt, at det er begyndelsen til resonansen, der anes meget tidligt. Dette forklarer, at det kun ses i PZ29 og PZ27, der har bredere resonanser. Hvis denne forklaring holder stik, måtte man imidlertid forvente at en fyldestgørende model også ville være istand til at indfange denne effekt.

Endvidere skal nævnes, at den gode overensstemmelse på første resonans (PZ29) ikke holder på de højere resonanser, således at modellen kun er troværdig op til et par hundrede kHz. Dog kan områder ved højere frekvenser godt fittes bedre på bekostning af det lavfrekvente område, når blot bølgelængden ikke bliver så lille, at svingninger i z-retningen spiller ind.

Der har været visse problemer med keramikernes store temperaturfølsomhed og lange hukommelse, men det vurderes, at dette ikke har haft den store betydning for fitteproceduren, idet det blot har betydning for, hvor højt kurven ligger, og således giver en lille usikkerhed på størrelsen af ϵ_{330} .

Afslutningsvis konkluderes det, at modellen har opfyldt sit hovedformål: at give en kvantitativ beskrivelse af tabet i lavfrekvensområdet for PZ29, men det er dog ikke tilfredsstillende at modellen er ude af stand til at give et præcist billede af flere resonanser. Større overensstemmelse på en enkelt resonans ser umiddelbart ud til at ske på bekostning af præcisionen på de andre.

Appendiks A

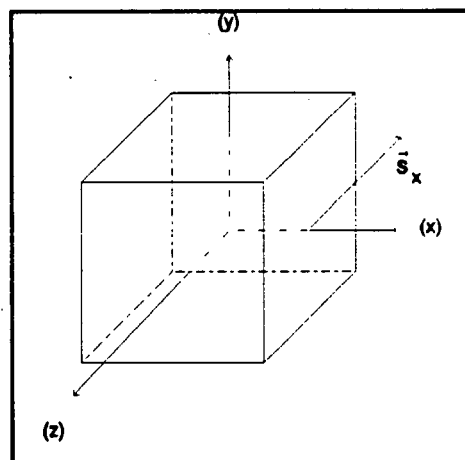
Grundlæggende elasticitetsteori

I det følgende gennemgås nogle af de grundlæggende begreber fra elasticitetsteorien, som har interesse i forbindelse med nærværende rapport, dvs. spændingstensoren, straintensoren og elasticitetsmodultensoren, samt Newtons 2. lov for et homogent, isotropt legeme. Straintensoren og divergensen af spændingstensoren angives endvidere i cylindriske koordinater.

A.1 Spændingstensoren

I et afgrænset mekanisk system kan der skelnes mellem indre og ydre kræfter. Indre kræfter defineres som vekselvirkninger mellem systemets indre dele. Et eksempel på sådanne indre kræfter er de spændinger, der opstår i et fast legeme, som følge af at stof er samlet i et afgrænset rumfang. Den fysiske størrelse *spænding* (stress) kan defineres som den kraft pr. arealenhed, der virker på en infinitesimal snitflade inde i et legeme.

Betragtes en infinitesimal klods, som er lagt ind i et retvinklet koordinatsystem, således at akserne står vinkelret på fladerne, og kaldes de flader, hvor normalen går i positiv akseretning, for positive flader, vil spændingen på f.eks. den positive x -flade, s_x , være defineret som den kraft, hvormed legemet i den positive halvplan for snitfladen påvirker legemet i den negative halvplan, divideret med arealet af fladen. Denne kan nu opsplittes i komponenter efter akserne: σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{xz} . Første indeks angiver fladen (med fortegn), andet indeks angiver retningen. Fremover benyttes ind imellem talindices, således at $x,y,z \rightarrow 1,2,3$.



Figur A.1 Spænding på positiv x -flade af volumenelement centreret omkring origo.

Spændingen kan have en vilkårlig retning, men er den parallel med normalen, kaldes den normalspænding; står den ortogonalt på normalen, dvs. parallelt med fladen, tales der om tangentialspænding.

For et givet fladeelement, med normalvektor \mathbf{n} , udtrykkes spændingen generelt ved:

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n} \quad (\text{A.1})$$

Det skal i det nedenstående vises at, samtlige spændingskomponenter σ_{ij} for volumenelementet kan opstilles som en symmetrisk spændingstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Lad volumenelementet have sidelængden b . Der gælder så ifølge Newtons 2. lov:

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow$$

$$(\sigma_{11} + \sigma_{-11} + \sigma_{21} + \sigma_{-21} + \sigma_{31} + \sigma_{-31})b^2 = \rho b^3 \frac{d^2x}{dt^2}$$

Dette skal være opfyldt for vilkårlige klodser, og således også når kun to af siderne har længden b , mens den tredje er meget lille, således at kraftbidraget fra de fire små flader er forsvindende. Da rumfanget V går hurtigere mod nul end fladen b^2 , følger heraf:

$$V \rightarrow 0 \rightarrow \sigma_{ij} + \sigma_{-ij} = 0 \rightarrow$$

$$\sigma_{-ij} = -\sigma_{ij} \quad (\text{A.3})$$

De 18 tal, der giver den fuldstændige spændingskarakteristik af et volumenelement, kan således reduceres til 9.

Z-komponenten af kraftmomentet på volumenelementet er givet ved:

$$M_z = b^3(\sigma_{12} - \sigma_{21})$$

Da inertimomentet er givet ved:

$$I = \frac{1}{6}mb^2 = \frac{1}{6}\rho b^5$$

følger af impulsmomentsætningen at:

$$b \rightarrow 0 \rightarrow \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$$

Eller generelt:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (\text{A.4})$$

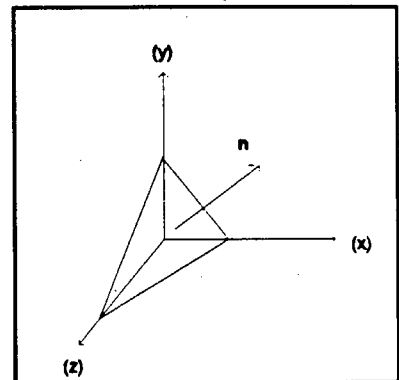
Matricen σ i (A.2) må altså være symmetrisk.

For at vise tensor karakteren af σ betragtes et tetraeder med apex i origo. Basen har arealet A_n og normalen \mathbf{n} . Arealet af fladerne ortogonalt på akserne kaldes henholdsvis A_x , A_y og A_z . Det gælder således at:

$$A_x = A_n \cos(n,x) = \alpha_{11} A_n \quad (\text{A.5})$$

$$A_y = A_n \cos(n,y) = \alpha_{12} A_n \quad (\text{A.6})$$

$$A_z = A_n \cos(n,z) = \alpha_{13} A_n \quad (\text{A.7})$$



Figur A.2 Tetraeder med udadgående normal til basen.

hvor α 'erne angiver retningscosina.

Ligevægtsbetingelsen for x-retningen, som altid må gælde i grænsen hvor $b \rightarrow 0$, er

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} A_n &= \sigma_{11} A_x + \sigma_{21} A_y + \sigma_{31} A_z \rightarrow \\ \sigma_{n1} &= \alpha_{11} \sigma_{11} + \alpha_{12} \sigma_{21} + \alpha_{13} \sigma_{31} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Tilsvarende fås for de øvrige retninger:

$$\sigma_{n2} = \alpha_{11} \sigma_{12} + \alpha_{12} \sigma_{22} + \alpha_{13} \sigma_{32} \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{n3} = \alpha_{11}\sigma_{13} + \alpha_{12}\sigma_{23} + \alpha_{13}\sigma_{33} \quad (\text{A.10})$$

Spændingen på n-fladen, s_n , kan skrives:

$$\vec{s}_n = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ni} \vec{e}_i, \quad (\text{A.11})$$

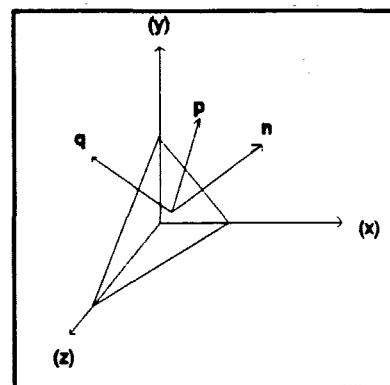
hvor e_i angiver enhedsvektorer i aksernes retninger.

Normalspændingen på n-fladen fremkommer ved at projicere s_n ind på n-retningen:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} = \vec{s}_n \cdot \vec{n} &= \alpha_{11}\sigma_{n1} + \alpha_{12}\sigma_{n2} + \alpha_{13}\sigma_{n3} = \\ &\alpha_{11}^2\sigma_{11} + \alpha_{12}^2\sigma_{22} + \alpha_{13}^2\sigma_{33} + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\sigma_{12} + 2\alpha_{11}\alpha_{13}\sigma_{13} + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\sigma_{23} \end{aligned}$$

For at udtrykke shearspændingen på n-fladen, indføres enhedsvektorerne p og q , der står vinkelret på hinanden og på n . Svarende til $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ indføres retningscosina for p , $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}$, og q , $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$. Projektionen på p-retningen giver:

$$\begin{aligned} \sigma_{np} = \vec{s}_n \cdot \vec{p} &= \alpha_{21}\sigma_{n1} + \alpha_{22}\sigma_{n2} + \alpha_{23}\sigma_{n3} = \\ &\alpha_{11}\alpha_{21}\sigma_{11} + \alpha_{12}\alpha_{22}\sigma_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23}\sigma_{33} + \\ &(\alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{11}\alpha_{22})\sigma_{12} + (\alpha_{12}\alpha_{31} + \alpha_{11}\alpha_{32})\sigma_{13} \\ &+ (\alpha_{22}\alpha_{31} + \alpha_{21}\alpha_{32})\sigma_{23} \end{aligned}$$



Figur A.3 Ny ortonormal basis (n, p, q) , hvor pq -planen er parallel til tetraederets base.

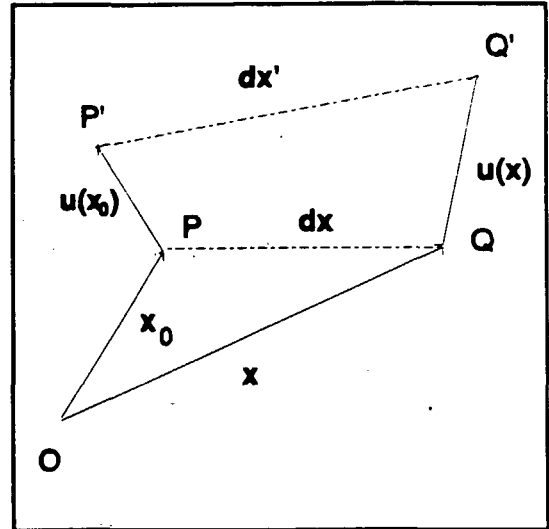
I generel form kan projektioner på n-, p- og q-retningen for et arbitrært n skrives:

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jl} \sigma_{kl} \quad (\text{A.12})$$

Mærket ' indikerer koordinater i den ny basis (n, p, q) . Dette er tensortransformationsloven, hvorfor det er godtgjort, at σ er en tensor. Det er således vist, at spændingen kan udtrykkes på formen (A.1).

A.2 Straintensoren

Når et legeme udsættes for spændinger, vil det deformeres i overensstemmelse med dets elastiske egenskaber. Deformationen beskrives som en specifik formændring kaldet strain (tøjning). Ligesom spændingerne på et volumenelement kan beskrives ved en spændingstensor, kan de tilsvarende strains beskrives ved en straintensor. Dette følger af Helmholtz' teorem om, at enhver bevægelse af en tilstrækkeligt lille del af et elastisk legeme, kan beskrives ved summen af en samlet translation, en samlet rotation samt udvidelse eller sammentrækning i tre på hinanden vinkelrette retninger [Sommerfeld;50], som det skal demonstreres i det følgende. De enkelte elementer i straintensoren beskriver altså en relativ forskydning i en given retning, og strain er således en dimensionsløs størrelse.



Figur A.4 Linieelementet dx flyttes over i dx' vha det positionsafhængige forskydningsfelt $u(x)$.

Betragtes to punkter i et volumenelement, P og Q, der bevæges over i punkterne P' og Q', kan forskydningerne beskrives ved et forskydningsfelt u , der er en funktion af stedet (se figur A.4). For tilstrækkeligt små forskydninger kan dx' beskrives ved en rækkeudvikling af u til 1. orden:

$$\begin{aligned} \bar{d}\vec{x}' &= \bar{x} + \bar{u}(\bar{x}) - (\bar{x}_0 + \bar{u}(\bar{x}_0)) \\ &= \bar{d}\vec{x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \bar{d}\vec{x} \end{aligned}$$

0'te ordens leddet beskriver en samlet translation af volumenelementet.

Koordinatvist skrives sammenhængen:

$$dx'_i = dx_i + \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

Den i 1. ordens leddet optrædende tensor opsplittes i en symmetrisk og en antisymmetrisk del:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + a_{ij}, \text{ hvor} \quad (A.13)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Den antisymmetriske del beskriver en samlet (infinitesimal) rotation af volumenelementet, og den symmetriske tensor, ϵ , må derfor beskrive deformationen.

Betragter vi det rektangulære volumenelement i et koordinatsystem, hvor spændingstensorens matrixrepræsentation er diagonaliseret, dvs. der er tale om normalspændinger, må straintensoren ligeledes repræsenteres af en diagonal matrix, såfremt vi har med et isotropt legeme at gøre, idet normalspænding i én retning, udover normalstrain i samme retning, kun kan forårsage udvidelse eller sammentrækning i de tværgående retninger.

I cylindriske koordinater, (r, ϕ, z) , er elementerne i straintensoren givet ved:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r},$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \epsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right), \quad (A.14)$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \epsilon_{\phi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} \right).$$

A.3 Elasticitetsmodultensoren

I den lineære elasticitetsteori antages Hookes lov at være gældende, dvs. at der er en lineær sammenhæng mellem spænding og strain:

$$\sigma = G \epsilon \quad (A.15)$$

hvor G er en 4.-ordens tensor kaldet elasticitetsmodultensoren eller stivhedstensoren. Koordinatvist skrives sammenhængen:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 G_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (A.16)$$

For at vurdere stivhedstensorens egenskaber nøjere, betragtes den i det system, hvor spændings- og straintensoren er diagonale. Diagonalelementerne i disse kan da skrives som søjler og ovenstående sammenhæng kan således visualiseres som følger, idet normalspændinger og -strains blot angives med et enkelt indeks:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

For et homogent, isotropt legeme følger det umiddelbart, at diagonalelementerne i ovenstående matrix må være ens, da der ikke er forskel på de tre retninger. Betragtes en situation, hvor der kun er strain i én retning (klods med "fastspændte" sider i to retninger), medfører isotropien at spændingerne i de to øvrige retninger må være ens, hvilket igen betyder, at de to off-diagonale elementer i hver søjle er ens. Betragtes derimod en situation, hvor der kun er spænding i én retning (klods med frie sider), medfører isotropien, at strains i de to øvrige retninger må være ens. Sammenholdes dette med de to tidligere opstillede krav, følger det, at alle diagonalelementer er ens, og at alle off-diagonalelementer er ens. Stivhedstensoren er invariant overfor basisskift, sålænge baserne er ortonormale.

På tilsvarende vis kan defineres en krybe- eller føjelighedstensor ved sammenhængen:

$$\epsilon = J \sigma \quad (\text{A.18})$$

I det diagonale system skrives sammenhængen således:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

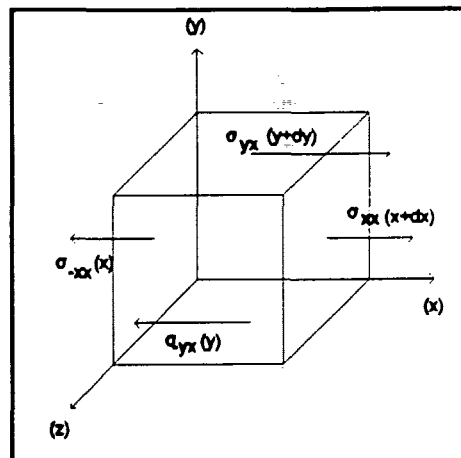
Argumentationen for at hhv. diagonalelementer og off-diagonalelementer er ens, forløber analogt med ovenstående.

A.4 Newtons 2. lov

Newton's 2. lov opstilles ved at betragte indre og ydre kræfter i x-retningen på en rektangulær klods med det ene hjørne placeret i punktet (x,y,z). De indre kræfter beskrives ved normalspændinger på positiv og negativ x-flade, samt shearspændinger i x-retningen på positive og

negative y- og z-flader. Ydre kræfter beskrives ved en volumenkraft K_x (kraft pr. volumenenhed). Da accelerationen i x-retningen er givet ved den dobbelt tidsafledede af forskydningsfeltets x-komponent, bliver sammenhængen:

$$\begin{aligned} \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = & (\sigma_{xx}(x+dx) - \sigma_{xx}(x)) dy dz + \\ & (\sigma_{yx}(y+dy) - \sigma_{yx}(y)) dz dx + \\ & (\sigma_{zx}(z+dz) - \sigma_{zx}(z)) dx dy + K_x dx dy dz \Rightarrow \\ \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + K_x \end{aligned}$$



Figur A.5 Spændingskomponenter i x-retningen på x- og y-fladerne af en klods med sidelængder dx, dy, dz.

Defineres summen af de tre første led på højresiden som x-komponenten af vektordivergensen af σ i cartesiske koordinater, kan sammenhængen således generaliseres til 3 dimensioner:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div } \sigma + \vec{K} \quad (\text{A.20})$$

I cylindriske koordinater er de tre komponenter af $\text{div } \sigma$ givet ved:

$$\text{Div}_r \sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Div}_\phi \sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{r\phi}) + \frac{\sigma_{r\phi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial z} \quad (\text{A.22})$$

$$\text{Div}_z \sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (\text{A.23})$$

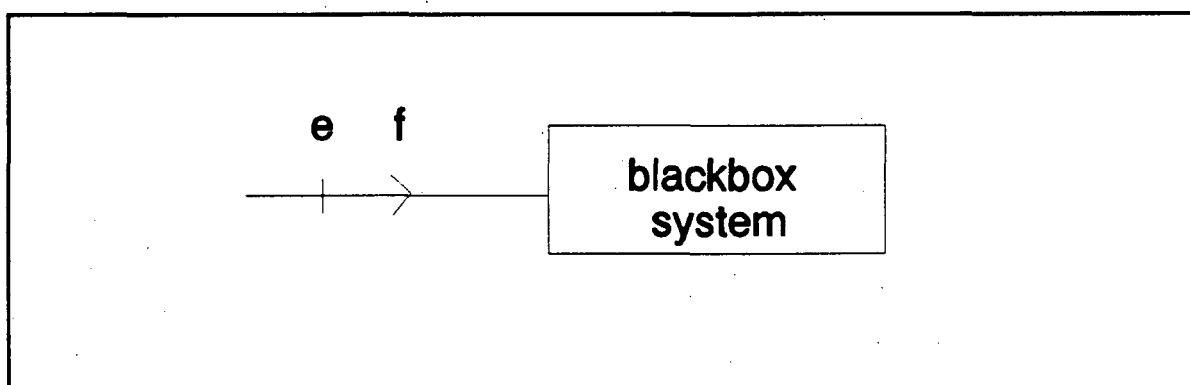
Appendiks B

Energibåndsteknik

Dette appendiks er tænkt som en introduktion til energibåndsteknik for læsere med intet eller ringe forhåndskendskab. Derfor koncentrerer det sig om de dele af energibåndsteknikken, som vi benytter i projektet.

B.1 Et-port systemer

Lad os tænke os et system, med hvilket vi kan vekselvirke gennem et energibånd, dvs. at der løber en energi gennem systemet, uden at dette nødvendigvis betyder, at der bliver dissiperet energi.



Figur B.1 Et-port system [Boye;92], hvor e er spændingen og f er strømmen. Pile angiver strømretningen, og dermed retningen af energiflowet. Normalt skrives input nærmest systemet.

Energiflowet gennem et energibånd viser sig altid at kunne bestemmes som et produkt af to energibandsvariable. Dette kan f.eks. være elektrisk strøm og spænding. Nogle energibandsvariable vil skifte retning, hvis tiden vendes, som f.eks. strømme, impulser og magnetfelter (symboliseret med pil i figur B.1), mens andre, f.eks. spænding, kræfter og ladninger, vil være uændrede størrelser. Det viser sig, at energiflowet altid vil være bestemt af en størrelse, der vender, og en, der ikke gør, hvorved en retning af energiflowet opnås.

For at finde ud af hvordan systemet vekselvirker, styrer vi enten e eller f , og ser, hvordan den anden ændrer sig. Den størrelse, vi vælger at styre, kaldes input, og den anden størrelse kaldes output.

Systemets indre egenskaber vil være entydigt bestemt af forholdet imellem input og output. Hvis vi f.eks. for et elektrisk system vælger at styre strømstyrken, finder vi ikke helt overraskende, at forholdet imellem output og input er impedansen (Z), hvor Ohms lov er et specialtilfælde.

Det er ikke alle systemer, hvor output udelukkende vil være bestemt af input. Et system, hvor dette ikke er gældende, kaldes for et aktivt system, og kan f.eks. være en strøm- eller spændingsgenerator; men de systemer, vi vil beskæftige os med her, er alle passive systemer.

B.2 Responsefunktionerne

Den mest generelle lineære sammenhæng mellem output og input kan skrives som:

$$o(t) = \int_0^{\infty} M_{io}(\tau) i(t-\tau) d\tau \quad (\text{B.1})$$

M_{io} kaldes memoryfunktionen, da den beskriver, hvor godt blackbox-systemet husker værdien af inputtet til fortiden $t-\tau$.

Hvis vi giver et input af formen:

$$i(t) = \text{Re}(i_0 e^{-i\omega t}) \quad (\text{B.2})$$

så bliver output

$$\begin{aligned} o(t) &= \int_0^{\infty} M_{io}(\tau) \text{Re}(i_0 e^{-i\omega(t-\tau)}) d\tau \rightarrow \\ o(t) &= \text{Re}(i_0 e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} M_{io}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Dette definerer den komplekse responsefunktion af forholdet imellem output og input som:

$$\tilde{R}(\omega) = \int_0^{\infty} M_{io}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.4})$$

Udover de før omtalte energibandsvariable, strøm (f) og spænding (e), indfører vi nu også impuls (p) og forskydning (q), hvor:

$$p = \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau \quad (\text{B.5})$$

$$q = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (\text{B.6})$$

Disse 4 energibandsvariable kan kombineres mellem input og output på 16 forskellige måder. Det er dog kun halvdelen, der giver nogen fysisk mening, og af de 8 er det kun de 6, der er egentligt forskellige. De sidste to er på p-q felterne og kaldes memristansfunktioner, og for systemer, hvor tiden er homogen, vil de være identiske med impedans og admittans.

output input	forskydning deformation q	strøm hastighed f	spænding kraft e	impuls p
forskydning deformation q			modulus "stivhed" G	
strøm hastighed f			impedans modstand Z	inertans "masse" M
spænding kraft e	creep compliance J	admittans bevægelighed Y		
impuls p		"lethed" F		

Figur B.2 Sammenhæng mellem responsefunktionerne [Voetmann;78]. Bevægelse langs pilene foregår ved integration.

Responsefunktionerne kan være af to forskellige typer, afhængigt af arten af input. Der er de reelle tidsresponsefunktioner, og der er de komplekse responsefunktioner med harmonisk oscillerende input. Vi vil her beskæftige os med de komplekse responsefunktioner (der i det følgende markeres med \sim), da det er disse der benyttes ved vekselstrøm.

Pilene på figur B.2 står for integration, hvilket for de frekvensafhængige responsefunktioner svarer til division med $-i\omega$.

Vi vil i det følgende bevise pilene for frekvensafhængige responsefunktioner. Vi starter med at kigge på forholdet mellem admittans (Y) og lethed (F). Af skemaet ses, at de to responsefunktioner har samme output, men forskelligt input:

$$f(t) = e(t)\tilde{Y}(\omega) = p(t)\tilde{F}(\omega) \quad (\text{B.7})$$

Vi ved, at forholdet mellem de to input er:

$$\frac{d}{dt}p(t) = e(t) \quad (\text{B.8})$$

Forholdet bliver så:

$$p(t)\tilde{F}(\omega) = e(t)\tilde{Y}(\omega) = \frac{d}{dt}p(t)\tilde{Y}(\omega) = -i\omega p(t)\tilde{Y}(\omega) \rightarrow \tilde{F}(\omega) = -i\omega\tilde{Y}(\omega) \quad (\text{B.9})$$

Vi kigger nu på forholdet mellem krybefunktionen (J) og admittansen (Y).

Denne gang er der forskelligt output, men identisk input.

$$f(t) = e(t)\tilde{Y}(\omega) \quad (\text{B.10})$$

$$q(t) = e(t)\tilde{J}(\omega) \quad (\text{B.11})$$

Vi benytter forholdet imellem output'ene:

$$f(t) = \frac{d}{dt}q(t) = \frac{d}{dt}(e(t)\tilde{J}(\omega)) = e(t)\frac{d}{dt}\tilde{J}(\omega) + \tilde{J}(\omega)\frac{d}{dt}e(t) = -i\omega e(t)\tilde{J}(\omega) \quad (\text{B.12})$$

da krybefunktionen er uafhængig af tiden.

Forholdet bliver så:

$$f(t) = e(t)\tilde{Y}(\omega) = e(t)(-i\omega\tilde{J}(\omega)) \Rightarrow \quad (B.13)$$
$$\tilde{Y}(\omega) = -i\omega\tilde{J}(\omega)$$

De 3 responsefunktioner på den nedre del i forhold til diagonalen, svarer til de andre 3 med ombyttet input/output. For komplekse responsefunktioner gælder, at de er hinandens inverse, eksempelvis Z og Y:

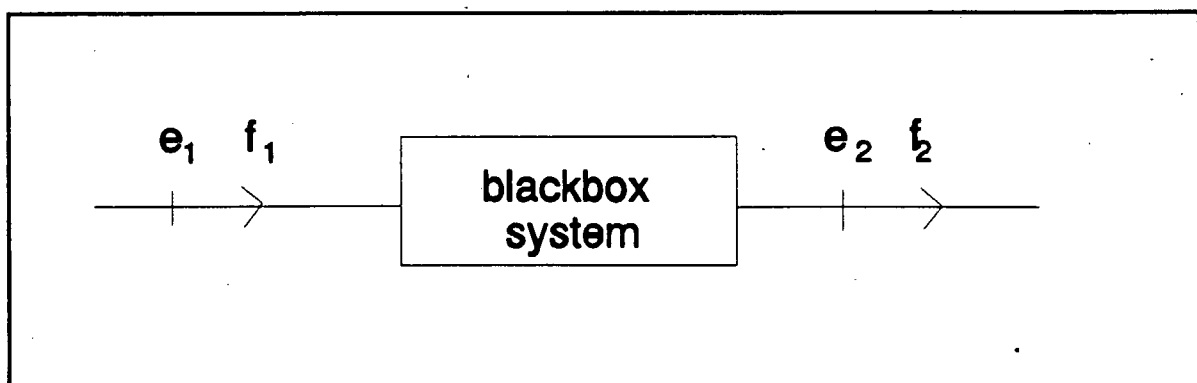
$$f(t) = e(t)\tilde{Y}(\omega) \quad , \quad e(t) = f(t)\tilde{Z}(\omega) \quad (B.14)$$

$$e(t) = e(t)\tilde{Y}(\omega)\tilde{Z}(\omega) \Rightarrow \tilde{Z}(\omega) = \tilde{Y}(\omega)^{-1} \quad (B.15)$$

hvorfor forholdet mellem responsefunktionerne i den øvre trekant på figur B.2 også må være $1/-i\omega$.

B.3 To-port systemer

Foreløbig har vi kun beskæftiget os med et-port systemer, men der er ikke noget, der forhindrer, at et system kan have vilkårligt mange energiporte; specielt er vi interesserede i en bestemt kategori af to-port systemer: Transduceren. Transduceren har den egenskab, at den kan omsætte energi, det være sig fra en form til en anden, eller blot ved at ændre forholdet mellem energibandsvariablene. En ideel transducer omsætter energi uden tab eller optagelse af indre energi.



Figur B.3 To-port system, hvor der er både input og output på begge sider af systemet.

Den bedst kendte form for transducer er nok vekselstrømstransformatoren, som består af en U-kerne og to spoler. Når et system har mere end én energiport, er det ikke nødvendigvis den samme form for energi, der er i alle båndene, der findes f.eks. mange systemer, som har en blanding af elektriske og mekaniske porte.

Der vil for enhver lineær to-port kunne defineres en overføringsmatrix (O):

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Da det ydermere gælder, at en ideel transducer hverken lagrer eller dissiperer energi, vil det til enhver tid gælde at:

$$e_2 \cdot f_2 = e_1 \cdot f_1 \quad (\text{B.17})$$

hvorfor det viser sig, at der kun findes to former for overføringsmatricer for transducere:

$$O = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & G \\ G^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

hvor den første relation gælder for transformatoren og den anden for gyrotoren.

Appendiks C

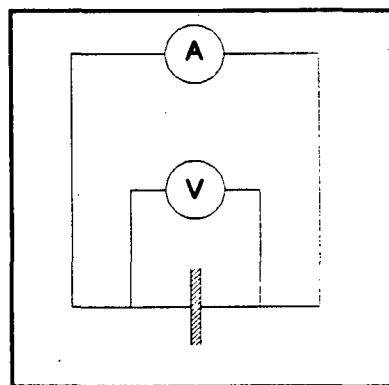
Forsøgsbeskrivelse

De piezokeramiske skiver er, som nævnt i indledningen, udformet som små pladekondensatorer, og overensstemmelse med den målte kapacitans af disse er således det kriterium, hvorudfra anvendeligheden af den opstillede model kan vurderes. I det følgende gives en kort redegørelse for hvorledes kapacitansen er målt, og hvilket apparatur der er indgået. Endvidere skal der gøres nogle overvejelser over hvilke usikkerhedsmomenter der er, specielt i forbindelse med målingen af C_{clamp} . Det bør bemærkes at nogle af hovedproblemerne ved kapacitansmålingerne, dvs. piezokeramikernes store følsomhed overfor forhistorie og temperaturfluktuationer samt evt. modstand i tilledninger og elektroder, er behandlet i selve rapporten afsnit 3.5 og 4.3.

C.1. Apparatur og opstilling

Kapacitansen måles vha. et apparat fra Hewlett Packard: 4192A, LF Impedance Analyzer (5 Hz - 13 MHz). Dette måler realdelen og tabsfaktoren ($\text{Im}(C)/\text{Re}(C)$). Særligt skal nævnes to problemer: modstand og kapacitans i kablerne, samt faseforskydning af signaler.

Problemet med modstand i målekablerne søges imødegået ved at foretage en såkaldt firepunktsmåling. Princippet er at kabler førende til henholdsvis voltmeter og galvanometer først forbindes helt nede ved elektroderne på skiven, hvorved evt. modstand reduceres til at ligge i det sidste stykke af tilledningerne og i elektroderne. Herved kan man måle ved store strømstyrker uden at få problemer med spændingsfald i kablerne, idet der kun løber en ganske lille strøm til voltmeteret. Målingen af spændingsfaldet over kondensatoren bliver således meget nøjagtig, mens usikkerheden på målingen af strømstyrken må antages at være forsvindende. Der benyttes koaksialkabler for at skærme for kapacitiv og induktiv energiudveksling mellem kablerne. Ved at forbinde kapperne på de fire kabler ophæves eventuelle effekter hidrørende fra intern kapacitans i de enkelte kabler (denne er i øvrigt kun omkring 100 pF pr. meter, altså en faktor 100 mindre end piezoskivens).



Figur C.1 Princip i firepunktsmåling.

En konsekvens af metoden med firepunktsmåling er, at der vil være en faseforskydning på målingen af spænding og strømstyrke, da der vil være en karakteristisk udbredelsestid for strømmen til det punkt, hvor spændingen måles. Denne effekt, svarende til en kabellængde på 1 m, tages der højde for i måleapparatet. Antages det, at strømsignalet udbredes med lysets hastighed i vacuum, vil tidsforskydningen fra amperemeter til voltmeter være $2m/c = \frac{2}{3} \cdot 10^{-8}$ s, svarende til en faseforskydning på 0,04 rad ($2,3^\circ$) ved 1 MHz.

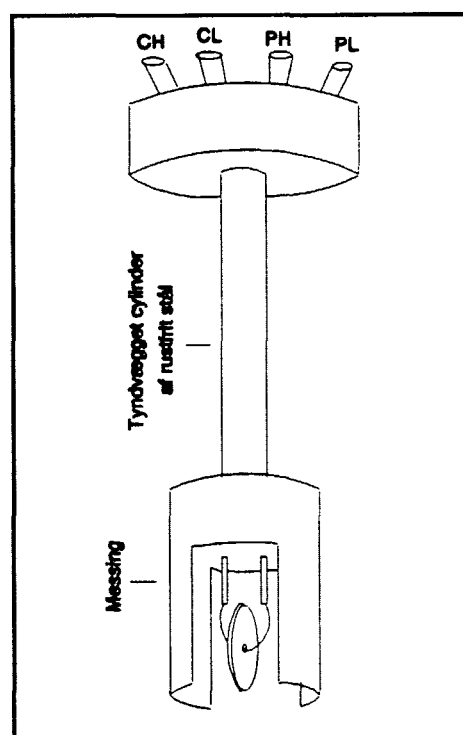
En tabsfri kondensator drejer fasen mellem strøm og spænding $-\pi/2$ rad. For PZ29 er imaginærdelen af kapacitansen af størrelsesorden 1/100 af realdelen, hvilket svarer til en korrektion af denne fasedrejning på ca. 0,01 rad. Signalets udbredelsehastighed får altså betydning, hvis der ikke korrigeres for den, hvorfor en kabellængde på 1 m bør tilstræbes.

Piezokeramikernes temperaturafhængighed er målt ved at nedsænke disse i en kryostat, designet på IMFUFA af Ib Høst Pedersen, Niels Boye Olsen og Tage Christensen og udført af det mekaniske værksted på RUC (se fig C.2 og C.3). Herved kan temperaturen reguleres meget nøjagtigt, mens problemet med keramikernes hukommelse imidlertid består. Dette er søgt imødegået ved at vente et kvarter mellem hver måling ved en ny temperatur, men måleserierne, der foretages først ved gradvis afkøling og derefter gradvis opvarmning, udviser ikke desto mindre en udtalt hysteres.

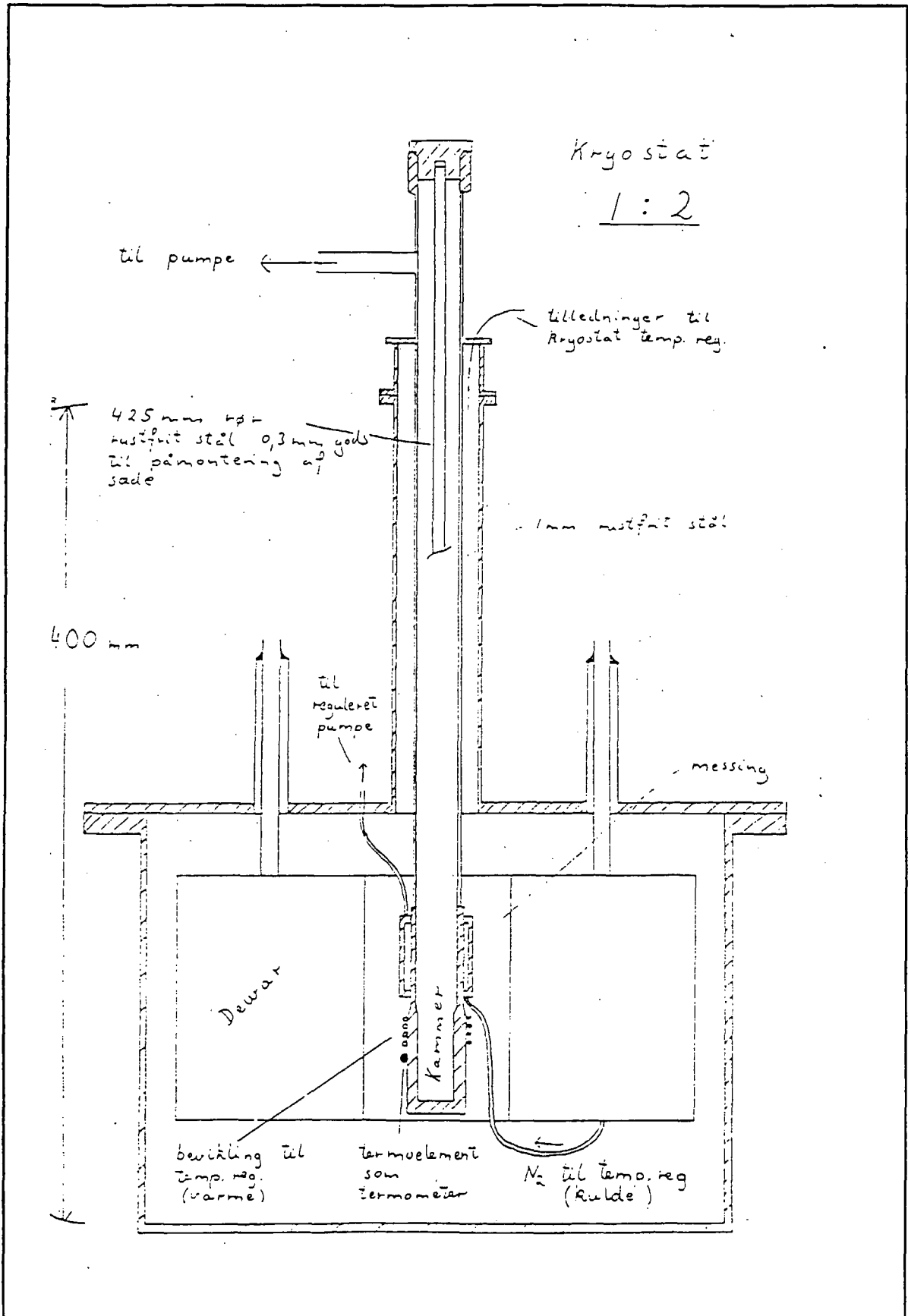
C.2. Måling af C_{clamp}

Udover målinger af den frie kapacitans, er den "clamped" værdi (dvs. værdien for en indspændt skive) af PZ29 søgt målt. Dette er gjort ved at lime den fast på en klods af rustfrit stål, således at radielt udsving hindres.

Der er brugt en cylindrisk klods med diameter 30 mm og tykkelse 20 mm, mens skiven har diameter 20 mm og tykkelse 0,5 mm. Gennem klodsens centrum er boret et hul på knap 2 mm til ledningen. Stivhedsmodulus af rustfrit stål er $2 \cdot 10^{11}$ N/m², hvilket er omtrent en faktor 3 større end for PZ29. Disse er således sammenlignelige. Det antages derfor, som den mest simple approksimation, at klodsens ved perfekt limning vil kunne indspænde skiven proportionalt med forholdet mellem de to tykkelser, dvs. $u_{clamp} = 0,5\text{mm}/20,5\text{mm} \cdot u_{fri} = 1/41$.

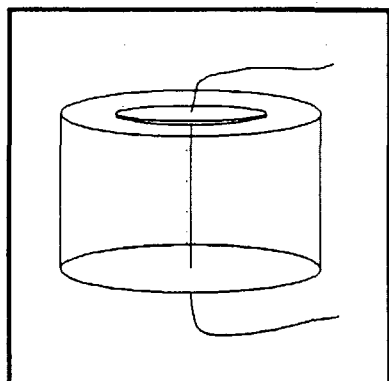


Figur C.3 Holder med piezoskive, som kan nedsænkes i kryostaten. CH- og CL-kablet går til amperemeter, mens PH- og PL-kablet går til voltmeter.



Figur C.2 Kryostaten [Christensen;89].

u_{iii} . Udsvinget vil med andre ord, ifølge denne simple approksimation, være reduceret til et par procent, og kapacitansen vil således være tæt på den indspændte værdi.



Figur C.4 Klods med pålimet piezokeramisk skive.

Den anvendte lim er en to-komponent lim af typen Torr Seal fra Varian Associates med størkningstid 1-2 timer og hærningstid ca. 24 timer.

Der er foretaget måleserier på skiven hængende helt frit, siddende på klodsen uden lim, løbende under størknings- og hærningsprocessen, samt endelig da limen var færdighærdet. Desværre brækkede den ene tilledning af under pålimningen, så det var nødvendigt at lodde igen, hvorved forhistorierne for de ulimede og limede måleserier ikke er blevet så ens, som det kunne ønskes. Dette kan have betydet, at de første målinger efter limningen har ligget noget højere, end de ellers ville have gjort, mens slutværdien må antages at være nogenlunde upåvirket.

På grund af klodsen og de tilhørende lange tilledninger (ca. 5 cm) har det ikke været muligt at have denne skive siddende i kryostaten, hvorfor den har været under påvirkning af de almindelige fluktuationer i rummets temperatur.

Appendiks D

Fitteprogram

D.1 Programbeskrivelse

Sproget, vi har benyttet til at fitte de forskellige parametre med, er ASYST. Det har vi valgt dels fordi, at ASYST blev benyttet i de eksisterende målemetoder, og dels fordi ASYST har en ulineær kurvefitfunktion.

Curve.fit

Da curve.fit kommandoen er ulineær, bruger den iterationer. Dette betyder, at det er nødvendigt at give et indledende gæt på værdien af konstanterne, som curve.fit så forsøger at variere, så den mindste afvigelse opnås. Curve.fit regner med afvigelsen:

$$\sum_{i=1}^n |y_i - F(c_1, \dots, c_m; x_i)|^2 \quad (\text{D.1})$$

som den vil forsøge at minimalisere ved at variere konstanterne for fastholdt x og y. Dette gør den ved i første omgang at finde den approksimerede Jacobimatrix, og dernæst den ligeledes approksimerede Hessianmatrix. Jacobimatricen er den første afledede af funktionen, og Hessianmatricen er den anden afledede. Disse bruger den til at finde minimum af afvigelsen. Der er tre forskellige fitteprocedurer som curve.fit kan benytte: Gauss-Newton, BFGS og Hybrid. Forskellen mellem de tre metoder ligger i, hvordan de approksimerer Hessianmatricen. Vi benytter os af Gauss-Newtonfittet, da det er det hurtigste. Til gengæld kræver det pænere funktioner (og muligvis bedre gæt) for at kunne fitte.

For at tilpasse curve.fit til vores formål, har vi måttet lave visse justeringer. I det følgende er der en kort gennemgang.

Cutter

Før vi begynder at fitte, afskærer vi nogle af de målte værdier. Grunden til, at vi overhovedet cutter, er, at mindske vægtningen af resonanstoppe i fitningen. Dette er især nødvendigt hvis der ikke er indført potensfunktioner, da de beregnede resonanstoppe da vil kunne blive uendelige, hvis man rammer en uheldig frekvens. Det vil betyde uforholdsmæssigt meget for afvigelsen. Betydningen af at afskære bliver nedsat, når potensfunktionerne bliver indført, da højden af de teoretiske resonanstoppe, da vil svare bedre til de målte værdier. Den første

resonans bliver vægtet mindre, hvis de numerisk største værdier er blevet skåret væk.

Grunden til, at vi cutter flere gange, er, at vi vil være sikre på at de tilbageblevne real- og imaginærdele passer sammen, og at der er lige netop de tilhørende frekvenser.

Samler

Curve.fit kommandoen kan ikke forstå komplekse tal, hvilket vi har brug for til at vurdere, om det er fornuftigt at indføre potensfunktionerne. Derfor er vi nødt til at "snyde" curve.fit ved at sætte real- og imaginærdele af kapacitansen i forlængelse af hinanden, så vi får et reelt array, hvor vi kan fitte til alle værdier. Da arrayet derved opnår den dobbelte længde, er vi også nødsaget til at omdanne det tilhørende frekvensarray. Dette må bestå af to identiske frekvensarrays i forlængelse af hinanden, dette benytter vi stort set kun for, at X og Y i curve.fit skal have samme længde. Da det kun er i selve curve.fit kommandoen vi ikke kan regne komplekst, benytter vi den normale frekvens i alle andre sammenhænge, da den er lettere at regne med.

Høj/lav frekvens

Som beskrevet i afsnit 3.3 fitter vi i to etaper. Først fitter vi ϵ_{330} og α ved lave frekvenser vha. fit1, hvorefter fit2 benyttes til at finde resten af konstanterne ud fra en måling af et bredt spand af frekvenser.

I det efterfølgende kommer en udgave af fitteprogrammet, hvor kun det essentielle er medtaget. Dette betyder, at det ikke er muligt uden videre at køre programmet.

D.2 Fitteprogram

\ Fitteprogram til beregning af konstanter i udtryk for
\ kapacitans.

real

scalar s110	\ Konstantdel af s11
scalar s120	\ Konstantdel af s12
scalar e330	\ Konstantdel af e33
scalar d130	\ Konstantdel af d13
scalar as	\ Potens på s11 og s12
scalar ae	\ Potens på e33
scalar ad	\ Potens på d13

\ Cutte-grænser

scalar RE(min)
scalar RE(max)
scalar IMAG(min)
scalar IMAG(max)

token s11	\ Frekvensafhængig "konstant"
token s12	\ Frekvensafhængig "konstant"
token e33	\ Frekvensafhængig "konstant"
token d13	\ Frekvensafhængig "konstant"
token frek	\ Frekvensen i måleserien
token cbereg	\ Beregnet kapacitans
token nyfrek	\ 2 frekvensarrays i forlængelse
token c	\ Målt kapacitans
token creal	\ Realdel af c
token cimag	\ Imaginærdel af c
token nyc	\ Creal og cimag i forlængelse
token poisson	\ Hjælpefunktion til udregning
token alfa	\ Hjælpefunktion til udregning
token kp	\ Hjælpefunktion til udregning

\ Indledende gæt på konstanter

.1644 s110 :=
-.05220 s120 :=

```
219.2 e330 :=
-2.211 d130 :=
.01186 ae :=
.01020 as :=
.01567 ad :=
```

```
\ Cutte-grænser
```

```
-2.e-7 RE(min) :=
2.e-7 RE(max) :=
0 IMAG(min) :=
2.e-7 IMAG(max) :=
```

```
\ Fitteparametre
```

```
7 max.#.iterations :=
1.e-18 fit.tolerance :=
gauss-newton.fit
```

```
: funktioner \ "Konstanterne" gøres frekvensafhængige
```

```
s110 1.e-10 * frek -99. / z=0+iy as -1. * * * *
```

```
becomes> s11
```

```
s120 1.e-10 * frek -99. / z=0+iy as -1. * * * *
```

```
becomes> s12
```

```
e330 1.e-10 * frek -99. / z=0+iy ae -1. * * * *
```

```
becomes> e33
```

```
d130 1.e-10 * frek -99. / z=0+iy ad -1. * * * *
```

```
becomes> d13
```

```
;
```

```
: F[frek]
```

```
\ Funktionen, der skal fittes
```

```
drop
```

```
\ Dropper nyfrek
```

```
funktioner
```

```
\ Beregner funktioner
```

```
\ Hjælpefunktioner beregnes
```

```
s12 s11 / neg becomes> poisson
```

```
s11 dup * s12 dup * - s11 / 7.4e3 * sqrt becomes> alfa
```

```
d13 dup * 2. * s11 s12 + e33 * / sqrt becomes> kp
```

```

\ Teoretisk kapacitans beregnes
frek
1000. * 2. * pi * alfa * 1.e-2 * dup dup
0 swap jn swap 1 swap jn / *
poisson 1. - + poisson 1. + swap /
1. - kp dup * * 1. +
e33 pi * 1.e-2 dup * * 5.e-4 / *

```

```

\ Real- og imaginaerdel samles i et array
zre&im
catenate
becomes> cberegn
cberegn
;

```

```

: samler                                \ Laver reelle tokens af dobbelt størrelse
frek
dup
catenate                                \ 2 gange frek i forlængelse
becomes> nyfrek
creal cimag
catenate                                \ Real og imaginærdel i forlængelse
becomes> nyc
;

```

```

: cutter
horizontal 0. 500. world.set

```

```

\ Der cuttes mht. realdelen
vertical RE(min) RE(max) world.set

```

```

frek c -1. * zreal
cut \ Kommando der cutter det væk som ligger udenfor vertical
    \ world.set, og fjerner de tilhørende værdier i et andet
    \ array
becomes> creal becomes> frek

```

```
c zimag c -1. * zreal
cut
drop becomes> cimag
```

```
\ Der cuttes mht. imaginærdelen
vertical IMAG(min) IMAG(max) world.set
```

```
creal cimag
cut
drop becomes> creal
```

```
frek cimag
cut
becomes> cimag becomes> frek
;
```

```
: foer.fit
hent.maaling \ Henter kapacitansmåling
konstanter \ Giver mulighed for at ændre begyndelsesgæt
cutter \ Cutter evt. det øverste af resonanstoppe
samler \ Samler real og imaginærdele i array
;
```

```
: fit1 \ Fit ved lave frekvenser
curve.fit[ nyfrek , nyc ; f[frek] ; ae , e330 ]
;
```

```
: fit2 \ Fit ved høje frekvenser
curve.fit[ nyfrek , nyc ; f[frek] ; s110 , s120 , d130 , as , ad ]
;
```


Piezoelectric Ceramics

SUMMARY OF FERROPERM PIEZOCERAMICS PROPERTIES

Ferroperm	Type	Pz 23	Pz 24	Pz 26	Pz 27	Pz 28*	Pz 29	Pz 32	Pz 34*	Pz 45	Mult. Factor	Units	Tolerance
Density	>	7,65	7,60	7,65	7,70	7,70	7,40	7,70	7,60	7,20	10 ³	kg/m ³	
Dielectric Constants	K ₃	1500	425	1300	1800	1000	2900	280	200	165	10 ⁻⁴		± 10 %
Elastic Constants	tan δ	1,30	30	30	160	30	180	60	190	30	10 ⁻⁴		± 10 %
	Y _E ¹¹	6,6	8,4	7,6	6,3		5,8			11,0	10 ¹⁰	N/m ²	± 2,5 %
	Y ₃₃ ³³	5,9	7,0	6,1	5,1		4,8	13,5		10,5	10 ¹⁰	N/m ²	± 2,5 %
Coupling Coefficients	K ₃₃	62	62	65	69		70			14	10 ⁻²		± 5 %
	K _t	38	45	38	42	47	40	45	40	12	10 ⁻²		± 5 %
	K _p	50	50	54	60	59	63	7	3	3	10 ⁻²		± 5 %
	K ₃₁	30	30	32	36		35	4			10 ⁻²		± 5 %
Frequency Constants	N ₃	1600	1600	1800	1500		1500			1800		Hzm	
	N _t	2030	2030	1940	1950	2020	1920	2150	2100	2200		Hzm	
	N _p	2160	2300	2220	2000	2170	1960	2600	2700	2700		Hzm	
	N _i	1480	1670	1500	1400		1410			1700		Hzm	
Piezoelectric Constants	d ₃₃	290	150	275	375		525	60	40	16	10 ⁻¹²	C/N	± 5 %
	-d ₃₁	135	70	120	175		220	5		7	-	C/N	± 5 %
	d ₁₅	400		400	540			65			-	C/N	± 5 %
	g ₃₃	22	38	25	25	25	21	30	25	10	10 ⁻³	Vm/N	± 5 %
	-g ₃₁	10	10	11	12		10	3		5	-	Vm/N	± 5 %
	g ₁₅	32		32	35			28			-	Vm/N	± 5 %
Curie Temp	T _c	>	350	330	350	330	235	400	400	500		°C	
Work range recom.	<	250	230	230	250	230	150	200	150	400		°C	
Mechanical Q _m		100	> 1000	> 1000	80	> 1000	90	> 500	> 500	> 500		°C	

Data are measured at 25°C 24 hours after a heat polling.

* Preliminary data.

Litteraturliste

- [Boye;91] Boye Olsen, Niels
Note til fysik B1-kursus
Roskilde Universitetscenter 1991
- [Christensen;89] Christensen, Tage E.
En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmfylde
af en underafkølet væske ved glasovergangen
TEKSTER fra IMFUFA nr. 184
Roskilde Universitetscenter 1989
- [Ferroperm;92] Ferroperm
Produktbeskrivelse af piezoelektriske keramikker
- [Landau;70] Landau, L.D & Lifshitz, E. M.
Theory of Elasticity. Vol. 7 2.edition
Pergamon Press Oxford 1970
- [Mason;64] Mason, Warren P. (editor)
Physical Acoustics. Vol. 1-part A
Academic Press, New York 1964
- [Mattiati;71] Mattiat O. E. (editor)
Ultrasonic Transducer Materials
Plenum Press New York 1971
- [Sokolnikoff;58] Sokolnikoff, S
Mathematical Theory of Elasticity 2.edition
McGraw Hill New York 1956
- [Sommerfeld;50] Sommerfeld, Arnold
Mechanics of Deformable Bodies
Academic Press, New York 1950

[Voetmann;78] Voetmann Christiansen, Peder
Dynamik og diagrammer
TEKSTER fra IMFUFA nr. 8
Roskilde Universitetscenter 1978

[Voetmann;79] Voetmann Christiansen, Peder
Semiotik og systemegenskaber
TEKSTER fra IMFUFA nr. 22
Roskilde Universitetscenter 1979

Artikler

[Brissaud;91] Brissaud, Michel
Characterization of Piezoelectricity
IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency
Control. Vol. 38 nr. 6 nov 1991 s. 603-617

[Gallego-Juárez;89] Gallego-Juárez, J. A.
Piezoelectric ceramics and ultrasonic transducers. Review article
J. Phys. E: Sci. Instrum. 22 1989 s.804-816.
Printed in UK

[Gallego-Juárez;90] Gallego-Juárez, J. A.
Piezoelectric ceramics and ultrasonic transducers
IEEE Transactions on Electrical Isolation. Vol. 25 no 5 oct 1990 p.
949-454.

[Holland;67] Holland, R.
Representation of Dielectric, Elastic, and Piezoelectric Losses by
Complex Coefficients
IEEE transactions on sonics and ultrasonics SU-14 s.18-20
New York 1967

[Mason;54] Mason W. P. & Jaffe Hans
Methods for Measuring Piezoelectric, Elastic, and Dielectric
Coefficients of Crystals and Ceramics
Proceedings of the IRE
New York 1954

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm,
Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen,
Pernille Postgaard, Thomas B.Schroder,
Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

Læse over tilfældige udvalgte tekster
tilsvarende denne henholdsvis herom kan
ske til IMRFA's sekretariat
tlf. 48 78 77 11 lokal 2283

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen,
Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien
i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og
en skitse til et alternativ baseret
på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

217 92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING
IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk
problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen.
Vejleder: Johnny Ottesen

218 92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

219 92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220 92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en
matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund,
Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

221 92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH
APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and
Henrik Schlichtkrull

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse
af energiens bevarelse og isærdeles om
de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz
udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Ostergård
Vejleder: Dorthe Posselt

222 92 On the Representations of some Infinite Dimensional
Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223 92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson

233/92 "The effect of age-dependent host
mortality on the dynamics of an endemic
disease and
Instability in an SIR-model with age-
dependent susceptibility"
by: Viggo Andreasen

224 92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT
LOW TEMPERATURES

by: Jeppe D. Dyre

225 92 "HATMOJELLEN" Impedansspektroskopier i ultrarødt
en-krySTALLINEK silicium

af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer,
Johanne K. Nielsen, Kåre E. Hansen, Peter Bøggild
og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Vlasov

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL
BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter S. Gilkey

226 92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL
CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY
CONVERSION"

by: Bent Strøbech

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KØNS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

- 236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Eggild
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen,
Erland Brun Hansen
- 236b/93 STROMSSAMMENFØRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN
af: Anja Boisen, Peter Eggild
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen,
Erland Brun Hansen
- 237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology
af: Lars Kadison
- 238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer
af: Peder Voetmann Christiansen
- 239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul
af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Herrmannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen
Vejleder: Mogens Niss
- 240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fæniks betydning for
den matematiske udvikling
af: Søren Drabø, Jørn Skov Hansen, Rune
Ulise Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen
Vejleder: Mogens Niss
- 241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1
af: Bent Sørensen
- 242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for
optimering af broreparationer
af: Linda Kyndiev, Kåre Fundal, Kamma
Tulinus, Ivar Zeck
Vejleder: Jesper Larsen
- 243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN
Et 1. modul fysikprojekt
af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann
Vejleder: Dorthe Posselt
- 244/93 RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse
i CT-scanning
Projekt rapport
af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og Christine Iversen
Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen
- 245a-b
/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske
halvledere
Specialerapport
af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade
Vejledere: Petr Vascor og Niels Boye Olsen
- 246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN
af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske
Forskningsråd, RUC, IMPUFA
- 247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CON-
DUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY
DISORDERED NON-METALS
by: Jeppe C. Dyre
- 248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH
BOUNDARY
by: B. Booss-Bavnbek, K.P. Wojciechowski
- 249/93 Perspectives on Teichmüller and the
Jahresbericht Addendum to Schappacher,
Scholz, et al.
by: B. Booss-Bavnbek
With comments by W. Abikoff, L. Ahlfors,
J. Cerf, P.J. Davis, W. Fuchs, F.P. Gardiner,
J. Jost, J.-P. Kahane, R. Lohan, L. Lorch,
J. Radkau and T. Soderqvist
- 250/93 EULER OG BOLZANS - MATEMATISK ANALYSE SET I ET
VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV
Projekt rapport af: Anja Juul, Lone Mikkelsen,
Tomás Højgård Jensen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones
by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreassen
and Ebbe Thue Poulsen
- 252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER
Projekt rapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaa,
Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk
Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Bass Nielsen
- 253/93 Kuglepakning
Teori og model
af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse
Vejleder: Mogens Niss
- 254/93 Regressionsanalyse
Materiale til et statistikkursus
af: Jørgen Larsen
- 255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED
af: Peter Barremoës
- 256/93 Determination of the Frequency Dependent
Bulk Modulus of Liquids Using a Piezo-
electric Spherical Shell (Preprint)
by: T. Christensen and N.B. Olsen