TEKST NR 255 1993

TID

&

BETINGET UAFHÆNGIGHED

af

Peter harremoës

IMFUFA, Roskilde Universitets Center, Danmark.

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED

by Peter Harremoës.

IMFUFA tekst nr. 255/93 223 pages ISSN 0106-6242

Abstract

The purpose of this thesis is to show that models of independence are good tools to treat problems about time. In the first chapter it is argued that scientific theories should be intersubjective but not necesarily objective. In the second chapter some theorems are shown, which gives an interpretation of the use of probability measures in statistics. The third chapter introduces some concepts from information theory. The most important result is that the principle of minimal information has an interpretation as way of finding conditional probability distributions. In Chapter 4 the concept of conditional independence is introduced. The concept of fork asymmetry is formalised by the definition of harmonic relations. If the independence relation is weakly transitive, then the harmonic relations are essensially preorderings. If there exists a harmonic preordering, then there is a maximal harmonic preordering denoted $\leq_I$. If the model of independence is finite and has a harmonic ordering, then the independence model can be described by graphs if and only if the independence relation satisfies the axioms of decomposition, intersection and weak transitivity. Hidden variable models are discussed and Bell type inequalities are shown to be the tool to proove the existence of hidden variables.

In chapter 5 various non-physical examples of time asymmetry are discussed. The all fit well into the describtion by models of independence. Many-world theories and the universallity of the concept of simultanity are rejected. In chapter 6 time is concidered from a geometrical point of wiew. The ordering defined by light cones and the ordering defined by independence must be the same in relativistically invariant models. In chapter 7 gives an interpretation of quantum mechanics, where state space and group repræsentations are the central concepts, and in the next chapter contains a discussion of the reduction of the wawepacket and non-locality of quantum mechanics. It is shown that there is no *a priori* reason to belive that a measurement can destinguish between a state and the corresponding reduced state. In chapter 9 some termodynamical problems are treated and it is shown that

$$\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Ex}(\phi) = D(\phi\|K) = -\ln(P(A)) \qquad (331)$$

where $\mathrm{Ex}(\phi)$ denotes the energy which yuo can extract from the system in state ϕ, $D(\phi\|K)$ is the information gained by knowing that the state is ϕ and not invariant under time translations, and $P(A)$ denotes the probability that a reversible system have a fluctuation which can not be destinguised from ϕ. Chapter 10 treates some problems in time machines and backwards causation. The conclution is that all paradokses about time asymmetry comes from the idea that time is an objective concept. It is possible to define an intersubjective time using models of the independence relation.

FORORD

Arbejdet med denne afhandling er i en vis forstand en fortsættelse af mit speciale. Jeg havde fundet ud af at mål for information og entropi kunne være nyttige til at formulere og bevise konvergenssætninger i sandsynlighedsregning. Jeg håbede at kunne overføre resultaterne til operatorteori (ikke-kommutativ sandsynlighedsregning) men støtte på den vanskelighed at anvendelsen af begrebet betinget sandsynlighed var ganske uklart i kvantemekanik. Derfor måtte jeg beskæftige mig med kvantemekaniske grundlagsproblemer. Den fremragende bog af Holevo gav håb om at man kunne nå til en afklaring, idet den viste at det centrale problem kunne formuleres som "hvorfor har tilstandsrummet i kvantemekanik form af tæthedsoperatorerne på et Hilbertrum?". Med min gamle interesse for entropi og information var det nu oplagt at overføre de kvantemekaniske definitioner af tilstand og måling til termodynamikken. Problemet var at jeg ikke rigtigt viste hvordan jeg skulle udtrykke sammenhængen mellem alle de indgående variable på en overskuelig måde. Jeg forsøgte mig med forskellige former for hjemmestrikkede diagrammer, men der manglede et eller andet. Så hørte jeg et foredrag af Judea Pearl om Bayesianske netværk. Efter foredraget spurgte jeg begejstret om han ikke havde prøvet at analysere Bell's uligheder med Bayesianske netværk, men han fortalte at han ikke havde noget kendskab til teoretisk fysik. Han havde herved givet mig den nøgle jeg manglede, og her er hvad jeg fik ud af bruge den.

Jeg vil hermed takke mine vejledere Jeppe Dyre og Peder Voetmann Christensen for at nøjes med at ryste på hovedet, når jeg til deres fortvivlelse klatrede rundt på nogle stejle klippevægge i stedet for at publicere en masse, eller spildte tiden med problemer, som viste sig at være blindgyder, i stedet for at følge deres råd. Også Bernhelm Booß Bavnbæk og Stig Andur Pedersen skylder jeg tak for hans hjælp ved mange lejligheder.

Peter Harremoës

RUC april 1992

INDHOLD

INDLEDNING

I Horwich (1980) nævnes ti fænomener, der er asymmetriske i tid: begreberne før, nu og efter; sandhed; de facto irreversibilitet; viden; årsag; forklaring; kontrafaktisk afhængighed; beslutning; og værdi. Han når i sin behandling af emnet frem til en ordning af fænomenerne, så hvert fænomen er forklaret via det (eller de) foregående fænomener.

I denne afhandling er fremgangsmåden en anden. Først dannes et begrebs- og fortolkningsapparat (kap.1-4 og 7), som derefter anvendes på de tidsasymmetriske fænomener (kap. 5-6 og 8-10). Rækkefølgen af kapitlerne er først og fremmest valgt ud fra ønsket om at holde den logiske struktur klar, så cirkelslutninger undgås. Derfor er en del eksempler udskudt til de indgående begreber er klarlagte. I 1. kapitel argumenteres for at man i en teori som denne bør tilstræbe intersubjektivitet og ikke objektivitet. Kapitel 2 indeholder nogle sætninger, der giver mulighed for en bestemt interpretation af begreberne subjektiv og frekvensiel sandsynlighed. I 3. kapitel gennemgås forskellige resultater, der hører ind under sandsynlighedsregning og informationsteori. Den grundlæggende teori for I-modeller og Bayesianske netværk gennemgås i kapitel 4 uden reference til nogen anden fortolkning af de indgående pile end hvad, der umiddelbart ligger i begrebet betinget uafhængighed. I det følgende kapitel bliver det vist, at retningen af tiden og årsags-virkningsrelationen må stemme overens med de piles retning, der fås ved at lave beskrivelser med Bayesianske netværk. Kun ikke-fysiske fænomener gennemgås i dette kapitel, da vor erkendelse af naturen må være underlagt vor erkendelse. Den natur, vi ønsker at beskrive, må da på en eller anden måde være sådan indrettet, at vi kan erkende den. I kapitel 6 undersøges hvilke muligheder, der er for, at en relativistisk rumtid geometrisk beskrevet kan indeholde en orienteret tid.

I fysik forekommer tidssymmetri for alvor 3 steder: ved den kvantemekaniske måleproces, i termodynamik og ved visse svage vekselvirkninger. Alle andre former for tidsasymmetri kan tilsyneladende beskrives ud fra disse. For at kunne behandle den kvantemekaniske måleproces og ikke-lokalitet i kapitel 8, gennemgås de grundlæggende begreber i kvantemekanik i kapitel 7. Hovedvægten lægges på begreberne tilstandsrum og grupperepræsentationer. Fremstillingen kan opfattes som en interpretation af kvantemekanikken. Kapitel 9. drejer sig om termodynamik og entropiens vækst. Sidste kapitel er helliget paradokser og ikke-paradokser angående kausale løkker. I dette kapitel omtales tidsasymmetrien ved svage vekselvirkninger kort.

Behandlingen af emnet er behæftet med det metodiske problem, at mange af de relevante begreber (som f.eks. årsag) stammer fra dagligsproget. Deres betydning er givet ved deres brug, og alle de associationer de giver ved, at man tidligere har hørt dem brugt. Brugen kan ikke forventes at være, og er heller ikke konsekvent (f.eks. anvendelsen af begrebet årsag: se Horwich 1980 og Pearl 1990), så man vil aldrig kunne give en definition af begrebet, der fuldstændigt forklarer begrebets brug i enhver sammenhæng. Ved begreberne hænger associationer fra 2500 års filosofiske diskussioner, og det er en uoverkommelig opgave at redegøre for alt dette. I stedet er det hensigten at gennemgå en række eksempler, der traditionelt har voldt problemer, og vise hvordan man kan give en fuldstændig og konsistent beskrivelse med de opstillede begreber. Håbet er da at læseren finder de valgte eksempler repræsentative. Det bør understreges, at dette *ikke* er et forsøg på at præsentere eksisterende teorier, da der findes mange gode (og desværre også mange dårlige) fremstillinger af disse.

Bemærk at forfatteren er et rodehoved, og der derfor kan være nogle unøjagtigheder i teksten. Dette har forfatteren så prøvet at rette i teksten med fare for at der er opstået nye unøjagtigheder eller inkonsekvenser. Læseren opfordres derfor til ikke at tage noget for gode vare, hvis læseren ikke selv forstår det.

Paragraffer benævnt definition, lemma, sætning, korollar, bevis og eksempel er forsynet reference, dersom de er inspireret af en tilsvarende paragraf i litteraturen. Dog er sådanne paragraffer forsynet med * dersom indholdet må anses for at være standard inden for emnet. Paragraffer uden reference skyldes forfatteren.

1. SUBJEKTIVITET. INTERSUBJEKTIVITET OG OBJEKTIVITET HISTORISK BELYST

At en påstand er subjektiv, vil sige, at den påståede sandhed er nøje knyttet til det subjekt, der fremsætter påstanden. F.eks. er påstanden "stegt lever smager godt" subjektiv, idet nogle mennesker mener det, hvilket forfatteren aldrig har forstået. Subjektive påstande har deres berettigelse i daglig tale, og i visse (særligt humanistiske) videnskaber, som ellers ville blive tandløse.

Modsætningen til subjektivitet er intersubjektivitet, der vil sige, at den påståede sandhed ikke er nøje knyttet til det subjekt, der siger sætningen. Tværtimod skal man inden for en nærmere specificeret gruppe af "subjekter" under nærmere specificerede forhold kunne nå til enighed om sandheden af det påståede udfra fælles kriterier. Bemærk at nogle definerer intersubjektivitet som identisk med koherens, og således ikke kræver andet end at man kan blive enige. Påstanden "der er en taske" er intersubjektivt blandt danskere, idet danskere er enige om hvordan man skal afgøre om påstanden er sand eller falsk. Den er derimod ikke intersubjektiv blandt danskere og svenskere, idet svenskere vil opfatte den på en anden måde. Påstanden en elektron er en partikel er ikke intersubjektivt sand blandt fysikere, idet der findes forhold hvorunder elektronen kan opfattes som en bølge. I ingen af eksemplerne er der fælles kriterier for at afgøre sandhedsværdien. Naturvidenskab drejer sig om at komme til nogle påstande om naturen, som enhver der sætter sig ind i det sprog, hvori de er formuleret, skal kunne anse for sande og derfor bruge til at løse de praktiske problemer den pågældende har. Naturvidenskaben bør med andre ord så vidt muligt være intersubjektiv eller som Bohr udtrykte det:

Naturvidenskab handler ikke om hvordan naturen er,
men om hvad vi kan sige om naturen.

Mange forveksler begreberne intersubjektivitet og objektivitet. Dette har ført til meget spildt arbejde, hvor folk har brugt en del energi på at gøre denne eller hin videnskab "objektiv" i stedet for at nøjes med at tilstræbe intersubjektivitet. F.eks. har arkæologer brugt tid på at karakterisere og typeinddele stridsøkser fra stenalderen ved hjælp af en mængde målinger og beregninger, hvor alle arkæologer, der sætter sig ind i det pågældende arkæologiske genstandsmateriale, intuitivt vil kunne foretage den samme inddeling. Inddelingen har med andre ord intersubjektiv gyldighed blandt arkæologer, og alle målingerne er spildt arbejde. At sammenblandingen også har ført til mange diskusioner og megen begrebsforvirring, er klart. Det er ikke ligetil at give en definition af begrebet objektivitet, så i stedet vil nedenfor blive givet en kort historisk redegørelse for begrebets udvikling (med særlig vægt på relationen til tidsbegrebet), og hvad der til forskellige tider har motiveret folk til at bruge begrebet.

1.1. Antikken

Som der er tradition for, vil vi begynde med de gamle grækere. Grækerne indtager nemlig en særlig rolle i historien med deres demokratiske styreform og den store betydning diskussioner og argumenteren havde for det politiske liv. I et system, hvor flertallet bestemmer, opnås politisk magt ved overtalelse. Således kunne f.eks. Perikles få så stor magt ved at have talegaverne i orden. Andre med et mindre udpræget talent men med tilsvarende ambitioner kunne modtage undervisning i retorik fra de såkaldte sofister. Det var en professionel gruppe undervisere, der skulle udfylde det tomrummet som religionen tidligere havde udfyldt. Religionen havde nemlig slet ikke fulgt med udviklingen af det græske samfund. Der var imidlertid en kraftig tendens til at disse sofister lærte folk, hvad de havde brug for for at gennemføre deres politiske mål, nemlig at nøjes med at overtale i stedet for at overbevise. På Platons tid havde nogle sofister udviklet en ekstrem relativisme, som f.eks. Protagoras giver udtryk for i sætninger som: "Om enhver sag gives der 2 udsagn, som er hinandens modsatte" eller "[det gælder om] at gøre den svagere sag til den stærkeste"(Johansen 1986). Sokrates' og Platons filosofi må ses som en reaktion på denne ekstreme relativisme, som et forsøg på at nå frem til det absolut (objektivt) sande, skønne og gode. Disse absolutte størrelser er imidlertid ikke umiddelbart tilgængelige for erkendelsen og bliver derfor placeret i en særlig idé-verden. Forholdet mellem vore sanseindtryk og denne idé-verden er aldrig blevet bedre beskrevet end af Platon selv (Staten, begyndelsen af bog 7):

Dialogen foregår mellem Sokrates og Glaukon (Platons bror).

-Lad mig derefter bruge et billede der kan illustrere hvorledes det står til med den menneskelige natur med henblik på uddannelse og manglende uddannelse. Forestil dig en mørk underjordisk hule; fra den fører der op til dagslyset en gang eller tunnel, der er lang og af samme vidde som hulen. I den hule befinder der sig nogle mennesker der har siddet der lige fra børn, og de er lænkede både om benene og halsen, så at de uden at kunne røre sig fra stedet kun kan se lige frem for sig. Dreje hovedet om og se sig tilbage kan de ikke, da hovedet er spændt fast. Et godt stykke højere oppe mod indgangen bag ved dem lyser der en ild, og midt imellem ilden og fangerne er der opført en mur tværs over gangen, så at den virker ganske ligesom den skærm der bruges ved Mester-Jakel-forestillinger, den bag hvilken de opførende befinder sig, mens de lader deres dukker optræde.

-Jeg er med.

-Tænk dig at der bag denne mur er en tværvej hvor der passerer en hel del personer, der bærer allehånde genstande der netop rager op over muren; det kan være redskaber, det kan være menneske- eller dyrefigurer, udarbejdet i træ eller sten eller hvad som helst andet. Endvidere at nogle af disse skjulte personer, som rimeligt er taler eller synger, mens andre er tavse.

-En besynderlig lignelse og besynderlige fanger!

-Men billedet passer på os! For fanger af den slags, har de nogensinde set noget som helst af sig selv eller af hinanden undtagen de skyggebilleder som ilden kaster på hulens bagvæg, tror du?

-Nej, naturligvis ikke, når de hele deres levetid har hovedet klemt fast i den samme stilling.

-Og hvad figurerne angår som bæres forbi bag ved dem, da gælder det samme?

-Ja vist.

-Og hvis de var i stand til at tale med hinanden, ville de så ikke benævne skyggebillederne som om de var virkelige objekter?

-Jo, absolut.

-Tænk dig så også at bagvæggen giver ekko. Når en af de forbipasserende talte eller sang, ville fangerne så ikke tro at lyden kom fra skyggebilledet der bevægede sig forbi?

-Jo, ganske givet.

-I det hele taget ville fangerne ikke kende nogen anden virkelighed end de forbidragende skygger.

-Selvfølgelig ikke.

.

.. (og senere i samme bog)

.

-Hele denne lignelse, kære Glaukon, må nøje sammenholdes med hvad jeg beskrev før. Fængselshulen skal forestille den synlige verden, og det lysende bål solens magt. Og opstigningen fra hulen og synet af alt deroppe kan du roligt sætte lig med sjælens vandring op til intellektets verden; gør du det, går du ikke meget fejl af min egen forestilling, som du jo gerne ville høre. Om den også er sand, det må himlen vide.

Men det er i hvert fald min opfattelse, hvor rigtig eller urigtig den nu er, at først i erkendelsens sfære kan man, til allersidst, få det Godes idé at se, og det endda vanskeligt nok. Men *har* den vist sig for ens blik, følger den slutning nødvendigvis at her har vi den yderste årsag til alt hvad der er rigtigt og skønt. I den synlige verden afføder den lyset og lysets herre solen, men i tankens verden er den alle tings hersker som kilde til sandhed og indsigt; og dermed følger også at ingen på forstandig vis vil kunne udrette noget her på jorden, indenfor en snævrere eller videre kreds, uden at have skuet den.

I oldtiden nåede man aldrig til nogen alment accepteret fortolkning af Platons ideer, men splittede sig i stedet op i en række konkurrerende skoler, hvoraf stoikerne nok er dem der i højest grad viderefører forestillingerne om objektivitet (se Sambursky 1959).

1.2. Middelalderen

I middelalderens filosofi er kristendommen som grundopfattelse slået helt igennem, men der var stadig plads til diskussion til trods for at der i en periode var stærke kræfter, der prøvede at dæmpe gemytterne ved at prædike en dogmatisk verdensanskuelse. Man havde sammensmeltet stoikernes og platonikernes opfattelse af idé-verdenen med den kristne opfattelse af en alvidende og almægtig Gud. Det var ikke længere et spørgsmål om træet i skoven faldt, når ingen så det, for Gud ser alt. Det gav imidlertid visse problemer ved behandling af temporale fænomener, og en væsentlig del af studierne i logik drejede sig da også om udsagn, hvis sandhedsværdi er temporalt variabel (se Øhrstrøm 1989). Navnlig spørgsmålet om Guds alvidenhed contra menneskets frie vilje voldte problemer, idet mennesket skulle dømmes ud fra sine handlinger af Gud, og at forestillingen om en objektivt eksisterende fri vilje ikke kunne afvises som en illusion. En vigtig konklusion af deres diskussioner var at Guds alvidenhed medførte at Gud måtte være hinsides tid (og rum). Thomas Aquinas, den nok kendteste skolastiker, udtrykte det på følgende måde (Thomas Aquinas 1975):

"Eftersom tiden ligger i bevægelsen, tilhører evigheden, som er fuldstændig uden for bevægelsen, på ingen måde tiden. Ydermere, eftersom det eviges væren ikke forsvinder, er evigheden nuværende i sit nærvær i forhold til enhver tid eller ethvert øjeblik i tiden. vi kan betragte cirklen som et eksempel på noget i den retning. .. Cirklens centrum, som ikke er en del af cirkelomkredsen, står direkte over for ethvert punkt på periferien. Således sameksisterer alt, hvad der er i en del af tiden med det evige som det nærværende, skønt det i forhold til andre dele af tiden er fortidigt eller fremtidigt... Derfor ser det guddommelige intellekt i sin evighed, hvad som helst der sker i tiden, som værende nutidigt i forhold til sig."

1.3.Nyere tid

Et værk, hvis betydning for europæisk tankegang næppe kan overvurderes, er Newton's Principia Mathematica, i hvilken han skriver:"Absolute, true, and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equably *without relation to anything external,*and by another name is called duration: relative, apparent, and commen time, is some sensible and external (whether accurate or unequable) measure of duration by the means of motion, which is commonly used instead of true time; such as an hour, a day, a month, a year." Newtonsk mekanik gør, som det fremgår, krav på at være en helt objektiv teori.

Newton var særdeles teologisk interesseret, men hans mindre gudsfrygtige arvtagere overtager hans objektivitets begreb, men hos Laplace (1820) er den alvidende Gud erstattet af en intellegens: "An intelligence knowing all forces acting in nature at a given instant, as well as the momentary positions of all things in the universe, would be able to comprehend in one single formula the motions of the largest bodies as well as the lightest atom in the world, provided that its intellect were sufficiently powerful to subject all data to analysis; to it nothing would be uncertain, the future as well as the past would be present to its eyes."

Tilsvarende skriver Maxwell (1871):"We have seen that the molecules in a vessel of air at uniform temperature are moving with velocities by no means uniform...Now let us suppose that such a vessel is divided into two portions, A and B, by a division in which there is a small hole, and that a being whose faculties are so sharpened that he can follow every molecule in its course, opens and closes this hole, so as to allow only the swifter molecules to pass from A to B, and only the slower ones to pass from B to A. He will thus, without expenditure of work, raise the temperature of B and lower that of A, in contradiction of the second law of thermodynamics." Det interessante er, at disse forfattere bliver nød til forestille sig et subjekt til at tage vare på det objektive.

Det filosofiske grundlag for de metoder, der i bruges i naturvidenskab, er oftest positivisme og kritisk rationalisme. Karl Popper beskriver, hvordan man gennem en kritisk proces når frem til stadigt mere forfinede hypoteser. En hypotese fremsættes og sammenlignes med data. Hvis hypotesen ikke passer ind i teorien forkastes hypotesen. Man siger at hypotesen er falsificeret. Dersom man ikke kan falsificere hypotesen, kan man fremsætte en stærkere hypotese og prøve at falsificere denne. Man kan derimod aldrig verificere en hypotese. Ideen er formuleret allerede af Pierce, som Popper har læst, men aldrig refereret til.

Den statistiske hypotesetestningsteori blev udviklet af Neyman og Pearson i begyndelsen af 1930'erne, og er som den oftest fremstilles helt i overensstemmelse med Poppers kritiske rationalisme. Denne teori angiver en procedure til at afgøre om en forelagt hypotese H_0, ofte kaldet nulhypotesen, skal forkastes eller ej. Til eksempel kan opstilles den nulhypotese, at sandsynligheden p for gevinst i et spil har en bestemt værdi:

H_0: p = 0,35

Hypotesen giver en sandsynlighedsfordeling for at få givne observationer. Ved hypotesetest skelner man mellem 2 typer fejl:

	H_0 accepteres	H_0 forkastes
H_0 er sand		Fejl af 1. art
H_0 er falsk	Fejl af 2. art	

Når sandsynligheden for at der indtræffer en fejl af 1. art er α, siges testen at have signifikansniveauet α. Såfremt H_0 forkastes ved en test med signifikansniveau α, siges testresultatet at være sigfikant på niveauet α.

	H_0 akcepteres	H_0 forkastes
H_0 er sand	$1 - \alpha$	α
H_0 er falsk		

Det er væsentlig at bemærke de tomme felter i almindelighed ikke kan tillægges nogen sandsynlighed. I Platons grottebillede kunne nulhypotesen være at en given figur blev båret forbi grotten, og hele måden at ræsonere på er nøjagtig som hos Platon. Forfatteren har somme tider skullet forklare denne måde at ræsonnere på for anvendere af statistik, og de forstår det oftest først til fulde, når man genfortæller Platons historie, for den er mere pædagogisk end meget af det der står i moderne statistikbøger. Det man skal være opmærksom på er, at man for at bruge sædvanlige statistiske metoder implicit må acceptere forestillingen om objektiv sandhed. Det siges, at statistik ikke er videnskabsteori , men det er det. Valget af statistike metoder er videnskabsteori og i denne fremstilling benyttes hovedsageligt ideer fra Bayesiansk statistik.

Selv i ganske nye arbejder angående tiden kræver man objektivitet og forestillingen om at erstatte objektivitet med intersubjektivitet lades oftest helt ude af betragtning. Således skriver Prigogine og Stenger (1985): "Den kemiske affinitet; varmeledning, hvis universelle natur Fourier pegede så stærkt på; viskositeten, alle de egenskaber, der er forbundet med den irreversible vækst af entropien - skulle disse egenskaber virkelig være betinget af iagttageren og ikke afhænge af objektet selv?" I Jan Faye (1981 p.119) er der ikke engang plads til tvivlen på trods af at synspunktet er det modsatte: "I sig selv er tiden symmetrisk, og tid har derfor ingen naturlig og objektiv retning".

Interessant er det at bemærke, at Platons begreber om Det Sande, Det Gode og Det Skønne, oprindeligt alle blev placeret i den objektive idéverden, mens det nutiden hovedsageligt betragter

Det Sande som objektivt, det Gode som intersubjektivt, og det skønne som helt subjektivt.

I dette århundrede har der imidlertid også været en udvikling væk fra idealet om objektivitet, og denne udvikling har haft 2 væsentlige kilder. Den ene er fysikken, hvor først kvantemekanikken og senest kaosteorien har kuldkastet håbet om at nå til en objektiv beskrivelse af verden. Den anden er videnskabshistoriske studier, der har vist, at videnskaberne ikke altid udvikler sig ved at akkumulere viden, for derved nærme sig en objektiv sandhed, men tværtimod somme tider kan være underkastet paradigmeskift og videnskabelige revolutioner.

Af den ovenstående gennemgang fremgår at Platon fremførte sine forestillinger om en objektiv idévereden som en reaktion mod visse sofisters ekstreme relativisme. I det kristne Europa havde forestillingen om objektivitet en religiøs begrundelse. Ingen af disse motivationer er gyldige længere, og idealet har vist sig vanskeligere at gennemføre i praksis, så begrundet ud fra en begrebsmæssig pragmatisme er det nu tid til at forkaste idealet om objektivitet. Den teori, der fremlægges i denne afhandling, gør derfor kun krav på at have intersubjektiv gyldighed (for personer, der kan og vil sætte sig ind i begreber og indhold).

2. SANDSYNLIGHEDSREGNINGENS GRUNDLAG

2.1. Dutch Book

Vi vil her præsentere en stærkere version af det "dutch book theorem", der præsenteres i De Finetti (1930/1937). Se også Weatherford (1982).

Vi tænker os en kompakt mængde $\mathfrak{U}$ af udfald. Med $C(\mathfrak{U})$ vil vi forstå mængden af kontinuerte funktioner på $\mathfrak{U}$. Ved en tilstand E på $C(\mathfrak{U})$ vil vi forstå en positiv lineær funktional med $E(1) = 1$. En sådan er givet ved integration med hensyn til et sandsynlighedsmål P:

$$E(f) = \int f \, dP \tag{1}$$

En person ønsker at indgå i væddemål om, hvad udfaldet vil blive. En opponent (bookmaker) har konstrueret nogle gevinstfunk-tioner f_λ, $\lambda \in \Lambda$ (Λ endelig), hvor $f_\lambda(u)$ er personens nettogevinst (positiv eller negativ), hvis f_λ er valgt og udfaldet er u. Lad os sige at personen anser gevinstfunktionerne f_λ, $\lambda \in \Lambda_0$, for accep-table. Da må han også kunne akceptere enhver konveks kombination

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_0} s_\lambda \cdot f_\lambda \tag{2}$$

som gevinstfunktion, hvor $s_\lambda \geq 0$ og $\sum_{\lambda \in \Lambda_0} s_\lambda$.

SÆTNING Enten kan opponenten konstruere en konveks kombination

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} s_\lambda \cdot f_\lambda \tag{3}$$

således, at $f(u) < 0$ for alle $u \in \mathfrak{U}$; eller der findes en tilstand E på $C(\mathfrak{U})$, så $E(f_\lambda) \geq 0$ for alle $\lambda \in \Lambda_0$.

BEVIS Lad K betegne det konvekse hylster af $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$, og lad $C_-(\mathfrak{U})$ betegne de strengt negative funktioner på $\mathfrak{U}$. Det er to konvekse mængder.

Ifølge separationssætningen for konvekse mængder gælder der enten $K \cap C_-(\mathfrak{U}) \neq \emptyset$; eller der findes en separerende funktional E på $C(\mathfrak{U})$, som er ikke-negativ på K og negativ på $C_-(\mathfrak{U})$. Da $\mathfrak{U}$ er kompakt ligger -1 i $C_-(\mathfrak{U})$, så $E(-1) < 0$, og dermed $E(1) > 0$. Ved passende normering kan vi antage at $E(1) = 1$, hvorved E bliver en tilstand.

Q.E.D.

Fortolkningen af sætningen er, at sandsynlighedsregningen virker som et sikkerhedsnet, der sikrer os mod at tage inkonsekvente beslutninger. Generelt vil sandsynlighedsmålet ikke være entydigt bestemt, men vil blot være lokaliseret i en ikke-tom konveks mængde. Man skal derfor ikke forestille sig, at det, at et fænomen er behæftet med usikkerhed, er det samme som, at man kan angive et sandsynlighedsmål, thi sætningen udtaler sig kun om en særlig type beslutninger. Af mere teknisk interesse er det, at sætningen ikke forlanger, at "sandsynlighedsmål" skal være normerede. Endvidere er det værd at bemærke at sætningen lettest forstås, hvis funktionaler betragtes som mere grundlæggende end mål.

I resten af denne afhandling vil vi med *sandsynligheder* mene *subjektive sandsynligheder*, og deres fortolkning skal være via ovenstående sætning, mens *frekvensielle sandsynligheder* (som vil blive behandlet senere) vil blive omtalt som *frekvenser*. Resultatet af integration med hensyn til en- sandsynlighed vil blive kaldt en *forventningsværdi*, mens resultatet af integration med hensyn til en frekvens vil blive kaldt en *middelværdi*. Bemærk at ordene sandsynlighed og forvendtningsværdi ikke angiver et temporalt forhold. Der er intet i vejen for at de hændelser man tillægger en sandsynlighed allerede er sket blot man endnu ikke har erkendt udfaldet.

Den ovenfor anførte sætning kan bruges til at forklare anvendeligheden/uanvendeligheden af "Shafer-Dempster belief functions". Der er en naturlig korrespondance mellem "Shafer-Dempster belief functions" (se Pearl 1988 s.416-449 eller Voorbraak 1991) og indre mål på udfaldsrummet. Et indre mål μ^* bestemmer en konveks mængde af sandsynlighedsmål $K_{\mu^*} = \{P \mid P(A) \geq \mu^*(A)$ for alle $A \subseteq \mathfrak{U}\}$. Dette kan omskrives til

$$K_{\mu^*} = \{P \mid \int 1_A \, dP \geq \mu^*(A)\} \tag{4}$$

$$= \{P \mid \int (1_A - \mu^*(A)) \, dP \geq 0\}$$

$$= \{P \mid \int f_A \, dP \geq 0\},$$

hvor $f_A = 1_A - \mu^*(A)$. K_{μ^*} er derfor mængden af sandsynlighedsmål, der gør gevinstfunktionerne f_A akceptable. Funktionerne f_A er selvfølgelig en vigtig klasse af funktioner, hvilket er et argument for at bruge "Shafer-Dempster belief functions", men klassen er for lille til at dække alle tilfælde. For at se det lad $\mathfrak{U}$ indeholde 3 udfald. Da er K_{μ^*} en polygon med højst 2^3 kanter, men i det generelle tilfælde med vilkårlige gevinstfunktioner f_λ, $\lambda \in \Lambda_0$ vil mængden $\{P \mid \int f_\lambda \, dp \geq 0$ for alle $\lambda \in \Lambda_0\}$ kunne være en vilkårlig konveks delmængde af $\{(r,s,t) \in \mathbb{R}^3_+ \mid r + s + t = 1\}$.

I De Finetti (1930/1937) antages det, at $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$ er et halvrum, så enten $g \in \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$, eller $-g \in \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_0\}$, hvilket svarer til at den konvekse mængde af sandsynlighedsmål er et punkt. Det sætter noget større krav til personens evne til at gennemskue spilsituationen.

2.2. Betingning

Lad $\mathfrak{U}$ være en lokalkompakt mængde af udfald. En person har valgt en tilstand E, så gevinstfunktionen f bliver accepteret, netop hvis $E(f) \geq 0$. Lad $(\mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ være en numerabel klassedeling af $\mathfrak{U}$. Personen har envidere valgt en tilstand E_α for alle $\alpha \in A$, således at gevinstfunktionen f akcepteres under betingelse af $u \in \mathfrak{U}_\alpha$, netop hvis $E_\alpha(f) \geq 0$. Definér $\mathbb{E}$: $L^1(\mathfrak{U},E) \longrightarrow L^1(A,E)$ ved $\mathbb{E}(f)(\alpha) = E_\alpha(f)$. Vi vil nu vise, at $\mathbb{E}$ er den betingede forventning svarende til E. Afbildningen $\mathbb{E}$ er oplagt lineær, positiv og normeret. Vi skal derfor vise at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & L^1(A,E) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"] & L^1(\mathfrak{U},E) \arrow[d, "id"] \arrow[ll, bend left=40, "E"] \\
\mathbb{R} & L^1(A,E) \arrow[l, "E\circ i"'] & L^1(\mathfrak{U},E) \arrow[l, "\mathbb{E}"']
\end{tikzcd} \tag{5}$$

$\mathbb{E}\circ i = id$: Lad $g \in L^1(A,E)$ og $\alpha \in A$. Da funktionen $i(g - g(\alpha))$ er nul på $\mathfrak{U}_\alpha$, er $i(g - g(\alpha))$ akceptabel givet $u \in \mathfrak{U}_\alpha$. Det viser, at $E_\alpha \circ i(g - g(\alpha)) \geq 0$, og dermed $(\mathbb{E}\circ i)(g)(\alpha) \geq g(\alpha)$. Tilsvarende vises $(\mathbb{E}\circ i)(g)(\alpha) \leq g(\alpha)$. Tilsammen fås $(\mathbb{E}\circ i)(g)(\alpha) = g(\alpha)$, og dermed $\mathbb{E}\circ i = id$.

$(E\circ i)\circ\mathbb{E} = E$: Lad $f \in L^1(\mathfrak{U},E)$. Da er $f - i\circ\mathbb{E}(f)$ acceptabel, thi $f - i\circ\mathbb{E}(f)$ er acceptabel for $u \in \mathfrak{U}_\alpha$, uanset hvad α er da

$$\begin{aligned} E_\alpha(f - i\circ\mathbb{E}(f)) &= \mathbb{E}(f - i\circ\mathbb{E}(f))(\alpha) \\ &= (\mathbb{E}(f) - ((\mathbb{E}\circ i)\mathbb{E})f)(\alpha) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Derfor er $E(f - i\circ\mathbb{E}(f)) \geq 0$, og tilsvarende ses at $E(f - i\circ\mathbb{E}(f)) \leq 0$, så $E(f - i\circ\mathbb{E}(f)) = 0$ og $E\circ i\circ\mathbb{E} = E$.

Ovenstående gennemgang viser at afbildningen $\mathbb{E}$ er af mere fundamental betydning end betingede sandsynligheder. Forskellen kommer frem, hvis man vil danne betinget sandsynlighed med hensyn til hændelser med sandsynlighed 0. Det kan man ikke. Derimod kan $\mathbb{E}$ godt være defineret. Dens værdi er blot kun fastlagt næsten sikkert og dermed ikke entydigt bestemt på hændelser med sandsynlighed 0.

2.3 Stokastisk uafhængighed

I dette afsnit vil vi se på det tilfælde hvor udfaldsrummet $\mathfrak{U}$

er et produktrum $\mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$, hvor $\mathfrak{U}_1$ er numerabel og $\mathfrak{U}_2$ er lokalkompakt. Da er $\{u\} \times \mathfrak{U}_2$ en numerabel klassedeling af $\mathfrak{U}$. Vi vil antage at vore beslutninger træffes i overensstemmelse med en middelværdi af formen $E_1 \circ \mathbb{E}$, hvor E_1 er en middelværdiafbildning på $\mathfrak{U}_1$ og $\mathbb{E}$ er en betinget forvendtning $L^1(\mathfrak{U}, E) \longrightarrow L^1(\mathfrak{U}_1, E)$. Vi vil nu antage, at vi anser de 2 komponenter u_1 og u_2 af en et udfald $u = (u_1, u_2)$ i $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$ for *uafhængige*. Da begrebet uafhængighed ikke er defineret må vi benytte argumenter, der refererer til vor intuition og ordets almindelige brug. Hvis u_1 og u_2 anses for uafhængige, vil en gevinstfunktion, der kun afhænger af u_2 blive akcepteret/forkastet uafhængigt af vor eventuelle viden om u_1. Det viser, at $\mathbb{E}$ som funktion af u_1 som funktion af u_1 er uafhængig af u_1. Derfor er der givet en middelværdi E_2 på $\mathfrak{U}_2$ så $E_1 \circ \mathbb{E} = E_1 \circ E_2$. Det viser at hvis 2 variable er uafhængige, så er målet på dem givet ved et produktmål af mål på de enkelte variable, hvilket per definition er det samme som, at de er *stokastisk uafhængige*. Vi har med andre ord vist at uafhængighed medfører stokastisk uafhængighed i det tilfælde, hvor vor beslutningsstrategi er givet ved et mål. Der kan næppe argumenteres for, at stokastisk uafhængighed generelt medfører uafhængighed.

2.4 Frekvensielle sandsynligheder

Lad $X_1, X_2, \ldots X_n$ være en følge af stokastiske variable, der kan antage værdierne 0 og 1. Vi antager, at vor viden om dem er givet ved en konveks mængde K af sandsynlighedsmål, og at de stokastiske variable X_i er *ombyttelige*. Det vil sige, at hvis $P \in K$, så vil

$$P(X_i = x_i,\ i = 1,2,\ldots n) = P(X_{\pi(i)} = x_i,\ i = 1,2,\ldots n) \qquad (7)$$

hvor π er en permutation af elementerne i mængden $\{1,2,\ldots n\}$.

EKSEMPEL* Lad X_i betegne det i'te udfald af gentagne kast med en terning, om hvilken man ikke ved om den er symmetrisk eller er falsk. Da vil de stokastiske variable ikke være statistisk uafhængige, da udfaldene giver et fingerpeg om terningen er symmetrisk eller ej, og fortæller dermed noget om hvad andre udfald vil blive. Derimod bør en subjektiv sandsynlighedsfordeling gøre de stokastiske variable X_i ombyttelige.

EKSEMPEL* For alle $s \in [0,1]$ giver nedenstående formel et permutationsinvariant sandsynlighedsmål

$$P(X_i = x_i,\ i = 1,2,\dots n) = \prod_i s^{x_i}\cdot(1-s)^{1-x_i} \tag{8}$$

Følgende sætning siger, at eksemplet i en vis forstand er repræsentativt.

SÆTNING Lad $X_1, X_2, \dots$ være en følge af ombyttelige stokastiske variable med værdier i $\{0,1\}$. Da findes en konveks mængde C af sandsynlighedsmål på $[0,1]$, så $P \in K$ netop hvis der findes $\mu \in C$, således at $P = P_\mu$, hvor P_μ er defineret ved

$$P_\mu(X_i = x_i,\ i \in D) = \int_{[0,1]} \prod_i s^{x_i}\cdot(1-s)^{1-x_i}\, d\mu s \tag{9}$$

for enhver endelig delmængde D af $\mathbb{N}$.

BEVIS Formelen (9) giver ifølge de Finetti (1931) en entydig korrespondance mellem sandsynlighedsmål på $[0,1]$ og sandsynlighedsmål på sekvenser af stokastiske variable således at () gælder for alle endelige permutationer. Afbildningen $\mu \longrightarrow P_\mu$ er affin, så originalmængden C til den konvekse mængde K er konveks.

Q.E.D.

Ovenstående viser, hvordan begrebet subjektiv sandsynlighed, som normalt repræsenteres med ét sandsynlighedsmål, nu skal repræsenteres med en konveks mængde af sandsynlghedsmål, mens den *frekvensielle sandsynlighed*, som svarer til parameteren s i formel (9), stadigt skal beskrives med ét tal (mål). Dette kan uden videre generaliseres til en vilkårlig repetetiv struktur (se Lauritzen 1982b).

3. SANDSYNLIGHEDSREGNING OG INFORMATIONSTEORI

3.1. Grundbegreber i informationsteori

Lad der være givet en referencetilstand ψ. For en tilstand ϕ absolut kontinuert med hensyn til ψ definerer vi *kodeforbedringen* x ved

$$x = \log(\frac{d\phi}{d\psi}) \qquad \phi(\cdot) = \psi(e^{x}\cdot) \tag{10}$$

Bemærk at den stokastiske variabel x er en kodeforbedring, dersom $\psi(e^{x}\cdot)$ er en tilstand, hvilket kommer ud på at $\psi(e^{x}) = 1$. Mængden af kodeforbedreinger kaldes K_{ψ}. Lad $\mathcal{G}$ være mængden af tilstande, og lad C være en delmængde af $\mathcal{G}$. Vi definerer da *det relative spil* $C\|\phi$ som et 2-personers 0-sumsspil på følgende måde. Den ene part, *observatøren* udspiller en kodeforbedring x. Den anden part, *naturen*, udspiller en konsistent tilstand ϕ, hvor der med konsistens menes at $\phi \in C$. For observatøren gælder det om, at $\phi(x)$ er så stor som muligt. For naturen gælder det om at $\phi(x)$ er så lille som muligt. Sæt

$$\alpha = \inf_{\phi\in C} \sup_{x\in K_{\psi}} \phi(x) \qquad \beta = \sup_{x\in K_{\psi}} \inf_{\phi\in C} \phi(x) \tag{11}$$

Der gælder oplagt at $\alpha \geq \beta$. Hvis $\alpha = \sup_{x\in K_{\psi}} \phi(x)$, kaldes ϕ en *optimal tilstand for naturen*. Hvis $\beta = \inf_{\phi\in C} \phi(x)$, kaldes x en *optimal strategi for observatøren*. Hvis $\alpha = \beta$ kaldes denne værdi for spillets værdi. En strategi $x \in K_{\psi}$ kaldes *omkostningsstabil*, dersom $\phi(x)$ er konstant for $\phi \in C$. Definér *informationsgevinsten* ved

$$D(\phi\|\psi) = \begin{cases} \phi(\log(\frac{d\phi}{d\psi})), & \text{for } \phi \ll \psi, \\ \infty, & \text{ellers.} \end{cases} \tag{12}$$

At $D(\phi\|\psi)$ definerer et tal $[-1,\infty[$ er sikret, idet man for integralet af negativdelen af $\log(\frac{d\phi}{d\psi})$ får

$$\phi(\log(\frac{d\phi}{d\psi})_{-}) = \psi(\frac{d\phi}{d\psi}\log(\frac{d\phi}{d\psi})_{-}) < \psi(1) = 1 \tag{13}$$

Da er $D(\phi\|\psi) \geq 0$ med lighedstegn, netop hvis $\phi = \psi$, thi ved brug af Jensens ulighed fås $D(\phi\|\psi) = \phi(\log(\frac{d\phi}{d\psi})) = -\ \phi(\log(\frac{d\psi}{d\phi})) \geq -\log(\phi(\frac{d\psi}{d\phi})) = 0$, med lighedstegn netop hvis $(\frac{d\psi}{d\phi})$ er konstant.

LEMMA (Csiszár 1975) Lad $x = \log(\frac{d\phi}{d\psi})$ og antag $D(\vartheta\|\phi) < \infty$. Da gælder

$$\vartheta(x) = D(\vartheta\|\psi) - D(\vartheta\|\phi). \tag{14}$$

BEVIS (Csiszár 1975) Da gælder $\vartheta(x) = \vartheta(\log(\frac{d\phi}{d\psi})) = \vartheta(\log(\frac{d\vartheta}{d\psi}) - \log(\frac{d\vartheta}{d\phi})) = D(\vartheta\|\psi) - D(\vartheta\|\phi)$. Det forhold, at $\vartheta(\log(\frac{d\vartheta}{d\psi})_{-}) < \infty$ sikrer integrabiliteten. Q.E.D.

KOROLLAR (Topsøe 1979) For ethvert $\vartheta \in G$ gælder

$$\max_{x \in K_\psi} \vartheta(x) = D(\vartheta\|\psi) \tag{15}$$

og maksimum opnås for den til ϑ svarende kodeforbedring. Hvis $D(\vartheta\|\psi) < \infty$ er x entydigt bestemt.

Lad C være en delmængde af G og sæt

$$D(C\|\psi) = \inf_{\phi \in C} D(\phi\|\psi) \tag{16}$$

Ovenstående lemma viser, at en optimal strategi for naturen i $C\|\psi$ er en tilstand ϕ med $D(\phi\|\psi) = D(C\|\psi)$, hvilket netop er minimum informationsprincippet, som vil blive nærmere behandlet i et senere afsnit. Korrolaret viser også, at $\vartheta,\psi \longrightarrow D(\vartheta\|\psi)$ er nedad halvkontinuert, idet mængden af nedad halvkontinuerte funktioner er lukket under supremum, og afbildningen $\vartheta,\psi \longrightarrow \vartheta(\log(\frac{d\phi}{d\psi}))$ er kontinuert, når G er forsynet med svag topologi. Vi er nu i stand til at vise at konvergens i informationsgevinst medfører konvergens i de fleste andre topologier.

SÆTNING (Pinsker 1964) Lad ϕ og ψ være tilstande og lad $\|\cdot\|_{tot}$ betegne normen total variation. Da gælder *Pinskers ulighed*

$$\|\phi - \psi\|^2_{tot} \le 2D(\phi\|\psi). \tag{17}$$

Konstanten 2 i uligheden er optimal.

BEVIS Det skal vises at

$$\sup_{|f|\le 1} |\phi(f) - \psi(f)|^2 \le 2D(\phi\|\psi), \tag{18}$$

så det er nok at vise, at hvis $|f| \le 1$, så er

$$|\phi(f) - \psi(f)|^2 \le 2D(\phi\|\psi). \tag{19}$$

Uden tab af generalitet kan det antages, at f har formen $f = 1_A - 1_{CA}$, hvor A er en delmængde af det underliggende udfaldsrum, thi sådanne funktioner er ekstremale i $\{f \mid |f| \le 1\}$. Nu vil vi holde ψ, f og $k = \phi(f) - \psi(f)$ faste og prøve at minimere højre side under disse betingelser. Der gælder

$$\phi(1_A) = \phi(\frac{1 + f}{2}) = \frac{1}{2}(\psi(1) + \psi(f) + k) = \psi(1_A) + \frac{k}{2}, \tag{20}$$

og tilsvarende

$$\phi(1_{CA}) = \psi(1_{CA}) - \frac{k}{2}, \tag{21}$$

så $\phi(1_A)$ og $\phi(1_{CA})$ er helt fastlagt udfra ψ, f og k. Der gælder nu

$$D(\phi\|\psi) = \phi(1_A)\, D(\phi_{|A}\|\psi_{|A}) + \phi(1_{\complement A})\, D(\phi_{|\complement A}\|\psi_{|\complement A}) + \qquad (22)$$

$$\phi(1_A)\log\frac{\phi(1_{|A})}{\psi(1_{|A})} + \phi(1_{\complement A})\log\frac{\phi(1_{|\complement A})}{\psi(1_{|\complement A})}$$

$$\geq \phi(1_A)\log\frac{\phi(1_{|A})}{\psi(1_{|A})} + \phi(1_{\complement A})\log\frac{\phi(1_{|\complement A})}{\psi(1_{|\complement A})}$$

Der gælder lighedstegn i (21), netop hvis ϕ vælges, så $\phi_{|A} = \psi_{|A}$ og $\phi_{|\complement A} = \psi_{|\complement A}$. Sæt $\psi(1_A) = s$ og $\psi(1_{\complement A}) = t$. Det skal vises at

$$\frac{1}{2}k^2 \leq (s + \frac{k}{2})\log\frac{s + \frac{k}{2}}{s} + (t - \frac{k}{2})\log\frac{t - \frac{k}{2}}{t}\ . \qquad (23)$$

Bemærk at dette er Pinskers ulighed, hvis udfaldsrummet indeholder 2 punkter. Det kan antages at $k \geq 0$, idet vi ellers ombytter s og t. Uligheden (22) er oplagt sand for $k = 0$, så vi kan nøjes med at vise at venstre sides differentialkvotient med hensyn til k er mindre end højre sides.

$$k \leq \frac{1}{2}\log\frac{s + \frac{k}{2}}{s} + \frac{k}{2} + (-\frac{1}{2})\log\frac{t - \frac{k}{2}}{t} - \frac{k}{2} \qquad (24)$$

Det er igen oplagt for $k = 0$, så vi differentierer endnu en gang og får

$$1 \leq (\frac{1}{2})^2\frac{1}{s + \frac{k}{2}} + (-\frac{1}{2})^2\frac{1}{t - \frac{k}{2}} = \frac{1}{4}(\frac{1}{s + \frac{k}{2}} + \frac{1}{t - \frac{k}{2}}) \qquad (25)$$

hvilket er oplagt, idet $(s + \frac{k}{2}) + (t - \frac{k}{2}) = 1$

Q.E.D.

Pinsker viste en lignende ulighed, men med en anden konstant end 2.

For $\psi \in G$ og $a < \infty$ er mængden $\{\phi \in G | D(\phi\|\psi) \le a\}$ begrænset og svagt lukket på grund af nedad halvkontinuitet, og dermed svagt kompakt. Heraf ses at $\{\phi \in G | D(\phi\|\psi) < \infty\}$ er σ-kompakt. Følgende resultat skyldes Topsøe (1974)

$$\sum p_i D(\phi_i\|\psi) = D(\sum p_i\phi\|\psi) + \sum p_i D(\phi_i\|\sum p_i\phi_i) \ . \tag{26}$$

Det viser at mængden $\{\phi \in G | D(\phi\|\psi) \le a\}$ er konveks for alle $a < \infty$, og dermed er også mængden $\{\phi \in G | D(\phi\|\psi) < \infty\}$ konveks.

SÆTNING (Topsøe 1979) Lad $C \subseteq G$ være konveks og antag at $D(C\|\psi) < \infty$. Da findes en entydigt bestemt tilstand $\phi_{C\|\psi}$, så

$$\inf_{\vartheta} \vartheta(x^*) + D(\phi_{C\|\psi}\|\phi^*) \le D(C\|\psi) \le \inf_{\phi} \phi(x_{C\|\psi}) \quad \text{for} \quad \phi^* \in G. \tag{27}$$

Af uligheden ses at $D(C\|\psi)$ er spillets værdi og at $x_{C\|\psi}$ er den entydigt bestemte optimale strategi for observatøren.

BEVIS Vælg en følge $\phi_n \in C$, så $D(\phi_n\|\psi) \longrightarrow D(C\|\psi)$ for $n \longrightarrow \infty$. Da gælder

$$D(C\|\psi) \le D(\tfrac{1}{2}\phi_m + \tfrac{1}{2}\phi_n\|\psi) \tag{28}$$

$$= \frac{D(\phi_m\|\psi) + D(\phi_n\|\psi)}{2} - \frac{D(\phi_m\|\frac{1}{2}\phi_m+\frac{1}{2}\phi_n) + D(\phi_n\|\frac{1}{2}\phi_m+\frac{1}{2}\phi_n)}{2}$$

Heraf ses at $D(\phi_m\|\frac{1}{2}\phi_m+\frac{1}{2}\phi_n) \longrightarrow 0$ for $m,n \longrightarrow \infty$, men det viser ifølge Pinskers ulighed at $\|\frac{1}{2}\phi_m - \frac{1}{2}\phi_n\|_{tot} \longrightarrow 0$ for $m,n \longrightarrow \infty$. Følgen ϕ_n er med andre ord en fundamentalfølge. Da G er fuldstændigt konvergerer ϕ_n mod en tilstand $\phi_{C\|\psi} \in G$ og denne er oplagt uafhængig af den valgte følge. Der gælder nu

$$\inf \vartheta(\varkappa^*) \le \liminf \phi_n(\varkappa^*) \tag{29}$$
$$= \liminf D(\phi_n\|\psi) - D(\phi_n\|\phi^*)$$
$$\le D(C\|\psi) - D(\phi_{C\|\psi}\|\phi) \quad .$$

For at få den anden ulighed sættes $\phi' = \alpha_n\phi + (1 - \alpha_n)\phi_n$, hvor $\alpha_n = (D(\phi_n\|\psi) - D(C\|\psi))^{1/2}$, hvilket giver

$$D(C\|\psi) \le D(\phi_n'\|\psi) \tag{30}$$

$$\le \alpha_n D(\phi\|\psi) + (1 - \alpha_n)D(\phi_n\|\psi) - \alpha_n D(\phi\|\phi_n') - (1 - \alpha_n)D(\phi_n\|\phi)$$

hvilket viser at

$$D(\phi_n\|\psi) \le \alpha_n^{-1}(D(\phi_n\|\psi) - D(C\|\psi) + D(\phi\|\psi) - D(\phi\|\phi_n') \tag{31}$$

$$\le (D(\phi_n\|\psi) - D(C\|\psi))^{1/2} + \phi(\log \frac{d\phi_n'}{d\psi}) \longrightarrow \phi(\varkappa_{C\|\psi}) \quad .$$

Q.E.D.

SÆTNING Lad $C \subseteq G$ være konveks og antag $D(C\|\psi) < \infty$. Da er $\varkappa_{C\|\psi}$ omkostningsstabil på mindste facet af C, der indeholder $\phi_{C\|\psi}$. Specielt er $\varkappa_{C\|\psi}$ omkostningsstabil på hele C, hvis $\phi_{C\|\psi}$ er et algebraisk indre punkt.

BEVIS Antag at $\phi_{C\|\psi} = \alpha\phi + (1 - \alpha)\phi'$. Da gælder

$$D(C\|\psi) = \phi_{C\|\psi}(\varkappa_{C\|\psi}) = \alpha\phi(\varkappa_{C\|\psi}) + (1 - \alpha)\phi'(\varkappa_{C\|\psi}) \tag{32}$$

Da $\phi(\varkappa_{C\|\psi}) \ge D(C\|\psi)$ og $\phi'(\varkappa_{C\|\psi}) \ge D(C\|\psi)$ må der gælde $\phi(\varkappa_{C\|\psi}) = D(C\|\psi)$.

Q.E.D.

SÆTNING Lad $C \subseteq G$ være konveks. Lad $\phi^* \in G$ og sæt $\varkappa^* =$

$\log(\frac{d\phi^*}{d\psi})$. Hvis $\varkappa$ er omkostningsstabil og $\inf_{\phi\in C} D(\phi\|\phi^*) = 0$, så er $\phi^* = \phi_{C\|\psi}$.

BEVIS Lad ϕ tilhøre C. Da gælder

$$\phi(\varkappa^*) = D(\phi\|\psi) - D(\phi\|\phi^*) \tag{33}$$

og dermed

$$\phi(\varkappa^*) = \inf_{\phi\in C} \phi(\varkappa^*) + D(\phi\|\phi^*) = \inf_{\phi\in C} D(\phi\|\psi) = D(C\|\psi) \tag{34}$$

Videre gælder

$$D(C\|\psi) = \inf_{\phi\in C} \phi(\varkappa^*) \le D(C\|\psi) - D(\phi_{C\|\psi}\|\phi^*) \tag{35}$$

hvilket viser at $D(\phi_{C\|\psi}\|\phi^*) = 0$ og dermed at $\phi^* = \phi_{C\|\psi}$.

Q.E.D.

EKSEMPEL Lad A være en målelig delmængde af udfaldsrummet, og lad C betegne mængden af sandsynlighedsmål med støtte i A. Da ligger de betingede sandsynlighedsmål $\phi^* = \psi|A$ i C og $\log\frac{d\phi^*}{d\psi}$ er omkostningsstabil. Derfor er $\phi^* = \psi_{C\|\psi}$. Vi får $D(C\|\psi) = -\log(\psi(1_A))$. Dette kan omformes til den vigtige ligning

$$\psi(1_A) = e^{-D(C\|\psi)} . \tag{36}$$

Betinget sandsynlighed er med andre ord et specialtilfælde af minimum informationsprincippet.

SÆTNING (Csiszár 1975) Lad $C \subseteq G$ være konveks, og lad $\phi, \phi_{C\|\psi} \in C$, og antag at $\varkappa_{C\|\psi}$ er omkostningsstabil. Da gælder

$$D(\phi\|\psi) = D(\phi\|\phi_{C\|\psi}) + D(\phi_{C\|\psi}\|\psi) \tag{37}$$

BEVIS (Csiszár 1975)

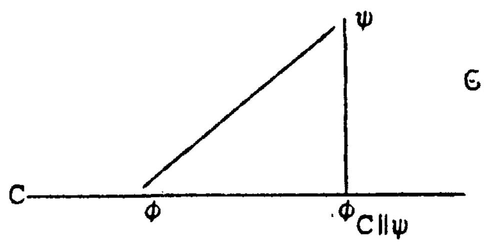
$$D(\phi\|\psi) - D(\phi\|\phi_{C\|\psi}) = \phi(\varkappa_{C\|\psi}) \tag{38}$$

$$= \phi_{C\|\psi}(\varkappa_{C\|\psi})$$

$$= D(\phi_{C\|\psi}\|\psi)$$

Q.E.D.

Sætningen kan opfattes som en analogi til Pytagoras' sætning, hvor $\phi_{C\|\psi}$ er "projektionen" af ψ ind på C. Herved bliver C tangenthyperplan til kuglen $\{\vartheta | D(\vartheta\|\psi) = D(C\|\psi)\}$. Denne geome-



triske måde at betragte teorien på, hvor D opfattes som en slags metrik skyldes Csiszár (1975). Chentsov (1972) har udviklet lignende geometriske ideer uafhængigt af Csiszár, men benytter kugler af formen $\{\vartheta | D(\psi\|\vartheta) = K\}$, og der stort set intet sammenfald mellem deres teorier. Det er værd at bemærke at D ikke er en metrik, og at man heller ikke får en metrik ved som Kullback (1959) at definere $J(\phi\|\psi) = D(\phi\|\psi) + D(\psi\|\phi)$; derimod får man en størrelse, der er sværere at interpretere.

Lad os se, hvad omkostningsstabilitet betyder, hvis den konvekse mængde C er givet ved

$$C = \{\phi \in G | \phi(\underline{f}) = \underline{v}\} \tag{39}$$

hvor $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots f_n)$ og $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ og f_i er stokastiske variable og $v_i \in \mathbb{R}$. Da er $\varkappa$ omkostningsstabil, dersom $\phi(\varkappa)$ er konstant på C som funktion af ϕ, men det betyder netop at $\varkappa$ er en linearkombination

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n + \beta = \underline{\alpha}\cdot\underline{f} + \beta \tag{40}$$

Lad ψ være referencetilstanden. Da svarer ϕ til en omkostningsstabil kode, netop hvis ϕ har formen $\phi(\cdot) = \psi(\cdot e^{\underline{\alpha}\cdot\underline{f}+\beta})$.

3.2. Informationstab under afbildninger

Følgende sætning er en generalisation af en sætning hos Ochs (1976)

SÆTNING Lad $\mathfrak{A}_1$ og $\mathfrak{A}_2$ være kommutative W^*-algebraer af begrænsede stokastiske variable og lad $\Phi:\mathfrak{A}_1 \longrightarrow \mathfrak{A}_2$ være en positiv, lineær afbildning med $\Phi(1)$. Lad endvidere ϕ_1 og ψ_1 være tilstande på $\mathfrak{A}_1$, og lad $\phi_2 = \Phi^*(\phi_1)$ og $\psi_2 = \Phi^*(\psi_1)$ være de tilsvarende tilstande på $\mathfrak{A}_2$. Da gælder

$$D(\phi_2 \| \psi_2) \le D(\phi_1 \| \psi_1) \ . \tag{41}$$

Der gælder lighedstegn, netop hvis $\frac{d\phi_1}{d\psi_1} = \Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})$ ψ_1-n.o. og $\Phi(\log(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})) = \log(\Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}))$ ϕ_1-n.o.

BEMÆRK at $\Phi(\log(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})) = \log(\Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}))$ ϕ_1-n.o. er trivielt opfyldt, dersom Φ er induceret af en afbildning mellem de underliggende rum. Endvidere sikrer algebraens egenskaber, at hvis $v \in \mathfrak{A}_i$, så ligger $f(v)$ også i $\mathfrak{A}_i$ for kontinuerte funktioner f.

BEVIS Først bemærkes, at $\Phi(\log(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})) \le \log(\Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}))$, thi for ethvert Diracmål δ_x er $\delta_x \circ \Phi$ et sandsynlighedsmål, så ifølge Jensens ulighed gælder

$$\delta_x \circ \Phi(\log(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})) \le \log(\delta_x \circ \Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})) = \delta_x(\log(\Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}))) \tag{42}$$

hvilket netop viser at $\Phi(\log(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})) \le \log(\Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}))$ i punktet x. Heraf fås

$$\phi_2(x) = \phi_1 \circ \Phi(x) \le \phi_1(\log(\Phi(e^x))) \le \sup_{x' \in K_{\psi_1}} \phi_1(x') = D(\phi_1 \| \psi_1) \tag{43}$$

idet $\log(\Phi(e^x)) \in K_{\psi_1}$, da $\psi_1(e^{\log(\Phi(e^x))}) = \psi_2(e^x) = 1$. At $\Phi(x) \le \log(\Phi(e^x))$ indses på samme måde som ovenfor. Videre får vi

$$D(\phi_2 \| \psi_2) = \sup_{x \in K_{\phi_2}} \phi_2(x) \le D(\phi_1 \| \psi_1). \tag{44}$$

Ovenstående viser, at hvis $\frac{d\phi_1}{d\psi_1} = \Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})$ ψ_1-n.o. og $\Phi(\log(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}))$ $= \log(\Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}))$ ϕ_1-n.o., så gælder der lighedstegn. Antag at der gælder lighedstegn. Vi sætter $x = \log(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})$ og får

$$\phi_1 \circ \Phi(\log(x)) = \phi_1 \log(\Phi(x)) \tag{45}$$

og dermed

$$\phi_1(\log(\Phi(x)) - \Phi(\log(x))) = 0, \tag{46}$$

men da $\log(\Phi(x)) - \Phi(\log(x)) \ge 0$ viser det, at $\log(\Phi(x)) = \Phi(\log(x))$ ϕ_1-n.o. Der gælder

$$\phi_1(\log(\Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2}) = D(\phi_1 \| \psi_1) - D(\phi_2 \| \phi\ ) \tag{47}$$

hvor ϕ er bestemt ved kravet $\frac{d\phi}{d\psi_1} = \Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})$ ϕ_1-n.o. Antagelsen om at der gælder lighedstegn giver imidlertid at $\phi_1 = \phi$ og dermed $\frac{d\phi}{d\psi_1} = \Phi(\frac{d\phi_2}{d\psi_2})$ ϕ_1-n.o.

Q.E.D.

Nu er det ikke svært at vise, at informationsgevinsten er stærkt superadditiv. Der forekommer en tilsvarende sætning i Ochs (1976), men med et noget vanskeligere bevis.

SÆTNING (Ochs 1976) Lad $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ og $\mathfrak{U}_3$ være kommutative W^*-algebraer af stokastiske variable med referencetilstande ψ_1, ψ_2 og ψ_3. Sæt $\psi_{ij} = \psi_i \otimes \psi_j$, hvor $i,j = 1,2,3$, og sæt $\psi_{123} = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \psi_3$. Lad ϕ være en tilstand på $\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2 \otimes \mathfrak{U}_3$ og definér de marginale tilstande ved $\phi_{12}(a_1 \otimes a_2) = \phi(a_1 \otimes a_2 \otimes 1)$, $\phi_1(a_1) = \phi(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)$ o.s.v. Hvis alle relevante informationsgevinster er endelige gælder

$$D(\phi \| \psi_{123}) + D(\phi_2 \| \psi_2) \geq D(\phi_{12} \| \psi_{12}) + D(\phi_{23} \| \psi_{23}). \tag{48}$$

BEVIS

$$D(\phi \| \psi_{123}) - D(\phi \| \phi_1 \otimes \phi_{23}) = \phi \log \frac{d(\phi_1 \otimes \phi_{23})}{d\psi_{123}} \tag{49}$$

$$= \phi \log(\frac{d\phi_1}{d\psi_1} \otimes 1 \otimes 1) + \phi \log(1 \otimes \frac{d\phi_{23}}{d\psi_{23}})$$

$$= D(\phi_1 \| \psi_1) + D(\phi_{23} \| \psi_{23}).$$

så $D(\phi \| \phi_1 \otimes \phi_{23}) = D(\phi \| \psi_{123}) - D(\phi_1 \| \psi_1) - D(\phi_{23} \| \psi_{23})$ og helt tilsvarende fås $D(\phi_{12} \| \phi_1 \otimes \phi_2) = D(\phi_{12} \| \psi_{12}) - D(\phi_1 \| \psi_1) - D(\phi_2 \| \psi_2)$. Definér nu en afbildning $\Phi : \mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2 \longrightarrow \mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2 \otimes \mathfrak{U}_3$ ved $\Phi(a_1 \otimes a_2) = a_1 \otimes a_2 \otimes 1$ og bemærk at $\Phi^*(\phi) = \phi_{12}$ samt $\Phi^*(\phi_1 \otimes \phi_{23}) = \phi_1 \otimes \phi_2$, hvilket viser at

$$D(\phi_{12} \| \phi_1 \otimes \phi_2) \leq D(\phi \| \phi_1 \otimes \phi_{23}) \tag{50}$$

og dermed

$$D(\phi\|\psi_{123}) - D(\phi_1\|\psi_1) - D(\phi_{23}\|\psi_{23}) = D(\phi_{12}\|\psi_{12}) - D(\phi_1\|\psi_1) - D(\phi_2\|\psi_2) \tag{51}$$

Q.E.D.

KOROLLAR* Informationsafstanden er superadditiv

$$D(\phi_{13}\|\psi_{13}) \geq D(\phi_1\|\psi_1) + D(\phi_3\|\psi_3), \tag{52}$$

hvor forudsætninger og betegnelser er som i foregående sætning.

BEMÆRK* at $D(\phi_1 \otimes \phi_3\|\psi_1 \otimes \psi_3) = D(\phi_1\|\psi_1) + D(\phi_3\|\psi_3)$.

Differensen mellem højre og venstre side i (51) er uafhængig af ψ_{13} og har et særligt navn:

DEFINITION* Lad $X_i, i = 1,2$ være variable med simultan fordeling givet ved tilstanden ϕ og marginale fordelinger givet ved ϕ_i. Da er *den gensidige information* givet ved

$$I(X_1, X_3) = D(\phi_{13}\|\psi_{13}) - D(\phi_1\|\psi_1) - D(\phi_3\|\psi_3) \tag{53}$$

BEMÆRK at definitionen er uafhængig af ψ_i og gælder specielt hvis $\psi_i = \phi_i$.

Den gensidige information er et mål for hvormeget man får at vide om den ene af de variable X_i ved at observere den anden.

Tilsvarende giver sætningen om stærk superadditivitet anledning til

DEFINITION Lad X_i, $i = 1,2,3$ være variable med simultan fordeling givet ved tilstanden ϕ og marginale fordelinger givet ved ψ_i. Da er *den relative gensidige information* givet ved

$$I(X_1,X_3|X_2) = D(\phi\|\psi_{123}) + D(\phi_2\|\psi_2) - D(\phi_{12}\|\psi_{12}) - D(\phi_{23}\|\psi_{23}). \qquad (54)$$

BEMÆRK at definitionen er uafhængig af ψ_i og gælder specielt hvis $\psi_i = \phi_i$.

Den relative gensidige information $I(X,Y|Z)$ er et mål for hvormeget man i middel får at vide om X ved at observere Y, når man kender Z.

Ved direkte udregning fås følgende vigtige ligning

$$I(X,Y|Z) + I(Y,Z) = I(Y,(X,Z)) . \qquad (55)$$

3.3.Minimum informations-princippet

Vi så tidligere, at minimum informationsprincippet giver betinget sandsynlighed som et specialtilfælde. Vi ønsker, at vise at minimum informations-princippet kan fortolkes som en udvidelse af begrebet betinget sandsynlighed, hvor C er en åben konveks delmængde af mængden af sandsynlighedsmål på $\mathcal{U}$. Vi ønsker at finde et *a posteriori* sandsynlighedsmål opdateret med hensyn til at ligge i C. Hvordan kan man observere at et sandsynlighedsmål ligger i C? Lad os gentage forsøget svarende til $(\mathcal{U},\mu)$ m gange, og lad $u_1, u_2,$ u_m betegne udfaldene. Da kan den empiriske fordeling $\frac{1}{m}\sum \delta_{u_i}$, observeres at ligge i C, hvor δ_{u_i} er Diracmålet i punktet u_i. Definér

$$A_m = \{(u_1,u_2, \quad u_m) \in \mathcal{U}^m | \ \frac{1}{m} \ \sum \delta_{u_i} \}. \qquad (56)$$

I $(\mathcal{U}^m, \overset{m}{\otimes} \mu)$ betragter vi nu den betingede sandsynlighed af $\overset{m}{\otimes} \mu$ med hensyn til mængden A_m. Lad η_m betegne den marginale fordeling af $\overset{m}{\otimes} \mu | A_m$ på $\mathcal{U}$. Da er $\eta_m \in C$. Thi ellers ville der findes en stokastisk variabel f på $\mathcal{U}$, så $\int f\, d\eta_m < \int f\, d\nu$ for alle $\nu \in C$. Men

$$\int f\, d\eta_m = \int f\, d(\overset{m}{\otimes}\mu|A_m)_{mag} = \int \frac{1}{m}\sum f_i\, d(\overset{m}{\otimes}\mu|A_m) \tag{57}$$

$$\geq \inf_{\underline{u}\in A_n} \int \frac{1}{m}\sum f_i\, d\delta_{\underline{u}} = \inf_{\underline{u}\in A_n} \int f\, d(\frac{1}{m}\sum \delta_{u_i}) \geq \inf_{\nu\in C} \int f\, d\nu$$

hvor $f_1, f_2, \ldots f_m$ er uafhængige kopier af f. I det følgende vil vi vise at

$$D(\eta_m||\mu) \longrightarrow \inf_{\nu\in C} D(\nu||\mu) . \tag{58}$$

Vi har følgende ulighed

$$D(\eta_m||\mu) \leq \frac{1}{m} D(\overset{m}{\otimes}\mu|A_m||\overset{m}{\otimes}\mu) \tag{59}$$

$$\leq \frac{1}{m} D(\overset{m}{\otimes}\nu|A_m||\overset{m}{\otimes}\mu)$$

$$\leq \frac{1}{m}\frac{D(\overset{m}{\otimes}\nu||\overset{m}{\otimes}\mu) + e^{-1}}{\overset{m}{\otimes}\mu(A_m)}$$

$$\leq \frac{D(\nu||\mu) + m^{-1}\cdot\log(2)}{\overset{m}{\otimes}\mu(A_m)} ,$$

hvor ν er vilkårlig, og vi har brugt følgende ulighed:

$$D(s\nu_1 + t\nu_2 || \nu_3) = s\cdot\int \log(d(s\nu_1 + t\nu_2)/d\nu_3)\, d\nu_1 + \tag{60}$$
$$t\cdot\int \log(d(s\nu_1 + t\nu_2)/d\nu_3)\, d\nu_2$$
$$\geq s\cdot\int \log(s\cdot d\nu_1/d\nu_3)\, d\nu_1 +$$
$$t\cdot\int \log(t\cdot d\nu_2/d\nu_3)\, d\nu_2$$
$$\geq s\cdot D(\nu_1||\nu_3) + s\cdot\log(s) + t\cdot\log(t)$$
$$\geq s\cdot D(\nu_1||\nu_3) - \log(2)$$

Hvis $\nu \in C$, så er $\otimes^m \mu(A_m) \longrightarrow 1$ for $m \longrightarrow \infty$, for det er sandsynligheden for at den empiriske fordeling af μ ligger i omegnen C af μ. Derfor gælder

$$\limsup_{m\to\infty} D(\eta_m||\mu) \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{D(\nu||\mu) + \log(2)/m}{\otimes^m \mu(A_m)} \tag{61}$$
$$= D(\nu||\mu)$$

og dermed

$$\limsup_{m\to\infty} D(\eta_m||\mu) \leq \inf_{\nu\in C} D(\nu||\mu) \tag{62}$$

men $\eta_m \in C$, så

$$D(\eta_m||\mu) \longrightarrow \inf_{\nu\in C} D(\nu||\mu) \quad \text{for } m \longrightarrow \infty. \tag{63}$$

BEMÆRK (Topsøe 1979) Da C er åben, vil funktionen $\eta \longrightarrow D(\eta||\mu)$ ikke have minimum på C, men der eksisterer et entydigt bestemt attraktionscenter $\mu_{||C}$ således at, hvis $D(\eta_m||\mu) \longrightarrow \inf_{\nu\in C} D(\nu||\mu)$ for $m \longrightarrow \infty$, og $\eta_m \in C$, så vil $\eta_m \longrightarrow \mu_{||C}$ i total variation.

3.4. Store tals stærke lov

Sådan som teorien er udviklet ovenfor kan vi uden det store besvær bevise nogle sætninger af typen "store tals lov". Ellis (1985) beviser tilsvarende sætninger, men med helt andre metoder.

SÆTNING Lad (A,ψ) være et sandsynlighedsfelt, og lad C være en konveks delmængde af mængden af sandsynlighedsmål på A. Vi tænker os n repetitioner af forsøget svarende til sandsynlighedsfeltet. Hvis $x_1, x_2, \ldots x_n$ er udfaldene af forsøgene, er $\frac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x_i}$ den empiriske fordeling. Lad K_c betegne mængden

$$\{(x_i) \in A^n \mid \tfrac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x_i} \in C\}. \tag{64}$$

Da gælder

$$-1/n\cdot\log(P(\tfrac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x} \in C)) \longrightarrow D(C\|\psi). \tag{65}$$

BEVIS

$$P(\tfrac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x_i} \in C) = e^{-D(K_c\|\overset{n}{\otimes}\mu)} \tag{66}$$

Vælg $\eta \in C$, så $D(\eta\|\mu) \geq D(C\|\mu) - \varepsilon$, får vi på grund af konveksitet

$$\begin{aligned} D(\overset{n}{\otimes}\eta\|\overset{n}{\otimes}\mu) &\leq D(\overset{n}{\otimes}\eta_{|K_c}\|\overset{n}{\otimes}\mu)\overset{n}{\otimes}\eta(K_c) + D(\overset{n}{\otimes}\eta_{|\complement K_c}\|\overset{n}{\otimes}\mu)\overset{n}{\otimes}\eta(\complement K_c) \\ &\leq D(K_c\|\overset{n}{\otimes}\mu)\overset{n}{\otimes}\eta(K_c) + (D(\overset{n}{\otimes}\eta_{|\complement K_c}\|\overset{n}{\otimes}\eta) + D(\overset{n}{\otimes}\eta\|\overset{n}{\otimes}\mu))\overset{n}{\otimes}\eta(\complement K_c) \\ &\leq D(K_c\|\overset{n}{\otimes}\mu)\overset{n}{\otimes}\eta(K_c) + nD(\complement C\|\eta) + \log 2 + D(\overset{n}{\otimes}\eta\|\overset{n}{\otimes}\mu))\overset{n}{\otimes}\eta(\complement K_c) \end{aligned} \tag{67}$$

hvor den sidste ulighed ses lige som i (60). For alle $\varepsilon' \geq \varepsilon$ findes n_0, så

$$D(K_c\|\overset{n}{\otimes}\mu) \geq \frac{D(\overset{n}{\otimes}\eta\|\overset{n}{\otimes}\mu)(1 - \overset{n}{\otimes}\eta(\complement K_c)) + \log 2 - nD(\complement C\|\eta)}{\overset{n}{\otimes}\eta(K_c)} \tag{68}$$

$$\geq n \frac{(D(C\|\mu) - \varepsilon)(1 - \overset{n}{\otimes}\eta(\complement K_c)) + \log 2/n - D(\complement c\|\eta)}{\overset{n}{\otimes}\eta(K_c)}$$

$$\geq n(D(C\|\mu) - \varepsilon')$$

for $n \geq n_0$. Det viser, at for alle $\varepsilon' > 0$ findes n_0, så

$$P(\frac{1}{n}\cdot\sum^{n} \delta_{x_i} \in C) \leq e^{-n(D(C\|\mu) - \varepsilon')} \tag{69}$$

for $n \geq n_0$.

Envidere findes for ethvert $\varepsilon' > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, så $P(\frac{1}{n}\cdot\sum^{n} \delta_{x_i} \in C) \geq e^{-n(D(C\|\psi)+\varepsilon')}$ for $n \geq N$. Thi for alle $\varepsilon' > 0$ findes et $\phi \in C$, så $D(\phi\|\psi) \leq D(C\|\psi) + \varepsilon'$, og da gælder

$$D(\overset{n}{\otimes}\phi\|\overset{n}{\otimes}\psi) \leq n(D(C\|\psi) + \varepsilon') \tag{70}$$

så det er nok at vise, at $P(\frac{1}{n}\cdot\sum^{n} \delta_{x_i} \in C) \geq e^{-D(\overset{n}{\otimes}\phi\|\overset{n}{\otimes}\psi)-n\varepsilon'}$ for $n \geq N$. Men $P(\frac{1}{n}\cdot\sum^{n} \delta_{x_i} \in C) = e^{-D(K_c\|\overset{n}{\otimes}\psi)}$, så det skal vises at

$$\frac{1}{n}D(K_c\|\overset{n}{\otimes}\psi) \leq D(\overset{n}{\otimes}\phi\|\overset{n}{\otimes}\psi) + \varepsilon' \tag{71}$$

men

$$\frac{1}{n}D(K_c\|\overset{n}{\otimes}\psi) \leq \frac{1}{n} D(\overset{n}{\otimes}\phi_{|K_c}\|\overset{n}{\otimes}\psi) \tag{72}$$

$$\leq \frac{1}{n} \frac{D(\overset{n}{\otimes}\phi\|\overset{n}{\otimes}\psi) + H(\overset{n}{\otimes}\phi(K_c),1-\overset{n}{\otimes}\phi(K_c))}{\overset{n}{\otimes}\phi(K_c)}$$

$$\leq \frac{D(\overset{n}{\otimes}\phi\|\overset{n}{\otimes}\psi) + \frac{1}{n}H(\overset{n}{\otimes}\phi(K_c),1-\overset{n}{\otimes}\phi(K_c))}{\overset{n}{\otimes}\phi(K_c)}$$

og tilbage er at bemærke, at $\overset{n}{\otimes}\phi(K_c)$ konvergerer mod 0 for n gående mod uendelig.

Q.E.D.

SÆTNING Lad (A,ψ) være et sandsynlighedsfelt, og lad C være en konveks delmængde af mængden af sandsynlighedsmål på A. Vi tænker os n repetitioner af forsøget svarende til sandsynlighedsfeltet. Hvis $x_1, x_2,\ldots x_n$ er udfaldene af forsøgene, så er $\frac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x_i}$ den empiriske fordeling. Lad K_c betegne mængden $\{(x_i) \in A^n | \frac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x_i} \in C\}$. Lad ω være en omegn af $\psi_{\|C}$. Da gælder

$$P\left(\frac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x_i} \in \omega \,\Big|\, \frac{1}{n}\cdot\sum \delta_{x_i} \in C\right) \longrightarrow 1 \quad \text{for} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{73}$$

BEVIS Det er en umidlbar konsekvens af foregående sætning og at

$$D(C\|\psi) < D(C\backslash\omega\|\psi). \tag{74}$$

Q.E.D.

SÆTNING* (Store tals stærke lov) Den empiriske fordeling konvergerer næsten sikkert mod den tilsvarende tilstand.

BEVIS Det viser at

$$P\left(\frac{1}{n}\cdot\sum^{n} \delta_{x_i} \in C \ \text{for et } n \geq N\right) \leq \sum_{n\geq N} e^{-n(D(C\|\mu) - \varepsilon')} \tag{75}$$

$$\leq \frac{e^{-N(D(C\|\mu) - \varepsilon')}}{1 - e^{-(D(C\|\mu) - \varepsilon')}}$$

Det viser, at hvis $D(C\|\mu) > 0$ vil sandsynligheden for at den empiriske fordeling ligger i C for et $n \geq N$ konvergere mod 0 for N gående mod uendelig. Hvis ω er en omegn af μ findes et endeligt antal konvekse mængder C_i så $\complement\omega \subseteq \bigcup C_i$. Derfor vil sandsynligheden for at den empiriske fordeling ligger i $\complement\omega$ for et $n \geq N$ konvergerer mod 0 for N gående mod uendelig. Q.E.D.

Lad (A,P) være et diskret sandsynlighedsfelt. Lad μ_n være en empirisk fordeling på A af n realisationer af eksperimentet svarende til (A,P). Da er

$$P\left(\frac{1}{n}\cdot\sum^{n} \delta_{x_i} \in C \ \text{for et } n \geq N\right) \leq \sum_{n\geq N} e^{-n(D(C\|\mu) - \varepsilon')} \tag{75}$$

$$\leq \frac{e^{-N(D(C\|\mu) - \varepsilon')}}{1 - e^{-(D(C\|\mu) - \varepsilon')}}$$

Det viser, at hvis $D(C\|\mu) > 0$ vil sandsynligheden for at den empiriske fordeling ligger i C for et $n \geq N$ konvergere mod 0 for N gående mod uendelig. Hvis ω er en omegn af μ findes et endeligt antal konvekse mængder C_i så $\complement\omega \subseteq \bigcup C_i$. Derfor vil sandsynligheden for at den empiriske fordeling ligger i $\complement\omega$ for et $n \geq N$ konvergerer mod 0 for N gående mod uendelig. Q.E.D.

Lad (A,P) være et diskret sandsynlighedsfelt. Lad μ_n være en empirisk fordeling på A af n realisationer af eksperimentet svarende til (A,P). Da er

$$n \mapsto X_{n,s} = \underset{\mu_n}{E}\, D(\mu_n \| s\cdot\mu_n + (1-s)\cdot P), \quad n \in \mathbb{N} \tag{76}$$

en aftagende funktion for fastholdt s i intervallet $[0,1]$. Dette kan ses på følgende måde: funktionen $f: t \longrightarrow t\cdot\ln(\frac{t}{st + 1-s})$ er konveks idet

$$\frac{df}{dt} = \ln(\frac{t}{st + 1-s}) + 1 - \frac{st}{st + 1-s} \tag{77}$$

og

$$\frac{d^2f}{dt^2} = t^{-1} - \frac{s}{st + 1-s} - \frac{(1-s)s}{(st + 1-s)^2} \tag{78}$$

$$= \frac{(1-s)^2}{t(st + 1-s)^2} > 0.$$

Nu er $X_{n,s}$ en invers submatingale svarende til algebraerne $\mathfrak{U}_n = \sigma(X_{n,s}, X_{n+1,s}, \ldots)$, hvis $E(X_{1,s}) < \infty$. Hvis $s \neq 0$, så er $E(X_{1,s}) \le -\ln(s) < \infty$. Hvis $s = 0$, så er $E(X_{1,s}) = H(P)$. For at se at $X_{n,s}$ er en invers submatingale, lader vi μ_n^i betegne den empiriske fordeling på A, når den i'te observation er fjernet. Da gælder

$$X_{n+1,s} = D(\frac{1}{n+1}\cdot\sum_i \mu^i_{n+1} \| s\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\sum_i \mu^i_{n+1} + (1-s)P)(1) \tag{79}$$

$$\le \frac{1}{n+1}\cdot\sum_i D(\mu^i_{n+1} \| s\mu^i_{n+1} + (1-s)P) \quad ,$$

idet $\mu_{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_i \mu^i_{n+1}$. Lad $\mathbb{E}_n$ betegne den betingede forventning på $\mathfrak{U}_n$. På grund af symmetri er

$$\mathbb{E}_{n+1} D(\mu^i_{n+1} \| s\mu^i_{n+1} + (1-s)P) \tag{80}$$

uafhængig af i. Ved at tage $\mathbb{E}_{n+1}$ på begge sider fås

$$X_{n+1,s} \le \frac{1}{n+1}\cdot\sum_i \mathbb{E}_{n+1} D(\mu^i_{n+1} \| s\mu^i_{n+1} + (1-s)P) = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_i \mathbb{E}_{n+1} X_n = \mathbb{E}_{n+1} X_{n,s} \tag{81}$$

Dette viser, at $E(X_{n,s})$ er aftagende som funktion af n.

$$\mathbb{E}_{2^{n+1}} D(\mu_{2^n} \| P) - D(\mu_{2^{n+1}} \| P) = \mathbb{E}_{2^{n+1}} D(\mu_{2^n} \| P) - D(\tfrac{1}{2} \cdot \sum_j \mu^{(j)}_{2^{n+1}} \| P) \tag{82}$$

$$= \mathbb{E}_{2^{n+1}} \left(D(\mu^{(1)}_{2^{n+1}} \| P) - \tfrac{1}{2} \cdot \sum_j D(\mu^{(j)}_{2^{n+1}} \| P) + \tfrac{1}{2} \cdot \sum_j D(\mu^{(j)}_{2^{n+1}} \| \mu_{2^{n+1}}) \right)$$

$$= \mathbb{E}_{2^{n+1}} D(\mu^{(1)}_{2^{n+1}} \| \mu_{2^{n+1}})$$

hvor $\mu^{(j)}_{2^{n+1}}$ betegner den empiriske fordeling, hvor den j'te blok af 2 observationer er fjernet. Bemærk at

$$D(\mu^{(1)}_{2^{n+1}} \| \mu_{2^{n+1}}) \le H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots \tfrac{1}{2}) = \ln(2) < \infty. \tag{83}$$

Hvis $H(P) = \infty$, så er $\mathbb{E}_{\mu} D(\mu_n \| P) = \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

$$E(X_{n,s}) = \mathbb{E}_{\mu_n} \sum_{a \in A} \mu_n(a) \cdot \ln\left(\frac{\mu_n(a)}{s \cdot \mu_n(a) + (1-s) \cdot P(a)}\right) \tag{84}$$

$$= \sum_{a \in A} \mathbb{E}_{\mu_n} \mu_n(a) \cdot \ln\left(\frac{\mu_n(a)}{s \cdot \mu_n(a) + (1-s) \cdot P(a)}\right)$$

Denne følge konvergerer punktvis mod 0.

$$\mathbb{E}_{\mu_n} \mu_n(a) \cdot \ln\left(\frac{\mu_n(a)}{s \cdot \mu_n(a) + (1-s) \cdot P(a)}\right) = \mathbb{E}_{\mu_n} \mu_n(a) \cdot \ln\left(\frac{s \cdot \mu_n(a) + (1-s) \cdot P(a)}{\mu_n(a)}\right) \tag{85}$$

$$\ge -\mathbb{E}_{\mu} \mu_n(a) \cdot \left(1 - \frac{s \cdot \mu_n(a) + (1-s) \cdot P(a)}{\mu_n(a)}\right)$$

$$= 0.$$

På grund af konveksitet er

$$\mathbb{E}_{\mu_n} \mu_n(a) \cdot \ln\left(\frac{\mu_n(a)}{s \cdot \mu_n(a) + (1-s) \cdot P(a)}\right) \le$$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum \mathbb{E}_{\mu_n} \mu_{(i)}(a) \cdot \ln\left(\frac{\mu_{(i)}(a)}{s \cdot \mu_{(i)}(a) + (1-s) \cdot P(a)}\right) = \tag{86}$$

$$\mathbb{E}_{\mu_n} \mu_{(1)}(a) \cdot \ln\left(\frac{\mu_{(1)}(a)}{s \cdot \mu_{(1)}(a) + (1-s) \cdot P(a)}\right)$$

Dette er en integrabel majorant, netop hvis $E(X_{1,s}) < \infty$. Derfor konvergerer $E(X_{n,s})$ mod 0 for n gående mod uendelig, netop hvis $E(X_{1,s}) < \infty$. Da viser invers sub-matingale konvergens-sætningen, at $X_{n,s}$ konvergerer mod 0 næsten sikkert, hvis $E(X_{1,s}) < \infty$. Pinsker's ulighed (see Pinsker 1964) giver da at $E\|\mu_n - P\|^2_{tot}$ konvergerer mod 0, og at $\|\mu_n - P\|_{tot}$ konvergerer næsten sikkert.

4. MODELLER FOR UAFHÆNGIGHED

De senere års forskning i kunstig intelligens og ekspertsystemer har blandt andet omhandlet vidensrepræsentation. En af de modeller for vidensrepræsentation, som er blevet indgående undersøgt, er de såkaldte Bayesianske netværk. Disse bruges til at give en kompakt grafisk oversigt over den simultane sandsynlighedsfordeling på et stort antal variable. Denne type modeller blev først anvendt af genetikeren Wright i 1921. Han udviklede senere en metode kaldet *path analysis* (Wright 1934), som senere er blevet meget anvendt i økonomisk teori (Wold 1954), sociologi (Blalock 1971, Kenny 1979) og psykologi (Duncan 1975). For en nyere præsentation af *path analysis* kan henvises til Li (1977). Beslutningsanalyse har været en anden kilde til studiet af grafrepræsentationer af variable (Howard & Matheson 1981, Olmsted 1983 og Shachter 1986). Fra statistikere er der kommet vigtige bidrag (Lauritsen 1982, Wermuth & Lauritzen 1983, Kiiveri *et al.* 1984, Lauritzen 1989 og Frydenberg 1990). Som vidensrepræsentation er grafiske modeller for uafhængighed blevet studeret intensivt af Pearl (1988), Pearl & Verma (1990).

4.1. Uafhængighedsrelationer

Vi vil i det følgende bruge betegnelsen *variabel* om enhver målelig afbildning fra udfaldsrummet over i en målelig mængde. De variable, der betragtes, skal være indbyrdes konsistente i den forstand, at de skal kunne antage givne værdier samtidigt. Vi vil således ikke samtidig betragte variable, der angiver det præsise sted og den præcise hastighed for en elektron. En særlig type variable vil være *logiske variable*, der kan antage værdierne falsk og sand (0 og 1) alt afhængig af sandhedsværdien af et givet udsagn.

Hvis variablen V_i kan antage n_i værdier, vil den simultane fordeling af $V_1, V_2,\ldots V_k$ være givet ved $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ reelle tal. Hvis de variable antages at være uafhængige, vil den simultane fordeling være givet ved $n_1+n_2+\ldots+n_k$ reelle tal, og det kræver derfor en langt mindre hukommelse at lagre viden om den simultane fordeling, dersom man ved at de variable er uafhængige. Blandt andet af den grund går mange statistiske undersøgelser ud på at undersøge om givne variable er uafhængige. Vi vil med $I[X_1,X_2,\ldots X_n]$ betegne påstanden, at de variable $X_1, X_2,\ldots X_n$ er uafhængige (bemærk at notationen ikke er standard). Ofte vil de variable, man betragter, kun være uafhængige under nærmere bestemte omstændigheder.

EKSEMPEL Lad der være givet 2 terninger, hvoraf den ene er symmetrisk og den anden er skæv. Tag en tilfældig af de 2 terninger og slå den 2 gange. Lad T være en variabel, der angiver hvilken af de 2 terninger, der er taget, og lad U_1 og U_2 betegne udfaldet af første henholdsvis andet kast. Da vil U_1 og U_2 være uafhængige givet T. Dette kan illustreres med følgende *Bayesianske netværk:*

$$\begin{tikzcd} U_1 & & U_2 \\ & T \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{87}$$

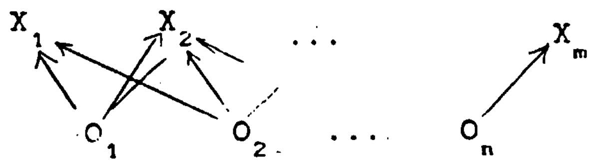
Lad $O_1, O_2,\ldots O_m$ være uafhængige variable. Vi vil med

$$I[X_1;\ X_2;\ldots X_n|O_1;\ O_2;\ldots O_m] \tag{88}$$

betegne påstanden, at de variable $X_1, X_2,\ldots X_n$ er uafhængige givet værdierne af $O_1, O_2,\ldots O_m$ (bemærk at notationen ikke er standard). Der gælder da

$$I[X_1;X_2;\ldots X_n|O_1;O_2;\ldots O_m] \Leftrightarrow I(X_1;X_2;\ldots X_n|O_1;O_2;\ldots O_m) = 0 \tag{89}$$

Hvis $O_1, O_2\ldots O_n$ er uafhængige, vil vi udtrykke relationen ved det *Bayesianske netværk*



(90)

med en pil fra hvert O til hvert X.

Der findes andre former for betinget uafhængighed, der bekvemt kan illustreres i *Bayesianske netværk*.

EKSEMPEL (Klein 1970) Ehrenfest lavede følgende model for diffusion af en gas. Den blev først publiceret i studenter-tidsskriftet "Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter" og lyder således: "Lad os antage, at vi har N kugler (100, for eksempel), nummererede fra 1 til 100, således at de kan skelnes fra hinanden. De er på et givet tidspunkt fordelt mellem to urner, således at urne A indeholder P_0 kugler (90, for eksempel), og urne B har $Q_0 = N - P_0$ kugler (altså 10); men det er ukendt, hvilke individuelle kugler, der findes i A og hvilke i B. Vi skal også have en pose med N lotterisedler, nummerede fra 1 til N. Hvert tiende sekund trækkes en seddel, dens nummer annonceres, og den lægges i posen, hvis indhold blandes grundigt. Så trækkes en anden, dens nummer annonceres, ect. Hver gang et nummer annonceres, springer den kugle, som bærer dette nummer, ud af den urne, den befinder sig i, og over i den anden urne, hvor den forbliver, indtil dens nummer på ny bliver udtrukket. Bemærk: Det er altid mere sandsynligt, at den kugle, hvis nummer nævnes, findes i den urne, der indeholder flest kugler. Så længe urne A er mere fyldt end urne B, vil de fleste lodtrækninger derfor flytte en kugle fra A til B, men kun få en kugle fra B til A."

Lad P_t betegne antallet af kugler i urne A til tiden $t \cdot 10$ min., $t \in \mathbb{N}$. Da er P_{n+10} uafhængig af P_m, $m < n$ givet P_n. Dette er definitionen på at P_n er en Markovkæde, og kan gives en grafisk repræsentation med det *Bayesianske netværk*

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \uparrow \\ P_3 \\ \uparrow \\ P_2 \\ \uparrow \\ P_1 \end{array} \qquad (91)$$

Generelt kan et *Bayesiansk netværk* betragtes som nogle diagrammer som (90) stablet oven på hinanden, så *lagene* danner en Markovkæde. Bayesianske netværk vil være vores standardeksempel på hvordan variable kan afhænge af hinanden. Der vil senere blive givet en formel definition af Bayesianske netværk.

Der gælder følgende 2 regler til at konkludere nye betingede uafhængigheder ud fra gamle:

$$I[X;Y|Z] \Leftrightarrow I[Y;X|Z] \qquad (92)$$

$$I[X;Y\cup Z|W] \Leftrightarrow I[X;Y|W] \wedge I[X;Z|Y\cup W] \qquad (93)$$

Deres indhold burde være intuitivt klart, men kan let checkes ved hjælp af ligningen (54). En relation I mellem variable, der opfylder (92) og (93), siges at være *semi-grafoid*. Tidligere troede man (Pearl & Paz 1985), at alle egenskaber ved uafhængigheds-relationer i sandsynlighedsregning kunne udledes af de ovenstående, men det blev modbevist af Studeny (1988). Det er ikke lykkedes at opstille et aksiomsystem for relationen "betinget uafhængighed". Mange af konklusionerne i denne afhandling hviler udelukkende på egenskaber ved relationen betinget uafhængighed, og hvis man havde fundet et tilfredsstillende aksiomsystem for denne relation, ville sandsynlighedsbetragtninger måske være overflødige; sandsynlighedsregningen må ses som et sikkerhedsnet, sålænge et sådant aksiomsystem ikke foreligger. Alternativt kunne man med få ændringer lave dette kapitel om så det handlede om semigrafoide relationer. Det eneste punkt hvor sandsynligheds-fordelingen spiller en væsentlig rolle er i afsnittet om Bell's uligheder.

I første omgang vil vi nøjes med at se på den situation, hvor mængden af variable er endelig.

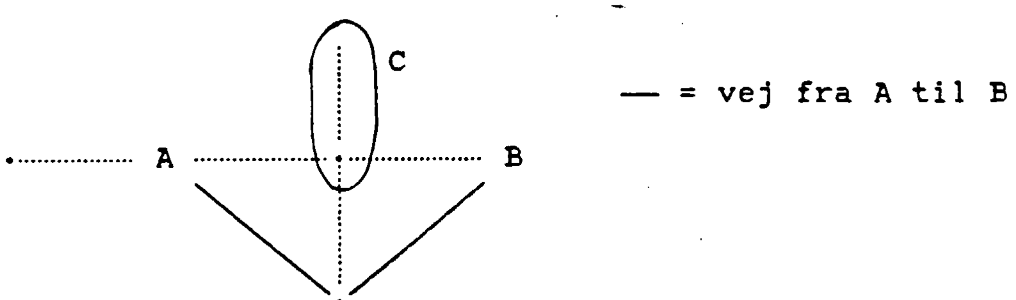
DEFINITION En semigrafoid relation I kaldes en *uafhængigheds-relation*, dersom der findes et sandsynlighedsfelt, således at de variable kan identifiseres med variable på sandsynlighedsfeldtet, og I kan identificeres med stokastisk uafhængighed. En mængde med en uafhængighedsrelation vil vi kalde en *(endelig) I-model*. I'et står for uafhængighed (independence).

EKSEMPEL Lad M være en mængde af stokastiske vektorer. Da definerer

$$I[\underline{A},\underline{B}|\underline{C}] \Leftrightarrow \text{Den partielle kovarians af } \underline{A} \text{ og } \underline{B} \text{ er 0 givet } \underline{C} \quad (94)$$

en uafhængighedsrelation, idet de stokastiske vektorer erstattes med normalfordelte stokastiske vektorer med samme kovarians matrix. For normalfordelte variable gælder, at de er ukorrelerede, netop hvis de er uafhængige.

EKSEMPEL Lad de variable være identificeret med hjørner i en uorienteret graf. Relationen I er defineret ved, at $\neg I[A,B|C]$



(95)

netop hvis en variabel i A kan forbindes med en variabel i B uden at skære C. For hver vej l defineres en stokastisk variabel V_l således at V_l og $V_{l'}$ er uafhængige netop hvis vejene l og l' er forskellige. Et hjørne H i grafen identificeres nu med $(V_l)_{H\in l}$ hvor $H \in l$ skal betyde at H ligger på vejen l. Da er hjørnerne H og H' betinget uafhængige i grafen, netop hvis $(V_l)_{H\in l}$ og $(V_l)_{H'\in l}$ er uafhængige. En graf med den ovenfor givne uafhængighedsrelation kaldes ofte et *Markovnetværk*.

DEFINITION Hvis I er en uafhængighedsrelation og D er en mængde af variable, defineres den *opdaterede uafhængighedsrelation* $I_{|D}$ via

$$I_{|D}[A,B|C] \Leftrightarrow I[A,B|C\cup D] \tag{96}$$

En uafhængighedsrelation opfylder i almindelighed andre aksiomer end (92) og (93), hvilket følgende sætning er et eksempel på.

SÆTNING Hvis de variable er normalfordelte vektorer, så gælder

$$I[\underline{A},\underline{B}|\underline{D}] \ \& \ I[\underline{A},\underline{C}|\underline{D}] \Rightarrow I[\underline{A},\underline{B}\cup\underline{C}|\underline{D}] \tag{97}$$

BEVIS Oplagt.

Q.E.D.

DEFINITION (Pearl 1988) En uafhængighedsrelation, der opfylder (97) siges at opfylde aksiomet om *komposition*.

4.2. Uafhængighedskategorien

I dette afsnit vil vi underkaste uafhængighedsrelationen nogle kategoribetragtninger.

DEFINITION Lad $\mathscr{A}$ og $\mathfrak{B}$ være 2 I-modeller med uafhængighedsrelationer $I_{\mathscr{A}}$ og $I_{\mathfrak{B}}$. Da vil vi med en *I-afbildning* f fra $\mathscr{A}$ til $\mathfrak{B}$ mene en afbildning, der sender variable fra $\mathscr{A}$ over i variable fra $\mathfrak{B}$, således at

$$I_{\mathscr{A}}[A,B|C] \Rightarrow I_{\mathfrak{B}}[f(A),f(B)|f(C)] \ . \tag{98}$$

Mængden af (endelige) I-modeller og I-afbildninger udgør oplagt en kategori; vi vil kalde den *uafhængighedskategorien*.

SÆTNING Lad M og M' være mængder af variable, og lad I' være en uafhængighedsrelation på M'. Hvis f er en afbildning fra M til M', så definerer

$$I_f[A,B|C] \Leftrightarrow I'[f(A),f(B)|f(C)] \tag{99}$$

en uafhængighedsrelation på M, således at f bliver en I-afbildning fra (M,I_f) til (M',I). Antag M og M' er mængder af variable på sandsynlighedsfeldter (Ω,P) og (Ω',P') og f er givet ved en afbildning $g:\Omega' \longrightarrow \Omega$ og P er lig med P' transformeret med g. Hvis I' er stokastisk uafhængighed, så er I_f også stokastisk uafhængighed med hensyn til det inducerede sandsynlighedsmål. Endvidere gælder $I_{f\circ h} = (I_h)_f$.

BEVIS Det er altsammen blot en øvelser i definitionerne. Q.E.D.

Den ved (99) definerede uafhængighedsrelation vil vi kalde den *inducerede uafhængighedsrelation*.

SÆTNING Lad (M,I) og (M',I') være I-modeller og lad $f:M \longrightarrow M'$ være en afbildning. Da er f en I-afbildning, netop hvis identiteten er en I-afbildning fra (M,I) til (M,I'_f).

BEVIS Oplagt. Q.E.D.

SÆTNING Egenskaben komposition er bevaret ved inducering.

BEVIS Oplagt, idet billedet af en foreningsmængde er foreningsmængden af billederne. Q.E.D.

SÆTNING Lad I og I' være uafhængighedsrelationer på en mængde $\mathcal{M}$. Da er en uafhængighedsrelation $I \wedge I'$ defineret ved

$$I \wedge I'[A,B|C] \Leftrightarrow I[A,B|C] \ \& \ I'[A,B|C] \tag{100}$$

BEVIS Der findes sandsynlighedsmål P og P' på $\mathcal{M}$, således at I og I' er givet som statistisk uafhængighed med hensyn til henholdsvis P og P'. Lad f være diagonalafbildningen $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}\times\mathcal{M}$ og forsyn $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ med produktmålet $P\otimes P'$ og en dertilhørende uafhængighedsrelation I''. Da er $I \wedge I' = I_f$. Q.E.D.

DEFINITION Vi vil kalde den i sætningen konstruerede uafhængighedsrelation for konjunkionen af I og I'. Man kan naturligvis danne konjunktion af mere end 2 uafhængighedsrelationer ved suksesiv anvendelse af ovenstående konstruktion.

BEMÆRK at hvis I og I' opfylder aksiomet om komposition, så gør $I \wedge I'$ det også. Envidere gælder $(I \wedge I')_f = I_f \wedge I'_f$.

DEFINITION Lad (M,I) og (M',I') være I-modeller og lad $f:M \longrightarrow M'$ være en I-afbildning. Da siges f at være en perfekt I-afbildning dersom $I = I'_f$.

4.3. Determinisme

Hvis $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er I-modeller og f er en I-afbildning, der ikke er injektiv, så findes variable A og B i $\mathcal{A}$ således at $f(A) = f(B)$. Hvis det yderligere gælder, at A og B er uafhængige givet C, så gælder $I[f(A),f(A)|f(C)]$. Vi får altså en variabel $f(A)$, der er uafhængig af sig selv og dermed antager én værdi næsten sikkert givet $f(C)$. Da findes en afbildning g, så $f(A) = g(f(C))$ næsten sikkert. Vi siger, at $f(A)$ er *determineret* af $f(C)$.

DEFINITION Lad A og B være mængder af variable i en I-model. Da siges A at *determinere* B, dersom $I[B,B|A]$, hvilket vi vil skrive $A \ll_I B$. Dersom A er en minimal mængde, der determinerer B, siges B at være *strengt determineret* af A. En variabel A siges at være *fuldstændigt determineret*, dersom $I[A,A]$. Hvis der både gælder, at $A \ll_I B$ og $B \ll_I A$ siger vi, at A og B er *ækvivalente*, og skriver $A \cong B$. Mængden af variable determineret af A betegnes $\mathrm{Det}(A)$.

Vi vil i almindelighed ikke skelne mellem ækvivalente variable.

SÆTNING Relationen $\ll_I$ har følgende egenskaber for alle mængder af variable:

1) $A \ll_I A$
2) $A \ll_I B \;\&\; B \ll_I C \Rightarrow A \ll_I C$
3) $A \ll_I B \cup C \Leftrightarrow A \ll_I B \;\&\; A \ll_I C$
4) $A \ll_I B \;\&\; A \subseteq A' \Rightarrow A' \ll_I B$
5) $A \ll_I B \Rightarrow I[B,C|A]$
6) $A \ll_I B \;\&\; I[X,A|Y] \Rightarrow I[X,B|Y]$
7) $I[A,B|C] \Leftrightarrow I[\mathrm{Det}(A),\mathrm{Det}(B)|\mathrm{Det}(C)]$

BEVIS Find et sandsynlighedsfelt, så de variable identificeres med variable på sandsynlighedsfeldtet, og så I identificeres med stokastisk uafhængighed. Da er $A \ll_I B$ det samme som at B er en funktion af A næsten sikkert, og punkterne 1) - 7) er oplagte.

Det er dog af en vis interesse at 2) - 7) kan deduceres ud fra 5) og at I er en semigrafoid relation.

4): $A \ll_I B \;\&\; A \subseteq A'$. Da gælder $I[B,B\cup A'|A]$ ifølge 5). Da I er semigrafoid viser det, at $I[B,B|A\cup A']$ men det er det samme som at $A' \ll_I B$ idet $A \subseteq A'$.

6):Antag $A \ll_I B \;\&\; I[X,A|Y]$. Ifølge 4) gælder da også $A\cup Y \ll_I B$. Det viser ifølge 5) at $I[X,B|A\cup Y]$. Da I er semigrafoid viser det at $I[X,A\cup B|Y]$ og dermed $I[X,B|Y]$.

2): Antag $A \ll_I B \;\&\; B \ll_I C$. Da gælder $I[B,B|A]$ og $B \ll_I C$, hvilket ved anvendelse af 6) 2 gange viser at $I[C,C|A]$.

3): Da I er semigrafoid gælder

$$A \ll_I B\cup C \Rightarrow I[B\cup C,B|A] \Rightarrow I[B,B|A] \Rightarrow A \ll_I B \tag{102}$$

Tilsvarende vises $A \ll_I B\cup C \Rightarrow A \ll_I C$. Antag $A \ll_I B$ og $A \ll_I C$. Da gælder $I[C,B|A]$ ifølge 5), og $I[B,B|C\cup A]$ ifølge 4). Envidere gælder $I[B,C|B\cup A]$ ifølge 4) og 5), og endelig gælder $I[C,C|B\cup A]$ ifølge 4). Tilsammen giver det $I[B\cup C,B\cup C|A]$, idet I er semigrafoid.

7) At $I[A,B|C] \Leftrightarrow I[Det(A),Det(B)|C]$ er en umidlbar konsekvens af 6), så vi kan antage at $A = Det(A)$ og $B = Det(B)$. Da gælder

$$\begin{gathered} I[A,B|C] \;\&\; I[A,Det(C)\backslash C|C\cup B] \Leftrightarrow \\ I[A,B\cup Det(C)\backslash C|C] \Leftrightarrow \\ I[A,B|Det(C)] \;\&\; I[A,Det(C)\backslash C|C] \end{gathered} \tag{103}$$

Q.E.D.

BEMÆRK at punkterne 1) og 5) *ikke* gælder for alle semigrafoide relationer. Derfor udgør (92) og (93) ikke et aksiomsystem for uafhængighedsrelationen.

SÆTNING Antag $I[A,C|B\cup D]$ og $I[A,B|C\cup D]$. Da findes en variabel E, således at E er determineret af $B\cup D$ og af $C\cup D$, og således at $I[A,B\cup C|E\cup D]$.

BEVIS Det kan antages, at $D = \emptyset$. Antag at $I[A,C|B]$ og $I[A,B|C]$. Lad a, b og c være mulige udfald af A, B og C. Da gælder $P(a|c,b) = P(a|b)$ og tilsvarende $P(a|c,b) = P(a|c)$. Det viser, at $P(a|b) = P(a|c)$. Lad da E være den betingede sandsynlighedsfordeling for A givet B eller givet C. Da er E oplagt determineret både af A og af B.

Q.E.D.

SÆTNING* Hvis den simultane sandsynligheds har positiv tæthed så gælder

$$I[A,C|B\cup D] \;\&\; I[A,B|C\cup D] \Rightarrow I[A,B\cup C|D] \tag{104}$$

BEVIS* Da tætheden er positiv er de betingede sandsynligheder givet ved formelen $P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$ for hændelser X og Y. Denne formel benyttes nogle gange idet vi er opmærksomme på at fællesmængde af hændelser svarer til foreningsmængde af mængder af variable.

Q.E.D.

DEFINITION En uafhængighedsrelation, der opfylder (93) for alle mængder A, B, C og D af variable, hvor B og C er disjunkte, siges at opfylde aksiomet om *intersektion*.

Pearl (1988) har en tilsvarende definition, men forlanger, at mængderne A, B og D er disjunkte. Som vi senere skal se opfylder Bayesianske netværk intersektionsaksiomet.

BEMÆRK at intersektionsaksiomet er bevaret under inducering.

SÆTNING Hvis en uafhængighedsrelation opfylder aksiomet om intersektion og ingen variable er fuldstændigt determineret, så er ingen variabel determineret af andre variable.

BEVIS Antag at X er determineret af Y. Da gælder

$$I[X,X|Y] \;\&\; I[X,Y|X], \tag{105}$$

hvilket ifølge interaktionsaksiomet medfører $I[X,X \cup Y]$ og dermed $I[X,X]$.

Q.E.D.

DEFINITION En I-model (V,I) siges at være *deterministisk*, dersom (V,I) er maksimal i kategorisk forstand blandt I-modeller (V,I'), for hvilke $\ll_I$ og $\ll_{I'}$ er identiske.

4.4. Transitivitet

SÆTNING (Yule 1903) Lad A, B og C være mængder af variable og lad d være en logisk variabel. Da gælder

$$I[A,B|C\cup\{d\}] \ \& \ \neg I[A,d|C] \ \& \ \neg I[B,d|C] \Rightarrow \neg I[A,B|C]. \qquad (106)$$

BEVIS* Det kan antages at $C = \emptyset$. Der findes logiske variable a og b determineret af henholdsvis A og B således at

$$I[a,b|d] \ \& \ \neg I[a,d] \ \& \ \neg I[a,b] \qquad (107)$$

Bemærk at det for hændelser E og F gælder, at

$$P(E|F) \neq P(E) \Leftrightarrow P(E|F) \neq P(E|\complement F) , \qquad (108)$$

da $P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|\complement F)P(\complement F)$. Sætningen vises ved følgende udregning

$$P(a|b) - P(a|\complement b) \qquad (109)$$

$$= P(a|d)P(d|b) + P(a|\complement d)P(\complement d|b)$$

$$- P(a|d)P(d|\complement b) - P(a\complement d)P(\complement d|\complement b)$$

$$= P(a|d)(P(d|b) - P(d|\complement b))$$

$$+ P(a|\complement d)(P(\complement d|b) - P(\complement d|\complement b))$$

$$= (P(a|d) - P(a|\complement d))(P(d|b) - P(d|\complement b)) \neq 0$$

Q.E.D.

DEFINITION (Pearl 1988) En uafhængighedsrelation, der opfylder (106) for alle mængder A, B og C af variable og alle variable d, siges at opfylde aksiomet om *svag transitivitet*.

Bayesianske netværk er standardeksempler på svagt transitive I-modeller. Somme tider vil en I-model opfylde det stærkere aksiom om *transitivitet* defineret nedenfor.

DEFINITION (Pearl 1988) En uafhængighedsrelation, der opfylder

$$\neg I[A,d|C] \ \& \ \neg I[B,d|C] \Rightarrow \neg I[A,B|C] \qquad (110)$$

for alle mængder A, B og C af variable og alle variable d, siges at opfylde aksiomet om *transitivitet*.

Markovnetværk er standardeksempler på transitive I-modeller.

BEMÆRK at egenskaberne transitivitet og svag transitivitet er bevaret under inducering, idet billedet af en foreningsmængde er foreningsmængden af billederne.

DEFINITION Lad M være en mængde af variable med en uafhængighedsrelation I. *Moralgrafen* for M er den graf, der fremkommer ved at forbinde 2 variable A og B dersom $\neg I[A,B|M\setminus\{A,B\}]$.

SÆTNING Lad $(\mathcal{M},I)$ være en I-model og antag at I opfylder aksiomet om intersektion. Da findes en største transitiv og kompositiv I-model $(\mathcal{M},I_t)$ mindre end $(\mathcal{M},I)$ i kategorien af I-modeller. Det vil sige, at $id:(\mathcal{M},I_t) \longrightarrow (\mathcal{M},I)$ er en I-afbildning, og hvis $id:(\mathcal{M},I') \longrightarrow (\mathcal{M},I)$ er en I-afbildning og $(\mathcal{M},I')$ er transitiv og opfylder aksiomet om komposition, så er $id:(\mathcal{M},I') \longrightarrow (\mathcal{M},I_t)$ en I-afbildning.

BEVIS Uafhængighedsrelationen I_t defineres som grafisk uafhængighed i moralgrafen for M.

Det skal først vises, at $id:(\mathcal{M},I_t) \longrightarrow (\mathcal{M},I)$ er en I-afbildning. Lad A, B og C være mængder af variable, således at $\neg I(A,B|C)$. Der findes da en maksimal delmængde D, så $C \subseteq D$ og $\neg I[A,B|D]$. Lad d være en variabel i $\complement D$. Da er $I[A,B|D\cup\{d\}]$, hvilket via intersektion viser, at $\neg I[A,d|B\cup D]$ og

$\neg I[d,B|A\cup D]$. Således indskydes punkter indtil $D = \complement(A\cup B)$, hvorved en vej er fundet.

Antag $id:(\mathcal{M},I') \longrightarrow (\mathcal{M},I)$ er en I-afbildning og $(\mathcal{M},I')$ er transitiv og opfylder aksiomet om intersektion. Det skal vises, at hvis $\neg I_t[A,B|C]$, så gælder også $\neg I'[A,B|C]$. Antag $\neg I_t[A,B|C]$. Da findes $x_1, x_2, \ldots x_n$, så $x_1 \in A$ og $x_n \in B$ og $x_i \notin C$ og

$$\neg I[x_i,x_{i+1}|\complement\{x_i,x_{i+1}\}]. \tag{111}$$

Derfor gælder også

$$\neg I'[x_i,x_{i+1}|\complement\{x_i,x_{i+1}\}]. \tag{112}$$

Det viser på grund af transitivitet og komposition, at $\neg I[x_i,x_{i+1}|C]$ thi eller fandtes en største mængde C' som opfylder $C \subseteq C' \subset \complement\{x_i,x_{i+1}\}$ og $I[x_i,x_{i+1}|C']$. For $x \in C'\setminus\complement\{x_i,x_{i+1}\}$ ville der gælde $\neg I[x_i,x_{i+1}|C'\cup\{x\}]$ og dermed

$$\neg I[x_i,x|C'] \ \& \ \neg I[x,x_{i+1}|C'] \tag{113}$$

hvilket på grund af transitivitet viser $\neg I[x_i,x_{i+1}|C']$ i modstrid med forudsætningerne. Gentagen anvendelse af transitivitet på $\neg I[x_i,x_{i+1}|C]$ giver $\neg I[x_1,x_n|C]$ og dermed $\neg I[A,B|C]$ som ønsket.

Q.E.D.

BEMÆRK at konstruktionen <u>ikke</u> er funktoriel. Thi lad A og B være uafhængige variable, og lad C være en variable, der er en funktion af dem begge. Da er $id:(\{A,B\},I) \longrightarrow (\{A,B,C\},I)$ en I-afbildning, hvorimod $id:(\{A,B\},I_t) \longrightarrow (\{A,B,C\},I_t)$ ikke er det.

Den i sætningen definerede uafhængighedsrelation I_t vil vi kalde *den transitive udvidelse af* I. Helt tilsvarende kan man ofte definere en svagt *transitive udvidelse* af en uafhængighedsrelation. Det er ikke lykkedes forfatteren at afklare, hvornår det er muligt at lave en svagt transitiv udvidelse.

4.5. Harmoniske relationer og lokalitet

En uafhængighedsrelation er en relation med 3 argumenter, der hver gennemløber alle delmængder af variable. Hvis uafhængighedsrelationen kan beskrives ved en relation i 2 variable, er vi således nået betydeligt videre.

DEFINITION Lad R være en relation mellem de variable i en I-model. Sæt $a_R(X) = \{y \mid \exists x \in X : yRx\}$. Da siges R at *harmonere* med uafhængighedsrelationen I, dersom

i) $\neg I[A,B|C]$ & $I[A,B|C\cup D] \Rightarrow D \cap a_R(A\cup B\cup C) \neq \emptyset$.

ii) $I[A,B|C]$ & $\neg I[A,B|C\cup D] \Rightarrow D \setminus a_R(A\cup B\cup C) \neq \emptyset$.

iii) $aRb \Rightarrow \neg I(a,b|C)$ for alle C således, at $\neg aRc$ for $c \in C$..

En harmonisk relationen R siges at være *reversibel* dersom R' defineret ved $aR'b \Leftrightarrow bRa$ også er harmonisk. En I-model siges at være *harmonisk*, dersom der findes en relation, der harmonerer med I.

EKSEMPEL I et Bayesiansk netværk er relationen, at der findes en orienteret vej fra A til B, en harmonisk relation.

I stedet for ordet harmonisk burde man måske bruge ordet kausal, for som det senere skal vise sig er der et omfattende betydningssammenfald mellem begreberne harmoni og kausalitet. Ordet harmoni er her brugt for at holde begreberne ude fra hinanden. I det følgende er harmoni således defineret via I-modeller, mens ordet kausalitet er defineret via dets brug i sproget.

BEMÆRK at betingelsen ii) kunne erstattes af

ii)' $I[A,B|C]$ & $\neg I[A,B|C\cup\{d\}] \Rightarrow d \notin a_R(A\cup B\cup C)$

At ii) $\Rightarrow$ ii)' er oplagt. Antag ii)' er opfyldt og at

$$I[A,B|C] \ \& \ \neg I[A,B|C\cup D], \tag{114}$$

hvor $D = \{d_1, d_2, \ldots d_m\}$. Da findes et n så

$$I[A,B|C\cup D_{n-1}] \ \& \ \neg I[A,B|C\cup D_n], \tag{115}$$

hvor $D_n = \{d_1, d_2, \ldots d_n\}$. Det viser $d_n \notin a_R(A\cup B\cup C\cup D_{n-1})$ og dermed $d_n \in D\backslash a_R(A\cup B\cup C)$, som derfor ikke kan være tom.

SÆTNING Antag at uafhængighedsrelationen I opfylder aksiomet om svag transitivitet, og at relationen R harmonerer med I. Da kan R udvides transitivt under bevarelse af harmoni.

BEVIS Antag $\alpha R\beta$ og $\beta R\gamma$. Sæt $R' = R\cup\{(\alpha,\gamma)\}$.
Det skal vises at i), ii)' og iii) holder for R'.
i) Antag $\neg I[A,B|C]$ & $I[A,B|C\cup D]$. Da gælder

$$D\cap a_R^!(A\cup B\cup C) \subseteq D\cap a_{R'}^!(A\cup B\cup C) \neq \emptyset \tag{116}$$

ii)' Antag $I[A,B|C]$ & $\neg I[A,B|C\cup\{d\}]$.
Hvis $\alpha \notin A\cup B\cup C$ er $a_R(A\cup B\cup C) = a_{R'}(A\cup B\cup C)$, hvilket viser at $d \notin a_{R'}(A\cup B\cup C)$.
Antag at $\alpha \in A\cup B\cup C$.
Da er $a_{R'}(A\cup B\cup C) = a_R(A\cup B\cup C)\cup\{\gamma\}$, så det skal vises, at $d \neq \gamma$.
Antag det modsatte.
Da gælder $I[A,B|C\cup\{\beta\}]$, da $\beta \in a_R(A\cup B\cup C)$. Da der både gælder $I[A,B|C]$ og $I[A,B|C\cup\{\beta\}]$, må der enten gælde $I[A,\beta|C]$ eller $I[\beta,B|C]$.
Antag $I[A,\beta|C]$. Da gælder $I[A,B\cup\{\beta\}|C]$. Det viser $I[A,B\cup\{\beta\}|C\cup\{\gamma\}]$ og dermed $I[A,B|C\cup\{\gamma\}]$ i modstrid med at $\gamma = d$.
iii) Det skal vises, at $\neg I(\alpha,\gamma|C)$ for alle C således, at $\neg\alpha R'c$ for $c \in C$. Antag $I(\alpha,\gamma|C)$. Ifølge forudsætningerne gælder $\neg I(\alpha,\beta|C)$ og $\neg I(\beta,\gamma|C)$, hvilket på grund af transitivitet viser, at

$$\neg I(\alpha,\gamma|C) \vee \neg I(\alpha,\gamma|\{\beta\}\cup C), \tag{117}$$

og dermed

$$I(\alpha,\gamma|C) \;\&\; \neg I(\alpha,\gamma|\{\beta\}\cup C). \tag{118}$$

Da R er en harmonisk relation, viser det, at $\neg(\beta R\gamma)$ i modstrid med forudsætningerne.

Q.E.D.

DEFINITION For en harmonisk ordning vil vi kalde $a(X)$ for mængden af *aner* til X. Envidere definerer $e_R(X) = \{y \mid \exists x \in X: xRy\}$ mængden af *efterkommere* til X. Vi vil sige at x og y er *ækvivariante* og skrive $x \approx y$, hvis xRy og yRx.

SÆTNING Lad I være en svagt transitiv uafhængighedsrelation i en harmonisk I-model. Da definerer

$$a \le_I b \Leftrightarrow \neg I[a,b] \;\&\; \forall A,B,C: b \in A \cup B \cup C \;\&\; I[A,B|C] \Rightarrow I[A,B|C \cup \{a\}]$$

en præordning, der harmonerer med I

BEVIS Punkt ii)' i definitionen af harmoni er oplagt opfyldt. Da $\le_I$ kan udvides transitivt under bevarelse af harmoni må $\le_I$ være sin egen udvidelse og dermed en præordning.

Da I-modellen er harmonisk, findes en harmonisk relation R. For at bevise i) antages det at R harmonerer med I og

$$\neg I[A,B|C] \;\&\; I[A,B|C \cup D]. \tag{119}$$

Derfor findes $d \in D$ og $x \in A \cup B \cup C$, så dRx. Det viser, at

$$I[A',B'|C'] \Rightarrow I[A',B'|C' \cup \{d\}], \tag{120}$$

hvis $x \in A' \cup B' \cup C'$. Det viser $d \le_I x$, og dermed $d \in a(A \cup B \cup C)$.

For at bevise iii) antager vi, at $a \le_I b$ og at $I[a,b|D]$. Sammenholdt med $\neg I[a,b]$ viser det, at D indeholder et element i $e_R(a,b)$. Lad d være et sådant og antag aRd. Da gælder

$$d \in A \cup B \cup C \;\&\; I[A,B|C] \Rightarrow I[A,B|C \cup \{a\}] \tag{121}$$

idet R er harmonisk. Det viser at $a \le_I d$ og dermed $d \in e_{\le_I}(a,b)$.

Q.E.D.

SÆTNING Hvis a og b er variable, og $\le$ er en harmonisk ordning, så gælder $a \ll_I b \Rightarrow a \le b \vee I[b,b]$.

BEVIS Oplagt.

Q.E.D.

BEMÆRK at den harmoniske relation kan være meget følsom over for valget af variable.

EKSEMPEL I nedenstående eksempel bliver relationen mellem B og C vendt ved at skifte mellem de ydre variable A og D.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd} \tag{122}$$

P(A = 0) = P(B = 0) = 1/2

B \ A	0	1
0	1/3	1/2
1	1/2	2/3

P(C = 0|·) (123)

Sæt $D = A \oplus B \oplus C$. Da gælder

$$\begin{tikzcd} & B & \\ C \arrow[ur] & & D \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{124}$$

P(C = 0) = P(D = 0) = 1/2

D \ C	0	1
0	1/3	1/2
1	1/2	2/3

$P(B = 0|\cdot)$ (125)

SÆTNING Lad (M,I) og (M',I') være I-modeller med svagt transitive uafhængighedsrelationer. Hvis $f:M \longrightarrow M'$ er en perfekt I-afbildning, så gælder

$$f(a) \leq_{I'} f(b) \Rightarrow a \leq_{I} b \,. \qquad (126)$$

BEVIS Oplagt.

Q.E.D.

DEFINITION Lad $(M,\leq)$ være en præordnet mængde. Ved en *orienteret vej* vil vi forstå en maksimal totalt ordnet delmængde af M. Ved en *orienteret vej* fra a til b vil vi forstå en orienteret vej i mængden $\{x \in M | a \leq x \leq b\}$. Ved et *tværsnit* i $(M,\leq)$ vil vi forstå en minimal delmængde af M, der skærer enhver orienteret vej.

BEMÆRK at orienterede veje og tværsnit i relativitetsteori svarer til *verdenslinier* og *samtidighedsflader*.

DEFINITION En harmonisk I-model siges at være *temporlt lokal*, hvis det for alle variable A og B med $A \leq B$ gælder at $I[A,B|T]$ for alle tværsnit T i $e(A) \cap a(B)$. En I-model med en harmonisk ordning $\leq$ siges at være *spartielt lokal* dersom

$$I[A,B|a(A) \cap a(B)] \qquad (127)$$

En I-model siges at være *lokal*, dersom den både er spartielt og temporalt lokal.

EKSEMPEL En Markovkæde er lokal. Her er $\leq$ en total ordning, så kravet om spartiel lokalitet er trivielt opfyldt. Temporal lokalitet er netop det, der udgør Markovegenskaben.

DEFINITION En I-model (V,I) siges at være I-*sammenhængende*, dersom V ikke kan klassedeles i $D_1, D_2 \subseteq V$, så $I[D_1,D_2]$.

SÆTNING Hvis $\leq$ er en temporalt lokal, harmonisk præordning og uafhængighedsrelationen opfylder aksiomet om intersektion, og er I-sammenhængende og indeholder mere end 2 variable, så er $\leq$ en ordning (ikke blot en præordning).

BEVIS Antag $A \approx B$. Da er A et tværsnit i $e(B) \cap a(C)$ for alle mængder af variable C. Det viser $I[A,C|B]$. Tilsvarende vises $I[B,C|A]$. Heraf ses $I[A \cup B,C]$ i modstrid med at det skulle være en I-sammenhængende I-model. Q.E.D.

SÆTNING Hvis en harmonisk uafhængighedsrelation opfylder aksiomet om svag transitivitet og er temporalt lokal, så er den harmoniske præordning entydigt bestemt mellem alle ikke-initielle variable.

BEVIS Antag at $\leq$ er en harmonisk ordning. Da gælder automatisk

$$a \leq b \Rightarrow a \leq_I b \tag{128}$$

så det er nok at vise implikationen den anden vej. Antag derfor $a \leq_I b$ og at a ikke er initial. Da findes en variabel $c < a$ og der gælder $I[c,b|A]$ hvor A er et tværsnit i $a(b) \cap e(c)$, som indeholder a. Endvidere gælder der $\neg I[c,b|A \setminus \{a\}]$ på grund af transitivitet, hvilket viser at $a \in a_{\leq}(\{b,c\} \cup A \setminus \{a\})$ og dermed $a \in a_{\leq}(b)$, idet $a_{\leq}(\{c\} \cup A \setminus \{a\}) \subseteq a_{\leq_I}(\{c\} \cup A \setminus \{a\})$. Q.E.D.

SÆTNING Hvis $\le$ er en spartielt lokal ordning, så er $\le_I$ en spartielt lokal ordning.

BEVIS Det skal vises, at $I[A,B|a_{\le_I}(A)\cap a_{\le_I}(B)]$ men

$$a_{\le}(A)\cap a_{\le}(B) \subseteq a_{\le_I}(A)\cap a_{\le_I}(B) \tag{129}$$

så sætningen gælder, da $\le_I$ er harmonisk. Q.E.D.

Ifølge sætningen giver det mening at sige, at en harmonisk I-model er *spartielt lokal* uden at referere til en speciel harmonisk relation.

BEMÆRK at der ikke gælder en tilsvarende sætning om temporal lokalitet, thi lad A, B og C være variable, med det minimale antal uafhængighedsrelationer. Da udgør $A \le B$ og $A \le C$ en harmonisk ordning, som er temporalt lokal. Forsynet med $\le_I$ er alle variable ækvivariante, så A er et tværsnit i $e(B)\cap a(C)$, men $\neg I[B,C|A]$.

BEMÆRK at det, at $\le$ er lokal, ikke medfører at den inducerede uafhængighedsrelation $\le_f$ er lokal (hverken spartielt eller temporalt) for alle I-afbildninger f.

EKSEMPLER Lad A, B, C og G være uafhængige og normalfordelte, og sæt $D = A + B$, $E = B + C$ og $F = D + E + G$. Da er $\{A,B,C,D,E,F\}$ forsynet med stokastisk uafhængighed en lokal I-model beskrevet ved følgende Bayesianske netværk

$$
\begin{tikzcd}
 & & F & & \\
 & D \arrow[ur] & & E \arrow[ul] & \\
A \arrow[ur] & & B \arrow[ul] \arrow[ur] & & C \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{130}
$$

Derimod er {B,D,F} ikke temporalt lokal. Det illustreres ved følgende Bayesianske netværk

$$
\begin{tikzcd}
 & F \\
D \arrow[ur] & \\
 & B \arrow[ul] \arrow[uu]
\end{tikzcd}
\tag{131}
$$

Tilsvarende er {A,C,D,E} forsynet med stokastisk uafhængighed ikke spartielt lokal og skal beskrives med en *hybridgraf*

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, leftrightarrow] & E & \\
A \arrow[ur] & & & C \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{132}
$$

Vi skal senere indføre hybridgrafer systematisk.

SÆTNING Hvis en uafhængighedsrelation I på en endelig mængde af variable er harmonisk, lokal og svagt transitiv, så opfylder den aksiomet om komposition.

BEVIS Antag at $I[A,B|D]$ & $I[A,C|D]$.

Antag først, at $D \subseteq a(A\cup B\cup C)$. På grund af spartiel lokalitet gælder

$$I[A,B\cup C|a(A)\cap a(B\cup C)] \tag{133}$$

og dermed

$$I[A,B\cup C|a(A)\cap a(B\cup C) \cup D]. \tag{134}$$

Nu findes en minimal mængde $X \subseteq a(A)\cap a(B\cup C)$, så

$$I[A,B\cup C|X\cup D]. \tag{135}$$

Det skal vises at $X = \emptyset$. Antag det modsatte. Da findes $x \in X$. Sæt $X' = X\setminus\{x\}$. Da gælder

$$I[A,B|X'\cup D] \ \&\ I[A,C|X'\cup D], \tag{136}$$

idet $X' \subseteq a(A)$. Transitivitet giver

$$I[A,x|X'\cup D] \vee (I[x,B|X'\cup D] \ \&\ I[x,C|X'\cup D]). \tag{137}$$

Hvis det sidste er tilfældet, må $X'\cup D$ være et tværsnit i $e(X')\cap a(B)$ og i $e(X')\cap a(C)$, og dermed i $e(X')\cap a(B\cup C)$, så (137) er ensbetydende med

$$I[A,x|X'\cup D] \vee I[x,B\cup C|X'\cup D]. \tag{138}$$

Sammenholdt med $I[A,B\cup C|X\cup D]$ giver det

$$I[A,B\cup C|X'\cup D], \tag{139}$$

idet uafhængighedsrelationen er semigrafoid, men dette er i modstrid med at X er minimal. Det viser at $X = \emptyset$.

Det generelle bevis går ved induktion efter $\#(D)$.

$\#(D) = 0$: Da er $D = \emptyset \subseteq a(A\cup B\cup C)$ og vi har vist det ovenfor.

Antag sætningen er sand for $\#(D) \leq n$. Sætningen skal nu vises for $\#(D) = n + 1$:

Hvis $D \subseteq a(A\cup B\cup C)$, så har vi vist det ovenfor.

Antag $d \in D\backslash a(A \cup B \cup C)$. Sæt $D' = D\backslash\{d\}$. Da gælder

$$I[A,B|D'] \ \& \ I[A,C|D'], \tag{140}$$

hvilket ifølge induktionsantagelsen medfører

$$I[A,B \cup C|D']. \tag{141}$$

Der er 2 tilfælde

<u>$I[A,d|D']$</u> hvilket ifølge induktionsantagelsen medfører

$$I[A,B \cup C \cup \{d\}|D'] \tag{142}$$

og dermed

$$I[A,B \cup C|D] \tag{143}$$

<u>$\neg I[A,d|D']$</u>. Da gælder på grund af transitivitet

$$I[d,B|D'] \ \& \ I[d,C|D']. \tag{144}$$

Induktionsantagelsen giver da

$$I[d,B \cup C|D']. \tag{145}$$

Induktionsantagelsen anvendt endnu en gang giver

$$I[A \cup \{d\},B \cup C|D'] \tag{146}$$

og dermed

$$I[A,B \cup C|D]. \tag{147}$$

Q.E.D.

SÆTNING Lad (V,I) være en harmonisk og transitiv I-model med partiel ordning $\leq$. Lad f betegne kvotientafbildningen $V \longrightarrow V/\approx$. Da er (V,I_f) harmonisk med ordning $\leq$ og f er en I-afbildning.

BEVIS Der er 3 punkter under beviset for harmoni

i) Antag $\neg I_f[A,B|C]$ & $I_f[A,B|C\cup D]$ for delmængder A, B ,C og D af $V/\approx$. Da gælder

$$\neg I[f^{-1}(A),f^{-1}(B)|f^{-1}(C)] \ \& \ I[f^{-1}(A),f^{-1}(B)|f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)] \tag{148}$$

hvilket viser at

$$f^{-1}(D) \cap a(f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\cup f^{-1}(C)) \neq \emptyset \ , \tag{149}$$

hvilket er det samme som at

$$f^{-1}(D \cap a(A\cup B\cup C)) \neq \emptyset \tag{150}$$

og dermed $D \cap a(A\cup B\cup C) \neq \emptyset$.

ii) Antag at $I_f[A,B|C]$ & $\neg I_f[A,B|C\cup D]$ for delmængder A, B ,C og D af $V/\approx$. Da gælder

$$I[f^{-1}(A),f^{-1}(B)|f^{-1}(C)] \ \& \ \neg I[f^{-1}(A),f^{-1}(B)|f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)] \tag{151}$$

hvilket viser

$$f^{-1}(D) \setminus a(f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\cup f^{-1}(C)) \neq \emptyset \ , \tag{152}$$

hvilket er det samme som at

$$f^{-1}(D \setminus a(A\cup B\cup C)) \neq \emptyset \tag{153}$$

og dermed $D \setminus a(A\cup B\cup C) \neq \emptyset$.

iii) Antag $a \le b$ og C er en mængde så $e(a)\cap C = \emptyset$ i $V/\approx$. Da findes a' og b' i V, så $f(a') = a$ og $f(b') = b$. Der gælder nu $\neg I[a',b'|f^{-1}(C)]$, og dermed $\neg I[f^{-1}(a),f^{-1}(b)|f^{-1}(C)]$ hvilket er det samme som $\neg I_f[a,b|C]$.

For at vise at f er en I-afbildning vil vi antage at $I[A,B|C]$. Da gælder $I[f^{-1}\circ f(A),B|C]$ på grund af transitivitet. Tilsvarende gælder $I[f^{-1}\circ f(A),f^{-1}\circ f(B)|C]$. Endeligt gælder $I[f^{-1}\circ f(A),f^{-1}\circ f(B)|f^{-1}\circ f(C)]$, idet $f^{-1}\circ f(C)\setminus C \subseteq a(f^{-1}\circ f(A)\cup f^{-1}\circ f(B)\cup C)$. Men det er det samme som at $I_f[f(A),f(B)|f(C)]$, hvilket viser at f er en I-afbildning.

Q.E.D.

4.6. Grafiske modeller

I dette afsnit vil vi give nogle pæne grafiske præsentationer af I-modeller.

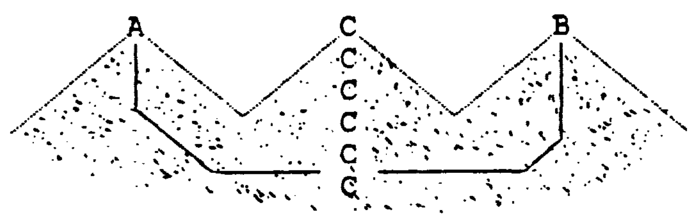
SÆTNING Lad I være en harmonisk uafhængighedsrelation, der opfylder aksiomerne om svag transitivitet, intersektion og komposition. Da er ordningen $\leq$ reversibel, netop hvis I kan beskrives med et Markovnetværk.

BEVIS Markovnetværk er oplagt reversible. Hvis $\leq$ er reversibel, så medfører $A \leq B$ at $B \leq A$ og dermed $A \approx_I B$, hvilket medfører transitivitet. Herved bliver I sin egen transitive udvidelse og derved ækvivalent med sin moralgraf. Q.E.D.

SÆTNING Lad I være en svagt transitiv uafhængighedsrelation, og lad $\leq$ være en præordning, der harmonerer med I. Da er følgende 2 betingelser ækvivalente:

i) $I(A,B|C)$ er opfyldt, netop hvis C separerer A og B i moralgrafen for $a(A \cup B \cup C)$.

ii) I opfylder aksiomerne om komposition og intersektion.



(154)

░ = $a(A \cup B \cup C)$

— = forsøg på vej i moralgrafen

BEVIS

i) $\Rightarrow$ ii): Oplagt.

ii) $\Rightarrow$ i): Det skal vises, at $\neg I[A,B|C] \Leftrightarrow$ A og B er forbundet i $a(A \cup B \cup C)$ med en vej, der ikke skærer C.

$\Rightarrow$: På grund af kompositions aksiomet kan det antages at A og B indeholder netop en variabel. Der findes en maksimal delmængde

D, så $C \subseteq D \subseteq a(A \cup B \cup C)$ og $\neg I[A,B|D]$. Lad d være en variabel i $a(A \cup B \cup D) \setminus A \cup B \cup C$. Da er $I[A,B|D \cup \{d\}]$, hvilket via intersektion viser at $\neg I[A,d|B \cup D]$ og $\neg I[d,B|A \cup D]$. Således indskydes punkter indtil $a(A \cup B \cup D) \setminus A \cup B \cup C = \emptyset$, hvorved en vej er fundet.

$\Leftarrow$: Antag at der findes en vej mellem en variabel i A og en variabel i B, som ikke skærer C. Da findes en korteste sådan vej $(x_1,x_2 \ldots x_n)$, hvor $x_1 \in A$ og $x_n \in B$. Lad E være mængden af variable, der ligger i $a(A \cup B \cup C)$, men ikke på vejen $(x_1,x_2 \ldots x_n)$. Da gælder

$$\neg I[x_1,x_2|E \cup (x_3,x_4,\ldots x_n)] \quad \& \quad \neg I[x_2,x_3|E \cup (x_1,x_4,\ldots x_n)] \tag{155}$$

og

$$I[x_1,x_3|E \cup (x_2,x_4,\ldots x_n)], \tag{156}$$

da vejen er minimal. Svag transitivitet giver da $\neg I[x_1,x_3|E \cup (x_4,x_5,\ldots x_n)]$. Således vises suksesivt, at $\neg I[x_1,x_i|E \cup (x_{i+1},x_{i+2},\ldots x_n)]$, og der gælder derfor $\neg I[x_1,x_n|E]$. Da $E \subseteq a(A \cup B \cup C)$, gælder også $\neg I[x_1,x_n|C]$. Q.E.D.

DEFINITION* En orienteret graf er en graf, hvor hver kant er orienteret. Hvis A og B er 2 hjørner defineres $A \leq B$, dersom der findes en orienteret vej fra A til B. Hvis $A \leq B$ og $B \leq A$ skriver vi $A \approx B$, og siger at A og B er *ækvariante*. Hvis D er en delmængde af mængden af hjørner vil f(D) (*forældrene* til D) betegne mængden af hjørner H, så der findes en kant fra H til et hjørne i D. Hvis D er en delmængde af mængden af hjørner vil a(D) (*aner* til D) betegne mængden af hjørner H, så der findes en orienteret vej fra H til et hjørne i D. Tilsvarende defineres mængden af *børn* b(D) og mængden af *efterkommere* e(D). En variabel v er *initial* dersom $f(v) = \emptyset$, og v er *terminal* dersom $b(v) = \emptyset$.

BEMÆRK* at en orienteret graf eventuelt kan indeholde en ikke-triviel orienteret vej fra A til A altså *en cyklisk vej* også kaldet en *cykel*.

DEFINITION* En *acyklisk graf* er en graf, hvor alle cykler er trivielle.

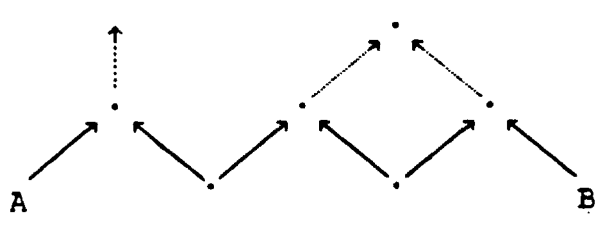
DEFINITION (Pearl 1988) Hvis X, Y og Z er 3 delmængder af en orienteret graf $\mathfrak{G}$, siges Z at *d-separere* X fra Y, dersom der ikke findes en vej fra et hjørne i X til et hjørne i Y, så følgende gælder:

1) Hvis 2 pile på vejen peger på samme variabel, vil den pågældende variabel eller en af dens efterfølgere ligge i Z.
2) Alle andre variable vil ligge uden for Z.

Hvis Z d-separerer X og Y skriver vi $I_{\mathfrak{G}}[X,Y|Z]$.

SÆTNING (Geiger & Pearl 1988). Relationen $I_{\mathfrak{G}}$ er en uafhængighedsrelation.

BEVIS Lad $\mathfrak{G}$ være en orienteret graf. Vi starter med at indføre



(157)

begrebet *en primitiv graf*. En primitiv graf $\mathfrak{G}'$ skal bestå af:

1) en vej v i $\mathfrak{G}$ mellem 2 hjørner, A og B.

Hjørnerne på v deler vi i 2 grupper: dem med og dem uden konvergerende pile.

2) orienterede veje fra variable med konvergerende pile til deres efterkommere.

For hver primitiv delgraf konstruerer vi en uafhængighedsrelation $I_{\mathfrak{G}'}$ via nedenfor definerede sandsynlighedsfordeling. Vejen mellem A og B deles i veje $v_1, v_2, \ldots v_n$ mellem hjørnerne med konvergerende pile. Lad $X_1, X_2, \ldots X_n$ være uafhængige stokastiske variable med værdier i $\{0,1\}$. Et hjørne på v_i forsynes med den stokastiske variabel X_i. Og hjørnet mellem v_i og v_{i+1} forsynes med variablen $X_i \oplus X_{i+1}$ (addition modulo 2). Hjørnerne h i de orienterede veje fra en variable med konvergerende pile forsynes rekursivt med foreningsmængden af variable f(h). Da vil A og B være d-separerede af en mængde C, netop hvis $I_{\mathcal{G}'}[A;B|C]$. Nu gælder

$$\bigwedge_{\mathcal{G}'\in\mathcal{G}^*} I_{\mathcal{G}'}[X;Y|Z] \Leftrightarrow I_{\mathcal{G}}[X;Y|Z] \tag{158}$$

hvor $\mathcal{G}^*$ er mængden af primitive delgrafer af $\mathcal{G}$. Q.E.D.

BEMÆRK at moralgrafen for en orienteret graf fremkommer ved at supplere den underliggende graf med kanter mellem 2 variable A og B netop hvis der findes C, så $A \to C$ og $B \to C$. Envidere opfylder uafhængighedsrelationen $I_{\mathcal{G}}$ aksiomerne om komposition, intersektion og svag transitivitet. Envidere er identiteten en I-afbildning fra en orienteret graf til en graf, der er fremkommet ved at tilføje orienterede kanter.

SÆTNING Lad $\mathcal{A}$ være en lokal I-model med en svagt transitiv uafhængighedsrelation I, og lad $\le$ være en ordning, der harmonerer med I. Antag at I-modellen opfylder aksiomerne om komposition og intersektion. Da findes en orienteret acyklisk graf $\mathcal{G}$, så $\mathcal{A}$ er ækvivalent med $(\mathcal{G}, I_{\mathcal{G}})$ i uafhængighedskategorien, og så orienteringerne stemmer overens.

BEVIS Grafen defineres ved, at de variable x og y forbindes netop hvis $\neg I[x,y|C]$ for alle mængder C, der ikke indeholder x eller y. Da gælder $x \le y$ eller $x \le y$, thi ellers indeolder $a(x)\cap a(y)$, hverken x eller y, og der gælder $I[x,y|a(x)\cap a(y)]$ da $\mathcal{A}$ er lokal. Kanten mellem x og y orienteres, så orienteringen stemmer overens med orienteringen i $\mathcal{A}$. Hvis $x \le y$, så findes en orienteret vej fra x til y i $\mathcal{A}$. Det skal vises, at hvis denne vej kun indeholder x og y, så er x og y forbundet i grafen. Antag derfor, at vejen kun indeholder x og y, og at C er en maksimal mængde, der ikke indeholder x og y og så $\neg I[x,y|C]$ og så $z \in C \Rightarrow e(z) \subseteq C$ for alle z. Antag $C \neq \complement\{x,y\}$. Da findes z så

$$\neg I[x,y|C] \ \& \ I[x,y|\{z\} \cup C] \tag{159}$$

hvilket viser at $z \in a(\{x,y\} \cup C)$, hvilket viser at $z \in a(\{x,y\})$. Heraf ses $z \leq y$. Vi mangler derfor at vise, at $x \leq z$, for at få en modstrid med, at vejen er en maksimal orienteret mængde, men det er en umiddelbar konsekvens af iii) i definitionen af harmoni. Da orienteringerne stemmer over ens er det nok at vise, at I og $gI_{\mathfrak{C}}$ giver samme moralgrafer.

Antag $\neg I_{\mathfrak{C}}[x,y|D \setminus \{x,y\}]$. Da gælder $x \longrightarrow y$ eller $y \longrightarrow x$, eller der findes z så $x \longrightarrow z$ og $y \longrightarrow z$. Antag det første eller det andet. Da gælder $\neg I[x,y|C]$ for alle mængder C, der ikke indeholder x og y. Specielt gælder $\neg I[x,y|D \setminus \{x,y\}]$. Antag at $x \longrightarrow z$ og $y \longrightarrow z$. Da gælder $I[x,y|a(x) \cap a(y)]$ og dermed også

$$I[x,y|a(x) \cup a(y) \setminus \{x,y\}]. \tag{160}$$

Envidere gælder

$$I[x,z|a(x) \cup a(y) \setminus \{x,y\}] \ \& \ I[z,y|a(x) \cup a(y) \setminus \{x,y\}]. \tag{161}$$

På grund af svag transitivitet gælder derfor

$$\neg I[x,y|\{z\} \cup a(x) \cup a(y) \setminus \{x,y\}]. \tag{162}$$

Det viser $\neg I[x,y|D \setminus \{x,y\}]$, idet $\leq$ er harmonisk.

Antag at $\neg I[x,y|D \setminus \{x,y\}]$. Enten gælder $\neg I[x,y|C \setminus \{x,y\}]$ for alle C, og $x — y$, eller der findes C, så $I[x,y|C \setminus \{x,y\}]$. Derfor findes en maksimal delmængde C, så $I[x,y|C \setminus \{x,y\}]$. Det kan antages at $C = \emptyset$ og dermed $a(x) = \{x\}$. Da gælder $\neg I[x,y|\{z\}]$ og dermed $z \in e(x) \cap e(y)$. Derfor findes et minimalt sådant i ordningen $\leq$. Vi skal vise at $x \longrightarrow z$. Antag det modsatte. Da findes en mængde F, der hverken indeholder x eller z og så $I[x,z|F]$. Det viser at $F \cap (a(x) \cup a(z)) \neq \emptyset$ i modstrid med at $a(x) = \{x\}$ og at z var minimal.

Q.E.D.

DEFINITION Et *Bayesiansk netværk* er er en tripel $(S, V, \mathcal{G})$, hvor S er et sandsynlighedsfelt, V en mængde af variable på S, og $\mathcal{G}$ er en orienteret graf med tilhørende uafhængighedsrelation, således at kanterne i grafen via en I-afbildning $i: \mathcal{G} \longrightarrow V$ er indlejret i V. Envidere skal $\mathcal{G}$ være en maximal graf i kategorisk forstand, hvilket vil sige, at hvis følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i'"'] & V \\ \mathcal{G}' \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{163}$$

så er i' en ækvivalens.

BEMÆRK at $\mathcal{G}$ er maksimal i kategorisk forstand netop hvis i ikke er en I-afbildning, hvis man fjerner en pil fra $\mathcal{G}$. Hos Pearl omtales Bayesianske netværk derfor som minimale I-modeller.

SÆTNING* Der findes altid et Bayesiansk netværk for en endelig mængde af variable $A \in V$.

BEVIS* Find en total ordning $\ll$ af V, og dan en graf, hvor $A \longrightarrow B$ netop hvis $A \ll B$. Dette gør identiteten til en I-afbildning. Der findes da kun endelig mange grafer $\mathcal{G}'$ så ( ) kommuterer, og derfor findes også en maksimal sådan. Q.E.D.

BEMÆRK at det ovenfor konstruerede Bayesianske netværk i almindelighed ikke gør identiteten til en perfekt I-afbilning.

HOVEDSÆTNING Lad V være en endelig mængde af variable med en ordning $\leq$. Lad $\mathcal{T}$ være mængden af uafhængighedsrelationer på V, der opfylder aksiomerne om intersektion, transitivitet og harmonerer med $\leq$. Da er følgende 3 betingelser ækvivalente for en uafhængighedsrelation I'.

1) $I' = I_{\leq}$, hvor $I_{\leq}$ er givet ved det Bayesianske netværk, hvor der går en orienteret kant fra v_1 til v_2 netop hvis $v_1 \leq v_2$ og der ikke findes en tredie variabel mellem v_1 og v_2.

2) I' er lokal med ordning $\leq$.

3) $I' = \varinjlim_{I \in \mathcal{I}} (V, I)$.

BEVIS

1) $\Rightarrow$ 2) Dette ses umidlbart ved at checke.

2) $\Rightarrow$ 1) Da I' er spartielt lokal, er I' givet ved et bayesiansk netværk med ordning $\leq$. For at det kan være spartielt lokalt kan det ikke indeholde en orienteret kant fra v_1 til v_2 hvis der er mellemliggende variable.

3) $\Rightarrow$ 2) $I_{\leq} \in \mathcal{I}$, så $id:(V, I_{\leq}) \longrightarrow (V, I')$ er en I-afbildning. $I_{\leq}$ er lokal, hvilket ses umidlbart ved at checke. Derfor er I' lokal.

1) $\Rightarrow$ 3) Det skal vises at $I[A,B|C] \Rightarrow I_{\leq}[A,B|C]$, hvilket er ækvivalent med $\neg I_{\leq}[A,B|C] \Rightarrow \neg I[A,B|C]$. Kompositionsegenskaben benyttes ikke i beviset for at id er en I-afbildning i sætningen om transitiv udvidelse, så det er nok at vise, at hvis C ikke separerer A og B i $I_{\leq}$-moralgrafen for $a(A \cup B \cup C)$, så separerer C ikke A og B i I-moralgrafen for $a(A \cup B \cup C)$. Sæt $W = a(A \cup B \cup C)$ Det er det samme som at vise, at hvis 2 hjørner x og y er forbundet med en kant i $I_{\leq}$-moralgrafen for W, så er x og y forbundet i I-moralgrafen for W. Der er 2 tilfælde:

<u>Tilfælde 1:</u> $x < y$ og $[x,y] = \{x,y\}$ eller $y < x$ og $[y,x] = \{y,x\}$

Lad os antage at $x < y$. Da gælder $\neg I[x,y|W \setminus e(x)]$ da $\leq$ er harmonisk. Envidere gælder $\neg I[x,y|W \setminus \{x,y\}]$, idet

$$((W \setminus \{x,y\}) \setminus (W \setminus e(x))) \cap a\{x,y\} = (e(x) \cap a\{x,y\}) \setminus \{x,y\} = \emptyset \quad (164)$$

og $\leq$ er harmonisk.

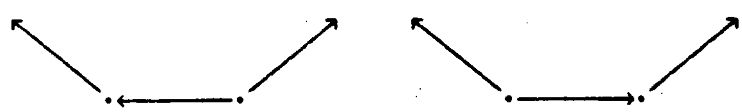
<u>Tilfælde 2:</u> $x < z$ og $[x,z] = \{x,z\}$ og $y < z$ og $[y,z] = \{y,z\}$. Som ovenfor vises $\neg I[x,z|W \setminus \{x,z\}]$ og $\neg I[y,z|W \setminus \{y,z\}]$. Det viser $\neg I[x,z|W \setminus \{x,y,z\}]$ og $\neg I[y,z|W \setminus \{x,y,z\}]$. På grund af svag transitivitet gælder $\neg I[x,y|W \setminus \{x,y,z\}]$ eller $\neg I[x,y|W \setminus \{x,y\}]$.

Det første medfører det sidste på grund af at $z \notin a\{x,y\}$, så $\neg I[x,y|W\setminus\{x,y\}]$ og x er forbundet med y i I-moralgrafen for $W = a(A\cup B\cup C)$.

Q.E.D.

Strukturen af et Bayesiansk netværk er sjældent entydigt bestemt ud fra den simultane fordeling på de variable.

SÆTNING* Hvis der er en pil fra S til T i et Bayesiansk netværk og S er initial og $f(T) = S$, så kan pilen fra S til T vendes, uden at uafhængighedsrelationen ændres.



(165)

BEVIS Oplagt idet mængder er afhængige netop hvis de er forbundet i moralgrafen for anemængden.

Q.E.D.

SÆTNING Lad V være de variable i en I-model, og lad v være et element i V. Da gælder $I[v;V\setminus e(v)|f(v)]$.

BEVIS Lad M_i være en aftagende følge af delmængder af V, så $M_1 = V\setminus e(v)$ og $f(M_i) \subseteq M_{i+1}$. En sådan følge kan konstrueres, så $\bigcap M_i = \emptyset$. Da relationen I er semigrafoid, og $I[v;M_{i+1}|f(v)\cup M_i]$, gælder der

$$I[v;M_{i+1}|f(v)] \Rightarrow I[v;M_i|f(v)]. \tag{166}$$

Da envidere $M_i = \emptyset$ for passende stort $i \in \mathbb{N}$, og $I[v;\emptyset|f(v)]$ må sætningen være sand.

Q.E.D.

DEFINITION* Et Bayesiansk netværk kaldes et *kausalt træ*, dersom den underliggende graf er et træ, og det ikke indeholder 2 pile, der peger på samme variabel.

SÆTNING* Uafhængighedsrelationen i et kausalt træ afhænger kun af den underliggende graf.

BEVIS Det er en umiddelbar konsekvens af at alle variable er ækvivariante og at moralgrafen er lig med den underliggende graf.

Q.E.D.

For at sikre sig at en graf er et Bayesiansk netværk er det kun nødvendigt at undersøge om uafhængighedsrelationen er opfyldt for nogle få mængder, hvilket er indholdet af nedenstående sætning. Dette gør Bayesianske netværk anvendelige til at opbygge en vidensbase i et kunstigt intellegenssystem.

SÆTNING (Verma 1986) Lad I være en semigrafoid relation på hjørnerne H i en orienteret acyklisk graf $\mathscr{C}$. Antag at det for alle hjørner h gælder at $J[h;H\backslash e(h)|f(h)]$. Da gælder

$$I_{\mathscr{C}}[X;Y|Z] \Rightarrow I[X;Y|Z] \qquad (166)$$

Til at præsentere ikke-lokale uafhængighedsrelationer bruges grafer, der indeholder dobbeltrettede pile.

DEFINITION Ved en *hybridgraf* forstås en graf, hvor kanterne er af af en af de 2 typer: orienterede eller dobbeltrettede. Vi skriver $A \longleftrightarrow B$ dersom A og B er forbundet med en dobbeltrettet pil. Forfædre, efterkommere, orienterede veje o.s.v. er defineret via den graf der forekommer ved at fjerne alle dobbeltrettede pile. d-separation er defineret som før.

BEMÆRK at det ikke forlanges at grafen skal give en ordning af de variable. Vi tillader således orienterede løkker.

SÆTNING d-separation giver en uafhængighedsrelation.

BEVIS Beviset for at d-separation i orienterede grafer giver en uafhængighedsrelation, kan bruges uden ændringer. Q.E.D.

SÆTNING Lad $\mathcal{A}$ en I-model med en svagt transitiv uafhængighedsrelation I, og lad $\leq$ være en ordning, der harmonerer med I. Antag at I-modellen opfylder aksiomerne om komposition og intersektion. Da findes en orienteret hybridgraf $\mathcal{G}$ så $\mathcal{A}$ er ækvivalent med $(\mathcal{G}, I_{\mathcal{G}})$ i uafhængighedskategorien og så orien-teringerne stemmer overens.

BEVIS Grafen defineres ved, at de variable x og y forbindes netop hvis $\neg I[x,y|C]$ for alle mængder C, der ikke indeholder x eller y. Hvis $x \leq y$ eller $x \leq y$, orienteres kanten mellem de variable, ellers skal der være en dobbeltrettet pil. Resten af beviset overtages uændret fra beviset for sætningen side 58. Q.E.D.

Man kunne fortsætte, men at give tilsvarende betingelser for eksistens af kædegrafer (se Frydenberg 1990), der er et andet eksempel på grafer, der definerer I-modeller, men de er ikke af direkte interesse for vort emne, og ovenstående sætninger viser, at der skulle være mange andre muligheder end Markovnetværk, Bayesianske netværk, hybridgrafer og kædegrafer, når man ikke forlanger at præordningen er en ordning.

4.7. Skjulte variable

DEFINITION En I-model $\mathcal{A}$ siges at være en *skjultvariabel*-model for en I-model $\mathcal{B}$, dersom $\mathcal{B}$ er perfekt indlejret i $\mathcal{A}$. De variable, der ligger i $\mathcal{A}$ uden at ligge i $\mathcal{B}$ siges at være *skjulte* for $\mathcal{B}$.

Hvis de variable $A \in V$ ikke er uafhængige, findes der en kanonisk skjultvariabel-model til at forklare afhængigheden. Lad C være variablen $(A)_{A\in V}$. Da er $A \in V$ uafhængige givet C. Bemærk at modellen er deterministisk. Hvis man ikke stiller nærmere krav til de skjulte variable, er det derfor trivielt, at man kan beskrive korrelationer på denne måde.

EKSEMPEL Hvis de variable $A \in V$ betegner udseendet af de forskellige dele af et dyr, vil de variable være korrelerede. Konstruktionen ovenfor giver de forskellige dyrearter som skjulte variable.

EKSEMPEL I kvantemekanik vil bølgefunktionen kunne bruges som skjult variabel. Den er ikke-lokal, og man kan heller ikke forvente andet ved en så generel konstruktion. I fysik vil man ofte sætte visse krav til sine variable, for at de kan siges at have en fysisk interpretation.

EKSEMPEL Frekvensielle sandsynligheder kan opfattes som skjulte variable jvnf. De Finetti's sætning.

Ovenstående viser hvordan korrelerede fænomener ofte vil blive præsenteret med I-modeller med pile fra en fælles (måske) skjult variabel. At man ikke kan beskrive korrelationen ved pile mod en fælles (måske skjult) variabel ligger i I'-modellernes logik. I Reichenbach (1956), Salmon (1984) og Horwich (1987) gøres den samme iagttagelse angående tid og kausalitet: 2 korrelerede fænomener kan ofte forklares via en fælles tidligere årsag, men aldrig via en fælles senere effekt. Der tænkes her på at begge fænomener hver for sig og uafhængigt af hinanden skulle være være årsag til effekten, og da fænomenerne er korrelerede vil effekten blive identisk. Det ligger altså implicit i deres opfattelse af begreberne, at effekter er uafhængige givet årsagen. Fænomenet kaldes gaffelasymmetrien, og bliver i Horwich (1987) brugt til at forklare alle ikke-naturvidenskabelige tidsasymmetrier. Derfor må ikke-naturvidenskabelige tidsasymmetrier også kunne forklares ved hjælp af modeller for betinget uafhængighed, hvilket er emnet for kapitel 5. Gaffelasymmetrien selv bliver i Horwich (1987) forklaret udfra ekstreme begyndelsesbetingelser ved universets skabelse. Harmoni er en præcisering af begrebet gaffelasymmetri i termer af I-modeller.

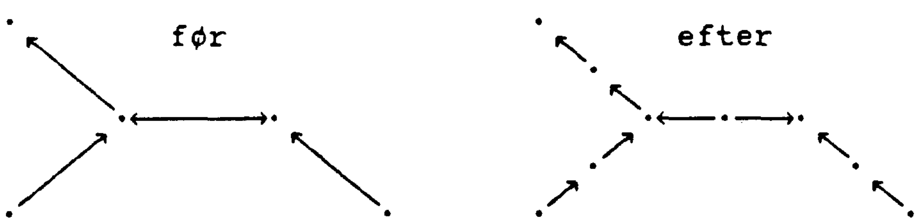
I denne afhandling vil der ikke blive lagt noget ontologisk i begrebet skjult variabel. En variabel er kun skjult i forhold til en given I-model.

4.8. Bell's uligheder

Enkeltrettede pile i I-modeller kan altid forklares ved hjælp af deterministiske modeller og skjulte variable.

SÆTNING Lad $(V,I,\leq)$ være en harmonisk I-model givet ved en hybridgraf uden ækvivariante variable. Da findes en indlejring $i:(V,I,\leq) \longrightarrow (V',I',\leq')$, så $I = I'_i$, hvor $(V',I',\leq')$ er en lokal I-model.

BEVIS Hver kant i hybridgrafen erstattes af 2 kanter og et hjørne



(167)

som illustreret. Herved er lokal I-model med de rette egenskaber konstrueret. Q.E.D.

SÆTNING Lad X være en variabel i en I-model $\mathcal{A}$. Da findes en skjultvariabelmodel $\mathcal{B}$ for $\mathcal{A}$, der adskiller sig fra $\mathcal{A}$ ved at indeholde en variabel Y og en pil udover $\mathcal{A}$, og således at X er determineret af sine forældre i $\mathcal{B}$.

BEVIS Lad Y være ligefordelt på $[0;1]$ og uafhængig af alle variable i $\mathcal{A}$. Antag først at X er en stokastisk variabel. For en given værdi af forældrene til X i $\mathcal{A}$ betragtes den betingede fordelingsfunktion og den dertilhørende fraktilfunktion af X. Hvis Y antager værdien y, skal X være y-fraktilen. Hvis X er vilkårlig, kan σ-algebraen for udfaldsrummet betragtes som direkte limes af endelige σ-algebraer, og σ-algebraen for $[0;1]$ kan skrives som en tilsvarende direkte limes. Herved fås en afbildning af udfaldsrummet for X ind i $[0;1]$ og ovenstående konstruktion kan benyttes.

Q.E.D.

En dobbeltrettet pil i et Bayesiansk diagram kan derimod ikke altid forklares ved hjælp af en skjult årsag.

EKSEMPEL Antag at pilene i nedenstående diagrammer er entydigt bestemte, og at A og C ikke er uafhængige. Sådanne diagrammer kan let konstrueres.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[r] & C & \\ A \arrow[ur] & & & D \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{168}$$

$$\begin{tikzcd} & B' & C' \arrow[l] & \\ A' \arrow[ur] & & & D' \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{169}$$

Dan diagrammet

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[r, leftrightarrow] & G & \\ E \arrow[ur] & & & H \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{170}$$

hvor $E = (A,A')$; $F = (B,B')$; $G = (C,C')$ og $H = (D,D')$. Da findes ingen skjult variable S, så (170) er ækvivalent med

$$\begin{tikzcd} & F & & G & \\ E \arrow[ur] & & S \arrow[ul] \arrow[ur] & & H \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{171}$$

thi ellers kunne man også danne diagrammet

$$\begin{tikzcd} & B & & C & \\ A \arrow[ur] & & S \arrow[ul] \arrow[ur] & & D, \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{172}$$

hvilket er i modstrid med at A og C ikke er uafhængige.

Ovenstående viser, at man i uafhængighedskategorien kan få sine I-modeller induceret af lokale I-modeller, men at disse ikke altid kan vælges, så den inducerede sandsynlighedsfordeling bliver lig med den oprindelige sandsynlighedsfordeling. Ved anvendelse af den funktor, der sender variable med en sandsynlighedsfordeling over i variable med en uafhængighedsrelation, mistes med andre ord væsentlige dele af strukturen.

Spørgesmålet er derfor, hvordan man kan undersøge om en korrelation kan forklares med en skjult årsag. Altså om et givet diagram af formen (170) er ækvivalent med et diagram af formen (171).

SÆTNING Lad K være mængden af sandsynlighedsfordelinger på (E,F,G,H), der giver et diagram af formen (170). Mængden af sandsynlighedsfordelinger på (E,F,G,H), der stammer fra et diagram af formen (171) er en konveks delmængde L. Ekstremalpunkterne i L er mængden af sandsynlighedsfordelinger på (E,F,G,H), der giver et diagram af formen

$$\begin{tikzcd} & F & G & \\ E \arrow[ur] & & & H \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{173}$$

hvor F er determineret af E og G er determineret af H.

BEVIS Antag at fordelingen af (E,F,G,H) er beskrevet med diagrammet

$$\begin{tikzcd} & F & & G & \\ E \arrow[ur] & & S_i \arrow[ul] \arrow[ur] & & H, \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{174}$$

med sandsynlighed λ_i, $i \in I$. Da er fordelingen af (E,F,G,H) beskrevet ved

$$\begin{tikzcd} & F & & G & \\ E \arrow[ur] & & S \arrow[ul] \arrow[ur] & & H, \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{175}$$

hvor $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n, I)$. Hvis fordelingen på (E,F,G,H) er ekstremal må fordelingen på S også være ekstremal, hvilket vil sige at S antager en værdi med sikkerhed og vi har diagrammet (173). Envidere må fordelingen på F givet E være ekstremal og dermed givet ved en funktion. Tilsvarende må G være en funktion af H.

Q.E.D.

Spørgsmål om eksistens af skjulte variable til at forklare en dobbeltrettet pil i en hybridgraf kan ofte reduceres til spørgsmålet om eksistens af en skjult variabel for en hybridgraf af formen (170), hvilket næste sætning er et eksempel på.

SÆTNING Lad

$$
\begin{tikzcd}
 & F \arrow[rr, leftrightarrow] & & G & \\
E \arrow[ur] & & I \arrow[ul] \arrow[ur] & & H \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{176}
$$

være en I-model for de variable E, F, G, H og S. Da er følgende 3 betingelser ækvivalente:

1) Der findes en skjult-variabel-model af formen

$$
\begin{tikzcd}
 & F & S \arrow[l] \arrow[r] & G & \\
E \arrow[ur] & & I \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & H \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{177}
$$

2) Der findes en skjult variabel-model af formen

$$
\begin{tikzcd}
 & F & S' \arrow[l] \arrow[r] & G & \\
E \arrow[ur] & & I \arrow[ul] \arrow[ur] & & H \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{178}
$$

3) For alle i findes en skjult-variabel-model

$$
\begin{tikzcd}
 & F & S'_i \arrow[l] \arrow[r] & G & \\
E \arrow[ur] & & & & H \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{179}
$$

for

$$
\begin{tikzcd}
& F \arrow[r, leftrightarrow] & G & \\
E \arrow[ur] & & & H \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{180}
$$

givet $I = i$.

BEVIS

1) $\Rightarrow$ 2) Antag derfor at vi har et netværk af formen (177). Da findes en deterministisk skjult-variabel-model for (177). Lad S' betegne den variabel, der fås ved at slå alle skjulte variable i den deterministiske skjult-variabel-model sammen. Da fås nedenstående deterministiske I-model:

$$
\begin{tikzcd}
& & S' \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
& F & S \arrow[l] \arrow[r] & G & \\
E \arrow[ur] & & I \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & H \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\tag{181}
$$

Det er nu let at cheke at (178) er en I-model.

2) $\Rightarrow$ 3) Oplagt.

3) $\Rightarrow$ 1) Sæt $S = (i, S_i')$.

Q.E.D.

Da antallet af ekstremalpunkter for L er endeligt og L er kompakt, er L et polytop (se Grünbaum 1967). Derfor er L fællesmængden af endeligt mange halvrum givet ved et tilsvarende antal uligheder. Problemet er da at finde disse uligheder udfra ekstremalpunkterne.

Antag at udfaldsrummet for E er $\{e_1, e_2, \ldots e_m\}$, og at ud faldsrummet for H er $\{h_1, h_2, \ldots h_n\}$. Indfør variable F_1,

$F_2, \ldots F_m$ og $G_1, G_2, \ldots G_n$. Hvis P er en sandsynlighedsfordeling på $F_1, F_2, \ldots F_m, G_1, \ldots G_n$, så definerer

$$P'(F = f, G = g | E = e_i, F = f_j) = P(F_i = f, G_j = g) \quad (182)$$

en betinget sandsynlighedsfordeling på F og G, som kan beskrives med (170). Lad M betegne mængden af sandsynlighedsfordelinger P på $F_1, F_2, \ldots F_m, G_1, \ldots G_n$. Da har vi via (182) en affin afbildning f af M på K. Da vil f afbilde ekstremalpunkter i M bijektivt over i ekstremalpunkter i L. Derfor er $L = f(M)$. Hvis der findes en skjult variabel sige, at E afgør hvilken variabel F skal betegne, og at H tilsvarende afgør hvilken variabel G skal betegne. I fysik vil man sige at der ikke er tale om en måling med forskellige begyndelsesbetingelser men derimod at der er tale om forskellige målinger. Man kan da finde facetterne af L som billeder af facetter M via afbildningen f, idet originalmængden til en facet er en facet. Det er dog ikke alle facetter af L, der bliver afbildet i facetter via f. Ovenstående udmønter sig i følgende algoritme til at finde separerende uligheder:

1) Vælg en delmængde af ekstremalpunkter.

2) Læg en hyperplan $\{\underline{x} | \Lambda(\underline{x}) = \underline{0}\}$, hvor Λ er en affin afbildning, gennem de udvalgte ekstremalpunkter.

3) Undersøg værdien af $\Lambda(\underline{e})$ for ethvert ekstremalpunkt $\underline{e} \in K'$.

4) Da er $\Lambda(\underline{x}) \geq 0$ en af de søgte uligheder, netop hvis $\Lambda(\underline{e})$ har konstant fortegn.

5) Gentag punkterne 1)-4) indtil alle delmængder af $\partial_e(K')$ er gennemgået.

I praksis behøver man ikke at gennemgå alle delmængder af $\partial_e(K')$, idet man kan udnytte symmetrier i de variable, dimensionsbetragtninger og at facetter udgør et lattic.

Der burde være en simpel løsning på problemet angående den generelle form af de separerende uligheder, men det er ikke lykkedes forfatteren at finde en sådan.

Lad $(\mathbb{H}, \langle | \rangle)$ være et reelt Hilbertrum udspændt af den konvekse mængde C. Da kan man definere *polarmængden* C^* af C ved

$$C^* = \{y \in \mathbb{H} | \langle x|y\rangle \le 1 \quad \text{for alle } x \in C\} \tag{183}$$

Hvis C er et polytop, er C^* også et polytop. Envidere er $C^{**} = C$. Lad F være en facet af C. Da er

$$F^* = \{y \in C^* | \langle x|y\rangle \le 1 \quad \text{for alle } x \in F\} \tag{184}$$

en facet af C. Herved fås en bijektiv korrespondance mellem facetter af C og C^*. Denne korrespondance vender inklusion, hvilket vil sige at

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2^* \subseteq F_1^* \tag{185}$$

Man siger at C^* er *konvekst dual* til C. Hvad der er af særlig interesse for os, er at ekstremalpunkter i C svarer til støttehyperplaner i C^* og omvendt. Se iøvrigt Grünbaum 1967.

Den symmetriske fordeling på (F,G) kan bruges som origo i L. Da kan span(L) udstyres med et indre produkt, så L's ekstremalpunkter får norm 1. Herved er L indlejret i en kugle således, at L's ekstremalpunkter ligger på randen af kuglen. Da er

$$L^* = \{y \in \mathbb{H} | \langle x|y\rangle \le 1 \quad \text{for alle } x \in \partial_e L\} \tag{186}$$

$$= \bigcap_{x \in \partial_e L} \{y \in \mathbb{H} | \langle x|y\rangle \le 1\}$$

Mængderne $\{y \in \mathbb{H} | \langle x|y\rangle \le 1\}$ er netop tangenthyperplanerne til kuglen i ekstremalpunkterne for L, som kendes. Herved er problemet med at finde støttehyperplaner når ekstremalpunkterne er kendte, transformeret over i problemet at finde ekstremalpunkter når støttehyperplanerne er kendte.

EKSEMPEL Antag at de variable E, F, G og H hver kan antage 2 værdier. Der er da 16 mulige udfald, hvilket kan illustreres i følgende skema

		E_1		E_2	
		F_1	F_2	F_1	F_2
G_1	H_1	p_1	p_2	p_3	p_4
	H_2	p_5	p_6	p_7	p_8
G_2	H_1	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
	H_2	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}

(187)

hvor p_i angiver sandsynligheden for at få den pågældende kombination af F'er og H'er givet den pågældende kombination af E'er og G'er.

For at uafhængighedsrelationerne skal kunne beskrives med (130*) må H være uafhængig af E givet F og G; og F må være uafhængig af G givet E og H. Den konvekse mængde K bliver 8-dimensional. Ekstremalpunkterne i K' er givet ved funktioner f og h, så $F = f(E)$ og $H = h(G)$. Der er 4 muligheder for valg af hver af funktionerne, hvilket giver 16 ekstremalpunkter. Her er et af dem

		E_1		E_2	
		F_1	F_2	F_1	F_2
G_1	H_1	0	1	1	0
	H_2	0	0	0	0
G_2	H_1	0	1	1	0
	H_2	0	0	0	0

(188)

Mængden K' er afgrænset af 24 hyperplaner givet ved følgende uligheder:

$$p_i \geq 0 \qquad i \in \{1,\ 2, \ldots 16\} \tag{189}$$

$$0 \leq -S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq 2$$

$$0 \leq S_1 - S_2 + S_3 + S_4 \leq 2$$

$$0 \leq S_1 + S_2 - S_3 + S_4 \leq 2$$

$$0 \leq S_1 + S_2 + S_3 - S_4 \leq 2\ ,$$

hvor

$$S_1 = p_2 + p_5 \qquad S_2 = p_4 + p_7 \tag{190}$$

$$S_3 = p_{10} + p_{13} \qquad S = p_{12} + p_{15}\ .$$

De sidste 8 uligheder er de såkaldte Bell's uligheder (Bell 1964). At disse uligheder rent faktisk er samtlige afgrænsende hyperplaner for K', blev vist af Fine (1982). Uligheder af den angivne type har været genstand for en del forskning de senere år, men forskningen har været meget usystematisk, idet de fysiske og de statistiske problemer er blevet mixet unødigt meget sammen. Braunstein (1988) har fundet nogle meget generelle uligheder ved hjælp af informationsteoretiske begreber, men disse afgrænser en mængde med glat overflade og ikke en polytop. I Garg & Mernin (1987) undersøges hvordan Bell's uligheder skal modificeres, hvis B og C skal måles med ineffektive detektorer. Det svarer blot til, at B og C kan antage 3 og ikke 2 værdier hver. I Svetlichny (1987) gives nogle uligheder for en hybridgraf med 3 dobbeltrettede pile. Roy & Singh (1991) giver nogle uligheder for hybridgrafer med endnu flere dobbeltrettede pile. Garrett prøver i 2 artikler (1989,1990) at give en særlig "Bayesiansk fortolkning" af ulighederne. Fine (1990) giver nogle ret generelle uligheder for systemer, hvor der er nogle symmetrier f.eks mellem højre og venstre side af (170). Det forekommer forfatteren at man ikke kan skrive nogle få uligheder, der kan beskrive alle specialtilfælde. I stedet bør man lave sætninger, der reducerer mere komplicerede tilfælde til simplere eller designe uligheder specielt til det konkrete problem ved hjælp af den angivne algoritme.

4.9. Opdatering af Baysianske netværk

Hvis man betinger med hensyn til en mængde af variable i en I-model, vil der opstå nye betingede uafhængigheder, som kan udtrykkes i en ny I-model.

DEFINITION Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være I-modeller, og lad C være en mængde af variable, så de variable i $\mathcal{A}$ enten ligger i C eller kan identificeres med variable i $\mathcal{B}$. Da siges $\mathcal{B}$ at være en *opdatering af $\mathcal{A}$ med hensyn til $C = C_0$*, dersom sandsynligheds-fordelingen svarende til $\mathcal{B}$ kan fås fra sandsynlighedsfordelingen svarende til $\mathcal{A}$ ved at betinge med hensyn til $C = C_0$, og det for alle delmængder A, B, D af variable gælder at

$$I_{\mathcal{A}}(A,B|C\cup D) \Leftarrow I_{\mathcal{B}}(A,B|D) \qquad (191)$$

SÆTNING Lad I være en uafhængighedsrelation, med en harmonisk relation $\le$. Lad E være en delmængde af variable. Da er I_E harmonisk på $\complement a(E)$ med ordning $\le$.

BEVIS

i) Antag $\neg I_E[A,B|C]$ & $I_E[A,B|C\cup D]$ for delmængder A, B, C og D af $\complement a(E)$. Da gælder $\neg I[A,B|C\cup E]$ & $I[A,B|C\cup D\cup E]$, hvilket viser at $D\cap a(A\cup B\cup C\cup E) \neq \emptyset$. Da $D\cap a(E) = \emptyset$ viser det at $D\cap a(A\cup B\cup C\cup E) \neq \emptyset$.

ii) Antag $I_E[A,B|C]$ & $\neg I_E[A,B|C\cup D]$ for delmængder A, B, C og D af $\complement a(E)$. Da gælder $I[A,B|C\cup E]$ & $\neg I[A,B|C\cup D\cup E]$, hvilket viser at $D\setminus a(A\cup B\cup C\cup E) \neq \emptyset$, og dermed $D\setminus a(A\cup B\cup C) \neq \emptyset$.

iii) Antag $a \le b$ og $C\cap e(a) = \emptyset$ for variable a og b og en mængde af variable C i $\complement a(E)$. Da gælder også $(C\cup E)\cap e(a) = \emptyset$

og dermed $\neg I[a,b|C \cup E]$, hvilket er det samme som at $\neg I_E[a,b|C]$.

Q.E.D.

SÆTNING Hvis A er en initial i et Bayesiansk netværk, så vil kun $e(A)$ skulle opdateres, når man betinger med $A = a$ i den forstand at den marginale sandsynlighedsfordeling af $B = \complement e(A)$ ikke ændrer sig. I grafen kan alle pile fra A fjernes, og alle øvrige bevares.

BEVIS Ved sammenlægning af variable fås nedenstående netværk:

$$\begin{tikzcd} & e(A) & \\ A \arrow[ur] & & B \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad (192)$$

hvoraf det fremgår at A og B er uafhængige.

Q.E.D.

KOROLLAR Hvis A er en variabel i et Bayesiansk netværk, så vil kun $e(a(A))$ skulle opdateres, når man betinger med $A = a$.

BEVIS Fås idet $a(A)$ er rod.

Q.E.D.

SÆTNING Hvis A er en variabel i et Bayesiansk netværk, så skal $a(A)$ opdateres uafhængigt af resten af netværket, når man betinger med $A = a$.

BEVIS Hvis $B = \complement a(A)/A$, så får vi følgende I-model:

$$\begin{tikzcd} & B & \\ a(A) \arrow[ur] \arrow[rr] & & A \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{193}$$

Den er ækvivalent med

$$\begin{tikzcd} & B & \\ a(A) \arrow[ur] & & A \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{194}$$

da $A \in a(A)$. Q.E.D.

Opdateringen af $a(A)$ kan være meget kompliceret, idet der i almindelighed opstår en mængde korrelationer. Derimod kan man ikke udfra grafen i en I-model slutte noget om de nye uafhængighedsrelationer, der måtte opstå, hvilket er indholdet af nedenstående sætning.

SÆTNING Hvis C er final i en graf $\mathscr{G}$, så gælder

$$I_{\mathscr{G}}(A,B|C \cup D) \Rightarrow I_{\mathscr{G}}(A,B|D) \tag{195}$$

BEVIS Det skal vises, at $\neg I_{\mathscr{G}}(A,B|D) \Rightarrow \neg I_{\mathscr{G}}(A,B|C \cup D)$. Antag derfor at der er en vej fra A til B, så alle variable med konvergerende pile ligger i D eller har efterkommer i D, og alle andre variable ikke ligger i D. Hvis C ligger på vejen, så må C ligge i D eller have efterkommere i D. Men da C er krone er der kun muligheden at $C \subseteq D$, og da vil vejen også gøre at A

og B ikke er d-separerede af $C \cup D = D$. Det samme gælder hvis C ikke ligger på vejen.

Q.E.D.

SÆTNING For enhver graf $\mathfrak{G}$ med finalt element C findes en I-model med den pågældende graf, så den betingede sandsynlighedfordeling givet $C = C_0$ ikke indeholder uafhængigheder som ikke kan findes ud fra d-separationskriteriet i grafen.

BEVIS Lad $\mathfrak{G}'$ være den graf der fremkommer ved at fjerne C og tilhørende kanter fra $\mathfrak{G}$. Da findes en sandsynlighedsfordeling på variable identificeret med hjørnerne i $\mathfrak{G}'$, så

$$I[X;Y|Z] \Leftrightarrow I_{\mathfrak{G}'}[X;Y|Z] \tag{196}$$

for alle delmængder af variable/hjørner i $\mathfrak{G}'$. Lad C være en variabel, der antager værdierne C_0 og C_1, hver med sandsynlighed 1/2. Envidere skal C være uafhængig af alle variable i $\mathfrak{G}'$. Vi forsyner nu $\mathfrak{G}$ med nye variable: kronen skal være C; de andre variable skal have formen $A = (B,C)$, hvor hjørnet A i $\mathfrak{G}$ står på pladsen svarende til B i $\mathfrak{G}'$. Da er $\mathfrak{G}'$ den opdaterede I'-model svarende til I'-modellen $\mathfrak{G}$, og alle betingede uafhængigheder i I'-modellen $\mathfrak{G}'$ er grafisk repræsenteret via d-separationskriteriet.

Q.E.D.

4.10.Kontinuerte modeller

I de foregående afsnit er sammenhængen mellem uafhængighed og harmoni blevet behandlet for diskrete I-modeller. For kontinuerte modeller vil vi nøjes med at give definitionen på at en I-model er harmonisk, men mange af sætningerne gælder stadigt med let modificerede beviser.

Lad V være en mængde af variable med en topologi τ. Vi vil antage uafhængighedsrelationen $I[A,B|C]$ er defineret for alle afsluttede mængder A, B og C. Envidere skal det gælde at

$I[A,B|C] \Leftrightarrow I[cl(A),cl(B)|cl(C)]$ for alle mængder, hvor uafhængighedsrelationen er defineret via sandsynlighedsregning. Den sidste betingelse svarer i det diskrete tilfælde til at $I[A,B|C] \Leftrightarrow I[Det(A),Det(B)|Det(C)]$. Egenskaben kan bruges til at udvide uafhængighedsrelationen til mængder, hvor den ikke kan defineres ved hjælp af sandsynlighedsmål.

DEFINITION En mængde A siges at være I-*afsluttet*, dersom det for alle x gælder, at hvis x er determineret af et A_i, for et $i \in \{1,2,...n\}$ for en vilkårlig klassedeling $A_1, A_2...A_n$ af A, så ligger x i A.

SÆTNING Hvis ingen variabel er fuldstændigt determineret, så udgør mængden komplementærmængder til I-afsluttede mængder en topologi.

BEVIS

i) $\emptyset$ er I-afsluttet da ingen variabel er fuldstændigt determineret, og hele mængden er oplagt I-afsluttet.

ii) Antag at A og B er I-afsluttede, og antag at x er determineret af et C_i, for et $i \in \{1,2,...n\}$ for en vilkårlig klassedeling $C_1, C_2...C_l$ af $A \cup B$. Antag at $x \notin A$. Da findes en klassedeling $A_1, A_2...A_m$ af A, så x ikke er determineret af noget A_i. Lad $B_1, B_2...B_n$ være en klassedeling af B. Da er $B_1, B_2...B_n, A_1\backslash B, A_2\backslash B...A_m\backslash B$ en klassedeling af $A \cup B$ så x er determineret af et B_i, da x ikke kan være determineret af et $A_i\backslash B$. Da klassedelingen $B_1, B_2...B_n$ var vilkårlig, viser det at $x \in B$.

iii) Antag at A_λ er I-afsluttede og at x er determineret af et C_i, for et $i \in \{1,2,...n\}$ for en vilkårlig klassedeling $C_1, C_2...C_m$ af $\bigcap A_\lambda$. Lad $A'_1, A'_2...A'_n$ være en vilkårlig klassedeling af A_λ. Da er $A'_1 \cap \bigcap A_\lambda, A'_2 \cap \bigcap A_\lambda ... A'_n \cap \bigcap A_\lambda$ en klassedeling af $\bigcap A_\lambda$, så x er determineret af $A'_i \cap \bigcap A_\lambda$ og dermed af A'_i, hvilket viser at $x \in A_\lambda$. Da λ er vilkårlig gælder $x \in \bigcap A_\lambda$. Q.E.D.

Vi vil kalde den ovenfor definerede topologi for uafhængighedstopologien og betegne den τ_I.

SÆTNING I-afbildninger er kontinuerte med hensyn til I-topologien.

BEVIS Det skal vises at originalmængden til en I-afsluttet mængde er afsluttet. Lad f være en I-afbildning. Antag at A er D-afsluttet og x er determineret af et A'_i, for et $i \in \{1,2,...n\}$ for en vilkårlig klassedeling $A'_1, A'_2...A'_m$ af $f^{-1}(A)$. Lad $A_1, A_2...A_m$ være en klassedeling af A. Da er $f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2)...f^{-1}(A_m)$ en klassedeling af $f^{-1}(A)$, så der findes et i så x er determineret af $f^{-1}(A_i)$, hvilket viser, at $f(x)$ er determineret af A_i. Heraf ses, at $f(x) \in A$ og dermed $x \in f^{-1}(A)$.

Q.E.D.

Med den ovenfor definerede topologi gælder $cl(A) \subseteq Det(A)$, og dermed at $I[A,B|C]$ medfører at $I[cl(A),cl(B)|cl(C)]$. Faktisk er τ_I den groveste topologi for hvilken der gælder at $cl(A) \subseteq Det(A)$ for alle mængder A. Thi hvis $x \in cl(A)$ så gælder der også

$$x \in cl(A_1 \cup A_2 \cup ... A_n) = cl(A_1) \cup cl(A_2) \cup ... cl(A_n) \tag{197}$$

$$\subseteq Det(A_1) \cup Det(A_2) \cup ... Det(A_n)$$

Ovenstående viser at t_I er grovere end τ.

DEFINITION Vi vil da sige at I er *harmonisk* med ordning $\leq$ hvis følgende betingelser er opfyldte for alle afsluttede mængder

i) $\neg I[A,B|C]$ & $I[A,B|C \cup D] \Rightarrow D \cap a_R(A \cup B \cup C) \neq \emptyset$.

ii) $I[A,B|C]$ & $\neg I[A,B|C \cup D] \Rightarrow D \setminus a_R(A \cup B \cup C) \neq \emptyset$.

iii) $a\bar{R}b \Rightarrow \neg I(a,b|C)$ for alle C således, at $e(a) \cap C = \emptyset$.

iv) Intervallerne $[x;y]$ er afsluttede i τ_I.

DEFINITION For er ordning $\leq$ danner mængderne $\complement[x;y]$ en subbasis for en topologi $\tau_\leq$ kaldet *$\leq$-topologien*.

BEMÆRK at iv) giver, at $\leq$-topologien er grovere end I-topologien. Endvidere er kvotientafbildningen $V \longrightarrow V/\approx$ kontinuert i begge topologier τ_I og $\tau_\leq$.

SÆTNING Antag at mængden af variable er endelig. Da er τ_I Hausdorf netop hvis ingen variable er determineret af en anden variabel. De 2 topologier τ_I og $\tau_\leq$ stemmer overens netop hvis ækvivariante variable er ækvivalente.

BEVIS En topologi på en endelig mængde er Hausdorff netop hvis punkter er afsluttede. Antag $\tau_I = \tau_\leq$ og $a \approx b$. Da ligger a i τ_I-afslutningen af b og er derfor determineret af b. Tilsvarende er b determineret af a så a og b er ækvivalente. Hvis ækvivariante variable er ækvivalente, så er $\tau_\leq$ den diskrete topologi, og da τ_I er finere end $\tau_\leq$, må τ_I også være diskret.
Q.E.D.

5. Tid og Kausalitet i filosofi og erkendelsesteori

Dette kapitel vil indeholde en gennemgang af ikke-naturvidenskabelige aspekter af tidens asymmetri ved hjælp af modeller for uafhængighed. Problemer angående baglæns kausalitet og tidsrejser er dog udskudt til et senere kapitel.

5.1. Viden og erkendelse

Hvordan kan det være, at vi ved så meget mere om fortiden end om fremtiden? Dette spørgsmål blev første gang stillet af Aristoteles (Stigen 1964), og har været debatteret op gennem middelalderen, og i nyere tid. For eksempel har vi stor viden om samfundsudviklingen gennem de sidste mange hundrede år, og der findes et fag, historie, der beskæftiger sig med at holde rede på al denne viden. Derimod er det en højst tvivlsom affære at spå om, hvad der samfundsmæssigt vil ske i fremtiden. Det gælder naturligvis ikke generelt, at man har præcis viden om fortiden men ingen om fremtiden: jeg ved at, solen vil stadig stå op om hundrede år, men jeg har ingen anelse om, hvor mange havregryn jeg spiste her til morgen. Med "at vide at" menes her "at betragte som sandt at". For Aristoteles var spørgsmålet om man overhoved kunne tillægge udsagn om fremtiden nogen sandhedsværdi. Kan man f.eks. allerede i dag hævde eller nægte at: "I morgen vil et søslag finde sted i bugten ved Salamis"? Forestillingen om at viden er noget der ophober med tiden, findes også formuleret udenfor den europæiske kulturkreds. Således har denne ide været vel udviklet i Kina, hvilket hænger sammen med deres bureaukrati, hvor den manifesterede sig i stadigt voksende arkiver (se Needham 1981).

Denne fremstilling bygger hovedsageligt på kapitel 5 i Horwich (1987). Horwich afviser efter grundig argumentation 6 etablerede teorier om, hvorfor vi ved så meget mere om fortiden end om fremtiden, og går derefter over til at undersøge, hvordan man i praksis får viden om fortiden. Det gør man ved hjælp af "recording systems", såsom hukommelse, skrift, fotografier, båndoptagelser, fodspor, fossiler og malerier.

EKSEMPEL Et "recording system" kan være et sted i en bog fra middelalderen. I begyndelsen befinder stedet sig i grundtilstanden "blank", hvilket er en tilstand, der er meget sensitiv over for blæk, og dermed overfor intentionerne hos den munk, der sidder og skriver i bogen. Munkens intentioner vil vi kalde den ydre tilstand. I det øjeblik munken ønsker det skriver han et bogstav, hvorved grundtilstanden overgår i en af tilstandene: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...Disse tilstande er meget stabile, så stedet vil forblive i denne tilstand fremover, forudsat naturligvis at bogen bliver behandlet varsomt, og at munken har brugt bedste kvalitet jerngallusblæk, så den ikke falmer.

Horwich giver følgende abstrakte karakterisering af et ideelt "recording system" S:

1. S vil til et hvilket som helst tidspunkt være i netop en af tilstandene S_0, S_1, S_2,...
2. Bortset fra S_0, "grundtilstanden", er disse tilstande fuldstændig stabile, hvilket vil sige, at hvis S er i tilstand S_k til tiden t, så vil S være i denne tilstand til alle senere tider.
3. Der findes en mængde af disjunkte ydre tilstande C_1, C_2, C_3..., som S er følsom overfor: hvis S er i grundtilstanden S_0 til tiden t, og omgivelserne er i tilstand C_k, så vil S straks overgå til tilstand S_k; og det er den eneste måde, hvorpå S kan komme i tilstand S_k på.

Hvis vi med S^t betegner systemets tilstand til tiden t og med C^t omgivelsernes tilstand, så får vi følgende deterministiske netværk $\mathscr{A}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \\
C^3 \arrow[ur, dotted] & S^3 \arrow[u, dotted, no head] \\
C^2 \arrow[ur] & S^2 \arrow[u] \\
C^1 \arrow[ur] & S^1 \arrow[u] \\
{} \arrow[ur, dotted] & {} \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
\qquad (198)
$$

Lad $\leq$ være en stærkt harmonisk ordning af de variable. Antag $t \leq t'$. Da gælder $I[S_{t-1}, S_{t'} | S_t]$ og $\neg I[S_{t-1}, S_t]$, hvilket viser at $S_t \in a(S_{t-1} \cup S_{t'})$. Endvidere gælder $I[S_{t-1}, C_{t-1}]$ og $\neg I[S_{t-1}, C_{t-1} | S_t]$, hvilket viser at $S_t \notin a(S_{t-1} \cup C_{t-1})$. Tilsammen viser det at $S_t \in a(S_{t'})$, hvilket er det samme som at $S_t \leq S_{t'}$. Det viser, at den temporale retning i et "recording system" må være i overensstemmelse med orienteringen i den I-model, det indgår i. I det foregående er det for overskuelighedens skyld antaget at de variable C^t er uafhængige, men denne antagelse er ikke nødvendig.

Fremover vil vi med direkte viden betegne viden opnået via et "recording system". Hvis orienterinden $\leq_I$ er identisk med tidsorienteringen kan man konkludere

Man kan have viden om både for- og fremtid, men det er kun fortiden vi kan have direkte viden om.

Ved at sammenstille flere "recording systems" opnår man en hukommelse. En I-model kan sagtens beskrive en hukommelse, der kan huske i hvilken rækkefølge de enkelte iagttagelser gøres. Thi lad S og T være 2 "recording systems" med grundtilstand S_0 henholdsvis T_0, og lad S^t henholdsvis T^t betegne tilstanden til tiden t. Da kan man forestille sig et tredje "recording system" U med grundtilstanden U_0 og 3 yderligere tilstande r', s' og t'. Lad U^t betegne U's tilstand til tiden t. Hvis $U^t = u$, så vil U^{t+1} være henholdsvis U_0, r', s', t', eftersom (S^t,T^t) er henholdsvis lig (S_0,T_0), (S_i,T_j), (S_i,T_0), (S_0,T_j), hvor $i,j \neq 0$. Da udgør (S,T,U) en hukommelse, der kan huske om det var S eller T, der først skiftede fra grundtilstanden, eller om det skete samtidigt.

En perfekt iagttager må have en perfekt hukommelse, og kan derfor kun indgå i et irreversibelt Bayesiansk netværk. Enhver beskrivelse af verden, der også beskriver perfekte iagttagere, må derfor være irreversibel. Bemærk iøvrigt, at hukommelser og "recording systems" er informationskanaler fra fortiden til nutiden.

5.2.Kontrafaktiske konditionaler

Hele tilgangen til emnet via Bayesianske netværk forudsætter, at kontrafaktiske beskrivelser i det mindste nogle gange har deres berettigelse. I eksemplet med den symmetriske og den skæve terning vil kun den ene blive trukket og ikke desto mindre tillader man sig at spørge, hvad de betingede sandsynligheder vil være, hvis den anden bliver trukket, hvilket bliver (er ?) kontrafaktisk. Når vi spørger, hvad der vil ske i det ene og i det andet tilfælde, opdaterer vi med andre ord med faktisk og kontrafaktisk viden uden, at vi endnu ved hvad, der vil blive hvad. Man taler somme tider om subjunktive konditionaler, som en fællesbetegnelse for materiel implikation og kontrafaktiske konditionaler (se Iøvrigt Adams 1975 eller Gärdenfors 1988).

Man kan naturligvis stadig lave kontrafaktiske opdateringer, efter man har fundet ud af, hvad der er blevet faktisk. Der er naturligvis det problem, at man normalt ikke tillader først at opdatere med den faktiske viden og dernæst med den kontrafaktiske, idet man i sandsynlighedsregning i almindelighed ikke tillader at danne betinget sandsynlighed, når den hændelse man betinger med har sandsynlighed 0. Med den fortolkning af begrebet betinget sandsynlighed som er fremlagt i kapitel 2 er der ikke noget i vejen for at betinge med hændelser med sandsynlighed 0; den betingede sandsynlighed er blot ikke entydigt bestemt ud fra den ubetingede sandsynlighedsfordeling. Envidere kunne dette problem undgås, dersom man havde et aksiomatisk grundlag for begrebet betinget uafhængighed, thi så ville man ikke behøve at referere til sandsynligheder.

Det er påpeget, at kontrafaktiske konditionaler er tidsasymmetriske, hvilket er en umiddelbar konsekvens af at opdatering af Bayesianske netværk er asymmetrisk i orienteringen af netværket.

EKSEMPEL (fra Horwich 1987) Lad os antage, at en mand stod inde i en høj bygning. Da skal A angive, om han hoppede ud eller ej, og B skal angive om han kom til skade eller ej. Tiden skrues tilbage, og vi danner følgende netværk:

$$\begin{tikzcd} B \\ A \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{199}$$

Ved at opdatere med hensyn til at han hoppede ud findes sandsynligheden for at han kom til skade. Så kan den kontrafaktiske påstand "hvis han havde hoppet ud, ville han være kommet til skade". Ved at indføre en ny variabel C, der angiver om der var et sikkerhedsnet eller ej, fås et nyt netværk:

$$\begin{tikzcd} & B \\ C \arrow[ur] \arrow[r] & A \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{200}$$

Ved at opdatere med hensyn til at han hoppede ud findes den simultane fordeling af C og B. Det kan så være at konklusionen blev at der havde været et sikkerhedsnet. Pilen fra C til A kan vendes, så der er ingen tidsasymmetri. Hvis yderligere en variabel D indføres, til at angive om "han gik op på taget, og spøgte med at hoppe ud", fås følgende netværk:

$$
\begin{tikzcd}
 & B & \\
C \arrow[r] \arrow[ur] & A \arrow[u] & D \arrow[l]
\end{tikzcd}
\qquad (201)
$$

og konklusionen ville nok blive, at han gik op på taget, og spøgte med at hoppe ud, og der var et sikkerhedsnet, så han hoppede ud og kom ikke tilskade. Opdateringen er nu asymmetrisk, idet anerne er opdateret først, og derefter anernes efterkommere.

I eksemplet ses, hvordan konklusionen er stærkt afhængig af de valgte variable. Somme tider, når man kommer med en kontrafaktisk påstand, vil man blive mødt med kommentaren, at spørgesmålet kun har akademisk interesse. Derfor bør man spørge hvad kontrafaktisk viden kan bruges til. I eksemplet ovenfor er det forudsat, at alle relevante betingede sandsynligheder var specificerede, men sådan er det naturligvis sjældent i praksis. I praksis er det tværtimod ofte den kontrafaktiske viden man har. Given kontrafaktisk viden sætter visse begrænsninger på de betingede sandsynligheder. Med et givet signifikansniveau for accept af påstandene vil disse begrænsninger være givet ved funktionaler, som skal være positive, på mængden af sandsynlighedsmål. De sandsynlighedsmål, der er konsistente med given faktisk og kontrafaktisk viden, udgør herved en konveks mængde. Hvis man senere kommer ud for en situation, der minder om den faktiske, vil denne viden om de betingede sandsynligheder være nyttig. Her skal naturligvis laves en skjult-variabel-model med frekvensielle sandsynligheder som skjulte variable.

Vores viden om den simultane fordeling på en mængde af variable er med andre ord ofte struktureret i form, dels af viden om betinget uafhængighed, og dels faktisk og kontrafaktisk viden. Studiet af kontrafaktisk viden bør derfor tage udgangspunkt i sandsynlighedsregning og modeller for uafhængighed, da dette danner et sikkerhedsnet, der beskytter mod inkonsistenser af typen "Dutch Book".

5.3. Den temporale ordning af konkrete begivenheder

I det foregående er der flere steder argumenteret for, at den temporale ordning er identisk med ordningen af variable i I-modeller. I det følgende vil vi beskæftige os med hvilken status man kan tillægge et udsagn af formen "A er før B". Det er her meget vigtigt, at skelne mellem om A og B betegner variable eller værdier af variable. Vi har set, hvordan variable i en I-model er ordnet via $\leq$. Lad V_1 og V_2 være 2 variable med $V_1 \leq V_2$. Hvis V_i viser sig at antage værdien m_i, siger man i almindelighed at m_1 skete før m_2. Bemærk at de variable V_i udemærket kan have værdier i samme mængde. Det betyder *ikke* at værdimængden herved får en statistisk struktur, der giver en bestemt ordning af elementerne.

EKSEMPEL Hvis man slår et æg ud på en varm pande vil hviden først være gennemsigtig og derefter hvid. Det modsatte sker aldrig, man kan ikke fortryde et spejlæg. Lad A være den logiske variabel, der angiver om æggehviden er gennemsigtig til et givet tidspunkt, og lad B være den logiske variabel, der angiver om æggehviden er hvid lidt senere. Da er $A \cong B$ og man kan derfor ikke få den temporale rækkefølge frem med en I-model ligegyldig hvor mange skjulte variable man indfører.

Lad i stedet V_t være variable, der angiver, hvad der er på panden til givne tidspunkter. Denne variabel kan for eksempel antage værdierne: æg med gennemsigtig hvide, æg med hvid hvide. Ved indførsel af passende skjulte variable, der f.eks. angiver om man lægger noget på panden, tager noget af panden e.lign., får de variable V_t en ordnet struktur i en I-model identisk med den temporale ordning.

Ovenstående angiver, hvordan man skal argumentere for at A sker før B: find variable V_1 og V_2 i en I-model, så $V_1 \leq V_2$, og så V_1 antager A som værdi og så V_2 antager B som værdi. Det er således ikke noget i vejen for at beskrive asymmetrien i *de facto* irreversible processer med I-modeller, på trods af at senere tilstande af processen kan være ækvivariante med tidligere. Man skal blot vælge sine variable omhyggeligt.

EKSEMPEL Ved kapløb er det den, der knækker målsnoren, der har vundet. Tidtagerne ser noget andet, når senere løbere kommer over målstregen, idet vinderen har påvirket, hvad man ser.

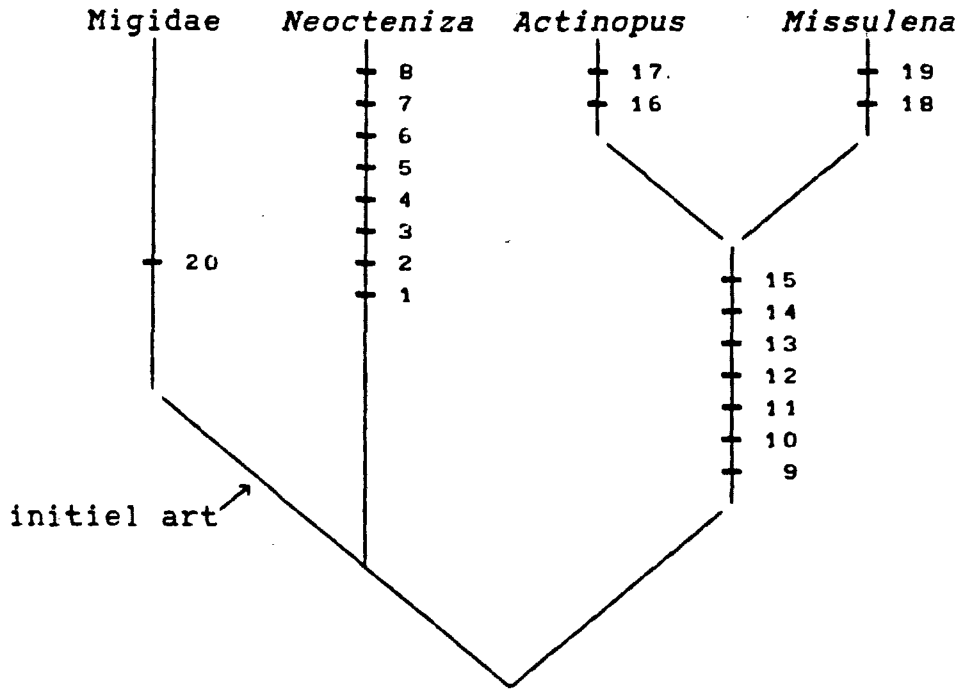
Som teorien er præsenteret ovenfor opstår der det problem at hvis man opdaterer I-modellen med hensyn til $V_1 = A$ og $V_2 = B$ vil V_1 og V_2 blive uafhængige og informationskanalen fra V_1 til V_2 vil blive brudt. Herved har vi samme problem som i sidste kapitel, og skyldes grundlæggende, at vi i denne fremstilling har baseret begrebet uafhængighed på sandsynlighedsregning. Løsningen på dette problem vil derfor være at opbygge teorien udfra et aksiomsystem for uafhængighed.

Mere alvorligt er det, at opdatering med hensyn til en variabel senere end V_1 og V_2 kan ændre rækkefølgen af V_1 og V_2. Dette strider mod mange menneskers følelse af, at tiden har en "objektiv" retning. For at opnå en intersubjektiv tidsretning må de betragtede I-modeller være I-modeller med frekvenser som skjulte variable. Al opdatering foregår da via de skjulte variable, hvorved orienteringen af de "synlige" ikke vil ændres ved opdatering.

EKSEMPEL I genetik (Futuyma 1986) har man særligt de senere år været opmærksom på at samme sandsynlighedsstruktur somme tider kan udtrykkes i forskellige Bayesianske netværk, og de problemer det kan føre til. Nu til dags er det almindeligt accepteret at dyr skal klassificeres efter deres indbyrdes beslægtethed og ikke efter ydre kendetegn: en hval beskrives nu som et pattedyr, fordi den er beslægtet med andre pattedyr, og ikke som en hvalfisk selvom den lever i vandet. Problemet er derfor at opstille velbegrundede stamtræer for alle mulige dyregrupper. At problemet langtfra er trivielt ses af at vi ikke engang ved om det er gorillaen, chimpansen eller dværgchimpansen, der er vor nærmeste slægtning.

Et stamtræ beskriver den indbyrdes beslægtethed mellem en række forhistoriske og nulevende dyrearter. En art kan spalte sig op i flere arter, hvoraf nogle uddør og andre lever videre for måske igen at spalte sig op i flere arter. En art er defineret som en gruppe af individer, der ikke kan få frugtbart afkom med dyr uden for gruppen. Derfor kan 2 arter aldrig smelte sammen til en art. Betragt nu en mængde af variable, hvor hver variabel beskriver udvalgte træk ved en dyrearts fænotype. Det kan være udseende, fysiologi, adfærd eller opbygningen af artens proteiner. De variable vil da indgå i et kausalt træ. Hvis pilene vender i tidens retning er det netop stamtræet. En probabilistisk tolkning vil ikke være helt uproblematisk, men det er uafhængighedsrelationen, der er det væsentlige. Ofte vil man argumentere ud fra biologisk indsigt uden at opstille sandsynlighederne, men statistiske metoder bliver anvendt mere og mere. Problemet er da at det kun er træstrukturen, man kan gøre sig håb om at rekonstruere ud fra arternes fænotyper idet alle variable er ækvivariante. For at finde retningen af pilene må man inddrage andre typer oplysninger. I Ridley 1986 pp.73-75 given et interessant eksempel, hvor den type oplysninger, der inddrages, er kontinentaldrift. Ofte vil den type oplysninger, der inddrages, dog også være af genetisk art.

EKSEMPEL *Neoteniza* er en slægt af mygalomorfe edderkopper fra familien Actinopodidae. Slægten, der indeholder omkring 7 arter, lever i Mellemamerika og nordlige Sydamerika. Slægtskabet mellem *Neoteniza*, slægterne *Actinopus* og *Missulena* og familien Migidae er undersøgt af Platnick og Shadab (1976) og er gengivet i Wiley (1981). På grundlag af 21 karaktertræk kan et træ opstilles



De tykke streger angiver karaktertræk der deles af grupperne
højere oppe i diagrammet

	Karakter	Migidae	*Neocteniza*	*Actinopus*	*Missulena*
1.	Farven af ben hos hanner	ensartet	*mønstret*	ensartet	ensartet
2.	Spids på femur IV	mangler	*tilstede*	mangler	mangler
3.	Ant. metatarsi hos hanner	lang apical pig mangler	*lang apical pig tilstede*	lang apical pig mangler	lang apical pig mangler
4.	Palpae tibia hos hanner	strakte	*fortykkede*	strakte	strakte
5.	Embolus	kort	*lang*	kort	kort
6.	Labium hos hunner	med spinules	*uden spinules*	med spinules	med spinules
7.	Sklerotisering bursa copulatrix	mangler	*tilstede*	mangler	mangler
8.	Spermathecae	kort og lige	*lang og buet*	kort og lige	kort og lige
9.	Pars cephalica hos hanner	affladiget	affladiget	*markank løftet*	*markant løftet*
10.	Thorax-fordybning	rekurvet	rekurvet	*prokurvet*	*prokurvet*
11.	Labium	suturlinier	suturlinier	*ingen suturlinier*	*ingen suturlinier*
12.	Post. sigilla hos hanner	flade plader	flade plader	*udgravet fordybning*	*udgravet fordybning*
13.	Post. tarsi hos hanner	ikke scopulat	ikke scopulat	*scopulat*	ikke scopulat
14.	Tibia III	mangler spids kam	mangler spids kam	*spids kam tilstede*	*spids kam tilstede*
15.	Post. tarsi	uarmet	uarmet	*armet*	*armet*
16.	Maxillae hos hanner	armet	armet	*uarmet*	armet
17.	Parrede tarsalklør hos hanner	mange-tandede	mange-tandede	*entandede*	mange-tandede
18.	Tibia IV	med ryg	med ryg	med ryg	*med spidser*
19.	Kanten af rygskjoldet hos hanner	fladt	fladt	fladt	*tilbage-bøjet*
20.	Post. sigilla hos hunner	*flad*	udgravet fordybning	udgravet fordybning	udgravet fordybning

Ved at udvide træet med andre edderkoppefamilier får man at den initielle art må være som angivet på figuren. Det kræver dog at slægtskabet mellem de øvrige arter er kendt. Problemet med at finde træets initielle er med andre ord blot skudt over på et træ, der indeholder flere variable. Analysen er blevet brugt til at samle slægterne *Neoteniza, Actinopus* og *Missulena* i familien Actinopodidae

5.4.Beslutning og fri vilje

Det siges at vore beslutninger kun har indvirkning på fremtiden, hvilket giver en form for tidsasymmetri. Der findes imidlertid 2 konkurrerende teorier om, hvordan man bør tage beslutninger:

1. Evidens teorien: Man bør gøre det, der giver bedst evidens for det, man ønsker.

2. Kausal teorien: Man bør gøre det, som har de mest ønskelige konsekvenser.

Forskellen mellem de 2 teorier kommer efter sigende frem i følgende eksempel.

EKSEMPEL (Newcomb's paradox, se Nozick 1969) Lad os forestille os at psykologen polydipsi, som er rig og noget ekcentrisk, giver penge til sine forsøgspersoner. I hvert forsøg laver han først et interview, og fortæller forsøgspersonen, at han har placeret lige mange penge i hver af 2 bokse. Forsøgspersonerne kan da vælge om de vil åbne den ene eller begge bokse, hvorefter de kan beholde indholdet af den/dem. Man må dog vælge om man vil åbne den ene eller begge bokse, før man ser indholdet. Hvis psykologen på basis af interviewet vurderer, at forsøgspersonen kun vil åbne den ene boks, placerer han 1000 kroner i boksene; ellers placerer han 10 kroner i dem. Gennem mange forsøg har psykologen polydipsi aldrig tabt mere end 1000 kroner og aldrig mindre end 20 kroner. Han vurderer rigtigt hver gang, selv ved forsøgspersoner, der i interviewet siger, om de vil åbne den ene eller begge bokse, og senere rent faktisk gør det modsatte. Alt dette får forsøgspersonerne at vide.

Da det bliver Hansens tur argumenterer han :"Pengene er allerede i boksene. Hvadenten de indeholder 10 kroner eller 1000 kroner, vil jeg få dobbelt så meget ved at åbne 2 bokse som jeg ville få ved kun at åbne en. Derfor åbner jeg begge." Det gør han så og modtager sine 20 kroner. Jensen siger til ham:"Dit fjols, du skulle kun have åbnet den ene og fået 1000 kroner, ligesom jeg gjorde." Hvortil Hansen svarer, at i så fald ville han kun have fået 10 kroner. Jensen mener dog at i såfald ville polydipsi på forhånd have gennemskuet det og placeret 1000 kroner i boksene.

Ovenstående eksempel kan forekomme paradoksalt, men hvis man forestiller sig, at terningmanden (Rhinehart 1971) er en af forsøgspersonerne får psykologen et uløseligt problem. Terningmanden vil måske sige:"Jeg vil kaste en terning. Hvis den viser 1 øje vil jeg kun åbne den ene ellers vil jeg åbne begge." Polydipsi kan derfor ikke være sikker på at gætte rigtigt hver gang, hvis forsøgspersonerne har en reel valgmulighed. Hvis vi ikke ved at polydipsi gætter rigtigt, mister eksemplet en del af sin styrke. Da er det en ganske almindelig spilsituation, og spil er der lavet udemærket og konsistent teori om. Lad os se på et eksempel, der ikke kan afvises så let.

EKSEMPEL (Gibbard & Harper 1980, pp. 165-166) Robert Jones er et ungt medlem af bestyrelsen i International Energy Conglomerate Incorporated. Jones og flere andre unge bestyrelsesmedlemmer konkurrerer om en attraktiv forfremmelse. Firmaets ledelse anså kandidaterne for så ligeværdige, at de ansatte en psykolog til at teste for de personlige egenskaber, der i længden fører til succes i forretningsverdenen. Testen af kandidaterne blev lavet torsdag. Beslutningen om hvem, der skal forfremmes, bliver taget på basis af testen og bliver annonceret mandag. Det er nu fredag. Jones får af bagveje at vide at alle kandidater har klaret sig lige godt på alle områder undtagen skånselsløshed, og at forfremmelsen derfor vil gå til den, der har scoret mest på denne faktor, men han kan ikke finde ud af hvem det er.

Fredag eftermiddag kommer Jones ud for et nyt problem. Han skal beslutte sig for, om han skal fyre stakkels gamle John Smith, som det denne måned ikke lykkedes at opfylde sin salgskvote på grund af sin kones død. Jones tror at Smith vil være god nok, når han er kommet sig over tabet af sin kone, forudsat at han bliver behandlet hensynsfuldt, og forudsat at Jones kan overbevise ledelsen om at det kan betale sig for firmaet at behandle ham skånsomt. Yderligere tror Jones, at ledelsen vil blive imponeret over hans kløgt. Desværre har han ingen mulighed for at kontakte dem før det om mandagen bliver offentliggjort hvem der skal forfremmes.

Jones ved, at vurderingen af hans skånselsløshed i testen netop forudsiger, hvad han vil gøre i en situation som denne. At fyre Smith giver god evidens for at han har klaret sig godt i testen, og dermed vil blive forfremmet, mens hensynsfuldhed giver god evidens for at han har klaret sig dårligt i testen, og dermed ikke bliver forfremmet....At fyre Smith giver evidens for at Jones får sin forfremmelse. Det er klart, at fyre Smith af denne grund, på trods af at det på ingen måde vil hjælpe til at forårsage forfremmelsen og i sig selv er ondt, er irrationelt.

Der er ingen konsensus om, hvad man skal gøre i de 2 eksempler, og de bidrager derfor ikke til at løse problemet om man bør bruge evidens eller kausalteorien. Det er derfor nyttigt at lave en analyse af eksemplerne med Bayesianske netværk og så lave eksempler med samme struktur, men hvor der ikke er nogen tvivl om hvad man skal gøre. I det første eksempel forekommer 3 personer: Polydipsi, Jensen og Hansen. Da vi her beskæftiger os med *subjektive* sandsynligheder, kan man forestille sig, at de indgående variable bliver modelleret med *forskellige* Bayesianske netværk af de 3 personer. Derfor kan man ikke forvente at en diskussion mellem de 3, vil føre til en fælles opfattelse af situationen. Fremover vil vi, hvis andet ikke nævnes eksplicit, kun tale om at en given variabel udgør en *beslutning,* når den indgår i den besluttendes Bayesianske netværk. I det første eksempel er de relevante variable for Hansen: hans psykiske disposition ved interwiewet (D), hans beslutning (B), Polydipsi's vurdering (V) og udbyttet (U). Disse kan beskrives med netværket

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] & U \\ D \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{202}$$

I det andet tilfælde er de relevante variable: hans psykiske disposition under testen (D), hans beslutning (B), testresultatet (T) og udnævnelsen (U). Disse indgår i følgende netværk:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] & U \\ D \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd} \tag{203}$$

I begge eksempler kan man diskutere, hvad de betingede sandsynligheder er, men strukturen af netværket ligger fast. I begge tilfælde er det de variable D, B og U, der er væsentlige, og disse kan beskrives med I-modellen

$$\begin{tikzcd} & U \\ D \arrow[ur] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{204}$$

Bemærk at pilen fra D til B kan vendes, så de variable kunne lige så godt beskrive den situation, hvor man tog beslutningen først og blev vurderet bagefter. Det er oplysningen om den "objektive" tidsretning fra D til B, der får os til at vende pilen fra D til B. For at komme videre med disse eksempler, kan man inddrage yderligere variable, der er relevante for, hvordan man konstaterer, at D er før B.

Lad os i stedet betragte et eksempel med samme struktur som ovenstående, men hvor der er konsensus om, hvad man bør gøre.

EKSEMPEL Lad der være givet 2 bokse. I den ene er der nogle penge, mens den anden er tom. Variablen D angiver hvilken, der er tom. Vi får lov at åbne den ene boks og beholde udbyttet U. Man får at vide hvilken boks, der er tom, før man tager beslutningen B om hvilken boks man vil åbne. Beslutningen består i at åbne en given boks med en given sandsynlighed givet D. Dette kan beskrives med samme I-model som ovenfor. Det mest rationelle er naturligvis at åbne den boks, der ikke er tom med sandsynlighed 1.

I eksemplet er B determineret af D, hvilket ikke viser at man ikke har nogen valgmuligheder; det skyldes tværtimod, at man *har* mulighed for at træffe et frit valg. Dette forstås bedst hvis man indfører endnu en variabel BS, der angiver, hvilken beslutningsstrategi vi vælger. Variablen angiver med andre ord hvordan vi vil lade vor beslutning afhænge af vor viden. Dette kan beskrives med I-modellen

$$\begin{tikzcd} & U & \\ D \arrow[ur] \arrow[r] & B \arrow[u] & BS \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{205}$$

I denne model ligger selve beslutningen i variablen BS, og værdien af B er blot en konsekvens af denne beslutning (og af D). Da BS er initial, vil BS kun give evidens om e(BS), og forskellen mellem kausalteorien og evidensteorien er da ophævet. Da $e(BS) = e(B) \cup \{BS\}$ ses at beslutningen kun har betydning for e(B). Derfor er kausalteorien den korrekte teori. En beslutningsvariabel, der er initial i et Bayesiansk netværk, vil vi kalde en fri beslutningsvariabel. Måden til at undgå paradokser a la Newcomb's er at insistere på, at alle betragtede beslutningsvariable skal være frie. I Newcomb's problem må konklusionen være, at man slet ikke skal stole på psykologens evner, mens Jones naturligvis bør undlade at fyre Smith.

Ovenstående belyser begrebet fri vilje. Lad variablen V angive, hvad en given persons vilje er. Hvis V indgår i et Bayesiansk netværk, vil den eneste rimelige definition af, at V betegner en *fri vilje* være, at V er initial i det Bayesianske netværk. Selvom V ikke betegner en fri vilje, kan man indføre en skjult variabel FV, så FV er initial og V er determineret af sine forældre. Da er FV triviel netop hvis V er determineret af sine forældre. Beskrevet på denne måde er det oplagt, at det ikke giver mening at tale om at viljen er fri før man har specificeret hvilke variable man vil betragte. Med de variable vi bruger i vor daglige omgang med andre mennesker, vil viljen V næppe være determineret af de andre variable, og vi kan udspalte en ikke-triviel fri vilje FV. Med variable, der angiver en tilstrækkelig detaljeret kemisk/fysisk beskrivelse af hjernen kunne forestille sig det var anderledes. Nogle hævder, at det ifølge kvantemekanikken er umuligt at lave en deterministisk beskrivelse, idet kvantemekanikken essentielt er stokastisk. Til det bør det bemærkes, at evolutionen har tilstræbt, at enkelte neuroner arbejder deterministisk, idet kvantefluktuationer er midlet bort. Om hjernen har en indbygget tilfældighedsgenerator vides ikke, men en sådan skulle da fungere efter andre principper end hvad der ellers er gældende for neurale netværk. Ovenstående synspunkt kan hverken klassificeres som determinisme, libertarianisme (Cambell 1951 & 1957, Winch 1958) eller reconciliationisme (Welzel 1979), hvilket er de etablerede holdninger til spørgsmålet til om eksistensen af en fri vilje.

Hvis tidsorienteringen stemmer over ens med $\leq_I$ kan vi konkludere

Vi har kun indflydelse på fremtiden.

En anden måde at behandle problemet angående den fri vilje er at arbejde med udsagn hvis sandhedsværdi varierer i tiden. Det kan f.eks. være udsagnet: "Jeg går en tur". Sådanne udsagn er <u>ikke</u> variable som ordet bruges i denne afhandling, netop fordi sandhedsværdien varierer. Derfor er ovenstående hverken et argument for eller imod f.eks. Ockham's vej ud af problemet angående den fri vilje. Se Øhrstrøm 1988 for en behandling af problemet og yderligere referencer; særligt artiklen s.127 ff har interesse i denne forbindelse. Som vi senere skal se er grundideerne i denne afhandling svære at forene med en tidslogik, idet en sådan i almindelighed forudsætter et samtidighedsbegreb.

5.5. Årsag og Forklaring

"Alting har en årsag" siges det. Dette er årsagssætningen. Da den har haft stor betydning for vestlig videnskab, vil det være nyttigt at se på dens historiske forudsætninger, og hvad man bruger den til.

Til daglig bruger man årsagssætningen, når man står med et problem som for eksempel at baghjulet på ens cykel er fladt. Man siger da "alting har en årsag", så det er blot at finde årsagen til det flade bagdæk. Det kan være, at ventilen er i stykker eller slangen er punkteret. Hver af disse mulige årsager anviser en måde at løse problemet på: udskift ventilen eller lap slangen. Hvis man har lappet slangen, men cyklen kort efter punkterer igen, kan man prøve at finde årsagen til de gentagne punkteringer. Det kan være at man ikke har fjernet en skarp sten, der sidder i dækket, eller at dækket er nedslidt. Igen anviser hver af de mulige årsager en løsning: fjern stenen eller udskift dækket. Årsagssætningen garanterer, at man kan lave en problemanalyse som ovenfor, men det ligger ikke eksplicit i årsagssætningen, at man ender med at kunne anvise en løsning.

Den ældste nedskrevne formulering af årsagssætningen (se Sambursky 1959 for referencer) findes hos Leucippos: "Intet sker ved en tilfældighed; alt sker af en grund og med nødvendighed (ananke)". Ananke betyder her naturlov, og om-fatter hele grækernes naturforståelse. Sextus Empiricus fra den skeptiske skole skriver:"Hvis der ikke var nogen årsag, ville alt være dannet af alt fuldstændigt tilfældigt". Det er her vigtigt at være opmærksom på grækernes kraftige skelnen mellem det naturlige og det kunstige. For eksempel var stensalt naturligt, mens inddampet havsalt var kunstigt (Øhrstrøm 1988). Det var akceptabelt at sejle, mens det kunne være hybris at bygge broer, idet det naturlige for øer og fastland var at være adskildte; sådan havde

Guderne bestemt, at det skulle være. Stoikerne brugte årsagssætningen i deres fatalistiske filosofi for at gøre opmærksom på, at der bag fænomenernes mangfoldighed skjuler sig en indre fornuft, som det er filosofiens opgave at afdække.

I den græske medicin var Hippokrates en stor fortaler for kausale beskrivelser. Kliniske observationer består i "at beskrive fortiden, diagnosticere nutiden og forudse fremtiden"(Sambursky 1959). Han skriver videre: "Ingen patient, der kommer sig uden en læges hjælp, kan logisk tilskrive sin forbedring tilfældigheder. Tværtimod vil tilfældighederne forsvinde ved nærmere eftersyn. For enhver ting forekommer vil gøre dette via et-eller-andet, og dette "via et-eller-andet" viser at tilfældigheder blot er et ord, og ikke har nogen realitet. Medicin har derimod realitet, da den virker "via et-eller-andet" og da dens resultat kan forudses". Denne meget moderne opfattelse af lægekunsten var ikke enerådende hos grækerne, og blev ikke delt af Erasistratos og "empiristerne". Imod disse skrev Galen, at man skulle optræde som en videnskabsmand: man må undersøge årsagerne til at organerne ikke fungerer, for at få dem til at virke normalt.

Ovenstående gengiver de 2 anvendelser af årsagssætningen. Dels som begrundelse for en fatalistisk livsopfattelse; dels som en hjælp til at gribe ind i fænomenerne.

I kristen middelalder blev årsagssætningen alment anderkendt, idet man kunne henvise til Gud som altings inderste årsag. På den anden side kunne man i sit verdslige liv tillade sig at manipulere med naturen som man ville. Kristendommen er nemlig anti-animistisk i modsætninger til tidligere religioner i Europa og det i ekstrem grad. Man kunne for første gang ubekymret udnytte åens energi i sin mølle, idet man ikke skulle tage hensyn til åmanden. Skolastikerne disputerede ofte de teologiske problemer årsagssætningen afsted-kom, men dens gyldighed var hævet over diskussion. Rationalisterne overtog årsagssætningen fra kristendommen, idet de antog, at den var en naturnødvendighed for tanken.

Efterhånden som naturvidenskaben udviklede sig ændredes også synet på årsagssætningen. I de eksempler, man interesserede sig for, kunne man ikke udpege én årsag og én virkning. Var det tyngde-kraften eller et brud på stilken, der var årsag til at æblet ramte Newton i hovedet? I stedet blev man mere interesseret i begreberne kausalitet og determinisme (se Earman 1986). Empiristerne med Hume i spidsen forkastede således årsagsbegrebet. David Hume argumenterede på følgende måde: Vi iagttager, at en begivenhed indtræffer, at f.eks. solen skinner på stenen. Derpå iagttager vi, at en anden begivenhed indtræffer, nemlig at stenen bliver varm. Vi iagttager, at disse 2 begivenheder følger efter hinanden; men vi kan ikke på nogen måde iagttage, at den første frembringer den anden. Med andre ord: vi kan ikke *iagttage* nogen årsagssammenhæng. Påstande som "A er årsag til B" må derfor erstattes med "A forekommer før B, og A ⇒ B". Hos Bertrand Russel (1912) bliver årsagssætningen helt forkastet:"Grunden til til at fysikken har opgivet at finde årsager er at der rent faktisk ikke findes sådanne ting. Årsagssætningen er efter min overbevisning som meget andet, filosoffer beskæftiger sig med, et relikt fra en svunden tid, der overlever ligesom monarkiet, udelukkende fordi man fejlagtigt tror at den ikke gør nogen skade.". I statistik siger man i almindelighed at "statistik kan kun påvise korrelation, ikke kausalitet". Efter at årsagsbegrebet således i lang tid har været udelukket fra videnskabelig behandling, er man i de seneste år er man igen begyndt at beskæftige sig seriøst med emnet.

Det er ikke meningen i det følgende at "definere", hvad forklaring og kausalitet betyder, for disse dagligdagsbegreber er defineret via deres brug. I stedet vil vi analysere de situationer, hvor disse begreber bliver brugt, ved hjælp af Bayesianske netværk. Lad der være givet en variabel V, der antager værdien v', som vi ønsker at påvirke. Fra foregående afsnit ved vi, at det gælder om at etablere et Bayesiansk netværk, hvor V er efterkommer af en beslutningsvariabel B. Analysen vil naturligvis være kontrafaktisk, idet de indførte variable i det konkrete tilfælde, man ønsker at ændre på, antager bestemte værdier. I det etablerede netværk vil det kun være a(V), der interesserer os.

SÆTNING* Lad A_1, A_2,...A_n være hændelser i en Markovkæde

$$A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_n \ . \tag{206}$$

Hvis $P(A_{k+1}|A_k) > P(A_{k+1})$ for $k = 1,2,\dots n-1$ så vil $P(A_n|A_1) > P(A_n)$.

BEVIS* Bemærk at det for hændelser E og F gælder, at

$$P(E|F) > P(E) \Leftrightarrow P(E|F) > P(E|\complement F) \ , \tag{207}$$

da $P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|\complement F)P(\complement F)$. Det bevises ved induktion efter n.

$\underline{n = 2}$: Intet at bevise.

<u>Antag at sætningen er sand for $n = j$.</u>

$$\begin{aligned} &P(A_{j+1}|A_1) - P(A_{j+1}|\complement A_1) \\ &= P(A_{j+1}|A_j)P(A_j|A_1) + P(A_{j+1}|\complement A_j)P(\complement A_j|A_1) \\ &\quad - P(A_{j+1}|A_j)P(A_j|\complement A_1) - P(A_{j+1}|\complement A_j)P(\complement A_j|\complement A_1) \\ &= P(A_{j+1}|A_j)(P(A_j|A_1) - P(A_j|\complement A_1)) \\ &\quad + P(A_{j+1}|\complement A_j)(P(\complement A_j|A_1) - P(\complement A_j|\complement A_1)) \\ &= (P(A_{j+1}|A_j) - P(A_{j+1}|\complement A_j))(P(A_j|A_1) - P(A_j|\complement A_1)) \end{aligned} \tag{208}$$

Q.E.D.

Ovenstående viser, at hvis de betragtede variable er logiske variable vil "kausal relevans" være en transitiv egenskab. Hvis de variable kan antage mere end 2 værdier kan man ikke sige noget generelt i den retning.

EKSEMPEL Lad A, B_1, B_2 og C være variable, så

$$\begin{tikzcd} B_1 & C \\ A \arrow[u] & B_2 \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{209}$$

er en perfekt I-model. Definér $B = (B_1, B_2)$. Da er

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \tag{210}$$

en I-model, men den er ikke perfekt, idet A og C er uafhængige.

I Kvart (1991) påstås indirekte, at eksemplet er repræsentativt i den forstand, at hvis A og C er uafhængige i (210), så kan B splittes. Dette er ikke sandt!

EKSEMPEL Vælg B', så B er determineret af B', på en sådan måde at forskellige værdier af B svarer til forskellige antal originalværdier af B'.

EKSEMPEL Lad B kunne antage værdierne $\gamma, \delta, \varepsilon$ med sandsynlighederne 1/2, 1/4, 1/4. Lad A med værdierne ζ, η være determineret af B, således at γ afbildes i ζ og δ, ε afbildes i η. Lad den betingede fordeling af C med værdierne θ, ι givet B være bestemt ved

$$P(C = \theta | B = \delta) = 1 \qquad P(C = \theta | B = \gamma) = 1/2 \tag{211}$$

$$P(C = \iota | B = \varepsilon) = 1 \qquad P(C = \iota | B = \gamma) = 1/2$$

Her er A og C uafhængige og uafhængige givet B.

SÆTNING Lad hændelserne C_λ være variable i et Bayesiansk netværk med C_0 som eneste initielle variabel, så det gælder at

$$P(C_\mu | d) > P(C_\mu | D) \qquad \text{for} \quad D \in K(C_\mu) \tag{212}$$

hvor $d = \bigcap C_\lambda$, og C_λ gennemløber $f(C_\mu)$, og hvor D er en værdi af variablen $f(C_\lambda)$ forskellig fra d. Da gælder

$$P(\bigcap_{\mu \in M} C_\mu | C_0) > P(\bigcap_{\mu \in M} C_\mu) \tag{213}$$

for alle delmængder M af indices, så $C_\mu \gg C_0$.

BEVIS Det bevises ved induktion efter længden n af den længste orienterede vej fra C_0 til et C_μ.

$\underline{n = 1}$ Intet at vise.

<u>Antag at sætningen er sand for</u> $\underline{n = j.}$

Antag at den længste vej fra C_0 til et C_μ er $j + 1$. For alle $C_i \in \bigcup_M f(C_\mu)$, $i = 1, 2, \ldots k$ findes en orienteret vej fra C_0 til C_i, da C_0 er eneste initielle variabel. Vejen har højst længde j, da der ellers findes en vej fra C_0 til C_i, der er længere end $j + 1$. Derfor gælder ifølge induktionantagelsen at

$$P(\bigcap_i C_i | C_0) > P(\bigcap_i C_i), \tag{214}$$

så det er nok at vise sætningen for et netværk, der består de variable C_0, C_i, C_μ. Definér hændelserne $A_0 = C_0$, $A_1 = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_k$, $A_2 = \bigcap C_\mu$. Da er A_0, A_1, A_2 en Markovkæde, og betingelserne i lemmaet er opfyldte. Den første ulighed gælder ifølge induktionsantagelsen, og den anden gælder da

$$
\begin{aligned}
&P(A_2 | \complement A_1) && (215)\\
&= \sum_{D \neq d} P(A_2 | D) \cdot P(D | \complement A_1)\\
&= \sum_{D \neq d} \prod_{\mu} P(C_\mu | D) \cdot P(D | \complement A_1)\\
&< \sum_{D \neq d} \prod_{\mu} P(C_\mu | A_1) \cdot P(D | \complement A_1)\\
&< \sum_{D \neq d} P(A_2 | A_1) \cdot P(D | \complement A_1)\\
&= P(A_2 | A_1)
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Sætningen giver en opskrift på, hvad man kan gøre, hvis man vil ændre på en variabel V, der antager værdien v. Find variable F_1, F_2, F_k, med værdier f_1, f_2,...f_k, så betingelsen i sætningen er opfyldt for $C_i = (F_i = f_i)$. Gør det samme for hver af de variable F_1, F_2, F_k, og gentag processen indtil man enten har nået en beslutningsvariabel, eller til det er oplagt at man aldrig vil nå en beslutningsvariabel, eller man ikke kan udvide netværket med interessante variable, der opfylder ovenstående betingelse. Hele denne redegørelse kalder man i almindelighed en forklaring på, hvorfor V = v. Og når processen stopper siger man ofte, at man har fundet årsagen/årsagerne. Man kan naturligvis bruge samme procedure og terminologi selvom man ikke tænker på det som et forsøg på at finde beslutningsvariable.

I almindelighed vil man nøjes med at kræve at

$$
\begin{aligned}
&P(V = v | F_i = f_i \text{ for } F_i \in f(V)) > && \text{for } E \subseteq f(C_\mu) && (216)\\
&P(V = v | F_i = f_i \text{ for } F_i \in f(V) \setminus E) && E \neq \emptyset
\end{aligned}
$$

i stedet for kravet i sætningen, for at kalde konstruktionen en forklaring. Dette krav siger, at V = v er mere sandsynligt givet alle forældrene, end hvis man kun betingede med visse af forældrene. Kravet i sætningen er at V = v er mere sandsynligt givet at forældrevariablene antager andre værdier, hvilket er et stærkere krav.

I Thagards (1991) artikel gives en god[1] oversigt over forskellige teorier om hvad en forklaring er. Han nævner 6 typer teorier: deduktive, statistiske, skematiske, analogiteorier, kausale og lingvistisk/pragmatiske. Hertil kan føjes kontrafaktiske teorier for forklaring. At forklare hvad en forklaring er, er oplagt et dårligt projekt, men man kan i en begrebmæssigt pragmatisk ånd godt pege på fornuftige anvendelser af begreberne, hvilket er sådan ovenstående skal opfattes.

EKSEMPEL Et formelt matematisk bevis for en given sætning består af en sekvens af udsagn, hvor hvert udsagn enten er en antagelse/-aksiom eller en logisk konsekvens af de foregående udsagn. Nu tildags vil man sige at antagelserne/aksiomerne er beslutningsvariable, men man har tidligere anset aksiomerne for objektivt sande udsagn, der ikke kunne analyseres yderligere. Almindelige matematiske beviser er forklaringer, der overbeviser læseren om at man principielt kunne forfine forklaringen til et formelt bevis.

EKSEMPEL (Collingwood 1940) En bil skrider ud et givet sted i et sving, rammer kantstenen, og vender rundt. Fra førerens synspunkt var årsagen til ulykken, at han kørte for hurtigt rundt i svinget, og det man kan lære er, at man skal køre langsommere. Fra vejinspektørens synspunkt var årsagen en fejl i vejens belægning eller afrunding, og det man kan lære er, at vejen skal laves mere skridsikker. Fra bilfabrikantens synspunkt var grunden en fejl i bilens design, og det man kan lære er, at tyngdepunktet skal placeres lavere.

Ovenstående viser, hvordan årsagerne er aner til effekterne i Bayesianske netværk, og hvordan det normalt er aner til en på-

[1]Det bør dog bemærkes, at han ikke nævner Pearls opfattelse af en snæver sammenhæng mellem forklaring og kausalitet (se Pearl 1990).

stand, der indgår i forklaringer. Det giver grund til at identificere *kausalitens retning* med orienteringen af modeller for uafhængighed.

Denne betragtningsmåde viser også, hvorfor årsagssætningen både kan bruges som et argument for altings uafvendelighed, som det skete hos stoikere, og som et middel til at gribe ind og styre sine omgivelser, som det moderne samfund gør. Hvis man ikke er uforbeholden fatalist eller ikke ønsker at gøre mennesket omnipotent er der *a priori* ingen grund til at acceptere årsagssætningen. Desværre for årsagssætningens tilhængere er den tilsyneladende i modstrid med kvantemekanikken. Der *findes* fænomener, der principielt er umulige at styre eller forudse. Dette udelukker dog ikke årsagssætninger af mere afgrænset gyldighed. F.eks. må følgende årsagssætning for cykler være gyldig:"enhver mislyd ved en cykel har en årsag".

Endvidere må forestillingen om objektive årsager afvises. Hvad der udnævnes til årsag beror på de betragtede variable, de anvendte sandsynligheder, hvilke beslutningsvariable den enkelte har og en moralsk afgørelse af hvilke beslutningsvariable, man vil eller ikke vil ændre på.

Faye (1981) prøver at definere et objektivt årsagsbegreb:
Lad os derfor stadigvæk antage, at P og Q er gensidigt nødvendige og tilstrækkelige. Vi har da, at hvis P forekommer, vil dens forekomst i kraft af naturlovene sikre, at Q forekommer under omstændighederne. Vi kan nu definere følgende kriterium på den kausale orden: I tilfælde af at P forårsager Q, vil en intervention over for P hindre Q i at forekomme; hvorimod omvendt en intervention i princippet kan rettes over for Q, uden at det har nogen indflydelse på, om P forekommer. Grunden er, at da den indgribende hændelse ikke er bestemt af de berørte naturlove, kan den intervenere over Q uden at berøre P's forekomst. Modsat dette tilfælde, hvor P forårsager Q, hvis Q forårsager P, vil en intervention over for Q hindre P i at forekomme; hvorimod omvendt en intervention i princippet kan rettes over for P, uden at det har nogen indflydelse på, om Q forekommer....

Med en definition som ovenstående er der følgende problemer:

1) Der gøres <u>ikke</u> opmærksom på at valget af variable er af betydning.

2) Det forklares <u>ikke</u> hvordan man objektivt skelner mellem årsag og omstændigheder. Netop på dette punkt har subjektive sunspunker deres berettigelse.

3) Det diskuteres <u>ikke</u> at for at definitionen skal kunne være anvendelig, skal de variable indgå i en harmonisk I-model.

4) I ovenstående formulering er kriteriet antropomorft i den forstand at det henviser til en (menneskelig) intervention. Dette vil blive nærmere behandlet i afsnittet om kausalitetens inter-subjektivitet.

5.6.Samtidighed

Ifølge klassisk vesteuropæisk opfattelse kan tiden til et hvert tidspunkt inddeles i fortid, nutid og fremtid. I de foregående afsnit er det vist, hvordan orienteringen af I-modeller og Bayesianske netværk svarer til den temporale ordning. Hvis det om 2 variable A, B gælder at $A \leq B$, så vil A opfattes som værende før B. Forestillingen om inddelingen i fortid, nutid og fremtid svarer til at ordningen $\leq$ var en total præordning. Da en total præordning giver flere muligheder for at opstille årsager og gribe ind i fænomenerne, har den vesteuropæiske kultur gjort sig store bestræbelser på at opnå en total præordning. Man har ind-rettet sig med tekniske hjælpemidler til hurtig transport og kom-munikation for at kunne lave kausale forbindelser mellem begiven-heder over store geografiske afstande. Alle borgere er så vidt muligt udstyret med ure, så man kan holde rede på, hvilke begiven-heder man stadig kan have indflydelse på, og hvad der er for sent.

Hele dette projekt er lykkedes i forbavsende høj grad; faktisk i så høj grad at de fleste før Einstein's relativitetsteori troede at inddelingen i fortid, nutid og fremtid var absolut. Forestillingen om samtidighed var så indgroet at den blev overtaget i den specielle relativitetsteori blot som et relativt begreb. Teknikken består i at lave en total ordning $\ll$, så

$$A \leq B \Rightarrow A \ll B \qquad (217)$$

Dette kan man altid gøre, og konstruktionen vil ikke være entydig (hvis $\leq$ ikke er en total ordning i forvejen). Bemærk iøvrigt at alle variable i orienterede løkker vil blive samtidige ved en sådan konstruktion. I den specielle relativitetsteori har man, som vi skal se i næste kapitel, gjort tingene mere forvirrende ved at indføre et samtidighedsbegreb, der er relativt, og ikke kan anvendes i almen relativitetsteori, i stedet for at droppe begrebet.

5.7. Mangeverdensteorien

I nyere tid har der været en særlig type teorier fremme, der skulle belyse forholdet mellem tid og mulighed. Ideen er, at fortiden består af fakta, mens fremtiden består af muligheder. Der skulle således i et givet øjeblik være en fortid men en masse fremtider. I kombinatorik er det almindeligt at lave kombinationstræer for bedre at kunne overskue komplicerede problemer. Denne metode tages da i brug, så vi i et givet øjeblik befinder os i det første forgreningspunkt. Som tiden går, bevæger vi os frem gennem træet, og hvad vi ser som fortid er blot vor løbebane gennem træet. I de mere radikale udgaver af teorien hævdes det, at de andre grene også bliver realiseret, blot foregår det i andre verdener.

Ideen blev første gang fremsat i Borges' kriminalnovelle fra 1941 "Haven med stier der deler sig". Uafhængigt af Borges kom samme år en videnskabelig artikel af Findlay om emnet. Siden har logikere (Prior 1957, Rescher & Urquhart 1971, McArthur 1976) taget ideen op i forsøget på at lave en tidslogik. I kvantemekanik, hvor måleproceduren er en del af formalismen, er erkendelsesteoretiske problemer åbenlyse, og måske derfor er mange-verdensteorien blevet særligt populær blandt visse fysikere

(Everett 1957, De Witt & Graham 1973, Rosen 1990, Squires 1990).

Med den tilgang til emnet, der er valgt her, må sådanne teorier afvises. De indeholder implicit et samtidighedsbegreb. Det man kan sige er, at det kun er fortiden man kan have direkte viden om, og at man kun har indflydelse på fremtiden. Men man kan ikke slutte fra "man har kun indflydelse på fremtiden" til, at fortiden består af facts; og man kan heller ikke slutte fra "det er kun fortiden man kan have direkte viden om" til, at det er ikke muligt at vide noget fremtiden med bestemthed. Mange-verdensteorien må derfor afvises, da den ikke fortæller noget væsentligt om tidens natur. Eller som Rescher (1971) udtrykte det kan man nok tale om "branching in time" men ikke om "branching of time".

5.8.Kausalitetens intersubjektivitet

I dette afsnit vil vi undersøge i hvor høj grad den kausale orientering er en intersubjektiv relation. Det er her væsentlig at fastlæggelsen af en harmonisk relation består af 3 dele: Fastlæggelse af betragtede variable, fastlæggelse af uafhængighedsrelation og valg af harmonisk ordning. Hvis uafhængighedsrelationen er givet som stokastisk uafhængighed svarende til et subjektivt sandsynlighedsmål, så er både uafhængighedsrelationen og en eventuel dertil hørende harmonisk ordning lige så subjektiv som det subjektive sandsynlighedsmål. Hvis man derimod benytter frekvenser, vil man få en uafhængighedsrelation, som har en intersubjektiv eksistens omend den vil være behæftet med den samme usikkerhed som frekvenserne. Vi har tidligere (afsnittet om harmoni og lokalitet) set et eksempel på at orienteringen af de to variable B og C afhang af hvilke andre variable man så på. I eksemplet kunne der være tale om frekvenser, så selvom de variable {A,B,C} og {B,C,D} beskriver samme verden (samme frekvenser på samme udfaldsrum), så er den kausale orientering af B og C ikke fastlagt. Det gælder derfor ikke generelt, at man kan nå til en intersubjektivt veldefineret kausal retning, hvis valget af variable <u>er</u> <u>frit</u>. Sagen er imidlertid at valget af variable ikke altid er frit.

Lad der være givet 2 iagttagere/agenter som prøver at afgøre om $A \leq B$ eller $B \leq A$. De 2 iagttagere har hvert deres forslag til valg af variable og derfor også hver sin harmoniske relation $\leq_1$ henholdsvis $\leq_2$. De argumenterer hver for at deres harmoniske relation har størst berettigelse. Spørgesmålet er da om

$$A \leq_1 B \Leftrightarrow A \leq_2 B \tag{218}$$

idet vi antager at A og B indgår i begge iagttageres valg af variable. Ellers er der ikke meget at diskutere. Som vi har set vil en iagttagers erkendelsestilstande udgøre en verdenslinie i enhver harmonisk I-model, der beskriver iagttageren som en iagttager. For at det skal give mening at tale om 2 iagttagere, der har en diskusion om $A \leq B$ eller $B \leq A$, må de betragte hinanden som iagttagere. Derfor vil begge iagttageres I-modeller udover A og B indeholde 2 verdenslinier, der indeholder variable, der beskriver henholdsvis den enes og den andens erkendelsestilstand. Lad L betegne mængden af variable på de 2 verdenslinier.

Antag at $A \leq_1 B$. Da gælder $a_1(A) \subseteq a_1(B)$ og dermed

$$a_1(A) \cap L \subseteq a_1(B) \cap L \tag{219}$$

Antag at der ikke gælder lighedstegn. Da findes en variabel $X \in (a_1(B) \cap L)/(a_1(A) \cap L)$. Antag at $f_1(X) = f_2(X)$ og at $I[X,A|f_1(X)]$. Da gælder $\neg I[X,A|B \cup f_1(X)]$, hvilket viser $\neg(B \leq_i A)$, $i = 1,2$. Vi har herved etableret følgende antropomorfe kriterium for kausalitet: A er årsag til B og ikke omvendt hvis det er muligt at påvirke B uden at påvirke A. For at udelukke muligheden af at A og B har en fælles årsag tilføjes ofte: under omstændighederne vil en påvirkning af A også påvirke B. At specificere hvad der skal forstås ved *omstændighederne*, vil efter forfatterens opfattelse kræve rekonstruktion af teorien for I-modeller, og er i en vis forstand indholdet af denne afhandling.

Vi ser altså, at det antropomorfe kriterium for kausalitet bygger på forestillingen om at de eneste variable, der ikke beror på et subjektivt valg, er dem der beskriver de kommunikerende iagttagere. Eksemplet fra afsnittet om harmoni og lokalitet kan da forklares ved at sige, at disse variable må være nogle, der højst kan iagttages men ikke påvirkes. Dette kunne ske ved at $a\{A,B,C\} \cap L = \emptyset$ og $\{A,B,C\} \cap a(L) = \{A,B,C\}$. Bemærk at ovenstående ikke udelukker eksistensen af iagttagere som ikke beskriver hinanden som iagttagere og derfor ikke kan kommunikere med hinanden. Disse *komplementære* iagttagere kan tænkes at leve i samme verden i den forstand at udfaldsrum og frekvensielt sandsynlighedsmål er det samme for de 2 iagttagere. Der er heller ikke noget i vejen for at de har de variable A og B fælles uden at have en fælles opfattelse af kausalitetsretningen mellem de to variable. De skal blot ikke have alt for mange andre variable fælles, thi ellers vil resultater fra afsnittet om I-modeller i almindelighed kunne tages i anvendelse, idet en eftervisning af at $A \le B$ i alle harmoniske præordninger kræver et vist antal variable at argumentere med.

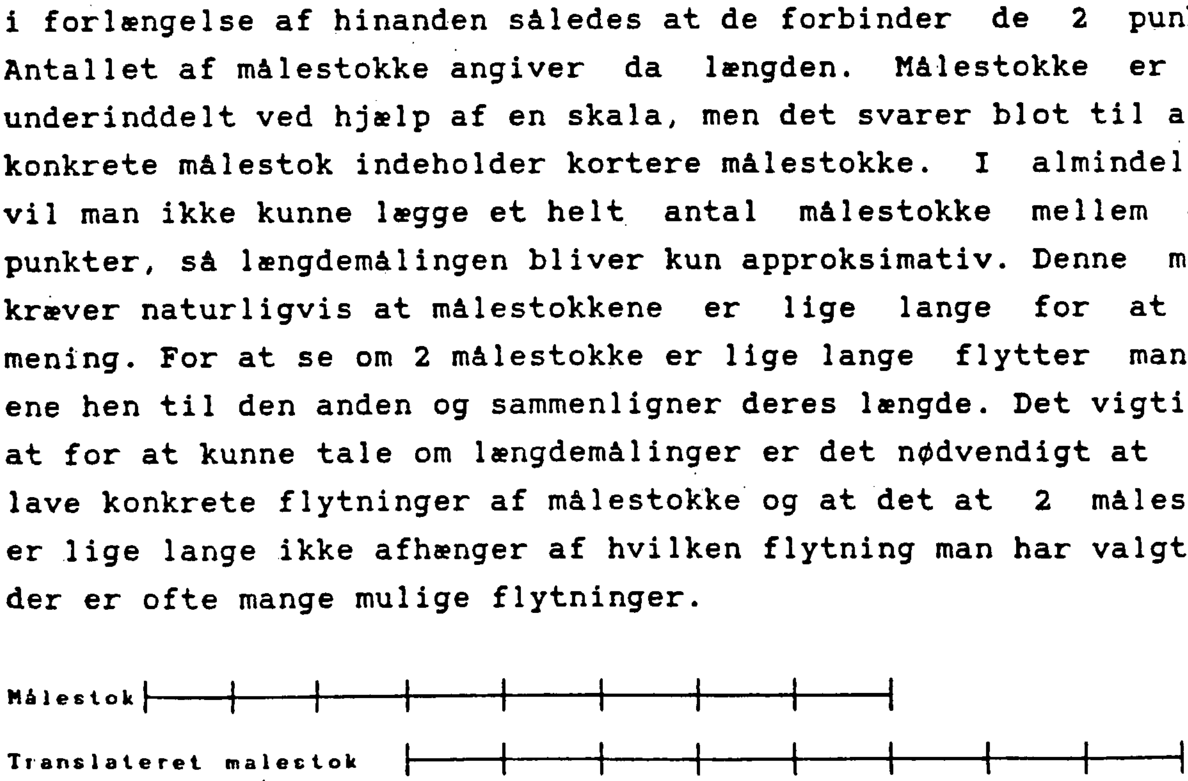
Ovenstående viser at det ikke er muligt at definere en objektiv kausalitetsretning. Entropiens vækst vil ikke kunne anvendes til at angive en objektiv tidsretning, idet denne bygger på "valget" af makroskopiske variable. Når jeg her siger valg, er det fordi ordet makroskopisk heller ikke nødvendigvis giver samme mening for komplementære iagttagere. Derimod er det i almindelighed muligt at definere en intersubjektiv kausalitetsretning, idet 2 kommunikerende iagttagere nødvendigvis har mange variable fælles. Som vi skal se i næste kapitel vil symmetribetragtninger sætte yderligere begrænsninger på valget af variable og dermed udelukke de fleste eksempler på komplementære iagttagere uden dog helt at udelukke muligheden.

6. TIDENS GEOMETRI

I dette kapitel vil vi undersøge tiden ud fra et geometrisk synspunkt. Det vil sige måling af tiden og tidens relation til andre geometriske størrelser. Da målinger normalt regnes ind under fysikken, bliver dette aspekt af tiden somme tider kaldt fysisk tid i modsætning tid fænomenologisk tid, men det tidsbegreb man benytter i fysik indeholder altid både geometriske og fænomenologiske aspekter.

6.1.Tidsmålinger

Lad os først se lidt på længdemålinger. Den grundlæggende måde at måle længder på er og har altid været ved hjælp af målestokke. For at måle afstanden mellem 2 punkter lægges et antal målestokke i forlængelse af hinanden således at de forbinder de 2 punkter. Antallet af målestokke angiver da længden. Målestokke er ofte underinddelt ved hjælp af en skala, men det svarer blot til at den konkrete målestok indeholder kortere målestokke. I almindelighed vil man ikke kunne lægge et helt antal målestokke mellem de 2 punkter, så længdemålingen bliver kun approksimativ. Denne metode kræver naturligvis at målestokkene er lige lange for at give mening. For at se om 2 målestokke er lige lange flytter man den ene hen til den anden og sammenligner deres længde. Det vigtige er at for at kunne tale om længdemålinger er det nødvendigt at kunne lave konkrete flytninger af målestokke og at det at 2 målestokke er lige lange ikke afhænger af hvilken flytning man har valgt for der er ofte mange mulige flytninger.



Tid måles ved hjælp af ure, men det var først med det mekaniske ur i middelalderen at man begyndte at tilstræbe at

Ur

Senere startet ur

tidsmålingerne skulle være invariante over for temporale translationer. Førhen havde man hovedsageligt brugt ure som en erstatning for himmellegemerne, og man måtte da også ideligt justere på sine sand- eller vandure for at få det til at passe. Således var dagen inddelt i 12 timer uanset om det var sommer eller vinter.

Målestokke kan være konkrete målestokke af træ eller et andet materiale men kan også være en bølgelængde af en elektromagnetisk bølge eller noget helt tredje. Målestokkene kan være beskrevet i en teori som f.eks. Euklidisk geometri, hvorved kravet om translationsinvarians overføres til den pågældende teori. Tilsvarende kan urene være mekaniske eller elektroniske ure eller mere abstrakt definerede ure indeholdt i en større teori.

Af det ovenstående skulle det gerne fremgå at tidsmålinger som målinger ikke adskiller sig fra stedmålinger. Det væsentlige er at målestokkene/urene er invariante overfor en gruppe af spartielle/-temporale translationer. Sammenhængen mellem sted og tidsmålinger har givet anledning til en teori, relativitetsteorien, der i sin natur er helt geometrisk. At den geometriske parameter t, der indgår i relativitetsteorien skulle have noget med uafhængighedsrelationen er således ikke helt oplagt, og det er emnet for næste afsnit.

6.2.Relativitetsteori og ordningen $\leq_1$

Det lykkedes i 1905 Einstein af lave en geometrisk teori om rum og tid således at Maxwell's ligninger blev invariant under den gruppe af transformationer, der bevarede den geometriske struktur af rumtiden. Den pågældende gruppe er den inhomogene Lorentz-gruppe $\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}$ (også kaldet Poincaré-gruppen), hvor $\mathbb{M}$ er et Minkowski-rum med additiv struktur, $\mathcal{L}$ er Lorentz-gruppen, og $\oplus_s$

betegner semidirekte produkt. Det er senere lykkedes at formulere alle fysikkens fundamentale ligninger således, at de lokalt er invariante under den restringerede inhomogene Lorentz-gruppe $\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$, hvor $\mathcal{L}_0$ er den sammenhængskomponent af $\mathcal{L}$, der indeholder identiteten. En vilkårlig teori afledt af de fundamentale ligninger vil også være $\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$-invariant.

Vi tænker os nu en sådan teori $\mathfrak{T}$. Vi tænker os endvidere, at teorien indeholder en uafhængighedsrelation I, der er transitiv. Teorien kunne f.eks. være en stokastisk feltteori eller en statistisk mekanisk teori. Da vil I være $\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$-invariant, og det samme vil gælde præordningen $\leq_I$. Lad $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ være mængden af elementer g i $\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$, således $X \leq g(X)$ for alle variable $X \in \mathfrak{T}$. Antag at $g_1, g_2 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Da gælder også $g_1 g_2 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, idet

$$X \leq g_2(X) \leq g_2 g_1(X) \tag{220}$$

for alle variable X. Antag $g \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Da gælder $h^{-1}gh \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, idet

$$X \leq h^{-1}gh(X) \Leftrightarrow h(X) \leq gh(X) \tag{221}$$

og $X \leq g(X)$ for alle X. Envidere vil vi antage, at $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ er afsluttet. Vor næste opgave er at klassificere de forskellige muligheder for hvad $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ kan være.

Lad t betegne temporal translation, og lad $\underline{x}$ betegne spartiel translation. Lad envidere $\bar{\ }\underline{v}$ betegne Lorentz-transformationen, der svarer til et koordinatsystem, der bevæger sig med hastighed $\underline{v}$. Lad endeligt $\underline{r}$ betegne rotation om vektoren $\underline{r}$ med en vinkel af størrelse $\|\underline{r}\|$.

Der er nu følgende muligheder:

1) $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \{0\}$.

2) Antag $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ indeholder den temporale translation $t_0 > 0$. Da indeholder $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ også $\underline{v}^{-1}t\underline{v}$, hvilket giver enhver translation af formen $\underline{x}t$, hvor $t^2 - \|\underline{x}\|^2 = t_0^2$, $t > 0$. Enhver translation $\underline{x}t$, hvor $t^2 - \|\underline{x}\|^2 \geq (2t_0)^2$, $t > 0$, kan skrives

som en sum af 2 translationer af formen $\underline{x}t$, hvor $t^2 - \|\underline{x}\|^2 = t_0^2$, $t > 0$. Dette giver muligheden:
$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \{\underline{x}t \mid t > 0$, og $t^2 - \|\underline{x}\|^2 = t_0^2$ eller $t^2 - \|\underline{x}\|^2 \geq (2t_0)^2\}$.
3) Foreningsmængder af formen 2).
4) Som 2) eller 3) men med t_0 negativ.
5) Antag at $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ indeholder $\underline{x}_0t_0$, hvor $t_0 > 0$ og $t_0{}^2 - \|\underline{x}_0\|^2 = 0$. Da indeholder $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ også $\underline{r}^{-1}\underline{x}_0t_0\underline{r}$ og dermed alle translationer af formen $\underline{x}t_0$, hvor $\|x\| = t_0$. Envidere indeholder $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ $\underline{v}^{-1}\underline{x}t_0\underline{v}$ og dermed alle translationer af formen $\underline{x}t$, hvor $t = \|x\|$. Ved addition kan alle translationer af formen $\underline{x}t$, hvor $t \geq \|x\|$. Dette giver muligheden:
$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \{\underline{x}t \mid t \geq \|x\|\}$.
6) Som 5) men med $t < 0$.
7) Antag $\underline{x}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$. Da er også $\underline{r}^{-1}\underline{x}_0r$ element i $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Ved addition af 2 sådanne elementer kan alle elementer $\underline{x}$ med $\|\underline{x}\| \leq 2\|\underline{x}_0\|$ opnås. Ved addition kan alle spartielle translationer opnås. Derfor indeholder $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ alle elementer af formen $\underline{v}^{-1}\underline{xv}$. Ved at addere en passende spartiel translation $\underline{y}$ er $\underline{v}^{-1}\underline{xvy}$ en temporal translation. Således kan enhver temporal translation opnås, hvilket giver muligheden:
$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}$.
8) Antag $\underline{v}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$. Da gælder $\underline{v} \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, for alle hastigheder $\underline{v}$, hvilket vises omtrent som i 7). Derfor indeholder $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ både $t^{-1}\underline{v}t$ og $(t^{-1}\underline{v}t)\underline{v}^{-1} = t^{-1}(\underline{v}t\underline{v}^{-1})$, og tilsvarende $t(\underline{v}t^{-1}\underline{v}^{-1})$. Heraf ses, at $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ indeholder summen af $t^{-1}(\underline{v}t\underline{v}^{-1})$ og $t(\underline{v}t^{-1}\underline{v}^{-1})$, som er rent spartiel. Det giver muligheden:
$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}\cup\{\text{hastigheder}\}$.
9) Antag $\underline{xv} \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, hvor $\underline{x}$ og $\underline{v}$ har forskellige retninger og $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$. Da indeholder $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$ også $\underline{vx}^{-1}$ og $\underline{r}^{-1}\underline{vx}^{-1}\underline{r}$, hvor $\underline{r}$ er en rotation således at $\underline{r}^{-1}\underline{vr} = -\underline{v}$ og $\underline{r}^{-1}\underline{x}^{-1}\underline{r} \neq -\underline{x}$. Da er

$$\underline{xvr}^{-1}\underline{vx}^{-1}\underline{r} = \underline{xr}^{-1}\underline{x}^{-1}\underline{r} \tag{222}$$

et spartielt element i $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, hvilket viser at $-\underline{x} \in$

$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, og dermed $\underline{v} \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, så det giver samme situation som 8).

10) Antag $\underline{x}_0\underline{v}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, hvor $\underline{x}_0$ og $\underline{v}_0$ har samme retning og $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$. Da har $\underline{v}_1^{-1}\underline{x}_0\underline{v}_0\underline{v}_1$ formen $\underline{xv}$, hvor $\underline{x}$ og $\underline{v}$ har forskellige retninger, så det giver samme situation som 9).

11) Antag $t_0\underline{x}_0\underline{v}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$. Da har $\underline{v}^{-1}t_0\underline{x}_0\underline{v}_0\underline{v}$ form som i 8), 9) eller 10) eller $t\underline{v}_1$. Antag det sidste og $t > 0$. Da gælder $(t + t')\underline{v}_1(-t') \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Lad $\underline{r}$ være en rotation således at $\underline{r}^{-1}\underline{v}_1\underline{r} = -\underline{v}_1$. Da er $t\underline{v}_1\underline{r}^{-1}(t + t')\underline{v}_1(-t')\underline{r}$ en translation og fortegnet for den temporale del af translationen afhænger af t', hvilket viser at $\mathbb{M} \subseteq (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Det viser således at $\underline{v}_1 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, og vi er igen i situation 8).

12) Antag $\underline{r}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, $\underline{r} \neq \underline{0}$. Da er $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ \cap SO(3)$ en lukket normal undergruppe af $SO(3)$, hvilket viser at $SO(3) \subseteq (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, idet $SO(3)$ er simpel. Envidere gælder at $\underline{v}^{-1}\underline{rv}$ og $\underline{v}^{-1}\underline{rvr}^{-1}$ ligger i $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Men $\underline{v}^{-1}\underline{rvr}^{-1}$ er en hastighed, så ifølge 8) er vi i den situation at:

$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$

13) Antag $\underline{v}_0\underline{r}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, $\underline{r}_0 \neq \underline{0}$. Da er også $\underline{r}^{-1}\underline{v}^{-1}\underline{v}_0\underline{r}_0\underline{vr}$ element i $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Ved sammensætning fås elementet $\underline{v}_0\underline{r}_0\underline{r}^{-1}\underline{v}^{-1}\underline{v}_0\underline{r}_0\underline{vr}$, der for passende valgt $\underline{r}$ og $\underline{v}$ ikke indeholder noget rotationsled. Det viser at alle hastigheder ligger i $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, og dermed $\underline{r}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$. Dette giver altså samme situation som 12).

14) Antag $t_0\underline{x}_0\underline{v}_0\underline{r}_0 \in (\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+$, $\underline{r}_0 \neq \underline{0}$. Da er $(t\underline{x})^{-1}t_0\underline{x}_0\underline{v}_0\underline{r}_0t\underline{x} = (t\underline{x})^{-1}t_0\underline{x}_0(\underline{v}_0\underline{r}_0t\underline{x}\underline{r}_0^{-1}\underline{v}_0^{-1})\underline{v}_0\underline{r}_0$. For passende valgt $t\underline{x}$ er dette element lig med $\underline{v}_0\underline{r}_0$, og vi er i situation 13).

Der er med andre ord følgende muligheder:

$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \{0\}$

$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ \subseteq \mathbb{M}_+$

$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ \subseteq \mathbb{M}_-$

$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}$

$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}\oplus_S\text{hastigheder}$

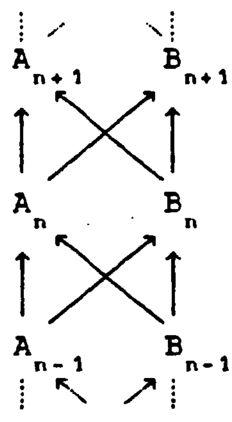
$(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$

Den tredie mulighed overgår i den anden ved fortegnsskift, idet vi husker at fortegnet for den geometriske parameter t er valgt arbitrært. Hvis ækvivariante variable identifiseres med hinanden svarer de sidste 3 muligheder til at $\mathbb{M}$ virker trivielt. Den interessanteste mulighed er derfor $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ \subseteq \mathbb{M}_+$, hvilket i almindelighed er den, der er fysisk realiseret. Matematik er et eksempel på en teori, hvor $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$, idet Matematik er en tidløs videnskab. Muligheden $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbb{M}_+$ er den almindeligste forekommende i fysik, mens $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ \subset \mathbb{M}_+$ svarer til, at de fysiske reaktioner sker med en vis tidsforsinkelse. Muligheden $(\mathbb{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \{0\}$ ser ikke ud til at være fysisk realiseret, men det skyldes måske blot min manglende fantasi.

Konklusionen er at Lorentzinvarians sætter så skrappe bånd på vore teorier, at der er få andre muligheder end, at translationer med den geometriske parameter t giver en ordningsbevarende afbildning $(\mathbb{R},\leq)$ over i $(\mathfrak{I},\leq)$. Det er derfor rimeligt at identificere ordningen defineret ved hjælp af de positive lyskegler med ordningen $\leq_I$ stammende fra en uafhængighedsrelation. Da generel relativitetsteori lokalt identisk med speciel relativitetsteori giver lyskeglerne også her en ordning, der stemmer overens med $\leq_I$.

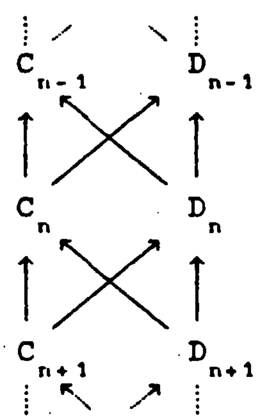
Ovenstående udelukker ikke nødvendigvis muligheden af komplementære iagttagere som nedenstående eksempel viser. Man kan øjensynligt lave et tilsvarende (men langt mere indviklet) eksempel hvor Lorentzgruppen anvendes, men det er ikke lykkedes for forfatteren, så en undergruppe $\mathbb{Z}$ af tidstranslationer benyttes i stedet.

EKSEMPEL Lad A_n og B_n, $n \in \mathbb{Z}$ være normaltfordelte stokastiske variable beskrevet med følgende bayesianske netværk



(223)

Vi vil vælge sandsynlighedsfordelingen således, at den bliver invariant under "temporale translationer". Som vi skal se nedenfor vil vi ved passende valg af sandsynlighedsfordeling opnå, at der findes en matrix $\underline{\underline{M}}$, så de nye variable C_n og D_n defineret ved $(C_n, D_n) = \underline{\underline{M}}(A_n, B_n)$ kan beskrives med det Bayesianske netværk



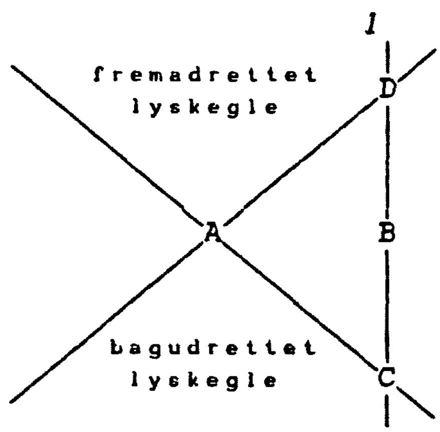
(224)

I det første Bayesianske netværk gælder for en translation $t \geq 0$ at $X \leq_I t(X)$, mens der i det andet Bayesianske netværk gælder $X \geq_I t(X)$ selvom de Bayesianske netværk beskriver samme verden (samme udfaldsrum med samme sandsynlighedsfordeling).

I stedet for at angive sandsynlighedsfordelingerne vil vi vise hvordan de kan konstrueres, da det er mere illustrativt. Vælg en normalfordeling på vektoren (A_0,B_0,A_1,B_1) med middelværdi $\underline{0}$, så A_1 og B_1 er uafhængige givet (A_0,B_0). Ved at gange (A_0,B_0) med en passende valgt matrix kan vi opnå (A_0,B_0) får samme kovariansmatrix som (A_1,B_1). Den stokastiske proces $(A_n,B_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er da entydigt givet ved kravet om translationsinvarians og det Bayesianske netværks markovegenskaber. Der findes nu en matrix $\underline{\underline{N}}$ så kovariansmatricen for $\underline{\underline{N}}(A_0,B_0)$ givet $(A_1,B_1) = (0,1)$ er enhedsmatricen. For passende valgt ortogonal matrix $\underline{\underline{O}}$ gælder at kovariansmatricen for $\underline{\underline{O}}\underline{\underline{N}}(A_0,B_0)$ givet $(A_1,B_1) = (1,0)$ er diagonal. Sæt $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{O}}\underline{\underline{N}}$.

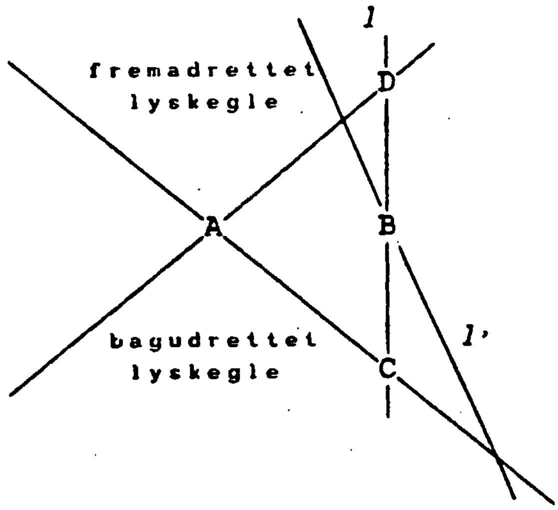
6.3. Samtidighed i relativitetsteori

I speciel relativitetsteori benytter man i almindelighed følgende definition af *samtidighed*: Lad en iagttager i et inertialsystem være givet ved sin verdenslinie l. En begivenhed A i $\mathbb{M}$ siges at være samtidig med en begivenhed B på l dersom: skæringspunktet C mellem l og den bagudrettede lyskegle og skæringspunktet D mellem l og den fremadrettede



(225)

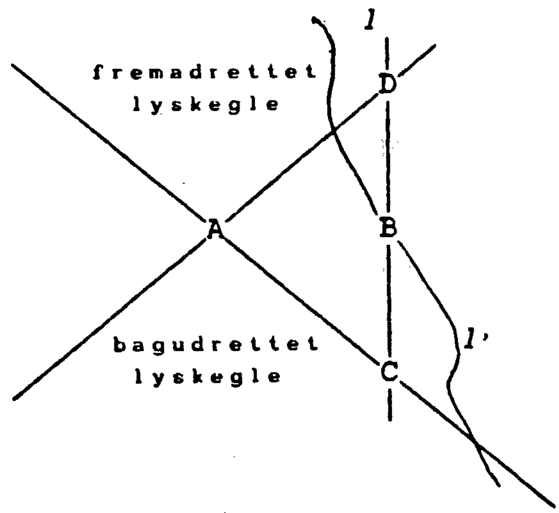
lyskegle ligger lige langt fra B. Begivenheden B er med andre ord midtpunktet mellem C og D. 2 begivenheder siges at være samtidige, dersom de er samtidige med samme begivenhed på l. Dette samtidighedsbegreb er relativt, idet det afhænger af det valgte inertialsystem, hvilket klart fremgår af nedenstående tegning, hvor *l'* er en alternativ verdenslinie for en iagttager.



(226)

Bemærk at konstruktionen kræver eksistensen af velfungerende ure, således, at det giver mening at sige, at CB er lige så lang som BD. Man kan i speciel relativitetsteori lave ikke-standard samtidighedsdefinitioner (se Friedman 1983) i hvilke lyset ikke har samme hastighed i alle retninger, hvilket kræver at rummet er anisotropt, hvilket dårligt passer ind i de ideer, der argumenteres for i denne afhandling. Ideen om rummets isotropi er grundlaget for al længdemåling, så hvis man ikke ønsker isotropi, så kan man forsyne rummet med en metrik, der ikke invariant under SO(3) og hvor målestokke ændrer længde under drejninger. Ulempen ved sådanne ikke-standard samtidighedsdefinitioner eller metrikker er, at de bortleder opmærksomheden fra det væsentlige nemlig symmetrierne som kan iagttages fysisk har en intersubjektiv eksistens. Som vi senere skal se kan ideen om symmetri anvendes til at (re-)konstruere i det mindste dele af kvantemekanikken.

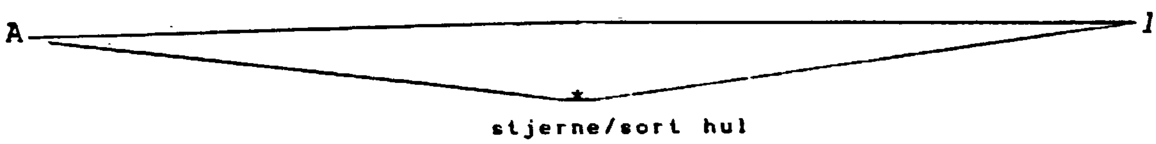
I generel relativitetsteori (se Sachs & Wu 1977) kan man forestille sig at 2 iagttagere har verdenslinier, der er identiske i en omegn af B, men globalt er forskellige, så forestillingen om samtidighed bliver endnu mere relativ. For at definere hvad der i en fjern afkrog af



(227)

universet er samtidigt med en begivenhed på jorden, skal man definere en iagttager på jorden og en verdenslinie gennem iagttageren helt tilbage til det tidlige univers og mange milliarder år frem. Hvad der er værre er at den fremad-/bagudrettede lyskegle fra en begivenhed A kan skære iagttagerens verdenslinie *l* flere steder. Det vil således ske hvis A udsender lys, der

(228)



bliver afbøjet af et stærkt tyngdefelt (graviationel linse, se Nielsen 1980) på sin vej mellem A og *l*. Observationer støtter disse betragtninger. Der er således observeret (Nielsen 1990) en kvasar, der kan ses flere steder på himmelen, og hvor det ene billede er forsinket 1,50 år i forhold til det andet[1]. Forestillingen om samtidighed giver således ingen mening i almen relativitetsteori.

6.4. Tidssymmetri

[1] I den refererede artikel er tidsforsinkelsen 1,55 år. Dette er ifølge personlig kommunikation med Ralph Florentin Nielsen senere korrigeret til 1,50 år.

Lad $\mathfrak{T}$ være en teori i hvilken der forekommer en geometrisk parameter $t \in \mathbb{R}$. at for $t \geq 0$ findes en virkning v_t, der sender variable i teorien ind i nye variable i teorien. Vi vil antage at teorien for de nye variable er identisk med teorien for de gamle variable. Envidere skal der gælde at $v_{t+t'} = v_t v_{t'}$ og $v_0 = \text{id}$. Herved virker $\mathbb{R}_{+,0}$ som en semigruppe af temporale translationer. Da siges $\mathfrak{T}$ at være *tidssymmetrisk* hvis der findes en afbildning S, der sender variable i $\mathfrak{T}$ ind i variable nye i $\mathfrak{T}$ således at $Sv_tSv_t = v_tSv_tS = \text{id}$, og således at teorien for de nye variable er identisk med teorien for de gamle variable.

EKSEMPEL I klassisk mekanik er en tidssymmetri defineret ved erstatte tiden t med $-t$, og vektorer, der angiver hastigheder, impulser, vinkelhastigheder og impulsmomenter, med modsat rettede vektorer af samme længde.

SÆTNING Antag at $\mathfrak{T}$ er tidssymmetrisk med symmetriafbildningen S. Da kan virkningen af $\mathbb{R}_{+,0}$ udvides til en virkning af hele $\mathbb{R}$.

BEVIS For $t < 0$ sæt $v_t = Sv_{-t}S$. Det skal vises at $v_{t+t'} = v_tv_{t'}$. Det er oplagt for $t,t' \geq 0$.
For $t + t' \geq 0$ og $t' \leq 0$ gælder

$$v_{t+t'} = v_{t+t'}v_{-t'}Sv_{-t'}S = v_tSv_{-t'}S = v_tv_{t'} \tag{229}$$

Det vises på samme måde for $t + t' \geq 0$ og $t \leq 0$, så det er sandt for $t + t' \geq 0$. For $t + t' < 0$ gæler

$$v_{t+t'} = Sv_{-t-t'}S = Sv_{-t}v_{-t'}S = Sv_{-t}SSv_{-t'}S = v_tv_{t'} \tag{230}$$

Q.E.D.

Det gælder i almindelighed ikke, at hvis virkningen af $\mathbb{R}_{+,0}$ kan udvides til en virkning af hele $\mathbb{R}$, så vil der findes en tids-symmetri. Se iøvrigt Davies (1974) for diskussion af begrebet tidssymmetri, hvor yderligere referencer er at finde.

7. DEN KVANTEMEKANISKE FORMALISME

I dette kapitel vil den kvantemekaniske formalisme blive analyseret. Der er 2 trin i udledningen af formalismen. Det ene består i at afklare begreber som tilstand, måling, instrument med videre. Denne del er relevant for alle fysiske målesituationer. I det andet trin betragtes grupperepræsentationer. Hvis de relevante repræsentationer er irreducible får man elementær kvantemekanik, ellers får man noget andet f.eks. statistisk mekanik eller klassisk mekanik.

7.1.Tilstande og målinger

Første del af dette afsnit er en repetition af grundlæggende ideer hos Davis og Holevo.

I et fysisk forsøg består af en opstilling $\mathcal{O}$ og et forsøgsresultat $\mathfrak{R}$. Disse data kan være af en vilkårlig natur; de kan være diskrete, hvis måleintrumentet registrerer forekomsten af en begivenhed f. eks. tilstedeværelsen af en partikel; de kan være repræsenteret ved en skalar eller vektor alt eftersom måleinstrumentet har en eller flere skalaer; eller resultatet kan være billedet af et helt spor i et bobblekammer. For at give alle disse muligheder en ensartet behandling, vil vi antage at resultaterne udgør et målrum $\mathfrak{U}$ med en σ-algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{U})$ af målelige delmængder. En målelig delmængde $B \subseteq \mathfrak{U}$ svarer til begivenheden at resultatet ligger i B. Tilsvarende vil vi antage at mængden af opstillinger O (og de mulige værdier af alle andre variable, der introduceres i dette afsnit) udgør en målelig mængde. Et individuelt resultat er sjældent helt bestemt ud fra opstillingen. Hvis man betragter gentagne eksperimenter, vil frekvensen af de forskellige resultater derimod være entydigt bestemt (frekvensen er en intersubjektiv skjult variabel). I det følgende vil vi kun tale om frekvenser, men huske på at det samme kan beskrives med subjektive sandsynligheder. Følgende Bayesianske diagram beskriver situationen

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathfrak{R} \tag{231}$$

I laboratorieforsøg vil $\mathcal{O}$ i almindelighed kunne opfattes som en beslutningsvariabel, men kan også afhænge af andre variable. Til det Bayesianske netværk svarer en afbildning $\mathfrak{G}(\mathrm{O}) \longrightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{U})$, hvilket er et deterministisk netværk.

Ofte vil $\mathcal{O}$ og $\mathfrak{R}$ være sammensat af en mængde andre variable. I de situationer vi skal se på kan $\mathcal{O}$ deles op i en *præparation* $\mathcal{P}$ og en *måleprocedure* $\mathcal{M}$. Vi vil antage, at $\mathcal{P}$ og $\mathcal{M}$ er uafhængige, og udelukker dermed EPR-korrelation mellem $\mathcal{P}$ og $\mathcal{M}$. Det er hævdet at EPR-korrelation i opstillingen underminerer den kvantemekaniske formalisme, men uafhængighed kunne erstattes med approksimativ uafhængighed, hvorved argumentet falder til jorden. Det vil sige at $\mathcal{O} = (\mathcal{P},\mathcal{M})$, hvilket kan beskrives med netværket

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{R} & \\ \mathcal{P} \arrow[ur] & & \mathcal{M} \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{232}$$

Ved præparationen etableres et eksperimentalt set-up ved at nogle begyndelsesbetingelser eller input-data bliver etableret. Ved måleproceduren bliver det "præparerede objekt" koblet til et måleapparat, hvilket resulterer i observationen $\mathfrak{R}$. "Objektet" kan opfattes som "black boks", kobling eller informationskanal mellem præparation og måleapparat. Lad $\mathfrak{P}$ være mængden af præparationer og $\mathfrak{M}$ mængden af måleprocedurer. Da har vi det deterministiske netværk

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{G}(\mathrm{U}) & \\ \mathfrak{G}(\mathfrak{P}) \arrow[ur] & & \mathfrak{G}(\mathfrak{M}) \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{233}$$

Herved haves for $\mu \in \mathfrak{G}(\mathfrak{M})$ en afbildning $\mathfrak{G}(\mathfrak{P}) \longrightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{U})$. Man kan udstyre $\mathfrak{G}(\mathfrak{P})$ med en psudometirk d via

$$d(s_1, s_2) = \sup_{\mu} \|\mu_{s_1} - \mu_{s_2}\|_{tot}. \tag{234}$$

Vi definerer *tilstandsrummet* $\mathfrak{S}$ som fuldstændiggørelsen af $\mathfrak{S}(\mathfrak{P})$ med hensyn til d, og elementerne i $\mathfrak{S}$ kaldes tilstande. Herved fås en afbildning $\mathfrak{S}(\mathfrak{P}) \longrightarrow \mathfrak{S}$. Det betyder at 2 præparationer giver samme tilstand, dersom de ikke kan skelnes ved nogen måling. Tilstandsrummet vil automatisk blive begrænset, idet $d(S_1, S_2) \leq 1$. Ved en måling vil vi forstå en vilkårlig affin afbildning $\mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{U})$. Mængden af målinger betegnes $\mathfrak{M}$. Herved fås netværket

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathfrak{S}(U) & & \\
 & \mathfrak{S} \arrow[ur] & & \mathfrak{M} \arrow[ul] & \\
\mathfrak{S}(P) \arrow[ur] & & & & \mathfrak{S}(M) \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{235}$$

Med ovenstående definitioner afhænger tilstandsrummet af de betragtede måleprocedurer. Derfor vil det være misvisende at sige f.eks. "elektronen er nu i tilstanden S". I stedet bør man sige "vor viden om elektronen er fuldstændigt beskrevet ved S".

EKSEMPEL Til tiden $t = 0$ afsendes en klassisk partikel fra stedet $\underline{x} = \underline{0}$ med hastigheden $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Dette skal være vore præparationer $\mathfrak{P} = \mathbb{R}^3$. Vi tænker os at partiklen ikke bliver påvirket af nogen kræfter. For hver $B \subseteq \mathbb{R}^3$ defineres en måleprocedure ved til tiden $t > 0$ at detektere om partiklen befinder sig i $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Da er $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbb{R}^3)$. Generelt vil klassisk mekanik være karakteriseret ved at $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{P})$ og $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(\mathfrak{P})$.

EKSEMPEL Et Stern-Gerlach-apparat indeholder et anisotropt magnetfelt, og vil splitte en stråle af elektroner i 2 stråler af ens intensitet. Præparationen skal bestå af en kilde, der udsender elektroner enkeltvis hen gennem et Stern-Gerlach-apparat således at kun elektroner, der er lokaliseret i den ene stråle, tillades at fortsætte. Stern-Gerlach-apperatet kan roteres om den akse elektronstrålen udgør. Apperatet er derfor karakteriseret ved en vinkel $\theta_1 \in \mathbb{T}$, hvilket skal være vort præparationsrum. Et andet Stern-Gerlach-apperat placeres efter det første, og til sidst placeres 2 detektorer, der viser om en elektron bliver bøjet den ene eller anden vej. Også dette apperat kan roteres, og er derfor karakteriseret ved en vinkel θ_2. Lad θ^i betegne vektoren $(\cos(\theta_i),\sin(\theta_i))$ og lad d_i være detektion med den i'te detektor. Som vi skal se vil der (under passende ideelle omstændigheder) gælde

$$P(d_1|d_1 \text{ eller } d_2) = \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \tag{236}$$

$$= \frac{1 + \theta^1 \cdot \theta^2}{2}$$

Hvis P er en sandsynlighedsfordeling på præparationsrummet, så vil denne ved målingen θ_2 blive afbildet over i en sandsynlighedsfordeling på udfaldsrummet givet ved

$$P(d_1|d_1 \text{ eller } d_2) = \int \frac{1 + \theta^1 \cdot \theta^2}{2}\, dP\theta^1 \tag{237}$$

$$= \frac{1 + (\int \theta^1 dP\theta^1)\cdot\theta^2}{2}$$

Afbildningen $P \longrightarrow \int \theta^1\, dP\theta^1$ er derfor netop afbildningen $\mathcal{G}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{G}$. Det viser at $\mathcal{G}$ er isomorf med $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 |\ a^2 + b^2 \le 1\}$. Denne mængde kan via afbildningen

$$(a,b) \longrightarrow 1/2 \begin{bmatrix} 1+a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix} \qquad (238)$$

identificeres med mængden af tæthedsmatriser på Hilbertrummet $\mathbb{R}^2$. I elementær kvantemekanik kan tilstandsrummet i almindelighed identificeres med mængden af tæthedsmatricer/operatorer på et Hilbertrum (oftest komplekst).

Ved ovenstående konstruktion bliver $\mathfrak{S}$ en metrisk fuldstændig konveks mængde. Enhver metrisk fuldstændig konveks mængde K kan imidlertid opnås ved en konstruktion som ovenstående. Lad nemlig $\mathfrak{U}$ være lig med K, og mængden af måleprocedurer $\mathfrak{M}$ være affine afbildninger $K \longrightarrow [0,1]$. Da findes en affin afbildning $A:\mathfrak{S}(\mathfrak{U}) \longrightarrow K$, hvor en sandsynlighedsfordeling s på K går over i den tilsvarende konvekse kombination i K. For $s \in \mathfrak{S}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{S}(K)$ og $m \in \mathfrak{M}$ definerer $m(A(s))$ en fordeling på $\mathfrak{U} = [0,1]$, hvilket skal være den til m svarende måling. Da er $\mathfrak{S} = K$.

DEFINITION* En måling siges at være *simpel*, dersom afbildningen $S \longrightarrow \mu_s(D)$ er ekstremal blandt funktionaler $\mathfrak{S} \longrightarrow [0,1]$, for alle delmængder $D \subseteq \mathfrak{U}$.

SÆTNING* Simple målinger er ekstremale i mængden af målinger.

BEVIS Oplagt. Q.E.D.

Som vi senere skal se findes der somme tider ekstremale målinger, som ikke er simple.

Lad $\mathfrak{S}$ være et tilstandsrum. Man kan da definere en mængde $\mathfrak{S}_+$ ved $\mathfrak{S}_+ = \{(r,\phi) | r \in \mathbb{R}_+ \text{ og } \phi \in \mathfrak{S}\} \cup \{0\}$. Elementer fra $\mathfrak{S}_+$ kan multipliceres med positive tal ved $s(r,\phi) = (sr,\phi)$ for $s \neq 0$ og $0(r,\phi) = 0$ og $0 \cdot 0 = 0$. envidere kan elementer adderes ved $(r,\phi) + (r',\phi) = (r + r', \frac{r}{r+r'}\phi + \frac{r'}{r+r'}\phi')$ og $0 + (r,\phi) = (r,\phi)$ og $0 + 0 = 0$. Elementerne $\phi \in \mathcal{G}$ identificeres med $(1,\phi) \in \mathcal{G}_+$. Herefter defineres $\mathbb{R}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_+ - \mathcal{G}_+$, hvor $c\phi - d\psi$ identificeres med $c'\phi' - d'\psi'$, dersom $c\phi + d'\psi' = c'\phi' + d\psi$. Herved bliver $\mathbb{R}(\mathcal{G})$ et reelt vektorrum, idet addition og multiplikation med skalar kan defineres entydigt. Ved at sætte $\mathbb{C}(\mathcal{G}) = \mathbb{R}(\mathcal{G}) + i\cdot\mathbb{R}(\mathcal{G})$ opnås et komplekst vektorrum med $\mathcal{G}_+$ indlejret som en positiv kegle.

Vi tænker os, at en målingen $\mathcal{M}$ og det tilhørende udfaldet $\mathcal{U}$ kan splittes op i 2 dele, så $(\mathcal{M},\mathcal{U}) = ((\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2),(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2))$. Hvis det kan beskrives med nedenstående diagram, vil $(\mathcal{S},\mathcal{U}_1,\mathcal{M}_1)$ kunne opfattes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{U}_2 & \\
& \mathcal{U}_1 \arrow[ur] & & \mathcal{M}_2 \arrow[ul] \\
& & \mathcal{M}_1 \arrow[ul] \arrow[uu] &
\end{tikzcd} \tag{239}$$

som præparation for målingen $\mathcal{M}_2$. Hvis yderligere alle målinger kan vælges på $\mathcal{M}_2$'s plads vil vi kalde den første måling for et instrument. Et instrument $\mathcal{E}$ vil således udover et udfald $\mathcal{U}_1$ også give en tilstand, der afhænger af præparationen og udfaldet. Således giver $\mathcal{E}$ anledning til en afbildning måling $\mathcal{M}$ og en afbildning $E\colon \mathfrak{U}\times\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$. Sæt $\mathcal{E}(1_u)(\phi) = \mathcal{M}_\phi(1_u)\cdot E(u,\phi) \in \mathcal{G}_+$. Ved linearitet kan $\mathcal{E}$ udvides til en lineær afbildning $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}(\mathcal{G}))$, hvilket skal være vor formelle definition af et instrument.

DEFINITION Lad $\mathfrak{U}$ være et udfaldsrum. Ved et *instrument* $\mathcal{E}$ med udfald i $\mathfrak{U}$ vil vi forstå en kontinuert lineær afbildning $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}(\mathcal{G}))$, så $\mathcal{E}$ er positiv i den forstand, at hvis $f \geq 0$ og $\phi \in \mathcal{G}$ så er $\mathcal{E}(f)(\phi) \in \mathcal{G}_+$, og så $\mathcal{E}(1)(\phi) \in \mathcal{G}$ for $\phi \in \mathcal{G}$.

SÆTNING Hvis $\mathcal{E}$ er et instrument, så findes en entydigt bestemt måling $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$, så

$$\frac{\mathcal{E}(1_B)(\phi)}{\mathcal{M}_{\mathcal{E}1_B}(\phi)} \in \mathfrak{S} \tag{240}$$

for $1_B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{U})$.

BEVIS For enhver målelig funktion f findes et tal $c_f(\phi)$, så

$$\frac{\mathcal{E}(f)(\phi)}{\mathcal{M}_f(\phi)} \in \mathfrak{S} \tag{241}$$

På grund af $\mathcal{E}$'s egenskaber er $\mathcal{M}_f(\phi)$ en måling.

Q.E.D.

Man kan sammensætte instrumenter:

SÆTNING Lad $\mathcal{E}^i$ være et instrument med værdier i $\mathfrak{U}^i$ for $i = 1,2$. Hvis $\mathfrak{U}^i$ er endelige, findes et instrument $\mathcal{E}^2 \circ \mathcal{E}^1$ med værdier i $\mathfrak{U}^2 \times \mathfrak{U}^1$, så

$$\mathcal{E}^2 \circ \mathcal{E}^1 (f_2 \times f_1)(S) = \mathcal{E}^2(f_2)\mathcal{E}^1(f_1)(S) \tag{242}$$

for alle tilstande S og alle $f_i \in \mathfrak{B}(\mathfrak{U}^i)$.

BEVIS Da $\mathfrak{U}^i$ indeholder endeligt mange elementer, kan vi sætte

$$\mathcal{E}^2 \circ \mathcal{E}^1(f) = \sum_{\substack{(e_2,e_1) \\ \in \\ \mathfrak{U}^2 \times \mathfrak{U}^1}} f(e_2,e_1) \cdot \mathcal{E}^2(e_2)\mathcal{E}^1(e_1)(S) \tag{243}$$

Q.E.D.

Tilsvarende kan man sammensætte et instrument med en måling.

DEFINITION Et instrument $\mathcal{E}$ siges at være *repetetivt*, dersom $\mathcal{E}(B)\mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(B)$ for alle målelige mængder B.

DEFINITION Afbildningen $\mathcal{E}(1):\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ vil vi kalde *reduktionen af tilstandsrummet.*

SÆTNING Hvis et instrument $\mathcal{E}$ med værdier i $\mathcal{U}$ er repetetivt, så er den tilsvarende måling $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ simpel på det reducerede tilstandsrum $\mathcal{E}(1)(\mathcal{G})$.

BEVIS Det kan passende antages at $\mathcal{U}$ indeholder 2 elementer, og at $\mathcal{E}(1)(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$. Det skal vises at $\mathcal{M}(1)$, $\mathcal{M}(1_{u_1})$, $\mathcal{M}(1_{u_2})$ og $\mathcal{M}(0)$ er ekstreme funktionaler: $\mathcal{G} \longrightarrow [0,1]$. Da $\mathcal{M}(1) = \text{id}$, $\mathcal{M}(0) = 0$ og $\mathcal{M}(1_{u_2}) = \text{id} - \mathcal{M}(1_{u_1})$ er det nok at vise at $\mathcal{M}(1_{u_1})$ er ekstremal. Antag $\mathcal{M}(1_{u_1}) = 1/2\cdot\Phi_1 + 1/2\cdot\Phi_2$. Hvis $\mathcal{E}(1_{u_1})(\phi) = 0$ er $\mathcal{M}_\phi(1_{u_1}) = 0$, hvilket viser $\Phi_i(\phi) = 0$. Hvis $\mathcal{E}(1_{u_1})(\phi) = \phi$ er $\mathcal{M}_\phi(1_{u_1}) = 1$, hvilket viser at $\Phi_i(\phi) = 1$. Generelt gælder

$$\phi = \mathcal{M}_\phi(1_{u_1})\frac{\mathcal{E}(1_{u_1})(\phi)}{\mathcal{M}_\phi(1_{u_1})} + \mathcal{M}_\phi(1_{u_2})\frac{\mathcal{E}(1_{u_2})(\phi)}{\mathcal{M}_\phi(1_{u_2})} \tag{244}$$

hvilket viser at

$$\Phi_i(\phi) = \mathcal{M}_\phi(1_{u_1})\cdot 1 + \mathcal{M}_\phi(1_{u_2})\cdot 0 = \mathcal{M}_\phi(1_{u_1}) \tag{245}$$

Q.E.D.

SÆTNING Lad $\mathcal{M}$ være en simpel måling på $\mathcal{G}$. Da findes højst et repetetivt instrument $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, så $\mathcal{M}$ er den til $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ hørende måling og $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1)$ er identiteten på $\mathcal{G}$.

BEVIS Lad $\mathcal{E}$ være et repetetivt instrument, så $\mathcal{M}$ er den til $\mathcal{E}$ hørende måling og $\mathcal{E}(1)$ er identiteten på $\mathcal{G}$. Lad B være en målelig delmængde af $\mathcal{U}$ og lad $\phi \in \mathcal{G}$ være en ekstremal tilstand. Da er

$$\phi = \mathcal{M}_\phi(1_B)\frac{\mathcal{E}(1_B)(\phi)}{\mathcal{M}_\phi(1_B)} + \mathcal{M}_\phi(1_{\complement B})\frac{\mathcal{E}(1_{\complement B})(\phi)}{\mathcal{M}_\phi(1_{\complement B})} \tag{246}$$

hvilket viser at

$$\phi = \frac{\mathcal{E}(1_B)(\phi)}{\mathcal{M}_\phi(1_B)} \tag{247}$$

og dermed

$$\mathcal{E}(1_B)(\phi) = \mathcal{M}_\phi(1_B)\cdot\phi \tag{248}$$

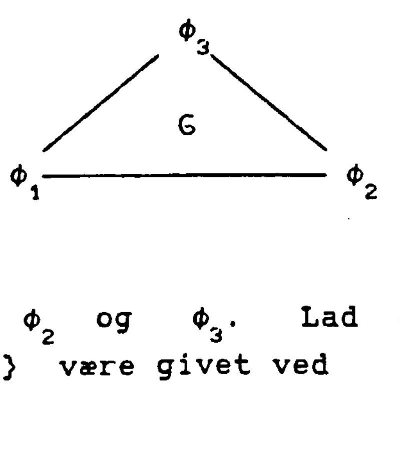
så $\mathcal{E}(1_B)$ er entydigt fastlagt på ekstremalpunkterne for $\mathcal{G}$ og dermed på hele $\mathcal{G}$. Q.E.D.

SÆTNING Lad $\mathcal{E}$ være et repetetivt instrument. Da er $\mathcal{E}$ entydigt bestemt ved sin reduktion $\mathcal{E}(1)$ og sin måling $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ via formelen

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{M}_\mathcal{E}} \circ \mathcal{E}(1) \tag{249}$$

BEVIS Umiddelbar følge af de 2 foregående sætninger. Q.E.D.

Selvom $\mathcal{E}$ er repetetivt er den til $\bar{\mathcal{E}}$ hørende måling ikke nødvendigvis simpel på hele $\mathcal{G}$. Lad således $\mathcal{G}$ have de 3



(250)

ekstremalpunkter ϕ_1, ϕ_2 og ϕ_3. Lad et instrument $\mathcal{E}$ med værdier i $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$ være givet ved

$$\mathcal{E}(1_{u_1})(\phi_1) = \phi_1 \qquad \mathcal{E}(1_{u_2})(\phi_1) = 0$$
$$\mathcal{E}(1_{u_1})(\phi_2) = 0 \qquad \mathcal{E}(1_{u_2})(\phi_2) = \phi_2$$
$$\mathcal{E}(1_{u_1})(\phi_3) = 1/2\phi_1 + 1/2\phi_2 \qquad \mathcal{E}(1_{u_2})(\phi_3) = 1/2\phi_1 + 1/2\phi_2 \tag{251}$$

Da er $\mathcal{E}(1)(\phi_1) = \phi_1$, $\mathcal{E}(1)(\phi_2) = \phi_2$ og $\mathcal{E}(1)(\phi_3) = 1/2\phi_1 + 1/2\phi_2$, hvilket viser, at $\mathcal{E}(1) = 1/2\mathcal{E}_1(1) + 1/2\mathcal{E}_2(1)$, hvor

$$\mathcal{E}_i(1)(\phi_1) = \phi_1, \quad \mathcal{E}_i(1)(\phi_2) = \phi_2 \quad \text{og} \quad \mathcal{E}_i(1)(\phi_3) = \phi_i. \tag{252}$$

Heraf ses at $\mathcal{M} = 1/2\mathcal{M}\mathcal{E}_1(1) + 1/2\mathcal{M}\mathcal{E}_2(1)$, hvilket viser at $\mathcal{M}$ ikke er ekstremal og dermed heller ikke simpel.

For 2 tilstande $\phi,\psi \in \mathcal{G}$ kan *informationsgevinsten* $D(\phi\|\psi)$ defineres som $\sup_{m\in\mathfrak{M}} D(m(\phi)\|m(\psi))$. De fleste sætninger om informationsgevinst fra kapitel 3 kan udvides til at gælde i vilkårlige tilstandsrum. I kvantemekanik defineres ofte en størrelse, der kaldes den relative entropi. Den er ikke identisk med informationsgevinsten som den her er defineret, hvilket er grunden til at der ikke gælder særligt mange interessante sætninger om den relative entropi. For kommuterende operatorer stemmer de 2 størrelser dog overens.

SÆTNING Lad $\phi,\psi \in \mathcal{G}$ være 2 tilstande og lad $\mathcal{E}$ være et instrument med værdier i $\mathfrak{U}$. Da gælder

$$D(\mathcal{E}(\mathfrak{U})(\phi)\|\mathcal{E}(\mathfrak{U})(\psi)) \leq D(\phi\|\psi) \tag{253}$$

BEVIS Det skal vises at

$$D(m\mathcal{E}(\mathfrak{U})(\phi)\|m\mathcal{E}(\mathfrak{U})(\psi)) \leq D(\phi\|\psi) \tag{254}$$

for alle $m \in \mathfrak{M}$, men det er oplagt da $m\mathcal{E}(\mathfrak{U})$ er en måling. Q.E.D.

7.2. Grupperepræsentationer

Spørgsmålet er nu, hvorfor kvantemekaniske tilstandsrum så ofte er et rum af tæthedsoperatorer på komplekse Hilbertrum. I foregående afsnit så vi at enhver konveks mængde kan være et tilstandsrum. I Holevo (1982) og de fleste andre fremstillinger tages det som et aksiom, at tilstandsrummet er et rum af tæthedsoperatorer på komplekse Hilbertrum, og resten af kvanteformalismen kan afledes af dette aksiom. Det er forsøgt begrundet ud fra teorier om kvantelogik og ortokomplementære latticer (se Von Neumann 1932, Varadarajan 1968 og 1970, og Ludwig 1987). Deres synspunkt kommer fra den kendsgerning at de eksperimentelt verificerbare påstande i kvantemekanik kan repræsenteres ved det ortomodulære lattic af underrum af et komplekst Hilbertrum. I Ludwig bliver ortomodulariteten afledt af nogle få aksiomer af tilsyneladende rent epistomologisk karakter. Det synspunkt, der fremlægges i det følgende afsnit tyder derimod på at hele Hilbertrumsformalismen ikke nødvendigvis ville være så anvendelig, hvis der var 4 rumdimensioner. Eksemplet ovenfor viser at man ikke altid anvende komplekse Hilbertrum. I eksemplet kan man udvide mængden af målinger så man kan skelne flere forskellige tilstande, og derved kan de reelle tæthedsoperatorer indlejres i mængden af komplekse tæthedsoperatorer. I Statistisk kvantemekanik er der mange eksempler, hvor tilstandsrummet er isomorft med mængden af tilstande på en von Neumann-algebra. Derfor må man både afvise blot at tage Hilbertrumsformalismen og tilgangen via ortomodulære latticer for givet.

Svaret på ovenstående spørgsmål synes at være at rum af tæthedsmatricer har en masse symmetrier. I mekanik findes ofte en gruppe G, der virker på mængden af opstillinger. Det kan være en gruppe af translationer eller rotationer af måleinstrumenterne eller noget andet. Dette kan beskrives med netværket

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R} & \\ \mathcal{P} \arrow[ur] & G \arrow[u] & \mathcal{M} \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{255}$$

Problemet er da om G skal opfattes som en del af præparationen eller af målingen. Ved at udvide netværket til

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R} & \\ \mathcal{P} \arrow[ur] & G \arrow[u] & \mathcal{M} \arrow[ul] \\ G \arrow[ur] & & G \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{256}$$

hvor afbildningen fra $G\times G$ til G er produktet, kan man opfatte $\mathcal{P}\times G$ som præparationerne og $\mathcal{M}\times G$ som målingerne. Da virker G på tilstandsrummet, idet vi sætter $g[p,g_0] = [p,gg_0]$. Denne definition er tilladelig da gruppen virker tilsvarende på mængden af målinger. Herved virker gruppen som en gruppe af affine afbildninger af tilstandsrummet på sig selv.

EKSEMPEL* Lad G være en lokalkompakt gruppe, og lad $\mathfrak{S}(G)$ være mængden af sandsynlighedsmål på G. Da virker G på $\mathfrak{S}(G)$ via venstretranslation. Dette kaldes den venstreregulære repræsentation af G og svarer til klassisk mekanik. Bemærk at denne fysisk vigtige repræsentation ikke svarer til tilstandsrummet for et Hilbertrum.

DEFINITION Lad G være en gruppe, der virker på et tilstandsrum $\mathfrak{S}$. Da siges repræsentationen at være irreducibel, dersom enhver invariant delmængde $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{S}$ enten kun indeholder et punkt eller udspænder $\mathfrak{S}$.

I elementær kvantemekanik er vi interesseret i irreducible repræsentationer, da ordet kvante netop refererer til at de fænomener man studerer ikke har nogen indre struktur. Når en fri neutron henfalder og pludselig ikke mere bevæger sig i overensstemmelse med Schrödingerligningen for en fri partikel (fordi den forsvinder), viser dette netop en form for indre struktur af neutronen.

BEMÆRK En gruppe kan virke irreducibelt på det ortokomplementære lattice af underrum af et Hilbertrum uden at den tilsvarende virkning er irreducibel. Det forekommer ofte i kvantemekanik.

SÆTNING Lad en sammenhængende lokalkompakt gruppe G virke irreducibelt på den konvekse mængde af tilstande på en von Neumann-algebra W. Da er von Neumann-algebraen simpel (irreducibel).

BEVIS Antag at W er kommutativ. Da findes en lokalkompakt mængde C, så W er de kontinuerte funktioner på C. Tilstandene på W er da sandsynlighedsfordelinger på C. Virkningen af G på tilstandsrummet er da givet ved en virkning af G på C. Lad c være et element i C. Da er $G(c)$ en invariant delmængde af C. Sandsynlighedsmål med støtte i $G(c)$ er derfor også invariant, og udspænder derfor $\mathcal{G}(C)$. Det viser at $G(c) = C$. Derfor findes en afbildning $\Lambda:\mathcal{G}(G) \longrightarrow \mathcal{G}(C)$, som etablerer en korrespondance mellem invariante konvekse delmængder af $\mathcal{G}(G)$ og $\mathcal{G}(C)$. Da G er lokalkompakt findes et Haarmål μ på G. Lad f være en positiv funktion med støtte i en omegn ω af $1 \in G$, så f er konstant i en omegn af 1. Envidere vil vi forlange, at $\int f \, d\mu = 1$. Lad K_f være sandsynlighedsmål på G af formen $\nu*f$, hvor $\nu \in \mathcal{G}(C)$. Da er K_f invariant under virkningen af G, Hvilket viser at $\Lambda(K_f)$ er et punkt eller udspænder $\mathcal{G}(C)$. Hvis $\Lambda(K_f)$ er et punkt for alle f, så er $\Lambda(\mathcal{G}(G)) = \mathcal{G}(W)$ et punkt og $W = \mathbb{C}$, hvilket er en simpel von Neumannalgebra. Antag at $\Lambda(K_f)$ udspænder $\mathcal{G}(C)$. Afbildningen Λ kan udvides til en afbildning af mål på G til mål på C. Den konvekse mængde K_f udspænder en mængde af mål af formen $\nu*f$, hvor ν er et mål på G. Da Λ^{-1} af et atomisk mål findes et atomisk mål af formen $\nu*f$. Da f er kontinuert er målet også kontinuert, så målet er atomisk og kontinuert, hvilket viser at gruppen er triviel (eller usammenhængende, hvilket vi har forudsat, at den ikke er). Det viser at $\mathcal{G}(G)$ og $\mathcal{G}(C)$ er trivielle.

En vilkårlig von Neumannalgebra W kan skrives som en sum $\oplus_I W_i$ af simple von Neumannalgebraer, og en tilstand kan skrives som en middelværdi over I af tilstande på simple von Neumannalgebraer. En repræsentation af G på W giver derfor en repræsentation af G på $\mathcal{G}(I)$. Da repræsentationen på W er irreducibel er repræsentationen på I irreducibel, hvilket ifølge ovenstående viser at I kun indeholder et element.

Q.E.D.

SÆTNING Hvis tilstandsrummet $\mathcal{G}$ er udspændt af højst 4 elementer, og der findes en sammenhængende gruppe G, som virker irreducibelt på $\mathcal{G}$, så er $\mathcal{G}$ isomorf med mængden af tæthedsmatricer på et (reelt eller komplekst) Hilbertrum.

BEVIS Gruppen af affine automorfier af $\mathcal{G}$ er kompakt. Derfor er billedet af G i denne gruppe kompakt, så vi kan antage, at G selv er kompakt og er forsynet med et normeret Haarmål m. Hvis $\theta \in \mathcal{G}$, så er

$$\theta_0 = \int_G g(\theta)\, dmg \tag{257}$$

invariant under virkningen af G. Da kan tilstandsrummet indlejres i et reelt vektorrum af dimension højst 3, og med origo i θ_0. lad $(\cdot|\cdot)$ være et indre produkt i dette vektorrum. Da definerer

$$\langle v|w\rangle = \int_G (g(v)|g(w))\, dmg \tag{258}$$

et indre produkt, der er invariant under virkningen af G. Derfor udgør G en sammenhængende undergruppe af $O(n)$, $n \leq 3$. Men alle sammenhængende undergrupper af $O(n)$, $n \leq 3$ er isomorfe med $SO(m)$ for et $m \leq 3$. Derfor er $\mathcal{G}$ isomorf med enhedskuglen i 1,2 eller 3 dimensioner. Da $SO(1)$ er triviel, kan denne mulighed udelukkes. Tilbage er at bemærke, at enhedscirklen og enhedskuglen er isomorfe med mængden af tæthedsmatricer i 2 reelle eller komplekse dimensioner. Q.E.D.

Sætningen er ikke sand i højere dimensioner, så dér må man arbejde mere specifikt med de grupper, der rent faktisk er fysisk relevante.

EKSEMPEL Lad G være enhedskuglen i 4 dimensioner, og lad gruppen SO(4) virke på G ved rotationer. Denne repræsentation er oplagt irreducibel som konveks repræsentation. Antag at G kan indlejres i tilstandsrummet for en von Neumann-algebra således, at repræsentationen kan udvides til hele tilstandsrummet.

Da er Hilbertrummet $\mathbb{H}$ en direkte sum af 2 Hilbertrum $\mathbb{H}_1$ og $\mathbb{H}_2$, hvor virkningen af $SO(4) = SO(3)\times SO(3)$ er givet som en sum af virkninger af SO(3) på $\mathbb{H}_1$ og $\mathbb{H}_2$. Lad P_i betegne projektionen af $\mathbb{H}$ på $\mathbb{H}_i$. Da kommuterer den betingede forventdtning $\mathbb{E}:S \longrightarrow P_1SP_1 + P_2SP_2$ med gruppevirkningen. Derfor er $\mathbb{E}(K)$ enten et punkt eller den 4-dimensionale kugle, men $\mathbb{E}(K)$ kan ikke være den 4-dimensionale kugle, da SO(3) virker ikke-trivielt på P_iKP_i, hvilket viser at dimensionen af P_iKP_i er mindst 3. Derfor er $\mathbb{E}(K)$ et punkt. Repræsentationerne af SO(3) på $\mathbb{H}_1$ og $\mathbb{H}_2$ kan skrives som summer af irreducible projektivt unitære repræsentationer på underrum $\mathbb{H}_1^i$ og $\mathbb{H}_2^j$. Lad P_k^l betegne projektionen på $\mathbb{H}_k^l$. Da kommuterer P_k^l med repræsentationen, så

$$(P_1^i + P_2^j)K(P_1^i + P_2^j) \tag{259}$$

må være en 4-dimensional kugle for et par (i,j). Men $P_k^lKP_k^l$ er et punkt, så $P_1^iKP_2^j$ er en 4-dimensional kugle for et par (i,j). Dimensionsbetragtninger viser, at de projektivt unitære represen-tationer højst kan have 2 komplekse dimensioner, men det fastlægger repræsentationerne af SO(3) fuldstændigt som spin 1/2 repræsen-tationerne. Direkte inspektion viser, at dette ikke kan lade sig gøre.

7.3. Repræsentationer af kompakte grupper

Lad G være en kompakt gruppe med Haarmål μ. Lad $\mathcal{G}$ være et tilstandsrum, som G virker irreducibelt på. Vi vil antage, at repræsentationen ikke er triviel. Vælg $\phi \in \mathcal{G}$ så $G(\phi) \neq \phi$. Da udspænder $G(\phi)$ den konvekse mængde $\mathcal{G}$. For et sandsynlighedsmål $\nu \in \mathcal{G}(G)$ defineres

$$m(\nu) = \int g(\phi) d\nu g \tag{260}$$

Herved bliver m en afbildning $\mathcal{G}(G) \longrightarrow \mathcal{G}$. Denne kan udvides til en afbildning $\mathcal{G}'(G) \longrightarrow \mathbb{C}(\mathcal{G})$, hvor $\mathcal{G}'(G)$ er mængden af Radonfordelinger på G. Envidere er $L^2(G,\mu)$ indlejret i $\mathcal{G}'(G)$. Situationen opsummeres i nedenstående kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}(G) \arrow[r, "m"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\
L^2(G,\mu) \arrow[r, hook, "\text{tæt}"] & \mathcal{G}'(G) \arrow[r, "m"] & \mathbb{C}(\mathcal{G})
\end{tikzcd} \tag{261}$$

Da G er kompakt er $L^2(G,\mu) = \oplus_I \mathbb{H}_i$, hvor $\mathbb{H}_i$ er minimale invariante underrum. Dette kan omskrives til $L^2(G,\mu) = \mathbb{C} \oplus (\oplus_J \mathbb{L}_i)$, hvor $\mathbb{L}_i \neq \mathbb{C}$ har formen $\mathbb{L}_i = \mathbb{H}_i \oplus \overline{\mathbb{H}}_i$. Elementerne i $\mathbb{L}_j$ er begrænsede funktioner, da G er kompakt. Hvis (f_k) er et frembringersæt for $\mathbb{L}_i$, så er $(\mathrm{Re}(f_k), \mathrm{Im}(f_k))$ et frembringersæt for $\mathbb{L}_i$ bestående af reelle begrænsede funktioner. For $f \in \mathbb{L}_i$ gælder $\int f\, d\mu = \langle f|1\rangle = 0$, da $\mathbb{C} \perp \mathbb{L}_i$. Derfor findes et frembringersæt (b) for $\mathbb{L}_i$, så $1 + b \geq 0$ og $\int (1 + b) d\mu = 1$, hvilket viser at $1 + b \in \mathcal{G}(G)$. Derfor udspænder $1 + \mathbb{L}_i \cap \mathcal{G}(G) = (1 + \mathbb{L}_i)_+$ sideunderrummet $1 + \mathbb{L}_i$. Da er $m((1 + \mathbb{L}_i)_+) \subseteq \mathcal{G}$ en invariant konveks delmængde, og er derfor enten et punkt eller udspænder $\mathcal{G}$. Hvis $m((1 + \mathbb{L}_i)_+)$ er et punkt, er $m(1 + \mathbb{L}_i)$ et punkt, hvilket viser at $m(\mathbb{L}_i) = 0$. Hvis $m((1 + \mathbb{L}_i)_+)$ er et punkt for alle i, så er $m(\mathcal{G}'(G)) = m(\mathbb{C})$ og dermed at $m(\mathcal{G}(G))$ er et punkt i modstrid med at $m(\mathcal{G}(G))$ udspænder noget ikke-trivielt. Derfor findes i, så $m((1 + \mathbb{L}_i)_+)$ udspænder $\mathcal{G}$. Sæt $K = m^{-1}(m(1))$.

Da er K et invariant sideunderrum af $1 + \mathbb{L}_i$, så $K - 1$ er et invariant underrum af $\mathbb{L}_i$. Der er da 4 muligheder for hvad $K - 1$ kan være: 0, $\mathbb{H}_i$, $\overline{\mathbb{H}}_i$ eller $\mathbb{L}_i$. Hvis $\mathbb{H}_i \subseteq K - 1$, så gælder også $\overline{\mathbb{H}}_i \subseteq K - 1$, og dermed $\mathbb{L}_i \subseteq K - 1$. Det viser at $m(\mathbb{L}_i + 1) \subseteq m(K) = m(1)$, hvorved $\mathcal{G}$ må være udspændt af $m(1)$, hvilket er i modstrid med at $\mathcal{G}$ ikke er triviel. Tilsvarende kan man udelukke, at $K - 1$ er lig $\overline{\mathbb{H}}_i$ eller $\mathbb{L}_i$. Derfor er $K - 1 = 0$, og $K = 1$. Det viser at m er injektiv på $(1 + \mathbb{L}_i)_+$. Det foregående viser hvordan alle irreducible konvekse repræsentationer kan kan konstrueres ud fra irreducible unitære repræsentationer.

Hvis G er kommutativ er de unitære irreducible repræsentationer af G 1-dimensionale, så $\dim(H_i) = 1$. Derfor er $\dim(\mathbb{L}_i)$ lig med 1 eller 2.

$\dim(\mathbb{L}_i) = 1$: Da har $\mathcal{G}$ formen $[0,1]$ og er isomorf med tæthedsmatricerne på W^*-algebraen $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Automorfigruppen er $\mathbb{Z}_2$.

$\dim(\mathbb{L}_i) = 2$: Da kan $\mathcal{G}$ indlejres i disken Δ, som er isomorf med tæthedsmatricer på et 2-dimensionalt reelt Hilbertrum. Automorfigruppen er en undergruppe af $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$.

Hvis G envidere er sammenhængende er der kun 2 muligheder: enten er $\mathcal{G}$ triviel eller $\mathcal{G}$ er isomorf med Δ.

EKSEMPEL Hvis G er gruppen af planrotationer, er $\mathcal{G}$ triviel eller isomorf med Δ. Den trivielle repræsentation kaldes spin-0 repræsentationen. Antag at $\mathcal{G}$ er isomorf med Δ. Da er er repræsentationen givet ved en gruppehomomorfi $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$. En sådan er givet ved $\theta \longrightarrow n\theta$ for et $n \in \mathbb{Z}$. For $n = 0$ fås den trivielle repræsentation, og envidere giver n og $-n$ isomorfe repræsentationer, hvilket viser at repræsentationen er karakteriseret ved et tal $n \in \mathbb{N}_0$. Et kvantemekanisk system, hvis repræsentation er karakteriseret ved tallet n siges at have spin $n/2$.

7.4. Superposition

Igen vil det simpleste tilfælde med planrotationer blive gennemgået. Vi tænker os et kvantemekanisk system, der består af to uafhængige præparationer, der begge uafhængigt kan roteres i en given plan. Gruppen $\mathbb{T}^2$ virker altså på mængden af præparationer, og vi vil antage at den også virker på tilstandsrummet. Vi søger derfor irreducible repræsentationer af $\mathbb{T}^2$. Da $\mathbb{T}^2$ er kommutativ og sammenhængende, er irreducible repræsentationer trivielle, eller tilstandsrummet er isomorft med Δ, og at drejninger af præparationerne med vinklerne α og β svarer til en drejning af enhedsskiven med vinklen $k\alpha + l\beta$, hvor $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$. Vi vil nøjes med at se på tilfældet $(k,l) = (1,-1)$. Hvis den ene vinkel holdes fast fås en spin-1/2 repræsentation af den anden. Det fortolkes i almindelighed som at man har præpareret to spin-1/2 partikler. Systemet udstyres nu med en detektor, som kan give resultaterne *detekteret* eller *ikke-detekteret*. Ligesom i fore-gående afsnit kan en sådan måling skrives som een konveks kombination af en måling, der ikke afhænger af tilstanden og en måling, der giver resultatet med sikkerhed for visse tilstande. vi antager at detektionen er af den sidste type. Lad ϕ være en ren tilstand, der med sikkerhed giver resultatet detektion. Da er

$$P(\text{detektion}|\phi \text{ drejet } \alpha \text{ og } \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + 1}{2} \tag{262}$$

$$= \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) + 1}{2}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix} + 1}{2}$$

$$= \frac{\left(\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix}\right)^2}{4}.$$

Dette fortolkes i almindelighed som at en partikel i tilstanden givet ved vektoren $\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$ interfererer en anden partikel i tilstanden givet ved vektoren $\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix}$, eller værre hvis tilstandene er i modfase at partiklerne udslukker hinanden. Denne sprogbrug har givet anledning til en del paradokser.

Generelt kan superpositionsprincipper forklares ved hjælp af repræsentationer for produkter af grupper med sig selv.

7.4. Målinger i von Neumannalgebraer

Vi vil fra nu af antage at tilstandsrummet kan repræsenteres ved mængden af tilstande på en von Neumann. Der er flere grunde til at vælge von Neumannalgebraer. For det første synes det at inkludere alle eksempler i mekanik (klassisk, kvantemekanisk eller statistisk). For det andet er kategorien af von Neumannalgebraer og homomorfier pæn, idet man kan danne sum, tensorprodukt og limes inden for den. Envidere kan man lave konstruktionen krydset produkt, hvorved symmetrier på en algebra udtrykkes ved unitære operatorer i en udvidet algebra. Det illustrerer at algebraens additive struktur hovedsageligt stammer fra en kommutativ algebra af stokastiske variable, mens dens ikke-kommutative egenskaber skal afspejle symmetrier. Vor næste opgave er at repræsentere mængden af målinger. Ifølge den generelle definition er en måling med værdier i $\mathfrak{U}$ givet ved en affin afbildning fra tilstands-rummet over i sandsynlighedsfordelinger på $\mathfrak{U}$.

DEFINITION* En familie af positive operatorer $\{M_B; B \subseteq \mathfrak{U}\}$ siges at være en resolution af enheden, dersom $M_U = 1$ og $\sum M_{B_i} = M_B$ for alle tællelige klassedelinger B_i af B.

SÆTNING* Relationen

$$\mu_\phi(B) = \phi(M_B), \quad B \subseteq \mathfrak{U} \tag{263}$$

etablerer en bijektiv korrespondence mellem målinger og resolutioner af enheden M_B.

BEVIS* Enhver affin funktional λ på $\mathfrak{S}$ har formen $\lambda(S) = \phi(M)$ for en operator $M \in \mathbb{B}(H)$, da $\mathfrak{S}$ udspænder dualrummet til $\mathfrak{U}$. For enhver målelig delmængde $B \subseteq \mathfrak{U}$ findes derfor en operator M_B så $\mu_\phi(B) = \phi(M_B)$. Da $\mu_\phi(u) \geq 0$ for alle S er $M_B \geq 0$. Da $\phi(M_U) = \mu_\phi(\mathfrak{U}) = 1 = \phi(1)$ er $M_U = 1$. Da

$$\phi(\sum M_{B_i}) = \sum \phi(M_{B_i}) = \sum \mu_S(B_i) = \mu_S(B) = \phi(M_B), \tag{264}$$

hvilket viser at $\sum M_{B_i} = M_B$.

Q.E.D.

DEFINITION* Den til en simpel måling svarende resolution af enheden siges at være *ortogonal*.

EKSEMPEL I en kommutativ von Neumannalgebra svarer simple målinger til klassedelinger af udfaldsrummet.

SÆTNING Dersom M_B er en ortogonal resolution af enheden, så gælder $M_B M_C = 0$ for $B \cap C = \emptyset$, og $M_B^2 = M_B$. Samtlige ekstremale målinger er simple, netop hvis $\mathfrak{U}$ kun har 2 elementer eller algebraen er kommutativ.

BEVIS Da M_u er ekstremal må M_u være en projektion, og derfor gælder $M_u^2 = M_u$. Da $M_u(1 - M_u)M_u = (M_u - M_u^2)M_u = 0$ og $0 \le M_v \le 1 - M_u$, gælder $M_u M_v M_u = 0$. Derfor gælder også $M_u M_v^2 M_u = M_u M_v (M_u M_v)^* = 0$. Det viser at $M_u M_v = 0$. Hvis $\mathfrak{U}$ har 2 elementer er en måling givet ved 2 operatorer M og M', hvor $M' = 1 - M$. Derfor er mængden af målinger isomorf med mængden af operatorer mellem 0 og 1. Som ovenfor er ekstremalpunkterne netop projektionerne, og de giver ortogonale resolutioner.

Det skal nu vises at hvis $\mathfrak{U}$ har mindst 3 elementer og algebraen ikke er kommutativ, så findes en ekstrem måling, der ikke er simpel. Hvis det er rigtigt, når $\mathfrak{U}$ indeholder 3 elementer, er det også rigtigt når $\mathfrak{U}$ indeholder mere end 3 elementer. Antag derfor at $\mathfrak{U}$ indeholder 3 elementer. Da algebraen ikke er kommutativ findes en delalgebra isomorf med $\mathbb{B}(\mathbb{C}^2)$. Matricerne i det følgende skal indlejres i algebraen via denne delalgebra. Definér

$$M_u = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta_u) + i\cdot\sin(\theta_u) \\ \cos(\theta_u) - i\cdot\sin(\theta_u) & 1 \end{bmatrix} \tag{265}$$

hvor θ_u antager værdierne 0^0, 120^0 og 240^0. Da er M_u en resolution af enheden. Matricen M_u har egenværdierne 0 og 2/3. Antag at M'_u og M''_u er 2 resolutioner af enheden, så $M_u = 1/2(M'_u + M''_u)$. Da må der gælde at $M'_u = \alpha_u \cdot M_u$, da M_u er 2/3 gange en projektion. Da gælder

$1 = \sum M'_u = \sum \alpha_u \cdot M_u =$

(266)

$$\sum \alpha_u/3 \begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta_u) + i\cdot\sin(\theta_u) \\ \cos(\theta_u) - i\cdot\sin(\theta_u) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum \alpha_u/3 & \sum \alpha_u/3(\cos(\theta_u) + i\cdot\sin(\theta_u)) \\ \sum \alpha_u/3(\cos(\theta_u) - i\cdot\sin(\theta_u)) & \sum \alpha_u/3 \end{bmatrix}$$

Det viser at $\alpha_u = 1$ og dermed at $M'_u = M_u$.

Q.E.D.

Ortogonale resolutioner af enheden kaldes somme tider spektralmål og det er muligt at integrere med hensyn til sådanne.

Sætningen viser, at det i almindelighed ikke er nok at betragte simple målinger i kvantemekanik. Mange interessante målinger skal beskrives med ikke-simple målinger.

SÆTNING* Der er en entydig korrespondance mellem selvadjungerede matricer og ortogonale resolutioner af enheden med værdier i $\mathbb{R}$.

BEVIS* Lad M_u, $u \in \mathbb{R}$ være en ortogonal resolution af enheden. Sæt $A = \sum u\cdot M_u$. Da er A en selvadjungeret matrix og ifølge spektralsætningen er korrespondancen entydig.

Q.E.D.

Lad Hilbertrummet $\mathbb{H}'$ være indlejret som et underrum af Hilbertrummet $\mathbb{H}$, og lad P være projektionen ned på $\mathbb{H}'$. Hvis M_B er en måling i $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{B}(\mathbb{H})$, så er PM_BP en måling i $\mathbb{H}'$.

SÆTNING For enhver måling M_B i $\mathfrak{U} \subseteq \mathbb{B}(\mathbb{H})$ findes et Hilbertrum $\mathbb{L}$, der indeholder $\mathbb{H}$ og simpel måling E_B i $\mathbb{B}(\mathbb{L})$, så $M_B = PE_BP$, hvor P er projektionen af $\mathbb{L}$ på $\mathbb{H}$.

BEVIS Antag først at udfaldsrummet $\mathfrak{U}$ indeholder endeligt mange elementer. Lad $\mathfrak{L}$ være mængden af afbildninger $\mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{H}$. Sæt

$$\langle f|g\rangle = \sum_{\mathfrak{U}} (f(u)|M_{\{u\}}g(u)) \tag{267}$$

Herved bliver $\mathfrak{L}$ et præhilbertrum. Lad $\mathbb{L}$ betegne fuldstændiggørelsen af $\mathfrak{L}$ med hensyn til $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Afbildningen $I: v \longrightarrow (u \longrightarrow v)$ er en isometrisk afbildning af $\mathbb{H}$ ind i $\mathbb{L}$, og $\mathbb{H}$ kan derfor identificeres med et underrum af $\mathbb{L}$. Lad M_u være operatoren $f \longrightarrow f\cdot 1_u$. Da er E oplagt en ortogonal resolution af enheden. For $v \in \mathbb{H}$ gælder

$$(v|M_{\{u\}}v) = \langle I(v)|E_{\{u\}}(I(v))\rangle \tag{268}$$

hvilket viser at $M_B = PE_BP$. Det generelle resultat kan fås ved at gå til

Q.E.D.

SÆTNING (Holevo 1986) For enhver måling M i et Hilbertrum $\mathbb{H}$, findes et Hilbertrum K, med en ren tilstand S_r og en simpel måling E i $\mathbb{H}\otimes K$ så

$$\mu^E_{S\otimes S_r}(D) = \mu^M_S(D) \tag{269}$$

for enhver tilstand S i $\mathbb{H}$.

BEVIS Lad E være en resolution af enheden i et Hilbertrum $\mathbb{L}$, der indeholder $\mathbb{H}$, så $M = PEP$. Da $\mathbb{L}$ er isomorft med $\mathbb{H}\otimes L^2(\mathfrak{U})$, findes der en isomorfi så $\mathbb{H} = \mathbb{H}\otimes 1_u$. Sæt $S_0 = |1_u\rangle\langle 1_u|$. For $X = E(D)$ gælder $Tr(S\otimes S_0)X = Tr(SPXP) = Tr(SM(D))$.

Q.E.D.

SÆTNING Lad $\mathcal{E}^i$ være et instrument med værdier i $\mathfrak{U}^i$ for i =

1,2. Da findes et instrument $\mathcal{E}^2\circ\mathcal{E}^1$ med værdier i $\Omega^2\times\Omega^1$, så

$$\mathcal{E}^2\circ\mathcal{E}^1(E_2\times E_1)(S) = \mathcal{E}^2(E_2)\mathcal{E}^1(E_1)(S) \tag{270}$$

for alle tilstande S og alle $E_i \in \mathfrak{B}(\Omega^i)$.

BEVIS For alle endelige delalgebraer $\mathfrak{B}^i$ af $\mathfrak{B}(\Omega^i)$ er $\mathcal{E}^2\circ\mathcal{E}^1$ defineret på $\mathfrak{B}^2\times\mathfrak{B}^1$. Derfor kan $\mathcal{E}^2\circ\mathcal{E}^1$ også defineres på $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(\mathfrak{B}^2\times\mathfrak{B}^1) = \mathfrak{B}(\Omega^2\times\Omega^1)$.

Q.E.D.

Som vi tidligere har set er et repetetivt instrument fuldstændigt fastlagt ved sin måling og sin reduktion. Nedenstående sætninger giver en fuldstændig beskrivelse af disse.

SÆTNING Lad $\mathcal{M}$ være en simpel måling givet ved den ortogonale resolution af enheden $\{M_B;B \subseteq \Omega\}$. Hvis instrumentet $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ eksisterer, er det givet ved

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(f)(S) = (\int f\ dM)\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1)S \tag{271}$$

og M_B ligger i kommutatoren til $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1)(\mathcal{W})$.

BEVIS Antag først, at W er endelig. Da er enhver tilstand givet ved en tæthedsoperator. Vi viser først at M_B er centrale.

$$\mathrm{tr}(M_B\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_B)(S)}{\mathrm{tr}(\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_B)(S))}) = 1\ , \tag{272}$$

hvilket viser at M_B kommuterer med $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_B)(S)$.

$$\mathrm{tr}(M_B\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_{\complement B})(S)}{\mathrm{tr}(\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_{\complement B})(S))}) = 1\ , \tag{273}$$

hvilket viser at M_B kommuterer med $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_{\complement B})(S)$. Derfor kommuterer M_B med $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1)(S) = \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_B)(S) + \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1_{\complement B})(S)$, så M_B kommuterer med alle tæthedsoperatorer i $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1)(\mathcal{W})$ og dermed med alle elementer i $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1)(W)$. Det viser at (225) definerer et instrument, så det er nok at bemærke at $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(1) = \mathrm{id}$, og at $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$, hvilket er oplagt.

Det generelle resultat fås ved at bemærke at en von Neumannalgebra er direkte limes af sine endelige delalgebraer.

Q.E.D.

SÆTNING Lad $\mathcal{E}$ være et repetetivt instrument på en von Neumannalgebra W. Da er $\mathcal{E}(1)$ givet ved en betinget forvendtning $\mathbb{E}: W \longrightarrow W'$, hvor W' er en delalgebra af W. og $\mathcal{E}(1)(\phi) = \phi \circ \mathbb{E}$.

BEVIS Se beviset i Davies (1976) med de nødvendige ændringer.

Q.E.D.

En betinget forvendtning har typisk formen

$$\mathbb{E}(A) = \sum P_i A P_i \tag{274}$$

hvor P_i er den til instrumentet hørende måling.

Da de simple målinger ikke er ekstremalpunkter i mængden af målinger, er det somme tider i kvantemekanik nødvendigt at beskæftige sig med ikke repetetive instrumenter.

8. IRREVERSIBILITET OG MÅLEPARADOKSER I KVANTEMEKANIK

8.1.Reduktion af bølgepakken

I foregående afsnit så vi hvordan repetetive instrumenter virker på kvantemekaniske tilstande. Lad S være en tæthedsoperator, og lad et repetetivt instrument være givet ved en resolution (P_i) af enheden. Hvis resultatet af en måling er i er tilstanden efter målingen givet ved tæthedsoperatoren

$$S_i = \frac{P_i S P_i}{Tr(P_i S P_i)} \tag{275}$$

og tilstanden siges at være *kollapset*. Det er hensigtsmæssigt at dele kollapset op i 2 dele. Dels en *reduktion* af tilstanden, hvor S går over i

$$S' = \sum_i P_i S P_i \tag{276}$$

og dels et *kollaps* af S', hvor S' går over i S_i. Fordelen ved denne opdeling er, at S' er en konveks kombination af tilstandene S_i, så det, der sker under kollapset af S', svarer til det *kollaps* der sker, når vi slår en terning og observerer (måler) hvormange øjne, der vender opad. I terningtilfældet er vores viden om udfaldet først givet ved sandsynlighedsvektoren $(1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6)$ og efter observationen er vor viden givet ved et Diracmål på et af de 6 mulige udfald. Dette kollaps af en sandsynlighedsfordeling foregår ved, at vi *kopierer* omverdenens tilstand ind i vores hjerne. Dettte er som vi så i 5.1 et irreversibelt fænomen, men der er intet specifikt kvantemekanisk ved dette, og de termodynamiske problemer, som dette måtte afstedkomme, vil ikke blive behandlet. vi vil derfor koncentrere os om *reduktion* af kvantemekaniske tilstande.

Et af de kendteste kvantemekaniske paradokser er "Schrödingers kat", der handler om reduktion af bølgepakken. Vi tænker os en kat (f.eks. Schrödingers) spærret inde i en boks, der er isoleret fra omgivelserne. I boksen bliver der automatisk foretaget en kvantemekanisk måling af en elektrons spin, og hvis elektronen har spin <op| bliver en ampul med cyan-kalium knust, og de giftige dampe dræber katten; hvis elektronen har spin <ned| sker der ikke noget. Til sidst ser vi ind i kassen og konstaterer og katten er død eller ej. Hvad er der paradoksalt ved det?

Inde i kassen virker et instrument $\mathcal{E}$ på en (kat,elektron) i tilstanden S_1, hvilket resulterer i en tilstand S_2 (<død,op| eller <levende,ned|). Ved at lave målingen $\mathcal{M}_1$, der består i at kikke i kassen, får vi som resultat $\mathcal{R}_1$, at katten er død eller levende. I kassen er tydeligvis foregået en reduktion af tilstanden.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 \arrow[r] & \mathcal{R}_1 & \\
& S_2 \arrow[u] & \\
\mathcal{E} \arrow[ur] & & S_1 \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{277}$$

En anden måde at beskrive det samme på er at sige, at *hele* kassen er i en ren tilstand. Der går et stykke tid, men da Schrödingerligningen, der beskriver systemets dynamik, er tidssymmetrisk forbliver hele kassen i ren tilstand. Her tænkes målingerne $\mathcal{M}_2$ at gennemløbe alle tænkelige kvantemekaniske målinger.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_2 \arrow[r] & \mathcal{R}_2 & \\
& S_2 \arrow[u] & \\
\mathcal{E} \arrow[ur] & & S_1 \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{278}$$

I den første beskrivelse er tilstanden for en del af systemet reduceret, så det må den også være for hele systemet, hvilket er i modstrid med den anden beskrivelse, i hvilken systemets tilstand forbliver ren!

Der er 3 veje ud af dette paradoks:

1) Beskrivelsen er kun approksimativ.

2) Kvantemekanikken er ikke gyldig for måleinstrumenterne. Bohr synes nærmest at have været af denne opfattelse.

3) Bølgefunktionens reduktion er en art erkendelsesteoretisk eller psykologisk fænomen. Det er således noget, der først sker, når vi opfatter det med vores bevisthed. F.eks. prøver mangeverdens-teorien at give et svar af denne type.

Mulighed 3) er foreslået som en forklaring på bølgefunktionens <u>kollaps</u>, men det skyldes at begreberne reduktion af tilstande og kollaps af sandsynlighedsfordelinger ikke holdes ude fra hinanden. Det er således svært at se hvordan mangeverdensteorien skulle kunne forklare reduktionen af en tilstand. Samme kritik kan ofte rettes mod argumenter for 2). Nedenstående sætninger siger tydeligt, at 1) er en gyldig vej ud af paradokset, og der er således ingen grund til at diskutere mulighederne 2) og 3) yderligere.

SÆTNING Lad H være et n-dimensionalt Hilbertrum og lad A være en positiv operator mindre end 1. Lad mængden G af tilstande på H være forsynet med et sandsynlighedsmål, der er invariant under automorfier af G. Da er $E_S(tr(SA)) = 1/n\ tr(A)$, og $\sigma_S(tr(SA)) \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow 0$.

BEVIS Da målet er invariant under automorfier gælder

$$E(tr(SA) = tr(E(S)A) \tag{279}$$

$$= tr(1/n \cdot A)$$

$$= 1/n \cdot tr(A).$$

Lad f_k være givet ved $f_k(x) = 1/k \cdot [kx]$. Da er $\|A - f_k(A)\| \leq$

$1/k$, så det er nok at vise sætningen for operatorer af formen $f_k(A)$. Da

$$\sigma(tr(SA)) = \sigma(tr(S\cdot\sum 1/k\cdot 1_{[1/k,1+1/k]}(A))) \tag{280}$$

$$= \sigma(\sum 1/k\cdot tr(S\cdot 1_{[1/k,1+1/k]}(A)))$$

$$\leq \sum 1/k\cdot\sigma(tr(S\cdot 1_{[1/k,1+1/k]}(A))),$$

så det er nok at vise sætningen for operatorer af formen $1_{[1/k,1+1/k]}(A)$, alstå projektioner, så vi vil antage, at A er en projektion. De stabile delmængder af $\mathfrak{S}$ under automorfi er mængderne af operatorer med givet spektrum (egenværdier talt med multiplicitet). Det er nok at vise sætningen for sandsynlighedsmål koncentreret på stabile delmængder. Lad S være en tæthedsmatrix med egenværdier $\lambda \in Sp(S)$ og tilhørende egenvektorer v_λ. Da er

$$\sigma(tr(USU^*A)) = \sigma(tr(U(\sum \lambda\cdot v_\lambda \otimes v_\lambda)U^*A)) \tag{281}$$

$$\leq \sum \lambda\cdot\sigma(tr(U(v_\lambda \otimes v_\lambda)U^*A))$$

$$= \sigma\langle U(v_\lambda)|AU(v_\lambda)\rangle$$

$$= \sigma\|A(v)\|^2,$$

hvor v i den sidste linie gennemløber enhedskuglen i H forsynet med Hausdorff-målet. Dette er lig normalfordelingen i $2n$ reelle dimensioner restringeret til enhedskuglen. Antag at A er projektion ned på de første $2k$ koordinater, og sæt $v = v_1 + v_2$, hvor $A(v_1) = v_1$ og $A(v_2) = 0$. Da er $\|v_1\|^2$ og $\|v_2\|^2$ χ^2-fordelte med henholdsvis $2k$ og $2n - 2k$ frihedsgrader. (se Bichel & Doksum 1977 s. 13). Tætheden for $\|v_1\|^2$ givet $\|v\|^2$ er derfor en β-fordeling med parametre k og $n - k$. Derfor er variansen af $\|v_1\|^2$ lig med

$$k(n - k)/n^2(n + 1) \leq 1/(n + 1) \longrightarrow 0 \quad \text{for} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{282}$$

Q.E.D.

KOROLLAR Lad målingen μ med udfaldsrum U være givet ved resolution M_B af enheden. Lad tilstandsrummet $\mathfrak{S}$ være forsynet med et sandsynlighedsmål, der er invariant under automorfier af $\mathfrak{S}$. Da er $\underset{S}{E}(\mu_S(B)) = 1/n \ tr(M_B)$, og $\underset{S}{\sigma}(\mu_S(B)) \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow 0$.

BEMÆRK at $\underset{S}{E}(\mu_S(B)) = \mu_{1/n}(B)$, hvor $1/n$ er maksimum entropi tilstanden, hvor entropien $H(S)$ af en operator S skal være

$$H(S) = -tr(S \ ln(S)) \tag{283}$$

Korollaret siger løst sagt, at en given måling vil give samme resultat for de fleste tilstande. Et mindre generelt resultat i denne retning er blevet bevist af Seth Lloyd (1988). Ovenfor er målingen holdt fast, mens tilstanden varierer. For at kunne drage nogen konklusioner om hvorfor der ikke altid ses nogen reduktion af bølgefunktionen, er det nødvendigt at bevise en tilsvarende sætning, hvor tilstanden holdes fast og målingen tillades at variere. Vi har derfor brug for et sandsynlighedsmål på mængden af målinger.

En endeligt frembragt konveks mængde udspænder et endeligt dimensionalt vektorrum. Dette har et Haarmål, der er entydigt bestemt op til en faktor. Hvis den konvekse mængde er kompakt, er målet af den endeligt. Det kan derfor normeres. Herved er der konstrueret et entydigt bestemt sandsynlighedsmål til den konvekse, kompakte mængde. Vi vil referere til dette som det *kanoniske mål* på den konvekse mængde. I beviset for næste sætning får vi brug for følgende lemma.

LEMMA Lad $\mathbb{H}$ være et n-dimensionalt Hilbertrum og lad $[0,1]$ være mængden af positive operatorer på H forsynet med det kanoniske sandsynlighedsmål. Da er $E(1/n \ tr(A)) = 1/2$ og $\sigma(1/n \ tr(A)) \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

BEVIS Afbildningen $A \longrightarrow 1 - A$ er affin og bijektiv på $[0,1]$, hvilket viser at

$$E(1/n\ tr(A)) = E(1/n\ tr(1 - A)) \tag{284}$$

$$= 1 - E(1/n\ tr(A))$$

og dermed

$$E(1/n\ tr(A)) = 1/2. \tag{285}$$

Hvis A skrives på formen

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & X \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ X & & \end{bmatrix} \tag{286}$$

får man

$$\mathrm{Var}(1/n\ tr(A)|A \in [0,1]) = \mathrm{Var}(1/n \sum \alpha_i |A \in [0,1]) \tag{287}$$

$$= 1/n^2(\sum_i \mathrm{Var}(\alpha_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(\alpha_i,\alpha_j))$$

$$= 1/n\ \mathrm{Var}(\alpha_1) + (n-1)/n\ \mathrm{Cov}(\alpha_1,\alpha_2) \quad .$$

Da $\mathrm{Var}(\alpha_1) \leq 1$, er det nok at vise, at $\mathrm{Cov}(\alpha_1,\alpha_2) \leq 0$. Der gælder

$$\mathrm{Cov}(\alpha_1,\alpha_2) = E(\alpha_1\alpha_2) - E(\alpha_1)E(\alpha_2) \tag{288}$$

$$= E(E(\alpha_1|\alpha_2)\alpha_2) - E(\alpha_1)E(\alpha_2)$$

$$= E((E(\alpha_1|\alpha_2) - E(\alpha_1))\alpha_2)$$

Sæt $F = f(\alpha_2) = E(\alpha_1|\alpha_2) - E(\alpha_1)$. Hvis f kan vises at være aftagende, er $(E(\alpha_1|\alpha_2) - E(\alpha_1))\alpha_2 = F \cdot f^{-1}(F)$ en konkav funktion af F, og der gælder

$$\mathrm{Cov}(\alpha_1,\alpha_2) = E(F\cdot f^{-1}(F)) \leq E(F)\cdot f^{-1}(E(F)) = 0 \tag{289}$$

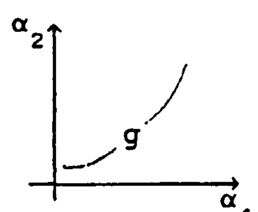
Tilbage er altså at vise, at $E(\alpha_1|\alpha_2)$ er en aftagende funktion af α_2. Lad B være den del af A-matricen, der er forskellig fra α_1 og α_2:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \boxed{\alpha_2} & \\ & & B \end{bmatrix} \tag{290}$$

Da er $E(\alpha_1|\alpha_2) = E_B(E(\alpha_1|\alpha_2,B))$, så det er nok at vise, at $E(\alpha_1|\alpha_2,B)$ er aftagende for fastholdt B. Afbildningen $(\alpha_1,\alpha_2) \longrightarrow A$ er voksende i begge variable for fastholdt B. Envidere er

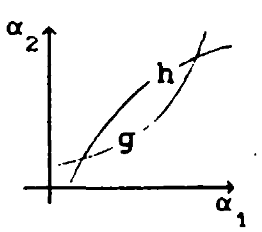
$$\{(\alpha_1,\alpha_2)|A \in [0,1]\} = \{(\alpha_1,\alpha_2)|A \geq 0\}\cap\{(\alpha_1,\alpha_2)|A \leq 1\} \tag{291}$$

Nu er $\{(\alpha_1,\alpha_2)|A \geq 0\}$ en konvekas mængde, der er afgrænset af en aftagende konveks funktion g.



$\{(\alpha_1,\alpha_2)|A \geq 0\}$ (292)

Tilsvarende er $\{(\alpha_1,\alpha_2)|A \leq 1\}$ afgrænset af en aftagende konkav funktion h.



$\{(\alpha_1,\alpha_2)|A \in [0,1]\}$ (293)

Da er $\{(\alpha_1,\alpha_2)|A \in [0,1]\}$ afgrænset af g og h, og

$$E(\alpha_1|\alpha_2,B) = \frac{g(\alpha_1) + h(\alpha_1)}{2}, \tag{294}$$

hvilket oplagt er en aftagende funktion. Q.E.D.

SÆTNING Lad $\mathbb{H}$ være et n-dimensionalt Hilbertrum og lad S være en tilstand på $\mathbb{H}$. Mængden $\mathfrak{M}$ af målinger på $\mathbb{H}$ med det endelige udfaldsrum U udgør en konveks mængde, og kan derfor forsynes med det kanoniske sandsynlighedsmål. Da vil $E(\mu_S(u)) = 1/k$, $u \in U$, hvor k er antallet af elementer i U, og $\sigma(\mu_S(u)) \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$.

BEVIS. Den første påstand indses let, idet

$$\sum_{u \in U} E(\mu_S(u)) = E(\mu_S(U)) = E(1) = 1 . \tag{295}$$

Da sandsynlighedsmålet på $\mathfrak{M}$ er invariant under automorfier, kan vi ifølge ovenstående sætning antage, at $S = 1/n$.
Da

$$\sum_{u \in U} \mu_S(u) = 1 \tag{296}$$

er det nok at vise, at

$$\sigma(\mu_S(u) - \mu_S(u')) = 2 \cdot \sigma(1/2 \cdot \mu_S(u,u') - \mu_S(u')) \longrightarrow 0 \quad \text{for} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{297}$$

Det kan reduceres til at vise, at $E(\mu_S(u')) = 1/2 \cdot \mu_S(u,u')$ og $\sigma(\mu_S(u')) \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$, givet $\mu_S(u,u')$ for alle $\mu_S(u,u')$. Det første er oplagt. Hvis $\mu_S(u,u')$ er givet ved operatoren C er det det samme som at vise at $\sigma(\mathrm{tr}(1/n \cdot A)) \longrightarrow 0$ for $n \longrightarrow \infty$, givet $0 \leq A \leq C$. Men $0 \leq A \leq C$ er ensbetydende med $0 \leq D \leq 1$, hvor $D = C^{-1/2} A C^{-1/2}$. Envidere gælder

$$\mathrm{tr}(1/n\cdot A) = \mathrm{tr}(1/n\cdot C^{1/2}DC^{1/2}) \tag{298}$$

$$= \mathrm{tr}(1/n\cdot CD)$$

$$= 1/n\cdot \mathrm{tr}(D)\cdot \mathrm{tr}(\frac{D}{\mathrm{tr}(D)}\ C)$$

Ifølge ovenstående sætning er $\mathrm{tr}(\frac{D}{\mathrm{tr}(D)}C)$ tæt på $1/n\cdot\mathrm{tr}(C)$ med stor sandsynlighed. Da afbildningen $A \longrightarrow C^{-1/2}AC^{-1/2}$ er affin, er den transformerede sandsynlighedsfordeling af D den kanoniske, og $1/n\cdot\mathrm{tr}(D)$ vil derfor være tæt på 1/2 ifølge lemmaet. Derfor er tr(SA) med stor sandsynlighed tæt på $1/2\cdot\mathrm{tr}(SC)$. Det viser $\mu_S(u)$ med stor sandsynlighed er tæt på $1/2\cdot\mu_S(u,u')$.

Q.E.D.

Sætningen siger løst sagt, at resultatet af et fysisk eksperiment vil være uinteressant med mindre målingen er valgt således, at der kommer et interessant resultat. Specielt vil en måling ikke kunne skelne mellem en ren og en reduceret tilstand med mindre målingen er specifikt indrettet til at skelne mellem den rene og den reducerede tilstand. Og det er lige præcis hvad man oplever eksperimentelt! Ovenstående fortolkning kræver naturligvis, at man akcepterer det kanoniske sandsynlighedsmål som et relevant mål på mængden af målinger.

BEMÆRK at $E(\mu_S)$ er maksimum entropi fordelingen på $\mathfrak{U}$. Dette sammenholdt med resultatet i 3.3. giver, at hvis man laver en tilfældig måling om hvilket man kun ved at $E(\mu_S) \in K$, hvor K er en konveks mængde, da vil $E(\mu_S)$ med stor sandsynlighed være maksimum entropi fordelingen i K.

8.2. Ikke-kausalitet og EPR-paradokset

Ved en lokal kausalmodel vil vi forstå en I-model, der ved indførsel af passende skjulte variable kan udvides til en lokal I-model, der er invariant under den restringerede inhomogene

Lorentz-gruppe. Vi vil antage at $(M \oplus_s \mathcal{L}_0)_+ = M_+$. Den eneste grund, der *a priori* skulle være, til at tro at *alle* fysiske processer kan beskrives med lokale kausalmodeller er årsagssætningen, og den har vi tidligere afvist som værende *a priori* almen gyldig. Den kvantemekaniske formalisme åbner mulighed for afvisning af lokal kausalitet, idet de variable tilstand og måling ikke nødvendigvis er lokale variable.

En måleprocedure skal bestå af 2 uafhængige detektorer, der hver kan roteres om deres fælles akse. Præperationen skal bestå i udsendelse af spin-1/2 partikler. Vi vil antage at der er tale om et elementært kvantefænomen, hvilket skal betyde at det skal beskrives med en irreducibel repræsentation af $\mathbb{T}^2$. For hver detektor defineres en lokal variabel θ_i, $i = 1,2$, der angiver med hvilken vinkel den er roteret. Envidere defineres lokale variable D_i, der angiver om der er detekteret noget eller ej. Endnu en variabel K defineres, og den skal angive, om der er koencidens, altså om $D_1 = D_2$. Vi ved, at måling af variablen K kan skrives som en konveks konbination af en måling, der ikke afhænger af vinklerne men af dødtid i detektorer og lignende,og en måling, hvori en K er determineret for visse vinkler. Antag at K er determineret for visse vinkler. Da gælder

$$P(D_1 \neq D_2 | \theta_1, \theta_2) = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) + 1}{2} \tag{299}$$

Vi har følgende netværk

$$\begin{tikzcd} & & K & & \\ & D_1 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & D_2 \arrow[ul] & \\ \theta_1 \arrow[ur] & & & & \theta_2 \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{300}$$

Spørgesmålet er om korrelationerne mellem de variable kan forklares ved hjælp af en lokal kausalmodel. Der er 2 muligheder. Enten kan man tilføje en eller flere pile mellem variable med forskelligt nummer. Eller man kan indføre en lokal skjult variabel, så man får følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & K & & \\
 & D_1 \arrow[ur] & & D_2 \arrow[ul] & \\
\theta_1 \arrow[ur] & & S \arrow[ul] \arrow[ur] & & \theta_2 \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{301}$$

Ved at indsætte sandsynlighederne i Bell's uligheder og ved f.eks. at vælge følgende vinkler ses ulighederne at være brudt. Man kan derfor ikke løse problemet med en skjult variabelmodel. Hvis hele målingen er således arrangeret, at D_1 og D_2 er spartielt separerede, kan man også udelukke en pil mellem D_1 og D_2, da modellen i så fald ikke kan udvides til at være invariant under $\mathbf{M}\oplus_s\mathcal{L}_0$ uden at bryde forudsætningen $(\mathbf{M}\oplus_s\mathcal{L}_0)_+ = \mathbf{M}_+$.

Ovenstående viser, at hvis man kan lave en forsøgsopstilling, der kan modelleres af ovenstående, så kan lokal kausalitet afvises. Men *a priori* kan man ikke være sikker på at ovenstående modellerer nogetsomhelst, hvilket mange fysikere i mange år troede. Hvis man ikke kræver spartiel separation er det forholdsvis overkommeligt at lave noget, der med stor nøjagtighed modelleres af ovenstående: elektroner udsendes enkeltvis mod 2 Stern-Gerlach apperater, hvor den enten vil blive detekteret af det første, og derefter fortsætter for eventuelt at blive detekteret af det andet. Det første Stern-Gerlach-apperat vil splitte elektronstrålen og det kræver en dygtig eksperimentalfysiker at samle strålen igen efter detektion. Der kræves naturligvis meget følsomme detektorer, og det hele skal kunne roteres. Her vil man naturligt vende pilen fra D_1 til D_2.

Hvis man kræver spartiel separation af D_1 og D_2, er opgaven derimod meget vanskelig. Det første rigtigt overbevisende forsøg med spartiel separetion blev lavet af Allan Aspect i 1982. Han brugte fotoner (der er spin-1 partikler) i stedet for elektroner, hvilket blot betyder at vinklerne i beregningerne skal ændres med en faktor 2. Ved et kaskade henfald af et eksiteret kalciumatom udsendes 2 fotoner i modsatte retninger og med samme polarisering. Disse rammer da polaroidfiltre, der kan roteres uafhængigt. Da fotoner bevæger sig med lysets hastighed vil D_1 og D_2 automatisk blive spartielt separerede. For også at få θ_1 og θ_2 separeret blev disse styret af uafhængige tilfældighedsgeneratorer, der skiftede vinklerne med tidsintervaller mindre end ℓ/c, hvor ℓ er afstanden mellem de 2 polarisatorer. I stedet for at dreje polarisatorerne blev strålen med en optisk switch styret til at ramme en af 2 faste polarisatorer i hver ende af opstillingen. De 4 detektorer var elektrisk forbundet med en central koincidenstæller. At konstruere en sådan forsøgsopstilling er en stor teknisk præstation og kræver naturlig en dygtig kvantemekaniker.

Man kan altid afvise konklusionen af et forsøg ved at forklare forsøgsresultatet ud fra nogle *ad hoc* antagelser, og det er i høj grad gjort med dette forsøg. En af de mere alvorlige indvendinger er at man rent faktisk kun observerer θ_1, θ_2 og K. Derfor kan D_1 og D_2 opfattes som skjulte variable og den observerede del af netværket er

$$\begin{tikzcd} & K & \\ \theta_1 \arrow[ur] & & \theta_2 \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad (302)$$

og det er jo en pæn lokal kausalmodel. Et forsøg, der kunne afvise dette argument, ville kræve at der på et tidspunkt mellem detektionen i enden og registreringen i koincidenstælleren er sket en irreversibel proces.

Det væsentlige ved forsøget er dog at det gav et resultat, som tilhængere af lokal kausalitet (heriblandt Aspect selv) ikke havde ventet på forhånd. Kvantemekanikken, der er ikke-lokal, er dermed anvendelig selv i situationer, hvor dens modstandere troede den ville blive falsificeret. Hvis man vil bevare troen på lokal kausalitet, er den eneste mulighed at lave en alternativ teori, der beskriver forsøgene bedre. Forsøgene skulle med andre ord ikke modelleres med irreducible repræsentationer.

Der er lavet andre forsøg til at påvise ikke-lokalitet, og resultaterne fremgår af nedenstående skema taget fra Redhead (1987). Her betyder √ at forsøgsresultaterne stemmer overens med kvantemekanikkens forudsigelser, mens ÷ betyder at der er en signifikant afvigelse.

Eksperimenter med synligt lys

1972 √	Freedman & Clauser	Ca kaskade
1972 ÷	Holt & Pipkin	Hg kaskade
1976 √	Clauser	Hg kaskade
1976 √	Fry & Thomson	Hg kaskade
1981 √	Aspect, Grangier & Roger	Ca kaskade og 1-kanal polarisatorer
1982 √	Aspect, Grangier & Roger	Ca kaskade og 2-kanal polarisatorer
1982 √	Aspect, Dalibard & Roger	Ca kaskade og optiske switche
1985 √	Perrie, Duncan, Beyer & Kleinpoppen	2-foton emision fra metastabil atomar deuterium

Lavenergi proton-proton spredning

1976 √	Lamehi-Rachti & Mittig	spin-korrelation ved dobbeltspredning

Eksperimenter med γ-stråling

1974 ÷	Faraci, Gutkowski, Notarrigo & Pennisi	Compton polarimeter og ^{22}Na kilde
1975 √	Kasday, Ullman & Wu	Compton polarimeter og ^{64}Cu kilde
1976 √	Wilson, Lowe & Butt	Compton polarimeter og ^{64}Cu kilde
1977 √	Bruno, d'Agostino &	Compton polarimeter og

Da kvantemekanikken er ikke-lokal er der ingen grund til at tro at de kvantemekaniske variable opfylder aksiomet om komposition, så generelt kan man ikke forvendte at kunne lave grafiske modeller for de betingede uafhængigheder mellem de variable.

9. IRREVERSIBILITET I TERMODYNAMIK OG STATISTISK MEKANIK

9.1. Ehrenfests urnemodel.

I Ehrenfests urnemodel for diffusion haves 2 urner, der hver indeholder et vist antal kugler. Hvert 10. minut tages en tilfældig kugle og lægges over i den anden urne. Lad R_t betegne antallet af kugler i den første urne. Hvis begyndelsesbetingelserne er givet udgør R_t en markovkæde

$$\begin{tikzcd} \vdots \\ R_2 \\ R_1 \arrow[u] \\ R_0 \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{303}$$

og pilene kan vendes. Beskrevet på denne måde indeholder modellen ingen retning. Imidlertid er P_0 bestemt af ydre forhold såsom vore beslutninger. Hvis P_0 er en fri beslutningsvariabel, skal P_0 imidlertid være initial i netværket. Hvis vi lader P_0 være bestemt af 2 terningkast $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$, da fås netværket

$$\begin{tikzcd} & \vdots & \\ & R_2 & \\ & R_1 \arrow[u] & \\ & R_0 \arrow[u] & \\ \mathcal{T} \arrow[ur] & & \mathcal{T}' \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{304}$$

og her kan pilene ikke vendes. Det vil sige, at hvis den måde, begyndelsesbetingelserne er dannet på, inddrages i betragtningerne, så vil reversibiliteten forsvinde. I Reichenbach's (1956) terminologi vil man sige at systemet er kvasilukket, idet det vekselvirker med omgivelserne og herefter er lukket. Teorien for betinget uafhængighed må her betragtes som en præcisering af hvad det skal betyde at være kvasilukket.

Det første diagram er ikke symmetrisk i tid, idet der i almindelighed gælder at $P(P_{t+1} = r \mid P_t = r') \neq P(P_t = r \mid P_{t+1} = r')$. Der findes imidlertid en fordeling μ_1 på R_1, så fordelingen μ på $(R_1, R_2, \ldots)$ er symmetrisk i tid. Da kan P fås ved at opdatere μ med hensyn til $P_{|R_1}$. Da gælder

$$\begin{aligned} D(P\|\mu) &= \underset{R_1}{E}(D(P(\cdot|R_1)\|\mu(\cdot|R_1))) + D(P_{|R_1}\|\mu_{|R_1}) \\ &= D(P_{|R_1}\|\mu_{|R_1}) \end{aligned} \tag{305}$$

Denne størrelse måler afvigelsen fra tidssymmetri. Størrelsen $D(P_{|R_t}\|\mu_{|R_t})$ er aftagende i tid, og er den maksimale entropi minus entropien. Envidere vil $D(P_{|R_t}\|\mu_{|R_t})$ konvergere mod nul for t gående mod uendelig. Indfør nu nye variable X_t^i, der angiver i hvilken urne den i'te kugle er til tiden t. Da fås følgende diagram

$$\begin{tikzcd} \vdots \\ (X_3^i)_i \arrow[r] \arrow[u, dotted, no head] & R_3 \\ (X_2^i)_i \arrow[r] \arrow[u] & R_2 \\ (X_1^i)_i \arrow[r] \arrow[u] & R_1 \end{tikzcd} \tag{306}$$

Informationsgevinsten ved opdatering med hensyn til R_1 bliver det samme som før, men det er lettere at beskrive den tidssymmetriske proces $((X_1^i)_i, (X_1^i)_i, \ldots)$. Enhver anden skjult-variabel-model for processen $(R_1, R_2, \ldots)$ vil give samme informationsgevinst ved opdatering, da den kun afhænger af den nye og den gamle fordeling af R_1. Det følgende afsnit vil behandle termodynamiske systemer efter samme retningslinier.

9.2. Exergi og information

Lad $\mathcal{G}$ være tilstandsrummet for et termodynamisk system. Vi vil antage at $\mathcal{G}$ er endeligt frembragt. Lad T_t betegne den afbildning, der sender en præparation $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ til tiden t' i den tilsvarende præparation til tiden $t' - t$. Hvis $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ er forskellige variable, der påvirker præparationen, så fås følgende Bayesianske netværk

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \\
 & T_{t'}(\mathcal{P}) & \\
 & T_t(\mathcal{P}) \arrow[u] & \\
 & \mathcal{P} \arrow[u] & \\
\mathcal{T} \arrow[ur] & & \mathcal{T}' \arrow[ul]
\end{tikzcd} \qquad t < t' \qquad (307)$$

Det ses, at det Bayesianske netværk er reversibelt, netop hvis begyndelsesbetingelserne ikke tages med i betragtning.

For $t \geq 0$ virker T_t også på tilstandsrummet, thi hvis $\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \mathcal{M}(\mathcal{P}')$ for alle målinger $\mathcal{M}$ så gælder specielt $\mathcal{M}(T_t(\mathcal{P})) = \mathcal{M}(T_t(\mathcal{P}'))$ idet $\mathcal{M} \circ T_t$ er en måling. Hvis $t < 0$ er det ikke sikkert at $\mathcal{M} \circ T_t$ er en måling, thi det kan i så fald være at $T_t(\mathcal{P})$ er en præparation, der er senere end målingen $\mathcal{M}$. Herved har vi en virkning af $\mathbb{R}_+$ på $\mathcal{G}$. Antag at $t \longrightarrow T_t \in \mathrm{aff}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ er kontinuert. Mængden K_t af fixpunkter for T_t er en konveks kompakt mængde, og $K_{1/2^n}$ er en aftagende følge og har derfor en ikke-tom kompakt konveks fællesmængde K. Da K er invariant under $T_{1/2^n}$ er K også invariant under $T_{m/2^n}$ for $m \in \mathbb{N}$. På grund af kontinuitet er K derfor invariant under T_t for alle $t \in \mathbb{R}_+$. Sæt

$$D(\phi \| K) = \inf_{\psi \in K} D(\phi \| \psi) \,. \tag{308}$$

Da er $D(T_t(\phi) \| K)$ er en aftagende følge for en vilkårlig tilstand ϕ. Lad $\mathfrak{S}^*$ betegne en konveks mængde med en virkning $T^*: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S}^*)$ og lad Π betegne en affin afbildning $\mathfrak{S}^* \longrightarrow \mathfrak{S}$, således at nedenstående diagram kommuterer.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}^* \arrow[r, "\Pi"] & \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S}^* \arrow[u, "T_t^*"] \arrow[r, "\Pi"] & \mathfrak{S} \arrow[u, "T_t^*"] \end{tikzcd} \tag{309}$$

Da gælder $D(\phi \| K) = D(\Pi^{-1}(\phi) \| \Pi^{-1}(K))$, hvor højresiden er supremum over målinger på $\mathfrak{S}^*$ af formen $\mathcal{M} \circ \Pi$, hvor $\mathcal{M}$ gennemløber målinger på $\mathfrak{S}$. Specielt kan $\mathfrak{S}^*$ betegne $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}^*$, hvor $\mathfrak{B}^*$ er en mængde af skjulte variable. Denne mængde er et simplex. Lad $\partial_e(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}^*)$ betegne ekstremalpunkterne i $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}^*$. Da svarer elementerne i $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}^*$ til sandsynlighedsfordelinger på $\partial_e(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}^*)$, og T^* er givet ved det Bayesianske netværk

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}^*_{t'} \\ \mathcal{P}^*_t \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad t < t' \tag{310}$$

hvor $\mathcal{P}^*$ gennemløber $\partial_e(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}^*)$. Netværket vil være tidssymmetrisk, netop hvis $\phi \in K$. Lad Ω betegne de sandsynlighedsmål, der giver en Markovproces af formen (310). Lad envidere Θ betegne den afbildning, der sender en Markovproces ind i den tilstand, der fås ved at anvende Π på fordelingen af $\mathcal{P}_0$. Lad envidere Ω betegne den afbildning, der sender en Markovproces ind i fordelingen af $\mathcal{P}^*_0$. Da gælder

$$D(\phi\|K) = D(\theta^{-1}(\phi)\|\theta^{-1}(K)) = D(\Omega\circ\theta^{-1}(\phi)\|\Omega\circ\theta^{-1}(K)) \tag{311}$$

Antag at $\Omega\circ\theta^{-1}(K)$ er ét punkt og at dette svarer til sandsynlighedsmålet P på $\partial_e(\mathbb{D}\otimes\mathbb{B}^*)$. Hvis $\Omega\circ\theta^{-1}(\phi) = \mathrm{conv}(A)$, hvor $A \subseteq \partial_e(\mathbb{D}\otimes\mathbb{B}^*)$, så gælder ifølge eksemplet på side 24

$$D(\Omega\circ\theta^{-1}(\phi)\|\Omega\circ\theta^{-1}(K)) = -\ln(P(A)) \; . \tag{312}$$

Denne sidste størrelse er ofte forholdsvis let at beregne, idet $P(A)$ er sandsynligheden for at få en begyndelsesbetingelse som den observerede, hvor sandsynlighedsmålet er fastlagt ved at skulle være invariant under tidstranslationer.

Klassisk termodynamik tog sit udgangspunkt i studiet af varmemaskiner og deres effektivitet, og det samme vil vi nu gøre. Betragt nu et instrument $\mathcal{E}$ der skal suge energi ud af det termodynamiske system. Den til instrumentet hørende måling skal angive hvor meget energi der er overført fra det termodynamiske system til instrumentet. Da er $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)$ en sandsynlighedsfordeling på $\mathbb{R}$ og hvis $E \in \mathbb{R}$ betegner energien så skal $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)(E)$ betegne middelenergien. Lad $\mathfrak{J}$ være mængden af instrumenter vi har til rådighed til at tappe det termodynamiske system for energi. Hvis $\mathcal{E} \in \mathfrak{J}$, så vil $\mathcal{E}\circ T_t \in \mathfrak{J}$. Exergien af en tilstand ϕ er defineret som

$$Ex(\phi) = \sup_{\mathcal{E}\in\mathfrak{J}} \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)(E) \; . \tag{313}$$

Med denne definition gælder der automatisk, at $Ex(T_t(\phi))$ er en aftagende funktion af t. Bemærk at Ex er en konveks funktion af ϕ.

EKSEMPEL* I klassisk termodynamik er exergien af et system i termodynamisk ligevægt givet ved

$$Ex(\phi) = E - T_o S + p_o V \; , \tag{314}$$

hvor E, S og V er den indre energi, entropi og volumen i tilstanden ϕ, og T_o og p_o er omgivelsernes temperatur og tryk.

Lad der være givet et system bestående af flere delsystemer der hver for sig er i termodynamisk ligevægt. Lad T_1 og p_1 betegne henholdsvis temperatur og tryk af systemet, hvor delsystemerne er bragt i termodynamisk ligevægt. Lad ϕ betegne hele systemets tilstand og lad ϕ_i betegne tilstanden af de enkelte delsystemer. Lad envidere ' angive tilstanden efter at systemet er bragt i termodynamisk ligevægt. Exergien af det lukkede system er summen af exergiændringerne for delsystemerne, når disse bringes i termodynamisk ligevægt (med ligevægtstilstanden, der her kan betragtes som "omgivelserne):

$$Ex(\phi) = \sum Ex(\phi_i) - Ex(\phi_i') \tag{315}$$

$$= \sum(E(\phi_i) - T_1S(\phi_i) + p_1V(\phi_i)) - \sum(E(\phi_i') - T_1S(\phi_i') + p_1V(\phi_i'))$$

$$= (E(\phi) - T_1S(\phi) + p_1V(\phi)) - (E(\phi') - T_1S(\phi') + p_1V(\phi'))$$

$$= T_1(S(\phi') - S(\phi))$$

thi $E(\phi) = E(\phi')$ og $V(\phi) = V(\phi')$, idet systemet er lukket.

Formelen i ovenstående eksempel viser, at for et lukket system i klassisk termodynamik er voksende entropien ækvivalent med aftagende exergi. Begrebet exergi har den fordel, at det i modsætning til entropibegrebet ikke kræver en ligevægtstermodynamik. Mange problemer i termodynamik skyldes netop, at man forsøger at anvende ligevægtstermodynamik på ikke-ligevægtssystemer.

For en tilstand ϕ af et termodynamisk system er der således defineret 2 størrelser, $Ex(\phi)$ og $D(\phi \| K)$, der begge aftager med tiden. Der er en snæver forbindelse mellem disse størrelser. Hvis vi arbejder i et reduceret tilstandsrum $\mathfrak{S}'$ defineret ved, at man udelukkende betragter målinger, der svarer til instrumenter i $\mathfrak{I}$, fås

$$D(\phi\|K) = \sup_{\mathcal{E}\in\mathfrak{Z}} \inf_{\phi\in K} \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)\left(\ln\left(\frac{d\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)}{d\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)}\right)\right) . \tag{316}$$

Lad $E_1, E_2, \ldots$ være de forskellige energiniveauer i instrumentet. Vi tænker os at den invundne energi foreligger på en måde, der kan beskrives med klassisk termodynamik. Vi tænker os nu $m + n$ uafhængige termodynamiske systemer, som $\mathcal{E}$ anvendes på. De første m systemer skal være i tilstanden ϕ, mens de sidste n skal være i tilstanden ψ. Vi vil antage at n er stor. Da vil cirka $m \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)(E_i)$ af de første være i energitilstanden E_i, mens cirka $m \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)(E_i)$ af de sidste vil være i energitilstanden E_i. De sidste skal være vort varme reservoire. Hvis $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)$ ikke er minimum informations fordelingen, findes en klassisk beskrevet varmemaskine $\mathcal{E}'$, der vinder energi ved at omfordele energien mellem de forskellige energiniveauer, således at $\mathcal{M}_{\mathcal{E}'\circ\mathcal{E}}(\psi) = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)$, og således at $\mathcal{M}_{\mathcal{E}'\circ\mathcal{E}}(\phi)$ er minimum informationsfordelingen med referencetilstand $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)$. Antag, at hvis $\mathcal{E} \in \mathfrak{Z}$, så vil $\mathcal{E}'\circ\mathcal{E} \in \mathfrak{Z}$. Men hvis $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)$ er minimum informationsfordelingen med referencetilstand $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)$, så er $\ln\left(\frac{d\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)}{d\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)}\right)$ netop et udtryk, der er proportionalt med forskellen i middelenergi mellem $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\phi)$ og $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)$. Hvis det antages, at det i bedste fald gælder at $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\psi)(E) = 0$ for $\psi \in K$, så gælder

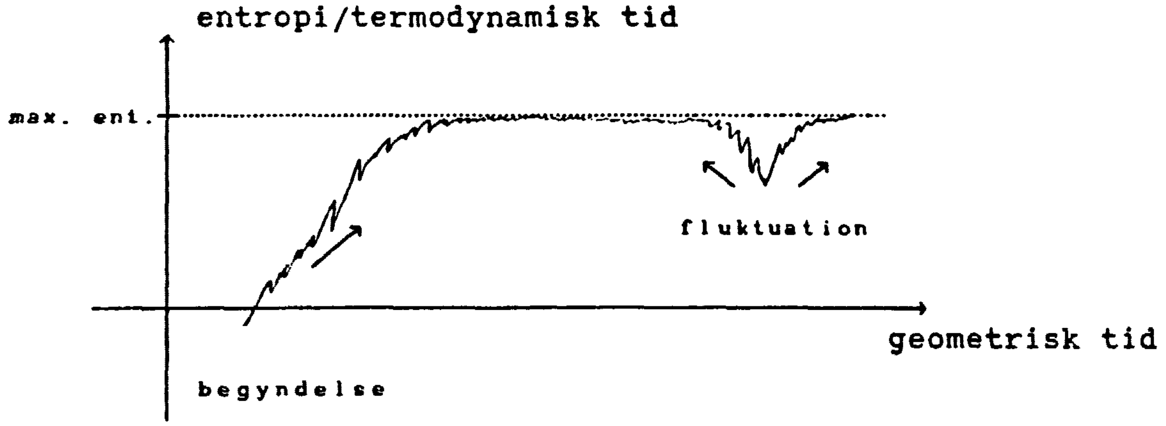
$$Ex(\phi) = \alpha D(\phi\|\bar{K}) , \tag{316}$$

hvor α er en konstant. En formel af denne type kaldes somme tider *Boltzmann's bro* efter Bolzmann (se Olsen & Berning 1989) som var den første, der fandt en formel der sammenknytter sandsynligheds- og energibegreber.

Bemærk iøvrigt, at ovenstående demonstration af entropiens vækst ikke umidlbart kan anvendes på universet som helhed, idet energi er et relativistisk begreb. En korrekt anvendelse af termodynamiske betragtninger på selv-graviterende systemer antyder tværtimod, at universet ikke vil lide den varmedød som Bolzmann forudsagde. Se Davies (1974) for referencer.

9.3 Fluktuationer

Et statistisk mekanisk system i termodynamisk ligevægt vil undergå fluktuationer, hvilket vil sige at gentagne målinger af samme størrelse ikke vil give samme resultat. Størrelsesordenen af fluktuationerne vil være $n^{1/2}$, hvor n er partikelantallet. Eksempelvis vil resultaterne af energimålinger kunne fluktuere på trods af at middelværdien af den fri energi (exergien) er aftagende. Man kan således have tilvækst i fri energi for et lukket system. Hvis man definerer entropien ved hjælp af den fri energi, så kan man have et entropifald! Ved at definere en termodynamisk tidsretning som retningen for entropivækst opstår den besynderlighed at den termodynamiske tid ikke giver en total ordning af den geometriske tidsparameter t. Den termodynamiske tid vil pege bort fra enhver fluktuation. Nogle opfatter universets opståen som en fluktuation, hvorved den termodynamiske tidsretning fra begyndelsesbetingelser mod ligevægt også kan opfattes som en bevægelse bort fra en fluktuation.



Et større statistisk mekanisk system kan deles op i delsystemer, der hver vil undergå fluktuationer, og på samme tid vil forskellige delsystemer kunne have modsat rettede termodynamiske tidsretninger. Alt dette taler mod, at termodynamisk tid defineret på denne måde kan benyttes til at definere et anvendeligt tidsbegreb.

10. Kausale løkker og lignede

De foregående kapitler har vist, at tid og kausalitet i almindelighed svarer til orienteringen af I-modeller. I dette kapitel skal vi prøve at analysere nogle eksempler fra litteraturen, der hører ind under begrebet kausale løkker. Når det somme tider giver anledning til paradokser, skyldes det, at man enten forestiller sig noget usandsynligt eller at paradokset slet ikke kan modelleres ved hjælp af I-modeller.

10.1. Tidsrejser

I science fiction litteraturen forekommer somme tider tidsmaskiner eller andre indretninger, der kan bringe en person på et tidspunkt til at leve videre på et andet tidspunkt. Den ene type tidsmaskine kan bringe en person ud i fremtiden, og den anden type kan bringe en person tilbage til fortiden.

Den første type er fysisk mulig ifølge relativitetsteorien, hvilket af nogle mennesker, der ikke har vænnet sig til tankegangen, stemples som et paradoks. Det foregår ved, at en person på jorden placeres i en raket, som accelereres op til en hastighed nær lysets. Den flyver så et stykke tid, vendes og flyver tilbage til jorden. Personens tidsmålinger er nu ikke synkron med tidsregningen på jorden. Personen er kommet ud i fremtiden. Det er vigtigt at bemærke, at det i denne forbindelse er ligegyldigt om personen måler tiden fysisk eller biologisk via sin egen ældning. Personen er med andre ord yngre end sin tvillingebror, der blev på jorden. Situationen er asymmetrisk, idet det kun er den ene der bliver udsat for de voldsomme akcellerationer og decellerationer. Biologisk set kunne det samme være opnået ved at ham på jorden havde et hårdt og stresset liv, mens den anden levede et sundt liv. En person, der ser gammel ud, er biologisk set gammel, idet knogler o.s.v. bliver ældet sammen med vores udseende. At ure, der bevæger sig med stor indbyrdes hastighed ikke går synkront, er en kendsgerning, som man må vænne sig til. Ud fra denne synsvinkel er det paradoksale, at det så ofte kan lade sig gøre at lave synkrone ure. Derfor vil vi ikke beskæftige os mere med tidsrejser til fremtiden.

Den anden type tidsmaskine bringer en person tilbage til fortiden. Personen medbringer ur og kalender ind i tidsmaskinen, trykker på en knap og ankommer til et eller andet sted på et tidligere tidspunkt. Hans tidsmåling er nu ikke synkroniseret med omgivelsernes, idet hans ur viser et senere tidspunkt end omgivelsernes. Herefter skulle der kunne ske forskellige underlige ting. Se Ray 1991, Wells 1958, Dummett 1986 for eksempler.

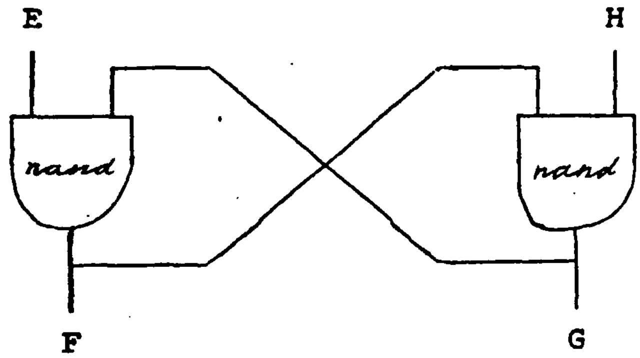
Lad os først give en beskrivelse af en kausal løkke i termer af hybridgrafer.

Systemer med feedback er blevet studeret meget i systemteori, og Wright (1960) giver en behandling af emnet i termer af path-diagrammer. Disse undersøgelser betragter fænomenet dynamisk i den forstand at hvis A påvirker B og B påvirker A, så er der tale om variable til forskellige tider. Hvis A_t og B_t betegner de variable A og B til tiden t, så kan situationen beskrives med I-modellen

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \\
A_t & B_t \\
A_{t+1} \arrow[u] \arrow[ur] & B_{t+1} \arrow[u] \arrow[ul] \\
A_{t+2} \arrow[u] \arrow[ur] & B_{t+2} \arrow[u] \arrow[ul] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd} \qquad (317)$$

De behandlede diagrammer indeholder således ingen løkker. Der er dog ikke noget i vejen for, at I-modeller kan indeholde orienterede løkker, hvilket er emnet for dette afsnit.

EKSEMPEL (Flip-flop) En flip-flop består af 2 krydsforbundne nand-gates.



(318)

Her betegner **E, F,** G og H de logiske variable. Sandhedsværdierne fremgår af nedenstående sandhedstabel:

E	H	F	G
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
0	0	1 eller 0	0 eller 1

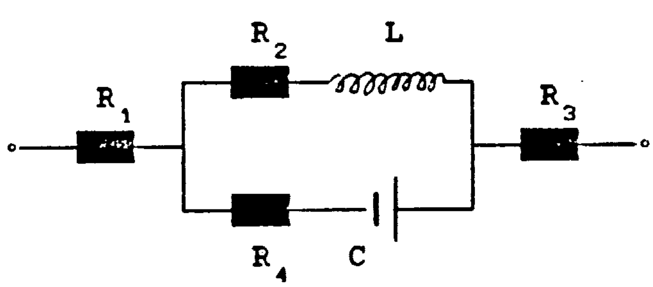
(318)

Vi vil tillægge hver af de 2 muligheder i nederste rubrik sandsynligheden 1/2. I praksis er (F,G) bestemt ved at (F,G) = (1,0), hvis (E,H) lige før har antaget værdien (0,1), og (F,G) = (1,0), hvis **(E,H)** lige før har antaget værdien (0,1). De variable kan beskrives med nedenstående I-model:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & G \arrow[l, bend right] \\
E \arrow[u] & H \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{319}$$

Bemærk at sandsynlighedsfordelingen på F og G ikke er fastlagt ved sandsynlighederne for E og H samt den betingede sandsynlighed for F givet E og G, og den betingede sandsynlighed for G givet F og H.

EKSEMPEL Nedenstående diagram angiver en elektrisk svingningskreds.



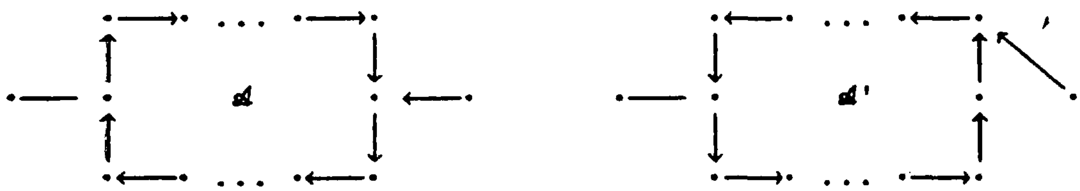
(320)

Lad I_i, $i = 1,2,3,4$ betegne strømstyrken gennem modstand R_i. Da kan strømstyrkerne (forsynet med passende sandsynligheder) beskrives med nedenstående I-model:

$$\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_3 \arrow[d] \\
I_2 \arrow[r] & I_4 \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd} \tag{321}$$

SÆTNING Lad $\mathcal{A}$ være en hybridgraf, der indeholder en orienteret løkke. Da er $\mathcal{A}$ ækvivalent med $\mathcal{A}'$, hvor $\mathcal{A}'$ er fremkommet af $\mathcal{A}$ ved at vende alle pile i den orienterede løkke, og erstatte enhver pil fra en variabel X uden for løkken til en variabel Y

i løkken med en pil fra X til Y's efterkommer i løkken.



(322)

BEVIS Det kommer af, at $\mathscr{A}$ og $\mathscr{A}'$ er orienteret ens og har samme moralgrafer.

Q.E.D.

Orienteringen af en orienteret løkke er derfor *ikke* entydigt bestemt. Det er her vigtigt at bemærke at det er forudsat at uafhængighedsrelationen er svagt transitiv.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] & \cdots & A_{n-1} \arrow[r] & A_n \arrow[lllll, bend right] \\
B_1 \arrow[u] & B_2 \arrow[u] & B_3 \arrow[u] & & B_{n-1} \arrow[u] & B_n \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{323}$$

Antag at alle A-variable i ovenstående diagram er determineret af sine forældre. Hvis sandsynlighedsfordelingen på de variable $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ har positiv tæthed og alle mulige værdier af A_n er forenelige med $B_2, B_3, \ldots B_n$, kan vi bestemme

$$f_{B_1} = (f_{B_2} \circ f_{B_3} \circ \ldots \circ f_{B_n})^{-1} \tag{324}$$

uafhængigt af værdien af B_1, så pilen fra B_1 til A_1 i det oprindelige diagram kan fjernes, uden at dette holder op med at være en I-model. Tilsvarende kan alle andre pile mod løkken fjernes, hvorved alle variable i løkken bliver ækvivalente. Vi har altså vist, at $A \approx B$, medfører at $A \cong B$, hvis de omgivende variable er tilstrækkeligt uafhængige. Hvis variable i en hybridgraf slås sammen, dersom de er ækvivalente, fås derfor en I-model uden orienterede løkker. Det er f.eks. ofte baggrunden for at danne vektorer i fysik. Det er så almindeligt, at slå ækvivalente variable sammen, at orienterede løkker har været et overset fænomen i forskningen af modeller for betinget uafhængighed. Mange af de orienterede løkker, folk har diskuteret, er nærmest blevet anset for at være patologiske og ikke uden grund, for i næsten alle de ikke patologiske tilfælde er ækvivalente variable slået sammen.

Hvis tidsrejser skal beskrives med I-modeller, er der 2 muligheder. Enten forestiller man sig en I-model, der indeholder en orienteret løkke, eller at der *de facto* er foregået en tidsrejse. Det sidste indebærer at ens "recording system" må indeholde en orienteret løkke, hvilket ikke kan lade sig gøre for ideelle "recording systems". Hvis I-modellen indeholder en orienteret løkke, og de variable i løkken betegner makroskopiske variable, vil entropien med stor sandsynlighed vokse rundt langs løkken, hvilket er umuligt. A priori sandsynligheden for at have en tidsrejse er med andre ord forsvindende lille. Faktisk er den lige så lille som sandsynligheden for at et termodynamisk system til et tidspunkt vender tilbage til sin begyndelsestilstand. Hvis man gentagne gange oplevede noget man *a priori* havde anset for usandsynligt, kan man prøve at give en forklaring. Det kunne skyldes en ny type symmetri, rum-tidens særlige struktur (se næste afsnit) e.lign. Dette kunne beskrives med skjulte variable, men ved at inddrage disse vil hele I-modellen ændres. Alle dagligdags forestillinger om hvilken retning tiden har vil bryde sammen i overensstemmelse med at en orienteret løkke ikke har nogen entydigt bestemt orientering. Man kunne derfor lige så godt sige at det var omgivelserne der var en tidsmaskine, og tidsmaskinen, der er omgivelser. Mere sandsynligt er det at alle fænomenerne i den kausale løkke forekommer at være samtidige. I "science fiction" beskrivelserne af tidsmaskiner er der aldrig tvivl om tidens retning i omgivelserne, hvilket tyder på at beskrivelserne ikke kan være fysisk korrekte.

Der er fornyligt udtænkt en kvantetidsmaskine (Vaidman 1991), og beskrivelsen af denne forklarer bedre end noget andet hvad der kan lade sig gøre og ikke lade sig gøre. Her kan en partikel sendes tilbage i en fortidig tilstand, men med fortid menes en rekonstrueret fortid som ikke nødvendigvis stemmer overens med den virkelige fortid. I den forstand adskiller denne tidsmaskine sig ikke fra andre rekonstruktioner af fortiden.

10.2. Ormehuller

Generel relativitetsteori tillader, at rumtiden kan have en topologi, så rumtiden ikke er homeomorfe med $\mathbb{R}^4$.

EKSEMPEL* Lad $\mathbb{M} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ være et Minkowskirum og definér en ækvivalensrelation $\simeq$ ved $(\underline{x},t) \simeq (\underline{x}',t')$ netop hvis $\underline{x} = \underline{x}'$ og $t - t' \in \mathbb{Z}$. Da har $\mathbb{M}/\simeq$ en relativistisk struktur, så den indeholder lukkede verdenslinier. Rummet $\mathbb{M}/\simeq$ giver en cyklisk tid.

I de senere år er de såkaldte ormehuller blevet populære blandt visse forskere. Det startede med en artikel af Morris & Thorne i 1988, og de er senere blevet beskrevet i en del artikler (se Friedman & Morris 1990, Friedmann et al. 1990, Novikov 1989, Frolov & Novikov priprint, Ridgway 1991, Giddings & Strominger 1989).

EKSEMPEL (Friedmann et al. 1990) Fra $\mathbb{M}$ fjernes 2 cylindere $K_i \times \mathbb{R}$, $i = 1,2$ hvor $K_i \subseteq \mathbb{R}^3$ er massive kugler. Nu indetificeres randen af de 2 cylindere via en ækvivalens defineret ved $(\underline{x}_1,t_1) \simeq (\underline{x}_2,t_2)$ dersom $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$ og $t_1 = t_2 + t'$, hvor t' bestemmer en tidstranslation af den ene kugle.

I det foregående er ideen om at irreversible processer kan indgå i kausale løkker blevet afvist, men for helt tidssymmetriske mikroskopiske processer kan ideen ikke afvises. Der må her skarpt skelnes mellem den geometriske tid, der indgår i relativitetsteorien og den orientering, der er defineret via I-modeller. Der har således været foreslået, at rumtiden skulle indeholde små ormehuller, der forbinder "fjerntliggende" punkter. Disse ormehuller skulle være så små, at makroskopiske genstande ikke kan komme gennem dem. Man vil heller ikke kunne tale om nogen tidsretning gennem et sådant ormehul, så identifikationen af den geometriske og den Baysianske tid holder derfor ikke. I disse beskrivelser er den geometriske tid med andre ord fuldstændig løsrevet fra det dagligdags begreb det oprindeligt er afledt af. Det bør envidere bemærkes at disse teorier endnu er på udviklingsstadiet, og måske hurtigt uddør.

10.3.Baglæns kausalitet

Der er i litteraturen flere steder (Faye 1981, Horvich 1987) argumenteret for muligheden af baglæns kausalitet. Det vil sige, at A anses for at forårsage B, hvor B forekommer tidligere end A. Der er 2 muligheder for hvordan dette kan lade sig gøre.

Den første er at der findes en harmonisk I-model i hvilken A og B er ækvivariante. Tidsmaskiner er et eksempel på dette. Som vi så i foregående afsnit, findes der eksempler på at dette er tilfældet, men i alle tilfælde opfattes det ikke som A forårsager B og B er tidligere end A, men som at A og B er samtidige.

Den anden mulighed er, at A og B indgår i en I-model, der ikke er harmonisk, hvorved det ikke giver nogen mening, at indføre en orientering på grundlag af uafhængighedsrelationen, og der er da ingen grund til at tro at en orientering indført ud fra andre kriterier ville kunne identificeres med tid eller kausalitet.

EKSEMPEL (Faye 1981)

Lad os for eksempel antage, at en person altid er i stand til at give en sand forudsigelse, hvorvidt kastet af en mønt vil give plat eller krone. Vi vil kalde forudsigelse "A" og udfaldet af kastet "B". Det første spørgesmål vi må besvare er, hvilke betingelser skal være opfyldte, for at man kan sige, at A er forårsaget af B. For det første må A selvfølgelig ikke være forårsaget af nogen tidligere eller samtidig hændelse; i.e. det må ikke være muligt at forklare A ved at referere til tidligere elller samtidige begivenheder. For det andet må A og B ikke være kausalt forbundet på en sådan måde, at A har kausal prioritet til

B, hvilket betyder, at B skal kunne forekomme, uden at A forekommer. Det vil med andre ord sige, at årsagen til B skal kunne specificeres uafhængig af, om A forekommer eller ikke. Hændelsen A må altså hverken være partiel eller fuldgyldig årsag til hændelsen B. Som den tredie betingelse er det udelukket, at A og B kan have fælles årsag. Denne mulighed er i virkelig allerede udelukket, da vi har stipuleret, at A hverken har nogen tidligere eller samtidig årsag, ligesom vi har stipuleret, at det skal være muligt at angive årsagerne til B uafhængigt af forekomsten af A. Hvis disse betingelser er opfyldte, og det envidere er sådan, at der foreligger god evidens for en konstant gentagelse af A og B, så synes det, som om vi umidlbart står over for et exempel på en baglænskausal forbindelse. Vi vil derfor antage for argumentets skyld, at disse betingelser er opfyldte i tilfældet med personen, der er i stand til at forudsige plat eller krone af en mønt. Det betyder, at vi har udelukket enhver forklaring om, at der er tale om snyd, og forklaringen om at udfaldet af slaget med mønten er forårsaget af forudsigelsen. (I virkeligheden er udfaldet af mønten bestemt af møntens tilfældige udgangsposition, inertimoment og impulsmoment, faldlængden, ect.).

I eksemplet er A <u>ikke</u> en variabel i den betydning ordet bruges her i afhandlingen, idet A ikke nødvendigvis antager en værdi. Lad A_1 være en variabel, der angiver om A antager en værdi, og lad A_2 være en være en variabel med værdierne: plat (hvis A forudsiger plat), krone (hvis A forudsiger krone), ingen (hvis der ikke finder nogen forudsigelse sted). Lad C_1, C_2,... betegne årsagerne til B (møntens tilfældige udgangsposition, inertimoment og impulsmoment, faldlængden, ect.). Da haves følgende Bayesianske netværk

$$\begin{tikzcd}
& A_2 & & \\
A_1 \arrow[ur] & & B \arrow[ul] & \\
& C_1 \arrow[ur] & C_2 \arrow[u] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd} \qquad (325)$$

Det nævnes envidere, at A er før B uden at det på dette sted uddybes hvad det vil sige. Der er 2 muligheder.

Den første mulighed er at der ud fra andre relevante variable kan argumenteres for at $A_2 \leq_I B$, idet det i de foregående kapitler er vist at alle tyer af temporal anisotropi kan beskrives ved hjælp af I-modeller. Dette medfører de variable ikke kan beskrives med en harmonisk I-model, hvorved enhver tale om kausalitet bliver meningsløs.

Den anden mulighed er at tidsmålinger har placeret A_2 før B. I kapitel 5 er det vist, at i en Lorentzinvariant verden medfører dette at $A_2 \leq_I B$. Som ovenfor er dette i modstrid med at vi har at gøre med en harmonisk I-model.

10.4."Delayed choice"

I kvantemekanik er det af nogle påståaet, at man kan påvirke fortiden. Det er der ikke plads til i den beskrivelse, der her er valgt, så spørgsmålet er hvor fejlen i deres argumentation er. Delayed choice foregår på følgende måde: På et tidspunkt t_1 laves en præparation $\mathcal{P}$ og på et langt senere tidspunkt t_2 foretages en måling $\mathcal{M}$. Det kunne eventuelt tænkes at

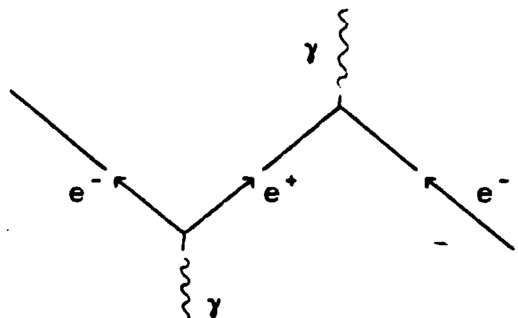
(326)

præparationen foregik i det tidlige univers. Ved valget af måling reduceres tilstandsrummet. Det betyder at tilstandsrummet og dermed tilstanden afhænger af vores valg til tiden t_2. Men det kvantemekaniske systems tilstand til tiden t_1 afhænger af vort valg til tiden $t_2 \gg t_1$. Vi har med andre ord mulighed for nu at påvirke det tidlige univers via vore kvantemekaniske målinger.

Problemet er naturligvis at der ikke skelnes mellem præparation, og selvom præparationen er lokaliseret i tid behøver det samme ikke at gælde for tilstanden. Envidere er det problematisk at sige, at tilstande i forskellige tilstandsrum er forskellige. Derfor vil fortalere for delayed choice ofte vælge målinger givet ved repetetive instrumenter, hvorved alle reducerede tilstandsrum kan indlejres i det oprindelige tilstandsrum. Det eneste kvantemekaniske i argumentationen er at i kvantemekanik kan man ikke undgå at lave en reduktion af tilstandsrummet ved at bruge et repetetivt instrument. Det viser at argumentationen var gyldig ville man også kunne lave baglæns kausalitet via delayed choice til hverdag. Se iøvrigt Mittelsteadt for diskusion af "delayed choice" og for yderligere referencer.

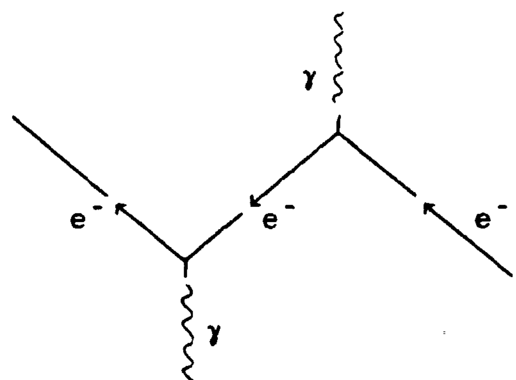
10.5.Partikler, der bevæger sig baglæns i tid

I Feynmann's pathintegral formalisme for kvantemekanikken forekommer partikler, der "bevæger sig baglæns" i tid (Feynmann 1949). Vi kan eksempelvis tænke os et elektron-positron-par der dannes i et strålingsfeldt. Positronen vekselvirker med en anden elektron,



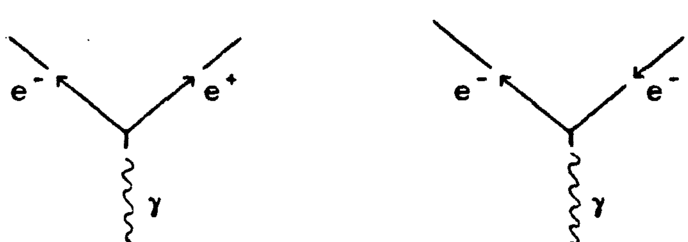
(327)

hvorved der opstår en ny foton. Det kan også beskrives på den måde at én elektron rammer en foton hvorefter elektronen bevæger sig



(328)

baglæns i tid for da at ramme endnu en foton og derefter igen bevæge sig fremad i tid. Det egentlige indhold i at sige at de 2 beskrivelser er ligeværdige, er at de tilhørende beregninger giver samme sandsynlighed for at observere en proces af den angivne type. Det vil i praksis sige, at tværsnittet for processerne



(329)

er ens. I disse teorier identificeres en partikel, der bevæger sig bagud i tid med den tilsvarende partikel, der bevæger sig fremad i tid. Herved har vi, at tiden i pathintegral-formalismen er symmetrisk jævnfør afsnit 6.4. Nu ligner pathdiagrammer meget Bayesianske netværk, så det er rimeligt at spørge om orienteringen af et pathdiagram har noget med orientering via I-modeller at gøre. Den måde pathdiagrammer bruges på, er at man for en given præparation finder alle pathdiagrammer, der er forenelige med præparationen. For hvert pathdiagram beregnes en sandsyn-lighedsamplitude, og sandsynlighedsamplituden for at få et givet resultat af en måling er da summen af sandsynlighedsamplituderne for de pathdiagrammer, der er forenelige med måleresultatet. Hvert pathdiagram beskriver med andre ord en fuldstængigt fixeret situation, hvor ingen variable tillades at variere og en I-model for dette er derfor triviel og dermed reversibel. I path integral formalismen beskrives processer derfor ved hjælp af tidssymmetriske "skjultvariable modeller", hvor pathdiagrammerne er "de skjulte variable". Al irreversibilitet mellem præparation og måling vil derfor kunne forklares som usandsynlige begyndelsesbetingelser. En eksakt beskrivelse ville kræve en langt mere omfattende repræsentationsteori, end der er givet i denne afhandling.

I elementarpartikelfysik forekommer imidlertid også tidsasymmetriske processor. Der er stadig problemer med at lave en teori for svage vekselvirkninger, der er tidssymmetrisk. Svagt henfald af den neutale K-meson har således ikke en tidssymmetrisk

$$
\begin{aligned}
K^0 &\longrightarrow \pi^{\mp} + e^{+} + \bar{\nu}_e \\
&\longrightarrow \pi^{\mp} + \mu^{+} + \bar{\nu}_\mu
\end{aligned}
\qquad (330)
$$

beskrivelse. Lad T betegne den afbildning, dersender t i -t samt vender impulser. Lad C betegne konjugering af ladning, og lad P betegne afbildningen, der sender stedvektoren $\underline{x}$ i $-\underline{x}$. Da er elementarpartikelfysiske tilsyneladende (Lee et al. 1957) er invariant under CPT. Hvis dette er sandt, er det lykkedes at forklare asymmetrien af svage vekselvirkninger med en tidssymmetrisk skjult variableteori, hvor asymmetrien er (bort-)forklaret ved asymmetri i begyndelsesbetingelserne, der består i at forekomsten af de forskellige partikeltyper ikke er invariant under CPT.

SAMMENFATNING OG DISKUSION

I hele denne afhandling er det antaget, at man det giver mening at arbejde med kontrafaktiske påstande. Vi tænker os altså, at det er meningsfuldt at tale om, at der kan være flere muligheder. Hvis man forestiller sig, at man har fuldstænigt kendskab til værdien af alle variable vil alle argumenter falde til jorden, og man vil kunne definere en ikke triviel ordning ud fra uafhængigheds-relationen, idet alle variable da er uafhængige. Dette er samme konklusion som middelalderens teologer kom til: Den alvidende Gud er hævet over tiden. Det forekom dem at være et problem, idet de ønskede en objektiv tid.

Forestillingen om uafhængighed er absolut ikke-triviel og er kernen i reduktionistisk tankegang. Allerede ved indførelsen af betegnelserne for de forskellige variable er der foretaget en vis reduktion, og man må forestille sig at de indgående begreber har en vis uafhængig eksistens. Kinesisk naturvidenskab har været langt mindre optaget af de fænomener vi vil studere. Det kan skyldes at den inspireret af daoismen er mere holistisk anlagt, hvilket kommer til udtryk i

Når helheden brydes, skal delene navngives.

Dao de yin 39.

Man må her huske, at brugen at den reduktionistiske tankegang kan være nyttigt eller endog nødvendigt som epistomologisk redskab uden at det indebærer nogen afvisning af holisme som ontologi.

Hvis vi accepterer forestillingen om uafhængighed, kan man definere begrebet harmoni. At der findes harmoniske relationer er absolut ikke trivielt, og der er ikke argumenteret nærmere for dette i de foregående kapitler. Det er således ikke sikkert, at den I-model vi har af verden, er harmonisk. Man kan tænke sig at vi ved vort valg af variable har sørget for, at den tilsvarende I-model er harmonisk. Det er dog næppe sandsynligt, idet man udemærket kan lave og rent faktisk ofte laver I-modeller af verden, der ikke er harmoniske. Man kan dog altid lave et Bayesiansk netværk for de variable, og netværket definerer så en ny I-model, som er harmonisk, og identiteten er da en I-afbildning fra den nye til den gamle I-model. Om det er lige præcis sådan vi laver I-modeller af vor omverden ved jeg ikke, men fra undervisning i sandsynlighedsregning i gymnasiet ved jeg, at eleverne har meget svært ved at sluge at uafhængighed skulle være det samme som statistisk uafhængighed (sådan fremstiller mange bøger det). Derimod kan de sagtens acceptere at uafhængighed medfører statistisk uafhængighed.

I den sidste halvdel af afhandlingen vises det, at hvis et tidsasymmetrisk fænomen beskrives med en I-model, så vil den tidsretning, der er defineret via tidsasymmetrien, stemme overens med den retning, der er defineret via harmoniske ordninger. Hvis 2 tidsasymmetriske fænomener beskrives med samme I-model, vil de 2 fænomener derfor være orienteret i samme retning. Derfor vil eksempelvis entropitilvækst og ophobning af viden ske i samme retning. Da I-modeller kan være følsomme overfor valget af variable, vil I-modeller *ikke* definere en objektiv orientering af de variable. Derimod vil I-modeller give en intersubjektiv orientering af de variable, dersom man kan enes om en uafhængighedsrelation. Dette kan f.eks. ske ved indførsel af frekvensielle sandsynligheder. Til daglig vil folk normalt kunne enes om valg af variable og uafhængighedsrelation og der er da fuldstændig intersubjektiv enighed om orienteringen af de variable. Derfor opfattes orienteringen af mange som noget objektivt eksisterende, og som sædvanligt i vort sprog knyttes et subtantiv til et sådant objektivt eksisterende begreb. Dette subtantiv er tid.

Til dagligt kan det objektive tidsbegrebet godt bruges på en rimelig måde, men det indeholder også fælder såsom delayed choice og tidsrejser. Hvis man arbejder med et intersubjektivt tidsbegreb, som der er argumenteret for i første kapitel, volder de ikke problemer. Kapitel 10 viser, hvordan problemerne kan behandles ud fra dette synspunkt.

I fysik arbejder man ofte med tidssymmetriske skjult variabelmodeller. Newtonsk mekanik er et af de få eksempler på en tidssymmetrisk teori, hvor alle variable er observable. I kvantemekanik er det nødvendigt at formalisere en del af måleprocessen. I kapitel 5 er det vist at måle- og erkendelsesprocesser er irreversible af natur, og kvanteformalismen må derfor kunne beskrive irreversible fænomener. At dette ikke er i modstrid med den reversible fremskrivning af bølgefunktionen fremgår af afsnit 8.1. Modeller for betinget uafhængighed er en naturlig ramme at behandle begrebet ikke-lokalitet i. Både hvad angår generalle resultater (afsnit 4.6 og 4.7) og analyse af konkrete fysiske eksperimenter (afsnit 8.2).

Termodynamik er en formalisering af det faktum, at der kan ske et exergitab ved visse irreversible processer. For at lette visse typer beregninger er det i termodynamik en ofte anvendt teknik at beskrive irreversible processer ved hjælp af reversible skjult-variabelmodeler. Beregningerne forstås bedst ud fra de resultater i informationsteori, der er gennemgået i kapitel 3.

Sammenfattende kan man sige at

Irreversibiliteten er reel. Reversibilitet er en undtagelse, og kan højst gælde approksimativt og for en afgrænset del af verden.

Endelig kan man spørge, om der er tale om en reduktion af begrebet tid. Der er under alle omstændigheder ikke tale om en reduktion af den fysiske parameter t. Derimod kunne der være tale om reduktion af relationen før/efter til relationen $\leq_I$. Dette ser ud til at være tilfældet i det tilfælde, at variable og uafhængighedsrelation er valgt, og der i afhandlingen givet mange eksempler på nytten af en sådan reduktion. Ikke destomindre er der næppe tale om en reduktion, hvis variable eller uafhængighedsrelation ikke er fastlagte. I afhandlingen gives 2 resultater angående fastlæggelse af variable eller uafhængighedsrelation udfra den kausale orden. Det ene er konstruktionen $V/\approx$, og det andet er konstruktionen af en entydigt bestemt lokal uafhængighedsrelation harmonisk med $\leq$. Tilsvarende konstruktioner laver vi øjensyneligt hele tiden, når vi beskriver vor omverden. Der er således tale om at de variable, kausaliteten og uafhængigheden gensidigt definerer hinanden for at danne en næsten ubrydelig helhed. Tiden vil vise i hvor høj grad det er muligt at bryde noget af denne helhed.

SUMMARY IN ENGLISH

The purpose of this thesis is to show that models of independence are good tools to treat problems about time. In the first chapter it is argued that scientific theories should be intersubjective but not necesarily objective. In the second chapter some theorems are shown, which gives an interpretation of the use of probability measures in statistics. The third chapter introduces some concepts from information theory. The most important result is that the principle of minimal information has an interpretation as way of finding conditional probability distributions. In Chapter 4 the concept of conditional independence is introduced. The concept of fork asymmetry is formalised by the definition of harmonic relations. If the independence relation is weakly transitive, then the harmonic relations are essensially preorderings. If there exists a harmonic preordering, then there is a maximal harmonic preordering denoted $\leq_I$. If the model of independence is finite and has a harmonic ordering, then the independence model can be described by graphs if and only if the independence relation satisfies the axioms of decomposition, intersection and weak transitivity. Hidden variable models are discussed and Bell type inequalities are shown to be the tool to proove the existence of hidden variables.

In chapter 5 various non-physical examples of time asymmetry are discussed. The all fit well into the describtion by models of independence. Many-world theories and the universallity of the concept of simultanity are rejected. In chapter 6 time is concidered from a geometrical point of wiew. The ordering defined by light cones and the ordering defined by independence must be the same in relativistically invariant models. In chapter 7 gives an interpretation of quantum mechanics, where state space and group repræsentations are the central concepts, and in the next chapter contains a discussion of the reduction of the wawepacket and non-locality of quantum mechanics. It is shown that there is no *a priori* reason to belive that a measurement can destinguish

between a state and the corresponding reduced state. In chapter 9 some termodynamical problems are treated and it is shown that

$$\frac{1}{\alpha} \mathrm{Ex}(\phi) = D(\phi \| K) = -\ln(P(A)) \tag{331}$$

where $\mathrm{Ex}(\phi)$ denotes the energy which yuo can extract from the system in state ϕ, $D(\phi \| K)$ is the information gained by knowing that the state is ϕ and not invariant under time translations, and $P(A)$ denotes the probability that a reversible system have a fluctuation which can not be destinguised from ϕ. Chapter 10 treates some problems in time machines and backwards causation. The conclution is that all paradokses about time asymmetry comes from the idea that time is an objective concept. It is possible to define an intersubjective time using models of the independence relation.

EFTERSKRIFT

Whorff og tid hos hopi'erne

I de foregående afsnit er der argumenteret for, at tiden kan beskrives via orienteringen af I-modeller, og derfor må Whorf's påstand fra 1936 undre:"After long and careful study and analysis, the Hopi language seen to contain no words, grammatical forms, constructions or expressions that refer directly to what we call 'time'...". Skulle der virkelig være mennesker, der ikke vil finde konstruktionen i de foregående afsnit relevant? Skal den tilstræbte intersubjektivitet kun gælde for kulturelle efterkommere af grækerne?

Whorf's påstand omhandler relationen mellem hopiernes sprog, deres opfattelse af tid (eller mangel på samme), vores sprog og vores opfattelse af tiden. Med vores opfattelse af tiden mener Whorf det Newtonske tidsbegreb, som relativitetsteorien har afvist, og som heller ikke benyttes i denne fremstilling. Med vores sprog mente Whorf "standard average european" (SAE) og siger at i SAE forekommer de 3 bøjningsformer af verberne: fortid, nutid og fremtid. Disse svarer til en total præordning af begivenhederne i overensstemmelse med Newtons og Aristoteles' tidsopfattelse. Disse 3 tidsbøjninger findes ganske vist på latin og en del andre indoeuropæiske sprog, men pussigt nok ikke på engelsk, som var Whorfs modersmål. Der findes dog andre sproglige konstruktioner end bøjninger, og man kan sagtens udtrykke fremtid på engelsk, hvilket er et eksempel på, at man ikke kan slutte direkte fra sproglig morfologi til semantik. Envidere bør det bemærkes, at europæiske lingvister gennem tiden har anvendt mange andre systemer end det Whorf referer til.

Desværre har mange af Whorfs kritikere en ringe forståelse af vort eget tidsbegreb, og tror at Newtonsk tid er det samme som eksistensen af en før/efter-relation, uden at være opmærksomme på forskellen mellem en total og en partiel præordning. Malotki (1980), som nok er den, der har lavet den grundigste undersøgelse af temporale udtryk hos hopierne, beskæftigede sig med dialekten i landsbyerne Hotvela og Paaqavi på 3. mesa, mens Whorf undersøgte sproget på 2. mesa.

Malotki har med al tydelighed vist at hopi-sproget indeholder temporale udtryk, såsom suffixet *-ngk* efter, suffixet *-pyeve* før, *yàyngwa* begyndelse, *so'ngwa* slutning, *pu'* idag/nu, *naat suus* for første gang, *sutsep* altid, *nawutsti* det tog lang tid. Det er dog bemærkelsesværdigt, at man ikke finder noget ord for samtidighed, hvilket er det centrale begreb i Newtonsk tid. Whorf gør samme iagttagelse (Carrol 1956 p. 216). Hopiernes verber kan forekomme uden suffix, med suffixet *-ni,* eller med suffixet *-ngwu*. Whorf kalder den første form den *reportive,* den anden den *expective* og den tredie den *nomiske*. Om disse skriver han:"The timeless Hopi verb does not distinguish between the present, past, and future of the event itself but must always indicate what type of validity the SPEAKER intends the statement to have: (a) report of an event..;(b) expectation of an event..;(c) generalization or law about events" (Carroll 1956:217). Malotki bemærker at suffixet *-ni* også kan bruges til at angive modal kategori (imperativ, hortativ, desiderativ o.s.v.). Det bør bemærkes, at hopiverber kan have andre suffixer end de ovenfor nævnte. Disse bruges f. eks. til at udtrykke aspekt. Det vigtige her er, at den reportive form af verbet ifølge Whorf bruges, når man vil angive, at man har *direkte viden* om en given sag, hvilket er noget andet end, at den foregår i en Newtonsk eller relativistisk fortid. Denne pointe går tilsyneladende hen over hovedet på mange Whorf-kritikere. Om Whorf har ret, har forfatteren, der ikke taler hopiernes sprog, ikke mulighed for at afgøre.

Referencer

ADAMS, E.W. (1975) *The logic of conditionals.* Reidel, Dordrecht, Holland.

ARISTOTELES *The interpretation.* Ved H.P. Cook. Harvard Univ. Press, London 1962.

BELL, J.S. (1964) *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. Physics* 1 pp. 195-200. Genoptrykt i Wheeler & Zurek (1983).

BICHEL, P.J. & DOKSUM (1977) *Mathemathical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics.* Holden-Day, San Francisco.

BLALOCK, H.M. (1971) *Causal Models in the Social Sciences.* Macmillan, London.

BORGES,J.L. (1941) *Ficciones.* På Dansk ved Jensen, E.D. *Fiktioner.* Rhodos, 1969.

BRAUNSTEIN, S.L. & CAVES, C.M. (1988) *Informatio-Theoretic Bell Inequalities.* Phys. Rev. Lett. 61 6 pp. 662-665.

CAMBELL, C.A. (1951) *Is 'Freewill' a Pseudo-Problem?* i Bernard Berofsky (ed.): *Freewill and Determinism.*

CAMBELL, C.A. (1957) *Free will Rules Out Determinism.* i W.P Alston & R.B.Brandt (eds.) *The Problems of Philosophy: Introductory Redings.* Allyn & Bacon, Boston 1974.

CARROLL, J.B.,ed.(1956) *language, Thought, and Reality: Selected Writings of Benjamin Lee Whorf.* [6th paperback ed. 1871] MIT Press, Cambridge, Mass.

CHENTSOV, N.N. (1972) *Statistical Decision Rules and Optimal Decisions (På Russisk)* Nauka, Moskva.

COLLINWOOD, R.G. (1940) *An Essay on Metaphysics.* Clarendon Press, Oxford.

CSISZÁR, I.(1975) *I-divergence geometry of probability distri butions and minimization problems. Annals of probability* 3, pp. 146-158.

DAVIES, E.B. (1976) *Quantum Theory of Open Systems.* Academic Press, London.

DAVIES, P.C.W. (1974) *Physics of Time Asymmetry.* University of California, Los Angeles.

DUMMETT, M. (1986) *Casusal Loops*. I *The Nature of Time* R. Flood & M. Lockwood. Basil Blackwell, Oxford.

DUNCAN, O.D. (1975) *Introduction to Structural Equation models*. Academic Press, New York.

EARMAN, J. (1986) *A Primer on Determinism*. Reidel, Dordrecht, Holland.

ELLIS, R.S. (1985) *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer, New York.

EVERETT, H. (1957) *"Relative state" formulation of quantum mechanics. Rev. Mod. Phys.* 29, pp.454 - 462.

FAYE, J. (1981) *Et naturfilosofisk essay om tid og kausalitet*. Jørgen Paludans forlag.

FINDLAY J.N. (1941) *Time: A Treatment of Some Puzzles*. Gengivet i Smart (1964) pp. 339-355.

FINE, A. (1982) *Hidden Variables, Joint Probabillity, and the Bell Inequalities*. Phys. Rev. Lett. 48 5 pp. 291-295.

DE FINETTI, B (1931) *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*. An della R Academia Nazionale del Linceo, Ser. 6 Memorie. Classe di Scienze Fisiche. Mathematiche e Naturali, 4, 251-299.

DE FINETTI, B (1937), *Foresight: Its logical laws, in subjective sources,* Reprinted in H.E. Kyburg and H.E. Smokler (eds.), *Studies in subjective probability*. London John Wiley, 1964, pp. 93-158.

FRIEDMAN, J.L., MORRIS, M.S. NOVIKOV, I.D., ECHEVERRIA, F. KLINKHAMMER, G., THORNE, K.S. & YURTSEVER, U. (1990) Phys. Rev. D 42 p 1915.

FRIEDMAN, J.L. & MORRIS, M.S. (1990) *The Cauchy Problem for the Scalar Wave Equation is Well Defined on a Class of Spacetimes With Closed Timelike Curves*. Phys. Rev. Lett. 66 4 pp. 401-404.

FRIEDMAN, M (1983) *Foundations of Space-Time Theories. Relativistic Physics and Philosophy of Science*. Princeton University Press, Princeton.

FROLOV, V.P. & NOVIKOV, I.D. *Physical Effects in Wormholes and Time Machine*. Priprint.

FRYDENBERG, M. (1990) *The Chain Graph Markov Property. Scand. J.*

Statist. 17, pp. 333-353.

FUTUYMA, D.J. (1986) Evolutionary Biology. Sinauer, Massachusetts.

GÄNSSLER, P., Stute, W. (1977) *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

GÄRDENFORS, P. (1988) *Knowledge in flux.* MIT Press, Cambridge.

GARG, A. & MERMIN, N.D. (1987) *Detector inefficiencies in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment.* Phys. Rev. D 35 12 pp. 3831-3835.

GARRETT, A.J.M. (1990a) *Bell's Theorem, Inference, and Quantum Transactions.* Found. of Physics 20 4 pp. 381-402.

GARRETT, A.J.M. (1990b) *Bell's Theorem and Bayes' Theorem.* Found. of Physics 20 12 pp. 1475-1512.

GIBBARD, A. & HARPER, W. (1978) *Counterfacfuals and Two kinds of Expected Utility.* I Hooker & al. (ed.) *Western Ontario Series in the Philosophy of Science.* Vol. 13. Reidel, Dordrecht.

GIDDINGS, S.B. & STROMINGER, A. (1989) *String Wormholes.* Physics Lett. B 230 1,2 pp. 46-51.

GRAUERT, H.and FRITZSCHE, K.(1974) *Einführung in die Funktions-theori mehrerer Verändelicher.* Springer-Verlag Berlin Heidel-berg.

GRÜNBAUM, B. (1967) *Convex Polytops.* Wiley, London.

GUDDER, S.P. (1979) *Stochastic Methods in Quantum Mechanics.* Elsevier North Holland, New York.

HARTIGAN, J.A. (1983) *Bayes Theory.* Springer, New York.

HOLEVO, A.S. (1982) *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory.* North Holland, Amsterdam.

HORWICH, P. (1987) *Asymmetries in Time.* MIT Press, Cambridge.

HOWARD, R.A & MATESON, J.E. (1981) *Influence diagrams.* I *Principles and Applications of Decision Analysis.* Strategic Decisions Group, Menlo Park, Califonia.

JOHANSEN, K.F. (1988) *Platons filosofi. Udvikling og enhed.* Nyt nordisk forlag Arnold Busck, København.

JOHANSEN, S.(1979) *Introduction to the Theory of Regular Exponential Families, Lecture Notes 3,* Institute of mathe-matical Statistics, University of Copenhagen.

KENNY, D.A. (1979) *Correlation and causality.* Wiley, New York.

KIIVERI, H., SPEED, T.P. & CARLIN, J.B. (1984) *Recursive Causal*

Models. J Aust. Math. Soc. 36, pp. 30-52.

KLEIN, M.J.(1970) *Poul Ehrenfest. Vol. 1 The making of a Theoretical Physicist.* North-Holland, Amsterdam, London.

KULLBACK, S.(1959) *Information Theory and Statistics.* Wiley, New York.

KVART, I. (1991) *Transitivity and Preemption of Causal Relevance. Philophophical studies* 64:125-160.

LAO ZI, *Tao Te King.* Oversat af Piao Yu-suen. Sphinx forlag, København 1982.

LAPLACE, P.S.(1820) oversat i E. Nagel. *The Structure of Science.* Harcourt, Brace, and World, New York 1961.

LAURITZEN, S.L. (1982a) *Lectures on Contingency Tables.* 2. edn. Aalborg univ. Press. Aalborg.

LAURITZEN, S.L. (1982b) *Statistical Models as Extremal Families.* Aalborg Univ. Press, Aalborg.

LAURITZEN, S.L. (1989) *Mixed Graphical Association Models. Scand. J. Statist.* 16, pp. 273-306.

LEE, T.D., OEHME, R. & YANG, C.N. (1957) Phys. Rev. 106 340.

LI, C.C. (1977) *Path Analysis - a primar.* Pacific Grove, Califonia.

LLOYD, S. (1988) Phys. Rev. A 38 3161.

LUDWIC, G. (1987) *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics Vol. I-II,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

MALOTKI, E. (1983) *Hopi Time; A Linguistic Analysis of the Temporal Concepts in the Hopi Language.* Mouton Publ. Berlin.

McARTHUR, R.P. (1976) *Tense logic.* Synthese library, Reidel Pub. Com.

MEHLBERG, H. (1980) *Time, Causality, and the Quantum Theory. Vol. I-II.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

MITTELSTAEDT, P. (1987) *Quantum logical Analysis of Delayed-Choice Experiments.* Proc. 2 Symp. on Foundations of Quantum Mechanics, Tokyo 1986, Physical Society of Japan.

MORRIS, M.S. & THORNE, K.S. (1988) Am.J.Phys. 56 395

MORRIS, M.S., THORNE, K.S. & YURTSEVER, U. (1988) *Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition.* Phys. Rev. Lett. 61 13 pp. 1446-1449.

NEEDHAM, J. (1981) *Science in Traditional China. A Comparative*

Perspective. China Univ. Press, Hong Kong.

VON NEUMANN, J. (1932) *Mathematical Foundation of Quantum Mechanics* Princeton University Press, Princeton,NJ 1955.

NEWTON-SMITH, W.H. (1980) *The Structure of Time*. Routledge & Kegan Paul, London.

NIELSEN, R.F. (1980) *The Discovery of a Gravitationel Lense*. Scientific American nov. 1980

NIELSEN, R.F. (1990) *Determination of the Difference in Light Travel Time from* QSO-o957+561a,b. Astronomy and Astrophysics Vol. 138.

NOVIKOV, I.D. (1989) *An analysis of the operation of a time machine*. Sov. Phys. JEPT 68 3 pp. 439-443.

NOZICK, R. (1969) *Newcomb's problem and two principles of choice*. I Rescher, N. (ed.) *Essays in Honor of Carl Hempel*. Reidel, Dordrecht.

OCHS, W.(1976) *Basic Properties of the generalized Boltzmann-Gibbs-Shannon entropy, Reports on mathematical physic*, Vol 9.

OLMSTED, S.M. (1983) *On representing and solving decision problems*. Ph.D. thesis, EES Dept, Stanford University.

OLSEN, J.S. & BERNING, H. (1989) *Tidens Pil - gennem fem generationer*. Consensus, København.

PEARL & PAZ (1985) *GRAPHOIDS: a graph-based logic for reasoning about relevance relations*, UCLA Computer Science Department Technical Report 8500038 (R-53), Oktober; also, *proceedings*, ECAI-86, Brighton, UK, juni 1986.

PEARL, J. (1988) *Probabilistic reasoning in intelligent systems*. Morgan Kaufmann Publ. San Mateo, Califonia.

PEARL, J. (1990) *Probabilistic and Qualitative Abduction*. Technical report R-145, Computer Science Department, University of Califonia.

PEARL, J. & VERMA, T.S. (1990) *Equivalence and Synthesis of Causal Models*. Proceedings 6th Conference on Uncertainty in AI, Cambridge, Mass., 27-29 juli 1990 pp. 220-227.

PINSKER, M.S.(1964), *Information and Information stability of Random Variables and Processes*. Holden-Day, San Francisco.

PLATON. *Staten*. Museum Tusculanums forlag, Viborg 1983.

PRIGOGINE, I & STENGER, I.(1985) *Den nye pagt mellem mennesket og* *naturen.* Asi.

PRIOR, A.N. (1957) *Time and Modality.* Oxford.

RAY, C. (1991) *Time, Space and Philosophy.* Routledge, London.

REDHEAD, M. (1987) *Incompleteness, Nonlocality and Realism.* Clarendon, Oxford.

REICHENBACH, H. (1956) *The Direction of Time.* University of Califonia Press, Berkeley.

RESCHER, N. & URQUHART, A (1971) *Temporal Logic.* Springer.

RHINEHART, L. (1971) *The Dice Man.* På Dansk ved M. Boisen: *Terningmanden.* Blytmanns forlag, Viborg 1978.

RIDGWAY, S.A. (1991) *Axion charge decay and wormhole destabilization.* Phys. Lett. B 264 1,2 pp 31-34.

RIDLEY, M (1986) *Evolution and Classification. The reformation of cladism.* Longman, London.

ROSEN, J. (1990) *Locating the many Worlds.* pp. 364-366. Proceedings fra *Symposium on the Foundation of Modern Physics.* Lahti, P. & Mittelstaedt, P. (ed.). Finland.

ROY, S.M. & Singh, V. (1991) *Tests of Signal Locality and Einstein-Bell Locality for Multiparticle Systems.* Phys. Rev.Lett. 67 20 pp. 2761-2764.

RUSSEL, B (1912) *On the Notion of Cause.* I *Mysticism and Logic.* George Allen and Unwin, London.

SACHS, R.K. & WU, H.: *General Relativity for Mathematicians.* Springer, New York.

SALMON, W.C. (1984) *Scientific Explanation and Causal Structure of the World.* Princeton University Press, Princeton.

SAMBURSKY, S. (1959) *Physics of the Stoics.* Greenwood, Westport Connecticut.

SHACHTER, R.D. (1986) *Evaluating influence diagrams. Operations Res.* 34, 871-882.

SHANNON & WEAVER (1949) *The Mathematical Theory of Communication.* University of Illinois Press, Urbana.

SMART J.J.C.(ed.) (1964) *Problems of Space and Time.* London.

SQUIRES, E.J. (1990) *How to test for Cartesian Dualism by Quantum Experiments.* Proceedings fra *Symposium on the Foundation of Modern Physics.* Lahti, P. & Mittelstaedt, P. (ed.). Finland.

STIGEN, A. (1964) *Aristoteles.* Berlingske Filosofi Bibliotek, København.

STUDENY, M. (1988) *Attempts at axiomatic describtion of conditional independence. Workshop on Uncertainty processing in Expert Systems.*Alsovice, Czechoslovakia, 20-23 juni.

SVETLICHNY, G. (1987) *Distinguishing three-body from two-body nonseparability by Bell-type Inequality.* Phys. Rev. D 35 10 pp. 3066-3069.

THAGARD, P. (1991) *Philosophical and computational models of Explanation. Philosophical Studies* 64, 1991, pp.:87-104.

THOMAS AQUINAS. *Summa Contra Gentiles.* University of Notre Dame Press edition 1975.

TOPSØE, F. (1974) *Informationstheori, eine Einführung.* Teuber, Stuttgart.

TOPSØE, F. (1979) *Information Theoretical Optimization Techniques. Kybernetika Vol.15 no.1.*Academia Praha.

VAIDMAN, L. (1991) *A Quantum Time Machine. Foundations of Physics, Vol. 21 no.8*

VARADARAJAN, V.S.(1968) *Geometry of Quantum Theory.* Van Nostrand, New York.

VARADARAJAN, V.S.(1970) *Geometry of Quantum Theory, II, Quantum Theory of covariant Systems.* Van Nostrand, New York.

VERMA, T.S. (1986) *Causal Networks: Semantics and Expressiveness,* UCLA Cognitive Systems Laboratory Technical Report R-103.

VOORBRAAK, F. (1991) *On the justification of Dempster's rule of combination. Artificial Intelligence* 48, pp. 171-197.

WELZEL, R. (1979) *Fri vilje og straf.* Trier Schou, Odense.

WERMUTH, N & LAURITZEN, S.L. (1983) *Graphical and recursive models for contingency tables. Biometrika* 70, pp. 537-552.

WINCH, P.(1958): *The Idea of a Social Science and Its Relations to Philosophy.* Routledge & Kegan Paul, London 1967.

WHEATHERFORD, R (1982) *Philosophical Foundation of Probability Theory,* Routledge & Kegan Paul Publ., Boston.

WHEELER,J.A. & ZUREK, W.H. (eds.)(1983) *Quantum Theory and Measurement.* Princeton Univ. Press. Princeton.

WHITROW, G.J. (1980) *The Natural Philosophy of Time.* Clarendon Press, Oxford.

WHORF, B.L. (1936) *An American Indian Model of the Universe.*

Manuscript approx.

WILEY, E.O. (1981) *Phylogenetics. The Theory and Practice of Phylogenetic Systematics*. John Wiley & Sons, New York.

De WITT, B.S. & GRAHAM, N (1973). *The Many World Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton Univ. Press., Princeton.

WOLD, H. (1954) *Econometric Model Building*. North-Holland, Amsterdam.

WRIGHT, S. (1921) *Correlation and Causation. J. Agric. Res.* 20, p. 557-585.

WRIGHT, S. (1934) *The method of path coefficients. Ann. Math. Statist.* 5, p. 161-215.

WRIGHT, S. (1960) *The treatment of reciprocal interactions, with or without lag, by path analysis. Biometrics* 16, pp. 423-445.

YULE, G.U. (1903) *Notes on the theory of association af attributes in statistics*. Biometrika, 2, p. 121-134.

ØHRSTRØM, P. (1988) *Nogle aspekter af tidsbegrebets rolle i de eksakte videnskaber med særligt henblik på logikken*. Aalborg Universitetsforlag, Aalborg.

ØHRSTRØM, P. (1989) *Tidslogik og kunstig intelligens*. Aalborg Universitetsforlag, Aalborg.

SYMBOLLISTE

Sidetallet henviser til den side, hvor symbolet første gang anvendes.

Symbol	Betydning	Side
$\mathfrak{U}$	Udfaldsrum	12
E	Middelværdi eller forventningsværdi	12
$C(\cdot)$	Kontinuerte funktioner på en mængde	12
$C_-(\cdot)$	Strengt negative funktioner på en mængde	13
K_{μ}^{*}		13
L^1	Lebesgue-integrable funktioner	14
$\mathbb{E}$	Betinget forventning	14
i	Injektion	15
id	Den identiske afbildning	15
P	Frekvens eller sandsynlighed	16
κ	kodeforbedring	19
$\log$	naturlig logaritme	19
$\phi, \psi, \theta, \mu, \nu$	Tilstande	19
$\mathcal{G}$	Tilstandsrum	19, 139
$D(\cdot \Vert \cdot)$	Informationsgevinst	19
$\Vert \cdot \Vert_{tot}$	Normen total variation	21
1_A	Indikatorfunktionen på A	21
C, K, L, M	Konvekse mængder	23
W, $\mathfrak{A}$	Von Neumann algebraer	27
ψ-n.o.	ψ næsten overalt	27
δ_x	Diracmål i x	27
$\otimes$	Tensorprodukt	28
$I(\cdot,\cdot)$	Gensidig information	30
$I(\cdot,\cdot \vert \cdot)$	Relativ gensidig information	30
$\longrightarrow$	Pil i I-model	40
$I[\cdot,\cdot \vert \cdot]$	Uafhængighedsrelationen	40
$I_{\vert D}$	Opdateret uafhængighedsrelation	44
I_f	Induceret uafhængighedsrelation	45

Liste over tidligere udkomne tekster tilsendes gerne. Henvendelse herom kan ske til IMFUFA's sekretariat tlf. 46 75 77 11 lokal 2263

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen

223/92 *THE FUNCTIONAL DETERMINANT*
by: Thomas P. Branson

224/92 *UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES*
by: Jeppe C. Dyre

225/92 *"HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium*
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor

226/92 *"METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"*
by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility
by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS
- Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Maria Hermannsson, Allan Jørgensen, Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93 Brovedligeholdelse - bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

af: Linda Kyndlev, Kare Fundal, Kamma Tulinius, Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

243/93 TANKEEKSPERIMENTER I FYSIKKEN

Et 1.modul fysikprojekt

af: Karen Birkelund, Stine Sofia Korremann

Vejleder: Dorthe Posselt

244/93 RADONTRANSFORMATIONEN oq dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport

af: Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen og Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

245a+b/93 Time-Of-Flight målinger på krystallinske halvledere
Specialerapport

af: Linda Szkotak Jensen og Lise Odgaard Gade

Vejledere: Petr Viscor og Niels Boye Olsen

246/93 HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK
- LÆREPROCESSER I SKOLEN

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA

247/93 UNIVERSAL LOW TEMPERATURE AC CONDUCTIVITY OF MACROSCOPICALLY DISORDERED NON-METALS

by: Jeppe C. Dyre

248/93 DIRAC OPERATORS AND MANIFOLDS WITH BOUNDARY

by: B. Booss-Bavnbek, K.P.Wojciechowski

249/93 Perspectives on Teichmüller and the Jahresbericht Addendum to Schappacher, Scholz, et al.

by: B. Booss-Bavnbek

With comments by W.Abikoff, L.Ahlfors, J.Cerf, P.J.Davis, W.Fuchs, F.P.Gardiner, J.Jost, J.-P.Kahane, R.Lohan, L.Lorch, J.Radkau and T.Söderqvist

250/93 EULER OG BOLZANO - MATEMATISK ANALYSE SET I ET VIDENSKABSTEORETISK PERSPEKTIV

Projektrapport af: Anja Juul, Lone Michelsen, Tomas Højgård Jensen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

251/93 Genotypic Proportions in Hybrid Zones

by: Freddy Bugge Christiansen, Viggo Andreasen and Ebbe Thue Poulsen

252/93 MODELLERING AF TILFÆLDIGE FÆNOMENER

Projektrapport af: Birthe Friis, Lisbeth Helmgaard Kristina Charlotte Jakobsen, Marina Mosbæk Johannessen, Lotte Ludvigsen, Mette Hass Nielsen

253/93 Kuglepakning

Teori og model

af: Lise Arleth, Kåre Fundal, Nils Kruse

Vejleder: Mogens Niss

254/93 Regressionsanalyse

Materiale til et statistikkursus

af: Jørgen Larsen

255/93 TID & BETINGET UAFHÆNGIGHED

af: Peter Harremoës