TEKST NR 246 1993

HVERDAGSVIDEN

OG

MATEMATIK

- LÆREPROCESSER I SKOLEN

Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd,
RUC, IMFUFA, marts 1993.

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

HVERDAGSVIDEN OG MATEMATIK - Læreprocesser i skolen

af: Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd, RUC, IMFUFA, marts 1993.

IMFUFA tekst nr. 246/93 191 sider ISSN 01066242

Abstract:

Problemstillingen "Hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse" behandles ud fra international matematikdidaktisk litteratur og ud fra to empiriske undersøgelser af læreprocesser i matematik hos elever i starten af gymnasiet.
Det demonstreres, at elevens hverdagsviden om *hvad matematikken omhandler og gør godt for*, om *undervisningens krav og tilbud*, om *rationalitet* og *argument* og om *specifikke genstandsfelter* øver indflydelse på, hvordan eleven lærer matematik. Det demonstreres, at forskelle i *begrebsstruktur* og *sprog* i henholdsvis hverdagsviden og matematisk viden er betydningsfulde for læreprocessen.
Det påvises, at elever ikke lærer på samme måde, men at der i hvert enkelt elevs beskæftigelse med og relation til matematik er klare karakteristiske træk. Hver enkelt elevs fortolkning af undervisningen er internt konsistent. Dette begrebsliggøres under betegnelsen "elevens egen læreplan". Det anføres, at der er potentialer for læring i elevernes spørgsmål, undren og utilfredshed, og der argumenteres for en pædagogisk praksis, der sætter *elevens* læreplan i centrum.

HVERDAGSVIDEN

OG

MATEMATIK

- LÆREPROCESSER I SKOLEN

Lena Lindenskov, Statens Humanistiske Forskningsråd,
RUC, IMFUFA, marts 1993.

FORORD

Hvordan unge lærer matematik i skolen, og hvilket udbytte de får af undervisningen afhænger af mange forskellige slags forhold. Blandt andet elevernes forkundskaber øver afgørende indflydelse. Det er ikke kun de matematiske forkundskaber fra den foregående skoleundervisning, der har betydning. To andre slags forkundskaber, som kan betegnes som hverdagsviden, er bestemmende:

-Hverdagsviden skabt af eleven i skolen som en ekstra "medlæring". Denne viden er ikke nævnt i bekendtgørelsen og er ikke eksplicit en del af lærerens undervisning.
-Hverdagsviden skabt af eleven uden for skolen.

Her skal det analyseres, hvordan en sådan *hverdagsviden* på godt og ondt kan indvirke på læringen og udbyttet. Det bliver demonstreret, at en række læringsproblemer, som umiddelbart ser ud til at skyldes elevens manglende flid, interesse eller evne, kan begrundes i hverdagsviden og i den måde, skolen forholdern sig til hverdagsviden på. Det bliver demonstreret, at der er potentialer i hverdagsviden, som kunne udnyttes i undervisningen.

I kapitel 1 formuleres problemstillingen og begrebet hverdagsviden diskuteres.

I kapitel 2 beskrives og diskuteres 8 teoretiske tilgange fra matematikkens didaktik, der hver især belyser vigtige aspekter af problemstillingen. De teoretiske overvejelser konkretiseres med eksempler fra konkrete undersøgelser af matematiklæring.

I kapitel 3 beskriver jeg mine egne to empiriske undersøgelser, dels tilrettelæggelsen af dem og dels nogle vægtige resultater fra dem. Den enkelte elevs læring viser sig at være forbløffende konsistent. Denne konsistens begrebsliggør jeg under betegnelsen "elevens egen læreplan".

I kapitel 4 analyseres problemstillingen med baggrund såvel i litteraturen som i egne empiriske undersøgelser. Der opstilles en
model for hvorledes forskellige typer af hverdagsviden kan influere på elevens dannelse af matematiske begreber.

I kapitel 5 diskuteres mulige teoretiske og praktiske konklusioner.

I kapitel 6 opridses nogle generelle perspektiver og mit arbejde placeres

- i forhold til hvorledes hverdag og hverdagsviden siden 1950'erne har indgået i debatten om skolefaget matematik
- i forhold til analoge empiriske undersøgelser
- i forhold til to generelle teser om hverdagsviden og til Vygotsky's teoretiske arbejder
- i forhold til min generelle opfattelse af forbindelserne mellem teori og praksis i matematikkens didaktik.

Der er mange, jeg gerne vil takke for råd og støtte til arbejdet, og jeg kan kun nævne nogle af dem. Det har til tider været slidsomt arbejde, men det har først og fremmest - under hele forløbet - været dejligt at jeg fik lejlighed til at lære nyt og til at fordybe mig, efter at jeg havde været gymnasie- og HFlærer i 8 år i matematik og samfundsfag.

Arbejdet er initieret og financieret af Statens Humanistiske Forskningsråd. I perioden 1988–1993 har Statens Humanistiske Forskningsråd haft "Matematikundervisning og Demokrati" som et af sine initiativområder med en styringsgruppe bestående af Mogens Niss, Ole Skovsmose, Ebbe Thue Poulsen, Peter Bollerslev, Dorthe Olesen og Vagn Lundsgaard Hansen og med Gunhild Nissen som kraftfuldt centrum.

Jeg har foretaget arbejdet som PhD–studerende på IMFUFA på RUC, hvor jeg især har draget nytte af Karin Beyer, Albert Paulsen, Bernhelm Boss og Mogens Niss. Mogens Niss, som har været min vejleder, har jeg gennem hele forløbet haft jævnlige og lange møder med, med inspirerende diskussioner, der har haft betydning både for de store linjer og for de enkelte dele af afhandlingen.

I tilknytning til Initiativet har jeg deltaget i fascinerende danske, nordiske og internationale konferencer, ligesom jeg har været med i en dansk stipendiatgruppe med Morten Blomhøj, Kirsten Grønbæk Hansen, Dan Eriksen, Bo Jacobsen, Finn Langberg, H.C.Hansen, Ole Skovsmose og Iben Maj Christiansen, hvor den enkeltes arbejde er blevet fremlagt og endevendt. Også Gunhild Nissen har flere gange givet mig værdifuld feedback.

Især i den første del af arbejdet var det mangeårige gymnasielærer–samarbejde med Marianne Kesselhahn, Anne G. Jensen, Johanne Lund Christiansen, Crilles Bacher, Peter Nørtoft, Anders Bonde og Niels Grønbæk en væsentlig klangbund for arbejdet.

Min svigerinde Else Marie Pedersen og min mand Helge Hvid må nævnes for utallige gange at have stillet op til intense diskussioner om

alt, helt fra uddannelsespolitiske perspektiver i arbejdet til de mindste detaljer.

Endelig må det fremhæves, at uden de involverede gymnasieelevers og gymnasielæreres imødekommenhed og engagement havde jeg ikke lært så meget, og analysen var blevet mere tør, kedsommelig og forudsigelig.

KAPITEL 1. UNDERSØGELSENS PROBLEMSTILLINGER

1.A UAFKLAREDE SPØRGSMÅL

Hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse. Er det ikke modsætninger? Er matematik ikke abstrakt, mens hverdagsviden er konkret? Er matematik ikke logisk opbygget, mens hverdagsviden er noget, man hører og erfarer? Lærer man ikke matematik i skolen, og hverdagsviden uden for skolen? Handler matematik ikke om tal og figurer, og hverdagsviden om alt muligt? Noget hverdagsviden kan beskrives sprogligt, mens andet er indbygget i vaner og reaktioner, og sådan er det vel ikke med matematik? Eller er det?

Er der derimod harmoniske sammenhænge mellem matematik og hverdagsviden? Er der måske matematik indbygget i vores hverdagsviden? I børns leg med legoklodser og i de voksnes madlavning? Er der måske også indbygget hverdagsviden i skolefaget matematik? Og i videnskabsfaget?

Matematikundervisning og matematiklæring i skolen, som mange, mange børn og voksne er involverede i, rummer vanskelige og uafklarede spørgsmål. Det er forbløffende så lidt, man ved om, hvorfor der er så mange, der får så ringe udbytte, og hvorfor nederlag i matematik giver nogle elever sår i sjælen? Man kan lede efter forklaringer mange steder. Er tiden for knap, og pensum for presset? Er samarbejdet mellem niveauerne i uddannelsessystemet for ringe? Er det materialer, lærernes uddannelse, elevernes risikovillighed, der er de egentlige syndere? Det ville være bekvemt, hvis vi kunne finde frem til de vigtigste årsager, for så vidste vi, hvad vi skulle forandre på. *Men* ... vi har ikke noget klart billede af årsagsforholdene. *Tværtimod* ... det eneste der står helt klart er, at sammenhængene er mere komplekse end man tidligere har troet.

De sidste 30 år er der over hele kloden investeret mange menneskelige og økonomiske ressourcer i at forbedre matematikundervisningen. [1] Læseplaner, metoder og materialer er blevet endevendt og udskiftet med andre. Enhver overordnet intention kan imidlertid slås i stykker af detaljer i samspillet mellem lærer og elev og mellem eleverne indbyrdes: Reformatorer og undervisere kan have de bedste intentioner om at skabe rammer for meningsfuld og produktiv læring, de kan opbyde al deres

[1] Som baggrund for de forskellige reformer har der ligget diametralt forskellige syn på forholdet mellem matematik og hverdagsviden. Det bliver nærmere beskrevet i kapitel 5A.

kreativitet i udformningen af rammerne, og underviserne kan hoppe på tungen i deres iver efter at opfylde deres egne og andres forestillinger om at være gode undervisere. Og så kan det alligevel godt være, at det konkrete samspil mellem lærer og elev og mellem eleverne indbyrdes fører til uhensigtsmæssige faglige kvalifikationer og til uhensigtsmæssige fagopfattelser. Disse forhold illustreres i de følgende to citater:

> "Enthusiasm – passion even – is a good thing in education. But one of the dangers in mathematics teaching and education is to become infected with an uncritical, missionary zeal. The 1960s saw it: apparatus, activity and discovery learning in mathematics put on a pedestal. The 1980s have also seen it: practical work, problem–solving, investigations, cooperative groupwork and discussion all elevated as the ultimate 'goods' (or even 'gods') of mathematics teaching....... If we give up our critical faculties, we give up a crucial means of improving practice.Investigative mathematics....offers a key means of developing mathematical processes and confidence. But poorly designed investigative lessons can be as bad as the worst rote learning lessons. I have seen children 'investigating' meaningless numerical situations with no understanding of the task or its significance, and leaving the lesson after having been told the 'right' answer, with no sense of achievement or enjoyment". [2]

> "Recently I observed a lesson in which an experienced mathematics teacher was asked by his Head of Department to 'do an investigation'.He chose one from a mathematical journal, and prepared it carefully beforehand, including writing out the completed solution on a piece of paper, which he held in his hand during the lesson. At the start he introduced the problem to the pupils, who clearly had never worked in this way before, and set them the task. He then went around the class, offering advice such as, 'no, not that way, it won't lead anywhere, try this', and 'that's right, keep on that way and you'll get the right answer' or 'don't give up, look here's the answer, on my paper'. It wasn't long before a pupil at the back put up her hand, and as if speaking for the whole class, asked the teacher to 'tell us how to do it now please sir'. The teacher managed to resist the request, and the pupils worked on. However, at the end of the lesson, the

---

[2] *Ernest, Paul (1989) "Questioning the Sacred Cows", s. 136–137 i Ernest, Paul (ed) "Mathematics Teaching. The State of the Art", The Falmer Press, New York.*

> teacher commented to me that there didn't seem to be much in the 'business of investigations that was any different from normal mathematics lessons''. [3]

Læseplaner, materialer og overordnede undervisningsprincipper er ingen garanti for god undervisning. Jeg har derfor valgt at sætte fokus på den enkelte elevs faglige læringsprocesser og på samspillet mellem elever og lærer. I relation til hverdagsviden er det dermed hverdagsviden <u>hos elever</u>, der er central, og elevers faktiske læringsprocesser bliver en nødvendig empiri. Det vil for eksempel ikke være tilstrækkeligt at analysere lærebøger, for det vil alene blotlægge de fagkyndige forfatteres hverdagsviden og deres forestillinger om elevernes hverdagsviden.

<u>1.B. PROBLEMFORMULERING</u>

Jeg ønsker at undersøge, om der er hverdagsviden eller aspekter ved hverdagsviden, der forårsager læringsproblemer eller virker produktivt på læringen. Læringsproblemer er ikke klart definerede fænomener, der enten er tilstede eller ikke er tilstede. Det er derfor interessant at undersøge, hvorvidt der er hverdagsviden, der - metaforisk udtrykt - giver læringsproblemerne en særlig farve. Det er desuden relevant at undersøge, hvorvidt der eksisterer potentialer i hverdagsviden, der under gunstige betingelser kunne øve en positiv indflydelse på læringsprocessen.
Dermed kan undersøgelsens problemstilling formuleres således:

> *Eksisterer der hverdagsviden eller aspekter ved hverdagsviden, der er eller kunne være en - eventuelt medvirkende - årsag til læringsproblemer eller til en særlig farvning af læringsproblemerne. Eksisterer der hverdagsviden eller aspekter ved hverdagsviden, der er - eller som kan blive - en hjælp og et aktiv i matematiklæringen.*

Undersøgelsen er foretaget på baggrund af uvidenhed: der er noget, vi ikke ved, som det ville være relevant at vide noget om. Det er ikke hensigten at udpege syndebukke blandt undervisningens agenter, men at opnå øget forståelse af baggrunden for agenternes handlen og tænkning.

---

[3] Lerman, Stephen (1989) "Investigations: Where to Now ?", s.73-80 i Ernest, Paul (ed) "Mathematics Teaching. The State of the Art", The Falmer Press, New York. Citatet er fra side 73.

Jeg har valgt at lade ordinær undervisning danne rammen om min undersøgelse. Da der ikke på forhånd er analyser af problemstillingen, kan der ikke arrangeres særlig forsøgsundervisning, hvor problemstillingen særlig velegnet kan studeres. Da der ikke på forhånd er særlige teser, kan der heller ikke designes særlige laboratorieundersøgelser. Aldersmæssigt er det især ungdomsgruppen, der mangler forskningsmæssig belysning, så jeg har valgt at lade mine empiriske undersøgelser foregå blandt unge. Men litteraturen, som jeg tager ind, er aldersmæssigt bredt favnende, fra børnehavebørn til voksne.

1.C HVERDAGSVIDEN

Hverdagsviden er et analytisk begreb, der skal bruges til at strukturere iagttagelser og refleksioner og til at strukturere vores indbyrdes diskussion. Jeg har ikke brug for nogen almengyldig definition på hverdagsviden: Det er ikke nødvendigt, at det analytiske begreb er brugbart over for andre forhold end matematiklæring i skolen.

Hverken termen "hverdagsviden" eller termen "matematisk begrebsdannelse" kan på forhånd gives en præcis definition. Der er ikke i matematik-didaktisk litteratur nogen definition på matematisk begrebsdannelse, som jeg ufordøjet kan importere, og heller ikke nogen definition på hverdagsviden som kan importeres.

Det er oplagt, at der eksisterer hverdagsviden, der har betydning for hvordan elever håndterer tekstopgaver: nemlig hverdagsviden - skabt uden for matematiktimerne - vedrørende de virkelige fænomener og sammenhænge, som tekstopgaverne refererer til, og som eleverne skal anvende matematik på. Eksempelvis vil hverdagsviden om pizzaer kunne have betydning for tekstopgaver med brøker, og hverdagsviden om hastighed vil kunne have betydning for tekstopgaver med differentialkvotienter. Men det er kun toppen af isbjerget. Håndtering af tekstopgaver er kun en af matematikfagets mange facetter. Vi må derfor opfatte hverdagsviden bredt: tilstrækkelig bredt til også at indeholde eventuel hverdagsviden, der kan tænkes at have betydning for facetter som matematisk tankegang, nye begreber, opgaveregning og symbolbrug.

Det er for snævert a priori at definere hverdagsviden som *viden, der er skabt uden for skolen*. Også i skolen skabes hverdagsviden, i de andre skolefag og endog i matematiktimerne, som en medlæring, hvor det er viden om andre forhold, der er på undervisningens dagsorden.

Dermed kan der inden de teoretiske og empiriske undersøgelser startes alene skabes en bred definition på begrebet hverdagsviden:

> *Ved hverdagsviden forstås viden, der skabes enten uden for skolen eller som en medlæring i skolen.*

Undersøgelsen dækker ikke alle sider af relationer mellem hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse. Der er for mig at se fire slags komplicerede relationer:

1. Hverdagsviden kan opfattes som en del af elevernes forviden og dermed udgøre en væsentlig forudsætning for læringen.
2. Hverdagsviden kan ligeledes opfattes som noget, som elevernes matematikforståelse i løbet af læringen skal knyttes sammen med og dermed påvirke og forandre.
3. Hverdagsviden kan endvidere opfattes som noget, der allerede ligger behandlet i de matematiske begreber som kulturelle produkter, (her tænkes hverdagsviden ikke nødvendigvis lejret i personer, som i de to foregående).
4. Og endelig kan hverdagsviden opfattes som noget, der står i en anden relation til genstandsfeltet end matematisk viden (igen tænkes hverdagsviden ikke nødvendigvis lejret i personer).

Undersøgelsen behandler kun de to første relationer, og mest den første. De to sidste relationer, der er af erkendelsesteoretisk (epistemologisk) karakter, drøftes kun sporadisk.

KAPITEL 2. TEORETISKE ELEMENTER

I dette kapitel præsenteres en mosaik af teoretiske elementer, der kan oplyse relationer mellem hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse. De udgør ikke en samlet teoretisk anskuelse, men er enkeltbegreber.

2.A HVERDAGSVIDEN OM MATEMATIK OG OM LÆRING

I det følgende præsenteres tre studier om elevers fejltagelser og læringsvanskeligheder. Fejltagelserne og vanskelighederne virker umiddelbart besynderlige, men sammenholdes de med elevernes opfattelse af, hvad matematik er for noget, og hvad det vil sige at tilegne sig faget, bliver de forståelige. Videnselementet i disse elevopfattelser kan ikke betegnes som faglig viden, men som hverdagsviden.

Studiet af Lucy

I en artikel fra 1985 præsenteres en undersøgelse af læringsproblemer hos en pige, Lucy.[4] Lucy deltager på et differential- og integralregningskursus i USA for 15 - 16 årige, i 11. og 12.skoleår. Den følgende episode er illustrativ:

Eleverne introduceres til integration ved hjælp af under- og oversummer med funktionen $f(x) = x^2$ som eksempel. Eleverne har fået gennemgået undersummer, og eleverne - også Lucy - har tilsyneladende skabt sig en relevant forståelse af undersummer. Lucy kan nemlig godt finde en undersum for intervallet fra 0 til 1:
- Lucy kan opdele intervallet, som hun skal,
- hun kan tegne de relevante rektangler,
- hun kan opskrive arealerne for rektanglerne,
- hun ved, at hun skal addere arealstørrelserne,
- og hun kan endelig gennemføre beregningerne og få det korrekte facit : "...she produced correct answers by correct methods." (s. 137)

Derefter skal Lucy konstruere og udregne en tilsvarende oversum. Hun anvender, som hun skal, den samme opdeling af intervallet, hun tegner de relevante rektangler, og hun peger i sin figur på de korrekte højder i rektanglerne. Så langt, så godt. Men så fortæller hun, at hun ikke kan

---

[4] *Davis, Robert B. (1985) "Learning Mathematical Concepts: The Case of Lucy", The Journal of Mathematical Behavior 4, 135-153.*

finde ud af størrelsen på højderne, og derfor ikke kan finde størrelsen på arealerne.

Det lyder umiddelbart mærkværdigt. Lucy har jo lige beregnet højderne på arealerne, da hun beregnede undersummen! Hvorfor siger hun så, at hun ikke kan? Hun "ved" vel egentlig godt, at højden er funktionsværdien. Og andet skal hun ikke bruge!

Lucy tænker tilsyneladende ikke i meninger, men kun i operationer. Det pibler også frem sprogligt, at hun ikke forbinder operationerne med nogen form for begrundelser eller intentioner. Hun siger for eksempel "I just did it". Det er åbenbart tilstrækkeligt til beregningen af undersummen, men hjælper hende ikke til at finde oversummen.

Lucy opsamler inputs, men er utilbøjelig til at kombinere dem i mentale enheder, som er til at huske og dermed har en vis stabilitet, og som er nyttige og produktive over for nye situationer. Davis benytter begrebet "frames" på sådanne mentale enheder.

Lærerne er bevidste om Lucy's særlige problemer, men deres medicin virker ikke:
"Lucy's teachers felt that Lucy's approach to learning needed to be changed. She needed to accept her own responsibility for trying to see patterns for herself, without waiting to be told or shown. Unfortunately, none of Lucy's teachers knew how to bring about this change. The most obvious method - withholding teacher suggestions and "waiting out" Lucy's own analysis of a task - invariable failed because there was never enough time available. Lucy would claim she *could not* see any pattern, *could not* think of any way to proceed, *could not* recall any earlier work that might be helpful. Lucy could maintain this stance for long time intervals, and there never seemed to be enough time available to "wait her out" (although this strategy had succeeded with many other students)." (s 143)
[5]

---

[5] *Tankeprocesser, der kunne gøre det muligt for Lucy at transferere sin kunnen fra beregningen af undersummen til beregningen af oversummen, kunne være for eksempel:*
1. at opdele beregningen i en række små bidder,
2. at opfatte beregningen som opdelt i en række små bidder, der bliver udført i en særlig indbyrdes sammenhæng,
3. at se hver enkelt bid sammenkoblet med et særligt formål, der kunne gives et visuelt og/eller et sprogligt udtryk.

Lucy er tilsyneladende ikke klar over, at det ikke er nogen god måde at lære på. Under overskriften 'morale' skriver Davis: "Building frames is hard work. But if you fail to build them, you will not become proficient in mathematics. Furthermore, if you do not realize that you *need* to be building up frames to represent key concepts, key techniques, and key problem types, *then you probably will not build them.*" (s.149)

Den tilsyneladende besynderlige indlæringsvanskelighed synes således at kunne forklares med at Lucy ikke har indset nødvendigheden af at opbygge mentale enheder. Det kan dermed være Lucy's hverdagsviden om, hvad skolefaget er og kræver af hende, skabt som en medlæring i skoleundervisningen, der fungerer som begrænsning for hendes videre læring.

Studiet af Benny

Også elever, der anses for at være succesfulde, tænker på en ganske anden måde end de voksne fagkyndige. Det vil fremgå i kapitel 3.D i min fortælling om en dreng, John's læring. Det viste sig tydeligt i S.H.Erlwangers studie af det såkaldte "disaster-study" om den 12-årige Benny fra 6.klasse. Også i Benny's tilfælde kan man få en uddybet forståelse af hans læringsproblemer ved at betragte hans hverdagsviden om undervisning og læring. Benny's lærere mener ikke, at Benny har nogen læringsproblemer. Lærerne vurderer Benny som en af de dygtigste i klassen: han er kommet længst, han arbejder hurtigst, og han har færrest fejl (s.12). [6]

Benny deltager i "IPI-Mathematics", "Individually Prescribed Instruction". Den enkelte elev kan følge sit eget tempo. Man skal bruge det man lærer i een sekvens i senere sekvenser, og der er en løbende testning, som skulle kunne diagnosticere fejl og give vejledning. Den løbende testning er "...instrument for monitoring (a pupil's) progress and diagnosing his exact needs" (s.12). Benny klarer testene godt, og læreren mener derfor at Benny har en relevant forståelse og beherskelse af det faglige stof.(s.7) Erlwangers interview med Benny viser imidlertid, at Benny har

---

Lucy skulle således ikke alene se det som det vigtige i beregningen af undersummen, at beregningen ender med et tal på størrelsen af undersummen som facit, - Lucy skulle også opleve det som vigtigt, at beregningen er eller bruger værktøj, som måske kan bruges andre steder i matematikken.

[6] *Her refereres til S.H.Erlwanger (1973) "Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics". Journal of Childrens' Mathematical Behavior, Vol.1, No.2, Autumn, 1973.*

en række misopfattelser af brøker og decimaltal. Benny mener eksempelvis, at 2 + 8/10 er 1,0. Han mener, at 2 + 0,3 er 0,5. Han mener at 2/1 + 1/2 er 1.

Erlwanger peger på Benny's samlede forståelse af, hvad matematikundervisningen kræver af ham, som forklaring på misopfattelserne. Jeg citerer fra side 14–15:

> "...some answers, which he knew were correct,were marked wrong because they differed from those in the key. The excerpt below shows what happens if he had a problem like 2 over 4 and he wrote the answer as 2/4.
>
> Benny: Then I get it wrong because they expect me to put 1/2. Or that's one way; 2/4 to me is also 1/4 and 1/4. But if I did that also, I get it wrong. But all of them are right!
>
> Erlwanger: Why don't you tell them?
>
> Benny: Because they have to go by the key...what the key says. I don't care what the key says; it's what you look on it. That's why kids nowadays have to take post–tests. That's why nowadays we kids get fractions wrong...."

Benny har indset, at facitlisten kun anerkender een bestemt symbolsk formulering af hvert svar, også i de tilfælde hvor der vitterlig er flere korrekte. Denne indsigt generaliserer Benny til, at alle hans egne svar må være korrekte, også de der ifølge facitlisten er forkerte. Benny mener for eksempel, at 2 + 0,3 giver 0,5 som decimaltal, giver 2,3 hvis man tegner et diagram over det, og giver 2 3/10 i brøker. Benny har ingen nytte af facitlisten. Den giver ham ingen information om hans læring, for selv om facitlisten siger, at hans decimaltalsvar på 0,5 er galt, hvad det jo vitterlig er, – så tror han ikke på det. Benny danner i modsætning til Lucy mentale enheder i løbet af sin læring, men det er matematisk forkerte enheder, der ikke respekterer at addition af tal giver det samme resultat, uafhængigt af om tallene formuleres i brøktal, decimaltegn eller i figurform.

Studiet af Benny er et detaljeret eksempel på, at en elevs aktive fortolkning af skolen som institution øver indflydelse på elevens læring. Det er Bennys opfattelse, at lærerne er nødt til at rette sig efter facitlisten, når de giver eleverne feedback: "They have to go by the key", som han siger. Ligesom for Lucy's vedkommende kan vi finde en forklaring på et læringsproblem i Benny's hverdagsviden om undervisning og læring.

Heller ikke Benny er klar over, at dele af hans måde at lære på kan være uhensigtsmæssig. Benny tror ligesom sine lærere, at han har tilegnet sig matematikken korrekt.

Schoenfeld's studier af geometrilæring

Fagopfattelsen kan være helt eller delvis ubevidst for personen, og fagopfattelsen kan være modsætningsfuld.[7] Nogle elever mener, at matematiklæring er udenadslære, og at det derfor er vigtigt at have en god hukommelse, og nogle af dem mener samtidig, at matematik er et kreativt og nyttigt fag, hvor man kan lære at tænke. Nogle elever oplever, at der til alle opgaveproblemer findes en regel, som man blot skal følge mekaniske, men mener samtidig, at det vigtigste at lære i matematik er metoder til at angribe et problem med.

En af årsagerne til modsætningerne i elevers fagopfattelse kan vi finde i Alan H.Schoenfeld's undersøgelse af geometrilæring. I undersøgelsen indgår 230 dygtige og meget motiverede elever på 10. til 12.klassetrin. Eleverne har tilsyneladende forskellige forestillinger om henholdsvis skolematematik og videnskabelig matematik. Skolematematikken er matematikken, som de oplever i klasseværelset. Videnskabelig matematik er den disciplin, som læreren fortæller om, som præget af kreativitet, problemløsning og udforskning, men som eleverne ikke selv har nogen oplevelser med. [8]

Når elever svarer på spørgeskemaer om hvad matematik er, svarer de sandsynligvis udfra hvad de har hørt matematiklærerne fortælle om den videnskabelige disciplin, og i så fald fortæller elevernes besvarelser ikke noget om elevernes eget forhold til faget eller om deres kompetance i problemløsningssituationer. Elevernes adfærd bestemmes imidlertid af deres egne erfaringer med skolefaget, ikke af lærernes fortællinger. Schoenfeld konkluderer:

> "If that is indeed so, the advances in mathematics education since the decade of "back to basics" have been largely in our

---

[7] *Carpenter, T.P & Lindquist, M.M. & Matthews, W. & Silver, E.A. (1983) "Results of the Third NAEP Mathematics Assessment: Secondary school", Mathematics Teacher 76(a), s.652-659.*

[8] *Schoenfeld, Alan H. (1985) "Mathematical Problem Solving", San Diego, Academic Press.*
Schoenfeld, Alan H. (1987) "What's all the fuss about metacognition ?" i Schoenfeld, Alan H. (ed) "Cognitive Science and Mathematics Education", s.189-216, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

> acquiring a more enlightened goal structure, and in having students pick up the rhetoric – but not the substance – related to those goals. A good deal of work will be necessary to convert those rhetorical advances into substantive ones." (s.349)

Mange elever har en overdreven tro på, at måden man udtrykker et svar på er vigtig, – nogle mener, at udtryksmåden endog er vigtigere svarets indhold. Mange elever tror, at enhver opgave skal kunne løses på få minutter, og mange elever opfatter sig som passive forbrugere af andres matematik. [9]

Schoenfeld's undersøgelser omhandler geometri og viser, at eleverne arbejder i to slags geometri, der er uden nogen forbindelse med hinanden, og som har hver deres arbejdsmetoder. I den ene slags geometri består arbejdet i at bevise, at noget gælder. I den anden slags geometri består arbejdet i at konstruere noget. I bevisgeometrien er eleverne alene optaget af at få færdiggjort beviserne. Det har den uheldige effekt, at eleverne slår deres egne tænkeevner fra og ikke erhverver sig nogen indsigt fra arbejdet med at gennemføre beviserne. Indsigt, som de ellers ville kunne have gavn af, når de arbejder i konstruktionsgeometrien. Schoenfeld mener, at elevernes syn er præget af en primitiv empirisme, hvor de opfatter geomtriske fænomener og sammenhænge som empiriske kendsgerninger. Eleverne har følgende forestilling:

> 'Resultatet af et bevis er kendt på forhånd og kan findes i den materielle virkelighed. Dermed er der ingen rimelig grund til at foretage bevisførelsen. Man kan ikke lære noget af det, og da slet ikke noget, man kan bruge i andre sammenhænge. Man skal bare bevise, fordi læreren siger, at man skal.'

Også en sådan opfattelse kan bunde i en hverdagsviden, som eleverne har dannet sig som en medlæring i undervisnings- og læringsprocesser, de har deltaget i.

<u>Medlæring i skolen</u>

Elevers opfattelse af hvad matematik er og hvad der kræves for at lære matematik skabes i væsentlig grad i skoleundervisningen. Hvis elever eksempelvis opfatter matematik som et sæt regler eller ritualer, må det tilskrives skoleundervisningen, også selv om det ikke har været intentio–

---

[9] *Schoenfeld, Alan H.(1988) "When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disaster of "Well-Taught" Mathematical Courses", Educational Psychologist 23, 2, s.145-166.*

nen fra skolens og lærerens side at eleverne skulle skabe sig denne opfattelse. Davis (1988) formulerer det således [10]:

> "More generally, the practice, presently very common in our schools, of presenting mathematics as a collection of rituals, *and testing only the student's ability to perform these rituals*, seems to limit the growth of many students in a very severe way. They come to *see* only the rituals, and try to explain everything in terms of whether these rituals have been executed in the proper, orthodox fashion, or not. At best, this is only a superficial kind of knowledge, and does not provide a strong foundation for future growth". (s.27)

Og han fortsætter:

> "Finally, on the pedagogical side of matters, this lesson demonstrates how important it is to allow students to show teachers the precise way they are thinking about mathematics. This rarely happens. Were it more common, one would not find such extreme examples as those reported by Clement, by Erlwanger, and many others." (s,27)

Det første teorielement, som jeg vil uddrage fra de tre undersøgelser, lyder: Matematikundervisningen forsømmer at give en direkte undervisning i henholdsvis hvad matematik er og hvad læring af matematik er. Eleverne kan således ikke skabe sig en faglig viden om disse forhold. Videnselementet i opfattelserne bliver dermed alene hverdagsviden. I de tilfælde hvor der heller ikke foregår nogen åben samtale om hverken elevernes fagopfattelse eller om deres opfattelse af læring, kan begge dele forblive ubekendt for læreren og ubevidst for eleven selv. I alle de tre undersøgelser er der eksempler på, at en sådan hverdagsviden har virket hindrende på elevers matematiklæring.

Med dette teorielement kan man alene se eleven som et passivt objekt, der påvirkes af skolen. Elevers matematikopfattelse er ikke andet end en passiv genspejling af elevens hidtidige matematikundervisning. Med det næste teorielement "læringsrationaler" kan man få øje på eleven som et aktivt subjekt, og man kan få øje på forhold uden for skolen, som har betydning. Det er endvidere ikke kun elevens erfaringer fra fortiden, der

---

[10] *Davis, Robert B (1988) "The Interplay of Algebra, Geometry, and Logic", Journal of Mathematical Behavior, 7, s.9–28.*

er væsentlige: eleven har forestillinger om fremtiden og har aktive intentioner.

2.B LÆRINGSRATIONALER

Stieg Mellin-Olsen har sat fokus på, hvorvidt elever giver sig i kast med læringsarbejdet, og i givet fald hvilket læringsarbejde, de giver sig i kast med. Det har blandt andet ført til to begreber til at belyse elevernes "drives for shool learning" [11] (s.157).

Det er begreberne I-Rationale og S-Rationale. I-Rationale står for begrundelser for at lære, der vedrører, hvad skolelæringen giver af formelle kvalifikationer af betydning for elevens fremtid. Bogstavet I er en forkortelse af Instrumentel. Læring er et instrument eller et middel til at opnå "noget andet". I sin mest snævre form er et I-rationale bestemt af, hvad der giver gode karakterer, vidnesbyrd og eksamensbeviser.

S-Rationale står for begrundelser for at lære, der vedrører, hvad skolelæringen kan give af udbytte UDOVER karakterer, vidnesbyrd og eksamensbeviser. Bogstavet S er en forkortelse for Social for at pointere, at sådanne begrundelser er skabt i sociale individer i en social proces med andre individer.

Mellin Olsen opstiller nogle teser om, hvad der kan give skoletrætte elever lyst til at lære. Teserne lyder - og jeg citerer (s.159) :
"If the I-rationale is sufficiently weakened by negative messages from school, the learning will rest on the activation of the S-rationale," og
"If the pupil stops learning because both the I- and the S-rationale have ceased to function, a remedial education has to build on revitalisation of the S-rationale". [12]

2.C METAFORER

Det er ikke kun elevers fagopfattelse og opfattelse af læring, der kan give forklaringer på elever faktiske læring. I en given situation influeres

[11] *Mellin-Olsen, Stieg (1987) "The Politics of Mathematics Education" i Reidels serie "Mathematics Education Library". I forbindelse med begrebet læringsrationale er S.Mellin-Olsen inspireret af G.H.Mead (1934) "Mind, Self and Society", Chicago University Press, Chicago.*

[12] *Se endvidere Mellin-Olsen, Stieg (1992) "Eleven husker når han ikke lærte, Tangenten 3, 1, s.26-28.*

læringen af specifikke dele af faget af specifikke dele af elevens hukommelse og mentale struktur. Er der hverdagsviden, der øver indflydelse på hvilke dele der aktiveres, og indgår der hverdagsviden i de mentale enheder, der aktiveres? Jeg vil give to eksempler på, at læringsproblemer kan forklares med hverdagsviden, der aktiveres i en given situation og fungerer som metafor for den matematiske forståelse. Første eksempel omhandler talaksen, andet eksempel omhandler opstilling af ligninger.

Brøker på talaksen

En dreng, Brian går i 6.klasse, og det følgende eksempel handler om hans opfattelse af, hvordan brøker placerer sig på en tallinje. [13]

Intervieweren tegner en tallinje, placerer 0 og 2 på den. Brian placerer 1, 3, 4, 5 og 6. Brian bemærker, at det kan man så fortsætte med. Brian bliver nu bedt om at placere 1/2, og gør det korrekt. 1/4 er Brian i tvivl om, peger på tallet 4 med sin blyant, men placerer det så korrekt og placerer også 1/3 korrekt. Jeg citerer fra artiklen : "Thus far -- except for Brian's consideration of 4 -- one might imagine that Brian is using the *size* of the rational number, quite correctly, as his basic idea.
But wait !"

2/3 placerer Brian nu mellem 1 og 2, og 2/4 placeres mellem 1 og det netop indplacerede 2/3. Dette kunne tyde på, at Brian klassificerer, og det viser sig at være en korrekt hypotese, idet han afsætter 4/3 mellem 3 og 4.

Er der noget hverdagsfænomen, der kan tænkes at fungere som metafor ? Hvad for eksempel med amerikanske postadresser? I adressen "603 Second avenue, Apt.215" angiver det første led "603" *bygningen,* det andet led "Second Avenue" identificerer *gaden,* og det sidste led "Apt.215" *lejligheden.*

Brian's adfærd synes at være rationel i forhold til den amerikanske postaddresse som metafor. Lad os derfor skabe følgende model af Brian's brøkbegreb:
Brian opfatter en brøk som noget, der angiver en bestemt beliggenhed på talaksen. *Tælleren identificerer et interval* mellem to hele tal: er tælleren

---

[13] *Davis, Robert B & Alston, Alice & Maher, Carolyn (1991) "Brian's Number Line Representation of Fractions." fra PME 15 Proceedings, vol I, side 247-254. Eksemplet er et øjebliksbillede af Brian's læringsproces, og indgår i et større studie, der har varet siden Brian startede i første klasse.*

1, skal vi gå ind i intervallet "inden 1", det vil sige mellem 0 og 1; er tælleren 2, skal vi gå ind i intervallet mellem 1 og 2; og er tælleren 4, skal vi gå ind i intervallet mellem 3 og 4. Dette svarer til, at "det andet led" i amerikanske adresser angiver gaden. *Nævneren identificerer placeringen inden for det interval*, som tælleren har identificeret: jo større nævner, jo længere mod venstre. Således anbringes 2/4 til venstre for 2/3, hvilket svarer til placeringen mellem 0 og 1 af brøker med 1 i tælleren, de såkaldte stambrøker. Muligvis er det stambrøkerne, Brian generaliserer.

Ligninger

Der er foretaget mange studier af, hvorledes forsøgspersoner opstiller simple ligninger. Eksempelvis ligninger for følgende situation: "På en given skole er der 6 gange så mange elever som lærere". Antallet af lærere skal være en variabel, og kan kaldes T for "Teachers", og antallet af elever skal være en variabel, som kan kaldes S for "Students". Man kan på flere måder opstille ligninger, der er matematisk korrekte modeller for situationen, for eksempel $6\,T = S$. En hel del forsøgspersoner opstiller imidlertid forkerte ligninger, for eksempel $6\,S = T$. Denne type forkerte ligninger betegnes som "the reversal error". [14]

Der er foretaget analyser af syntaktiske, semantiske og metaforiske forhold. Angående det syntaktiske har det vist sig, at rækkefølgen af ordene ikke er afgørende for, om forsøgspersonen svarer med en korrekt ligning eller med "the reversal error". Også det semantiske indhold er søgt kontrolleret, idet man har studeret besvarelser på andre opgaveeksempler, hvor det ikke af indholdet i teksten direkte kan afgøres, hvilket antal der er størst. I lærer–elev–eksemplet "ved" man "umiddelbart", at der er flere elever end lærere på en skole. Det er ikke tilfældet i en tilsvarende opgave om en restaurant, hvor der for hver fire kunder, der bestiller ostekage, er fem kunder, der bestiller frugtkage. Undersøgelser af syntaktiske og semantiske forhold kan give svar på, hvilke typer af iklædninger, der gør opgaven mere eller mindre vanskelig for forsøgspersonerne.

Også ved at undersøge metaforiske forhold kan man få indblik i en mulig rationalitet bag forsøgspersonernes besvarelser. Det viser sig nemlig, at

---

[14] Der er gennem de sidste ti år udført mange studier af det, der er blevet kaldt "the reversal error in algebra tasks". Startskuddet til den omfattende række af studier var Clement & Kaput (1974) "Letter to the editor"; Journal of Childrens'Mathematical Behavior, 2, s. 208.

også "the reversal error" har et legitimt anvendelsesområde, nemlig opstilling af ligninger for sammenhænge mellem forskellige enheder.

Eksempelvis udtrykkes sammenhængen mellem meter og centimeter ved 1M = 100CM, og mellem danske penge og canadiske penge ved 1CAN = 6DKR. Her står "bogstaverne" for een enhed af det pågældende, mens "bogstaverne" i lærer-student-ligningen skal stå for antallet, det vil sige, hvor mange der er af den pågældende slags. Dette har givet Clement et al idéen til, at der kan ligge en grundlæggende metafor som årsag til fejlen. [15] ("Teacher-Students"-problemet ville, hvis man anvendte valutaomveksling som metafor, lyde 1T = 6S).

Metaforer

Såvel Brians måde at placere brøker på tallinjen, som "the reversal error" kan forklares med, at personen har aktiveret en mental enhed, der fungerer som en metafor, der ganske vist ikke passer ind i opgaven, men som har et andet - muligvis ikke-matematisk - gyldighedsområde.[16] Metaforerne kan være hentet fra andre dele af matematikken, som i "the reversal error", eller fra hverdagsviden skabt uden for skolen, som i Brians gademetafor. Endelig kan vi forestille os at der kan være hverdagsviden indblandet i valget af grundlæggende metafor, når der er flere end en enkelt metafor, der kan bruges.

Metaforanalyser består i at forestille sig en erfaringsverden, hvor elevens tænkning og ageren bliver meningsfuld, og det kan give et bud på en rationalitet bag det, der for den voksne fagkyndige umiddelbart kan synes besynderligt. [17]

---

[15] *Spørgsmålet er i øvrigt, hvorledes denne reversal error videre skal fortolkes, hvad den betyder for elevens kompetance til at regne og til at lære mere. Det tager disse tidlige studier ikke op, men det tages op af studier i slutningen af 80'erne, eksempelvis i Seeger, Falk (1990) "Observations on the "reversal error" in algebra tasks", Booker et al (eds) "Proceedings for the Fourteenth PME Conference", vol II, s.141-148.*

[16] *Davis har et sted brugt som billede, at personen har fået fat i en telefonbog fra et forkert år og slået korrekt op i den og ringet korrekt op, men altså risikerer at komme til at tale med en anden end man ønskede, hvis abonnenten er flyttet.*

[17] *Metaforbegrebet bliver stadig mere anvendt i analyser af viden og tænkning, også inden for matematikkens didaktik. Se f.eks. Dörfler, Willibald (1991) "Meaning: Image Schemata and Protocols" i Furinghetti, F, (ed)*

2.D A-KLUMPER og B-STRUKTURER

Hvordan vælger elever mellem forskellige metaforer, og hvad er afgørende for, hvorvidt der skabes og aktiveres metaforer? I eksemplerne med Brian's talakse og 'the reversal error' blev der aktiveret gale metaforer, mens Lucy tilsyneladende ikke aktiverede nogen metaforer, men alene tænkte i operationer af symboler. Lad os forestille os, hvilke mentale operationer der kan ligge til grund for sådanne kvalitative forskelle. I det følgende præsenteres ét muligt billede af de mentale operationers verden [18].

Når vi lærer noget nyt, modtager vi ny information. Den bliver lagret, men ikke alt lagres på samme måde. Noget information bliver lagret i klumper, der er lette at komme til. De bliver brugt fremover til at forstå ny information med, som falder inden for det samme område. Lad os kalde dem A-klumper. Noget andet information bliver lagret i andre strukturer, som jeg vil kalde for B-strukturer. B-strukturerne bestemmer hvilken A-klump, der skal være aktiv i modtagelsen og læsningen af en ny portion information, og de bestemmer også over dannelsen af nye A-klumper. Man tænker sig, at B-strukturerne indeholder metacognitive processer. I litteraturen udfoldes dette på forskellig vis. [19]

"Proceedings for the Fourteenth PME Conference, Assisi, vol I s.17-32.
Lakoff, George (1980) "Metaphors we live by", Chicago, The University of Chicago Press.
Lakoff, George (1987) "Women, Fire and Dangerous Things", Chicago, The University of Chicago Press.
Carbonell, Jaime G. & Minton, Steven "Metaphor and Commonsense Reasoning" s.405-426 i Hobbs, Jerry R. & Moore, Robert C. (eds (1985) "Formal Theories of the Commonsense World" i "ablex series in artificial intelligence", Ablex, Norwood, New Jersey.

[18] *Det er tilsyneladende umuligt for os at producere forestillinger om de mentale operationers verden uden at anvende en grundlæggende metafor. I det følgende har jeg brugt computeren som grundlæggende metafor. Som det fremgår af Sternberg, Robert J. (1990) "Metaphors of Mind, Conceptions of the Nature of Intelligence", Cambridge, Cambridge University Press anvendes der i litteraturen 7 forskellige grundlæggende metaforer. Sternberg benævner dem på følgende måde: "geographic, computational, biological, epistemological, anthopological, sociological og systems".*

[19] *F.eks. udfoldes 10 metakomponenter af Sternberg (se s.121f) og 5 metakognitive processer af Brown A.L. (1978) "Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition", i Glaser, R. (ed) "Advances in instructional Psychology", vol I, s.77-165, Hillsdale, NJ: Erlbaum.*

Hvad jeg her kalder A–klumper og B–strukturer, er der foreslået forskellige termer til, såsom "frames", "microworlds", "scripts" og "production systems". Forskelle i termer er indikator for, at de indholdsmæssige forestillinger ikke er ens.[20]

Der er forskelle i opfattelsen af graden af sammenhæng. Ord som "frameworks" og "alternative frameworks" implicerer en relativ stor grad af sammenhæng. Metoder som ord–association og "concept mappings" indeholder også implicit en formodning om, at der er stabile sammenhænge mellem idéerne. Begrebet "clusters" foreslår derimod, at viden er som klynger eller klumper, som – i og med at elevens ideer udvikler sig – forbindes flydende, og hvor de indbyrdes forbindelser kan ændre sig. [21]

I mit billede af de mentale operationers verden er B–strukturerne overordnede og kan indeholde hverdagsviden om fag og læring, mens A–klumperne er mere specifikke og mere foranderlige og kan indeholde hverdagsviden, der kan fungere som metaforer over for specifikke begreber eller facetter af faget.

2.E PRIMÆR OG SEKUNDÆR INTUITION

I matematikkens didaktik sker udfoldninger ofte inspireret af Polya's generaliseringer på matematiske problemløsningsstrategier, jvfr. Polya, George (1990) "How to solve it. A new aspect of Mathematical Method", Penguin Books, London. Oprindelig udgivet 1945 på Princeton University Press. I Davis (1978) formuleres det således: "Indeed, we strongly suspect that "problem–solving heuristics" relate to the stage of creating, in one's own mind, an appropriate super–ordinate "relational" schema." (s.57)

[20] *Der eksisterer således ingen begrebsdannelser om læringsprocessen, der er alment accepterede – heller ikke blandt de forskere, der arbejder med den samme grundlæggende metafor: "there does not, at present, exist one single conceptualization of human information processing that is accepted by every researchers", citeret fra Davis, Robert B. (1984) "Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education", London, Croom Helm, s.130.*

[21] *Se for eksempel Millar, R. (1989) "Constructive criticism", s.587–596 i International Journal of Science Education, vol 11, no.5, Special Issue "Students' Conceptions in Science" redigeret af Rosalind Driver, s. 593.*

Men hvor stammer metaforerne i A-klumperne fra? Vi kan søge hjælp i den israelske psykolog Efraim Fischbein's arbejde. [22] Fischbein arbejder med intuition i matematik og naturvidenskab. Sædvanligvis opfattes intuition som et "grundfænomen", der måske nok kan beskrives, men ikke forklares, mens det er Fischbeins hensigt netop at finde forklaringer på intuition, og at finde mekanismer bag intuition. Det er Fischbeins påstand, at

> "*intuition expresses a profound necessity of our mental behavior*" (1987, s.x /Fischbeins fremhævning), og at "intuitions are only apparently autonomous, self-evident cognitions. They are in order to confer on some of the individual's ideas *the appearance of certitude and intrinsic validity*. But, in fact, these ideas appear very robust as an effect of their being deeply rooted in the person's basic mental organization. Consequently, in order to eliminate or change or even control an intuitive attitude it would be necessary to produce a profound, structural transformation in large ares of mental activity. Therefore, the individual's self-confidence itself might be endangered if he learns that even his deepest beliefs may very often be misleading. It follows that intuitions cannot be treated effectively and positively as mere isolated symptoms but rather as manifestations of highly articulated and very complex structures." (1987, s.x-xi/ min fremhævning)

Intuitionens rolle er for det intellektuelle niveau som perceptionens rolle på det sansemæssige niveau: "Intuition is the direct, cognitive prelude to action (mental or practical). It organizes information in a behaviorally meaningful and intrinsically credible structure". (1987, s.56)

Fischbein vælger at opfatte intuition, ikke som kilde til viden eller som noget metodisk, men som viden eller erkendelse, der har nogle særlige træk, som gør denne viden til noget andet end perceptionsviden og analytisk viden. (1987, s.3 og s. 13)

---

[22] I tilknytning til Fischbeins arbejde med intuition kan der henvises til Fischbein, E. (1987) "Intuition in Mathematics and Science. An Educational Approach" 1987 i serien "Mathematics Education Library" fra forlaget Reidel, til
Fischbein, E (1989) "Tacit Models and Mathematical Reasoning", For the Learning of Mathematics , 9,2, s. 9-14 og til
Fischbein, E (1990) "The Autonomy of Mental Models", For the Learning of Mathematics, 10, 1, s.23-30.

Man kan for eksempel percipere et bord, man står foran: man er ikke i tvivl om dets eksistens, og det behøver man ikke bevise eller argumentere for. *Intuition* derimod - overskrider altid sådanne givne fakta som eksistensen af et bord. Man kan percipere, at vinklerne ved to skærende linjer parvis er lige store, men man behøver intuition for at foretage en generalisering til, at det gælder for vilkårlige par af linjer, der skærer hinanden.

Opgaven "2 liter juice koster 3 dollars. Hvad koster 4 liter?" har 6 dollar som et intuitivt svar. "En liter juice koster 2 dollar. Hvad koster 0,75 liter?" har derimod ikke ifølge Fischbein noget intuitivt, kun et analytisk svar. (1987, s.14). Hvis et barn adderer 8 og 5 enten som 8+1+1+1+1+1 eller som 8+2 og derefter 10+3, så er dette en analytisk løsning, der ikke er baseret på noget selvindlysende. Et barn, der til opgaven 2+2 straks svarer 4, har derimod en intuitiv viden. (1987, s.66)

Fischbein opstiller følgende karakteristiske træk ved intuition, hvoraf nogle af dem kan give anledning til læringsproblemer:
- selvindlysende
- indre sikkerhed
- vedholdende
- tvangsmæssig
- teori-status
- generaliserbar
- global
- implicit

At intuitioner kan være skjulte og ubevidste kan give læringsproblemer. Er intuitionerne adækvate, men skjulte, kan det være vanskeligt at nyttiggøre dem i nye situationer og i en videre abstraktionsproces. Er intuitionerne skjulte og ikke adækvate, kan eleven blive ledt hen på et andet spor, end det undervisningen har som intention, uden at hverken elev eller lærer kan få øje på, hvad det skyldes.

Beviser og definitioner

Fiscbein tager en række matematiske emner op, blandt andet beviser og definitioner. I forbindelse med beviser er det Fischbeins tese, at intuitionen hjælper eleven til at acceptere udsagnet, men forhindrer eleven i at acceptere nødvendigheden af et bevis. (1987, s.209) I relation til definitioner er der klare forskelle mellem de empiriske videnskaber og matematik. [23] Fischbein har i relation til læring følgende tese om forskellen mellem definitioner i empiriske videnskaber og definitioner i matematik:

> "It may not be difficult to accept the distinction theoretically, but it is very hard to assimilate it practically, intuitively and operationally because *intuitively* the distinction does not exist". (1987, s.207/Fischbeins fremhævning)

Fischbein skelner mellem primær intuition, der stammer fra omgangen med livet uden for skolen og sekundær intuition, der er skabt i skolen. (1987 s. 64–70 og s.202)

Primære intuitioner omhandler tid og rum, kausalitet, og grundlæggende fysiske egenskaber.(1987, s.59) [24]

Sekundær intuition skabes ikke af nogen "naturlig" normal erfaring hos individet, men kan være i modstrid med den naturlige opfattelse af spørgsmålet. Eksempelvis indeholder den primære intuition omkring legemers bevægelse en opfattelse af, at der skal tilføres en kraft, for at

---

[23] *I Fischbeins forståelse er der følgende forskelle:*
"In the empirical sciences it is also important to possess clear, explicit definitions of the concepts used. But in this case, it is not the definition which imposes the properties of the concept. On the contrary, it is the complex reality of the respective phenomenon which remains the permanent source for enriching and rendering more precisely the notion considered. The mental attitude is different. The student has to learn to cope in his productive reasoning with these different types of situations: in mathematics it is the formal, axiomatic basis which is decisive; in the empirical sciences it is the experimental evidence which decides." (1987, s.209)

[24] *Fischbein refererer bl.a. til diSessa's begreb om "p–prims", "phenomenological primitives".*
diSessa, Andrea (1983) "Phenomenology and the Evolution of Intuition" i "Mental Models" ed. af Gentner,Dedre & Stevens, Lawrence Erlbaum Associates i serien "Cognitive Science".
–samme artikel findes i Janvier, Claude (ed) (1987) "Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, s.83–96.
diSessa, Andrea (1982) "Unlearning Aristotelian physics", Cognitive Science, 6, 37–75.
diSessa analogiserer p–prims (phenemenological primitives) til axiomer i faget matematik. Der er ikke noget, som forklarer dem eller "retfærdiggør" dem. De kan ikke underopdeles, men kan kun aktiveres i en helhed.(1987, s. 83).

et legeme kan bevare en konstant hastighed. Men hvis den nye newtonske opfattelse, - at et legeme bevarer sin hvilestatus eller sin konstante bevægelse, hvis der ikke tilføres nogen kraft, - kan transformeres *fra* at være noget, man lige har lært eller har fået at vide, *til* at være noget, som man virkelig tror på, og som danner udgangspunkt for, hvordan man videre tænker og handler, så er det blevet til en sekundær intuition. (1987, s.68) Fischbein mener ikke, det er muligt at skabe sekundære intuitioner ved at forandre nogle primære intuitioner, de må skabes som nye "beliefs" i forbindelse med tilegnelse af faglighed.(1987, s.175)

Implikationer for praksis

Fischbein beskriver den hidtidige opfattelse af kompetance i faglige områder som matematik og naturvidenskab som utilstrækkelig:

> "For a very long time, reasoning has been studied mainly in terms of propositional networks governed by logical rules. Consequently, the instructional process, especially in science and mathematics, has tended to provide the learner with a certain amount of information (principles, laws, theorems, formulae) and to develop methods of formal reasoning adapted to the respective domains.
>
> What has been shown in this work is that, beyond the dynamics of the conceptual networks, there is a world of stabilized expectations and beliefs which deeply influence the reception and the use of mathematical and scientific knowledge. For the science teacher and for the teacher of mathematics it is of fundamental importance to identify these intuitive forces and to take them into account in the instructional process." (1987, s.206)

Hvis en elevs intuitive repræsentation er videnskabeligt adækvat, så kan man måske på en frugtbar måde bygge videre begrebsmæssige strukturer på den. Hvis den ikke er adækvat, anbefaler Fischbein, at man søger at skabe didaktiske situationer, som kan hjælpe eleven til at blive opmærksom på, at der er en konflikt imellem den intuitive fortolkning og den formale fortolkning, og at analysere sammen med eleven, hvilke egenskaber der ligger i de to forskellige forestillinger.

For eksempel må det klargøres præcist for eleven, HVAD det er ved den matematiske konvention om parallelogram, der fører med sig, at kvadrater falder ind under definitionen på et parallelogram. Det er utilstrækkelig blot at fortælle eleven, at "et kvadrat er et parallelogram".

Det er også utilstrækkeligt, at eleven bliver opmærksom på at der er modeksempler (med tal mellem 0 og 1) til en eventuel intuitiv opfattelse af, at "multiplikation gør større". Man må arbejde med eleven om indholdet i den intuitive opfattelse og diskutere dens gyldighedsområde.(1987, s.207-208).

Hvis læreren respekterer og drager omsorg for elevernes intuitive opfattelser, kan det betyde en forbedring af elevernes læring. En intuitivt accepteret løsningsmetode, repræsenterer nemlig en mere direkte og dybere involvering af individet end en løsningsmetode, der ingen intuitiv basis har.

Fischbein har som ideal en ikke fordømmende, men nysgerrig og forstående lærer. Fischbein mener, at lærere er for hurtige til at opfatte elevers fejltagelser som udtryk for manglende generelle tænkeevner, når det alene er uhensigtsmæssige begrebsforståelser, "concept images", eleverne aktiverer.

2.F SYNKRETISK MATEMATIK

Mary Brenner foretog i starten af 80'erne et studie af *udviklingen* af matematikforståelsen hos skolebørn i Liberia. [25] Der indgik 1.klasser og 4.klasser på 4 skoler i det såkaldte Vai-område, hvor det oprindelige talsystem er et base 5-system. Til addition og subtraktion hører metoder, hvor der tegnes streger. Når man adderer, tegner man ekstra streger, og når man subtraherer, krydser man streger over. Resultatet fås ved at tælle streger. Multiplikation beregnes også ved at tegne og tælle: Opgaven "6 gange 4" klares ved at tegne seks rækker med 4 streger i hver.

Børnene møder to forskellige slags matematik, én hjemme og en anden i den engelskprægede skole. Børnene hænger ikke fast i den gamle viden, og overtager heller ikke blot skolens viden, men udnytter begge dele og laver deres egen blanding af dem. Børnenes egen nye og anderledes matematik benævner Mary Brenner synkretisk matematik.

---

[25] Brenner, Mary E. (1985) "The Practice of Arithmetic in Liberian Schools", Anthropology & Education Quarterly, vol 16, 3, s.177-185. Artiklerne i dette nummer er oplæg fra et seminar i 1983 "The Social Organization of Knowledge and Practice: A Symposium", ledet af Jean Lave.

Børnene vælger til hver enkelt skoleopgave, om de vil bruge Vai–regning eller skoleregning eller en blanding. De bruger ofte skoleregning til store talstørrelser, og Vai–regning til små talstørrelser. En opgave som '45 minus 9' beregner de med en blandet metode: De tegner 15 streger, overkrydser 9 af dem, og tæller sig til, at 15 minus 9 er 6. Nu mangler tierne at blive beregnet, og dertil bruger de skolematematik: "4 minus 1 er 3".

Mary Brenner vurderer, at det er er fordi klasserne er homogene, og fordi lærerne støtter børnene i at bruge Vai–matematik, at det lykkes børnene at skabe sig en synkretisk viden.

2.G KONTEKSTUALISERING

Hvordan kan man forstå samspillet mellem elevernes hverdagsviden om et givet område og undervisningens behandling af samme område? To teorielementer tilbyder indsigt i samspillet, nemlig "kontekstualisering" og "diskursiv praksis".

"Kontekstualisering"–idéen udspringer af en kritik af undervisning, der lægger vægt på formalismer og operationer på symbolniveau. Som det formuleres af Janvier:

> "In fact, our experience as a teacher has shown several times that the introduction of a simplifying symbolism frequently resulted in a difficult go–back to the original spelled–out word description. Think about logarithms, exponentiation, trigonometric functions. As soon as formulae are provided, the meaning appear to vanish. We can easily imagine that such is the case with conceptions fading out because of "powerful" concepts. That is why we advocate that conceptions should be developed at the preconcept stage, in other words prior to the learning of the formalized concept." [26]

I en kontekstualiseret undervisning skal lærerne derfor udtænke og skabe et særligt "miljø", – heraf betegnelsen "kontekst" – , hvori eleven aktivt kan arbejde med problemstillinger. Gennem sin aktivitet vil eleven skabe sig ny viden i form af begreber eller forstadier til begreber. Miljøet/–

---

[26] Janvier, Claude (1987) "Conceptions and representations" s. 147–158 i Janvier, Claude (ed) "Problems of Representation in Teaching and Learning Mathematics" Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates. Citatet er fra side 157.

konteksten tænkes at stille mening til rådighed for eleven om det matematiske indhold, der er på dagsordenen.

Man forestiller sig, at en sådan kontekstualisering er en fordel for "vitaliteten" af elevernes begrebsdannelser. Det er en fordel, når individet skal anvende et matematisk begreb, at individets forståelse af det matematisk begreb er knyttet sammen med indsigt i nogle eksempler på anvendelser. Det kan f.eks. være afgørende at vide, at begrebet differentialkvotient fortæller om, hvordan kurver hælder og om væksthastighed. Også når eleven senere skal udbygge sin begrebsverden, kan det være afgørende hvilke sammenhænge et allerede etableret begreb er knyttet til.
Endelig regnes en kontekstualiseret undervisning for at være motiverende og lette læringen, hvis konteksten er bekendt for eleven, eller kan gøres bekendt for eleven. Men heri ligger to dilemmaer indbygget.

Det ene dilemma består i, at kontekstualisering såvel kan gøre det lettere som sværere at lære matematik:
A. Det kan være motiverende og være en hjælp til eleverne, når de skal kreere strategier, og når de skal foretage læring af begreber.
B. Men der er risiko for at en stærk knytning til en kontekst kan ødelægge mulighederne dels for transfer til andre sammenhænge, og dels for en videre abstraktionsproces. [27]

Det andet dilemma består i, at elever i en given skole eller klasse ikke er ens og ikke har samme interesser og kendskab til en given kontekst. Det er således ikke sikkert, at de samme former for kontekstualiseringer tilgodeser alle elevers behov for motivation og støtte.

2.H DISKURSIV PRAKSIS

Der er to problemstillinger som kontekstualisering som teorielement er blind for:
A. Den ene problemstilling vedrører, *på hvilken måde* en given kontekst er bekendt for eleven. Hvad vil det sige, at eleven kender til konteksten? Hvad med de sammenhænge elevernes kendskab om konteksten er bundet i?

---

[27] *Dette dilemma var en af de problemstillinger, der blev taget op af fra diskussionsgruppen "Meaningfull contexts for school mathematics", PME 15, Assisi juli 91, hvor der blev arbejdet ud fra det synspunkt, at undervisningen skal vekselvirke mellem at dekontextualisere og rekontextualisere det faglige indhold.*

B. Den anden problemstilling vedrører kunstigheden i skolesituationen. Hvilke betydning har det at inddrage elevernes egen livsverden i skolen, bruge matematik på den, og bl.a. bruge den til at give bedømmelser og karakterer med?

Det er langt fra sikkert, at eleverne udnytter deres egne erfaringer om konteksten, og det kan være vanskeligt for elever at regne anvendelses-opgaver, der handler om forhold, de kender til, og som muligvis er taget op i den foregående undervisning. Hvordan det kan være, kan man ikke kaste lys over ved hjælp af teorielementet kontekstualisering.

Såvel Jean Lave's som Valerie Walkerdine's arbejder tilbyder derimod forklaringer på, hvorfor det kan være andre typer stumper af viden, der aktualiseres og accentueres af den præsenterede kontekst end dem, læreren forestiller sig. Jean Lave gør det ved, at tale om erkendelse som bundet til situationen, den er skabt i, hvilket hendes begreb "situated cognition" indfanger. Mens Jean Lave har studeret forhold *uden for skolen*, så har den engelske psykolog Valerie Walkerdine sammenlignet forhold inde i skolen og uden for skolen. Walkerdine bruger teorielementet "diskursiv praksis" i sin sammenligning.[28] [29]

Eksempelvis har hun sammenlignet 4–5-årige børns samtaler med deres mødre og med deres pædagoger. På trods af, at der er begreber i daglig-

---

[28] *Valerie Walkerdine var i halvfjerserne optaget af generelle spørgsmål inden for cognition og udviklingspsykologi. Gennem firserne var hun leder af forskningsenheden "The Girls and Mathematics Unit" på Institute of Education på University of London, som foretog omfattende empiriske studier. Desuden skrev hun Walkerdine, Valerie (1988) "The Mastery of Reason. Cognitive Development and the Production of Rationality", Routledge, London.*
Valerie Walkerdine er inspireret af Foucault, hvorfra hun har arvet to karakteristiske interesser:
1. En interesse for at forstå baggrunden for, at et samfund og dets medlemmer opfatter noget som normalt eller naturligt og andet som unormalt eller unaturligt, og for at forstå, hvorledes der er knyttet magt til normalitetsopfattelsen.
2. En interesse for, hvordan det normale og det unormale leves. Ikke for at bedømme og hierakisere, men for at beskrive og forstå.

[29] *Paul Dowling (1991) "Gender, Class and Subjectivity in Mathematics: a Critique of Humpty Dumpty", For the Learning of Mathematics 11, 1, s. 2–8 er et eksempel på en analyse af køn og klasse, inspireret af Foucault og af Walkerdine.*

dagen, der har samme begrebsnavne som begreber, der arbejdes med i de pædagogiske institutioner, er der afgørende forskelle mellem indholdet i dagligdagens begreber og indholdet i de pædagogiske institutioners begreber. Med lingvistiske betegnelser kan man sige, at de to verdeners "signified's" er forskellige, selv om deres "signifier's" i nogle tilfælde er ens.

Det gælder f.eks. for begreber som mere og mindre, en masse og lidt, stor og lille, sød og salt. I undervisningen er det hensigten at børnene lærer begreberne "mere" og "mindre" som hinandens modsætninger, og man forudsætter, at man kan bygge harmonisk ovenpå børnenes erfaringer fra hjemmet.

Forudsætningen holder ikke, siger Walkerdine, for i hjemmet optræder "mere" i et andet modsætningsforhold. "Mere" står ikke i modsætning til "mindre", men til "ikke mere". Når et barn hjemme bliver spurgt, om det vil have mere mælk, svarer barnet aldrig "nejtak, jeg vil gerne have mindre". Barnet svarer enten :"jatak, jeg vil gerne have mere" eller "nejtak, jeg vil ikke have mere". Begrebet "mere" har et ganske andet indhold hjemme end i skolen: Hjemme indgår begrebet i reguleringen af adfærd, der har med konsum at gøre, i skolen indgår begrebet i kvantitative sammenligninger. [30]

På samme måde kritiserer Walkerdine brugen af familietermer i matematikundervisningen. Hun påviser, hvorledes børns egen oplevelse af "Historien om Guldlok og de tre bjørne" leder til nogle andre begreber end de begreber, som man i undervisningen vil bruge historien til. I undervisning er det en intention, at eleverne indser et ordnet størrelsesforhold mellem bjørnenes stole og senge "STOR - MELLEM - LILLE", der bygger på at børn er mindre end mødre, der igen er mindre end fædre. Det er også intentionen at eleverne skal indse en modsætning mellem "SALT og SØD", hvor faderens grød er for salt for Guldlok, moderens er for sød, men bjørneungens grød er tilpas. Igen antages det uden nærmere overvejelse, at intentionerne ligger i harmonisk forlængelse af børnenes egne oplevelser og erfaringer. Men måske oplever børn ikke virkelighedens fædre som større end mødre - det være sig fysisk eller psykisk, og måske har børnene aldrig oplevet at en grød kan være for sød.

---

[30] *Begrebet "mere" kan ligeledes ligge koblet sammen med stærkt følelsesladede meddelelser eller meninger. "Much wants more" kan være arbejderklassemoderens besked til sin datter.*

Leger eleverne købmand i en matematiktime, så kan det for eleverne være grundlæggende forskelligt fra at handle ind, og det kan også være grundlæggende forskelligt fra at regne matematik. Nogle børn vil gå ind i en forestillingsverden med dem selv som rige, hvor det er rigdommen som fænomen, der giver situationen fylde. Voksne har ingen umiddelbar viden om, hvilken mening børnene lægger i aktiviteten. Vi kan hverken forudsætte, at børns oplevelser af en situation er ligesom den voksnes eller at den er "på vej til at blive det". Vi kan heller ikke forudsætte, at en gruppe børn vil lægge den samme mening i en aktivitet. Det kan være kraftigt socialt influeret.

Walkerdine sætter spørgsmålstegn ved drømmen om en matematikundervisning som en harmonisk fortsættelse af små børns begrebsdannelser fra deres hverdag uden for undervisningen. Er det rimeligt at forestille sig skolematematik som "naturlig" forlængelse af barnets "naturlige udvikling"? Er det nu også korrekt, at en kontekstualiseret matematikundervisning giver hvert barn mulighed for at erfare glæden ved opdagelse? Er det nu også korrekt, at man kan øge børnenes fornøjelse ved matematik samtidig med at deres tillid til egne mentale kræfter vokser, som det bl.a. formuleredes i 1965 af "The School Council"?

Walkerdine foreslår, at vi opfatter matematik som en særlig diskurs, som ikke er identisk med nogen hverdagsdiskurser. Heller ikke selv om man søger at forbinde den med en "hverdags"-kontekst eller med kendte eventyr.

Walkerdine's teorielement "den diskursive praksis" kaster – ligesom kontext-begrebet – lys over, hvorledes matematiks generelle natur kan give læringsvanskeligheder. Men mens kontext-begrebet ikke gør opmærksom på at den voksnes forestilling om barnets forestillingsverden ikke nødvendigvis er korrekt, påpeger diskurs-begrebet at det afgørende er hvilken mening *eleverne* lægger i en aktivitet.

Dermed bliver det afgørende at undersøge, hvorledes fællesskabet i klassen, samværet mellem lærer og elever håndterer eventuelle forskellige tydninger af undervisningens indhold. Er der tydninger, der anses for at være "normale", mens andre anses for at være "unormale"? Overses nogle elevers tydninger? Stigmatiseres de?

2.I OPSAMLING og DISKUSSION

Teorielementerne "uhensigtsmæssig hverdagsviden om matematik og om læring af matematik", "læringsrationale" og "metaforer" tilbyder for–

klaringer på læringsproblemer, der kan forekomme vanskelige at opdage og diagnosticere, eller som kan virke overraskende på læreren. Det kan være situationer, hvor læreren forventer, at eleven kan regne det pågældende. Måske aner eleven ikke, hvordan arbejdet skal gribes an, og går ikke igang. Måske arbejder eleven ihærdigt på et galt spor og får gale resultater, uden at have mistanke om, at der er noget galt.

I den foregående præsentation af disse teorielementer var der mange eksempler på hverdagsviden, der forhindrer læring af matematik. Der ligger således indbygget et optimistisk budskab: hvis man bliver bevidst om forhindringerne, har man måske fundet årsager til ellers uforklarlige læringsproblemer.

Med teorielementet "A-klumper og B-strukturer" splittes studiet af hverdagsviden i to dele: Hverdagsviden kan optræde i en A-klump og øve metaforisk indflydelse, eller hverdagsviden kan påtræde i en B-struktur og dermed være afgørende for, hvilke metaforer der aktiveres.

Elevers opfattelser kan være meget resistente. Opfattelserne er logisk sammenhængende, selv om det kan være en anden slags logisk sammenhæng end den matematikkyndiges. Der er ikke nødvendigvis særlig langt mellem fejl og geniale påfund - begge er udtryk for kreativitet, og der findes ikke læring uden kreativitet. Læring er aldrig en præcis reproduktion. [31] Det er tilsyneladende muligt i et samarbejde mellem eleven og forskeren at få sprogliggjort - i hvert fald dele af - elevens logik.

Ifølge teorielementerne primær og sekundær intuition er intuition en nødvendig del af mental adfærd. Intuition giver oplevelsen af sikkerhed. Det er måske derfor, at opfattelser kan være meget vedholdende, og vanskelige at erstatte med ny viden. Primær intuition udvikles uden for

---

[31] *Lærere og forskere har let ved at anerkende det kraftfulde i elevers tænkning, når den resulterer i noget uventet brugbart. Så siger man, at den pågældende elev har en usædvanlig fin indsigt. Men når denne personlige måde at tænke på ikke fører til det, som læreren eller forskeren opfatter som essentielt, så siger man, at eleven har gjort en fejl, regnet forkert. Det gælder imidlertid, at : "In fact, both cases have much in common - particularly the fact that the ideas in the student's mind are not those which the teacher expected." (side 205/fremhævningen er Davis' og Werners) i Werner, Tage & Davis, Robert B.(1986) "Observing students at work" s.205-241 i Christiansen, B. & Howson, A.G. & Otte, M. (eds) (1986) "Perspectives on Mathematics Education. Papers Submitted by Members of the Bacomet Group", Dordrecht, Reidel i serien "Mathematics Education Library".*

skolen, mens sekundær intuition skabes gennem den faglige fordybelse og læring i skolen. Med teorielementet sekundær intuition får vi præsenteret hverdagsviden, der ikke kun indgår i læring som en forudsætning for læringen, men også som et resultat af den.

Det er også resultatet af læringen, der beskrives i teorielementet synkretisk matematik. Eleverne kombinerer deres hidtidige fond af viden med skolens tilbud om læring. Medmindre de direkte forhindres: Kombinationen kan ødelægges ved at lægge overdreven vægt på formalismer og algoritmer.

Mens de seks første teorielementer belyser forhold i den enkelte elevs læring, tilbyder teorielementerne kontekstualisering og diskurs indsigt i undervisningssituationen.

Spørgsmål, der må belyses empirisk

Det er min vurdering, at teorielementerne kan belyse matematiklæring for alle alderstrin. Da unges matematiklæring generelt betragtet er ringe belyst, har jeg valgt at fokusere de enmpiriske undersøgelser her. Læring i forbindelse med begreber som funktion, grænseværdi og sandsynlighed er således langt mindre undersøgt end begreber som addition og multiplikation. Det er rimeligt at antage, at mange af læringsfænomenerne, der er klarlagt gennem forskningen i mindre børns læring, går igen i unges læring. Det gælder for eksempel fænomenet, at specielle eksempler kan optræde som prototyper, og at disse eksempler og ikke definitionens større rummelighed danner elevens conception.

Næsten alle empiriske undersøgelser ser hverdagsviden som en hindring for læring. Det er et spørgsmål, hvorvidt årsagen er at undersøgelserne ikke har haft fokus på mulige produktive effekter af hverdagsviden, at det kræver andre metoder at øjne det produktive, eller at der reelt ikke eksisterer noget potentielt produktivt i hverdagsviden. Der er undersøgelser og debat omkring elevers hverdagsviden som potentialer for undervisningen i tal, addition, multiplikation og brøker, men ikke vedrørende mere avancerede begreber. Det tyder for eksempel på, at elever (i 4.klasse) er i besiddelse af hverdagsviden, der gør dem i stand til at regne med brøker, når konteksten er et kendt virkelighedsområde, og tilsvarende for elever (i 2.klasse) vedrørende subtraktion. [32] Der er

[32] *Leinhardt, Gaia (1988) "Getting to Know: Tracing Students' Mathematical Knowledge From Intuition to Competence", Educational Psychologist, 23(2), 119–144.*

ligeledes påvist hverdagsviden, der kan optræde som en basis for at forstå matematiske symboler og regneregler.[33] For mere avancerede begreber er det eksempelvis påvist, at elever i løbet af læringen udvikler sekundær intuition om funktionsbegrebet, og det er foreslået, at undervisningen fokuserer på den sekundære intuition og tilstræber at understøtte den. [34]

Det er relevant at undersøge, hvorvidt de nævnte undersøgelsesresultater kan generaliseres til danske forhold, til unge og til læring i tilknytning til mere avancerede begreber, og det er relevant at undersøge, hvorvidt de nævnte teorielementer kan oplyse danske forhold, unge og læring af mere avancerede begreber.

De udvalgte teorielementer belyser ikke "anvendelsen af naturligt sprog i den matematiske diskurs", og det bliver muligvis stadig mere påtrængende, jo mere avancerede begrebsdannelser, læringen sigter på. Eksempelvis kan termen "grænseværdi" føre med sig, at elever får opfattelsen af, at det er som en fysisk grænse, som ikke kan overskrides. Der kan ikke siges noget generelt om, hvorledes anvendelsen af sproglige termer, der er hentet fra andre områder indvirker på læringen, kun at det kan indvirke, og at det må undersøges nærmere i forhold til konkrete begreber.

---

[33] *Hiebert, James & Wearne, Diana (88) "Instruction and Cognitive Change in Mathematics", Educational Psychologist, 23(2), s. 105-117. Mack, Nancy K. (90) "Learning Fractions with Understabdibg Building on informal Knowledge", Journal for Research in Mathematics Education, 21, 1, s.16-32.*

[34] *Dreyfus, Tommy & Eisenberg, Theodore (1982) "Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions", Journal for Research in Mathematics Education, 13, 5, s.360-380.*

KAPITEL 3. EGEN EMPIRI

Jeg har gennemført to empiriske undersøgelser. Den første er en pilotundersøgelse med interviews af 14 elever på 5 forskellige gymnasieskoler. Formålet var at få informationer om elevers egne kriterier for forståelse, deres erfaringer med aha-oplevelser og deres vurdering af hverdagsviden's rolle for læringen. I den anden undersøgelse, som er den egentlige undersøgelse, fulgte jeg 4 elevers læringsproces i matematik i de første 4 måneder af gymnasiets 1.g for at få informationer om læringen, *mens* den foregik. Formålet var at tilvejebringe dybtgående kendskab til elevers faktiske læring i en ordinær undervisning. Kendskab såvel til elevernes egne sproglige beskrivelser og vurderinger af deres læring, (både retrospektivt og *mens* den foregår), som til elevernes faglige forståelser og færdigheder. Jeg udviklede hertil en særlig metode, som jeg kalder "Interviewing Students at Work".

Fortabelse og blinde vinkler

Den fagkyndige voksne har "fortabt viden" og har "blinde vinkler", og det må eksplicit overvejes, når man tilrettelægger en undersøgelse.

Fagkyndighed opfattes oftest som udtryk for, at man har forøget sin viden. Tilegnelse af ny begrebsmæssig viden sker med individets hidtidige viden som reference. I visse tilfælde omorganiseres den gamle viden på en så kraftig måde, at det opleves som om den gamle viden er væk: Når man eksempelvis har lært, hvad en ligning er, er der risiko for, at man samtidig taber den forståelse, man havde forinden. Det kan være vanskeligt, måske umuligt at opleve og forstå, som man gjorde, inden man havde lært ligninger at kende. Læringsprocessen er dermed irreversibel, og "læring af nyt" indebærer en *samtidig "fortabelse* af noget gammelt".

Tilegnelse og videreudbygning af matematiske begrebsstrukturer kan indebære forandringer af tidligere viden og strukturer. Det betyder, at læreren, der har tilegnet sig begrebsstrukturen, ikke på samme tid "er i besiddelse af" en elevforståelse. Der er således en gensidig balance i elev-lærer-forholdet, som ofte negligeres i teoretisk og praktisk debat: Ganske vist er det almindeligt kendt, at *eleven ikke kan vide*, hvad lærerens forståelse består i, men det er langt mindre anerkendt, at *læreren ikke kan vide*, hvad elevens forståelse består i. Der kan dog være undtagelser, idet læreren i sin hukommelse kan have lejret særlige læringssituationer, som af den ene eller anden grund har gjort et særligt indtryk.

Lærerarbejde indebærer desuden en række blinde vinkler, fordi *læreren er vant til* at stille spørgsmål, som hun/han i forvejen kender svaret på. *Læreren er vant til* at vurdere elevernes svar, hvor læreren indplacerer elevsvar, der adskiller sig fra lærerens eget svar, på en skala fra "helt forkert" til "helt rigtigt". [35] Læreren får derimod ikke optrænet sin kompetance i at stille spørgsmål, der kan opklare elevens tankegang, eller sin kompetance i at lytte til eleverne for at få informationer.

De blinde vinkler i lærerjobbet er en latent risiko i en forskning, hvor den matematikfagkyndige forsker er med i tilrettelæggelse af undervisningen. Det er vanskeligere for forskeren at sætte sig i elevens sted, hvis hun/han selv har været med i den faglige tilrettelæggelse, eller selv fungerer som lærer eller hjælpelærer.

Det er af afgørende vigtighed at kunne træde udenom de blinde vinkler, og man må udvikle metoder, der giver betingelser for at få øje på elevernes tankemåder. Jeg søgte at opnå dette ved
- at lade være med at deltage i tilrettelæggelsen af undervisning,
- at lade være med at øve indflydelse på, hvad undervisningen skulle omhandle, eller hvad der skulle lægges vægt på,
- at lade være med på forhånd at fokusere på en enkelt disciplin eller på særlige begrebsstrukturer,
- at lade være med at deltage i undervisning. I interview-situationen underviste jeg dog, når jeg ikke kunne finde på andre måder at få informationer om elevernes tankegange på, end ved at lytte til deres reaktioner på min undervisning.
-at lade eleverne få mulighed for at tage initiativer undervejs i interviewene. Eleverne fik mulighed for selv at stille spørgsmål, og for selv at foreslå emner og spørgsmål til fælles diskussion.

Jeg fortalte eleverne, at de var nødvendige informanter. Jeg fortalte fra begyndelsen eleverne - og gentog det senere, hvis det syntes relevant, - at jeg ville observere og stille spørgsmål, fordi der var noget, jeg ikke vidste, at man ikke kunne finde svar i litteraturen, og at der ikke på forhånd eksisterede mulige svarkategorier, så det var ikke muligt at foretage kvantitative undersøgelser.

3.A DESIGN FOR FØRSTE DEL

---

[35] *Måske gælder dette i endnu højere grad for matematiklærere end for lærere i andre fag ?*

Den første undersøgelse havde et enkelt og overkommeligt design med korte interviews af i alt 14 elever på 5 forskellige gymnasieskoler i Københavnsområdet i 5 1.g. og 2.g.klasser i matematisk afdeling. Tre elever "tænkte højt", mens de løste opgaver. Undersøgelsen fandt sted inden for fem uger i marts og april 1989. Interviews og tænke-højt-eksperimenterne blev optaget på bånd. Så godt som alt på båndene er skrevet ud.

Jeg interviewede to elever samtidig, for at de kunne inspirere hinanden og genopfriske hinandens hukommelser. Dobbeltinterviewene var af ca.20 minutters varighed og foregik inde i skolen, men uden for klasseværelset. "Tænke-højt"-eksperimenterne foregik i klasseværelset. Jeg var tilstede i én time i klassen, og i den efterfølgende time interviewede jeg. Besøgene var ikke planlagt lang tid i forvejen, og i to af de fem klasser, jeg besøgte, bad jeg ikke læreren om lov til at komme, før aftenen forinden.

Ved den første skole blev intervieweleverne valgt ved lodtrækning. Ved tre af skolerne udvalgte jeg tilfældigt mellem eleverne, der meldte sig frivilligt, og på én skole havde læreren valgt ud på forhånd, fordi interviewet af skematekniske årsager kom til at ligge *inden*, jeg overværede timer i den pågældende klasse. Elevernes interesse og formåen med hensyn til at udtale sig overgik min forventning. Der var ingen forskel på talelysten hos de elever, der blev lodtrukket og de, der meldte sig selv.

De 14 elever på de fem skoler fordelte sig ligeligt mellem de to køn. Der var tre par med en dreng og en pige, to par med to piger og to par med to drenge. Også lærerne fordelte sig ligeligt med to af det ene køn og tre af det andet. Eleverne, der tænkte højt var ligeledes af begge køn.

Undersøgelsen havde 3 områder i fokus:
- elevers egne kriterier for forståelse
- elevers erfaringer med aha-oplevelser og
- elevers vurdering af hverdagsviden's rolle for læringen.

3.B RESULTATER

Elevernes forståelseskriterier

Hvilke kriterier bruger eleverne selv for, hvornår de har forstået et matematisk begreb elller en matematisk operation?

Hvilke processer mener eleverne er nødvendige og/eller typiske som optakt til forståelsen?
Er der karakteristiske forhold ved måden, eleverne formulerer sig på om disse forhold?

Der er tydeligvis to grupper af elever med to forskellige forståelseskriterier. Nogle elever er ikke i tvivl om, hvorvidt de er nået til forståelser eller ej, mens andre skal have at vide af andre, om de har opnået forståelse.

Elever, der ikke i tvivl om, hvorvidt de er nået til forståelse eller ej, har deres egne individuelle kriterier, som for eksempel: [36]

> F: "Jeg ved, at jeg har forstået det, når jeg kan forudsige, hvad læreren vil skrive på tavlen, før han skriver det".
> G: "Det er også en god ide at lukke bogen, efter at du har læst det, og så lige prøve at forklare for dig selv, hvad er det her. Hvis du så opdager, jamen jeg forstår slet ikke det her, så giver det et skub, nej, nu må du virkelig sætte dig ind i tingene. Du kan ikke engang forklare det for dig selv, du har jo lige siddet og læst det......Jeg prøver på at forklare det for nogen. Det er ligegyldigt til hvem, min plante f.eks. Hvis man kan forklare det til andre, så har man virkelig også forstået det."
> H: "Jeg kan også godt mærke det der, at hvis du er i tvivl, om du forstår det, så er det fordi, du ikke forstår det, det er ikke klart, hvad det vil sige ikke at forstå, men når du forstår, så forstår du det også."
> I: "Mener du, at så føler du dig helt sikker på, at du forstår det?"
> H: "Hmm (bekræftende),ja. Der er altid et eller andet, der dæmrer, selv når du ikke forstår det. Men det er så besværligt, dobbelt så besværligt som ellers."

Der er ligeledes eksempler på kriterier på mangel på forståelse, som i det følgende citat om differentialregning:

> "Jeg kan godt sætte mig ned og gøre det, men jeg forstår fandme ikke, hvad det handler om. Grænseværdi og asymptoter er sådan noget, der svæver rundt højt oppe et sted."

Om logaritmefunktioner hedder det fra to studerende:

> E: "Men tag nu f.eks. sådan noget som logaritmer. Det er en vigtig funktion, men hvad er det i virkeligheden?"

---

[36] *I citater fra egne empiriske undersøgelser angiver I, at det er intervieweren der citeres. Elever er angivet ved andre store bogstaver.*

D: "Ja, det er ikke noget, man lærer. Det er ikke noget, man får lov til at forstå. Man skal bare vide, at det trykker man ind på en lommeregner, og så får man de tal ud. Man lærer ikke at forstå, hvordan man egentlig i hovedet kunne regne det ud, sådan rigtigt, og hvordan man kunne bruge det til nogle andre ting, som man ikke har lært, altså hvordan man kunne forestille sig, det kunne bruges."

Ingen af disse elever tror, de kan få forståelsen overrakt fra andre, heller ikke fra læreren. De giver derimod udtryk for, at de selv skaber forståelsen. Eleverne nævner
- *opdagelse af sammenhænge,*
- *analogier fra andre dele af matematikken,*
- *analogier fra forhold uden for matematikken,*
- *træning og*
- *selvstændig sproglig formulering*

som processer, der kan lede til forståelse.

I modsætning hertil er der andre elever, der fortæller, at de har brug for at få at vide af andre, om deres forståelse er OK. De tør ikke tro på deres egne fortolkninger. Jeg citerer:

A: "Narj, men så tror jeg, - jeg er så usikker på det fag, eller har i hvert fald været det, - så jeg tør ikke tro på, at jeg har fattet det. Narj, det kan ikke være rigtigt, siger jeg om mine egne beregninger."

I: "Der er altså nogen, der skal sige til dig, at det er rigtigt, det du gør, og at du har forstået det, for at du tror på det?"

A: "Ja, eller jeg skal kunne se det et eller andet sted - i bogen f.eks. Der er ligesom kun éet svar, man kan ikke snakke sig fra det."

Nogle siger endog, at de ikke tør forsøge på at forstå, men i stedet koncentrerer sig om at lære udenad, som eleven B i den følgende dialog med en anden elev. Jeg citerer:

B: "Derfor kan logikken i det være så besværlig."

A: "Jeg har aldrig været særlig meget for udenadslære. Jeg har det bedst, hvis jeg kan finde en eller anden logik i det: Nåhh er det derfor! Og der ikke bare er en eller anden, der står og siger: "det ER sådan"."

B: "Jeg kan bedst, når det er den anden vej."

A: "Det kan jeg altså ikke."

B: "Det er nok fordi, man har haft så svært ved det. Så tænker jeg, hvis nu jeg bare lærer det, som det er, så kobler man det

> ind, og så husker man det. Hvis jeg skal tænke selv, så kan man bare sidde og kigge på de der f af x'ere, der render rundt mellem hinanden, og så kigger man ned på det, og så tænker man: Dét her kan jeg ikke."

Den sunde fornuft slås fra

I visse tilfælde er det som om, eleverne hænger deres sunde fornuft uden for på gangen sammen med overtøjet, inden de træder ind i matematiktimen. Jeg citerer:

> "Der er nogle, der har det sådan, at lige så snart det er noget, der hedder matematik, så ser de ikke fornuftigt, så kan de slet ikke tænke fornuftigt, og så sidder de bare og tænker, jamen, det skal være svært, og nu er der 117 regler. F.eks. i dag, der sad vi og skulle trække nogle tal fra hinanden, og hende jeg sad ved siden af, hun sad på lommeregneren og trak femtusind fra tretusind. Jeg sagde: "Hvad ER det, du laver". "Nå, ja, det er jo totusind", sagde hun så. Hvis man havde spurgt hende, nu har du femtusind, og så bruger du tre, så ved hun det godt, ikk'. Men ligeså snart, det hedder matematik, så sidder hun bare brbrbrbrbrb, og taster ind på lommeregneren, selv om det jo er nemme tal at overskue." (Det er mit gæt, at eleven mener "trak tretusind fra femtusind", men får sagt det forkert.)

Der er risiko for at huske forkert, når regler kun er formuleret på symbolniveau: En elev mener, at fordi funktionsværdien af nul er otte, $f(0)=8$, så må det pågældende andengradspolynomium have to rødder. Det er korrekt, at der er "noget" i forbindelse med andengradspolynomier, der kan fortælle, hvorvidt der er ingen, en eller to rødder. Og det er korrekt, at det netop er, når dette "noget" er større end nul, at der er tale om to rødder. Men dette "noget" er ikke funktionsværdien af nul, $f(0)$.

Nogle elever opererer tilsyneladende med en symbolernes verden med egne love og med vandtætte skodder til andre verdener. Der er ikke knyttet nogen assimilations-paradigmer til de symbolske regler, og dermed er eleverne henvist til at lære de symbolsk formulerede regler udenad.

Aha-oplevelser

Giver eleverne udtryk for, at de selv har haft aha-oplevelser, som har at gøre med særlige "pointer"?
Mener eleverne, at disse "pointer" eksisterer?

Giver eleverne udtryk for, at der er særlige følelser involveret i aha-oplevelserne?

Det er min tese, at aha–oplevelser indeholder to væsentlige karakteristika, som generelt gør dem interessante at studere:

1. De angår et af "mysterierne ved pædagogisk arbejde". De indeholder nogle af de kreative elementer i læringsprocessen, som læreren ikke kan forudsige, men kan blive overrasket over. Der kan opstå situationer, hvor en elev for eksempel siger "årh, er det ikke andet", "hvor er det smart" eller "det ku' du da bare ha' sagt med det samme", men hvor læreren er sikker på, at hun/han HAR sagt det.
2. Samtidig er aha–oplevelser overskuelige og afgrænsbare fænomener, så det er muligt at kommunikere med andre om dem med en vis sikkerhed for, at man taler om det samme og tænker på det samme.

Indeholder aha–oplevelser en særlig faglig kvalitet?

Aha–oplevelser er oplevelser, hvor man pludselig fatter noget, man ikke fattede før. Man får en ny erkendelse, der strukturerer det rodede billede, der fandtes inden aha–oplevelsen. Men i hvilken forstand rækker den nye erkendelse fremad? Kan erkendelse ligeledes strukturere det videre forløb med dets nye rodede indtryk. Hvis det er korrekt, at sådanne aha-oplevelser peger fremad, så ville man med en matematikfaglig kompetance kunne give kvalificerede gæt på aha–oplevelsernes indhold. Indholdet ville nemlig svare til elementer i læseplanen, der indebærer "begrebsmæssige spring": Eksempelvis når eleven for første gang forstår meningen med en ligning, eller for første gang indser, at der eksisterer funktioner, der ikke er lineære.

I interviewene giver eleverne udtryk for, at læringen ikke foregår som på en jævn slette. Det er et ujævnt terræn med bakker og dale. Eleverne kunne imidlertid ikke præcisere, hvad den nye erkendelse bestod i, udover at de pludselig kunne noget, som de ikke kunne før. Hvorvidt disse pludselige forståelser rækker videre og er produktive for den videre læring, kan derfor ikke afgøres på baggrund af undersøgelsen.

Indebærer aha–oplevelser særlig stærke følelser?

Matematiklæring involverer ikke alene viden og erkendelse og handlingsmønstre, men også følelser. Er der i aha–oplevelser en kobling mellem viden og følelser. Følges aha–oplevelsens fornyede viden af følelser som glæde, opstemthed, overraskelse?

Det er i overensstemmelse med litteraturen, at der eksisterer særlige øjeblikke i læringsprocessen med særlig stærke følelser. Mandler [37] har i forbindelse med emotion og matematisk problemløsning peget på, hvorledes det emotionelle tidligere er blevet behandlet med en makroanalytisk tilgang, som de seneste år har tabt terræn til fordel for en mikroanalytisk. Tidligere har man studeret, hvorledes en række følelsesmæssige faktorer hos personer samvarierer med personernes præstationer i forbindelse med forskellige typer af opgaver. Mandler har selv arbejdet med denne tilgang i halvtredserne og tresserne. *Den mikroanalytiske tilgang*, der aktuelt vinder frem, studerer ikke personers facitter på problemløsninger, men studerer *særlige steder* i personernes arbejde med at nå hen til et facit. Jeg citerer:

> "..it is possible to identify specific kinds of discrepancies and interruptions that may occur in the course of problem solving, in general, and in mathematical reasoning and learning, in particular." (s.12).

Mandler taler om to typer af særlige øjeblikke eller situationer: Fejl og succes. Fejl kan føre til negative følelser, succes til positive følelser. Der kan i begge tilfælde enten være tale om "noget ikke-forventet" og om "noget forventet". Ved succes er der kun stærke følelser involveret ved det uventede, såsom "Jeg prøvede fordi jeg ikke kunne finde på andet, og det virkede !" [38] Aha-oplevelser er netop uventede succeser.

Interviewene bekræfter, at at der eksisterer steder i læringsprocessen med særligt stærke følelser. Flere elever fortæller, at de har oplevet øjeblikke med følelser med lettelse, glæde, klarhed, opstemhed, hvor de forinden følte forvirring og ubehag. Jeg citerer for at illustrere:

> C: I starten er det kaos, det der står på tavlen, men når man så selv er kommet lidt ind i, hvordan man egentlig arbejder sig frem, og måske så finder ud af, hvordan man selv kan arbejde

---

[37] *Indledningskapitlet Mandler, George (1989) "Affect and Learning: Causes and Consequences of Emotional Interactions" s.3-19 i McLeod,-Douglas B. & Adams, Verna M.(ed) "Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective", Springer Verlag, New York.*

[38] *Ved fejl kan der derimod - ifølge Mandler - være stærke negative følelser både ved det forventede og det ikke-forventede: Eksempelvis når beregninger forløber som forventet, og personen ikke selv aner uråd, men får at vide af læreren, at det er galt. Det kan også være, at beregningerne ikke forløber som forventet, og personen bliver overrasket over, at det han/hun troede var korrekt, ikke var det.*

sig stille og rolig frem, så *lige pludselig* så finder man selv en teknik, og så virker det som om, *der går et lys op for én. Nåh, ja, så kan man jo bare* gøre sådan og sådan lynhurtigt. Nu i differentialregningen synes jeg tit, når vi bliver præsenteret for en ny formel, at der er noget sammenhæng, men man kan ikke helt se, hvad det er,

D: *man kan mærke, der er et eller andet*, man ikke kan finde ud af,

C: men så lige pludselig så skriver man formlen, så siger man, nå ja, gud, hvor var man dum, *så tænker man fedt*, og så går det lynhurtigt resten.

D: Nu er der ingen aha-oplevelser. Men flere andre gange...I starten af cosinus havde jeg ingen lommeregner, og derfor kunne jeg ikke forstå det. Men så i efterårsferien opstillede og regnede jeg selv nogle opgaver, *og så forstod jeg* det. Med asymptoter sad jeg bare og kiggede, og så den allersidste dag *gik det op for mig. Jeg kunne mærke, at lige pludselig* kunne jeg selv finde ud af, at så går dèn der på dèn måde og alt det sjov....*Det var meget rart*, at jeg vidste, hvad der ville blive de næste skridt i lærerens regninger."

Og fra et andet interview:

"Jeg synes også godt, jeg kender det der med, at *lige pludselig så er det en hel åbenbaring*". (mine fremhævninger)

Hverdagsviden

Tyder det på, at der er hverdagsviden, som fungerer som henholdsvis moskitonet og sommerfuglenet?
Hvad er det i givet fald for en slags hverdagsviden:
- hverdagsviden som baggrund for fagopfattelse eller selvopfattelse?
- hverdagsviden om anvendelsesområder?
- hverdagsviden i tilknytning til assimilations-paradigmer?
Kan aha-oplevelser skyldes,
- at noget hverdagsviden indtil da har forhindret forståelse,
- at der knyttes an til noget hverdagsviden som sommerfuglenet.

Termen hverdag synes hos eleverne at være synonymt med "noget hverdagsagtigt", i betydningen at være bekendt med det i forvejen. Det kan illustreres med følgende citat:

"Det skal helst være noget med hverdagen, så får man det nærmere ind på livet. Man sidder og læser en tekst, og så kan man sidde og læse den 2 gange, uden at man overhovedet får

> noget ud af det, og siger, nej nu må jeg altså lige prøve at koncentrere mig, og så tager jeg et stykke ad gangen og så prøver jeg at *overføre det til noget, jeg kender*, og jeg prøver at udføre nogle andre ting, - altså ikke lige det, der står: Hvis der står, at det kan være på dén måde, så tager jeg en anden måde. Hvis nu man prøver at bruge det på dén måde ovre på den ting, *hvordan kunne man så tænke sig, det ville blive*, ikk, og så forstår jeg det lidt bedre, og så prøver jeg at gå lidt videre, så får man ligesom helheden af det." (mine fremhævninger)

Viden om noget kendt eller hverdagsagtigt kan således optræde som sommerfuglenet, i den udstrækning matematikken kan knyttes sammen med det kendte.

Det er forskelligt, hvad der tæller som hverdagsagtigt for forskellige elever. Det ses i følgende dialog mellem to elever:

> A: Jeg kan bedre forstå logikken, hvis jeg får noget, jeg oplever i hverdagen, så jeg kan overføre det til min hverdag.
> B: For mig behøver det ikke nødvendigvis at være hverdagen, det skal bare være et eller andet, som jeg i forvejen ved, og kan knytte mig til, så jeg kan prøve at sammenligne det med ting, som jeg ved noget om i forvejen, og så kan jeg abstrahere fra det. Det behøver ikke at være et bord eller en stol, det kan også være en trekant, der kan man jo godt føle sig rimelig hjemme.
> I: Mener du, at en trekant kan være lige så konkret og hverdagsagtig som et bord?
> B: Ja.

Jeg formoder, at elev A taler om anvendelser af matematik, og det er således hverdagsviden om anvendelsesområder, der kan fungere som sommerfuglenet for A's læring. B nævner derimod faglige begreber som noget, man også kan *føle sig hjemme i*, og som derfor kan optræde som sommerfuglenet.

Der er bestemt ikke enighed mellem eleverne om hverdagsanvendelsers plads i skolefaget, hvilket ses fra følgende dialog:

> A: Jeg tror, det vil være en god idé, at vi terpede mere i det med tal, for det er jo egentlig talt det, vi skal bruge.
> B: Du skal jo ikke gå ud og sige, at her har vi en mark, der er x meter lang.
> A: Man skal have nogle tal, for det er jo det, man arbejder med.
> I: Hvorhenne? I eksamensopgaverne eller ude i verden?

A: Ja, ude i erhvervslivet. Du hører ikke én kontorassistent, der sidder og taler om eller regner med x kroner, det gør hun ikke, hun har simpelthen de direkte tal fra f.eks. regnskaberne.
B: Selvfølgelig bliver du nødt til at have en funktion med nogle x'er, så du også kan regne med 4 ligeså godt som med 3. Først skal vi have et eksempel, og så bagefter skal vi have det bevist, at det ikke kun gælder for 3-tallet, men generelt,- det ville være rart. Og så bagefter dét, så skal vi sætte en masse andre tal ind.
A: Man ser også mange steder ude i erhvervslivet, de siger, hvad skal vi bruge alt det til, de skal bare kunne plusse og regne. Det kan jeg se, hvor jeg arbejder (i en skoforretning). Når jeg fortæller, hvad jeg laver, så siger de, hvad skal du bruge det til !
B: Det kommer også an på, om du har tænkt dig at stå i en skoforretning.
A: Nej, nej, men et regnskab er nu engang et regnskab!

Muligvis kan elev A's opfattelse af, at skolefagets berettigelse findes i dets relation til bogholderi, virke begrænsende for hendes læring i forbindelse med bogstavregning. Elev B's opfattelse af, at berettigelsen skal findes i det videre uddannelsessystem kan tilsvarende tænkes at virke befordrende.

I materialet er der eksempler på hverdagsviden om hvad matematik er, eller hvad dele af matematik er, der bliver aktiveret i arbejdet med nye specifikke områder. Eksempelvis skal eleverne som en opgave argumentere for, at funktioner for eksponentiel vækst får rette linjer som grafer, når de indtegnes i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem. Her optræder udtrykket:

$$\log y = \log b + x \cdot \log a$$

Eleverne har aldrig set udtryk, hvor der indgår a og b og x og y sammen med logaritmer. Den pædagogiske idè med opgaven er, at eleverne skal bringes til at indse, at det nye udtryk har en strukturel lighed med noget, eleverne allerede kender, nemlig ligningsudtryk for rette linjer i almindelige koordinatsystemer:

$$y = a \cdot x + b$$

En elev, som jeg har bedt om at "tænke højt", tolker opgaven som en ligning, der skal løses, og hun forsøger at finde x. Det kunne tyde på, at eleven aktiverer en viden om ligninger, der lyder *"har du en ligning, da løs den"*. Muligvis er der tale om en viden, der ikke kun vedrører ligninger. Muligvis er der tale om en hverdagsviden om matematik generelt, nemlig at *matematik er at løse opgaver, som andre har formuleret.*

Interviewene indeholder eksempler, der svarer til Schoenfeld's undersøgelser om beviser i geomtri, se kapitel 2.A. Nogle elever er af den opfattelse, at det eneste udbytte man kan få af at arbejde med beviser er at man kan afgøre, hvorvidt den pågældende sætning er korrekt. Jeg citerer:

> B: "Jeg har aldrig været særlig meget for udenadslære. Jeg har det bedst, hvis jeg kan finde en eller anden logik i det: Nåhh, er det derfor! Og der ikke bare er en eller anden, der står og siger: " det ER sådan.
>
> ....
>
> F.eks. tysk, der er bare sådan noget med en masse regler og en masse undtagelser for bøjning af verber, og jeg har et hyr med at kunne huske det....Hvis du kan huske starten af et matematisk bevis, så kan du også bygge videre på det."
>
> I: "Har du eksempler på det."
>
> B: "Regneregler for differentialkvotienter. Hvis du bare kan huske udgangspunktet "f af x minus f af x-nul over x minus x-nul", så kører processen af sig selv. Med mindre der sker noget, jeg ikke synes er logisk. Der var for eksempel et bevis, hvor *du skulle minusse en eller anden ting og sætte den samme ting plus, så det gjorde ikke noget, du satte dem ind, men det er jo ikke rigtig logisk, at de bliver sat ind.* Så kan det selvfølgelig godt blive lidt svært." (Min fremhævning) [39]

Det ses, at elevens opmærksomhed er rettet imod resultatet af beviset. Eleven er tilsyneladende generet af, at hun undervejs i bevisgangen bliver præsenteret for et redskab, som hun ikke kan se anden begrundelse for, end at "det gjorde ikke noget". Hun har ikke oplevet det som relevant, og hun fascineres ikke af det. Det er mit gæt, at hun ikke vil være i stand til at bruge det i andre sammenhænge. Jeg ser to mulige tolkninger:

A. Muligvis mener eleven, at skolematematikkens beviser består i at arbejde sig frem mod en konklusion, som man øvrigt ikke tvivler på er

---

[39] *Jeg har valgt at citere ordret, hvorledes eleverne beskriver matematiske udtryk. Formlen som eleven i dette citat udtrykker i ord er:*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

gyldig. Selve argumentationen i bevisgangen bliver dermed uvæsentlig. Der er risiko for, at en sådan opfattelse kan fungere som moskitonet for læringen, for hvorfor dvæle ved argumentationen og skabe sig indsigt i den, hvis den er uinteressant!
B. Muligvis er eleven alene generet af ikke at have kendskab til, hvordan "nogen" har fundet frem til tricket med "at plusse og minusse".

Jeg har set mange elever, der er mystificerede over bevisers plads i skolefaget. I en time, jeg overværede, spurgte en elev læreren, om det udelukkende var af hensyn til mundtlig eksamen, at de skulle have beviset, som læreren lige havde gennemgået på tavlen. Læreren svarede ikke. Eleven spurgte igen. Læreren svarede ikke. Jeg fik ikke spurgt læreren efter timen, hvorfor han ikke svarede, og jeg fik ikke spurgt eleven, hvordan han havde ment sit spørgsmål. Måske hørte læreren det ikke? Måske opfattede læreren spørgsmålet som en provokation? Måske var det alvorligt ment fra elevens side, at han gerne ville vide, om der er andre typer af nytte, som man kan drage af beviset?

Yderligere resultater

Forståelse og følelser

Eleverne fortæller ikke alene om følelser i forbindelse med aha-oplevelser, eller alene i forbindelse med forståelse, men mere generelt i forbindelse med, hvad eleverne oplever som vellykket eller ikke-vellykket læring. Jeg citerer:

> "Det er dejligt, når man kan".
> "Man føler en eller anden følelse, man bliver lettet. Det er tit, det er surt. Man sidder bare og kigger ned på de der beviser og tænker, hvad pokker er det her. Det er nok fordi, jeg har meget svært ved det i forvejen."

Eleverne fortæller om mange forskellige slags følelser: Glæde, eufori, irritation og udmattethed. Risikoen for at falde fra ligger latent hos flere elever. Der berettes om slid og besvær, men også om, at når det lykkes, så øges lysten til at arbejde videre. Dette er i overensstemmelse med bl.a. Ginsburgs undersøgelse, hvor matematik beskrives som et "hot" fag, og som viser, hvorledes følelser, motivation og personlighed er afgørende for udviklingen af matematisk tankegang.[40]

Læring et socialt fænomen

Mange elever giver udtryk for, at læringen ikke foregår isoleret i den enkelte person. Flere elever fortæller, at deres far har betydning for deres matematiklæring. Interviewene peger på lærerens betydning for læringsklimaet og sætter fokus på, hvilke forskellige kvaliteter, der er ved den hjælp, man kan få af henholdsvis lærer og kammerater. Dette kan illustreres af følgende citat:

> "...Og vi kender hinanden bedre, så vi ved, hvad de andre kan og ikke kan, og vi ved fra os selv, hvordan vi har tænkt. Og så er det også tit, man kan se, at lærer og en anden elev taler forbi hinanden, og så sidder man selv og forstår, hvad den anden elev mener, men man vil ikke kunne forklare for læreren, hvad den anden elev mener."

Eleverne omtaler i øvrigt deres lærere med megen omsorg, og flere af lærerne roses for deres interesse for at hjælpe og for at forklare, og for deres tilrettelæggelse af undervisningen.

Begrebsdannelsen foregår ikke kun i matematiktimerne eller ved den ordinære lektielæsning. Jeg citerer: "Jeg fandt trekanter allevegne, selv i tyggegummiklatter på fortorvet, da vi havde trigonometri. Det var lige før, det blev til en hel mani, så jeg måtte gøre mig umage for ikke at se trekanter - for at få femkanter eller andet ud af det".

Social bagggrund

Denne undersøgelse har ikke nogen makrosociologiske kategorier i sit fokus. Undersøgelsen er ikke lagt tilrette, efter at den skulle kunne sige noget for eksempel om den sociale baggrund som forudsætning for skolelæringen. Men det forhindrer jo ikke, at for eksempel den sociale baggrund "dukker op" i empirien. Dette er tilfældet i et dobbeltinterview med to piger i 2.g. Navnene er opdigtede.

Den ene pige, Anne, er fra en familie, der er bekendt med teoretisk uddannelse. Moderen er lærer, faderen ved jeg ikke noget om. I den anden piges, Britt's, familie er Britt den første, der som gymnasieelev er

---

[40] *Ginsburg, Herbert P. & Asmussen, Kirsten A. (1988) " Hot Mathematics" s. 89-111 i temanummeret "Children's Mathematics", New Directions for Child Development, nr. 41.*

i gang med en teoretisk uddannelse. Både Anne og Britt fortæller, at de oplever mængdelære som absurd, men ellers er det modsætningerne, der dominerer samtalen.

Britt vil gerne terpe, Anne vil finde ud af, hvorfor reglerne virker. For Britt er tallene de vigtige, for de skal bruges, når man engang er færdig med skolen. For Anne har tallene deres plads i gymnasiets matematik-undervisning af pædagogiske hensyn, mens det vigtige er det generaliserbare, og derfor er bogstaverne nødvendige. Anne mener, at læreren er god til at få alle med. Det kommenterer Britt ikke!

Britt bringer den sociale baggrund ind, efter at Anne har fortalt, hvad hun mener med termen logik. Anne går først imod Britts opfattelse, men fanger så tilsyneladende Britt's pointe. Jeg citerer:

> Anne: Ja, der er nogle, der mener, at logik det er bare, når de har fundet ud af det, så de kan huske det, men logik for mig er, at jeg har fundet ud af, hvorfor man gør, det man gør, det er logik for mig. Når man kan se, der en mening med det, man laver, ikk, i stedet for at man bare siger, at sådan er det bare. Det er logik for mig. Når det er indlysende, det man gør. F.eks. at det er dén proces, der bliver brugt.
> Britt: Jeg tror også, det stammer helt tilbage fra, hvad ens forældre har af erhverv. Hvad laver din far og mor, Anne.
> Anne: Min mor er skolelærer.
> Britt: Jamen, at din mor er skolelærer, det kan godt have noget at sige.
> Anne: Det tror jeg ikke. Jeg har spurgt min mor, men hun ved ikke noget om differentialregning.
> Britt: Jeg ved, at én fra vores klasse, hendes far er meget dygtig til matematik.
> Anne: Ja, det kan måske være en inspirator for hende, det er da klart.
> Britt: Ja, måske, men jeg tror, at hvis forældrene i deres erhverv har haft meget at gøre med sådan noget, så arver børnene det. Min far har aldrig været dygtig til regning, og hvis han bare havde kunnet hjælpe mig, fra jeg var helt lille, så havde jeg måske været det klogere i matematik. Hvis jeg havde haft én, jeg kunne spørge. Det har meget at sige, at børn kan spørge deres forældre, hvorfor det er, som det er. Anne: Det kan godt have noget at sige alligevel, nu du siger det. I folkeskolen kunne jeg jo altid gå til mor, og det er også klart, at hvis du har den grundlæggende indsigt, så er det meget nemmere at bygge videre på.

Britt: Jeg tror, at hvis jeg havde haft en mor eller en far, der havde kunnet hjælpe mig, så havde jeg også været bedre i dag. Det kan jeg da se på andre i klassen. Når forældrene ved noget mere om de begreber, så er børnene også det klogere. Ikke dermed sagt, at forældrene er højere, altså tjener flere penge."

Kritik

Det er bemærkelsesværdigt, så uddybet eleverne er i stand til at formulere sig om, hvordan de arbejder. Alle elever har vist interesse for at tænke over og formulere sig om deres egen læringsproces, og nogle elever var eller blev endog meget engagerede. Det var min fornemmelse, at de også selv fik udbytte af at deltage, men det har jeg ikke gjort noget for at undersøge nærmere. I min bestræbelse på at få interviewet til at ligne almindelig kommunikation, kom jeg af og til med mine egne kommentarer og lod mig opfange i situationen; men eleverne lod sig tydeligvis ikke påvirke af mine kommentarer, kun af mine spørgsmål. Dette tager jeg som udtryk for, at de var optagede af de emner, der er på dagsordenen. *Dobbeltinterviewet som metode* virkede tilsyneladende efter hensigten. Eleverne brugte tilsyneladende hinanden konstruktivt.

Det var givende, at forundersøgelsen bestod i *et stort antal interviews med tid imellem* til en første bearbejdning af de båndede interviews, og med tid til at overveje og forbedre spørgeteknikken.

Resultaterne pegede på, at den egentlige undersøgelse skulle give *mere tid til den enkelte elev*. Det viste sig, at det mest vanskelige for eleverne var at give faglige eksemplificeringer og at fortælle indholdsmæssigt om, hvad deres eventuelle forståelser bestod i. Er det begrundet i, at eleverne ikke *kan* forklare sig nærmere? Eller er det fordi, de har glemt det og ikke kan huske på det? Det kan ikke afgøres på baggrund af forundersøgelsen. Men det peger i retning af metoder, hvor man følger nogle elever over et længere forløb af deres læringsproces. Måske kan eleverne bedre huske tilbage, når de arbejder med matematik, i stedet for blot retrospektivt at tale *om* deres arbejde med matematik? Måske får man mulighed for at observere eventuelle aha-oplevelser, netop når de indtræder, og spørge til dem. Måske ville man i så fald også kunne give en vurdering af forståelsens betydning for læringsprocessen på længere sigt.

Disse overvejelser førte til, at hovedundersøgelsen består i *at følge få elever længe og tæt*, mens de lærer.

Nye spørgsmål

Det er åbenbart, at termen "logik" har forskellig betydning for forskellige elever. Samtidig ser det ud til, at elevernes forholden sig til (deres egen forståelse af) logik, er kritisk for læringen. Det lægger op til at sætte fokus på elevernes logikforståelse i den følgende undersøgelsesfase.

De meget forskellige forståelseskriterier, som eleverne formulerer, når de direkte bliver spurgt til dem, leder også til nye spørgsmål om, hvad elever mener, når de siger, "at de ikke kan finde ud af det", eller "at de har forstået". Lærere bruger sådanne elevkommentarer som pejlepunkt i undervisningen, så det er afgørende at få det belyst. Læreren spørger for eksempel i løbet af en gennemgang, om eleverne "har forstået", eller om de "er med". Nogle af eleverne svarer så ja eller nej. Læreren spørger ikke for at få et indholdsmæssigt svar eller for at indlede en dialog med eleverne, men for at få et signal på, om der er en passende hastighed i gennemgangen.

3.C DESIGN FOR ANDEN UNDERSØGELSE

Hovedundersøgelsen foregik i 1.g. i matematisk gymnasium og strakte sig over de første fire måneder i skoleåret 89/90. Jeg fulgte fire elever på tæt hold. De fire gik i samme klasse, idet jeg ønskede at "se" elevernes individualitet, og ikke forskellige typer undervisning. Samtalerne fandt sted i mellemtimer eller efter skoletid, undtagelsesvist i et spisefrikvarter, så der var relativt god tid. Alle samtaler blev båndet. Båndene er ikke skrevet fuldt ud.

Det var nødvendigt for mig at være tilstede i en del af matematiktimerne for at få inspiration til samtalerne med de enkelte elever. Jeg ville gerne undgå, at eleverne oplevede mig som én, der uventet brød ind i deres arbejde, og jeg ville gerne opleve det selv, som om "jeg hørte til". Det søgte jeg bl.a. at opnå ved at være tilstede i den allerførste matematiktime, hvor jeg gik rundt i klasseværelset og spurgte eleverne om, hvilke matematikbøger de havde brugt i folkeskolen.

Ved udvælgelsen af de fire elever tilstræbte jeg at få forskelligheder repræsenteret, og at udelukke enten særlig fagligt stærke eller særlig fagligt svage elever. Som baggrund for udvælgelsen lå to spørgeskemaer og en faglig test.
Det ene spørgeskema omhandlede
A. graden af opbakning/pres fra forældre,
B. oplevelse af succes/fiasko som noget stabilt og indreforårsaget eller som noget instabilt og ydreforårsaget,
C. personens egne forståelseskriterier.

Det andet spørgeskema omhandlede folkeskolens matematikundervisning.

"Interviewing students at work"

For at kunne opfylde det tosidige formål, både at få kendskab til elevernes egne sproglige beskrivelser og vurderinger af deres læring, (retrospektivt såvel som *mens* den foregår), og at få indsigt i elevernes faglige forståelser og færdigheder, måtte jeg anvende en bred vifte af kommunikationsformer:

-jeg interviewer eleven om holdninger til og erfaringer med skolematematik, læring, skole, forståelseskriterier, læsevaner.
-eleven tænker højt under arbejdet med sine lektier, det være sig opgaver, der skal afleveres skriftligt, øvelser,
-jeg spørger om særlige opgaver, særlige matematiske begreber, eller om situationer, jeg har overværet i klassen.
-jeg underviser og lytter til elevens reaktioner
-spontan samtale
-eleven stiller spørgsmål om det matematiske indhold
-eleven foreslår emner, som vi skal tale om, og hvilke opgaver vi skal regne. Det kan være som reaktion på et foregående interview. "Du spurgte mig, og jeg svarede, men nu mener jeg, at .....". [41]

Den brede vifte af kommunikationsmetoder og det lange tidsmæssige forløb konstituerer metoden "Interviewing Students at Work".

I de første interviews er det de samme spørgsmål, jeg stiller til alle fire elever, ligesom alle fire bliver bedt om, da klassen er færdig med at gennemarbejde funktionskapitlet, at beskrive det mest spændende ved kapitlet. Flere gange er der dukket områder op i eet interview, som jeg har spurgt til i de efterfølgende interviews med andre elever. Det er for eksempel sket i forbindelse med bogens første præsentation af funktionsbegrebet og med lærerens første præsentation af x^0.

3.D LÆRINGSHISTORIER

Den følgende beskrivelse af undersøgelsens resultater er opdelt efter hver af de fire elever og formuleret som fire historier. Det er min intention,

---

[41] *De to sidstnævnte instrumenter forøger mulighederne for at få information om elevens opfattelser og tilgange. Disse instrumenter bruges almindeligvis ikke i matematikkens didaktik.*

at historierne skal være så fyldige og detaljerede, at læseren selv gør sig forestillinger om hver af eleverne. Måske vil lærere kunne sætte historierne i relation til nogle af deres egne elever.

Der ligger ikke den samme disposition til grund for alle de fire læringshistorier, idet det ikke er de samme aspekter, der belyses af dem. Elevernes navne er opdigtede.

Julie's "Matematik giver ny indsigt"

Julie fortæller i de første samtaler, at hun var meget glad for matematik i folkeskolen. Hun tænkte aldrig over, hvor lang tid hun brugte på matematiklektierne, for hun nød at lave dem, og så er det jo ikke noget, der helst skal overstås hurtigt. Det er snarere : jo længere tid, jo bedre. I et senere interview fortæller Julie, at hun er skuffet over anvendelseseksemplerne i gymnasiet. Hun nævner som eksempel på, hvad der var langt bedre i folkeskolen, et opgavesæt omkring Grønland. Ved at arbejde med opgaverne om Grønland fik eleverne faktisk noget nyt at vide om Grønland. Julie savner anvendelsesopgaver, hvor man lærer noget nyt om anvendelsesområdet, i gymnasiet.

Da funktionskapitlet er gennemgået i klasssen, beder jeg Julie fortælle om det mest spændende. Det er *de nye ting*, hun vælger at fortælle om. Hun nævner ikke-lineære funktioner, og fortæller, at hun aldrig har vidst, at der også fandtes funktioner, hvor graferne ikke er rette linjer. Hun nævner begreberne "voksende" og "aftagende", som hun heller ikke kendte til i forvejen.

Julie er opmærksom på, hvorvidt opgaverne kan løses uden brug af den form for matematik, som bogen lægger op til. I en øvelse, der omhandler porto-takster, bliver eleverne præsenteret for en tabel fra postvæsenet, og de bliver sat til først at tegne en graf, og dernæst at aflæse nogle specifikke portostørrelser. Julie mener, at man kan finde disse takster ud fra tabellen fra postvæsenet, og ikke har behov for grafen. Det har hun ganske ret i, men det er ikke noget, hun har taget op i klassen eller over for læreren. Hun tager det heller ikke selv op over for mig, men det kommer indirekte frem, da jeg spørger hende om noget andet i forbindelse med den pågældende side i bogen.

Om Julies matematiske forviden fra folkeskolen fremgår det, at de i Julies klasse har taget kvadratroden af konkrete tal, og hun husker, de skulle gøre det uden lommeregner. "Du ved f.eks., at kvadratrod 10 er over 3 og mindre end 4, og så kan du regne videre". Julie har lært, at funktioner kan tegnes som maskiner. Julie tegner en maskine, tegner et tretal på venstre side af maskinen, et to-tal inde i maskinen, og et seks-tal på højre side af maskinen. Hun fortæller, at hun ikke kan huske, om det var to-tallet eller seks-tallet, der var funktionen. Vedrørende brøkers division ved Julie, at man ganger med den omvendte, når man dividerer med en brøk, men hun ved ikke hvorfor. Hun ved, at man skal finde fællesnævner ved addition og subtraktion, og jeg glemte at spørge, om hun ved hvorfor.

I forbindelse med gymnasieundervisningen i funktioner virker det tilsyneladende forvirrende på Julie, at de to betegnelser "definitionen på en funktion" og "funktionens definitionsmængde" ligner hinanden så meget. Hun fortæller, at hun først troede, at definitionsmængden var et synonym for "funktionen som sådan". Julie bruger udtrykket "Jeg troede, definitionsmængden var det hele". Samtidig fortæller hun, at hun ikke ved, hvad betegnelsen værdimængde står for. I de første opgaver med definitionsmængde og værdimængde, mener Julie, at hun må have forståelsesproblemer, idet hun i flere opgaver har fået den samme mængde til at være både definitionsmængde og værdimængde til en funktion.

Julie tænker ikke på pakkeposteksemplet, (som fra lærebogsforfatterens side er tænkt som det, der skal motivere indførelsen af funktionsbegrebet), som en funktion. "Det regner man jo bare ud. Jeg har ikke tænkt over, at den måske kan skrives som de andre funktioner". Julies funktionsbegreb synes at være knyttet til en særlig præsentationsform, nemlig det algebraiske funktionsudtryk, og ikke til nogen indholdsmæssig sammenhæng.

Det er Julies opfattelse, at man kun kan opløse et udtryk i faktorer, såfremt "begge to (i udtrykket) er i anden". Det er tydeligt, hvorledes hun har skabt sig denne opfattelse: Første gang klassen præsenteres for faktorisering sker i forbindelse med to kvadrattals differens. Julie må have hæftet sig ved kvadrat-elementerne, og hun må have opfattet faktorisering som et trick, man kan bruge netop når man har to udtryk, hvor "begge to er i anden". Lærerens præsenterede i øvrigt ikke andre situationer og opgaver, som en faktorisering kan gøre nytte i, så Julies forståelse er en rationel følge af undervisningen.

Julie ved ikke, hvad hun skal gøre ved udtrykket 'a divideret med kvadratrod a'. Det eneste, hun kan sige om opgaven og om hendes problemer med den, er, at "man skal gøre noget ved det, så man får noget væk".

Eleverne undervises blandt andet i "de lige store koefficienters metode" til at finde skæringspunkt mellem to linjer, der er givet på ligningsform. Metodens navn angiver, hvad der er den idémæssige kerne i metoden. Men Julie ved ikke, hvad betegnelsen "koefficienter" står for, så informationen i metodens navn er skjult for hende. "Hedder de der koefficienter?", spørger hun mig vantro. Læreren gennemgår flere metoder til at løse to ligninger med to ubekendte. Julie har problemer med en opgave om at finde skæringspunkt mellem to linjer. Hun tegner de to grafer, forsøger at aflæse, men "skæringspunktet er et ret dumt sted", som hun udtrykker det. Hun ved ikke, hvad hun så skal stille op. Hun har ellers flere sider i sit kladdehæfte med gennemregnede eksempler på løsning af to ligninger. "Jeg kan ikke huske, hvad det skal bruges til, og jeg har ingen overskrift skrevet", siger hun, mens hun bladrer siderne igennem.

Julie synes ikke, at huskereglen "andengradspolynomier med A større end 0 har grafer, der smiler" er nyttig. Det overrasker mig umiddelbart, men det bliver forståeligt, da det viser sig, at hun ikke forbinder noget med talegenskaben "større end nul". For at have gavn af huskereglen, skal man associere talegenskaben "positiv" enten med tillægsordet positiv (i betydningen glad) eller med udsagnsordene "at have noget" eller "at rumme noget".

Julies nysgerrighed over for verden og faget, og hendes reflektioner over egen læringsproces, rummer kraftige potentialer for læring: Julie er glad for faget og fascineres, når hun lærer noget nyt enten om verden eller om fagets tankekonstruktioner. Julie "undrer sig aktivt" over en del af det faglige stof, der præsenteres. Hun har ikke hængt sin sunde fornuft på knagen uden for klasseværelset, men har den med sig. Julie lægger mærke til, hvad hun kan, og hvad hun ikke kan. Hun har en mening om, hvorvidt hun har forstået eller ej. Hendes kendskab til regneregler er i visse tilfælde alene formuleret i symbolsprog, uden tilknyttede metaforer og uden tilknyttet talkendskab, og det vil jeg tillægge skoleundervisningen ansvaret for, – det skyldes ikke modvilje fra Julies side.

Julie har spørgsmål både til faglige, metafaglige og metakognitive forhold, som også andre elever ville have gavn af at få bragt til åben og fælles overvejelse, men hun er ikke klar over spørgsmålenes potentialer. Julie taler ikke om sine overvejelser hverken til læreren eller til klasseoffentligheden. Jeg ved ikke, om hun taler med andre elever om dem.

Det er min vurdering, at små forandringer i læringsmiljøet kunne få Julie sat på sporet af en mere aktiv deltagelse, som ville kunne berige ikke bare hendes egen læring, men også andre elevers.

Paul's "Matematik er at løse opgaver, andre har stillet"

Paul er aktiv på en stilfærdig måde i klasseoffentligheden. Han kan svare på de fleste af lærerens spørgsmål. Han spørger enkelte gange, om læreren vil vise, hvad det matematiske stof, der behandles, kan bruges til i praksis. Han ønsker at få at vide, *hvad man kan regne ud* med stoffet uden for skolesammenhænge, og han ønsker at få at vide, *hvilke slags opgaver* inden for skolesammenhængen, som man kan løse ved hjælp af stoffet.

Paul stiller derimod aldrig spørgsmål til baggrunden for, at det matematiske indhold "ser ud", som det gør. Han spørger ikke om, hvordan det kan være, at x^0 er lig 1, og han spørger ikke om, hvordan det kan være, at der er udviklet flere metoder til at løse to ligninger med to ubekendte.

Paul går ikke i åben opposition til læreren. Da andre elever åbent kritiserer læreren for at have givet dem skriftlige opgaver om potensregning, som de fleste ikke har lært tilstrækkelig om i folkeskolen, er Paul enig i kritikken, men det fortæller han ikke til læreren.

Paul mener, det er vigtigt at "klare sig godt" i matematik, for det gør det lettere at komme ind på uddannelser efter gymnasiet og at få arbejde med rimelig indtjening. Paul bruger to slags feed-back på, om han "klarer sig godt". De to typer af feedback, han søger, og som han bliver berørt af, er dels påvisninger af fejl i opgaver og prøver, og dels lærerens karakterbedømmelse. Paul er da også den første elev, der beder læreren om at give karakterer for hjemmeregningsstykkerne og om at få prøver.

Paul er meget opmærksom på, hvilke betingelser han arbejder mest effektivt under. Det er en glæde for ham at få noget fra hånden. Han kan lide at arbejde under tidspres. Så arbejder han bedre, fortæller han. Hvis han derimod har meget tid, koncentrerer han sig ikke, men begår fejl af bar ubetænksomhed. Også når en opgave er for let, kan han komme til at begå fejl, som han ellers ikke ville begå. Det er som om, han "slår dét fra", som han godt kan. Paul vurderer, at han ikke er god til at bruge lang tid til at tænke sig frem til en fremgangsmåde: "Enten kommer den med det samme, eller slet ikke".

Paul var meget glad for faget i folkeskolen. Han fortæller, at han altid glædede sig til matematiktimerne, og at det samme gjaldt næsten resten af eleverne i klassen. Læreren fortalte levende, havde humoristisk sans og var samtidig god til at skabe en effektiv arbejdsstemning. Læreren gennemgik altid stoffet, inden eleverne skulle arbejde med det. Klassen gennemarbejdede hele lærebogen fra ende til anden, arbejdede også med et emne om værdipapirer og deltog i en af Handelsbankens konkurrencer. Paul klarede sig efter eget udsagn godt i matematik i folkeskolen. Det bygger han på, at han kunne løse de opgaver, han blev stillet over for.

Paul vil gerne blive klogere på virkeligheden, især på de finansielle sider af virkeligheden. Hans nysgerrighed over for virkeligheden er rettet mod operationelle aspekter, ikke mod forklarende eller diskuterende aspekter. Han vil gerne have matematikopgaver, hvor man skal regne noget praktisk ud. Allerhelst fra den finansielle verden.

Paul er langt mindre engageret end Julie i at fortælle om det sjoveste ved funktioner. Paul svarer tøvende og med en enkelt sætning: "Det sjoveste? Ttjjaa. Skæringspunkt med akser og symmetriakse i stedet for at tegne den først."

Paul har fra folkeskolen udviklet dygtighed og hurtighed til at regne opgaver. Ved et sæt testopgaver i starten af 1.g. ligger han blandt den bedste sjettedel i klassen. Paul har stor faglig selvtillid. Han tror så meget på sin egen kompetence, at han - korrekt - finder regnefejl i lærebogen og inkonsistenser i dens disponering.

Paul har opbygget et system af regler. Nogle regler er kopier af lærerens eller bogens regler, andre har han har komponeret. De selvkomponerede regler bygger på en mangfoldig systemviden om skolematematikkens spilleregler og adfærdsnormer. Paul aflæser tilsyneladende signaler, ordner dem efter deres hyppighed, lagrer de typiske signaler, og får således skabt en databank af empirisk viden om, efter hvilke principper elevernes hverv er bygget op inden for matematikundervisning.

De selvkomponerede regler består af generaliseringer, som ligger på forskellige niveauer. Nogle generaliseringer gælder for *alle typer af opgaver*, som for eksempel:

> "Man skal i de allerfleste opgaver bruge netop det stof, der lige er blevet gennemgået."

Andre generaliseringer handler om *særlige tal og særlige operationer i skolematematikkens opgaver*:

1. Paul har opsamlet en viden om, hvilke tal der oftest benyttes i opgaveformuleringer.
2. Paul har opsamlet en viden om, hvilke operationer der oftest knytter sig til særlige tal. To af reglerne lyder:

"hvis tallene 15 og 120 optræder i en opgave, skal man som oftest dividere 120 med 15", og
"hvis man skal regne noget ud med promille, skal man dividere det mindste tal med det største".

3. Paul har en viden om hvilke typer af tal, der kan optræde i facit. En af reglerne lyder:

"hvis jeg får flere end 3 decimaler i et facit, så har jeg sandsynligvis regnet forkert".

Paul fortæller ikke nogen om sine systemer.

Paul undrer sig ikke over, at x^0 er 1. Han undrer sig derimod over, at længdeformlen hedder

$$\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$$

Han undrer sig, fordi, som han siger, "i midtpunkts-formlen står x'erne og y'erne jo i den rigtige nummer-rækkefølge":

$$\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}$$

Paul hæfter sig ved de konkrete symboler, og forsøger at huske dem ved at indordne nye udtryk i forhold til tidligere memorerede symboler. Pauls begrebsopfattelser er påvirkede af hans operationelle interesse. Det gælder eksempelvis hans brøkbegreb: Multiplikation og division med brøker er styret af regneregler, der er formuleret som symbolmanipulationer. Funktioner opfatter Paul også som formler: "Man kan putte tal ind som i en maskine og få nogle andre tal ud".

Han har erfaring for, fortæller han, at han i løbet af en ferieperiode kan glemme symbolmanipulationerne eller kan forveksle, hvilke symbolmanipulationer der svarer til hvilke regneoperationer. Men han har også erfaring for, at han blot ved at spørge om hjælp en enkelt gang kan genetablere sine huskesystemer. Huskesystemerne bevares intakt i perioder, hvor han bruger dem ofte. Han bliver af og til i tvivl, men så kan han kontrollere sine egne regler, ud fra sin viden om hvornår tal skal blive større henholdsvis mindre. Nogle af regnereglerne husker han som billeder. Multiplikation af brøker består af et billede med to brøker ved siden af hinanden med to vandrette pile. Division er tilsvarende et billede med to brøker med to pile overkors.

I en udledning divideres på begge sider af lighedstegnet med "b", og bogen tager forbehold for talværdien 0. Jeg spørger, hvorfor bogen tager forbehold. Han svarer, at den pågældende regel ikke gælder, hvis "b" er nul, og at det derfor er rimeligt, at der står "b" forskellig fra nul i bogen.

Paul har et godt talkendskab, og han indsætter ofte tal i algebraiske reduktionsopgaver og bruger på denne måde sin taldygtighed til at kontrollere sine reduktioner. Når han ikke kontrollerer med tal, kan han lave fejl, som da han skal reducere differensen mellem to algebraiske brøker. Han ganger overkors og har ingen mulighed for at finde ud af, at metoden er gal, idet han ikke kontroller sit resultat ved at indsætte tal. I øvrigt ganger han med 27/48 i stedet for med 27/75, da han skal finde, hvor meget aluminium der er i 1550 kg blanding af aluminimum og et andet stof, når blandingsforholdet er 27:48.

Paul udnytter sin gamle viden, når han præsenteres for ny, som da han forestiller sig, hvad man mon kan mene med udtrykket "8 i minus fjerde", 8^{-4}: "Man kan jo ikke bare flytte nuller, 8:8:8:8, najh, det kan det ikke være. Hvis det var 10, var det 0,0001."

Pauls opmærksomhed er rettet dels imod at finde frem til, hvilke hverv der bliver ham stillet, og dels imod en hurtig og korrekt opfyldelse af hvervet. Det ligger ikke inden for hans opfattelse, at der kan være fordele ved at kende noget til baggrunden for regneregler: Jeg har flere gange bragt på bane i vores samtaler, at man bedre husker regnereglerne, hvis man forstår baggrunden for dem. Men Paul har aldrig benyttet lejligheden til at bede mig om at fortælle ham, hvad baggrunden så er. Det er åbenbart ikke noget følt behov for ham. Han kan godt fange og huske teoretiske overvejelser. Jeg forklarer ved et interview Paul om baggrunden for at x^0 er lig med 1, og det kan Paul gengive ved et senere interview.

Paul er meget bevidst om, hvad han bruger sine ressourcer på. Han følger ikke blot lærerens råd og forskrifter. Da læreren gennemgår "substitutionsmetoden" til løsning af to ligninger med to ubekendte, hører Paul ikke efter. Læreren havde dagen før gennemgået "lige store koefficienters metode", så den kender Paul. Dermed er det, fortæller Paul, for det første unødvendigt at lære endnu en metode, og for det andet er der risiko for at blande metoderne sammen og lave regnefejl. Paul er tilsyneladende aldrig i tvivl om det rimelige i sine prioriteringer.

Paul har en grundlæggende metafor for skolematematik, som hedder *"matematik er at regne opgaver"*. Paul fortolker også de nye elementer i faget, han møder i gymnasiet, som opgaver. Det giver sig både indholdsmæssige og sproglige udtryk, hvor Paul bruger ordet "løse": "Et bevis løses ved at tage en formel og sætte en anden formel sammen med den og eventuelt kombinere med en tegning". Jeg lod i et af interviewene Paul læse nogle sider højt fra lærebogen med udledning af ligningsudtryk for rette linjer, som endnu ikke var gennemgået i klassen. Paul mente, at der stod for mange ord i bogen. Uafhængigt af om han læste eksempler, definitioner, sætninger eller udledninger, ledte han efter konklusioner i form af regneregler. Paul konstaterede, at udledningen var et eksempel på en dårlig formidling, og at udledningen resulterede i en ny to–polet regel: "Man skal gøre sådan, hvis grafen skærer y–aksen, og man skal gøre sådan, hvis grafen ikke skærer y–aksen."

Paul er meget tænksom omkring sit eget læringsforløb, og er også tænksom omkring andres. Han har et bud på, hvad der kan være svært i matematik: det svære er det, der ikke passer med intuitionen eller kan gives en dagligdags tolkning. Han husker tilbage på vanskelighederne i 4.klasse i forbindelse med lineære funktioner. Han fortæller, at hældningskoefficienten kunne tolkes som prisen på en is, mens f(0) ikke blev givet nogen hverdagstolkning, men blot skulle regne ud for at "få det til at passe". Derfor havde eleverne flere vanskeligheder med f(0) end med hældningskoefficienten.

Paul har en nuanceret opfattelse af fordele og ulemper ved gruppearbejde i forhold til individuelt arbejde og klassearbejde.

Ved udledninger og beviser opfatter han det, som om der står det samme mange gange, og det virker meningsløst på ham. Disse aspekter af faget, der er helt nye for ham, kan han åbenbart ikke fortolke med sin gamle viden.

For Paul er matematik at regne opgaver, men hvad opgaverne skal omhandle er det op til læreren og lærebogsmaterialerne at afgøre. Paul mener, at matematik uden for skolen er et nødvendigt, værdifuldt og praktisk redskab til at løse relevante problemstillinger, og han ønsker, at skolematematikkens skal afspejle dette. Hvad der skal regnes ud, er det dog stadig op til andre at bestemme. Det er heller ikke afgørende for Paul, hvilke konsekvenser udregningerne kan have, eller hvilken værdi de har.

Udover matematiske kvalifikationer får Paul videreudbygget sin flair for at gennemskue et systems spilleregler og adfærdsnormer, for at agere inden for systemet, og for at håndtere systemet. Han opbygger viden om, hvilken adfærd der forventes af ham og af, hvordan han hurtigst kan honorere forventningerne. Han ændrer ikke opfattelse af fagets spilleregler og adfærdsnormer i løbet af det første halve år i gymnasiet.

Karen's "Er jeg god nok til at finde facitter?"

Den 29.august 1989, hvor hele klassen i sidste del af en matematiktime svarer på mit spørgeskema, grifler Karen meget ihærdigt, og hun er den, der bliver sidst færdig med udfyldelsen. En af drengene bemærker hendes langsommelighed, og Karen giver ham et rapt svar tilbage. Det er umuligt at undgå at lægge mærke til, at Karens besvarelse skiller sig ud fra de øvrige elevers. Karens skema er som det eneste skrevet med en rød tuschpen, og det er ikke en "fin" pen, men en pen med mellemtykkelse. Til tre af otte spørgsmål, som alle andre besvarer med eet kryds, har Karen to krydser. Endelig har Karen sprogligt formulerede kommentarer til alle spørgsmål uden undtagelse, og kommentarerne er meget informationsrige.

Til spørgsmålet "Hvordan vurderer du dig selv til matematik", har Karen sat kryds ved "god" og tilføjet "i folkeskolen", og hun har sat kryds ved "dårlig" og tilføjet "i gym". Nedenunder har Karen skrevet: "Det er underligt at føle i folkeskolen, at du er et geni, og i gymnasiet skraber du bunden af de dårlige".

Ved spørgsmålet "Er du glad for at lære matematik" rummer Karens besvarelse den samme dobbelthed: Kryds ved "meget" med tilføjelsen "i folkeskolen" og kryds ved "lidt" med tilføjelsen "i gym". Her lyder hendes kommentar: "Det har taget lysten fra mig, at det er så svært. Jeg venter kun på, at klokken skal ringe. Jeg synes alligevel at det er mere spændende end sprog, der er mere at forstå (i matematik)."

Til spørgsmålet om matematiklæreren *i folkeskolen* befordrede elevens lyst til at beskæftige sig med matematik i skolen, svarer Karen atter med en *sammenligning mellem folkeskolen og gymnasiet*: Krydset er sat ved "ofte" med bemærkningerne
"Jeg kan godt lide ting jeg er god til - er det ikke meget naturligt? !" og
"I gym brænder jeg ikke ligefrem for matematik".

Karens besvarelse viser, at hun er meget optaget og bekymret over skiftet fra folkeskole til gymnasium. Jeg valgte Karen som en af de fire elever, fordi der er mange elever der oplever store vanskeligheder i starten af gymnasiet, overvejer at forlade gymnasiet og måske også gør det. Karen er en god informant, fordi hun er i stand til at formulere sig og har lyst til at kommunikere med andre om sin læring.

I vores første samtale spørger jeg : "Det er mit indtryk fra skemaet, at du var meget glad for faget i folkeskolen, - er det et korrekt indtryk?" Karen svarer, at til alle elevkonsultationerne sagde lærerne, at hun var god til det. Jeg spørger til, hvad der var *hendes vurdering af skolefaget matematik*, og hun svarer ved at fortælle om *lærerens vurdering af hendes dygtighed*. Senere i samtalen udbryder Karen "Det er bare vildt svært. Og der er nogle, der bare kan det hele. Det er også underligt, at der er nogle, der bare kan fatte det med det samme."

Det er ikke kun i faget matematik, at gymnasiets krav er forskellige fra folkeskolens. Karen nævner, at dansk i folkeskolen ikke lagde vægt på kommaer, mens det tilsyneladende er meget vigtigt i dansk i gymnasiet. Tilsvarende undrer Karen sig over, at gymnasiets matematiklærer er ligeglad med, hvordan de formulerer uægte brøker: "I gymnasiet er det en bagatel, om vi skriver 16/15 eller 1 1/15. Det var det bestemt ikke i folkeskolen. Der fik vi at vide, at stykket var forkert, hvis vi skrev 16/15 i facit."

Karen fortæller meget præcist og udførligt om, hvad der i *det faglige indhold* er så anderledes i gymnasiet:

> "Det er også fordi, matematik er færdighedsregning og problemregning, og så er det slut. Sådan har jeg altid set på det. Oog Guud ! Er der mer' ! Færdighedsregning var rimelig let, det var sådan lommeregneragtigt. Problemregning det synes jeg også var lidt underlig, alle de der bogstaver og snak. Der skulle vi til at bruge matematik udenfor. Det var straks sværere. Men det der *bevis*, det er fuldstændig volapyk".
> I: "Har du haft det før?"
> "Nej, overhovedet ikke, vel ! Hvad sker der ! Jamen, sådan er det bare. Man behøver da ikke bevise det. Det ved alle da !"
> I: "Du kan altså ikke på nuværende tidspunkt forestille dig at du kunne komme i en situation, hvor du ville sige: det her vil jeg gerne bevise?"
> "Nej, nej, sådan er det da bare. Vi har bare brugt det."
> I: "....der har aldrig hersket tvivl om, om det var rigtigt eller forkert?"
> "Nej. Vi spurgte bare læreren. Og så var der en facitliste, man kunne kigge efter."

Karen negligerer nærmest gymnasiefagets beviser og udledninger: "Når jeg læser, synes jeg, det kan være fuldstændig ligegyldigt med hvorfor dit og hvorfor dat, bare man kan regne opgaverne. Vi plejer ikke at have beviser", fortæller Karen, og hun kan ikke se det kan have relevans: "Jamen sådan er det da, det ved alle da, det er der da ingen grund til at bevise".

Karens formulering af, at hun ikke anerkender beviser og andre former for argumentationer som relevante, spejler sig i arbejdet med specifikke opgaver. Det kan illustreres ved en opgave, hvor hun skal vise formlen for arealet af en ligesidet trekant ved hjælp af formelen for areal af en vilkårlig trekant. I opgaveteksten står, at man skal vise, at arealet for en ligesidet trekant med sidelængden "a" er givet ved udtrykket

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Karen foretager korrekt de relevante operationer, men er tilsyneladende uden kontakt med det idémæssige formål med opgaven. Karens kommentar er: "Det virker lidt åndssvagt at sidde og regne den igen. Hvorfor kan det ikke bare være sådan".

Karen tolker opgaven, som om det var en opgave af typen "Vis at den og den trekant har arealet 37,8," hvor idéen er, at man skal beregne arealet, fordi man ikke kender det. I Karens tolkning skal hun finde hvad arealet er for en ligesidet trekant med siden a, og samtidig får hun opgivet facit ! Det er tvivlsomt, om Karen – med sin forståelse af opgaven – får noget udbytte af at arbejde med den, og Karen har nok ret i, at det er "åndssvagt" at sidde og regne den.

Samtidig finder vi i Karens formulering *"Hvorfor kan det ikke bare være sådan"* et potentiale for læring. Man kan anlægge to fortolkninger på formuleringen:

1. I den ene fortolkning afsluttes Karens formulering med et udråbstegn. Karen er vred, irriteret og gider ikke løse opgaven. Der er ikke tale om en generel ugidelighed – den er specifikt knyttet til, at det ser ud for Karen, som om hun bliver bedt om at regne en opgave, der allerede er løst.

2. I den anden fortolkning afsluttes formuleringen med et spørgsmålstegn. Karen vil faktisk gerne vide, hvordan det kan være, at nogen har fundet på at sætte hende til at arbejde med opgaven: hvad har de tænkt sig, hun

kan lære ved det, og hvad er det for nogle problemer, hun dermed kan blive klogere på?

Jeg kan ikke udtale mig om den ene eller den anden fortolkning er den rigtige. Jeg var ikke opmærksom på det, mens det foregik, og jeg har heller ikke senere bearbejdet det sammen med Karen. Men der er potentialer for at lære i begge fortolkninger. Såvel i irritationen over at blive sat til at lave noget, der er tidspilde, som i nysgerrighed efter og undren over baggrunden for lærebogsforfatterens valg.

Karen er i nogle situationer bevidst om, at hun ikke "forstår", og at hun vælger at lade være med at forsøge på at forstå. Da Karen formulerer "Jeg forstår ikke, hvorfor der står nul", må jeg spørge, hvad hun mener med "ikke at forstå". Jeg spørger derfor "Har du studset over det?" Og Karen svarer "Jeg har tænkt UPS, ind under gulvtæppet."

Det ligger i Karens sammenligninger mellem folkeskolens og gymnasiets krav og mellem hendes præstationer i henholdsvis folkeskolen og gymnasiet, at hun føler sig snydt og ført bag lyset af folkeskolelærernes positive vurdering af hendes dygtighed. Sociologisk betragtet består problemet i, at de to skoleinstitutioner ikke er koblede, og at de personer, der er ansat i dem, ikke opfatter det som en del af deres arbejde at holde sig informeret om den anden institution. Men for den enkelte elev opleves disse institutionelle forhold som noget, der er knyttet til lærerne som personer.

Det er min vurdering, at Karen har grund til at føle sig snydt. Jeg vil i det følgende illustrere, hvorledes Karens forståelse ikke svarer til de forudsætninger, gymnasielæreren tilrettelægger undervisningen efter. Jeg vil give fire eksempler, hvoraf det kun er til den sidste, empirien giver mulighed for en udførlig beskrivelse :

1. Karen smider nævnere væk i reduktionsopgaver.

2. Karen skal gange tre brøker sammen. Karen siger: "Jeg sidder og tænker på, at det er en plusbrøk, og så laver jeg fællesnævner. Men det er jo unødvendigt."

3."Men ku' jeg ikke have brugt, at siderne i trekanten skal være 180 ialt, eller er det kun de retvinklede?"

4. I en time udleder læreren toppunktformlen for andengradspolynomier. Læreren har valgt ikke at færdiggøre udledningen, men standser på et tidspunkt og beder eleverne individuelt om at udføre det resterende arbejde. Jeg fandt tidspunktet velvalgt: Det så ud til at elevernes koncentrationsevne var ved at være brugt op, og resten af udledningen syntes at ligge inden for elevernes faglige formåen.

Elevernes borde står i hesteskoform, og jeg sidder over for Karen, som jeg skal arbejde med den pågældende eftermiddag. Læreren bemærker i sin rundgang i klassen, at der er en fejl i Karens udledning. Om eftermiddagen beder jeg Karen fortælle mig om det, og det gør hun beredviligt. Karen skal gange A med en brøk, hvor tælleren hedder minus B i anden, og nævneren hedder 2 gange A, altså :

$$A \cdot \frac{-B^2}{2A}$$

Karen formulerer, at hun ikke kan gange et bogstav med en algebraisk brøk, og heller ikke et helt tal med en brøk. Derimod kan hun gange brøker med brøker, så hun kan klare opgaven ved at skrive det første A i udtrykket om til en brøk. Jeg citerer:
"Jeg skulle gange A ind i en brøk. Jeg skrev A om til brøken 1/A, fordi jeg ved, hvordan man skal gange to brøker sammen. Læreren sagde, at A skal omskrives til brøken A/1".

Jeg bryder ind, og spørger Karen, om hun ved, hvorfor A skal omskrives som A divideret med 1. Da hun svarer benægtende, spørger jeg med ord, om hun ville sætte fire lig med en fjerdedel, og jeg skriver på et stykke papir "4 = 1/4". Karen svarer med et overbevist nej. Vi taler om analogien mellem regning med tal og regning med bogstaver, og jeg får indtryk af, at Karen er glad og sikker på, at hun ikke vil glemme det igen. På dette tidspunkt vurderer jeg, at Karen kan omskrive hele tal til brøker, men ikke kan omskrive algebraiske udtryk, hvor hun måske kun ser symbolerne som tegn. Men ... det skulle senere vise sig, at jeg måtte revidere min vurdering.

14 dage senere mødes vi igen, og jeg beder Karen foretage den samme algebraiske multiplikation. Hun begår den samme fejl, skriver igen A om til 1/A. Jeg fortæller ikke, at det er forkert, men beder hende prøve med fire, og Karen skriver 4 om til 1/4. Karen fortsætter udledningen uden på noget tidspunkt at ane uråd. Hun bliver ked af det, da jeg bagefter fortæller hende, at A skal omskrives til A/1 og 4 til 4/1. Hun kan nemlig

sagtens huske sin egen sikre tro på, at hun aldrig ville begå samme fejl igen. Men hun kan kun huske sin tro på egen succes, ikke substansen.

På dette tidspunkt vuderer jeg, at Karen ikke *ser* 1 delt med 4 som "en fjerdedel". Derimod *ser* hun det som en omskrivning af 4. Operationen at skrive et helt tal om til en brøk synes således for Karen at være en handling, der kun foregår på symbolplanet, og resultatet, som er en brøk, knytter hun ingen fortolkning til. Det er mit gæt, at det er afgørende for hendes valg af symbol, at 1/4 forekommer hyppigt, mens man til gengæld aldrig "møder" brøker med 1 i nævneren. [42]

Karen arbejder ihærdigt, og hun reflekterer over de forskellige matematiske redskaber og begreber. Hendes refleksioner kan illustreres i de følgende eksempler på spørgsmål :

Karen skal i en opgave reducere udtrykket "kvadratroden af 108 minus kvadratroden af 12":

$$\sqrt{108}-\sqrt{12}$$

Karen bemærker: "De sagde, at man skulle lave det om til primtal. Men er det ikke meget nemmere at sige 108–12. Det er sgu da en smart måde. Men det giver altså et galt resultat."....."Hvad er egentlig forskellen på om et tal står uden for kvadratrodstegnet eller indenfor?"

Karen regner en opgave, hvor hun skal finde en trekants vinkelspidskoordinater udfra koordinater på sidernes midtpunkter. Hun opskriver korrekt midtpunktsformlen og ganger med 2, og siger "Skal de ikke være lige lange? Er det så ikke bare halvdelen?"

Karen læser definitionen på en linje. Jeg spørger, hvad definitionen siger, og Karen svarer: "At man skal lave sådan en der, og så skal man lave det med 3 ubekendte. Men der må da være nogle tal !" Næste gang vi mødes, spørger jeg igen Karen, hvad en linje er, og denne gang svarer hun: "Det er en streg, og der er en formel for den, og den er y lig alfa

---

[42] *Det kunne være interessant at vide, om Karen ville have givet brøken - det være sig "1/4" eller "4/1" - en fortolkning, hvis brøken var en opgaves resultat og ikke kun et mellemresultat, men det kan jeg ikke give nogen bud på ud fra materialet.*

gange x plus q. Jeg har lidt svært ved at finde ud af hvad q er, om det er en konstant eller hvad?" Formlen lyder

$$y=\alpha \cdot x+q$$

Det ser ud til, at Karen forestiller sig, at der til ethvert algebraisk udtryk svarer en bestemt geometrisk egenskab. Da Karen regner på en opgave, hvor hun skal finde værdien af tallet t, så linjen med ligningen 3x+4y=t sammen med akserne danner en trekant med arealet 24, så tænker hun på t som en størrelse med en iøjnefaldende geometrisk betydning. "Er t der, hvor den skærer? Er det bare et tal? Er det hældningen? Det var dog irriterende."

I starten af undervisningen i funktioner, spørger Karen: "Hvordan kan man se, om der er to y-værdier til een x-værdi?". Senere får Karen skabt sig en korrekt forståelse af og et fyldestgørende metasprog om opgaver som "løs f(x)=13" og "find f(4)". Karen siger: "Man skal sætte ligningen ind i den første, og i den anden sætter man tallet ind i stedet for x." Da jeg spørger om, hvad en funktion er, svarer Karen: "Det er det, der går op ad y-aksen. Du har et x, og det er det y der passer i talparret. Det mest forvirrende er starten. Reelle tal. Du kan ikke SE definitionsmængden, når det er alle tal. Så kan du ikke se det helt præcist. Men voksende. Du kan SE det på grafen. Selv om du måske ikke kan huske det der med a større end nul, du kan se det, det er et sikkerhedsnet." "Hvad med en parabel. Er den voksende", spørger Karen undrende.

Jeg spørger Karen, om de i gymnasiet har haft opgaver om emner uden for matematikken, og Karen svarer: "Vi havde en kasse øl, åh nej, det var lige efter, vi var på hyttetur. Den hed y er lig med a x plus b. Det er meget logisk, a er pris på en øl, x er antallet, og så skal man selvfølgelig gange, og det koster altid 15 kroner for en kasse."

Uopfordret fortsætter hun: "Det er ligesådan med fotokopieringseksemplet". Jeg spørger om de har haft noget lignende i folkeskolen. Og hun svarer prompte: "Nej, vi har lavet den anden vej. Vi har fået forskriften, lavet sildeben og tegnet grafen."

Både det at hun selv nævner fotokopieringseksemplet, og at hun beskriver opgaverne fra folkeskolen som "den anden vej" vidner om en velforankret faglig forståelse af aspekter af funktionsbegrebet. Karen har tilsyneladende knyttet det matematisk begreb lineær funktion til nogle anvendelsesopgaver, som fungerer som en virksom metafor. Her er hverdagsviden om anvendelsesområder et sommerfuglenet for Karens læring.

Karen kan godt lide opgaver, hvor de skal finde fejl: "Så tænker man, der må da være noget galt. Det er sjovt at finde en fejl. Jeg ku' huske nogen havde sagt, man ikke måtte. Men jeg gjorde det i prøven, selv om jeg vidste, det var galt. Hellere det end slet ikke noget. Det er da også underligt, man ikke må."

Opgaven præsenterer eet udtryk med fem lighedstegn, og lyder "Hvad er der galt med dette bevis for at 5 er lig med 7:

$$5=\sqrt{25}=\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$$

Det er tydeligt, at Karen ikke opfatter det som éet samlet udtryk, for hun siger "Det er da delvis rigtigt", idet fire af de fem lighedstegn er korrekte.

Ved en anden lejlighed har Karen regnet forkert med et kvadratrodstegn. I: "Du har lavet en lille fejl. Pludselig smider du kvadratrodstegnet væk. Hvorfor har du gjort det?" Karen: "Jeg havde så travlt med at regne."

Karen skal opskrive en ligning for linjen igennem (0,0) og igennem midtpunktet på et linjestykke, hvor koordinatsættene til endepunkterne er opgivet. "Jeg kan ikke se, hvad jeg skal bruge det til. Jeg kan jo sagtens lave en ligning ud fra de to punkter. Men så vil læreren også have midtpunktet?"

Der er flere ord og betegnelser, som læreren bruger i timerne, som Karen ikke forbinder noget med. Eksempelvis siger Karen en dag:
"Polyno- hvad betyder det?"

Samtidig med at Karen arbejder med at løse opgaver og med at erkende de matematiske redskaber og begreber, er hun opmærksom på, hvilke krav læreren stiller, og hun er opmærksom på, hvordan hun kan opfylde dem. Det sidste ses illustreret i det følgende, hvor Karen handler udfra en kombination af viden: en viden om, hvad hun selv kan, en viden om hvad hun ikke selv kan, og en viden om hvad læreren mener, hun bør kunne: Karen har fået en blækregning tilbage, rettet af læreren. Karen har tegnet grafer for en række lineære funktioner. Jeg ved, at Karen ved et tidligere møde ikke kunne tegne grafer alene ud fra en viden om konstanterne i funktionsudtrykket. Da måtte hun "lave sildeben", og det har hun tilsyneladende ikke gjort i blækregningen. Karen fortæller så:

"Jeg har lavet sildeben. Det har læreren sagt, vi ikke må. Jeg ville ikke vise læreren, at jeg havde tegnet sildeben, men det var det, jeg gjorde. Jeg lader som om jeg kan finde ud af det der med at gå op og øhh"

De faglige spørgsmål, som Karen retter til mig i forbindelse med interviewene, er gode og interessante spørgsmål, som hun ville drage nytte af at få behandlet, men hun stiller ikke spørgsmålene til læreren. Karen oplever sine vanskeligheder som alvorlige og overrumplende. Men de bunder først og fremmest i, at hun er nøjsom, og ikke stiller krav om forståelse og indsigt og magt over egen læring. Det har vist sig, at Karen som en af de ganske få i klassen ikke ved slutningen af 2.g. valgte matematik på højt niveau i 3.g., men afsluttede faget.

<u>John's "Hvad er meningen?!"</u>

Ved den første samtale starter jeg som ved de tre andre samtaler med at spørge til elevens opfattelse af matematik i folkeskolen. John svarer:

> Det.. det kan være sjovt, det kommer an på.. Det kan selvfølgelig også være lidt svært at komme igennem det. Ja, f.eks. var vores lærer i folkeskolen ikke så god til at lære os det, hun hoppede sådan over det, hun var ikke så hjælpsom. Det var den eneste lærer, vi havde gennem hele forløbet, og det kan måske også være noget af grunden til, at vi blev sådan lidt trætte af det til sidst.
> I: Hvornår syntes du, det var sjovt?
> Ja, det er faktisk svært at sige.
> I: Du sagde, at en gang imellem var det sjovt, og engang imellem var det tungt.
> John: Det var faktisk ret tungt det hele, og der var et tidspunkt, hvor jeg tænkte, at jeg aldrig ville komme igennem det, at jeg måske skulle gå ud eller ville gå helt ned i 9. Og i 5.6.klasse gik jeg og sagde til mig selv, at det her klarer jeg aldrig. Men jeg synes, jeg klarede det meget godt.
> I: Du har jo ihvertfald gerne ville starte her på gymnasiet !
> John: Det havde jeg aldrig drømt om at jeg skulle komme til, i hvert fald ikke i 6. klasse, fordi der er ikke nogen, - hverken min mor eller far er matematiker.

Da jeg spørger om, hvad John synes om faget, svarer han først ganske kort med gloserne "sjovt" og "lidt svært at komme igennem", og uddyber derefter dels med en vurdering af, hvor god læreren var til at lære fra sig og dels med sin egen vurdering af sin egen evne til at lære.

John er tilsyneladende meget opmærksom på sin egen læringsproces. Han fortæller, at hans præstationer er skiftende, og at han har perioder, hvor han ikke kan få sine ressourcer til at udfolde sig. Han siger for eksempel: "Hvis man skal lave en opgave, og hvis man så synes, at denne her opgave den kan jeg bare, så kører du let over det, men hvis du har en periode, hvor du føler dig dårlig, så kan du ikke, selv om du måske i virkeligheden godt kan. Hvis du på forhånd siger, "åh,nej, idag er jeg dårlig", så kan man ikke. Det er meget med selvtillid."

John fortæller meget og meget gerne om sin egen læring og om sine egne følelser i forbindelse med læringen. I det følgende citat ses det eksempelvis, hvorledes John flytter fokus i vores samtale. Når jeg spørger til indholdet i hans viden, svarer han med at fortælle, hvordan skolen påvirker ham følelsesmæssigt, så at han ikke kan give udtryk for sin viden.

Situationen opstår i en samtale, hvor vi gennemser et sæt skriftlige opgaver, som John har fået tilbage i rettet stand. Jeg bemærker, at John har besvaret følgende opgave korrekt: "hvad mener du om følgende bevis?" [43] Idéen med opgaven er, at eleverne skal lægge mærke til et særligt sted i det såkaldte bevis, hvor der er en fejlagtig omskrivning. John har skrevet som besvarelse: "Det kan ikke lade sig gøre, fordi man ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal".

Jeg ønsker at lodde dybden af Johns forståelse, og spørger "VED du hvorfor man ikke må tage kvadratroden af et negativt tal?", og jeg lægger betoning på ordet "VED". John svarer:

> "Ja, der kommer den igen. Nu spørger du mig "VED du.....". Når du stiller mig et direkte spørgsmål, så kan jeg ikke svare, men jeg ved det godt."
> I: "Hvordan skal jeg så spørge. Jeg spørger faktisk, fordi jeg er nysgerrig efter at høre dit svar. Og jeg er lige glad for at få et i gåseøjne "forkert" svar som for at få et i gåseøjne "rigtigt" svar." (Jeg spørger i en tone, der viser, at jeg samtidig tænker "og det må du da være klar over, John, vi har da arbejdet sammen flere gange før".)
> John: "Det ved jeg ikke. Det kan jeg ikke sige. Det er kun noget, JEG har. Jeg kan heller ikke stå og lege ved tavlen. Der var nogle i min folkeskoleklasse, der kunne. Og der var nogle, der spurgte og spurgte og fik at vide mange gange, at det var forkert det, de sagde. Jeg spørger aldrig. Måske skulle jeg prøve det."

---

[43] *Opgaven er også nævnt i Karens læringshistorie.*

John tror ikke, der er andre, der reagerer på samme måde som han selv. Men han ved, at der også er andre elever, der har problemer med at forstå indholdet, og han har en klar opfattelse af, at nogle af hans klassekammerater virker ødelæggende på læringsklimaet. Han fortæller om nogle af de første timer i 1.g.:
"Læreren gennemgik nogle grundbegreber i geometri. Og så var der nogle i klassen, der kom med udbrud som aiij, ååh, uha og plaat. Men der var nogen i klassen, der faktisk ikke kunne. Og der var nogle af dem, der ikke kunne, der begyndte at sige det til læreren. Og så var der nogle, der sagde øv og buh. Jeg synes det er plat, når folk begynder på den slags."
I: Hvorfor gør de det?
John: For at vise, at DE godt kunne det. Men jeg syntes faktisk, det var ret frygteligt."

John spørger ikke i klasserummet, når der er noget, han ikke forstår. Han fortæller:

> "Jeg kan også huske i timen forleden. Læreren sagde "man må ikke tage kvadratroden". Og jeg tænkte "Hvorfor må man ikke det?"

Jeg spørger "Det spurgte du om?" og håber samtidig på, at han vil fortælle mig, at han faktisk spurgte læreren. John svarer:

> "Nej, for så skulle læreren jo stå og forklare det igen."

Jeg siger: "Det kunne jo også være sådan, at der også var andre, der ikke forstod det." Det svarer John ikke på, men taler videre om selve opgaven.

Beviser volder John mange kvaler, som det fremgår af det følgende citat:

> I: "Hvordan er det så i gymnasiet i forhold til folkeskolen?"
> J: "Det er et stort skift. Det er sådan mere...ja, det går hurtigere. Der er en ny formel, - næsten til hver gang. Især i fysik. Matematiklæreren er startet meget stille og roligt ud. Men der er mange svære ting. Beviser for eksempel."
> I: "Har I haft det før?"
> John: "Nej, og jeg har stadig ikke helt forstået det?"
> I: "Hvad mener du, når du siger, at du ikke helt har forstået det?"
> John: "At jeg ikke kan se, hvad der er meningen med det. Og jeg ved ikke, hvad et rigtigt bevis er. F.eks. det jeg viste dig den anden dag?" [44]

---

[44] Nogle dage forinden havde John i udarbejdet et bevis for Pythagoras sætning, og spurgt mig om det var et "rigtigt" bevis. Klokken ringede til frikvarter, og jeg nåede kun at fortælle, at beviset ikke var korrekt.

For at få John til at fortælle om sin forståelse, siger jeg "Jeg kan ikke huske det", og John fortæller:

> "Jo, der var en trekant, og så kvadrater på nogle tal, og så på samme linje. Men du sagde, at det ikke var rigtigt."

Jeg beder John uddybe, og han fortæller videre:

> "Hvis man tager denne her firkant, det har arealet 16, denne har 9, og denne har 25. Så kan man bevise med denne tegning, hvis man talte op bagefter, at det er rigtigt." John tegner samtidig.

John beder om min kommentar, og jeg siger:

> "Ja, det kan du godt gøre. Og hvad havde du så argumenteret for?"

John svarer i et spørgende tonefald:

> "Pythagoras?"
>
> I: "Nej, du har kun argumenteret for, at det gælder for sidetallene 3,4 og 5."

Nu skifter John fokus og spørger undrende

> "Gælder det ikke for alle tal?"

Jeg lægger mærke til, at John nu har flyttet sig, men kommenterer det ikke. Jeg svarer derimod, som om vi stadig har bevismetoden til behandling og ikke sandhedsværdien af Pythagoras' sætning:

> "Du har sagt at det gælder for 3,4 og 5. Men du bliver nødt til at vise det for alle tal."

John skifter tilsyneladende igen til mit fokus, og siger:

> "Jeg kan selvfølgelig ikke skrive a. Nej det vil jeg ikke kunne tegne på den måde, jeg skal sætte tal ind, for at det virker."

Nu tror jeg, at vi taler om det samme, og at John også er klar over, at samtalen foregår på to planer. Jeg prøver at afrunde og opsummere ved at sige:

> "Ja, med din metode er du nødt til at sætte tal ind. Og så kan du ikke være sikker på, at det gælder for alle retvinklede trekanter?"

Johns næste kommentar omhandler derimod sandhedsværdien. Han siger

> "Jo, gør det ikke?"
>
> I: "Jo, det gør det, men har du argumenteret for det?"
>
> J: "Nej, det skal jeg gøre med alle tal."
>
> I: "Og kan man det?"
>
> John: "Nej, det kan man ikke."

De sidste fire linjer i citatet kan ikke tages til indtægt for, at vi har skabt en fælles forståelse. Mit spørgsmål "Og kan man det?" er sådan et spørgsmål, som matematiklærere kun stiller, når det rette svar er nej.

Citatet i sin helhed tyder snarere på, at Johns forståelse er klart anderledes, end det undervisningen tilstræber. Det er min tese, at Johns forståelse ser således ud:

> "En sætning er en påstand om, at særlige faglige fænomener (retvinklede trekanter eksempelvis) besidder særlige egenskaber."

> "Et bevis kan have to forskellige funktioner. I videnskabsfaget er et bevis en undersøgelse af, om et bestemt konkret eksempel (en retvinklet trekant med sidelængderne 3,4 og5) besidder egenskaben. I skolematematikken giver arbejdet med et bevis eleverne mulighed for at gentage den pågældende videnskabelige undersøgelse."

John's forståelse af kvadratrod

Den følgende episode starter med, at vi sammen ser på et sæt hjemmeregningsopgaver, som John har fået tilbage rettet af læreren. I en reduktionsopgave er John nået frem til udtrykket $a^2 + b^2 + 2ab$, som han har omskrevet til udtrykket $(a + b)^2$. Så har han taget kvadratroden, og resultatet $a + b$ er Johns facit på opgaven. Læreren har skrevet, at det er forkert at tage kvadratroden.

Der ligger information om Johns kvadratrodsbegreb i hans regnefejl, og i hans tolkning af lærerens bemærkning. Jeg spørger, hvorfor han har taget kvadratroden, og svaret lyder:

> "Jeg sætter dem selvfølgelig i kvadratrod for at få det der væk, for at få det længere ned".

John spørger mig gentagne gange i vores efterfølgende samtale om reduktionsopgaven, om det da ikke også er rigtigt, at man godt *kunne* tage kvadratroden af udtrykket $(a + b)^2$, men at det måske nok ikke er nødvendigt. John spørger mig :

> "O.K. Man kan selvfølgelig godt sige, at opgaven er regnet færdig, når man er nået frem til $(a + b)^2$, men er det ikke rigtigt forstået, at stykket ikke bliver forkert af, at man bagefter tager kvadratroden og får $a + b$ som facit? Kan man ikke sige det på den måde, at det bare ikke er nødvendigt at foretage den sidste omregning?" (ikke ordret gengivet)

Jeg spørger så John om, hvad han forstår ved kvadratrod og hvad kvadratrod betyder, men det kan han ikke svare på. Jeg spørger derfor, hvad han har haft om kvadratrødder tidligere, og John fortæller, at han kun har haft ganske lidt om kvadratrødder, faktisk har han kun haft ét ark. Øverst stod "tag kvadratroden", og så var der en lang række tal. John forklarer, at man skulle tage kvadratroden, hvor det var muligt, så 36 blev til 6, men 35 kunne man ikke tage kvadratroden af. [45]

For John er kvadratroden en operation. Det er en operation, som man kan tage i brug, når man af en eller anden grund står over for et kvadrattal. Kvadratrodsoperationen kan man netop anvende, når man møder et kvadrattal. Hermed bliver Johns regnefejl i reduktionsopgaven forståelig og rationel. Endvidere kan det tyde på, at Johns opfattelse af reduktion er, at reduktion er synonym med at gøre mindre. Kommunikationen med læreren omkring hjemmeopgaven har imidlertid hverken bragt John eller læreren til klarhed over baggrunden for regnefejlen, og det er tænkeligt, at Johns forståelse vil kunne forårsage flere fejlagtige regnestykker og nye læringsproblemer.

Johns forståelse af kvadratod er et eksempel på en intern matematisk forståelse uden relation til hverdagsviden, der kan være ophav til læringsproblemer: Ikke alle læringsproblemer har sammenhæng med elevens hverdagsviden.

John stiller ganske andre krav til definitioner end Paul. Paul vil gerne have definitioner præsenteret i rå form, og vil gerne vide, hvilke opgaver man kan løse ved hjælp af dem. John stiller langt større krav. Det ses illustreret i forbindelse med lærerens præsentation af definitionen på x^0, hvorom John fortæller :

> "Læreren skrev definitionen på x i nulte på tavlen. Det ku' jeg ikke se. Så tog læreren nogle taleksempler".

John tegner for mig, hvad der kom til at stå på tavlen, og John fortsætter

> "Det hjalp jo ikke. Jeg prøvede at finde sammenhæng. Det ku' jeg ikke, ku' jeg godt se. På den måde ku' jeg godt se, det gjaldt for alle tal. Vil du ikke nok sige til vores lærer, at vedkommende skal sige noget om baggrunden, når der kommer en definition."

Som for at give sin opfordring et argument med på vejen, tilføjer John

> "Jeg har også hørt nogle 3.g.ere. Den ene sagde at x i nulte var nul, og de blev usikre, de andre også."

John opfatter ikke sin egen uhensigtsmæssige måde at reagere på som den eneste årsag til sine vanskeligheder. Også undervisningen i folkesko–

[45] *Det er ikke sikkert, John husker korrekt, men det er mindre væsentligt. Det er det, der har lagret sig i Johns hukommelse, der er virksomt i hans videre læring.*

len og lærebogsmaterialerne har noget af skylden. Det illustreres i det følgende:

> I: "Hvordan er du vant til at få indført nye ting i regning og matematik? Hvordan blev du fortalt f.eks. hvad produktet af to brøker er? Som sådan var det bare, eller...?"
>
> J:"Ja, meget dårligt faktisk. Det sidder meget dårligt fast. Meget af det var overfladisk. Man fik ikke lov til at regne det igennem, så det sad der. Det var bare sådan HUSK DET, HUSK DET. Vi fik selvfølgelig lov til at regne det igennem, men ikke nok."
>
> I: "Hvad skal der så til?"
>
> J: "At man prøver det en masse gange. Det hjælper noget at skrive det op. Men det vigtigste er at prøve mange gange. Der var for få stykker med det samme. Og det var et dårligt sprog. Det var ikke beregnet for børn. Det var nærmere computersprog. De nye bøger i gymnasiet er næsten det samme. Jeg kan godt lide, at man hører lidt om det. Man læste næsten ikke, det der stod, - hvis der nu stod noget - p.gr.a. sproget. Man gik lige til opgaverne. Det var faktisk ikke til at holde ud at sidde og læse den bog. Den var kedelig. Hvis der nu stod lidt ind i mellem. Sådan og sådan......F.eks. ægypterne brugte det.... Nu skal I prøve det, fordi..... Så er det straks mere spændende.....Og gå ud og lav nogle forsøg."

John føler sig faktisk svigtet af matematiklærerne:

> "Det jeg godt kunne tænke mig, at læreren gjorde var, at når han eller hun stod og fortalte om noget, så også gav et eksempel på hvad det kunne bruges til. Fordi: de ved det jo godt ! Med mange af de ting, jeg har lært, der ved de det jo godt ! Der er nogle gange, hvor jeg godt kan regne ud, hvad det skal bruges til. Men der er nogle ting, hvor jeg synes, at det er noget mærkeligt noget."
>
> I: "Er det mere udtalt i matematik end i andre fag?"
>
> J: "Nej, det er det samme. Nej selvfølgelig, det er værre i matematik, der er mange bogstaver."
>
> I: "Hvad så med kemi for eksempel. Får I at vide i kemi, hvad man skal bruge det til?"
>
> J: "Nej, det gør man heller ikke, men der ved man egentlig, at man kan bruge det til noget. Det er godt at vide om stoffer. Det er spændende."
>
> I: "Det er altså mere gennemskueligt?"
>
> J: "Ja."

John er ikke i tvivl om, at matematik er et vigtigt fag, og at det er vigtigt, at han lærer det. Det er nødvendigt at træne for at få det til hænge fast, men for at kunne træne må han motiveres ved at "høre lidt om det": noget om den historiske baggrund, noget om udbyttet ved at lære det, eller noget om anvendelser. Men John beder ikke læreren om at fortælle, og læreren ved ikke, hvad der skal til for at motivere John.

John har mange spørgsmål og overvejelser, der kunne være potentialer for læring. Men han stiller ikke spørgsmålene, for han er nervøs for, at læreren og de andre elever vil synes, spørgsmålene er underlige. Hvis John skulle have bedre betingelser for at lære, måtte læringsklimaet i klassen forandres. Spørgsmål fra elever må være legitime og må belønnes, og både lærer og elever må opfatte elevernes fejl som værdifulde i læringsprocessen.

3.E ELEVENS EGEN LÆREPLAN

Det er ikke det, at de ikke gør'et. Det er måden altså, at de ikke gør'et på. (Lettere omskrivning af revyvise sunget af Clara Østø).

Det kan ikke undre nogen, at elevernes forestillinger og viden om matematiske begreber og metoder *før* undervisningen adskiller sig fra den matematikkyndige lærers forestillinger og viden. Det kommer nok heller ikke som nogen voldsom overraskelse, at eleverne, mens undervisningen står på, ikke altid hører efter, eller ikke altid arbejder og handler præcis, som læreren beder dem om. Det vil heller ikke forbløffe nogen at få at vide, at ikke alle elever forstår det samme som læreren, selv efter undervisningen er gennemført.

Det er ikke overraskende, at eleverne hverken før, under eller efter undervisningen handler og tænker, som læreren lægger op til, at de skal gøre. Hvad der derimod er overraskende er, at der er særlige mønstre i de måder, eleverne i løbet af undervisningen ikke følger lærerens forventninger og anvisninger på: *Det er ikke det, de ikke gør'et, - det er måden de ikke gør'et på*, der er det overraskende.

Der viste sig mønstre i de måder, hver enkelt elev hørte efter på, handlede på og erkendte på. Mønstrene gik igen i den enkelte elevs matematiske viden og forståelse og diverse "misforståelser". Der viste sig en sammenhæng i den enkeltes elevs læring mellem
-elevens grundlæggende forestillinger dels om matematik, dels om læring,

–elevens ageren i læringsmiljøet, såsom hvad eleven vælger at gøre og ikke gøre, og hvordan læringstilbuddene fortolkes,
–elevens hidtidige og nydannede begrebsopfattelser,
–elevens opfattelse af detaljer i undervisningen og i sin egen læring.

Mønstrene strækker sig således fra holdninger og metakognition til de mindste detaljer i læringen, og de vedrører på central måde den faglige forståelse. En elevs forståelse af lineære funktioner, som overfladisk virker som uden sammenhæng med noget andet, er således påvirket af elevens fagopfattelse og læringsopfattelse.

Jeg havde ikke ventet at se mønstre af denne art. Det føler mig sikker på, at det ikke er noget, jeg har induceret i eleverne. Mønstrene forbløffede mig. Jeg kan bedst beskrive forbløffelsen med nogle fysiske metaforer: Mønstrene trængte sig på, de skubbede til mig, de fik mig til at miste orienteringen, de slog mig omkuld. De foruroligede mig og tog min tid.

Det tog tid, fordi mønstrenes udbredelse og betydning nærmere måtte undersøges, og fordi mønstrene trængte sig på ved at stille spørgsmålstegn ved en række af mine gamle forståelser af læring og af, hvad der er afgørende for læring: Mønstrene peger i retning af, at motivation ikke blot er afgørende for, om der finder læring sted eller ej, men at motivation indholdsmæssigt er afgørende for selv små detaljer i læringen. Mønstrene peger i retning af, at motivation ikke på nogen let måde kan tilvejebringes i individet udefra, men involverer individets identitet, holdninger og viden. Videnselementet er hverdagsviden og fungerer som grundlæggende paradigmer. Paradigmerne er meget vedholdende, idet de på een gang fungerer skjult og i sammenhæng med kerner i identiteten.

I analysearbejdet er det et basalt værktøj at rette sin opmærksomhed mod såvel ligheder som forskelle. Man fremanalyserer dels ligheder, dvs forhold som synes at optræde flere steder enten i det enkelte interview, i forbindelse med den enkelte interviewperson eller i forbindelse med det enkelte sagsforhold. Og man fremanalyserer dels modsætninger i interviewet, personen eller sagsforholdet. Det er imidlertid vanskeligt udover princippet om ligheder og modsætninger at opstille generelle principper eller analyseskemaer. Spørgsmålene, man stiller til empirien, vil afhænge af undersøgelsens overordnede formål og af empiriens indhold. [46]

[46] *Kvale, Steinar (1984) "Om tolkning af kvalitative forskningsinterviews", Tidskrift for Nordisk Forening for Pædagogisk Forskning, nr.3–4, s.55–66.*

Undervejs har jeg formuleret teser, der har provokeret analysen frem [47]. Eksempelvis formulerede jeg ud fra de indledende interviews en *modsætning* mellem Pauls og Julies optagethed: "Paul er optaget af matematik i sig selv, mens Julie er optaget af anvendelser af matematik".

Noget af den senere empiri pegede i andre retninger. Julie fortalte mere begejstret end Paul om, hvad de havde lært om funktioner, og begge fortalte om noget internt matematisk. Paul har som kritikpunkt mod undervisningen først og fremmest, at han ønsker sig flere eksempler på, hvordan man kan regne noget ud uden for matematikken selv. Jeg måtte spørge, om det snarere var Julie, der var optaget af matematik i sig selv, mens Paul var optaget af anvendelser? Men også dette spørgsmål måtte besvares med nej.

Det er ikke afgørende for nogen af de to elever, hvorvidt det er matematik i sig selv, eller det er anvendelser af matematik, der er på undervisningens dagsorden. Det er forskelligt, hvad de to elever retter deres opmærksomhed imod, men den første grove tese kan ikke forklare denne forskel. Det viser sig derimod, at Julie er interesseret i både matematikken selv og i anvendelser, og det gælder også for Pauls vedkommende, at han er interesseret i begge dele. *Men* det viser sig,
- at for Julie er interessen i begge dele drevet af ét og det samme grundlæggende spørgsmål,
- at for Paul er interessen i de to områder hængt op på ét og det samme grundlæggende spørgsmål, og
- at Pauls spørgsmål er et andet end Julies spørgsmål.

Som øvrige eksempler på modsætninger, der har været brændstof på analysen, kan jeg nævne følgende:

Modsætninger i materialet kan være brændstof på analysen, som det ses af det følgende eksempel:

---

[47] *Det lange tidsmæssige forløb i denne empiriindsamling giver nogle særlige muligheder for at se strukturer, sammenhænge og modsætninger. Undervejs gennem hele forløbet kan man formulere teser, der kan nå at øve indflydelse på empiriindsamlingen. Teserne formuleres og præciseres og udfoldes, selv om de ikke kan have nogen færdig form. Det er ikke et kriterium, at man på det pågældende tidspunkt kan fæste lid til teserne. De er snarere arbejdsværktøjer, som angiver nogle muligheder og som kan provokere analysen fremad.*

Paul fremstod i de første interviews som en elev, som først og fremmest ønsker at gøre, hvad skolen kræver af ham og beder ham om. De betegnelser, som umiddelbart forekom at passe bedst, var betegnelser som "tilpasset" og "instrumentelt indstillet" og "instrumentelt læringsrationale". Han gør, hvad han bliver bedt om: lytter til lærerens gennemgang, går igang med at regne, når læreren beder om det, passer sine lektier.

Senere i undersøgelsen er der situationer, der er i modstrid med dette billede: Paul hører tydeligvis ikke efter. Jeg må derfor efter timen spørge til det. Jeg fortæller, at jeg har lagt mærke til, at han ikke hørte efter, og jeg spørger, hvordan det kan være. Hvis det tilpassede og instrumentelle er et grundlæggende træk hos Paul, ville han måske opleve spørgsmålet som en anklage, spørgsmålet ville måske fremkalde nervøsitet eller skyldfølelse, og svaret ville måske være tøvende. Pauls svar kommer imidlertid prompte og er klart formuleret. Der er ikke antydning af undskyldning eller bortforklaring i svaret, men derimod en klar begrundelse for, hvorfor han ikke hørte efter: For det første finder han det *unødvendigt* at lytte til en ny metode, når de dagen før havde lært en anden metode til samme opgavetype, for det andet er hanr bange for at blive forvirret og kan komme til at blande metoderne sammen. Her er det ikke ønsket om at gøre, som skolen vil, der er styrende for Pauls adfærd. Det er Pauls matematiksyn og egne læringserfaringer, som bestemmer, hvorvidt han hører efter eller ej.

I et lignende tilfælde havde læreren startet en udledning af en formel på tavlen, og satte eleverne til individuelt at færdiggøre udledningen. Det gør Paul ikke, men kigger blot ud i luften. Igen tager jeg det op efter timen, og Paul fortæller klart og tørt og uden tøven, at det var ikke vigtigt, og han gør rede for, hvorfor det ikke er vigtigt.

Disse episoder er medvirkende til, at jeg ser Pauls adfærd i læringsarbejdet stærkt præget af hans indholdsmæssige forståelse af, hvad matematik og matematiklæring er for noget. For Paul er matematik *at regne opgaver*. *Nye begreber er værktøjer til at regne nye slags opgaver med*. Udledningen angik processen at nå frem til en formel, og giver ikke i sig selv nye værktøjer til at regne opgaver med, og derfor "er det ikke vigtigt" at deltage i processen, som Paul selv udtrykker det.

Det var i første omgang mønsteret i Pauls læring, jeg blev opmærksom på, og jeg måtte derefter analysere i forhold til spørgsmål som de følgende:

a) Er det noget særligt ved Pauls læring, at der synes at være en indre sammenhæng, som svarer til et grundlæggende paradigme?
b) Hvis der ikke gælder noget lignende hos de tre andre, hvordan kan det så være? Kan det så hænge sammen med elevernes hverdagviden? Kan det hænge sammen med deres faglige ballast?
c) Hvis der gælder noget lignende hos de tre andre, hvilke lighedstræk og forskelle er der så mellem mønstrene indbyrdes? Hvordan giver de sig udtryk? Hvilken betydning kan de have? Hvad konstituerer dem? Hvordan kan de være skabt?

I hver af de tre øvrige læringshistorier er der lighedstræk og samklange, der peger på en lige så stærk indre sammenhæng som hos Paul.

For Karen er det et gennemgående træk, at læringen er påvirket af hendes opfattelse af, hvordan hun klarer sig med hensyn til at leve op til skolens krav. Hun opstiller ikke selvstændigt krav til sin egen forståelse, endsige har ønsker om hvad undervisningen kunne tilbyde hende. I stedet ser hun skolefaget som et system, der stiller krav til hende. Hun ønsker at opfylde skolens krav, og retter sin opmærksomhed imod, hvorvidt hun opfylder disse krav.
Karens læring er på lige så gennemgribende måde præget af hendes opfattelse af skolefaget, specielt hvad angår hvilken rolle begrundelser spiller. Hun mener, at begrundelser er uvæsentlige: "Det kan være lige meget med hvorfor dit og hvorfor dat". Det væsentlige er, om resultaterne på opgaverne bliver korrekte, og det kan man få afklaret ved at spørge læreren eller ved at slå op i en facitliste. Når Karen i de første samtaler taler om, at hun bedre kan lide matematik end sprogfag, fordi matematik er logik, mens man skal lære en masse udenad i sprogfagene, så bruger hun termen "logik" i en særlig og snæver betydning. Med "logik" mener hun, at der eksisterer klare metoder til forskellige typer af opgaver, og at det opleves, som om arbejdet med en given opgave kører afsted af sig selv, når blot man til en start har fået valgt den rigtige metode. Karens opfattelse af skolefaget matematik som noget, hvori begrundelser er uvæsentlige, er imidlertid skævt i forhold til gymnasieskolefaget og kommer dermed til at fungere som moskitonet for hendes læring.

Hverken Karens opfattelse af sig selv som elev eller hendes fagopfattelse kan alene forklare hendes læringsvanskeligheder. Det følgende eksempel illustrerer, hvorledes en kombineret forklaring øger forståelsen af hendes læring:

I en opgave skal eleverne tegne grafer for nogle lineære funktioner, hvis algebraiske udtryk er givet. [48] Karens svar på opgaven er korrekt. Hun har brugt en anden metode end læreren ønsker, men det har hun omhyggeligt sørget for, at man ikke kan se af hendes besvarelse.

Hvis det alene var *hendes ønske om at følge skolens anvisninger*, der bestemte hendes læring, så ville hun lære sig den nye metode, og hvis det ikke lykkedes for hende, så ville hun stille krav om at få hjælp til at sætte sig ind i dem. Det gør hun ikke, hun lader det se ud som om, at hun har tilegnet sig den nye metode.

Ifølge Karens opfattelse af skolefaget er det resultatets korrekthed, der er det eneste væsentlige, mens det er ganske uvæsentligt, om man har brugt den ene eller den anden metode. Hvis det *alene* var *hendes fagopfattelse* der var bestemmende, så kunne man forestille sig to muligheder:
- hun ville ikke lægge mærke til en enkelt lærerbemærkning i en time om, at de skulle bruge den nye metode, men blot bruge sin egen, eller
- hun ville lægge mærke til lærerbemærkningen, og at hun ville spørge læreren, hvorfor vedkommende værdsatte een metode og ikke en anden, når nu de begge leder til samme resultat, og man kunne forestille sig, at hun ville spørge, om de ikke kunne undvære metoden.

Karen gør ingen af delene, og det kan således ikke alene være hendes fagopfattelse, der bestemmer hendes adfærd.

Med *en kombineret forklaring* bliver denne detalje i Karens læring imidlertid forståelig: Det bliver forståeligt, hvis det er hendes fagopfattelse, der bestemmer, at hun koncentrerer sig om at få tegnet graferne, sådan som opgaveteksten direkte beder om. Det bliver forståeligt, hvis det er hendes ønske om at fremstå som en god elev i lærerens øjne, der gør, at hun bruger tid på at få det til at se ud som om, hun har brugt lærerens metode, selv om hun reelt er ganske ligeglad med at lære at bruge lærerens metode.

For Johns læring er der et gennemgående behov for at have kendskab til, hvad der måtte være meningen med stoffet. Han formulerer det selv i forbindelse med sin motivation for at gå i gang. Han forstår det som en

[48] *Karen har, som hun plejer i folkeskolen, indsat to x-værdier i forskriften, afsat de to punkter i et koordinatsystem og tegnet en ret linje igennem. Derefter har hun visket punkterne ud, så ingen kan se, at hun har brugt metoden fra folkeskolen i stedet for metoden med det algebraiske udtryks koefficienter, som de lige har fået gennemgået i gymnasiet, og som læreren siger de skal bruge.*

slags adgangsbillet, som skal være i orden, før han kan deltage i læringsarbejdet. Analysen har vist en overensstemmelse mellem hans formulering og den faktiske læringsproces, så det må siges at være korrekt, at det er en nødvendig adgangsbillet.

Men der er mere i det, end John selv er bevidst om. "Hvad meningen er" optræder ikke alene som en nødvendig adgangsbillet, men har en langt mere vidtrækkende indflydelse. Betydningen og meningen øver også indflydelse på læringen, efter at han *er* gået i gang. Det er bærende for Johns læringsarbejde i alle dets faser, at han undervejs gør sig forestillinger om, hvad der eventuelt kan være betydningen og meningen. Hvad er meningen med, at vi skal arbejde med dette og hint i skolen? Hvad vil de voksne, der har bestemt pensum og skrevet lærebøgerne, gerne have, at vi lærer? Hvad kan være meningen med beviser? Hvorfor er x^0 lig med 1?

For nogle elever er eksamen en tilstrækkelig begrundelse for læringsarbejdet. For nogle elever er det tilstrækkeligt, at det faglige indhold gør dem i stand til at løse nye slags matematikopgaver. For nogle elever er det tilstrækkeligt, at matematikopgaver er morsomme eller formuleret som gåder. Ingen af delene er tilstrækkelige for John. Han ønsker at lære om autentiske anvendelser, og han har brug for at få autentiske forklaringer på baggrunden for de matematiske tankegange, som han præsenteres for.

For Julies læring er det gennemgående, at hun er optaget af, hvad der er det nye. Hun fortæller, at hun er skuffet over gymnasiets anvendelsesopgaver. Intet af det, de har haft i matematik i gymnasiet de første måneder, har givet en *ny indsigt i verden*, der kan måle sig med den nye indsigt, hun har hentet sig i forbindelse med folkeskolens problemregningsopgaver. Også inden for matematikkens eget univers er det det nye, der fascinerer og optager hende: eksempelvis at hun får kendskab til funktioner, hvis grafer ikke er lineære. Også i relation til de enkelte begreber er hun optaget af, hvad nyt man kan få at vide med dette redskab, og hvorvidt man kunne få det samme at vide på andre måder. Hun er fascineret af det nye, og det gælder således både i forbindelse med anvendelsesopgaver og i forbindelse med begreber, ligesom hun aktivt reflekterer over nødvendigheden af de nye matematiske begreber og metoder.

Også Julies opfattelse af hvad læringsarbejde består i, ligger som en gennemgående bevæggrund for hendes adfærd. Julie forlader sig på, at hun kan foretage sit læringsarbejde ved at bemærke sig, hvad læreren siger og gør og ved at gøre, hvad læreren foreslår, eleverne skal gøre. Julie forlader sig på, at læreren præsenterer de nødvendige oplysninger, og Julie opfatter det som sit læringsarbejde at systematisere lærerens præsentation. Julie har delvist lagt sin læring og ansvaret for den i hænderne på læreren. Julie sidder på bagsmækken, og ikke på kuskesædet:

- Julie mener, det er en god ide at skrive overskrifter til sine noter, for så kan man bruge dem senere, - alligevel er det ikke altid, hun gør det. Om det alene er, når læreren meddeler en overskrift, kan jeg ikke afgøre ud fra materialet.
- Det er ingen hjælp for Julie at få at vide, at navnet på en metode hedder "lige store koefficienters metode": Julie ved ikke hvad termen "koefficient" står for, og hun spørger ikke om det.

Julie systematiserer lærerens præstation ved at lede efter karateristiske træk ved lærerens gennemgang. Dermed får hun skabt sig den opfattelse, at faktoriseringsmetoden kræver, at størrelserne er i anden, hvilket er en ganske relevant systematisering at foretage udfra lærerens gennemgang. [49]

Materialet viser en indre sammenhæng i hver enkelt elevs læringshistorie, og materialet viser tydelige forskelle mellem læringshistorierne. Den indre sammenhæng vil jeg begrebsliggøre under termen "elevens egen læreplan".

Man kan med en bevægelsesmetafor sige, at det er elevens egen læreplan, der er chauffør på læringen, og som giver dynamikken. Det er elevens egen læreplan, der afgør, hvorvidt der startes, hvor hurtigt der køres, og hvilken vej. At elever har forskellige læreplaner betyder imidlertid ikke, at de ikke kan køre de samme steder hen.

Elevens egen læreplan består - blandt andet - af et formål med læringen. Analogt til at skolens officielle læreplan har et formål med undervisningen, indeholder elevens egen læreplan et formål med at være elev. Formålet med læringen er imidlertid ikke nødvendigvis bevidst for eleven, eller muligt at sprogliggøre for eleven.

---

[49] *Det er således ikke som i studiet af Lucy, hvor Lucy alene synes at affotografere lærerens adfærd og operationer for senere at kunne kopiere dem. Der er snarere tale om, at Julies bestræbelse på at systematisere lærerens gennemgang svarer til studiet af, hvorledes Benny systematiserede på computerprogrammets og lærerens feedback på Bennys arbejde.*

Formålet i Julies læreplan er at lære nyt om verden og om matematik.

Formålet i Pauls læreplan er at lære at besvare nye former for matematikopgaver.

Formålet i Johns læreplan er at lære noget om meningen med matematik, hvilken betydning har matematik i den aktuelle voksenverden, hvad har meningen været historisk med at udvikle matematik, og hvad er meningen med skolefagets pensum.

Formålet i Karens læreplan er at blive god til at finde facitter på matematikopgaver.

Begrebet "elevens egen læreplan", der er udviklet i tæt sammenhæng med den empiriske undersøgelse, behøver en videre begrebsmæssig afklaring. Hvorledes forholder begrebet sig eksempelvis til "den officielle læreplan" og til begrebet "den skjulte læreplan".

Begrebet "elevens egen læreplan" er imidlertid tilstrækkelig formuleret til at indgå i analysen af problemstillingen om hverdagsviden's funktioner som moskitonet og sommerfuglenet. Vi kan nu opdele hverdagsviden i to hovedkategorier:

- hverdagsviden, der ligger som baggrund for elevens læreplan og
- hverdagsviden, der ad anden vej øver indflydelse på læringen.

KAPITEL 4. ANALYSE

Den teoretiske litteratur og de empiriske undersøgelser spiller sammen, idet litteraturen kan *belyse* empirien, og idet empirien kan *uddybe eller komplettere* litteraturen. Med baggrund i teori fra kapitel 2 og egne empiriske undersøgelser fra kapitel 3 kan der nu foretages en analyse af problemstillingen:

"Eksisterer der hverdagsviden, der fungerer som sommerfuglenet og moskitonet i forhold til danske unges faktiske matematiklæring, eller som potentielt kunne komme til at gøre det ?".

Megen hverdagsviden øver indflydelse på unges læring i skolen. Ved at analyse hvilken hverdagsviden, der øver hvilken indflydelse, kan man skabe nye og optimistiske forklaringer på læringsproblemer, som i øvrigt er uforklarlige eller kun kan forklares med faktorer, der ligger uden for lærerens og elevens aktuelle indflydelse. Læreren tror måske problemerne skyldes elevens manglende evner, manglende flid eller manglende velvilje. Eleven tror sig måske uegnet til at lære matematik, får måske unødige sår i sjælen eller tror, at matematik er mystisk og knyttet til særlige former for intelligens. Mine undersøgelser tydeliggør, at problemstillingen er kompliceret, og at man ikke kan forvente at kunne skabe pæne og enkle modeller for den, men det ere en klar konlusion, at problemstillingen er relevant. Det er centralt for skoleundervisningen at få skabt øget opmærksomhed og større indsigt i, hvorledes hverdagsviden kan øve positiv og negativ indflydelse på elevers matematiklæring.

4.A. INGEN PÆNE OG ENKLE MODELLER

Det har vist sig vanskeligt at skabe en effektfuld model at præsentere undersøgelsernes resultaterne i. Jeg har arbejdet med flere forskellige forslag til pæne og enkle modeller, men alle lider af den skavank, at der er væsentlige undersøgelsesresultater, der falder uden for modellen, eller kan optræde flere steder i den:

Modeller, der opdeler i hverdagsviden, der fungerer som moskitonet, og hverdagsviden, der fungerer som sommerfuglenet, er uhensigtsmæssige. Der er en hel del hverdagsviden, der kan optræde i begge roller: som moskitonet over for nogle former for læring og som sommerfuglenet over andre former for læring. Det gælder for eksempel hverdagsviden om at matematik er at regne opgaver.

Modeller, der opdeler i hverdagsviden, der fungerer ubevidst, og hverdagsviden, der fungerer bevidst, er uhensigtsmæssige. Det gælder ikke generelt, at det ubevidste er forhindrende, og det bevidste er fremmende. Men ubevidst hverdagsviden, der virker forhindrende, indebærer en risiko for en mistolkning af elevernes læring og læringsproblemer.

Modeller, der opdeler hverdagsviden efter dens genstand, det vil sige hvad den handler om, er mangelfulde. De kan ikke indfange de kvalitative forskelle mellem matematisk begrebsdannelse og hverdagsviden, (som påpeges af Skemp og af Vygotsky), og de kan ikke indfange forskellene i sprogbrug.

Modeller, der indfanger generelle forskelle mellem hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse, såsom sprogbrug og begrebernes karakter, er mangelfulde. De kan for eksempel ikke indfange betydningen af elevens egen læreplan.

4.B. HVERDAGSVIDEN I SEKS KATEGORIER

Der kan skabes en model over hverdagsviden med seks kategorier, som analysen bedst "falder på plads i". De seks kategorier er af forskellig natur.

Fire kategorier opdeler efter *genstanden for hverdagsviden,* det vil sige hvad det er, hverdagsviden omhandler:

> I. Hverdagsviden *om* hvad faget handler om, og hvad det gør godt for, – herunder hvilken rolle det spiller i uddannelsessystemet.
>
> II. Hverdagsviden *om* hvad skolen vil have, at eleverne skal lære og gøre, og *om* hvad det egentlig vil sige at lære.
>
> III. Hverdagsviden *om* argumentation og rationalitet.
>
> IV. Hverdagsviden *om* specifikke genstandsfelter, der både spiller en rolle ved læring af de begrebsmæssige kerner, og også spiller en rolle i forbindelse med anvendelser og modellering.

De to første kategorier omhandler hverdagsviden, der ligger til grund for elevens læreplan.

To kategorier opdeler efter *karakteristiske træk, der adskiller hverdags-viden fra matematisk begrebsdannelse:*

A. Første karakteristiske træk er begrebsstrukturen, hvor hverdagsviden og matematisk viden klart adskiller sig. Matematisk viden har som karakteristisk træk at begreber bygges på begreber, og det er ikke tilfældet i hverdagsviden.

B. Andet karakteristiske træk er brugen af sprog, hvor der dels eksisterer en række forskelle mellem hvilke roller sproget optræder i, henholdsvis i hverdagsviden og i matematik, og hvor der dels er termer, der optræder både i hverdagsviden og i matematik, men hvor betydningen ikke er identisk.

Modellen bliver præsenteret i det følgende. De seks kategorier bliver udfoldet, og der bliver givet illustrerende eksempler på
- hvilke dele af matematiklæringen den pågældende hverdagsviden øver indflydelse på
- hvorvidt det er som moskitonet eller som sommerfuglenet, hverdags-viden gør sig gældende
- hvorvidt indflydelsen er betinget af specielle forhold i undervisningen samt
- hvorfra den pågældende hverdagsviden stammer.

Som opsamling udfoldes begrebet "elevens egen læreplan", og der præsenteres en model over sammenhængen mellem på den ene side hverdagsviden i de seks kategorier og på den anden side seks facetter ved matematisk begrebsdannelse.

4.C OM MATEMATIK

Der kan optræde mange forskellige former for hverdagsviden om, hvad matematik omhandler, og hvad matematiks funktioner er. For eksempel
-matematik er et redskab, der kun har mening i skolen
-matematik er tankeformer, der repræsenterer intelligens
-matematik er at regne opgaver, som andre har stillet
-matematik er et sæt regler, som er fastlagt af andre
-matematik er et instrument for menneskelige hensigter

Undersøgelsen giver mulighed for en nærmere beskrivelse af de tre sidstnævnte.

At regne opgaver, andre har stillet

En hverdagsviden om, at matematik er at regne opgaver, som andre har formuleret, kan fungere som et kraftfuldt sommerfuglenet over for visse dele af matematiklæringen og som et ligeså kraftigt moskitonet over for andre dele.

Den vil være sommerfuglenet over for de dele af undervisningen, der fremstår som teknikker og værktøjer til at løse opgaver. Eleven vil dermed først og fremmest oparbejde færdigheder:
- dels tekniske regnefærdigheder
- og dels færdigheder i at begå sig i fremmedbestemte situationer, hvor man skal bearbejde en problemstilling, som andre har formuleret, og hvor man ikke selv har indflydelse på arbejdets indhold.

Den selvsamme hverdagsviden kan fungere som moskitonet over for læring, der ikke umiddelbart leder frem til at regne bestemte slags opgaver, men hvor der er et andet og måske bredere perspektiv på stoffet. Det kan gælde beviser, og det kan gælde situationer, hvor det ikke er indlysende, hvilken slags matematiske metoder der kan anvendes, og hvor eleven selv skal formulere en matematikopgave til behandling af et problem.

Hvor stammer en sådan hverdagsviden fra? Den er ikke genetisk bestemt eller en del af den primære socialisering. Den er skabt som en medlæring i skoleundervisningen. Hvis størsteparten af de aktiviteter, som eleverne er engagerede i, består af opgaver, der er færdigformuleret af læreren eller af lærebogen, sker der en tilvænning. Tilvænningen kan etablere en hverdagsviden om, at sådan er skolematematik. Muligvis oplever eleven det som noget naturligt og som det eneste mulige, og "matematik er at regne opgaver, som andre har formuleret" kan dermed blive en sekundær intuition, der skjult påvirker elevens videre læring.

Et sæt regler, fastlagt af andre.

Undersøgelsen viser elever, der i større eller mindre udstrækning har en hverdagsviden, hvor matematik opfattes som regler. Eleverne ser ingen grunde til at bekymre sig om, hvorfor og hvordan reglerne er fastlagt. Reglerne er fremmedbestemte og forekommer eleven uigennemskuelige og usammenhængende. Det udelukker ikke en forestilling om, at *andre* kan finde sammenhænge og mening i reglerne, eller at reglerne er opfundet eller opdaget af andre, der er særlig intelligente eller særlig magtfulde.

At lære sig matematik bliver synonymt med at lære regler udenad. Man må bide mærke i ydre kendetegn ved reglerne og ved de situationer, de præsenteres i, og lære dem udenad. Dermed bliver en sådan hverdagsviden sommerfuglenet over for typeopgaver. Læringsmetoden er yderst virksom og effektiv, - og i mange situationer giver den et godt resultat, målt efter antallet af rigtige facitter.[50] Metoden indebærer imidlertid en stadig risiko for fejlregninger, som kan være yderst vanskelige at opdage.

En elev, hvis eneste fremgangsmåde er at lære regler og ydre kendetegn udenad, må siges at være dårligt påklædt til mere avanceret matematikundervisning. Det er som at gå ud i snevejr med sandaler: det er besværligt, og det kan hurtigt blive ubehageligt. Opfattelsen fungerer som moskitonet i forhold til sider af matematiklæringen, som bygger på en egentlig begrebsforståelse. Det gælder anvendelsesopgaver, modellering og tilegnelse af nye begreber, der bygger på underliggende begreber.

Hvor stammer en sådan hverdagsviden fra? Hverdagsviden "matematik er at regne opgaver" må skoleundervisningen i dag bære eneansvaret for. Imidlertid kan en hverdagsviden om, at "matematik er et sæt regler, der er fastsat af andre, og jeg har ingen muligheder for at finde ud af hvordan", blive næret ikke alene i en skoleundervisning, hvor eleverne ikke får forankret regnereglerne, men også gennem forældrenes erfaringer med skolefaget, og gennem samfundsmæssige myter om sammenhængen mellem matematisk kompetance og intelligens. Det er ikke alene skoleundervisningen idag, der producerer denne hverdagsviden, også tidligere generationers skoleerfaringer spiller en rolle, så der er indbygget inerti.

---

[50] *Ifølge R.R.Skemp (1989) er der tre fordele ved denne læringsmetode, som han betegner "instrumentel læring":*
1. Isoleret betragtet er instrumentel matematik let at lære. Desuden er der emner, som det er vanskeligt at skabe sig en egentlig forståelse af, som f.eks. multiplikation af to negative tal og division med brøk, men hvor der er regler, som er lette at huske. Instrumentel læring giver hurtigere og nemmere rigtige svar til et ark regnestykker end bestræbelser på at skabe forståelse.
2. Man må ikke undervurdere betydningen af elevens oplevelse af succes. Oplever eleven sig som matematikdumme, bliver selvtilliden lettest repareret gennem instrumentel forståelse.
3. Instrumentel læring involverer ikke så meget viden, og derfor kan man ofte hurtigere og sikrere få det korrekte svar. Også professionelle matematikere anvender af og til matematik på en instrumentel måde.

De to opfattelser "matematik er at regne opgaver, andre har formuleret" og "matematik er regler, andre har fastlagt" har som fællestræk, at matematik og matematiske tankegange opfattes som fremmedbestemt. Den samme person kan godt have begge opfattelser, men det er ingen logisk nødvendighed. En person kan mene, at matematik er at regne opgaver som andre har stillet, men at *matematikkens redskaber er meningsfulde* og sammenhængende og forståelige. Der kan også findes personer, der opfatter reglerne som fremmedbestemte og statiske, men alligevel opfatter *opgaverne som personligt meningsfulde, fulde af intentioner og med relevante konklusioner.*

Instrument for menneskelige hensigter

En hverdagsviden om at matematik er et instrument for menneskelige hensigter, opfatter matematik som et socialt produkt, og er i kontrast til en hverdagsviden om at "matematik er at regne opgaver, som andre har formuleret". De mennesker, der har skabt matematikken, må have haft en mening eller en hensigt med at gøre det. De må have været interesserede i at finde ud af noget, eller i at blive bedre til noget. Noget lignende må være tilfældet, når matematik anvendes. Endelig må der bag beslutninger om pensum og design af undervisningsmaterialer ligge hensigter om, hvad skoleeleverne kan og bør lære, og om hvordan de senere som samfundsborgere skal gebærde sig med deres matematikviden.

"Matematik er et instrument for menneskelige hensigter" vil optræde som *moskitonet* i forhold til en undervisning, hvor elevens rolle er at udføre fremmedbestemt arbejde, og hvor matematikken præsenteres som et selvstændigt system uden forbindelser til andre systemer og fænomener. "Matematik som instrument for menneskelige hensigter" kan være *sommerfuglenet* over for alle andre sider af matematik end fremmedbestemte typeopgaver. Den kan give anledning til undren og fostre spørgsmål, som "Hvad er meningen med beviser?", "Hvorfor er x^0 lig med 1?", "Hvorfor er der mere end én definition på middelværdi?" Overvejelser over sådanne spørgsmål kan fungere produktivt i læringen, og kan støtte begrebsdannelsen, give den fylde og forøge transferværdien.

Hvor stammer denne hverdagsviden fra? Den kan stamme fra erfaringer med skolematematik, hvor eleverne kan give det faglige indhold en personlig værdi, der rækker udover institutionens krav. Denne hverdagsviden kan også have sit ophav uden for skolematematikken. Er barnet vant til at indgå i meningsfulde aktiviteter og til at voksne interesserer sig for dets intentioner, kan barnet overføre disse erfaringer til også at gælde for matematiske aktiviteter.

4.D OM UNDERVISNINGENS KRAV OG TILBUD

Det er betydningsfuldt for alle dele af matematiklæringen, hvilken hverdagsviden de involverede lærere og elever har om undervisningens krav til eleven, om hvilke tilbud om læring der gives, og om hvad det vil sige at lære. Undersøgelsen peger på tre afgørende forhold:

1. Mener man, at den enkelte – i kraft af sit samspil med andre – selv har indflydelse på og ansvar for sin læring, eller lægger man læringen i andres hænder? En forestilling om, at læring er bestemt udefra – enten i kraft af, at det ligger i generne eller afgøres i de første leveår eller første skoleår, er sommerfuglenet så længe læringen glider som i olie. Er der læringsvanskeligheder, fungerer forestillingen derimod som moskitonet, idet den blokerer for at søge forklaringer andre steder. Desuden kan forestillingen indebære en tro på, at har man én gang oplevet nederlag, så vil man også gøre det fremover: enten kan man, eller også kan man ikke.

2. Hvilke værdier tillægger man undren, fejl, fejltagelser, usikkerhed og såkaldte "dumme" spørgsmål? I en skoleklasse dannes en kultur, der værdisætter det som normalt og produktivt for læringen, eller som unormalt og uproduktivt. Hvis det vigtigste er at undgå at svare forkert og at spørge "dumt", er man ansvarlig over for sit image, men ikke for sin læring. I et gruppeinterview med 8 elever i slutningen af 2.g. i Karens, Johns, Pauls og Julies klasse problematiserede jeg betegnelsen "karakterræs", som en af dem havde brugt. Eleverne bedyrede, at betegnelsen var relevant, og at de alle på nær én, i hver eneste time sad med et forståelsesspørgsmål, som de ikke stillede til læreren af frygt for, at det ville trække ned i karakter. [51]

3. Hvilke indikatorer har man på "god læring"? Det er afgørende for læringen, hvorvidt man anser hurtighed og rappe svar, slid og arbejde eller refleksion for at være ydre tegn på en succesfuld læring. Ek–

[51] *Se i øvrigt den sammenlignende undersøgelse mellem læringsmiljø i henholdsvis amerikanske, kinesiske og japanske klasseværelser i J.W.Stiegler & M.Perry's artikel "Mathematics Learning in Japanese, Chinese, and American Classrooms" fra 1988. Undersøgelsen peger på at det at man ikke tager elevernes fejltagelser alvorligt kan være en mulig forklaring på, at amerikanske elever ofte klarer sig dårligt ved internationale tests.*

samensystemet med skriftlige tidsbegrænsede prøver fremmer opfattelsen af, at hurtighed er den væsentligste indikator på "god læring".

Det blev i 4.C præciseret, at en hverdagsviden om at matematik er instrument for menneskelige hensigter *rummer en mulighed for* sommerfuglenet for alle dele af elevens læring på nær typeopgaver. Hvis muligheden skal blive en realitet, må både lærer og elev være aktive. En hverdagsviden om at undervisningen indebærer, at eleven ikke fortæller om sin undren, overvejelser og spørgsmål, fungerer som moskitonet, mens det modsatte vil fungere som sommerfuglenet.

Det er nødvendigt, at eleven får feedback og yderligere input gennem arbejdet med undervisningsmaterialerne og gennem kommunikation med andre elever og med læreren. Det er afgørende, at læreren forholder sig til elevens undren, overvejelser og spørgsmål og tilkendegiver, om overvejelserne kan virke produktivt i den aktuelle læringssituation, eller eleven bør forlade dem og eventuelt komme tilbage til dem en anden gang. Det er ikke noget, eleven selv kan pusle og gruble sig frem til eller læse om i lærebogen. Nogle spørgsmål vil læreren ikke være i stand til at svare på, og det må læreren så fortælle eleven.

4.E OM RATIONALITET OG ARGUMENTATION

I undersøgelsen er der eksempler på elever, der generelt ikke interesserer sig for argumenters udseende og holdbarhed, men kun for teknikker og regneregler. For Paul og Karen synes det ligegyldigt med "hvorfor dit og hvorfor dat". Det synes dem også ligegyldigt at lære om flere metoder til den samme problemstilling, hvis man allerede er i besiddelse af én, der virker. Der er også eksempler på elever, der i visse situationer stiller større krav til argumentation end undervisningen tilbyder, og i andre situationer finder argumentation unødvendig, som det gælder for John.

Disse opfattelser er analoge til argumentationer i hverdagsviden og til hverdagsviden om rationalitet, hvilket tyder på, at hverdagsviden om argumentation og rationalitet fungerer som metaforer i elevernes arbejde med skolematematik.

Hvis juletræet brænder, og man har en skumslukker stående i nærheden, så bruger man skumslukkeren. Man behøver ikke tænke på, hvordan skumslukkeren virker eller på, hvordan skumslukkeren er i forhold til en spand vand. Når noget fungerer og virker efter hensigten, så er det ofte tilstrækkeligt. Det er alene, når der er noget, der ikke virker, eller hvis man skal bruge noget lignende i en anden sammenhæng, det er relevant at finde bag om fænomenet selv.

Også hverdagsviden om spil kan ligge til grund for en manglende interesse for argumentation. Når man spiller spil, er der – bortset fra når man selv opfinder nye spil – en række regler, som man skal rette sig efter og følge til punkt og prikke. Reglerne er autoriteten, står ikke til diskussion, kan ikke ændres, og der gives ingen informationer om, hvorfor reglerne har det udseende de har. Spillerne skal skaffe sig kendskab til reglerne og træne sig op til at kunne følge dem.

Vi kan slet ikke fungere i vores dagligdag – og samfundet ville bryde sammen, hvis vi altid bad om at få alle argumenter forelagt. Det er en nødvendig bestanddel i hverdagsviden af og til at forlade sig på fakta og resultater. Lægpersoner stoler på, at en argumentation, som andre har foretaget, og som man ikke selv kan foretage eller eftervise, leder frem til holdbar ny viden. Det er for eksempel tilfældet, når man – uden at have nogen biologisk og medicinsk viden – følger lægens anvisninger om at tage penicillin mod lungebetændelse. Sådan en hverdagsviden gør det "normalt" for os at godtage faglige og videnskabelige resultater uden at spørge til argumenterne bag.

På denne baggrund er det forståeligt, at noget af matematikundervisningen kan virke absurd og verdensfjernt. Eleverne har på tidligere klassetrin brugt Pythagoras' sætning, og bliver så i 1.g. sat til at skaffe sig kendskab til og diskutere argumenterne bag Pythagoras' sætning. Det er analogt til, at de i flere år har formået at slukke ildebrande med skumslukkeren, og så spørger deres nye gymnasielærer dem, hvordan man kan vide, at skumslukkeren virker, men gider ikke høre på deres succesrige erfaringer som brandfolk.

I hverdagsviden har argumentationer en fremtrædende plads, når man er i tvivl om, hvad der er rigtigt: "Hvordan skal vi indrette afgiftssystemet, så det ikke vender den tunge ende nedad?" eller "Hvordan ser de fremtidige beskæftigelsesudsigter for ingeniører ud?" Ligeledes er argumentationer centrale, når der er uenigheder eller mistro. Vi må formode, at argumentation vil opleves som relevant, såfremt det er sådanne former for situationer, der er metaforer i elevernes læring, og vi kan forvente, at elevers erfaringer og viden fra sådanne situationer vil kunne fungere som sommerfuglenet. Situationer, hvor man er i tvivl om korrektheden af sin egen eller andres viden, er uenige eller nærer skepsis, kan give anledning til undersøgelse, afprøvning, systematisering og afvejning. Processer, som alle indgår i matematisk argumentation.

Ny viden i hverdagsviden skabes enten som noget, der kan erfares som spørgsmålet om, hvorvidt is fylder mere end vand, eller som noget der bliver fortalt som f.eks. H.C.Andersens eventyr. Matematiske begreber som f.eks. logaritmefunktioner ligger begge steder og midt imellem: de er mentale konstruktioner ligesom den grimme ælling, men modsvarer til gengæld særlige materielle fænomener som is og vand. Der er da også i undersøgelsen elever, der undrer sig over logaritmefunktionerne, og ønsker at få kendskab til deres herkomst og status.

Hverdagsviden om argumentation kan øve indflydelse på tre forskellige dele af skolematematikken:
- i opgaveløsning
- ved arbejde med konkrete beviser
- ved indførelse af nye begreber.

Som påvist af A.Schoenfeld, se kapitel 2.A, kan elever opleve argumentationers rolle i de tre dele som uden sammenhæng. I forbindelse med opgaveløsning oplever elever argumentationer som middel til at frembringe ny viden, mens det ved beviser ofte opleves som middel til at påvise, at en allerede formuleret påstand er korrekt. Mine undersøgelser indeholder eksempler på det samme.

4.F OM SPECIFIKKE GENSTANDSFELTER

Hverdagsviden om specifikke genstandsfelter øver indflydelse, når man tilegner sig begreber, og når man anvender matematik på ikke-matematiske forhold.

Tilegnelse af begreber er tilegnelse af en række facetter, såsom

A - den idémæssige kerne i begrebet,

B - definitionen på begrebet og

C - protoeksempler på elementer, der hører ind under begrebet og eksempler på elementer, der trods visse fællestræk ikke gør det.

D - anvendelser af begrebet på ikke matematiske forhold. [52]

---

[52] *Der er andre bud end mine tre på, hvilke facetter begrebstilegnelse består af. Se f.eks. Ruhama Even's arbejde (1990) om læreres funktionsbegreber, hvor hun opererer med syv facetter:*

1-Essential Features

2-Different Representations

3-Alternative Ways of Approaching (f.eks. punktvis eller global)

4-The Strength of the Concept

Jeg har valgt at illustrere betydningen af hverdagsviden ved hjælp af funktionsbegrebet, funktion forstået som reel funktion af en variabel.

Idémæssig kerne i begrebet

Den idémæssig kerne i funktionsbegrebet består af en idé om en særlig slags sammenhæng mellem to fænomener. Sammenhængen er entydig. Hvad det betyder er lettest at illustrere i den grafiske præsentationsform: Der må ikke være mere end ét punkt på grafen, der ligger lodret i forhold til hver talværdi på x-aksen. Det kan populært formuleres som "kun ét y til hvert x". Når der senere skal bygges nye begreber ovenpå funktionsbegrebet, er det afgørende, at eleven har taget denne idé til sig som sin egen. Det så vi illustreret i studiet af Lucy. Lucy kunne ikke beregne højden i rektanglet, og det svarer netop til idéen om entydighed. Lucy "burde" have tænkt således:

"Jeg skal finde den lodrette højde. Den lodrette højde er funktionsværdien af det ene nederste "hjørne" af rektanglet. Hvis jeg kender et algebraisk funktionsudtryk, kan jeg finde denne funktionsværdi ved at indsætte "hjørnets" talværdi i stedet for "x" i det algebraiske funktionsudtryk."

Den idémæssige kerne i funktionsbegrebet består endvidere i, at entydigheden er det eneste krav til sammenhængen, alt andet er ligegyldigt. Det kan betegnes som en idé om "arbitraritet". I den grafiske præsentationsform betyder det, at grafen for en funktion ikke behøver at se "pæn" ud: den behøver ikke at hænge sammen, der må gerne være huller i definitionsmængden, grafen må gerne bare bestå af et enkelt punkt, alle x-værdier må gerne have det samme y-punkt, så grafen kan være vandret, og der må gerne bruges negative tal både i definitions- og i værdimængden. Dette kan være kilde til undren hos elever: vi så for eksempel,

---

5-Basic Repertoire
6-Procedural and Conceptual Knowledge and the Relations between them.
7-Knowledge about Mathematics.
Mine tre facetter er indeholdt i Even's. 1) svarer til min A og B, og 4) svarer til min C. Even's 7) ligger i min "hverdagsviden om hvad matematik er for noget, og hvad det gør godt for".

at Julie var fascineret af, at grafen for en funktion ikke nødvendigvis behøver at være en ret linje.[53]

Der eksisterer et væld af hverdagsviden om sammenhænge, som ikke er entydige og arbitrære. Sammenhænge mellem mode og gruppetilhørsforhold, mellem køn og erhverv, mellem kultur og traditioner er ikke entydige. Arbitrære er de bestemt heller ikke. Sammenhængene er en indre sammenhæng mellem de to fænomener, som svarer til "virkning" og "årsag", men vi bruger i daglig tale også termen "funktion" til sådanne sammenhænge. Karen siger da også "Funktion?.....Tja, jeg tænker nu mest på klædedragtens funktion". Hverdagsviden om sammenhænge, der hverken er entydige eller arbitrære, fungerer ikke befordrende for læring om funktionsbegrebets kerne, og der er risiko for, at de virker hindrende.

Der eksisterer et væld af fænomener, som forandrer sig som tiden går, og som dermed konstituerer en entydig sammenhæng mellem tiden og fænomenet. I hverdagsviden fremstår fænomenet imidlertid alene. Vejret og valatukurserne fremstår som fuldgyldige og selvstændige fænomener, også selv om de i fjernsynet præsenteres på grafform som en sammenhæng mellem tiden og fænomenet. Undtaget herfor er store politiske spørgsmål, som skattettrykkets størrelse og arbejdsløshedens størrelse, hvor man måske vil lægge mærke til "fænomenets" sammenhæng med "tiden", hvor "tiden" for eksempel kan være det sidste år eller den nuværende regerings år i forhold til den tidligere regerings. Selv i de tilfælde, hvor der er hverdagsviden om en egentlig entydig sammenhæng, så er det ikke givet, at den vil virke som sommerfuglenet. Det vil afhænge af, hvilken mening den pågældende hverdagsviden er indlejret i. Tværtimod kan denne hverdagsviden være et potentielt moskitonet for tilegnelsen af funktionsbegrebets kerne.

Definitionen

I den matematisk fagkyndiges begrebsforståelse er et begrebs idémæssige kerne og definitionen på begrebet groet sammen, så det kan være vanskeligt for hende/ham at adskille. Det rummer en fare for, at den fagkyndige lærer i for ringe grad underviser i relation til den idémæssige kerne, og måske nøjes med den formelle definition. Set fra elevens synspunkt indeholder den formelle definition imidlertid ingen idémæssige

---

[53] *I den historiske rækkefølge ligger udviklingen af entydighedsidéen før idéen om at alt andet er uden betydning. Her er således overenstemmelse mellem, hvad der synes at være mest vanskeligt for elever, og hvad der historisk blev udviklet sidst.*

kerner. Det er begrundelsen for, at jeg analytisk har adskilt definition fra idémæssig kerne, og det er således et eksempel på, at man må nytænke matematikkens begreber og metabegreber, før de kan anvendes i matematikkens didaktik.

En definition på et matematisk fænomen vil rette sig indad mod andre matematiske fænomener, men kan også gøre brug af ikke-matematiske fænomener som metaforer.

Definitionen *"Et lige tal er et tal der, når det deles med to, ikke giver nogen rest"* retter sig indad mod begreber, der tidligere er blevet defineret, såsom "tal", "to", "dele" og "rest", men knytter sig også til dagligdagsforståelsen af "at dele noget ligeligt mellem to parter" og af ordet "rest".

Definitionen på en funktion lyder eksempelvis: *"Ved en funktion forstås en forskrift, der til hvert element i definitionsmængden tilordner netop ét element i sekundærmængden"*. Termerne "element" og "mængde" står for matematiske begreber, der forudsættes kendt af eleverne. Termerne "definitionsmængde","sekundærmængde", "forskrift" og "tilordner" introduceres for eleverne i og med termen "funktion" introduceres for dem. Der eksisterer hverdagsviden i tilknytning til termerne "forskrifter" og "tilordninger", nemlig hverdagsviden om opskrifter og navngivning, som kunne være potentielle sommerfuglenet. Hvorvidt denne hverdagsviden overhovedet kommer i spil, når elever tilegner sig definitionen, er et åbent spørgsmål. Der er risiko for, at definitioner af lærer og af elev alene behandles som formelle fænomener.

Protoeksempler

Protoeksempler har betydning i læringen på et givet tidspunkt og i læringen på langt sigt. Det er oplagt, at hverdagsviden er af betydning ved tilegnelsen af protoeksempler på elementer, der hører ind under begrebet. Hverdagsviden om specifikke genstandsfelter kan levere råstof til protoeksempler. For Karen fungerer ølpriser og fotokopieringspriser som protoeksempler på lineære funktioner. "At dele slik ud, så alle får lige meget" kan fungere som protoeksempel på divisionsbegrebet, og "en bils hastighed" kan fungere som protoeksempel på begrebet differentialkvotient. Det er styrken i sådanne protoeksempler, der udgør et af argumenterne for en kontekstualiseret undervisning. Det er imidlertid nødvendigt nøjere at analyse, hvilke konkrete erfaringer nutidens elever kan have med et givet område, og hvilke betydninger eleverne lægger omkring deres erfaringer. [54]

Især de fire regningsarter er godt udforsket. Der er foretaget semantiske analyser af, hvilke typer af problemstillinger regningsarterne kan anvendes på. Der eksisterer flere forskellige forslag til, hvorledes man bedst kategoriserer problemstillingerne. Til addition og subtraktion er der for eksempel foreslået fire kategorier "Combine, Change, Compare, Equalize".

Det anses for at være et af de mest afgørende resultater fra de senere års forskning i matematikkens fagdidaktik, at der er en god transferværdi inden for det samme semantiske område, men kun en ringe transferværdi fra ét semantisk område til et andet. Hvis lærerne ikke er opmærksom på dette, er der risiko for, at de overgeneraliserer deres vurdering af elever: Fordi en elev kan regne godt i ét semantisk område, behøver eleven ikke at kunne i andre. Selv om en elev regner dårligt i et område, kan eleven regne godt i andre områder. [55]

For at få indblik i prototypeeksempler har jeg bedt elever formulere opgaver, hvortil man skal opstille divisionsstykket 6:2. Næsten alle gav alene eksempler, hvor 6 og 2 ikke havde samme benævnelse. Eleverne knyttede regnestykket til problemstillinger af typen "seks bananer skal deles mellem to aber". Denne begrænsede anknytning er gold i forhold til en udvidelse af divisionsbegrebet til også at omfatte rationale tal: Det er meningsløst, at lade regnestykket 6:3/2 være model for, at seks bananer skal deles mellem halvanden abe. Det er ikke tilstrækkeligt at opfatte division som model for delesituationer, det er nødvendigt også at opfatte division som model for målesituationer: Regnestykket 6:3/2 kan – på meningsfuld måde – være model for eksempelvis hvor mange aber, der er mad til, hvis der er seks bananer, og hver abe skal have halvanden.

---

[54] *Pengesystemet er en del af virkeligheden, der er født med en matematisk struktur. Der er da også søgt udviklet en kontekstualiseret undervisning ud fra elevernes viden om pengesystemet. Det er dog et åbent spørgsmål, hvorvidt børn i dag har erfaringer med penge, som er direkte produktive i forhold til matematikindlæring, og det er i øvrigt socialt afhængigt: Deltager børn i indkøb? Bruges der mønter og sedler eller maskiner og kort? Se f.eks. Mary E.Brenner (1991) "Knowledge and Situated Cognition: Children's Knowledge of Money in Stores and in School", upubliceret manuskript.*

[55] *(P.Nesher & J.Kilpatrick, 1990)*

Der er kun foretaget ganske få undersøgelser af semantiske områder og udvidelser af talområder i et læringsforløb. Nancy K.Mack har foretaget en undersøgelse af brøkindlæring hos 8 elever i 6.klasse. [56] Eleverne har ved starten af undersøgelsen en hel del viden om brøker, som de har skabt sig uden for matematiktimerne, og som Mack betegner som informel viden. Eleverne kan fra starten løse adskillige opgaver, der er præsenteret i en virkelighedsnær kontekst, mens de løser tilsvarende opgaver formuleret med talsymboler forkert. Eksempelvis vil de allesammen hellere have et stykke af en pizza, som er delt i 6 stykker, end et stykke fra en pizza, der er delt i 8, men syv af de otte elever mener, at 1/6 er mindre end 1/8. (s.21) [57] Elevernes forkerte viden om symboler og algoritmer kan de kun have lært sig i skoleundervisningen. Der er således hverdagsviden, der på grund af elevernes matematisk viden, ikke fungerer som de sommerfuglenet, de potentielt er.

Elevernes viden om regneregler fører med sig, at eleverne ikke bruger deres informelle viden, også selv om de bliver eksplicit opfordret til det. I starten af Mack's forløbsundersøgelse stoler eleverne mere på deres svar fra de gale algoritmer end fra deres korrekte informelle viden, og de var tilbøjelige til at ændre deres første korrekte svar, når symbolberegninger gav et andet resultat. I løbet af forløbet kommer de til at stole på, at deres informelle viden er korrekt til anvendelsesopgaver. Når det er muligt for eleverne direkte at relatere symbolformuleringer til hverdagsproblemer, så er hverdagsviden sommerfuglenet, men der er voldsomme problemer med en sådan relatering: En opgave lyder 4 - 7/8. Som svar på den symbolske formulering får en dreng 1/8, efter først at have omskrevet 4 til brøken 4/4 og dernæst omformuleret denne til 8/8. Da intervieweren stiller opgaven som en historie med 4 pizzaer, hvoraf der bliver spist 7/8, får drengen det korrekte resultat. Det virker ikke ulogisk på drengen, at symbolopgaven giver et andet resultat end opgaven fra pizzahistorien. I hans fortolkning er der nemlig i historien 4 pizzaer,

---

[56] *Mack, Nancy K. (1990) "Learning Fractions with Understabdibg Building on informal Knowledge", Journal for Research in Mathematics Education, 21, 1, s.16-32.*

[57] *Der ligger to fortolkningsmuligheder åbne her, hvoraf Mack kun bemærker den ene. Mack mener, at begrundelsen er, at eleverne ikke har knyttet brøksymbolerne til nogen talmæssig værdi. Der er imidlertid også en anden mulighed, nemlig at eleverne tillægger en anden mening til termen "mindre" end læreren gør. Iben Maj Christiansen har i sin undervisning i 4.klasse fået denne begrundelse : "1/8 pizza er mere end 1/6 pizza, fordi 8 børn kan få noget at spise, hvis vi deler pizzaen i 8 stykker. Hvis vi deler i 6 stykker er der 2 børn, der ikke får noget pizza".*

mens der i symbolopgaven kun er 1 pizza! (s.24) En anden dreng ved, at man i alt får 5/8 pizza, hvis man først får 2/8 pizza og derefter får 3/8. Men han mener, at den tilsvarende symbolopgave giver 5/16. (s.28)

Børnenes hverdagsviden er et potentielt sommerfuglenet, også over for opgaver som almindeligvis er blevet opfattet som vanskelige, såsom subtraktion af brøker, hvor man først skal omskrive blandede tal og uægte brøker. Dette peger på, at man må overveje nye rækkefølger i undervisningen, hvis man ønsker at udnytte børnenes potentialer.

Elevernes informelle viden er knyttet til pizzahistorier, og brøker opfattes derfor af eleverne som "antal dele af en hel". Denne opfattelse rækker ikke som sommerfuglenet, når man skal tilegne sig brøkviden, hvor en brøk opfattes som "et tal". Her virker det som moskitonet. Eleverne mener for eksempel, at 4/5 er det samme som 5/6, fordi der i begge tilfælde mangler ét stykke.

Det tyder på, at eleverne opfatter termerne "mere", "mindre" og "det samme" i relation til, hvor mange der får noget at spise, og ikke i relation til hvor meget de, der får noget, så får. Det matematiske begreb for "at dele" implicerer, at der skal deles lige, og det gør hverdagens delebegreb ikke. Det er et mere vidtfavnende begreb end det matematiske. Og for både lærer og forsker er den matematiske forudsætning så ubevidst, at der er risiko for fejltolkning af elevers svar, især hvis disse svar er kortfattede.

I de såkaldte "misconceptions"studier har man eksempelvis undersøgt udbredelsen og baggrunden for, at nogle elever mener, "at division altid gør mindre", "at multiplikation altid gør større" eller "at man kun kan dividere et tal med et tal, der er mindre". [58] Disse opfattelser er korrekte

---

[58] *Klassikeren inden for disse studier er Freudenthal, Hans (1983) "Didactical phenomenology of mathematics structures", Dorddrecht, Reidel, hvor fænemenologi forstås som beskrivelser af matematiske begreber, strukturer eller ideer i relation til de fænomener, de er skabt til at behandle, og som er begrundelse for at de er i curriculum. Med termen "didaktisk fænemenologi" menes beskrivelser, som læreren kan bruge i tilrettelæggelse af, hvorledes eleverne kan tilegne sig kulturarven. (s.ix)*
Brian Greer har foretaget kombinerede analyser (interne og semantiske) på de fire regningsarter i
Greer, Brian (in press) "Extending the meaning of multiplication and division" i "Harel,G. & Confrey, J. (red) "The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics", Albany, New York, Suny Press.

generaliseringer på den tidlige matematikundervisning, og de svarer til enkle prototypeeksempler. Opfattelserne illustrerer ligesom pizza-eksemplet og abe-banan-eksemplet, at elever kan have knyttet for få og for snævre stykker hverdagsviden til de matematiske begreber, således at det på længere sigt - når begreberne skal udbygges - kan være årsag til læringsproblemer. Og der er risiko for, at disse læringsproblemer vil forekomme både læreren og eleven uforståelige.

Anvendelser: situationer og illustrationer

Det er afgørende for hverdagsviden's rolle ved håndteringen af opgaver, hvor matematik skal anvendes på ikke-matematiske fænomener
- om det er en illustration eller en situation. Det er en illustration, hvis man regner på eksempelvis verdens befolkningsvækst som middel til at lære om eksponentialfunktioner. Det er en situation, hvis hensigten er at lære noget om befolkningsvæksten [59], og
- om eleven allerede har tilegnet sig *de relevante begreber*.

Hverdagsviden om specifikke genstandsområder spiller en stor og positiv rolle i håndteringen af situationer. Overraskende nok - er en sådan hverdagsviden uden positiv betydning i håndteringen af illustrationer, og kan, når eleven endnu ikke har tilegnet sig de relevante matematiske begreber, endog have en negativ indflydelse.

Illustrationer

Hverdagsviden om hvad faget er, og hvad undervisning og læring går ud på, har betydning for alle dele af læringen, også for elevernes arbejde med illustrationer, hvor virkelighedsområdet er et middel til at lære matematik. Eleverne vil være optagede af at lede efter vink i opgave-beskrivelsen til, hvilken type matematik de skal bringe i anvendelse. Men

---

Greer, Brian (in press) "Multiplication and Division as Models of Situations" i Grouws, D. (red) "Handbook of Research on Learning and Teaching Mathematics", NCTM/Macmillan.

[59] *Her bruges Burkhardt's opdeling fra "The real world and mathematics" fra 1981. Ved en illustration forstår han en anvendelse af matematik på en problemstilling, hvor problemstillingen først og fremmest er relevant, fordi behandlingen af den hjælper eleven til at forstå matematik. Anvendelsen er et middel til at lære matematik. Ved en situation forstår Burkardt en anvendelse af matematik, hvor målet er at behandle problemstillingen. Anvendelsen er et middel til at forstå den ikke-matematiske problemstilling.*

hverdagsviden om de specifikke genstandsområder, som opgaven drejer sig om, er ikke af nogen større betydning.

Når eleven ikke på forhånd har etableret de relevante begreber, kan en hverdagsviden om det specifikke genstandsområde komme til at fungere som moskitonet, som det eksemplificeres i Inger Wistedt svenske undersøgelse "Vardagskunskaper och skolmatematik" [60]. Wistedt diskuterer fordele og ulemper ved at "hverdagsanknytte" skolematematikken og analyserer faktiske læreprocesser i en hverdagsanknyttet undervisning. Hvilke muligheder gives eleverne for at drage nytte af deres viden og kendskab fra hverdagslivet? Hvilke risici er der for, at elevernes hverdagstolkning af en matematikopgave forhindrer dem i "at nå" matematikken?

For eksempel arbejder en 5.klasse med længde og længdemåling. De har ikke arbejdet med hastighed, men skal en dag løse følgende opgave i grupper:
"Johan og Eva løb om kap 100 meter. Eva løb over mållinjen, da Johan passerede 95 meter-mærket, så hun vandt. Ved et nyt kapløb startede Eva fem meter bagved startlinjen. Johan fik altså et forspring på 5 meter. Hvis de nu løber lige hurtigt hele vejen og med den samme hastighed som i det foregående løb, hvem vinder så i det andet løb ?"

En pige, Carola's bemærkninger er alle knyttet til virkelighedens kapløb:
1) Carola bemærker, at det ikke er sikkert, at én af dem vinder, måske kommer de samtidig. En dreng Jacob imødegår det med sin viden om skolematematik: hvis de kom samtidig ville der have stået "undersøg om.." og ikke "hvem vinder?" i opgaven.
2) Carola bemærker, at hvem der vinder, afhænger af om de bliver trætte.

3) Carola bemærker, at Eva nok bliver mest træt, for hun løb hurtigst i det første løb.

Carola tolker opgaven til at handle om et rigtigt løb. Wistedt opstiller to teser:
a) Måske har det betydning, at opgaven fortæller, at en pige løb hurtigere end en dreng: så må hun da være blevet træt!
b) Måske er det særlig vanskeligt at se bort fra de spændende detaljer, når eksemplet vækker mange hverdagstanker og associationer.

---

[60] *Inger Wistedt (1991) "Vardagskunskaper och skolmatematik".*

Wistedt's analyse kunne suppleres med en analyse af Carola's begebsmæssige forudsætninger. Det er min tese, at hendes hverdagsviden om at løbe om kap kommer til at virke som moskitonet, fordi hun endnu ikke har noget hastighedsbegreb. Det er min tese, at hvis Carola havde haft et begreb om hastighed, så ville det være en fordel, at hun ikke kobler sin hverdagsviden fra, sådan som nogle af de andre elever gør, og hendes hverdagsviden ville være sommerfuglenet.

Situationer

I situationer er det mindre oplagt end ved illustrationer, hvilken type matematik der skal anvendes. Problemstillingen i opgaven beskrives muligvis fyldigere. I en situation er der indbygget autenticitet, der svarer til hverdagslivets autenticitet, og hensigten med at bearbejde situationen kan beskrives i hverdagssprog. Anvendelsen af matematik er underlagt en hverdagsrationalitet. Hvis en elev har hverdagsviden om det pågældende anvendelsesområde, så vil den være et potentielt sommerfuglenet i håndteringen af situationen. I hvilken grad hverdagsviden reelt kommer til at fungere som sommerfuglenet, vil som ved illustrationer afhænge af elevens begrebsmæssige kompetance. Har eleven allerede tilegnet sig de relevante matematiske begreber? Knytter eleven rent faktisk det på gældende begreb til situationen?

4.G BEGREBER PÅ BEGREBER

Hverdagsviden om specifikke genstandsfelter har ikke den samme rolle for tilegnelse af alle begreber. Division og brøk er ikke lige så abstrakte, men har et enklere fænomenologisk udgangspunkt end ligning, funktion og differentialkvotient. Relationen til hverdagsviden om specifikke genstandsområder bliver mere kompliceret, jo mere abstrakte begreberne er.

Det er min opfattelse, at alle begreber, også matematiske begreber, er mentale konstruktioner, der er i resonans med vores erfaringer med at omgås verden og hinanden: de er skabt i forbindelse med vores erfaringer, og de er med til at strukturere vores videre erfaringer. Årsagen til, at metaforen "matematik er en beskrivelse af virkeligheden" giver mening, er netop denne resonans. Det afgørende at få belyst er, hvorledes begreber adskiller sig i deres måde at være i resonans på.
Det er forkert at påstå, at alle hverdagsbegreber har én slags resonans, og at alle matematiske begreber har en anden slags resonans. Det er for generelt. Der gælder imidlertid,

-at der er nogle tenden*tielle forskelle* mellem begreber i matematik og i hverdagsviden,
-at det er afgørende for hverdagsviden's rolle, om der til *det matematiske begreb* findes et søsterbegreb i hverdagsviden eller ej,
-at hverdagsviden's rolle er kritisk, når eleverne skal generalisere et matematisk begreb, eller når de skal bygge nye matematiske begreber ovenpå andre matematiske begreber, og
-at det fungerer som moskitonet, hvis man har en opfattelse af, at matematiske begreber er som begreber i hverdagsviden.

Tendentielle forskelle

Mange, men ikke alle begreber i hverdagsviden refererer direkte til empiriske fænomener. De er *klassedelinger af individer eller af iagttage-lige egenskaber*. Det gælder eksempelvis for begrebet "gråspurv", hvor der i den fysiske virkelighed findes repræsentanter for begrebet gråspurv. Min undersøgelse giver tre eksempler på læringsproblemer, der kan skyldes, at det er elevernes opfattelse, at et matematisk begreb må være en klassedeling af iagttagelige fænomener:

1. Det kan være baggrunden for, at Julie mente, at der måtte være "noget galt" med hendes besvarelse af en opgave, fordi hun fik både værdi-mængden og definitionsmængden for kvadratrodsfunktionen til at være alle positive reelle tal samt tallet nul. Ved klassedelinger giver man for-skellige navne til ting, der er forskellige: der eksisterer ingen individer, der på én gang er en gråspurv og en due, og hvordan skulle der så ek-sistere talmængder, der på én gang er en definitionsmængde og en værdimængde.

2. Det kan være baggrunden for, at en elev ikke vil acceptere at punktet (0,0) ligger på såvel x-aksen som y-aksen.

3. Det kan være baggrunden for, at elever forbinder en ny proces med kendetegn ved udseeendet af de symboler, de første gang ser processen i. Julie mener, at faktoriseringsbegrebet drejer sig om to tal, der begge står i anden, for sådan var det eksempel hun første gang hørte termen faktorisering i forbindelse med. Det svarer til at en gråspurv er en grå-spurv i og med, at den ligner den gråspurv, man kiggede på, da man første gang fik navnet at vide.

Søsterbegreber?

For nogle matematiske begreber eksisterer der et "søsterbegreb" i hverdagsviden. Der er såvel et hverdags-cirkelbegreb som en række matematiske cirkelbegreber. Hverdagsbegrebet for en cirkel er et empirisk begreb, hvis repræsentanter ligner hinanden af udseende. Man kan ved hjælp af synet afgøre, om en figur har et cirkelformet udseende og dermed er berettiget til at blive kaldt en cirkel. Man kan konstruere cirkler af samme størrelse som dem, man allerede har, ved at kalkere de gamle. Det matematiske begreb indeholder dette hverdagsbegreb, og rækker videre end det. Det matematiske begrebs "centrum" og "radius" er usynlige fænomener, der er så stærke, at man ved hjælp af dem kan konstruere nye cirkler, som man ikke har set før. (Peschek (1989) s.255). Det matematiske begreb er et teoretisk begreb, der er abstraheret fra handlingen at tegne punkter med afstanden radius fra centrum. Egenskaben "at være cirkelformet" er formidlet gennem disse handlinger, og relationerne mellem centrum, radius og punkterne på cirkelomkredsen er tydelige, netop mens man tegner cirkelomkredsen. Man kan bygge videre på det teoretiske begreb: man kan konstruere cirkelligninger, generalisere til rum af højere dimensioner, og overveje andre metrikker.

Det matematiske cirkelbegreb rummer således hverdagsbegrebet, og man må forvente at hverdagsbegrebet vil være sommerfuglenet for tilegnelsen af det matematiske begreb. Det er midlertid kun visse matematiske begreber, der har et søsterbegreb i hverdagsviden. Mange har et mere kompliceret familieforhold. Hverdagsbegrebet funktion har en helt anden mening end det matematiske funktionsbegreb. Det ene rummer ikke det andet. Begreber som differentialligning og neutralt element har ingen familie overhovedet. Elever skal foretage et kvalitativt spring, når de for første gang skal tilegne sig begreber, der ikke har nogen søskende i hverdagsviden.

Generalisering og videreudbygning

Når der bygges et matematisk begreb ovenpå et andet begreb, er det karakteristisk, at der foregår et statusskift: Noget der først opfattes som en proces bliver senere opfattet som et produkt eller et fænomen. Man kan sige, at begreber fødes som processer, og at det er først, når de er blevet til produkter, at de kan blive forældre. Eksempelvis bliver "en funktion" indført som en proces, der knytter nogle elementer sammen. En funktion er noget dynamisk. Senere når man skal indføre regneoperationer for flere funktioner, for eksempel lægge to funktioner sammen, så opfattes hver funktion som et produkt og som et hele. Det betyder imidlertid ikke, at barnet forsvinder, at processen forsvinder: vi skal også bruge procesegenskaben i den videre udbygning. Mønstret gentager sig, når processen at finde en differentialkvotient bliver til produktet "en differentialkvotient", og når processen at finde en afledet funktion bliver til "en afledet funktion" og til "en differentialoperator".

Vi så et øjebliksbillede af en sådan udvikling i forbindelse med Johns kvadratrodsbegreb. Han opfattede kvadratrod som en proces. Kvadratrod var for ham en operation, som man kan udføre under visse betingelser. Men kvadratrod var ikke endnu blevet til en helhed eller et produkt for ham i form af en kvadratrodsfunktion. Metaforisk kan man sige, at John ejede kvadratrod som et udsagnsord "at kvadratrødde" eller "at tage kvadratroden", men at han ikke ejede kvadratrod som et navneord. David Tall foreslår termen "procepts" til at angive dette særlige forhold mellem PROcesser og conCEPTS [61]. Sådanne udviklinger, hvor et udsagnsord bliver til et navneord, findes også i hverdagsviden. Men her spiller det en anden rolle.

Hverdagsviden er kritisk i disse statusskrift fra proces til produkt, fordi det er nødvendigt at revurdere og eventuelt ændre på den hverdagsviden, eleven har knyttet til begrebet.

Begrebstilegnelse er afhængig af elevens allerede etablerede fond af begreber. Det er afgørende forskelligt at tilegne sig logaritmefunktionsbegrebet afhængig af, hvor mange typer af funktioner, man i forvejen har tilegnet sig. Matematik består imidlertid ikke af et enkelt hierarki, men af mange, som må opbygges hver og ét hos individet. Elevens forviden om trapezer har for eksempel ikke noget at skaffe med elevens tilegnelse af logaritmefunktioner.

Nogle elever tror, at alt matematik hænger sammen, og at hver eneste ny ting bygger logisk på det foregående, der bygger på det foregående osv osv. Det er dette indtryk, der ligger bag en udtalelser som "Jeg kan ikke følge med mere i matematik, for der var noget, jeg ikke forstod, og alt det næste bygger jo ovenpå det".

Anknytning til hverdagsviden er på ingen måde en logisk fortsættelse, når der skal bygges matematiske begreber ovenpå andre eller begreberne skal generaliseres. Det er ikke givet, at protoeksempler, der var hensigtsmæssige til de gamle begreber, også er det i videreudbygningen. Ofte vil

---

[61] *Tall, David (1992) "Procepts in Advanced Mathematical Thinking" i "Advanced Mathematical Thinking Book" med bidrag fra 16 medlemmer af PME-arbejdsgruppen AMT, Reidel.*

det være nødvendigt at udvide repertoiret af protoeksemplerne på de allerede tilegnede begreber.

Når der skal indføres multiplikation med positive brøker, så skal elevens repertoire fra multiplikation af hele positive tal udvides. "Gentagen addition" er hensigtsmæssig som prototype på multiplikation med et helt tal, men kan eventuelt suppleres med "areal af et rektangel", som kan være protoeksempel på multiplikation med både hele tal og med brøker.

Når der skal indføres division med brøker, så skal elevens repertoire fra division med positive hele tal udvides. "At dele ligeligt" er tilstrækkelig som prototype på division med et helt tal, men kan eventuelt suppleres med "at måle".

4.H SPROG

Hverdagsviden og matematisk viden har forskellige forhold til naturligt sprog. Metaforen "matematik er et sprog" er moskitonet for tilegnelse af algebra og for forståelsen af forholdet mellem forskellige præsentationsformer for det samme begreb. Matematik formidles alt for ofte i et kancellisprog, som virker blokerende for læringen. Det kan øge læringsvanskelighederne, hvis der i undervisningen ikke skelnes mellem, hvad der i sprogform og i enkelte termer blot er vedtagne konventioner, som let kunne ændres, og hvad der er en logisk indholdsmæssig nødvendighed, der må forstås. Det kan have både positiv og negativ indflydelse på læringen, at de matematiske termer også optræder i hverdagsviden eller i andre fag.

Metaforen "Matematik er sprog"

Nogle elever opfatter algebra som et sæt regler for, hvordan man må håndtere tal, analogt til grammatikkens regler om, hvilke stavemåder og tegnsætninger der er korrekte. Nogle opfatter algebra som skabt af mennesker med magt til at sætte konventionerne. Med en sådan opfattelse er algebra noget, der må accepteres, som kun kan læres udenad, og som man ikke kan give fylde. Albegra kan kun få fylde, hvis eleven er optaget af den viden om generelle egenskaber ved tallene, der er indbygget i algebraen: for eksempel at relationen mellem 15 og 21 har noget tilfælles med relationen mellem 66 og 72.

Nogle elever mener, at man kan udtrykke det samme i alle præsentationsformer: at for eksempel en grafisk og en algebraisk præsentation af en funktion kan udtrykke det samme. I undersøgelsen er der elever, der mener, at hvert fænomen, der har en særlig algebraisk status, også må have en særlig iøjnefaldende geometrisk fortolkning. Det svarer til forholdet mellem naturlige sprog:

- på engelsk kan man omtale og reflektere over stort set de samme fænomener som på dansk,
- det engelske og det danske sprog har samme relation til virkeligheden, og
- man kan oversætte fra det ene sprog til det andet.

Matematik er imidlertid ikke et sprog i betydningen "et fremmedsprog". Matematikopfattelsen "matematik er en samling uigennemskuelige regler" kan hænge sammen med en opfattelse af matematik som fremmedsprog. Også gloser og grammatiske regler i et fremmedsprog kan fremstå for elever som regler, som må læres udenad, og som først og fremmest bunder i historisk betingede konventioner.

<u>Kancellisprog</u>

Matematik har et sprog. Matematik er en samling viden og redskaber, som vi skaber og kommunikerer om ved at bruge sprog. Sproget er værktøj og medie. Hvorledes sproget bliver brugt er traditionsbestemt, og kunne ændres. At mange lærebøger – ligesom bureaukratiske systemer – anvender kancellisprog, er ikke en følge af matematiks natur.

Jeg har udvalgt tilfældige sider i en tilfældig lærebog i geometri, hvor der introduceres nogle geometriske elementer. Kancellisproget viser sig i termer som "given, givet, den søgte". Der er mange passive verber: "afsættes, hvorved fremkommer, siderne tegnes". Alle aktive verber har matematiske elementer som grundled:

> "En linje, der <u>forbinder</u> to punkter på en cirkel, kaldes en korde. <u>Går</u> korden gennem cirklens centrum, kaldes den en diameter. Forlænges en korde til begge sider, <u>får</u> vi en sekant. Drejes en sekant om det ene skæringspunkt, <u>vil</u> det andet skæringspunkt efterhånden <u>nærme sig</u> dette, og når de to skæringspunkter <u>falder sammen</u>, <u>er</u> linjen tangent til cirklen." [62]

Det er matematiske elementer, der handler og er aktive. Der optræder ingen aktive mennesker. Mennesket/eleven får alene tilbudt rollen som tilskuer.

---

[62] *Hansen, Jens Pilegaard (1987) "Geometri – obligatorisk niveau", 2.udgave, Frederikssund, Forlaget FAG, s.15.*

Samme termer i matematik og i hverdagssprog

Der er mange termer, der optræder både i matematikkens sprog og i hverdagslivets sprog, og det er tænkt som sommerfuglenet. Hver enkelt term vil imidlertid kunne have flere betydninger, og det er i mangetydigheden, at matematikken har en del af sin styrke. Det kan dog umiddelbart virke hindrende på elevernes læring. I termerne til grænseværdibegrebet kan nogle elever opfatte termen "grænse" som noget, man ikke kan overskride, ligesom en grænse mellem nationer eller som en fysisk grænse. Termen "nærmer sig" kan forlede nogen til at tro, at grænseværdien ikke må nås eller ikke må være med, og så ser det ikke ud til, at talfølgen 1,1,1,1,1,... har nogen grænseværdi.

Det kan fungere som moskitonet, at en terms mening i matematik ikke stemmer overens med dens mening i dagligsproget. Det gælder for eksempel "mere og mindre" og "reduktion". Når man i medierne taler om at reducere udlandsgælden, så mener man, at værdien af udlandsgælden skal absolut formindskes. Man mener ikke, at beløbet på udlandsgælden skal regnes om fra danske kroner til dollars. Det matematiske begreb for reduktion omhandler netop en omveksling som fra én valuta til en anden, mens den absolutte værdi bevares. Nogle elever opfatter en reduktion af et udtryk som en omskrivning, der gør udtrykket lettere at betragte og at regne på. Det er ikke forkert, men er en utilstrækkelig opfattelse. Det kan være baggrunden for, at en elev kan omskrive på følgende måde:

$$\sqrt{x+6}=\frac{1}{2}x+6$$

Eleven har hørt, at kvadratrod kan omskrives til noget med en halv.

Nogle termer kan være uheldige og burde måske nok skiftes ud. Andre er tænkt som sommerfuglenet, men det er ikke altid eleverne har forudsætningerne for at udnytte dem. I forbindelse med grafen for et andengradspolynomium taler man i skolematematik om en huskeregel, hvor grafen ser smilende og "positiv" ud, netop når koefficienten A er større end nul, dvs positiv. Julie forbinder ikke talegenskaben positiv med tillægsordet positiv, så det er ikke nogen mnemo-teknisk hjælp for hende. Nogle termer kan kun være sommerfuglenet over for enkelte sider af et begreb, men ikke over for alle sider af det.

4.I SAMLET MODEL

Hverdagsviden i de 6 kategorier øver indflydelse på forskellige dele af elevers dannelse af matematiske i skolen:

Det kan konkluderes, at de to kategorier "hverdagsviden om matematik som fagområde" og "hverdagsviden om skolen som institution" har betydning i alle hjørner af læringen, stort som småt, og især bliver kritisk ved principielle skift i synet på, hvad matematik er og går ud på, som det kan forekomme ved institutionsskift.

Det kan konkluderes, at "hverdagsviden om rationalitet og argumentation" især er kritisk i forbindelse med beviser og introduktion af definitioner på nye begreber.

Det kan konkluderes, at "hverdagsviden om specifikke genstandsområder" især er kritisk i forbindelse med anvendelsesopgaver og modellering. Hverdagsviden om specifikke genstandsområder er også afgørende i forbindelse med tilegnelse af begrebers idémæssig kerne og protoeksempler, og her med en forsinket effekt i forbindelse med senere læring, hvor begreberne udbygges enten som en generalisering eller ved at der skabes nye begreber med relation til de gamle.

Det kan konkluderes, at "karakteristiske træk ved begrebsdannelse" i hverdagsviden, især er kritisk ved introduktion af nye begreber og når begreberne udbygges, og det bliver stadig mere kritisk, jo mere avanceret de nye begreber er.

Det kan konkluderes, at "karakteristiske forskelle mellem matematikkens brug af naturligt sprog og hverdagens brug af naturligt sprog" generelt kan øve indflydelse på læringen, og specifikt kan få betydning, når matematik bruger enkelttermer, der har en hverdagsbetydning.

Matematisk begrebsdannelse er dermed også blevet udfoldet i 7 forskellige facetter:
- den formelle definition på begrebet
- den idémæssige kerne i begrebet
- protoeksempler på begrebet
- anvendelser i tilknytning til begrebet
- terminologi i tilknytning til begrebet
- beviser og udledninger i tilknytning til begrebet
- sammenhængen til andre allerede tilegnede begreber og til nye begreber

Eleven har sin egen læreplan. Hverdagsviden om matematik som fagområde og hverdagsviden om skolen som institution har betydning for alle dele af matematiklæringen i skolen, idet denne hverdagsviden ligger til grund for elevens egen læreplan. Eleverne har en række intentioner med at lære matematik og de har en række arbejdsvaner. Hverken intentioner eller vaner er primære fænomener, men er påvirket af andre fænomener, blandt andet denne hverdagsviden. Denne hverdagsviden er præintentionel, fungerer som grundlæggende metaforer, der aktiveres gang på gang i læringsprocessen, og er afgørende for elevens fortolkning af undervisningens elementer.

KAPITEL 5. PERSPEKTIVERINGER

Hvordan forholder de præsenterede empiriske undersøgelser og teoretiske overvejelser sig til matematikundervisningens praksis og diskussioner herom? Og hvordan forholder de sig til andre undersøgelser og analyser inden for matematikkens didaktik?

I 5.A. behandler jeg hvorledes hverdag og hverdagsviden har indgået i debatten om skolefaget matematik. I 5.B. behandles nogle empiriske – undersøgelser, der er analoge til min. I 5.C. relateres til to generelle teser og til Vygotsky's teoretiske arbejder. I 5.D. diskuteres forholdet mellem teori og praksis i matematikkens didaktik.

5.A DEBATTEN OM SKOLEFAGET

De sidste tredive år har givet turbulens for skolefaget matematik. Flere forskelligrettede reformer har afløst hinanden. I det følgende beskrives tre positioner i diskussionerne om reformerne. Den første position er fra halvtredserne og tresserne, og de to sidste er fra halvfjerserne og firserne. Den første position fremhæver fundamentale strukturer i (videnskabs)-faget, og det kommer indirekte til at ske på bekostning af en hverdagsanknytning af undervisningen, mens de to sidste positioner begge fremhæver en hverdagsanknytning, men udfra forskellige argumenter.

Position 1: "Strukturen i et emne"

I 50'erne og 60'erne hentede curriculumdesignere inspiration i videnskabsfaget. Den internationale reformbevægelse i 60'erne var født af en intention om at lade det, der havde vist sig at være så produktivt i videnskaben matematik, smitte af også på skolefaget. Man forestillede sig, at noget lignende også ville forbedre undervisningen og læringen. Eleverne ville lære noget mere nyttigt, blive bedre til at huske det, de havde lært, og blive bedre til at lære noget mere matematik. Hverdagsanknytning bliver ikke nævnt i diskussionerne om faget, og fik ingen plads i skolens praksis.

Som illustration af position 1 "strukturen i et emne" har jeg valgt J.S.Bruner's beskrivelse af en konference fra 1959 om matematik og naturvidenskabelige skolefag [63]. Konferencen indeholdt to nyskabelser.

---

[63] *Det drejer sig om Jerome S.Bruner's bog "The Proces of Education" fra 1960, der i 1972 udkom i dansk oversættelse med titlen "Uddannelses-processen".*

For det første at der var forskere inden for matematik og naturvidenskab, der interesserede sig for undervisningsspørgsmål. For det andet at pædagoger og psykologer forlod deres hidtidige ståsted: Indlæringspsykologi havde tidligere været optaget af at give præcise og detaljerede redegørelser for læring i simple, kortvarige situationer, mens pædagogiske psykologer havde haft anlæg, standpunkter, sociale forhold og motiver i fokus.

Fysikere, biologer, matematikere, historikere, pædagoger og psykologer overvejede i fællesskab læringsprocessens væsen. De overvejede, hvad der skal undervises i, hvornår og hvordan, og hvordan man ved at understrege et emnes struktur – det være sig i matematik eller i historie – kan give eleven en fornemmelse af disciplinens grundlæggende ideer.

Der blev på konferencen arbejdet i 5 grupper
-emnernes rækkefølge i et pensum
-undervisningsapparatur
-motivation for at lære
-intuitionens rolle i indlæring og tænkning
-kognitive processer i indlæring.

Konferencen var præget af optimisme og fremskridtstro. Udgangspunktet var, at læringsarbejdets karakter er analogt til forskningsarbejdets karakter. Den videnskabelige forskning fungerede som grundlæggende metafor for overvejelserne over elevers læring. Man brugte udtryk som "det forskende barn", "det udforskende barn", og "den skoledreng der lærer fysik er fysiker."

Man mente, at den letteste måde skoledrengen kunne lære fysik på var ved at arbejde som fysiker. Skolefysik ligner imidlertid kun i ringe grad fysikerens arbejde, og må derfor ændres. Skolefysik beskæftiger sig for meget med konklusioner og for lidt med undersøgelserne bag konklusionerne. Tilsvarende har skolematematik alt for ofte mistet kontakten med "tanken om orden", som er en grundidé i videnskabsfaget matematik.

Konferencen fokuserede på spørgsmålet om, hvorledes viden og færdigheder tilegnet inden for eet område, kan overføres (transfereres) til andre områder. Det blev ridset op, hvordan man historisk har opfattet spørgsmålet: Først forestillingen om formaldannelsens muligheder for at opøve generelle analyseevner, dømmekraft og hukommelse: lærte man latin, blev man god til fremmedsprog generelt, lærte man matematik fik man en bedre logisk sans. Så forestillingen om at det kun er specielle færdigheder, der kan overføres. Og endelig forestillingen om at der må være identiske elementer i det gamle og det nye område, hvis der skal kunne ske en overføring.

Konferencen repræsenterede en optimistisk tilbagevending til forestillingen om formaldannelsen. Der var ingen støtte til 1700-tallets forestilling om at hele fag som matematik og latin fører til opøvelsen af generelle evner, men man mente, at læring, der sigter mod almindelig forståelse af et emnes struktur, styrker de generelle evner. Jeg citerer:

"Bogstavelig talt alt de seneste årtiers bevismateriale (oversat fra "evidence") vedrørende indlæring og overføring har tydet på, at *medens den oprindelige teori om formaldannelse var dårligt underbygget for så vidt den angår opøvelse af evner, er det en fastslået kendsgerning at massiv generel overføring kan opnås ved passende indlæring, endog i så høj grad, at det at lære noget grundigt* (oversat fra properly) *under optimale betingelser fører til, at man "lærer at lære".* s.17 (fremhævet af den danske oversætter, men ikke af Bruner selv).
For at illustrere hvad han mener med "struktur i et fagligt emne", brugte Bruner bl.a. algebra som eksempel. Han beskriver algebra som en metode til at arrangere bekendte og ubekendte i ligninger, så de ubekendte herefter kan bestemmes. Han peger på, at der er tre grundtræk ved kompositioner, nemlig kommunitativitet, associativitet og distributivitet, og han fremhæver, at de har en høj transferværdi: Hvis en elev fanger de tre grundtræk, er eleven i stand til at erkende, at nye ligninger der skal løses, blot er varianter af et kendt tema. Eleven har dermed skabt sig en generel kompetance i at løse ligninger. Det har ingen væsentlig indflydelse på transferværdien, hvorvidt eleven kender de formelle betegnelser for grundtrækkene.

Det er tankevækkende, at begrundelserne fra 1959 for princippet om at lade fundamentale strukturer eller grundtræk være i fokus for undervisningen har flere lighedspunkter med 80'ernes begrundelser for en hverdagsanknyttet undervisning. Der blev i 1959 givet 4 begrundelser:

1.- forståelse af grundtrækkene gør et fag mere forståeligt
2 - medmindre detaljer bliver placeret i et struktureret mønster, bliver de hurtigt glemt
3 - forståelse af fundamentale principper og begreber synes at være hovedmidlet til en effektiv overføring/transfer til andre områder
4 - det vil kunne formindske overgangsproblemer fra en skoleform til en anden.

Position 2 og 3: "Hverdag som mål" og "Hverdag som middel"

Halvfjersernes og firsernes positioner har ligeledes klare undervisningsmæssige implikationer, omend de er ganske forskellige fra tressernes. Den pædagogiske debat har de sidste årtier været kraftigt præget af brydninger mellem de to positioner "hverdag som mål" og "hverdag som middel".

I *"hverdag som mål"* er *hverdagen* – eller mere generelt virkeligheden – udgangspunktet, og matematikken får tildelt rollen som ad hoc værktøjsfag. Hvilke matematiske emner, der skal med i pensum, bestemmes af om de er anvendelige værktøjer. Man kan sagtens forestille sig en undervisningsplan, hvor matematik ikke er et selvstændigt fag. I *"hverdagen som middel"* er matematikken udgangspunkt. Læseplanens fagindhold skal præsentere faget i alle de afskygninger, der i den aktuelle situation er betydningsfulde. I halvfjerserne og firserne har man set videnskabsfagets anvendelser som meget betydningsfulde. Hverdagslivet er et af de områder, faget kan anvendes på, og dermed kan hverdagslivet få indflydelse på dele af læseplansindholdet. Man kan inden for denne position ikke forestille sig en undervisningsplanlægning, hvor matematik ikke er et selvstændigt fagområde, i hvert fald i visse perioder.

Som eksempel på *"hverdagen som mål"* vil jeg bruge Hugh Burkhardt's bog fra 1981 "The real world and mathematics" fra "The Shell Center" i Nottingham. Her fremføres det, at man som samfundsborger vil kunne have gavn af at kunne noget matematik på en sådan måde, at man kan bruge det i sin hverdag. Der er ingen tiltro til nogen generel transferværdi, så læseplanerne må indeholde præcist de matematiske delområder, som børn og voksne har brug for i hverdagslivet. Skolefaget matematik har sin berettigelse som værktøjsfag. Burkhardt beskæftiger sig ikke i denne bog med hvordan selve begrebsindlæringen kan foregå, man med hvordan man kan *forbedre transferværdien af skoleviden i forhold til hverdagslivet.*

Burkhardt fremfører, at matematiks relativt store andel af skoletiden, reflekterer den almindeligt udbredte opfattelse, at faget giver færdigheder, som er vigtige for hverdagslivet. Det er imidlertid ikke længere oplagt, at netop de færdigheder, man lærer sig i skolen, bliver særlig meget brugt af folk i deres hverdag, selv om der på højt niveau i naturvidenskab, socialvidenskab, teknologi, industri og regering er nogle få mennesker, der bruger matematik. Skolefaget må indrettes til gennemsnitsborgeren og ikke det lille antal elever, som muligvis kommer til at arbejde med matematik på avanceret niveau. Anvendelser i skolematematikbøger og til eksaminer refererer for det meste til meget stiliserede kunstige situationer, der ikke har ret meget at gøre med det, eleverne har brug for at kunne uden for skolen.

Burkhardt kritiserer, at standardlærebøger ikke indeholder ret mange problemer, som manden på gaden ønsker at kende svaret på. De matematiske ideer og teknikker, der er hovedindholdet i matematikkurserne, bliver snarere *illustreret* af problemer uden for matematikken selv. Som for eksempel:
"John er to gange så gammel som Mary, som er to år yngre end Ann, Johns tvillingesøster. Hvor gamle er børnene?"
"Et skib forlader en havn og sejler nordøst med 8 knob, efter en time forlader et andet skib havnen mod sødøst med 16 knob. Hvor langt er de fra hinanden efter 2 timer, og hvor er de?"

Burkhardt præciserer, at sådanne opgaver ikke har nogen tilknytning til nogen praktisk situation, som børnene ville kunne møde. Opgaverne er tænkt til at give øvelse i særlige matematiske teknikker, i dette tilfælde ligningssystemer og vektorer.
Der kan være to slags hensigter med at inddrage anvendelser i matematikundervisningen. Den ene er at forbedre transferværdien til hverdagssituationerne. Den anden er at lette indlæringen af matematikken her og nu, enten ved at øge motivationen for at gå i lag med læringsarbejdet eller ved at yde støtte til læringprocessen. Burkhardt's intention er at forbedre transferværdien til hverdagslivet, og derfor foreslår han en terminologi, der på tydelig måde adskiller de to slags hensigter. Burkhardt foreslår, at vi skelner imellem

- på den ene side situationer, der opstår uden for matematikken og til hvis forståelse vi kan bruge en række matematiske værktøjer
- og på den anden side illustrationer, som er valgt præcist for at tydeliggøre en særlig matematisk pointe ved at lade den foregå i en konkret sammenhæng.

Adskillelsen er ikke skarp, men som tendens gælder det, at i *illustrationer er matematikken den centrale interesse, mens i situationer er den en del af de redskaber, vi har for at behandle problemet, og valget af det rigtige værktøj er en del af den udfordring, som problemet præsenterer.* Illustrationer er "rene" og har "pæne" og "rigtige" svar, mens situationer starter op med rodede og ikke veldefinerede spørgsmål, som må redes ud som en del af deres behandling.

Det er Burkhardt's hovedærinde at præsentere nogle situationer og at foreslå principper for undervisning i tilknytning til dem. Eksemplerne hentes fra områder som lommepenge, transport til skole, lån af penge, hvad er penge værd for dig, tipsklubber, tapetsering, husarbejdet i familien, tøj og mode, musik, trafiklys, fodbold, atletik, humor, venskaber. Der foreslås en række matematiske emner i tilknytning hertil indført i curriclum. Burkhardt påviser, at relativ simpel matematik indeholder værktøj, som kan blive en effektfuld hjælp til at behandle virkelighedens problemsituationer. Det er dog en forudsætning, at værktøjet anvendes i harmoni med personens sunde fornuft, og det må optrænes i skolen. Termen "hverdagsviden" er hos Burkhardt identisk med sund fornuft, 'common sense'.[64]

I den tredie position *"hverdagen som middel"* er matematikforståelsen udgangpunkt og centrum. Det er ikke hverdagen, der uden videre diskussion skal øve størst indflydelse på, *hvad* der skal stå i læseplanerne. Det må bestemmes af *faget* og af en bredere analyse af faget end blot fagets kraft i forhold til fænomener og situationer i hverdagen. Hverdagen er ikke som i den første position målet. Hverdagsanvendelser skal derimod være midler til at lære matematikken, og det faktum, at matematikken bliver brugt i hverdagen, er kun een af begrundelserne for faget.

Som illustration på positionen har jeg valgt en artikel af Claude Janvier fra 1990 [65]. Janvier argumenterer for, at der er brug for en modernisering af curriculum og af undervisningsprincipper, og foreslår at skolefaget må prioritere en kontekstualiseret matematik i den følgende betydning:

> "Taking the context into considerations implies that numbers are processed in the operations without losing their situational connotations. In other words, computations are not made with abstract written numbers but rather on quantities, magnitudes, or measures. For instance, money problems will give rise to operations that can be based on the relations existing between the various coins and bank notes. This is one of the ways through which the context plays an active role in supporting the reasoning toward the solution."

Janvier lægger vægt på, at faget har såvel en stor brugbarhed over for hverdagssituationer som overfor spørgsmål i uddannelsesmæssige og

---

[64] *"Hverdagen som mål" er grundlag for de nuværende danske bekendtgørelser for børne- og voksenuddannelser. Det gælder i særlig grad for bekendtgørelsen fra 1989 for voksenundervisning på 9.10.klasseniveau, hvor der i bekendtgørelsen og i undervisningsmaterialer bruges udtryk som "matematik i hverdagen" og "matematik og et delområde af hverdagslivet".*

[65] *Claude Claude's artikel "Contextualization and Mathematics for All", i årbogen 1990 fra den amerikanske lærerforening National Council of Teachers of Mathematics.*

arbejsmæssige sammenhænge. Han er optaget af, hvordan faget bedst præsenteres, og han er optaget af at skabe aktiviteter som så at sige kan forære betydning og mening, og hvor transfer sikres bedre muligheder. Eksempelvis med hensyn til funktionsbegrebet: Hvilke oversættelsesredskaber og færdigheder gør funktionsbegrebet brugbart, dels i forhold til hverdagen, dels i forhold til videregående uddannelser? Janvier argumenterer for at anvende grafer og tabeller i større udstrækning, end det sker idag i skolen. Når problemløsere uden for skolen udnytter konteksten og bruger alle redskaber og repræsentationsformer, der er til rådighed, så er det absurd, at skolebørn kun lærer at arbejde med algebraiske repræsentationer for funktioner.[66]

Mens Burkhardt har to begreber, har Janvier kun eet begreb for sammenhængen mellem de matematiske tankegange og fænomener i hverdagen, nemlig "kontekstualisering". Det er ikke tilfældigt. Hvad Burkhardt kalder illustrationer, er for Janvier lige så relevante som det Burkhardt kalder situationer, så det er unødvendigt for Janvier at kunne skelne mellem illustrationer og situationer.

5.B OPSIGTSVÆKKENDE RESULTATER

Mine empiriske undersøgelser foregår inde i skolen, og omhandler ordinær undervisning. Der er mange aspekter af relationerne mellem hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse, som mine undersøgelser ikke kan belyse, men kræver andre metoder. I det følgende beskrives tre andre undersøgelser, der har andre aspekter i fokus, og som har taget andre undersøgelsesmetoder i brug.

De to første har fokus på læring og anvendelse af matematik i hverdagslivet uden for skolen. Den første studerer, hvorledes voksne i et i-land regner henholdsvis inden for og uden for en skoleagtig sammenhæng. Den anden undersøgelse studerer, hvorledes børn i et u-land regner dels i deres arbejde som gadesælgere, og dels i en skolelignende situation. Den tredie undersøgelse har fokus på læring inde i skoleinstitutionen. Den tredie undersøgelse studerer, hvorledes voksne i et i-land regner umiddelbart inden og umiddelbart efter deltagelse i et matematikkursus. Alle tre undersøgelser omhandler mennesker, der ikke er professionelle

---

[66] *Også positionen "hverdagen som middel" har øvet indflydelse på de danske bekendtgørelser, især på gymnasiets. Med argumenter analoge til Janvier's er ikke kun termen "differentialkvotient", men også "hastighed" og "omkostning" nævnt i læseplanerne for matematik, ligesom der lægges vægt på andre præsentationsformer end en algebraisk.*

matematikere, og de fokuserer på de samme menneskers adfærd i forskellige sammenhænge.[67]

The adult math project

Det første studie er det såkaldte "Adult Math Project" fra Californien, ledet af Jean Lave. Det omhandler "everyday arithmetic practices in different settings", og der foretages en sammenligning af de regneprocedurer, voksne anvender, når de henholdsvis er i deres almindelige dagligdag og henholdsvis bliver sat i skolelignende situationer. Der viser sig store forskelle:

Folk er ganske dygtige til at beregne, hvad det bedst kan betale sig at købe i supermarkedet. Hvis der eksempelvis er flere slags flasker med tomatjuice, hvor både prisen og flaskernes størrelse varierer, når folk frem til det korrekte resultat i i gennemsnit 98% af tilfældene. Lave arrangerer et eksperiment, der ligner supermarkedskonteksten, hvor man skal regne den samme type opgaver, og her er folk næsten lige så dygtige. Gennemsnitligt er 93% af opgaverne korrekt besvaret. I et tredie eksperiment med de samme personer skal der regnes rene talopgaver, der er formuleret som traditionelle skoleopgaver. Opgaverne svarer – set med de matematikkyndiges øjne – ganske til supermarkedsopgaverne, men her regner folk klart ringere. I gennemsnit har den enkelte person 59% korrekt. Lave konkluderer:

> "the same people differ in their arithmetic activities in ways that challenge theoretical boundaries between activity and settings, between cognitive, bodily, and social forms of activity, between information and value, between problems and solutions". (Jean Lave, 1988 s.3)
>
> "The direction of the difference in problem-solving succes between these settings contravenes the logic of learning transfer. Math is the central going on activity in the test situation (den

---

[67] *Der findes desuden studier, hvor adfærd hos én gruppe sammenlignes med adfærd hos en anden gruppe; eksempelvis grupper med særlig uddannelsesmæssige eller kulturelle baggrunde. Se eksempelvis studiet af hvorledes voksne i Liberia, der har gået i skole regner anderledes end voksne i Liberia uden skolegang i H.J. Reed & Jean Lave's artikel "Arithmetic as a tool for investigating relations between culture and cognition" fra 1981. Se eksempelvis studiet af hvorledes uuddannede afrikanere fra Kpelle-stammen er bedre end uddannede amerikanere til at afgøre mængden af ris i J.Gay & M.Cole's bog "The new Mathematics and an old Culture: A study of Learning among the Kpelle of Liberia" fra 1976.*

> skolelignende situation) and should command resources of attention and memory greater that those avaiable in the supermarket where math competes for attention with a number of other cocerns. School algorithms should be more powerful and accurate than quick, informal procedures (that's why they are taught in school). Finally, 98% accuracy in the supermarket is practically error-free arithmetic, and belies the image of the hapless just plain folk failing cognitive challenges in an everyday world." (s.57-58)

Jean Lave udfolder sin kritik af traditionelle transfer-studier i kapitlet "Missionærer og kannibaler". Hun demonstrerer, hvorledes traditionelle transferstudier vurderer hverdagens kognitive aktiviteter alene ud fra skolefagenes og videnskabsfagenes normer, ligesom missionæren udelukkende ser fremmede kulturer med normer og synssæt fra missionærens egen kultur. Lave's intention er derimod at skabe analysemetoder, hvormed man kan se hverdagens aktiviteter på hverdagens egne betingelser, analogt til antropologiens analyser af fremmede kulturer.[68]

Brasilianske gadesælgere

Carraher, Carraher og Schliemann har foretaget lignende undersøgelser med brasilianske børn, der arbejder som gadesælgere.[69] Nogle af børnene i undersøgelsen har gået i skole, andre har ikke. Som i Lave's undersøgelse sammenlignes børnenes regnemetoder og resultater i deres hverdag uden for skolen som gadesælgere med en skoleagtig situation. Det betegnes henholdsvis som "informal test" og "formal test". Det følgende udpluk illustrerer undersøgelsernes karakter. Det pågældende barn er 12 år:

> " *Informal test*
> Customer: I'm going to take four coconuts. How much is that?
> Child: Three will be 105, plus 30, that's 135...one coconut is 35...that is...140!
>
> *Formal test*

---

[68] *"The adult math project" er udførligt beskrevet i Jean Lave's bog "Cognition in Practice: Mind, Mathematics, and Culture in Everyday Life" fra 1988. Der kan yderligere henvises til Lave (1985), og til Roy D. Pea's anmeldelse (1990-91).*

[69] *Se f.eks. T.N.Carraher & D.W.Carraher's artikel "Mathematics in the streets and in schools" fra 1985.*

> Child resolves the item 35*4 explaining out loud:
> 4 times 5 is 20, carry the 2; 2 plus 3 is 5, times 4 is 20.
> Answer written: 200." (1985, s.26)

Det er en konklusion på undersøgelsen, at børnene regner langt bedre på gaden end i de skolelignende situationer. Konklusionen rejser spørgsmålet om, hvorvidt det er hensigtsmæssigt i skolen at starte med at undervise i rene talmæssige operationer, og først senere anvende disse på tekstopgaver. Carraher, Carraher og Schliemann konkluderer imidlertid ikke, at skolen ikke skal undervise i operationer og algoritmer, og alene lade eleverne udvikle deres egne. Anbefalingen drejer sig om rækkefølgen i den faglige tilrettelæggelse. Jeg citerer:

> "The major question appears to centre on the pedagogical point of departure, i.e. where to start. We suggest that educators should question the practice of treating mathematical systems as formal subjects from the outset and should instead seek ways of introducing these systems in contexts which allow them to be sustained by human daily sense." (s.28)

Voksne på kursus

En svensk undersøgelse af Claes Andersson [70] leverer ligeledes forundrende resultater. Undersøgelsen er en "før og efter"-undersøgelse, der sammenligner data om studerende henholdsvis før og efter en given matematikundervisning. Resultatet af denne undersøgelse er, at en gruppe voksne, inden de starter på et kursus i procentregning, kan regne procentopgaver, der traditionelt af matematikkyndige opfattes som vanskelige. Det er opgaver, hvor man får nogle oplysninger om indkomst efter skat og om skatteprocenten, og herudfra skal man beregne bruttoindkomsten. Efter at disse voksne har gennemgået kurset i procentregning, hvor de er blevet undervist i en algoritme netop til en sådan type af procentopgaver, så kan de ikke regne den opgave, som de kunne inden kurset! De voksne har tilsyneladende besiddet en kompetance inden kurset, som er blevet ødelagt af den algoritmiserede viden, de har skabt sig i løbet af kurset.

Sammenfatning

Resultaterne er opsigtsvækkende i deres dokumentation af, at der regnes meget, og at der regnes godt uden for skolen, at skolearitmetikken ikke

[70] *Claes Alexandersson "Stability and Change. An empirical study of the relation between knowledge acquired in school and in everyday life" fra 1985.*

har nogen høj transferværdi til hverdagslivet, og at skolen ikke benytter sig af potentialerne i elevers og studerendes hverdagsviden. Dermed udfordrer undersøgelserne gængse forestillinger om skolelæring.

Resultaterne fra disse tre undersøgelser er ikke enestående. Der er en stor gruppe undersøgelser, der går under betegnelsen "etnomatematiske undersøgelser". Her er et væld af ny empiri på, hvorledes der i dagligdags aktiviteter ligger tankegange og fysiske og mentale processer, der har en klar struktur, som kan betegnes som en matematisk struktur. Der er matematik i strikkeopskrifter, og at der er geometrisk viden om kvadrater, når brasilianske indianere konstruerer hytter. Det er bare en anden matematik, end den man lærer i skolen. Betegnelsen "etno" hentyder til, at sådanne former for matematik vil eksistere blandt særlige grupper af mennesker i en kultur. Betegnelsen hentyder imidlertid ikke til, at matematikformerne alene kan findes hos etniske minoriteter eller hos såkaldt "primitive" kulturer. [71]

5.C GENERELLE TEORETISKE STÅSTEDER

Der eksisterer forskellige generelle teser om det karakteristiske ved henholdsvis hverdagsviden og faglig viden. Teserne beskriver hvad der generelt er gældende for "hverdagsviden som sådan" og for "faglig viden - eksempelvis matematikviden - som sådan".

Enshed eller modstrid

Der eksisterer to fundamentale vinkler på forholdet mellem hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse: den ene er enshedstesen/lighedstesen, den anden er modstridstesen. *Enshedstesen* betoner, at hverdagsviden og matematisk viden har fælles egenskaber og fælles oprindelse: At begge dele er skabt under de samme samfundsmæssige og kulturelle betingelser, at begge dele skabes på samme måde i det enkelte menneske, at begge dele omhandler den verden, der omgiver os, og at begge dele hjælper os med at handle og med at forstå. At det oven i købet er sådan, at mennesker i alle kulturer tæller og ordner og konstruerer og ser mønstre, så man fristes til at betegne det matematiske indhold i det at tælle og at ordne og at se og at konstruere mønstre som grundlæggende eller naturlige kognitive processer.

---

[71] Se for eksempel J.Abraham & N.Bibby's artikel "Mathematics and Society: Ethnomathematics and a Public Educator Curriculum" fra 1988 og E.S.Ferreira's artikel "The teaching of mathematics in Brazilian native communities" fra 1990.

Modstridstesen betoner forskellene mellem hverdagsviden og matematisk viden, hvor matematik omhandler generelle og reducerende strukturer, mens hverdagsviden omhandler konkrete og hele situationer. At matematik er skabt ved hjælp af teoretisk abstraktion, mens hverdagsviden er skabt ved hjælp af empirisk abstraktion. At argumentation inden for matematik styres af en formel logik, mens argumentation i hverdagsviden styres af, hvad den enkelte person synes og mener og tror.

De to teser peger i retning af meget forskellige undervisningsstrategier: Ifølge *modstridstesen* må man forvente, at der er noget hverdagsviden, der kan virke forvirrende og forhindrende på matematiklæringen, så man må

- enten undgå at få hverdagsviden frem i undervisningen
- eller eksplicitere forskellighederne, og eventuelt tilstræbe at eleven oplever en kognitiv konflikt mellem de to sæt af tankegange.

Hvis der er en grundlæggende *enshed*, må man forvente, at hverdagsviden ikke forårsager indlæringsproblemer, men tværtimod kan være potentiale for matematiklæringen. Derfor må man

- tilstræbe, at eleven husker på sin hverdagsviden og knytter det matematiske stof til hverdagsviden.

Strategien om at undgå at få hverdagsviden frem i matematikundervisningen må umiddelbart forkastes, hvis man mener, at matematiske kundskaber og færdigheder skal kunne anvendes i sammenhænge, hvor der ikke på forhånd er formuleret en regneopgave. I sådanne tilfælde vil hverdagsviden om det pågældende område kunne spille en rolle.

Begge teser er for forenklede og for generelle. Mine undersøgelser peger på, at der ikke kan opstilles nogen enkelt tese om relationen mellem hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse, der kan dække alle former for matematik, eller alle former for hverdagsviden.

Lev S.Vygotsky

Lev S. Vygotsky præsenterer individets skabelse af henholdsvis hverdagsviden og faglig viden som kontraster:

- hverdagsviden dannes før den formuleres sprogligt; men der går en sproglig formulering "forud", når individet skaber faglig viden,
- hverdagsviden skabes ved at iagttage og handle med konkrete eksempler; men faglig viden kan opbygges uden nødvendigvis at starte med konkrete eksempler, - de kan vente til senere. Hver-

> dagsviden vil således som tendens blive opbygget induktivt, mens faglig viden også kan udvikles deduktivt.

Vygotsky pointerer, at elevens tænkning udvikles i læreprocessen ved at hverdagsbegreber og faglige begreber gensidigt befrugter hinanden:

> "We believe that our data warrant the assumption that from the very beginning the child's scientific and his spontaneous concepts - for instance, "exploitation" and "brother" - develop in reverse directions: Starting far apart, they move to meet each other. This is the key of our hypothesis." [72]

Vygotsky beskriver, hvorledes et fagligt begreb kan udvikle sig "nedad" fra tomme generaliteter til større konkrethed, samtidig med at hverdags-begrebet udvikler sig "opad" og bliver mere systematisk:

> "In working its slow way upwards, an everyday concept clears the path for a scientific concept in its downward development. It creates a series of structures necessary for the evolution of a concept's more primitive, elementary aspects, which give it body and vitality. Scientific concepts, in turn supply structures for the upward development of the child's spontaneous concepts toward consciousness and deliberate use". [73] [74]

Vygotsky tematiserer en central problemstilling i overvejelserne over læring i matematik: det faglige har til formål at bringe systematik og opmærksomhed og struktur på elevens tænkning, men de faglige begreber mangler den rigdom af forbindelser som hverdagsbegreber har, og der er risiko for, at de faglige begreber for eleverne forbliver tomme formuleringer, som alene kan bruges i en snæver række af emner inde i skolen, og ikke kan bruges uden for skolen, - måske ikke engang i andre skolefag end matematik.

---

[72] *Fra Lev S.Vygotsky "Thought and Language", kapitlet "Development of Scientific Concepts in Childhood". I udgaven fra Cambridge 1962 er det s.108.*

[73] *samme sted side 109*

[74] *Vygotsky's begreb "the zone of proximal development" var i hans egen tænkning netop relateret til interaktionen mellem teoretiske begreber og hverdagsbegreber, og begrebet angav udviklingspotentialet i mødet mellem elevens hverdagsbegreber og lærerens teoretiske begreber. Senere har andre teoretikere brugt hans begreb mere bredt til at angive den betydning, som dialogen med den mere kyndige lærer har for elevens læring. Se f.eks. Alex Kozulin "Vygotsky's Psychology. A Biography of Ideas" fra 1990.*

Størsteparten af Vygotsky's egne eksempler på faglige begreber er sociologiske begreber, og til dem alle findes der hverdagsbegreber, der omhandler de samme fænomener. Man kan sige, at de alle har søsterbegreber inden for hverdagsviden, og derfor fungerer den gensidige frugtbargørelse. I hvilken udstrækning kan dette generaliseres til at gælde faglige begreber i matematik? Nogle matematiske begreber kan siges at have søsterbegreber i hverdagsviden, men mange har et mere kompliceret familieforhold. Hverdagsbegrebet funktion har en helt anden mening end det matematiske funktionsbegreb, og avancerede matematiske begreber, som f.eks. differentialligning har ikke noget søsterbegreb. Vygotsky's tematisering er væsentlig, men fordrer konkrete og aktuelle undersøgelser som baggrund for egentlige analyser af faktiske læreprocesser.

5.D MATEMATIKKENS DIDAKTIK

Hvad er matematikkens didaktik overhovedet for noget? Hvordan forholder området sig til andre videnskabelige områder? Hvad kan "man", hvad gør man, hvilke typer af spørgsmål interesserer man sig for, hvilken slags svar kan man give, hvilken status har svarene, hvordan kan det formidles, hvordan kan det implementeres i praksis og eventuelt blive en del af praksis? Findes der overhovedet et "man" eller er der forskellige tendenser?

Relation til andre videnskabelige områder

Der findes ingen andre videnskabelige discipliner, der kan indfange genstandsfeltet, men matematikkens didaktik kan ikke undvære andre disciplinerss hjælp, og nogle discipliner er oftere relevante end andre.

Matematisk faglig kompetance er ikke i sig selv tilstrækkelig, psykologisk/pædagogisk kompetance er ikke i sig selv tilstrækkelig, sociologisk kompetance er ikke i sig selv tilstrækkelig, filosofisk kompetance er ikke i sig selv tilstrækkelig. Og sådan kunne vi fortsætte rækken af discipliner, der kunne nyttiggøres i forhold til særlige problemstillinger. Det er ikke muligt generelt at opstille noget kanonisk blandingsforhold mellem hjælpedisciplinerne. Det må ved hver problemstilling afgøres konkret og på ny. Også andre faglige didaktikker kan yde inspiration og klangbund, og det sker i praksis oftest i forhold til fysikkens didaktik.

Opfattelsen af, hvilken rolle hjælpen fra andre discipliner kan have, har ændret sig. Matematikkens didaktik definerer i stigende grad sine egne problemstillinger og konstruerer sine egne teoretiske grundlag. Tendensen går fra "theory borrowing" til "theory building".[75]

Der er ikke længere nogen tillid til, at man kan importere hele begreber eller idésystemer fra hjælpedisciplinerne. Fra psykologi eller sociologi kan man hente et motivationsbegreb, men det er ikke givet, at det ufordøjet kan bruges i den fagdidaktiske analyse. Fra matematik kan man hente et begreb for differentialkvotient, men det er ikke givet, at det ufordøjet kan bruges i den fagdidaktiske analyse. Begreberne må tænkes på ny. I visse tilfælde kan de bruges uændret, i andre må de ændres eller der må konstrueres nogle andre. Det er heller ikke givet, at begreber og forståelser, der skabes, kan generaliseres til andre fags didaktikker.

Mens man tidligere kunne opfatte matematikkens didaktik som hørende under faget matematik, opfattes den i stadig stærkere grad som en selvstændig disciplin. Der er tale om langt mere omfattende og langt mere dybtgående beskæftigelser med matematikundervisningens og matematiklæringens problemfelt i dets fulde kompleksitet, end det tidligere er set. Udviklingen har givet sig organisatoriske udtryk i dannelsen af flere nye internationale sammenslutninger af forskere.

I det følgende citat fra en statusrapport fra 1990 fra en af disse sammenslutninger "The International Group of Psychology in Mathematics Education" , forkortet PME, påpeges den bemærkelsesværdige udvikling fra midten af halvfjerserne i indholdet i videnskabelige artikler, og dannelsen af PME ses som katalysator for udviklingen:

> "As a result of the creation of PME, a fundamental change, more remarkable now in retrospect has taken place in attitudes about investigation. The mathematics education journals used to publish two types of papers according to the respective profiles of the journals. Some of the papers expressed the authors' suggestings concerning the teaching of mathematics: new topics, new examples, new ways of teaching. No empirical data were, generally, invoked for supporting the authors' ideas. A second category of papers published in research journals presented, usually, applications of psychological problems, concepts, and theories to the mathematical field (cognitive style, sex differences, problem solving, the role of imagery, etc.).

---

[75] *Se eksempelvis i introduktionskapitlet s.1–6 i Lesh, Richard & Landau, Marsha (1983) "Acquisition of Mathematics Concepts and Processes", Academic Press, New York, i serien "Develomental Psychology Series".*

The creation of PME changed the perspective and the approach to investigation. More and more, psychological problems *inspired by the school reality* captured the interest of researchers." [76]

Studier af faktiske læreprocesser

R.B.Davis betegner udviklingen som et paradigmeskift, hvor interessen for at forstå baggrunden for elevernes handlemåder og forståelser står centralt. Davis opsummerer sin optimistiske forventning til det nye paradigme på følgende måde:

> "In recent years, an alternative research paradigm has appeared in the world of mathematics education. This alternative paradigm shows considerable promise for increasing the emphasis on creativity, vision, understanding, insight, and the like, while at the same time paying proper attention to rote drill, routine practice, and "meaningless" algorithmic performance. This alternative paradigm gets data especially from task-based interviews, but also uses other datacollecting methods, including the analysis of error patterns, and even the precise measurement of response time. In typical cases, the analysis of this data is based upon information-processing conceptualizations, often drawn from the fields of cognitive science and artificial intelligence.
> This approach is beginning to demonstrate its ability to create a serious theory for the analysis of those processes of thinking that are required in dealing with tasks of a mathematical nature." (s.288)[77]

Som supplement til eksperimentelt baserede undersøgelser er det blevet mere almindeligt at studere faktiske læreprocesser, som jeg har gjort det. Jeg fandt metodisk inspiration i Jean Lave's arbejder:

---

[76] *Citatet er hentet fra Efraim Fischbein's introduktionsafsnit s.5 i Nesher, Pearla & Kilpatrick, Jeremy (eds) (1990) "Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education", Cambridge, Cambridge Unversity Press.*
I 1976 blev det på ICME-3 besluttet at danne en permanent organisering IGPME, som senere kom til at hedde PME. Fischbein var selv en af initiativtagerne. "Mathematics and Cognition"-publikationen fra 1990 er en statusopgørelse, hvor alle undergrupper under PME er repræsenteret med et kapitel hver.

[77] *Robert B.Davis' artikel "Complex Mathematical Cognition", s. 252-290 i H.P.Ginsburg (red)"The Development of Mathematical Thinking" fra 1983.*

Jean Lave arbejder med grundlæggende teoretiske spørgsmål om forholdet mellem kultur og kognition og mellem situation og kognition, og ikke med læring inde i skoleinstitutionen, så jeg har ikke direkte kunnet anvende hendes mere konkrete resultater. Til gengæld har jeg hentet inspiration til metodisk tilrettelæggelse af mine undersøgelser. Den kritiske opmærksomhed, som Jean Lave retter mod forudsætningerne for tænkningen om transfer, og hendes insisteren på at studere mennesker i deres egen dagligdag i stedet for at arrangere eksperimentelle situationer, er inspirerende: Det har været min intention at flytte Jean Lave's åbenhed og nysgerrighed tilbage i skolen og at bære hendes kritiske opmærksomhed mod grundlæggende tankesæt med mig derind. Jeg ser på, hvordan man bringer viden og erfaring fra hverdagen til skoleindlæringssituationen, og Jean Lave's supermarked svarer således til min skolestue.

Relationer til praksis

Matematikkens didaktik har som sit genstandfelt matematikundervisningens og matematiklæringens problemfelter i deres kompleksitet. Problemfelterne er ophav til forskningens problemstillinger, den metodiske tilrettelæggelse sker under hensyntagen til problemfelterne, det er i forhold til matematikundervisning og matematiklæring, at forskningen søges implementeret.

Relationer mellem teori og praksis i matematikkens didaktik kan diskuteres ud fra følgende tre spørgsmål:

I) hvilke grundlæggende spørgsmål arbejdes der med?
II) hvilke forhold er det muligt at skabe indsigt i?
III)hvorledes kan indsigten formidles og gøres brugbar for praksis?

De grundlæggende spørgsmål er livliner for arbejdet

Der kan spores en række grundlæggende spørgsmål som en stabil kerne i matematikdidaktisk debat og forskning. Spørgsmålene er født af matematikundervisningens og matematiklæringens problemfelter, og af de beslutninger som skal tages af curriculum- og materialedesignere, eksamenskommissioner og skolelærere. Spørgsmålene fungerer som kilde til empiriske og teoretiske arbejder. De grundlæggende spørgsmål er som livliner, der inspirerer og giver næring til arbejdet, og som er med til at forhindre at arbejdet smutter væk eller drukner i relativt tilfældige detaljer. Jeg vil beskrive de grundlæggende spørgsmål på følgende måde:

1. Det er spørgsmålet om, med hvilke mål og hensigter man foranstalter skoleundervisning i matematik?

2. Det er spørgsmålet om det matematiske indhold i læseplanerne: hvilke matematiske stofområder skal der undervises i, hvilke dele skal ligge i den almene uddannelse, og hvilke dele skal ligge i de studie- og erhversrettede uddannelser?

3. Det er spørgsmålet om brugbarhed: hvorfor er det så svært at bringe kundskaber man har erhvervet INDE i matematiktimerne i skoleinstitutionen til anvendelse i situationer uden for skolen eller i nye slags situationer inde i skoleinstitutionen?

4. Det er spørgsmålet om, hvorledes undervisningen kan tilrettelægges, så den fremmer de foreliggende mål og hensigter: hvilke slags rettesnore kan man give til praktiserende materialedesignere, til praktiserende lærere og til elever?

5. Det er spørgsmålet om menneskelige ressourcer og begrænsninger: hvilken betydning har den primære socialisation og den viden, man kan skaffe sig i hverdagslivet, over for færdigheder og kompetance erhvervet i matematikundervisningen? Og hvilken betydning har affektive faktorer (som holdninger, motivation, følelser, intentioner) over for kognitive faktorer (som viden, indsigt, erkendelse)?

6. Det er endelig det helt centrale spørgsmål om, hvordan der kan skabes indsigt i elevens læring?

Mit arbejde har ikke haft spørgsmål 1 og 2 som livliner, men de øvrige spørgsmål har fungeret som livliner.

Arbejdet giver mulighed for særlige former for indsigt

Der eksisterer ingen direkte adgang til at analysere de seks nævnte grundlæggende spørgsmål, og de er for uspecificerede til at kunne fungere som problemformuleringer på konkrete forskningsarbejder, som i øvrigt ofte vil være præget af aktuelle betingelser for matematikundervisningen. Spørgsmålene skal "forbehandles", og dermed gøres tilgængelige for analyse. "Forbehandlingen" består af overvejelser over konkretiseringer og perspektiver, og af overvejelser over hvordan man kan afgrænse og samtidig bevare "tilstrækkelig" kompleksitet. Analyser af de "forbehandlede" spørgsmål fører ikke til egentlige "svar" på de grundlæggende spørgsmål. Udbyttet af analyserne er derimod en række

indsigter. Indsigterne kan give hjælp og perspektiver til i praksis at handle i forhold til de grundlæggende spørgsmål. Indsigterne udvider repertoiret af mulige forståelser og handlemuligheder.
Det er min opfattelse, at matematikkens didaktik kan skaffe følgende typer indsigt til veje:

1. I matematikkens didaktik udvikles teori, beskrivelser og analyser om kognitive processer i tilknytning til matematiklæring: om hvorledes matematisk viden og færdigheder kan skabes, om hvorledes samspillet kan foregå mellem ny og gammel viden og mellem nye og gamle færdigheder, og om hvorledes matematisk viden og færdigheder kan bruges. Man kan til sådanne formål benytte sig af en bred vifte af metoder: man kan studere forsøgsundervisning, foranstalte laboratorieforsøg, studere hverdagssituationer osv. osv.

2. I matematikkens didaktik tilvejebringes beskrivelser og fortællinger om faktiske undervisningsprocesser og læringsprocesser i skoleinstitutionen. Her er man nødsaget til at hente empiri fra den eksisterende dagligdag i skolen.

3. I matematikkens didaktik foretages analyser af muligheder og betingelser for matematikundervisning og matematiklæring, der skyldes at det faglige indhold er matematik, og ikke for eksempel historie eller engelsk. Det drejer sig om analyser af muligt fagligt indhold.

4. I matematikkens didaktik tilvejebringes en indsigt om muligheder og betingelser for matematikundervisning og matematikindlæring, der sættes af faktorer uden for uddannelsessystemet: hvorledes samfund og kultur sætter materielle, økonomiske og bevidsthedsmæssige betingelser for undervisningen og læringen, og hvorledes undervisning og læring på godt og ondt påvirkes af disse betingelser.

Det er indsigter af type 2 og 4 som mit arbejde har bidraget til.

Indsigten kan formildes på tre forskellige måder

Matematikkens didaktik kan spille ikke bare én, men flere roller i forhold til praksis. Rollerne kan som det ene yderpunkt være at levere eksakte forslag til at håndtere et specifikt problem, og som det andet yderpunkt at give et nyt sæt briller, som lærere selv kan bruge til at se deres egen empiri, egen praksis og egne erfaringer igennem.

Det er min opfattelse, at indsigterne kan formidles i tre forskellige "formidlingsformer":

1. Den første form er beskrivelser af og konklusioner på konkrete undersøgelser.

2. Den anden form er begreber, kategorier og metaforer på fænomener og forhold i problemfelterne. Begreber, kategorier og metaforer kan indirekte øve indflydelse på undervisning og læring. Metaforen "elevens egen læreplan" kan indirekte øve indflydelse på undervisningen, hvis læreren tager metaforen til sig, gør den til sin egen, lader den indgå i sin fond af forståelser, og således lader den virke strukturerende på sine tolkninger af elevernes adfærd.

3. Den tredie type er mere direkte handlingsanvisninger i form af anbefaling af særlige pædagogiske principper, særlige rækkefølger i stoffet, særlige typer af opgaver, særlige typer af evalueringsformer.

Mit arbejde er formidlet i form af udførlige beskrivelser af de konkrete undersøgelser, i form af metaforen "elevens egen læreplan" og i form af modeller over hverdagsviden og matematisk begrebsdannelse. Direkte handlingsanvisninger lægger mit arbejde imidlertid ikke op til.

Der er meget matematikkens didaktik ikke kan, som man ud fra en umiddelbar betragtning kunne forvente og håbe, at den kunne. Man kunne måske forvente, at den kunne udpege særlige principper for undervisningstilrettelæggelse til at være de bedste i absolut forstand. Man kunne tro, at den kunne give enkle og endegyldige metaforer. Man kunne tro, at den kunne give entydige anbefalinger af en rækkefølge i f.eks. undervisning i differentialregning. Men at forvente det, er at undlade at respektere kompleksiteten som, og at tage et ansvar fra læreren og fra eleven, som ikke kan tages fra dem. Det ligger uden for matematikkens didaktiks muligheder.

Det er og vil vedblive med at være læreren, der ser Johanne fortvivle, læreren, der hører Knud fejlagtigt påstå, at han sagtens forstår det hele, og læreren, der bemærker, at Magnus for tredie gang i træk ikke afleverer hjemmeopgaver. Og det er og vil vedblive med at være eleven, der skal høre læreren tale, som var det i en ukendt kode, se klassekammerater brilliere og dumme sig og opleve at forstå, hvad en anden elev spørger læreren om og samtidig fornemme, at læreren ikke forstår spørgsmålet.

KAPITEL 6. KONKLUSIONER

Undersøgelsen opfordrer til at sætte fokus på elevers og studerendes læring både i teoretiske overvejelser i matematikkens didaktik og i skolens praksis.

Undersøgelsen giver optimistiske vidnesbyrd. Overvejelser over hverdagsviden kan give nye fremadrettede forståelser af læringsproblemer og pege på potentialer. Der er tale om læringsproblemer, som ellers forekommer uforklarlige eller som af både lærer og elever forklares med generelle mangler ved eleven, som ingen kan stille noget op med i løbet af en matematiktime, (såsom manglende koncentrationsevne, motivation, evne til abstrakt tænkning, matematiske forkundskaber eller "sans" for matematik).

Undersøgelsen giver vidnesbyrd om, at man ved at tage elevers udtalelser for pålydende, kan suge informationer om deres tænkning og give bud på indholdet af deres forståelser af begreber, af faget og af skolen. Man må for eksempel give eleven Karen ret i, at det er "åndsvagt at regne" en opgave, hvor man skal godtgøre en opgivet formel for ligesidede trekanters areal. Sådan som Karen tolker opgaven, er det tidspilde. Matematikkyndige voksne er imidlertid sjældent opmærksomme på, at deres egen tolkning kun er én mulig blandt flere, og at også f.eks. Karen's tolkning er konsistent.

Undersøgelsen giver vidnesbyrd om, at elevers forskellighed ikke kan beskrives tilstrækkeligt på endimensionale karakterskalaer. Elever har forskellige potentialer for læring, som godt kan vise sig at være lige frugtbare, hvis de bliver udnyttet.

Hverdagsviden om fag, skole, argumentation og specifikke genstandsområder *øver direkte indflydelse* på læringen af matematik som del af elevernes forviden. Hverdagsviden *øver indirekte indflydelse* på læringen af matematik, idet forholdet mellem matematik og virkelighed er et andet end forholdet mellem hverdagsviden og virkelighed, og idet brugen af det naturlige sprog og af symboler er forskellig. At sådanne forskelle mellem hverdagsviden og matematik ikke er på dagsordenen for undervisningen kan give unødige læringsproblemer.

Der er mange vidensplaner i matematik, og især i forbindelse med anvendelsesopgaver og matematisk modellering har man brug for at springe imellem henholdvis

- idémæssige kerner,

- symbolplanet,
- begrebsmæssige sammenhænge og
- sin viden om fænomener og sammenhænge i anvendelsesområdet.

Lærernes "læringsglemsel" øger risikoen for, at disse spring ikke gøres til genstand for undervisning. I kraft af at lærerne for længe siden har oparbejdet forståelser af det faglige indhold, springer de ubesværet mellem planerne og har glemt, hvordan det var ikke at have oparbejdet forståelsen.

6.A TEORETISKE KONKLUSIONER

Undersøgelsen bekræfter på det stærkeste, at viden konstrueres aktivt i det enkelte individ, og giver ingen støtte til forestillingen om at viden kan overbringes i uændret form fra lærer til elev. Elever er på ingen måde passive modtagere. Undersøgelsen er således en bekræftelse på et konstruktivistisk syn på læring.

Modellen over relationer mellem matematisk begrebsdannelse og hverdagsviden, som kan øve indflydelse på matematiklæring i skolen, kan bruges generelt for alle dele af skolefaget. Modellen er ikke kun knyttet til specifikke dele af fagets emner eller aspekter. Det vil være en relevant forskningsopgave at anvende modellen på specifikke faglige emner og aspekter, såsom

- hverdagsviden og lineære funktioner
- hverdagsviden og prognosemodeller
- hverdagsviden og beviser i geometri
- hverdagsviden og differentialligninger.

Begrebet "elevens egen læreplan" angiver den unikke og konsistente måde hver enkelt elev fortolker og reagerer på skolefaget. Jeg ser ingen grund til at begrebet ikke skulle kunne generaliseres til alle børn, der har gået i skole i en årrække. Også eksempelvis filippinske elevers intentioner og forestillinger vedrørende fag og skole er afgørende for deres matematiklæring, og man vil også i deres læreplan kunne finde forklaringer på ellers uforståelige detaljer i deres læring.

Elevens læreplan er virksom over for alle typer af skoleundervisning, såvel ordinær undervisning som forskellige former for forsøgs- og udviklingsarbejde, og for både større børn, unge og voksne. Hvor tidligt elevens læreplan etableres kan jeg ikke udtale mig om.

Indholdet af elevlæreplaner kan jeg ikke på baggrund af undersøgelsen generalisere på. Jeg mener dog ikke, at der i en klasse med 28 elever vil være 28 væsensforskellige elevlæreplaner. Fagets rolle i den offentlige kultur og elevernes erfaringer fra skolematematik er de afgørende faktorer for indholdet i elevens egen læreplan, og sætter således rammerne for, hvilket indhold der vil være muligt i elevens egen læreplan. Jeg vil antage, at der er internationale forskelle, der afhænger af skoletraditioner og kulturelle normer. Man kunne forestille sig, at der i lande, hvor de officielle læseplaner lægger vægt på fagets udforskende karakter, er relativt mange elever med hensigter og intentioner udover at få gode karakterer. Man kunne også forestille sig, at der vil være flere forskellige elevlæreplaner i lande som Danmark med en demokratisk tradition og med en skolekultur, hvor den enkelte skolelærer har stor grad af autonomi. Tilsvarende vil jeg antage, at der i lande med autoritær undervisningskultur og centralt styret undervisning er færre forskellige elevlæreplaner.

Begrebet elevens egen læreplan kan anvendes til at forklare læringsfænomener, som ellers kan forekomme at være uforklarlige. Når nogle elever oplever, at læringen går godt og problemfrit, indtil der pludselig "sker et eller andet", og at de derefter ikke kan følge med, så kan det skyldes, at elevens læreplan indtil da har fungeret befordrende, men virker hindrende for en videre udbygning af matematisk kompetance.

Begrebet elevens egen læreplan er en logisk udvidelse af de teoretiske overvejelser hos H.Bauersfeld (1980), hos B.Snyder (1970) og hos H.Giroux & D.Purpel (1983).

Bauersfeld arbejder med tre vigtige aspekter ved undervisning og læring i skolefaget:

- den faglige målsætning kaldet "the matter meant",
- hvad læreren faktisk underviser, kaldet "the matter taught"
- og hvad eleverne faktisk lærer, kaldet "the matter learned".

"The matter meant" beskrives i de officielle læseplaner. Når lærere og forskere vil undersøge eller ændre på "the matter meant" er det de officielle læseplaner de skal undersøge og forandre. Hverken "the matter taught" eller "the matter learned" beskrives af de officielle læseplaner.

Snyder's og Giroux & Purpel's arbejde kan forklare forskellen mellem "the matter meant" og "the matter taught", idet de påpeger, hvorledes institutionelle mekanismer som f.eks. eksamenssystemer påvirker undervisning og læring lige så kraftigt som de officielle målsætninger og læseplaner. De bruger betegnelsen "den skjulte læseplan" (The Hidden Curriculum) herfor. Lærere og forskere, der vil undersøge eller forandre the matter taught, kan søge efter indsigt i og søge at forandre den skjulte læseplan. Den skjulte læseplan kan imidlertid ikke, heller ikke kombineret med den officielle læseplan, beskrive "the matter learned". Også i Skandinavien er der arbejdet med den skjulte læreplan.

Elevens egen læseplan kan forklare forskellen mellem "the matter taught" og "the matter learned". Hvis man ønsker at ændre på "the matter learned", må der skabes betingelser for, at elever og lærer kan udforske elevens egen læreplan, identificere den og eventuelt blotlægge og forhandle den underliggende hverdagsviden.

6.B PRAKTISKE KONKLUSIONER

Undersøgelsen er en opfordring til lærerne om at være nysgerrige over for elevernes læring, og at lade elevernes læring spille en lige så stor rolle i undervisningen som det faglige stof. Elevernes opgavebesvarelser, hvad enten de er korrekte eller fejlagtige, elevernes spørgsmål, elevernes svar og elevernes spontane udbrud er altsammen ytringer, der kan bruges som kilder til at skabe indsigt i elevernes læring.

Der eksisterer ikke læring uden fejltagelser og overgeneraliseringer. Der eksisterer ikke læring uden hindrende hverdagsviden. Hvad der imidlertid forstyrrer læringen unødigt, gør den unødigt ineffektiv og giver nogle elever unødige sår i sjælen er, at læringsprocessen forekommer ulden og uigennemskuelig. Hvis der var bevidsthed om hindringerne, kunne de måske komme til at virke befordrende. Hvis der var bevidsthed om de potentielle befordrende elementer i hverdagsviden, kunne de måske komme til at virke reelt befordrende. Eleverne må turde fortælle om deres læring, og læreren må være reelt interesseret. Det følelsesmæssige og sociale klima er centralt, ikke som en abstrakt moralsk fordring, men som en konkret betingelse for den faglige læring.

Der åbner sig hermed nye områder for lærerarbejdet, der er lige så vigtige som den faglige tilrettelæggelse:

> Det bliver en del af lærerens job at befordre et arbejdsklima, hvor eleverne kan og vil reflektere over deres læring og undersøge begrebsforståelser og læreplaner.
>
> Det bliver en del af lærerens job sammen med eleverne at udforske deres forståelser. Læreren bliver en forskende lærer.

BILAG: UDSKRIFT FRA FØRSTE UNDERSØGELSE

Interviewundersøgelsen foregik i fem klasser på fem skoler i hovedstadsområdet. Der blev foretaget syv dobbeltinterviews. Desuden to tænke-højt-eksperimenter i forbindelse med opgaveregning.

Skole nummer 1, 31.marts 1989. Interview med 4 elever udvalgt ved lodtrækning. Første interview med eleverne A og B, andet interview med eleverne C og D.

Jeg var på besøg i to timer. Jeg forklarede i starten af den første time, hvorfor jeg var på besøg. Jeg fortalte, at jeg i den første time ville lytte til lærergennemgangen og at jeg bagefter når eleverne skulle regne opgave, ville bede én af dem "tænke højt" under opgaveregningen. I anden time ville jeg tilfældigt udvælge 2 gange 2 elever til interviews for at lytte til deres vurderinger af mine teser om matematiklæring.

Jeg forklarede, hvorfor jeg ville tale med 2 elever ad gangen: man kan hjælpe hinanden med at komme i tanke om tidligere processer, man kan inspirere hinanden, man kan diskutere det bagefter, og det vil være lettere at fortælle andre fra klassen om interviewoplevelsen. I en klassediskussion vil det være de, der altid snakker mest, der vil komme til orde, og det vil give mig et forvrænget billede.

INTERVIEW NR.1 MED ELEVERNE A og B

Som start på hvert interview fortalte jeg, at jeg var interesseret i, hvorvidt man kan beskrive oplevelser, hvor man pludselig forstår noget. Mit indledningsspørgsmål var, hvorvidt sådanne oplevelser eksisterer.

Svaret lyder fra elev A: Andensgradsligninger og -polynomier var meget svært i starten, men da vi selv prøvede at løse nogle opgaver gik det efterhånden meget godt, og nu kan vi sagtens finde ud af det.
Når man øver sig, så kommer det af sig selv.
I: Er det sådan at du mener at du så også forstår det ?
A: Ja, det gør jeg i hvert fald.
B: Ja, jeg synes også godt, jeg kender det der med, at lige pludselig så er det en hel åbenbaring. Med cosinus og sinus, fik jeg ikke det hele med i starten,
I: Hvad mener du ?
B: Det jeg gjorde galt, var sikkert noget med at sætte minustegn forkert.
A: Man ved ikke, det er svært, når det bliver gennemgået første gang.

I: man kan ikke forestille sig, hvad der er svært, før man selv går igang, er det det du mener ?
A og B; Ja, det er rigtigt.
I: Har I haft oplevelser, hvor I har kunnet hjælpe hinanden mere end læreren har kunnet hjælpe ?
B: Læreren kommer med ord, man ikke forbinder med noget. Det er svært med alle de ord.
I: Når I snakker med hinanden, snakker I i et andet sprog ?
B: Ja, det kan godt passe.
Og vi kender hinanden bedre, så vi ved, hvad de andre kan og ikke kan, og vi ved fra os selv, hvordan vi har tænkt.
Og så er det også tit man kan se, at lærer og en anden elev taler forbi hinanden, og så sidder man selv og forstår, hvad den anden elev mener, men man vil ikke kunne forklare for læreren, hvad den anden elev mener.
A: Det er også svært for læreren at koncentrere sig, når så mange elever spørger om forskellige ting på een gang. Man kan stille mange spørgsmål til en kammerat, og man kan blive ved med at spørge, hvordan, hvordan, hvordan ! Men man kan ikke stille 3–4 spørgsmål til læreren. Man får kun éen chance, og så må man forstå, hvad han svarer.
A: Når de andre elever kan finde ud af det, så tror jeg også, at det vil være muligt for mig at forstå det.
B: Halvdelen forstår ikke en skid af, hvad der foregår i kemi, og læreren går bare videre.
A: Og de kan ikke nå at spørge.
B: Matematiklæreren er bedre til at forklare, kemilæreren forlanger virkelig, at vi skal gøre noget selv, og jeg har selv svært ved at sætte mig ned og tage mig sammen. Man skal virkelig læse meget, man skal virkelig være koncentreret.
I: Vil I sige, at I forstår det I har haft i differentialregning (de har haft ganske få timer).
B: Jeg kan godt sætte mig ned og gøre det, men jeg forstår fandeme ikke, hvad det handler om. Grænseværdi og asymptoter er sådan noget, der svæver rundt højt oppe et sted.
A: Jo, jeg kan godt forstå det, fordi jeg arbejder sammen med to dygtige elever.
B: Der mangler nogle brikker der midt i det hele.Og det er enormt kedeligt, det er bare bogstaver og tal.
I: Hvad har været det mest spændende, I har lavet i matematik i år ?
A ogB er enige om, at cosinus og sinus var det sjoveste.
I: Hvorfor er det egentlig sjovt ?
A: Fordi det er nemt at lære. Der er nogle bestemte formler, og så kan man sætte tal ind i.

I: Betyder det ikke også meget, at man kan se, hvad man skal bruge formlerne til ?
B: Jo, een formel til hver slags opgave.
I: Sker der efter jeres vurdering spring i indlæringen i nogle fag og ikke i andre ?
A: Der er kun pludselige spring i matematik, fysik og kemi.

INTERVIEW NR.2 MED ELEVERNE C og D

C: I starten er det kaos, det der står på tavlen, men når man så selv er kommet lidt ind i, hvordan man egentlig arbejder sig frem, og måske så finder ud af, hvordan man selv kan arbejde sig stille og rolig frem, så lige pludselig så finder man selv en teknik, og så virker det, som om der går et lys op for één: "Nå ja, så kan man jo bare gøre sådan og sådan lynhurtigt".
Nu i differentialregningen synes jeg tit, når vi bliver præsenteret for en ny formel, at der er noget sammenhæng, men man kan ikke helt se, hvad det er.
D: Man kan mærke, der er et eller andet, man ikke kan finde ud af,
C: men så lige pludselig så skriver man formlen, så siger man, nåh ja, gud hvor var man dum, så tænker man FEDT, og så går det lynhurtigt resten.
D: Nu er der ingen aha-oplevelser. Men flere andre gange i starten af cosinus havde jeg ingen lommeregner, og derfor kunne jeg ikke forstå det. Men så i efterårsferien opstillede og regnede jeg selv nogle opgaver, og så forstod jeg det.
Med asymptoter sad jeg bare og kiggede, og så den allersidste dag gik det op for mig. Jeg kunne mærke, at lige pludselig kunne jeg selv finde ud af, at så går den der på den måde og alt det sjov.
Det var meget rart, at jeg vidste, var der ville blive de næste skridt i lærerens regninger.
C: Det sværeste var reduktioner i starten af 1.g.
D: Jeg kan stadig ikke parenteser og fortegn.
C: I starten havde jeg ingen anelse om, hvad der gik ud med hvad. Jeg spurgte min far, og efter 20–30 opgaver behøvede han ikke hjælpe mig mere.
L: Hvad forklarede din far dig ?
C: Han havde nogle regler fra teknikum. Og det sagde mig ikke så meget i starten, men så kunne jeg se, at dér var en kvadratrod, så prøvede jeg at skrive det op, og så ved jeg det. Når man gør det mange gange, så sidder det mere fast, og så kan man det, uden at tænke over det.
D: Historie skal du enten lære udenad, eller også skal du fremsætte dine holdninger til nogle tekster.

Kun matematik, fysik, kemi har spring i indlæringen.

(Derefter hyggesnakker vi om, på hvilke tidspunkter af dagen matematiktimerne bør ligge)

D: I trigonometri kom forståelsen med træningen.
C: (uforståeligt på båndet)
D: Analogier fra andre sider af matematikken.
I: Kan det være analogier fra andre steder.
C: Ja alle vegne.
C: Der er ting som for andre kan virke fuldstændig ulogiske, men som passer godt med ens egen form for logik. For eksempel: Hvorfor er trekanters vinkelsum 180. Jo, en firkant har 360, og en trekant er det halve af en firkant.
D: Jeg fandt trekanter allevegne, i tyggegummiklatter på fortorvet, da vi havde trigonometri.Det var lige før, det blev til en hel mani, så jeg måtte gøre mig umage for ikke at se trekanter, for at få femkanter eller andet ud ad det.
D: Det er godt, hvis man får at vide, hvad man skal bruge matematikken til.
C: Det skal være sammenhængende.
D: Hvis man laver det for praksisrettet, så kan man ikke generalisere det.
D: Start med et praksiseksempel, så teori, og så igen praksis. Første del vil så skærpe interessen.
Jeg kan synes, det ser skideflot ud, når læreren fylder tavlerne. Og det er forstået, hvis man kan gætte, hvad læreren vil skrive bagefter.
C: Jeg sidder altid fem minutter bagefter et af lærerens beviser og tænker det igennem, hvad startede vi med, hvad endte vi med.
C: Det ville være 10 gange bedre, hvis vi kun var 10 elever. Så kunne man bedre nå at stille spørgsmål.
I: Det er altså rigtigt, at der findes aha-oplevelser i matematik ?
C og D:Ja.
I: Og I mener, at træning, analogier, sammenhæng er nøglerne ?
C: Ja, men den første træning skal være med én, der stiller spørgsmål.

(Efter timerne blev jeg passet op af en gruppe elever fra klassen, der indtrængende bad mig love dem at fortælle Bertel Haarder, at klassestørrelsen er alt for høj til, at alle kan lære noget.)

<u>Skole nummer 2, 6.april 89. Et tænke højt-eksperiment samt et interview med 2 elever E og F.</u>

ET TÆNKE HØJT - EKSPERIMENT MED ELEVEN E

I den første af de to timer, jeg er på besøg på skole nummer 2, udvælger jeg tilfældigt en elev E, der indvilger i at tænke højt under opgaveløsning. Opgaven går ud på at beregne toppunkter for en række parabler, og at skitsere grafen.

E samler først de relevante formler foran sig, fordi det er de samme formler, der skal bruges til alle stykkerne.
I et eksempel, hvor B er nul, insisterer E på at regne 1.koordinaten ud, men regner galt i nævneren, der hedder 2A. E adderer 2+A i stedet for at multiplicere.
I: Hvad er det, der står i nævneren. Du får 2A til at give 8.
E: Nå, ja, det gik lidt for hurtigt, det giver 12.
I: Hvad var det, du havde lavet galt.
E: Det ved jeg ikke, jeg tror jeg plussede, jeg gjorde det fordi, jeg vidste jo, at den (tælleren, og dermed hele brøken/Lena) blev nul, så tænkte jeg ikke over det.
.....
.....
I: Kan du skitsere, hvordan graferne ser ud for de tre polynomier.
E: Så skal jeg til at lave sildeben.
I: Nej, det skal du ikke, du kan prøve på at udnytte det, du har regnet ud.
E: Så skal jeg tænke mig om,- det jeg har regnet ud er toppunkterne.
I: Hvad tænker du så.
E: Jeg tænker, at jeg kan huske, at der er et eller andet med, at kurven skærer x.aksen, og jeg kan huske, at jeg skrev noget ned.
Det er noget med, at når den er over 1.....
(E leder i sine noter).
E: Det er noget med, hvor de forskellige skærer x-aksen. A bestemmer, om parablen går opad eller nedad. Hvis A er negativ, så ved jeg, parablen går nedad. Og jo større A er, jo tættere går den på y-aksen. Jo tættere A havde været på nul, jo bredere er den. Så jeg har sådan nogenlunde idé om, hvordan den vil se ud.
I; Hvor ved du det fra ? Hvorfra ved du, at parablen vender op henholdvis ned, og er bred henholdsvis smal ?
E: Det er noget, jeg kan huske.
I: Kan du huske, at læreren har sagt det, eller kan du huske det ud fra nogle eksempler, som du har set graferne til.
E: Jeg kan huske læreren har vist det ud fra eksempler i et koordinatsystem. Jeg ved også fra sådan noget som eksponentialfunktioner, at der sker noget, når den er mellem nul og en. Der sker *noget*, når man sætter ting i anden, og fra en og opefter sker der noget tilsvarende andet. Altså det er sådan en regel, at når man sætter en brøk i anden, så bliver det i

virkeligheden mindre, og ikke større, som når man sætter et almindeligt tal i anden.
I: Hvis det er en brøk, der ligger mellem nul og en.
E: Ja, det var det, jeg mente.
E: f(0) er 8, og så ved jeg, at der er to nulpunkter.
...
...
(Jeg underviser E i den grafiske betydning af den numeriske værdi af A)
I: Hvordan ville du kunne finde nulpunkterne.
E: Jaeh, det viste læreren på computer.
(De har ikke set formlen endnu.)

INTERVIEW NR.3 MED ELEVERNE E og F

Eleverne E og F meldte sig frivilligt. E er den samme elev, som deltog i tænke-højt eksperimentet i den foregående time.

I: Jeg vil gerne høre jer fortælle, om I har haft oplevelser, hvor I pludselig forstod noget.
F: Jeg har det mange gange sådan, at når der er noget, jeg ikke forstår, så springer jeg det over, og når jeg så kommer længere over i bogen, så fatter jeg lige pludselig noget, som jeg egentlig ikke troede jeg kunne.
E: Jeg synes tit, jeg har det sådan, at jeg ikke forstår noget, og så pludselig forstår jeg det, men jeg kan ikke komme med eksempler nu. Relativt tit, er der noget jeg ikke forstår, men man kommer ligesom ind i en vane, tror jeg, at man lærer tingene at kende. Der sker spring, når man går ind i et nyt emne, ellers er det mest sådan, at man bygger ovenpå, så det ser rimelig logisk ud.
I: Kan I huske, dengang I forstod, hvad en ligning var. Jeg kan ikke huske det.
E: Jeg tror godt, jeg kan huske det. Vi havde først noget med rette linjer i et koordinatsystem, vi lærte hvordan vi skulle skrive dem op, nej ikke hvordan vi skulle skrive dem op, men hvordan vi skulle tegne dem: én hen, så skulle man gå to op. Så lærte vi, hvordan vi kunne skrive dem ned.
I: Med et lighedstegn ?
E: Ja, med et lighedstegn. Men det er først her i gymnasiet, jeg forstod hvad f(x) vil sige.
F: Jeg kan sagtens huske, hvordan jeg lærte det. Jeg lærte det tidligt, fordi min storesøster gik fem klasser over mig, og jeg var meget interesseret i at få fat i hendes bøger. Jeg lærte først tallene, og så havde jeg (uforståeligt på båndet) om, hvordan man kunne regne ud, hvad 1 plus 2x var. Jeg lærte det ikke rigtigt, men jeg forstod det forholdvis

hurtigt, da jeg så fik om det i skolen. Men jeg kendte allerede andengradsligninger, inden jeg lærte koordinatsystemet at kende.Men jeg tror, det vil være nemmere at lære, hvis man allerede kender koordinatsystemet. Jeg har først lært at tegne parabler her i gymnasiet.
E: Det sværeste, vi har haft i gymnasiet er eksponentialfunktioner. Matematik er jo et kæmpestort område. Og når man skal lære elever om det - f.eks. ligninger, må man konstruere nogle opgaver, som er relativt lette at løse, som altid går op, og uden at putte for mange faktorer ind i begrebet, ellers skaber det ligesom forvirring. Det har altså bare den ulempe, at hvis man så skal løse en vilkårlig opgave, så er man vant til, at det går op, man lærer ikke selv at prøve at tænke på en ny måde, at tænke "Va' fa'en mon det der betyder" Man har en overfladiskhed, og siger bare "nå sådan er det". Det er svært at forklare, hvad jeg mener. Men tag nu f.eks. sådan noget som logaritmer. Det er en vigtig funktion, men hvad er det i virkeligheden.
F: Det er ikke noget, man lærer. Det er ikke noget, man får lov til at forstå. Man skal bare vide, at det trykker man på en lommeregner, og så får man de tal ud. Man lærer ikke at forstå, hvordan man egentlig i hovedet kunne regne det ud, sådan rigtigt, og hvordan man kunne bruge det til nogle andre ting, som man ikke har lært. Altså hvordan man kunne forestille sig, det kunne bruges.
E: Måske skulle man i virkeligheden bygge matematikundervisningen op, så man hvergang man skulle lære noget nyt, så skulle man først give eleverne nogle opgaver, hvor man skulle regne f.eks. nogle pH-værdier ud. Men man måtte selvfølgelig give eleverne nogle oplysninger om, hvordan eleverne skulle gøre. Det tager nok lang tid, men man får hjælp til det. Så prøver man så bagefter at sætte det i system: der er faktisk noget, man kan bruge, der er noget, der hedder logaritmer.
I: Mener du, at man skulle stille eleverne nogle opgaver, som det var besværligt at løse, og som det ville være nemmere at løse, hvis man havde lært de nye begreber.
E: Jeg kan komme med et andet eksempel. I 5.6.klasse i madlavning var vi på NESA, hvor nogle skulle lagkage kun med håndkraft, og andre måtte bruge alle de maskiner, de ville. Og konklusionen var, at det var meget nemmere at bruge maskiner, fordi energiforbruget er utrolig lille i forhold til, hvor mange kræfter man bruger ved at piske i hånden. Derfor fik vi ligesom et begreb om, hvad fa'en det egentlig er, vi arbejder med her.
I: Mener du, at I kunne se nytten af det nye hjælpemiddel ?
E: Ja, det er jo det.
F: Det lærer man ikke rigtigt her. Vi ved ikke rigtig, hvad vi skal bruge logaritmen til, når vi kommer ud, vel. Man har mange gange siddet og kigget på et eller andet, man har lært i matematik, så siger man, hvad

fanden skal man bruge det til, når jeg kommer ud herfra. Man forstår ikke, hvis man f.eks. skal udfylde et eller andet papir en eller anden gang, at man faktisk kan bruge det dértil og dértil. Det synes jeg ikke, man lærer at få en ordentlig forståelse af.
I: I har ingen fornemmelse af, hvornår I kan bruge det ?
F samtykker.
E: Det man savner, det er sammenhængen, synes jeg. Et eller andet stort overblik. Det med at kunne sætte det ind i nogle sammenhænge, og virkelig kunne bruge det i praksis, det synes jeg sgu er vigtigt.
I: Mener du også det, F ?
F: Ja. Jeg har for let ved at glemme det. Jeg skal lige sidde og kigge det igennem, hvis der kommer et eller andet, man har lært et par gange tilbage. Man har ikke rigtig nogen fornemmelse af, hvad man kan bruge det til, hvad man gerne ville regne ud og sætte over på den anden side. F.eks. Guud ved at måle lydens hastighed kunne jeg bruge de forskellige ting.
I: Det er der vel bedre muligheder for, nu hvor I kører matematik og fysik sammen.
E: Det er altid sådan nogle konstruerede ting, man regner på. Nu synes jeg, at i fysik, der har vi nogle ting, hvor man virkelig skal tænke sig om i forhold til i folkeskolen, hvor der bare var bestemte forsøg til hver fysisk lov, og hvor resultaterne var så afpudsede, og de passede fint ind. Her har vi lavet en rapport om kinetisk energi. Det synes jeg sgu var fedt. Det var nok den største oplevelse, jeg har haft – suset, du ved. Vi tegnede nogle linjer for at sammenligne farten og de lodder, vi hængte på. Så fik vi sådan en faktor, hvor man skulle dividere – ja nu kan jeg ikke huske, jo vi skulle dividere den potentielle energi med massen og så sætte farten ud af x–aksen, og det andet ud af y–aksen. Så fik man en bestemt kurve, og hvorfor gjorde man egentlig det ? Så prøvede jeg virkelig at tænke mig om, og så fandt jeg ud af det til sidst. Det var en utrolig oplevelse.
I: Var det lækre, at du selv skulle finde ud af det ?
E: Det var lækkert, at jeg ku' finde ud af det.
F: Man føler, man får mere udbytte af det, når man selv skal tænke sig frem til det.
E: Det er ligesådan, når man selv finder ud af noget i musikteori, der i øvrigt er enormt indviklet. Det man selv finder ud af, er det, man husker bedst.
F: Fysik er det fag, hvor man tænker mest selv. Man får egentlig halvdelen af det serveret, og resten skal man selv tænke over. Det er det, man får mest udbytte af.

I: Vil I karakterisere matematik og fysik fagene indlæringsmæssigt som meget forskellige fra de andre fag. Er de specielle, eller er det det samme: man skal lære noget, og man skal koncentrere sig på samme måde ?
B: Det er sgu et svært spørgsmål. F.eks. i spansk får man ustandselig nogle nye terræner åbnet for sig med nogle nye ting, man skal lære. Man kan f.eks. kun tale i nutid,- der er en masse ting man ser, som man så får sat i sammenhæng, og på et tidspunkt går der også et lys op for en. Det er ikke kun i matematik. Det er i mange fag. Det værste problem er nok, at meget af det lærer man kun på korttidshukommelsen, så man har glemt det en måned efter. Det kan man jo ikke gøre for. I spansk kører vi efter noget, der hedder suggestion. Man hører musik, man sidder utrolig lækkert og afslappet. Hvis man vil lære det, er det kun fordi man har interesse i det. Musikken sætter noget i gang i en, man bliver mere åben.
E: Der sker det, at man bruger den kreative side af hjernen. Så lærer man også med den kreative side af hjernen, og ikke kun med den matematiske side. Vi bruger det også i russisk.
I: Har I gode erfaringer med det ?

Begge siger ja bestemt.

I: Foregår indlæringen i matematik i højere grad springvis end i andre fag.
B: Det synes jeg godt man kan sige – til en vis grad. Jo det kan man godt sige --- på den måde at man får et helt nyt emne stukket ud, andengradsligninger f.eks., og så kan man efter en uge sætte sig og regne på det. Det er det mest springvise.
Men i de mere ideologiske fag, hvor man skal prøve at få åbnet nogle horisonter, kulturhistorie, ja og også dansk. Det foregår altså også springvis. Man kan godt forstå lidt, men man har ikke den dybere indsigt. Det er også springvist.
F: Der er vel ikke nogen fag, hvor man bare lærer hele vejen igennem.
E: Jeg mener altså også, at historie foregår springvis. Man tager et spring ind i en tidsperiode – så er der jo mange, der ikke ved en skid om det – 1968, Vietnamkrigen. Når man så læser en artikel, kan man godt læse, hvad der står, men man ved egentlig ikke hvad det betyder. Så tager man et stort spring, hvor man går ind i de forskellige ting, og så sætter man dem til sidst sammen som et puslespil, og så har man et eller andet billede.
F: Det gør man jo også, når man går ind i et nyt fag. Man går ind et sted og prøver at fatte det, og at få en forståelse af noget. Man kan ikke starte fra bunden af noget, så skal man jo starte med jordens oprindelse eller

første gang nogle prøvede at gøre noget inden for området. Jeg vil ikke sige, at matematik kommer mere i spring end andre fag.
E: At fortolke samfund, f.eks. at tolke demokrati i antikken, det er sgu da også pissesvært at sætte det sammen. Det sværeste i de fag er, at man selv skal tænke sammenhænge. Der er flere muligheder for at få et svar som er ligeså korrekt som det oprindelige, mens i matematik der er der én løsning på én ligning. Mens samfundet - prøv bare at tænke på hvor mange partiideologier, der er. Det er jo allesammen forskellige fortolkninger af virkeligheden.

Skole nummer 3, 7.april 1989. Interviews med 4 elever. Første interview med elever A og B, andet interview med eleverne C og D, samt et tænke højt-eksperiment med eleven E.

INTERVIEW NR.4 MED ELEVERNE A og B

I: Jeg vil gerne høre jer fortælle om jeres indlæringsproces i matematik. Hvad vil det sige at forstå noget, og hvilke processer leder frem til forståelse ?
A: Når jeg skal forstå noget, skal jeg helst have det ind på en bestemt måde. Hvis jeg bare læser det almindeligt, der skal helst være nogle eksempler, så jeg kan overføre det til min dagligdag, så kan jeg bedre forstå det, så husker jeg det også bedre.
I: Kan du komme med nogen eksempler på det ?
A: Jeg er ved at læse noget om psykologi, og så læste jeg om nogle hypoteser, så var det lidt svært sådan lige at forstå dem, ikk! Men så giver de nogle eksempler på, hvordan de ser det på mennesker, så forstår man bedre hypotesen, og man husker den også bedre.
I: Og du mener, at det er ligesådan i matematiktimerne ?
E: Ja.
I: Hvad er det for en slags eksempler, man kan hænge det op på i matematik ?
A: F.eks. det med cosinus- og sinusrelationerne, så sidder man og regner alt det der ud på et stykke papir, så er det langt bedre, at man får et billede af et landskab og skal regne ud, hvor langt der er til dèt sted, og sådan nogle ting, og det med logaritmer, så synes jeg også det er godt, hvis man får lov til at tegne dem og sådan noget, så kan man bedre se, hvordan det er.
I: Hvad siger du, B ?
B: Jeg synes, jeg lærer bedst, hvis jeg på en eller anden måde selv kan få lov til at tænke mig frem til det. For eksempel sinus og cosinus. Det startede noget med, at jeg fik noget at vide om, at sinus og cosinus

beskrev afstanden fra nulpunktet i koordinatsystemet og så ud til selve cirklen, og så prøvede jeg selv at finde ud af, hvordan man egentlig.. øh ..hvad kan man bruge det til.

I: Hvad fandt du så ud af ?

B: Der prøvede jeg bare at finde på nogle ting, noget af det første jeg kunne finde på var at tegne en cirkel på en computer, fordi det indeholder helheden i en cirkel, men så hørte jeg noget om, at det også kunne bruges til at finde vinklerne i en trekant, og så prøvede jeg at finde lidt ud af det. Altså hvis man tænker sig frem til det, selv prøver at finde på det, det er nærmest sådan, jeg bliver ved med at komme med eksempler på, hvordan kan man bruge det her, og så er der nogle af dem, der ikke virker, og lige pludselig så er der één af dem, der dùr.

I: Så det er altså noget, der tager lang tid ?

B: Ikke nødvendigvis.

I: Men det er noget, der kræver, at man koncentrerer sig.

B: Ja.

I: Hver især ?

B: Ja.

I: Her er vi ved noget, der gør det vanskeligt at være lærer. Læreren ved godt, at indlæringsprocesserne foregår forskelligt i hver person, men det er svært at få koordineret og at få arrangeret et miljø, hvor alle kan blomstre og lave det, de hver især har brug for netop nu.

A: Det som B sagde, så forstår man ligesom også bedre logikken, ligesom jeg kan bedre forstå logikken, hvis jeg får noget, jeg oplever i hverdagen, så jeg kan overføre det til min hverdag.

I: Eksempler.

B: For mig behøver det ikke nødvendigvis at være hverdagen, det skal bare være et eller andet som jeg i forvejen ved, og kan knytte mig til, så jeg kan prøve at sammenligne det med ting, som jeg ved noget om i forvejen, og så kan jeg abstrahere fra det. Det behøver ikke at være et bord eller en stol, det kan også være en trekant, der kan man jo godt føle sig rimelig hjemme.

I: En trekant kan være lige så konkret og hverdagsagtig som et bord ?

B: Ja.

I: Kan I beskrive, hvordan indlæringsprocessen har været omkring logaritmer, og **hvad** har I forstået ?

A: Det var godt, at vi fik to stykker logaritmepapir, og ved at lægge dem sammen, så kunne vi se, at hvis vi gangede to logaritmepapirer, ligesom med to linealer, hvor man kan minusse og plusse ved at lægge dem ovenpå hinanden, så forstod man bedre de der tre regler.

I: Og det var fordi der var nogle konkrete papirer, nogle konkrete hjælpemidler ?

A: Ja.

I: I kører meget med grupper?
A: Ja, det gør vi hver fredag.
B: Det er måske meget praktisk at køre i grupper, så man kan hjælpe andre, og få hjælp af andre til at forstå det. Andre kan hjælpe ved at komme med eksempler. Men nu kendte jeg noget til logaritmer i forvejen. Da jeg gik langt tilbage i folkeskolen, spurgte jeg min far, hvad logaritmer var for noget, og så sagde han, det er noget, hvor hvis du tager logaritmen af eet tal og logaritmen af et andet tal, så svarer det til, hvis du har de oprindelige tal og ganger dem med hinanden, hvis du tager logaritmen af de to tal og lægger dem sammen, så vil det tal, der kommer ud af det, det vil være logaritmen af det tal, som man får, hvis man ganger dem med hinanden. Og det gik jeg så rundt og tænkte længe over.
I: Det er skægt. Det er jo en forklaring med mange mange ord i forhold til, hvor mange ord bogen bruger. I bogen står det på en enkelt linje.
B: Og så senere fandt jeg ud, hvordan en regnestok fungerede. Og så ved jeg ikke, så vænner man sig til det.
Og så kunne jeg meget hurtigt regne ud, at det måtte være sådan, at logaritmen af 1 var nul, og så kunne det for eksempel være sådan, at logaritmen af 10 var 1 og logaritmen af 100 var 2 og så videre. Og så tænkte jeg, hvad så med logaritmen af 20, der er jo ikke noget tal.
A: Det skal helst være noget med hverdagen, så får man det nærmere ind på livet. Man sidder og læser en tekst, og så kan man sidde og læse den 2 gange, uden at man overhovedet får noget ud af det, og siger, nej nu må jeg altså lige prøve at koncentrere mig og så tager et stykke ad gangen, og så prøver jeg at overføre det til noget jeg kender, og prøver – ligesom B – at udføre nogle andre ting af det, altså ikke lige det, der står: Hvis der står, at det kan være på dén måde, så tager jeg en anden måde. Hvis nu man prøver at bruge det på dén måde ovre på dén ting, hvordan kunne man så tænke sig, det ville blive, ikk, og så forstår jeg det lidt bedre, og så prøver jeg at gå lidt videre, så får man ligesom helheden af det.
I: Og du *gør* sådan – eller det er din hensigt at gøre sådan, når du læser hjemme ?
A: Ja, hvis der er noget, der er specielt indviklet, så prøver jeg at arbejde videre inden for nogle andre områder med det samme.
I: Tror du, at du kunne tænke det højt. Kunne vi lave en aftale om, at du næste gang tænder for båndoptageren og tænker højt og lader mig høre det ?
A: Ja, her i weekenden.

Herefter fortæller B om sine erfaringer med at lære at spille guitar.

A: Jeg har læst noget om månen, om undslippelseshastigheden for partikler, og så prøvede jeg at tænke på at sammenligne jorden med månen. (her har jeg ikke skrevet alt ud,– eleven siger lidt mere)
I: Det vil sige, du laver nogle parallelle ting for at forstå det, der skal læres nu.
B: Jeg har prøvet at lære en kortkunst for et år siden. (Og det fortæller eleven så om)

INTERVIEW NR.5 MED ELEVERNE C og D

I: Hvordan oplever I indlæringen i matematik ? Foregår den efter jeres mening i spring ?
C: Det er et forløb, hvor jeg forstår det undervejs fra gang til gang. Når det bliver forklaret for mig, så har jeg gennemgående forstået det, når jeg oplever, læreren mener, at **nu** skal vi forstå det.
I: I oplever altså, at der er en stabilitet i matematik.
D: Ja. I fysik synes jeg, læreren er ret svær at forstå. Når jeg så får det forklaret af en anden, kan det godt være jeg sige : ahaa.
C: Ja, og så kan man godt bruge det, fysiklæreren har fortalt før, selv om man ikke dengang forstod det.
C: Om man kan lide faget er helt afhængig af læreren. Det betyder ikke noget, om man kan lide læreren som person, men om man får noget ud af det.
D: Det er en viljesag og kunne lære det, ikk. Man kan jo lære alt, hvis man har lyst, altså hvis man er parat til det.
C: Men man skal passe på, man ikke får for mange huller, vil jeg sige. Jeg synes virkelig man skal koncentrere sig hele tiden, ikk. F.eks. nu, her - ellers har jeg koncentreret mig pænt og sagtens forstået det, men nu, lige de sidste par dage så var der nogle timer, jeg ikke var der, og så har jeg bare lige siddet og ikke rigtig koncentreret mig, egentlig ubevidst, og så fandt jeg ud af, at jeg måtte se at få læst det sidste kapitel. O.k. så kan jeg godt tage en weekend og læse det op. Det bliver man simpelthen nødt til, man kan ikke bare fortsætte der, hvor de andre er kommet til.
I: Hvordan synes du, D, det er med indlæringen i matematik ?
D: Det synes jeg går nemt. Jeg har aldrig problemer i matematik med at lære noget, men det har jeg i fysik.
I: Hvorfor tror du, det er så nemt.
D: Det er nok også fordi, jeg bedre kan lide matematik. Jeg synes, det er meget logisk, og jeg synes også, det er en god lærer, vi har til det. Hun er god til at forklare tingene.
C: Ja, hun behandler ikke én, som om man var et dummerhoved, der ikke forstod noget.

D: Hun vil virkelig gerne have, at man spørger. De andre lærere er tit sådan, at man SKAL bare kunne det, og hvis man spørger, så er det fordi, man er dum, sådan har fysik- og kemilæreren det f.eks. Matematiklæreren vil virkelig gerne hjælpe os.
C: Det er også en smaddergod måde, at vi om fredagen har to timer med opgaver på det, vi har lært i løbet af ugen. Så kan vi prøve i praksis, om vi kan selv. Ellers går vi og tror, at vi sagtens kan forstå det, når vi kan forstå det, når læreren står og forklarer det. Så er det nemt nok, men når man så selv skal til det, så guud......Det er virkelig godt, synes jeg.
I: Hvad har været det sværeste at lære, synes I.
C: Jeg synes, det var det med tangens og cotangens.
D: Nej, det var fordi, du kom ind i klassen efter, vi havde haft det.
C: Jamen, jeg havde haft det på min gamle skole. Der forstod jeg ikke. Det var fordi min anden matematiklærer, hun var sådan, det skulle udtrykkes sådan helt matematisk korrekt, ikk, og man måtte ikke, - det var lige DET matematiske ord, hun ledte efter, og sådan noget, og så brugte hun alt det der med multiplikation, jeg ved godt det betyder plus, men altså alligevel, det var lidt svært i starten.
I: Nej, multiplikation betyder altså ikke plus.
C: Nå, nej, så - (grin, grin) jeg har overhovedet ikke check på alle de der begreber, og så brugte hun dem, og så skulle vi bare lære dem i løbet af de første to gange, og så brugte hun KUN dem. Det var ligesom, man følte nogle gange, hun talte et fremmedsprog, ikk.
Her kan man bare række fingeren op, og så kan man forklare og sige det, man egentlig har fået ud af det med sine egne ord, og OK, det er rigtigt, du har forstået det. Der gjaldt det ikke om at forstå det, bare du kunne sige det med de rigtige ord, så var det lige meget, om du forstod det. Det syntes jeg var enormt svært, så jeg fattede overhovedet ikke det der med cosinus og tangens. Jeg tror ikke, jeg har fattet det endnu.
D: Jeg tror, det bliver svært alt det der med hyppigheder. Det havde jeg i hvert fald svært ved i niende. Jeg synes ikke, der er noget af det, vi har haft i 1.g, jeg har sagt, det kan jeg overhovedet ikke finde ud af. Jo i starten, der syntes jeg ikke, jeg fulgte så godt med. Så derfor alt det der med at forkorte a i anden og b gange b i anden, det har jeg ikke rigtigt fået med.
I: Hvorfor fulgte du ikke så godt med ?
D: Det ved jeg egentlig ikke......
Nej, det var fordi, jeg havde en fornemmelse af, at jeg ikke forstod det, så havde jeg heller ikke lyst til at følge med.
I: Det du siger nu, synes jeg er interessant. Hvad går indlæringsproblemerne ud på, når de er der, og hvad kan man gøre ved dem ?

D: Man skal sige til sig selv, man KAN godt lære det og så videre, fordi sådan som jeg sagde, jeg kan bare ikke finde ud af det, det er der bare ikke noget at gøre ved.
C: Sådan havde jeg det også i starten, for det er så meget sværere end i folkeskolen.
I: Men så er det spændende jo, hvad er det så, der gør, at man pludselig kommer ind i nogle positive cirkler ?
D: Fordi man ikke kan holde ud ikke at følge med, så gør man det. Det er en viljesag : at gøre noget for at lære det, så lærer man det også.
I: Det var altså din egen beslutning.
D: Ja.
C: Jeg tror også, at i starten får man en masse formler, og det har man aldrig nogensinde haft i folkeskolen rigtigt, sådan en masse med a og b og sådan noget, og en hel masse abstrakte begreber, som du egentlig ikke rigtigt kan bruge til noget i starten. Du får bare det hele slynget i hovedet, det skal I kunne, og hvad hedder dén lov og sådan noget. Jeg sidder bare og er total målløs, og er det her matematik, det blev jeg virkelig forskrækket over. Så lige pludselig, så senere, så begyndte vi at bruge alt det, vi havde lært før. Så forstod man det - og så er det måske rigtig nok, så får man sådan en aha-oplevelse. Nåh, det var **derfor** vi skulle sidde og lære alle de der åndsvage regler, det var fordi, nu får vi brug for det, når vi skal have nogle opgaver med relation til nogle andre ting. Så begyndte jeg at sætte mig ind i det, jeg skulle have sat mig ind i starten af året. Der havde jeg det ligesom D: Jeg forstod det ikke rigtigt. Det var da noget underligt noget, og hvad skulle man bruge det til. Men så i det øjeblik man kan bruge det til noget, bliver det interessant, og så sætter man sig ind i det.
D: Der er også et pres fra de andre. Der er sådan et pres i dag. Alle skal have gode karakterer. Det tror jeg ikke det har været på samme måde før i tiden. Der er stor arbejdsløshed og alt det der. Jeg synes, det er meget med mig selv med, at jeg VIL lære alting, det er et pres fra de andres side. De vil allesammen, altså, de kan det, og så vil jeg ikke sidde og være den eneste, der ikke kan det. Jeg synes, det er et stort pres.
Specielt her på det sidste, har jeg fået det, at jeg vil bare lære det hele, og så synes jeg også, jeg kan lære det, fordi jeg gør meget ud af det.
I: Hvad gør du så, når du gør meget ud af det.
D: Jeg læser på det, og jeg får folk til at hjælpe mig, og jeg laver mine lektier altid. I starten synes jeg, det var tit, jeg ikke lavede det.
C: Ja, og det var også sådan, at man læste også bare siderne i starten, men man forstod det ikke. Nu har jeg ligesom lært, at man skal sætte sig ned, og virkelig tage een linje ad gangen, og tænke sig om, og man skal virkelig forstå det, før man går videre i sit ræsonnement.
I: Hvor ved I det fra ? Er det noget, læreren har fortalt jer ?

D: Det er noget, vi har erfaret. Men vi troede fra folkeskolen, at sådan skulle man læse lektier.
I: Men man skal jo også læse anderledes på matematik end på andre fag, ikke ?
D: Jo, man skal faktisk meget bruge eksempler, tror jeg. Altså du skal selv lave nogle eksempler eller nogle opgaver. Du skal ikke bare læse det. Derfor er det godt, det vi har her om fredagen.
I: Mener du, at man skal regne nogle af de opgaver, der er i bogen, eller mener du, at man skal digte nogle opgaver ?
D: Nej, ikke digte. Du skal regne nogle, og skrive det op. Du kan ikke bare læse det, som man læser historie.
C: Det er også en god ide at lukke bogen, efter at du har læst det, og så lige prøve at forklare for dig selv, hvad er det her. Hvis du så opdager, jamen jeg forstår slet ikke det her, så giver det et skub: nej, nu må du virkelig sætte dig ind i tingene ! Du kan ikke engang forklare det for dig selv, du har jo lige siddet og læst det !
D: Jeg kan ikke lære det ved sådan bagefter at lukke bogen. Jeg kan kun lære det ved at bruge det til opgaver, ellers kan jeg ikke lære tingene udenad, fordi det er logikken.
C: Jeg prøver på at forklare det for nogen.
D: Nejj !
C: Det er ligegyldigt til hvem, min plante f.eks. Hvis man kan forklare det til andre, så har man virkelig også forstået det. Jeg har også prøvet, at der er nogle, der har spurgt mig om noget, jeg ikke vidste, fordi der var nogle, der troede, jeg var så god, det er jeg slet ikke. Så prøvede jeg selvfølgelig at leve op til det. Og så gik jeg hjem og læste på det. Det betyder også meget.
I: Hvordan er stemningen i jeres klasse med hensyn til at spørge. Er der nogle af de andre elever, der bliver sure på én, som spørger ?
D: Der er ikke nogen, der bliver sure, hvis man spørger om noget.
C: Der er hele tiden kommet nyt stof i matematik. Videre og videre og videre.
D: Og man skal hele tiden læse på sine lektier.
I: Jamen, er det overhovedet muligt for jer at læse til alle fag ?
D: Jeg prøver. Jeg synes det er enormt svært, men jeg kan se, at førhen læste jeg bare overfladisk, for jeg forstod det alligevel ikke. Så nu forstår jeg det bedre.
Der er nogle der bare kan det, men resten skal bare arbejde med det.
I: Men der kan jo godt være forskellige måder, I skal arbejde på.
D: Jeg har min fætter til at hjælpe mig i fysik og kemi. Jeg kan ikke holde ud, ikke at forstå det.
C: Jeg synes bogen er lidt kortfattet, og den er svær at bruge til at læse noget op selv.

C: Alle mine lærere har fra 3.4.klasse sagt, at bogen var enormt overfladisk, og at man ikke skulle gå for tæt ind på den.

ET TÆNKE HØJT - EKSPERIMENT MED ELEVEN E PÅ SKOLE 3

Vi er stadig på skole nummer 3. En tilfældigt udvalgt elev E tænker højt for mig under opgaveløsning. Det er fredag, og hver fredag i matematikdobbelttimen arbejder eleverne i grupper med papirer, som læreren har fabrikeret til lejligheden. Denne fredag handler det om eksponentialfunktioner og enkeltlogaritmisk papir.

Eleven E svarer "ja, meget gerne" til at tænke højt.
Et af spørgsmålene, som læreren har udarbejdet til denne gang, lyder: Forklar hvad fordelen kan være ved at tegne grafer ind i enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

E: Øh, det er fordi, så kan man se f.eks. en eksponentialfunktion, så bliver det en ret linje, så kan man se, om noget vokser eksponentielt.
I: Det du siger det er, at hvis man har nogle data, som man så skal sætte ind, hvad så ?
E: Så, hvis de vokser eksponentielt, så vil det give en ret linje i det der koordinatsystem.
I: Og hvis det giver en ret linje ?
E: Ja, så vokser det eksponentielt.

E virker irriteret og mener vist, at jeg forsinker arbejdet. E beregner funktionsværdier for at kunne tegne grafer for to opskrevne funktionsudtryk.

....

....

E: Syv i nulte, det er én, ikke.
I: Ved du, hvorfor syv i nulte er én ?
E: Øh, ja, det kan jeg jo ikke huske vel, men øh, nej det kan jeg sgu ikke huske, men vi har bevist det.
I: Men nu ved du det altså.
E: Det er fordi, vi lavede et bevis oppe på tavlen, så kan huske det, tror jeg nok.

....

....

Nogle af de beregnede funktionsværdier er meget store. De fylder mange cifre, og det er vanskeligt at skrive småt nok til at tallene kan være i diagrammet.
Jeg fornemmer, at E er overrasket over funktionsværdiernes størrelse.

E: Nu kan der altså snart ikke stå mere.
I: Er du overrasket over, at det bliver sådan nogle kæmpetal ?
E: Ja, det er jeg faktisk. Men det er fordi, det er jo klart, når det er en potens.
E: Nej, slap af, tal.
....
E tager dernæst logaritmen til funktionsværdierne, som lærerens papir fortæller, man skal.

E: Jeg synes ligesom det går op for mig, at når man tager logaritmen til de der f af x, så er det det samme, som hvis man indtegnede f af x i et logaritmisk lineært papir, så bliver det også en ret linje.
I: Hvad sker der, når du tager logaritmen til funktionsværdierne.
E: Hvad der er sket med tallene ? De er blevet forandret, så de passer til hinanden i forhold til x'erne, ikk`, på den måde, at de vil give en ret linje i et koordinatsystem.
....
....
E tegner grafen for logaritmen til én funktion og grafen for logaritmen til en anden funktion. Graferne er tydeligvis to rette linjer. E skal derefter finde ligningerne for de to rette linjer.

E: Jeg plejer at sige, hvor mange skal jeg gå hen, for at den går én op. Men det er jo lidt svært, for tallene er så urene eller hvad man kan sige. Derfor kan man måle en forskel, - et stykke op i forhold til et stykke den anden vej.
Hm, så er det.
I: Du er lidt i tvivl om, hvad du skal dividere med hvad ?
E: Ja, men jeg kan se, om hældningen skal være mere eller mindre end én.
....
Nej, nu skal jeg lige tænke mig om: a er hældningskoefficienten. Ja. Så er det logaritmen til hældningskoefficienten, og så er det logaritmen til skæringspunktet på y-aksen.
I: Du har sammenblandet to udtryk. Prøv at læse det igen.
E: Jamen det er da stadig de tal, du plejer at have.
I: Vil det sige, du mener, at a stadig er hældningskoefficienten.
......
......
......
E er forvirret nu, og vil så i øvrigt til at løse funktionsforskriften med hensyn til x, som om det var en ligning med x som den ubekendte.

Skole nummer 4, 13.april 89. Interview med to elever A og B.

INTERVIEW NR.6 MED ELEVERNE A og B

Af praktiske grunde var de to elever på forhånd valgt ud af læreren. Læreren havde brugt tre kriterier:
- de to elever skulle begge være snakkesalige og åbne,
- de skulle supplere hinanden, hvor den ene tilsyneladende har let ved at lære matematik og den anden har svært ved det,
- og de skulle kunne samarbejde.

A: Jeg har meget svært ved matematik i forvejen. Det er nok, fordi man ikke forstår logikken i det, der bliver sagt om beviser og sætninger og alt sådan noget. Men når jeg forstår noget i det, der bliver sagt, så kan jeg se en positiv ting i det. Så bliver man glad. Man kan mærke, at det her forstår jeg. Det er lækkert. Så kan man sætte sig ned og løse de opgaver, man nu engang har haft i det stof.
I: Du har altså selv en klar fornemmelse af, at NU forstår du det ?
A: Ja, når man har spurgt tilstrækkelig meget, hvis der er noget, man ikke forstår, og man siger, gud ja, det forstår jeg, nå, det er sådan det er, så kan man se noget i det. Man føler en eller anden følelse, man bliver lettet. Det er tit, det er surt. Man sidder bare og kigger ned på de der beviser og tænker, hvad pokker er det her. Det er nok fordi, jeg har meget svært ved det i forvejen. B er en del bedre end mig.
B: Det der er mest problemer med, det er, når du starter på noget og så gennemgår et bevis, at hoved og hale det passer sammen. Selve processen er tit så lang, at du til sidst har glemt, hvad du egentlig startede med.
Jeg kan også godt mærke det der, at hvis du er i tvivl, om du forstår det, så er det, fordi du ikke forstår det. Det er ikke klart, hvad det vil sige ikke at forstå; men når du forstår, så forstår du det også.
I: Mener du, at så føler du dig helt sikker på, at du forstår det ?
B: Hmm (bekræftende), ja. Der er altid et eller andet, der dæmrer, selv når du ikke forstår det; men det er så besværligt, dobbelt så besværligt som ellers.
A: Læreren kan sagtens skære det ud i pap og tallerkener, men forstår du det ikke fra starten af, så..., jeg har i hvert fald utrolig svært ved at sige, jamen hvorfor er det sådan, hvorfor gør hun dit, hvorfor gør hun dat.
I: Hvad vil det så sige, at forstå noget fra starten af ?
A: Det er hvis man har haft et begreb, man ved, hvad det er, man ved, hvorfor den ting er, som den er. I folkeskolen, da man lærte at gange og plusse, så vidste man ligesom, hvad to tal var, og man vidste, at så kunne

man lægge dem sammen. Du vidste, hvorfor de tal nu var, som de var, og så kunne lægge dem sammen.
B: Ja det er rigtigt. Hvad betyder x og y. Mange nye ting. Det er meget ubekendt. F.eks. med x og y i stedet for at sætte 2 og 3 ind, fordi det skal være generelt altsammen. Til gengæld er forskellen, at vi i folkeskolen bare skulle lære, at når du ganger de to tal, så bliver det dèt. Nu skal du lære, hvorfor det gør det, og det er det, jeg tror, gør det svært.
Det er ikke bare udenadslære, der skal også være noget logik bag.
I: Men tror I da, at I ville acceptere det, hvis I fik at vide, at det er sådan og sådan.
A: Jo, da vi var mindre, kunne vi ikke snakke med læreren, sådan som vi gør nu, for vi var yngre og mere uforstående, og vi tænkte, at når læreren siger det, så er det rigtigt. Men nu tænker man mere over tingene.
B: Vi tænker, det kan ikke være rigtigt, at sådan er det bare.
A: Derfor kan logikken i det være så besværlig.
B: Jeg har aldrig været særlig meget for udenadslære. Jeg har det bedst, hvis jeg kan finde en eller anden logik i det, nåh er det derfor, og der ikke bare er en eller anden, der står og siger: " dèt er sådan".
A: Jeg kan bedst, når det er den anden vej.
B: Det kan jeg altså ikke.
A: Det er nok fordi, man har haft så svært ved det. Så tænker jeg, hvis nu jeg bare lærer det, som det er, så kobler man det ind, og så husker man det. Hvis jeg skal tænke selv, så kan man bare sidde og kigge på de der f af x'ere, der render rundt mellem hinanden, og så kigger man ned på det, og så tænker man: Det her kan jeg ikke.
I: Hvad mener du så, når du siger, at det, der er så svært, er logikken ? Kan du forklare det lidt nærmere ?
A: Logikken er en ting, når man forstår det, når man forstår, at sådan er tingene, og man ved det, der foregår bagved. Når man ikke kan opleve den logiske sammensætning i tingene, så kan man ikke sige, jamen sådan er det bare, for så forstår du det ikke. Så siger du bare, at sådan er det, men har sådan set ikke forstået det.
B: F.eks. tysk, der er bare sådan noget med en masse regler og en masse undtagelser for bøjning af verber, og jeg har et hyr med at kunne huske det.
Hvis du kan huske starten af et matematisk bevis, så kan du også bygge videre på det.
I: Har du eksempler på det.
B: Regneregler for differentialkvotienter. Hvis du bare kan huske udgangspunktet, "f af x-nul minus f af x over x minus x-nul", så kører processen af sig selv.

Med mindre der sker noget, jeg ikke synes er logisk. Der var for eksempel et bevis, hvor du skulle minusse en eller anden ting og sætte den samme ting plus, så det gjorde ikke noget, du satte dem ind; men det er jo ikke rigtig logisk, at de bliver sat ind. Så kan det selvfølgelig godt blive lidt svært.

I: Nåede du til sidst i beviset at se, hvorfor det var en smart manøvre.

B: Ja,ja, men lige dengang hun gennemgik det første gang, så tænkte jeg (undrende), hvorfor gjorde hun det. Men så bagefter kan det godt være, når du har det som en helhed, så kan du godt huske det, så går det bare ind, det synes jeg i hvert fald. Læreren gør også den gode ting, at hun lige sørger for, at vi allesammen har fået fat i pointen. Det er ikke sådan, "bla,bla,bla,køre,køre,køre,nå,er alle med,nå,det er godt,så kører vi videre," selv om alle måske ikke er med.

A: Så sent som i dag, sad jeg og lavede blækregning, så kiggede jeg på opgaven, så kiggede jeg på løsningen, som var der, men den proces imellem fra start til løsning, den kan jeg ikke. Jeg kan ikke skrive det ned. Og nogle gange kan man godt se, hvad det skal blive, men man kan sørme ikke finde ud, hvordan det skal blive det. Så fik jeg nogle fra klassen til at forklare det, og så kunne jeg godt se det, hvis man tager det ene, så går det ud med det andet, og når du så går videre dèrfra, så bliver det sådan, og så får vi dèt til sidst. Og jeg kan godt se, at det er jo rigtigt, men havde jeg selv siddet og bakset med det, så var jeg aldrig kommet frem til den løsning.

I: Så var du ikke kommet på de idèer, som hun kom på ?

A: Nej, hvorfor gør hun sådan. Men når hun sidder ved siden af, og jeg siger, forklar mig lige hvorfor, så kan jeg se sammenhængen og sige nåh, ja. Hun hjalp mig faktisk hele tiden.

I: Måske kunne du få noget ud af at spørge hende ud om, hvordan hun kommer på sine ideer, så du kan få noget at vide om, hvordan hun tænker.

B: Først skal du finde logikken, og så er der ikke andet at gøre end slaveregning, for at få det til at sidde fast. Men det nytter ikke noget at terpe fra starten af, inden du kender logikken.

I: Det er farligt at bruge din vending om at finde logikken, for folk forstår så forskellige ting ved det. Det ville være dejligt, hvis du kunne komme med nogle flere ord til det.

B: Ja, der er nogle, der mener, at logik det er bare, når de har fundet ud af det, så de kan huske det, men logik for mig er, at jeg har fundet ud af, hvorfor man gør det, man gør. Det er logik for mig. Når man kan se, der en mening med det, man laver, ikk, i stedet for at man bare siger, at sådan er det bare. Det er logik for mig. Når det er indlysende, det man gør, f.eks. at det er dèn proces, der bliver brugt.

A: Jeg tror også det stammer helt tilbage fra, hvad ens forældre har af erhverv. Hvad laver din far og mor, B.
B: Min mor er skolelærer.
A: Jamen, at din mor er skolelærer, det kan godt have noget at sige.
B: Det tror jeg ikke. Jeg har spurgt min mor, men hun ved ikke noget om differentialregning.
A: Jeg ved, at en fra vores klasse, hendes far er meget dygtig til matematik.
B: Ja, det kan måske være en inspirator for hende, det er da klart.
A: Ja, måske, men jeg tror, at hvis forældrene i deres erhverv har haft meget at gøre med sådan noget, så arver børnene det. Min far har aldrig været dygtig til regning, og hvis han bare havde kunnet hjælpe mig, fra jeg var helt lille, så havde jeg måske været det klogere i matematik. Hvis jeg havde haft èn, jeg kunne spørge. Det har meget at sige, at børn kan spørge deres forældre, hvorfor det er, som det er. Det kan jeg da se på min lillebror, han er hurtigere end jeg har været, - min mors nye mand er lidt bedre til det.
B: Det kan godt have noget at sige alligevel, nu du siger det. I folkeskolen kunne jeg jo altid gå til mor, og det er også klart, at hvis du har den grundlæggende indsigt, så er det meget nemmere at bygge videre på.
A: Jeg tror, at hvis jeg havde haft en mor eller en far, der havde kunnet hjælpe mig, så havde jeg også været bedre i dag. Det kan jeg da se på andre i klassen, når forældrene ved noget mere om de begreber, så er børnene også det klogere. Ikke dermed sagt, at forældrene er højere, altså tjener flere penge.
B: Jeg tror, at hvis man har fat i det grundlæggende, så er det bedre.
I: Jeg tror, I mener det samme. Kan I pege på nogle bestemte ting, der gør, at I kommer til at forstå et begreb ? Skal I se anvendelserne af det, er det en god ide ? Skal der være eksempler på, at det er ligesom i folkeskolen eller ligesom i samfundsfag eller historie ?
A: Ja, det tror jeg. Hvis der kommer tal på beviserne, så man kan se det.
I: I stedet for x og y og a og b ?
A: Ja. Jeg tror tit, at mange elever ikke forstår det der.
B: Læreren tager også tit først et eksempel med tal, og bagefter kommer den generelle udledning med x'er og y'er. Så siger læreren, hvis nu vi kalder 3-tallet for x, så kan vi bevise, at det gælder for alle den slags tal.
I: Og I er altså glade for, at det med 3-tallet kommer først. Man kunne jo også vælge at lade taleksemplet komme efter den generelle udledning ?
B: Ja, det er en meget god idé først at komme med et eksempel.
A: Jeg tror, det vil være en god idé, at vi terpede mere i det med tal, for det er jo egentlig talt det, vi skal bruge.

B: Du skal jo ikke gå ud og sige, at her har vi en mark, der er x meter lang.
A: Man skal have nogle tal, for det er jo det, man arbejder med.
I: Hvorhenne ? I eksamensopgaverne eller ude i verden ?
A: Ja, ude i erhvervslivet. Du hører ikke en kontorassistent, der sidder og taler om eller regner med x kroner. Det gør hun ikke, hun har simpelthen de direkte tal fra f.eks. regnskaberne.
B: Selvfølgelig bliver du nødt til at have en funktion med nogle x'er, så du også kan regne med 4 ligeså godt som med 3.
Først skal vi have et eksempel, og så bagefter får vi bevist, at det ikke kun gælder for 3-tallet, men generelt. Det ville være rart. Og så bagefter det sætte en masse andre tal ind.
A: Man ser også mange steder ude i erhvervslivet, de siger, hvad skal vi bruge alt det til. De skal bare kunne plusse og regne. Det kan jeg se, hvor jeg arbejder (i en skoforretning). Når jeg fortæller, hvad jeg laver, så siger de, hvad skal du bruge det til.
B: Det kommer også an på, om du har tænkt dig at stå i en skoforretning.
A: Nej, nej, men et regnskab er nu engang et regnskab.
B: Men de to fag, der har allermest med hinanden at gøre her på skolen, det er fysik og matematik. Man kan se i fysik, at der er en mening med at lære matematik, for det skal vi bruge i fysik. Og hvis du så skal bruge en hel masse fysik senere, så er det jo rart at kunne noget matematik.
I: Men der er vel også en grund til, at man har matematik, også selv om man ikke har fysik eller kun lidt fysik ?
B: Ja, hvorfor skal man have det. Det ved jeg ikke. Jeg må da også ærlig indrømme, at noget af matematikken den synes jeg er helt hen i vejret. F.eks. kan jeg ikke se, hvad man skal bruge mængdelære til. Jeg kan virkelig ikke sætte det i relation til noget ude i....
A: Nej, man hører mange steder fra, at det bliver aldrig brugt. Det er bare noget, man skal lære i løbet af sin ungdom, hvis man nu engang har foretrukket gymnasiet.
B: Jeg har syntes lige siden folkeskolen, at det var simpelthen spild af tid.
I: Er I nogle af de årgange, der har haft meget mængdelære ?
B: Ja, altid. Vores matemtiklærer i folkeskolen var vild med mængder. Her har vi A fælles med B, og åh, og sådan noget, forenet med og sådan noget. Jeg kan selvfølgelig godt se, at du skal vide, hvilke tal du kan bruge, og hvilke tal du ikke kan bruge i funktioner. Det kan jeg godt se, men jeg kan ikke rigtigt forestille mig, at hvis jeg kom ud, at jeg så nogensinde ville få brug for det. Her har du tyve i en klasse, hvis vi så tager alle pigerne væk. Det siger mig ikke rigtig noget. Men altså. jeg ved det ikke. Det er da nok meget rart at kunne ....

A: at kunne lidt af hvert.
B: Jeg kan ikke lige komme med eksempler på, hvad det skulle bruges til, andet end hvis jeg var ingeniør, så var det godt at kunne en hel masse ubekendte.

Skole nummer 5, 18.april 89. Interview med to elever A og B.

Jeg var tilstede i to timer. To elever meldte sig frivilligt til at lade sig interviewe en halv time efter skoletid den følgende dag. Klassen var en sproglig klasse til forskel fra de øvrige klasser, der var matematiske.

INTERVIEW NR.7 MED ELEVERNE A og B

B: Du, A, forstår det hele.
A: Jeg forstår det meste af det, fordi jeg har haft det før. Nej, ikke det altsammen, sandsynlighedsregning synes jeg er det sværeste. Men hende jeg sidder ved siden af, hun forstår kun sandsynlighedsregning.
B: Jeg har aldrig forstået noget af det, før jeg kom på gymnasiet.
A: Har du aldrig forstået noget af det ?
B: Nej.
A: Jamen det er da utroligt.
B: Nej, også fordi jeg altid har sagt til mig selv, jeg ikke kunne, og så gad jeg heller ikke.
I: Hvorfor gad du ikke, ved du det ?
B: Det interesserede mig ikke.
I: Fordi du ikke syntes, du kunne bruge det til noget, eller fordi timerne i sig selv var tåbelige.
B: Både og. Jeg kunne ikke se nogen sammenhæng i det. Det kan jeg stadigvæk ikke, ikke så meget i hvert fald. Fordi når man først har forstået een ting, så får man lyst til at forstå noget mere. Man bliver sur over, at man ikke forstår det.
I: Så er det måske sådan, at hvis man aldrig oplever at forstå noget, så opgiver man - så opgiver man måske også at være sur over det ?
B: Ja, men hvis man så sætter sig for, at nu vil man fandeme forstå det, for ellers er det spild af tid, så forstår man nok noget.
I: Er det det, du har prøvet.
B: Ja, lidt. (og henvendt til A "Har jeg ikke ?")
A: Jo, du har da forstået. Jeg tror, matematik er et specielt fag. Enten forstår du slet ikke noget af det, eller også forstår du det meste. Der er ingen mellemting. I f.eks. tysk kan du godt være sådan rimelig god. Du kan være rigtig dårlig, og du kan være rigtig god. Men hvis du først har fået fat i det i matematik, så kan du se sammenhængen i det meste af det. Men hvis du sådan helt blokerer, så forstår du slet ingenting.

B: Det vi nok mangler på sproglig gren er nok en sammenhæng. Man når lige at forstå noget, man man når ikke at arbejde videre med det, til det virkelig sidder fast.
A: Nej, det er rigtigt, det er kun teori. Vi kan ikke se formålet. Læreren kan ikke sige til os, at andengradsligningen skal vi lære, hvis vi skal ud at måle det og det. Det er kun teori for os.
I: Når I synes, I forstår det, er I så sikre på det. Er det ikke det, du siger, A. Enten kan man, eller også kan man ikke. Og kan man det, ved man med sig selv, at man kan. (A bekræfter). Passer det også på dine oplevelser, B ?
B: Narj, men så tror jeg, jeg er så usikker på det fag, eller har i hvert fald været det, så jeg tør ikke tro på, at jeg har fattet det. Narj, det kan ikke rigtigt, siger jeg om mine egne beregninger.
I: Der er altså nogen, der skal sige til dig, at det er rigtigt, det du gør, og at du har forstået det, for at du tror på det ?
B: Ja, eller jeg skal kunne se det et eller andet sted - i bogen f.eks. Der er ligesom kun ét svar, man kan ikke snakke fra det.
A: (Kammeratligt leende) Du kan godt lide at argumentere, men det får du ikke noget ud af i matematik.
A: Jeg kan godt lide faget, for man kan se, der er hele tiden en logisk sammenhæng.
B: Ja, men det er det, når man ikke kan se det logiske i det, netop fordi det ikke hænger sammen med noget andet !
A: Jeg synes alt matematik hænger sammen, eller meget af det.
B: Det gør det også. Jeg ville gerne have haft læst polit, men så fandt jeg ud af, at du skal kunne lide matematik, og du skal være virkelig dygtig til det.
I: Hvor ved du det fra ?
B: Fordi jeg kender én, der læser det, og som synes det er eventyrlig morsomt, og når jeg så læser i hans bøger, så fatter jeg bare ikke en brik af det.
I: Hvis du læste en franskbog for én, der havde læst fransk i fire år, så ville du heller ikke få noget ud af det.
B: Nåh, nej.
A: Da vi startede her på skolen, kunne vi jo heller ikke læse de tyske tekster, som vi kan læse nu.
A: Jeg har hørt, at ud af tredive med sproglig studentereksamen, der starter på polit, er der fem, der gennemfører.
I: Hvor ved du det fra.
A: Jeg var ude at besøge en af mine venner, der bor på et kollegium, hvor en af de andre beboere læste polit. Men det er da klart, hvis man synes polit er éns alt og intet, så kan det godt lade sig gøre.

I: Kan I komme i tanker om eksempler fra jeres matematikindlæring, hvor I syntes det var noget mærkeligt noget, og så fangede I pointen, fandt logikken, som I kaldte det før ?
B: Funktioner. Jeg og også mange andre i klassen har manglet noget helt elementært, brøkregning og gange og dividere med negative tal. Så bliver det dèt, der er problemet, og ikke forståelsesessensen i det. En helt klar håndværksmæssig ting, man ikke kan, gør, at det hele bliver endnu mere kaotisk. Det er måske mere reel regnefejl end forståelsesvanskeligheder.
I: Hvad er det så, du har forstået om funktionsbegrebet, og hvorfor forstod du det ? Hvordan skete det ?
B: Det ved jeg ikke altså. Jeg satte mig for, at jeg ville forstå det, og hvis jeg ikke kunne forstå det, så måtte jeg lære det udenad, og det gjorde jeg så i første omgang.
I: Kan du huske, hvad du lærte udenad.
B: f af x er lig a x plus b.
A: Det er også fordi, læreren er god til at overføre det til virkeligheden i stedet for bare at stå og sige, det er en funktion.
B: Ja,men tit har det også utroligt meget med læreren at gøre. Det har det i hvert fald haft i folkeskolen.
A: Kan du ikke huske, at vi i starten fik et papir med spørgsmål om matematik,
B: hvordan vi havde det med det,
A: hvis vi haft nogle gode oplevelser, hvad det så afhang af, og hvis vi havde haft nogle dårlige oplevelser, hvad de så afhang af.
Der fandt vores lærer faktisk ud af, det afhang meget af læreren. Hvis man havde haft en god lærer, kunne man lide faget. Hvis man havde haft en dårlig lærer, så hadede man faget.
B: Man forbandt også noget helt specielt med matematiklæreren. "Dødsyg".
A: "Teoretiker". "Noget kedeligt noget".
I: Var det spændende for jer at lave besvarelserne.
B: Det var anderledes. Det gav allerede fra den første dag en anden indfaldsvinkel, hvor man blev opmærksom på, at man blev nødt til at sige til sig selv, hvis man blokerede, at det kan ikke nytte noget, for så lærer man det i hvert fald aldrig. Det kan godt være, man ikke synes, det er sjovt, at man ikke synes det er spændende; men man bliver i hvert fald nødt til at sige, at selvfølgelig kan man, hvorfor skulle jeg ikke kunne.
I: Skal jeg forstå det sådan, at du siger, at I blev gjort opmærksomme på, om I blokerede - eller det vidste I måske godt i forvejen ?
B: Ja, men altså prøve at formulere, hvad det var, man havde imod faget, og hvorfor man blokerede, om det var, fordi der stod f af x, eller der stod i anden, eller hvad det var.

A: Jeg tror, at der er nogle af dem, der siger, at de er dårlige til matematik og aldrig kan lære det, de ved ikke, at det er en blokering. De tror bare, at der er nogle, der er dårlige til matematik, og at der er nogle, der er gode. For det er tit blokeringer.
I: Hvad mener man så, når man siger, det er en blokering, og ikke bare fordi de er dårlige til matematik ?
B: (svarer meget hurtigt, hvilket jeg fandt overraskende. Jeg synes nemlig selv, at spørgsmålet er vanskeligt)
Det er vel fordi, man på et eller andet tidspunkt i sit skoleforløb har sagt, ... hvis man på en eller anden måde - ørh hvad ved jeg - har haft en dårlig lærer, eller bare ikke rigtig har været hurtig nok, og så har man sagt, nå, men det kan jeg heller ikke, og så falder man af et eller andet sted - tidligt måske netop - og så kan man ikke finde ud af det med brøker og negative tal, og så kan man overhovedet ikke finde ud af resten.
A: Der er nogle, der har det sådan, at lige snart det er noget, der hedder matematik, så ser de ikke fornuftigt, så kan de slet ikke tænke fornuftigt, og så sidder de bare og tænker, jamen, det skal være svært, og nu er der 117 regler. F,eks, i dag der sad vi og skulle trække nogle tal fra hinanden, og hende jeg sad ved siden af, hun sad på lommeregneren og trak femtusind fra tretusind. Jeg sagde: "Hvad er det, du laver". "Nå, ja, det er jo totusind", sagde hun så. Hvis man havde spurgt hende, nu har du femtusind og så bruger du tre, så ved hun det godt, ikk. Men ligeså snart, det hedder matematik, så sidder hun bare brbrbrbrbrb og taster ind på lommeregneren, selv om det jo er jo nemme tal at overskue.
I: Og det vil vi selvfølgelig kalde en blokering,- at man kan nogle ting i een situation, men ikke i en anden.
B: Men det kan også ske, at når man så endelig har fattet et eller andet og har kunnet regne nogle opgaver, så når jeg er nået til vejs ende, så har jeg fuldstændig glemt, hvad det egentlig var, det drejede sig om. Fordi jeg er gået så meget op i, at jeg endelig kunne finde ud af at trykke på de rigtige taster på lommeregneren og at få de rigtige tal ud, så.. de tal, de siger mig ikke en pind. Hvad er så de 4 promille ? Jaeh, øh, øh.
I: Hvad skal vi gøre ved det ?? Læreren skal være klar over, at det er et problem, at læreren ved, det ikke er nok, at det står i starten af en opgave ?
A: Jeg tror, at det der kan hjælpe meget på forståelsen, det er, at man kan prøve at overføre det til noget virkeligt. F.eks. at funktionen det er en taxaregning. At konstanten er startgebyret, så afhænger den af, hvor mange kilometer du kører. Det tror jeg er meget vigtigt.
I: Har I på samme måde fået hængt eksponentialfuntkioner op på noget konkret.

A: Narj, jo, vi har haft noget med befolkningstilvækst. Hvis den er halvanden procent om året, hvor stor er befolkningen så i år 2000. Det tror jeg kan hjælpe meget.
B: Det er nemt, synes jeg. Det er også igen, fordi det har noget med nogle funktioner at gøre. Men da vi havde noget om hypotesetest, var det sådan, at hvis man fattede een linje, så hang man sig så meget i den, at man ikke kunne komme videre, eller da man endelig nåede vejs ende, så vidste man ikke, hvad det egentlig var.
A: Det samme med udredningen af formlen for andengradsligningen. Vi startede med a x i anden plus b x plus c, og så kom man ned til formlen for løsningen. Så sad folk og spurgte, hvordan kommer vi derfra og dertil. Men vi fik heller ikke at vide i starten, hvad vi skulle gøre det for.
I: Men I mener altså, at det hjælper at kæde det sammen med noget dagligdags, med noget I forbinder med noget.
B: Det hjælper også, hvis man laver hjemmeopgaver i matematik. Det har jeg aldrig nogensinde gjort før. Man skal simpelthen tvinge sig selv. Man skal tvinge sig selv i første omgang til at smide de der blokeringer af, og prøve at bilde sig selv ind, at man godt forstår det, og så tvinge sig selv til i hvert fald at prøve at lave det, man får for.
A: Det er en fordel at starte på en ny skole, så kan man revidere sin opfattelse, for jeg ved f.eks. ikke, at A altid har været dårlig til matematik eller har haft en dårlig matematiklærer. Jeg kan få et andet syn på hende, end hendes gamle klassekammerater.
Men der er ingen fag, hvor man bare kan lære det ved at høre, hvad læreren siger, men det gælder nok især i matematik.
B: Da jeg gik på teknisk skole - jeg er udlært typograf - havde vi også nogle ting, der kunne minde om matematik, men det brugte vi jo direkte i produktionen. Vi nåede ikke at lægge mærke til, at det er jo egentlig matematik, det er egentlig noget med tal, du står og laver.
I: Ved du, hvad det var for noget matematik, du gik og lavede.
B: Det var sådan noget med nøjagtige mål, og at skynde sig at lægge til og trække fra. Det var nemmere at gøre det i hovedet, selv om jeg havde lommeregner.
A: Jeg har taget højere handelseksamen. Så jeg har været det her matematik igennem. Jeg har altid haft nemt ved det, så det er ikke sådan, at jeg ikke forstod det dengang, men først nu.
I: For mig at se - udefra- er det grotesk, at I i går blev sat til at lave prognoser frem til år 2000, og at I skulle gøre det ud fra tal, der er 20-30 år gamle. Der må sgu da være nogle nyere tal ! Og I sidder bare der og finder jer i det. Hvordan kan det være ?
B: Det er jo fordi, man netop først og fremmest skal have fat på... Altså, jeg havde ikke engang lagt mærke til de tal, der var foroven. Og når man så ...Hvad viser så det her noget om ? Det viser, at de rige bliver rigere,

og de fattige bliver fattigere. Ja, men det vil jeg ikke gøre mere ved, det er ikke matematik. Det er ikke på den måde, man så kigger på de prognoser, vel.
I: Jeg er sikker på, at I ville have brokket jer, hvis I i samfundsfag var blevet sat til at arbejde med så gamle tal.
A: Nej, vi havde ikke brokket os (fnis, fnis). Hvis det nu var i samfundsfag, så tror jeg, vi ville have lagt mærke til det. Og vi ville have set, at tallene var utidssvarende. Men jeg tror meget det er sådan med matematik, at selv om den er overført til virkeligheden, så ser man nok ikke så kritisk på det, som hvis det var noget andet. Det er også fordi, når man får sådan nogle, så tænker man, arj, men grunden til at vi skal sidde og lave dem, det er at vi skal lære noget matematik.
B: Det er ikke fordi vi skal udlede noget bestemt.
I: I bliver ikke spurgt om, hvordan det mon går i Nigeria. Det er ikke det, der er det interessante ?
A og B samtykker.
I: Kunne det så have været ligemeget med sådanne eksempler. Kunne man ligeså godt lægge undervisningen om, så den ikke havde nogen som helst relation til virkeligheden.
A: Det er klart, det er bedre med nogle tal, som man kender.
B: Jeg har en fornemmelse af, at det matematik, vi har i år, er nogle grundlæggende færdigheder, som man kan bygge videre på. Og det er det, der irriterer mig. Ikke at jeg har specielt meget lyst til det, eller at jeg af ren og skær interesse ærgrer mig over, at jeg ikke valgte matematisk,- overhovedet ikke. Alligevel irriterer det mig, at jeg tænker på matematik som en halvrodet bunke, der ligger ovre i hjørnet og glor på mig. Der bliver aldrig nogensinde slået nogen knuder på det.
I: Har I andre småfag - er det det samme med dem. Handler det om, hvor mange timer man har.
B: Det er fordi, det er så meget anderledes end de andre fag.
A: Ja, derfor kan jeg også godt lide at lave lektier i det. Når man sidder og laver en masse sprog, hvor man skal slå op i ordbøger, så er det rart at skulle lave nogle helt konkrete ting. "Udfyld det og det skema". Det kan jeg godt lide.
I: Man skal heller ikke vurdere, som man skal i flere andre fag ?
A: Man skal heller ikke se kritisk på det, man skal ikke argumentere, man skal ikke analysere.
I: Det vil sige, det er den rene afslapning, (spørger jeg så med et smil på læben).
A: Ja, det synes jeg, (svaret kommer også med et smil på læben).
B: Det er i hvert fald ikke afslappende for mig.
I: Hvad er det, der er anderledes ved faget, synes du, B. ?

B: Ja, det er jo tal. De blokeringer, som jeg stadig har nogle af, er, at hvis jeg slår op på en side med trekanter, så kan jeg ligeså godt opgive. Men så har vi fået nogle kopier i stedet for. Og jeg synes, de er bedre. Bare det at det ikke er den matematikbog.
Det er så meget anderledes, fordi hvis man ikke forstår det, så forstår man det ikke, og hvis man forstår det, så forstår man det. Hvorimod du godt kan oversætte en sætning halvt i fransk, hvis du er sådan lidt usikker på halvdelen af ordene, så finder du ud af det hen ad vejen. I matematik er det enten eller.
A: Hvis du ikke forstår at løse en ligning, kan du ikke lave noget af det, men du kan godt oversætte noget i fransk.
B: Eller også kan du læse den op. Der er mange flere discipliner inden for det, end der er inden for matematik.
I: Det kan godt være, at tysklæreren skælder ud over, at man bøjer forkert, men man kan godt gøre det alligevel.
B: Man kan godt sige det.
A: Der skulle have været nogle af dem, der har rigtig mange blokeringer.
I: Hvad ville de så have sagt ?
A: Jeg hader det fag ! Jeg hader det fag ! Min studentereksamen ryger, hvis vi skal op i matematik !
I: Nå, det er altså ikke alle, der har fået udryddet blokeringerne. Men du, B har fået udryddet - i hvert fald nogle af dem ?
B: Ja, men det er simpelthen ved at bilde mig selv ind, at du er da enormt klog, selvfølgelig kan du da finde ud af det. Det har jeg været nødt til at gøre.
A: Det er godt, du selv tror på det, (sagt i en venlig tone).
I: Har I bildt hinanden det ind, eller er det noget I har gjort hver for sig.
A: Vi snakker ikke så meget om det. Der bliver kun snakket matematik, når vi har matematik.
B: Ellers er det kun om læreren.

(De taler om deres søde og fine matematik- og latinlærere. "Det betyder også meget", siger B.)

B: Dér har jeg det igen anderledes. Jeg har haft latin før. Jeg synes det har været ret sjovt. Der er så nogle andre, der har siddet med nogle blokeringer. "Va' fanden ! Og hvad er det for noget ! Fem bøjninger !".
A: Ja, der er rigtigt.
I: Og du siger så, jamen sådan er det ? Du er inde i den verden ?
B: Ja, den verden synes jeg til gengæld er logisk. I forhold til matematik. Matematik er ligesom kun en gren af virkeligheden.

LITTERATURLISTE

Abimbola, I.O. (1988) "The Problem of Terminology in the Study of Student Conceptions in Science", Science Education 72, 2, s.175–184.

Abraham, John & Bibby, Neil (1988) "Mathematics and Society: Ethnomathematics and a Public Educator Curriculum", For the Learning of Mathematics, 8, 2, 2–11.

Alexandersson, Claes (1985) "Stability and Change. An empirical study of the relation between knowledge acquired in school and in everyday life", Studies in Educational Sciences: 53, Acta Universitatis Gothoburgensis, Gøteborg.

Artique, Michèle & Perrin-Glorian, Marie-Jeanne (1991) "Didactic Engineering, Research and Development Tool: some Theoretical Problems linked to this Duality", For the Learning of Mathematics 11, 1, s.13–18.

Baker, Dale R. (1991) "Misconceptions", Science Education, 75, 3, s.323–330.

Ball, Deborah Loewenberg (1988) "Unlearning to Teach Mathematics", For the Learning of Mathematics 8, 1, s.40–47.

Ball, Deborah Loewenberg (1990) "Breaking with Experiences in Learning to Teach Mathematics: the Role of a Preservice Methods Course", For the Learning of Mathematics 10, 2, s.10–16.

Bauer, Mette & Borg, Karin med Broady, Donald (1986) "Den skjulte læreplan", Unge Pædagoger, København.

Bauersfeld, Heinrich (1979) "Research related to the mathematical learning process" i "New Trends in Mathematics Teaching", vol IV, Unesco, Paris, s. 199–213.

Bauersfeld, Heinrich (1980) "Hidden Dimensions in the So-called Reality of a Mathematics Calssroom", Educational Studies in Mathematics 11, s.23–41.

Bauersfeld, Heinrich & Voigt, Jörg (1988) "*"Können wir eigentlich weitermachen..."*", i MU - Der Mathematikunterricht 34, 2, s.44–54.

Beattys, Candice & Herscovics, Nicolas & Nantais, Nicole (1990) "Children's Pre-Concept of Multiplication: Procedural Understanding", i Booker et al (eds) "Fourteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education", Vol III, 183–190, Mexico.

Behr, M.J. & Lesh, R. & Post, T.R. & Silver, E.A. (1983) "Rational Number Concepts", s.92–126 i Lesh, R. & Landau, M. (eds) "Acquisition of Mathematics Concepts and Processes", Academic Press, Orlando.

Berenson, S.B. et al (1990) "Levels of Thinking and Success in College Developmental Algebra", Focus on Learning Problems in Mathematics 12, 1, s.3–13.

Bishop, Alan J. (1985) "The Social Construction of Meaning – a Significant Development for Mathematics Education ?", For the Learning of Mathematics 5, 1, s.24–28.

Bishop, Alan J. (1988) "Mathematical Enculturation: a cultural perspective on mathematics education", Dordrecht, Kluwer, i serien "Mathematics Education Library".

Bishop, Alan (1988) (ed) "Mathematics Education and Culture", temanummer i Educational Studies in Mathematics 19, 2.

Bishop, A.J. & Mellin-Olsen, S. & Dormolen, J. v. (eds) (1991) "Mathematical Knowledge: its growth through teaching", Kluwer, Dordrecht, i serien "mathematics Education Library".

Bjørneboe, Jens & Nissen, Gunhild (1984) "Den taberproducerende matematikundervisning", Uddannelse, 8, s.469–479.

Booker, G. & Cobb, P. & Mendicutti, T.N.d. (eds) (1990) "Proceedings for the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference, July 15–20", Mexico.

Borasi, Raffaella & Brown, Stephen I. (1985) "A *'Novel'* Approach to Texts", For the Learning of Mathematics, 5, 1, s.21–23.

Borba, Marcelo C. (1990) "Ethnomathematics and Education", For the Learning of Mathematics 10, 1, s.39–43.

Brenner, Mary E. (1985) "The Practice of Arithmetic in Liberian Schools", Anthropology & Education Quarterly, vol 16, 3, s.177–185.
Brenner, Mary (1991) "Knowledge and Situated Cognition: Children's Knowledge of Money in Stores and in School", upubliceret manuskript.

Broady, D (1981) "Den dolda läroplanen", Symposion Bokförlag, Stockholm.

Brousseau, G. & Davis, Robert B & Werner, Tage (1986) "Observing students at work", s.205–241 i Christiansen,B.C & Howson, A.G. & Otte, M. (eds) "Perspectives on Mathematics Education", Reidel Publ. Company, Dordrecht.

Brown, A.L. (1978) "Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition", i Glaser, R. (ed) "Advances in instructional Psychology", vol I, s.77–165, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, John Seely & Collins, Allan & Duguid, Paul (1989) "Situated Cognition and the Culture of Learning", Educational Researcher, jan–feb, s.32–42.

Brown, Stephen I (1984/1986) "The Logic of Problem Generation: from Morality and Solving to De-Posing and Rebellion", For the Learning of Mathematics, 4 (1) februar 84, og i forkortet form i Burton, Leone (ed) (1986) "Girls Into Maths Can Go", s. 196–222, Cassel, London.

Brownell, William A. & Moser, Harold E. (1949) "Meaningful vs. Mechanical Learning: A Study in Grade III Subtraction", Durham, Duke University Press.

Bruner, Jerome S. (1960) "The Proces of Education", Harvard University Press, Cambridge. Udkom i 1972 i dansk oversættelse under titlen "Uddannelses-processen", København, Gyldendals Pædagogiske Bibliotek.

Burkhardt, Hugh (1981) "The real world and mathematics", London, Blackie and Son.

Burton, Leone (ed) (1986) "Girls Into Maths Can Go", Cassel, London.

Burton, Martha B. (1988) "A Linguistic Basis for Student Difficulties with Algebra", For the Learning of Mathematics 8, 1, s.2–7.

Carbonell, Jaime G. & Minton, Steven (1985) "Metaphor and Commonsense Reasoning" s.405–426 i Hobbs, Jerry R. & Moore, Robert C. (eds) "Formal Theories of the Commonsense World" i "Ablex series in artificial intelligence", Ablex, Norwood, New Jersey.

Carpenter, Thomas P. & Moser, James M (1983) "Acquisition of Addition and Subtraction Concepts", s. 7–44 i Lesh, Richard & Landau, Marsha "Acquisition of Mathematics Concepts and Processes", Academic Press, New York, i serien "Develomental Psychology Series".

Carpenter, T.P. & Lindquist, M.M. & Matthews, W. & Silver, E.A. (1983) "Results of the Third NAEP Mathematics assessment: Secondary School", s.652–659, Mathematics Teacher, 76(a).

Carraher, Terezinha Nunes & Carraher, David William (1985) "Mathematics in the streets and in schools", British Journal of Developmental Psychology, 3, 21–29.

Carraher, Terenzinha Nunes & Schliemann, Analucia Dias (1985) "Computation routines prescribed by schools: Help or hindrance ?", Journal for Research in Mathematics Education 16, 1, jan, s.37–44.

Carraher, T.N. & Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1988) "Mathematical Concepts in Everyday Life", i temanummeret "Children's Mathematics", New Directions for Child Development, nr. 41, s.71–87.

Casson, R.W. (ed) "Language, Culture and Cognition: Anthropological Perspectives". New York, Macmillan.

Christiansen, Bent (1984) "Selvvirksomhed og erfaringer i matematikundervisningen" s.39–72 i Jensen, Thorkild Borup & Vejleskov, Hans (eds) "Fag og erfaring. Nogle skolefags forhold til eleverfaringer".

Christiansen, B. & Howson, A.G. & Otte, M. (eds) (1986) "Perspectives on Mathematics Education. Papers Submitted by Members of the Bacomet Group", Dordrecht, Reidel i serien "Mathematics Education Library".

Christiansen, Bent (1990) "Gymnasiets matematikundervisning set i fagdidaktiske perspektiver: bidrag til Statens Humanistiske Forskningsråds konference 23–25 november", Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Civil, Marta (1990) " *"You only do Math in Math"* : A Look at Four Prospective Teachers' Views about Mathematics", For the Learning of Mathematics 10, 1, s.7–9.

Clement, J. & Kaput, J.J. (1974) "Letter to the editor"; Journal of Childrens' – Mathematical Behavior, 2, s. 208.

Clement, John & Lochhead, Jack & Monk, George S (1981) "Translation Difficulties in Learning Mathematics", The American Mathematical Monthly, vol 88, april, s.286–290.

Cobb, Paul (1987) "Information–Processing Psychology and Mathematics Education – A Constructivist Perspective", Journal of Mathematical Behavior 6, s.3–40.

Cobb, Paul (1989) "Experiental, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education", For the Learning of Mathematics 9, 2, s.32–42.

Cobb, Paul & Yackel, Erna & Wood, Terry (1989) "Young Children's Emotional Acts While Engaged in Mathematical Problem Solving" s 117–148 i McLeod, Douglas B. & Adams, Verna M. "Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective", Springer–Verlag, New York.

Confrey, Jere (1990) "A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming", Review of Research in Education, 16, s.3–56.

Cooper, Barry (1981) "Michel Foucault. An Introduction to the Study of His Thought", The Edwin Mellen Press, New York.

Crawford, Kathryn (1990) "Language and Technology in Classroom Setting for Students from Non-Technological Cultures", For the Learning of Mathematics 10, 1, s.2–6.

D'Ambrosio, Ubiratan (1980) "Mathematics and society: some historical considerations and pedagogical implications", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 11, 4, s.479–488.

D'Ambrosio, Ubiratan (1985) "Socio-cultural Bases for Mathematics education", Campinas, Unicamp.

D'Ambrosio, Ubiratan (1985) "Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics", For the Learning of Mathematics 5, 1, s.44–48

D'Ambrosio, Ubiratan (1985) "Mathematic Education in a cultural setting", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.

Davis, Robert B. & Jockusch, Elizabeth & McKnight, Curtis C. (1978) "Cognitive Processes in Algebra" i Journal of Childrens' Mathematical Behavior, 2, 1, s.10–320.

Davis, Robert B. (1983) "Complex Mathematical Cognition", s. 252–290 i Ginsburg, Herbert P. (ed) "The Development of Mathematical Thinking", Orlando, Academic Press i serien "Developmental Psychology Series".

Davis, Robert B. (1984) "Learning Mathematics. The Cognitive Science Approach to Mathematics Education", London, Croom Helm.

Davis, Robert B. (1985) "Learning Mathematical Concepts: The Case of Lucy", The Journal of Mathematical Behavior 4, 135–153.

Davis, Robert B (1986) "Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: A Summary Analysis", s.265–300 i Hiebert, James (ed) "Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Davis, Robert B. & Vinner, Shlomo (1986) "The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages", Journal of Mathematical Behavior 5, s.281–303.

Davis, Robert B (1988) "The Interplay of Algebra, Geometry, and Logic", Journal of Mathematical Behavior, 7, s.9–28.

Davis, Robert B. & Maher, Carolyn A. & Noddings, Nel (eds) (1990) "Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics", monografi nr. 4 fra "Journal for Research in Mathematics Education".

Davis, Robert B & Alston, Alice & Maher, Carolyn (1991) "Brian's Number Line Representation of Fractions", i Furinghetti, F (ed) "Proceedings for the Fifteenth Psychology of Mathematics Education Conference", Assisi, Vol I, side 247–254.

Dawydow, W. (1977) "Arten der Verallgemeinerung im Unterricht", Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin.

diSessa, Andrea (1982) "Unlearning Aristotelian physics", Cognitive Science, 6, 37–75.

diSessa, Andrea (1983) "Phenemenology and the Evolution of Intuition", s. 15–34 i Gentner, Dedre & Stevens, Albert L. (eds) "Mental Models", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, i serien "Cognitive Science".

Dowling, Paul (1991) "Gender, Class and Subjectivity in Mathematics: a Critique of Humpty Dumpty", For the Learning of Mathematics 11, 1, s. 2–8

Dreyfus, Tommy & Eisenberg, Theodore (1982) "Intuitive Functional Concepts: A Baseline Study on Intuitions", Journal for Research in Mathematics Education 13, 5, s.360–380.

Dörfler, W. & Fischer, R. (eds) (1984) "Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik", Holder–Pichler–Tempsky, Stuttgart.

Dörfler, Willibald (1991) "Meaning: Image Schemata and Protocols" i Furinghetti, F, (ed) "Proceedings for the Fifteenth Psychology of Mathematics Education Conference, Assisi, vol I s.17–32.

Ejlertzen, Lis (1991) "Pigers blokering over for matematik – 5 års tilbageblik", s.44–46 i Tingleff, Kirsten (ed) "Kvinder og matematik", Konference 21–22 september, København.

Entwistle, Noel "Contrasting Perspectives on Learning" s.1–18 i
Marton, Ference & Hounsell, Dai & Entwistle, Noel (red) (1984) "The Experience of Learning", Scottissh Academic Press, Edinburgh.

Erlwanger, S.H. (1973) "Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics", Journal of Childrens' Mathematical Behavior, 1, 2, Autumn, s.7–26.

Ernest, Paul (ed) (1989) "Mathematics Teaching. The State of the Art.", The Falmer Press, New York.

Ernest, Paul (1989) "Questioning the Sacred Cows", s. 136–137 i Ernest, Paul (ed) "Mathematics Teaching. The State of the Art", The Falmer Press, New York.

Esbensen, Esben & Hartz, Viggo & Trankjær, Ib & Ørsted, Leif (1990) "Kvalitet i Matematikundervisningen", særnummer af "MATEMATIK", nr.8.

Even, Rumaha (1990) "Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions", Educational Studies in Mathematics 21, 421–544.

Ferreira, E. S. "The teaching of mathematics in Brazilian native communities", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 21, 4, s.545–549.

Fetterman, David M. (ed) (1988) "Qualitative Approaches to Evaluation in Education: The Silent Scientific Revolution", Praeger Publishers, New York.

Fielker, David (1990) "Observation Lessons", For the Learning of Mathematics 10, 1, s.16–22.

Fischbein, E. (1987) "Intuition in Mathematics and Science. An Educational Approach" i serien "Mathematics Education Library", Reidel, Dordrecht.

Fischbein, E (1989) "Tacit Models and Mathematical Reasoning", For the Learning of Mathematics 9, 2, s.9–14.

Fischbein, E & Tirosh, D. & Stavy, R. & Oster, A. (1990) "The Autonomy of Mental Models", For the Learning of Mathematics 10, 1, s.23–30.

Frankenstein, Marilyn (1989) "Relearning Mathematics. A Different Third R – Radical Maths", Free Association Books, London.

Freudenthal, Hans (1983) "Didactical phenomenology of mathematics structures", i serien "Mathematics Education Library", Dorddrecht, Reidel.

Furinghetti, Fulvia (ed) (1991) "Proceedings for the Fifteenth Psychology of Mathematics Education Conference, Assisi.

Garfield, Joan & Ahlgren, Andrew (1988) "Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research", Journal for Research in Mathematics Education, 19, 1, s.44–63.

Gauld (1987) "Student Belief and Cognitive Structures", Research in Science Education, vol 17, s.87–93.

Gay, J. & Cole, M. (1976) "The new Mathematics and an old Culture: A study of Learning among the Kpelle of Liberia". New York, Holt, Rinehart & Winston.

Gentile, J. Ronald & Monaco, Nanci M. (1986) "Learned Helplessness in Mathematics: What Educators Should Know", Journal of Mathematical Behavior 5, 1.159–178.

Gentner, Dedre & Stevens, Albert L. (eds) (1983) "Mental Models", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, i serien "Cognitive Science".

Gerdes, Paulus (1985) "Conditions and Strategies for Emancipatory Mathematics Education in Undeveloped Countries", For the Learning of Mathematics 5, 1, s.15–20.

Gerdes, Paulus (1988) "On possible uses of traditional Angolan sand drawings in the mathematics classroom", Educational Studies in Mathematics Education 19, 1, s.3–22.

Gibbs, Graham & Morgan, Alistar & Taylor, Elizabeth (1984) "The World of the Learner", s.165–188 i Marton, Ference & Hounsell, Dai & Entwistle, Noel (eds) "The Experience of Learning", Scottish Academic Press, Edinburgh.

Ginsburg, Herbert P. (red) (1983) "The Development of Mathematical Thinking", Orlando, Academic Press i serien "Developmental Psylogy Series".

Ginsburg, Herbert P. & Allardice, Barbara S. (1984) "Children's Difficulties with School Mathematics", s.194 ff i Rogoff, Barbara & Lave, Jean "Everyday Cognition" Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ginsburg, Herbert P. & Asmussen, Kirsten A. (1988) "Hot Mathematics" s. 89–111 i temanummeret "Children's Mathematics", New Directions for Child Development, nr. 41.

Giroux, Henry & Purpel, David (eds) (1983) "The Hidden Curriculum and Moral Education: Deception or Discovery ?", McCutchan, Berkeley.

Glaser, R. (ed) (1978) "Advances in instructional Psychology", vol I, s.77–165, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Glaserfeld, Ernst von (1987) "Learning as a Constructive Activity" i Janvier, Claude (ed) "Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics", Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Glaserfeld, Ernst von (1990) "An Exposition of Construtivism: Why Some Like It Radical" s. 19–29 i Davis, Robert B. & Maher, Carolyn A. & Noddings, Nel (eds) "Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics", monografi nr. 4 fra "Journal for Research in Mathematics Education".

Goffman, Erving (1974) "Frame Analysis", New York, Harper Colophon Books.

Graeber, Anna O & Tirosh, Dina (1990) "Insights Fourth and Fifth Graders bring to Multiplication and Division with Decimals", Educational Studies in Mathematics 21, s.565–588.

Greeno, James & Riley, Mary S. (1987) "Processes and Development of Understanding", s.289–313 i Weinert, Franz E. & Kluwe, Rainer H. (eds) "Metacognition, Motivation, and Understanding", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, i serien "The Psychology of Education and Instruction".

Greeno, James G. (1989) "A Perspective on Thinking", American Psychologist, vol 44, nr. 2, 134–141.

Greer, Brian (1987) "Understanding of arithmetical operations as models of situations" i Sloboda, John A. & Rogers, Don "Cognitive Processes in Mathematics", Oxford University Press, New York.

Greer, Brian (1988) "Book Review" om Fischbein, E. "Intuition in Science and Mathematics", Educational Studies in Mathematics 19, s.499–502.

Greer, Brian (in press) "Multiplication and Division as Models of Situations" i Grouws, D. (ed) "Handbook of Research on Learning and Teaching Mathematics", NCTM/Macmillan.

Greer, Brian (in press) "Extending the meaning of multiplication and division" i Harel,G. & Confrey, J. (eds) "The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics", Albany, New York, Suny Press.

Gustafsson, Bertil & Stigebrandt, Eva & Ljungvall, Roger (1981) "Den dolda läroplanen", Liber Utbildningsforlaget, Vallingby.

Hanna, Gila (1989) "More than Formal Proof", For the Learning of Mathematics 9, 1, s.20–23.

Hanna, Gila & Winchester, Ian (1990) "Special Issue: Creativity, Thought and Mathematical Proof", Interchange, 21, 1.

Hannan, Andrew (1988) "Should Maths be Multicultural ?", Mathematics in School, jan., s.28–30.

Hansen, Kim Foss "Regne/matematikundervisningen i folkeskolen", Dansk Psykologisk Forlag, København.

X

Hansen, Jens Pilegaard (1987) "Geometri – obligatorisk niveau", 2.udgave, Frederikssund, Forlaget FAG.

Harel, Guerson & Tall, David (1991) "The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics", For the Learning of Mathematics 11, 1, s.38–42.

Harris, Mary (1987) "An Example of Traditional Women's Work as a Mathematics Resource", For the Learning of Mathematics 7,3 s. 26–28, Montreal.

Harris, Mary (1988) "Common Threads", Mathematics Teaching 123, juni, s.15–16.

Harris, Mary (1989) Udstillingsmaterialet "Common Threads". Department of Mathematics, University of Education, London.

Hedegaard, Marianne "The zone of proximal development as basis for instruction" s.349–371 i Moll, Luis C. (1990) "Vygotsky and Education. Instructional implications and applications of sociohistorical psychology", Cambridge University Press, Cambridge.

Hemmingsen, Carl (1988) "Funktioner. Obligatorisk niveau", FAG, Frederikssund.

Hiebert, James & Lefevre, Patricia (1986) "Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis", s.1–28 i Hiebert, James (ed) "Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Hiebert, James (ed) (1986) "Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Hiebert, James (1988) "A Theory of Developing Competance with Written Mathematical Symbols", Educational Studies in Mathematics 19, s.333–355.

Hiebert,James & Wearne, Diana (1988) "Instruction and Cognitive Change in Mathematics", Educational Psychologist 23, 2, s.105–117.

Hobbs, Jerry R. & Moore, Robert C. (eds) (1985) "Formal Theories of the Commonsense World" i "Ablex series in artificial intelligence", Ablex, Norwood, New Jersey.

Howson, A.Geoffrey (1973) "Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education", Cambridge University Press, London.

Howson, Geoffrey & Keitel, Christine & Kilpatrick, Jeremy (1981) "Curriculum developments in mathematics", Cambridge University Press, Cambridge.

Høines, Marit Johnsen & Mellin-Olsen, Stieg (eds) (1986) "Mathematics and Culture", Caspar Forlag, Bergen.

Høines, Marit Johnsen (198)"Begynner-opplæringen. Fagdidaktikk for matematik-undervisningen 1.- 6.klasse", Caspar Forlag, Rådal.

Janvier, Claude (ed) (1987) "Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics", Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, Claude (1987) "Conceptions and representations" s. 147–158 i Janvier, Claude (ed) "Problems of Representation in Teaching and Learning Mathematics" Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, Claude (1990) "Contextualization and Mathematics for All, s.183–193 i "Teaching and Learning Mathematics in the 1990s", årbog 90 fra den amerikanske lærerorganisation.

Jaworski, Barbara (1988) " *'Is'* versus *'seeing as'*: constructivism and the mathematics classroom" s. 287–296 i Pimm, David (ed) (1988) "Mathematics, Teachers and Children", London, Hodder and Stoughton & the Open University.

Jensen, Thorkild Borup & Vejleskov, Hans (eds) (1984) "Fag og erfaring. Nogle skolefags forhold til eleverfaringer", Munksgård, København.

Jerome S.Bruner (1960) "The Proces of Education", Harvard University Press, Cambridge.

Jessen, Claus & Møller, Peter & Mørk, Flemming (1991) "Matematik – tanke, sprog og redskab. HF-fællesfag", Gyldendal, København.

Jungwirth, Helga (1990) "Mädchen und Buben im Mathematikunterricht. Eine Studie über gesclechtsspezifische Modifikationen der Interaktionsstrukturen." Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Sport, Wien.

Jungwirth, Helga (1991) "The Real World behind Real-world Problems – some findings of a micro-ethnographical study", s. 93–102 i Niss, M. & Blum, W. & Huntley, I. (eds) "Teaching of Mathematical Modelling and Applications", Ellis Horwood, New York.

Jungwirth, Helga (1991) "Interaction and Gender – Findings of a Microethnographical Approach to Classroom Discourse", Educational Studies in Mathematics 22, 263–284.

Kaner, Peter & Langdon, Nigel (1979) "It Figures. Jimmi Young's Guide to Everyday Maths", British Broadcasting Corporation, London.

Kesselhahn, Marianne & Lindenskov, Lena (1988) "Matematikkens virkelighed. Matematik, mål, magt", interview med gymnasielærer Allan Tarp og lærer ved den frie lærerskole, Claus Jessen", Naturkampen 47, årg.12, s. 6–8.

Kilpatrick, Jeremy (1981) "The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education", For the Learning of Mathematics 2, 2, s.22–30.

Kouba, Vicky L. & McDonald, Jenat L. (1991) "What is Mathematics to Children", Journal of Mathematical Behavior, 10, 1, s.105–113.

Kozulin, Alex (1990) "Vygotsky's Psychology. A Biography of Ideas", New York, Harvester Wheatsheaf.

Krummheuer, von Götz (1988) "Verständigungsprobleme im Mathematkunterricht" i MU – Der Mathematikunterricht 34, 2, s.55–60.

Kuhn, Thomas S. (1973) "Videnskabens revolutioner" Fremad, København. Oversat fra "The Structure of Scientific Revolutions" (1970) med efterskrift fra 1969, udgivet første gang 1962, Uiversity of Chicago, Chicago.

Kvale, Steiner (ed) (1989) "Issues of Validity in Qualitative Research", Studentlitteratur, Lund.

Kvale, Steinar (1984) "Om tolkning af kvalitative forskningsinterviews", Tidskrift for Nordisk Forening for Pædagogisk Forskning, nr.3–4, s.55–66.

Laborde, Colette (1989) "Audacity and Reason: French Research in Mathematics Education", For the Learning of Mathematics 9, 3, s.31–36.

Lakoff, George (1980) "Metaphors we live by", Chicago, The University of Chicago Press.

Lakoff, George (1987) "Women, Fire and Dangerous Things", Chicago, The University of Chicago Press.

Lave, Jean (1985) (ed) "The Social Organization of Knowledge and Practice: A Symposium", Anthropology & Education Quarterly, 16, 3, s.171–213.

Lave, Jean (1988) "The Culture of Acquisistion and the Practice of Understanding", Institute for Research on Learning, Palo Alto, California.

Lave, Jean (1988) "Cognition in Practice: Mind, Mathematics, and Culture in Everyday Life", Cambridge, Cambridge University Press.

Leinhardt, Gaea (1988) "Getting to Know: Tracing Mathematical Knowledge From Intuition to Competance". Educational Psychologist, 23(2), 119–144.

Leinhardt, Gaea & Zaslavsky, Orit & Stein, Mary Kain (1990) "Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching", Review of Educational Research, Spring, vol 60, 1, s.1–64.

Lerman, Stephen (1983) "Problem-solving or knowledge-centred: the influence of philosophy on mathematics teaching", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 14, 1, s.59–66.

Lerman, Stephen (1989) "Investigations: Where to Now ?", s.73–80 i Ernest, Paul (ed) "Mathematics Teaching. The State of the Art.", The Falmer Press, New York.

Lerman, Stephen (1990) "The Role of Research in the Practice of Mathematics Education", For the Learning of Mathematics 10, 2, s.25–28.

Lesh, Richard & Landau, Marsha (1983) "Acquisition of Mathematics Concepts and Processes", Academic Press, New York, i serien "Developmental Psychology Series".

Lindenskov, Lena (1987) "Domino i gymnasiet", Naturkampen 44, årg.11, s.12–16.

Lindenskov, Lena (1990) "The Pupil's Curriculum, Rationales of Learning and Learning-stories", i Noss et al (eds) "Proceedings of the First International Conference on Political Dimensions of Mathematics Education: Action & Critique", University of London.

Lindenskov, Lena (1990) "Mathematical Concept Formation in the Individual", i Booker et al (eds) "Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference", vol I, 61–68, Mexico.

Lindenskov, Lena (1990) "Drømmen og trylleordene", s.27–46 i Nissen, Gunhild & Bjørneboe, Jens (eds) "Matematikundervisning og Demokrati", Statens Humanistiske Forskningsråd, Initiativet vedrørende Matematik-undervisning, RUC.

Lindenskov, Lena (1990) "Piger og matematik, interview med Valerie Walkerdine", Naturkampen 56, årg.14, s.4–8.

Lindenskov, Lena (1991) "Everyday Knowledge in Studies of Teaching and Learning Mathematics in School" i Furinghetti, F. (ed) "Proceedings of the fifteenth Psychology of Mathematics Education Conference", Assisi, Italy, vol II, side 325–333.

Lindenskov, Lena (1991) "En hyldest til nysgerrigheden, - med eksempler fra en undersøgelse om hverdagsvidens indflydelse på indlæringsproblemer i matematik i gymnasiet" i Tingleff, Kirsten (ed) "Kvinder og matematik", København, s.15-21.

Mack, Nancy K. (1990) "Learning Fractions with Understanding Building on Informal Knowledge", Journal for Research in Mathematics Education 21, 1, s.16-32.

Maier, E. (1980) "Folk Mathematics", Mathematics Teaching 93, dec., s.21-24.

Malle,G. (1984) "Schulerinterviews zur elementaren Algebra" i Dörfler, W. & Fischer, R. (eds) "Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik", Holder-Pichler-Tempsky, Stuttgart.

Mandler, George (1989) "Affect and Learning: Causes and Consequences of Emotional Interactions" s.3-19 i McLeod, Douglas B. & Adams, Verna M. (eds) "Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective", Springer Verlag, New York.

Marton, Ference & Hounsell, Dai & Entwistle, Noel (eds) (1984) "The Experience of Learning", Scottissh Academic Press, Edinburgh.

Marton, Ference & Säljö, Roger (1984) "Approaches to Learning" s.36-55 i Marton, Ference & Hounsell, Dai & Entwistle, Noel (eds) "The Experience of Learning", Scottissh Academic Press, Edinburgh.

Mason, John & Tall, David (1984) "Generic Examples: Seeing the General in the Particular", Educational Studies in Mathematics 15, s.277-289.

Mason, John (1988) "Imagenery, imagination and mathematics classrooms" s. 297-302 i Pimm, David (ed) "Mathematics, Teachers and Children", London, Hodder and Stoughton & the Open University.

Mason, John (1989) "Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention", For the Learning of Mathematics 9, 2, s.2-8.

McBride, Maggie (1989) "A Foucauldian Analysis of Mathematical Discourse", For the Learning of Mathematics 9, 1, s.40-46.

McLeod, Douglas B. & Adams, Verna M. (eds) (1989) "Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective", Springer-Verlag, New York.

McLeod, Douglas B. (1989) "Beliefs, Attitudes, and Emotions: New views of Affect in Mathematics Education", s.245-258, i McLeod, Douglas B. & Adams, Verna M. (eds) "Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective", Springer Verlag, New York.

Mead, G.H. (1934) "Mind, Self and Society", Chicago University Press, Chicago.

Mellin-Olsen, Stieg (1984) "Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære", NKI-forlaget, Rud.

Mellin-Olsen, Stieg (1987) "The Politics of Mathematics Education", Reidel Publ.Compagny, Dordrecht.

Mellin-Olsen, Stieg (1990) "Oppgavediskursen", s.47-64 i Nissen, Gunhild & Bjørneboe, Jens (eds) "Matematikundervisning og Demokrati", Statens Humanistiske Forskningsråd, Initiativet vedrørende Matematikundervisning, RUC.

Mellin-Olsen, Stieg (1992) "Eleven husker når han ikke lærte", Tangenten, 3, 1, s. 26-28.

Millar, R. (1989) "Constructive criticism", s. 587-596, International Journal of Science Education, 11, 5, Special Issue "Students' Conceptions in Science" redigeret af Rosalind Driver.

Moll, Luis C. (1990) "Vygotsky and Education. Instructional implications and applications of sociohistorical psychology", Cambridge University Press, Cambridge.

Morgan, A.T. (1990) "A study of the difficulties experienced with mathematics by engineering students in higher education", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 21, 6, s.975-988.

Mosley, F. (1988) "Everyone Counts: Looking for Bias and Insensitives in Primary Mathematics Materials", The Inner London Educational Authority, London.

Movshovitz-Hadar, Nitsa (1989) "Book Review" om Pimm's "Speaking Mathematically", Educational Studies in Mathematics, 20, s.111-119.

Mukhopahyay, Swapna & Resnick, Lauren B. & Schauble, L. (1990) "Social sense-making in Mathematics: Childrens Ideas of Negative Numbers". Fourteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol III, 281-288, Mexico.

Nantais, Nicole & Herscovics, Nicolas (1990) "Children's Pre-Concept of Multiplication: Logico-Physical Abstraction" i Booker et al (eds) "Proceedings of the Fourteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education", Vol III, 289-296, Mexico.

Nesher, Pearla & Kilpatrick, Jeremy (eds) (1990) "Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education", Cambridge University Press, Cambridge. Udgivet i serien "ICMI Study Series".

Niss, M. & Blum, W. & Huntley, I. (eds) (1991) "Teaching of Mathematical Modelling and Applications", Ellis Horwood, New York.

Nissen, Gunhild & Bjørneboe, Jens (eds) (1990) "Matematikundervisning og Demokrati", Statens Humanistiske Forskningsråd, Initiativet vedrørende Matematikundervisning, RUC.

Noss, R. et al (eds) (1990) "Proceedings of the First International Conference on Political Dimensions of Mathematics Education: Action & Critique", University of London.

Olivier, Alwyn & Murray, H. & Human, P. (1990) "Building on young children's Informal Arithmetical Knowledge" i Booker et al (eds) "Proceedings for the Fourteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education", Vol III, 297–304, Mexico.

Onslow, Barry (1991) "Linking Reality and Symbolism: a Primary Function of Mathematics Education", For the Learning of Mathematics 11, 1, s.33–36.

Pea, Roy D. (1990/1991) Anmeldelse af Jean Lave's "Cognition in Practice: Mind, Mathematics, and Culture in Everyday Life" i Educational Researchers, May 1990, 28–31, og i Educational Studies in Mathematics 22, 5, October 1991, s.481–490.

Peschek, Werner (1989) "Abstraktion und Verallgemeinerung im mathematischen Lernprozess" i Journal fur Mathematikdidaktik, 10, 3, s.211–285, F.Schöningh, Paderborn.

Piaget, Jean (1973) "Comments on Mathematical Education", s. 79–87 i Howson, A.G. "Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education", Cambridge University Press, London.

Pimm, David (1987) "Speaking Mathematically. Communications in Mathematics Classrooms", Routledge, London.

Pimm, David (ed) (1988) "Mathematics, Teachers and Children", London, Hodder and Stoughton & the Open University.

Pimm, David (1988) "Mathematical Metaphor", For the Learning of Mathematics" 8, 1, s.30–33.

Pimm, David (1991) "Book Review" om Walkerdine, V. "The Mastery of Reason", Educational Studies in Mathematics 22, s.391–405.

Polya, George (1990) "How to solve it. A new aspect of Mathematical Method", Penguin Books, London. Oprindelig udgivet 1945 på Princeton University Press.

Porteous, Keith (1990) "What do children really believe ?", Educational Studies in Mathematics 21, s.589–598.

Putnam, Ralph T & Lampert, Magdalene & Peterson, Penelope L. (1990) "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools", Review of Research in Education 16, s.57–149.

Reed, H.J. & Lave, Jean (1981) "Arithmetic as a tool for investigating relations between culture and cognition", i Casson, R.W. (ed) "Language, Culture and Cognition: Anthropological Perspectives". New York, Macmillan.

Resnick, Lauren B. & Ford, Wendy, W. (1981) "The Psychology of Mathematics for Instruction", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Resnick, Lauren B. (1983) "A Developmental Theory of Number Understanding" in Ginsburg, H.P.(ed.) 'The Development of Mathematical Thinking', Academic Press, London.

Resnick, Lauren B. & Cauzinelle-Marmèche, Evelyne & Mathieu, Jacques (1987) "Understanding Algebra" in Sloboda, John A. & Rogers, Don "Cognitive Processes in Mathematics", Oxford University Press, New York.

Resnick, Lauren B. (1990) "From Protoquantities to Number Sense" i Booker et al (eds) "Proceedings for the Fourteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education", Vol III, 305–311. Mexico.

Ricoeur (1971/1979) her fra s.61 i Salner, Marcia (1989) "Validity in Human Science Research" s.47–71 i Kvale, Steiner (ed) (1989) "Issues of Validity in Qualitative Research", Studentlitteratur, Lund.

Riggins, Stephen H. (ed) (1990) "Beyond Goffman. Studies on Communication, Institution, and Social Interaction", Mouton de Gruyter, Berlin.

Rogoff, Barbara & Lave, Jean (eds) (1984) "Everyday Cognition: its development in social context", Cambridge, MA: Harvard University Press.

Romberg, Thomas A. & Carpenter, Thomas P. (1986) "Research on Teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry", s.850–873 i Wittrock (ed) "Handbook of Research on Teaching (tredie udgave), Macmillian, New York.

Rotman, Brian (1987) "Signifying Nothing. The semiotics of Zero", Macmillan Press, London.

Rotman, Brian (1988) "Towards a semiotics of mathematics", Semiotica 72, 1/2, s.1–35.

Salner, Marcia (1989) "Validity in Human Science Research", s. 47–71 i Kvale, Steinar (ed) "Issues of Validity in Qualitative Research", Studentlitteratur, Lund.

Saxe, Geoffrey B. (1982) "Developing Forms of Arithmetic Operations Among the Oksapmin of Papua New Quinea", Developmental Psychology, 18, 4, s.583–594.

Saxe, Geoffrey B. (1991) "Emergent Goals in Everyday Practices: Studies in Children's Mathematics", Furinghetti, F. (ed) "Proceedings for the Fifteenth Psychology of Mathematics Education Conference", vol III, s. 230–237, Asissi.

Schoenfeld, Alan H. (1985) "Mathematical Problem Solving", San Diego, Academic Press.

Schoenfeld, Alan H. (ed) (1987) "Cognitive Science and Mathematics Education", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Schoenfeld, Alan H (1987) "Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview, s.1–32, i Schoenfeld, Alan H. (ed) "Cognitive Science and Mathematics Education", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Schoenfeld, Alan H. (1987) "What's all the fuss about metacognition ?" i Schoenfeld, Alan H. (ed) "Cognitive Science and Mathematics Education", s.189–216, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, Alan H. (1988) "When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disaster of "Well-Taught" Mathematical Courses", Educational Psychologist 23, 2, s.145–166.

Schoenfeld, Alan H. (1989) "Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior", Journal for Research in Mathematics Education 20, 4, s.338–355.

Scott-Hodgetts, Rosalinde (1988) "Why should teachers be interested in research in mathematics education ?", 263–272 i Pimm, David (ed) "Mathematics, Teachers and Children", London, Hodder and Stoughton & The Open University.

Seeger, Falk (1990) "Observations on the "reversal error" in algebra tasks" i Booker et al (eds) "Proceedings for the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference", vol II, s. 141–148, Mexico.

Seeger; Falk (1990) "Die Analyse von Interaktion und Wissen im Mathematik-Unterricht und die Grenzen der Lehrbarkeit", Journal für Mathematik-Didaktik, 2, s.129–158.

Shulman, Lee S. (1985) "On Teaching Problem Solving and Solving the Problems of Teaching", s. 439–450 i Silver, Edward A. (ed) " Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives", Lawrence Erlbaum Associates, Broadway.

Silver, Edward A. (ed) (1985) "Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives", Lawrence Erlbaum Associates, Broadway.

Silver, Edward A. (1986) "Using Conceptual and Procedural Knowledge: A Focus on Relationships", s. 181–198 i Hiebert, James (ed) "Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Singley, Mark K. & Anderson, John R. (1989) "The Transfer of Cognitive Skill", Harvard University Press, Cambridge.

Skemp, Richard R. (1971) "The Psychology of Learning Mathematics", Harmondsworth, Penguin.

Skemp, Richard R. (1982) (ed) "Understanding the Symbolism of Mathematics", særnummer af Visible Lanquage, 3, s.205–302.

Skemp, Richard R. (1982) "Communicating Mathematics: Surface Structures and Deep Structures", s.281–288 i Skemp, Richard R. (ed) "Understanding the Symbolism of Mathematics", særnummer af Visible Lanquage, 3, s.205–302.

Skemp, Richard R. (1989) "Mathematics in the Primary School", London, Routledge.

Skovsmose, Ole (1984) "Kritik - undervisning og matematik", DLH-Forskningsserien.

Skovsmose, Ole (1987) "Initiativområder inden for matematikkens didaktik", AUC, Ålborg.

Sloboda, John A. & Rogers, Don (eds) (1987) "Cognitive Processes in Mathematics", Oxford University Press, New York.

Snyder, Benson R. (1970) "The Hidden Curriculum", The MIT Press, Cambridge, Mass.

Sowder, Judith Threadgill (1989) "Affective Factors and Computational Estimation Ability", s.177–191 i McLeod, Douglas B. & Adams, Verna M. (eds) "Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective", Springer Verlag, New York.

Steinbring, Heinz (1988) "*"Eigentlich ist das nichts Neues für Euch !"* – Oder: Lässt sich mathematisches Wissen immer auf bekannte Fakten zurückführen ?", i MU – Der Mathematichunterricht 34, 2, s.30–43.

Steinbring, Heinz (1989) "Routine and Meaning in the Mathematics Classroom", For the Learning of Mathematics 9, 1, s.24–33.

Steiner, Hans-Georg (1984) "Theory of Mathematics Education", s.16–32 i Occasional Paper 54, IDM, Bielefeld, og (1985) i For the Learning of Mathematics 5, 2, s.11–17.

Sternberg, Robert J. (1990) "Metaphors of Mind, Conceptions of the Nature of Intelligence", Cambridge, Cambridge University Press.

Sternberg, Robert J. & Wagner, Richard K. (1986) (eds) "Practical Intelligence", Cambridge University Press.

Stiegler, James W. & Perry, Michelle (1988) "Mathematics Learning in Japanese, Chinese, and American Classrooms" s.27–54 i temanummeret "Children's Mathematics", New Directions for Child Development, nr.41.

Swanson, David & Schwartz, Robert & Ginsburg, Herbert & Kossan, Nancy (1981) "The Clinical Interview: Validity, Reliability and Diagnosis", For the Learning of Mathematics 2, 2, s.31–38.

Tall, David (1992) "Procepts in Advanced Mathematical Thinking" i "Advanced Mathematical Thinking Book" med bidrag fra 16 medlemmer af PME-arbejdsgruppen "Advanced Mathematical Thinking", Reidel.

Tingleff, Kirsten (ed) "Kvinder og matematik", Konference 21–22 september, København.

Tobias, Sheila (1990) "They're Not Dumb, They're Different", Research Corporation, Tucson, Arizona.

van den Brink, Jan (1990) "Classroom Research", For the Learning of Mathematics 10, 1, s.35–38.

Vergnaud, Gerard (1983) "Multiplicative Structures", s.127–174 i Lesh, Richard & Landau, Marsha "Acquisition of Mathematics Concepts and Processes", Academic Press, New York, i serien "Developmental Psychology Series".

Vinner, Shlomo & Dreyfus, Tommy (1989) "Images and Definitions for the Concept of Function", Journal for Research in Mathematics Education, 20, 4, s.356–366.

Vygotsky, Lev S. (1962) "Thought and Language" , Cambridge, MA: MIT Press, revideret udgave med forord af J.S.Bruner, originaludgave Moskva og Leningrad 1934.

Wagner, Richard K. & Sternberg, Robert B. (1986) "Tacit knowledge and intelligence in the everyday world", s.51–83 i Sternberg & Wagner (eds) "Practical Intelligence", Cambridge University Press.

Walkerdine, Valerie (1987) "Girls and Mathematics: Summary of our Recent Findings", Contributions - GASAT 4, s.79–88.

Walkerdine, Valerie (1988) "The Mastery of Reason. Cognitive Development and the Production of Rationality", Routledge, Cambridge.

Walkerdine, Valerie & The Girls and Mathematics Unit (1989) "Counting girls out", Virago Press, London.

Walkerdine, Valerie (1990) "Schoolgirl Fictions", Verso, New York.

Walkerdine, Valerie (1990) "Difference, Cognition and Mathematics Education", plenumforedrag ved Psychology of Mathematics Education Conference, Mexico.

Weinert, Franz E. & Kluwe, Rainer H. (eds) (1987) "Metacognition, Motivation, and Understanding", Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, i serien "The Psychology of Education and Instruction".

Werner, Tage & Davis, Robert B.(1986) "Observing students at work" s.205–241 i Christiansen, B. & Howson, A.G. & Otte, M. (eds) "Perspectives on Mathematics Education. Papers Submitted by Members of the Bacomet Group", Dordrecht, Reidel, i serien "Mathematics Education Library".

Werner, Tage (1991) "Observing Conceptual Complexity", s. 133–143 i Bishop, A.J. & Mellin-Olsen, S. & Dormolen, J. v. (eds) "Mathematical Knowledge: its growth through teaching", Kluwer, Dordrecht, i serien "mathematics Education Library".

Wertheimer, Max (1959) "Productive Thinking", Harper & Row, New York.

Wheeler, David (1988) "Investigating investigations" s.303–305 i Pimm, David (ed) "Mathematics, Teachers and Children", London, Hodder and Stoughton & the Open University.

Williams, Steven R. (1991) "Models of Limit Held by College Calculus Students", Journal for Research in Mathematics Education 22, 3, s.219–236.

Wistedt, Inger (1990) "Vardagskunskaper och skolmatematik. Några utgångspunkter för en empirisk studie", Stockholms Universitet, Pedagogiska Institutionen, Stockholm.

Wistedt, Inger (in press) "Att vardagsanknyta skolmatematiken" i "Matematikundervisning og demokrati II", Nordisk Forskersymposium 16–18 juni 1991, Gilleleje.

Wistedt, Inger (1991) "Att se matematiken i vardagen – en fallstudie", Stockholms Universitet, Pedagogiska Institutionen, Stockholm.

Zaslavsky, Claudia (1973) "Africa Counts. Number and Pattern in African Culture", Prindle, Weber & Schmidt, Boston.

Ziehe, Thomas (1988) "Wie man es im Kopf aushält. Strukturen des Alltagswissens Jugendlicher", Sociolognyt no 109, Århus.

Ziehe, Thomas (1989) "Ambivalenser og mangfoldighed: en artikelsamling om ungdom, skole, æstetik og kultur", Politisk Revy, København.

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektråpport af: Anne Jensen, Lena Linden-skov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "GREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFVLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie projekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA. ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTE
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Viščor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSES-TEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."

Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach

Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"

Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"

- en ny frekvensbaseret målemetode.

Fysikspeciale af Jan Vedde

Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"

redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"

by: Petr Viščor

151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

Vejleder: Mogens Niss

152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski

153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"

Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale

Af: Hans Hedal

Vejleder: Ib Thiersen

154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"

By: Jeppe Dyre

155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"

by: Michael Pedersen

156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

157/88 " STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."

by: Michael Pedersen

158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"

by: Jeppe Dyre

159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"

by: Bent Sørensen

160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"

by: Jens Gravesen

161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS:

Dirichlet feedback control problems"

by: Michael Pedersen

162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"

AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich , Mette Vedelsby

163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen

165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"

by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynligheds-regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS" Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christeansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og
Peder Voetmann Christiansen

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 " GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 " AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION

af: Michael Pedersen

176/89 " A MAXIUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"

af : Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen

179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"

by: Jeppe Dyre

183/89 "MATEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction

by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og
MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)

184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmefylde af en underafkølet væske ved glasovergangen"

af: Tage Emil Christensen

185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"

Et matematisk projekt

af: Steen Grode og Thomas Jessen

Vejleder: Jacob Jacobsen

186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"

redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen

187/90 "RSA - et kryptografisk system"

af: Annemette Sofie Olufsen, Lars Frellesen
og Ole Møller Nielsen

Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk

188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"

by: Jeppe Dyre

189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER

af: Finn Langberg

190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"

by: Jeppe Dyre

191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C*-ALGEBRAS"

by: Iain Raeburn and Dana P. Williams

192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases
and
SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"

by: Viggo Andreasen

193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"

by: Stig Andur Pedersen

194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Projektrapport af : Frank Olsen

194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport

Projektrapport af: Frank Olsen

195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.

Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:

Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"

- en projektrapport om kaos' paradigmatiske status i fysikken.

af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL

af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"
Speciale

af: Frank Olsen

199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling
af: Jens Højgaard Jensen

200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"
Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.
af: Mogens Niss

201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraktion"

af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Petr Viščor, Ole Bakander

202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.

af: Peder Voetmann Christiansen

203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990

afløser tekst 170/88

204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"
et Breddemodul Fysik Projekt
af: Thomas Jessen
Vejleder: Petr Viščor

205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"
by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)

206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"
Eksperimentelt Fysikspeciale
af: Jeanne Linda Mortensen
og Annette Post Nielsen
Vejleder: Petr Viščor

207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"

by: Jeppe C. Dyre

209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.

af: Helge Kragh

210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Seperable Subalgebras with Unitality Condition.

by: Lars Kadison

211/91 "I SANDHEDENS TJENESTE"

- historien bag teorien for de komplekse tal.

af: Lise Arleth, Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Kamma Tulinius.

Vejledere: Jesper Larsen og Bernhelm Booss-Bavnbek

212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"

by: Lars Kadison

213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

214|91 "Hælløj i æteren" - om elektromagnetisme. Oplæg til undervisningsmateriale i gymnasiet.

Af: Nils Kruse, Peter Gastrup, Kristian Hoppe, Jeppe Guldager

Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal

215|91 "Physics and Technology of Metal-Insulator-Metal thin film structures used as planar electron emitters

by: A.Delong, M.Drsticka, K.Hladil, V.Kolarik, F.Olsen, P.Pavelka and Petr Viscor.

216|91 "Kvantemekanik på PC'eren"

af: Thomas Jessen

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT

by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium

af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard

Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"

by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"

En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"

af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård

Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS

- Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Ania Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for
den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93