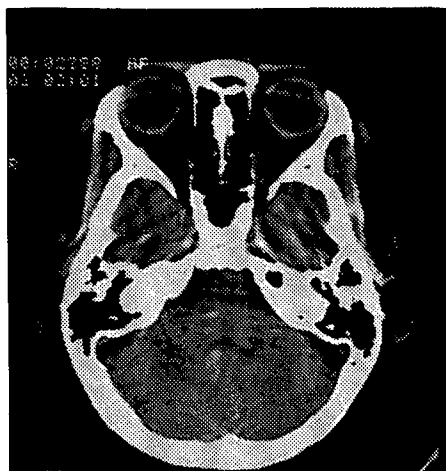


TEKST NR 244

1993

**RADONTRANSFORMATIONEN
og dens anvendelse
i CT-scanning**



**Projektrapport af
Trine Andreasen, Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og Christine Iversen**

TEKSTER fra

IMFUFA

ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES
FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260, 4000 Roskilde

RADONTRANSFORMATIONEN og dens anvendelse i CT-scanning

Projektrapport af: Trine Andreassen, Tine Guldager Christiansen, Nina Skov Hansen, Christine Iversen

Vejledere: Gestur Olafsson og Jesper Larsen

IMFUFA tekst nr. 244/93

89 sider

ISSN 0106-6242

Abstract

Radontransformationen transformerer en funktion over i de til funktionen hørende hyperplaner. Teorien stammer fra 1917 og er navngivet efter Johann Radon, som også udviklede en inversionsformel til transformationen. Denne inversionsformel anvendes bl.a. i CT-scanning, hvor målingerne opfattes som Radontransformationen af en densitetsfunktion, der beskriver et tværsnit af kroppen. Forudsætningen for denne opfattelse er en række modelovervejelser om røntgenstrålernes og tværsnittets beskaffenhed. Eftersom inversionsformlen indeholder en singularitet, og teorien kræver, at man i praksis har uendelig mange målinger, benyttes formelen ikke direkte. I stedet anvendes en algoritme, der approksimerer inversionsformlens singulære led og tager højde for det endelige antal målinger, der er til rådighed.

RUC, februar 1993.

Forord

Denne projektrapport er skrevet med henblik på at opfylde kravene til 2. modul på matematikoverbygningen på Roskilde Universitetscenter. Vi har valgt at undersøge de modelantagelser, der ligger til grund for at kunne anvende Radontransformationen i CT-scanning.

Undervejs i projektforsløbet har vi besøgt Scanningsafdelingerne på Herlev og Roskilde Amtssygehuse samt Rigshospitalet i København. Vi vil derfor gerne takke overlægerne Sven Dorph, Helle Lindewald og Karen Damgaard, samt afdelingernes øvrige personale for deres velvillighed.

Vejledning til dette projekt er kompetent og tålmodigt ydet af Gestur Olafsson og Jesper Larsen.

Trine Andreasen,
Tine Guldager Christiansen,
Nina Skov Hansen og
Christine Iversen

Roskilde, december 1992.

Forsidebillede: CT-billede af kranium. [Scannerafsnittet, Roskilde Amtssygehus, 1992].

Indhold

Indledning	5
1 CT-scanning	9
1.1 Overordnede principper ved CT-scanning	10
1.2 Udvikling og teknisk beskrivelse	16
1.3 Scanningsprocedure	21
1.4 Opsamling	26
2 Modelopbygning	27
2.1 Tværsnittet	28
2.2 Røntgenlys	28
2.3 Absorption	29
2.4 Direkte og inverse problemer	33
2.5 Opsamling	33
3 Radontransformationen	35
3.1 Definition	36
3.2 Basale egenskaber	46
3.3 Fouriertransformationen	50
3.4 Inversionsformlen	53
3.5 Opsamling	57

4	Rekonstruktionsalgoritme	59
4.1	Analyse af inversionsformlen	60
4.2	Approksimationer	65
4.3	Praksis	68
4.4	Opsamling	72
5	Teori og praksis	73
5.1	Placering af fejl	76
A	Fouriertransformation	81
A.1	Fourierkoefficienter	81
A.2	Fourierintegralet	84
	Litteraturliste	87

Indledning

Mange mennesker har været i berøring med scanning uden dog at have tænkt over, hvordan en scanner virker. Vi er i dag så omgivet af teknik, at det er de færreste, der ofrer megen energi på at finde ud af, hvordan tingene fungerer. Men har man set et billede fra en scanning, må det vække undren, for hvordan fotograferer man et tværsnit af kroppen uden at skære i den? For at forstå dette må man først ændre spørgsmålet. Et scanningsbillede er slet ikke et fotografi, men derimod et billede, som en computer har konstrueret ud fra en række målinger af kroppens densitet (massetæthed). Vi har valgt at beskæftige os med CT-scanning¹, hvor målingerne er foretaget ved hjælp af røntgenstråler, der sendes gennem kroppen fra forskellige vinkler. Man måler absorptionen af røntgenstrålerne, hvilket kan fortælle noget om kroppens densitet, i det område røntgenstrålen har passeret.

Det er her, matematikken kommer ind i billedet. Vi vil i denne rapport give det matematiske grundlag for, at man ved en computers hjælp kan komme fra nogle målinger, af hvordan røntgenstråler absorberes af kroppen, til et billede af kroppens tværsnit. Det matematiske grundlag er en teori fra 1917, Radontransformationen, opkaldt efter Johann Radon (1887-1956), der udviklede denne teori.

Hvis man beskriver kroppens densitet på forskellige steder ved en funktion, siger denne teori, at funktionen kan omskrives således, at den kan sammenlignes med de målinger, man har af røntgenstrålernes absorption. Udtrykt matematisk er det, man gør i den 2-dimensionale Radontransformation, at opskrive en skalarfunktion af vektorvariable ved dens linieintegraler. At omskrive en funktion sådan er der matematisk ingen ben i, den afgørende del af teorien ligger i at kunne vende tilbage til den oprindelige funktion ud fra omskrivningen. Hvis man kender alle funktionens linieintegraler, kan funktionen rekonstrueres vha. den inversionsformel, som Radon udviklede.

Det er denne inversionsformel, som computeren bruger til at finde frem til billedet af kroppen. Selve billedet er derfor ikke et fotografi, men en afbildning af en funktion, der repræsenterer kroppens densitet på forskellige steder.

Selve Radontransformationen blev ikke udviklet til brug i CT-scanning. Problemet med at finde funktionen, når man kender Radontransformationen af den (i vores tilfælde densitetsfunktionen), blev løst af Radon i 1917. Dog ved man, at den hollandske fysiker H. Lorentz kendte den 3-dimensionale udgave af inversionsformlen allerede omkring århundredeskiftet. Generelt

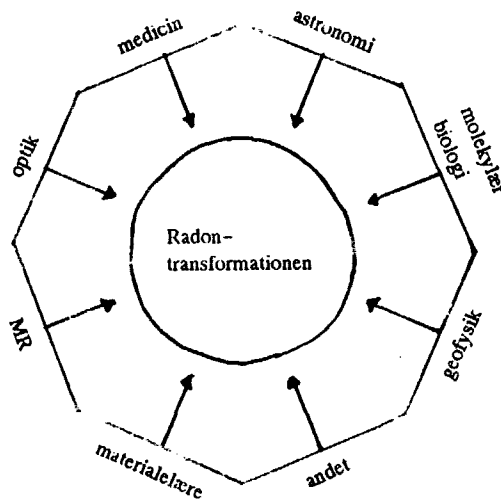
¹CT er en forkortelse for Computerized Tomography. Tomos er græsk og betyder snit.

gælder det, at inversionsformlen er enklere for ulige dimensioner end for lige. Radon selv beskæftigede sig mest med 2 og 3 dimensioner, dvs. rekonstruktion af en funktion af 2 eller 3 variable ud fra de til funktionen svarende linie- eller fladeintegraler. Hvad Radon udviklede til 2 og 3 dimensioner, blev senere udvidet til at omfatte n dimensioner.

Bemærkelsesværdigt er det, at teorien blev udviklet uden noget kendskab til de kommende anvendelsesområder. De første anvendelser af Radontransformationen var af ren matematisk art, såsom løsning af partielle differentilligninger. I 1940 skrev Birkhoff en artikel om billedrekonstruktion udelukkende ved brug af rette linier. Dette er nok det første eksempel på billedrekonstruktion ud fra projektioner. Birkhoff anvendte dog ikke selve Radontransformationen, men derimod den nærtbeslægtede Fouriertransformation.

Det er lidt uklart, hvem der først opdagede sammenhængen mellem Radon- og Fouriertransformationen. Sandsynligvis har den været kendt af flere, inden Bracewell i 1956 fastslog sammenhængen, og det uden at han havde kendskab til Radons artikel.

Bracewell's "genopdagelse" af Radontransformationen er ingen undtagelse. Det gælder for langt de fleste af Radontransformationens anvendelsesområder, se figur 0.1, at man i disses tidlige stadier ikke kendte Radons resultater.



Figur 0.1: Radontransformationen er nært forbundet til rekonstruktionsproblemer i mange anvendelsesområder. [Deans, 1983, s. 2].

I 1964 udvikledes den første rekonstruktionsalgoritme, der byggede på Radons resultater, men det var først i 1972-73, at amerikanske og sovjetiske

forskere fastslog, at Radons arbejde var fundamentalt i forbindelse med billedrekonstruktion ud fra projektioner.

Ved at bruge Radontransformationen i CT-scanning sammenkæder man nogle fysiske målinger med en matematisk teori, hvilket forudsætter, at der undervejs er gjort en del antagelser. Man har opbygget en model af virkeligheden, en idealiseret verden, for at få den til at hænge sammen med den matematiske teori. Derved bygger selve rekonstruktionen på en række antagelser og tilnærmelser. Dette må der tages forbehold for, når billederne anvendes til diagnosticering. Vi forsøger i rapporten at opstille den række af antagelser, der er gjort, før man kan sammenkæde måleresultater og teori, samt de metoder man anvender for at kunne benytte teorien i forbindelse med scanning.

CT-scanning har været anvendt på sygehuse i forbindelse med diagnosticering gennem de sidste 20 år. Derfor har man et solidt erfaringsbaseret grundlag at arbejde ud fra. Det kræver stor rutine at betragte billederne og kunne genkende de fejl, der kan være på dem. Tolkningen af billederne bygger derfor i høj grad på brugernes kendskab til usikkerheden af dem. Vi ønsker i denne rapport at betragte den matematiske teori's anvendelse ved at diskutere de teoretiske modelovervejelser i sammenhæng med den praktiske situation.

Litteratur benyttet til dette afsnit:

Deans, The Radon Transform and Some of its Applications, 1983, s. 1-5.

Birkhoff, Collected Mathematical Papers, 1968, s. 805-838.

Brooks & Giovanni, Principles of Computer Assisted Tomography in Radiographic and Radioisotopic Imaging, 1976, s. 690-696.

Målgruppe

Rapporten indeholder to matematisk tunge kapitler (kap. 3 og 4), der kræver et grundlæggende kendskab til flerdimensional analyse. Derudover fordrer begge kapitler kendskab til komplekse tal og en smule lineær algebra.

Rapportens øvrige tre kapitler (kap. 1, 2 og 5) kræver ingen særlig matematisk baggrund. De kan læses uafhængigt af de øvrige kapitler, idet hovedpunkterne i de andre kapitler opsamles i starten af kapitel 5. Kapitlerne henvender sig specielt til folk, der er interesserede i at få en forståelse for fundamentet ved CT-scanning. Det kunne f.eks. være folk, der beskæftiger sig med CT-scanning til daglig og som ønsker at få en bedre forståelse for,

hvordan billederne rent faktisk konstrueres. Et dybere kendskab til selve rekonstruktionsprincippet ved CT-scanning kan give en vis forklaring på nogle af de typiske fejl, der optræder i billederne. Det skal dog pointeres, at rapporten ikke giver fuldstændige matematiske forklaringer på de forskellige fejl. Den giver en principiel forklaring af vejen fra måledata til det færdige billede og et bud på, hvilke steder på vejen, der giver anledning til de mest kendte fejl.

Emneafgrænsning

Gennemgangen af Radontransformationen som matematisk teori er styret af, at det ikke er den alene, som er det centrale, men dens samspil med praksis. Dette har medført, at alle transformationer foregår i euklidisk rum og hovedsageligt kun i 2 dimensioner. Vi gennemgår endvidere kun de grundlæggende egenskaber ved Radontransformationen, som er nødvendige i forbindelse med anvendelsesdelen. Det vil mere præcist sige de egenskaber, der benyttes i behandlingen af inversionsformlen.

Beskrivelsen af CT-scanning er forholdsvis omfattende. Det er dog kun de led, der er relevante for placeringen af Radontransformationen, som er beskrevet i detaljer. Vi har valgt at lave en forholdsvis udførlig beskrivelse af proceduren ved CT-scanning for at illustrere de mange lag, der så at sige dækker det matematiske fundament. Beskrivelserne af de mange tekniske og fysiske detaljer er dog kun udførlige set fra et matematisk synspunkt. Det skal forstås på den måde, at vi nok forklarer mange sider ved CT-scanning, men at de langt fra er fyldestgørende set fra f.eks. en ingeniør eller fysikers synspunkt.

Problemformulering

Hvordan benyttes Radontransformationen i forbindelse med CT-scanning, - og hvilke modelantagelser ligger bag?

Formål

Vi ønsker at klarlægge, hvordan Radontransformationen udnyttes ved CT-scanning. Gennem dette vil vi opnå en grundlæggende forståelse af Radontransformationen både som matematisk teori og som et eksempel på matematik anvendt i praksis.

Kapitel 1

CT-scanning

Dette kapitel vil give en generel beskrivelse af, hvad CT-scanning er. Først vil vi forklare de overordnede principper ved CT-scanningen, dvs. hvad det er for målinger, der foretages, og hvordan disse måledata kan omdannes til et billede. Næste niveau er, hvordan scannerne teknisk er opbygget, og hvordan de har udviklet sig, siden den første scanner kom frem. Til sidst beskrives selve arbejdsgangen/proceduren ved CT-scanning.

Ved CT-scanning sender man røntgenstråler fra mange forskellige vinkler igennem den del af et legeme, man ønsker at få et billede af. Man måler så hvor meget, der bliver absorberet af hver af disse stråler. For at få omsat disse målinger til et billede, skal man bruge en rekonstruktionsmetode, og det er her Radontransformationen kommer ind i billedet. Derfor er det denne overgang fra måledata til billede, der har vores særlige interesse. Der er forskellige typer af rekonstruktionsalgoritmer¹; vi vil beskrive hovedtrækkene i et par af dem.

Der findes andre typer af scanning end CT-scanning. MR-scanning² og ultralydsscanning bygger grundlæggende på den samme rekonstruktionsmetode som CT-scanning, men vi vil ikke komme nærmere ind på disse typer scanning, fordi de teknisk set er meget forskellige fra CT-scanning.

Den tekniske beskrivelse tager udgangspunkt i opbygningen af de første scannere fra starten af 1970'erne. Beskrivelsen af de nyere scannere vil være mere omfattende, da det er dem, vi vil referere til gennem resten af projektrapporten.

¹En algoritme er den regneprocedure computeren skal udføre.

²MR står for Magnetisk Resonans.

I beskrivelsen af proceduren lægger vi vægt på at tydeliggøre, hvad det er for parametre, der indstilles før scanning, hvilke af disse der har indflydelse på måledata, og hvilke der kun påvirker billedkvaliteten.

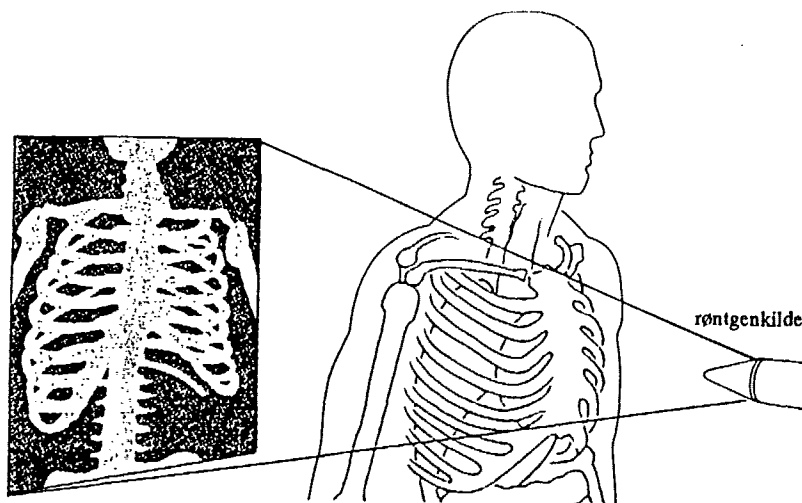
Kapitlet har flere pointer; at afdække hvor Radontransformationen indgår, hvordan teknikken kan overskygge matematikken og endelig at synliggøre, hvad det er, der modelleres i kapitel 2.

1.1 Overordnede principper ved CT-scanning

CT-scanning giver ligesom røntgenfotografering billeder af de indre strukturer i et legeme. Begge teknikker udnytter den information, man kan få ud af at sende røntgenstråler igennem et legeme, men i CT-scanning kan man fokusere på et bestemt tværsnit af legemet og kun få et billede af dette. Vi starter dette afsnit med en kort gennemgang af røntgenfotografering.

1.1.1 Traditionel røntgenfotografering

Røntgenstråler blev opdaget af den tyske fysiker Wilhelm Konrad Røntgen (1845-1923) i 1895. Kort tid efter blev de første røntgenbilleder taget i laboratorier. Selve teknikken er senere blevet forbedret betydeligt, men de grundlæggende principper er stadig de samme. Se figur 1.1.



Figur 1.1: Traditionel røntgenfotografering. [Gordon et al., 1975, s. 58].

Princippet er at lade et røntgenstrålebundt udbrede sig fra en kilde og passere gennem det objekt, der skal undersøges. Den strålemængde, som ikke er blevet absorberet af objektet, bliver derefter optaget på en fotografisk film, som er placeret på den modsatte side af objektet. Røntgenstrålerne passerer på denne måde gennem et 3-dimensionalt område og rekonstruerer dette på en 2-dimensional flade.

En enkelt stråle i bundtet vil gennemtrænge vævstyper med forskellig densitet, før den optages på filmen. Strålerne har fra starten den samme intensitet. Hvor meget, der absorberes af den enkelte stråle, afhænger af hvilken densitet, der er i det væv, den gennemtrænger. I områder med høj densitet vil der absorberes meget af strålen, og intensiteten vil derfor falde drastisk. Tilsvarende vil intensiteten falde mindre, hvis strålen passerer områder med lav densitet. Selv om det, der egentlig måles, er røntgenstrålernes intensitet, er det et udtryk for densiteten af det væv, som røntgenstrålen har passeret. Lyse områder på billedet fremkommer de steder, hvor der er absorberet meget, mens de mørke steder er tegn på lille absorption. Hvor meget strålens intensitet ialt vil falde, afhænger af alle de vævstyper den kommer igennem. Det resulterende billede vil således i hvert enkelt punkt være et udtryk for den gennemsnitlige densitet i det område, strålen har passeret.

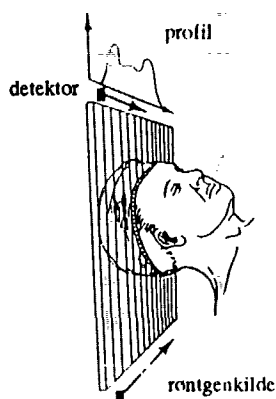
Det svage punkt er, at på røntgenbilledet vil billedet af de forskellige vævstyper overlape hinanden. Derfor er det kun muligt at skelne objekter med meget store densitetsforskelle, som f.eks. knogler fra blødt væv. Dette er røntgenbilleder til gengæld også gode til. Røntgenbilleder bruges i stor stil til f.eks. at undersøge knoglebrud og til tandundersøgelser.

Sammenfattende kan det siges, at røntgenbilleder er uanvendelige til at skelne mellem forskellige typer blødt væv og til at give præcise densitetsoplysninger, men er udmærkede til at give kvalitative oplysninger om store densitetsforskelle.

1.1.2 CT-scanning

I mange tilfælde er det meget væsentligt at kunne skelne mellem forskellige typer af blødt væv. Dette gælder f.eks. når man skal konstatere kræftsvulster, og det er et af de områder, hvor CT-scanning er meget anvendt. Med CT-scanning kan man fremstille billeder af et bestemt tværsnit i legemet. Dette gør man ved kun at gennemstråle det snit, der skal rekonstrueres, og billedet bliver derfor ikke forstyrret af vævet udenfor dette snit.

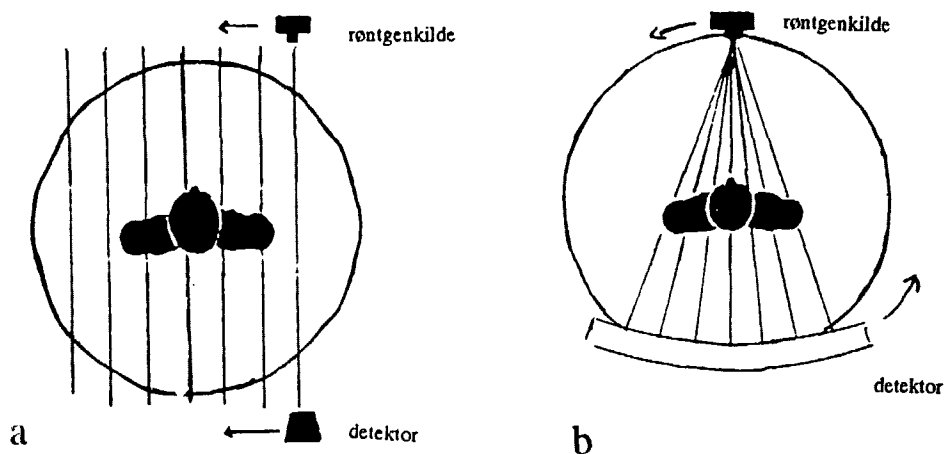
Man vil dog altid scanne en hel række snit ved siden af hinanden, og ud fra disse billeder vil man kunne få et 3-dimensionalt indtryk af de forskellige organers placering i kroppen.



Figur 1.2: Ved en CT-scanning rekonstrueres et tværsnit. [Ledley, 1976, s. 240].

CT-scanning består i at gennemstråle det udvalgte snit fra mange forskellige retninger, og måle de enkelte strålers intensitet vha. en detektor. Man bruger altså ikke en fotografisk film, som man gør det i røntgenfotografering.

I de første scannere benyttede man parallelle stråler, men det er man gået bort fra til fordel for at sende strålerne ud i vifter. Se figur 1.3.



Figur 1.3: a) Parallelskanning og b) viftescanning.

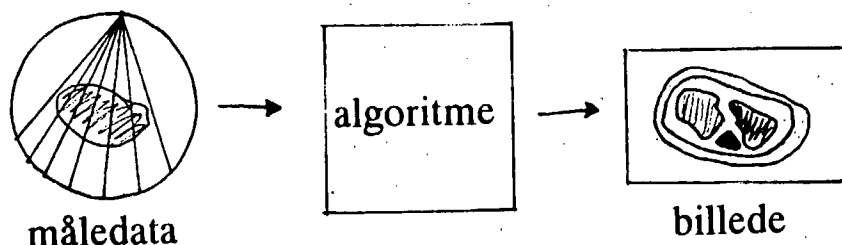
Ved parallelle stråler placeres røntgenkilden og detektoren lige overfor hinanden i en bestemt vinkel i forhold til objektet. Derefter parallelforskyder man så kilde og detektor, sådan at man får bestrålet og målt hele objektet fra den vinkel. På den måde får man et profil af objektet, idet profilet består

af samtlige målinger fra én vinkel. Derefter drejes kilden og detektoren en smule, sådan at man får et nyt profil fra en anden vinkel. Dette gentages, til man er nået hele vejen rundt. Måledataene består således af et profil fra hver vinkel.

Vifteformede strålebundter nedsætter scanningstiden væsentligt. Målingerne fra hver vinkel foretages på en gang ved at lade et vifteformet strålebundt, der dækker hele snittet, brede sig ud fra en kilde. I stedet for en enkelt detektor benyttes et større antal, der kan optage stråler fra hele viften. Røntgenkilden drejes igen for at foretage et nyt sæt målinger, som vil udgøre et "vifteprofil" af objektet. Det er ikke noget rigtigt profil, da strålerne som sagt ikke er parallelle. Hvor mange målinger, der er i hvert "profil", er afhængig af antallet af detektorer.

Ligesom i røntgenfotografering, er ændringen i strålernes intensitet udgangspunktet for at bestemme, hvordan de indre strukturer ser ud. Ved røntgenfotografering bliver disse målinger direkte omsat til et billede på den fotografiske film, men sådan er det ikke ved CT-scanning. Fra man har målingerne til man får billedet, er der et mellemlid, som foregår i en computer. Punkter i de enkelte profiler vil ligesom punkter på røntgenbilledet fortælle noget om gennemsnitsdensiteten i det område, hvor strålen har passeret. Men i CT-scanning vil det endelige billede blive rekonstrueret ud fra en "sammenligning" af profilerne fra alle de forskellige vinkler. Det er til denne del af scanningen, at rekonstruktionsalgoritmerne og dermed matematikken kommer ind i billedet.

Vejen til et scanningsbillede indeholder på den måde flere led, se figur 1.4.



Figur 1.4: Måledata - algoritme - billede.

1.1.3 Algoritmer

Algoritmerne inddeles i to hovedgrupper; de analytiske og de iterative. I begge grupper benyttes en metode, som kaldes summationsmetoden eller

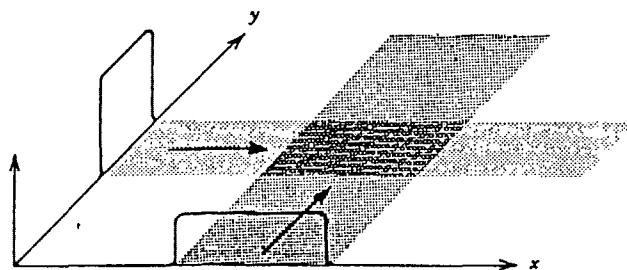
tilbageprojektion. Tilbageprojektion er i sig selv for upræcis til rekonstruktion, men den er et vigtigt led i de andre rekonstruktionsmetoder. Derfor vil vi gennemgå tilbageprojektion særskilt. Det følgende vil være en meget kort gennemgang af princippet i disse metoder, hvor der ikke vil blive lagt særligt vægt på den matematiske del.

Tilbageprojektion

Den groveste metode til rekonstruktion kaldes som sagt tilbageprojektion eller summationsmetoden. I de to betegnelser, tilbageprojektion og summation, ligger de to led i teknikken. Udgangspunktet er at opfatte målingerne som projektioner af objektet fra forskellige vinkler. Første skridt er at tilbageprojicere projektionerne, og det næste skridt er simpelthen for hvert enkelt punkt at lægge de tilbageprojicerede værdier sammen. Hvis man kigger på et bestemt punkt rekonstrueres det groft sagt på følgende måde:

Fra hver vinkel bestemmes den stråle, der har passeret punktet. Målingerne af alle disse stråler, dvs. én måling fra hvert profil, lægges sammen, og der divideres med det samlede antal profiler. Den værdi, man får ud af dette, er den densitet, som punktet tildeles.

Hovedproblemet er, at en simpel figur som et enkelt punkt rekonstrueres som en stjerne - et fænomen som kaldes punktspredning. Hvordan spredningen fremkommer er illustreret på figur 1.5. Fejlen opstår, idet alle punkter, som en bestemt stråle har passeret, får tildelt samme værdi, når målingen af denne stråle tilbageprojiceres.



Figur 1.5: Tilbageprojektion af 2 profiler. [Deans, 1983, s. 132].

Både de iterative og analytiske metoder går ud på at moderere denne summationsmetode, og korrektionen kan foregå enten før eller efter selve tilbageprojektion.

Iterative metoder

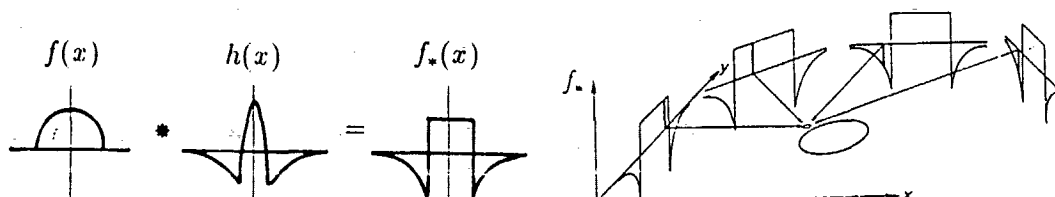
De iterative løsninger er numeriske løsninger, hvor man sammenligner en mere eller mindre tilfældigt valgt udgangsfordeling med måledata. Begyndelsesbilledet kan f.eks. være resultatet af tilbageprojektion. Derefter beregnes hvordan måledataene ville have set ud, hvis objektet havde været identisk med tilbageprojektion. Disse nye data sammenlignes med de faktiske data, og der korrigeres lidt på billedet i forhold til denne sammenligning. Og sådan fortsætter iterationen.

Matematisk vil det kunne vises, at billedet vil konvergere mod en løsning, der stemmer overens med måledata, hvis processen gentages i det uendelige. Processen kan fremskyndes ved at indlægge særlige begrænsninger undervejs. Viden om densiteten af et bestemt væv, f.eks. knogler, kan indføres så snart dets position kan genkendes. Negative værdier kan også rettes til 0. Indførelsen af begrænsninger vil imidlertid ødelægge den matematiske argumentation for at rekonstruktionen vil konvergere mod det rigtige resultat [Gordon et al., 1975, s. 59]. De iterative metoder har ikke noget med Radons inversionsformel at gøre.

Analytiske metoder

Den iterative metode er dejlig enkel at forstå, men desværre er den også meget langsom. Derfor blev den kun anvendt i nogle af de allerførste scannere. De analytiske metoder er væsentlig hurtigere end de iterative, fordi de ikke kræver så mange beregninger, og det er derfor sådanne metoder, der benyttes nu. Der eksisterer mange forskellige metoder, men de bygger alle på matematiske overvejelser om sammenhængen mellem projektioner af en funktion og funktionen selv. I forhold til CT-scanning vil "funktionen" være den densitetsfunktion, der repræsenterer legemets tværsnit, og "projektionerne" er de målinger der foretages ved scanningen. Det er netop denne sammenhæng, som Radontransformationen beskriver. Radons inversionsformel viser hvordan man, hvis man kender alle projektioner, entydigt kan beregne, hvordan den oprindelige funktion må se ud. I praksis har man naturligvis kun endeligt mange målinger.

- 1) Foldningsmetoden er en af de rekonstruktionsalgoritmer, der kan udledes af Radons inversionsformel. Foldningen går ud på at modere profilerne før de tilbageprojiceres for at mindske punktspredningen. Se figur 1.6.
- 2) En anden analytisk metode kan fås ved en sammensætning af Fouriertransformationer, men matematisk vil den også bunde i Radontransformationen.



Figur 1.6: Den oprindelige profil, $f(x)$, modereres med en funktion, $h(x)$. Den foldede funktion, $f_*(x)$, tilbageprojiceres. Bemærk at et punkt placeret uden for det oprindelige objekt modtager både negative og positive bidrag fra profilerne, og derved får værdien 0. [Brooks & Di Chiro, 1976, s. 710].

Den metode, der anvendes i de nyere scannere er foldningsmetoden. Vi vil i kapitel 4 komme med en mere matematisk beskrivelse af metoden.

1.2 Udvikling og teknisk beskrivelse

Vi har valgt at beskrive CT-scannerens udvikling ud fra de forskellige generationer, man traditionelt har opdelt scannerne i. Den tekniske beskrivelse vil være mest udførlig for de nyere scannere, dvs. 3. og 4. generations scannere. De tekniske data vil være en generel sammenfatning af oplysninger om de nyeste CT-scannere i Danmark; nemlig Siemens Somatom Plus-S fra Rigshospitalet og Picker PQ-2000 fra Herlev Amtssygehus. Visse tekniske oplysninger stammer fra en samtale med ingeniør Nils Thyme fra firmaet General Electric.

1.2.1 CT-scannerens udvikling

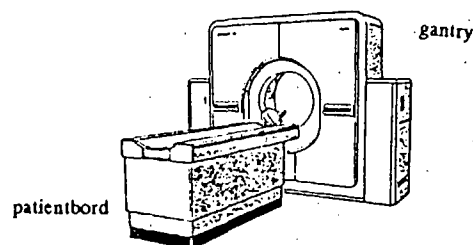
Englænderen G.N. Hounsfield³ var en af pionererne indenfor udviklingen af CT-scanningsteknikken i starten af 1970'erne. De første forsøg, han foretog, blev udført med en gammastråle. Selve scanningen af et enkelt tværsnit

³G.N. Hounsfield modtog i 1979 sammen med A.M. Cormack Nobelprisen i fysiologi og medicin for deres arbejde vedrørende CT-scanning.

tog 9 dage på grund af gammastrålens lave intensitet. Derefter tog det så $2\frac{1}{2}$ time for computeren at rekonstruere billedet. Alligevel var de første billeder opmuntrende. Den enkelte detektor (og der var kun den) optog 28000 målinger. [Hounsfield, 1980, s. 23].

Man gik da over til de kraftigere røntgenstråler, hvilket forkortede scannings-tiden til 9 timer. Denne ændring førte til bedre billeder, men det var stadig et åbent spørgsmål om eventuelle svulster ville kunne registreres. Hidtil havde man kun arbejdet på laboratoriescannere, men udviklingen begyndte nu at tage fart, og i 1972 kunne firmaet EMI - på baggrund af Hounsfields resultater - præsentere den første hjernescanner til klinisk brug. EMI-scanneren var således den prototype man videreudviklede og den er dermed repræsentant for den første generation af scannere. EMI-scanneren benyttede en iterativ rekonstruktionsalgoritme. [Hounsfield, 1980, s. 23].

En CT-scanner består groft sagt af et patientbord og en røntgenkilde med tilhørende detektorer, samt en computer til brug ved lagring og behandling af måledata. Under scanningen køres patientbordet ind i "gantry'et" som indeholder røntgenkilden og detektorerne. Gantry'et kan vippe op til 25-30° til begge sider. Se figur 1.7.



Figur 1.7: Moderne CT-scanner.

Traditionelt har man inddelt scannerne i 4 generationer.

Scannerne i 1. generation var parallelskannere, som opererede med to detektorer og to røntgenstråler. Man scannede to forskellige snit på samme tid, - og denne tid var omkring 4 minutter. På denne tid optog man 200 målinger fra 180 vinkler, dvs. 36000 målinger ialt pr. snit. [Swindell & Barrett, 1977, s. 34].

2. generation af scannere havde en scanningstid, som var på mellem ti sekunder og to minutter. Forbedringen bestod i, at man havde en række kilder og detektorer, så man kunne foretage flere parallelle målinger af gangen fra samme vinkel. [Swindell & Barrett, 1977, s. 34].

Kvaliteten af de første billeder med henblik på densitetsmåling var meget høj. De gav en ret præcis værdi for densiteten i de enkelte punkter, men overgange mellem forskellige densiteter var ikke så pæne, og dermed kunne billederne være vanskelige at tolke. Det viste sig, at behovet for pæne billeder, der var lette at diagnosticere ud fra, var større end for et nøjagtigt densitetsbillede. I udviklingen af de moderne scannere, har man derfor lagt mest vægt på at gøre billederne så pæne så muligt. Hvis man ville bruge en CT-scanner til at bestemme kalkindholdet i en knogle ud fra densiteten af den, så ville det derfor kunne gøres mere præcist på de gamle scannere end på de nye. [Overlæge Karen Damgaard, Rigshospitalet].

Det nye i scannernes 3. generation er, at man sender strålerne i vifter. Dermed kan man med én røntgenkilde dække hele objektet med stråler på en gang. Denne vifte har en bredde på 42-44° grader, hvilket er tilstrækkeligt til at dække objektet. Detektorerne sidder på et cirkeludsnit med centrum i røntgenkilden og roterer sammen med denne. Med denne teknik er man i stand til at scanne et snit på 2-3 sekunder, heri er rekonstruktionen indregnet, dvs. man har billedet med det samme.

På de nyeste 3. generations scannere er der mulighed for at vælge at lave dynamisk scanning. En dynamisk scanning vil sige, at man indstiller alt på forhånd; vælger snittykkelse, røntgendosis mm. og patientbordet kører så automatisk igennem gantry'et. Man behøver altså ikke sidde og trykke på tænd/sluk knappen. Ved dynamisk scanning foregår rekonstruktionen samtidig med det enkelte snit.

Eksempler på hvor hurtigt forskellige områder kan scannes dynamisk på PQ-2000 scanneren [Picker, Product Data, s. 5]:

Område	Antal snit	Tid
hoved	15	1,5 min.
maveregion	25	2,5 min.

Scannerne i 4. generation har en stationær detektorring til forskel fra 3. generations udsnit. Det nyeste i 4. generation er spiralscannere. Fremfor at tage et snit af gangen og derefter rykke lejet frem til næste snit, bevæges lejet samtidig med, at scanningen foregår. Ved spiralscanning behøver man blot at vælge det område, der skal scannes, og kan så bagefter lægge de enkelte snit ind, hvor man ønsker det. Rekonstruktionen laves først bagefter, og selve scanningen går meget hurtigt. Denne type erstatter dog ikke 3. generation fuldstændig, men er hensigtsmæssig når man scanner små børn, der har svært ved at ligge stille.

Man har også forkortet scanningstiden ved, at de nyeste scannere ikke stopper roteringen af røntgenkilden mellem hver snit, men lader den dreje uafbrudt selv ved almindelig scanning af et enkelt snit af gangen, så tiden ved opbremsning og igangsætning undgås. Man er nu gået bort fra opdelingen i generationer til fordel for en opdeling efter overordnede mekaniske principper. Parallelscannerne i første og anden generation hører til de såkaldte rotations- translationsscannere, idet detektor og kilde først skal translateres (bevæges langs en ret linie) og derefter rotere. Tredie og fjerde generations viftescannere bygger på et fuldrotatorisk princip af detektorer og røntgenkilde.

1.2.2 Teknisk beskrivelse

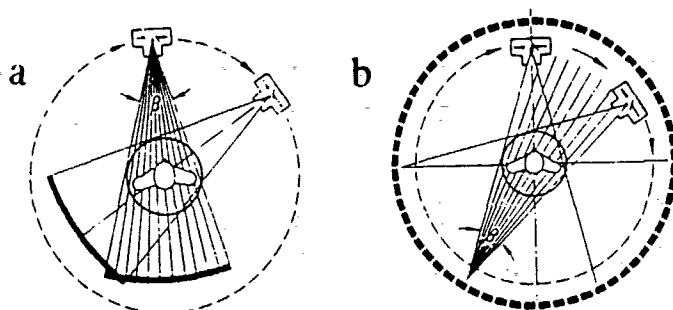
To af de vigtigste tekniske detaljer ved CT-scanneren er røntgenkildens samt detektorernes placering og virkemåde.

Røntgenkilden er placeret i gantry'et og kan være fuldroterende, dvs. at kilden laver en fuld omdrejning på 360° . På ældre scannere blev røntgenkilden slukket mellem hver måling. I de hurtigste nye scannere er røntgenkilden derimod tændt hele tiden, men den er pålagt en gitterspænding, som gør, at fotonerne kun kommer ud i "pulse". Disse pulse kommer med passende mellemrum, sådan at kilden lige når at blive drejet til en ny vinkel. Denne teknik er hurtigere end at slukke røntgenkilden.

Røntgenstrålen passerer ydermere gennem et lag af forskellige filtre for at mindske den såkaldte beamhardening effekt, der giver anledning til en af de største fejl. Denne fejl kaldes også Hounsfieldstriber. Disse filtre skal optage de lavenergiholdige fotoner. Man er interesseret i at fjerne fotoner med lavt energiindhold, fordi disse absorberes hurtigst af vævet. Ellers ville der ved scanning af et lille område blive absorberet relativt mere stråling, end ved scanning af et større område.

Desuden modvirker man beamhardening effekten, ved at sørge for, at strålerne tilbagelægger stort set samme længde i scanningsobjektet. Dette gøres vha. et såkaldt "kropsfilter" af plexiglas. "Kropsfilteret" har facon modsat kroppen, således at de yderste stråler i viften først må tilbagelægge en lang strækning gennem filteret. For viftens midterste stråler, som passerer de tykkeste steder i kroppen, er filteret meget tyndere. På den måde vil effekten af de lavenergiholdige fotoner blive ens for alle linier i snittet.

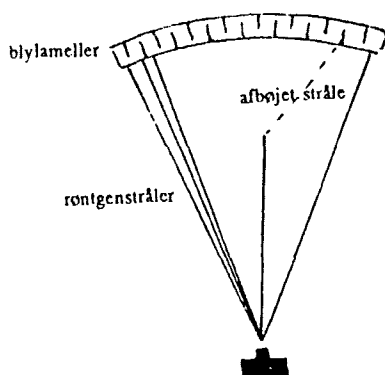
Detektorerne optager røntgenstrålerne, efter de har passeret gennem objektet. De er også placeret i gantry'et og kan enten rotere med røntgenkilden rundt eller være stationære. Se figur 1.8.



Figur 1.8: a) Roterende detektorer, b) stationære detektorer. [Alexander et al., 1986, s. 52].

Hvis de roterer med rundt dækker de et cirkeludsnit, der har centrum i røntgenkilden og er bredt nok til at fange hele viften af stråler. Når detektorerne er stationære, er de placeret i en ring omkring åbningen. Selve detektorerne kan være gas eller halvledere (faststofs).

I roterende gasdetektorer har man et trykkammer fyldt med gas, som regel xenon, der ioniseres af røntgenstrålingen. I trykkammeret er der desuden nogle blylameller, der optager de røntgenstråler, de rammes af, således at de afbøjede stråler ikke giver anledning til nogen registrering. Det betyder, at xenongassen kun ioniseres af de stråler, som rammer lige ind mellem lamellerne. Se figur 1.9.



Figur 1.9: Blylamellerne i gasdetektoren sikrer, at den enkelte detektor kun modtager stråler fra én retning.

Denne ionisering giver anledning til en strøm, som detektoren registrerer. Strømmen omdannes ved brug af en kondensator til en spænding. Størrelsen af spændingen er et udtryk for intensiteten af røntgenstrålen, og det er denne størrelse, der lagres i computeren. Stationære halvlederdetektorer fungerer principielt på samme måde; dvs. at en strøm omdannes til spænding, der så optages. Den enkelte detektor er dog ikke konstrueret sådan, at den kun

modtager stråling fra én retning. Den skal kunne modtage stråling fra en vinkel, der dækker hele objektet, dvs. samme vinkel som viften sender ståler i. Se figur 1.8B. Det samlede antal målinger af et enkelt snit er oppe på omkring 5 millioner. [Picker, Produkt Data, s. 2].

I de første kliniske scannere benyttede man kun 36000 målinger til rekonstruktion af et enkelt billede, så på dette område er der sket en vældig udvikling. Det er dog ikke sådan, at man stadig forsøger at forbedre scannerne, ved at lave endnu flere målinger. Den størrelsesorden, man nu er oppe på, må nok anses for den optimale. Det vil ikke være sådan, at mere information altid vil give bedre billeder, der er en grænse for hvor meget information, der kan udnyttes [Stockham, 1979, s. 721]. Fremtidige tekniske forbedringer af CT-scannere vil derfor være på andre områder, formentlig hurtigere scannere og øgede muligheder for billedbehandling.

1.3 Scanningsprocedure

Beskrivelsen af arbejdsgangen ved scanninger er en sammenfatning af besøg og samtaler med overlæger og radiografer på amtssygehusene i Herlev og Roskilde samt Rigshospitalet i København.

Før man kan lave en scanning er der visse parametre, der skal vælges. Disse parametre kan opdeles i dem, der påvirker måledata og dem, der hører til billedbehandling.

1.3.1 Måledataparametre

Nogle af de overvejelser, der ligger bag fastlæggelsen af de forskellige parametre, bunder i ønsket om at reducere støjniveauet. Støj er et resultat af statistiske fluktuationer i antallet af fotoner i røntgenstrålen og kan ikke fjernes helt [Shepp & Kruskal, 1978, s. 421]. Det kan dog reduceres ved at forhøje røntgendosen, idet der eksisterer flg. sammenhæng mellem dosis og støjniveau: $\text{Støjniveau} \sim \sqrt{\frac{1}{\text{dosis}}}$ [Siemens Quality Guide, s. 9].

De to parametre, som har størst betydning for støjen, er røntgenstrålernes startintensitet og de enkelte snits tykkelse. Jo tykkere snittene er, jo flere fotoner slipper igennem, og dette mindsker støjniveauet. Imidlertid er det ikke hensigtsmæssigt med alt for tykke snit, da dette giver anledning til en fejl i billederne, der kaldes "partial volume effect". Hvis snittet er tykt, kan der inden for samme snit være forskellige typer væv i forskellige lag af snittet. De forskellige vævstyper vil så overlappe hinanden på billedet, og dermed gøre det upræcist. Det gælder altså om at finde en balance mellem acceptabel

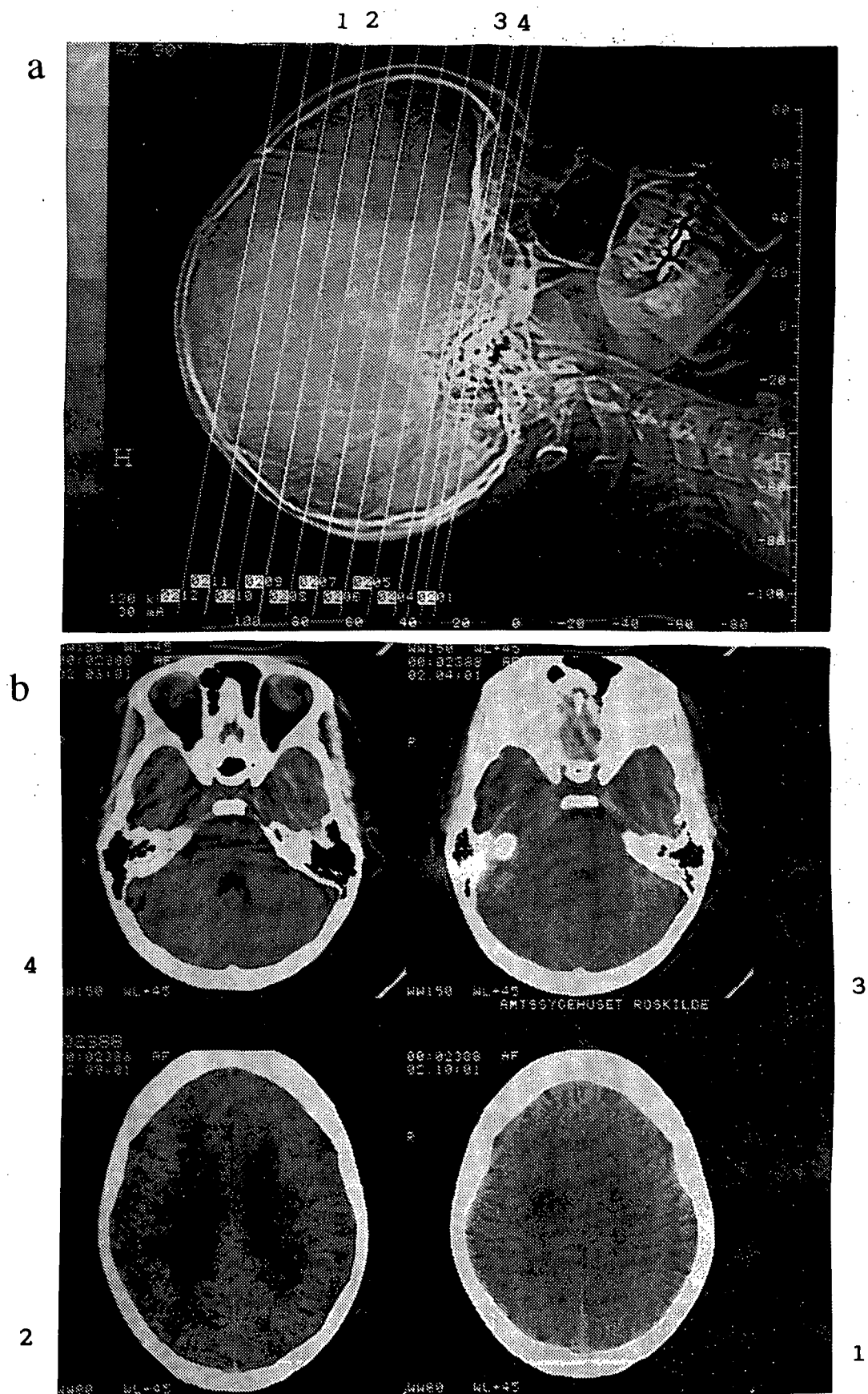
snittykkelse og støjniveau. Ved fastlæggelsen af røntgendosis tages patientens størrelse også med i betragtningerne. Strålernes vej gennem en tyk person er længere end gennem en tynd, hvilket betyder, at startintensiteten skal være højere, for at en tilstrækkelig stor intensitet er tilbage, når strålen når detektoren. Groft sagt reduceres den resulterende stråleintensitet med 50% per 4 cm forøget kropstykkelse. Dosis kan reguleres både ved fastlæggelsen af startintensitet og ved fastlæggelsen af scanningstid. De normale scanningstider er på 1 til 3 sekunder, men det er muligt at opnå meget høje doser ved f.eks. 4 eller 8 sekunders scanning, og dermed kan man nedsætte støjniveauet ved særligt vanskelige scanninger. [Siemens Quality Guide, s. 17].

Udover dosis og snittykkelse vælges afstanden mellem de enkelte snit og hvor stort et område, der skal scannes. Ved en scanning laves der først et oversigtsbillede ved at placere røntgenkilden i en fast position og køre patientbordet igennem. I princippet svarer et sådan oversigtsbillede helt til et traditionelt røntgenbillede, bortset fra at det ikke er optaget på en film. Billedet kommer frem på computerskærmen, og radiografen udvælger det ønskede område i samråd med en læge. Derefter fastlægges antallet af snit og dermed også afstanden mellem de enkelte snit. Se figur 1.10. Strukturerne imellem snittene vil man selvfølgelig ikke få noget billede af, men afstanden vil typisk dreje sig om en halv cm.

Inden patienten scannes, skal der endvidere være taget stilling til, om det er nødvendigt at give kontraststof. Dette består af iod eller barium, som enten kan drikkes, så det går i mavetarmkanalen og nyrerne, eller indsprøjtes så det går i blodbanen. Kontraststof bruges til at gøre det nemmere at skelne små densitetsforskelle, f.eks. kan det tydeligere ses, hvad der er mavetarmkanal og blodbane, sådan at mistolkninger forhindres.

Endelig kan det være nødvendigt at vippe gantry'et, oftest hvis det er et område, der indeholder meget knoglestruktur, således at man kan "komme bag om" knoglen, f.eks. nederst i kraniet.

Af de parametre, der påvirker måledata, er dosis og snittykkelse de vigtigste. Det skyldes, at det i hovedsagen er dem, der bestemmer, hvor meget røntgenstråling, der kommer igennem patienten og dermed støjniveauet. Støjniveauet har en kraftig indflydelse på kvaliteten af målingerne, der selvfølgelig er altafgørende for billedernes nøjagtighed. Imidlertid er der flere parametre, der skal indstilles. Disse har dog ingen betydning for selve måledata, men hører til billedbehandlingen. Hvis måledataene lagres i computeren, vil de næste parametre, som nævnes, kunne ændres uden at man mister noget information. Det er først, hvis det kun er de rekonstruerede billeder, der er lagret, at disse parametre er altafgørende.



Figur 1.10: a) Oversigtsbillede af et kranium med markering af de valgte snit. b) Eksempler på rekonstruerede tværsnit fra kraniet. [Scannerafsnittet, Roskilde Amtssygehus, 1992].

1.3.2 Billedbehandling

Hvis røntgenpersonalet ønsker at se billederne af snittene, efterhånden som de måles, er det nødvendigt at udvælge et bestemt Hounsfield-interval. Hounsfield-værdier er et mål for, hvor meget røntgenstråling forskellige vævstyper absorberer. Skalaen er fastlagt på følgende måde:

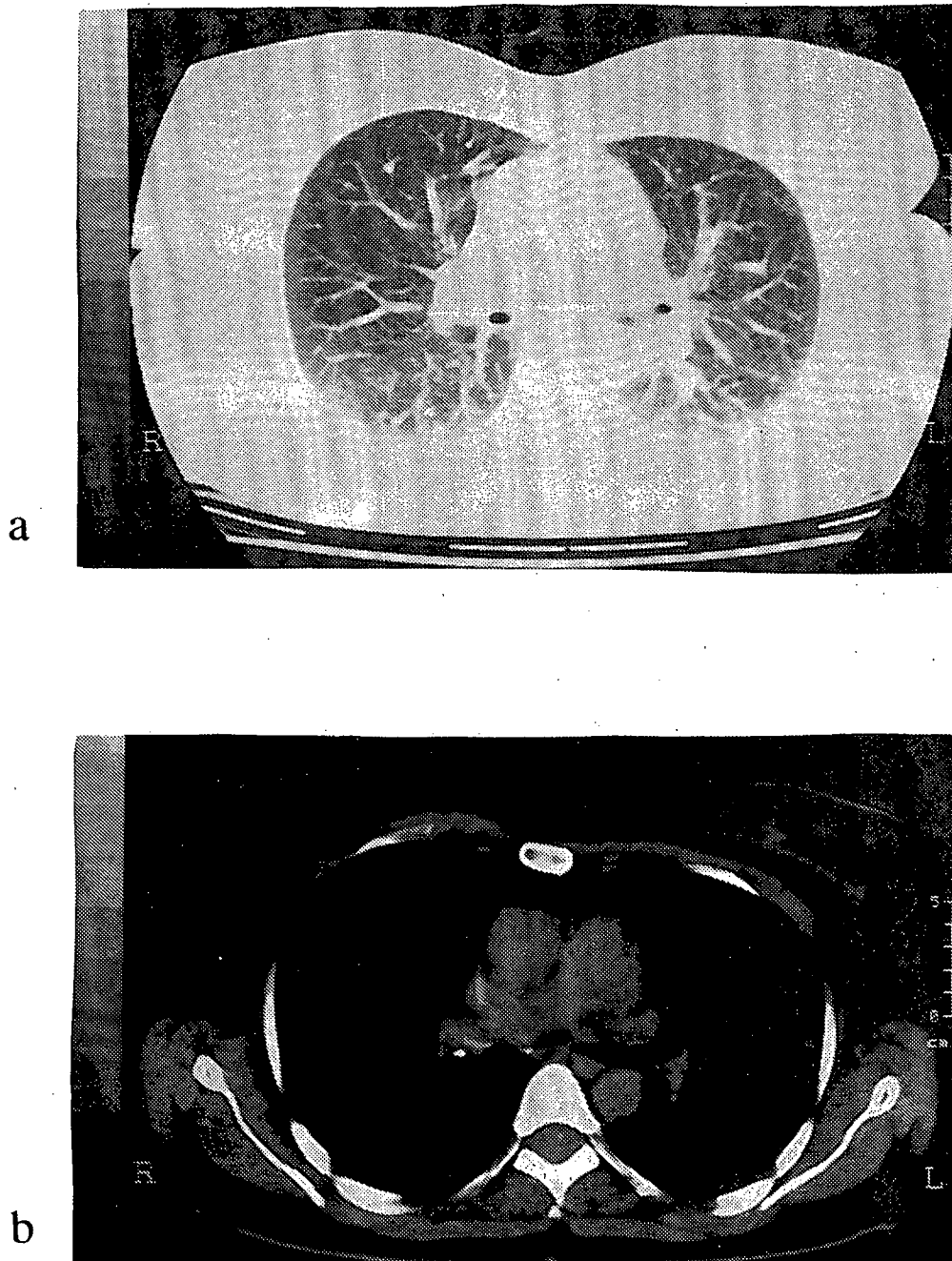
$$H = \frac{\mu_{\text{væv}} - \mu_{\text{vand}}}{\mu_{\text{vand}}} 1000$$

hvor μ er den lineære absorptionskoefficient. Vand får Hounsfield-værdien 0 mens gas får værdien -1000 . Hele skalaen går fra -1000 til $+3000$. Vævstyper med meget høje densiteter som knogler vil ligge mellem 300 og 3000. Forskellige Hounsfield-værdier repræsenteres ved en gråtone, jo mørkere farve jo mindre absorption. Grunden til, at man ikke bare kan vælge at se på hele skalaen på et billede, er at øjet ikke kan skelne mellem så mange nuancer. Man skulle således kunne skelne mellem 4000 forskellige nuancer, hvilket er temmelig langt fra de 30-40 stykker, øjet i virkeligheden kan skelne. Løsningen er derfor at udvælge, hvor stor en intervallængde man vil betragte, samt hvilken Hounsfield-værdi, der skal være intervalcentrum. Dermed har man valgt præcis, hvilke Hounsfield-værdier billedet vil indeholde. Se figur 1.11.

Problemet bliver at udvælge det rigtige Hounsfield-interval. Hvis måledata lagres, kan man bare prøve sig frem, men hvis dette ikke er tilfældet, er det et meget vigtigt valg. Typisk vil computeren kunne lagre måledata fra ca. 40 patienter [Overlæge Helle Lindewald, Roskilde Amtssygehus]. I hovedtræk giver et stort Hounsfield-interval mulighed for at se mange forskellige værdier. Det vil dog ikke være muligt at skelne mellem vævstyper, som ligger tæt op ad hinanden. Dette er derimod muligt ved et lille Hounsfield-interval. Her vil der til gengæld være mange værdier, som slet ikke afbildes, idet værdier udenfor intervallet enten forekommer sorte eller hvide.

I praksis bestemmes intervallets længde og centrum ud fra en vurdering af de forskellige vævstypers densitet i det pågældende område, samt en vurdering af hvor store afvigelser, det er nødvendigt at kunne se.

En anden ting, der skal vælges for at få billeder frem er en filterfunktion. Disse filterfunktioner bestemmer, hvad der særligt skal fremhæves i billedet, det kan f.eks. være skarpe kanter eller små detaljer i blødt væv. Filterfunktionen udgør en del af rekonstruktionsalgoritmen og har dermed noget at gøre med, hvordan Radontransformationen anvendes i praksis.



Figur 1.11: a) Tværsnit af brystkasse rekonstrueret med et Hounsfieldinterval, der fremhæver lungestrukturen. b) Samme tværsnit rekonstrueret med et interval, der fremhæver knoglestrukturen. [Scannerafsnittet, Roskilde Amtssygehus, 1992].

Til billedbehandlingen hører også muligheden for 3-dimensional rekonstruktion. "3-dimensionale billeder" laves ved simpelthen at stakke de 2-dimensionale snit. Dermed kan man få et billede af de forskellige 3-dimensionale strukturer. Dette kan f.eks. bruges, hvis man skal operere en misdannelse i kraniet, da vil det være nyttigt at kunne se den rumlige udformning. Det er dog ikke noget, man bruger særlig tit ved normale scanninger. En ting, som oftere udnyttes, er muligheden for at lægge snit ind i andre vinkler end oprindeligt. Computeren konstruerer det ud fra de samme måledata, som benyttes til de oprindelige snit, så kvaliteten bliver bedre jo tyndere snit og jo kortere afstand, der er mellem snittene.

Parametrene, der hører til billedbehandlingen, er altså vigtige i forhold til at få det bedste ud af måledata, men vil så længe måledata er lagret i computeren, kunne varieres efter ønske.

1.4 Opsamling

Kernen i CT-scanning er at sende røntgenstråler gennem et snit fra mange forskellige vinkler. Strålernes intensitet efter passagen måles af detektorer, der udnytter røntgenstrålernes evne til at ionisere en gas. Ændring i strålernes intensitet efter passagen tages som et udtryk for densiteten af vævet i det område, strålen har gennemtrængt. Billedet dannes i en computer ved at sammenholde de mange forskellige data.

Radontransformationen beskriver den matematiske sammenhæng, der er mellem de målinger, man får ved CT-scanning, og den densitetsfunktion, der beskriver tværsnittet. På den måde giver Radontransformationen grundlaget for, at man overhovedet kan rekonstruere densitetsfunktionen ud fra måledata. Samtidig er den rekonstruktionsalgoritme, der i praksis skal beregne, hvordan billedet ser ud, udviklet ud fra Radons inversionsformel.

Litteratur benyttet til dette kapitel

Brooks et al., Principles of Computer Assisted Tomography (CAT) in Radiographic and Radioisotopic Imaging, 1976

Gordon et al., Image Reconstruction From Projections, 1975

Hounsfield, Computed Medical Imaging, 1980

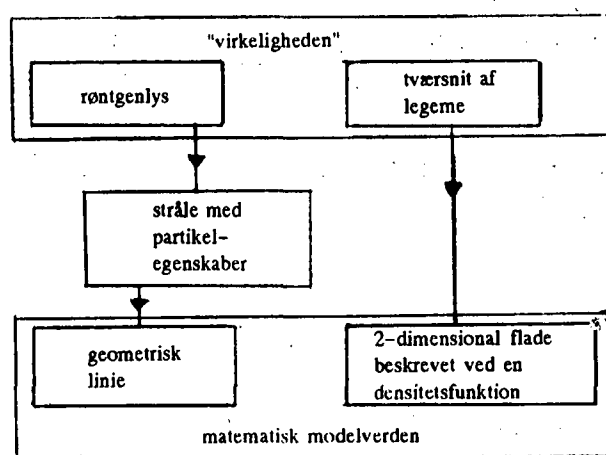
Shepp & Kruskal, Computerized Tomography: The new medical X-ray technology, 1978

Samt produktbrochurer fra Siemens og Picker.

Kapitel 2

Modelopbygning

Når et tværsnit af kroppen ved en scanning skal rekonstrueres ud fra målingerne, gøres det ud fra en algoritme. Denne algoritme er imidlertid ikke taget ud af den blå luft, men bygger på en matematisk teori. For at komme fra praksis til teori, må man lave en model af målingerne. Nedenstående figur er en skematisk oversigt over de modelantagelser, man er nødt til at gøre. Det er beskrivelsen af røntgenstrålerne og det tværsnit, der gennemstråles, som forenkles i modellen.



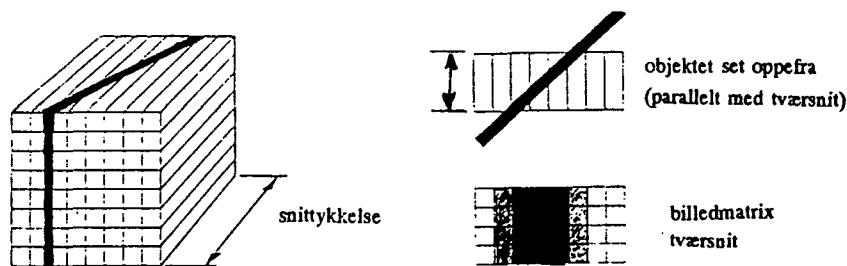
Figur 2.1: En skematisk opstilling af modellen.

Efter en gennemgang af hvordan man må opfatte tværsnittet og røntgenstrålerne, følger en udledning af sammenhængen mellem vævets densitet og røntgenstrålernes intensitet. Når denne sammenhæng er kendt, er vi i stand til skrive målingerne i CT-scanning således, at disse viser sig at være i nær

sammenhæng med selve Radontransformationen. Til slut vil vi, da vores problem tilhører klassen af inverse problemer, beskrive forskellen mellem direkte og inverse problemer.

2.1 Tværsnittet

Det billede, der fremkommer ved en CT-scanning, er ikke et fotografi. Det er derimod en afbildning af en densitetsfunktion på en flade. Densitetsfunktionen repræsenterer de forskellige strukturer i et snit. Hvert punkt på fladen har tilknyttet et tal, som angiver densiteten. Hvad der i virkeligheden er forskellige vævstyper og knogler, repræsenteres således ved et tal. I praksis må man nødvendigvis måle absorptionen i et snit af en vis tykkelse. Så selvom snittet er ganske tyndt (typisk omkring 2 mm) er situationen den, at man måler i tre dimensioner, men kun afbilder dette snits densiteter i to dimensioner. Her ligger derfor modellens ene antagelse. Kun i tilfælde hvor snittets densiteter i tykkelsen er konstante, se figur 2.2, vil den 2-dimensionale afbildning være korrekt.



Figur 2.2: Illustration af hvorledes, der kan opstå fejl i billedannelsen, når snittets densiteter ikke er konstante i tykkelsen. [Alexander et al., 1986, s. 27].

2.2 Røntgenlys

En fuldstændig beskrivelse af røntgenlys og absorption ville føre meget vidt. Det er imidlertid heller ikke nødvendigt med en sådan beskrivelse for at forstå, hvordan de to størrelser indgår i denne sammenhæng. De efterfølgende beskrivelser skal derfor opfattes som et relevant udpluk af en meget kompliceret teori. Røntgenlys har, som alt lys, både partikel og bølgeegenskaber. Bølgeegenskaberne udnyttes bla. ved bestemmelse af krystallens struktur, idet forskellige strukturer giver anledning til forskellig afbøjning af røntgenbølgerne.

I scanneren er det imidlertid røntgenlysets partikelegenskab, der udnyttes. Dette ses både i den måde detektorerne fungerer på, og den måde strålen absorberes på. I detektoren ioniseres en gas, når den rammes af en røntgenstråle. Populært sagt vekselvirker de enkelte fotoner i røntgenstrålen med de enkelte gasmolekyler. Også i absorptionen foregår processerne som enkelthændelser mellem fotonerne og molekylerne i vævet. I begge tilfælde er det altså ukorrelerede hændelser der sker, dvs. at hændelserne finder sted upåvirket af hinanden.

2.3 Absorption

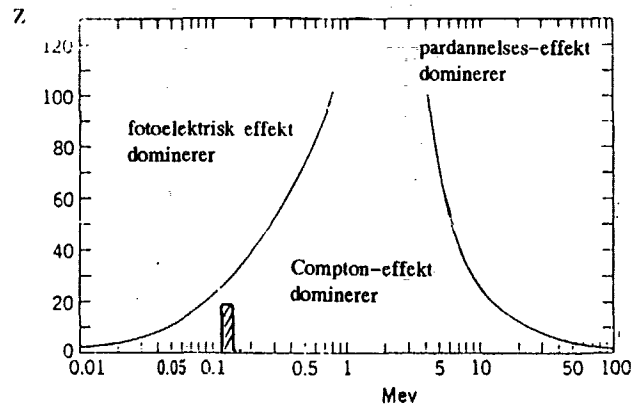
Som nævnt flere gange tidligere tolkes ændring i røntgenstrålernes intensitet direkte som et udtryk for densiteten i det gennemtrængte væv. For at retfærdiggøre dette er det nødvendigt at kigge nærmere på, hvordan røntgenstråler opfører sig, når de passerer gennem stof.

Vekselvirkninger med vævet medfører både absorption og spredning af røntgenstrålen. De hyppigst forekommende processer er fotoelektrisk effekt, Compton-effekt og pardannelses-effekt. Røntgenstrålens energi og det stof, der gennemtrænges, bestemmer hvilke af disse, der finder sted. Det er derfor nok at se på de processer, der finder sted ved energier svarende til dem, der anvendes i scannernes røntgenkilder og ved lette stoffer, som menneskevæv hovedsageligt består af. Den fotoelektriske effekt dominerer ved lave energier og tunge stoffer, herefter følger Compton-effekten for middelennergier og alle slags stoffer, mens pardannelsen først finder sted ved høje energier og tunge stoffer. Da man i CT-scanning bruger røntgenstråler af en energi, der i denne sammenhæng er lav, vil pardannelsen ikke finde sted, og vi vil ikke omtale den nærmere. Se figur 2.3.

I scannerne benyttes typisk røntgenstråler med energier omkring 120 KeV¹ [Scannerafnittet, Roskilde Amtssygehus]. Menneskevæv består hovedsageligt af grundstoffer med atomnumre omkring 5-20. Af figur 2.3 fremgår det, at det vil være Compton-effekten, som dominerer. Ved Compton-effekten vekselvirker fotoner i røntgenstrålen med frie elektroner i vævet. Fotonen afgiver noget af sin energi til elektronen og resultatet bliver både en retnings- og energiændring af strålen. Ved den fotoelektriske effekt afgiver fotonen al sin energi til en bunden elektron, og man kan derfor tale om en ren absorption.

Sammenhængen mellem absorption og vævets densitet varierer for de forskellige processer. Er det alene Compton-effekten, der er tilstede, får man

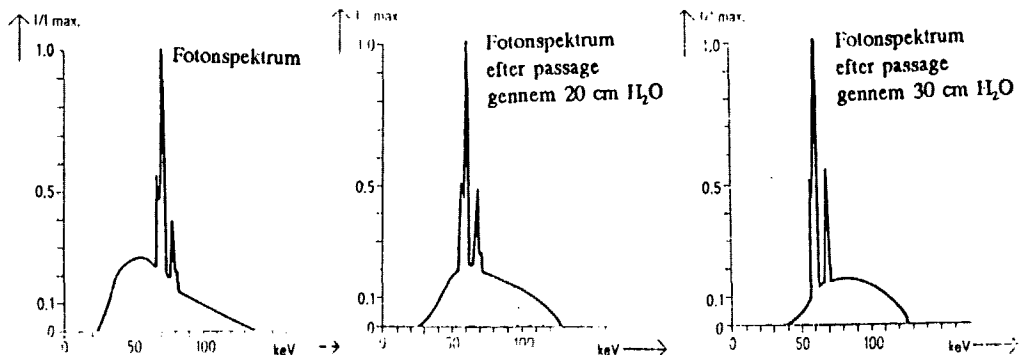
¹kiloelektronvolt.



Figur 2.3: Sammenhæng ml. hvilke absorptionsprocesser, der finder sted og henholdsvis røntgenstråleens energi og atomvægten af det stof, der gennemtrænges (Z er atomnummeret). Vi befinder os i det skraverede område. [Evans, 1955, s. 712].

imidlertid den simple sammenhæng at den absorberede intensitet er proportional med densiteten i vævet [Heitler, 1984, s. 364]. For at kunne udnytte dette, forsøger man at fjerne energier i røntgenstråleens spektrum, hvor de andre processer vil finde sted. De lave energier i spektret vil hovedsagelig forårsage fotoelektrisk effekt, og det vil medføre en forøget absorption.

Derfor kan man centrere spektret ved at sende røntgenstrålen gennem et filter, hvor hovedsagelig lavenergifotoner absorberes, inden røntgenstrålen rammer kroppen. Da spektret ændres, som røntgenstrålen passerer gennem objektet, se figur 2.4, får det betydning, at der absorberes stort set lige meget i hver projektion, hvilket der også tages højde for i filtret.



Figur 2.4: Røntgenstråleens foton spektrum efter at have passeret objekter af forskellig tykkelse [Image Quality Guide, Siemens, s. 40].

2.3.1 Absorptionslov

Vi har nu set, at man kan betragte sammenhængen mellem absorption af røntgenstråler og vævets densitet som lineær, men vi ved endnu ikke hvordan absorptionen foregår i forhold til det stykke vej røntgenstrålen tilbagelægger. Det følgende udtryk 2.1 beskriver en røntgenstråles absorption ved passage gennem væv.

$$I = I_0 e^{-\mu s} \quad (2.1)$$

hvor:

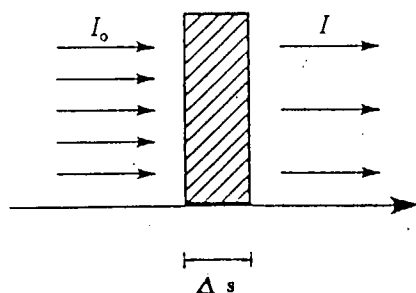
I_0 = begyndelsesintensitet

I = slutintensitet

s = tilbagelagt afstand

μ = absorptionskoefficient

Som følge af antagelserne om, at kun Compton-effekten er til stede, vil μ være proportional med densiteten i det væv strålen passerer. Vi vil nu vise, at ligning 2.1 stammer fra de simple antagelser, at antallet af absorberede fotoner er proportionalt med intensiteten samt den tilbagelagte afstand, se figur 2.5.



Figur 2.5: Ændring i stråleintensitet efter strålen har tilbagelagt afstanden Δs .

Antager vi, at dette gælder, kan vi nemlig skrive

$$I_0 + \Delta I - I_0 = -\mu I \Delta s \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta s} = -\mu I \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta s} + \mu I = 0$$

Denne ligning vil, når man lader Δs gå imod 0, gå imod

$$\frac{dI}{ds} + \mu I = 0$$

Dette er netop en lineær differentialligning af 1. orden af typen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

som med begyndelsesbetingelserne $f(a) = b$ har løsningen

$$f(x) = be^{-A(x)} \quad \text{hvor } A(x) = \int P(t)dt$$

Vi har derfor

$$\begin{aligned} A(x) &= \int \mu ds \\ f(x) &= be^{-\int \mu ds} \quad \text{og } I(a) = I_0 \\ I &= I_0 e^{-\int \mu ds} \end{aligned}$$

Er μ konstant fås den simple sammenhæng i ligning 2.1. Denne ligning gælder under ideelle betingelser, hvor strålerne er meget smalle, alle fotoner har samme energi og det stof, der gennemtrænges er homogent. I virkeligheden vil strålen passere gennem mange forskellige materialer, og μ bliver derfor en funktion afhængig af stedet (x, y) hvilket giver:

$$\frac{I}{I_0} = \exp \left[- \int_L \mu(x, y) ds \right]$$

Modellens anden del ligger her. Strålen opfattes nu som en ret linie (L) gennem et 2-dimensionalt område. Værdien af et enkelt linieintegral vil svare til en projektion, P_L , af en enkelt stråle og fås ved at tage den naturlige logaritmefunktion:

$$P_L = - \ln \left(\frac{I}{I_0} \right) = \int_L \mu(x, y) ds$$

Vi er hermed nået frem til en ligning, der udtrykker sammenhængen mellem en funktion P , der angiver projektion af strålerne og funktionen μ , der står for absorptionskoefficienten. De forskellige absorptionsprocesser, Compton-effekten, den fotoelektriske effekt osv. vil bestemme dæmpningskoefficientens størrelse. Da der, som før beskrevet, kun tages hensyn til Compton-effekten, og intensiteten derfor er proportional med absorptionen, kan vi tillade os at opfatte dæmpningskoefficienten som et udtryk for densitetsfordelingen. Det endelige resultat bliver således en ligning, der udtrykker

projektionerne som linieintegraler af densitetsfunktionen. Da projektionerne svarer til måledata ved en scanning, har vi fundet frem til en sammenhæng mellem disse og den densitetsfunktion, vi er ude efter at bestemme. Radontransformationen transformerer netop en funktion over i dens linieintegraler, derfor bliver denne teori relevant her.

2.4 Direkte og inverse problemer

Rekonstruktionsproblemet i CT-scanning hører til klassen af inverse problemer. Det tilsvarende direkte problem ville være, hvis vævets placering og densitetsværdi var kendt, at beregne hvor meget stråling, der ville blive absorberet i de forskellige retninger.

Inverse problemer er meget udbredte. Seismiske målinger til beregning af f.eks. oliefelters placering er et kendt eksempel. Her sendes der bølger fra jordoverfladen og ved at regne på det signal, der kommer tilbage, kan eventuelle oliefelter lokaliseres.

Man kommer ofte ud for, at inverse problemer har stor følsomhed på begyndelsesbetingelserne. Det vil sige, at bare en lille fejl i måledata vil give et helt forkert resultat. Så galt går det ikke med Radontransformationen, den er rimelig stabil. Var den ikke det, ville det være umuligt at lave scanningsbillederne så gode, at de kunne anvendes i diagnosticering. Generelt for inverse problemer gælder det, at entydigheden går tabt. I vores tilfælde består vores måledata af et endeligt antal målinger, og dette er i følge teorien ikke tilstrækkeligt til at kunne benytte Radons inversionsformel. Derfor benytter man en algoritme til at beregne densitetsfunktionen. Det er ikke noget problem at finde en densitetsfunktion ud fra denne algoritme, som er en korrekt løsning til målingerne, men det vil ikke være den eneste mulige løsning til disse målinger, og man er derfor ikke sikret, at scanningsbilledet er fuldstændig korrekt.

2.5 Opsamling

Gennem denne modellering er vi nu i stand til at opfatte målingerne som en Radontransformation af densitetsfunktionen i et tværsnit. Det vil derfor være muligt at bestemme densitetsfunktionen, hvis man kender en præcis sammenhæng mellem en funktion og linieintegralerne af samme funktion. Som sagt udtrykkes netop denne sammenhæng ved Radons inversionsformel. Næste kapitel vil give en grundig matematisk forklaring af denne sammenhæng.

Modelantagelserne får konsekvenser for resultatet af scanningen. Billedernes kvalitet er afhængig af, hvor store tilnærmelser der ligger i at beskrive virkeligheden ved denne model. Man er nødt til at vurdere, hvor korrekte antagelserne er i forskellige situationer. Som hovedpunkterne i modellen, så opfattes røntgenstrålerne i første omgang som en strøm af partikler. Dette fremgår af overvejelserne om deres absorption, idet vi kigger på vekselvirkninger mellem fotonerne i strålen og elektroner i vævet og altså slet ikke beskæftiger os med bølgefænomener. Derudover opfattes strålerne som geometriske linier i udledningen af sammenhængen mellem densitetsfunktionen og stråleprojektionerne. Denne opfattelse muliggør, at vores måledata kan opfattes som værdien af linieintegralet hen over disse linier. Tværsnittet opfattes som en flade karakteriseret ved en densitetsfunktion. Vi vil i kapitel 5 sammenkæde modelantagelserne med de fejl, som vi har erfaret, at man slås med i CT-scanning, men først vil vi som sagt kigge nærmere på den matematiske teori, og hvordan man benytter denne til at beregne densitetsfunktionen.

Litteratur benyttet til dette kapitel

Beiser, Concepts of Modern Physics, 1967, s. 40-60.

Evans, The Atomic Nucleus, 1955, s. 712.

Heitler, The Quantum Theory of Radiation, 1984, s. 362-367.

Produktbrochurer fra Picker og Siemens.

Kapitel 3

Radontransformationen

I kapitel 2 om den matematiske model er det allerede blevet beskrevet, hvordan Radontransformationen ser ud. Vi fandt ud af hvilke tilnærmelser, der skal gøres, for at man kan skrive måledataene fra CT-scanning som linieintegraler over densitetsfunktionen, og skrev, at dette netop var en Radontransformation. At dette stemmer, vil vi nu vise. I dette kapitel bliver Radontransformationen defineret, og dens inversionsformel gennemgået. Derudover ser vi på de grundlæggende egenskaber ved Radontransformationen, som er nødvendige for at kunne gennemføre udledningen af inversionsformlen.

Vi vil også se på, hvordan Radontransformationen hænger sammen med Fouriertransformationen. Denne sammenhæng udnyttes ofte ved rekonstruktion i praksis.

Kapitlet vil blive illustreret af et par eksempler, hvor vi Radontransformerer simple matematiske funktioner. Deres funktion er at lette forståelsen af selve Radontransformationen. De matematiske begreber bliver så vidt muligt løbende relateret til CT-scanning, sådan at det tydeligere fremgår, hvordan de forskellige størrelser hænger sammen. Vi vil lægge størst vægt på den 2-dimensionale udgave af såvel Radontransformationen som dens inversionsformel, da der i de typer af scannere, som er omtalt i kapitel 1, udelukkende finder 2-dimensional rekonstruktion sted.

I kapitlet vil vi indskrænke os til at Radontransformere en særlig klasse af meget pæne funktioner. For det første vil vi lade dem være uendeligt ofte differentiable, eller ihvertfald så ofte, som det er nødvendigt. Det er derudover kun en udvalgt del af disse, vi vil behandle, nemlig de funktioner som er "hurtigt aftagende" eller har "kompakt støtte". At en funktion er

hurtigt aftagende, vil sige, at den tilstrækkeligt hurtigt går mod nul (i alle retninger). Det vil mere præcist sige, at der for alle k skal gælde, at

$$(1 + |\mathbf{x}|)^k \left| \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x^n} \right| \text{ er begrænset.}$$

Altså at den n 'te afledede går hurtigere mod nul end ethvert polynomium går mod uendelig. Kompakt støtte vil sige, at funktionen har værdien 0 uden for et afgrænset område. Når begrebet "støtte" senere anvendes, menes der det område, hvor funktionen har værdier forskellig fra nul. I forhold til anvendelsen af Radontransformationen til at rekonstruere en funktion fra dens projektioner, giver det ingen problemer at antage, at funktionerne har kompakt støtte. Det betyder blot, at de objekter, man kunne ønske at rekonstruere, må være afgrænsede. Med hensyn til at kræve at funktionerne skal være differentiable, kunne det se ud som om, der var et problem, for det er spørgsmålet, om densitetsfunktionen er kontinuert i f.eks. overgangen mellem knogle og væv. Dette får dog ikke den store betydning, da man bare kan approksimere den diskontinuerte funktion med en differentiable funktion. Denne approksimation kan laves så præcis, som man ønsker den, idet funktionen kun er ikke-differentiable i en lille mængde. De fordele, vi opnår ved denne indskrænkning, er store. Det betyder nemlig, at vi uden bekymring kan ændre på rækkefølgen af forskellige integrationer og differentiationer. Og om vi tager grænseværdier før eller efter vi differentierer/integrerer er ligegyldigt.

3.1 Definition

I 1917 viste Radon, hvordan man kan rekonstruere en funktion af n variable ud fra kendskab til funktionens integraler over de $(n-1)$ -dimensionale hyperplaner. Han beskæftigede sig altså med inversionsformlen til Radontransformationen. Selve transformationen afbilder en funktion over i de tilsvarende integraler. En funktion med to variable afbildes over i linieintegraler, i tre dimensioner afbildes der over i fladeintegraler osv. Mere præcist gælder der at:

Ved Radontransformationen, \mathcal{R} , transformeres en skalarfunktion, f , med vektorvariable, over i integralerne over hyperplanerne i \mathbf{R}^n .

Vi koncentrerer os om den 2-dimensionale transformation, da det er denne, som anvendes i CT-scanning.

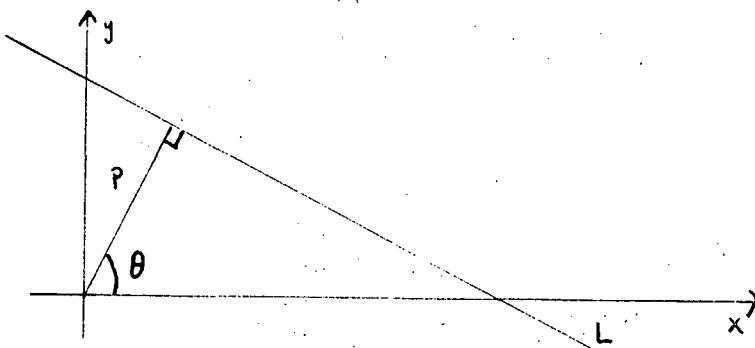
Hvis $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, så vil $\mathcal{R}(f) = \hat{f}$ angive linieintegralerne af f . For at kende $\mathcal{R}(f)$, skal man kende samtlige linieintegraler af f .

Da transformationen af en funktion af to variable, $f(x, y)$, vil bestå af alle linieintegraler af f , vil det være hensigtsmæssigt af finde en passende notation for de linier, vi skal integrere over.

I \mathbb{R}^2 kan en linie, L , angives ved de polære koordinater (p, θ) . Ligningen:

$$L : p = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \quad (3.1)$$

vil for et givent (p, θ) definere den linie, der går igennem punktet $(p \cos(\theta), p \sin(\theta))$ og vinkelret på vektoren $(p \cos(\theta), p \sin(\theta))$, se figur 3.1.



Figur 3.1: Linie defineret ved koordinatsættet (p, θ) .

Radontransformationen af funktionen, f , vil for ethvert koordinatsæt, (p, θ) , angive linieintegralet af f over den linie, der er defineret ved formel 3.1. Definitionen kan herefter skrives:

$$\mathcal{R}(f)(p, \theta) = \hat{f}(p, \theta) = \int_L f(x, y) ds \quad (3.2)$$

Nu er det tydeligt at se sammenhængen mellem CT-scanning og Radontransformationen. Tidligere fandt vi frem til, at en måling kan skrives som linieintegralet af densitetsfunktionen over den linie gennem kroppen, som røntgenstrålen passerer. Alle målinger i et tværsnit af kroppen udgør derfor et udsnit af Radontransformationen af den densitetsfunktion, som beskriver dette tværsnit. Notationen vi benytter til at angive, hvilken linie der integreres over, har en nær relation til de parallelle stråler, der blev benyttet i de første scannere. Hvis vinklen θ holdes konstant, og p varieres, opnås et profil. I et profil vil de linier, man integrerer over, ligge parallelt. Senere vil vi se på, hvordan man parametriserer disse linier, men først vil vi give et forholdsvis enkelt eksempel.

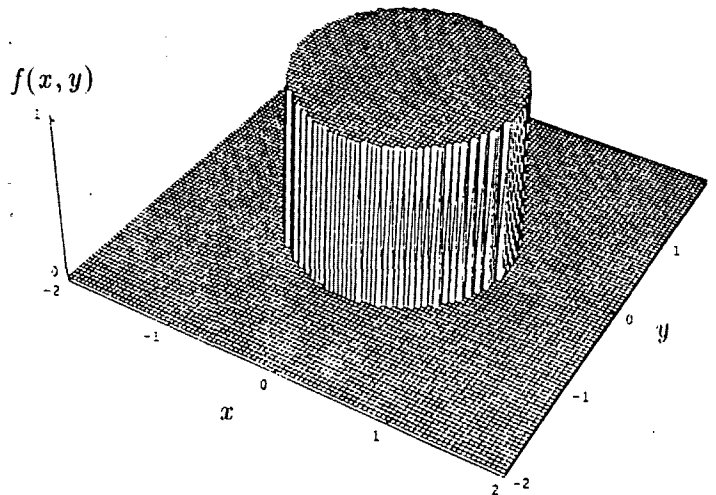
Eksempel 1

Som første eksempel på Radontransformationen har vi valgt en meget simpel funktion, som har funktionsværdien 1 indenfor enhedscirklen og ellers værdien 0.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{for } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{for } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

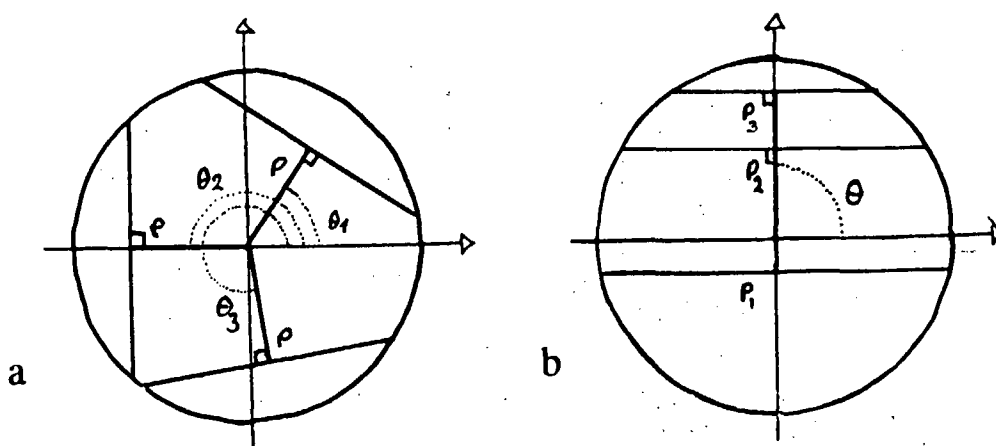
Denne funktion har tydeligvis kompakt støtte, men det bemærkes at funktionen ikke er kontinuert på randen. Vi undlader derfor at integrere over randen. Udenfor randen ($x^2 + y^2 > 1$) er transformationen trivial, idet funktionsværdien er 0, og da støtteområdet ligger symmetrisk omkring origo, vil integraler over alle linier, (p, θ) , hvor $|p| > 1$ give 0. Vi skal derfor transformere indenfor støtteområdet.

Hvis dette skal relateres til scanning, så vil $f(x, y)$ repræsentere et tværsnit af et objekt f.eks. en cirkelrund knogle med fuldstændig ensartet densitet. På figur 3.2 er funktionen afbildet.



Figur 3.2: Funktion med konstant værdi 1 indenfor enhedscirklen, og ellers værdien 0.

Da funktionen er konstant 1 inden for integrationsområdet, svarer værdien af et linieintegral til længden af liniestykket indenfor enhedscirklen. Af figur 3.3a fremgår det, at længden af liniestykket er uafhængigt af vinklen θ . Det er derfor nok at betragte funktionen fra én vinkel og generalisere dette for at finde Radontransformationen af funktionen.



Figur 3.3: Linier defineret ved koordinatsæt (p, θ) . a) θ varieres og p holdes konstant, b) p varieres og θ holdes konstant. Når p varieres fra -1 til 1 , fås et profil.

Alle linieintegraler fra én vinkel betegner objektets profil. For dette objekt vil alle profiler derfor være ens. Vi vil nu regne os frem til Radontransformationen for vinklen $\theta = 90^\circ$. Dermed vil p variere langs y -aksen. Se figur 3.3b. Hvis vi kalder liniens skæringspunkter med enhedscirklen for $(-a, p)$ og (a, p) , så vil længden af liniestykket være lig med $2a$. Dette kan nemt beregnes vha. Pythagoras' læresætning.

$$a^2 + p^2 = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{1 - p^2}$$

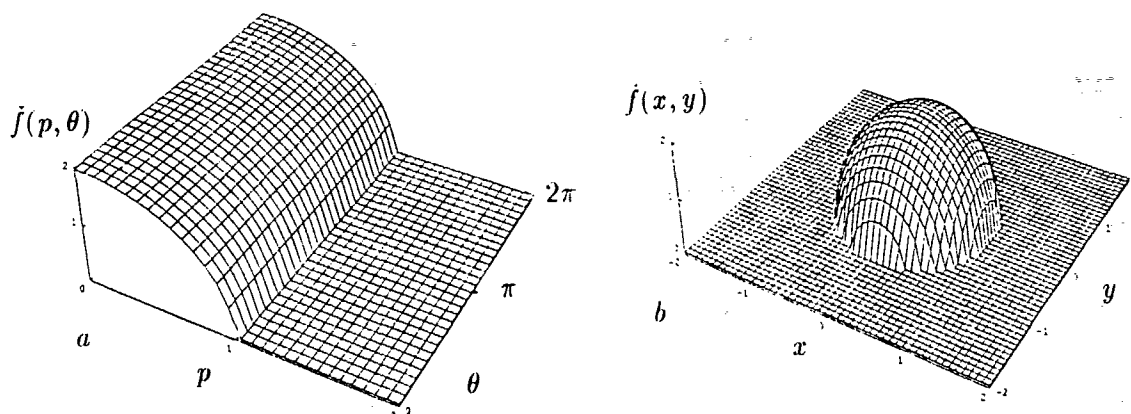
Dermed kan Radontransformationen for $\theta = 90^\circ$, $f(p, 90^\circ)$, udtrykkes:

$$f(p, 90^\circ) = 2\sqrt{1 - p^2} \quad \text{for } -1 < p < 1$$

Når p varieres langs y -aksen, får vi hele profilet for $\theta = 90^\circ$, se figur 3.3b. Da Radontransformationen af funktionen er uafhængig af vinklen, kan det generelle resultat uden videre skrives:

$$\mathcal{R}(f)(p, \theta) = f(p, \theta) = 2\sqrt{1 - p^2} \quad \text{for } -1 < p < 1 \quad (3.3)$$

Afbildningen af den Radontransformerede funktion, $\mathcal{R}(f)(p, \theta)$, ses på figur 3.4.



Figur 3.4: Radontransformationen af funktionen i a) polære og b) kartesiske koordinater.

3.1.1 Parametrisering og notation

Når man skal beregne Radontransformationen af en given funktion, er linieintegralerne naturligvis ikke altid så simple som i det foregående eksempel. For at beregne integralerne er det derfor nødvendigt at parametrisere den linie, L , vi skal integrere over. L , som er givet ved ligningen i formel 3.1, kan parametriseres vha. enhedsvektorerne ξ og ξ^\perp . Se endvidere figur 3.5.

$$\xi = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad \text{og} \quad \xi^\perp = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

Linien kan så beskrives ved

$$\alpha(t) = p\xi + t\xi^\perp = (p \cos(\theta), p \sin(\theta)) + (-t \sin(\theta), t \cos(\theta)) \quad (3.4)$$

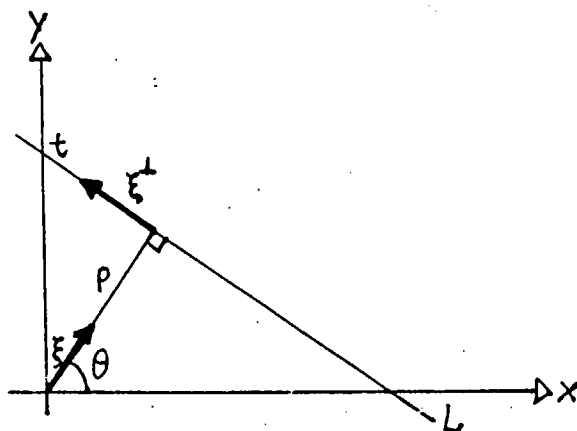
Når t gennemløber hele intervallet $] -\infty, \infty[$, vil alle punkter på L blive gennemløbet.

Radontransformationen kan nu skrives

$$\check{f}(p, \theta) = \check{f}(p, \xi) = \int_L f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

Da $\|\alpha'(t)\| = \|(-\sin(\theta), \cos(\theta))\| = 1$, kan vi skrive:

$$\check{f}(p, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\xi + t\xi^\perp) dt$$



Figur 3.5: Parametrisering af L ved enhedsvektorerne ξ og ξ^\perp .

Bemærk at notationen $\check{f}(p, \theta)$ er ækvivalent med $\check{f}(p, \xi)$, og at linien L kan skrives

$$p = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \Leftrightarrow p = (x, y) \cdot \xi$$

Især i højere dimensioner er enhedsvektornotationen praktisk, idet der her vil indgå flere vinkler i de polære koordinater, og disse vil alle være indeholdt i ξ .

Radontransformationen kan også beskrives ved et fladeintegral, hvor vi indfører "Diracs deltadistribution". Denne distribution, $\delta(x)$, er indført af fysikeren P.A.M. Dirac og er meget anvendt i fysikken og matematikken. Fysisk kan den opfattes som en beskrivelse af impulsen af en meget stor kraft, der kun virker i et meget lille tidsrum. Derfor er den defineret ved nogle ret specielle egenskaber:

$$\int \delta(x) dx = 1 \quad \delta(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0$$

Matematisk giver dette som en funktion ingen mening, idet de to kendetegnende egenskaber ved funktionen er modstridende. Har man en funktion, som er konstant 0 i alle punkter med undtagelse af ét, så vil integralet over denne funktion have værdien 0. Derfor må man udvide funktionsbegrebet, til det man kalder generaliserede funktioner eller distributioner. Ud fra denne udvidelse tolkes deltadistributionen således [Hansen, 1971, s. 15-20]:

Hvis en funktion $f(t)$ er kontinuert i t_0 , er

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{hvis } a < t_0 < b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Deltadistributionen giver os mulighed for at skrive Radontransformationen op som et dobbeltintegral. Deltadistributionen "piller" så at sige den linie ud, som vi ønsker at integrere over.

$$\tilde{f}(p, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - \xi \cdot (x, y)) dx dy$$

Dobbeltintegralet får kun værdi i den del af fladen, hvor linien løber, og bliver på den måde det samme som integralet af funktionen over linien. Man kan sige, at når vi løser det inderste integral, så skal vi på x 's plads i funktionen indsætte det udtryk, vi får ved at isolere x i ligningen $p = \xi \cdot \mathbf{x}$. Når vi derefter varierer y , så får vi netop alle punkterne på linien, og når vi så integrerer i forhold til y , får vi linieintegralet. Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - \xi \cdot (x, y)) dx dy = \\ \int_{p=\xi \cdot (x, y)} f(x, y) ds = \tilde{f}(p, \xi) \end{aligned}$$

3.1.2 Udvidelse til flere dimensioner

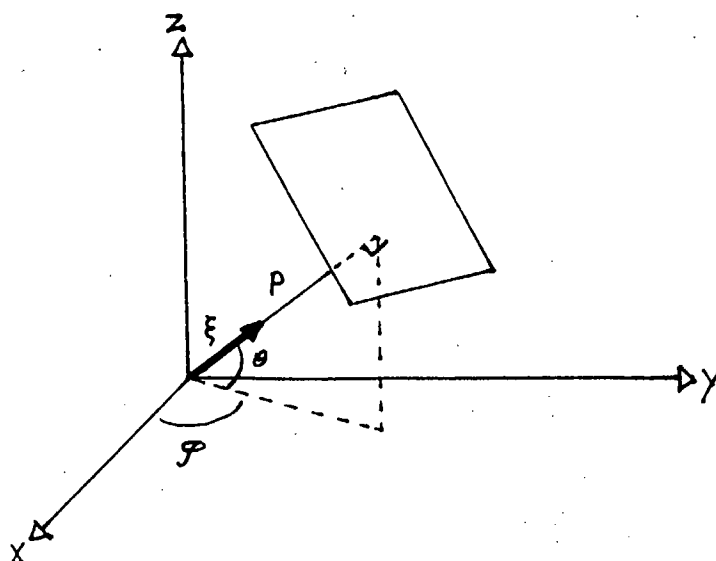
Før vi giver endnu et eksempel på Radontransformationen af en funktion med to variable, vil vi udvide definitionen først til tre dimensioner og derefter generelt til n dimensioner. Da udvidelsen ikke er direkte relevant i forbindelse med anvendelsen, vil vi ikke gå i dybden med dette.

I to dimensioner havde vi koordinatsættet (p, ξ) , hvor $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Koordinatsættet definerede en linie gennem punktet $(p\xi_1, p\xi_2)$ og vinkelret på punktets stedvektor. Dette kan nemt udvides til tre dimensioner, således at $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. (p, ξ) angiver det plan gennem punktet $(p\xi_1, p\xi_2, p\xi_3)$, der har punktets stedvektor som normalvektor. Dette plan er beskrevet ved: $p = \xi \cdot (x, y, z)$. ξ er stadig en enhedsvektor, men nu blot i tre dimensioner. Se figur 3.6.

$$\xi = (\cos(\theta) \cos(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta))$$

For at parametrisere planet skal vi bruge to lineært uafhængige normalvektorer til ξ , lad os kalde dem ξ_1^\perp og ξ_2^\perp . Planet kan beskrives ved:

$$\alpha(t, s) = p\xi + t\xi_1^\perp + s\xi_2^\perp \quad (3.5)$$



Figur 3.6: Planet beskrevet ved $p = \xi \cdot (x, y, z)$.

Radontransformationen i tre dimensioner ser da således ud:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f(x, y, z)) &= \check{f}(p, \xi) = \int_{p=\xi \cdot (x, y, z)} f(x, y, z) dS \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p\xi + t\xi_1^\perp + s\xi_2^\perp) ds dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ligesom det i to dimensioner var tilfældet, at $\|\alpha'(t)\| = 1$, har vi her brugt at

$$\left\| \frac{\partial \alpha(t, s)}{\partial t} \times \frac{\partial \alpha(t, s)}{\partial s} \right\| = \|\xi_1^\perp \times \xi_2^\perp\| = 1$$

Vi kan også bruge Diracs deltadistribution i tre dimensioner, ligesom vi gjorde det i to. Nu er det blot et plan, vi skal "pille" ud:

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \delta(p - \xi \cdot (x, y, z)) dx dy dz \\ &= \int_{p=\xi \cdot (x, y, z)} f(x, y, z) dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

Opskrivningen med Diracs deltadistribution kan uden videre generaliseres til n dimensioner. ξ er i så fald en enhedsvektor i n dimensioner og $p = \xi \cdot \mathbf{x}$, ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) bestemmer hyperplanet med $n-1$ dimensioner vinkelret på ξ og gennem punktet $p\xi$.

$$\check{f}(p, \xi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{p=\xi \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) dS \quad (3.8)$$

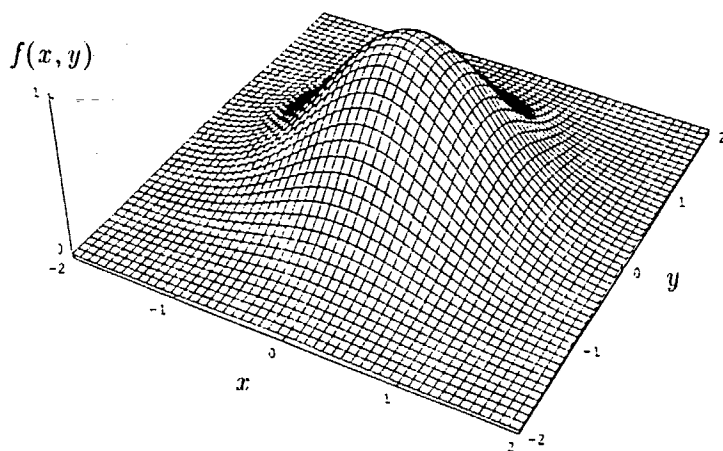
Det skal her forstås, at integralerne er multiple, og der skal integreres fra $-\infty$ til ∞ i alle integraler.

Eksempel 2

Vi er nu tilbage i to dimensioner, hvor vi vil vise endnu et eksempel på, hvordan man beregner Radontransformation af en bestemt funktion. I dette eksempel vil vi gøre brug af notationen med deltadistributionen. Lad funktionen være givet ved

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

Dennne funktion tilhører klassen af hurtigt aftagende, uendeligt ofte differentiable funktioner, så den er "pæn", hvilket ses af figur 3.7.



Figur 3.7: $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f)(p, \xi) &= \check{f}(p, \xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \delta(p - (\xi_1 x + \xi_2 y)) dx dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

hvor $(\xi = (\xi_1, \xi_2))$.

Så skifter vi variable:

$$\begin{aligned} u &= \xi_1 x + \xi_2 y \\ v &= -\xi_2 x + \xi_1 y \end{aligned}$$

Jacobi-determinanten: $J(u, v) = J(x, y)^{-1}$

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix} \\ &= \xi_1^2 + \xi_2^2 = \|\xi\| = 1 \Leftrightarrow J(u, v) = 1 \end{aligned}$$

Bemærk at $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$. Vi kan nu skrive

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} \delta(p-u) du \right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \delta(p-u) du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \\ &= e^{-p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \end{aligned} \quad (3.10)$$

Så er vi nået et godt stykke af vejen, og skal blot beregne integralet $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv$. Det kan vi ikke uden videre; så vi må gå en lille omvej og først finde kvadratet af dette integral:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \end{aligned}$$

Vi omskriver til polære koordinater: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, Jacobi-determinanten: $J(r, \varphi) = r$, og skriver så:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi$$

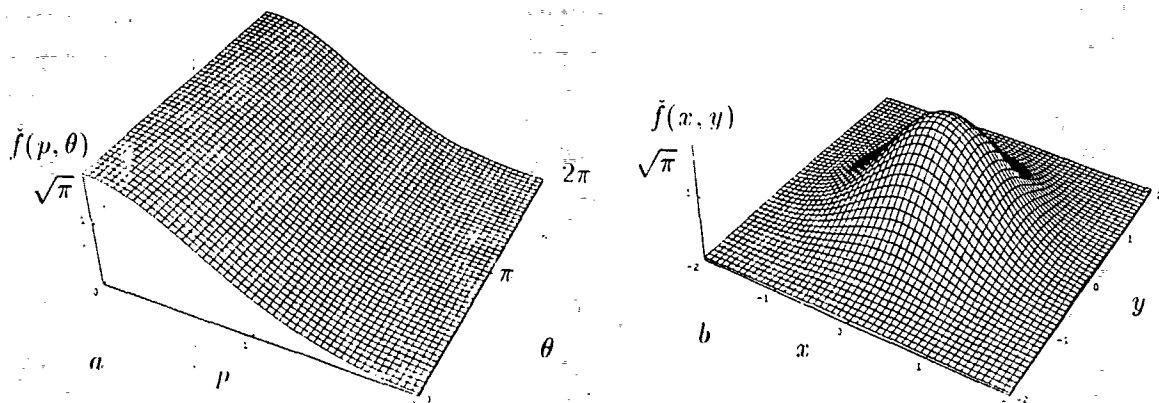
Hvilket så giver

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$$

og dermed

$$\begin{aligned} e^{-p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv &= \sqrt{\pi} e^{-p^2} \Leftrightarrow \\ \mathcal{R}(e^{-(x^2+y^2)})(p, \xi) &= \check{f}(p, \xi) = \sqrt{\pi} e^{-p^2} \end{aligned}$$

På figur 3.8 er den Radontransformerede funktion afbildet både i polære og kartesiske koordinater.



Figur 3.8: a) $\tilde{f}(p, \theta) = \pi^{\frac{1}{2}} e^{-p^2}$. b) $\tilde{f}(x, y) = \pi^{\frac{1}{2}} e^{-x^2 - y^2}$.

3.2 Basale egenskaber

I det følgende vil vi bruge opskrivningen af Radontransformationen med enhedsvektornotation, $\tilde{f}(p, \xi)$. Egenskaberne er ikke særlige for \mathbf{R}^2 , så vi har valgt at generalisere til n dimensioner. Integraltegnet $\int_{\mathbf{R}^n} dx$ står således for integralet over hele rummet.

Vi har valgt at indskrænke beskrivelsen til fortrinsvis at indeholde de egenskaber, der er nødvendige for udledning af inversionsformlen. Derudover har vi beskrevet, hvordan man kan beregne Radontransformationen af en funktion, som Laplace-operatoren virker på. Dette er gjort, idet det illustrerer, hvordan Radontransformationen med fordel kan anvendes i en anden sammenhæng end lige netop CT-scanning, nemlig til løsning af partielle differentialligninger.

3.2.1 Symmetri, homogenitet og linearitet

Den egenskab ved Radontransformationen, som først falder i øjnene er dens symmetriegenskab. Egenskaben følger af, at koordinatsættene $(-p, -\xi)$ og (p, ξ) definerer den samme linie. For Radontransformationen gælder der således:

$$\tilde{f}(-p, -\xi) = \tilde{f}(p, \xi) \quad (3.11)$$

Radontransformationen af en given funktion for koordinatsættet (p, ξ) er den samme som for koordinatsættet $(-p, -\xi)$, idet der simpelthen integreres over den samme linie.

En anden vigtig egenskab er homogenitet. En funktion siges at være homogen af graden p , hvis der gælder følgende:

$$f(t\mathbf{x}) = t^p(f(\mathbf{x})) \quad (3.12)$$

Radontransformationen viser sig at være homogen af graden -1 . I gennemgangen af dette kigger vi på $\tilde{f}(sp, s\xi)$, hvor s er en skalar. Det er dog vigtigt at være klar over, at selve Radontransformationen, "den rigtige Radontransformation", kun er defineret for enhedsvektoren og ikke for andre vektorer. Men ved at se på udtrykket $\tilde{f}(sp, s\xi)$ og omregne dette til et udtryk med en enhedsvektor, vil den normale definition af Radontransformationen kunne anvendes på udtryk med en vilkårlig vektor.

Bemærk at hvis vi blot tolkede $\tilde{f}(sp, s\xi)$ ud fra definitionen uden at tage højde for, at vi ikke har en enhedsvektor, så ville vi integrere over hyperplanet $sp = s\xi \cdot \mathbf{x} \Leftrightarrow p = \xi \cdot \mathbf{x}$, og Radontransformationen ville altså være uafhængig af konstanten s . Vi må derfor se på deltadistributionen og dens egenskaber, når man ganger med konstanter.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx$$

Vi skifter variabel: $u = ax$, $du = a dx$, og skriver så

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{a}\right)\delta(u)du &= \frac{1}{|a|} f(0) = \\ \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx & \end{aligned} \quad (3.13)$$

Det er nødvendigt at tage den numeriske værdi af a , idet der også skal substituere i integralets grænser. Hvis $a < 0$ er grænserne byttet, og fortegnet ændret.

Vi kan nu skrive

$$\begin{aligned} \tilde{f}(sp, s\xi) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\delta(sp - s\xi \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\delta(s(p - \xi \cdot \mathbf{x}))d\mathbf{x} \\ &= |s|^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= |s|^{-1} \tilde{f}(p, \xi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Hvis man sammenligner ligning 3.14 med 3.12 ses homogenitetsegenskaben. Ligning 3.14 kan dog fortælle flere andre ting. Ved at indsætte $s = -1$ bekræfter den for det første symmetriegenskaben. Det er nu muligt at beregne udtryk, hvor det ikke er enhedsvektoren der indgår. Dette er en fordel, fordi det medfører, at man kan tillade sig at transformere en funktion til en anden funktion, hvor Radontransformationen er nemmere at beregne, selvom det betyder, at vektoren ikke længere er en enhedsvektor. Det skal der så blot reguleres for senere vha. formel 3.14.

Radontransformationen har endnu en pæn egenskab, idet den er en lineær transformation: $\mathcal{R}(c_1f + c_2g) = c_1\mathcal{R}(f) + c_2\mathcal{R}(g)$ hvor c_1 og c_2 er konstanter. Dette ses nemt af at:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(c_1f + c_2g)(p, \xi) &= \int [c_1f(\mathbf{x}) + c_2g(\mathbf{x})]\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= c_1 \int f(\mathbf{x})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} + c_2 \int g(\mathbf{x})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= c_1\tilde{f}(p, \xi) + c_2\tilde{g}(p, \xi)\end{aligned}$$

3.2.2 Forskydningsegenskab

Radontransformationens forskydningsegenskab er vigtig i udledningen af inversionsformlen. Derudover skal den anvendes i beregning af Radontransformationen af de retningsaffledede af en vilkårlig funktion. Målet hermed er at kunne beregne Radontransformationen af en funktion, som Laplaceoperatoren virker på.

Forskydningsegenskaben er: $\mathcal{R}(f(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(p, \xi) = \tilde{f}(p - \xi \cdot \mathbf{a}, \xi)$

Dette følger af:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(f(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(p, \xi) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{a})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y})\delta(p - \xi \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{a})) d\mathbf{y} \quad \text{idet } \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a} \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y})\delta((p - \xi \cdot \mathbf{a}) - \xi \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \tilde{f}(p - \xi \cdot \mathbf{a}, \xi) \quad \text{idet } \mathbf{x} = \mathbf{y}\end{aligned}\tag{3.15}$$

I ovenstående er der foretaget to variabelskift. Det sidste er helt trivielt. Ved det første variabelskift, hvor $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ erstattes af \mathbf{y} , bliver Jacobi-determinanten

1. Afbildningen $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ ville i 2 dimensioner se således ud: $x_1 = y_1 + a_1$ og $x_2 = y_2 + a_2$. Jacobi-determinanten ville være:

$$J(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Konstanten \mathbf{a} , der lægges til den gamle variabel \mathbf{x} , forsvinder altså i differentiationen. Det betyder, at variabelskift, hvor der ikke sker andet end, at en konstant adderes til de oprindelige variable, umiddelbart kan foretages uden at bekymre sig om Jacobi-determinanten.

3.2.3 Partielt afledede

Den afledede af f i x_k retningen ser således ud:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} \quad (3.16)$$

Vi ønsker at finde Radontransformationen af denne

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(p, \boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{R}\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h}\right)(p, \boldsymbol{\xi}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{R}(f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k)) - \mathcal{R}(f(\mathbf{x}))(p, \boldsymbol{\xi})) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Grænseværdien kan rykkes udenfor, fordi de funktioner, vi behandler, er "pæne", dvs. de er uendeligt ofte differentiable og er enten hurtigt aftagende eller med kompakt støtte. Resten af omskrivningen kan vi lave, fordi Radontransformationen er lineær. I næste skridt anvendes forskydningsgenskaben formel 3.15 med $\mathbf{a} = -h\mathbf{e}_k$ til at skrive:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(p, \boldsymbol{\xi}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\check{f}(p + h\mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})) \quad (3.18)$$

Vi definerer nu: $\mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\xi} = \xi_k$ (dvs. den k 'te komponent af $\boldsymbol{\xi}$).

$$h\xi_k = t \Leftrightarrow \frac{1}{h} = \frac{\xi_k}{t}$$

Når h går mod 0, vil t også gå mod 0, og vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(p, \boldsymbol{\xi}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi_k}{t} (\check{f}(p + t, \boldsymbol{\xi}) - \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})) \\ &= \xi_k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\check{f}(p + t, \boldsymbol{\xi}) - \check{f}(p, \boldsymbol{\xi})}{t} \\ &= \xi_k \frac{\partial \check{f}}{\partial p}(p, \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vi ser her, hvordan Radontransformationen gør det simplere at arbejde med partielle differentiaalligninger. At differentiere i forhold til de forskellige variable, forsimples til at differentiere i forhold til én, nemlig p , og så multiplicere med den tilhørende komponent af enhedsvektoren. Det bliver endnu mere enkelt, når vi kommer til Laplace-operatoren.

Vi har foreløbig fundet ud af at:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(p, \xi) = \xi_k \frac{\partial \tilde{f}}{\partial p}(p, \xi)$$

I Laplace-operatoren er det den anden afledede, der beregnes. Størrelsen af denne følger umiddelbart af ovenstående:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\right)(p, \xi) = \xi_k^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2}(p, \xi)$$

Det er nu muligt at beregne Radontransformationen af den "Laplace-opererede" funktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Delta f) &= \mathcal{R}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\right) \\ &= \xi_1^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} + \dots + \xi_n^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} \|\xi\|^2 = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Radontransformationen af en funktion, som Laplace-operatoren virker på, findes således simpelthen ved at beregne Radontransformationen af funktionen og differentiere denne to gange i forhold til p .

Nu skulle vi så have et godt nok kendskab til Radontransformationens basale egenskaber for at udlede inversionsformlen. Før dette vil vi dog placere Radontransformationen i forhold til den nok mest kendte transformation: Fouriertransformationen.

3.3 Fouriertransformationen

Der er en nær sammenhæng mellem Radontransformationen og Fouriertransformationen. Da Fouriertransformationen bliver benyttet til meget og meget i praksis, har man efterhånden udviklet nogle ret effektive metoder til at Fouriertransformere numerisk. Man kan derfor lave en rekonstruktionsalgoritme,

der udnytter denne sammenhæng. Det er dog ikke den rekonstruktionsalgoritme, vi vil se på. Men vi vil senere udnytte, at det kan være mere enkelt at arbejde med Fouriertransformerede funktioner.

En nærmere beskrivelse af Fouriertransformationen og udledningen af Fourierintegralet findes i appendiks.

Fouriertransformationen i n dimensioner er givet ved:

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{k}) = \tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

Den tilhørende inversionsformel er:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (3.21)$$

Det skal bemærkes, at definitionerne kan være lidt anderledes i nogle bøger. For at finde sammenhængen mellem de to transformationer omskrives formelen for den n -dimensionale Fouriertransformation af $f(\mathbf{x})$ til et udtryk, hvor deltadistributionen indgår. Dette gøres selvfølgelig, fordi deltadistributionen indgår i definitionen af Radontransformationen.

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi t} \delta(t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \quad (3.22)$$

I formel 3.22 er t et reelt tal. Idet vi skifter variable til $\mathbf{k} = s\xi$ og $t = sp$ kan følgende omskrivninger laves:

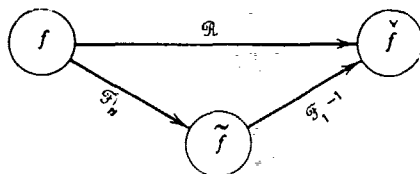
$$\begin{aligned} \tilde{f}(s\xi) &= |s| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi sp} \delta(sp - s\xi\cdot\mathbf{x}) d\mathbf{x} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi sp} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi\cdot\mathbf{x}) d\mathbf{x} dp \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ud over variabelskift er formel 3.13 benyttet til at beregne, hvilken indflydelse en konstant, her s , har på deltadistributionen.

Det inderste integral er identisk med definitionen af Radontransformationen af funktionen $f(\mathbf{x})$. Sammenhængen mellem Fouriertransformationen og Radontransformationen er dermed givet ved (se også figur 3.9):

$$\tilde{f}(s\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p, \xi) e^{-i2\pi sp} dp \quad (3.24)$$

Højre side er den éndimensionale Fouriertransformation af Radontransformationen af funktionen f i den retning, der er givet ved $s\xi$. Dette betyder,



Figur 3.9: Sammenhængen mellem Fourier- og Radontransformationen i n dimensioner. [Deans, 1983, s. 98].

at den n -dimensionale Fouriertransformation kan opnås ved først at Radontransformere den givne funktion og dernæst beregne den 1-dimensionale Fouriertransformation. På operatorform kan det skrives mere kompakt:

$$\mathcal{F}_n(f) = \mathcal{F}_1 \tilde{f}$$

Ved at indsætte $\tilde{f}(s\xi)$ i inversionsformlen for Fouriertransformationen, ligning 3.21, kan Radontransformationen udtrykkes ud fra Fouriertransformationen:

$$\tilde{f}(p, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s\xi) e^{i2\pi sp} ds \quad (3.25)$$

Ud fra denne formel kan Radontransformationen beregnes vha. Fouriertransformationen. Dette gøres ved først at tage den n -dimensionale Fouriertransformation af funktionen og derefter den inverse én-dimensionale Fouriertransformation i retningen givet ved $s\xi$.

$$\tilde{f} = (\mathcal{F}_1)^{-1} \mathcal{F}_n(f)$$

Fouriertransformationen kan også bruges til at komme tilbage til den oprindelige funktion, hvis Radontransformationen af den pågældende funktion er kendt.

$$f = (\mathcal{F}_n)^{-1} \mathcal{F}_1(\tilde{f})$$

Vi har nu set, at Radontransformationen og Fouriertransformationen er tæt forbundne. Nogle af mellemregningerne var forholdsvis nemme at udføre, fordi inversionsformlen for Fouriertransformationen minder så meget om selve transformationen. På det punkt adskiller Fouriertransformationen sig klart fra Radontransformationen, hvilket vil fremgå af næste afsnit.

3.4 Inversionsformlen

Ved en scanning vil måleresultaterne udgøre et udsnit af Radontransformationen af den densitetsfunktion, som man ønsker at rekonstruere. Da det således er Radontransformationen, som er kendt, er det inversionsformlen for den 2-dimensionale Radontransformation, som er relevant, når vi skal beregne, hvordan tværsnittet ser ud.

Inversionsformlen til Radontransformationen kan konstrueres på flere forskellige måder. Den metode, vi vil bruge, tager udgangspunkt i nogle identiteter, som ikke uden videre har noget med Radontransformationen at gøre. Idéen er at omskrive disse identiteter, så de kommer til at indeholde et udtryk, der er identisk med definitionen af Radontransformationen.

Der er to forskellige identiteter til hhv. ulige og lige dimensioner. Det betyder, at inversionsformlen også vil være forskellig, alt efter hvilken dimension vi befinder os i. Da vi skal bruge inversionsformlen for to dimensioner, har vi kun brug for den "lige" identitet, men for at forstå baggrunden for opsplitningen, skal de alligevel præsenteres begge to.

For ulige dimensioner $n \geq 3$:

$$4(2\pi)^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)}{2}} f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{\frac{(n+1)}{2}} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y}) |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \quad (3.26)$$

For lige dimensioner:

$$(2\pi)^n (-1)^{(n-2)/2} f(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}}^{n/2} \int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y}) \ln |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \quad (3.27)$$

[Courant & Hilbert, 1962, s. 679].

Identiteten 3.26 er den mest simple af de to. Men problemet i at anvende den for lige dimensioner ligger i, at Laplace-operatoren af en ikke hel grad f.eks. $\sqrt{\Delta}$ så ville optræde. Det er muligt at regne med en sådan størrelse [Deans, 1983, s. 115], og man kan derfor opnå en inversionsformel, der er ens for lige og ulige dimensioner. Det er dog ikke nødvendigt for os at bruge den fælles udgave, da vi kun har behov for inversionsformlen i to dimensioner.

Disse identiteter er ikke udledt specielt til brug ved Radontransformationen, og da udledningen er ret kompliceret, vil vi ikke komme ind på den her, men blot tage dem for givet. De er udviklet til det formål at opløse en funktion i nogle andre, som er nemmere at arbejde med. Dette gør man f.eks. også i Fouriertransformationen, hvor en funktion opløses i sinus- og cosinusfunktioner. Med identiteterne her kan man opløse en vilkårlig funktion i "plane bølger". En plan bølge kan beskrives ved en funktion, hvor de

variable kun indgår som en linearkombination af hinanden. Den plane bølge er således kun afhængig af én rumkoordinat, der er en linearkombination af de oprindelige variable.

3.4.1 Udledning af inversionsformlen

Vi tager udgangspunkt i identiteten for to dimensioner

$$4\pi^2 f(\mathbf{x}) = \Delta_x \int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{y}) \ln |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi} \quad (3.28)$$

Ideen i udledningen af inversionsformlen er at få omskrevet denne identitet til et pænt udtryk, der indeholder Radontransformationen.

Vi starter med at se på det inderste integral i identiteten. Logaritmefunktionen omskrives til et integral over deltadistributionen. Derefter foretages et variabelskift, $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, ved hjælp af forskydningssegenskaben, se 3.15, således at vi får en Radontransformation frem:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{y}) \ln |\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| d\mathbf{y} &= \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})) dp d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{y}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})) d\mathbf{y} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \int_{\mathbf{R}^2} f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}) d\mathbf{z} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \tilde{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp \end{aligned}$$

Dette udtryk kan nu sættes tilbage i identiteten ligning 3.28, hvorefter vi har følgende:

$$4\pi^2 f(\mathbf{x}) = \Delta_x \int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \tilde{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp d\boldsymbol{\xi} \quad (3.29)$$

I ligning 3.29 har vi et udtryk, hvori Radontransformationen indgår på højre side og funktionen selv på venstre. Vi har derfor faktisk allerede en inversionsformel. Det er dog muligt at arbejde videre på den, så den bliver lidt enklere. Det gør vi ved at rykke Laplace-operatoren ind i det inderste integral. Dette kan uden videre lade sig gøre, da vi stadig holder os til de omtalte pæne funktioner.

$$\begin{aligned} &\Delta_x \int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \tilde{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \Delta_x \tilde{f}(p + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dp d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

Vi har nu behov for at udregne Laplace-operatoren af $\check{f}(p + \xi \cdot x, \xi)$. Dette gøres ved at bruge kædereolen:

$$\begin{aligned} \Delta_x \check{f}(p + \xi \cdot x, \xi) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \check{f}(p + \xi \cdot x, \xi) \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \check{f}''(p + \xi \cdot x, \xi) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(p + \xi \cdot x, \xi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

hvor $t = p + \xi \cdot x$. Ovenstående indsættes i ligning 3.29:

$$4\pi^2 f(x) = \int_{\|\xi\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(p + \xi \cdot x, \xi) dp d\xi$$

Vi tager nu det inderste integral ud, og undersøger det nærmere. Det første vi gør, er at skifte variable til $p = t - \xi \cdot x$. Det udtryk, der fremkommer, integreres så vha. partiel integration:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |p| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(p + \xi \cdot x, \xi) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln |t - \xi \cdot x| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{f}(t, \xi) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \check{f}(t, \xi) dt + \left[\ln |t - \xi \cdot x| \frac{\partial}{\partial t} \check{f}(t, \xi) \right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned} \quad (3.31)$$

hvor sidste led bliver nul, da funktionen på grund af den "kompakte støtte" antager værdien nul i ∞ og $-\infty$.

I første led bliver nævneren 0 ved $t = \xi \cdot x$, hvilket jo ligger i det interval, der integreres over. Derfor eksisterer dette integral ikke i normal (Riemannsk) forstand. Når vi i stedet opfatter det som en "Cauchy-hovedværdi", markeret ved symbolet \check{f} , så kan vi vise, at det alligevel giver mening. Når vi har vist dette, er vi faktisk færdige med udledningen af inversionsformlen.

Cauchy-hovedværdien finder vi ved at opdele intervallet omkring det problematiske punkt, sådan at vi får tre intervaller:

$$] -\infty, \infty [=] -\infty, \xi \cdot x - \varepsilon] \cup [\xi \cdot x - \varepsilon, \xi \cdot x + \varepsilon] \cup [\xi \cdot x + \varepsilon, \infty [$$

Det specielle her, som gør, at Cauchy-hovedværdien giver mening, er, at vi opdeler intervallet med den samme længde ($\pm\varepsilon$) på begge sider af det problematiske punkt.

Da vi ikke er interesserede i at udregne værdien af integralet, men blot vil vise, hvordan vi kan opfatte dets eksistens, kan vi nøjes med kigge på et lidt

simplere integral af samme type:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{hvor } 0 \in [a, b]$$

Nu er det smart at starte med at rækkeudvikle $f(x)$, fordi vi så kan betragte et endnu simplere udtryk, idet der kun er eksistensproblemer i første led af rækken.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \text{restled}$$

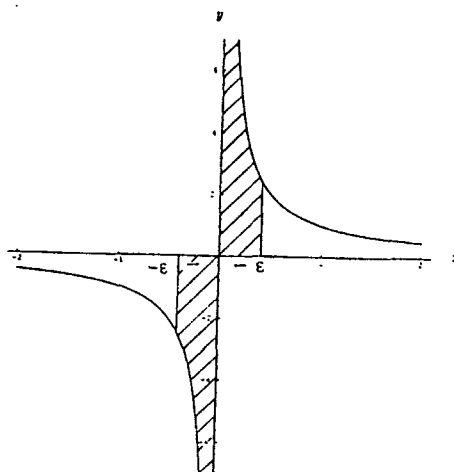
Integralet kan nu skrives:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx = \int_a^b \left(\frac{f(0)}{x} + f'(0) + \frac{1}{2}f''(0)x + \text{restled} \right) dx$$

Som det kan ses, er der kun problemer i integralet af det første led i rækken, fordi det er det eneste, hvor x optræder i nævneren. Derfor nøjes vi med at se på dette led:

$$\int_a^b \frac{f(0)}{x} dx = \int_a^{-\varepsilon} \frac{f(0)}{x} dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{f(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{f(0)}{x} dx$$

Nu er problemet indskrænket til det midterste integral. Ideen er at fjerne dette integral og i stedet lade ε gå lige hurtigt mod nul fra begge sider. Se figur 3.10.



Figur 3.10: Cauchy-hovedværdien.

På denne måde er vi kommet ud over vores singularitetsproblem, og vores integral har fået mening, hvis vi blot opfatter det som en ganske særlig

grænseværdi - Cauchy-hovedværdien, hvis denne eksisterer. [Spiegel, 1968, s. 263].

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^b \frac{f(x)}{x} dx \right)$$

Dermed har vi også godtgjort, at vi kan opfatte det integral fra formel 3.31, som vi skal bruge i inversionsformlen:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(p, \xi)}{p - \xi \cdot x} dp$$

ved hjælp af Cauchy's hovedværdi.

Vi er nu i stand til at skrive inversionsformlen for to dimensioner ved at sætte ovenstående udtryk tilbage i formel 3.31:

$$\begin{aligned} 4\pi^2 f(\mathbf{x}) &= \int_{\|\xi\|=1} -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(p, \xi)}{p - \xi \cdot \mathbf{x}} dp d\xi \Leftrightarrow \\ f(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\|\xi\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(p, \xi)}{p - \xi \cdot \mathbf{x}} dp d\xi \end{aligned} \quad (3.32)$$

Inversionsformlen for Radontransformationen hænger ikke så nært sammen med definitionen af selve transformationen, som det var tilfældet med Fouriertransformationen og dens inversionsformel. Umiddelbart er den ikke så nem at anvende pga. det singulære integral, der gør, at man skal se på Cauchy's hovedværdi for integralet. Problemet løses ved at approksimere dette led i inversionsformlen. I praksis er der altså to problemer ved at anvende inversionsformlen direkte. For det første at den kræver uendeligt mange målinger og for det andet, at den indeholder en singularitet.

3.5 Opsamling

Radontransformationen i to dimensioner opskriver en funktion som linieintegraler. Værdien af de enkelte linieintegraler kan sidestilles med de målinger, man foretager ved en CT-scanning. Man kan derfor sige, at det man får ud af en scanning er et udsnit af en Radontransformeret funktion. Inversionsformlen for Radontransformationen skulle derfor være en metode til at finde densitetsfunktionen, der beskriver de indre strukturer i det snit, man er ude på at rekonstruere. Det viser sig, at inversionsformlen af flere årsager ikke kan anvendes direkte på måldata. Næste kapitel vil gennemgå hvilke omveje, der er nødvendige i praksis.

Litteratur benyttet til dette kapitel:

Apostol, Calculus, 1969, kap. 10-12.

Deans, The Radon Transform and Some of Its Applications, 1983, kap. 3-6.

Hansen, Sædvanlige differentiaalligninger fra fysikken, 1971, s. 15-20.

Jensen, Matematisk Analyse, 1984, kap. 27.

Spiegel, Theory and Problems of Advanced Calculus, 1968, s. 263.

Kapitel 4

Rekonstruktionsalgoritme

Det kan ikke umiddelbart lade sig gøre at anvende inversionsformlen på måledata. Dette skyldes 2 ting: Dels udgør måledataene kun et udsnit af Radontransformationen, idet man kun måler på et endeligt antal stråler, og dels indgår der en singulær funktion i inversionsformlen, da nævneren vil blive 0, når $p = \xi \cdot x$.

Ud fra inversionsformlen kan man udlede flere forskellige analytiske rekonstruktionsalgoritmer. I foldningsalgoritmen, som vi vil udlede, er hovedtrækene først at moderere måledata ved at folde dem med en anden funktion, og dernæst at tilbageprojicere disse modererede måledata. Den funktion, der skal foldes med, er singulær, hvorfor udtrykket er vanskeligt at beregne numerisk. Det er derfor nødvendigt at approksimere den singulære funktion med en "pæn", integrabel funktion, der uproblematisk kan behandles numerisk. Udledningen vil ikke være fuldstændig, men vil skitsere den metode, der bruges til rekonstruktion i scanning.

I praksis kendes Radontransformationen af densitetsfunktionen i over 5 millioner punkter - nemlig det antal målinger, der foretages ved en scanning. Til trods for det store antal målinger, er det stadig et endeligt antal. For at kunne integrere over måledataene er vi nødt til at antage, at Radontransformationen i de linier, der ikke er målinger for, ville kunne beregnes ved at lave lineær interpolation mellem de kendte værdier.

Den rekonstruktionsalgoritme, vi vil skitsere, passer med geometrien i parallelsclannere. Det følger af den notation, vi hele tiden har valgt at beskrive Radontransformationen med, hvor (p, θ) angiver en linie og alle værdier for forskellige p 'er til en fast vinkel, θ , angiver et profil. I praksis benytter man altid viftescannere, som har en anden geometri. Her udgør et "profil" ikke et sæt målinger af parallelle stråler. Vi vil dog holde fast i den "parallelle

notation", idet udtrykkene ellers ville blive lidt mere besværlige, uden at det ville give en større forståelse for princippet i rekonstruktionsmetoden.

4.1 Analyse af inversionsformlen

Vi vil i dette afsnit vise, at inversionsformlen kan "pakkes ud", så man kan se, at den består af en foldning af Radontransformationen med en anden funktion, og derefter en tilbageprojektion, hvilket giver den oprindelige funktion.

Først vil vi skrive noget generelt om foldning og om tilbageprojektion, hvorefter vi vil lave selve udpakningen.

4.1.1 Foldning

Foldningen af to funktioner f og g , er funktionen $f * g$ givet ved

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \quad (4.1)$$

I udpakningen af inversionsformlen vil vi få brug for nogle basale egenskaber ved foldning. Vi udleder disse i én dimension, da foldningen i inversionsformlen kun foregår i én variabel.

Symmetri:

$$f * g = g * f$$

Det følger af definitionen for foldning.

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)g(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x - u)du \\ &= (g * f)(x) \end{aligned}$$

Fra 1. til 2. linie har vi foretaget et variabelskift med $u = x - y$.

Differentiation:

$$(f' * g)(t) = (f * g')(t)$$

Udtrykket kan udledes ved brug af definitionen samt partiel integration.

$$\begin{aligned}
 (f' * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(p)g(t-p)dp \\
 &= [f(p)g(t-p)]_{-\infty}^{\infty} - \left(- \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g'(t-p)dp \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g'(t-p)dp \\
 &= (f * g')(t)
 \end{aligned}$$

Det første led i den partielle integration bliver 0, da vores funktioner har kompakt støtte, hvorved det ønskede resultat opnås.

Fouriertransformationen af en foldning:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

idet

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{F}(f * g))(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \right) e^{-i2\pi xk} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)e^{-i2\pi xk} dx \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi tk} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)e^{-i2\pi(x-t)k} dx \right) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi tk} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i2\pi uk} du \right) dt \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi tk} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i2\pi uk} du \right) \\
 &= \hat{f}(k)\hat{g}(k) \\
 &= (\mathcal{F}(f))(k)(\mathcal{F}(g))(k)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Fra linie 1 til 2 er der byttet om på integrationsrækkefølgen, hvilket med vores typer af funktioner er tilladt. Fra linie 2 til 3 opdeles integralet i det der udelukkende afhænger af t og det x afhængige. Det har vi gjort ved at have multipliceret med $e^{-i2\pi tk}$ i det yderste integral, og tilsvarende med $e^{i2\pi tk}$ i det inderste. Fra 3. til 4. linie skiftes der variabel i det inderste integral, idet $u = x - t$.

4.1.2 Tilbageprojektion

Ved tilbageprojektion transformeres der fra det "Radontransformerede" rum tilbage til det oprindelige (x, y) -rum. Det skal forstås på den måde, at den tilbageprojicerede funktion for hver (x, y) -koordinat får den værdi, der fremkommer ved at integrere funktionen over samtlige (p, θ) , hvor (x, y) ligger på den linie, som (p, θ) repræsenterer. I Radontransformationen integreres der over samtlige punkter på linien (p, θ) , og i tilbageprojektion integreres der over samtlige linier gennem punktet (x, y) . På den måde er det en slags dual transformation til Radontransformationen, men det er altså ikke den inverse Radontransformation. Tilbageprojektion forårsager nemlig punktspredning af den oprindelige funktion.

Tilbageprojektion (\mathcal{B}) er defineret ved:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(f)(x, y) &= \int_0^\pi f(p, \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi f(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\|\xi\|=1} f(p, \xi) d\xi \end{aligned} \tag{4.3}$$

idet $\xi = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Alle skrivemåderne er ækvivalente. Når θ varieres, fås netop alle de linier (p, θ) , som går igennem punktet (x, y) .

Eksempel

Vi vil prøve at tilbageprojicere en meget simpel funktion, som vi kender fra kapitel 3, formel 3.3 nemlig Radontransformationen af den funktion, som har værdien 1 indenfor enhedscirklen, og ellers er 0.

$$\tilde{f}(p, \theta) = 2\sqrt{1-p^2} \quad \text{for } -1 < p < 1$$

Tilbageprojektionen af denne funktion er ikke så let, som det umiddelbart kunne se ud til.

$$\mathcal{B}(2\sqrt{1-p^2})(r, \varphi) = \int_0^\pi 2\sqrt{1-p^2} d\theta \quad \text{for } r < 1$$

Det "vanskelige" indtræffer, fordi p er afhængig af θ :

$$\begin{aligned} p &= (x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) \\ &= (r \cos(\varphi) \cos(\theta) + r \sin(\varphi) \sin(\theta)) \\ &= (r \cos(\varphi - \theta)) \end{aligned}$$

2. linie fremkommer ved indsættelse af de sædvanlige polære koordinater. For at komme til 3. linie, bruges en trigonometrisk additionsformel. Vi har så følgende integral:

$$B(2\sqrt{1-p^2})(r, \varphi) = 2 \int_0^\pi \sqrt{1-r^2 \cos^2(\varphi-\theta)} d\theta \quad \text{for } r < 1$$

Ovenstående udtryk gælder kun for $r < 1$, men den tilbageprojicerede funktion vil også have støtte uden for dette område. Udtrykket er vanskeligt at beregne, men man kan nå frem til følgende [Jesper Larsen]:

$$B(2\sqrt{1-p^2})(r, \varphi) = \begin{cases} 4E(r^2) & \text{for } r \leq 1 \\ 4r(E(\frac{1}{r^2}) - \frac{r^2-1}{r^2}K(\frac{1}{r^2})) & \text{for } r > 1 \end{cases}$$

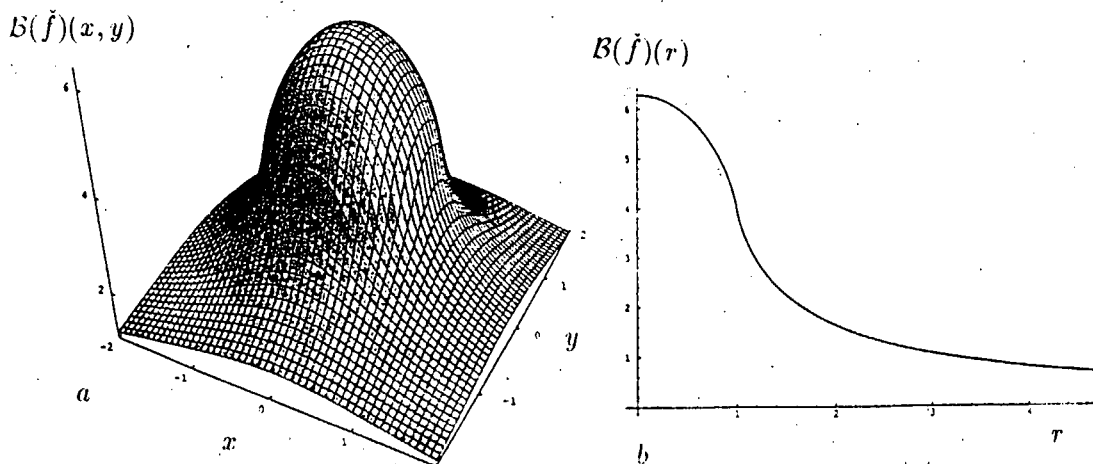
hvor

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x \sin^2(\theta))^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x \sin^2(\theta))^{\frac{1}{2}} d\theta$$

[Abramowitz & Stegun, 1972, s. 590]. $K(x)$ og $E(x)$ er det komplette elliptiske integral af hhv. første og anden art.

Den tilbageprojicerede funktion ses på figur 4.1.



Figur 4.1: Tilbageprojektion af funktionen $\tilde{f}(p, \theta) = 2(1-p^2)^{\frac{1}{2}}$.

a) $B(2(1-p^2)^{\frac{1}{2}})(x, y)$. b) $B(2(1-p^2)^{\frac{1}{2}})(r)$.

For $r = 0$ får tilbageprojektionen værdien 2π og for $r = 1$ får den værdien 4. Sammenlignet med den oprindelige funktion antager den tilbageprojicerede funktion for høje værdier. Derudover kan man se punktspredningen, som er omtalt i kapitel 1.

4.1.3. Udpakning af inversionsformlen

Allerførst vil vi lave nogle simple omskrivninger af inversionsformlen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\|\xi\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi)}{p - \xi \cdot x} dp d\xi \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi)}{p - \xi \cdot x} dp d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi)}{\xi \cdot x - p} dp d\theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vi kan se, at det yderste integral i formel 4.4 er det integral, der svarer til tilbageprojektionen, se formel 4.3. Nu vil vi se på den funktion, der tilbageprojiceres, og i den forbindelse defineres

$$\check{f}_*(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi)}{\xi \cdot x - p} dp \quad (4.5)$$

hvor $t = \xi \cdot x$.

Med denne notation kan inversionsformlen skrives mere kompakt:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} B \check{f}_*(t, \xi)$$

$f(x, y)$ er altså givet ved en tilbageprojektion af $\check{f}_*(t, \xi)$ samt en skalering.

Vi vil nu fortsætte analysen af $\check{f}_*(t, \xi)$.

$$\begin{aligned} \check{f}_*(t, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi)}{t - p} dp \\ &= \frac{1}{p} * \frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Inversionsformlen kan så udtrykkes som en tilbageprojektion af en foldning.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{p} * \frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi) \right) d\theta$$

hvor foldningen opfattes som Cauchy's hovedværdi. Dette kan vanskeligt beregnes numerisk, netop fordi $\frac{1}{p}$ er en singulær funktion.

4.2 Approksimationer

For at man kan anvende inversionsformlen numerisk, må man forsøge at finde en pæn funktion, hvormed den singulære funktion, der er indeholdt i foldningen, kan tilnærmes. Det kan umiddelbart være svært at forestille sig en integrabel funktion, der kan tilnærme $\frac{1}{p}$. Det viser sig imidlertid, at hvis man Fouriertransformerer $\frac{1}{p}$, får man en funktion, der nemmere kan approksimeres. Når man tager den inverse Fouriertransformation af denne approksimerede funktion, får man en integrabel funktion, der tilnærmer $\frac{1}{p}$. Denne funktion får værdien 0 for $p = 0$.

Vi omskriver derfor inversionsformlen til et udtryk, der indeholder Fouriertransformationen.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{p} * \frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(p, \xi) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \left(\frac{1}{p} * \frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(p, \xi) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F} \left(\frac{1}{p} \right) \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(p, \xi) \right) \right) d\theta \end{aligned}$$

Fra linie 1 til linie 2 har vi intet gjort, da \mathcal{F} og \mathcal{F}^{-1} ophæver hinanden, og linie 3 fremkommer ved brug af 4.2.

Vi vil nu finde en funktion, $\tilde{c}(p)$, der approksimerer $\mathcal{F} \left(\frac{1}{p} \right)$ i stedet for en, der approksimerer $\frac{1}{p}$.

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \mathcal{F}^{-1} \left(\tilde{c}(p) \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial p} \tilde{f}(p, \xi) \right) \right) d\theta \quad (4.7)$$

For at finde $\tilde{c}(p)$ vil vi tage Fouriertransformationen af $\frac{1}{p}$.

$$\mathcal{F} \left(\frac{1}{p} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p} e^{-2\pi i k p} dp$$

Vi indfører en ny variabel:

$$\begin{aligned} x &= 2\pi |k| p \\ \frac{dx}{dp} &= 2\pi |k| \end{aligned}$$

For $k > 0$ fås følgende:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(\frac{1}{p}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{2\pi k}{2\pi k} e^{-ix} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x - i \sin x}{x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \sin x}{x} dx \\
 &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= -2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= -2i \frac{\pi}{2} \\
 &= -i\pi
 \end{aligned}$$

I ovenstående udledning har vi benyttet Eulers identiter:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

og

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Integralet af $\frac{\cos x}{x}$, fra $-\infty$ til ∞ er 0, hvis det opfattes som Cauchy's hovedværdi. Integralet af $\frac{\sin x}{x}$ fra $-\infty$ til ∞ er ikke singulært, hvilket kan ses ved rækkeudvikling. Da $\frac{\sin x}{x}$ er en lige funktion, svarer integralet fra $-\infty$ til ∞ til to gange integralet fra 0 til ∞ . $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. [Spiegel, 1991, s. 96].

For $k < 0$ fås noget næsten tilsvarende:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left(\frac{1}{p}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx \\
 &= 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= 2i \frac{\pi}{2} \\
 &= i\pi
 \end{aligned}$$

Disse to udtryk kan sammenfattes til:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{p}\right) = -i\pi \operatorname{sgn}(k) \quad (4.8)$$

hvor $\text{sgn}(k)$ er signumfunktionen, der har denne definition:

$$\text{sgn}(k) = \begin{cases} 1 & \text{for } k > 0 \\ -1 & \text{for } k < 0 \end{cases}$$

For at nå frem til den funktion vi folder med i praksis, skal vi først approksimere funktionen i 4.8 og derefter tage den inverse Fouriertransformation af denne approksimation.

Vi vælger nu at approksimere $\mathcal{F}(\frac{1}{p})$ ved at lade den antage værdien 0 udenfor et bestemt interval. Dette gøres ved at gange en vægtfunktion, $w(k)$, på $\tilde{c}(k)$:

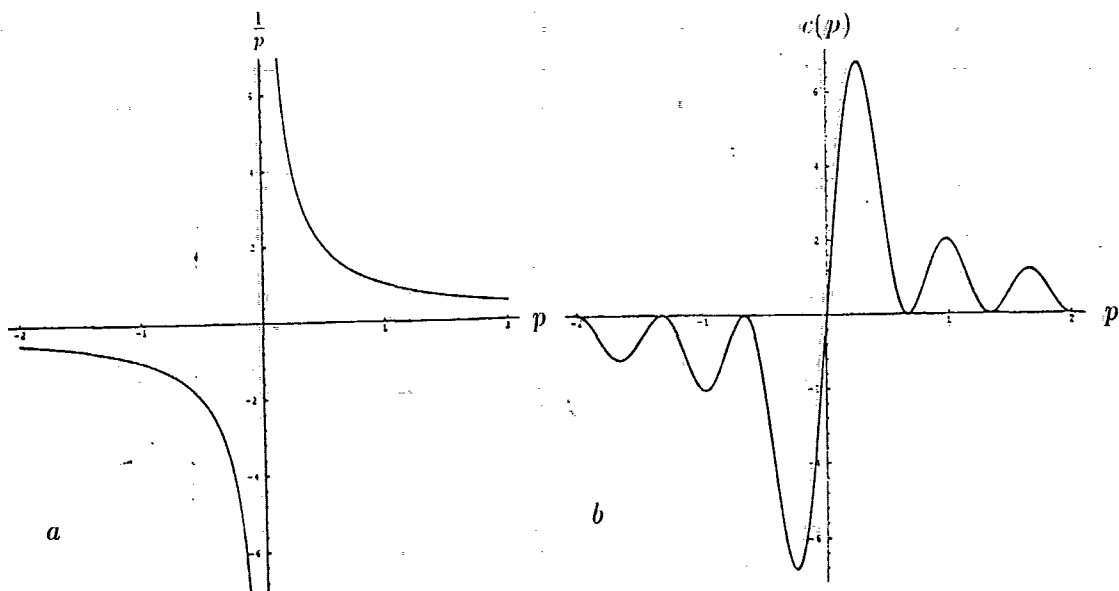
$$\tilde{c}(k) = -i\pi \text{sgn}(k)w(k) \quad (4.9)$$

hvor $w(k)$ er defineret som:

$$w(k) = \begin{cases} 1 & \text{for } k \in [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi tager nu den inverse Fouriertransformation af udtrykket i 4.9.

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1}(\tilde{c}))(p) &= -i\pi \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \text{sgn}(k)e^{2\pi ikp} dk \\ &= -i\pi \left(\int_{-\frac{A}{2}}^0 \text{sgn}(k)e^{2\pi ikp} dk + \int_0^{\frac{A}{2}} \text{sgn}(k)e^{2\pi ikp} dk \right) \\ &= i\pi \int_{-\frac{A}{2}}^0 e^{2\pi ikp} dk - i\pi \int_0^{\frac{A}{2}} e^{2\pi ikp} dk \\ &= \left[\frac{1}{2p} e^{2\pi ikp} \right]_{-\frac{A}{2}}^0 - \left[\frac{1}{2p} e^{2\pi ikp} \right]_0^{\frac{A}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2p} e^{-\pi i Ap} \right) - \left(\frac{1}{2p} e^{\pi i Ap} - \frac{1}{2p} \right) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{2p} (e^{-\pi i Ap} + e^{\pi i Ap}) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{2p} (2 \cos(\pi Ap)) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{\cos(\pi Ap)}{p} \\ &= \frac{1}{p} (1 - \cos(\pi Ap)) = c(p) \end{aligned} \quad (4.10)$$



Figur 4.2: a) $f(p) = \frac{1}{p}$. b) $c(p) = \frac{1}{p}(1 - \cos(3\pi p))$.

På figur 4.2 ses både $\frac{1}{p}$ og den approksimerede funktion, $c(p)$, for $A = 3$.

Udtrykket i 4.10 er den funktion, der skal approksimere $\frac{1}{p}$ og altså den funktion vi folder med. Ved at indsætte 4.10 i formel 4.7 får vi en approksimation for inversionsformlen, der ser ud som følger :

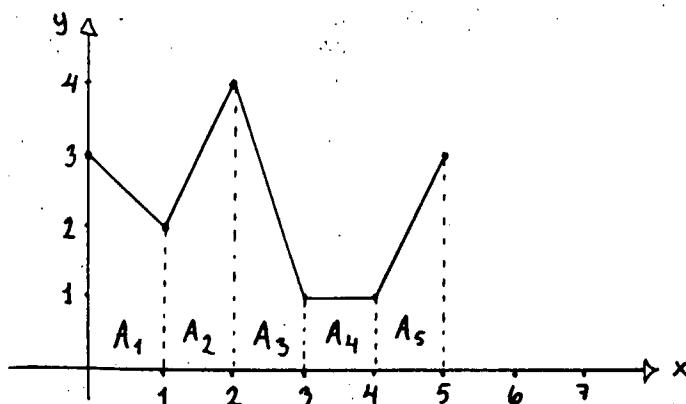
$$f(x, y) \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{1}{p} (1 - \cos(\pi Ap)) * \frac{\partial}{\partial p} \check{f}(p, \xi) d\theta \quad (4.11)$$

For at undgå at skulle tage den afledte af Radontransformationen, vælger vi at omskrive 4.11 til :

$$f(x, y) \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left(\frac{\partial}{\partial p} c(p) * \check{f}(p, \xi) \right) d\theta \quad (4.12)$$

4.3 Praksis

For at lave integralerne i den approksimerede inversionsformel om til summationer over de målinger, der rent faktisk er, benytter vi "trapezreglen". Vi viser et simpelt eksempel, der tydeligt forklarer princippet i denne regel. Eksemplet gennemgås udførligt, da det er vigtigt at være helt fortrolig med metoden, før den overføres til inversionsformlen.



Figur 4.3: Den interpolerede funktion $f(x)$. A 'erne betegner arealerne af de tilhørende trapez'er.

Trapezreglen

Vi ønsker at integrere en funktion $f(x)$ fra $x = 0$ til $x = 5$. Desværre kender vi kun funktionens værdier for $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, så derfor laver vi lineær interpolation mellem funktionsværdierne. Se figur 4.3.

Integralet af funktionen kan nu skrives som summen af disse arealer:

$$\int_0^5 f(x) dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Størrelsen af arealerne er givet ved:

$$A_1 = \frac{f(0) + f(1)}{2} \quad A_2 = \frac{f(1) + f(2)}{2} \quad \text{osv.}$$

Der skal selvfølgelig ganges med længden af delintervallet, men det har i dette eksempel længden 1.

Integralet kan nu skrives:

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x) dx &= \frac{f(0) + f(1)}{2} + \frac{f(1) + f(2)}{2} + \dots + \frac{f(4) + f(5)}{2} \\ &= \frac{f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + 2f(4) + f(5)}{2} \\ &= \sum_{i=0}^5 f(i) - \frac{1}{2}(f(0) + f(5)) \\ &= (3 + 2 + 4 + 1 + 1 + 3) - \frac{1}{2}(3 + 3) = 11 \end{aligned}$$

Dette kan generaliseres til en vilkårlig funktion, $f(x)$:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x - \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_n)) \Delta x$$

Hvor $\Delta x = \left| \frac{x_n - x_0}{n} \right|$ er længden af det enkelte delinterval.

Nu vil vi så overføre trapezreglen til rekonstruktionsalgoritmen.

Vi starter med at betragte selve foldningsdelen af algoritmen. Definitionen af $\check{f}_*(t, \xi)$ kendes fra formel 4.5. Det vi nu skal bruge, er den approksimerede form.

$$\begin{aligned} \check{f}_*(t, \theta) &\approx \left(\frac{\partial}{\partial p} c(p) * \check{f}(p, \theta) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(p, \theta) c'(t-p) dp \end{aligned}$$

Der er endnu ikke taget hensyn til, at der kun eksisterer et endeligt antal måledata. Dette gøres ved at nummerere de p 'er og θ 'er, der måles på. Da foldningen kun foregår i p -variablen, og altså er uafhængig af θ , vil vi i første omgang kun nummerere strålerne, idet der for hver vinkel, θ , er et bestemt antal stråler, der måles på. Vi indfører derfor nogle indeks:

p_i angiver den i 'te stråle i hvert profil. $\check{f}(p_i, \theta)$ er værdien af målingen for den i 'te stråle i profilet for θ . Δp er afstanden mellem to stråler.

$$i \in [-N, N]$$

t_k angiver ligeledes den k 'te plads i profilet, sådan at $\check{f}_*(t_k, \theta)$ er værdien af det "foldede måledata" for den k 'te plads i profilet.

$$k \in [-N, N]$$

Den diskrete foldning kan nu skrives:

$$\begin{aligned} \check{f}_*(t_k, \theta) &\approx \sum_{i=-N}^N \check{f}(p_i, \theta) c'(t_k - p_i) \Delta p \\ &\quad - \frac{1}{2} (\check{f}(p_{-N}, \theta) c'(t_k - p_{-N}) + \check{f}(p_N, \theta) c'(t_k - p_N)) \Delta p \end{aligned}$$

Det foldede måledata til et bestemt t_k i et profil afhænger således af samtlige målinger, $\check{f}(p_i, \theta)$, i det samme profil.

Det var de foldede måledata, men før rekonstruktionen er fulden, skal disse tilbageprojiceres. De vinkler der scannes fra, kalder vi θ_j . $\Delta\theta$ er afstanden mellem vinklerne.

$$j \in [0, M]$$

Da t er afhængig af θ , så er t_k naturligvis også afhængig af θ_j . På side 64 substituerede vi $\xi \cdot x$ med t . Nu substituerer vi tilbage, sådan at t_k 's afhængighed af θ_j kan udtrykkes.

$$\begin{aligned} t &= \xi \cdot x \\ &= x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$t_k = x \cos(\theta_j) + y \sin(\theta_j)$$

Så er der (næsten) ikke mere, der forhindrer os i at rekonstruere densitetsfunktionen.

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & \frac{1}{2\pi^2} \left(\sum_{j=0}^M \tilde{f}_*(x \cos(\theta_j) + y \sin(\theta_j), \theta_j) \Delta\theta \right. \\ & - \frac{1}{2} \tilde{f}_*(x \cos(\theta_0) + y \sin(\theta_0), \theta_0) \Delta\theta \\ & \left. - \frac{1}{2} \tilde{f}_*(x \cos(\theta_M) + y \sin(\theta_M), \theta_M) \Delta\theta \right) \end{aligned}$$

Nu har vi gennemgået de vigtigste trin i udledningen af foldningsalgoritmen. Den form af algoritmen vi er nået frem til, passer til målinger fra parallel-scanning. Når algoritmen skal benyttes til rekonstruktion af måledata fra viftescanning, skal koordinaterne ændres i forhold til den aktuelle geometri.

Der er desuden et led, vi har undladt ved tilbageprojektion. Vi har antaget, at der altid vil gå én stråle fra hvert profil igennem ét bestemt punkt (x, y) . Dette vil naturligvis ikke være tilfældet, når der kun er endelig mange målinger. Når man fra en bestemt vinkel skal bestemme værdien af det foldede måledata, der hører til linien gennem et bestemt punkt (x, y) , kan det derfor være nødvendigt at beregne denne værdi vha. lineær interpolation mellem de 2 omkringliggende foldede måledata.

4.4 Opsamling

Det vi nu har gennemgået i dette kapitel, er en grovskitse af hvordan rekonstruktionen ved CT-scanning foregår. Princippet er at approksimere den singulære funktion, der indgår i inversionsformlen, nemlig $\frac{1}{p}$, med en "pæn" funktion. I vores gennemgang ligger approksimationen i valget af A , idet A bestemmer hvor stort "frekvensinterval" $\frac{1}{p}$ approksimeres indenfor. Men funktionen, $c(p)$, kan naturligvis vælges på mange måder, og hvordan den præcist ser ud i scannerens computerprogram, er en fabriks hemmelighed, som vi ikke har haft mulighed for at få oplyst. Valget af $c(p)$, vil have betydning for det endelige billede, forstået på den måde at man ved at ændre denne funktion også ændrer hvilke vævstyper, der bliver fremhævet mest på billedet. I kapitel 1 blev denne funktion omtalt som en filterfunktion, der skulle vælges før scanning.

Der findes andre rekonstruktionsalgoritmer end foldningsalgoritmen. Sådanne andre analytiske algoritmer vil matematisk være ækvivalente med foldningsalgoritmen, da også de bunder i en omskrivning af Radons inversionsformel. Udledningen af de andre algoritmer vil derfor indeholde stort set de samme trin, som udledningen af foldningsalgoritmen. Disse vil blot optræde i en anden rækkefølge.

Det viser sig, at billeder dannet ud fra samme måledata, men vha. forskellige algoritmer ikke nødvendigvis bliver ens. Forklaringen er, at på et eller andet tidspunkt i udarbejdelsen af algoritmen, vil det altid være nødvendigt at foretage en approksimation. Det kan derfor i forskellige algoritmer, være forskellige funktioner, man må approksimere, og det er dette, som medfører, at algoritmerne ikke altid er ækvivalente i praksis. [Deans, 1893, s. 126].

Litteratur benyttet til dette kapitel:

Apostol, *Mathematical Analysis*, 1971, s. 489-493.

Deans, *The Radon Transform and Some of its Applications*, 1983.

Ledley, *Introduction to Computerized Tomography*, 1976, s. 259-271.

Rowland, *Computer Implementation of Image Reconstruction Formulas*, 1979, s. 9-36.

Kapitel 5

Teori og praksis

Vi har indtil nu set på, hvordan man kommer fra praksis til teori. I dette kapitel vil vi vurdere konsekvenserne af de modelantagelser og metoder, der er gjort brug af undervejs. Af hensyn til de læsere, der er gået let hen over de mere matematisk tunge kapitler, vil vi starte med en opridsning af de vigtigste pointer i sammenkædningen af teori og praksis.

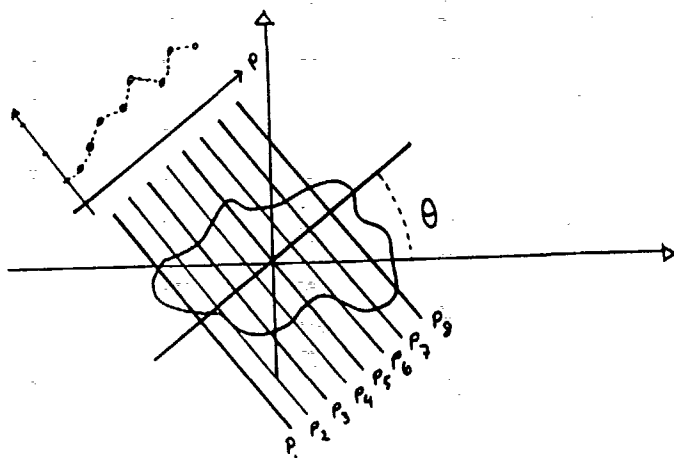
Resultatet af modelkapitlet var en formel, der udtrykte sammenhængen mellem en måling angivet ved P og en funktion μ , der beskriver vævets absorptionskoefficient.

$$P_L = \int_L \mu(x, y) ds \quad (5.1)$$

L angiver hvilken linie i snittet, den pågældende røntgenstråle bevæger sig langs. (x, y) er stedkoordinater i dette snit, således er μ afhængig af hvor i snittet, man befinder sig. Eftersom absorptionskoefficienten opfattes som proportional med vævets densitet, vil det være muligt at få et billede af det ønskede tværsnit ved at beregne funktionen $\mu(x, y)$. Det er netop til dette formål, at Radontransformationen kan benyttes. Radontransformationen af en funktion f er defineret ved:

$$\tilde{f}(p, \theta) = \int_L f(x, y) ds \quad (5.2)$$

Linien L er her angivet mere præcist ved koordinatsættet (p, θ) . Koordinaterne har en direkte relation til de parallelle stråler, man oprindeligt brugte i



Figur 5.1: Profil fra vinklen $\theta = 40^\circ$. p angiver de forskellige stråler.

scannere. θ angiver fra hvilken vinkel profilet er taget, og p angiver en stråle i dette profil. Se figur 5.1.

Ligheden mellem formel 5.1 og 5.2 er tydelig. Målingerne fra en scanning kan derfor opfattes som et udsnit af Radontransformationen af $\mu(x, y)$, noteret ved $\tilde{\mu}(p, \theta)$. Radons inversionsformel angiver, hvordan man kommer tilbage til den oprindelige funktion, når den Radontransformerede funktion er kendt. Denne formel kan derfor bruges til at finde densitetsfunktionen $\mu(x, y)$, idet $\tilde{\mu}$ er givet.

Inversionsformlen kan efter et par omskrivninger opskrives på følgende måde:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \mathcal{B} \left(\frac{1}{p} * \frac{\partial}{\partial p} \tilde{\mu}(p, \theta) \right)$$

Symbolerne \mathcal{B} og $*$ er det vigtigste at bide mærke i. $*$ angiver en foldning mellem de to størrelser i parentes, og \mathcal{B} fortæller, at resultatet derefter skal tilbageprojiceres. Overordnet siger formelen, at måledataene $\tilde{\mu}$ først skal foldes med en funktion $\frac{1}{p}$, og at de foldede måledata derefter skal tilbageprojiceres (\mathcal{B}).

Når måledataene foldes, bliver hver enkelt måling i profilet modificeret i forhold til hele profilet. Herved undgås den punktspredning, der ville opstå ved en tilbageprojektion af de oprindelige måledata.

Man kunne nu tro, at problemet var løst. Men flere forskellige ting gør, at inversionsformlen ikke kan bruges direkte. For det første er den funktion, som måledataene skal foldes med singular, idet $\frac{1}{p}$ ikke er defineret for $p = 0$.

Dette afhjælpes ved at tilnærme $\frac{1}{p}$ med en funktion, $c(p)$ (se afsnit 4.2), der er pæn i matematisk forstand. Funktionen $\frac{1}{p}$ erstattes simpelthen i formlen af en anden funktion, som approksimerer den bedst muligt uden at give anledning til problemer:

$$\mu(x, y) \approx \frac{1}{2\pi^2} \mathcal{B} \left(c(p) * \frac{\partial}{\partial p} \mu(p, \theta) \right) \quad (5.3)$$

Hvordan $c(p)$ ser ud helt præcist, kan vi ikke sige noget generelt om. I praksis bliver der brugt forskellige foldningsfunktioner, alt efter hvad der skal fremhæves på billedet (f.eks. gøre kontraster tydeligere, se også afs. 1.3.2). Dette punkt er noget, CT-scannerfirmaerne konkurrerer om at udvikle optimalt, og det er derfor ikke muligt at få oplyst, hvilke funktioner, der anvendes. Men hovedsagen er, at måledataene modificeres før de tilbageprojiceres. Og at den foldningsfunktion, der står for modereringen er approksimeret i forhold til den, der optræder i Radons inversionsformel.

Da målingerne fra en scanning ikke umiddelbart kan sidestilles med en funktion, er det nødvendigt at diskretisere inversionsformlen. I stedet for (p, θ) er man interesseret i at have nogle tal, der angiver vinkel- og strålenummer. En sidste ting, der tages hensyn til er scannerens geometri. Formel 5.3 ville være til at bruge direkte ved parallelskanning. Der skal altså laves en koordinatstransformation, der passer til de nuværende CT-scanneres viftegeometri.

Når alle disse ting er foretaget, har man opnået at omskrive Radons inversionsformel til et udtryk, hvori målingerne fra en scanning kan indsættes direkte. Det er derfor blevet muligt at anvende den matematiske teori, Radontransformationen, på nogle helt praktiske størrelser.

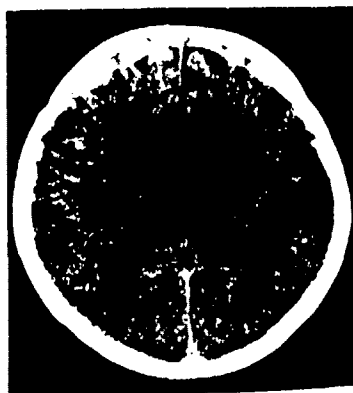
Ligning 5.1, som gjorde det muligt at sidestille målingerne med en Radontransformation af densitetsfunktionen, bygger imidlertid på en del antagelser: For det første opfatter vi et snit som værende uden tykkelse, altså en flade. Dernæst antager vi, at røntgenstrålen kun udbreder sig langs en geometrisk linie. Strålen, som i virkeligheden har både bølge- og partikelegenskaber, forenkles til at skulle opfattes som bestående af fotoner, der alle har samme energi. Endelig vælger vi at sige, at absorptionen af røntgenstrålen er proportional med kroppens densitet. De fysiske objekter har således fået nogle idealiserede egenskaber, der ikke stemmer helt overens med virkeligheden. Spørgsmålet er, hvor gode disse antagelser er. En måde at besvare dette spørgsmål på, er at kigge på de fejl, der optræder i scanningsbilleder. På forhånd er det klart, at der er mange kilder til fejl, fra røntgenstrålerne passerer gennem objektet, og til det færdige billede viser sig på skærmen. Udover modelantagelserne, kan man forestille sig, at både algoritmen og rent tekniske detaljer kan forårsage unøjagtigheder. På baggrund af, at vi kun

har haft mulighed for at give en principiel beskrivelse af den anvendte algoritme, og derudover ikke er bekendt med hele den tekniske side af sagen, er det interessant at se, hvor langt vi kan nå i forståelsen af de enkelte fejl.

5.1 Placering af fejl

Undervejs i projektforsøget har vi besøgt tre scanningsafdelinger. Lægerne på disse afdelinger har, ud over at fortælle om selve arbejdsgangen ved en scanning også, sat os ind i problemerne ved tolkning af billederne. Ud fra disse samtaler har vi valgt de fejl, som optræder oftest, og som derfor er vigtigst at få hold på.

En fejl, der tit optræder er "partial volume effect". På billedet ses den som skygger ved f.eks. knogler. Fejlen er nem at placere som en følge af antagelsen om, at et snit ingen tykkelse har. Idet man forsøger at beskrive et snit af kroppen på en flade, reducerer man noget 3-dimensionalt til noget 2-dimensionalt. Det, der kan give vanskeligheder er organer, som ligger på skrå i forhold til den retning, snittene tages i. Fejlen ses i randen af det pågældende objekts afbildning på billedet, fordi det kun vil være en del af det, som ligger i snittet. På den måde kan noget af objektet få tildelt en lavere densitetsværdi end det egentlig skulle, da kun en del af det måles i snittet. Problemet kan afhjælpes ved at gøre snittene tyndere. Det medfører imidlertid mere støj, hvilket så igen må afhjælpes med en større dosis. Ydermere kan det modvirkes ved at vippe gantry'et, således at man undgår de problematiske områder. Se figur 5.2.



Figur 5.2: Partial volume effect ses øverst i billedet som en skygge langs hjerne-skallen. [Lange et al., 1989, s. 14].

Fejlen er naturligvis et problem, men som regel vil lægerne kunne genkende den. I nogle tilfælde kan det dog være umuligt at skelne, og man er derfor nødt til at træffe et valg, der senere kan vise sig at være forkert. Vi har f.eks. kendskab til en erstatningssag, der blev rejst på baggrund af, at et barn var blevet fejlbehandlet. Det drejede sig om en hjernescanning, hvor man observerede en skygge langs selve kraniet. Den blev tolket som en blodansamling, og man valgte derfor at operere, men fandt intet. Hvis det havde været en blodansamling, ville det have været fatalt ikke at operere. Da en blodansamling ville have set ud på samme måde, og det derfor ikke var muligt at skelne, blev erstatningssagen tabt. [Overlæge Sven Dorph, Herlev Amtssygehus]. Det, der kan ske, er altså ikke bare, at sygdomme kan blive overset, fordi de forveksles med fejl på billedet, men ikke eksisterende sygdomme kan også blive diagnosticeret.

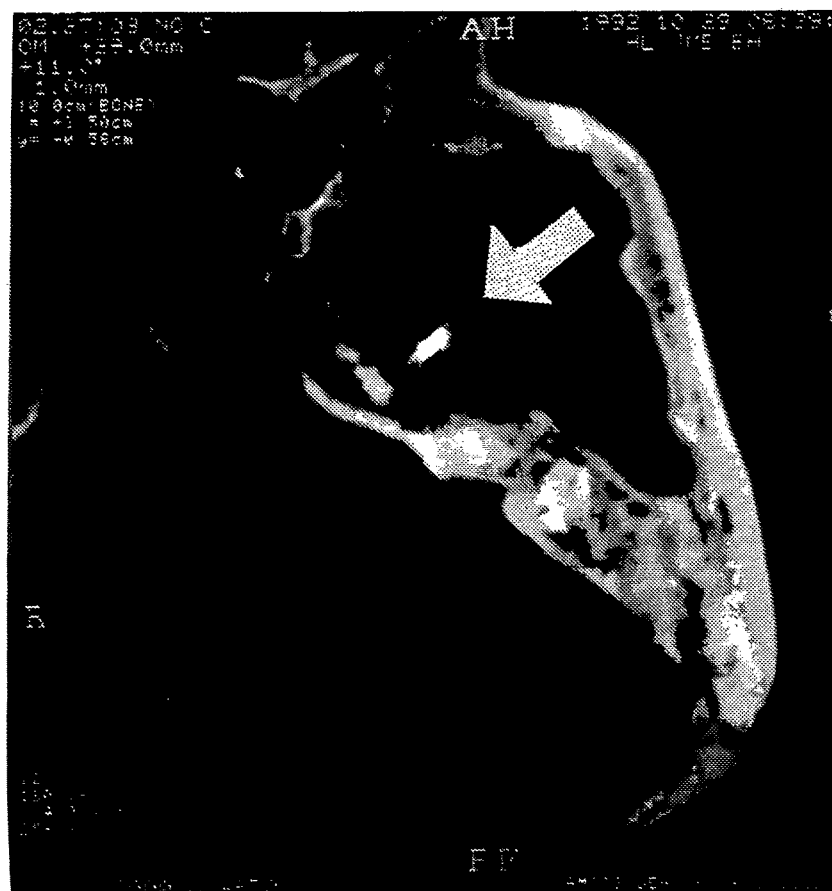
Hvis en patient har en indopereret metalclips giver det anledning til en meget kraftig forstyrrelse af billedet. Fejlen ses som et stjerneformet mønster med metalclipsen i centrum. Se figur 5.3. Dette ligner kraftigt punktspredningen, som er omtalt i kapitel 1. Foldningen af måledataene skulle afhjælpe netop dette fænomen. Når det alligevel viser sig, må det skyldes, at foldningsfunktionen bliver approksimeret i algoritmen. Jo større densitetsforskellen er, jo vigtigere bliver foldningsfunktionen. En lille approksimation i foldningsfunktionen, vil derfor ses tydeligt netop i store overgange som ved metal.

En medvirkende årsag kunne endvidere være, at de tunge stoffer, som metalclips består af giver anledning til nogle andre absorptionsprocesser end resten af vævet. Antagelsen om, at der er proportionalitet mellem densitet og absorption bunder i, at det er Compton-effekten, som dominerer. Dette er imidlertid ikke tilfældet ved tunge grundstoffer som metal. Her vil den fotoelektriske effekt have størst indflydelse. Når den fotoelektriske effekt optræder i stor udstrækning, stiger absorptionskoefficienten. Metallet vil således absorbere så meget, at der ikke længere er den samme proportionalitet mellem vævets densitet og absorption.

a

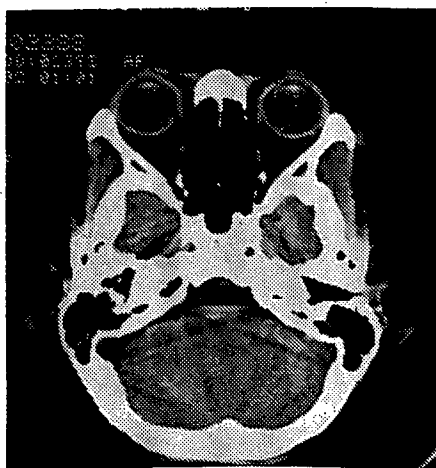


b



Figur 5.3: a) Oversigtsbillede af kraniet, hvor placeringen af metalclipsen kan ses. b) På scanningsbilledet ses metalfejlen som et stjerneformet mønster ud fra metalclipsen. [Scannerafsnittet, Roskilde Amtssygehus, 1992].

Den fotoelektriske effekt optræder også ved de lave energier i røntgenstrålens spektrum. Dette forårsager en af de mest udbredte fejl; beamhardening (også omtalt i afs. 1.2.1). Fejlen kan derfor placeres som en følge af opfattelsen af røntgenstrålen, som bestående af fotoner med samme energi. At de lave energier i røntgenstrålespektret absorberes hurtigst, giver fejl, hvis absorptionen af strålerne ikke er af samme størrelsesorden. En måde at modvirke beamhardening på, er at lade strålen passere igennem et "kropsfilter", således at alle stråler tilbagelægger den samme afstand. Herved vil det være den samme del af røntgenstrålens energispektrum, der er blevet absorberet. På billedet ses beamhardening som striber. Se figur 5.4.



Figur 5.4: Beamhardening effekten ses svagt som en vifte af striber nederst i billedet. [Scannerafsnittet, Roskilde Amtssygehus, 1992].

Ud over de gennemgæede fejl findes der en del andre, som med det samme kan placeres som resultat af noget, der kunne være undgået. Det gælder f.eks. detektorfejl eller striber i billedet forårsaget af, at den person, der bliver scannet, har bevæget sig.

De fleste fejl er forholdsvis lette at genkende. Det gælder specielt for striberne, der optræder ved beamhardening og det stjerneformede mønster ved punktspredning. Skygger der optræder ved partial volume effekten kan være lidt mere problematiske, som det fremgår af tilfældet med den manglende blodansamling.

Gennemgangen af fejlene gav det resultat, at de grundlæggende modelantagelser faktisk spiller en stor rolle for billedkvaliteten. Da en del af fejlene således bundes i noget meget fundamentalt, vil de ikke være til at eliminere fuldstændig. Eftersom vi ikke har kendskab til alle led i de algoritmer, der rent faktisk bliver anvendt i scannere, skal gennemgangen selvfølgelig tages

med et vist forbehold. Det har ikke været hensigten at denne rapport skulle munde ud i nogle fuldstændige forklaringer af samtlige fejl, der findes på billeder. Hovedformålet har været at afklare, hvordan Radontransformationen anvendes i CT-scanning. At denne forståelse så viste sig at kunne give en del af forklaringen på de mest typiske fejl er et tegn på, at en forståelse af de mest fundamentale principper i en given matematisk model også kan være givende på andre niveauer.

Appendiks A

Fouriertransformation

Fouriers sætning siger, at enhver "pæn" periodisk funktion kan udtrykkes som en uendelig sum af cosinus- og sinusfunktioner. Dette kaldes Fourier-rækken for en given funktion.

Hvis funktionen har perioden $2l$, kan den opskrives som følgende Fourier-række:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) \quad (\text{A.1})$$

hvor a_n og b_n er Fourierkoefficienterne:

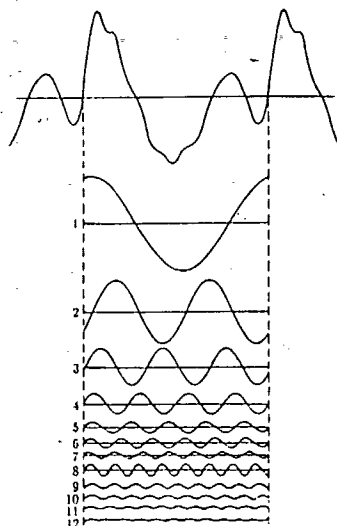
$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

Ved Fourieranalyse af en funktion bestemmer man hvilke frekvenser og bølgelængder, der indgår i Fourierrækkens cosinus- og sinusfunktioner. Se figur A.1.

A.1 Fourierkoefficienter

De forskellige cosinus- og sinusfunktioner, der indgår i Fourierrækken for en given funktion, udgør en mængde af ortogonale basisfunktioner for funktionen. Når vi finder funktionens Fourierkoefficienter, så bestemmer vi komponenterne i forhold til disse ortogonale funktioner. Hvordan disse komponenter findes, vil vi beskrive med et lille simpelt eksempel:



Figur A.1: Fourieranalyse af en periodisk funktion. [Alonso, 1980, Vol. 1, s. 360].

V er en vektor, der kan udtrykkes ved en linearkombination af de tre ortogonale vektorer X , Y og Z .

$$\begin{aligned}
 V &= a_1 X + a_2 Y + a_3 Z \Leftrightarrow \\
 V \cdot X &= a_1 X \cdot X + a_2 Y \cdot X + a_3 Z \cdot X \Leftrightarrow \\
 V \cdot X &= a_1 \|X\|^2 \Leftrightarrow \\
 a_1 &= \frac{V \cdot X}{\|X\|^2} \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

idet det indre produkt mellem to ortogonale vektorer er nul.

Vi definerer det indre produkt mellem to funktioner således:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-l}^l f(t)g(t)dt$$

Cosinusfunktionerne er ud fra denne definition ortogonale (p og q er forskellige hele tal):

$$\begin{aligned}
 \langle \cos(\frac{p\pi t}{l}), \cos(\frac{q\pi t}{l}) \rangle &= \int_{-l}^l \cos(\frac{p\pi t}{l}) \cos(\frac{q\pi t}{l}) dt = \\
 &= \left[\frac{l}{p\pi} \sin(\frac{p\pi t}{l}) \cos(\frac{q\pi t}{l}) \right]_{-l}^l + \frac{q}{p} \int_{-l}^l \sin(\frac{p\pi t}{l}) \sin(\frac{q\pi t}{l}) dt =
 \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{ql}{p^2\pi} \cos\left(\frac{p\pi t}{l}\right) \sin\left(\frac{q\pi t}{l}\right) \right]_{-l}^l + \frac{q^2}{p^2} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{p\pi t}{l}\right) \cos\left(\frac{q\pi t}{l}\right) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_{-l}^l \cos\left(\frac{p\pi t}{l}\right) \cos\left(\frac{q\pi t}{l}\right) dt = \frac{q^2}{p^2} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{p\pi t}{l}\right) \cos\left(\frac{q\pi t}{l}\right) dt$$

For $\frac{q^2}{p^2} \neq 1$ må det indre produkt være 0, for at lighedstegnet er opfyldt.

Fourierkoefficienterne kan beregnes vha. A.2.

$$a_n = \frac{\langle f(t), \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \rangle}{\|\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\|^2} = \frac{\int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt}{\int_{-l}^l \cos^2\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt}$$

hvor

$$\int_{-l}^l \cos^2\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin\left(2\frac{n\pi t}{l}\right)}{4\frac{n\pi}{l}} \right]_{-l}^l = l$$

Hermed bliver Fourierkoefficienterne

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

Noget tilsvarende kan vises for sinusfunktionerne.

Ved at bruge Euleridentiteten, $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$, kan Fourierrækken skrives på kompleks form:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi t}{l}} \quad (\text{A.3})$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{l}} dt \quad n = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Sammenhængen mellem de komplekse og de reelle Fourierkoefficienter bliver derfor:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{l}} dt \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) \left(\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \end{aligned}$$

I den komplekse Fourierrække indgår a_n og b_n således for både positive og negative værdier af n . For at A.1 og A.3 skal være ækvivalente gælder der at:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{-n} \\ b_n &= -b_{-n} \end{aligned}$$

Vi har da:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi t}{l}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - ib_n) \left(\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \left(\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) + b_n \left(-i \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

Da sinus er ulige og cosinus er lige fås

$$\begin{aligned} a_n i \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) &= -a_{-n} i \sin\left(-\frac{n\pi t}{l}\right) \\ b_n i \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) &= -b_{-n} i \cos\left(-\frac{n\pi t}{l}\right) \end{aligned}$$

Disse led forsvinder derfor, når der summeres over n fra minus uendelig til uendelig. Ligeledes fås:

$$\begin{aligned} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) &= a_{-n} \cos\left(-\frac{n\pi t}{l}\right) \\ b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) &= b_{-n} \sin\left(-\frac{n\pi t}{l}\right) \end{aligned}$$

Dermed får vi til slut:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \right) \end{aligned}$$

Dermed har vi vist sammenhængen mellem A.1 og A.3.

A.2 Fourierintegralet

Fouriertransformationen af en funktion viser sammenhængen mellem frekvens og amplitude på de bølger, der indgår i Fourierrækken for funktionen.

Dvs. at variabelen i den Fouriertransformerede funktion er frekvensen og funktionsværdien er et udtryk for amplituden. Fouriertransformationen af en periodisk funktion er således en diskret funktion.

Hvis funktionen ikke er periodisk, bliver Fouriertransformationen kontinuert, og der er amplituder til alle frekvenser. Se figur A.2. Fourierrækken er så ikke længere en række, men et Fourierintegral.

Vi vil her skitsere hvordan Fourierintegralet kan udledes ud fra den komplekse Fourierrække, og dermed nå frem til Fouriertransformationen og dens inversionsformel. Ideen er, at undersøge grænseværdien for Fourierrækken, når periodelængden går mod uendelig.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{n\pi t}{l}} dt e^{i \frac{n\pi t}{l}} \quad (\text{A.4})$$

Vi substituerer med $k = \frac{n}{2l}$ og $\Delta k = \frac{1}{2l}$.

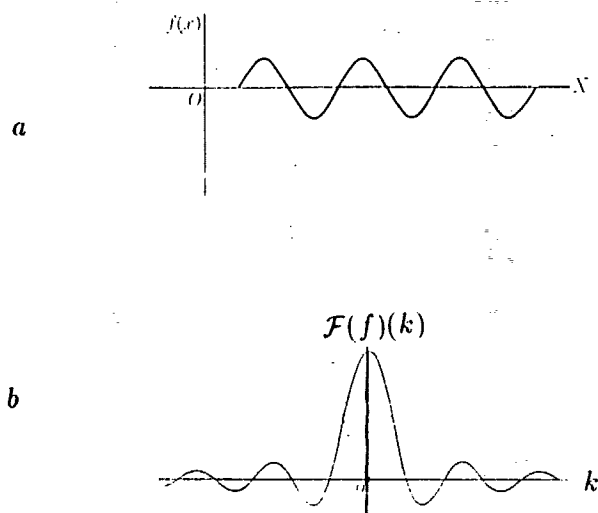
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \int_{-l}^l f(t) e^{-i2\pi kt} dt e^{i2\pi kt}$$

Fourierintegralet fås nu ved at tage grænseværdien for l gående mod uendelig:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi kt} dt e^{i2\pi kt} dk$$

Det inderste integral defineres nu til at være Fouriertransformationen $\mathcal{F}(f)$, og det yderste integral inversionsformlen.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi kt} dt \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(k) e^{i2\pi kt} dk \end{aligned}$$



Figur A.2: a) En ikke periodisk funktion. b) Fouriertransformationen af funktionen. [Alonso, 1983, Vol. 2, s. 295-296].

Litteratur benyttet til dette appendiks

Deans, The Radon Transform and Some of its Applications, 1983, s. 96-100.

Ditkin & Prudnikov, Integral Transforms and Operational Calculus, 1965, kap. 1.

Jensen, Matematisk Analyse, 1984, Bind 4, s. 187-231, 349-361.

Litteraturliste

- Alexander, J.; 1986
Computed Tomography
Siemens
- Alonso, M. & Finn, E.J.; 1980
Mechanics and Thermodynamics, afsnit 12.14
Addison-Wesley Publishing Company
- Alonso, M. & Finn, E.J.; 1983
Fields and Waves, afsnit 10.3
Addison-Wesley Publishing Company
- Apostol, T.M.; 1969
Calculus, vol. II
John Wiley & sons, Inc.
- Apostol, T.M.; 1971
Mathematical Analysis, s. 489-493
Addison-Wesley Publishing Company
- Beiser, A.; 1967
Concepts of Modern Physics, s. 40-60
McGraw-Hill Book Company
- Bentzen, S.M.; 1986
Quantitative Computed Tomography, s. 1-40, 85-91
Århus Universitet
- Birkhoff, G.D.; 1968
Collected Mathematical Papers, vol. III, s. 805-835
Dover Publications, Inc.
- Brigham, E.O.; 1988
The Fast Fourier Transform and its Applications, s. 1-50
Prentice-Hall, Inc.
- Brooks, R.A. & di Chiro, G.; 1976
Principles of Computed Assisted Tomography (CAT) in Radiographic and
Radioisotopic Imaging
Physics in Medicine and Biology, vol. 21, no. 5, s. 689-732, 1976
- Cormack, A.M. & Doyle, B.J.; 1977
Algorithms for Two-dimensional Reconstruction
Physics in Medicine and Biology, vol. 22, no. 5, s. 994-997, 1977
- Cormack, A.M.; 1980
Early Two-dimensional Reconstruction and

- Recent Topics Stemming from It
Science, vol. 209, s. 1482-1486, sep. 1980
- Cormack, A.M.; 1976
Sampling the Radon transform with Beams of Finite Width
Physics in Medicine and Biology, vol. 23, no. 6, s. 1141-1148, 1978
- Courant, R. & Hilbert, D.; 1962
Methods of Mathematical Physics, vol. II, s. 676-681
Interscience Publishers
- Deans, S.R.; 1983
The Radon Transform and Some of Its Applications
John Wiley & sons, Inc.
- Ditkin, V.A. & Prudnikov, A.P.; 1965
Integral Transforms and Operational Calculus, kap. 1
Pergamon Press
- Evans, R.D.; 1955
The Atomic Nucleus, s. 712
McGraw-Hill
- Gordon, R., Hermann, G.T. og Johnson, S.A.; 1975
Image Reconstruction from Projections
Scientific American, s. 56-68, okt. 1975
- Hansen, Erik; 1971
Sædvanlige differentialligninger fra fysikken, s. 15-20
Polyteknisk Forlag
- Heitler, W.; 1984
The Quantum Theory of Radiation, s. 362-367
Dover Publications, Inc.
- Hounsfield, G.N.; 1980
Computed Medical Imaging
Science, vol. 210, s. 22-28, okt. 1980
- Jensen, Helge Elbrønd; 1984
Matematisk Analyse, Bind 4, s. 187-231, 349-361
Matematisk Institut, Danmarks Tekniske Højskole
- Lange, S., Grumme, T., Kluge, W., Ringel, K. og Meese, W.; 1989
Cerebral and Spinal Computerized Tomography, s. 1-14
Schering AG
- Ledley, R.S.; 1976
Introduction to Computerized Tomography
Computers in Biology and Medicine, vol. 6, s. 239-246, 1976

Rowland, S.W.; 1979

Computer Implementation of Image Reconstruction Formulas

Topics in Applied Physics, vol. 32, s. 9-36, 1979

Springer-Verlag

Shepp, L.A. & Kruskal, J.B.; 1978

Computerized Tomography: The New Medical X-Ray Technology

The American Mathematical Monthly, vol. 85, s. 420-438, 1978

Stockham, C.D.; 1979

A Simulation Study in Computed Tomography

Radiology, vol. 132, no. 3, s. 721-726, sep. 1979

Spiegel, M.R.; 1991

Mathematical Handbook og Formulas & Tables

McGraw-Hill

Swindell, W. & Barrett, H.H.; 1977

Computerized tomography: taking sectional x rays

Physics Today, s. 32-41, dec. 1977

Tanaka, E. & Iinuma, T.A.; 1975

Correcting Functions for Optimizing the Reconstructed Image in Transverse Section Scan

Physics in Medicine and Biology, vol. 20, no. 5, s. 789-798, 1975

Produktbrochurer fra Siemens og Picker

Picker, PQ-2000, 1990

Picker, PQ-2000, CT Imaging System

Product Data, 1990

Siemens

SOMATOM HiQ-S Image Quality Guide, (intet årstal)

Siemens

The Next Step in Continuous Rotation CT, SOMATOM PLUS-S: The Volume Scanner, (intet årstal)

- 1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen
- 2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.
- 3/78 "OPCAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.
- 4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.
- 5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.
- 6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.
- 8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinarium".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen,
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.
- 11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.
- 12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.
- 13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.
- 14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.
- 15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
- 16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.
- 18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978.
Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)
- 19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen
- 21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S. Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.
- 22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af reality".
Af: Helge Kragh.
-
- 24/80 "MATEMATIKOPFATTELSE HOS 2.G'ERE".
a+b 1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.
- 26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.
- 27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC'S PHYSICS".
Af: Helge Kragh.
- 28/80 "DILENTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentiaalligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.
- 31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MØNDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.
- 32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER - GER MØSSBAUEREFFEKTIVITÄT".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.
- 33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.
- 34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

- 35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.
- 36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.
- 37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.
-
- 38/81 "TIL EN HISTORIE TEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.
- 39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.
- 40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.
- 41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.
- 42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.
- 43/81 1. "COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2. "ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.
- 44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
-
- 45/82 Er aldrig udkommet.
- 46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDELSE-1+1 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O. Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.
- 47/82 "BARSBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.
- 48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedersen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showlki.
Vejleder: Mogens Niss.
- 49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.
- 50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PICERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK?".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.
- 52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.
- 54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.
- 55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Højrup.
Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.
- 56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.
-
- 57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET" -
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.
- 58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.
- 59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.
- 60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE" - et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.
- 61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Højrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.
- 62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Højrup.
- 63/83 "CREATING ENERGY FUTURES: A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.
- 64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Bernhelm Booss og Jens Højrup.
- 65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.
- 66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.
- 67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?".
Projektrapport af: Lone Billmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.
- 68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK" - til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

- 69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i l.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.
- 70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.
- 71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussann Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.
- 72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 73/83 "EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.
-
- 74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.
- 75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Linear programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.
- 76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringsvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.
- 77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.
- 78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Heddal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.
- 80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.
- 81/84 "FREKVENSafhængig ledningsevne i amorft germanium".
Specialrapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.
- 82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTO - MATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.
- 83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. 1
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået
- 84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.
- 85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialrapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.
- 87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.
- 89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
-
- 90/84 "ENERGI I l.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.
- 91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.
- 93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.
- 95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen
- 96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lillethorup.
Vejleder: Bent Sørensen.
- 97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
- 98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSDALDEREN".
Af: Bent Sørensen.
- 99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klinton.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
- 100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.
- 101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.
- 102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØRS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

- 103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
 Projekt rapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
 Vejleder: Bent Sørensen.
- 104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
 Af: Jens Jæger.
- 105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT OF THE GLASS TRANSITION".
 Af: Tage Christensen.
- "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
 Af: Jeppe C. Dyre.
 Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.
- 106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
 Af: Bent Sørensen.
- 107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI",
 - flodblindhed som eksempel på matematisk modelle-
 ring af et epidemiologisk problem.
 Projekt rapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye,
 Carsten Holst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling
 Møller Pedersen.
 Vejleder: Jesper Larsen.
- 108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CUR-
 RICULUM" - state and trends -
 Af: Mogens Niss.
- 109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på
 studenteroplysninger fra RUC.
 Projekt rapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Kat-
 ler og Torben J. Andreasen.
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
 Af: Bent Sørensen
- 111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
 Projekt rapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones
 og Jimmy Staal.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION
 FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
 Projekt rapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal,
 Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn
 Physant.
 Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.
- 113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS II".
 Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.
- 114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE
 AF KONFIGURATIONSTABELLER".
 Projekt rapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen
 og Arne-Lise von Moos.
 Vejleder: Jørgen Larsen.
- 115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
 Af: Mogens Niss.
- 116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-
 NELDEL RULE".
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
 Af: Jacob Mørch Pedersen.
 Vejleder: Bent Sørensen
- 118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE
 PEIRCE OG FYSIKKEN".
 Af: Peder Voetmann Christiansen
- 120/86 "ET ANIÅL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
 Af: Jørgen Larsen
- 121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
 Af: Peder Voetmann Christiansen.
- 122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
 Af: Jeppe C. Dyre.
- 123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
 Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.
- 124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
 Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.
- 125/86 "UVBY, 6 - systemet - en effektiv fotometrisk spektral-
 klassifikation af B-, A- og F-stjerner".
 Projekt rapport af: Birger Lundgren.
- 126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
 Projekt rapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
 Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.
- 127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE
 ALGEBRA".
 Projekt rapport af: Pernille Sand, Heine Larsen &
 Lars Frandsen.
 Vejleder: Mogens Niss.
- 128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
 Projekt rapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
 Vejleder: Jeppe Dyre.
- 129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
 Lecture Notes 1983 (1986)
 Af: Bent Sørensen
- 130/86 "Studies in Wind Power"
 Af: Bent Sørensen
- 131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historie-
 projekt om naturanskuelsens historiske udvikling
 og dens samfundsmæssige betingethed.
 Projekt rapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd,
 Andy Wierød.
 Vejledere: Jens Højrup, Jørgen Vogelius,
 Jens Højgaard Jensen.
- 132/86 "FYSIK OG DANNEELSE"
 Projekt rapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
 Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.
- 133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
 ENERGY SERIES NO. 15."
 Af: Bent Sørensen.
-
- 134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
 Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen,
 Petr Visčor
- 135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSES-
 TEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
 MATEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
 Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen
- 136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens
 første og andet møde med græsk filosofi"
 Projekt rapport af Frank Colding Ludvigsen
 Vejledere: Historie: Ib Thiersen
 Fysik: Jens Højgaard Jensen
- 137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE
 FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
 Af: Jeppe Dyre
 Vejledere: Niels Boye Olsen og
 Peder Voetmann Christiansen.
- 119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT
 KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
 Af: Iben Maj Christiansen
 Vejleder: Mogens Niss.

- 138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell
- 140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"
By: Jens Gravesen
- 141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"
Projektrapport af Finn C. Physant
Vejleder: Ib Thiersen
- 142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski
- 143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"
af: Mogens Brun Heefelt
- 144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach"
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.
By: Peder Voetmann Christiansen
- 145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987
By: Mogens Niss
- 146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.
Fysikspeciale af Jan Vedde
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Višćor
- 147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt
- 148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"
af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen
- 149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"
by: Petr Višćor
- 150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"
by: Petr Višćor
- 151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"
Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal
Vejleder: Mogens Niss
- 152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"
by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski
- 153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale
Af: Hans Hedal
Vejleder: Ib Thiersen
- 154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"
By: Jeppe Dyre
- 155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"
by: Michael Pedersen
- 156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 157/88 "STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."
by: Michael Pedersen
- 158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"
by: Jeppe Dyre
- 159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"
by: Bent Sørensen
- 160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"
by: Jens Gravesen
- 161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS: Dirichlet feedback control problems"
by: Michael Pedersen
- 162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"
AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen,
Jette Reich, Mette Vedelsby
- 163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"
Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frølllesen
Vejleder: Jesper Larsen
- 164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"
Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen
- 165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"
by: Jens Gravesen

- 166/88 "Grundbegreber i Sandsynlighedsregningen"
Af: Jørgen Larsen
- 167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"
Af: Jørgen Larsen
- 168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.
Fysikspeciale af:
Birger Lundgren
Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ
- 169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."
Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.
Introduktion og oversættelse:
Peder Voetmann Christiansen
- 170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988
- 171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"
af: Johnny Tom Ottesen
- 172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"
Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.
Fysikprojekt af:
Erik Lund og Kurt Jensen
Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen
-
- 173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"
af: Mogens Brun Heefelt
- 174/89 "GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"
af: Peder Voetmann Christiansen
- 175/89 "AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION"
af: Michael Pedersen
- 176/89 "A MAXIMUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"
af: Jeppe Dyre
- 177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"
af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen
Vejleder: Mogens Brun Heefelt
- 178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"
af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden
vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen
- 179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer
- 180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".
af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"
by: Jeppe Dyre
- 183/89 "MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction
by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)
- 184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmfylde af en underafkølet væske ved glasovergangen"
af: Tage Emil Christensen
-
- 185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"
Et matematisk projekt
af: Steen Grode og Thomas Jessen
Vejleder: Jacob Jacobsen
- 186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"
redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen
- 187/90 "RSA - et kryptografisk system"
af: Annemette Sofie Olufsen, Lars Frellesen og Ole Møller Nielsen
Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk
- 188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"
by: Jeppe Dyre
- 189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER
af: Finn Langberg

- 190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"
by: Jeppe Dyre
- 191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C*-ALGEBRAS"
by: Iain Raeburn and Dana P. Williams
- 192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases and SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"
by: Viggo Andreasen
- 193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"
by: Stig Andur Pedersen
- 194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Projektrapport af: Frank Olsen
- 194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport
Projektrapport af: Frank Olsen
- 195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.
Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:
Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"
- en projektrapport om kaos' paradigmatisk status i fysikken.
af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL"
af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"
Speciale
af: Frank Olsen
- 199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling
af: Jens Højgaard Jensen
- 200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"
Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.
af: Mogens Niss
- 201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraction"
af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen
Vejledere: Petr Višćor, Ole Bakander
- 202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.
af: Peder Voetmann Christiansen
- 203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990
afløser tekst 170/88
-
- 204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"
et Breddemodul Fysik Projekt
af: Thomas Jessen
Vejleder: Petr Višćor
- 205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"
by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)
- 206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"
Eksperimentelt Fysikspeciale
af: Jeanne Linda Mortensen og Annette Post Nielsen
Vejleder: Petr Višćor
- 207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"
by: Jeppe C. Dyre
- 209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.
af: Helge Kragh
- 210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Seperable Subalgebras with Unitality Condition."
by: Lars Kadison
- 211/91 "I SANDHEDENS TJENESTE"
- historien bag teorien for de komplekse tal.
af: Lise Arleth, Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Kamma Tulinius.
Vejledere: Jesper Larsen og Bernhelm Booss-Bavnbek
- 212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"
by: Lars Kadison
- 213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host"
by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

- 214|91 "Halløj i æteren" - om elektromagnetisme. Oplæg til undervisningsmateriale i gymnasiet.
Af: Nils Kruse, Peter Gastrup, Kristian Hoppe, Jeppe Guldager
Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal
- 215|91 "Physics and Technology of Metal-Insulator-Metal thin film structures used as planar electron emitters"
by: A. Delong, M. Drsticka, K. Hladil, V. Kolarik, F. Olsen, P. Pavelka and Petr Viscor.
- 216|91 "Kvantemekanik på PC'eren"
af: Thomas Jessen
-
- 217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"
by: Mogens Niss
- 218/92 "A Three-Square Theorem"
by: Lars Kadison
- 219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"
af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen
Vejleder: Jesper Larsen
- 220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"
af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen
Vejleder: Stig Andur Pedersen
- 221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"
by: Thomas P. Branson, Gestur Ólafsson and Henrik Schlichtkrull
- 222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics
by: Johnny T. Ottesen
- 223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT
by: Thomas P. Branson
- 224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES
by: Jeppe C. Dyre
- 225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krySTALLINSK silicium
af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard
Vejleder: Petr Viscor
- 226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"
by: Bent Sørensen
- 227/92 "Computersimulering og fysik"
af: Per M. Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B. Schrøder, Ivar P. Zeck
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
- 228/92 "Teknologi og historie"
Fire artikler af:
Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal
- 229/92 "Masser af information uden betydning"
En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativt basseret på andenordens kybernetik og semiotik.
af: Søren Brier
- 230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"
et matematisk projekt af
Karen Birkelund, Bjørn Christensen
Vejleder: Johnny Ottesen
- 231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen
- 231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster
af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen
Vejledere: Johnny Ottesen, H.B. Hansen
- 232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"
af: L. Arleth, G.I. Dybkjær, M.T. Østergård
Vejleder: Dorthe Posselt
- 233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility"
by: Viggo Andreassen
- 234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"
by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey
- 235/92 OVERLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS - Modul 3 fysik projekt -
af: Thomas Jessen
-

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse
Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler
Om særlige matematiske fæns betydning for
den matematiske udvikling

af: Claus Dråby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsø Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss