TEKST NR 242 1993

Brovedligeholdelse – bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer

Linda Kyndlev

Kåre Fundal

Kamma Tulinius

Ivar Zeck

Vejleder : Jesper Larsen

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, DK–4000 Roskilde

Brovedligeholdelse - bevar mig vel
Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer.

af: Linda Kyndlev
Kåre Fundal
Kamma Tulinius
Ivar Zeck

Vejleder: Jesper Larsen

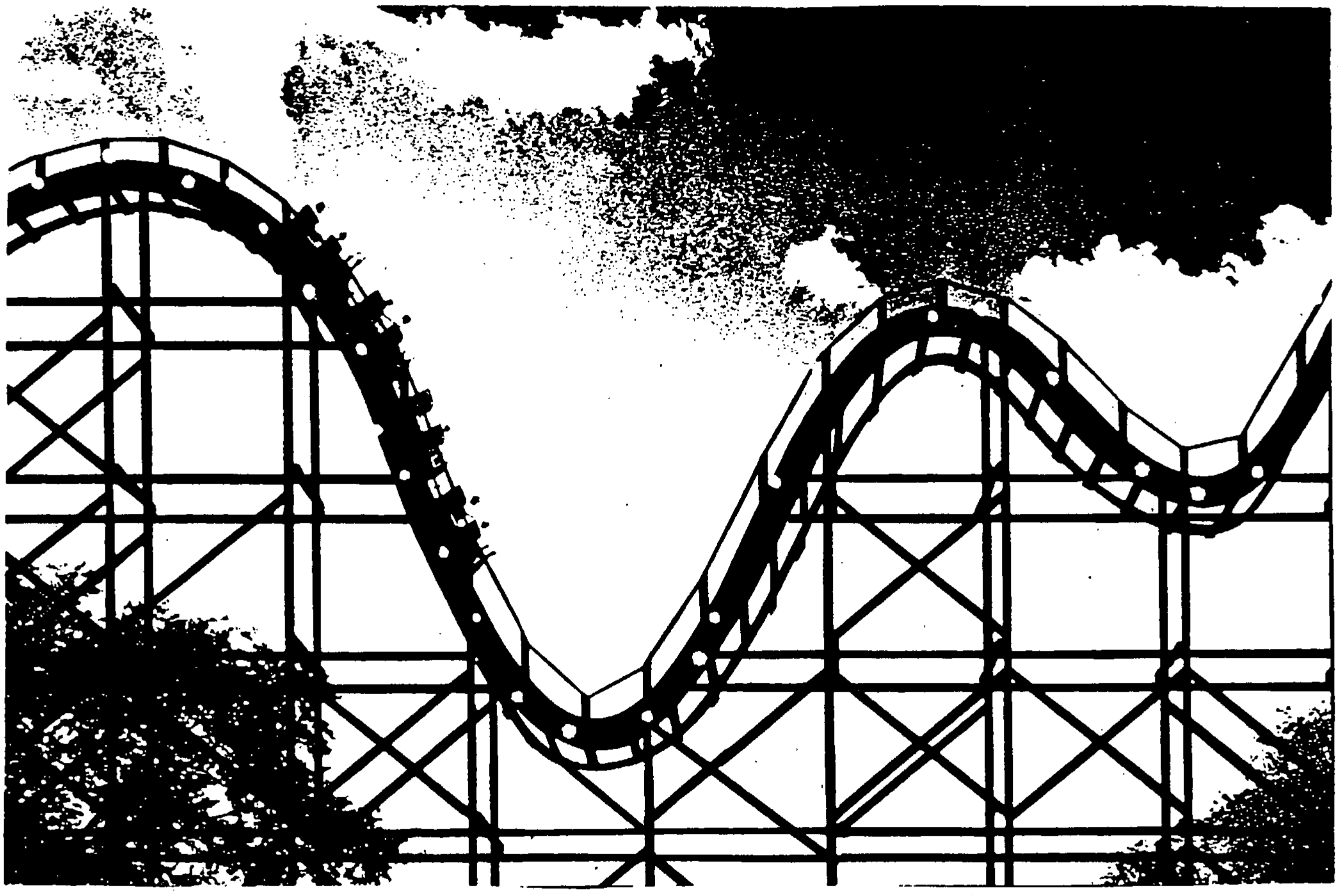
IMFUFA tekst nr. 242/93, RUC. 94 sider ISSN 0106–6242

Abstract:

I nærværende IMFUFA–tekst foretages en beskrivelse, analyse og vurdering af den matematiske model bag det såkaldte prioriteringsmodul fra Vejdirektoratets EDB–program DANBRO, som anvendes til økonomisk optimering af brovedligeholdelse. Den løsningsmetode, som benyttes i DANBRO, analyseres og vurderes, hvorefter mulighederne for en forbedring af modulet ved anvendelse af heltalsprogrammeringsmetoder undersøges.

Brovedligeholdelse
– bevar mig vel

Analyse af Vejdirektoratets model for optimering af broreparationer



Roskilde Universitetscenter

Matematik – 2. modul

Efteråret 1992

Forord

Formålet for gruppen bag dette projekt var oprindeligt at opnå et kendskab til lineær programmering, hvilket skulle opnås gennem undersøgelse af et lineært programmeringsproblem fra virkelighedens verden. I vores søgen efter en interessant case nåede vi frem til Vejdirektoratet, som vi havde mistanke om brugte lineær programmering i deres forvaltning af brovedligeholdelse.

Det viste sig imidlertid, at der snarere var tale om et heltalsprogrammeringsproblem, men da problemstillingen ikke blev mindre interessant af den grund holdt vi fast ved denne case. Projektet kom således til at handle om den matematik, der ligger i Vejdirektoratets program, DANBRO, der benyttes i styringen af de mange broer, som Vejdirektoratet har overopsynet med. En varm tak rettes til Ole Kirk og Jørgen Lauridsen i Vejdirektoratet for at afsætte tid til vore mange spørgsmål og i det hele taget udvise stor interesse for projektet.

Roskilde, januar 1993

Indholdsfortegnelse

Indledning

Broerne på de danske hovedlandeveje og motorveje har Vejdirektoratet det overordnede ansvar for. Sikring af, at broerne til enhver tid befinder sig i en forsvarlig stand, kræver en nøje overvågning og planlægning. Der er både sikkerhedsmæssige og økonomiske hensyn at tage højde for, og til dette formål har Vejdirektoratet udviklet et EDB-system, kaldet DANBRO. I 1991 brugte Vejdirektoratet 159 mio. kr. til drift og vedligeholdelse af de ca. 2000 broer, som de har ansvaret for, og broerne repræsenterer en værdi på omkring 16 mia. kr. I 1992 var der afsat 143 mio. kr. til brovedligeholdelse – en bevilling der siden blev øget med 15 mio. kr., og det er således ikke helt ubetydelige beløb, der jongleres med i forbindelse med vedligeholdelse af broerne.

Ifølge Vejdirektoratets egne oplysninger [18] står det sløjt til med en del af de danske broer, idet mere end 100 af dem er i dårlig forfatning og trænger til reparation, og nærved 90 har en utilfredsstillende bæreevne. Det generelle billede betegnes dog som acceptabelt, men der er tegn på, at situationen vil forværres fremover, medmindre bevillingerne øges. Dette skyldes for det første, at de mange betonbroer, der blev bygget i 60'erne og 70'erne, snart har nået en alder på 25 år, hvilket angives som det tidspunkt, hvor de store og udgiftskrævende skader begynder at vise sig. For det andet vil antallet af broer frem til år 2001 øges med 159 [18].

Der har ikke på noget tidspunkt været tilstrækkelige midler til at foretage en optimal vedligeholdelse af broerne, hvilket vil sige udbedring af skader, så snart det er påkrævet. Det har derfor været – og er fortsat – nødvendigt at foretage en prioritering med hensyn til den bedst udnyttelse af bevillingerne i forhold til behovet for udbedring og reparation, og med de dystre fremtidsudsigter for broernes tilstand er behovet for en forbedret forvaltning af de forhåndenværende midler ikke blevet mindre.

Det førnævnte DANBRO-system lå klar i 1990, og dermed havde man det værktøj til rådighed, som skulle sikre den bedste udnyttelse af midlerne. I tiden før DANBRO skete udvælgelsen af broer, der skulle repareres, manuelt ud fra en rundbordsdiskussion blandt ingeniører og økonomisk ansvarlige, men i 1986 opstod ideen om, at der måtte kunne udarbejdes et EDB-system til styring og udvælgelse. Ideen blev fulgt op, og i dag står DANBRO til rådighed i administrationen af landets broer.

Grundlaget i DANBRO er en database, hvor der løbende sker inddatering af oplysninger om broernes tilstand, skader, planlagte og udførte reparationer. Herudover indeholder systemet det såkaldte "prioriteringsmodul", der kan foretage en prioritering af reparationsløsninger blandt mange alternative løsninger, og det er denne del af DANBRO, der er genstand for nærmere inspektion i dette projekt.

En del af Vejdirektoratets bro-administration sker på vegne af amter og kommuner, men nogle broer forvaltes dog af amter og kommuner selv. Til brug herfor benytter amterne databasen fra DANBRO, og kommunerne har adgang til et andet databaseprogram (BroMan). Hverken amter eller kommuner har brug for prioriteringsdelen, idet deres budgetter kun tillader udbedring af så få skader, at det let kan overskues uden brug af prioriteringsmodul.

Udover den praktiske brug af prioriteringsmodulet til udvælgelse af broer og tilhørende reparationer, har det et mere langsigtet anvendelsesområde, idet det kan benyttes i forudsigelsen af, hvor store bevillingerne bør være, dersom ekstraudgifter i en årrække fremover skal minimeres. Endvidere kan det bruges til at forudsige konsekvenser af ændringer i bevillingerne.

Formål

I efterhånden en del år har matematiske modeller været på dagsordenen i og udenfor det matematiske samfund. Ikke mindst i relation til brugen i politiske og økonomiske sammenhænge, hvor dét, at en matematisk model indgår i argumentation og beslutningsproces, kan opfattes som en garanti for objektivitet og troværdighed. En undersøgelse af, hvorledes processen med at udvikle modulet egentlig fandt sted, og hvordan det benyttes i dag, er derfor den ene, sekundære del af formålet med dette projekt.

Den anden del af formålet er den matematiske, og primære, side af sagen. Vejdirektoratets fremstilling af modulet er ikke videre matematisk, hvilket der heller ikke har været grund til, og formålet er at undersøge, hvilke matematiske strukturer der ligger gemt i modulet, og om en matematisk fremstilling af Vejdirektoratets problem vil kunne gøre det nemmere at finde frem til en **bedre** løsning, hvilket vil sige bedre udnyttelse af bevillingerne, end den der sker i dag. For som landet ligger nu, er der ikke garanti for, at prioriteringsmodulet i DANBRO finder den optimale løsning ved prioriteringen.

Disse to formål leder frem til følgende tredelte **problemformulering**:

1. Hvordan foregik Vejdirektoratets modellering af prioriteringsmodulet, og hvilke fordele og ulemper er der i modulet.
2. Hvordan kan Vejdirektoratets brovedligeholdelsesproblem omformuleres til en matematisk model, og bliver det derved muligt at finde bedre alternative løsningsmetoder.
3. Hvilke alternativer findes der til Vejdirektoratets løsningsmetode, og er de bedre med hensyn til at finde den optimale løsning og til at være realisérbare i praksis.

Målgruppe

Vejdirektoratet og folk med interesse for operationsanalyse - specielt heltalsprogrammering - og anvendelse af matematiske modeller.

Læsevejledning

Projektets første kapitel er en indføring i matematiske modeller generelt - et kapitel der har relevans i forhold til vurdering af Vejdirektoratets modelleringsproces, model og løsningsmetode.

Dernæst følger i kapitel 2 en ikke-matematisk beskrivelse af Vejdirektoratets prioriteringsmodul, dets indhold og hvordan det blev til. Kapitlet afsluttes med en vurdering af modulet som model og dets anvendelighed i praksis.

Kapitel 3, 4 og 5 er den matematiske behandling af prioriteringsmodulet, hvor der i kapitel 3 indledes med opstillingen af en matematisk model over problemstillingen og opstillingen af en matematisk algoritme for Vejdirektoratets måde at løse problemet på. Denne formulering ved hjælp af matematiske symboler er nødvendig for i sidste ende at kunne forbedre metoden. Kapitel 4 er en fremstilling af forskellige heltalsprogrammeringsmodeller samt løsningsalgoritmer herfor. Én af disse metoder bliver gennemgået nærmere.

Endelig afsluttes i kapitel 5 med VD's problemstilling omformuleret til en heltalsprogrammeringsmodel og løst ved hjælp af en forbedret version af den udvalgte algoritme fra kapitel 4. Formålet er at finde en algoritme, der kan erstatte VD's nuværende.

Kapitel 1
Modeller

Først beskrives kort matematiske modeller i forhold til andre modeller. Nogle overordnede karakteristika for forskellige slags matematiske modeller, inddelt efter deres formål, omtales, og to typer optimeringsmodeller uddybes nærmere.

Der gives dernæst et bud på den ideelle modelleringsproces, og endelig opstilles nogle metoder til at vurdere, hvor god eller dårlig en matematisk model er.

1.1 Matematiske modeller

Enhver model, det være sig en modelby eller en model over gennemstrømning af vand i Storebælt, består af forsimplede antagelser om virkeligheden. Det er der imidlertid intet galt i, idet modellernes formål netop er at gøre modelbyggeren i stand til bedre at overskue – og dermed forstå – komplicerede dele af virkeligheden:

> *"En model er en repræsentation (ved hjælp af en eller anden form for midler) af et kompliceret område af virkeligheden, med henblik på at få indfanget træk ved virkelighedsområdet, som ellers er for vanskeligt tilgængelige eller uhåndterlige."* [8, p.7]

Det, der adskiller matematiske modeller fra andre, er de midler, der benyttes i beskrivelsen af virkeligheden. **Fysiske** modeller består af materielle objekter, f.eks. en plastikmodel af DNA-molekylet, mens **symbolske** – herunder **matematiske** – modeller benytter sig af symboler til at repræsentere virkeligheden.

Indenfor matematikken er matematiske modeller en del af den anvendte matematik, idet opstillingen af en matematisk model i en eller anden forstand altid sker med henblik på anvendelse udenfor matematikken. Formålene kan dog være ganske forskellige. Der kan være tale om at ønske erkendelse om et givet emne, for eksempel pendulets bevægelse, det kan være for at overskue komplicerede sammenhænge, f.eks. konsekvenser af den førte fiskeripolitik, eller det kan være i forbindelse med løsning af et konkret problem, f.eks. valg af den bedste placering af en fabrik.

Hvilket formål, der er tale om, er afgørende for, hvilken type model, der skal vælges. Indenfor matematiske modeller kan man overordnet skelne mellem følgende modeltyper[1]:

Prædiktive modeller

Prædiktive modeller, eller forudsigelsesmodeller, benyttes til at forudsige fremtidige hændelser eller resultater, for eksempel antallet af arbejdsløse.

Deskriptive modeller

Når formålet er erkendelsesmæssigt, benyttes deskriptive (beskrivende) modeller. Modellerne beskriver sammenhænge i systemet, og ved at ændre parametre kan påvirkninger af systemet undersøges. En model over Nordsøens økosystem kan, hvis den kan reproducere indsamlede data om bestandene af forskellige arter, f.eks. fremsætte nye sammenhænge og teorier om fødekædernes indbyrdes forhold. En deskriptiv model er altså en form for "eksperimentel" matematisk model [6, p.15].

Præskriptive modeller

Disse foreskrivende modeller kaldes også optimeringsmodeller eller normative modeller [17, p.61] og finder anvendelse, når formålet er at blive i stand til at træffe en afgørelse eller et valg, når der er flere muligheder. En præskriptiv model giver således forslag til en løsning.

De prædiktive og deskriptive modeller kan naturligvis også benyttes, når der skal træffes afgørelser. I så fald træffes afgørelsen af modelbyggeren på baggrund af modellens evne til hhv. at forudsige eller beskrive systemets opførsel ved indsættelse af forskellige værdier.

Teoretiske vs. ad hoc modeller

En helt anden måde at opdele matematiske modeller på er en skelnen mellem de teoretisk baserede modeller og ad hoc modeller opstillet til lejligheden. De teoribaserede modeller bygger på et bredt, teoretisk fundament og har en stor mængde empiri til rådighed, som ved modellens hidtidige brug har været med til at slå dens styrke og anerkendelse fast. Ad hoc modeller derimod, tager udgangspunkt i den aktuelle situation og opstiller den matematiske model på baggrund heraf, og den nødvendige empiri hentes ligeledes fra de øjeblikkelige forhold [10].

Modeldata

De variable, koefficienter og parametre - i det følgende betegnet under ét som data - der indgår i en matematisk model, kan også være bestemmende for valget af model. Overordnet kan der skelnes mellem henholdsvis kontrollerbare og ukontrollerbare data [6].

De **kontrollerbare** data (også kaldet beslutningsdata) antager værdier, som kan styres af modellen, f.eks. hvornår en bestemt proces skal igangsættes.

1: I litteraturen angives forskellige inddelinger af modeller. Den her beskrevne inddeling er sammenfattet fra kilderne "Mathematical Modeling", Andrews J.G. og Mclone, R.R.,1976, "Concepts of Mathematical Modelling", Meyer, Walter J., 1985, "Decision Making, Models and Algorithms", Gass, Saul I, 1985.

De **ukontrollerbare** data kan ikke styres af modellen, for eksempel vejrforhold, bosættelsesmønstre eller en lånerente; altså data, hvis værdi på den ene eller den anden måde er afhængig af ydre forhold.

Disse ukontrollerbare data kan igen underinddeles i deterministiske og stokastiske data alt efter, hvor nemt det er at bestemme dem.

Antages det for muligt at bestemme de indgående data præcist, i det mindste i teorien, kaldes modellen for **deterministisk.** Hvis de variable ikke kan bestemmes præcist, enten på grund af praktiske vanskeligheder eller fordi de variable simpelthen er behæftet med naturlig variation i virkeligheden, kaldes modellen **stokastisk**, dersom den enten specifikt tager højde for variationerne eller repræsenterer de variable som statistiske størrelser. Forskellen mellem deterministiske og stokastiske modeller er således spørgsmålet om, hvorvidt modellen forudsætter forudsigelighed af data, eller om den kan benyttes i sammenhænge, hvori der indgår elementer af tilfældighed [6]. Endelig er der data, som det vil være stort set umuligt at sætte værdi på - hvordan for eksempel gøre glæden ved fuglesang op i kroner og ører?

I forhold til valg af model kan karakteren af data spille ind på den måde, at modelbyggeren bevidst vælger at fraskære den del af virkelighedsområdet, der indeholder data, som det er vanskeligt at fastsætte. Det vil således oftest være vanskeligere at medtage størrelser, hvis værdi afhænger af tilfældigheder - f.eks. det daglige antal af hospitalsindlæggelser i en by - end data der er mere uafhængige af tilfældigheder, for eksempel den aktuelle rentefod.

I nærværende rapport er problemstillingen et beslutningsspørgsmål, hvorfor der er brug for at opstille en præskriptiv model, hvilket kræver brug af den matematiske disciplin **operationsanalyse.**

1.2 Operationsanalyse

Operationsanalyse (forkortes efter engelsk Operations Research til OR) er den fælles betegnelse for den matematiske disciplin, der har som mål at finde den bedste eller optimale løsning til et givet problem.

> *"...operations research is concerned with optimal decision making in, and modeling of, deterministic and probabilistic systems that originate from real life. These applications which occur in government, business, engineering, economics and the natural and social sciences are largely characterized by the need to allocate limited resources."* [9, p.6]

Den spæde start på udviklingen af OR fandt sted kort før 2. Verdenskrig, idet der i større organisationer var opstået et behov for at udvikle en optimal ledelsesform. Udviklingen tog fart under 2. Verdenskrig, hvor der viste sig et endnu større behov for at kunne optimere en indsats og opnå maksimal indsats af de ressourcer, der var til rådighed. Formålet var at blive i stand til at foretage en central styring af de forskellige arméers indsats, og det arbejde, der var gjort under krigen, fortsatte efter dens ophør. I 1947 kunne en arbejdsgruppe nedsat af det amerikanske luftvåben under ledelse af bl.a. George B. Dantzig præsentere den første generelle, lineære programmeringsmodel og en algoritme til dens løsning, den såkaldte simplex-algoritme [2], [9] & [11].

Lineær programmering (LP)

"Programmering" skal i denne sammenhæng ikke forstås i gængs forstand men snarere som "planlægning", idet der overordnet er tale om løsning af planlægningsproblemer.

Når problemet består i at fordele begrænsede ressourcer mellem konkurrerende aktiviteter på den bedste - mest optimale - måde, kan LP benyttes [9, p.29]. Forudsætningen er, at alle sammenhænge er lineære, og at man kan tale om "retlinet planlægning" [11, p.93].

Det matematiske princip i LP går i korte træk ud på at finde et maksimum eller et minimum for en lineær funktion. Denne funktion optræder under forskellige navne, for eksempel "kriteriefunktionen" [2] og "objektfunktionen" [14]. De variable er underlagt lineære bibetingelser, der tilsammen danner et system af lineære ligninger og uligheder. Endelig skal alle indgående variable være ikke-negative. Når maksimum søges, kan det for eksempel være i forbindelse med maksimering af profit, mens minimum kan søges i forbindelse med omkostningsminimering.

Den generelle opskrivning af et lineært programmeringsproblem tager sig ud som følger:

Maksimér (minimér) **kriteriefunktionen** K(x):

$$K(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

når følgende begrænsninger skal gælde:

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n & \le & b_1 \\
a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n & \le & b_2 \\
\quad\vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n & \le & b_i \\
\quad\vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n & \le & b_m
\end{array}$$

samt positivitetsbetingelsen (ikke-negativ):

$$x_j \ge 0 \quad \textit{for } j \in \{1,\dots,n\}$$

Hvis x_j er negativ erstattes x_j med $(1-x_j^*)$, hvorved x_j^* opfylder betingelsen.

Koefficienter og variable kan for eksempel tolkes således:

- x_j er det antal, der produceres af vare j
- c_j angiver, hvor meget hvert x_j bidrager til kriteriefunktionen
- a_{ij} angiver forbruget af ressource i ved produktion af vare j
- b_i angiver begrænsningen på ressource i.

Ethvert lineært programmeringsproblem kan omskrives til standardform, som adskiller sig fra den generelle model på tre punkter [12, p.70]:

1. Kriteriefunktionen skal maksimeres
2. Ulighedstegn i begrænsningerne erstattes med lighedstegn
3. Positivitetsbetingelsen gælder alle variable.

Herefter kan der ske løsning ved hjælp af standardalgoritmer, hvor simplex-algoritmen er den mest udbredte.

Heltalsprogrammering (IP efter engelsk Integer Programming)

I de tilfælde, hvor en løsning kun giver mening, dersom den er heltallig, foreligger der et heltalsprogrammeringsproblem. Hvis der kun er krav om, at nogle af de variable skal være heltallige, er det en blandet IP-model, hvilket betegnes MIP (efter engelsk Mixed Integer Programming). Hvis det kræves, at alle variable antager heltalsværdier, kaldes det PIP (efter engelsk Pure Integer Programming).

Umiddelbart kunne man forestille sig, at kravet om heltalsløsninger kunne løses ved i første omgang at benytte lineær programmering uden heltalskrav og dernæst foretage de nødvendige afrundinger. Der er imidlertid ikke garanti for, at den optimale heltalsløsning findes på denne måde, hvilket i nogle tilfælde godt kan accepteres; for eksempel om der bliver produceret 1000 eller 1001 sugerør. Det vil derimod ikke være ligegyldigt, om et tankskib skal sejle 2 eller 3 ture over Atlanterhavet, hvorfor det i dette tilfælde er vigtigt at finde den optimale løsning.

Det har ikke været muligt at udvikle en enkelt, generel metode til at løse heltalsprogrammeringsproblemer, og det er derfor nødvendigt i hvert enkelt tilfælde at vurdere, hvilken metode det vil være mest hensigtsmæssigt at benytte. Ofte vil den tid, det tager at benytte den ene eller den anden metode, være af afgørende betydning for valg af metode, og det kan være nødvendigt at gå på kompromis med hensyn til at finde den optimale løsning. Nogle af de eksisterende metoder til løsning af IP-problemer vil blive gennemgået i kapitel 4.

Der er således mange elementer at tage højde for, når den helt rigtige model skal findes til et problem - i næste afsnit gives et forslag til den ideale fremgangsmåde for opstillingen af en matematisk model.

1.3 Modelleringsprocessen for en matematisk model

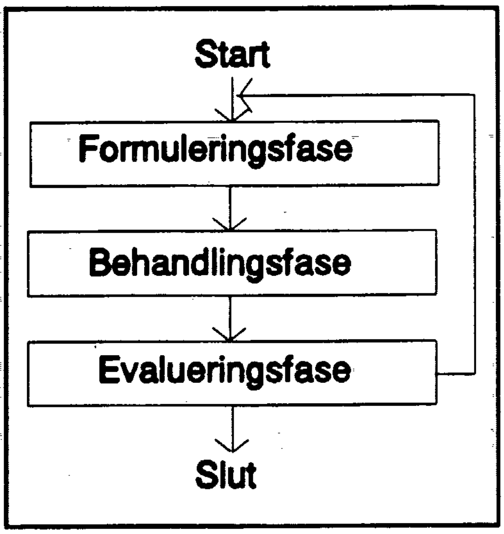
En matematisk model kan ikke opstilles efter en endegyldig recept. Der er dog retningslinier for, hvilke overvejelser modelbyggeren bør gøre sig under processen, for at modellen kan siges at være gennemarbejdet.

En af de måder, hvorpå modelleringsprocessen kan opdeles, er i 3 overordnede faser, som ses i figur 1.1 [17].

1.3.1 Formuleringsfasen

Opstillingen af en model påbegyndes, som nævnt i afsnit 1.1, når man står overfor en del af virkeligheden, der på grund af en høj grad af kompleksitet ikke umiddelbart kan overskues - dette kunne f.eks. være et umiddelbart uløseligt problem.

I modelleringen af problemet prøver man at beskrive en del af virkeligheden for derigennem at opnå en større viden om denne. Det er hverken hensigtsmæssigt eller muligt at medtage hele virkeligheden i sin beskrivelse af problemet, da formålet jo netop er forenkling, og derfor må man udvælge et snævrere virkelighedsområde, indenfor hvilket problemet behandles.



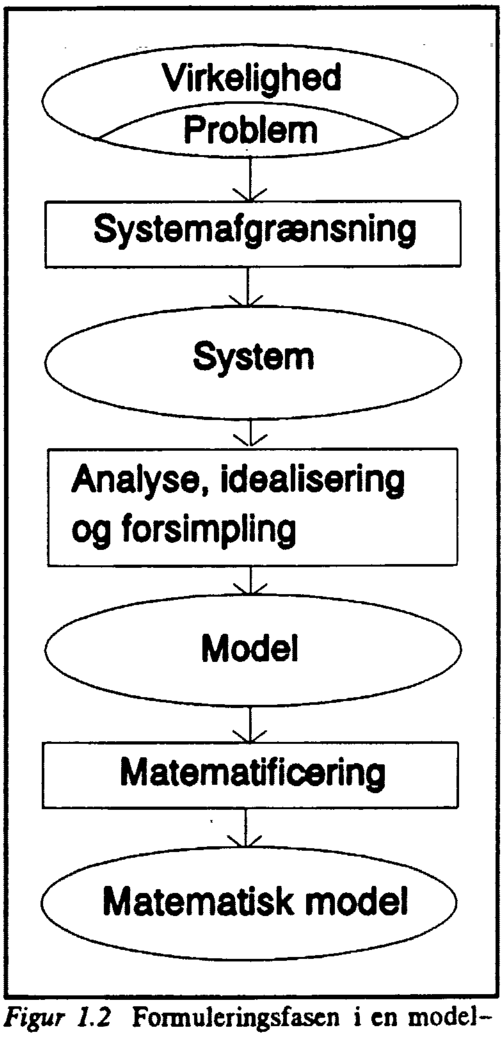
Figur 1.1 Den overordnede modelleringsproces.

Det er yderst vigtigt, at modellens formål er veldefineret, da praktisk talt alle de valg, der skal foretages i processen, vil afhænge af det. Hovedformålet vil typisk være at løse problemet med en vis usikkerhed indenfor nogle givne rammer.

Tæt knyttet til formålet med modelleringen er den såkaldte systemafgrænsning, hvor problemet/fænomenet i virkelighedsområdet afgrænses til det system, der skal arbejdes med. En systemafgrænsning kunne være at bestemme, hvilken synsvinkel problemet skulle anskues fra, for eksempel geografisk, økonomisk eller samfundsmæssigt eller hvilken tidsmæssig ramme, modellen skal dække, for eksempel en tyveårig periode.

De ydre rammer for det system, der skal modelleres, er nu veldefinerede.

I den indre beskrivelse af systemet udvælges de objekter og sammenhænge, der skal indgå i modellen. Dette gøres først ud fra en skelnen mellem, hvad der er væsentligt og uvæsentligt for modellen i forhold til formålet. Dernæst skal modellen gøres overskuelig og overkommelig, hvilket indebærer, at væsentlige objekter og sammenhænge omformes, idealiseres eller måske helt smides væk. Denne fase kan altså give anledning til et reelt informationstab.



Figur 1.2 Formuleringsfasen i en modelbygningsproces.

Nu oversættes den opstillede model til modelleringssproget - i dette tilfælde matematik. Dette indebærer, at objekterne karakteriseres som værende enten variable, parametre eller koefficienter, samt at sammenhængene mellem objekterne skrives op i en matematisk notation.

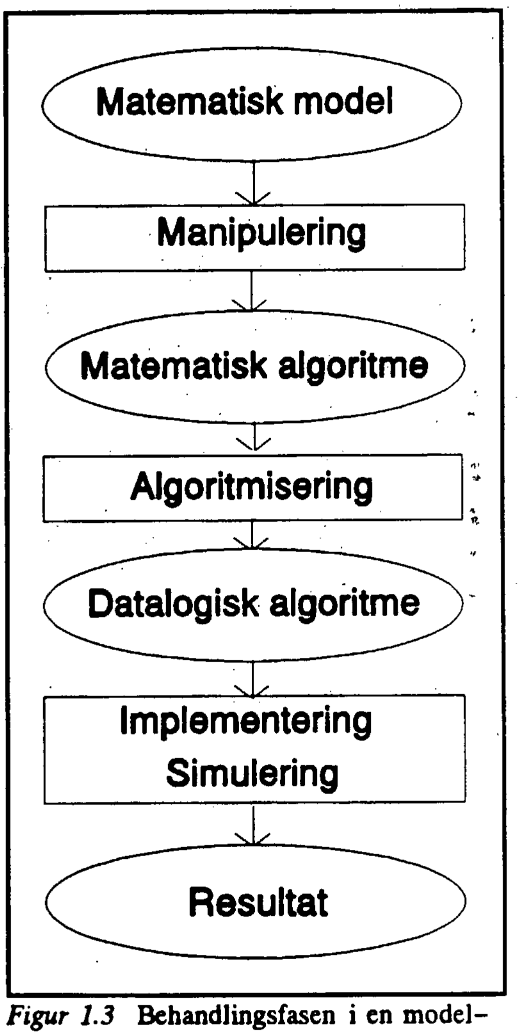
Der er nu formuleret en matematisk model for det system, der skulle modelleres. Figur 1.2 illustrerer, hvordan formuleringsfasen kan tage sig ud.

1.3.2 Behandlingsfasen

I denne fase er formålet at foretage en sådan matematisk behandling af den opstillede matematiske model, at der på grundlag af denne kan drages en konklusion på problemet - med andre ord at finde frem til en løsningsalgoritme, som kan benyttes til at løse det opstillede problem[1].

Forinden dette finder sted, kan det være nødvendigt med visse justeringer af den oprindelige model:

- Yderligere simplificering eller approksimering af dele af modellen, så den bliver overkommelig at løse med de forhåndenværende løsningsmetoder; for eksempel antagelse om linearitet, hvor dette ikke er helt uomtvisteligt.
- Matematisk manipulering af modellen, så den fremstår på en sådan form, at den kan danne grundlag for den løsningsmetode (matematiske algoritme), der forekommer at være mest passende. Herefter vil der ofte ske en oversættelse af den matematiske algoritme til en datalogisk, hvorefter der kan foretages computersimulering af modellen.



Figur 1.3 Behandlingsfasen i en modelbygningsproces.

Kompleksitet

Valget af løsningsmetode er først og fremmest et spørgsmål om at opfylde krav om beregningstid og lagerkapacitet. Lagerkapaciteten er i de fleste tilfælde mulig at løse ad økonomisk vej, mens beregningstiden kan udgøre et stort problem. Den tid, som det tager en algoritme at løse et problem, udtrykkes normalt enten i

1: I denne gennemgang beskrivelse af matamtisk modellering ser vi bort fra såkaldte analytiske modeller. Behandlingsfasen for disse er selvfølgelig en del anderledes.

tid eller i **iterationer**[1], og den er et vigtigt kriterie til vurdering af en matematisk algoritme såvel som dens implementering i et program.

Kompleksiteten af en algoritme er et udtryk for, hvordan beregningstiden for det værste tilfælde (*worst case*) udvikler sig som funktion af problemets størrelse, der f.eks kunne være antallet af variable.

Oftest udtrykker man kompleksiteten ved en funktion $O(f(n))$, hvor n er problemets størrelse, mens $f(n)$ er en simpel funktion af n (f.eks. polynomium eller eksponentialfunktion). F.eks. udtrykker $O(n^2)$, at beregningstiden for det værste tilfælde afhænger kvadratisk af problemstørrelsen. I udtrykket $f(n)$ medtages altid kun det "største" led, dvs. det led, som dominerer, når n går mod uendelig.

Fire typiske kompleksitetstyper er:

1. Konstant kompleksitet $O(1)$.
2. Logaritmisk kompleksitet $O(\log(n))$.
3. Polynomiel kompleksitet $O(n^k)$.
4. Eksponentiel kompleksitet $O(a^n)$.

Algoritmer med konstant, logaritmisk eller polynomiel kompleksitet kaldes under et for polynomielle algoritmer. Disse regnes for gode, mens algoritmer med eksponentiel kompleksitet eller værre oftest er ubrugelige, selv for mellemstore problemer. De sidste kaldes normalt for non-polynomielle algoritmer.

Der er imidlertid ofte stor forskel på algoritmens teoretiske kompleksitet og dens tidsforbrug i praksis. Som et eksempel kan nævnes, at den berømte Simplex-algoritme til Lineær Programmering har eksponentiel kompleksitet i teorien, men i praksis har den gennemsnitligt polynomiel opførsel (kaldes på engelsk *average behaviour*) [13].

1.3.3 Evalueringsfasen

Her konfronteres modellen - eller dele af den - med det formål den skulle opfylde i sit virkelighedsområde. For eksempel kan det vurderes, hvor præcise de udkomne resultater er i forhold til virkeligheden. Da man netop ønsker resultater ved hjælp af modellen, før begivenhederne indtræffer, er det imidlertid vanskeligt at vurdere graden af præcision, medmindre man er i besiddelse af virkeligt gode data fra tidligere målinger (dette gælder hovedsageligt for de præskriptive og prædiktive modeller).

1: En iteration er et gennemløb af den underalgoritme, hvor den mest centrale udregning foretages. At det både kan være svært at definere et sådant centralt sted, og at en iteration ikke nødvendigvis tager lige lang tid for to forskellige algoritmer betyder, at denne måleenhed indbefatter en vis usikkerhed. Det må dog tilføjes, at antallet af iterationer på den anden side kan give et sammenligningsgrundlag for kørsler med én algoritme på computere med forskellig hastighed. Derudover kan antallet af iterationer give oplysninger om andre sider af metoden - f.eks. om hvor stor en del af løsningsmulighederne til et problem, der bliver gennemsøgt, før løsningen findes.

Hvis modellen ikke kan opfylde de krav, som formålet satte, må modelleringsprocessen begynde forfra enten i formulerings- eller i behandlingsfasen.

1.3.4 Implementeringsfasen

Denne fase er ikke en egentlig del af modelleringsprocessen men er en opstilling af de procedurer, der gør det praktisk muligt at anvende den færdige model. Fasen er kun aktuel i de tilfælde, hvor modellen er anvendelsesorienteret, og kræver et nært samarbejde mellem modelbygger og målgruppe.

1.4 Vurdering af færdige modeller

Når en model er færdigkonstrueret, skal den vurderes. Én form for vurdering er – som tidligere nævnt – allerede foretaget i modelleringsprocessens evalueringsfase – både i form af, at objekter og sammenhænge er blevet vurderet i forhold til det modellerede virkelighedsområde – og at mange valg er taget med modellens formål in mente.

En målestok for, hvor godt en model repræsenterer virkeligheden, er den såkaldte validitet (gyldighed):

> *"Validity means that a convincing number of experiments assure us that the conclusions of our analysis conform with the real-world phenomenon to within some desired accuracy.* [15, p.6].

Bestemmelsen af den usikkerhed, indenfor hvilken modellen anses for at være valid, er indbefattet af en stor del subjektivitet, hvilket dog ikke forhindrer en sammenligning af ved hvilken usikkerhed, modellerne er valide.

Der skelnes mellem tre former for validitet [5]:

- **Prædiktiv validitet**; om modellen evner at forudsige forløb/udviklinger i virkelighedsområdet – f.eks. hvor god en militærstrategisk model var til at forudsige tabstallene ved at benytte en bestemt taktik i et slag.
- **Replikativ validitet**; hvorvidt modellens data stemmer overens med allerede eksisterende data i virkelighedsområdet – f.eks. om en byudviklingsmodel er i stand til at gengive udviklingen i befolkningstallet for en by som København fra år 1900 til i dag.

Begge vurderingskriterier er rettede mod anvendelsesmodeller, idet de giver udtryk for, hvor godt output kvantitativt svarer til observationer fra virkeligheden. Dette kaldes i [17] **nøjagtighed**.

- **Strukturel validitet**; hvor godt modellen afspejler overordnede sammenhænge og opførsler fra virkelighedsområdet – f.eks. til bedømmelse af, hvor godt en økonomisk model er i stand til at gengive, i hvilken retning privatforbruget ændres på baggrund af ændringer i realløn, rentesatser o.lign.

Denne form for validitetsundersøgelse vil normalt være aktuel for modeller, der har til formål at give viden om et videnskabeligt fænomen og dermed muliggøre en øget erkendelse af dette.

Som det ses på eksemplerne, er grænserne mellem de tre former for validiteter udflydende – f.eks. kunne byudviklingsmodellen måske også bruges til bestemmelse af hvilken type funktion, der kan beskrive indbyggertallets udvikling, hvilket oplagt er en strukturel undersøgelse. Det er derfor normalt, at en model undersøges for flere slags validiteter.

En erkendelse, der kan komme til udtryk ved alle slags validitetsundersøgelser, drejer sig om, hvorvidt de antagelser og sammenhænge, som modellen bygger på, er korrekte. Eller med andre ord, om modellen har fundet essensen, de vigtigste sammenhænge, i det modellerede fænomen. Dette kaldes modellens grad af **deskriptiv realisme**.

En models **robusthed** angiver, hvor følsom modellen er overfor støj og fejl i input-data. Normalt vil små fejl i den gode model give små fejl i løsningen, mens man i den dårlige model kan risikere, at små fejl resulterer i store forandringer.

En model er **generel**, hvis den kan bruges i mange forskellige situationer. Dette krav vil langt fra altid være aktuelt. Specielt ikke i ad hoc-modeller, der jo netop er opstillet for at kunne løse et bestemt problem. I sådanne tilfælde vil det nærmest være en ulempe, hvis modellen er alt for generel [17].

Som flere gange nævnt er det ikke nødvendigvis et mål i sig selv, at modellen kan opfylde alle kriterier, og der kan være tilfælde, hvor det modsatte er målet. Ved vurdering af VD's metode vil alle kriterier således ikke indgå med lige stor vægt – f.eks. er den strukturelle validitet ikke interessant, da problemet er overvejende anvendelsesorienteret og ikke erkendelsesmæssigt.

Der er i dette kapitel fremlagt et forslag til en optimal modelopbygningsproces, efter hvilken VD's opstilling af deres egen model vil blive vurderet i kapitel 2. Derudover vil vi selv have den i baghovedet, når et matematisk alternativ skal opstilles.

Kapitel 2

Beskrivelse af Vejdirektoratets model og metode

Dette kapitel beskriver den problemstilling, som Vejdirektoratets broafdeling har haft i forbindelse med vedligeholdelse af deres broer, samt VD's egen løsning af problemet, blandt andet med en gennemgang af prioriteringsmodulet i DANBRO.

Beskrivelserne er baseret på materiale, udleveret af VD [19] & [18], der beskriver prioriteringsmodulet, samt interview [A] med Ole Kirk (OK) og Jørn Lauridsen (JL), der begge er ansat ved VD og har været involveret i opbygningen af prioriteringsmodulet. JL har endvidere indblik i den nuværende brug af modulet, idet han varetager kørslen af det den dag i dag.

I kapitlet indgår desuden supplerende oplysninger fra telefonsamtaler med OK, JL og andre ansatte i VD.

2.1 VD's behandling af problemstillingen

Overordnet er problemstillingen, at bevillingerne til VD's brovedligeholdelse ikke er store nok til, at alle broreparationer kan udføres på det helt rigtige tidspunkt. Det vil derfor komme på tale at udskyde visse reparationer for at overholde bevillingsrammen, hvorfor der må foregå en form for prioritering af de forskellige broreparationer. En angivelse af, hvordan udbedringsarbejdet for hver enkelt bro kan og bør udføres, kaldes en **samlet prioritering**.

2.1.1 Den tidligere prioriteringsproces

I tiden før det var muligt at prioritere vha. prioriteringsmodulet, foregik processen med at fastlægge broreparationer i 3 trin [A]:

Generaleftersyn

Et kort eftersyn af hver enkelt bro hvor det blev bestemt, om den var aktuel for udbedringer og dermed et særeftersyn. Et generaleftersyn blev foretaget hvert 3–4 år.

Særeftersyn

Et detaljeret eftersyn af en bro med potentiale for udbedringer, hvilket bl.a. involverede analyse af indsamlede laboratorieprøver. Herefter udarbejdedes et forslag til den mest optimale udbedringsstrategi samt prisen for at udføre denne. Små arbejder blev desuden vurderet på en skala alt efter, hvor nødvendig en udbedring ville være. Denne vurdering skulle danne grundlag for den senere, samlede prioritering.

Rundbordsdiskussion

En samtale mellem 6–7 ansvarlige, hvor det blev udpeget hvilke broer, der skulle repareres – dvs. der blev foretaget en samlet prioritering. Der var her en risiko for, at nogle af de tilstedeværende sad og forvaltede egne interesser. Dette kunne være i form af hensyn til miljø, erhverv, trafiksikkerhed, egen politiske overbevisning el.lign.

På et tidspunkt, hvor man gik i gang med at automatisere hele det administrative arbejde omkring brovedligeholdelse, blev det oplagt at systematisere prioriteringen og dermed muliggøre en optimering foretaget på computer.

2.1.2 Udviklingen af VD's nuværende prioriteringsmodul

Det var hensigten, at optimeringen skulle hjælpe i rundbordsdiskussionen ved at fremstå som et rimeligt udgangspunkt. Det vil sige, at princippet med general- og særeftersyn forblev det samme - dog med en ændring af de data, der skulle indsamles ved særeftersynet. Disse data er beskrevet i næste afsnit.

Under udviklingen af prioriteringsmodulet havde man følgende mål [19]:

- Der skal fastlægges en prioritering for udbedringen af en række bygværker. Summen af udgifterne i hvert enkelt år må ikke overstige bevillingen i det pågældende år.
- Prioriteringen ønskes udført således, at de givne ressourcer - set ud fra et samfundsmæssigt synspunkt - udnyttes bedst muligt på lang sigt.
- Det skal være muligt at tage hensyn til eventuelt forhåndsprioriterede udbedringer. Det kan f.eks. være arbejder, der strækker sig over flere år eller arbejder, der af sikkerhedshensyn **skal** igangsættes.
- De økonomiske konsekvenser af ikke at kunne udføre udbedringerne på de optimale tidspunkter ønskes udtrykt (konsekvensanalyse).

Selve opgaveformuleringen til prioriteringsmodulet kan udtrykkes på følgende måde:

Find den samlede prioritering, som overholder budgettet og har de mindste økonomiske konsekvenser for samfundet.

2.2 Indsamling og forbehandling af data

2.2.1 Parametre og indsamling af data

Her beskrives hvilke parametre, der indgår i prioriteringsmodulet, samt hvilke data, der indsamles ved et særeftersyn.

Parametre

Der er følgende overordnede parametre i prioriteringsmodulet [19]:

- **Budgetårene** med tilhørende bevillinger afsat til reparationsarbejder. Bevillingerne findes ved at trække udgifter til administration, eftersyn, ren- og vedligeholdning, forskning, reserver med videre fra de årlige bevillinger. Ydermere fratrækkes udgifter til de såkaldte *forhåndsprioriterede reparationsarbejder*. Disse er arbejder, der **skal** udføres, hvilket kan skyldes at:
  - de er kontraktligt bundne - f.eks. sat i gang i tidligere år,
  - det er et spørgsmål om trafiksikkerhed - f.eks. udskiftning af autoværn,
  - der i forvejen udføres arbejde på vejstrækningen, således at det vil være naturligt (billigere) at udføre broarbejder på strækningen samtidig,
  - det af andre årsager skønnes, at arbejdet skal forhåndsprioriteres.

  Tilbage er den del af bevillingen, som reelt kan bruges til udbedringsarbejder. Det er denne størrelse, der indgår som bevilling i optimeringen.
  Der optimeres over en femårig periode, hvert år med sit budget. Det første år kaldes prioriteringsåret, mens de efterfølgende fire kaldes budgetoversigtsårene.
- **Diskonteringsraten**, der benyttes til frem- og tilbagediskontering af udgifter. Denne størrelse er udtryk for den gevinst, som man kan opnå ved at udskyde en udgift ét år, idet pengene, rent fiktivt, kan trække renter. Diskonteringsraten fastsættes af finansministeriet og er p.t. 7% p.a.
- **Prisniveauet**, der ud fra en fastsat dato angiver, hvilket prisindeks alle omkostninger skal referere til. Det er normalt at sætte prisniveauet svarende til andet eller tredje kvartal i prioriteringsåret.

Indsamling af data

Dataindsamlingen foregår udelukkende ved de særeftersyn, der foretages, når en bro ved generaleftersynet er vurderet til at være værdig til en reparation.

Broingeniøren udarbejder for hver af broens skader 1-3 **strategier** for udbedring af skaden. Der er i prioriteringsmodulet plads til uafhængigt at behandle op til 9 skader på hver bro. Skaderne betragtes adskilt, som om de hørte til forskellige broer. De tre strategier for en skade vil generelt have følgende form:

A. Altomfattende reparation, hvor store dele af bygværket udskiftes.

B. Reparation, hvor en omfattende reparation udføres, hvorved bygværkets levetid forlænges væsentligt.

C. Lappeløsning, hvor der straks udføres mindre udbedringer med det formål at udskyde en gennemgribende udbedring.

For alle tre strategier fastsætter broingeniøren det optimale tidspunkt at påbegynde reparationsarbejet – et tidspunkt, der ikke nødvendigvis er det samme som prioriteringsåret.

Generelt følger antallet af strategier størrelsen af skaden. Med andre ord udarbejder ingeniøren kun én strategi for udbedring af skaden, hvis denne er lille, da den kun har én indlysende strategi, hvorimod der er grund til at udarbejde op til 3 strategier for en bro, hvis skaden er stor.

Disse strategiforslag er således efter den rådgivende ingeniørs mening de optimale for den enkelte bro. Denne vurdering er udelukkende baseret på den rådgivende ingeniørs ekspertise på området.

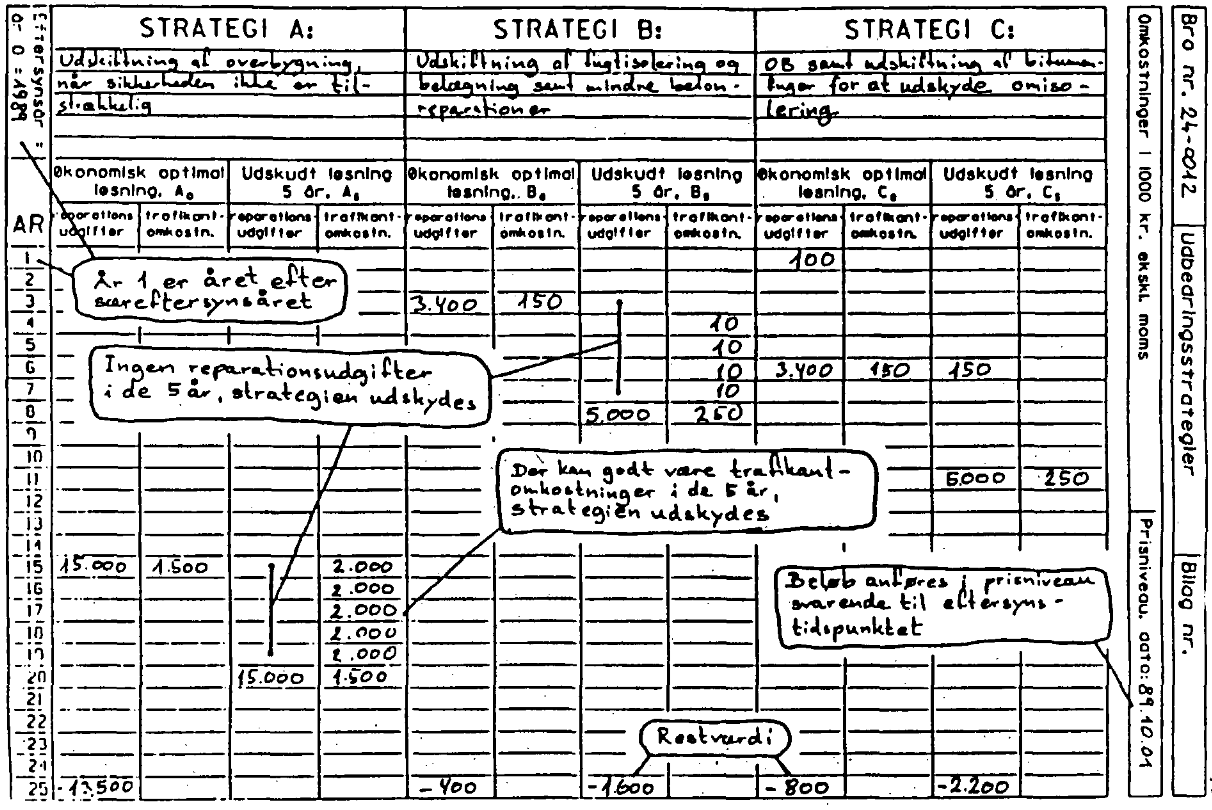
Rådgiverens arbejde munder ud i et skema over udbedringsstrategier for hver bro, hvor alle data er indskrevet (skema 2.1). Det ses, at der for broen i eksemplet er tale om tre forskellige strategiforslag.

I hver af disse strategier udarbejdes en plan over arbejdets forløb, og her ud fra anslås de årlige reparationsudgifter i en periode på 25 år.

Udover de egentlige reparationsudgifter udregnes for hvert år de såkaldte **trafikantomkostninger**. Disse er et mål for, hvor meget de gener, som udbedringen – eller en udskydning af samme – forårsager for trafikken, koster samfundet. Hvis f.eks. broen skal afspærres for en periode, koster det penge, at alle bilerne skal køre en omvej. Hvis den ene kørebane lukkes, betyder det ekstra omkostninger, at trafikken skal vente ved en lysregulering, som sørger for at lede trafikken i begge retninger. Hvis broen må lukkes for tung trafik eller høje lastbiler i en periode, koster det penge for disse at køre en omvej. Endelig kan trafikuheld, pga. dårlige vejforhold også bidrage til trafikantomkostninger. Enhedspriserne for udregning af trafikantomkostningerne beregnes og udsendes af VD's Økonomisk-Statistisk Afdeling.

Endelig anslår rådgiveren en **restværdi**, som er et udtryk for, hvor meget broen er øget i værdi i løbet af de 25 år, dvs. forskellen mellem forbedringernes værdi, og værdiforringelsen af disse forbedringer pga. slitage. Restværdien regnes med modsat fortegn af udgifterne, dvs. negativt, da den kan siges at være vundet gennem de 25 år.

Herefter anslår rådgiveren forløbet for hver strategi i samme 25-årige periode, hvis den *udskydes* i 5 år. I dette tilfælde vil der ofte være øgede trafikantomkostninger pga. forværrede forhold, når skaderne udvikler sig og som følge af længere reparationsperioder. Ligeledes bliver reparationsudgifterne ofte højere pga. skadernes stigende omfang (ikke alle skader bliver dog dyrere at udbedre med tiden). Til gengæld bliver restværdien som oftest større (med negativt fortegn), idet senere reparationer vil være mindre nedslidte ved periodens udgang.



Eftersynsår: 0 = 1988

Bro nr. 24-0012 | Udbedringsstrategier | Bilag nr.

Omkostninger i 1000 kr. ekskl. moms | Prisniveau, dato: 89.10.01

	STRATEGI A:				STRATEGI B:				STRATEGI C:			
	Udskiftning af overbygning, når sikkerheden ikke er tilstrækkelig				Udskiftning af fugtisolering og belægning samt mindre betonreparationer				OB samt udskiftning af bituminøse fuger for at udskyde omisolering			
	Økonomisk optimal løsning, A_0		Udskudt løsning 5 år, A_5		Økonomisk optimal løsning, B_0		Udskudt løsning 5 år, B_5		Økonomisk optimal løsning, C_0		Udskudt løsning 5 år, C_5	
ÅR	reparationsudgifter	trafikantomkostn.	reparationsudgifter	trafikantomkostn.	reparationsudgifter	trafikantomkostn.	reparationsudgifter	trafikantomkostn.	reparationsudgifter	trafikantomkostn.	reparationsudgifter	trafikantomkostn.
1									100			
2												
3					3.400	150						
4								10				
5								10				
6								10	3.400	150	150	
7								10				
8							5.000	250				
9												
10												
11											5000	250
12												
13												
14												
15	15.000	1.500		2.000								
16				2.000								
17				2.000								
18				2.000								
19				2.000								
20			15.000	1.500								
21												
22												
23												
24												
25	-13.500				-400		-1.600		-800		-2.200	

Skema 2.1 Et eksempel på et skema indeholdende data fra særeftersyn af én bro [19].

Alle udgifter og værdier beregnes i nutidspriser – dvs. der tages ikke hensyn til inflation eller prisændringer grundet markedsmekanismer m.m.

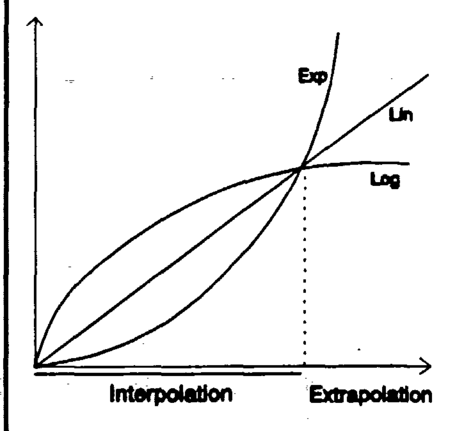
2.2.2 Bearbejdning af data

Før datamaterialet bearbejdes, indeksreguleres alle værdier i forhold til den dato, der er fastsat af de overordnede parametre, hvilket normalt vil være tredje kvartal i prioriteringsåret.

Ud fra en strategis udførelse på hhv. det optimale tidspunkt og udskudt 5 år beregnes løsninger svarende til de mellemliggende forskydninger på 1, 2, 3 og 4 år. Dette gøres ved en lineær interpolation mellem værdierne for den optimale og den fem år udskudte løsning.

Antagelsen om et lineært forløb af reparationsudgifter og trafikantomkostninger i den fem–årige periode kan der sættes spørgsmålstegn ved. Men da skader på beton, betonarmering, rækværk, vejbelægninger, søjler, vandanlæg m.m. udvikler sig yderst forskelligt, kan enhver antagelse om forløbet anfægtes [A]. Det lineære forløb har dog en række fordele:

For det første er det let at beregne. For det andet kendes eksempler både på logaritmiske og eksponentielle udviklinger af udgifter, og det lineære forløb må siges at havne nogenlunde i midten ved interpolation. Dette gælder derimod ikke for extrapolation (se figur 2.2).



Figur 2.1 Sammenligning af logaritmiske, lineære og eksponentielle forløb.

På denne måde fås for hver strategi seks forskellige **løsninger**, dvs. for hver reparation findes 6, 12 eller 18 løsningsmuligheder, afhængig af antallet af strategier.

I skema 2.2 er de seks løsninger for én strategi skrevet op med reparationsudgifter og trafikantomkostninger. Værdierne for den økonomisk optimale løsning (løsning 1) og den fem år udskudte (løsning 6) er de data, som særeftersynet har givet.

Det ses, at skemaet er delt op i tre dele adskilt af nogle "trapper". Værdierne **over** den **øverste** trappe kan kun indeholde trafikantomkostninger, da trappen startes lige før den første reparationsudgift i løsning 1. Disse trafikantomkostninger findes for løsning 2–5 ved for hvert år at sætte dem lig med omkostningen i løsning 6, hvilket afspejler, at trafikantomkostningerne er uafhængige af, hvilken af løsningerne, der vælges, når reparationsarbejdet endnu ikke er igangsat.

Værdierne **mellem** trapperne for de 4 midterste løsninger er fundet vha. den tidligere omtalte lineære interpolation mellem værdierne i løsning 1 og værdierne fem år senere i løsning 6.

Værdierne **under** den **nederste** trappekurve findes på følgende måde:

- Reparationsudgifterne i år 21–24 i løsning 1 slettes og lægges til reparationsudgiften i år 25. De fremdiskonteres ikke, da restværdien ville stige (negativt) ved at reparationerne blev udskudt. Denne forhøjelse af restværdien ville stort set ophæve forøgelsen af reparationsudgifterne, hvis de blev fremdiskonteret. Samtidig ligger fejlen 25 år ude i fremtiden, hvorved den har minimal betydning for løsningens **nutidsværdi** – et begreb der bliver forklaret nedenfor.
- Trafikantomkostninger for løsning 1 i år 21–24 fremdiskonteres til år 25.
- I løsning 2–5 findes omkostningerne i år 25 ved at interpolere vandret mellem den nu modificerede værdi for løsning 1 og værdien for løsning 6 i år 25.

For at gøre sammenligning mulig mellem de seks løsninger, beregnes et eksakt tal, kaldet **nutidsværdien**, for hver strategi. Nutidsværdierne for hver løsning er indsat nederst i skemaet. Nutidsværdien beregnes som summen af alle reparationsudgifter, restværdier og trafikantomkostninger, når de tilbagediskonteres til prioriteringsåret. Nutidsværdien fortæller således noget om strategiens pris målt i forhold til nutiden, og er således brugbar i en sammenligning af de samlede udgifter for forskellige løsninger. Til tilbagediskonteringen bruges diskonteringsraten, dvs. alle beløb multipliceres med $(1+0.07)^{-(k-1)}$, før de adderes (k er året, hvor udgiften optræder). Tilbagediskonteringen gælder også restværdien, der betragtes som en udgift med negativt fortegn (dvs. svarer til en indtægt) i år 25.

		Løsning 1		Løsning 2		Løsning 3		Løsning 4		Løsning 5		Løsning 6	
		Økon. opt.		Udskudt 1 år		Udskudt 2 år		Udskudt 3 år		Udskudt 4 år		Udskudt 5 år	
	År	Rep.	Traf.	Rep.	Traf.	Rep.	Traf.	Rep.	Traf.	Rep.	Traf.	Rep.	Traf.
1992	1		0		0		0		0		0	0	0
1993	2	100	50		100		100		100		100	0	100
1994	3	0	0	200	100		100		100		100	0	100
1995	4	0	0			300	150		100		100	0	100
1996	5	0	0					400	200		500	0	500
1997	6	0	0							500	250	0	500
1998	7	200	50									600	300
1999	8	0	0	350	100							0	0
2000	9	0	0			500	150					0	0
2001	10	0	0					650	200			0	0
2002	11	0	0							800	250	0	0
2003	12	1000	200									950	300
2004	13	0	0	1200	300							0	0
2005	14	0	0			1400	400					0	0
2006	15	0	0					1600	500			0	0
2007	16	0	0							1800	600	0	0
2008	17	0	0									2000	700
2009	18	0	0									0	0
2010	19	0	0									0	0
2011	20	0	0									0	0
2012	21	0	0									0	0
2013	22	~~200~~	~~50~~									0	0
2014	23	0	0									0	0
2015	24	0	0									0	0
Restværdi 2016	25	~~-650~~ -450	~~0~~ 61	-540	49	0630	37	-720	24	-810	12	~~0~~ -900	~~0~~ 0
Nut.værdi		800		1205		1556		1860		2425		2931	

Skema 2.2 Beregning af udskudte løsninger for en reparationsstrategi [19].

Man kan ud fra nutidsværdierne beregne en **strafværdi**, som er de ekstra samfundsomkostninger, der er forbundet med at skifte fra den optimale løsning (lavest nutidsværdi) til en dårligere løsning (højere nutidsværdi), og dermed kan man beslutte, hvilke strategier det er billigst at udskifte. For at lette behandlingen af de 6,12 eller 18 løsninger for hver skade sorteres de i rækkefølge efter stigende nutidsværdi. Derved blandes løsningerne fra de enkelte strategier, og herefter skelnes der ikke mellem, hvilken strategi de enkelte løsninger stammer fra.

Inden data for løsningerne indsættes i prioriteringsmodulet, kan en frasortering af irrelevante strategier foretages. Dette sker, hvis der er to løsninger for samme skade, der har

- første reparationsudgifter i samme år,

samtidig med at den ene af disse løsninger både har

- lavere reparationsudgift i det pågældende år og
- en lavere nutidsværdi.

Er dette opfyldt vil den strategi med lavest nutidsværdi indgå i prioriteringen, hvorimod den anden strategi vil blive vraget. Den vragede løsning vil ikke nødvendigvis være den dårligste, idet der ikke under frasorteringen er taget hensyn til løsningernes udgifter i andre budgetår. Der opstår problemer pga. dette, hvilket er forklaret nærmere i afsnit 3.3.4.

2.3 VD's løsningsmetode

Dette afsnit er en beskrivelse af VD's prioriteringsmetode og den årlige gennemførelse af prioriteringen.

VD gennemfører en prioritering af broreparationer mindst én gang om året. Hver prioritering omfatter en fem-års periode, i hvilken der for hvert år er en bevilling, der skal overholdes. Årsagen til, at man foretager prioriteringen af broreparationer over en fem-års periode er, at man vil undgå, at udskydelsen af nogle reparationer vil skabe problemer med overholdelse af budgetterne i de efterfølgende år.

På trods af, at prioriteringen omfatter en periode på fem år, bliver der prioriteret hvert år. Dette gøres for at tage nye broer, der er værdige til reparation, med i prioriteringen samt for at tage hensyn til nye forhåndsprioriteringer.

2.3.1 Genbrug af strategier

Som beskrevet i afsnit 2.2 bliver der for alle broer, der er vurderet til at skulle repareres, udarbejdet 1-3 strategier for disse reparationer, og hver strategi kan desuden udskydes 1-5 år. Inden den årlige prioritering bliver beskrevet, skal det her forklares, hvordan strategierne for en bro kan genbruges i op til 4 år i de årligt tilbagevendende prioriteringer.

Det er således, at en strategi, der har været brugt i en prioritering i et år, godt kan bruges i prioriteringen det næste år, forudsat at strategien er indeksreguleret til det nye prioriteringsår.

En sådan gammel strategi kan kun genbruges, hvis den bro, som den gælder for, ikke har været udvalgt til reparation i prioriteringsåret ved de tidligere prioriteringer, som broen har indgået i. Hvis en bro ikke er blevet udvalgt til reparation senest fem år efter det (første) optimale år for en af broens strategier, da skal der udfærdiges nye strategier for broen, idet der ikke længere er garanti for, at de gamle strategier er aktuelle for broens skader.

Når en gammel strategi genbruges, indeksreguleres alle beløb, undtaget trafikantomkostningerne i årene før det nye prioriteringsår. Beløbene indeksreguleres fra det gamle prioriteringsår til det nye prioriteringsår. Disse indeksregulerede løsninger indgår i årets prioritering på samme vilkår som løsningerne, der er udarbejdet for broer, som ikke tidligere har været med i en prioritering – dvs. der udføres nutidsværdiberegninger osv. for disse gamle strategier som beskrevet i foregående afsnit. Den eneste forskel er, at beløbene i det, der var det 25. år i det forrige prioriteringsår, fremdiskonteres det antal år, der er gået, siden den pågældende strategi var med i en prioritering første gang. Dette gøres for, at alle løsninger, som indgår i en prioritering, omhandler udgifter, restværdier og nutidsværdier for de samme 25 år.

2.3.2 Den årlige prioritering

Efter at løsningerne for hver bro er ordnet efter nutidsværdi, således at nutidsværdien er stigende, vælges den bedste løsning for hver bro, dvs. den løsning, der har den laveste nutidsværdi, idet nutidsværdien anses for at være et mål for samfundsomkostningerne ved at udføre en given løsning.

Derefter følges følgende metode:

1. De samlede reparationsudgifter for løsningerne beregnes for hvert af de fem budgetår, og de sammenlignes med bevillingerne. Hvis alle de samlede udgifter er mindre end de respektive budgetter, er prioriteringen færdig, hvorimod man fortsætter til punkt 2, hvis der er en budgetoverskridelse i et eller flere år.
2. Er der flere år med budgetoverskridelse identificeres året med den største overskridelse. For dette år finder man alle de broer, der har reparationsudgifter i det pågældende år.
3. Derefter udregnes strafkvotienten ved at skifte løsning for hver af de fundne broer. Strafkvotienten beregnes som den relative forskel mellem nutidsværdien for den optimale løsning og nutidsværdien for den næste løsning i den ordnede række. Når dette er gjort, identificeres broen med den laveste strafkvotient for skift af løsning. For denne bro skiftes der til den næste løsning, og den hidtil optimale løsning slettes fra listen.
4. Efter at der er omprioriteret for broen, startes der forfra i punkt 1.

En prioritering, der resulterer i, at der ikke er en overskridelse af bevillingen, vil være den prioritering, der vælges – dog først efter at den sagsansvarlige har vurderet, at prioriteringen af broreparationer ikke er sat ulogisk sammen. En ulogisk sammensætning ville f.eks være, hvis både fugtisoleringen på en bro og slidlaget på den vejstrækning, hvor broen er, skulle repareres, og disse reparationer ikke var valgt til udførelse i det samme år.

Hvis der efter den sagsansvarliges skøn er en ulogisk prioritering af broreparationer, kan han/hun forhåndsprioritere de broer, som det gælder for, og fratrække reparationsudgifterne for de valgte løsninger fra bevillingen, hvorefter prioriteringsmodulet anvendes for de resterende broer.

Når prioriteringen er færdig, afsluttes den med en konsekvensanalyse, dvs. det anslås, hvor meget samfundet taber ved ikke at gennemføre de optimale reparationsløsninger. Sagt med andre ord vurderes det økonomiske tab på lang sigt, som er resultatet af for små bevillinger. Dette tab angives som den absolutte forskel i nutidsværdi mellem den optimale prioritering og den valgte prioritering.

2.4 VD's modelleringsproces

Afsnittet belyser processen med udviklingen af prioriteringsmodulet, og oplysningerne stammer hovedsageligt fra interviewet med Ole Kirk (OK) og Jørn Lauridsen (JL) [A]. Vejdirektoratet har formentlig ikke selv haft i tankerne, at der skulle opstilles en model for problemet, men det arbejde VD har gjort i deres søgen efter en løsning, svarer i vores terminologi til en modelleringsproces. Den matematiske model, der ligger i denne proces, beskrives i kapitel 3.

Ideen til prioriteringsmodulet for broer udsprang af, at man i 1986 begyndte at udfærdige særeftersynsmanualer. Disse særeftersynsmanualer blev afsluttet med en økonomisk del, hvor man begyndte at operere med begrebet nutidsværdi som et mål for samfundets udgifter ved valg af forskellige løsninger for broreparationer.

I den forbindelse anbefalede OK, at man gik videre med ideen om at sammenligne hvilke løsninger, der bedst kunne betale sig for samfundet, vha. nutidsværdierne.

Broingeniørerne begyndte derfor at overveje, hvilke krav prioriteringsmodulet skulle opfylde, og hvordan de kunne opfyldes af modulet. Kravene – og opfyldelsen af disse – blev løbende forelagt OK, som gav kritik og alternative ideer til løsning af problemerne. Her igennem afgrænsedes problemet, så modellen

- primært sigtede mod en økonomisk vurdering af broreparationerne, specielt med henblik på den senere konsekvensanalyse,
- tog hensyn til de samfundsmæssige omkostninger gennem trafikantomkostningerne,
- ikke skulle tage hensyn til bl.a. miljø og æstetik.

Derudover opstillede broingeniørerne begrænsninger for modulet. Disse var bla., at

- det ikke ville være muligt at forudsige en skades udvikling i mere end fem år, hvorfor det blev den periode man brugte for udskydning af strategierne,

- det kunne antages, at der kunne interpoleres lineært mellem den optimale løsning og den fem år udskudte,
- man skulle begrænse datamængden til en størrelse, der muliggjorde en prioritering for mange broer samtidig. Denne afgrænsning kan bl.a. ses i antallet af strategier pr. bro, antallet af løsninger pr. strategi samt antal budgetår (nogle af disse begrænsninger er dog sandsynligvis levn fra tidligere tiders dataindsamling).

Oprindeligt var det meningen, at man for hver bro skulle vælge den løsning, som havde den laveste nutidsværdi, men da det viste sig, at dette ville medføre en overskridelse af bevillingerne, overvejede man heltalsprogrammering for at opnå den bedste løsning. Ved nærmere undersøgelser fandt man frem til, at heltalsprogrammering på dette problem ville være umulig at gennemføre i praksis, og man fandt i stedet frem til en optimeringsmetode, der var hurtig. At metoden til gengæld kun delvist løste problemet, var man klar over - det vurderedes dog, at usikkerhederne i datamaterialet var så store, at metodens resultater var tilfredsstillende.

Modulet fik ikke med det samme lov til at stå alene, idet der de første to år efter dets tilblivelse stadigvæk blev foretaget manuelle prioriteringer af ingeniører og ansvarlige. På den måde kunne det kontrolleres, at modulet virkelig gav de ønskede prioriteringer, og til alt held for Vejdirektoratet viste det sig, at ingeniørernes og de ansvarliges prioritering var stort set sammenfaldende med modulets prioritering. Dette betød, at modulet i 1992 for første gang blev brugt uden den manuelle vurdering.

I relation til den i afsnit 1.4 beskrevne vurdering af færdige modeller, svarer denne sammenligning med manuel prioritering i nogen grad til kontrol af replikativ validitet: stemmer de data, som modellen leverer, overens med data fra virkelighedsområdet - data er i denne sammenhæng prioriteringen, og den validitet, der sikres, angår modellens evne til at erstatte den gamle prioriteringsmetode, dvs. ingeniørernes manuelle prioritering opfattes som modellens virkelighedsområde.

2.5 Vurdering af model og metode

Model

Da Vejdirektoratet indledte arbejdet med prioriteringsmodulet var det hovedsageligt med anvendelsesformål for øje. Dog var der et vist håb om, at man med tiden ville få et indtryk af, hvorledes skader på broer udvikler sig, altså en form for erkendelsesmæssigt formål. Endvidere var der tale om en model, der skulle bruges indenfor et meget snævert område: Bedste vedligeholdelse af broer indenfor givne budgetrammer. Da der ikke forelå nogen teori om bygning af sådanne modeller, måtte man tage udgangspunkt i egne data og erfaringer, og alt i alt er der tydeligvis tale om en såkaldt ad hoc model - en model opstillet til lejligheden. Modellen er derfor meget specifik, men det er alligevel lykkedes af eksportere princippet bag

DANBRO og dermed prioriteringsmodulet til bla. Mexico - modellen er altså ikke så specialiseret, at den er begrænset til danske forhold.

Modellen gør det muligt at overskue og vurdere flere broer og løsninger, end det er menneskeligt muligt, og opfylder dermed det basale formål for enhver model - forenkling af virkelighedsområdet. Da den menneskelige indblanding i den endelige prioritering er blevet minimeret, kan det forventes, at prioriteringsmodulet er mindre subjektivt og mere ensartet i sin behandling af broerne. Dette forudsætter dog, at skaderne på broerne er vurderet ensartet af de ingeniører, der foretager særeftersynene, hvilket til gengæld er mindre sikkert.

Samtidig med den opnåede forenkling er der naturligt nok sket en fravælgelse af elementer, som enten er blevet anset for uvæsentlige eller ikke har kunnet medtages - altså et informationstab. For eksempel kan modellen ikke medtage betydningen af forskellige miljømæssige gener, og hvor der tidligere i kraft af rundbordsdiskussionen og den manuelle prioritering var flere personer med til at diskutere med mere eller mindre subjektive argumenter, kan en enkelt person i dag i princippet alene foretage forhåndsprioritering - med andre ord vil der ikke være så mange om at påvirke beslutningen. At elementer som miljø og æstetik ikke er medtaget, skal dog ikke nødvendigvis tages som udtryk for dårlig vilje hos VD, da der jo er tale om vanskeligt kvantificérbare værdier.

Metoden

Metoden er først og fremmest yderst hurtig i brug, idet det tager 10 sekunder, fra man starter prioriteringsmodulet, til man har en samlet prioritering uden budgetoverskridelser.

At metoden er så hurtig gør, at den er i ret høj kurs hos de ingeniører, der arbejder med den, da de i løbet af meget kort tid kan beregne, hvilke konsekvenser en begrænsning/udvidelse af budgettet vil betyde, dels for prioriteringen af broreparationer og dels for samfundsøkonomien.

Denne hurtighed er imidlertid sket på bekostning af en garanti for at nå den optimale prioritering. Ved det anvendte skift af løsning for en bro, elimineres den fravalgte som løsningsmulighed i det videre optimeringsarbejde. Det kan ikke udelukkes, at der med udskydelser og omrokeringer af andre broer ville være plads til den fravalgte løsning. Dette må nok betegnes som metodens mest kritisable punkt. Men selvom VD er klar over, at **den** optimale løsning ikke findes ved hjælp af prioriteringsmodulet, oplyser de ikke herom i deres informationsmateriale:

> *"Ved prioriteringsberegningen findes den såkaldte optimale løsning blandt mange hundrede alternativer på en sådan måde, at DANBRO finder den løsning, der giver den økonomisk bedste udnyttelse af de bevillinger, Vejdirektoratet har til rådighed til brovedligehold." [18, 7]*

Til forsvar for, at metoden ikke med 100% sikkerhed kommer frem til den optimale prioritering, anfører VD, at den anslåede udvikling i skadesomfang i løbet af de fem år, som prioriteringen omfatter, alligevel er behæftet med så store usikkerheder, at det er irrelevant at bestemme den optimale løsning [A]. Uanset at der er tale om usikkerheder i data, må det dog være bedre, at det er den optimale løsning, der findes.

En anden forskel fra den gamle prioriteringsmetode ligger i, at det nu er en maskine, der foretager prioriteringerne, hvilket udover den tidsmæssige forbedring medfører, at ingeniørerne har et langt stærkere argument, når der skal tildeles bevillinger. Maskinerne opfattes som mindre subjektive end mennesker, hvorfor en maskinel prioritering betragtes som frigjort fra personlige holdninger til forurening, støjgener, trafiksikkerhed o.lign.

At prioriteringsmodulet skulle være mere objektivt end ingeniørernes prioritering, kan dog anfægtes, idet det er ingeniører, der har udfærdiget kravene til prioriteringsmodulet, hvorfor det må være et udtryk for **deres** "subjektive meninger".

Med hensyn til beregning af strafkvotienten virker det umiddelbart ulogisk at beregne den relativt og ikke absolut, idet det jo er samfundsomkostningerne (de absolutte værdier), der forsøges begrænset vha. prioriteringsmodulet. Når VD alligevel har valgt at beregne strafkvotienten relativt, er det fordi, de anser reparationsudgifter som investeringer af Statens penge, og den relative strafkvotient svarer til en negativ rente på de investerede penge.

Der ville, hvis man regnede strafkvotienten absolut, være fare for, at et stort antal reparationer med lille absolut straf men med en stor relativ strafkvotient blev udskudt til fordel for en enkelt reparation med stor absolut og lille relativ straf. Det svarer til at skulle låne et bestemt beløb, hvor man kan vælge mellem at låne dem alle til en høj rente i én bank, der har et højt låneloft, eller låne det samme beløb som flere mindre lån i forskellige banker, som har et lavere låneloft, men til gengæld har en lavere lånerente. Med brugen af den relative strafkvotient undgås dette problem, da man - for at blive i samme terminologi - låner i bankerne med den laveste rente, uanset beløbets størrelse[1].

2.6 Opsamling

Sammenfattende kan følgende konkluderes om VD's prioriteringsmodul:

- Alt i alt fungerer metoden i praksis til VD's tilfredsstillelse - specielt når usikkerhederne på datamaterialet tages i betragtning - og det må konstateres, at metodens implementering i praksis er lykkedes. Eftersom det er de samme personer, der har udviklet model og bruger den i det daglige, har der ikke været problemer med misforståelser mellem modelbygger og målgruppe.

1: Et mere indgående studie af, hvad brugen af henholdsvis relativ og absolut strafkvotient betyder for prioriteringen, findes i afsnit 3.3.

- Som nævnt har VD efter modellens færdiggørelse foretaget noget, der svarer til undersøgelse af dens replikative validitet, og der er således opnået en form for garanti for, at modellen ikke er helt skæv at bruge i praksis.
- VD's metode finder ikke nødvendigvis frem til den optimale prioritering, og hvis der er tale om en væsentlig forskel mellem VD's algoritme og den optimale prioritering, er det værd at undersøge, om der kan udvikles en algoritme, som kan erstatte VD's. For at være brugbar skal en alternativ algoritme kunne løse problemet inden for nogle timer på en pc, og mulighederne for en sådan algoritme bliver undersøgt senere i projektet.

Kapitel 3

Analyse og vurdering af VD's metode

I dette kapitel formuleres VD's model som en formel matematisk model, og deres løsningsmetode beskrives som en matematisk algoritme på denne model. Derefter analyseres metoden og de fordele og ulemper, den indebærer.

3.1 Opstilling af matematisk model

Det overordnede problem – hvordan vedligeholdes broer optimalt indenfor givne budgetrammer – har Vejdirektoratet som tidligere nævnt reduceret til følgende:

For hver bro skal der vælges en ud af flere mulige løsninger. Hver af disse løsninger har en nutidsværdi, hvori der indgår trafikantomkostninger – altså et mål for samfundets omkostninger ved at benytte denne løsning. Hver løsning har sin egen udgiftsfordeling over en 25–årig periode, og udgifterne for den valgte prioritering, det vil sige sammensætningen af løsninger, må ikke overstige det budgetterede beløb i de første fem år. Samfundets omkostninger skal minimeres, dvs. nutidsværdien for den valgte prioritering skal gøres mindst mulig.

Der er således to sammenhænge, som skal formuleres i den matematiske model:

- Reparationsudgifterne skal holdes indenfor budgettet de første fem år.
- Nutidsværdierne skal være lavest mulige.

3.1.1 Koefficienter, variable og indeks

De koefficienter og variable, der indgår i den matematiske model, er som følger:

n = antallet af broer

i = indekserer bronummer

m_i = antallet af løsninger for bro i (i det konkrete problem er $m_i \leq 18$)

m = samlede antal løsninger for de n broer, $m = m_1 + \ldots + m_i + \ldots + m_n$

j = indekserer løsningsnummer

$c_{i,j}$ = nutidsværdien af løsning j for bro i

$a_{k,i,j}$ = reparationsudgiften i år k for løsning j for bro i
k = indekserer årene
b_k = budgettet i år k
s_i = variabel, som angiver nummeret på den **valgte** løsning for bro i
S = et sæt af løsninger, kaldet en samlet prioritering, $S = (s_1,...,s_i,...,s_n)$

Med disse parametre til rådighed kan den samlede **reparationsudgift** i et år k formuleres som en funktion $a_k(S)$, der afhænger af det valgte sæt af løsninger:

$$a_k(S) = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i,s_i} \tag{3.1}$$

Den samlede **nutidsværdi**, $c(S)$, afhænger ligeledes af løsningsvalgene og kan skrives på denne måde:

$$c(S) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,s_i} \tag{3.2}$$

3.1.2 Modelformulering af VD's problem

Nu mangler der blot at blive indført begrænsninger på hhv. reparationsudgifter og nutidsværdier for at have den ønskede matematiske beskrivelse af VD's problem:

1. Budgetoverholdelse

Kravet om overholdelse af budgettet opfyldes ved, at de samlede reparationsudgifter i år k, $a_k(S)$, er mindre end budgettet i år k, for alle fem budgetår:

$$a_k(S) = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i,s_i} \le b_k \quad for\ k \in \{1,...,5\} \tag{3.3}$$

Der skal altså findes en prioritering, som overholder budgetterne.

2. Minimering af nutidsværdi.

Af samtlige prioriteringer, som opfylder 3.2.3 skal den findes, som minimerer den samlede nutidsværdi.

$$\underline{\min}_S\, c(S) = \underline{\min}\ (\sum_{i=1}^{n} c_{i,s_i}) \tag{3.4}$$

Problemet er dernæst, hvordan man skal finde frem til den optimale prioritering, og en matematisk algoritme for Vejdirektoratets metode til at finde denne prioritering opstilles i næste afsnit.

3.2 Matematisk beskrivelse af VD's metode

I det følgende opskrives en algoritme for Vejdirektoratets optimeringsmetode fra afsnit 2.3, hvilket muliggør en senere analyse. Beskrivelsen benytter de i afsnit 3.1 indførte koefficienter og variable.

3.2.1 Initialisering

Før metoden kan anvendes, skal løsningerne for hver bro være sorteret efter stigende nutidsværdi, således at

$$c_{i,1} \le c_{i,2} \le \dots \le c_{i,m_i} \quad \textit{for } i \in \{1,\dots,n\} \tag{3.5}$$

Dette muliggør en prioritering af løsningerne, idet løsningen med den laveste nutidsværdi er den, som er bedst at vælge, hvis det er muligt. Hvis det derimod ikke er muligt, er den næstbedste løsning den næste i rækken, når de er sorteret som ovenfor.

For alle broer vælges den bedste løsning, dvs. løsning nummer 1.

$$S = (1,1,1,\dots,1,1) \tag{3.6}$$

For at have et mål for, hvor dyrt det er at skifte til en dårligere løsning for den enkelte bro, udregnes for hver bro en strafkvotient. Strafkvotienten Q_i er den relative tilvækst i nutidsværdi ved at gå fra den nuværende til den næste løsning i rækken for bro i. Hvis den nuværende løsning er den sidste for den pågældende bro, sættes strafkvotienten til ∞ for at undgå, at der skiftes til en ikke-eksisterende løsning. At sætte værdien til "uendelig" vil i praksis sige, at man sætter værdien til et meget stort tal M, som man ved er større end alle andre forekommende tal. Vi vil dog her tillade os at benytte betegnelsen ∞ for en sådan værdi.

$$Q_i = \begin{cases} \dfrac{c_{i,s_i+1} - c_{i,s_i}}{c_{i,s_i}} & \textit{for } s_i < m_i \\ \infty & \textit{for } s_i = m_i \end{cases} \qquad \textit{for } i \in \{1,\dots,n\} \tag{3.7}$$

3.2.2 Frasortering af løsninger

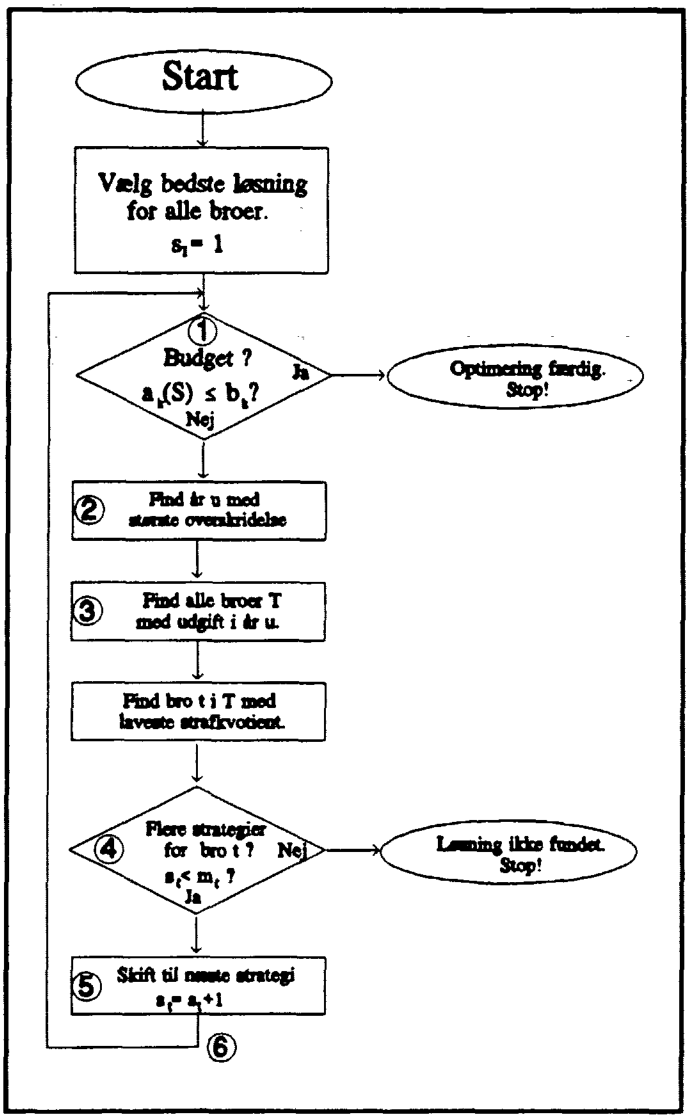
Før VD's algoritme køres, frasorteres nogle af løsningerne efter følgende kriterie (jvf. kap.2).

Hvis to løsninger for samme bro har første reparationsudgift i samme år, og den ene både har højere reparationsudgift i dette år og højere nutidsværdi (højere nummer i den sorterede række) end den anden, så slettes denne løsning:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{For } j_1 < j_2 \le m_i \textit{ og } K \le 5: \\ a_{k,i,j_1} = a_{k,i,j_2} = 0 \textit{ for alle } k < K \\ a_{K,i,j_1} \neq 0 \ \wedge \ a_{K,i,j_2} \neq 0 \\ a_{K,i,j_1} \le a_{K,i,j_2} \end{array}\right\} \rightarrow \textit{løsning } j_2 \textit{ slettes}$$

3.2.3 Algoritmen

I figur 3.1 ses et rutediagram for algoritmen. Numrene refererer til nedenstående trinvise forklaring.



Figur 3.1 Rutediagram for VD's optimeringsalgoritme.

Trin 1 : Undersøgelse af budgetoverskridelse

Det undersøges, om budgettet er overskredet i et af budgetårene med de valgte løsninger. Lad $e_k(S)$ være budgetoverskridelsen i år k med en prioritering S:

$$e_k(S) = a_k(S) - b_k \quad \textit{for } k \in \{1,...,5\} \tag{3.9}$$

Da skal det blot undersøges, om én af værdierne $e_k(S)$ er positiv for at finde ud af, om budgettet er overskredet:

$$e_k(S) > 0 \quad \textit{for mindst ét } k \in \{1,...,5\} \tag{3.10}$$

Stopkriterie - Løsning fundet

Hvis der ikke er overskridelse af budgettet i nogle af de fem år, stopper algoritmen, og løsningerne angivet af S er den fundne løsning:

$$e_k(S) \leq 0 \quad \textit{for alle } k \in \{1,...,5\} \ \rightarrow \ \textit{løsning fundet} \tag{3.11}$$

Trin 2 : Udvælgelse af år til ændring

Det år u, som har den største overskridelse, findes. Hvis to år har samme overskridelse, vælges det første, dvs. det, som har lavest nummer:

$$u = \min \left\{ h \in \{1,...,5\} \mid e_h(S) \geq e_k(S) \quad \textit{for alle } k \in \{1,...,5\} \right\} \tag{3.12}$$

Trin 3 : Udvælgelse af bro til ændring

For det fundne år u skal vælges den bro t, som af alle broer, der bidrager til udgifterne i det valgte år, er billigst for samfundet at skifte løsning for. Som mål for dette bruges den relative nutidsværdistigning, som angives af strafkvotienten.

Først findes alle de broer T, som har valgt en løsning med udgift i det pågældende år:

$$T = \left\{ i \in \{1,...,n\} \mid a_{u,i,s_i} > 0 \right\} \tag{3.13}$$

Af mængden T findes nu den bro, som har den laveste strafkvotient. Hvis to broer har samme strafkvotient, vælges den med det laveste nummer:

$$t = \min \left\{ g \in T \mid Q_g \leq Q_i \quad \textit{for alle } i \in T \right\} \tag{3.14}$$

Trin 4 : Stopkriterie - ingen løsning fundet

Hvis der for samtlige broer er valgt den sidste (dårligste) løsning, og det derfor ikke er muligt at flytte nogle løsninger, stoppes algoritmen, og ingen løsning er fundet.

Dette kan kontrolleres ved at se på strafkvotienten for den bro, der blev fundet i 3.2.3. Hvis denne strafkvotient er ∞, kan ingen løsning findes.

$$Q_t = \infty \ \rightarrow \ \textit{ingen løsning fundet} \tag{3.15}$$

Trin 5 : Skift af løsning

For den fundne bro skiftes til den næste løsning i rækken, dvs. s_t forhøjes med *1*:

$$s_t \leftarrow s_t + 1 \tag{3.16}$$

Trin 6 : Iteration

Dernæst gentages fra trin 1. På denne måde får man løsninger, som ligger tættere og tættere på det gennemførlige, dvs. budgetoverskridelserne $e_k(S)$ kommer tættere på 0. Når et af stopkriterierne er opfyldt, stopper algoritmen, enten fordi den har fundet en løsning 3.2.3, eller fordi den har opgivet at finde en løsning 3.3.1.

3.3 Analyse af algoritmen

I dette afsnit behandles algoritmen mere indgående. Målet er:

- at anskueliggøre algoritmens måde at finde løsninger,
- at vise, at algoritmen ikke nødvendigvis finder den optimale løsning,
- at vise, at algoritmen ikke altid finder en løsning, selvom der er en,
- at vise, at algoritmen har lineær kompleksitet,
- at finde frem til forskellen mellem relativ og absolut strafberegning.

Grundlaget for behandlingen er et overskueligt eksempel.

3.3.1 Eksempel

Eksemplet indeholder kun to broer, som hver har tre løsninger. For at simplificere eksemplet yderligere ses kun på et enkelt budgetår, hvor budgetrammen er 5.

Eksemplets broer og løsninger

De seks løsningers reparationsudgifter i budgetåret ses i følgende tabel:

Rep.udgifter	Bro	
Løsning	1	2
1	4	6
2	3	3
3	0	0

Løsningerne har følgende nutidsværdier:

Nutidsværdi	Bro	
Løsning	1	2
1	4	6
2	5	9
3	9	13

Gennemsøgning af samtlige kombinationer

Før vi benytter VD's algoritme på dette eksempel, vil vi undersøge samtlige løsningskombinationer, så vi med sikkerhed kender den optimale løsning. Der er i alt ni (3·3) kombinationer af løsningerne.

I nedenstående tabel er nutidsværdi og reparationsudgifter udregnet for alle ni kombinationer. I søjlen *OK* angives, om udgifterne holder sig indenfor budgettet.

Kombination		Nutids-værdi	Reparations-udgifter	OK
Bro 1	Bro 2			
1	1	10	10	
2	1	11	9	
3	1	15	6	
1	2	13	7	
2	2	14	6	
3	2	18	3	X
1	3	17	4	X
2	3	18	3	X
3	3	22	0	X

Det ses i tabellen, at kombinationen med løsning 1 for bro 1 og løsning 3 for bro 2 er den optimale prioritering, idet denne har den laveste nutidsværdi (17) af de kombinationer, som overholder budgettet (kryds i OK).

Dette er imidlertid ikke den kombination, som VD's algoritme finder, hvilket vil fremgå af nedenstående gennemgang af, hvordan algoritmen behandler eksemplet.

Beregning af strafkvotienter

For at vælge løsningsskift skal strafkvotienterne kendes. I følgende tabel er udregnet strafkvotienter for samtlige løsninger:

Strafkvotient	Bro	
Løsning	1	2
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{9}$
3	∞	∞

Beslutningsgraf for eksemplet

Figur 3.2 viser samtlige løsningskombinationer i en beslutningsgraf. Tallene i knuderne er nutidsværdier for løsningerne. Ved siden af knuderne står indholdet af *S* i den pågældende knude. *S=(3,1)* er således den løsning, hvor løsning nummer 3 er valgt for bro nummer 1, og løsning nummer 1 er valgt for bro nummer 2.

Langs kanterne står strafkvotienten for den løsning, som skiftes ud. De skraverede knuder er de gennemførlige løsninger, dvs. løsninger, som overholder budgettet. Den optimale løsning er knuden mærket *Opt.*

Den optrukne sti med pilene fra toppen af grafen til *VD*-knuden viser løsningsskiftene i nedenstående gennemgang.

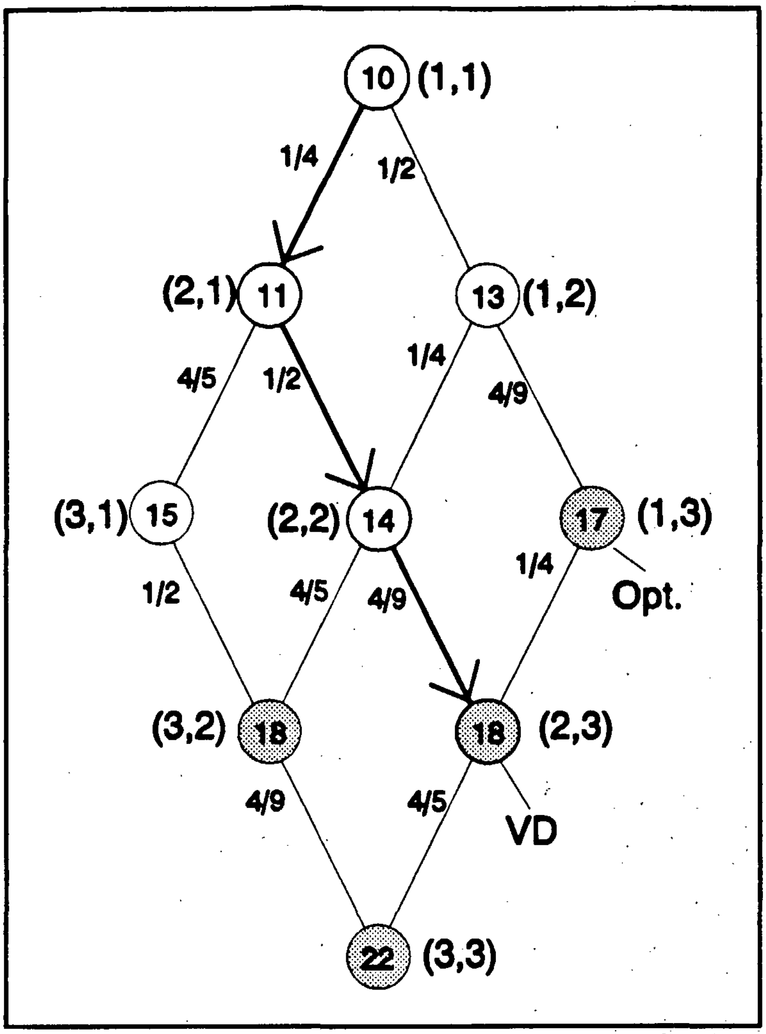
Algoritmens beregninger

Algoritmen starter med at have valgt de bedste løsninger for begge broer, dvs. den øverste knude, *S=(1,1)* er den aktuelle kombination. Da denne har en reparationsudgift på 10, hvilket overstiger budgettet, skal der skiftes løsning for en af broerne. Strafkvotienterne for de valgte løsninger er hhv. $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{2}$. Derfor vælges bro 1, hvor der skiftes til løsning 2.

Den aktuelle kombination er nu *S=(2,1)*. Denne har en reparationsudgift på 9, hvilket overskrider budgettet. De aktuelle strafkvotienter er hhv. $\frac{4}{5}$ og $\frac{1}{2}$, og derfor skiftes løsning for bro 2.

Den nuværende kombination er *S=(2,2)*, som har en reparationsudgift på 6. Budgettet er altså stadig overskredet, og derfor skal der findes endnu en ny løsning. Strafkvotienterne er $\frac{4}{5}$ og $\frac{4}{9}$, og derfor skiftes endnu engang løsning på bro 2 (som nu har løsning 3 valgt).

Den derved opnåede prioritering *S=(2,3)* har en reparationsudgift på 3, hvorved budgettet overholdes. Nutidsværdien for denne prioritering er 18.



Figur 3.2 En beslutningsgraf for VD's metode anvendt på to broer med tre løsninger. Figuren forklares i teksten.

Konsekvensanalyse

Den valgte prioritering har nutidsværdi 18, mens de optimale løsninger har en samlet nutidsværdi på 10. Straffen er altså 8, dvs. det begrænsede budget giver en ekstra omkostning på 8.

Prioriteringsresultatet *S=(2,3)* fra VD's algoritme er ikke den samme som den tidligere fundne optimale prioritering *S=(1,3)*, som har en straf på 7. Ved at se på beslutningsgrafen kan det ses, at allerede i første iteration, hvor der skiftes løsning for bro nummer 1, afskæres muligheden for at nå den optimale prioritering, idet metoden kun kan bevæge sig nedad i grafen svarende til, at fravalgte løsninger ikke kan genvælges.

3.3.2 Algoritmens konvergens

I det gennemgåede eksempel sås det, at VD's algoritme ikke fandt den optimale løsning til problemet. Det vil sige, at algoritmen ikke kan garantere en optimal løsning til det opstillede problem! Prioriteringen overholder ganske vist budgetbegrænsningen, men den har en højere nutidsværdi end den optimale prioritering. Hvor meget højere nutidsværdien er, kan ikke afgøres uden at kende den optimale. Algoritmen kan altså ikke selv kontrollere, om den optimale prioritering virkelig **er** fundet.

Hvorvidt algoritmen i det hele taget finder en mulig prioritering kan ikke på forhånd afgøres, men hvis den ikke finder én, er det ikke ensbetydende med, at der ikke **eksisterer** en løsning til problemet. Dette har dog ingen betydning i praksis, hvor summen af reparationsudgifter for de dårligste løsninger altid vil være mindre end budgettet (da de fleste broer har en løsning, som slet ikke har udgifter i de første fem år).

3.3.3 Algoritmens kompleksitet

Kompleksiteten er - som beskrevet i kapitel 1 - beregningstiden i *worst case*. For VD's algoritme er worst case, at den ikke finder en løsning, og derfor ender med at undersøge den nederste knude i grafen. Antallet af iterationer er i dette tilfælde lig højden af grafen. Grafens højde H er bestemt af det totale antal løsninger på følgende måde:

$$H = \sum_{i=1}^{n} (m_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} (m_i) - n = m - n$$

Grunden, til at højden er lig summen af m_i-1 og ikke blot summen af m_i, er, at for hver bro kan der skiftes løsning m_i-1 gange, da løsning 1 er valgt fra starten.

Hvis gennemsnitsantallet af løsninger pr. bro kaldes K, kan højden H, og dermed det maksimale antal iterationer udtrykkes således:

$$H = m - n = Kn - n = (K-1)n$$

I det gennemgåede eksempel, hvor der er to broer med tre løsninger, er $K=3$ og $n=2$, hvilket giver $H=6-2=(3-1)2=4$.

Det ses heraf, at algoritmens maksimale beregningstid afhænger lineært af antallet af broer (H er en funktion af n). Algoritmen har således kompleksiteten $O(n)$, hvilket som bekendt regnes for noget af det bedste.

3.3.4 Algoritmens anvendelse på VD's datamateriale

I det følgende beskrives VD's datamateriale samt resultater fra algoritmens anvendelse på dette.

Datamaterialet

I VD's datamateriale fra 1992 er der data fra særeftersyn af 92 broer. Broerne, som er af meget forskellig størrelse, har tilsammen 1038 løsninger. Budgettet er for alle fem år 46.085.000 kr.

Summen af nutidsværdierne for de optimale løsninger er 307.088.538 kr. Denne kombination overskrider budgettet i det første år med 15.192.058 kr (se udgiftsfordelingen på figur 3.3).

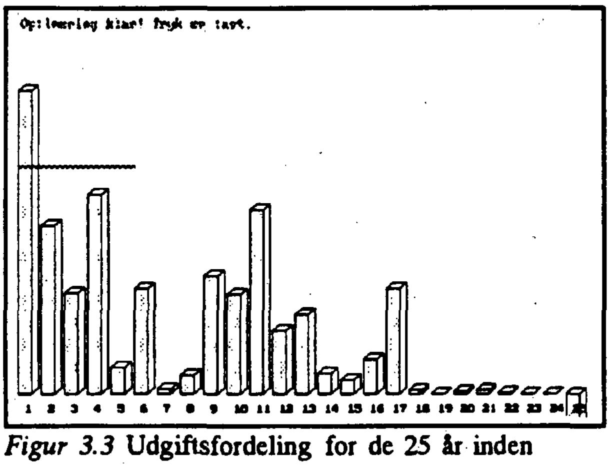
Ved at frasortere løsninger som beskrevet i afsnit 3.2.2 bringes antallet af løsninger ned på 881.

Resultater

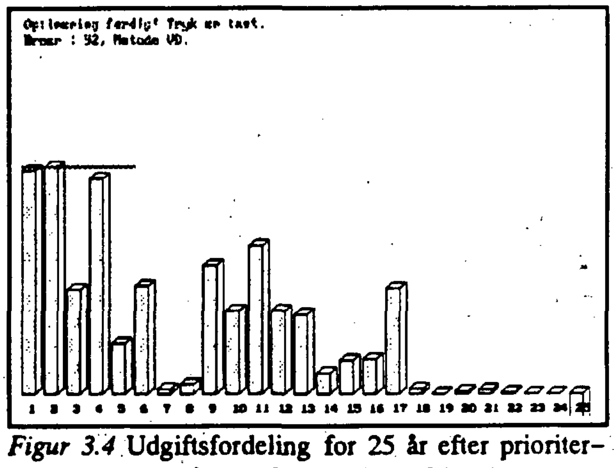
Vores implementering af VD's algoritme er blevet prøvekørt på det samlede datamateriale både med og uden frasortering af løsninger. Udgiftsfordelingen for den færdige prioritering uden frasortering af løsninger ses i figur 3.4.

VD's algoritme anvendt på det samlede datamateriale, uden frasortering af løsninger, bruger 11 iterationer (under 1 sekund på en standard-pc) til at finde en prioritering. Denne prioritering har en nutidsværdi på 307.700.998 kr, hvilket giver en straf på 612.460 kr.

Når algoritmen anvendes på det reducerede datamateriale efter frasortering af løsninger, benytter den ligeledes 11 iterationer, men resultatet er et andet. Nutidsværdien bliver da 307.807.531 kr. hvilket giver en straf på 718.993 kr. Straffen er altså 17% højere med dette datagrundlag, og det kan derfor ikke betale sig at frasortere disse løsninger, da reduktionen af antallet af løsninger fra 1038 til 881 må anses for at være en meget lille gevinst, især eftersom algoritmen har lineær kompleksitet (der bruges 11 iterationer i begge tilfælde).



Figur 3.3 Udgiftsfordeling for de 25 år inden prioritering (med optimale løsninger valgt). Budgettet er angivet med en streg.



Figur 3.4 Udgiftsfordeling for 25 år efter prioritering uden forudgående frasortering af løsninger.

Relativ vs. absolut straf

Vi har også prøvet at køre algoritmen med både relativ og absolut straf, som kriterie for løsningsskift. I figur 3.5 ses straffen for den fundne prioritering med hhv. relativ og absolut straf for forskellige problemstørrelser (delmængder af de oprindelige 92 broer), mens antal iterationer for algoritmen er vist i figur 3.6 (resultaterne kan ses i bilag B).

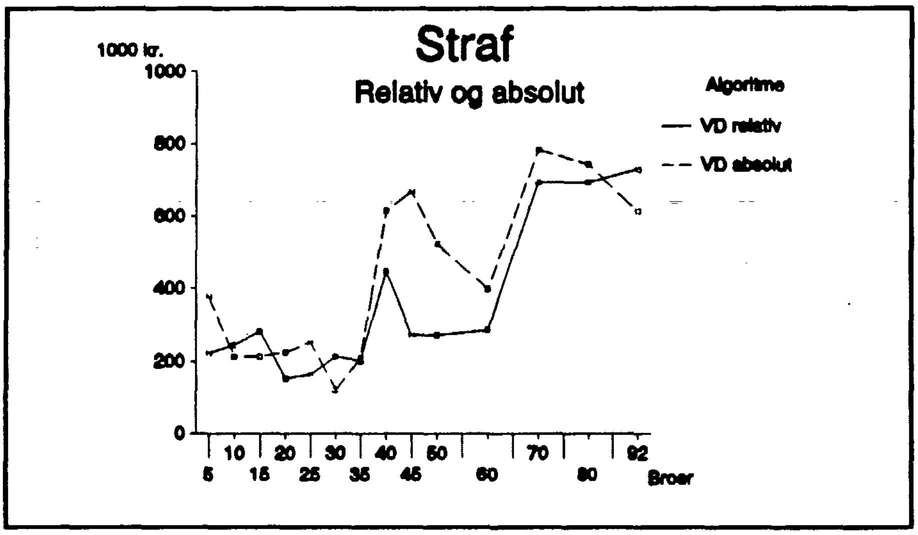
Grunden til, at beregningstiden måles i antal iterationer og ikke i f.eks. sekunder, er, at på denne måde kan programkørsler på forskellige maskiner (med forskellig hastighed) sammenlignes uden problemer, omend tiden for en enkelt iteration ikke er præcis den samme for alle de forskellige algoritmer (men i dette tilfælde er tiden den samme).

Værdien for hver enkelt prioritering er indbefattet af en stor usikkerhed i forhold til de øvrige prioriteringer foretaget med samme metode. Dette skyldes, at broerne (og dermed reparationsudgifterne) varierer så meget i størrelse, at det ikke er muligt, at sætte bevillingerne på en sådan måde, at alle kørsler har lige forhold. Bevillingerne blev fastsat efter et kriterium om, at antallet af iterationer skulle være jævnt stigende for algoritmen med relativ straf.

At værdierne indenfor én metode er indbyrdes usikre, forhindrer imidlertid ikke en sammenligning mellem metoderne, da de har haft præcis de samme input til kørsler med ens antal broer. For at lette denne sammenligning af metoderne er resultaterne indenfor hver enkelt metode forbundet – på trods af, at der kun er foretaget kørsler i de markerede punkter.

Disse bemærkninger omkring usikkerheder og sammenligningsgrundlag gælder i øvrigt også graferne i kapitel 5.

Det ses af figur 3.5, at for 4 ud af de 14 eksempler (blandt andet det samlede sæt af broer) giver den absolutte straf et bedre resultat end den relative. Men generelt ser det ud til, at der er en tendens til, at den relative straf giver et bedre resultat.

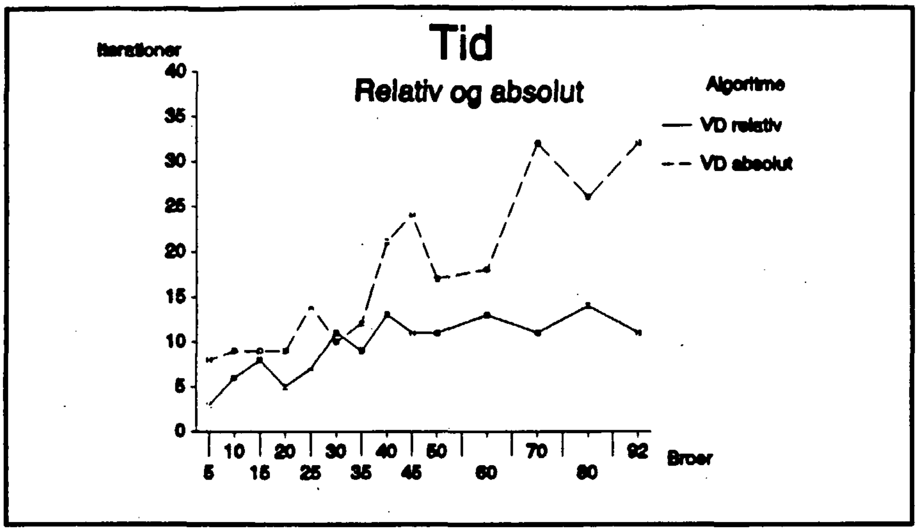


Figur 3.5 Straf for prioriteringsresultater med hhv. relativ og absolut straf-beregning.

I figur 3.6 ses, hvordan antallet af iterationer er med de to forskellige strafberegninger. Der ses en tydelig tendens i retning af, at den relative straf giver et lavere antal iterationer end den absolutte, men da beregningstiden er minimal (1–2 sekunder), er det ikke af nogen betydning.

Vurdering af algoritmen

Spørgsmålet er nu – uanset hvilken straftype der anvendes – hvor langt resultatet befinder sig fra den egentlige optimale prioritering. Dette kan, som nævnt tidligere, kun afgøres ved at finde det rigtige optimum. I næste kapitel vil vi se på algoritmer, som finder den rigtige optimale prioritering, og vurdere om de kan anvendes i praksis eller eventuelt kan bruges til vurdering af VD's prioriteringsresultater.



Figur 3.6 Antal iterationer for prioriteringen med hhv. relativ og absolut strafberegning.

3.4 Opsamling

I det nærmere studie af algoritmen er det blevet bekræftet, at VD's algoritme ikke kan garantere at finde den egentlige optimale prioritering. Selvom vi endnu ikke ved, hvor god VD's algoritme er til at finde en prioritering tæt på det optimale, kan vi allerede nu konkludere følgende:

- Der er ingen grund til at frasortere løsninger på den måde, som VD gør. Det giver et dårligere resultat, og gevinsten i form af reduceret datamateriale er marginal og unødvendig.
- Det ser ud til, at den relative strafkvotient er den bedste. I visse tilfælde er den absolutte straf væsentligt bedre. Man kunne eventuelt forestille sig mere indviklede strafkvotientberegninger, som kunne forbedre resultatet yderligere.
- Algoritmen er meget effektiv, og har en god evne til at løse selv meget omfattende prioriteringsopgaver, idet dens kompleksitet er lineær i antallet af broer.

Kapitel 4

Heltalsprogrammering

Kapitel 3 viste, at VD's metode til løsning af det opstillede problem ikke altid er i stand til at finde et egentligt optimum, men blot en gennemførlig prioritering med en rimelig nutidsværdi. Derimod er det en ret hurtig metode, idet den kun gennemsøger en ganske lille del af de gennemførlige prioriteringer. Men prisen er altså, at prioriteringen ikke er optimal.

Det er derfor interessant at undersøge andre metoder til løsning af dette problem. Målet er at finde en metode, som garanterer en optimal prioritering, og hvis effektivitet er rimelig, hvilket vil sige, at den er praktisk gennemførlig mht. tidsforbrug.

VD's problem kan opstilles som et 0–1 heltalsproblem, idet der er tale om et beslutnings-problem, hvor der skal vælges/fravælges (1–0) løsninger for broerne. Metoder til løsning af problemet kan således findes i det matematiske emneområde, som kaldes heltalsprogrammering (IP).

I dette kapitel gives en oversigt over området, og de vigtigste algoritmer til løsning af almindelige IP–modeller gennemgås.

4.1 Heltalsprogrammeringsmodeller

Som nævnt i kapitel 1 kan IP–problemer inddeles i to grupper, rene heltalsproblemer (PIP) og blandede heltalsproblemer (MIP). I det følgende behandles udelukkende PIP–problemer, herefter forkortet IP.

I modsætning til LP–modeller, der kun kan behandle lineære problemer, findes der IP–modeller, der kan behandle ikke–lineære problemer [14]. Disse IP–modeller er dog meget svære at løse og er uden interesse for dette projekt, da VD's problem som beskrevet i kapitel 2 er lineært.

Der findes ikke en generel metode til løsning af alle IP–problemer, og der findes således kun løsninger til underklasser af problemer. I det følgende beskrives nogle typiske heltalsmodeller, som er hentet fra [14] og [16].

Modellerne er beskrevet med henblik på at have nogle eksempler på IP–modeller, hvorfra større eller mindre dele kan bruges, når VD's problem i afsnit 5.1 omskrives på en lignende form.

Derudover kan læseren få et indblik i de problemtyper og modeller, der findes indenfor heltalsprogrammering.

4.1.1 En generel IP-model

Den generelle IP-model minder meget om LP-modellen præsenteret i kapitel 1. Blot er der tale om, at alle variable skal være heltallige.

Der er typisk tale om at maksimere en fortjeneste eller minimere et tab ved forhandling eller produktion af en række varer eller tjenesteydelser.

Variable

- x_j angiver, hvor mange enheder af den j'te vare, der f.eks. skal købes eller produceres.

Parametre og koefficienter

- n er antal forskellige varer (eller projekter eller ydelser).
- m er antallet af ressourcer.
- c_j er fortjeneste eller tab for den j'te vare.
- b_i er den mængde af ressource i, der er til rådighed.
- a_{ij} er den j'te vares forbrug af ressource i (f.eks. penge, tid eller personale).

Kriteriefunktion

Målet er at maksimere (eller minimere) en lineær funktion:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

Restriktioner

Der er én eller flere ressourcebegrænsinger på variablene:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,, \quad i \in \{1,\dots,m\} \tag{4.2}$$

Og alle variable skal være positive heltal eller 0:

$$x_j \in \mathbb{N}_0 \,, \quad j \in \{1,\dots,n\}$$

Beslutningsvariable

I mange tilfælde drejer heltalsproblemer sig ikke om at finde frem til en mængde af varer eller lignende men derimod om at beslutte, hvorvidt en bestemt handling skal udføres. I sådanne binære beslutningsproblemer benytter man heltalsvariable, som kun kan antage værdierne 0 og 1 (kaldes beslutningsvariable eller 0–1 variable). VD's problem er et sådant beslutningsproblem, og i det følgende gennemgås nogle almindelige 0–1 heltalsprogrammeringsmodeller.

4.1.2 Knapsackmodellen

Dette er en simpel opfyldningsmodel, der fylder et lager eller lignende (f.eks. en rygsæk) med forskellige varer, således at fortjenesten på varerne bliver størst mulig. Den eneste begrænsning er lagerets størrelse. Knapsackmodellen minder meget om den generelle IP–model, og ser således ud:

Beslutningsvariabel

$z_j \in \{0,1\}\ ,\ j \in \{1,...,n\}$

- $z_1...z_n$ er beslutningsvariable for de n forskellige varer.

z_j=1 angiver, at varen vælges, hvorimod z_j=0 betyder, at varen ikke vælges.

Parametre og koefficienter

- n er antallet af varer.
- c_j er fortjenesten for den $j$te vare.
- a_j er omfanget af den $j$te vare.
- b er lagerets størrelse.

Kriteriefunktion

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j z_j \tag{4.3}$$

Restriktion

$$\sum_{j=1}^{n} a_j z_j \leq b \tag{4.4}$$

Begrænsningen sikrer, at omfanget af den samlede mængde varer, der er indkøbt, ikke overstiger lagerets kapacitet b.

Knapsackmodellen er utilstrækkelig til at dække VD's problemstilling, der omfatter fem begrænsninger (bevillingerne i de fem budgetår), og kravet om at der skal vælges én løsning til hver bro. I afsnit 4.1.3. og 4.1.4. gennemgås to specialiseringer af Knapsackmodellen: Set Covering modellen, der har restriktioner, som minder om VD's, med hensyn til at der skal være en løsning til hver bro og Capital Budgeting, der giver mulighed for at administrere flere budgetår.

4.1.3 Set Covering modellen

Denne modeltype beskriver et problem, hvor man f.eks. skal minimere den samlede pris for indkøb af nogle varer (eller udførelse af nogle projekter). Nogle af varerne (projekterne) har fælles egenskaber, og løsningen skal være således, at alle egenskaber er dækket. Der er ingen begrænsninger på budget eller lagerkapacitet, men der er et endeligt antal varer.

Beslutningsvariable

$$z_j \in \{0,1\}\ ,\ j \in \{1,\ldots,n\}$$

- z_j angiver, hvorvidt vare j bliver indkøbt (projekt j bliver udført).

Parametre og koefficienter

$$a_{ij} \in \{0,1\}\ ,\ j \in \{1,\ldots,n\}\ \ og\ \ i \in \{1,\ldots,m\}$$

- a_{ij} angiver, hvorvidt vare (projekt) j har egenskab i.
- n er antallet af varer (projekter).
- m er antallet af egenskaber.
- c_j er prisen for den $j$te vare (projekt).

Kriteriefunktion

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j z_j \tag{4.5}$$

Restriktioner

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \geq 1\ ,\ i \in \{1,\ldots,m\} \tag{4.6}$$

Betingelsen sikrer, at hver egenskab er repræsenteret mindst én gang. Dette minder om den restriktion i VD's problem, der skal sørge for, at der vælges netop én løsning for hver bro.

4.1.4 Capital budgeting

Dette er en model, der beskriver investeringsmuligheder for et eller flere år. Formålet med modellen er at finde den bedste kombination af investeringer, hvilket overordnet ligner formuleringen af VD's problem.

Beslutningsvariable

$$z_{jk} \in \{0,1\}$$

- z_{jk} er beslutningsvariablen, der ved 1 angiver, at projekt j startes i år k, og ved 0 angiver, at det ikke startes i år k.

Parametre og koefficienter

- K angiver antallet af tidsperioder.
- m er antallet af projekter.
- c_{jk} er den profit, der kan opnås ved at igangsætte projekt j i år k.
- a_{jk} angiver det indskud af kapital, der skal til for at sætte projekt j i gang i år k.
- b_k er den kapital, der er til rådighed i år k.

Kriteriefunktion

$$\max \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{m} c_{jk} z_{jk} \tag{4.7}$$

Restriktioner

$$\sum_{k=1}^{K} z_{jk} \leq 1 \; , \; j \in \{1,\dots,m\} \tag{4.8}$$

Hvert projekt j kan kun startes i ét år.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{jk} \, z_{jk} \leq b_k \; , \; k \in \{1,\dots,K\} \tag{4.9}$$

De samlede udgifter for projekter, der er valgt til at blive udført i år k, **skal** være mindre end budgettet det pågældende år.

4.1.5 Anvendelse af IP-modeller

IP-modeller finder anvendelse i mange sammenhænge, men er desværre en del mere komplicerede at løse end de tilsvarende kontinuerte LP-modeller. Der er derfor brugt mange kræfter på at udvikle raffinerede algoritmer til at løse IP-problemer, og i næste afsnit vil nogle af de mest grundlæggende blive beskrevet.

4.2 Heltalsprogrammeringsalgoritmer

En umiddelbar måde at løse et IP-problem ville være at afrunde slutresultaterne fra en løsningsmetode, der regner med kontinuerte variable. Denne fremgangsmåde vil i mange tilfælde give et godt bud på en næsten optimal løsning – hvis altså værdierne bliver indenfor mulighedsområdets grænser ved denne afrunding. Dette er dog ikke altid tilfredsstillende, hvorfor der er udviklet specielle metoder til løsning af IP-problemer. I det følgende behandles to overordnede klasser af metoder.

Snitplanmetoder

Med løsningsmetoder baseret på kontinuerte variable (f.eks LP) fås heltallige løsninger. Dette opnås ved at sætte ekstra begrænsninger på variablene – dvs. der lægges snit ind i mulighedsområdet – indtil løsningen er begrænset til at være heltallig [14].

Enumerationsmetoder

Man gennemsøger løsningerne i et beslutningstræ, der indeholder samtlige kombinationsmuligheder af løsningerne. Der benyttes en række metoder til begrænsning af antallet af gennemsøgte løsninger.

I det følgende forklares funktionen af disse to typer metoder.

4.2.1 Snitplanmetoder

Snitplanmetoderne blev udviklet af Ralph E. Gomory i årene omkring 1960 i form af det, som man senere har kaldt Gomory's cut, der kun kan bruges på PIP-problemer [14]. Den oprindelige metode var som følger [16]:

1. Løs IP-problemet som om det var et LP-problem.
2. Hvis løsningen er heltallig, så er problemet løst. Hvis den derimod ikke er heltallig, lægges der et Gomory-snit ind i mulighedsområdet. En gennemgang af, hvordan snittet bestemmes, er i denne sammenhæng unødvendig[1], men det kan vises, at hvert snit
   - eliminerer den optimale ikke-heltallige løsning fra mulighedsområdet - det reducerer således mulighedsområdets areal
   - ikke fjerner heltalsløsninger fra mulighedsområdet
   - går igennem mindst én heltalsløsning
3. Gå til 1. med den nye, tilsnittede model.

Man bevæger sig således frem mod en optimal, heltallig løsning gennem de ved LP fundne superoptimale, ikke-heltallige løsninger, som er forholdsvis smertefrie at beregne.

Generelt begrænses metoden dog af, at det ikke er muligt at give en generel bestemmelse af, hvordan snittet lægges bedst, samt at de gentagne løsninger af problemet med kontinuerte variable gør, at antallet af beregninger stiger voldsomt (ihvertfald mere end LP) i takt med problemets størrelse.

Ikke alle snitplanmetoder er som Gomory's cut begrænset til PIP-problemer, men udledningen af, hvordan snittet skal lægges, er i et MIP-problem betydeligt mere kompliceret [14].

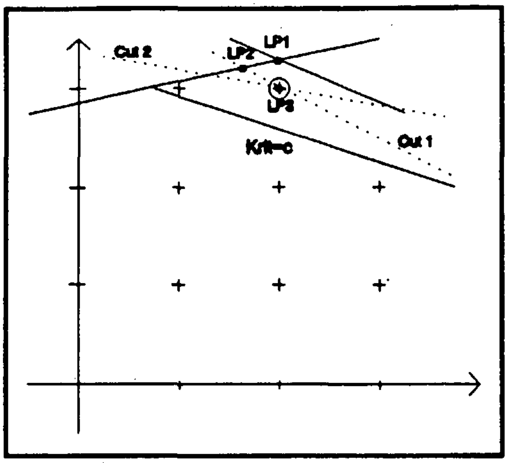
Figur 4.1 viser et eksempel på, hvordan denne metode snitter sig vej frem til den optimale løsning. Den første LP-løsning af problemet giver punktet LP1, der er ikke-heltalligt, hvorfor der indlægges snittet cut1. Herefter beregnes LP2 og cut2 indføres. Da LP3 er heltallig, er dette det søgte optimum.

4.2.2 Explicit Enumeration

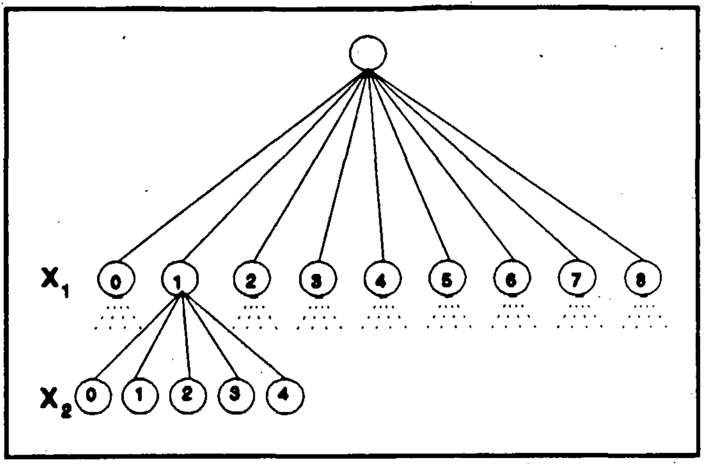
Explicit Enumeration skal ikke ses som et bud på en løsningsmetode men som et forståelsesgrundlag for de andre enumerationsmetoder. Princippet går ud på, at man nummererer samtlige punkter i løsningsmængden og undersøger dem ét ad gangen for på den måde at finde det optimale.

Det var denne metode, som blev brugt til at finde den optimale løsning i eksemplet i kapitel 3.

1: Til yderligere læsning herom kan anbefales "Heltalsprogrammering" af Søren Kruse Jakobsen [14].



Figur 4.1 Et eksempel på Gomory's cut som forklaret i teksten [16].



Figur 4.2 En del af et beslutningstræ for et IP–problem.

Metoden har den store ulempe, at den er temmelig tidskrævende, og selv for rimeligt små problemer tager den meget lang tid.

Beslutningstræer

Til illustration af fremgangsmåden i de enumerative metoder benyttes en beslutningsgraf som den i figur 4.2. Den adskiller sig fra grafen i figur 3.2 ved, at det er et træ – forgreningerne samles ikke længere nede i grafen. I øverste knude i træet er der ikke taget beslutninger for nogen af variablene. Hver gang man går til en knude længere nede i træet, fastlægger man en værdi for én af de variable. Hvis man bevæger sig opad i træet, opgiver man de tidligere valgte værdier for variablene. Endeknuderne i bunden af træet svarer hver til et punkt i løsningsmængden.

Ud fra dette beslutningstræ er det enkelt at ordne løsningsmulighederne og undersøge dem én ad gangen – f.eks. fra venstre mod højre i det viste træ. Det, at alle endeknuderne undersøges explicit, har givet metoden navnet.

Træet i figur 4.2 illustrerer følgende problem:

$$
\begin{aligned}
&\max P = 10x_1 + 20x_2 \\
&5x_1 + 8x_2 \le 60 \\
&0 \le x_1 \le 8 \,,\quad 0 \le x_2 \le 4 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

Kompleksitet

Det er ud fra beslutningstræet klart, at metodens kompleksitet er eksponentiel ($O(a^n)$), da antallet af endeknuder er eksponentielt voksende med højden af træet. Algoritmer med eksponentielle kompleksiteter er som tidligere nævnt ikke særligt anvendelige, idet deres tidsforbrug vokser voldsomt. Hvornår tidsforbruget bliver uacceptabelt afhænger af grundtallet (a) for eksponential–

funktionen. Jo højere grundtal jo mindre bliver de maksimale problemstørrelser, som kan løses med algoritmen.

Som ovenfor nævnt er Explicit Enumeration uanvendelig i praksis. For at kunne bruge enumerationsmetoder skal store dele af søgetræet kunne udelukkes, således at kun en lille del af mulighederne gennemsøges. Den mest generelle måde at gøre dette på er Branch & Bound metoden.

4.2.3 Branch & Bound (B&B)

Som navnet fortæller, går Branch & Bound ud på at foretage forgrenede beslutninger (Branch), samtidig med at der udregnes grænser (Bounds) for kriteriefunktionens værdi.

Metoden kan bruges til alle slags IP-problemer, men i visse tilfælde er den ikke særligt effektiv. Der findes mange specielle måder at effektivisere B&B ved forskellige, særlige IP-problemer, men her vil der kun blive set på den mest generelle form [14] & [16]. I afsnit 4.2.4 betragtes en yderligere specialisering af den generelle B&B. Denne algoritme kaldes *Implicit Enumeration,* og anvendes bla. på 0-1 IP-problemer.

Kontinuert løsning

I B&B er fremgangsmåden normalt at løse problemet uden heltalskrav, hvorefter løsningsmængden begrænses mod heltallige løsninger. Men i stedet for - som snitplanmetoderne - at skære yderområder af løsningsmængden væk, sørger B&B for at dele den op i områder, som har hjørner med heltalskoordinater, og dermed fås heltallige, optimale løsninger i disse delmængder, når problemet igen løses som et kontinuert problem.

Forgrening

Opsplitningen af mængden sker ved forgreninger, hvor én variabels definitionsområde deles op i to områder. Der findes forskellige måder at bestemme, hvilken variabel det er mest fordelagtigt at inddele efter. Som regel forsøges at finde den opdeling, hvor der er størst forskel på de to delmængder (den ene har stor chance for at indeholde optimum, mens den anden har stor chance for at kunne forkastes).

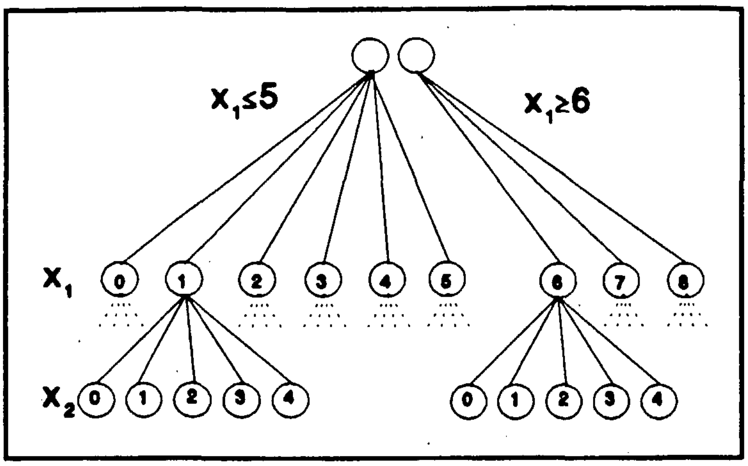
I eksemplet ovenfor giver løsning som kontinuert problem værdierne

$$x_1 = 5{,}6 \ ; \ x_2 = 4 \ ; \ P = 136$$

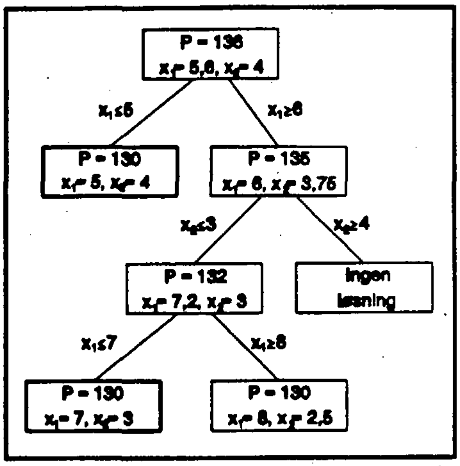
Da variablen x_1 ikke er heltallig, kan man splitte op efter denne svarende til hhv. nedrunding og oprunding af x_1 og derved få to delmængder:

$$x_1 \leq 5 \quad og \quad x_1 \geq 6$$

Det svarer i søgetræet (figur 4.2) til, at man skiller grenene fra øverste knude ud i to bundter og betragter hver af disse som nye søgetræer, der behandles på samme måde (se figur 4.3).



Figur 4.3 Beslutningstræ, hvor grenene fra øverste knude er inddelt i to grupper svarende til, at hhv. $x_1 \leq 5$ og $x_1 \geq 6$.



Figur 4.4 Branch & Bound–eksempel. De tykke rammer angiver de to optimale løsninger [16].

Grænser

Undersøgelsen af enhver delmængde (også den oprindelige) foregår ved, at man løser kontinuert og undersøger, om én af følgende hændelser optræder:

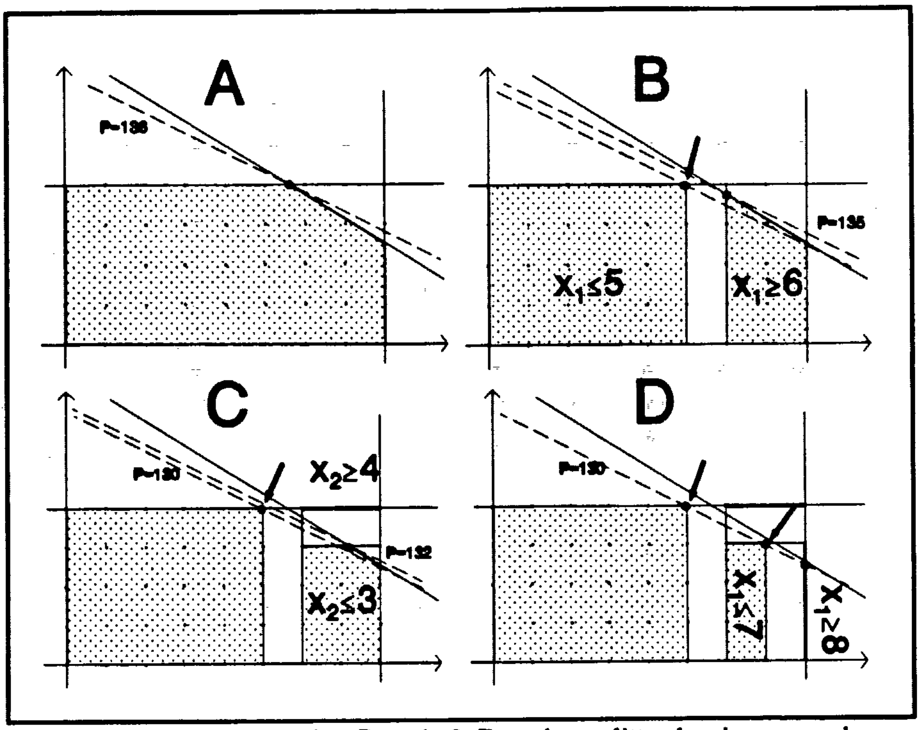
- Delmængden er ubrugelig, idet den ikke indeholder nogen løsning, som overholder restriktionerne.
- Delmængden har en heltallig løsning. Hvis denne er bedre end den hidtil bedste, huskes den som den bedste. Hvis den er dårligere, glemmes den, og hele delmængden droppes.
- Delmængden har en ikke–heltallig løsning. Kriteriefunktionsværdien for den ikke–heltallige løsning er en øvre grænse for delmængden, idet den optimale heltalsløsning ikke kan være bedre end den optimale, kontinuerte løsning.

  Hvis denne grænse er dårligere end den hidtil bedste heltallige løsning, droppes delmængden. Hvis den derimod er bedre eller lige så god, foretages en ny opsplitning af mængden og hver af de to delmængder undersøges på samme måde.

Når der ikke er flere delmængder, som skal undersøges, er den optimale løsning den bedste heltalsløsning, som blev fundet undervejs.

I ovenstående eksempel er kriteriefunktionsværdien 136 en øvre grænse for hele problemet ved første løsning som LP.

I figur 4.4 og 4.5 ses, hvordan B&B løser eksemplet ovenfor. Den første viser et træ, som illustrerer de enkelte opsplitninger. Den anden viser løsningsmængden og delmængderne, som undersøges. Niveaulinierne for kriteriefunktionen er tegnet gennem de optimale løsninger (store prikker) til de undersøgte delproblemer. Pilene angiver de heltallige løsninger.



Figur 4.5 Illustrerer, hvordan Branch & Bound opsplitter løsningsmængden. Det skraverede område er det mulige løsningsområde [16].

Kompleksitet

B&B's kompleksitet er - ligesom Explicit Enumeration - eksponentiel men med et lavere grundtal. Det skyldes, at hvis opsplitningen i to delmængder giver et godt resultat (den ene delmængde kan udelukkes umiddelbart), vil antallet af knuder i gennemsnit blive halveret ved hver opsplitning, hvilket vil give et halvt så stort grundtal. Men antal undersøgte knuder bliver yderligere reduceret ved, at store dele af træet slet ikke undersøges, fordi de bliver udelukket pga. grænsekriteriet. Jo længere algoritmen når, des strengere bliver grænsekriteriet, og jo mere effektiv bliver den dermed til at skære fra.

Af denne grund kan metodens effektivitet forbedres meget ved at starte algoritmen med et gæt på kriteriefunktionsværdien, dvs. en værdi, som angiveligt ligger ret tæt på den optimale kriteriefunktionsværdi.

4.2.4 Implicit enumeration (IE)

Implicit enumeration er en speciel form for Branch and Bound og således en enumerationsmetode, hvor løsningsmængden spaltes op i mindre og mindre disjunkte delmængder, der undersøges separat. Metoden bruges hovedsageligt til 0–1 IP–problemer, dvs. hvert knudepunkt i beslutningstræet er binært, svarende til at variablen har værdien 0 eller 1. Denne begrænsning på de variable giver mulighed for en betydelig reduktion af beregningerne.

I hvert knudepunkt foretages to test med henblik på at undersøge, om det kan betale sig at gå videre i træet med delmængden. Som i generel B&B bruges en sammenligning af den hidtil bedste værdi af kriteriefunktionen med værdien af kriteriefunktionen for den aktuelle løsning, og det undersøges, om restriktionerne for de variable er overholdt.

Til forskel fra B&B foretages endvidere en sammenligning af kriteriefunktionens bedst mulige værdi for den **partielle** løsning med kriteriefunktionens værdi for den hidtil bedste løsning. IE indebærer således en kraftigere beskæring af løsningsrummet end generel B&B og er velegnet til problemer, hvor der skal vælges mellem to alternative løsninger (enten/eller).

Endelig er det i IE unødvendigt af finde kontinuerte løsninger ved hjælp af LP, idet de variable kun kan antage værdien 0 eller 1.

IE på Knapsackmodellen

I det følgende beskrives løsningen af et 0–1 IP–problem ved brug af en grundlæggende – men ikke generel – IE–algoritme [14]. Ved valget af separationsvariabel er brugt en specifik metode til denne problemtype.

En fordeling af de variable i følgende tre disjunkte mængder vil fremover blive kaldt en partiel løsning:

V_1 er mængden af variable, hvis værdi er låst fast på 1.

V_0 er mængden af variable, hvis værdi er låst fast på 0.

V_ϕ er mængden af frie variable – dvs. variable, der stadigvæk kan vælges eller fravælges og optimeres med hensyn til.

Knapsackmodellen er valgt som eksempel på et klassisk IP–problem:

$$\max c(Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j \,,\quad z_j \in \{0,1\} \,,\quad j \in \{1,...,n\} \quad og \quad c_j \le 0 \tag{4.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \,,\quad i \in \{1,...,m\} \tag{4.12}$$

Da alle koefficienter i kriteriefunktionen er ikke–positive, opnås maksimum ved at flytte alle z_j tilhørende V_ϕ over i V_0, da placering af en variabel i V_1 kun kan gøre kriteriefunktionen mindre[1]. Det absolutte maksimum for kriteriefunktionen, $c(Z)$ opnås således ved $z_j = 0$ for $j \in \{1,...,n\}$. Hvis dette er en løsning på det opstillede problem, kunne man passende sige at problemet er trivielt eller ikke–eksisterende, men normalt vil hensynet til begrænsningerne kræve, at man yderligere finder ud af, hvilke variable der skal tilhøre V_1, for at begrænsningerne er opfyldt.

Den IE–algoritme, der i det følgende gennemgås, kan deles op i to stadier: valg af separationsvariabel og test af partiel løsning.

1: For et $c_j > 0$ udskiftes blot det tilhørende z_j med $(1-z_j^*)$. Dette bevirker, at både c_j og a_{ij} skifter fortegn i forhold til z_j^*.

1. Valg af separationsvariabel

I bestemmelsen af, hvilken af de frie variable der skal separeres efter, tilstræbes det – som beskrevet i afsnittet om generel B&B – at vælge én, der er årsag til en rigtig god og en dårlig partiel løsning.

Valget af separationsvariabel sker ud fra kriteriet om, at det skal være den variabel, som det er vigtigst at sætte til 1 i forhold til, at bevillingerne kan overholdes. Dette vurderes ud fra følgende beregning for hver af de frie variable:

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} \min\{0, u_i - a_{ij}\}\ , \quad \textit{for alle } j \in \{j \mid z_j \in V_\phi\} \tag{4.13}$$

hvor

$$u_i = b_i - \sum\nolimits_{\{j \mid z_j \in V_1\}} a_{ij}\ , \quad i \in \{1,\dots,m\} \tag{4.14}$$

Det er således kun, når $a_{ij} > u_i$ at rækken i bidrager til d_j, hvorfor den variabel, som vil være bedst at separere efter, vil være det z_p, der har den største tilhørende d_j-værdi, svarende til at man kommer tættest på at overholde begrænsningen ved, at z_j tilhører V_1. Når separationsvariablen således er blevet identificeret, sættes den til at tilhøre V_1.

Samtidig med at separationsvariablen indlemmes i V_1, huskes det, at den partielle løsning, hvor separationsvariablen tilhører V_0, ikke er afprøvet.

2. Test af partiel løsning

Hver gang der er givet en ny partiel løsning, undergår den to test.

Første test

Først undersøges det, hvordan værdien af den øvre grænse for den aktuelle partielle løsnings kriteriefunktion, $c(Z)^{eg}$, forholder sig til den foreløbigt bedste værdi for kriteriefunktionen, c^{max}. $c(Z)^{eg}$ er givet ved:

$$c(Z)^{eg} = \sum\nolimits_{\{j \mid z_j \in V_1\}} c_j \tag{4.15}$$

idet den øvre grænse findes, når alle frie variable sættes til 0 – dvs. overføres til V_0.

Hvis $c(Z)^{eg} \leq c^{max}$ kan den partielle løsning skrottes, og der kan nu skiftes til at undersøge en endnu ikke skrottet partiel løsning. Dette gøres ved, at den variable, man sidst har tilføjet V_1, overføres til V_0, hvorefter denne partielle løsning afprøves (det er således den sidst genererede partielle løsning der undersøges).

Hvis $c(Z)^{eg} > c^{max}$, har denne partielle løsning potentiale til at erstatte den hidtidige c^{max}, og der fortsættes til den anden test.

Før en løsning, der overholder restriktionerne, er fundet, kan denne test naturligvis ikke gennemføres, da man ikke har et c^{max} at sammenligne med, og der testes derfor kun efter test 2, indtil c^{max} er fundet.

Andet test

Det undersøges, om den partielle løsning kan overholde restriktionerne. Først korrigeres restriktionernes højresider med de led i venstresiden, der er fastlåst som valgte. Denne korrigerede værdi, u_i, er således et udtryk for, hvor meget af ressourcen/bevillingen der er tilbage, efter at de variable tilhørende V_1 er trukket fra.

2A

$$u_i = b_i - \sum_{\{j | z_j \in V_1\}} a_{ij}\,, \quad i \in \{1,\ldots,m\} \tag{4.16}$$

Hvis $u_i > 0$ for alle i, opfylder den aktuelle partielle løsning med alle frie variable lig 0 restriktionerne, hvorved $c(Z)^{eg}$ bliver en ny værdi for c^{max}. Det blev jo i første test konstateret, at $c(Z)^{eg} > c^{max}$. Den partielle løsning er herefter færdigundersøgt, og der gås tilbage til den sidst genererede, partielle løsning.

Hvis $u_i < 0$ for bare ét i, er begrænsningerne foreløbigt ikke opfyldt, og det må undersøges, om det overhovedet er muligt for den partielle løsning at overholde dem.

2B

Dette gøres ved for hver overskredet række ($u_i < 0$) at sætte alle variable $z_j \in V_\phi$ – for hvilke $a_{ij} < 0$ – til 1 (det vil sige overføre z_i til V_1) og beregne den øvre grænse for højresiderne u_i:

$$u_i^{eg} = u_i - \sum_{j=1}^{m} \min\{0, a_{i,j}\} \tag{4.17}$$

Gælder det for bare ét i, at $u_i^{eg} < 0$, kan den partielle løsning ikke overholde begrænsningerne. Den kan dermed skrottes, og der følges samme procedure som ved skrotning af en løsning i den første test.

Hvis det for alle i gælder, at $u_i^{eg} > 0$ er det muligt for den partielle løsning at overholde budgettet, og den må specificeres nærmere. Denne nærmere undersøgelse indebærer, at den partielle løsning deles op i to grene, der fremkommer ved, at en af de frie variable skal vælges som separationsvariabel, hvilket gøres ved, at man går tilbage til punkt 1 (valg af separationsvariabel).

Det kan opsummeres, at når det konstateres, at den aktuelle løsning enten kan skrottes, eller at den kan forbedre c^{max}, samtidig med at begrænsningerne overholdes, skal man gå tilbage i løsningstræet, indtil man finder en forgrening, der repræsenterer den sidste ikke-undersøgte partielle løsning. Dette fortsættes, indtil alle partielle løsninger er undersøgt, hvorefter optimeringen er færdig. I praksis holdes der styr på, hvilke løsninger der mangler at blive undersøgt ved at overføre z_i til hhv. V_0 og V_ϕ. På vejen tilbage i søgetræet foretages følgende i hvert knudepunkt:

- Hvis z_i tilhører V_1, overføres z_i til V_0, og der er givet en ny partiel løsning, der skal undersøges.
- Hvis z_i tilhører V_0, overføres z_i til V_ϕ, hvorefter man går endnu en knude tilbage i træet.

Når både V_1 og V_0 er tomme, betyder det, at alle løsninger har været undersøgt, og optimeringen er afsluttet.

Denne måde at vælge nyt delproblem er ikke nødvendigvis den bedste, når kompleksiteten tages i betragtning. En bedre løsningsmetode kunne være at gå til en helt anden løsning, der ser lovende ud i stedet for til den seneste ikke-valgte løsning. Denne metode ville dog kræve en anden og mere kompliceret administration af, hvilke løsninger der har været undersøgt.

Kompleksitet

Da IE anvendes på problemer med 0-1-variable, har søgetræerne binære forgreninger, hvilket betyder, at antallet af knuder vokser eksponentielt med grundtallet 2. Dette er selvfølgelig et lille grundtal, men 0-1-IP-problemer har til gengæld ofte mange variable.

Ligesom med B&B kan IE's effektivitet forbedres væsentligt med et gæt, og teorien om NP-komplette problemer[1] fremsætter det resultat, at algoritmer som IE kan bringes til at give en løsning (hvis den findes) i polynomiel tid, hvis den startes med et tilstrækkeligt godt gæt. Hvis der derimod ikke findes en løsning (worst case), er metoden stadig eksponentiel.

4.2.5 IE anvendt på et simpelt eksempel

Til illustration af IE-algoritmens principper gennemgås et eksempel. Figur 4.6 viser beslutningstræet for de separationer, som udføres i eksemplet.

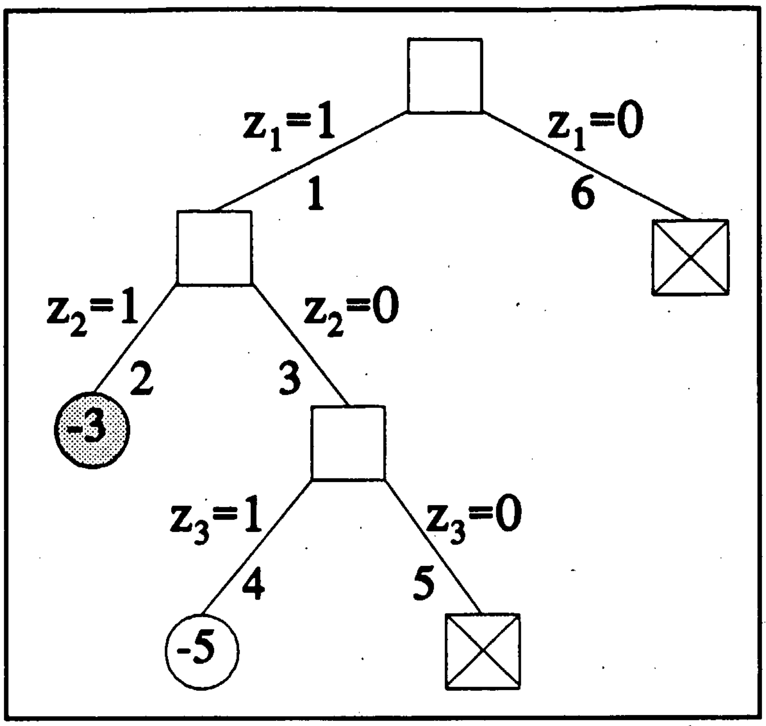
Kriteriefunktionen:

$$\max c(Z) = -2z_1 - z_2 - 3z_3 \tag{4.18}$$

Restriktioner:

$$\begin{array}{rrrcr} -3z_1 & -z_2 & +z_3 & \le & -2 \\ -2z_1 & +z_2 & & \le & 0 \\ & -z_2 & -3z_3 & \le & -1 \end{array} \tag{4.19}$$

1: Se eventuelt "Netværk" [13] bind 1 angående NP-teorien.



Figur 4.6 Beslutningstræet for det eksempel, som gennemgås i teksten. De firkantede knuder opfylder ikke restriktionerne. Et kryds angiver, at resten af undertræet kan droppes. Den skraverede knude er den optimale.

Første iteration

1. Da der endnu ikke er fundet et c^{max}, og endnu ikke er valgt separationsvariable, går man direkte til test 2B, hvor det undersøges, om restriktionerne kan overholdes.

$$u_1^{ag} = -2 \quad +3 \quad +1 \quad = 2$$

$$u_2^{ag} = 0 \quad +2 \quad = 2$$

$$u_3^{ag} = -1 \quad +3 \quad +1 \quad = 3$$

Da alle $u_i^{ag} > 0$, kan restriktionerne overholdes, og der er derfor mening i at fortsætte, hvilket vil sige, at man søger en separationsvariabel.

2. Valg af separationsvariabel.

   Ved hjælp af formlen for d_p, 4.2.5, vælges en separationsvariabel.

$$d_1 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0\,,\, u_i - a_{i1}\} = 0 \quad +0 \quad -1 \quad = -1$$

$$d_2 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0\,,\, u_i - a_{i2}\} = -1 \quad -1 \quad +0 \quad = -2$$

$$d_3 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0\,,\, u_i - a_{i3}\} = -3 \quad +0 \quad +0 \quad = -3$$

   Da d_1 er større end både d_2 og d_3, er z_1 den variabel, det vil være mest fordelagtigt at separere efter. Derfor sættes $z_1 = 1$, og løsningen $z_1 = 0$ huskes som en ikke-prøvet løsningsmulighed.

Anden iteration

1. Det undersøges, om separationen overholder restriktionerne (test 2A).

$$u_1 = -2 - (-3) = 1$$
$$u_2 = 0 - (-2) = 2$$
$$u_3 = -1 - 0 = -1$$

   Som det ses, er $u_3 < 0$, hvorfor restriktion tre ikke er opfyldt.

2. Det undersøges derfor, om $u_3^{øg} > 0$, hvilket indikerer, at der er mulighed for, at den partielle løsning overholder budgettet (test 2B). De variable, der har negative koefficienter, overføres til V_1, de øvrige variable overføres til V_0.

$$u_3^{øg} = -1 \quad +1 \quad +3 = 3$$

   Da alle $u_i^{øg} > 0$, kan restriktionerne overholdes, og der er derfor mening i at fortsætte, hvilket vil sige, at man søger efter en ny separationsvariabel (z_2 eller z_3).

3. Valg af separationsvariabel

$$d_2 = 0 \; +0 \; +0 = 0$$
$$d_3 = 0 \; +0 \; +0 = 0$$

   Da de to variable er lige gode som separationsvariable, vælges z_2, da denne står først.

   Derfor sættes $z_2 = 1$, og løsningen $z_2 = 0$ huskes som en ikke-prøvet løsningsmulighed.

Tredje iteration

1. Der er stadig ikke fundet et c^{max}, hvorfor første test ikke kan bruges, og der springes direkte til test 2A, hvor det kontrolleres, om restriktionerne kan overholdes i den aktuelle separation.

$$u_1 = 2$$
$$u_2 = 3$$
$$u_3 = 0$$

Da alle $u_i \geq 0$, er $z_1 = z_2 = 1$ en mulig løsning. Det er derfor ikke nødvendigt at undersøge, om $z_3 = 1$ er en mulig løsning, da dette kun vil formindske kriteriefunktionens værdi. Nu kan den hidtil bedste løsning for kriteriefunktionen udregnes.

$$c^{max} = -2 - 1 = -3$$

Det, der nu skal ske, er, at den til V_1 senest tilføjede variabel skal overføres til V_0, det vil i dette eksempel sige z_2, da den endnu ikke er afprøvet som mulig løsning.

Fjerde iteration

$z_2 = 0,\ z_1 = 1$

1. Første test kan nu anvendes, idet vi har identificeret et $c^{max} = -3$.

$$c(Z)^{eg} = -2 > -3 = c^{max}$$

Dette medfører, at den 4. separation har potentiale til at erstatte den hidtidige c^{max}, og der fortsættes derfor med at teste, om separationen kan overholde restriktionerne.

2. Kontrol af om restriktionerne overholdes (test 2A).

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 2$$
$$u_3 = -1$$

Heraf kan det ses, at den tredje restriktion er overskredet ved $z_3 = 0$.

3. Det må derfor undersøges, om det overhovedet er muligt for den partielle løsning at overholde den tredje restriktion.

$$u_3^{eg} = -1 - (-3) = 2$$

Heraf ses det, at separationen er mulig, og z_3 sættes til at tilhøre V_1.

4. $c(Z)^{eg}$ udregnes

$$c(Z)^{eg} = -5 < -3 = c^{max}$$

Den partielle løsning må kasseres, da c^{max} er et bedre bud på den optimale løsning.

Femte iteration

Dernæst prøves den partielle løsning, hvor z_3 tilhører V_0, men denne opfylder ikke restriktionerne. Derfor gås baglæns gennem træet til roden (dvs. z_3 og z_2 overføres til V_ϕ), hvor z_1 overføres til V_0.

Sjette iteration

1. Hverken test 1 eller test 2A kan gennemføres, da $V_1 = \emptyset$ (der er endnu ikke valgt en variabel at separere efter). Man starter derfor med at undersøge, om separationen overhovedet er mulig, test 2B.

   $$u_1^{*0} = -2 - (-1) = -1$$

   Da $u_1^{*0} < 0$, er separationen ikke mulig, og alle løsninger, hvor z_1 tilhører V_0, kan kasseres. Dermed er der ikke flere partielle løsninger, og algoritmen slutter. Den optimale løsning ender således med at være $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = 0$, med kriteriefunktionsværdien -3.

4.3 Opsamling

- Det er ikke lykkedes at finde en IP-model, der i sin udformning umiddelbart ser ud som VD's. Capital Budgeting ligner mest, da det er den eneste metode, hvor der er tale om placering af udgifter indenfor budgetter for en række år.
- Snitplanmetoden er ikke blevet undersøgt i detaljer, hvorfor den ikke kan udelukkes som løsningsmetode. Dog er det en metode, der indeholder en del beregningsmæssige vanskeligheder, hvilket gør den vanskeligere at implementere.
- Implicit enumeration er den IP-metode, der ser ud til at give de bedste muligheder for en løsning af problemet, da den
  - er forholdsvis simpel og let at udføre,
  - ofte bruges på 0-1 IP-problemer.
- Det er givet, at IE-metoden bliver hurtigere, hvis den initialiseres med en værdi for kriteriefunktionen - at udtale sig om, hvor meget hurtigere den vil blive, er umuligt på nuværende tidspunkt, men det vil blive undersøgt i kapitel 5.

Kapitel 5

Heltalsprogrammering på VD's problem

VD's problem er et 0–1 heltalsproblem, idet det drejer sig om at beslutte, hvorvidt de enkelte broløsninger skal vælges. I første afsnit foretages en omformulering af modellen til en standardform, som kan behandles med eksisterende metoder. Én af disse metoder undersøges nærmere i afsnit 5.2, og dens effektivitet i forhold til VD's problem søges forbedret. Til sidst bliver metoden afprøvet i praksis og sammenlignet med VD's metode.

5.1 Matematisk omformulering af model

For at kunne behandle VD's model med heltalsprogrammering er en omformulering af modellen nødvendig. Ved at formulere modellen som en heltalsprogrammeringsmodel på generel form fås adgang til en række generelle, velundersøgte løsningsmetoder, som dem fra kapitel 4. Der skal dog nogle specielle restriktioner til at sikre, at der vælges netop én løsning for hver bro.

5.1.1 Koefficienter og variable

Der benyttes samme notation som i kapitel 3 bortset fra følgende:

$z_{i,j}$ = beslutningsvariabel for løsning j for bro i. $z_{i,j} \in \{0,1\}$

Z = en prioritering, dvs. et sæt af valgte løsninger

$$Z = (z_{1,1},\dots,z_{1,m_1},z_{2,1},\dots,z_{n,m_n})$$

I den gamle model var løsningerne for bro i nummereret vha. s_i, og sammenhængen mellem den gamle nummerering og de nye beslutningsvariable $z_{i,j}$ kan beskrives på følgende vis:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } j = s_i \\ 0 & \text{for } j \neq s_i \end{cases}$$

For at sikre, at der for en bro i vælges netop én løsning, indføres restriktioner af typen:

$$\sum_{j=1}^{m_i} z_{i,j} = 1$$

Reparationsudgifterne i et år *k* er en funktion af prioriteringen *Z*:

$$a_k(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} a_{k,i,j} z_{i,j} \tag{5.1}$$

Nutidsværdien for prioriteringen *Z* kan skrives:

$$c(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} z_{i,j} \tag{5.2}$$

5.1.2 Formulering af problem

Hermed kan budgetrestriktionerne skrives:

$$a_k(Z) \le b_k \quad for\ k \in \{1,...,5\} \tag{5.3}$$

Opgaven er at minimere nutidsværdien $c(Z)$:

$$\min\ c(Z) \tag{5.4}$$

hvor $a_k(Z)$ og $c(Z)$ er ovenstående lineære funktioner. Samtidig skal følgende restriktion overholdes:

$$\sum_{j=1}^{m_i} z_{i,j} = 1 \quad for\ i \in \{1,...,n\} \tag{5.5}$$

I VD's datamateriale er samtlige koefficienter heltallige, og variablene skal være 0–1 variable:

$$a_{k,i,j},\ c_{i,j} \in \mathbb{N}_0,\ \ z_{i,j} \in \{0,1\}$$

For en prioritering *Z* kan den tilsvarende valgte løsning for bro *i*, s_i, frembringes på følgende måde:

$$s_i = \sum_{j=1}^{m_i} j z_{i,j} \quad for\ i \in \{1,..,n\}$$

Denne modelformulering er mere generel end den i kapitel 3 opstillede model for VD's problem, idet den er i stand til at beskrive en større klasse af problemer. For det første er det nemt at ændre på betingelsen om, at netop én løsning vælges for hver bro. Man kunne f.eks. forestille sig, at alle beslutningsvariable var uafhængige, eller at mindst to $z_{i,j}$ skulle vælges for hvert *i*. Alle disse restriktioner kan formuleres enkelt i denne model, mens den gamle formulering med løsningsnummeret s_i var begrænset til at beskrive restriktionen om én løsning pr. bro.

Formuleringen har yderligere den fordel, at man undgår variable i indeksangivelser, hvorved modellens linearitet bliver tydeligere.

5.1.3 Modeltypen og løsningsmetoder

Det er nu lykkedes at formulere VD's problem som en 0–1 IP-model. Strukturen i denne model minder meget om den type, der i afsnit 4.1 omtales som "*Capital Budgeting*". Der er udviklet specialiserede metoder til at behandle denne type modeller, men disse er dårligt beskrevet i litteraturen og som regel ikke matematisk velfunderede. For eksempel mangler konvergensbeviser for de algoritmer, som vi er stødt på [7] & [4].

Af denne grund har vi valgt kun at beskæftige os med den generelle IP-algoritme *Implicit Enumeration*, som vi beskrev i afsnit 4.2, og som i litteraturen er velundersøgt mht. til konvergens og kompleksitet.

5.2 Implicit Enumeration på VD's model

I dette afsnit vises, hvordan VD's problem kan løses ved hjælp af Implicit Enumeration, hvorved der fås en optimal prioritering. Desuden undersøges algoritmens effektivitet vha. computerberegninger for at finde frem til, om metoden kan anvendes i praksis. Vejdirektoratets egne undersøgelser tydede i sin tid på, at problemet ikke kunne løses i praksis ved hjælp af heltalsprogrammering. De brugte imidlertid ikke store ressourcer på at få undersøgt problemet til bunds, og det vil derfor være relevant at undersøge mulighederne for anvendelse nærmere. Eftersom IE's kompleksitet er eksponentiel og derved typisk bliver problematisk, når problemstørrelsen overstiger 30–40 (broer), vil der dog på forhånd være grund til at være skeptisk med hensyn til den praktiske anvendelse af en IP-model og IE-løsningsalgoritme. Løsningen ved hjælp af IE tager udgangspunkt i den formulering af VD's problem der er beskrevet i afsnit 5.1.2.

5.2.1 Indledende overvejelser

Ved almindelig IE fastlægges én variabel ad gangen, og efter hvert valg undersøges det, om restriktionerne er overholdt. I VD's model er der den ekstra begrænsning, som sikrer, at der for hver bro vælges netop én løsning. Det betyder, at hvis blot én løsning er valgt, kan samtlige andre løsninger for den samme bro udelukkes. Almindelig IE udnytter ikke dette, og vil derfor bruge tid på at undersøge løsninger, som ikke opfylder denne restriktion.

Almindelig IE benytter en række test, hvor koefficienterne til restriktionerne undersøges for positive og negative værdier i forhold til højresiden. I VD's model er alle koefficienter positive eller 0, og disse test vil derfor ikke give nogle konklusioner. Der må derfor udtænkes nogle alternative test, som kan erstatte disse.

Når denne viden indbygges i algoritmen, specialiseres den, hvorved den bliver mindre almen. Men dette kan vel anses for en naturlig proces: Efter at man har fundet en generel løsningsmetode, som der er teoretisk belæg for, forsøger man at skræddersy den til det aktuelle problem for at opnå bedre effektivitet eller præcision ved at indbygge den viden, man som modelbygger har fået om modellen.

5.2.2 Enumerationsmetode

I IE (og i B&B) skal der for hvert trin vælges en variabel at separere efter. Dette kan i VD's model forenkles til, at der skal findes en bro, som der skal vælges løsning for.

Broerne skal på forhånd være sorteret, så de kan behandles i en fordelagtig rækkefølge. Denne rækkefølge vil blive beskrevet senere i afsnittet. I den forbindelse skal der bruges et indeks l, som er nummeret på den aktuelle bro, dvs. den bro, hvis løsninger der separeres efter.

For hver bro vælges nu den bedste løsning, indtil én af følgende situationer indtræffer:

- budgettet bliver overskredet
- nutidsværdien er højere end det hidtil bedste
- alle broer har fået tildelt en løsning

Hvis budgettet overskrides, skal den sidste løsning ændres, hvorefter der prøves igen.

Hvis nutidsværdien er højere end det hidtil bedste, skal den sidste bro opgives, og man går tilbage i beslutningstræet; alle løsninger har højere nutidsværdi end den bedste, og disse kan derfor ikke give en lavere nutidsværdi. Hvis alle broer har fået tildelt en løsning, der opfylder budgettet og har lavere nutidsværdi end den hidtil bedste, huskes disse løsninger som den hidtil bedste prioritering.

5.2.3 Initialisering

Ligesom i VD's algoritme skal løsningerne for hver bro være sorteret efter stigende nutidsværdi:

$$c_{i,1} \le c_{i,2} \le \dots \le c_{i,m_i}\ , \ \mathit{for}\ i \in \{1,\dots,n\}$$

Fra starten er der ikke valgt løsning for nogle af broerne:

$$z_{i,j} = 0\ \mathit{for}\ i \in \{1,\dots,n\}\ ,\ \mathit{for}\ j \in \{1,\dots,m\}$$

Det betyder samtidig, at alle variable tilhører mængden $V_\diamond$:

$$z_{i,j} \in V_\diamond\ \mathit{for\ alle}\ i \in \{1,\dots,n\}\ ,\ j \in \{1,\dots,m_i\}$$

c^{min} sættes til et gæt for nutidsværdien (f.eks. opnået med VD's algoritme). Hvis der ikke eksisterer et gæt på en "god" prioritering, sættes $c^{min} = \infty$.

5.2.4 Algoritmen

1. Bro 1 vælges som den aktuelle bro l:

$$l = 1$$

2. For den aktuelle bro l vælges den bedste løsning. Dette huskes i J_l:

$J_l = 1$

Den tilsvarende beslutningsvariabel sættes til

$z_{l,J_l} = 1$

Det svarer i den tidligere IE-algoritmes formulering til:

$z_{l,J_l} \in V_1 \quad og \quad z_{l,j} \in V_0 \; for \; j \neq J_l$

3. Det undersøges nu, om budgettet er overholdt:

$$a_k(Z) \leq b_k \quad for \; k \in \{1,\ldots,5\} \tag{5.6}$$

Hvis budgettet er overholdt for alle fem år, hoppes til punkt 5. Ellers fortsættes i punkt 4.

4a Den aktuelle delprioritering må opgives. Dette gøres ved at skifte løsning for den aktuelle bro, hvis der eksisterer flere løsninger:

Hvis $j_l < m_l$:

	1. $z_{l,J_l} = 0$	$(z_{l,J_l} \in V_0)$
så udføres	2. $J_l \rightarrow J_l + 1$	
	3. $z_{l,J_l} = 1$	$(z_{l,J_l} \in V_1)$

Der springes da tilbage til punkt 3 (budgetoverholdelse).

Hvis $J_l = m_l$, kan der ikke skiftes løsning, hvorfor der skiftes til den forrige bro i træet, hvis dette kan lade sig gøre.

4b Hvis $l > 1$:

så udføres	1. $z_{l,J_l} = 0$	$(z_{l,j} \in V_\phi \quad for \; alle \; j)$
	2. $l \rightarrow l-1$	

Derefter gentages punkt 4.

Hvis $l = 1$, er beregningen færdig, og den prioritering, som gav værdien i c^{min}, er den optimale prioritering.

5. Der haves i dette tilfælde en delprioritering, som overholder budgettet. Det skal nu undersøges, om denne delprioritering kan indgå i en samlet prioritering, der har lavere nutidsværdi end den hidtil bedste prioritering. Da der **skal** vælges en strategi for resten af broerne, skal de laveste nutidsværdier (de bedste løsninger) for disse lægges til delprioriteringens nutidsværdi $c(Z)$, og denne nedre grænse, $c(Z)^{ng}$, skal sammenlignes med c^{min}.

$$c(Z)^{ng} = c(Z) + \sum_{i=l+1}^{n} c_{i,1} \leq c^{min} \tag{5.7}$$

Hvis dette ikke er opfyldt, hoppes til 7. Er det opfyldt, går man videre til punkt 6.

6. Delprioriteringen er altså godkendt, og derfor forhøjes l med 1 (hvis $l < n$):

Hvis $I < n$ *så udføres* $I \leftarrow I + 1$

og der fortsættes fra 2 (valg af bedste løsning for bro I).

Hvis $I = n$ (et endepunkt i beslutningstræet er nået) er der fundet en ny og bedre prioritering, og c^{min} sættes til nutidsværdien:

Hvis $I = n$ *så udføres* $c^{min} = c(Z)$

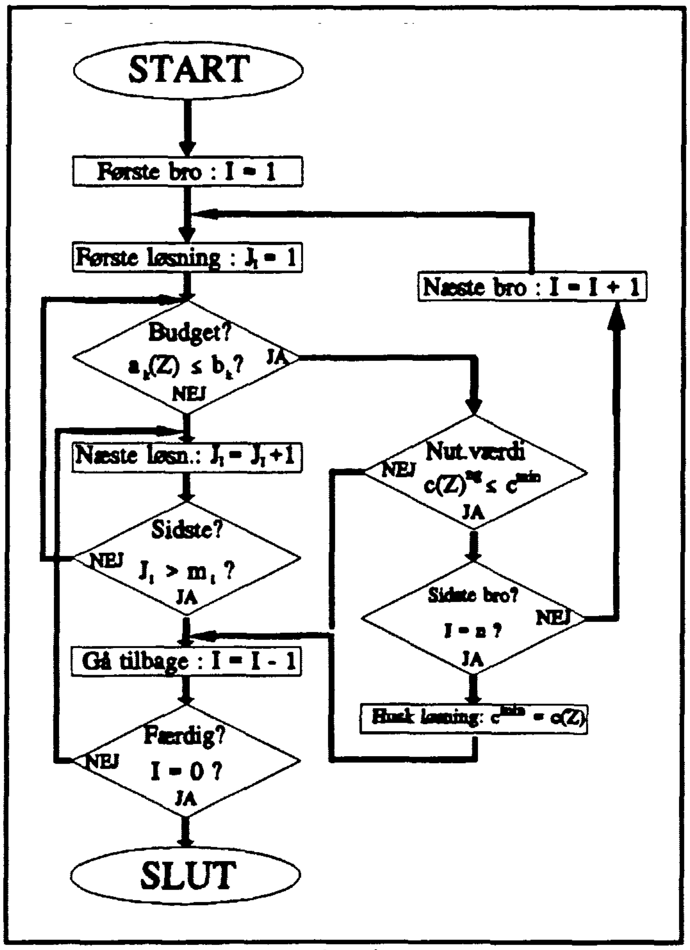
Derefter fortsættes i 7.

7. Der skiftes tilbage til forrige bro (alle ikke-afprøvede løsninger for den nuværende bro har en højere nutidsværdi)

$z_{I,J_I} = 0 \qquad (z_{I,j} \in V_\blacklozenge$ *for alle* $j)$
$I \leftarrow I - 1$

Herefter fortsættes i punkt 4.

I figur 5.1 ses et rutediagram for algoritmen.



Figur 5.1 Rutediagram for IE på VD's problem. Rækkefølgen stemmer ikke helt overens med beskrivelsen i teksten.

5.2.5 Eksempel

Til at illustrere algoritmens fremgangsmåde benyttes eksemplet fra kapitel 3, hvor der er to broer, som hver har tre løsningsmuligheder. Budgettet er 5.

I tabellerne ses hhv. reparationsudgifter og nutidsværdier for de 6 løsninger.

Rep.udgifter	Bro	
Løsning	1	2
1	4	6
2	3	3
3	0	0

Nutidsværdi	Bro	
Løsning	1	2
1	4	6
2	5	9
3	9	13

I figur 5.2 ses et beslutningstræ for eksemplet. Hver knude svarer til en partiel løsning. For hvert skridt ned i træet vælges løsning for en bro (svarende til en separation).

- I knuderne står den nedre grænse for delprioriteringen, $c(Z)^{ng}$.
- Ved siden af (under) knuderne står reparationsudgifterne, $a_t(Z)$.
- De firkantede knuder er ugennemførlige løsninger, som overstiger budgettet.
- Langs grenene står numre, som angiver rækkefølgen af iterationerne.

I dette simple eksempel bliver der kun afskåret en enkelt løsning (den sidste) på grund af, at nutidsværdien overstiger den tidligere fundne løsning. For større datamaterialer vil der blive afskåret større undertræer.

Kort gennemgang af eksempel

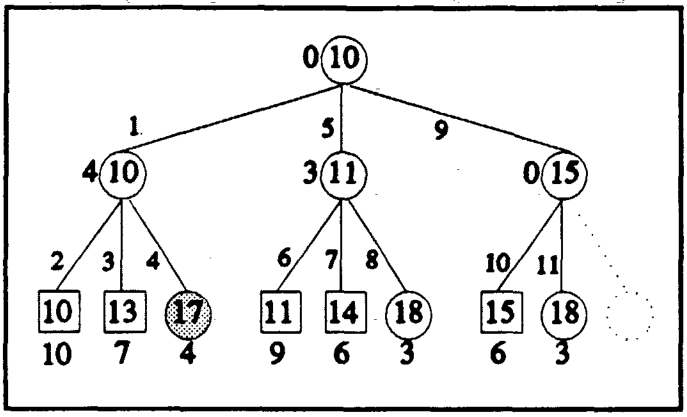
Først vælges løsning 1 for bro 1. Da dette ikke overskrider bevillingen, gås der videre til bro 2 (der er endnu ikke nogen nutidsværdi at sammenligne med, da $c^{min}=\infty$), hvor der ligeledes vælges løsning 1.

Men dette overskrider bevillingen, og der skiftes til løsning 2 for bro 2. Dette overskrider også bevillingen, så den sidste løsning prøves. Den derved fremkomne prioritering (1,3) overholder budgettet, så c^{min} sættes til dennes nutidsværdi nemlig 17.

Der skiftes tilbage til bro 1, hvor den næste løsning (løsning 2) vælges. Derefter prøves de tre løsninger for bro 2 igen. De to første af dem overskrider budgettet, mens den tredje har en højere nutidsværdi (18) end de 17 fundet før.

Til sidst prøves løsning 3 for den første bro. Den minimale nutidsværdi er 15, og derfor prøves de tre løsninger for bro 2. Den anden af disse overholder budgettet men har en højere nutidsværdi (18) end de 17 fundet før. Derfor kan resten af løsningerne (løsning 3) for bro 2 droppes (fordi løsningerne er sorteret efter stigende nutidsværdi), og dermed er hele træet gennemsøgt.

De enkelte trin i algoritmens behandling af eksemplet kan ses i bilag A.



Figur 5.2 Beslutningstræ for eksemplet behandlet med IE-algoritmen ovenfor. De firkantede knuder er ugennemførlige løsninger. I knuden står nutidsværdi. Udenfor knuden står reparationsudgift.

5.2.6 Effektivitetsforbedringer

Reduktion af data

Som forklaret i afsnit 4.2 har IE-algoritmer eksponentiel kompleksitet, og problemstørrelsen er derfor af stor betydning for algoritmens effektivitet. Der er derfor god grund til at overveje, om datamaterialet kan reduceres.

En umiddelbart indlysende måde at reducere datamaterialet, er at fjerne løsninger, som vi kan være sikre på, ikke kan indgå i en optimal prioritering. Det drejer sig om løsninger, der har højere nutidsværdi end en anden løsning for samme bro, når denne anden løsning ikke har udgifter i budgetårene. En løsning, som ikke har udgifter i budgetårene, er der ingen grund til at udskifte, hvis den først er valgt, så alle løsninger, som har højere nutidsværdi end denne, kan slettes uden risiko for at udelukke den optimale prioritering. Dette skal ses i modsætning til VD's måde at frasortere løsninger, som gav en højere straf og kun reducerede antallet af løsninger med en femtedel (afsnit 3.3.4).

Ved at foretage den ovenfor beskrevne reduktion på VD's datamateriale reduceres det totale antal løsninger (for de 92 broer) fra 1038 til 415 løsninger. Dette er en meget væsentlig reduktion, når IE-algoritmens eksponentielle kompleksitet tages i betragtning, og den forværrer ikke resultatet i modsætning til Vejdirektoratets mindre effektive frasortering.

Sortering af broer

Som nævnt i starten af dette afsnit, skal broerne være sorteret i en fordelagtig rækkefølge, for at effektivisere IE-algoritmen, når der ikke benyttes særlige test for valg af separationsvariabel (bro), men broerne blot vælges i rækkefølge.

En mulighed er at sortere broerne efter den absolutte nutidsværdistigning fra den bedste løsning til den næstbedste med den største stigning først. På denne måde vælges de broer, som har den største straf, først for skift af løsning. Dette bevirker endvidere, at det også er disse broer, der sidst skiftes løsning for. Derved er der større chance for hurtigt at få en rimelig løsning, som kan effektivisere den videre kørsel.

I stedet for at sortere broerne, kunne man finde et kriterium for valg af bro til separation undervejs. Dette vil ikke blive undersøgt nærmere i nærværende projekt.

Initialisering med gæt

Som forklaret i 4.2.4. bliver metoden først rigtigt effektiv, når den kan afskære hele deltræer i beslutningstræet ved sammenligning med en kendt "god" nutidsværdi, dvs. når den har fundet én mulig løsning. Dette kan dog i visse tilfælde tage et stykke tid, og det kan derfor hjælpe meget på algoritmens hastighed at starte med at sætte c^{min} til nutidsværdien for en kendt løsning. Et rimeligt godt gæt kan opnås med VD's algoritme, og da denne er **meget** hurtig, er det en stor fordel. I næste afsnit vil det blive afprøvet i praksis på VD's datamateriale.

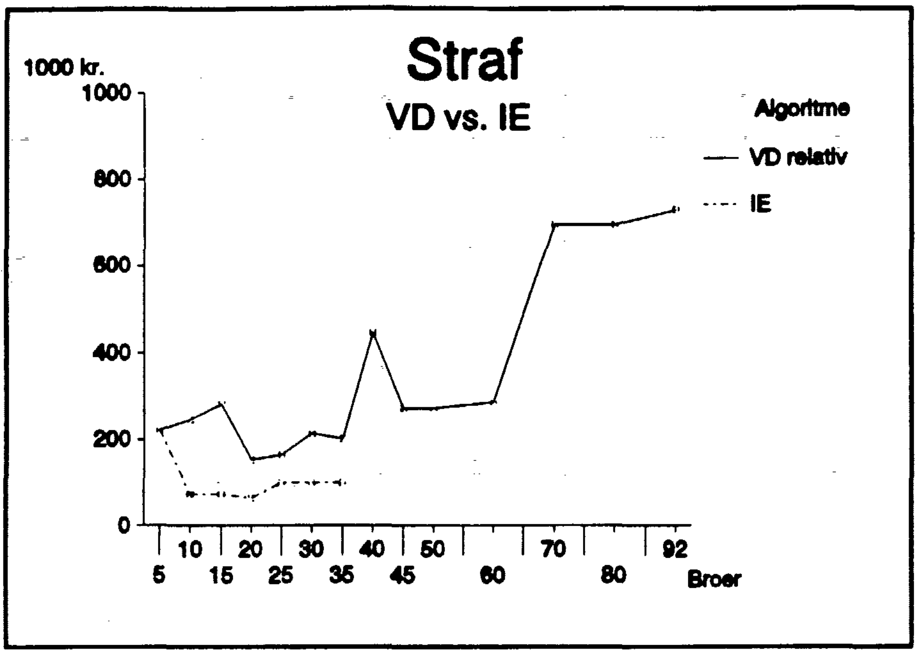
5.3 IE anvendt på VD's datamateriale

I det følgende anvendes den i afsnit 5.2 beskrevne IE-metode på VD's datamateriale, akkurat som VD's egen metode blev det i kapitel 3. Dette gøres med henblik på, gennem sammenligning med VD-metodens præstationer, at undersøge IE's anvendelsesmulighed i VD's prioriterings-modul, samt at vurdere VD-metodens resultater. Sidst afprøves ideen fra foregående afsnit om at starte IE med et godt gæt på værdien c^{min}. Samtlige kørselsresultater kan ses i bilag B.

5.3.1 Undersøgelse af IE

Som tidligere forklaret ønskes det undersøgt, hvor langt VD-metoden ligger fra det minimum for strafværdien, som IE jo finder. En graf over dette er vist i figur 5.3.

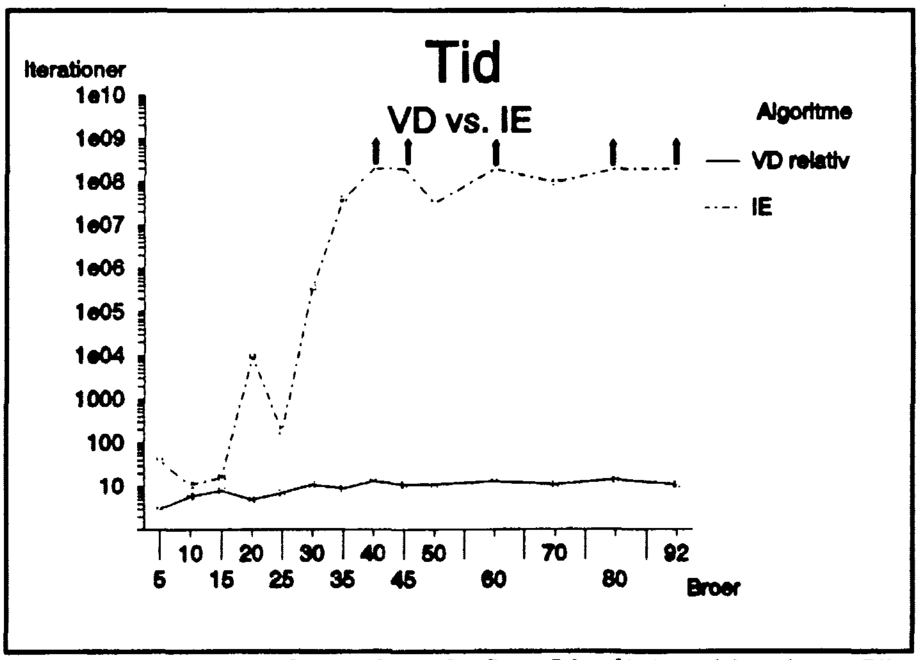
Det ses tydeligt på grafen, at VD's metode, på nær kørslen med 5 broer, ikke finder den optimale strafværdi. I kørslerne op til og med 35 broer er VD-metodens straf ca. det dobbelte af den optimale. For at kunne sige noget generelt, skal vi have flere resultater, dvs. finde en metode, som kan finde optimum for et større antal broer.



Figur 5.3 Strafværdien for den samlede prioritering for hhv. VD-algoritmen og IE. Datamaterialet er det samme som i afsnit 3.3.

Grunden til, at IE kun løser problemer indeholdende højst 35 broer, er, at kørsler med et større antal simpelthen ikke er stoppet indenfor en rimelig tidsgrænse (14–16 timer). Kørslernes regnetid målt i antal iterationer kan ses i figur 5.4. Bemærk den logaritmiske skala på y-aksen.

Læg desuden mærke til, at ikke alle kørslerne er færdige (markeret med pile).



Figur *5.4* Tidsforbruget for kørslerne fra figur 5.3 målt i antal iterationer. Pile angiver kørsler, som ikke er afsluttet inden $2 \cdot 10^8$ iterationer (ca. 15 timer).

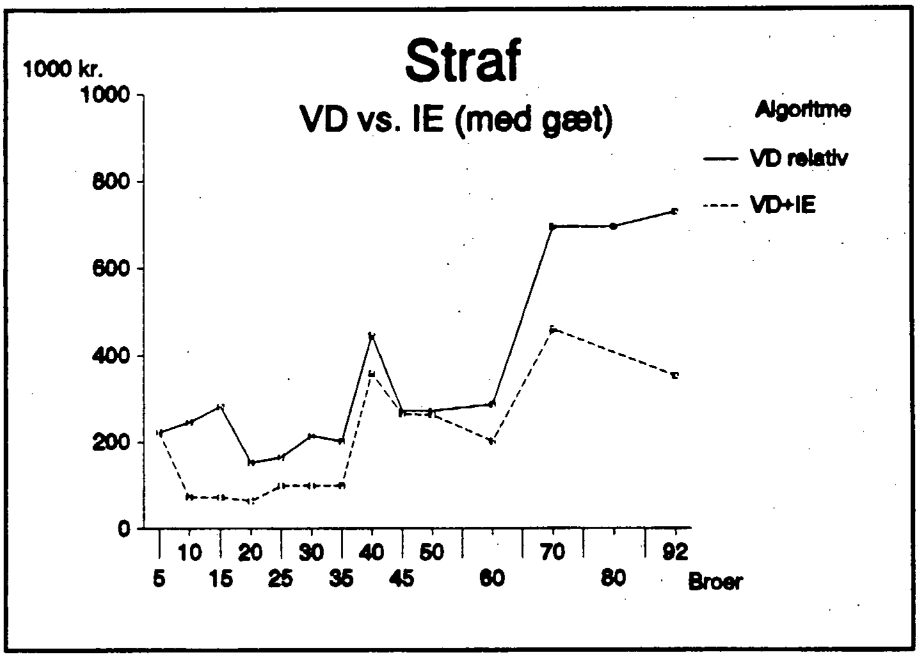
Det ses på figuren, at VD-metoden har brug for et langt mindre antal iterationer end IE, og at **forskellen** mellem antallet af iterationer i de to algoritmer ser ud til at vokse næsten eksponentielt i takt med broernes antal.

VD's metode ligger for alle kørsler under 20 iterationer, mens IE allerede ved 35 broer bruger ca. $4 \cdot 10^7$ iterationer (cirka 4 timer). Grundet IE's stærkt voksende tidsforbrug, der stemmer overens med teorien om dens eksponentielle kompleksitet, kan metoden ikke bruges i praksis i VD's prioriteringsmodul. I næste afsnit forsøges den derfor forbedret.

5.3.2 Forbedring af IE

Det er tidligere blevet omtalt, at algoritmer, som bygger på Branch & Bound princippet, kan forbedres meget ved at starte dem med et rimeligt godt gæt på kriteriefunktionens optimum.

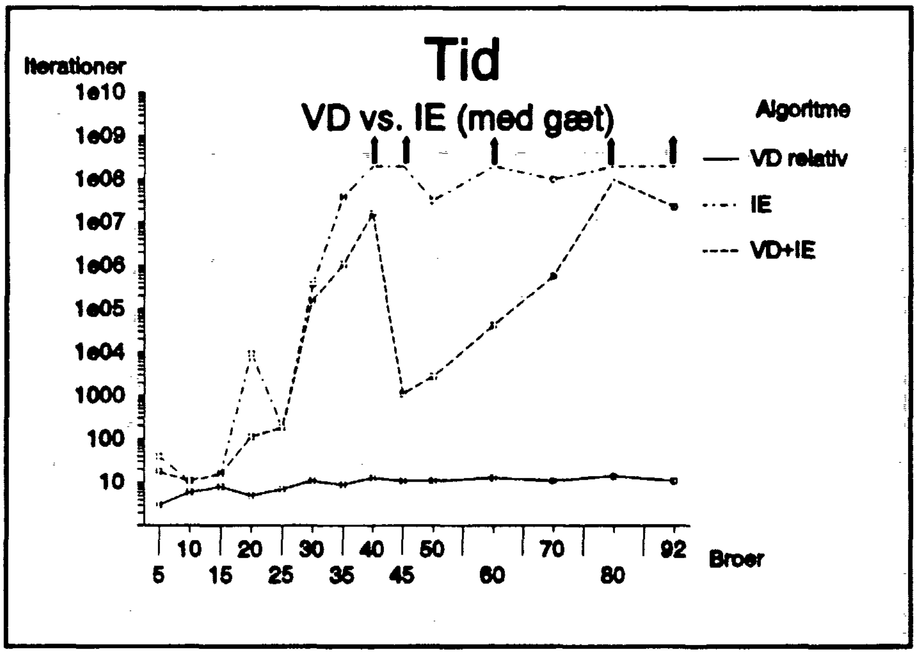
Dette gæt kan passende fremskaffes med VD's algoritme. I det følgende kaldes denne fremgangsmåde for VD+IE. Resultatet af kørslerne ses i figur 5.5 og 5.6.



Figur 5.5 Strafværdien for den samlede prioritering for hhv. VD-algoritmen og IE-algoritmen initialiseret med et gæt.

Det er nu ved hjælp af VD+IE-metoden blevet muligt at lave alle kørsler, bortset fra den med 80 broer. Det ses, at VD's metode konstant har højere strafværdier, selvom forskellen er meget varierende. Ofte drejer det sig dog om, at den optimale prioritering giver en halvering af straffen i forhold til VD's resultat, hvilket må være en rimelig (og ønskværdig) forbedring.

Tidsforbruget for VD+IE i forhold til IE ses i figur 5.6. Antallet af iterationer er stadigvæk meget større for VD+IE end for VD's algoritme alene, men alle kørsler ligger på 10^8 iterationer eller derunder, og kan derfor udføres indenfor 10 timer.



Figur 5.6 Tidsforbruget for kørslerne fra figur 5.5 målt i antal iterationer. Pilene angiver også her, at kørslerne ikke er færdige inden $2 \cdot 10^8$ iterationer.

Det ses desuden, at der er meget store forskelle i beregningstiden for de forskellige problemstørrelser, hvilket gør, at man ikke på forhånd kan vide, hvor lang tid der går, før resultatet fås. Det er heller ikke muligt at vide, om algoritmen kan bruges, hvis broantallet - som ventet af VD - stiger med 30-40 broer indenfor de nærmeste år.

Af denne grund kan det stadig være relevant at søge et bedre gæt end det, som fås med VD's metode, eventuelt ved at finde et bedre strafmål end den nuværende relative strafkvotient.

5.4 Opsamling

I dette kapitel er vi nået frem til følgende konklusioner:

- VD's problem kan elegant formuleres som en 0-1 heltalsprogrammeringsmodel.
- Implicit Enumeration kan forholdsvis enkelt bringes til at virke på denne model.
- Ved at udnytte resultatet af kørslerne med VD's algoritme som gæt, kan Implicit Enumeration bringes til at behandle VD's datamateriale inden for en overskuelig tid.
- Implicit Enumeration kan sandsynligvis gøres endnu hurtigere med en forbedret version af VD's metode som gætfinder, samt ved et forbedret valg af separationsvariabel.
- VD har ikke undersøgt heltalsprogrammering grundigt nok til at afvise det som en mulig løsningsmetode. Derved har de også afskåret sig fra at finde ud af, hvor langt deres egen metode befinder sig fra det optimale.

Konklusion

Vejdirektoratets opstilling af model og valg af løsningsmetode har efter vores mening ikke været systematisk nok i forhold til de forskrifter, som vi beskrev i kapitel 1.

Den opstillede model bærer præg af, at den udelukkende er opstillet til lejligheden, og den er således uden noget bredt teoretisk fundament. Men modellen er udmærket, idet man på et tidligt tidspunkt gjorde sig klart, hvad formålet var, hvilke begrænsninger, der var nødvendige, samt at man i forvejen havde god erfaring med dataindsamling og broreparation generelt.

Formuleringsfasen fungerede således udmærket, hvilket måske siger noget om, at resultatet i denne fase mest af alt er afhængigt af, hvor godt modelbyggeren kan gennemskue det modellerede virkelighedsområde, og Vejdirektoratet må siges at have indgående kendskab til brovedligeholdelse.

Derimod er **behandlingsfasen** kritisabel. Valget af løsningsmetode er sket på et - ud fra en matematikers synspunkt - for løst grundlag. Det havde været oplagt at undersøge mulighederne for en bedre løsningsmetode mere grundigt - f.eks. kunne eksperter indenfor optimering og operationsanalyse være blevet kontaktet.

VD overvejede selv muligheden for at anvende heltalsprogrammering, men anså denne metode for umulig at gennemføre i praksis pga. det enorme antal løsningsmuligheder. Dette skyldes sandsynligvis, at VD ikke selv havde tilstrækkelig indsigt i løsningsmetoder til IP-problemer. Da IP-metoder således var afskrevet som løsningsmulighed, udviklede man den nuværende metode.

Vejdirektoratets metode er enkel, meget hurtig, og dens resultater stemmer nogenlunde overens med en manuelt udført samlet prioritering - men den finder **ikke** optimum. Dette skyldes dels frasorteringen af tilsyneladende irrelevante løsninger inden selve prioriteringen, dels at metoden ikke kan genvælge én gang fravalgte løsninger.

Formålet med prioriteringsmodulet var oprindeligt at finde den samlede prioritering, der udnyttede bevillingerne bedst muligt, og **det må derfor konkluderes, at modulets formål ikke er opfyldt.**

I **evalueringsfasen** har VD sammenlignet prioriteringsmodulet med den tidligere manuelle prioritering og fundet det mindst lige så godt, hvorfor det fungerer tilstrækkeligt godt til Vejdirektoratets behov. Man har dog undladt at undersøge, hvor langt prioriteringsmodulets resultat generelt ligger fra det optimale, hvilket ville være det mest oplagte vurderingskriterium. En sådan undersøgelse ville ikke være underlagt nogen streng tidsbegrænsning og kunne sagtens udføres af eksperter.

Ved i kapitel 3 at formulere Vejdirektoratets brovedligeholdelsesproblem i matematiske termer blev det klart, at det var et 0–1 IP–problem, og det blev således også indlysende hvilke kendte metoder, der ville være potentielle løsningsmetoder til problemet. Valget af løsningsmetode faldt på *Implicit Enumeration*. Argumentet for dette valg er, at det er en velbeskrevet metode, der ofte anvendes på 0–1 IP–problemer. Selvom IE med sikkerhed finder den optimale prioritering, er der ingen garanti for, at det er den bedste løsningsmetode til VD's problem. Det er svært at forestille sig, at der findes en hurtigere metode, da vi har gjort IE forholdsvis hurtig vha. gæt og en effektiv frasortering af irrelevante løsninger. Den kan dog muligvis forbedres yderligere ved et mere effektivt valg af separationsvariabel.

Perspektivering

Tilgangsvinklen til matematiske modeller har i dette projekt været forholdsvis snæver, da fokus i høj grad har ligget på selve udviklingen af en matematisk model i forhold til en enkelt institutions praktiske behov.

En udvidelse af synsvinklen er spørgsmålet om, hvilke sammenhænge den beskrevne model indgår i udover den årlige prioriteringsprocedure. Prioriteringsmodulet indeholder mulighed for at lave konsekvensanalyser i forhold til forskellige størrelser af bevillinger, og modellen kan derfor indgå som argument ved forhandlinger om øgede bevillinger.

Ved selv at have opbygget metoden fik Vejdirektoratet en dybere forståelse for modellen, både hvad angår dens styrker og dens svagheder. Denne indsigt ville ikke være opnået, hvis man havde hyret eksterne eksperter til at udarbejde prioriteringsmodulet, da Vejdirektoratet i så fald havde været nødsaget til at stole på eksperternes ord med hensyn til modulets egenskaber. I dag er det i stedet Vejdirektoratets samarbejdspartnere, der må tage Vejdirektoratets ord for gode varer. Når Vejdirektoratet således med henvisning til prioriteringsmodulet anbefaler, at den ene eller den anden bro skal repareres, vil det være meget vanskeligt at komme med indvendinger. Usaglige hensyn kan jo i princippet ikke spille ind ved valg af broer, der skal udbedres, og en computerkørsel, som man ikke har mulighed for at sætte sig ind i, er det vanskeligt at argumentere imod. Hermed ikke være sagt, at Vejdirektoratet misbruger modellen og drager økonomiske eller konkurrencemæssige fordele deraf, men DANBRO er et udmærket eksempel på, hvilken effekt modeller kan have på opfattelsen af troværdighed og objektivitet.

For at vende tilbage til kernen i projektet følger nogle ideer til videre forbedring af modulet – forbedringer, der vil være overkommelige for Vejdirektoratet.

I forbindelse med konsekvensanalysen kunne man samtidig med den nuværende strafberegning foretage en opdeling med hensyn til, hvor meget hhv. trafikantomkostninger og reparationsudgifter bidrager til straffen. Dette ville afsløre, hvad udskydelse af løsninger egentlig betyder for omfanget af fremtidige reparationer. Denne viden ville være nyttig i bevillingsmæssige sammenhænge, idet det ville fremgå, om der ville opstå store pukler af udskudte reparationer. Som det er nu, afsløres sådanne pukler ikke automatisk, idet man ikke ser, hvor stor en del trafikantomkostningerne udgør af straffen.

I dag foretages prioriteringen alene på grundlag af relative strafkvotienter, selvom anvendelse af absolut straf i visse tilfælde giver et bedre resultat. En oplagt løsning på dette dilemma er at foretage to prioriteringer med henholdsvis absolut og relativ straf og vælge den prioritering, der giver den laveste nutidsværdi. Alternativt kunne man forsøge at finde en anden og bedre strafmetode.

Desuden kunne mulighederne for at forbedre IE, så den kan anvendes i praksis, undersøges nærmere.

Bilag A

IE–eksempel for VD's model

Numrene henviser til punkterne i algoritmen i afsnit 4.4.4.

1. $I = 1$

2. J_1 ; $z_{1,1} = 1$

3. $a_1(Z) = 4 \leq b_1 = 5$

5. $c(z) \leq c^{\min} = \infty$

6. $I \rightarrow I+1 = 2$

2. $J_2 = 1$; $z_{2,1} = 1$

3. $a_1(Z) = 10 > b_1 = 5$

4. $z_{2,1} = 0$; $J_2 = 2$; $z_{2,2} = 1$

3. $a_1(Z) = 7 > b_1 = 5$

4. $z_{2,2} = 0$; $J_2 = 3$; $z_{2,3} = 1$

3. $a_1(Z) = 4 \leq b_1 = 5$

5. $c(Z) = 17 \leq c^{\min} = \infty$

6. $I = n \Rightarrow c^{\min} = c(Z) = 17$

7. $z_{2,3} = 0$; $I \rightarrow I-1 = 1$

4. $J_1 = 1 < m_1 = 3 \Rightarrow z_{1,1} = 0$; $J_1 \rightarrow J_1+1 = 2$; $z_{1,2} = 1$

3. $a_1(Z) = 3 \leq b_1 = 5$

5. $c(Z)+c_{2,1} = 5+6 = 11 \leq c^{\min} = 17$

6. $I = 1 < n = 2 \Rightarrow I \rightarrow I+1 = 2$

2. $J_2 = 1$; $z_{2,1} = 1$

3. $a_1(Z) = 9 > b_1 = 5$

4. $J_2 = 1 < m_2 = 3 \rightarrow z_{2,1} = 0 ; J_2 \leftarrow J_2 + 1 = 2 ; z_{2,2} = 1$

3. $a_1(Z) = 6 > b_1 = 5$

4. $J_2 = 2 < m_2 = 3 \rightarrow z_{2,2} = 0 ; J_2 \leftarrow J_2 + 1 = 3 ; z_{2,3} = 1$

3. $a_1(Z) = 3 \leq b_1 = 5$

5. $c(z) = 18 > c^{\min} = 17$

7. $z_{2,3} = 0 ; I \leftarrow I - 1 = 1$

4. $J_1 = 2 < m_1 = 3 \rightarrow z_{1,2} = 0 ; J_1 \leftarrow J_1 + 1 = 3 ; z_{1,3} = 1$

3. $a_1(Z) = 0 \leq b_1 = 5$

5. $c(Z) + c_{2,1} = 9 + 6 = 15 \leq c^{\min} = 17$

6. $I = 1 < n = 2 \rightarrow I \leftarrow I + 1 = 2$

2. $J_2 = 1 ; z_{2,1} = 1$

3. $a_1(Z) = 6 > b_1 = 5$

4. $z_{2,1} = 0 ; J_2 \leftarrow J_2 + 1 = 2 ; z_{2,2} = 1$

3. $a_1(Z) = 3 \leq b_1 = 5$

5. $c(Z) = 18 > c^{\min} = 17$

7. $z_{2,2} = 0 ; I \leftarrow I - 1 = 1$

4. $J_1 = 3 = m_I \rightarrow z_{1,3} = 0$

$I = 1$

Bilag B
Resultater af kørsler

5 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	11.911.752	12.068.371	11.911.752	11.911.752
Straf	221.586	378.205	221.586	221.586
Tid	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s
Iterationer	3	8	40	18

10 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	12.993.561	12.960.778	12.820.438	12.820.438
Straf	245.510	212.727	72.387	72.387
Tid	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s
Iterationer	6	9	11	11

15 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	16.906.208	16.836.866	16.696.526	16.696.526
Straf	282.069	212.727	72.387	72.387
Tid	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s
Iterationer	8	9	16	16

20 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	25.982.679	26.055.056	25.893.559	25.893.559
Straf	152.727	225.104	63.607	63.607
Tid	< 1s	< 1s	5s	< 1s
Iterationer	5	9	9702	113

25 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	28.103.179	28.191.370	28.038.292	28.038.292
Straf	164.098	252.289	99.211	99.211
Tid	< 1s	< 1s	< 1s	< 1s
Iterationer	7	14	183	183

30 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	37.381.770	37.289.942	37.267.223	37.267.223
Straf	213.603	121.775	99.056	99.056
Tid	< 1s	< 1s	3m17s	1m23s
Iterationer	11	10	369.484	158.864

35 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	48.023.602	48.032.372	47.921.767	47.921.767
Straf	200.891	209.661	99.056	99.056
Tid	< 1s	< 1s	5t47m14s	9m37s
Iterationer	9	12	39.774.826	1.091.663

40 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	60.522.549	60.690.634		60.517.017
Straf	446.573	614.608		358.687
Tid	< 1s	1s		2t45m4s
Iterationer	13	21		16.605.091

45 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	70.104.981	70.500.967		70.096.299
Straf	272.298	668.284		263.616
Tid	< 1s	1s		1s
Iterationer	11	24		1.128

50 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	89.452.564	89.704.241	89.443.784	89.443.784
Straf	272.298	523.975	263.518	263.518
Tid	< 1s	1s	4t33m42s	1s
Iterationer	11	17	31.711.839	2.810

60 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	149.350.532	149.461.707		149.265.200
Straf	286.762	397.937		201.430
Tid	< 1s	1s		30s
Iterationer	13	18		42.194

70 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	286.514.729	286.604.864	286.280.756	286.280.756
Straf	693.219	783.354	459.246	459.246
Tid	< 1s	1s	6m18s	5m1s
Iterationer	11	32	567.004	566.792

80 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	295.661.165	295.711.027		
Straf	693.441	743.303		
Tid	< 1s	1s		
Iterationer	14	26		

92 broer	VD relativ	VD absolut	IE	VD+IE
Nutidsværdi	307.816.241	307.700.998		307.440.843
Straf	727.703	612.460		352.305
Tid	< 1s	1s		3t19m55s
Iterationer	11	32		23.119.099

Litteraturliste

[1] Andrews, J. G. & McLone, R.R.
Mathematical Modelling
Butterworths, 1976

[2] Blomhøj, Morten; Frisdahl, Klavs & Olsen, Frank Mølgaard
Lineær Programmering
Frederikssund Arbejdsgruppen ApS, Frederikssund, 1984

[3] Dantzig, George B.
Linear programming and extensions
Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963

[4] DeMaio, Adriano & Roveda, Claudio
An all zero-one algorithm for a certain class of transportation problems
Operations Research, Volume 19, 1971, pp. 1406

[5] Eilertzen, Lis; Habekost, Kirsten; Røn, Lill & Stender, Susanne
Opstilling og analyse af matematiske modeller, belyst ved modeller over køers foderoptagelse og -omsætning
IMFUFA tekst nr. 102, RUC, 1985

[6] Gass, Saul I.
Decision Making, Models and Algorithms
John Wiley & Sons, 1985

[7] Healy, W.C., Jr.
Multiple Choice Programming
Operations Research, Volume 12, 1964, pp.122

[8] Herman, Kirsten & Niss, Mogens
Beskæftigelsesmodellen i SMEC III - en autentisk matematisk model
Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck A/S, København, 1982

[9] Hillier, Frederik S. & Liberman, Gerald J.
Introduction to Operations Research
Oakland, 1984

[10] Højgaard Jensen, Jens
Matematiske modeller - vejledning eller vildledning? II
i "Vurdering af matematisk teknologi" af Bernhelm Booss-Bavnbek et al.
IMFUFA tekst nr. 164, RUC, 1984

[11] Johnsen, Erik; Hedegaard, Ove & Ellervik, Per
Introduktion til operationsanalyse
Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck A/S, 1976

[12] Krarup, Jakob & Pruzan, Peter Mark
Optimeringsmetoder I - Lineær programmering
Polyteknisk Forlag, Danmark, 1974

[13] Kruse Jakobsen, Søren
Noter til 0431
Del 1 : Netværk 1, p.33-54
IMSOR, Lyngby, 1990

[14] Kruse Jakobsen, Søren
Noter til 0431
Del 3 : Heltalsprogrammering, p.5-134
IMSOR, Lyngby, 1990

[15] Lancaster, Peter
Mathematics - Models of the Real World
Prentice-Hall, 1976

[16] Lev & Weiss
Introduction to mathematical programming
Quantitative tools for decision making
North Holland, N.Y., 1982

[17] Meyer, Walter J.
Concepts of Mathematical Modeling
McGraw-Hill, 2nd printing, 1987

[18] Vejdirektoratet
Broer og tunneler på hovedlandevejene
VD Broområdet, København, 1992

[19] Vejdirektoratet
Broforvaltning med DANBRO. Prioritering
VD, København, 1991

[20] Vemuri, V.
Modelling of Complex Systems
Academic Press, 1978

[A] Samtale med afd.ing. Ole Kirk og civ.ing. Jørn Lauridsen, begge fra VD.
København 4. december 1992

Stikordsregister

S

T

V

Ø

#

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektråpport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Kræmmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen .
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen,
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGS - SYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "GREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 1o
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUT I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. I
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CUR - RICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENESSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Viščor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSES-TEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.

Fysikspeciale af Jan Vedde

Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"

by: Petr Viščor

151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

Vejleder: Mogens Niss

152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski

153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"

Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale

Af: Hans Hedal

Vejleder: Ib Thiersen

154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"

By: Jeppe Dyre

155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"

by: Michael Pedersen

156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

157/88 " STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."

by: Michael Pedersen

158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"

by: Jeppe Dyre

159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"

by: Bent Sørensen

160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"

by: Jens Gravesen

161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS:
Dirichlet feedback control problems"

by: Michael Pedersen

162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"

AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen,
Jette Reich , Mette Vedelsby

163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen

165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"

by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynligheds-regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS"
Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christiansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen

---

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 " GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 " AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION

af: Michael Pedersen

176/89 " A MAXIUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"

af : Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen

179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"

by: Jeppe Dyre

183/89 "MATEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction

by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og
MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)

184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmefylde af en underafkølet væske ved glasovergangen

af: Tage Emil Christensen

185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"

Et matematisk projekt

af: Steen Grode og Thomas Jessen

Vejleder: Jacob Jacobsen

186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"

redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen

187/90 "RSA - et kryptografisk system"

af: Annemette Sofie Olufsen, Lars Frellesen og Ole Møller Nielsen

Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk

188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"

by: Jeppe Dyre

189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER

af: Finn Langberg

190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"

by: Jeppe Dyre

191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C*-ALGEBRAS"

by: Iain Raeburn and Dana P. Williams

192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases and SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"

by: Viggo Andreasen

193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"

by: Stig Andur Pedersen

194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"

Projektrapport af : Frank Olsen

194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport

Projektrapport af: Frank Olsen

195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.

Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:

Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"

- en projektrapport om kaos' paradigmatiske status i fysikken.

af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL

af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"

Speciale

af: Frank Olsen

199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling

af: Jens Højgaard Jensen

200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"

Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.

af: Mogens Niss

201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraktion"

af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Petr Viščor, Ole Bakander

202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.

af: Peder Voetmann Christiansen

203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990

afløser tekst 170/88

204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"

et Breddemodul Fysik Projekt

af: Thomas Jessen

Vejleder: Petr Viščor

205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"

by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)

206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"

Eksperimentelt Fysikspeciale

af: Jeanne Linda Mortensen

og Annette Post Nielsen

Vejleder: Petr Viščor

207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"

by: Jeppe C. Dyre

209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.

af: Helge Kragh

210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Seperable Subalgebras with Unitality Condition.

by: Lars Kadison

211/91 "I SANDHEDENS TJENESTE"

- historien bag teorien for de komplekse tal.

af: Lise Arleth, Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Kamma Tulinius.

Vejledere: Jesper Larsen og Bernhelm Booss-Bavnbek

212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"

by: Lars Kadison

213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

214|91 "Hælløj i æteren" - om elektromagnetisme. Oplæg til undervisningsmateriale i gymnasiet.

Af: Nils Kruse, Peter Gastrup, Kristian Hoppe, Jeppe Guldager

Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal

215|91 "Physics and Technology of Metal-Insulator-Metal thin film structures used as planar electron emitters

by: A.Delong, M.Drsticka, K.Hladil, V.Kolarik, F.Olsen, P.Pavelka and Petr Viscor.

216|91 "Kvantemekanik på PC'eren"

af: Thomas Jessen

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

223/92 THE FUNCTIONAL DETERMINANT

by: Thomas P. Branson

224/92 UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES

by: Jeppe C. Dyre

225/92 "HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium

af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard

Vejleder: Petr Viscor

226/92 "METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"

by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"

En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"

af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård

Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS

- Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Ania Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE
HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and
Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)

Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen

239/93 Valgsystemer - Modelbygning og analyse

Matematik 2. modul

af: Charlotte Gjerrild, Jane Hansen,
Maria Hermannsson, Allan Jørgensen,
Ragna Clauson-Kaas, Poul Lützen

Vejleder: Mogens Niss

240/93 Patologiske eksempler.
Om sære matematiske fisks betydning for
den matematiske udvikling

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa
Ulsøe Johansen, Peter Meibom, Johannes
Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

241/93 FOTOVOLTAISK STATUSNOTAT 1

af: Bent Sørensen

242/93