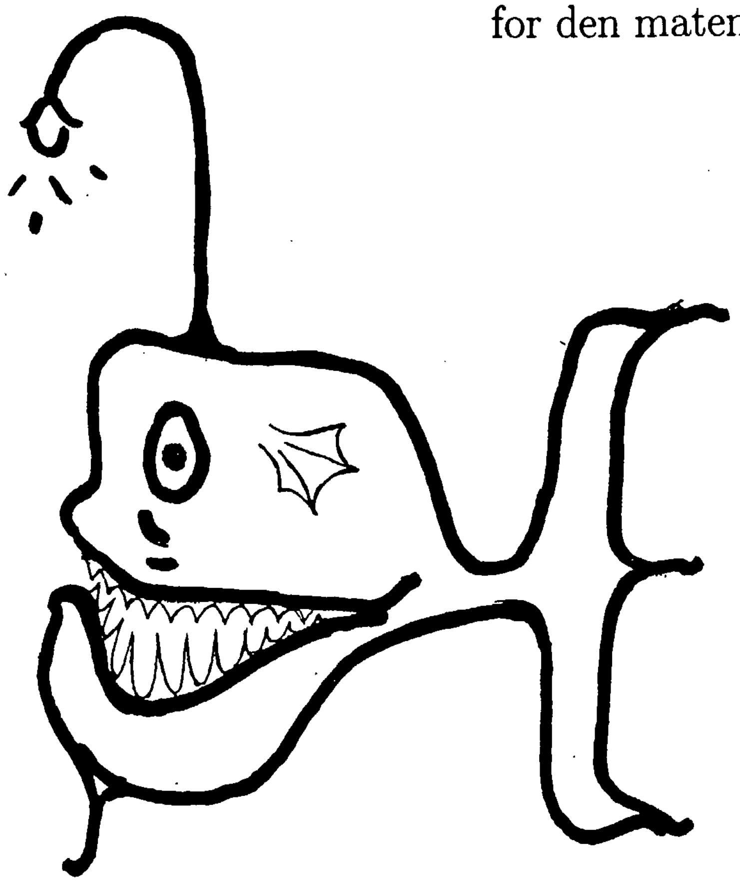
TEKST NR 240 1993

Patologiske eksempler

Om sære matematiske fisks betydning
for den matematiske udvikling



TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postboks 260,
4000 Roskilde

Patologiske eksempler
Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling.

af: Claus Dræby, Jørn Skov Hansen, Runa Ulsøe Johansen,
Peter Meibom, Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

IMFUFA tekst nr. 240/93 90 sider ISSN 0106-6242

Abstract:

Projektet undersøger patologiske eksemplers betydning for matematisk udvikling. De gennemgåede eksempler er: En funktion, der er diskontinuert på $\mathbb{Q}$, men kontinuert på $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Peanos kurve, Weierstrass' funktion, Hamels funktion, Hausdorffs paradoks og cantormængden. Projektet indeholder en definition af hvad et patologisk eksempel er, samt såvel en matematisk som en historisk gennemgang af ovennævnte eksempler.

Bemærk:

Med mindre andet er anført er alle oversættelser til dansk af citater i projektet foretaget af forfatterne.

Tak til Mogens for grundig vejledning.

Patologiske eksempler

Om sære matematiske fisks betydning for den matematiske udvikling

Claus Dræby
Jørn Skov Hansen
Runa Ulsøe Johansen
Peter Meibom
Johannes Kristoffer Nielsen

Vejleder: Mogens Niss

Roskilde Universitetscenter,
IMFUFA, December 1992.

Indhold

Kapitel 1

Indledning

Dette projekt er et modul 1 projekt, hvilket vil sige at det skal belyse enten matematikkens videnskabsteoretiske status, historiske udvikling eller samfundsmæssige placering. Vi har valgt at koncentrere os om matematikkens historiske udvikling.

Der kan nævnes mange faktorer både indre og ydre, som har indflydelse på denne udvikling. Med ydre faktorer menes forhold, som ligger udenfor matematikken selv f.eks. politiske, økonomiske eller kulturelle. Med indre faktorer tænkes på forhold indenfor matematikken, som eksempelvis når Lebesgueintegralet udspringer af et ønske om lukkethed overfor forskellige operationer, som det tidligere begreb Riemann-integralet ikke opfylder.

I projektet vil vi behandle en mulig indre faktor, nemlig eksempler der går under betegnelsen patologiske. En forståelse for hvad der menes med et patologisk eksempel kan opnås ved at kigge på, hvordan nye matematiske begreber defineres. Grundlaget for definitionen vil tit være en samling velkendte matematiske objekter. Således forstået, at hvis objekterne har en række markante fælles egenskaber, kan disse danne grundlag for definition af et begreb. Det er så klart, at de oprindelige objekter må falde ind under begrebet. I nogle tilfælde er man interesseret i at definere et generelt begreb, hvilket medfører, at andre objekter også falder ind under begrebet. Af de nye objekter vil nogle være ventede, mens andre vil overraske. Jo mere startobjekterne ligner hinanden, og jo mere markante fællesegenskaberne er, desto skarpere bliver begrebsdefinitionerne, og desto større bliver overraskelsen over at finde et nyt objekt, som adskiller sig fra de oprindelige. Det er blandt de overraskende objekter at de såkaldte patologiske eksempler findes.

Patologisk betyder sygelig, og med et patologisk eksempel menes et eksempel som i matematisk forstand er kontraintuitivt eller paradoksalt.

I projektet vil vi søge at definere begrebet et patologisk eksempel nærmere. Det er ihvertfald sådan, at en række eksempler ikke gør sig fortjent til betegnelsen patologiske. Det er straks værre at finde ud af hvilke, der gør. Dette viser sig at variere fra person til person, og den enkelte person vil også kunne skifte mening ved at arbejde med et eksempel.

Vi har valgt at koncentrere os om eksempler først og fremmest fra analysen. Vi har desuden et enkelt eksempel fra topologien, og et enkelt, nemlig Hausdorffs paradoks, der mest hører hjemme i geometrien. Generel topologi kan betragtes som et grundlag for og en generalisering af analysen. Ved at inddrage et topologisk eksempel, forsøger vi at undersøge om en mere abstrakt teori tilfører andre aspekter til patologibegrebet.

Projektets mål er at afklare hvordan patologiske eksempler indgår i en historisk sammenhæng, og hvorvidt de er en motor i frembringelse af matematiske teorier. Heri ligger, at ambitionen med projektet ikke er at give en fyldestgørende beskrivelse af, hvad der driver matematikken, men at isolere og belyse betydningen af én ikke særlig velbeskrevet faktor.

Grunden til, at vi gik igang med dette projekt, var at emnet havde en umiddelbar appel til os. Det at blive overrasket, undersøge hvorfor, og ideen om at fra disse overraskelser at kunne sige noget om matematikkens udvikling var en interessant og for os ny tanke. Endvidere syntes projektet velegnet til at give en bedre forståelse for, hvorfor matematik formuleres så strengt. Tit når man i et kursus bliver præsenteret for forudsætninger, der skal være opfyldt for at en sætning gælder, gør man sig ikke den fulde betydning af disse forudsætninger klart. Arbejdet med de patologiske eksempler mente vi, ville give os en mulighed for at arbejde længere og mere selvstændigt end i en kursussituation med enkelte, forholdsvis komplicerede beviser.

Som gruppe betragtet har vi en vis inhomogenitet i de faglige forudsætninger, idet vi spænder fra anden års til fjerde års overbygningsstuderende.

1.1 Problemformulering

- Hvilke former for betydning har de patologiske eksempler haft for matematikkens udvikling?
- Hvorfor har patologiske eksempler haft en betydning, dvs. hvilke egenskaber ved eksemplerne gør dem betydningsfulde ?

For at kunne tale om "patologiske eksempler", må vi skaffe klarhed over hvad vi mener begrebet omfatter. Det bliver derfor en del af projektet at definere, hvad vi forstår ved et patologisk eksempel.

1.2 Arbejdsmetode

Vi har lagt meget vægt på arbejdet med at præcisere problemstillingen fra starten, således at den problemformulering, som er fremlagt her, har ligget fast siden midten af forløbet, som strækker sig over et semester. For at undgå en unødig begrænsning i mulighederne for at inddrage eksempler, ved at lægge os fast på en definition af begrebet patologisk eksempel for tidligt, har vi holdt problemformuleringen og diskussionen af hvad patologier er åben så langt hen af vejen som muligt. Vores eksempler er valgt fra [Mej], [Gel] og [Ste], fordi de netop udviser de træk, vi mener definerer patologiske eksempler, og ikke på grundlag af eventuelle historiske betydninger, de måtte have haft. Der er dog et metodisk problem i forhold til deres historiske betydning, idet disse kilder netop indeholder "berømte" eksempler.

Vi har brugt to fremgangsmåder, en bredde og en dybde. Breddefremgangsmåden består i læsning af bøger om den generelle udvikling af matematikken, hvor vi lægger mærke til, hvornår patologiske eksempler har spillet en rolle. I dybdefremgangsmåden undersøger vi enkelte patologiske eksempler mere grundigt, især deres historie og patologiske træk.

Kapitel 2

Definition

Dette kapitel klargør og definerer de begreber, der indgår i problemformuleringen, specielt defineres et patologisk eksempel. Det er naturligt, at projektet indeholder en definition af, hvad der menes med et patologiske eksempel, idet det viser sig at være langtfra oplagt, hvilke eksempler der skal kaldes patologiske.

2.1 Historisk betydning

Når man taler om et eksempels betydning for en matematisk udvikling, må der skelnes mellem forskellige måder, som denne betydning kan have givet sig udtryk på. Der tænkes her især på, hvorvidt eksemplet kan siges at være direkte eller kun indirekte årsag til en bestemt udvikling. Med direkte årsag menes, at der på grund af netop dette eksempel er udført matematisk arbejde. Med indirekte årsag menes, at eksemplet har virket som inspirationskilde for nogle matematikere, evt. ved at det har vist sig at besidde andre spændende egenskaber, end den der var hovedpointen, da eksemplet blev publiceret. Det vi gerne vil opfatte som et eksempels historiske betydning er det første tilfælde, hvor problemet ligger i at afgøre, om der er tale om en direkte årsagssammenhæng.

Det er ikke nok at kunne afgøre, at et eksempel har været genstand for en umiddelbar reaktion, og at der har været en efterfølgende udvikling. Der er også et behov for at søge at afgøre, hvori eksemplets betydning har ligget. Dette kan ikke gøres uden at foretage en fortolkning af det foreliggende materiale, og denne fortolkning vil igen kræve nogle hypoteser eller ideer at fortolke efter. Det følgende er vores hypoteser, hvor vi primært forestiller os tre mulige udviklingsforløb, eksemplet kan give anledning til:

- Eksemplet kan medføre udvikling af ny teori, modificering eller udvidelse af teorien. Det er klart at der kan skelnes yderligere på omfanget af denne udvikling, idet det må antages at være interessant, hvorvidt der er tale om en større ændring, som f. eks. dannelse af en ny teori, eller blot en beskeden modifikation af en eksisterende.

- Eksemplet har ført til forkastelse af et begreb eller en teori. Dette tænkes især at optræde i perioder, hvor en teori er under dannelse, og hvor eksemplet viser egenskaber i den pt gældende teori. Det vil da nok hyppigt få betydning for udviklingen af en erstatningsteori, og i dette tilfælde have lighedspunkter med det forrige punkt.

- Eksemplet bliver stående uden at have nogen effekt på den teori det omhandler, idet det ikke ser ud til at have nogen kompromitterende virkning. Man kan forestille sig at denne status er midlertidig, således at det på et senere tidspunkt kan skifte til en af de andre grupper.

2.2 Problemer ved en definition af patologier

I indledningen definerede vi et patologisk eksempel, som et eksempel som i en eller anden forstand er kontraintuitivt eller paradoksalt i matematisk forstand. Det er klart at vi må komme med en mere præcis definition på det, som er objektområdet for vores projekt. Vi starter med at bemærke, at der er rimeligt frit spil. Begrebet patologiske eksempler optræder ganske vist i enkelte kilder [Bot], [Lit], [Johl], [Cha], [Boy], og hvis man taler med forskellige matematikere har de også en ide om begrebet. Men vi har ikke fundet nogen, der før os har forsøgt at præcisere nærmere hvad patologicitet egentlig består i.

Det at konstruere definitionen af et begreb, samtidig med at man vil undersøge det objektområde som begrebet udpeger, er en problematisk proces. Man skal passe på ikke bare at fitte definitionen på en sådan måde, at ens teser bliver bekræftede. Omvendt må definitionsproblemet nødvendigvis relateres til den problemformulering, vi er igang med at indkredse. Ud over det er der et ansvar overfor den officielle opfattelse, der mere eller mindre veldefineret er af begrebet.

Vi vil gennem vores definition prøve at indfange de eksempler, som vi selv synes bør være indeholdt i mængden af patologiske eksempler. Dette er naturligvis ikke en fuldstændig objektiv fremgangsmåde, f.eks. er opfattelsen af begrebet inden for gruppen ikke fuldstændig overensstemmende, og har tydeligvis forrykket sig under arbejdet. Men det kan nok sjældent lade sig gøre at være helt objektiv med et begreb, der nødvendigvis må defineres, udfra hvordan det opfattes af forskellige mennesker.

2.2.1 Subjektiviteten

Begreberne "kontraintuitivt" og "paradoksalt" er til dels subjektive. Det samme gælder "kompliceret" og "uskønt" som vi også vil anvende i vores definition.

I matematiksamfundet som helhed er der imidlertid også en opfattelse af hvad, der er paradoksalt. Dette, mener vi, giver grundlag for at lade det subjektive element træde lidt i baggrunden, idet der er en slags konsensus iblandt en given tids matematikere. Opfattelsen af hvad, der er paradoksalt ændrer sig med den samlede matematiske viden, der er tilgængelig. Dette betyder, at opfattelsen ændres, både gennem matematiksamfundets udvikling, og gennem den enkelte matematikers oplæring, men til en given tid eller udvikling er der en rimelig overensstemmelse i, hvad der opfattes som mærkeligt.

Hvis man skal kunne opfatte eksemplet som kontraintuitivt eller paradoksalt, må man forstå den teori eksemplet er indlejret i så godt, at man har nogle forventninger til eksemplet, der kan blive stødt. Altså må det forlanges at betragteren er bekendt med den teori hvor objektet optræder.

Der er en tendens til, at når man har arbejdet med, eller kendt, et patologisk eksempel et stykke tid, så fordufter mystikken - patologiciteten daler. Alligevel kan man stadig se de elementer, der volder problemer ved at være komplicerede eller paradoksale.

2.2.2 Hvad vi forstår ved begrebet intuition

Vi har benyttet begrebet "kontraintuitivt" i flæng indtil nu. I vores definition anvendes begrebet i en meget snæver betydning, som er væsentligt anderledes end den gængse brug af ordet. I det følgende vil vi indkredse hvad vi mener med begrebet kontraintuitivt. Ved intuition forstår man i almindelighed en umiddelbar opfattelse af en sammenhæng eller en pludselig forståelse af en helhed. Det vil sige, at når man "bruger sin intuition", erkender man en sammenhæng uden at bruge videnskabelig erfaring, eller logisk ræsonnement.

Matematisk intuition, som vi begrænser diskussionen til, er et snævrere begreb på den måde, at det naturligvis kun dækker intuition om matematik. Ikke desto mindre indeholder begrebet matematisk intuition nogle aspekter, som det almene intuitionsbegreb ikke indeholder. Det er formentlig kun matematikere som ville sige, at det at tænke visuelt, i modsætning til at være formel i matematisk forstand, er at tænke intuitivt.

I "The Mathematical Experience" finder vi 6 betydninger af begrebet intuition, som det bruges i matematisk hverdagssprog. De er her gengivet i forkortet udgave.

1. *Intuitive is the opposite of rigorous. This usage is itself not completely clear, for the meaning of "rigorous" itself is never given precisely...*

2. *Intuitive means visual. Thus intuitive topology or geometry differ from rigorous topology or geometry in two respects. On the one hand, the intuitive version has a meaning, a referent in the domain of visualized curves and surfaces... On the other hand, the visualizations may lead us to regard as obvious or selfevident statements which are dubious or even false...*

3. *Intuitive means plausible or convincing in the absence of proof...*

4. *Intuitive means incomplete. If one takes limits under the integral sign without using Lebesgue's theorem...*

5. *Intuitive means relying on a physical model, or on some leading example...*

6. *Intuitive means holistic or integrative as opposed to detailed or analytic. When we think of a mathematical theory in the large, when we see that a certain statement must be true because of the way it would fit in with everything else we know about it, we are reasoning "intuitively"...* [Dav s 391]

Disse eksempler på brug af begrebet viser ikke uventet, at det ikke er særlig veldefineret hvad der menes, når der siges matematisk intuition, hvilket Davis og Hersh også pointerer. Betydningerne ovenfor har det tilfælles, at de ikke indeholder nogen idé om hvilke mekanismer der ligger bag intuitionen, altså hvad det er der sker psykologisk når intuitionen virker.

Passiv intuition og matematisk erfaring.

Vi skelner imellem to former for intuition; nemlig en passiv eller potentiel art af intuition, som kan karakteriseres som en slags "uudtalt forventning" , i modsætning til en aktiv eller kreativ art, som nærmest er en evne til at få de rigtige ideer.

Den kreative intuition er behandlet flere steder, blandt andet hos Poincaré [Poi] og Nørretranders [Nør]. Både Tor Nørretranders og Henri Poincaré beskriver situationer, hvor rigtige ideer fremkommer som produkter af ubeviste processer. Men det er egentlig ikke det intuitionsbegreb vi har brug for.

Den passive intuition er ret velbeskrevet indtil 1 g matematisk niveau, men ikke for højere niveauer. Det er denne form for intuition, som vi gerne vil henvise til med begrebet intuition. Hvad består denne passive intuition så i? Vi forestiller os at den blandt andet består i nogle modeller eller forestillinger som vi bruger når vi udøver matematik, som altså ikke må forveksles, hverken med selve de matematiske modeller, eller med praktisk anvendte modeller. Når man lærer matematik, tager man afsæt i nogle empirisk baserede begreber som "linie", "tal", "kontinuitet" og "mængde", som danner fundament for modeller som man bruger. Selvom den matematik, som man senere lærer, logisk set ikke kan forventes at adlyde disse modeller, gør man alligevel brug af dem, fordi de virker langt hen af vejen. Samtidig justerer man dem så godt som man nu kan, når man støder på problemstillinger hvor de ikke virker. Modeller er det, som løbende repræsenterer vores matematiske erfaring. Muligvis er et af de væsentligste elementer i ens matematikuddannelse, netop opøvning af evnen til at danne modeller, udfra hvilke man kan nå frem til resultater der er "rigtige", dvs. i overensstemmelse med den anerkendte teori. Efterhånden som vores matematiske erfaring omfatter mere og mere abstrakte begreber, bliver også modellerne mere abstrakte, og mindre lig objekter, som kan forekomme i naturen. Ved matematisk erfaring forstås alt det matematik, som man har tilegnet sig, herunder diverse klassiske eksempler og modeksempler.

Opdelingen i to former for intuition, en passiv og en aktiv, er ikke altid mulig, idet intuition i visse tilfælde indeholder både aktive og passive elementer. Det er dog ofte muligt at bruge denne skelnen.

Inden for analyse og talrumstopologi er de omtalte modeller i høj grad geometrisk baserede, og specielt vil der gælde for eksemplerne i dette projekt, at de anfægter en eller anden geometrisk model. Men vi er ikke interesserede i at sætte intuition lig geometrisk fortolkning, fordi det er specielt for de to områder, at man kan gøre så meget brug af geometriske argumenter. Forventninger kan eksempelvis også udspringe af en slags fornemmelse for en logisk struktur. Eller, inspireret af Poincaré, en fornemmelse for matematisk skønhed, forstået på den måde, at man forventer de resultater, der behager ens matematiske æstetik. Så de modeller, som vi taler om her, indeholder geometriske billeder, men er mere end blot geometriske billeder.

At gå yderligere ind i spørgsmålet om hvad substansen i disse modeller er, kunne være interessant. Vi har en hypotese om, at patologiske eksempler kunne være et middel til at afdække dette spørgsmål, netop fordi patologiske eksempler viser hvor modellerne kommer til kort. Vi har dog valgt ikke at gå dybere ind i dette spørgsmål, idet det ville kræve et helt projekt i sig selv.

For en dels vedkommende er brugen af disse modeller bevidst. Man kan have en fuldstændig bevidst og endda formuleret formodning om at et forhold gør sig gældende, selvom der ikke er fundet logisk belæg for dette. For eksempel at kontinuerte funktioner skulle være stykkevis differentiable.

Brugen af disse modeller kan også være ubevidst. Man oplever ofte, når man arbejder med patologiske eksempler, at det er svært at sprogliggøre oplevelsen af en patologi. Det mener vi skyldes, at man ikke er fuldt bevidst, om hvad det er for nogle forventninger, man har til matematiske objekter i en teori. Derved kan der ske en konfrontation, mellem en model og de matematiske realiteter, på et ikke bevidst niveau. Denne uoverensstemmelse bringes så frem i bevidstheden, samtidig med at man prøver at afklare hvori patologien ligger. Der sker ofte det i den forbindelse, at det kontraintuitive element til dels forsvinder under denne proces. Man ommodellerer sin model således at patologien ikke længere er i modstrid med modellen.

Sammenfattende kan vi sige, at den betydning, som vi ønsker at anvende ordet intuition i, er som følger: Intuition forstås i det væsentlige som en samling modeller, som simulerer de matematiske realiteter, og som vi løbende sørger for at tilpasse, så de stemmer overens med vores matematiske erfaring. Intuitionen er altså dynamisk i den forstand, at den bliver ommøbleret hele tiden. Men omvendt er det en passiv eller latent størrelse idet den giver sig tilkende når den bliver provokeret, dvs. når den er i opposition til de matematiske realiteter.

2.3 Definition

Med udgangspunkt i ovennævnte overvejelser, har vi forsøgt at isolere netop de træk, der kendetegner en patologi. Det har udmøntet sig i følgende spørgsmål, der danner grundlaget for vores definition. Der skelnes i vores spørgsmål mellem et eksempels pointer og selve konstruktionen af de matematiske objekter, der indgår i eksemplet. Hvis vi f.eks. kigger på Weierstrass' funktion, er en pointe, at det er en kontinuert funktion, der ikke er differentiabel nogetsteds, mens objektet er selve funktionen. Van der Waerdens funktion er et eksempel med den samme pointe men et andet objekt. (se afsnit 3.2 for beskrivelse af disse funktioner).

1. Demonstrerer eksemplet noget kontraintuitivt eller paradoksalt?
2. Er konstruktionen af objektet i eksemplet uskøn, kompliceret eller resultatet af en snild ide?

2.3.1 Det kontraintuitive og det paradoksale

Når vi benytter både kontraintuitiv og paradoksal er det for at forsøge at fange så mange facetter af begrebet som muligt. Paradoksal betyder ifølge fremmedordbogen fornuftsstridigt, og dækker ofte over en modstrid i logisk forstand. At noget er kontraintuitivt har en bredere betydning, og rører ved en grundlæggende etableret forestillingsverden. I dette projekt vil vi anvende betegnelsen paradoksalt, dels om noget der *virker* logisk modstridende, dels som en gradbøjning af kontraintuitivt, således at hvis noget er paradoksalt er det automatisk også kontraintuitivt, men ikke omvendt.

At et eksempels pointe er kontraintuitiv eller paradoksal skal ses i forhold til den definition af intuition vi har givet tidligere. Definitionen indeholder et subjektivt element, men den generalitet, der ligger i at opfatte det som noget, der mere er defineret på det samlede matematiksamfund, end på det enkelte individ, nedtoner dette en del. Matematiksamfundets enighed, om hvad der er kontraintuitivt, skyldes ikke nødvendigvis, at alle matematikere under deres indlæring danner de samme modeller, men at de på baggrund af de anvendte modeller opnår samme resultater.

2.3.2 Det komplicerede

Gennem vore diskussioner nåede vi frem til, at det ikke er nok, at et eksempel er paradoksalt for at være patologisk. Der mangler et element, der har at gøre med eksemplets objekter. Konstruktionen af objektet eller objektet selv skal være kompliceret, uskøn eller mærkelig i en sådan grad at man føler at begreberne er blevet vredet eller strakt. Dette skal forstås i så vid forstand, at det også omfatter de eksempler, hvor det komplicerede ligger i at få ideen til dem, dvs. fordi dette kræver en særlig snild ide.

Et godt eksempel på et sådant objekt er en Hamel-basis, se afsnit 3.4. Konstruktionen af en Hamel-basis består i at opfatte $\mathbb{R}$, som et vektorrum over $\mathbb{Q}$. Hele idéen om at skrive de reelle tal som linearkombinationer af overtælleligt mange reelle basisvektorer med rationelle koefficienter virker som en meget kompliceret og mærkelig måde at opfatte $\mathbb{R}$ på. Da man kan benytte en Hamel-basis til at fremstille en additiv funktion, der ikke er kontinuert, kommer hele eksemplet til at fremstå som en meget fin patologi.

Som et eksempel på noget der ikke opfylder kompleksitetskravet kan nævnes et af de tidlige eksempler fra "Rædselskabinettet" [Mej] på en funktion, der er kontinuert og absolut integrabel på hele $\mathbb{R}$, men som ikke går mod 0 for $x \to \infty$. Funktionen konstrueres ved, at man omkring alle de hele tal anbringer trekantede spidser, der bliver højere og højere men smallere og smallere. Imellem spidserne er funktion 0. Konstruktionen er lavet således, at arealet af spidserne bliver mindre og mindre, selv om højden går imod uendelig. Denne funktion kan nemt laves absolut integrabel, idet der nu i virkeligheden er tale om en uendelig sum af spidsernes areal. Eksemplet har en kontraintuitiv pointe, idet man umiddelbart vil synes, at absolut integrabilitet burde kræve at funktionen går mod nul. Vi opfatter dog ikke konstruktionen som kompliceret nok til at kalde eksemplet patologisk.

2.4 Opsummering

Et patologisk eksempel skal altså både have en kontraintuitiv pointe, og en kompliceret konstruktion eller være resultatet af en snild ide. Der er et vist spillerum til at slække på det ene krav i situationer, hvor det andet er rigeligt opfyldt, men begge elementer skal være til stede.

Definitionen er til dels subjektiv, og dette må der naturligvis tages hensyn til i brugen.

Kapitel 3

Patologiske eksempler

Kapitel 3 består af de valgte patologiske eksempler. Eksemplerne bliver først præsenteret og gennemgået matematisk. Derefter bliver de patologiske træk fremhævet, og til sidst indplaceres og anskues de enkelte eksempler, som en del af et historisk forløb.

Eksemplerne er:

- Claus' funktion, som er diskontinuert i ethvert rationalt tal og kontinuert i ethvert irrationalt.
- Weierstrass' funktion, som er en kontinuert intetsteds differentiabel funktion.
- Peanos kurve, som er en kontinuert kurve, der går gennem ethvert punkt i enhedskvadratet.
- Hamels funktion, der opfylder $f(x+y) = f(x)+f(y)$ og er overalt diskontinuert.
- Cantors mængde, der er en perfekt, overtællelig, intetstedstæt delmængde af $[0;1]$.
- Hausdorffs paradoks, som har som konsekvens, at enhedskuglefladen kan opdeles i disjunkte mængder, der ved flytninger i rummet kan sættes sammen til to nye enhedskuglefladen.

Denne korte præsentation af eksemplerne kalder vi slagords præsentationen, idet alle eksemplerne umiddelbart kan præsenteres kort med et enkelt overraskende træk. Ved en nærmere gennemgang viser det sig, at det slagordsagtige træk ikke altid er det mest overraskende og ihvertfald ikke det eneste patologiske træk.

Tidsmæssigt strækker eksemplerne sig fra ca. 1854 til 1914. En periode med mange patologiske eksempler, med flere brud på matematisk vanetænkning og med grundlæggelsen af nye områder. Det første eksempel Claus' funktion mener vi ikke har haft nogen væsentlig historisk betydning, men en funktion med samme egenskaber som Claus' funktion bliver nævnt i Riemanns doktordisputats fra 1854. Weierstrass fremlægger sin funktion i 1872 til en forelæsning, hvilket afslutter en diskussion, der har strakt sig lige fra det nittende århundredes start omhandlende sammenhængen mellem kontinuitet og differentiabilitet af en funktion. Disse eksempler fremkommer og hører med til den periode, hvor den Weierstrasske analyse er ved at blive formuleret.

I en artikel fra 1883, hvor Cantor definerer en række topologiske og mængdeteoretiske grundbegreber, præsenterer han Cantors mængde, som et eksempel på en intetsteds tæt i intervallet $[0, 1]$, perfekt mængde. Peanos kurve publiceres i 1890 midt i en periode, hvor visse dele af matematiksamfundet er optaget af at give en mere præcis definition af dimensionsbegrebet, og især af at afklare spørgsmålet om dimensionsbegrebets invarians. Begge eksempler kan siges at høre med til dannelsen af den generelle topologi, som er en generalisering af den Weierstrasske analyse, selvom formuleringen af Peanos kurve ikke oprindeligt byggede på topologiske begreber.

Til at konstruere Hamels funktion fra 1905 og Hausdorffs paradoks fra 1914 benyttes i begge tilfælde udvalgsaksiomet. Dette aksiom, formuleret i 1904 af Zermelo, var meget omdiskuteret i matematiksamfundet, og Hausdorffs paradoks bliver benyttet i denne diskussion.

Vores eksempler ligger altså fra ca 1854 til 1914, men de historiske afsnit vil indeholde elementer fra begyndelsen af det nittende århundrede op til ca 1930. Det vil altid være et valg, hvornår man skal starte og slutte en sådan historisk gennemgang, og vores valg er motiveret af, at vi har de enkelte eksempler og baggrunden for deres opståen samt deres påvirkning af matematikken som emne.

Eksemplerne optræder i kapitlet i kronologisk orden, bortset fra at Cantors mængde kommer næstsidst, som en afslutning på de eksempler der omhandler begreber fra analysen. Begrundelsen for at placere Cantors mængde dér er, at vi i gennemgangen af denne udelukkende bruger topologiske begreber, hvorfor den analyseres på et mere abstrakt plan end de foregående eksempler. I konstruktionen af Hausdorffs paradoks anvendes mere grundlæggende begreber af mængdeteoretisk og geometrisk art, så det er naturligt at placere det tilsidst.

3.1 Claus' funktion

Følgende funktion er fra [Mej], hvor den ikke har noget navn, og hvor der ikke står noget om, hvorfra den stammer. Vi har valgt at kalde den Claus' funktion af rent interne grunde i gruppen[1]. Den er medtaget her, fordi den fint demonstrerer, hvad et patologisk eksempel er, men vi har ikke været istand til at finde den anvendt nogetsteds.

Det er velkendt, at Dirichlet's funktion givet ved :

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

er diskontinuert i alle punkter $x_0 \in [0,1]$, og ikke Riemann-integrabel. Diskontinuiteten for alle punkter ses ved, at både $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ligger tæt i $\mathbb{R}$, så for en hvilken som helst omegn omkring et givet x_0 vil der altid befinde sig både rationale og irrationale tal indenfor omegnen, hvilket medfører:

$$\exists \varepsilon \in]0,1[\; \forall \delta > 0 \; \exists \, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, : \, |\chi_Q(x_0) - \chi_Q(x)| = 1 > \varepsilon$$

At funktionen ikke er Riemann-integrabel ses ved, at supremum af mængden af undersummer er 0, mens infimum af mængden af oversummer er 1. (Funktionen er Lebesgue integrabel med integralet 0, hvilket ikke er underligt, da $\chi_Q(x) = 0$ pånær i $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ som er tællelig og dermed en nulmængde.)

3.1.1 Konstruktion og egenskaber

Det passer godt med vores matematiske intuition, at en funktion der er diskontinuert i alle punkter, heller ikke er Riemann-integrabel. Mere overraskende er det så, at der findes en funktion, som er diskontinuert for alle $x \in \mathbb{Q}$ og kontinuert for alle $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, og endvidere er Riemann-integrabel:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{hvis } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \; p \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, \; q \in \mathbb{N} \text{ og } \frac{p}{q} \text{ uforkortelig} \\ 0 & \text{hvis } x = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

[1] Han betalte mest.

3.1.2 Kontinuitetsforhold

At funktionen er diskontinuert i ethvert punkt $x_0 \in \mathbb{Q}$ ses ved, at $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ligger tæt i $\mathbb{R}$, så en hvilken som helst omegn omkring x_0 vil altid indeholde irrationale tal, hvorfor der eksisterer irrationale x, således at $|f(x)-f(x_0)| = \frac{1}{q}$, hvor $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Mere formelt kan dette skrives som:

$$\exists\varepsilon \in]0; \frac{1}{q}[\; \forall\delta > 0 \; \exists \; x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[: \; |f(x_0)-f(x)| = \frac{1}{q}-0 = \frac{1}{q} > \varepsilon$$

Vi vil nu vise, at $f(x)$ er kontinuert for alle $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Lad derfor $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, og lad ε være givet. Ideen i beviset er, at i en vilkårlig omegn omkring x_0 , $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, findes der kun endeligt mange rationale tal $\frac{p}{q}$, der opfylder $\frac{1}{q} > \varepsilon$. Endvidere ved vi, at der i omegnen findes uendeligt mange rationale tal, og der kan findes rationale tal så tæt på x_0, som det skal være. Derfor kan vi vælge en mindre omegn omkring x_0, sådan at ingen af de $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, der opfylder $\frac{1}{q} > \varepsilon$, er med i omegnen, og derfor er $f(x)$ kontinuert i x_0.

For at bevise dette i detaljer konstaterer vi først, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $q_0 \in \mathbb{N}$, således at $\frac{1}{q} < \varepsilon$ for alle $q > q_0$. For ethvert fast $j \in \mathbb{N}$ defineres

$$\delta_j = \min\{|x_0 - \frac{m}{j}| \; : \; m \in \mathbb{Z}, \; \frac{m}{j} \text{ uforkortelig}\}.$$

Da mængden $\{\frac{m}{j} \; : \; m \in \mathbb{Z}\}$ ligger diskret i $\mathbb{Q}$ findes der et mindste element, og da $x_0 \notin \mathbb{Q}$, er $\delta_j > 0$ for alle $j \in \mathbb{N}$. Vi definerer

$$\delta = \min\{\delta_j \; : \; j = 1, \ldots., q_0\} > 0$$

hvor $q_0 \in \mathbb{N}$ er givet ovenfor. For ethvert $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ fås da

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Thi hvis x er irrational er venstre side lig med 0, og hvis x er rational, er

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{q} - 0 = \frac{1}{q}$$

hvor $q > q_0$, så $\frac{1}{q} < \varepsilon$. At $q > q_0$ sikres af den måde, hvorpå vi har defineret δ. Da vi således har vist at

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \; \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

er$f$ kontinuert i ethvert irrationalt tal.

Integrationsforhold

Vi starter med at se på $f(x)$ i intervallet $[0,1]$, hvor vi for at vise, at den er Riemann-integrabel, skal sammenligne over og undersummer. Supremum af mængden af undersummer er 0, idet vi ikke kan lave nogen opdeling af intervallet og en dertil svarende undersum, som har en positiv værdi. Integrabilitetskravet bliver nu, at infimum af oversummerne ligeledes er 0, hvilket igen betyder, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ skal eksistere en opdeling, der giver anledning til en positiv oversum, der er mindre end ε. Hvis det gælder, kan forskellen mellem oversummen og supremum af mængden af undersummer blive vilkårligt lille, hvorfor $f(x)$ er Riemann-integrabel med integralet $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der findes i intervallet kun et endeligt antal m af rationale tal $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q}$ uforkortelig, som opfylder $\frac{1}{q} > \varepsilon$. Disse tal kan derfor ordnes i en strengt voksende endelig talfølge, hvor endepunkterne 0 og 1 tilføjes:

$$0 = r_1 < r_2 < r_k < \ldots\ldots < r_m = 1$$

Lad disse tal udgøre en inddeling af intervallet fra 0 til 1. ε vil være større end $f(x)$ i hvert delinterval $I_k =]r_{k-1}, r_k[$. Derfor kan følgende oversum dannes:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \cdot (r_2 - r_1) + \ldots + \varepsilon \cdot (r_m - r_{m-1}) &= \sum_{k=2}^{m} \varepsilon \cdot (r_k - r_{k-1}) \\
&= \varepsilon \cdot \sum_{k=2}^{m} (r_k - r_{k-1}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hermed er påstanden bevist. Det ses, at tilsvarende oversummer kan dannes for ethvert delinterval i $\mathbb{R}$. Integralet af $f(x)$ i hele $\mathbb{R}$ kan — idet $f(x) \geq 0$ for ethvert x — findes som en grænseværdi, idet man lader et delinterval gå imod $-\infty$ og ∞:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{m,n\to\infty} \int_{-m}^{n} f(x)dx = \lim_{m,n\to\infty} 0 = 0$$

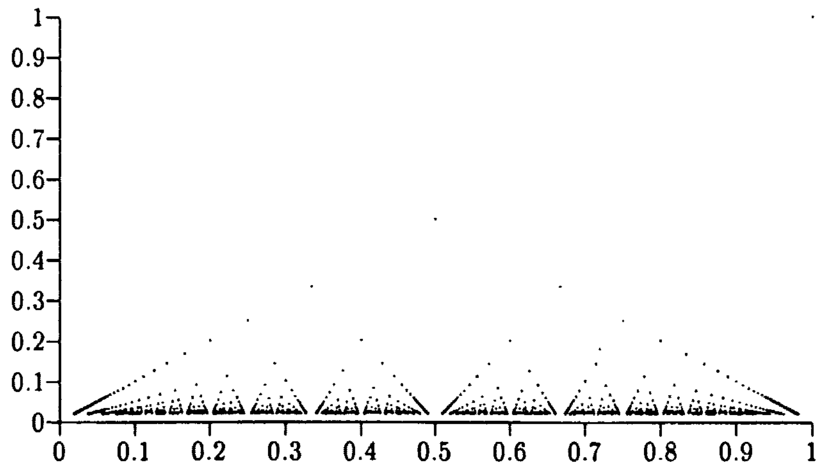
Derfor er $f(x)$ Riemann-integrabel med integralet 0.

3.1.3 Patologiske egenskaber

Hvis man prøver at danne sig et billede af funktionen, når man frem til en overalt tæt mængde af punkter på x-aksen, hvorover der befinder sig punkter, som når op til $f(x) = 1$. Punkttætheden aftager med afstanden fra x-aksen. Se figur 3.1. At en sådan funktion kan være kontinuert næsten overalt og integrabel, strider imod ens fornemmelse/erfaring for, hvad begreberne kontinuitet og integrabilitet indeholder. At man bliver overrasket over funktionen tyder på, at der ikke er harmoni mellem den intuitive forestilling om kontinuitet og begrebet punktvis kontinuitet. Den intuitive forestilling er noget med, at en kontinuert funktions graf kan tegnes uden at løfte blyanten fra papiret, dvs. den drejer sig om kontinuitet i et interval. Yderligere ligger kontinuitetspunkterne og diskontinuitetspunkterne tæt, hvilket også virker "underligt".

Også for ens forestilling om integrabilitet er det overraskende, at en så underligt udseende funktion viser sig at være Riemann-integrabel. Integralet af en funktion identificerer man med arealet mellem x-aksen og funktionens graf (for en skalarfunktion af én variabel). Men hvad er arealet under funktionen afbildet på figur 3.1? At det viser sig at være nul, er ikke umiddelbart indlysende, men når arealet eksisterer, idet funktionen er integrabel, er resultatet nul, nok det intuitivt mest rigtige.

Figur 3.1: Claus' funktions værdier $\geq \frac{1}{50}$



3.1.4 Historisk betydning

Vi har ikke fundet Claus' funktion ved vores søgninger i matematiske kilder og historiebøger, og alene det faktum, at den ikke er navngivet i [Mej], antyder, at den ikke vil være nem at finde. Ifølge [Bot] har overvejelser omkring funktioner med samme egenskaber som Claus' funkton, dog haft en vis betydning. I en artikel fra 1854 giver Riemann den definition af integralet $\int_a^b f(x)dx$, som idag bærer hans navn. Det gamle integralebegreb (Cauchy integralet) synes han er utilstrækkeligt, idet det kun er brugbart, når $f(x)$ er kontinuert i intervallet $[a, b]$ eller diskontinuert i højst endeligt mange punkter [Bot s 243]. Som et eksempel på en funktion, der er diskontinuert i $\mathbb{Q}$, kontinuert i $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ og Riemann-integrabel, giver han følgende [Bot s 244]:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

hvor (nx) = afstanden fra x til det nærmeste hele tal, eller $(nx) = 0$ hvis x er lige langt fra to hele tal.

3.2 Weierstrass' funktion

Det første eksempel på en funktion, som er kontinuert uden at være differentiabel i noget punkt, blev fremsat af den tjekkiske filosof og matematiker Bolzano i starten af 1830-erne. Weierstrass opfandt sin funktion omkring 1872, og det er den, som vil blive behandlet her. Den blev tilsyneladende først publiceret i 1875 af du Bois Reymond. Normalt er det sådan i litteraturen, at man benytter et andet eksempel, nemlig en funktion som blev konstrueret af van der Waerden i 1930. Van der Waerdens funktion er en uniformt konvergent række af savtakfunktioner, hvor der bliver kortere og kortere imellem takkerne.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} g(10^n x)$$

hvor

$$g(x) = \frac{1}{2} - \mid \frac{1}{2} - x \mid \quad for\ x \in [0,1]$$

og iøvrigt er periodisk med periode 1 i hele $\mathbb{R}$.

Det fine ved denne funktion er at det er relativt let at vise, at den ikke er differentiabel i noget punkt. Man kan nemlig med fordel benytte en eksplicit decimalbrøkrepræsentation af punkterne i intervallet $[0,1]$. Det lidt kedelige ved den er, at den savner en egenskab, som Weierstrass' konstruktion har; at være en uniformt konvergent række af funktioner med uendeligt ofte differentiable led, hvor grænsefunktionen er intetsteds differentiabel. Weierstrass' funktion ser nemlig således ud:

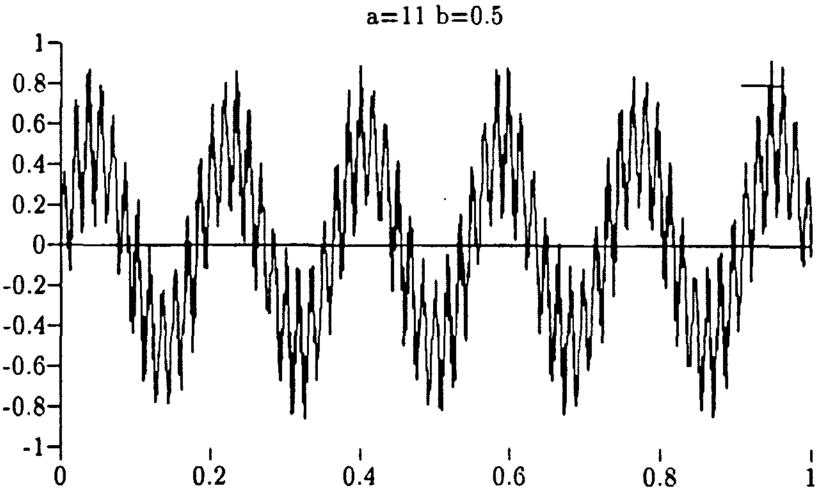
$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \quad \text{hvor } b < 1, \ a \text{ ulige og } ab > (\frac{3\pi}{2}+1) \tag{3.1}$$

At grænsefunktionen for denne række er kontinuert følger af den uniforme konvergens, som igen følger af, at rækken er majoriseret af:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

Ifølge kvotientrækkeformlen er denne række uniformt konvergent når $b < 1$. At $W(x)$ ikke er differentiabel i noget punkt er lidt sværere at vise.

Figur 3.2: Weierstrass' funktion



3.2.1 Bevis for at W ikke er differentiabel

Det følgende bevis stammer fra [Tit]. For at bevise at W ikke er differentiabel i noget punkt starter vi med at se på differenskvotienten for et givet $x \in \mathbb{R}$

$$\Delta W_h = \frac{W(x+h) - W(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos(a^n\pi(x+h)) - \cos(a^n\pi x)}{h}.$$

Beviset går nu ud på at konstruere en følge h_m, som konvergerer mod nul på sådan en måde, at absolutværdien af differenskvotienten $\mid \Delta W_{h_m} \mid$ går mod ∞. $W(x)$ er kun differentiabel i x, hvis ΔW_{h_m} konvergerer mod det samme reelle tal for en vilkårlig følge h_m, som konvergerer mod nul. Følgen h_m definerer vi således. Først skriver vi $a^m x$ på formen (forklaringen følger senere):

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m \text{ hvor } \alpha_m \in N \text{ } og \text{ } \xi_m \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \tag{3.2}$$

og så definerer vi

$$0 < h_m = \frac{1-\xi_m}{a^m} < \frac{3}{2a^m} \tag{3.3}$$

Det ses umiddelbart, at $h_m \longrightarrow 0 \; for \; m \longrightarrow \infty$. Nu vil vi vise, at $\mid \Delta W_{h_m} \mid$ dominerer en divergent følge med positive led. Det gør vi på den snedige måde, at vi deler rækken for ΔW_{h_m} op i to delsummer:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} = S_m + R_m \\ \Leftrightarrow \quad & R_m = \Delta W_{h_m} - S_m \\ \Rightarrow \quad & |R_m| = |\Delta W_{h_m} - S_m| \leq |\Delta W_{h_m}| + |S_m| \end{aligned}$$

Vi finder først en øvre grænse for S_m og en nedre grænse for R_m, for derefter at lave følgende sjove vurdering:

$$\mid \Delta W_{h_m} \mid \geq \mid R_m \mid - \mid S_m \mid > c_m$$

hvor c_m er en divergent følge med positive led. Vi vurderer S_m opad uden egentlig at benytte definitionen på h_m. Det er nok at bemærke at:

$$\mid \cos(a^n\pi(x+h_m)) - \cos(a^n\pi x) \mid = \mid \sin(a^n\pi(x+\theta h_m))a^n\pi h_m \mid \leq a^n\pi h_m$$

idet man ifølge middelværdisætningen kan finde et passende $\theta \in]0,1[$, så det første lighedstegn er opfyldt. Vi kan hermed lave følgende vurdering:

$$| S_m | \leq \sum_{n=0}^{m-1} b^n a^n \pi = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} < \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1} \tag{3.4}$$

hvor vi benyttede kvotientrækkeformlen.

For at finde en nedre grænse for R_m benytter vi derimod det eksplicitte udtryk for h_m, se formel 3.3. Ideen er, at argumentet til $\cos(a^m \pi(x + h_m))$ hele tiden bliver positive multipla af π med vores valg af h_m:

$$\begin{aligned} a^n \pi(x + h_m) &= a^{n-m} a^m \pi(x + h_m) \\ &= a^{n-m} \pi(\alpha_m + \xi_m + 1 - \xi_m) \\ &= a^{n-m} \pi(\alpha_m + 1) \end{aligned}$$

Da a er et ulige tal, er a^{n-m} også ulige. Det benytter vi til at opnå:

$$\cos(a^n \pi(x + h_m)) = \cos(a^{n-m} \pi(\alpha_m + 1)) = (-1)^{\alpha_m + 1} \tag{3.5}$$

På lignende vis fås

$$\begin{aligned} \cos(a^n \pi x) &= \cos(a^{n-m} \pi(\alpha_m + \xi_m)) \\ &= \cos((a^{n-m} \pi(\alpha_m + \xi_m)) \bmod 2\pi) \\ &= (-1)^{\alpha_m} \cos(a^{n-m} \pi \xi_m) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Forstået på den måde, at man først kan trække et passende helt multiplum af 2π fra argumentet til cosinusfunktionen, for derefter at tage cosinus på resten. Hvis α_m er lige er resten $a^{n-m} \pi \xi_m$, og hvis α_m er ulige er resten $\pi + a^{n-m} \pi \xi_m$. Ved at sætte 3.5 og 3.6 ind i udtrykket for R_m får vi

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m + 1}}{h_m} \sum_{n=m}^{\infty} b^n \{1 + \cos(a^{n-m} \pi \xi_m)\} \tag{3.7}$$

Da alle leddene i denne sum er positive, kan vi vurdere den nedadtil ved at betragte det første led, hvor vi ifølge 3.2 ved at $\cos(\pi \xi_m) \geq 0$:

$$| R_m | > \frac{b^m}{h_m} > \frac{2}{3}(ab)^m \tag{3.8}$$

Sammenfattende kan vi lave en divergent følge $c_m = (ab)^m(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1})$, som er mindre end $\mid \Delta W_{h_m} \mid$ for alle m.

$$\mid \Delta W_{h_m} \mid > \mid R_m \mid - \mid S_m \mid > (ab)^m(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1})$$

Vores antagelser om parametrene a og b sørger for, at følgen ikke bliver konvergent, negativ eller nul. Så vi har altså for ethvert x fundet en følge h_m, så differenskvotienten $\Delta W_{h_m}(x)$ ikke konvergerer.

Ved hjælp af et mere moderne bevis kan man vise, at $W(x)$ ikke er differentiabel i noget punkt blot $ab > 1$. Når vi nu har set, hvor specifikt dette bevis bygger på, at parameterværdierne opfylder $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ er det vist rimeligt at antage, at det originale bevis har lignet ovenstående meget.

3.2.2 Patologiske egenskaber

Det væsentligste patologiske træk ved Weierstrass' funktion er, at den ikke er differentiabel nogen steder samtidig med, at den er kontinuert overalt. Det er givetvis en meget almindelig forestilling at gøre sig på et vist niveau af ens matematiske udvikling, at kontinuerte funktioner er stykkevis differentiable.

Derudover er det underligt, at en uniformt konvergent række af pæne funktioner så at sige "eksploderer" i grænsen, altså slet ikke bevarer differentiabiliteten nogetsteds. Dette forekommer kontraintuitivt, fordi forestillingen om uniform konvergens er knyttet til et geometrisk billede af en smal slange (med bredde ε), som funktionsfølgen før eller siden kommer inden for. I dette lærebogsbillede er der ikke taget højde for, at denne slange kan "sno sig mere og mere", jo smallere man gør den, eller jo mere detaljeret man ser på den.

Vi tolker dette som et eksempel på, at den model vores intuition bygger på viser sig at være utilstrækkelig. Modellen er sammensat af den matematiske erfaring, som vi har omkring funktionsfølger, og disse erfaringer inkluderer en tung gruppe af fine glatte funktioner, som vi har mødt i undervisningen, og som vejer godt til, når vi skal gøre os forestillinger om uniform konvergens i almindelighed.

Weierstrass' funktion har yderligere den egenskab, at der ikke er noget interval, hvor den er monoton. Den er altså et eksempel på en konstruktion, hvor der er en hovedpointe, men at denne hovedpointe har trukket andre patologiske træk med sig.

Som tidligere nævnt konstruerede van der Waerden en funktion med samme hovedpointe som Weierstrass'. Van der Waerdens funktion har den fordel, at pointen er meget let at bevise, men til gengæld mister den nogle sidepointer. Derfor er van der Waerdens funktion ikke helt så interessant som Weierstrass', men da hovedpointen er den samme, vil vi stadig kalde van der Waerdens funktion for en patologi.

3.2.3 Historie

I en stor del af det nittende århundrede troede de fleste matematikere, at kontinuitet medførte differentiabilitet undtagen i isolerede punkter. En måde at afklare probemet på ville være at bevise sætningen, en anden ville være at finde et modeksempel. Gennem århundredet var der forskellige forsøg på begge dele, men problemet blev først endeligt løst af Weierstrass i 1872. I dette afsnit vil vi først beskrive denne udvikling og derefter den forskning, der har været i Weierstrass' funktion.

Ampère var i 1806 den første, som troede at han beviste, at en kontinuert funktion altid har en endelig afledet forskellig fra nul, undtagen i et endeligt antal punkter, hvormed han mente at, funktionen $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ forbliver endelig (ikke nul), når i går imod 0 undtagen for bestemte isolerede x-værdier. I en artikel formulerede Ampère ikke eksplicit kontinuiteten af f, men forudsætter denne flere gange særligt i forbindelse med middelværdisætningen [Cha]. At det var almindeligt accepteret, at kontinuitet medførte differentiabilitet kan bl.a. ses af, at Ampères resultat ifølge [Cha] var med i forskellige lærebøger "Elements du Calcul Infinitésimal" af Duhamel (1856) og "Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral" af Joseph Bertrand (1864). Alle beviserne begynder med at forudsætte, at funktionen ikke opfylder den antagelse, der skal bevises. De forudsætter altså, at der eksisterer en funktion med uendeligt mange punkter, hvor funktionen ikke har en endelig differentialkvotient forskellig fra nul. Deraf udleder de, at der må eksistere et interval, hvor forholdet $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ ikke har en endelig grænseværdi forskellig fra nul, for i gående mod nul. Dette er første fejl i beviset, idet dette ikke behøver at være tilfældet, da funktionen kan have en endelig grænseværdi forskellig fra nul i en mængde, der er tæt i $\mathbb{R}$, og stadigvæk have uendeligt mange punkter, hvor differentialkvotienten ikke er endelig og forskellig fra nul. Derfor slutter de, må grænseværdien i intervallet enten være nul eller uendelig. Dette er anden fejl i beviset, idet differentialkvotienten også kan være ubestemt. Ved at bruge en form for uniform kontinuitet som de ikke har forudsat, tredie fejl, opnåes resultatet, at funktionen må være konstant [Cha].

Som nævnt i 3.2 er det første eksempel på en kontinuert ikke differentiabel funktion, som vi har kunnet finde, konstrueret af Bolzano [Rus][Cha] i begyndelsen af 1830-erne. Han lavede den vha. en rekursiv geometrisk fremgangsmåde. Udgangspunktet er et polygonalt liniestykke bestående af flere rette liniestykker sat sammen. Det polygonale stykke skal repræsentere grafen af en funktion. Hvert rette liniestykke erstattes så med en mindre udgave af det polygonale stykke, således at den herved fremkomne linie stadig repræsenterer grafen af en funktion, men bliver mere takket. Ved at gentage denne proces igen og igen konstrueres en følge af polygonale liniestykker. Grænsekurven vil repræsentere grafen af en funktion, som er ikke-differentiabel. Bolzano mente selv, at den herved fremkomne funktion kun var ikke differentiabel i en overalt tæt mængde, men den er faktisk ikke differentiabel i noget punkt. Bolzanos arbejde, nedfældet i hans manuskripter, blev først opdaget i 1921 af Jasek, så det var altså ikke kendt af hans samtid.

Riemanns funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n^2x)}{n^2}$$

bliver ellers regnet for den første kontinuerte funktion, der ikke er differentiabel i en uendelig mængde af punkter. Da den ikke blev offentliggjort af Riemann selv, men fremlagt i et foredrag er det usikkert, hvad Riemann egentlig mente, funktionen var et eksempel på. Ifølge Weierstrass [Bot] fremlagde Riemann sin funktion i 1861, men om Riemann mente, at funktionen var ikke differentiabel i alle punkter eller kun i en mængde af punkter, som er tæt i $\mathbb{R}$, er stadig uvist. Ifølge Weierstrass mente Riemann det sidste, da det er let at bevise. Det første mente Weierstrass derimod ville være meget vanskeligt at bevise, og det havde han ret i, for i 1970 viste Gerver [Cha][Neu], at for $x = \frac{\pi(2p+1)}{2q+1}$, hvor p og q er hele tal, eksisterer differentialkvotienten og er $-\frac{1}{2}$. A. Smith viste i 1972, at for alle andre værdier af x er funktionen ikke-differentiabel [Seg].

Efter Riemanns funktion blev der stadig arbejdet med et bevis for, at kontinuitet medførte differentiabilitet [Bot]. I en artikel prøvede Gilbert at forbedre et bevis af Lamarle (1855) på trods af modeksempler af Hankel (1870), som han kendte til men forkastede [Cha]. Disse modeksempler bestod af kontinuerte funktioner, som for alle rationale værdier af den variable ikke havde afledede. De blev konstrueret ved at fortætte singulariteter, forstået således at udgangspunktet var en funktion, som har singularitet i 0, f.eks.

$$g(x) = x sin \frac{1}{x}$$

Fra dette dannede Hankel funktionen:

$$f(x) = \sum_{n>0} \frac{g(sin \pi n x)}{n^s}$$

som for alle rationale værdier af x ikke har afledede. Hankel må have forudsat en kontinuert udvidelse af $f(x)$, således at $f(x)$ er defineret i de rationale tal. Tilsidst blev Gilbert dog overbevist om umuligheden af at give et korrekt bevis på grund af et eksempel af Schwarz (1873)[Cha].

Weierstrass kendte til Riemanns funktion og mente ikke, at det kunne være et problem at konstruere en funktion, der er ikke differentiabel i noget punkt, og i 1872 [Rus] fremlagde han som nævnt tidligere funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x).$$

Funktionen er den første beviste kontinuerte ikke differentiable funktion. Weierstrass viste, at funktionen var ikke differentiabel, når a er et ulige heltal, b positiv og mindre end 1, samt $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Med sit modeksempel lukkede Weierstrass diskussionen om, hvorvidt kontinuitet medfører differentiabilitet.

Den senere matematiske diskussion af Weierstrass' funktion har især drejet sig om at generalisere resultatet, altså at sætte mindre bånd på a og b. Et resultat blev opnået af Bromwich [Har], som for $ab > 1+\frac{3}{2}\pi(1-b)$ viste, at differentialkvotienten i alle punkter hverken er endelig eller uendelig. Før Bromwich var andre generaliseringer blevet opnået, men kun for den svagere restriktion at differentialkvotienten ikke er endelig i noget punkt [Har]. I vore dage taler vi kun om differentialkvotienten, når grænseværdien af differenskvotienten for $h \to 0$ er endelig. Den bedste generalisering blev opnået af Hardy [Har] i 1916, da han viste, at funktionen ikke havde endelig differential kvotient for $0 < b < 1$, $a > 1$ og $ab \geq 1$. Udover generaliseringer har man været interesseret i at finde en simplere konstruktion, og den mest anvendte blev lavet af van der Waerden i 1930 [Mej].

Weierstrass' funktion er et eksempel på en patologi, som har afsluttet en debat, idet den afgjorde spørgsmålet om, hvorvidt kontinuitet medfører differentiabilitet. Der er blevet forsket i betingelserne for funktionens parameterværdier, men som inspirationskilde synes Riemanns funktion langt rigere, netop fordi det ikke let kunne afgøres, hvilke differentiabilitets egenskaber funktionen har. Det skal dog nævnes, at [Cha] i sin gennemgang af den historiske udvikling af fraktalgeometriens historie tager udgangspunkt i arbejdet med kontinuerte ikke-differentiable funktioner, heriblandt Weierstrass' funktion. Dette kunne tyde på, at Weierstrass' funktion har haft en vis betydning for denne udvikling, også fordi dens graf er en af de første grafer i matematikhistorien med fraktal dimension. Dette spor har vi dog ikke undersøgt nærmere.

3.3 Peanos kurve

Peanos kurve er en kontinuert afbildning fra enhedsintervallet på enhedskvadratet, som kan udvides til en kontinuert afbildning fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^2$ gennem ethvert punkt i planen. Peanos kurve kan generaliseres til en afbildning fra enhedsintervallet til en n-dimensional enhedsterning, således at man kan danne en kontinuert, surjektiv afbildning mellem $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^n$. Peanos egen fremstilling i 1890 [Pea] var uden geometrisk fortolkning. Den kom først senere af Hilbert [Hil] dog med en lidt anderledes konstruktion. Ifølge [Johl] fik den originale Peanokurve først en geometrisk fortolkning i 1900 givet af Schönflies og E.H.Moore.

Peanos oprindelige kurve går altså fra $I = [0,1]$ til $[0,1]^2$, er kontinuert, og går gennem ethvert punkt i enhedskvadratet. Nogle punkter går den gennem flere gange, dvs. der til et (x,y) svarer flere t-værdier.

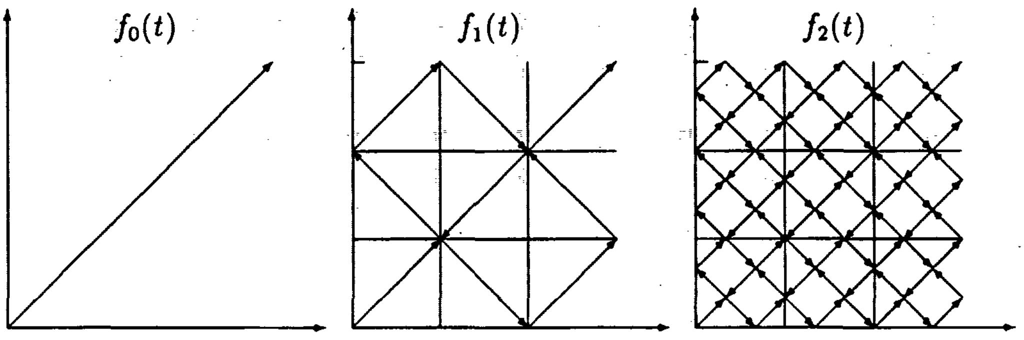
3.3.1 Konstruktionen

Ideen i konstruktionen er at lave en ligelig fundamentalfølge af kontinuerte funktioner fra $[0,1]$ ind i $[0,1]^2$, hvilket er en tilstrækkelig betingelse for, at den punktvis definerede grænsefunktion er kontinuert. Yderligere konstrueres følgen, så alle punkter i planen rammes. Første led defineres som:

$$f_0(t) = (t,t) \quad t \in [0,1] \tag{3.9}$$

f_0 er klart kontinuert, og gennemløber diagonalen i enhedskvadratet. Til f_1 opdeles enhedskvadratet i 9 kvadrater, og kurven gennemløber den ene diagonal i hvert kvadrat. Samtidig opdeles enhedsintervallet i 9 delintervaller $[\frac{k-1}{9}, \frac{k}{9}], k \in \{1,2,...,9\}$, og f afbilder det k'te interval på det k'te kvadrat efter figur 3.3.

Figur 3.3: De første "Peanokurver"



Til f_2 opdeles hvert af de 9 kvadrater i 9 nye kvadrater, og hvert af de gamle kvadrater gennemløbes, som enhedskvadratet blev det før. Samtidig opdeles enhedsintervallet i 81 delintervaller og som før afbildes det k'te interval $[\frac{k-1}{81}, \frac{k}{81}]$ i det k'te kvadrat. Det er her vigtigt, at f_2 overholder inddelingen fra f_1, altså afbilder $[\frac{k-1}{9}, \frac{k}{9}]$ i det k'te kvadrat, $k \in \{1, 2, ..., 9\}$. Yderligere gælder, at hvis $f_1(t)$ er et knækpunkt, er $f_2(t) = f_1(t)$ også et knækpunkt.

Disse to punkter gælder for resten af følgen, som konstrueres efter det foregående mønster, således at f_n har 9^n kvadrater med sidelængde 3^{-n} og 9^n delintervaller.

Ligelig fundamentalfølge

En ligelig fundamentalfølge på $[0, 1]$ er defineret, som en følge f_n af begrænsede funktioner på $[0, 1]$ der opfylder:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq N : \| f_m - f_n \|_\infty < \varepsilon \tag{3.10}$$

hvor

$$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} | f(t) | = \sup_{t \in [0,1]} \sqrt{f_1(t)^2 + f_2(t)^2} \tag{3.11}$$

idet $| f(t) |$ er længden af vektoren $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Det vigtige argument i beviset er, at da f overholder alle tidligere inddelinger er der en grænse for, hvor langt to led i følgen kan være fra hinanden. For et givet t vil de fra et vist niveau ligge i samme kvadrat. Der vælges et N så $3^{-N}\sqrt{2} < \varepsilon$ (dette er diagonallængden af et kvadrat i niveau N). Til et vilkårligt t findes mindst et $k \in \{1, .., 9^N\}$, så $t \in [\frac{k-1}{9^N}, \frac{k}{9^N}]$ Hvis m,n $\geq N$ overholder f_m og f_n inddelingerne fra f_N, altså bliver mængderne $f_m([\frac{k-1}{9^N}, \frac{k}{9^N}])$ og $f_n([\frac{k-1}{9^N}, \frac{k}{9^N}])$ delmængder af kvadrat k fra niveau N. Dette har kantlængde 3^{-N} og diagonallængde $3^{-N}\sqrt{2}$. Afstanden mellem to punkter i kvadrat k er altså højst $3^{-N}\sqrt{2}$. Dermed bliver:

$$\| f_m - f_n \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \| f_m(t) - f_n(t) \| \leq 3^{-N}\sqrt{2} < \varepsilon \tag{3.12}$$

Da f_n således er en ligelig fundamentalfølge af kontinuerte funktioner, findes grænsekurven $f : [0,1] \to [0,1]^2$ og er kontinuert.□

Bevis for surjektivitet

Lad (x, y) være et vilkårligt punkt i enhedskvadratet. Så skal vises, at (x, y) tilhører $f([0,1])$. Da f er en kontinuert afbildning, og $[0,1]$ er et lukket interval, vil $f([0,1])$ være lukket, og alle kontaktpunkter for f tilhører dermed $f([0,1])$. Derfor hvis enhver omegn omkring (x, y) indeholder mindst et punkt tilhørende $f([0,1])$, vil (x, y) tilhøre $f([0,1])$. Først ses, at for et givet n vil f_n's bane et sted højst have afstanden 3^{-n} til (x, y). Dette er tilfældet, fordi f_n's bane går gennem to diagonalendepunkter i hvert af kvadraterne med sidelængde 3^{-n}, som enhedskvadratet er opdelt i. Det skal så vises, at for et givet $\varepsilon > 0$ vil ε-omegnen af (x, y) skære $f([0,1])$. Vælg N tilstrækkelig stor, så:

$$\| f_N - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \text{ og } 3^{-N} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.13}$$

Fra det foregående vides, at der findes et punkt i enhedsintervallet, så $d((x,y), f_N(t_0)) \leq 3^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $d(f_N(t), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$ for alle t følger:

$$d((x,y), f(t_0)) \leq d((x,y), f_N(t_0)) + d(f_N(t_0), f(t_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{3.14}$$

eller

$$d((x,y), f(t_0)) < \varepsilon \tag{3.15}$$

og dermed skærer (x, y)'s ε-omegn $f([0,1])$. Altså har vi bevist at $(x, y) \in f([0,1])$. □

3.3.2 Patologiske aspekter

Det patologiske træk ved Peanos kurve, som man først bemærker, er, at den skaber en umiddelbar sammenhæng mellem en linie og en flade. To geometriske størrelser man igennem ens matematikuddannelse er blevet vænnet til at betragte, som værende af forskellig art. At grafen for en kurve kan have et areal er yderligere overraskende, idet grafen jo udgøres af linier, som er uendeligt tynde. Dette kan billedligt udtrykkes ved, at Peanos kurve påviser, at det er muligt at male et endeligt areal med en uendelig tynd pensel uden at løfte den. At dette kræver en uendelig lang streg, virker udfra dette billede meget logisk. Peanos kurve er uendelig lang, hvilket ses ved, at et led i følgen af kurver f_n vil have længden:

$$\Lambda_{f_n} = 3^{-n} \cdot \sqrt{2} \cdot 9^n = 3^n \cdot \sqrt{2}$$

Herudfra ses, at når n går imod uendelig, vil længden gå imod uendelig. Endelig er Peanos kurve et eksempel på en kontinuert funktion, hvis graf ikke har en tangent i noget punkt.

Peanos kurve er et kompliceret matematisk objekt, selvom konstruktionen af kurven ikke er særlig svær at forstå, hvis den konstrueres geometrisk. At få ideen til et sådant objekt og konstruktionen af det, må have krævet en ret utraditionel tankegang. I den sammenhæng er det interessant, om Peano tænkte geometrisk, men valgte at beskrive sin kurve udelukkende analytisk, eller faktisk konstruerede kurven uden noget geometrisk billede til hjælp.

3.3.3 Historie

For matematikerne på Peanos tid virkede hans kurve ret chokerende især pga. to egenskaber ved kurven. For det første at afbildningen fra enhedsintervallet til enhedskvadratet er kontinuert, hvilket rører ved dimensionsbegrebet. For det andet at kurven løber gennem ethvert punkt i enhedskvadratet, og derved har et areal. Hvilken betydning kurven fik for udviklingen af dimensions- og kurvebegrebet, vil vi beskrive i dette afsnit.

Udviklingen af dimensionsbegrebet

Cantors bevis Den udvikling af dimensionsbegrebet, som Peanos kurve er en del af, startede i 1877 med Cantors opdagelse af, at et lukket enhedsinterval kan afbildes bijektivt på et lukket enhedskvadrat eller mere generelt på en n-dimensionel lukket enhedsterning. Dette resultat generaliserede han umiddelbart til, at det er muligt at lave en bijektiv afbildning mellem figurer af forskellig dimension, f.eks. kan en kontinuert flade afbildes bijektivt på en kontinuert linie. Hermed blev der stillet spørgsmålstegn ved, overfor hvilke afbildninger en figurs dimension er invariant.

Hvordan Cantor definerede en figur, er vi ikke helt klar over, men det har ihvert tilfælde været en sammenhængende mængde af punkter. Cantor og andre matematikere bruger også udtrykket "continuous manifold" kontinuert mangfoldighed, hvilket vi heller kan finde en helt præcis definition af. Det er sandsynligt, at denne præcise definition endnu ikke eksisterede i matematiksamfundet i slutningen af 1800-tallet.

Dimensionen af en figur var i 1877 løst defineret som antallet af uafhængige parametre, der er nødvendige for at beskrive figuren. At dimensionen af en figur er invariant, regnedes før Cantor for oplagt. Der var dog ingen, der havde formuleret eksakt hvilke typer af afbildninger, som dimensionsbegrebet var invariant overfor [Johl s 131-133] [Cha s 348-349].

At dimensionsbegrebet ikke var invariant overfor bijektive afbildninger, var meget overraskende for matematiksamfundet og også for Cantor selv [Johl s 133]. Cantor konkluderede i første omgang, at det klassiske dimensionsbegreb, baseret på antallet af uafhængige variable nødvendigt for at beskrive et legeme, måtte forlades og med dette et vist antal af matematiske og filosofiske resultater [Johl s 140-141].

Her stødte han dog på modstand fra Dedekind, der i et brev til Cantor d. 2/7 1877 bekræfter rigtigheden af Cantors arbejde, men fremhæver følgende synspunkt:

> *... dass die Dimensionenzahl einer stetigen Mannigfaltigkeit nach wie vor die erste und wichtigste Invariante derselben ist ... (..antallet af dimensioner af en kontinuert mangfoldighed er før som nu, den første og den vigtigste af de invariante størrelser...)* [Johl s 141]

Men han tilstår at:

> *At antallet af dimensioner er konstant fordrer absolut et bevis.* [Cha s 349]

Han understreger diskontinuiteten af Cantors afbildning og tilføjer:

Begrebet omhandlende antallet af dimensioner får reelt sin invariante karakter fra den forudsætning, at afbildningen skal være kontinuert. [Cha s 349]

Dette leder Dedekind til at formulere følgende teorem:

Gelingt es, eine gegenseitige eindeutige und vollständige Correspondenz zwischen den Puncten einer stetigen Mannigfaltigkeit A von a Dimensionen einerseits und den Puncten einer stetigen Mannigfaltigkeit B von b Dimensionen andererseits herzustellen, so ist diese Correspondenz selbst, wenn a und b ungleich sind, notwendig eine durchweg unstetige.

(Hvis det lykkes at lave en korrespondence mellem punkter tilhørende en kontinuert mangfoldighed A med a dimensioner, og punkter tilhørende en kontinuert mangfoldighed B med b dimensioner, der er én til én og komplet, må denne korrespondence nødvendigvis være diskontinuert overalt, hvis a er forskellig fra b.) [Joh1 s 141]

Dedekind havde desværre intet bevis for dette teorem, men han formulerede her forholdsvis eksakt, hvad der skal kræves af en afbildning for at dimensionsbegrebet forbliver invariant.

Ret hurtigt efter Cantors bevis i 1878 og 1879 blev der publiceret adskillige beviser af "Dedekinds teorem", der også kan formuleres, som at det ikke er muligt at lave en bijektiv og kontinuert afbildning mellem figurer af forskellig dimension. Jacob Lüroth (1844-1910), Johannes Thomae (1840-1921), Enno Jürgens (1849-1907), Eugen Netto (1846-1919) og Cantor bidrog. Der blev givet korrekte beviser for tilfældene $n = 1$ og $m \geq 2$, og $n = 2$ og $m \geq 3$, hvor n og m er antallet af dimensioner, men ingen formåede at lave et korrekt generelt bevis for alle dimensioner. Netto og Cantor gav dog generelle beviser, der var accepterede som korrekte indtil 1899, hvor Jürgens kritiserede dem. Det korrekte bevis blev givet i 1911 af L.E.J. Brouwer (1881-1966) [Joh2].

Peanos kurve. Dimensionsbegrebet var altså meget omdiskuteret i slutningen af det 19'ende århundrede. Peanos kurve publiceret i 1890 bidrog til denne diskussion, idet den ligesom Cantors bijektive afbildning strider imod en "naiv" geometrisk intuition. Peano selv gør dog i sin originalartikel [Pea] opmærksom på, at hans kurve ikke strider imod

Nettos bevis for umuligheden af bijektive, kontinuerte afbildinger, idet afbildingen ikke er injektiv.

At Peanos kurve har haft betydning ses af, at Brouwer refererer til den i en forelæsning, hvor han for første gang præsenterer sit bevis for invariansen af dimensionsbegrebet:

> *We now come to our proper subject, viz., the problem of the invariance of the dimension number, which had its origin in the classical discoveries of Peano and Cantor of about thirty years ago. For Peano has proved that, independently of p and q, a space of p dimensions can be mapped in a single-valued and continuous manner on a space of q dimensions, and Cantor has proved that, likewise independently of p and q, a space of p dimensions can be mapped in a one-one manner on a space of q dimensions.*
> *The old dimension concept thereby became more or less undermined; however, it would be destroyed only if one succeded in mapping a space of p dimensions in both a one-one and a continuous manner on a space of q dimensions.*
> *(Dette citat er oprindeligt skrevet på hollandsk. Vi har valgt at bibeholde Johnsons oversættelse for at undgå oversættelsesfejl.)* [Joh2 s 156]

Problemerne omkring dimensionsbegrebet viste sig at være meget frugtbare for matematikken, idet de bidrog stærkt til udviklingen af topologien. At bevise umuligheden af bijektive, kontinuerte afbildninger mellem rum af forskellig dimension viste sig at være meget svært indenfor den Weierstrassske analyse. Både Cantor og Netto ledtes til at indføre topologiske begreber i deres bevis. Brouwers bevis var helt baseret på topologiske overvejelser.

Arbejdet med at indføre en topologiske definition af dimensionsbegrebet kom til at udgøre en vigtig del af udviklingen af topologien.

Udviklingen af kurvebegrebet

Vi vil ikke beskrive udviklingen af kurvebegrebet nærmere, men nøjes med at give et indtryk af de spørgsmål og hurtige ændringer, som Peanos kurve medførte. En kurve regnedes for en-dimensional og en flade for to-dimensional, og dermed hørte dimensionsbetragtninger med, når man diskuterede kurver og flader. Derfor er påvirkningerne fra Peanos kurve til kurvebegrebet sammenfaldende med dimensionsbetragtningerne.

Camille Jordan (1838-1922) havde defineret en kontinuert kurve, som en kontinuert afbildning af et interval[Joh1]. Dette opfylder Peanos kurve, men da man ikke ville have kvadrater til at være kurver, viste Peano, at der var mangler ved Jordans definition. Da Peanos kurve indeholder multiple punkter, var det fornuftigt at udelukke kurver med denne egenskab i den nye definition. Jordan kurverne bliver så defineret som kontinuerte afbildninger uden multiple punkter eller de, der er en-til-en kontinuerte billeder af et interval. Dette giver dog et nyt problem, nemlig at definitionen er ret begrænset.

At der alligevel har været noget ekstra underligt ved Peanos kurve, kan blandt andet ses af Jordans reaktion på Peanos bevis. Han reagerede nemlig ikke selv ved at omdefinere sit kurvebegreb, og stillede i 1894, fire år efter Peanos offentliggørelse af sit bevis, i et tidsskrift spørgsmålet:

> *Kan man beskrive en funktion $x = f(t)$, $y = g(t)$, hvor f og g er kontinuerte, så kurvens areal er ubestemt ?* [Joh2]

Jordan mente en kurve, som har den egenskab, at arealet af den mængde som kurven indeslutter er ubestemt. Peano svarede ved at henvise til sin kurve. For hvis et kurvestykke fra Peanos kurve forbindes med en almindelig kurve, så de tilsammen giver en lukket kurve, vil denne kurves ydre areal være større end det indre areal. Jordan anerkendte aldrig Peanos svar, og ændrede heller ikke efter dette sit kurvebegreb, selvom han helt sikkert har kendt til Peanos kurve.

De hurtige og direkte ændringer af kurvebegrebet efter Peanos kurve førte ikke til en tilfredsstillende ny definition, men viste snarere, at en helt anden indfaldsvinkel var nødvendig. Definitionen af kurver blev et vigtigt emne for matematikere indenfor mængdelære og topologi [Joh2]. Både mængdelæren og topologien var under opbygning omkring århundredskiftet. Fra 1900 til 1920 var problemet med kurvedefinitionen anset for yderst vigtigt, bl.a. blev det klart, at en fuldstændig generel definition, så begrebet kunne bruges i højere dimensioner, var nødvendig. I starten af 1920-erne foregik en vigtig del af forskningen indenfor dimensionsteori ud fra kurvers topologi. Problemet var at definere en kurve i en mængde-teoretisk topologisk teori. Vi vil dog ikke uddybe dette i projektet.

Vi mener at kunne se to forskellige måder, hvorpå Peanos kurve har indvirket på udviklingen af kurvebegrebet. Nemlig først som almindeligt modeksempel med enkelte skærpelser og ændringer i definitionerne som resultat, og senere som en åbning af nye felter på grund af de problemer, som det blev klart, der var i kurvebegrebet. Disse problemer kunne ikke løses med de matematiske midler, der umiddelbart var til rådighed, men måtte først udvikles indenfor tilstødende områder.

Videre udvikling

Peanos kurve blev efterfulgt af andre patologiske eksempler. Osgood lavede i 1903, stærkt inspireret af Peanos kurve, Osgoods kurve, som er en kontinuert, injektiv men ikke surjektiv afbildning af enhedsintervallet på enhedskvadratet, hvor forskellen mellem arealet af enhedskvadratet og arealet af kurven kan gøres vilkårligt lille. Altså et eksempel på en kurve med et areal men uden multiple punkter. Omkring år 1900 fremkom en række af topologiske monstre, som bidrog til udviklingen af dimensions- og kurvebegrebet, og dermed til udviklingen af topologien [Joh2 s 172].

3.4 Hamels funktion

Hvis der for en funktion $f(x)$ defineret på en mængde M med en tilknyttet addition $+$, som afbilder over i en anden mængde M' også udstyret med en addition $+$, gælder, at $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for alle x og y i M, siger man, at $f(x)$ er additiv. Det er tydeligt, at lineære funktioner (dem hvor $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$) er additive, og man kunne forledes til at tro, at additive funktioner i almindelighed er lineære. Det er de ikke. De er ikke engang kontinuerte altid. Det viser sig faktisk, at der eksisterer en stor klasse af funktioner, som er diskontinuerte og additive i hele $\mathbb{R}$.

I 1905 offentliggjorde G. Hamel en artikel [Ham] med titlen: "Eine Basis aller Zahlen und die undstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$". Her viser han, at man kan danne ikke-kontinuerte additive funktioner. Beviset for eksistensen af den såkaldte "Hamel basis" for $\mathbb{R}$ er i Hamels version baseret på velordningsprincippet, som blev bevist ved brug af udvalgsaksiomet i 1904 af Zermelo [Zer].

Velordningsprincippet

For at konstruere den matematik som er anerkendt i vore dage, skal man bruge ti mængdeteoretiske aksiomer [Hal], plus et 11. axiom, som er et af følgende tre ækvivalente aksiomer:

Aksiom: (Udvalgsaksiomet) *Lad X være en mængde, og lad $\mathcal{P}(X)$ være familien af delmængder i X. Da eksisterer der en udvalgsfunktion på $\mathcal{P}(X)$. Det vil sige en funktion $c : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$, som for ethvert $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ afbilder Y over i et element fra Y. c opfylder altså $c(Y) \in Y$ Ideen med aksiomet er, at hvis man har en familie af mængder, så skal man kunne vælge et element fra hver af dem.*

Vi indfører et par begreber: Ved en *induktivt* ordnet mængde forstås en mængde med en ordning $(X, \leq)$, som opfylder, at enhver totalt ordnet delmængde Y har en *majorant.* Det er underforstået, at delmængden Y skal være totalt ordnet med hensyn til ordenen induceret fra $(X, \leq)$, og at majoranten er et element x_0 i X, som for alle $y \in Y$ opfylder $y \leq x_0$.

Et *maksimalt element* i X er et element x_0, som ikke har nogen egentlig majorant i X, altså ingen majorant som er forskellig fra x_0 selv.

Aksiom: (Zorns lemma) *Enhver induktivt ordnet mængde har et maksimalt element.*

En *velordnet* mængde er defineret, som en mængde med en ordning der opfylder, at enhver delmængde indeholder et mindste element. De eneste velordnede mængder som man kan konstruere i praksis, er de naturlige tal $\mathbb{N}$ og mængder, som er ækvipotente med $\mathbb{N}$. Velordningssætningen eller velordningsprincippet om man vil, siger underligt nok:

Aksiom: (velordningsprincippet) *Enhver mængde kan udstyres med en velordning.*

Velordningsprincippet er som nævnt ækvivalent med det omstridte udvalgsaksiom, som igen er ækvivalent med Zorns lemma. Ækvivalens vil i denne forbindelse sige, at givet de 10 andre mængdeteoretiske aksiomer [Hal], vil man opnå den samme matematik, ligegyldigt hvilket af de tre ovenstående aksiomer man yderligere tilføjer. Man opnår ingen inkonsistenser ved at tilføje et af de tre aksiomer. I 1938 viste Kurt Gödel, at hvis der er en inkonsistens i det aksiomsystem, som man opnår ved at tilføje udvalgsaksiomet til mængdelæren, er der en inkonsistens i mængdelæren uden udvalgsaksiomet [Dav].

Vi springer beviset for ækvivalensen mellem disse tre aksiomer over, - ikke fordi vi anser dem for trivielle, men fordi det står i mange lærebøger for eksempel [Ped].

Det er derimod sjældent, at man finder et bevis for eksistensen af en Hamel-basis og konstruktionen af en ikke-kontinuert additiv funktion, ligesom det er sjældent, at man støder på referencer til Hamels egen artikel. Set med vore dages øjne er denne også uklar og utilstrækkelig.

3.4.1 Hamel-basis

I det følgende vil vi gennemgå en moderne "efterrationaliseret" konstruktion af en Hamel-basis, som istedet for velordningssætningen hviler på Zorns lemma. Hamels oprindelige konstruktion og bevis vil vi trække lidt løst op bagefter.

Konstruktion af Hamel-basen

Betragt $\mathbb{R}$ som et vektorrum over skalarlegemet $\mathbb{Q}$. Det kan man gøre fordi $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ opfylder axiomerne for et vektorrum: $\mathbb{R}$ er en Abelsk gruppe med hensyn til addition, $\mathbb{Q}$ er et legeme, multiplikation af elementer fra $\mathbb{Q}$ med elementer fra $\mathbb{R}$ er distributiv og associativ på alle tænkelige måder, og $\mathbb{R}$ er lukket over for multiplikation med et rationalt tal.

Vi kan derfor lave linearkombinationer af reelle tal med rationale koefficienter, som igen giver reelle tal, og en endelig mængde af reelle tal $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ siges at være lineært uafhængig, hvis ligningen $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0$, hvor $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ kun har løsningen $\alpha_i = 0$. En uendelig mængde siges at være lineært uafhængig, hvis enhver endelig delmængde er lineært uafhængig.

Sætning 1: *Der eksisterer en basis for $\mathbb{R}$, d.v.s. der eksisterer en lineært uafhængig mængde B af reelle tal, så ethvert $x \in \mathbb{R}$ kan skrives som en entydigt bestemt endelig linearkombination af elementer fra B med rationale koefficienter.*

Med andre ord kan x bringes på følgende form:

$$x = \sum_i \alpha_{xi} a_i \tag{3.16}$$

hvor det kun er et endeligt antal koefficienter, som er forskellige fra 0. Sætning 1 følger af den generelle sætning:

Sætning 2: *Ethvert vektorrum har en basis.*

Bevis (for sætning 2):

Entydighed : Det ses at for et givet x, vil koefficienterne α_i nødvendigvis være entydigt bestemt, hvis vi har fundet en basis. Hvis der var et element $x \neq 0$, som kunne repræsenteres på to forskellige måder $\sum \alpha_i a_i$ og $\sum \beta_j b_j$, ville $\sum \alpha_i a_i - \sum \beta_j b_j = 0$, og så ville vores basis indeholde en lineært afhængig delmængde nemlig $\{a_i \mid i \in I\} \bigcup \{b_j \mid j \in J\}$, da nogle α'er og β'er må være forskellige fra nul, hvis ikke $x = 0$.

Eksistens : Ideen i beviset er, at man ordner familien F af lineært uafhængige delmængder af vektorrummet, lad os kalde det $\mathbb{R}$, efter følgende regel (ordning ved inklusion):

$$x \leq y \Leftrightarrow x \subseteq y \tag{3.17}$$

Man noterer nu følgende: Et maksimalt element x i familien F vil være basis i $\mathbb{R}$. Antag nemlig at der var et element a i $\mathbb{R}$, som ikke var en linearkombination af elementer i x. Da ville vi ved at tilføje a til x, kunne danne en lineært uafhængig mængde $y \in F$ så $x \subset y$, men så y indeholdt et element a, som ikke var i x. x ville da være en ægte delmængde af y. Og så ville x ikke være et maximalt element i F.

Hvis F er induktivt ordnet, kan vi bruge Zorns Lemma til at slutte eksistensen af et maksimalt element. Vi skal altså vise, at ordningen $\leq$ er induktiv. Tag derfor en totalt ordnet delmængde $D = \{x_i\}_i$, $i \in I$ af F. D må være en familie af i sig selv lineært uafhængige mængder , som ligger inden i hinanden successivt, men som muligvis er overtællelig. Foreningen af alle mængderne i D må være lineært uafhængig, for ellers ville der eksistere en endelig delmængde af $\bigcup_i x_i$, som var lineært afhængig, og denne mængde måtte da være indeholdt i mindst et element i D. Så $\bigcup_i x_i$ må udgøre en majorant for D i F.

Derfor er F induktivt ordnet, og F vil da ifølge Zorns lemma have et maximalt element B. Vi har hermed vist, at familien af lineært uafhængige delmængder af $\mathbb{R}$ indeholder et maximalt element, og hermed at $\mathbb{R}$ har en basis B. □

Hamels egen konstruktion

I den omtalte artikel [Ham] går Hamel frem på den måde, at han tænker sig $\mathbb{R}$ som velordnet. Han vælger det første element a i $\mathbb{R}$ som første element i basen B. Betragt mængden $\mathbb{R} \setminus a\mathbb{Q}$. Denne har også en velordning. Vælg første element b og tilføj det til basen. Fratræk nu alle linearkombinationer af a og b fra $\mathbb{R}$ og vælg det første element i denne nye velordnede mængde, og fortsæt så i øvrigt på denne måde.

Hvis man tager Hamel bogstaveligt, og det skal man måske ikke, er det svært at overbevise sig om, at man får udtømt $\mathbb{R}$ på denne måde.

Hvis man fører algoritmen til ende, opnår man ved denne fremgangsmåde en tællelig lineært uafhængig mængde B_h, fordi man kan nummerere elementerne, imens man tilføjer dem. Men mængden af *endelige* delmængder i en tællelig mængde er tællelig. Og hvis vi kigger på en af disse endelige delmængder af den formodede basis B_h, vil der være tælleligt mange rationale linearkombinationer af elementerne i denne mængde.

Netop fordi B_h påstås at være en basis for $\mathbb{R}$, må der gælde at $\mathbb{R} = \bigcup_i A_i$, hvor i tilhører mængden af endelige delmængder af B_h, og hvor A_i er mængden af linearkombinationer af elementerne i i med rationale koefficienter. Herved bliver $\mathbb{R}$ en tællelig forening af tællelige mængder og derfor selv tællelig, og det kan jo ikke passe. På den måde er beviset ikke helt tilstrækkeligt efter vore dages standard.

Dette er formentlig en medvirkende årsag til, at for eksempel [Gel1] og [Gel2] ikke henviser til Hamels artikel, selvom de diskuterer Hamelbaser. Det er et ikke enestående eksempel på, at matematikere finder de rigtige konklusioner med utilstrækkelige argumenter. Et andet eksempel, som vi er stødt på i vores projekt, er Nettos bevis for, at man ikke kan have en kontinuert bijektion mellem euklidske rum af forskellig dimension (Se afsnit 3.3 om Peanos kurve).

3.4.2 Hamels funktion $f(x)$

Da vi nu har vist, at ethvert $x \in \mathbb{R}$ kan fremstilles på formen 3.16, kan vi fremstille et patologisk eksempel. Vi har nu mulighed for at "opskrive" alle elementerne i $\mathbb{R}$ på følgende form.

$$x = \sum_i \alpha_{xi} a_i \tag{3.18}$$

hvor α_{xi} kun er forskellig fra nul for endeligt mange led. Hvis $f(x)$ er en funktion på formen

$$f(x) = \sum_i \alpha_{xi} g(a_i) \tag{3.19}$$

hvor $g(x) : B \to \mathbb{R}$ er en vilkårlig funktion, er $f(x)$ additiv. Hvis $g(x)$ ikke er på formen $g(x) = ax$, hvor $a \in \mathbb{R}$, er $f(x)$ ikke kontinuert nogen steder. Funktionen $f(x)$ bliver "ekstremt" diskontinuert under passende valg af $g(x) : B \to \mathbb{R}$. Vi skal faktisk blot vælge $g(x)$, således at forholdet imellem funktionsværdi og argument ikke er ens for kun to tal a og b i B,

$$\frac{g(a)}{a} \neq \frac{g(b)}{b}, \tag{3.20}$$

for at sikre at graf$f(x)$ bliver *tæt i planen* , og $f(x)$ dermed diskontinuert. At graf$f$ er tæt i $\mathbb{R}^2$ vil sige at alle punkterne i $\mathbb{R}^2$ er *kontaktpunkter* for graf$f$. Et kontaktpunkt for graf$f$ er et punkt (x, y), som opfylder at en hvilken som helst omegn omkring (x, y) indeholder et punkt fra graf$f$. $g(x)$ skal blot være ikke-lineær for at opnå dette ret beset forbløffende resultat.

Bevis for at $f(x)$ er diskontinuert overalt

Vi vil bevise, at f's graf er tæt i $\mathbb{R}^2$ under de angivne omstændigheder. Det vil vi gøre ved at betragte en delmængde af graf$f$, nemlig den delmængde af $\mathbb{R}^2$, hvor 1. koordinaten er en rational linearkombination af to basiselementer a og b, og 2. koordinaten er en linearkombination af de samme koefficienter af $g(a)$ og $g(b)$. Man kan ifølge 3.19 parametrisere denne delmængde af graf$f$ på følgende matrixligning, hvor α og β er rationale tal.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$$

Vi vælger $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, og to basiselementer a og b som opfylder 3.20. Det handler herefter om, i en vilkårlig omegn om (x, y) at finde et element som ligger i graf$f$. Nu bemærker vi, at hvis vi i første omgang tillader reelle koefficienter x_1 og y_1, så har matrixligningen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en entydig løsning, netop når 3.20 er opfyldt, fordi determinanten i så fald er forskellig fra 0, hvilket sikrer, at matricen (lad os kalde den for A) er regulær. Man kan sige, at matricen A repræsenterer en kontinuert afbildning af $\mathbb{R}^2$ over i $\mathbb{R}^2$, hvilket er det samme som at hævde, at for enhver omegn O omkring (x, y) kan vi finde en omegn O_1 omkring (x_1, y_1), som bliver afbildet over i O, ved afbildningen repræsenteret ved matricen A. Men da $\mathbb{Q}^2$ er tæt i $\mathbb{R}^2$, kan vi finde rationale tal α og β i O_1, som bliver afbildet over i den vilkårligt valgte omegn O omkring (x, y). Så med rationale tal α og β kan vi komme vilkårligt tæt på (x, y) med linearkombinationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Sådan nogle linearkombinationer er netop punkter i grafen for f, så i en hvilken som helst omegn omkring (x, y) kan vi finde et punkt fra grafen for f. Hermed er det vist at alle punkter i planen er kontaktpunkter for grafen for f, så denne må være tæt i $\mathbb{R}^2$. $\square$

Herefter vil vi vise, at det at graf$f$ er tæt i planen medfører, at den additive funktion f nødvendigvis må være diskontinuert overalt:

Vælg et vilkårligt x i $\mathbb{R}$ og en omegn U om $f(x)$. Hvis f er kontinuert, skal vi til U kunne finde en omegn U_x om x, hvis billede ligger i U. Men da graf$f$ er tæt i planen, kan vi for et passende valgt tal $a \in \mathbb{R} \setminus U$ og en omegn U_a omkring a som ikke snitter U, finde $y \in U_x$ så $f(y) \in U_a$. Hvilket til overmål sikrer, at f er diskontinuert overalt. $\square$

3.4.3 Patologiske egenskaber

Eksistensen af den ikke kontinuerte additive funktion $f(x)$ virker paradoksal første gang, man stifter bekendtskab med den. Hvis man har en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som er additiv, er den lineær på de rationale tal. Homogeniteten indses ved et lille argument:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q}) \\ \text{d.v.s}\quad f(\frac{1}{q}) &= \frac{1}{q}f(1) \\ \text{så}\quad f(\frac{p}{q}) &= f(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{q}) = \frac{p}{q}f(1) \end{aligned}$$

Hvis man ikke havde hørt om eksistensen af ikke kontinuerte additive funktioner, ville man måske tro, at kravet om additivitet for en afbildning fra $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ var så restriktivt, at det medførte linearitet, ikke blot for $\mathbb{Q}$, men for hele $\mathbb{R}$.

Samtidig er der bestemt også noget kompliceret ved selve konstruktionen af Hamels funktion, og ved det matematiske objekt Hamels funktion, som gør, at den er berettiget til at få betegnelsen patologisk. Man kan i denne forbindelse hæfte sig ved, at vi ikke kan give eksplicitte repræsentationer af Hamel-basen og Hamel-funktionen, hvilket forstærker kompleksiteten.

Udover at det er begrebet additivitet, som man ikke på forhånd havde erkendt rækkeviden af, viser det sig også, at det er eksistensen af en basis i ethvert vektorrum, som får alvorlige konsekvenser. Disse konsekvenser bliver man først klar over, når man rent faktisk får præsenteret et eksempel som Hamels funktion. Man kan sige, at det er Zorns lemma og dermed udvalgsaksiomet, som river alt dette med sig. Så udvalgsaksiomet er det *begreb* eller den *definition* for at holde os i vores egen terminologi, som vi ser rækkevidden af i dette eksempel. I afsnit 3.6 ser vi på en patologi, nemlig Hausdorffs paradoks, som virkelig viser rækkevidden af udvalgsaksiomet.

På den måde at selve eksistensen af Hamels funktion er kontraintuitiv, og at konstruktionen er kompliceret, passer funktionen med vores definition på et patologisk eksempel.

Det viser sig, at $f(x)$ har flere besynderlige egenskaber. For eksempel er det ikke alle funktioner, som er tætte i planen, og det påstås i blandt andet [Gel2], at $f(x)$ er en ikke-målelig funktion, som ellers ikke er sådan lige til at konstruere. Vi har ikke i vores projekt været inde på dette.

3.4.4 Historisk forløb

Der har været et historisk forløb omkring funktionalligningen $f(x+y) = f(x) + f(y)$, før Hamel udgav sin artikel [Ham] i 1905, som vi kun kender til gennem tidsskriftartikler. Ifølge Hamels originalartikel havde Cauchy vist, at den eneste kontinuerte løsning til funktionalligningen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ er

$$f(x) = ax \text{ hvor } a \in \mathbb{R}$$

Cauchy viste desuden i 1821, at additive funktioner er rationelt homogene, hvilket vil sige, at de opfylder homogenitetsbetingelsen $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ hvis $\alpha \in \mathbb{Q}$ [Gre].

Vektorrum

Ifølge [Ham0] og [Sch] opstillede Darboux i 1875 6 aksiomer, som han mente var tilstrækkelige til at karakterisere det, som vi kalder vektoraddition. De seks aksiomer er referet i disse to artikler. For at klarlægge hvad diskussionen drejer sig om, citerer vi her aksiomerne fra [Sch]:

Darboux's aksiomer. Problemstillingen er altså som følger: Vi har noget, vi gør med vektorer, og som vi synes er godt, nemlig at vi lægger dem sammen koordinatvis. I [Sch] er vektorer det samme som 3 - tupler med reelle komponenter. Hvordan kan vi nu med færrest muligt aksiomer karakterisere en komposition $f(x, y)$ på vektorer, som netop har de egenskaber, som den koordinatvise addition har? Darboux foreslår:

1. $f(x, 0) = x$ og f er entydig
2. $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$, associativitet
3. $f(x, y) = f(y, x)$ kommutativitet
4. $f(x, tx) = x(1 + t)$ en begrænset distributivitet
5. $f(Dx, Dy) = Df(x, y)$ D er en drejning.

6. $f(x,y)$ er kontinuert og endelig.

Idag bruger man 8 aksiomer til at karakterisere et vektorrum: De fire første Darboux aksiomer kombineret med 4 andre [Hee]. Det er muligt, at 6 axiomer er nok, når man samtidig siger, at vektorrummet er $\mathbb{R}^3$. Artiklerne fra 1903 og 1905 indikerer, at matematikerne i Karlsruhe var bekymrede om, hvorvidt disse 6 aksiomer var logisk uafhængige; altså om de i virkeligheden kunne reduceres til foreksempel 5 aksiomer, og selvfølgelig også om de var tilstrækkelige. Hamel og Schur finder ud af, at de *er* logisk uafhængige, men under den betingelse at additive funktioner ikke nødvendigvis er kontinuerte. Vi har ikke sat os ind i, hvordan de gør det.

Ifølge [Gre] viste Darboux, at additive funktioner er kontinuerte, hvis de er begrænsede enten opadtil eller nedadtil på et interval, hvilket Hamel har været klar over. Hamel mener [Ham0], at hvis man kan vise, at additive funktioner fra $\mathbb{R}$ over i $\mathbb{R}$ er kontinuerte i almindelighed, så kan man udelade det 6. Darboux-aksiom. Det problem optog ham åbenbart så meget, at han fandt på at producere sit modeksempel.

Når både Cauchy, Darboux og Hamel var usikre på, hvorvidt additive funktioner er kontinuerte, tyder det på, at tilblivelsen af Hamels funktion er sket i en tid, hvor den ikke er kommet fuldstændig bag på matematikerne. Det lader ikke til, som i tilfældet Weierstrass' funktion, at der er nogen som har stået frem på forhånd, og påstået at "monsteret" ikke kan eksistere.

Efterfølgende udvikling Hamels konstruktion har initieret en udvikling. Efter opdagelsen af Hamels funktion var spørgsmålet, hvilke krav som man udover additiviteten skulle stille til en funktion, for at sikre at den ville være kontinuert. Forløbet strækker sig frem til 1929. I vores halvdel af århundredet er emnet igen taget op, men under en anden synsvinkel; nemlig i studiet af såkaldte kvasikonvekse mængder.

Der har været matematikere som har forsket specielt i Hamel-baser blandt andre Sierpinski 1920, Burstin 1916 og Jones 1942 [Gre] Interessen har specielt samlet sig om det aspekt, at Hamel-baser kan bruges til at konstruere ikke-målelige mængder med.

I 1913 viser Fréchet, at en målelig additiv funktion er kontinuert, og i 1924 viser Sierpinski, at en additiv funktion, som kan majoriseres af en målelig funktion, er kontinuert [Gre].

Der har også været forsket i grafen for additive funktioner. I 1942 fandt Jones ud af, at grafen for en additiv (diskontinuert) funktion er totalt usammenhængende [Gre].

Disse oplysninger og referencer er hentet fra en artikel om "kvasikonvekse mængder" [Gre] 1950, som er en disciplin, der er relateret til forskningen i additive funktioner. Vi har ikke fulgt dette op, men vi refererer det for at vise, at der er tydelige tegn på, at Hamels funktion har sat en udvikling igang.

Vi kan altså bemærke, at Hamels funktion for det første afstedkom en udvikling bestående i *begrebsafgrænsning* . Man blev opmærksom på, at der var et problem i forventningerne til begrebet additivitets sammenhæng med kontinuitet, og prøvede at finde så svage restriktioner som muligt på funktioner fra $\mathbb{R}$ over i $\mathbb{R}$, der gav det ønskede begreb, nemlig linearitet. For det andet blev der dannet en interesse for selve patologien. Hamel-baser og Hamel-funktioner blev et forskningsfelt i sig selv. Det kan vi godt tillade os at kalde for *dannelse af ny teori*. Dog kan vi ikke tale om en verdensomvæltende teori.

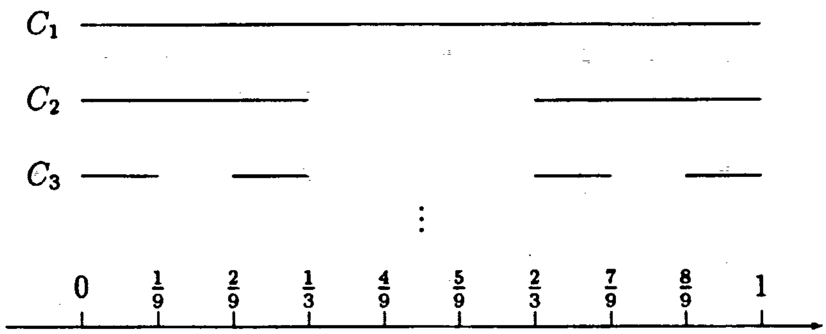
3.5 Cantor-mængden

I forlængelse af de foregående eksempler, som kan siges at høre hjemme i analysen, vil vi gerne præsentere et eksempel fra topologien, nemlig Cantor-mængden C.

Det følgende eksempel adskiller sig fra analyse-eksemplerne på den måde, at det patologiske objekt som er til diskussion her er en mængde, imens objekterne i de andre eksempler er afbildninger. Man kan naturligvis hævde, at mængder kan repræsenteres som afbildninger og omvendt, men det vi vil fremhæve er, at synsvinklen er anderledes. Imidlertid er nogle af de begreber som optræder i det følgende, både substantielt og historisk knyttet til grundlæggende begreber i analysen.

Topologien er den naturlige generalisation af analysen. Vi er allerede stødt på begreber som *omegn*, og det at en mængde er *tæt* i en anden mængde, i forbindelse med Peanos kurve og Hamels funktion. I topologien generaliserer man disse begreber, samtidig med at man indfører nogle nye, for eksempel begrebet *sammenhængende* mængde. Begreberne sigter på at karakterisere strukturen i mængder eller rum. Strukturen i mængderne viser sig at være meget afgørende for egenskaberne at de afbildninger, som man lader virke imellem mængderne.

Figur 3.4: Konstruktion af Cantors mængde



Cantor-mængden og dens patologiske egenskaber er en leg, som kan leges udelukkende ved at bruge topologiske begreber langt hen ad vejen.

Motivationen for at indrage dette anderledes eksempel i projektet er, at undersøge om vores patologibegreb, som hovedsageligt er defineret med henblik på at indkredse eksempler indenfor analyse, indbefatter Cantor-mængden. Man kunne formode, at det er en anden form for intuition, som gør at man finder noget patologisk, når man går fra analysen til den mere abstrakte teori, topologi. Nogle af de egenskaber som Cantor-mængden har, vil vi tillade os at anføre uden at have set beviserne.

3.5.1 Definition af Cantor-mængden C

Man kan anskueliggøre C geometrisk på følgende måde: Tag enhedsintervallet på den reelle akse $[0,1] = C_1$, og fjern den miderste trediedel $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Herved opnås en usammenhængende mængde C_2, som vi så igen tømmer ud i ved at udtage den miderste trediedel af de to tilbageværende intervaller. Herved danner vi C_3, som består af 4 sammenhængskomponenter, hvor vi så fjerner den miderste trediedel af hver, og på denne måde tænker vi os at fortsætte uendelig mange gange, se fig. 3.4.

Denne definition kan også udtrykkes formelt:

$$\begin{aligned} C &= \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C_p \text{ hvor} \\ C_p &= \bigcup_{k \in P_{p-2}} [\frac{k}{3^{p-1}}, \frac{k+1}{3^{p-1}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1-2} &= \{0\}, \\ P_{p-2} &= \{c_{p-2}3^{p-2} + c_{p-3}3^{p-3} + \cdots + c_0 3^0 \mid c_i \in \{0,2\}\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Vi er tvivlende overfor hvordan Cantor oprindeligt definerede C. Ifølge [Joh1] s 164 kunne det se ud som om Cantor først (1883) introducerede C ved hjælp af følgende definition, som er ækvivalent med ovenstående:

$$C = \{z \mid z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{c_3}{3^3} + \cdots + \frac{c_n}{3^n} \cdots, \ c \in \{0,2\}\ \} \quad (3.22)$$

At der er tale om den samme definition kræver et bevis, som vi springer over. Beviset kan rekvireres hos [Nis]. Fremstillingen 3.22 kan også skrives som mængden af alle *trisimalbrøker* i $[0,1]$, som ikke indeholder ciferet 1.

$$C = \{z \mid z = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots_3\}, \ c \in \{0,2\} \quad (3.23)$$

Indekset 3 betyder, at cifrene skal fortolkes i basen 3.

3.5.2 Egenskaber ved C

Vi betragter i det følgende C med topologien induceret fra $\mathbb{R}$ udstyret med den euklidske metrik. Det betyder, at de åbne mængder i C er de mængder, som er dannet ved snit mellem Cantor-mængden og åbne mængder fra $[0,1]$.

C er et fuldstændigt metrisk rum

Ifølge definition 3.21 er Cantor-mængden et (uendeligt) snit af kompakte mængder. Et snit af afsluttede mængder er afsluttet, og C er klart begrænset, så C er selv kompakt.

Da C er afsluttet, er C et fuldstændigt metrisk rum, fordi en Cauchyfølge i en afsluttet delmængde af et fuldstændigt metrisk rum konvergerer indenfor delmængden. Man kan også sige, at enhver Cauchy følge i C vil have et konvergenspunkt i $\mathbb{R}$, og hvis dette konvergenspunkt lå i det åbne komplement til C, ville vi kunne vælge en omegn U omkring konvergenspunktet, som ikke snitter med C, og så ville konvergenspunktet ikke ligge i C's afslutning. Fra et vist led i følgen ville alle leddene ligge i $[0,1] \setminus C$, hvilket er i modstrid med at elementerne i Cauchy-følgen ligger i C.

C opfylder alle adskillelses aksiomer

Da C er et fuldstændigt, metrisk rum opfylder C alle adskillelses aksiomerne T_i hvor $i \in \{1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5\}$ [Ste]. Dette er en af de egenskaber, som vi ikke er gået dybere ind i.

C opfylder andet tællelighedsaksiom

At C opfylder andet tællelighedsaksiom vil sige, at der findes en tællelig basis for topologien. Det følger af at $[0,1]$ har en tællelig basis, nemlig $]q_1, q_2[$ hvor q_1 og q_2 er rationale tal. Til enhver åben mængde i C svarer nemlig mindst en åben mængde i $[0,1]$.

C er tæt i sig selv

At C er tæt i sig selv vil sige, at alle punkter i C er fortætningspunkter. Vi skal altså vise, at til ethvert punkt x i C vil enhver omegn om x indeholde mindst et punkt fra C forskelligt fra x.

Bevis: Tag derfor et punkt x i C. x kan skrives på formen 3.22. Der vil for ethvert $\varepsilon > 0$ eksistere $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \varepsilon.$$

Vi kan derfor finde $y = \sum \frac{d_n}{3^n} \in C$ forskellig fra x, som opfylder:

$$|y - x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n - c_n}{3^n} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{d_n - c_n}{3^n} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \varepsilon,$$

idet vi for de første N led vælger $d_i = c_i$. Hermed er det bevist at C er tæt i sig selv, hvilket medfører at C er **perfekt**, idet en perfekt mængde er en mængde som er afsluttet og tæt i sig selv.□

Det følger også umiddelbart, at C ikke er **scattered**, idet en scattered mængde er en mængde, som ikke indeholder en delmængde, der er tæt i sig selv.

C er intetsteds tæt i $[0,1]$

Hermed menes, at der ikke eksisterer en åben mængde i $[0,1]$, som er indeholdt i afslutningen af C. Da C er afsluttet, er C identisk med afslutningen af C. Vi skal altså vise, at et vilkårligt åbent interval i $[0,1]$ altid vil indeholde mindst et punkt, som ikke tilhører C. Det er nok at vise dette for et åbent interval, fordi de åbne intervaller er basis for topologien på $[0,1]$.

Bevis: Vælg et åbent interval O i $[0,1]$. Hvis O ikke indeholder et punkt i C er vi færdige. Hvis der er et punkt x fra C i O, kan vi, da C er tæt i sig selv, finde et andet punkt y som også ligger O. Disse to punkters trisimalbrøkfremstillinger afviger fra hinanden på mindst et ciffer, for ellers ville de være ens. Lad os sige, at de første gang afviger fra hinanden på den n'te plads, og at y er større end x. Så kan de repræsenteres på denne måde:

$$x = 0,a_1a_2...a_{n-1}\ 0\ b_{n+1}b_{n+2}\ ..._3$$
$$y = 0,a_1a_2...a_{n-1}\ 2\ c_{n+1}c_{n+2}\ ..._3$$

Vi kan nu se, at for eksempel punktet

$$z = 0,a_1a_2...a_{n-1}\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ ..._3$$

ikke ligger i Cantor-mængden, og opfylder $x < z < y$, så z samtidig ligger i det vilkårligt valgte interval O.

Man kan godt være uheldig, at z ligger i Cantor-mængden selvom ét af cifrene er et ettal, idet f.eks. $z = 0,a_1a_2...1\ 2\ 2\ 2..._3$ er lig tallet $z_1 = 0,a_1a_2...2\ 0\ 0\ 0..._3$. Hvis derimod to på hinanden følgende cifre er 1-taller kan dette ikke lade sig gøre. Hermed har vi vist, at der ikke er nogle ikke-tomme åbne mængder i $[0,1]$ som er helt indeholdte i afslutningen af C.□

At C er intetsteds tæt i $[0,1]$ kan også siges på en mere kringlet måde, nemlig at C er en tællelig forening af intetsteds tætte delmængder af $[0,1]$. Det benævner man også: C er **første Baire kategori** i [0,1].

C er overtællelig

Dette følger af, at C er ækvipotent med mængden af uendelige følger $\{x_i\}$, hvor $x_i \in \{0,1\}$. Vi kan konstruere en bijektion mellem de to mængder ved hjælp af trisimalbrøkfremstillingen af elementerne i C.

C er anden Baire kategori i sig selv

At C er anden kategori i sig selv betyder, at den ikke er første kategori i sig selv. C kan altså ikke skrives som en tællelig forening af intetsteds i C tætte delmængder. Denne egenskab har vi ikke været i stand til at bevise, men ethvert fuldstændigt metrisk rum har denne egenskab.

C er totalt usammenhængende

At C er totalt usammenhængende betyder, at enhver ikke-triviel delmængde af C er usammenhængende. Dette er ensbetydende med, at C's sammenhængskomponenter (de maksimale sammenhængende delmængder) alle er af typen $\{x\}$. Dette kan indses ved følgende: For enhver delmængde m af C vil der for to vilkårlige punkter $x, y \in m$ hvor $x < y$ eksistere et punkt $z \in [0,1] \setminus C$ så $x < z < y$. Vi kan så vælge en åben mængde omkring x givet ved $[0, z[\cap m$, og en åben mængde omkring y givet ved $]z, 1] \cap m$, som er disjunkte. Altså er m usammenhængende, og da alle ikke-trivielle delmængder indeholder mindst to elementer, vil alle ikke-trivielle delmængder være usammenhængende.

C er totalt separeret

Dette betyder at for to vilkårlige elementer x og y i C findes en ikke-triviel opspaltning af C i disjunkte åbne mængder U og V, så x er i U og y er i V. At C er totalt separeret følger umiddelbart af ovenstående.

C er ikke ekstremt usammenhængende

Et Hausdorf rum S kaldes ekstremt usammenhængende, hvis to vilkårlige disjunkte åbne delmængder har disjunkte afslutninger. At C ikke er ekstremt usammenhængende ses ved at vælge $U_1 = [0, \frac{1}{4}[\cap C$ og $U_2 =]\frac{1}{4}, 1] \cap C$. U_1 og U_2 er disjunkte åbne mængder, hvor begge mængders afslutninger indeholder $\frac{1}{4} = 0,02020202..._3$ [Ste]

Dette er ikke de eneste patologiske egenskaber, som Cantors mængde besidder. Når man er færdig med at indplacere C i alle de kategorier man kan finde på inden for topologien, hvilket givetvis er flere end vi har med her, kan man begynde at definere forskellige syge afbildninger ved hjælp af C. Vi kan foreksempel nævne *djævelens trappe* [Mej], som er en bijektiv kontinuert afbildning fra $[0,1]$ over på $[0,1]$, som har den pudsige egenskab, at den er differentiabel overalt bortset fra i en nulmængde C, med differentialkoefficient 0, mens den antager værdien 0 i punktet 0, og værdien 1 i punktet 1.

3.5.3 Patologiske egenskaber

C har en række egenskaber, som $[0,1]$ også besidder, nemlig at den er kompakt, et fuldstændigt metrisk rum, overtællelig, opfylder alle adskillelses aksiomer, opfylder andet tællighedsaksiom, er tæt i sig selv, er anden Baire-kategori i sig selv, ikke er ekstremt usammenhængende, samtidig med at C er en delmængde af $[0,1]$. Hvis man blot siger, at der eksisterer en mængde som har disse egenskaber, er der ikke noget mærkeligt ved det. Hvis man dernæst fortæller, at C, som den er defineret i formel 3.21, opfylder disse egenskaber, så virker det paradoksalt.

Man kunne spørge hvilke ekstra egenskaber, vi skal udstyre C med for at C er identisk med $[0,1]$. Vi kan ihverttilfælde slutte, at hvis C var tæt i $[0,1]$ ville fuldstændigheden sikre dette. Man kan således sige at Cantor-mængden viser os en mulighed i begrebet "et fuldstændigt metrisk rum", som ligger ud over de forestillinger som vi umiddelbart gør os om dette begreb, og som nok i høj grad stammer fra $\mathbb{R}^n$.

Hvis man så omvendt ser på de punkter hvor C adskiller sig fra $[0,1]$, har vi at C er intetsteds tæt i $[0,1]$, totalt usammenhængende og totalt separeret. Udover det er der nogle egenskaber, vi ikke har nævnt i teksten.

Når man hører ordene intetsteds tæt i $[0,1]$, kommer man let til at gøre sig nogle forestillinger i retning af mængder som ligger diskret i mængden $[0,1]$, hvilket ikke er tilfældet med C. Når man holder sig definitionen af C for øje, og samtidig tænker på, at en mængde som er intetsteds tæt i $[0,1]$ godt kan indeholde fortætningspunkter (f.eks mængden $\{0\} \cap \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, er det måske ikke så underligt, at C kan være intetsteds tæt i $[0,1]$. Men C er intetstedstæt i $[0,1]$ samtidig med, at det er en overtællelig mængde. Dette er underligt, hvis man sammenligner med f.eks. $\mathbb{Q}$, som er tæt i $\mathbb{R}$ men tællelig.

At C er totalt usammenhængende virker kontraintuitivt, når nu C er tæt i sig selv og afsluttet, hvis man for eksempel sammenligner med de rationale tal som delmængde af de reelle tal betragtet. De rationale er også tætte i sig selv, men deres afslutning er sammenhængende.

Sammenfattende kan vi sige, at C er et eksempel med flere paradokser, som kan illustreres ved at udvælge passende egenskaber, og holde dem op imod hinanden. På det punkt adskiller C sig kun fra de andre patologier, ved at udvise relativt mange kontraintuitive aspekter. Der hvor vi oplever at C's egenskaber virker kontraintuitive på os, er de steder hvor vores forventninger stammende fra mere pæne punktmængder bliver modsagt.

Det patologiske ved C ligger i at den har egenskaber, som man umiddelbart synes burde udelukke hinanden, men også for en del i antallet af egenskaber.

Konstruktionen af C er ikke meget kompliceret, men ret finurlig. Selve det matematiske objekt C, er et underligt kompliceret objekt.

3.5.4 Historie

Vi har ikke undersøgt noget om eksemplets historie, så det at der ikke står noget om historien omkring eksemplet, er ikke udtryk for, at der ikke eksisterer nogen kilder. Tværtimod formoder vi, at da eksemplet ses i mange forskellige sammenhænge, har det en omfangsrig historie. Cantor-mængden bliver brugt som skoleeksempel inden for mål-teori, hvor den optræder under slagordet "en overtællelig nulmængde". Desuden er den et elsket eksempel indenfor fraktalgeometri, idet C har ikke heltallig dimension. Som før nævnt er vi tvivlende overfor hvordan George Cantor oprindeligt definerede C. Vi ved dog ifølge [Johl], at han oprindeligt fandt på C i 1883, efter at han havde defineret begrebet perfekt mængde, som et eksempel på en delmængde af enhedsintervallet, der er perfekt og alligevel intetsteds tæt i enhedsintervallet.

3.6 Hausdorffs paradoks

For at formulere Hausdorffs paradoks behøver man nogle definitioner af de begreber, der optræder i paradokset.

En isometri: En isometri er en afbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, der bevarer de euklidiske afstande, dvs hvor der gælder:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : \|T(x) - T(y)\|_2 = \|x - y\|_2$$

Isometrierne kan vises at være netop alle translationer, drejninger og spejlinger samt sammensætninger af disse.

Kongruens: To mængder A og B i $\mathbb{R}^3$ siges at være kongruente, hvis der findes en isometri T, således at $A = T(B)$. Når dette gælder skrives $A \cong B$.

n-ækvivalens To mængder A og B i $\mathbb{R}^3$ siges at være n-ækvivalente, når A og B henholdsvis kan opdeles i n disjunkte mængder $A_1 \dots A_n$ og $B_1 \dots B_n$, der opfylder

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \text{ og } B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$
$$\forall j \in \{1 \dots n\} : A_j \cong B_j$$

Hvis A og B er n-ækvivalente skriver vi

$$A \underset{n}{\cong} B$$

Hausdorffs paradoks er en opdeling af enhedskuglefladen S i $\mathbb{R}^3$ i disjunkte delmængder kaldet A, B, C og D, hvor D er tællelig, med den specielle egenskab at

$$S = A \cup B \cup C \cup D$$
$$A \cong B \cong C \cong B \cup C \tag{3.24}$$

Ved brug af dette resultat, der i sig selv virker overraskende kan man gøre det endnu værre. I Banach-Tarskis paradoks viser Banach og Tarski, at man kan benytte ovenstående til at dele enhedskuglen i 10 disjunkte mængder, hvorom det gælder at de 4 af dem kan samles til en enhedskugle, og de resterende 6 til en anden enhedskugle.

$$\begin{aligned} & S \cong S_1 \cong S_2 \\ \wedge \quad & S \underset{10}{\cong} S_1 \cup S_2 \\ \wedge \quad & S_1 \cap S_2 = \emptyset \end{aligned}$$

3.6.1 Strukturen i konstruktionen

Gennemgangen følger i store træk Mejlbros fremstilling i [Mej].

- Der defineres to drejninger ϕ og ψ i rummet.

- Mængden G defineres som mængden af alle flytninger i rummet, der fås ved at anvende ϕ og ψ et endelig antal gange. G er en gruppe med kompositionen sammensætning.
- Der konstrueres en klassedeling af G, der opdeler den i tælleligt mange $n = 1, 2, \ldots$ klasser G_n, hvor G_i indeholder de elementer der er sammensat af netop i drejninger når disse opstilles på en uforkortelig form. Hermed bliver hver G_i endelig.
- Med afsæt i denne opdeling konstrueres en ny klassedeling, på tværs af den foregående opdeling, i tre mængder $G^{(a)}$, $G^{(b)}$ og $G^{(c)}$, således at:

$$\phi G^{(a)} = G^{(b)} \cup G^{(c)} \;\wedge\; \psi G^{(a)} = G^{(b)} \;\wedge\; \psi^2 G^{(a)} = G^{(c)}$$

- Der dannes nu en ny mængde D, bestående af alle poler til drejningerne i G. Enhver af transformationerne i G er ækvivalent med en enkelt drejning, hvis akse skærer origo, da den er sammensat af lutter drejninger med denne egenskab. Denne akse vil derfor have to skæringspunkter med S kaldet drejningens poler. Da G er numerabel vil D ligeledes være det.
- Der foretages en klassedeling af $S \setminus D$ ved at benytte følgende ækvivalensrelation:

$$p \sim p' \Leftrightarrow G(p) = G(p')$$

- Med udvalgsaksiomet i hånden kan man nu gøre følgende: Der defineres en mængde M indeholdende netop ét element fra hver klasse i $S \setminus D$. Med M kan vi definere A, B og C:

$$A = \bigcup_{\sigma \in G^{(a)}} \sigma(M),\; B = \bigcup_{\sigma \in G^{(b)}} \sigma(M),\; C = \bigcup_{\sigma \in G^{(c)}} \sigma(M) \tag{3.25}$$

  der viser sig at opfylde kravet 3.24

Hermed er Hausdorffs paradoks bevist.

Konsekvenserne af Hausdorffs paradoks anskueliggøres ved at vise følgende resultat, der i virkeligheden er et specialtilfælde af Banach-Tarskis paradoks.

- Man kan opdele enhedskuglefladen S i 7 disjunkte mængder, hvor de første 4 ved flytninger i rummet kan sammensættes til en hel enhedskugleflade S_1 og de andre 3 til en enhedskugleflade S_2 pånær en nulmængde.

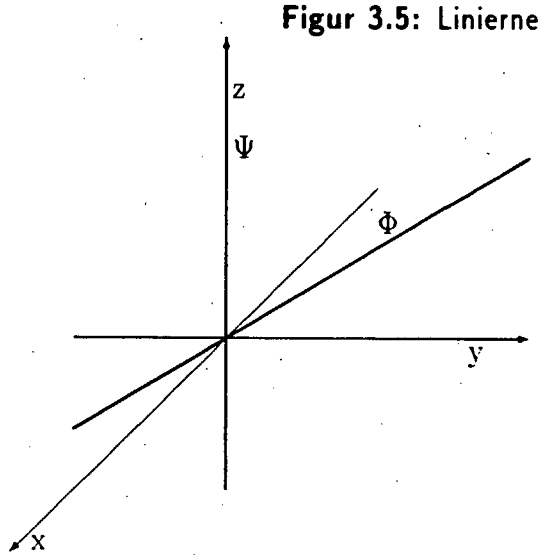
- Endelig vises det at $S \setminus D \underset{2}{\cong} S$, og at man derfor ved at dele de 3 mængder i 2 hver kan gøre den sidste kugle komplet. Man har altså at $S \underset{10}{\cong} S_1 \cup S_2$

3.6.2 Konstruktionen

Definition af drejningerne ϕ og ψ

I et tredimensionalt koordinatsystem med akserne x, y og z er givet linierne Φ og Ψ. Ψ er z-aksen og Φ er en linie i yz-planen gennem 0, der danner en vinkel θ med Ψ, hvor $\theta \notin \mathbb{Q}\pi$, f.eks. $\theta = 1$. Se figur 3.5 Kravet til θ sikrer entydighed i den måde, vi senere vil opskrive

Figur 3.5: Linierne Φ og Ψ



elementerne i G på.

De to afbildninger ϕ og ψ er drejninger om Φ og Ψ respektivt med positiv omdrejningsretning i forhold til koordinatsystemet og med følgende definition:

$$\begin{aligned} \psi &= \text{drejning om } \Psi \text{ med vinkel } \frac{2\pi}{3} \\ \phi &= \text{drejning om } \Phi \text{ med vinkel } \pi \end{aligned}$$

Det bemærkes at hvis I betegner den identiske afbildning har vi at:

$$\phi^2 = \psi^3 = I \tag{3.26}$$

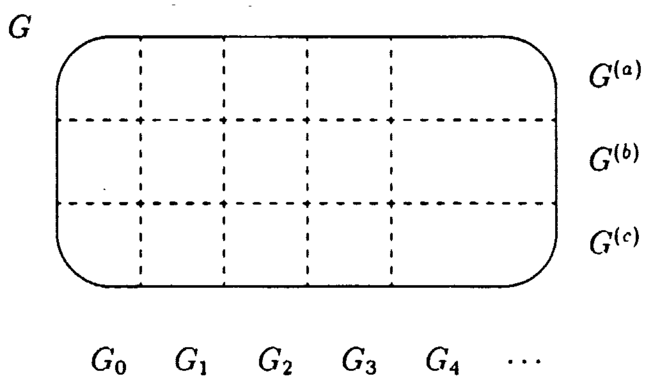
Definition af G

G kan nu defineres som mængden af alle transformationer i $\mathbb{R}^3$, der fås ved at anvende ϕ og ψ et endeligt antal gange. G med sammensætning som komposition er da en gruppe, hvilket kan udledes af 3.26. Desuden kan ethvert element i G sammensættes af de fundamentale faktorer I, ϕ, ψ og ψ^2, således at ϕ aldrig efterfølges af ϕ, samt at ψ og ψ^2 aldrig efterfølges af ψ eller ψ^2.

Det bemærkes ved for eksempel at kigge på et punkt $p \in \Phi \setminus \{0\}$, at $\psi(\phi(p)) \neq \phi(\psi(p))$, hvilket viser at der ikke generelt gælder at $\psi\phi = \phi\psi$ og at G derfor ikke er abelsk.

Figur 3.6 illustrerer hvorledes de følgende opdelinger af G ser ud.

Figur 3.6: Opdelingen af G



Klassedeling i G_n

G opdeles i et numerabelt antal klasser på følgende måde:

$$\begin{aligned} G_0 &= \{I\} \\ G_1 &= \{\phi, \psi, \psi^2\} \\ G_2 &= \{\psi\phi, \psi^2\phi, \phi\psi, \phi\psi^2\} \\ G_3 &= \{\phi\psi\phi, \phi\psi^2\phi, \psi\phi\psi, \psi^2\phi\psi, \psi\phi\psi^2, \psi^2\phi\psi^2\} \end{aligned}$$

hvor hver G_{n+1} dannes ved at gange alle elementer i G_n, der ikke begynder med ψ eller ψ^2 med henholdsvis ψ eller ψ^2 fra venstre og alle elementer i G_n, der ikke begynder med ϕ med ϕ. Det ses at G_n indeholder netop de elementer i G der er sammensat af n af drejningerne ϕ, ψ og ψ^2.

At godtgøre at dette virkelig er en klassedeling, er principielt en triviel opgave. Det hviler på at opskrivning i fundamentale faktorer er entydig, hvilket er sikret af valget af θ. Når dette er vist skal det kontrolleres, at $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} G_i$ og at $\forall i, j \in \mathbb{N}_0 : G_i \cap G_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j$, altså at ethvert element i G er med i præcis én G_n. Beviset bliver imidlertid ret langt, og vi henviser derfor til Leif Mejlbros udmærkede fremstilling i [Mej].

Opdeling i $G^{(a)}$, $G^{(b)}$ og $G^{(c)}$

Med afsæt i den foregående opdeling kan vi opdele G således at:

$$G = G^{(a)} \cup G^{(b)} \cup G^{(c)}$$

$$\phi G^{(a)} = G^{(b)} \cup G^{(c)}, \ \psi G^{(a)} = G^{(b)}, \ \psi^2 G^{(a)} = G^{(c)} \tag{3.27}$$

hvor vi her og i det følgende benytter notationen $\phi G^{(a)}$ for $\{\phi\sigma | \sigma \in G^{(a)}\}$ og tilsvarende for de andre.

Definitionen af $G^{(a)}$, $G^{(b)}$ og $G^{(c)}$ gennemføres rekursivt ved at dele de enkelte G_n klasser, hvor $G^{(a)}$ er $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} G_i^{(a)}$, og analogt for $G^{(b)}$ og $G^{(c)}$:

$$G_0^{(a)} = \{I\}, \ G_0^{(b)} = G_0^{(c)} = \emptyset$$

Rekursionen har følgende skema: Antag at $G_n^{(a)}$, $G_n^{(b)}$ og $G_n^{(c)}$ er defineret for et eller andet $n \in \mathbb{N}_0$. Den rekursive definition følger da ved at opdele elementerne i G_{n+1} efter følgende skema, hvor "σ har formen αp" betyder at normalformen for σ ser ud som αp, hvor α en enten ϕ, ψ eller ψ^2. For p skal der gælde, at den ikke begynder med noget, der kan forkortes væk sammen med α. Vi definerer da $G_{n+1}^{(a)}$, $G_{n+1}^{(b)}$ og $G_{n+1}^{(c)}$:

1a)	Hvis σ har formen $\phi p \wedge p \in G_n^{(a)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(b)}$
1b)	Hvis σ har formen $\phi p \wedge p \in G_n^{(b)} \cup G_n^{(c)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(a)}$
2a)	Hvis σ har formen $\psi p \wedge p \in G_n^{(a)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(b)}$
2b)	Hvis σ har formen $\psi p \wedge p \in G_n^{(b)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(c)}$
2c)	Hvis σ har formen $\psi p \wedge p \in G_n^{(c)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(a)}$
3a)	Hvis σ har formen $\psi^2 p \wedge p \in G_n^{(a)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(c)}$
3b)	Hvis σ har formen $\psi^2 p \wedge p \in G_n^{(b)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(a)}$
3c)	Hvis σ har formen $\psi^2 p \wedge p \in G_n^{(c)}$	puttes σ i $G_{n+1}^{(b)}$

Det ses af 1a) + 1b) at alle uforkortelige elementer der begynder med ϕ havner i enten $G^{(a)}$ eller $G^{(b)}$. Der er derfor ingen elementer i $G^{(c)}$, der begynder med ϕ, og der er derfor ikke behov for 2c) og 3c) i definitionen. De letter imidlertid arbejdet med at vise de ønskede egenskaber ved opdelingen, og vi har derfor i lighed med Mejlbro bibeholdt dem i definitionen.

Rekursionen kan også udtrykkes mere direkte, hvor $[G]_\phi$ betyder G fraregnet alle elementer, der begynder med ϕ og $[G]_\psi$ betyder G fraregnet alle elementer, der begynder med enten ψ eller ψ^2:

$$\begin{aligned}
G_{n+1}^{(a)} &= \phi([G_n^{(b)} \cup G_n^{(c)}]_\phi) \cup \psi([G_n^{(c)}]_\psi) \cup \psi^2([G_n^{(b)}]_\psi) \\
G_{n+1}^{(b)} &= \phi([G_n^{(a)}]_\phi) \cup \psi([G_n^{(a)}]_\psi) \cup \psi^2([G_n^{(c)}]_\psi) \\
G_{n+1}^{(c)} &= \psi([G_n^{(b)}]_\psi) \cup \psi^2([G_n^{(a)}]_\psi)
\end{aligned}$$

Det ses ved simpel inspektion at hvis $G_n^{(a)}$, $G_n^{(b)}$ og $G_n^{(c)}$ er disjunkte vil $G_{n+1}^{(a)}$, $G_{n+1}^{(b)}$ og $G_{n+1}^{(c)}$ også være det, og da $G_0^{(a)}$, $G_0^{(b)}$ og $G_0^{(c)}$ er disjunkte ses det let ved induktion at det gælder for dem alle, og dermed for $G^{(a)}$, $G^{(b)}$ og $G^{(c)}$.

Denne opdeling er grundstenen i konstruktionen, idet det kræver en del behændighed at få opdelt G så den opfylder 3.27.

De første klasser fra opdelingen bliver:

$$\begin{array}{lll}
G_0^{(a)} = \{I\}, & G_0^{(b)} = \emptyset, & G_0^{(c)} = \emptyset \\
G_1^{(a)} = \emptyset, & G_1^{(b)} = \{\phi, \psi\}, & G_1^{(c)} = \{\psi^2\} \\
G_2^{(a)} = \{\phi\psi, \phi\psi^2, \psi^2\phi\}, & G_2^{(b)} = \emptyset, & G_2^{(c)} = \{\psi\phi\} \\
G_3^{(a)} = \{\phi\psi\phi\}, & G_3^{(b)} = \{\phi\psi^2\phi, \psi\phi\psi, \psi\phi\psi^2\}, & G_3^{(c)} = \{\psi^2\phi\psi, \psi^2\phi\psi^2\}
\end{array}$$

Tilbage er kun at vise at opdelingen af G i de tre disjunkte delmængder $G^{(a)}$, $G^{(b)}$ og $G^{(c)}$ rent faktisk opfylder 3.27.

For hver af ligningerne i 3.27 viser vi lighedstegnet ved at vise $\subseteq$ begge veje. Fra første ligning får vi f.eks. følgende: Vis at ethvert element i $\phi G^{(a)}$ ligger i $G^{(b)} \cup G^{(c)}$, eller med andre ord at et vilkårligt element fra $G^{(a)}$ havner i $G^{(b)} \cup G^{(c)}$ når det ganges med ϕ, og vis at alle elementer i $G^{(b)} \cup G^{(c)}$ ligger i $\phi G^{(a)}$. Med matematisk notation ser det sådan ud:

$$\begin{aligned} & \forall \sigma \in G^{(a)} : \phi\sigma \in G^{(b)} \cup G^{(c)} \\ \wedge \quad & \forall \sigma \in G^{(b)} \cup G^{(c)} : \exists \sigma' \in G^{(a)} : \phi\sigma' = \sigma \end{aligned}$$

Fra de to andre ligninger kommer fire punkter efter samme mønster.

Som eksempel på den anvendte argumentation viser vi her de to fra den første ligning:

$\phi G^{(a)} \subseteq G^{(b)} \cup G^{(c)}$: Lad $p \in G^{(a)}$, der findes da et $n \in \mathbb{N}_0$ således at $p \in G_n^{(a)}$. Hvis $n = 0$ er eneste element I, og 1a) giver netop at $\phi I = \phi$ ligger i $G^{(b)}$ i overensstemmelse med 3.27. Da $G_1^{(a)} = \emptyset$ må der derfor gælde at $p \in G_n^{(a)} \wedge n \neq 0 \Rightarrow n > 1$, hvorfor der må findes et $p_1 \in G_{n-1}$ således at en af tre muligheder er opfyldt:

a1) $p = \phi p_1$, og ψ eller ψ^2 er første faktor i p_1
a2) $p = \psi p_1$, og ϕ er første faktor i p_1
a3) $p = \psi^2 p_1$, og ϕ er første faktor i p_1

Argumentationen går nu som følger:

a1) Af 1b) følger at $p = \phi p_1 \in G_n^{(a)}$ medfører at $p_1 \in G_{n-1}^{(b)} \cup G_{n-1}^{(c)}$, hvilket betyder at $\phi p = \phi^2 p_1 = p_1 \in G_{n-1}^{(b)} \cup G_{n-1}^{(c)}$.

a2) Af 1a) følger at $p = \psi p_1 \in G_n^{(a)}$ medfører at $\phi p \in G_{n+1}^{(b)}$.

a3) Af 1a) følger at $p = \psi^2 p_1 \in G_n^{(a)}$ medfører at $\phi p \in G_{n+1}^{(b)}$.

Hvilket etablerer at $\phi G^{(a)} \subseteq G^{(b)} \cup G^{(c)}$.

$\phi G^{(a)} \supseteq G^{(b)} \cup G^{(c)}$: Beviset den modsatte vej benytter omtrent samme teknik. Opgaven er at godtgøre at der til ethvert element p i $G^{(b)} \cup G^{(c)}$ findes et element $p' \in G^{(a)}$, der opfylder

$$\phi p' = p. \tag{3.28}$$

Hvis $p \in G^{(b)} \cup G^{(c)}$, findes der et $n \in \mathbb{N}$, således at $p \in G_n^{(b)} \cup G_n^{(c)}$, da $G^{(b)}$ og $G^{(c)}$ er disjunkte. Dette betyder at der findes et $p_1 \in G_{n-1}$, som opfylder en af følgende:

a4) $p = \phi p_1$, og ψ eller ψ^2 er første faktor i p_1
a5) $p = \psi p_1$, og ϕ er første faktor i p_1
a6) $p = \psi^2 p_1$, og ϕ er første faktor i p_1

a4) For at få at $p \in G^{(b)}$ og a4) må det være 1a) der er anvendt til at bestemme p tilhørsforhold. Deraf følger at $p_1 \in G^{(a)}_{n-1}$ og $p' = p_1$ opfylder da 3.28.

a5) Af 1b) og a5) følger at $p' = \phi p \in G^{(a)}_{n+1}$ og p' opfylder 3.28 idet $\phi p' = \phi^2 p = p$.

a6) Af 1b) og a6) følger at $p' = \phi p \in G^{(a)}_{n+1}$ og p' opfylder 3.28 idet $\phi p' = \phi^2 p = p$.

Dette godtgør inklusionen den anden vej, og vi har derfor første del af 3.27. For et fuldstændigt bevis af alle mulighederne henvises til Mejlbro [Mej].

Dannelse af mængden D

Til at danne mængden D benytter vi følgende sætning fra geometrien:

Sætning 3.1

Hvis et legeme er underlagt en flytning i $\mathbb{R}^3$, således at et af legemets punkter er et fikspunkt, da er denne flytning ækvivalent med en drejning om en akse, der går igennem fikspunktet.

Af dette følger det, idet alle transformationer i G har origo som fikspunkt, at der til enhver transformation i $G \setminus \{I\}$ svarer en akse og en ækvivalent drejning om denne akse, som skærer enhedskuglefladen i to punkter, der kaldes poler. Da G er numerabel, er mængden D af alle poler fra transformationer i G også numerabel.

For enhver drejning om en akse gennem centrum, hvor drejningen ikke er et helt multiplum af 2π, er de to poler de eneste fikspunkter på enhedskuglen. Vi slutter derfor, at intet punkt på $S \setminus D$ er et fikspunkt for en transformation i $G \setminus \{I\}$. Da transformationerne i G er entydige gælder der, at

$$\forall p \in S \setminus D \; \forall \sigma, \sigma' \in G : \sigma \neq \sigma' \Rightarrow \sigma(p) \neq \sigma'(p) \tag{3.29}$$

Thi $\sigma(p) = \sigma'(p) \Rightarrow \sigma^{-1}\sigma'(p) = p \Rightarrow \sigma^{-1}\sigma' = I$, idet p ikke er en pol, og heraf sluttes $\sigma = \sigma'$.

Klassedeling af $S \setminus D$

Vi definerer nu $G(p)$, hvor $p \in S \setminus D$, som mængden af punkter der fås fra punktet p ved at benytte transformationer fra G:

$$G(p) = \{\sigma(p) | \sigma \in G\}$$

specielt vil $p \in G(p), (\sigma = I)$

Vi vil nu gerne godtgøre at relationen $\sim$ defineret ved

$$p \sim p' \Leftrightarrow G(p) = G(p'), \ p, p' \in S \setminus D$$

er en ækvivalensrelation. Dette vises ved at indse at $\{G(p)|p \in S \setminus D\}$ er en klassedeling af $S \setminus D$.

For $p, p' \in S \setminus D$ har vi

$$G(p) = G(p') \ \vee \ G(p) \cap G(p') = \emptyset$$

Thi hvis $G(p) \cap G(p') \neq \emptyset$ findes der to transformationer $\sigma_0, \sigma_0' \in G$, der opfylder $\sigma_0(p) = \sigma_0'(p')$. For ethver $\sigma \in G$ fås da

$$\sigma(p) = \sigma\sigma_0^{-1}\sigma_0(p) = \sigma\sigma_0^{-1}\sigma_0'(p')$$

Sættes $\sigma' = \sigma\sigma_0^{-1}\sigma_0'$ har vi $\sigma' \in G$ og $\sigma(p) = \sigma'(p')$, hvilket viser at for ethvert $\sigma \in G$ gælder at $\sigma(p) \in G(p')$, eller med andre ord at $G(p) \subseteq G(p')$. Byttes p og p' får vi $G(p') \subseteq G(p)$, altså har vi $G(p) = G(p')$, hvilket viser det ønskede.

Dannelse af mængden M

Vi danner nu — ved brug af udvalgsaksiomet — M som en mængde, der indeholder præcis ét element fra hver klasse i $(\{G(p)|p \in S \setminus D\}, \sim)$. Så vil

$$S \setminus D = \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(M)$$

idet ethvert element i $S \setminus D$ må være i samme klasse som et element i M, og derfor kunne frembringes som σp for et $\sigma \in G$ og $p \in M$. Det ses let at $\sigma \neq \sigma' \Rightarrow \sigma(M) \cap \sigma'(M) = \emptyset$, thi antag at der for to elementer $\sigma, \sigma' \in G$ gælder at $\sigma(M) \cap \sigma'(M) \neq \emptyset$. Da findes $p, p' \in M$ således at $\sigma(p) = \sigma'(p')$, og derfor så $G(p) = G(p')$, hvor p og p' tilhører samme klasse. Af definitionen på M fås derfor, at $p = p'$, så $\sigma(p) = \sigma'(p)$. Da $p \in S \setminus D$ ikke er en pol følger $\sigma = \sigma'$ af 3.29.

Vi kan nu definere:

$$A = \bigcup_{\sigma \in G^{(a)}} \sigma(M),\ B = \bigcup_{\sigma \in G^{(b)}} \sigma(M),\ C = \bigcup_{\sigma \in G^{(c)}} \sigma(M)$$

Da $G = G^{(a)} \cup G^{(b)} \cup G^{(c)}$ er en dekomposition af G i tre disjunkte mængder, fås herved en dekomposition af $S \setminus D$ i tre disjunkte mængder: $S \setminus D = A \cup B \cup C$.

Af dette følger dernæst, at

$$\phi(A) = B \cup C,\ \psi(A) = B,\ \psi^2(A) = C, \tag{3.30}$$

hvilket betyder at

$$A \cong B \cong C \cong B \cup C, \tag{3.31}$$

og hermed er Hausdorffs paradoks bevist.

Banach-Tarskis paradoks: Opdeling af S i 7 mængder

Når selve Hausdorffs paradoks er vist, er det let at lave følgende opdeling af S:

Lad $S = A \cup B \cup C \cup D$ være en opdeling som ovenfor. Af paradokset følger da, at der findes opdelinger

$$A = A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset,\ A \cong A_1 \cong A_2$$

$$B = B_1 \cup B_2,\ B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ B \cong B_1 \cong B_2$$

$$C = C_1 \cup C_2,\ C_1 \cap C_2 = \emptyset,\ C \cong C_1 \cong C_2$$

idet $\phi(A) = B \cup C$ ifølge 3.30, og da $\phi^2 = I$ er $A = \phi(B) \cup \phi(C)$. Vi kan derfor sætte $A_1 = \phi(B)$ og $A_2 = \phi(C)$. Da $A \cong B \cong C$ kan samme opdeling af B og C laves.

Vi har derfor den disjunkte opdeling

$$S = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2 \cup D$$

og sætter vi

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D \\ S_2 &= A_2 \cup B_2 \cup C_2 \end{aligned}$$

følger det næsten umiddelbart at

$$S_1 \underset{4}{\cong} S \text{ og } S_2 \underset{3}{\cong} S \setminus D$$

thi $A \cong A_1$, $B \cong B_1$, $C \cong C_1$ og $D = D$, hvilket præcis er definitionen på 4-ækvivalens. Analogt vises $S_2 \underset{3}{\cong} S \setminus D$.

Altså kan S opdeles i 7 disjunkte mængder, der ved flytninger i rummet kan sammensættes til en hel enhedskugleflade S_1 og en enhedskugleflade på nær en tællelig mængde.

Dannelse af S_2

Det sidste raffinement på paradokset er, at man kan vise, at for enhver numerabel delmængde D af enhedskuglefladen S gælder der at $S \setminus D \underset{2}{\cong} S$. Dette bevis har vi ikke medtaget, men det er at finde i [Mej].

Med dette kan vi opdele hver af de 3 mængder A_2, B_2 og C_2 i to, og derved frembringe en S_2, således at det gælder at

$$S \cong S_1 \cong S_2 \ \wedge \ S_1 \cap S_2 = \emptyset \ \wedge \ S \underset{10}{\cong} S_1 \cup S_2$$

3.6.3 Patologicitet

Selv om Hausdorff ikke selv mener, at hans konstruktion er et paradoks, mener vi, at den kvalificerer til denne betegnelse i den betydning, vi benytter begrebet.

Det er den geometriske grundopfattelse af, at en isometri er noget, der flytter et stift legeme i rummet, der bliver stødt. Man forventer ikke, at man ved at flytte et legeme på en måde kan få et andet legeme, mens en anden flytning giver to sådanne legemer.

Ved en nærmere analyse kan det overføres til det, at mængderne ikke er målelige, og at dette i virkeligheden strider mod den klassiske geometriske opfattelse af, at et stift legeme naturligt har et areal. Dette leder netop hen imod, at Hausdorff brugte sit teorem, som han kaldte det, som argument imod eksistensen af et mål.

Banach-Tarskis udvidelse stiller dette resultat på spidsen ved at vise, at når man har en sådan opskæring af enhedskuglefladen, kan man sammensætte den til to hele kugleflader. Dette er paradoksalt på et meget grundlæggende geometrisk niveau, specielt fordi isometrier normalt harmonerer fint med en fysisk baseret opfattelse.

Paradokset er et fint eksempel på, hvad vi mener med en kompliceret konstruktion. Konstruktionen indeholder mange skridt, der ikke hver for sig er matematisk avancerede, men som dog tilsammen udgør en filtret og kompliceret argumentation.

Hausdorffs paradoks har altså både en meget overraskende pointe og en yderst kompliceret konstruktion, og tilfredsstiller derfor til fulde vores patologidefinition. Selve patologien ligger i Hausdorffs paradoks, men det bliver nemmere at indse det kontraintuitive, når man udvider det med Banach-Tarskis resultat.

3.6.4 Historie

Hausdorffs paradoks har nogle af sine rødder i mængdelæren, der i øvrigt har haft mange paradokser, så for at sætte scenen vil der først blive givet en beskrivelse af den generelle udvikling af mængdelæren. Dernæst vil det blive beskrevet, hvordan Hausdorffs paradoks har haft betydning for en videre udvikling af dels mængdelære, dels målteori.

Generel udvikling af mængdelæren

De første skridt: Den første til at nærme sig en teori for mængder var Bernard Bolzano (1781-1848), i sin bog "Paradoxien des Undendliches", som blev publiceret tre år efter hans død. Bolzano forsvarede eksistensen af egentligt uendelige mængder, dvs. ikke nogen der bare nærmede sig uendelighed, men reelt havde uendeligt mange elementer. Han anvendte begrebet ækvivalens mellem to mængder, med hvilket han mente det, der senere blev kaldt en-til-en afbildinger mellem elementerne i to mængder, eller ækvipotens mellem mængder. Han bemærkede, at for en uendelig mængde kan en ægte delmængde være ækvivalent til hele mængden, og insisterede på, at dette måtte accepteres [Kli1 s 994]. Mange af de egenskaber ved mængder, som Bolzano stødte på under sit arbejde virkede paradoksale på ham, som det i øvrigt også fremgår af titlen, for eksempel at mængden af alle naturlige tal reelt er uendelig:

> *"Man wird in ähnlicher Weise auch zugeben, daß die Menge aller Zahlen (der sogenannten natürlichen oder ganzen) unendlich sei. Aber auch dieser Satz klingt paradox, und wir dürfen ihn eigentlich als die erste der auf dem Gebiete der Mathematik erscheinenden Paradoxien betrachten;"*

> *(Man må på lignende vis også indrømme, at mængden af alle tal (de såkaldt naturlige eller hele) er uendelig. Men også denne sætning lyder paradoksal, og vi burde egentlig betragte det, som det første af de paradokser, der dukker op indenfor området matematik.* [Bol s 20].

I dag kan det være svært at forstå det standpunkt, at det kan betragtes som paradoksalt, at der reelt er uendeligt mange naturlige tal, men på den tid var det absolut ikke givet.

Georg Cantor (1845-1918) regnes normalt for grundlæggeren af mængdelæren, [Kli1] og [Dav]. I 1874 publicerede Cantor den første af en række artikler omhandlende teorien for endelige og uendelige mængder. Cantors arbejde tiltrak opmærksomhed på grund af dets originalitet, men blev langtfra øjeblikkelig anerkendt af matematiksamfundet, da det modbeviste mange ting, der før var almindeligt anerkendte. Udviklingen af mængdelæren førte til opdagelsen af nogle uløselige spørgsmål, der blev kaldt paradokser eller antinomier. Et eksempel på disse er Russells paradoks, der i en version af Boyer lyder:

> *The town barber shaves all those, and only those, who do not shave themselves. Is this barber included or not in the set of all those who shave themselves?* [Boy s 663]

Faktisk indeholdt den tidlige mængdelære så mange paradokser, at Felix Hausdorff i sin bog "Grundzüge der Mengenlehre" udgivet i 1914 karakteriserer området på følgende måde:

> *"Et felt hvor intet er selvindlysende, hvis sande påstande ofte er paradoksale, og hvis plausible påstande er falske".* [Kli2 s 204]

Udvalgsaksiomet, og hvad der videre skete : Af Cantors arbejde er hans antagelse fra 1883, om at enhver mængde kan blive velordnet, kaldet velordningsprincippet, nok noget af det der har haft de videste konsekvenser. Denne antagelse blev ikke anerkendt af hans samtidige, nok til dels fordi den blev fremsat uden bevis, og Cantor stadig ikke ti år senere havde fundet noget bevis for den [Moo]. Ernst Zermelo (1871-1953) søgte også efter et bevis for velordningsprincippet, og i forbindelse med dette formulerede han i 1904 som den første udvalgsaksiomet eksplicit [Moo]. Dette aksiom var ubevidst blevet brugt i en del matematiske beviser, så nu måtte matematikersamfundet dels overveje konsekvenserne af at have anvendt det, dels principielt tage stilling til, om det overhovedet skulle accepteres. Det skulle vise sig at det var så godt som umuligt at nå til enighed om dette, faktisk blev det, næstefter Euklids parallelaksiom, det mest omdiskuterede aksiom nogensinde, bl.a. blev det diskuteret hvorvidt det medførte at mængdelæren blev inkonsistent [Kli2 s 210-211]. De store meningsforskelle illustreres udmærket med følgende to citater:

> *"Senere generationer vil regne Cantors mængdelære for en sygdom, som man er blevet helbredt for."* Poincaré 1908.

> *"Ingen skal uddrive os fra det paradis, som Cantor skabte til os."* Hilbert 1926.

Begge citater er fra [Kli]. I dag er udvalgsaksiomet accepteret af langt de fleste matematikere, og uden det ville vore dages matematik se meget anderledes ud.

Reaktioner på paradokser Som tidligere nævnt opstod der en del paradokser under udviklingen af Cantors "naive" mængdelære. Disse paradokser blev genstand for ret kraftige reaktioner. En af de væsentlige var, at det blev forsøgt at eliminere paradokserne ved at opstramme begreberne i Cantors naive mængdelære. Dette førte til aksiomatiseringen af mængdelæren, som Zermelo foretog i 1908, [Moo s 153], udfra den overbevisning at paradokserne skyldtes Cantors løse formuleringer. Zermelos stringente version af mængdelæren udelukkede ganske rigtigt paradokserne, men medtog til gengæld udvalgsaksiomet, så spørgsmålet om konsistens var ikke afklaret. Herbert Mehrtens [Meh], der ikke mener, at paradokserne er en væsentlig drivkraft, skriver, (om den "produktive videnskab"):

> *"Die Antinomien sind für diese Art Wissenschaft nur ein Randproblem..." ("Antinomierne er for denne slags videnskab kun et randproblem")*

og citerer Gregory Moore:

> *"...for Zermelo the paradoxes were an inessential obstacle to be disposed of with as little fuss as possible."*

Det er dog værd at bemærke, at skønt Zermelos og andre matematikeres hensigt muligvis udelukkende var at slippe af med paradokserne, så var konsekvensen af deres anstrengelser en videre udvikling af mængdelæren.

Hausdorffs paradoks

Skønt mange havde kritiseret udvalgsaksiomet og nogle frygtede, at det kunne føre til modsigelser, så var der ikke før 1914 noget belæg for en sådan inkonsistens. I 1914 dukkede så noget op, der *tilsyneladende* var et uafviseligt vidnesbyrd mod udvalgsaksiomet, nemlig Hausdorffs paradoks. Hausdorff selv regnede dog ikke på nogen måde sit paradoks som underminerende for udvalgsaksiomet, som han fuldt ud accepterede, faktisk regnede han slet ikke sin konstruktion for paradoksal [Moo], og omtaler det heller ikke som et paradoks i sin artikel [Hau] 1914. Derimod mente han, at hans teorem, som han kaldte det, afgjorde Lebesgues målproblem på den måde, at det modbeviste eksistensen af en løsning til dette [Moo]. Dette målproblem er fremsat af Henri Lebesgue (1875 - 1941) i hans afhandling fra 1902, omhandlende målbarhed og integrabilitet. Han formulerede problemet som: Der søges en funktion m, sådan at for enhver begrænset delmængde A, af $\mathbb{R}^n$, er $m(A)$ et ikke-negativt reelt tal, der opfylder følgende tre betingelser:

(i) $m(A)$ er positiv for en eller anden mængde A.

(ii) Kongruente mængder har samme mål.

(iii) Målet for tælleligt mange disjunkte mængder er summen af målene for disse mængder (Tællelig additivitet).

For at løse problemet introducerede Lebesgue de målelige mængder, senere kaldet de Lebesgue-målelige, som er en samling af mængder i $\mathbb{R}^n$, der opfylder ovennævnte punkter. Samtidig erkendte han, at de målelige mængder muligvis ikke udgjorde alle begrænsede delmængder af $\mathbb{R}^n$, og derfor ikke helt løste hans målproblem [Moo s 69]. I 1905 demonstrerede Giuseppe Vitali ved hjælp af udvalgsaksiomet eksistensen af delmængder af $\mathbb{R}$ der ikke er Lebesgue-målelige, hvilket viste, at Lebesgues måldefinition ikke var en løsning til målproblemet. Lebesgue anerkendte dog ikke resultatet, men valgte i stedet at forkaste udvalgsaksiomet [Moo s 100].

Hausdorff bemærkede i sin bog fra 1914, at Lebesgues definition af mål ikke tillagde enhver begrænset delmængde et mål, og derfor ikke gav en løsning på målproblemet, hvorefter han udfra udvalgsaksiomet viste, at der ikke eksisterer nogen løsning til målproblemet i $\mathbb{R}^n$ [Moo s 186]. Som før nævnt anerkendte Lebesgue på den anden side ikke eksistensen af ikke-målelige mængder i $\mathbb{R}^n$. Måske meget naturligt i betragtning af, at det afviser hans målproblem som uløseligt. Selv mente han, at der stadig var mulighed for en definition af mål, der ville løse problemet.

Hausdorffs pointe var dog, at han i sit bevis ikke benyttede nogen specifik mål-definition, f.eks. Lebesgues, men kun punkterne (i) til (iii), så resultatet holder, uanset hvilken definition af mål der anvendes.

Dernæst undersøgte Hausdorff, om der muligvis ville være en løsning til målproblemet, hvis betingelsen, (iii), om tællelig additivitet blev svækket til et krav om endelig additivitet. Han nåede frem til, at for $\mathbb{R}^3$ og højere dimensioner eksisterede der ingen løsning. Specielt demonstrerede han, ved hjælp af det der senere blev kendt som Hausdorffs paradoks, at der ikke var nogen løsning for $\mathbb{R}^3$, da det ville medføre det geometrisk paradoksale, at isometrier ikke er målbevarende. Hausdorff viste derimod ikke, om der udfra disse svækkede betingelser var en løsning til målproblemet i det en- og todimensionale euklidske rum.

Hausdorffs paradoks førte omtrent et tiår senere til et, ifølge [Moo s 284], endnu mindre plausibelt resultat, nemlig Banach-Tarskis paradoks. Stefan Banach (1892 - 1945) var oprindelig interesseret i at afgøre, om der eksisterede en løsning til Hausdorffs svækkede udgave af Lebesgues målproblem, for de to resterende dimensioner. Han fandt ved anvendelse af udvalgsaksiomet frem til, at det gjorde der! Derefter kastede han sig over hvilke konsekvenser Hausdorffs paradoks havde i $\mathbb{R}^3$. Omtrent samtidig med Alfred Tarski, men i øvrigt uafhængigt af denne, fandt han frem til, at i $\mathbb{R}^n$, for $n \geq 3$, er ethvert par n-dimensionale begrænsede mængder med ikke-tomt indre $n$ækvivalente, dvs. delingsens. Banach og Tarski udgav sammen en artikel om dette resultat, hvor de observerede, at det medførte, at ethvert par af kugleoverflader med forskellig radius, eller hvilkesomhelst to polyedre, er n-ækvivalente. Ifølge Gregory Moore bliver følgende konsekvens af dette resultat, af senere matematikere, beskrevet som Banach-Tarskis paradoks:

> *"A sphere of radius r can be decomposed into a finite number of pieces and reassembled into two spheres of radius r."*
> [Moo s 285]

Den første til at karakterisere Hausdorffs konstruktion som et paradoks, var Emile Borel (1871 - 1956), der var ret sikker på at paradokset skyldtes udvalgsaksiomet. Borel havde siden udvalgsaksiomets fremkomst været modstander af dets anerkendelse, og regnede nu sine ti års modstand for retfærdiggjorte, og mente, at det nu var verificeret, at anvendelse af udvalgsaksiomet førte til en modstrid, og derfor måtte alle indse dets ulogiske og upræcise karakter. Hausdorff var dog ikke enig: Kilden til paradokset er enten udvalgsaksiomet eller eksistensen af en løsning til Lebesgues målproblem, og Hausdorff valgte at afvise sidstnævnte [Moo p 188]. Hausdorffs paradoks løste altså ikke striden om anerkendelse af udvalgsaksiomet, men intensiverede den snarere, ved at blive brugt af begge sider som støtte for deres synspunkt. I 1929 foreslog Von Neuman på baggrund af Banach-Tarskis paradoks en langt mere generel løsning af målproblemet.

Det bør nævnes at vi ikke har sat os nærmere ind i målteori, men blot refererer de konsekvenser Hausdorffs paradoks har haft for udviklingen af denne.

Sammenfatning

Generelt kan siges, at de første paradokser indenfor mængdelære førte til såvel en opstramning som en videreudvikling af begreber indenfor mængdelæren, resulterende i aksiomatiseringen af Cantors naive mængdelære. Hausdorffs paradoks var, udover brændstof til debatten om udvalgsaksiomets anerkendelse, en væsentlig drivkraft i udviklingen indenfor målteori. Desuden har det, nok på grund af sin stærkt paradoksale karakter, i højere grad end et bevis virket som inspirationskilde for matematikere, der har været interesserede i at undersøge eksemplets konsekvenser og rækkevidde.

Kapitel 4

Diskussion

4.1 Patologicitet

Vi vil i dette afsnit først trække de egenskaber op, som vi har noteret os om de enkelte eksemplers patologicitet. Derefter vil vi søge at udtrække nogle fælles karakteristiske træk, samt diskutere hvori forskellighederne består.

4.1.1 Opsummering

Claus' funktion, se afsnit 3.1, viste sig at have to kontraintuitive aspekter. For det første berørte den begrebet punktvis kontinuitet. Det viste sig, at forestillingen om begrebet kontinuitet er så bundet til funktioner, hvis graf er en sammenhængende kurve i planen, at den ikke dækker alle konsekvenser af begrebet punktvis kontinuitet. For det andet er begrebet Riemann-integrabilitet knyttet til forestillingen om arealer under sammenhængende kurver, hvorfor det virker mærkeligt, at integralet for Claus' funktion kan tilskrives en værdi.

I eksemplet Weierstrass' funktion, se afsnit 3.2, er baggrunden for det første patologiske træk, ligeledes for snævre forestillinger knyttet til grafen for en kontinuert funktion som en stykkevis glat kurve. Et andet kontraintuitivt aspekt er, at en uniformt konvergent række af uendeligt ofte differentiable funktioner kan have en grænsefunktion, som ikke er differentiabel nogetsteds. Dette aspekt er også knyttet til et geometrisk billede, nemlig en ε-slange.

Peanos kurve i afsnit 3.3 er patologisk derved, at den laver en uventet kobling imellem linien og planen, som støder til en intuitiv opfattelse af dimensionsbegrebet. Man kan sige, at det dels er mulighederne i, at linien og planen har samme kardinalitet (som vist af Cantor), og dels rækkevidden af begrebet kontinuert kurve, som man ikke har erkendt på forhånd. Man regner simpelthen ikke med, at billedet af en kontinuert kurve kan have et areal, heller ikke selvom kurven er uendelig lang.

Ved første bekendtskab med Hamels funktion i afsnit 3.4 er det umiddelbart patologiske, at den er additiv uden at være kontinuert, hvis man i det hele taget har gjort sig forestillinger om det i forvejen. Under arbejdet med den bliver man mere bekymret over et andet patologisk træk, nemlig at der kan eksistere en funktion hvis graf er tæt i planen.

Cantors mængde i afsnit 3.5 adskiller sig fra de andre eksempler dels ved, at den er i besiddelse af en hel række patologiske træk, dels ved at den begrebsopfattelse den støder ikke er så grundlæggende geometrisk-fysisk baseret.

De mest patologiske træk ved såvel Hausdorffs som Banach-Tarskis paradoks i afsnit 3.6 er, at de virker paradoksale i forhold til en grundlæggende fysisk-geometrisk opfattelse af areal og en intuitiv opfattelse af flytninger i rummet. Det er muligvis fordi, begreberne areal og flytning er så empirisk grundfæstet, at paradokserne, selv efter at man har arbejdet med dem, stadig virker patologiske.

4.1.2 Fællestræk og forskelligheder ved eksemplerne

Man kan notere, at det for alle eksemplerne gælder, at de ikke kan udledes alene ud fra kendskab til de patologiske egenskaber. Man kan for eksempel ikke, udfra oplysninger om at $f(x)$ skal være kontinuert og intetsteds differentiabel, umiddelbart udlede en funktion, som opfylder dette. Det vil sige at for at konstruere eksemplerne, skal man i alle tilfælde få en temmelig god ide. Det er blandt andet dette forhold, som vi prøver at indkredse med vores krav om kompleksitet i afsnit 2.4.

Men kompleksiteten ligger også i, at selve konstruktionen af de objekter, som udgør patologierne, er indviklet. Vi har således bemærket, at i alle konstruktionerne, pånær Weierstrass' og til dels Claus' funktion, indgår et led, hvor man eksplicit eller ved hjælp af udvalgsaksiomet opdeler en mængde efter en mærkelig regel. For eksempel kan vi nævne konstruktionen af Peanos kurve, hvor man definerer de enkelte led i kurvefølgen ved at blive ved med at underinddele både enhedsintervallet og enhedskvadratet efter en speciel regel, eller konstruktionen af

Hamel-basen hvor man inddeler de reelle tal efter en særdeles underlig regel. Det er naturligvis ikke en egenskab som er speciel for patologiske eksempler alene, men det er en egenskab, som ikke alle matematiske eksempler har. Man skal altså finde på noget underligt, for at lave noget underligt.

Alle eksemplerne kan præsenteres ved at fremhæve to eller flere egenskaber, som intuitivt set er i modstrid med hverandre. Alle eksemplerne anfægter et geometrisk billede, på den måde at det geometriske billede viser sig at være utilstrækkeligt. Vi kan konkludere, at vi ikke har set nogle patologier, der ikke strider imod en form for geometrisk intuition. Vi mener således ikke, at Cantor-mængden har vist sig at være anderledes end de andre eksempler med hensyn til den måde, hvorpå den virker kontraintuitiv.

Af de 6 eksempler, som vi har kigget på, har vi personligt haft sværest ved at acceptere og forstå Hausdorffs paradoks. Dette paradoks adskiller sig fra de andre patologier ved at så tvivl om nogle mere basale begreber end de andre. Begreberne isometri i $\mathbb{R}^3$, kugleoverflade og areal er den type begreber, som vi i kapitel 2 benævnte empirisk baserede begreber. Disse begreber introduceres med direkte reference til en fysisk virkelighed, og vi forventer derfor, at vi ikke kan blive snydt på dette område. Når vi derimod ser på Cantor-mængden eller for eksempel Weierstrass' funktion, er de patologiske egenskaber af mere abstrakt karakter. Derfor har vi lettere ved at tage disse eksempler til efterretning. Man bliver afklaret om nogle begrebers rækkevidde, og forsyner dem med et advarselsskilt.

Mange af de aspekter, som vi har diskuteret under overskriften patologiske egenskaber både i rapporten og under projektarbejdet, har været af psykologisk art. Vi tror, at der kunne blive et spændende og svært projekt ud af at undersøge patologiske eksempler ud fra denne synsvinkel. Vi forestiller os faktisk, at patologiske eksempler kunne være et middel til at undersøge, hvad matematisk intuition er, i og med at de netop udpeger, hvor intuitionens grænser går.

4.2 Diskussion af eksemplernes historiske betydning

4.2.1 Opsummering af eksemplernes historiske betydning

I 2.1 beskrev vi tre udviklingsforløb, som vi forestillede os, at et patologisk eksempel kunne indgå i. Vi vil nu diskutere hypoteserne i forhold til de gennemgåede eksempler. Hvor meget vi kan konkludere, om eksemplernes historiske betydning afhænger selvfølgelig af, hvor detaljeret vi har været istand til at beskrive deres historie. Det er sandsynligt, at yderligere undersøgelse af især Cantor-mængdens og måske også Claus' funktions historie ville have afsløret, at også de har en velbeskrevet historie. I det følgende har vi derfor koncentreret os mest om de eksempler, som er velbeskrevne i projektet, mens vi undgår at konkludere alt for meget om den historiske betydning af de mindre velbeskrevne eksempler.

Eksemplet medfører udvikling af ny teori, modificering eller udvidelse af teorien

Alle eksemplerne i projektet mener vi har haft en betydning for udvikling af ny teori.

Der er blevet forsket videre i parameterværdierne for Weierstrass' funktion, og andre matematikere f.eks. van der Waerden er blevet inspireret af eksemplet til at lave tilsvarende konstruktioner. Weierstrass' funktion synes dog at have haft ret lille betydning for ny teoriudvikling i forhold til de andre velbeskrevne eksempler i projektet.

Cantor-mængden og en funktion med samme egenskaber som Claus' funktion har formodentligt haft betydning for udviklingen af henholdsvis topologien og integralebegrebet.

Tre af eksemplerne Peanos kurve, Hamels funktion og Hausdorffs paradoks har været direkte medvirkende til udviklingen af ny teori.

Peanos kurve fremkom midt i en diskussion om invariansen af dimensionsbegrebet og var med til at intensivere denne. Den gav endnu et argument for nødvendigheden af et bevis for umuligheden af bijektive, kontinuerte afbildninger mellem rum af forskellig dimension. Peanos kurve var direkte årsag til overvejelser omkring og nye definitioner af kurvebegrebet, idet man ikke ønskede, at en kurve skulle have et areal.

For at løse de problemer bl.a. Peanos kurve rejste var det nødvendigt for matematikerne at indføre en række topologiske grundbegreber. Herved må Peanos kurve siges at have medvirket til grundlæggelsen af topologien.

Der blev forsket videre i Hamels funktion og Hamel-baser ihvertfald frem til 1942. Interessen drejede sig specielt om, at Hamels funktion er en ikke målelig funktion, og hvilke krav der skulle stilles til en additiv funktion for, at den er kontinuert. Hamels funktion havde en vis betydning for definitionen af vektorrum, men hvordan den helt nøjagtigt har indvirket historisk, har vi ikke basis for at konkludere. Givet er det dog, at hvis der ikke havde eksisteret diskontinuerte, additive funktioner havde aksiomerne for vektorrum set anderledes ud.

Hausdorffs paradoks havde betydning for udviklingen af målteorien. Da vi ikke har overblik over hele denne udvikling, kan vi ikke udtale os præcist om, hvor stor denne betydning har været. Udfra de historiske kilder mener vi dog at kunne konkludere, at det har haft en væsentlig betydning.

Eksemplet fører til forkastelse af et begreb eller en teori

Da vi formulerede denne hypotese, forestillede vi os, at et eksempel kunne have medført forkastelse af en teori af en vis størrelse bestående af et antal definitioner og sætninger. Dette er der dog ingen af de gennemgåede eksempler, der har gjort, idet de ikke har afsløret inkonsistenser i de teorier, de er en del af. En forklaring på, at denne hypotese ikke er blevet bekræftet, kunne være, at en teori, der bliver forkastet, hurtigt bliver glemt, og med denne det patologiske eksempel som har ført til forkastelsen.

Til gengæld har nogle af eksemplerne spillet en rolle for afvisningen af matematiske sætninger.

Weierstrass' funktion medførte opgivelse af sætningen, der siger at kontinuerte funktioner er differentiable pånær i en endelig mængde af punkter. Der var gennem det nittende århundrede en løbende diskussion om rigtigheden af denne sætning, som blev afsluttet med Weierstrass' eksempel.

Hausdorffs paradoks indgik i en mere kompliceret matematisk diskussion end Weierstrass' funktion, hvor paradokset havde betydning for polemikken om udvalgsaksiomets anerkendelse, da konstruktionen ikke er mulig uden dette aksiom. Nogle matematikere så paradokset, som argument for at der ikke eksisterede en løsning til Hausdorffs svækkede version af Lebesgues målproblem, mens andre mente, at når et sådant paradoks var muligt måtte udvalgsaksiomet forkastes. Man kan ikke finde en generel løsning til Lebesgues målproblem, mens det siden er blevet vist af Kurt Gödel, at tilføjelsen af udvalgsaksiomet ikke gør mængdelæren inkonsistent.

Eksemplet bliver stående uden at have nogen effekt på den teori det omhandler

Denne hypotese skulle oprindeligt indfange de patologiske eksempler, som slet ikke har haft nogen påviselig indflydelse på den bagvedliggende teori. Hypotesen er dog ikke blevet bekræftet i projektet, idet alle eksemplerne i projektet i større eller mindre grad har haft en betydning. Dette kan måske forklares ved, at vi har beskæftiget os med kendte eksempler, som netop er blevet kendte, pga. de har haft en betydning. Hypotesen virkede rimelig i starten af projektarbejdet, fordi vi for eksempel i lang tid ikke kunne finde nogen historiske kilder, som omtalte Peanos kurve.

4.2.2 Årsager til historisk betydning

Det er kendetegnende for vores eksempler, at de ved deres fremkomst har indgået i diskussioner i matematiksamfundet. Alle de velbeskrevne eksempler i projektet har gjort dette, men på forskellig måde.

Weierstrass' konstruerede sit eksempel med specielt henblik på at afslutte debatten omkring kontinuitet og differentiabilitet. Vi vil hævde, at det netop var det kontraintuitive element i eksemplet, dvs. modstriden med de geometriske forestillinger af kontinuerte funktioner der var veletablerede i matematiksamfundet, som især vakte opsigt. Med andre ord er en væsentlig årsag til, at Weierstrass' eksempel er blevet berømt, det patologiske i eksemplet.

Hausdorff havde ligeledes en bagtanke med sit paradoks, nemlig at demonstere eksplicit at det ikke kan lade sig gøre at definere et mål i $\mathbb{R}^3$, som opfylder betingelserne i Lebesgues målproblem. Diskussionen omkring målproblemet var dog så kompliceret og indædt, at Hausdorffs paradoks ikke formåede at afslutte denne diskussion. Men igen vakte eksemplet særlig opsigt, pga. at det opfattedes som paradoksalt af datidens matematikere.

Om Peano havde en speciel hensigt med sin kurve, har vi ikke belæg for at konkludere. Til gengæld virkede kurven særdeles kontraintuitiv på det meste at matematiksamfundet, hvilket bl.a. Jordans uvillighed til at acceptere kurven viser.

Den pointe, vi gerne vil have frem, er, at eksemplerne pga. deres kontraintuitive egenskaber tvang matematiksamfundet til at revidere basale forestillinger om matematiske begreber, hvilket gjorde, at de fik en betydning, og stadig er velkendte idag.

I eksemplerne Weierstrass' funktion og Hausdorffs paradoks så vi, at den kontraintuitive pointe kunne repræsenteres ved forskellige matematiske objekter. Pointen ved Hausdorffs paradoks bliver ligeså godt om ikke bedre illustreret ved Banach-Tarskis paradoks. Hvilket objekt den kontraintuitive pointe er repræsenteret ved, mener vi ikke, har nogen indflydelse på, hvorvidt eksemplet får en historisk betydning.

Vi har set at eksemplerne er blevet taget op af andre matematikere end deres konstruktører. Dette kan vi se to forskellige årsager til . Enten er der tale om et ønske om at forbedre eksemplernes argumentationsværdi, eller også er der mere tale om at eksemplerne har en interesse i sig selv. Som et klart eksempel på det første kan nævnes Hilberts opfølgning af Peanos artikel. Den anden drivkraft er sværere at påvise, og vil i almindelighed kræve en dybere og mere kildenær undersøgelse end den vi har foretaget. Vi mener dog at Hardys arbejde med Weierstrass' funktion, klart falder i denne kategori, da det blev foretaget på et tidspunkt, hvor Weierstrass' funktion var anerkendt som argument.

De patologiske eksempler vi har undersøgt har altså virket på to måder. Først er de brugt som et modeksempel eller et argument i en specifik matematisk debat. Senere har de været en kilde til inspiration for andet arbejde, hvor man har taget fat på at rette op på mangler i eksemplet, enten ved at lave en simplere konstruktion eller ved at finde andre der kan det samme.

4.2.3 Generalisering

I projektet har vi kun gennemgået 6 eksempler. Spørgsmålet er nu hvorvidt de konklusioner, vi har lavet, lader sig generalisere til andre matematiske områder. Vi har i det ovenstående påpeget en mekanisme, nemlig at når eksistensen af et matematisk objekt virker kontraintuitivt, får det ekstra betydning. Der er ingen grund til at tro, at denne mekanisme er speciel for analysen og den generelle topologi. Så vi tror derfor, at man vil kunne genfinde mønsteret indenfor andre grene af matematikken. Det er dog ikke sikkert, at man indenfor mere abstrakte matematiske områder har ligeså grundfæstede forestillinger at basere sin intuition på.

At overveje, hvor væsentlig en drivkraft patologiske eksempler er for udviklingen af matematikken, kræver i virkeligheden et større overblik end vi har. Vi synes dog, at vi har set, at patologiske eksempler optræder i mange centrale debatter i den periode, vi har beskæftiget os med.

4.3 Konklusion

I problemformuleringen stillede vi to spørgsmål om de patologiske eksempler. Først spurgte vi om, hvilke former for betydning de patologiske eksempler havde haft matematikkens udvikling. Disse betydninger delte vi i tre og fandt, at alle eksemplerne kunne siges at falde ind under det første punkt, nemlig at have haft betydning for udviklingen af ny teori. Vores andet punkt var, om eksemplet havde ført til forkastelse af et begreb eller en teori. Dette modererede vi senere til afvisning af matematiske sætninger, og fandt at både Weierstrass' funktion og Hausdorffs paradoks havde haft denne slags betydning. Vores sidste punkt var, om eksemplet var blevet stående uden at have haft nogen effekt på den teori, det omhandler. Dette punkt har vi ikke kunnet bekræfte, men vi vil heller ikke på baggrund af disse eksempler afvise det. Det andet spørgsmål i problemformuleringen var: Hvorfor har patologiske eksempler haft en betydning, dvs hvilke egenskaber ved eksemplerne gør dem betydningsfulde? Her mener vi, at eksemplerne har fået ekstra vægt og opmærksomhed på grund af, at de rykker ved grundlæggende intuitive forestillinger.

4.3.1 Hvad har vi lært ?

Først og fremmest har vi opnået en historisk indsigt, som udover konkret viden om analysens og topologiens udvikling, indeholder den erkendelse, at matematiksamfundets konsensus, om hvad der er rigtigt, kan være forkert. Endvidere har vi ved læsning af artikler lært, at man ikke kan tage for givet, at publicerede matematiske artikler er fejlfri eller fuldstændige. Vi har lært, at studiet af matematikkens historie rejser komplicerede metodiske problemer, som vi har haft svært ved at takle.

Rent fagligt matematisk har vi fået skærpet vores agtpågivenhed overfor matematiske fejlslutninger, fordi vi under arbejdet med de patologiske eksempler har fået henledt opmærksomheden på konsekvenser af velkendte begreber. Vi har stiftet bekendtskab med ny matematik, f.eks. generel topologi. Vi har oplevet, at gamle begreber er faldet bedre på plads, når vi har forsøgt at klargøre dem for hinanden. Bl.a derfor har gruppens inhomogenitet snarere været en fordel end en ulempe.

Litteratur

[Bol] Bolzano, Bernard, *Paradoxien des Unendlichen*, Felix Meiner Verlag 1975.

[Bot] Bottazzini, Umberto, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, 1986.

[Boy] Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, 1968.

[Cha] Chabert, Jean-Luc, *Un demi-siecle de fractales: 1870-1920*, Historia Mathematica, Vol 17, Nr 4, November 1990.

[Dav] Davis, Philip J. and Hersh, Reuben, *The Mathematical Experience*, Boston 1981

[Fal] Falconer, Kenneth, *Fractal geometry, Mathematical foundations and Applications*, John Wiley and Sons, 1990.

[Gel1] Gelbaum and Olmsted, *Counterexables in analysis*, Holden Day Inc. San Fransisco 1964

[Gel2] Gelbaum and Olmsted, *Counterexables in analysis and topology*, Springer-Verlag 1990.

[Gre] Green J. W. and Gustin W., *Quasiconvex Sets*, Canadian Journal of Mathematics 2 1952

[Hal] Halmos, *Naive Set Theory*. Springer Verlag 1987, 5. edition.

[Ham] Hamel G., *Eine Basis aller Zalen und...*, Matematische Annalen 1905 (s459)

[Ham0] Hamel, Georg, *Über die Zusammensetzung von Vektoren*, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 49 s. 362 - 371 1903

[Han] Hansen, Vagn Lundsgaard, *Grundbegreber i Moderne Analyse*, Mat. Inst. DTH 1986

[Har] Hardy, G. H., *Weierstrass' non-differentiabel function*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol 17, 1916.

[Hau] Hausdorff, Felix, *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen*, Matematische Annalen #75, 1916.

[Hee] Heefelt, Mogens Brun, *Tekst nr. 80*, IMFUFA 1980.

[Hil] Hilbert, D., *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Mathematische Annalen, Bd 38, s. 459-460, 1891.

[Joh1] Johnson, D.M., *The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part I*, Archive for history of exact sciences, Vol 20, 1979.

[Joh2] Johnson, D.M., *The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II*, Archive for history of exact sciences, Vol 25, 1981.

[Kli1] Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, vol 3, 1972.

[Kli2] Kline, Morris, *Mathematics - The Loss of Certainty*, 1980.

[Meh] Mehrtens, Herbert, *Moderne Sprache Matematik, eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjects Formaler Systeme*, 1990.

[Mej] Mejlbro, Leif, *Mit rædselskabinet*, DTH, Matematisk Institut.

[Mejlbo] Mejlbo, Lars C. *Noget om reele funktioner og deres ejendommeligheder*, Aarhus Universitet 1969.

[Moo] Moore, Gregory H., *Zermelo's Axiom of Choice, its origins, development and influence*, 1982.

[Neu] Neuenschwander, Erwin, *Riemanns Example of a Continuous nondifferentiable function*, Mathematical Intelligencer vol 1, 1978–79.

[Nis] Mogens Niss, *Håndskrevne noter*, 1992.

[Nør] Nørretranders, Tor, *Mærk Verden*, Gyldendal 1991

[Pea] Peano, G., *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*, Mathematische Annalen, Bd 36, s. 157-160, 1890.

[Ped] Pedersen Gert K. *Analysis Now* Springer Verlag 198*

[Poi] Poincaré, Henri, *Science and Method* Dover 195*

[Rus] Russ, Steve: *Bolzanos Analytic Programme*, Mathematical Intelligencer vol.14 1992

[Sch] Schur, Friedrich, *Über die Zusammensetzung von Vektoren*, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 49 s. 352 - 361 1903.

[Seg] Segal, S.L., *Riemann's Example of A Continuos Nondifferentiable function continued*, Mathematical Intelligencer vol 1.

[Ste] Steen, Lynn Arthur , Seebach, J. A. jr., *Countereksamples in Topology*, Springer Verlag Second ed. 1978.

[Tit] Titchmarsh E.C., *The theory of functions*, Oxford 1932.

[Zer] Zermelo, *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kan*, Mathematische Annalen Bd. 59 (1905).

Sekundære referencer

[Dar] Darboux,[1] *Sur la composition des forces en statique*, Bulletin des sciences mathématiques 9. (1875).

[Dau] Joseph W. Dauben, *The invariance of dimension: Problems in the early development of set theory and topology*, Historia Mathematica, Vol 2, s. 273-288, August 1975.

[Htg] Hartogs, F., *Über das Problem der Wohlordnung*, Matematische Annalen #76, 1917.

Historia Matematica: 1975, 2: Part B: History of Foundations:

[Gra1] Grattan-guinness, I., *Preliminary notes on the historical significance of quantification and the axioms of choice in the development of mathematical analysis.* Historia Matematica, 1975, 2: Part B: History of Foundations.

[Gra2] Grattan-guinness, I., *Russels logical progress - some new light from manuscript sources.* Historia Matematica, 1975, 2: Part B: History of Foundations.

[Fre] Freudenthal, Hans, *The cradle of modern topology, according to Brouwers inedita.* Historia Matematica, 1981, 8.

[Ran] Rang, B. and Thomas W., *Zermelo's discovery of the Russell Paradox.* Historia Matematica, 1981, 8.

[Moo0] Moore, G.H. and Garciadiego, Alejandro, *Burali-Forti's Paradox; a reappraisal of Its Origins.* Historia Matematica, 1981, 8.

[1] Indirekte reference

1/78 "TANKER OM EN PRAKSIS" - et matematikprojekt.
Projektrapport af: Anne Jensen, Lena Lindenskov, Marianne Kesselhahn og Nicolai Lomholt.
Vejleder: Anders Madsen

2/78 "OPTIMERING" - Menneskets forøgede beherskelsesmuligheder af natur og samfund.
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen, Gert Krenøe og Peter H. Lassen
Vejleder: Bernhelm Boss.

3/78 "OPGAVESAMLING", breddekursus i fysik.
Af: Lasse Rasmussen, Aage Bonde Krænmer og Jens Højgaard Jensen.

4/78 "TRE ESSAYS" - om matematikundervisning, matematiklæreruddannelsen og videnskabsrindalismen.
Af: Mogens Niss
Nr. 4 er p.t. udgået.

5/78 "BIBLIOGRAFISK VEJLEDNING til studiet af DEN MODERNE FYSIKS HISTORIE".
Af: Helge Kragh.
Nr. 5 er p.t. udgået.

6/78 "NOGLE ARTIKLER OG DEBATINDLÆG OM - læreruddannelse og undervisning i fysik, og - de naturvidenskabelige fags situation efter studenteroprøret".
Af: Karin Beyer, Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

7/78 "MATEMATIKKENS FORHOLD TIL SAMFUNDSØKONOMIEN".
Af: B.V. Gnedenko.
Nr. 7 er udgået.

8/78 "DYNAMIK OG DIAGRAMMER". Introduktion til energy-bond-graph formalismen.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

9/78 "OM PRAKSIS' INDFLYDELSE PÅ MATEMATIKKENS UDVIKLING". - Motiver til Kepler's: "Nova Stereometria Doliorum Vinariom".
Projektrapport af: Lasse Rasmussen.
Vejleder: Anders Madsen.

10/79 "TERMODYNAMIK I GYMNASIET".
Projektrapport af: Jan Christensen og Jeanne Mortensen.
Vejledere: Karin Beyer og Peder Voetmann Christiansen.

11/79 "STATISTISKE MATERIALER".
Af: Jørgen Larsen.

12/79 "LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER OG DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEMER".
Af: Mogens Brun Heefelt.
Nr. 12 er udgået.

13/79 "CAVENDISH'S FORSØG I GYMNASIET".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Albert Chr. Paulsen.

14/79 "BOOKS ABOUT MATHEMATICS: History, Philosophy, Education, Models, System Theory, and Works of".
Af: Else Høyrup.
Nr. 14 er p.t. udgået.

15/79 "STRUKTUREL STABILITET OG KATASTROFER i systemer i og udenfor termodynamisk ligevægt".
Specialeopgave af: Leif S. Striegler.
Vejleder: Peder Voetmann Ckristiansen.

16/79 "STATISTIK I KRÆFTFORSKNINGEN".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

17/79 "AT SPØRGE OG AT SVARE i fysikundervisningen".
Af: Albert Christian Paulsen.

18/79 "MATHEMATICS AND THE REAL WORLD", Proceedings af an International Workshop, Roskilde University Centre, Denmark, 1978. Preprint.
Af: Bernhelm Booss og Mogens Niss (eds.)

19/79 "GEOMETRI, SKOLE OG VIRKELIGHED".
Projektrapport af: Tom J. Andersen, Tommy R. Andersen og Per H.H. Larsen.
Vejleder: Mogens Niss.

20/79 "STATISTISKE MODELLER TIL BESTEMMELSE AF SIKRE DOSER FOR CARCINOGENE STOFFER".
Projektrapport af: Michael Olsen og Jørn Jensen.
Vejleder: Jørgen Larsen

21/79 "KONTROL I GYMNASIET-FORMÅL OG KONSEKVENSER".
Projektrapport af: Crilles Bacher, Per S.Jensen, Preben Jensen og Torben Nysteen.

22/79 "SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (1)".
1-port lineært response og støj i fysikken.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

23/79 "ON THE HISTORY AF EARLY WAVE MECHANICS - with special emphasis on the role af realitivity".
Af: Helge Kragh.

24/80 a+b "MATEMATIKOPFATTELSER HOS 2.G'ERE".
1. En analyse. 2. Interviewmateriale.
Projektrapport af: Jan Christensen og Knud Lindhardt Rasmussen.
Vejleder: Mogens Niss.

25/80 "EKSAMENSOPGAVER", Dybdemodulet/fysik 1974-79.

26/80 "OM MATEMATISKE MODELLER".
En projektrapport og to artikler.
Af: Jens Højgaard Jensen m.fl.

27/80 "METHODOLOGY AND PHILOSOPHY AF SCIENCE IN PAUL DIRAC's PHYSICS".
Af: Helge Kragh.

28/80 "DIELEKTRISK RELAXATION - et forslag til en ny model bygget på væskernes viscoelastiske egenskaber".
Projektrapport af: Gert Kreinøe.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

29/80 "ODIN - undervisningsmateriale til et kursus i differentialligningsmodeller".
Projektrapport af: Tommy R. Andersen, Per H.H. Larsen og Peter H. Lassen.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

30/80 "FUSIONSENERGIEN - - - ATOMSAMFUNDETS ENDESTATION".
Af: Oluf Danielsen.
Nr. 30 er udgået.

31/80 "VIDENSKABSTEORETISKE PROBLEMER VED UNDERVISNINGSSYSTEMER BASERET PÅ MÆNGDELÆRE".
Projektrapport af: Troels Lange og Jørgen Karrebæk.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.
Nr. 31 er p.t. udgået.

32/80 "POLYMERE STOFFERS VISCOELASTISKE EGENSKABER - BELYST VED HJÆLP AF MEKANISKE IMPEDANSMÅLINGER - GER MÖSSBAUEREFFEKTMÅLINGER".
Projektrapport af: Crilles Bacher og Preben Jensen.
Vejledere: Niels Boye Olsen og Peder Voetmann Christiansen.

33/80 "KONSTITUERING AF FAG INDEN FOR TEKNISK - NATURVIDENSKABELIGE UDDANNELSER. I-II".
Af: Arne Jakobsen.

34/80 "ENVIRONMENTAL IMPACT AF WIND ENERGY UTILIZATION".
ENERGY SERIES NO. I.
Af: Bent Sørensen
Nr. 34 er udgået.

35/80 "HISTORISKE STUDIER I DEN NYERE ATOMFYSIKS UDVIKLING".
Af: Helge Kragh.

36/80 "HVAD ER MENINGEN MED MATEMATIKUNDERVISNINGEN?".
Fire artikler.
Af: Mogens Niss.

37/80 "RENEWABLE ENERGY AND ENERGY STORAGE".
ENERGY SERIES NO. 2.
Af: Bent Sørensen.

38/81 "TIL EN HISTORIETEORI OM NATURERKENDELSE, TEKNOLOGI OG SAMFUND".
Projektrapport af: Erik Gade, Hans Hedal, Henrik Lau og Finn Physant.
Vejledere: Stig Andur Pedersen, Helge Kragh og Ib Thiersen.
Nr. 38 er p.t. udgået.

39/81 "TIL KRITIKKEN AF VÆKSTØKONOMIEN".
Af: Jens Højgaard Jensen.

40/81 "TELEKOMMUNIKATION I DANMARK - oplæg til en teknologivurdering".
Projektrapport af: Arne Jørgensen, Bruno Petersen og Jan Vedde.
Vejleder: Per Nørgaard.

41/81 "PLANNING AND POLICY CONSIDERATIONS RELATED TO THE INTRODUCTION OF RENEWABLE ENERGY SOURCES INTO ENERGY SUPPLY SYSTEMS".
ENERGY SERIES NO. 3.
Af: Bent Sørensen.

42/81 "VIDENSKAB TEORI SAMFUND - En introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser".
Af: Helge Kragh og Stig Andur Pedersen.

43/81 1."COMPARATIVE RISK ASSESSMENT OF TOTAL ENERGY SYSTEMS".
2."ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF DECENTRALIZATION".
ENERGY SERIES NO. 4.
Af: Bent Sørensen.

44/81 "HISTORISKE UNDERSØGELSER AF DE EKSPERIMENTELLE FORUDSÆTNINGER FOR RUTHERFORDS ATOMMODEL".
Projektrapport af: Niels Thor Nielsen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

45/82 Er aldrig udkommet.

46/82 "EKSEMPLARISK UNDERVISNING OG FYSISK ERKENDESE-
1+11 ILLUSTRERET VED TO EKSEMPLER".
Projektrapport af: Torben O.Olsen, Lasse Rasmussen og Niels Dreyer Sørensen.
Vejleder: Bent C. Jørgensen.

47/82 "BARSEBÄCK OG DET VÆRST OFFICIELT-TÆNKELIGE UHELD".
ENERGY SERIES NO. 5.
Af: Bent Sørensen.

48/82 "EN UNDERSØGELSE AF MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ADGANGSKURSUS TIL KØBENHAVNS TEKNIKUM".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Jørgen Karrebæk, Troels Lange, Preben Nørregaard, Lissi Pedesen, Laust Rishøj, Lill Røn og Isac Showiki.
Vejleder: Mogens Niss.

49/82 "ANALYSE AF MULTISPEKTRALE SATELLITBILLEDER".
Projektrapport af: Preben Nørregaard.
Vejledere: Jørgen Larsen og Rasmus Ole Rasmussen.

50/82 "HERSLEV - MULIGHEDER FOR VEDVARENDE ENERGI I EN LANDSBY".
ENERGY SERIES NO. 6.
Rapport af: Bent Christensen, Bent Hove Jensen, Dennis B. Møller, Bjarne Laursen, Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen.

51/82 "HVAD KAN DER GØRES FOR AT AFHJÆLPE PIGERS BLOKERING OVERFOR MATEMATIK ?"
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Lissi Pedersen, Lill Røn og Susanne Stender.

52/82 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

53/82 "THE CONSTITUTION OF SUBJECTS IN ENGINEERING EDUCATION".
Af: Arne Jacobsen og Stig Andur Pedersen.

54/82 "FUTURES RESEARCH" - A Philosophical Analysis of Its Subject-Matter and Methods.
Af: Stig Andur Pedersen og Johannes Witt-Hansen.

55/82 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi.
Af: Else Høyrup.

Vedr. tekst nr. 55/82 se også tekst nr. 62/83.

56/82 "EN - TO - MANGE" -
En undersøgelse af matematisk økologi.
Projektrapport af: Troels Lange.
Vejleder: Anders Madsen.

57/83 "ASPECT EKSPERIMENTET"-
Skjulte variable i kvantemekanikken?
Projektrapport af: Tom Juul Andersen.
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen.
Nr. 57 er udgået.

58/83 "MATEMATISKE VANDRINGER" - Modelbetragtninger over spredning af dyr mellem småbiotoper i agerlandet.
Projektrapport af: Per Hammershøj Jensen og Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

59/83 "THE METHODOLOGY OF ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES NO. 7.
Af: Bent Sørensen.

60/83 "MATEMATISK MODEKSPERTISE"- et eksempel.
Projektrapport af: Erik O. Gade, Jørgen Karrebæk og Preben Nørregaard.
Vejleder: Anders Madsen.

61/83 "FYSIKS IDEOLOGISKE FUNKTION, SOM ET EKSEMPEL PÅ EN NATURVIDENSKAB - HISTORISK SET".
Projektrapport af: Annette Post Nielsen.
Vejledere: Jens Høyrup, Jens Højgaard Jensen og Jørgen Vogelius.

62/83 "MATEMATISKE MODELLER" - Litteratur på Roskilde Universitetsbibliotek.
En biografi 2. rev. udgave.
Af: Else Høyrup.

63/83 "GREATING ENERGY FUTURES:A SHORT GUIDE TO ENERGY PLANNING".
ENERGY SERIES No. 8.
Af: David Crossley og Bent Sørensen.

64/83 "VON MATEMATIK UND KRIEG".
Af: Berhelm Booss og Jens Høyrup.

65/83 "ANVENDT MATEMATIK - TEORI ELLER PRAKSIS".
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Kirsten Habekost, Carsten Holst-Jensen, Annelise von Moos, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejledere: Bernhelm Booss og Klaus Grünbaum.

66/83 "MATEMATISKE MODELLER FOR PERIODISK SELEKTION I ESCHERICHIA COLI".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Ole Richard Jensen og Klavs Frisdahl.
Vejledere: Jørgen Larsen og Anders Hede Madsen.

67/83 "ELEPSOIDE METODEN - EN NY METODE TIL LINEÆR PROGRAMMERING?"
Projektrapport af: Lone Biilmann og Lars Boye.
Vejleder: Mogens Brun Heefelt.

68/83 "STOKASTISKE MODELLER I POPULATIONSGENETIK"
- til kritikken af teoriladede modeller.
Projektrapport af: Lise Odgård Gade, Susanne Hansen, Michael Hviid og Frank Mølgård Olsen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

69/83 "ELEVFORUDSÆTNINGER I FYSIK"
- en test i 1.g med kommentarer.
Af: Albert C. Paulsen.

70/83 "INDLÆRINGS - OG FORMIDLINGSPROBLEMER I MATEMATIK PÅ VOKSENUNDERVISNINGSNIVEAU".
Projektrapport af: Hanne Lisbet Andersen, Torben J. Andreasen, Svend Åge Houmann, Helle Glerup Jensen, Keld Fl. Nielsen, Lene Vagn Rasmussen.
Vejleder: Klaus Grünbaum og Anders Hede Madsen.

71/83 "PIGER OG FYSIK"
- et problem og en udfordring for skolen?
Af: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen, Jette Reich og Mette Vedelsby.

72/83 "VERDEN IFØLGE PEIRCE" - to metafysiske essays, om og af C.S Peirce.
Af: Peder Voetmann Christiansen.

73/83 ""EN ENERGIANALYSE AF LANDBRUG"
- økologisk contra traditionelt.
ENERGY SERIES NO. 9
Specialeopgave i fysik af: Bent Hove Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

74/84 "MINIATURISERING AF MIKROELEKTRONIK" - om videnskabeliggjort teknologi og nytten af at lære fysik.
Projektrapport af: Bodil Harder og Linda Szkotak Jensen.
Vejledere: Jens Højgaard Jensen og Bent C. Jørgensen.

75/84 "MATEMATIKUNDERVISNINGEN I FREMTIDENS GYMNASIUM"
- Case: Lineær programmering.
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank Mølgaard Olsen.
Vejledere: Mogens Brun Heefelt og Jens Bjørneboe.

76/84 "KERNEKRAFT I DANMARK?" - Et høringssvar indkaldt af miljøministeriet, med kritik af miljøstyrelsens rapporter af 15. marts 1984.
ENERGY SERIES No. 10
Af: Niels Boye Olsen og Bent Sørensen.

77/84 "POLITISKE INDEKS - FUP ELLER FAKTA?"
Opinionsundersøgelser belyst ved statistiske modeller.
Projektrapport af: Svend Åge Houmann, Keld Nielsen og Susanne Stender.
Vejledere: Jørgen Larsen og Jens Bjørneboe.

78/84 "JÆVNSTRØMSLEDNINGSEVNE OG GITTERSTRUKTUR I AMORFT GERMANIUM".
Specialrapport af: Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen og Finn C. Physant.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

79/84 "MATEMATIK OG ALMENDANNELSE".
Projektrapport af: Henrik Coster, Mikael Wennerberg Johansen, Povl Kattler, Birgitte Lydholm og Morten Overgaard Nielsen.
Vejleder: Bernhelm Booss.

80/84 "KURSUSMATERIALE TIL MATEMATIK B".
Af: Mogens Brun Heefelt.

81/84 "FREKVENSAFHÆNGIG LEDNINGSEVNE I AMORFT GERMANIUM".
Specialerapport af: Jørgen Wind Petersen og Jan Christensen.
Vejleder: Niels Boye Olsen.

82/84 "MATEMATIK - OG FYSIKUNDERVISNINGEN I DET AUTOMATISEREDE SAMFUND".
Rapport fra et seminar afholdt i Hvidovre 25-27 april 1983.
Red.: Jens Højgaard Jensen, Bent C. Jørgensen og Mogens Niss.

83/84 "ON THE QUANTIFICATION OF SECURITY":
PEACE RESEARCH SERIES NO. I
Af: Bent Sørensen
nr. 83 er p.t. udgået

84/84 "NOGLE ARTIKLER OM MATEMATIK, FYSIK OG ALMENDANNELSE".
Af: Jens Højgaard Jensen, Mogens Niss m. fl.

85/84 "CENTRIFUGALREGULATORER OG MATEMATIK".
Specialerapport af: Per Hedegård Andersen, Carsten Holst-Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

86/84 "SECURITY IMPLICATIONS OF ALTERNATIVE DEFENSE OPTIONS FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 2
Af: Bent Sørensen.

87/84 "A SIMPLE MODEL OF AC HOPPING CONDUCTIVITY IN DISORDERED SOLIDS".
Af: Jeppe C. Dyre.

88/84 "RISE, FALL AND RESURRECTION OF INFINITESIMALS".
Af: Detlef Laugwitz.

89/84 "FJERNVARMEOPTIMERING".
Af: Bjarne Lillethorup og Jacob Mørch Pedersen.

90/84 "ENERGI I 1.G - EN TEORI FOR TILRETTELÆGGELSE".
Af: Albert Chr. Paulsen.

91/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
1. Lærervejledning
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

92/85 "KVANTETEORI FOR GYMNASIET".
2. Materiale
Projektrapport af: Biger Lundgren, Henning Sten Hansen og John Johansson.
Vejleder: Torsten Meyer.

93/85 "THE SEMIOTICS OF QUANTUM - NON - LOCALITY".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

94/85 "TREENIGHEDEN BOURBAKI - generalen, matematikeren og ånden".
Projektrapport af: Morten Blomhøj, Klavs Frisdahl og Frank M. Olsen.
Vejleder: Mogens Niss.

95/85 "AN ALTERNATIV DEFENSE PLAN FOR WESTERN EUROPE".
PEACE RESEARCH SERIES NO. 3
Af: Bent Sørensen

96/85 "ASPEKTER VED KRAFTVARMEFORSYNING".
Af: Bjarne Lilletorup.
Vejleder: Bent Sørensen.

97/85 "ON THE PHYSICS OF A.C. HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

98/85 "VALGMULIGHEDER I INFORMATIONSALDEREN".
Af: Bent Sørensen.

99/85 "Der er langt fra Q til R".
Projektrapport af: Niels Jørgensen og Mikael Klintorp.
Vejleder: Stig Andur Pedersen.

100/85 "TALSYSTEMETS OPBYGNING".
Af: Mogens Niss.

101/85 "EXTENDED MOMENTUM THEORY FOR WINDMILLS IN PERTURBATIVE FORM".
Af: Ganesh Sengupta.

102/85 OPSTILLING OG ANALYSE AF MATEMATISKE MODELLER, BELYST VED MODELLER OVER KØERS FODEROPTAGELSE OG - OMSÆTNING".
Projektrapport af: Lis Eilertzen, Kirsten Habekost, Lill Røn og Susanne Stender.
Vejleder: Klaus Grünbaum.

103/85 "ØDSLE KOLDKRIGERE OG VIDENSKABENS LYSE IDEER".
Projektrapport af: Niels Ole Dam og Kurt Jensen.
Vejleder: Bent Sørensen.

104/85 "ANALOGREGNEMASKINEN OG LORENZLIGNINGER".
Af: Jens Jæger.

105/85 "THE FREQUENCY DEPENDENCE OF THE SPECIFIC HEAT AF THE GLASS REANSITION".
Af: Tage Christensen.

"A SIMPLE MODEL AF AC HOPPING CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.
Contributions to the Third International Conference on the Structure of Non - Crystalline Materials held in Grenoble July 1985.

106/85 "QUANTUM THEORY OF EXTENDED PARTICLES".
Af: Bent Sørensen.

107/85 "EN MYG GØR INGEN EPIDEMI".
- flodblindhed som eksempel på matematisk modellering af et epidemiologisk problem.
Projektrapport af: Per Hedegård Andersen, Lars Boye, CarstenHolst Jensen, Else Marie Pedersen og Erling Møller Pedersen.
Vejleder: Jesper Larsen.

108/85 "APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATEMATICS CURRICULUM" - state and trends -
Af: Mogens Niss.

109/85 "COX I STUDIETIDEN" - Cox's regressionsmodel anvendt på studenteroplysninger fra RUC.
Projektrapport af: Mikael Wennerberg Johansen, Poul Katler og Torben J. Andreasen.
Vejleder: Jørgen Larsen.

110/85 "PLANNING FOR SECURITY".
Af: Bent Sørensen

111/85 "JORDEN RUNDT PÅ FLADE KORT".
Projektrapport af: Birgit Andresen, Beatriz Quinones og Jimmy Staal.
Vejleder: Mogens Niss.

112/85 "VIDENSKABELIGGØRELSE AF DANSK TEKNOLOGISK INNOVATION FREM TIL 1950 - BELYST VED EKSEMPLER".
Projektrapport af: Erik Odgaard Gade, Hans Hedal, Frank C. Ludvigsen, Annette Post Nielsen og Finn Physant.
Vejleder: Claus Bryld og Bent C. Jørgensen.

113/85 "DESUSPENSION OF SPLITTING ELLIPTIC SYMBOLS 11".
Af: Bernhelm Booss og Krzysztof Wojciechowski.

114/85 "ANVENDELSE AF GRAFISKE METODER TIL ANALYSE AF KONTIGENSTABELLER".
Projektrapport af: Lone Biilmann, Ole R. Jensen og Anne-Lise von Moos.
Vejleder: Jørgen Larsen.

115/85 "MATEMATIKKENS UDVIKLING OP TIL RENÆSSANCEN".
Af: Mogens Niss.

116/85 "A PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR THE MEYER-NELDEL RULE".
Af: Jeppe C. Dyre.

117/85 "KRAFT & FJERNVARMEOPTIMERING"
Af: Jacob Mørch Pedersen.
Vejleder: Bent Sørensen

118/85 "TILFÆLDIGHEDEN OG NØDVENDIGHEDEN IFØLGE PEIRCE OG FYSIKKEN".
Af: Peder Voetmann Christiansen

119/86 "DET ER GANSKE VIST - - EUKLIDS FEMTE POSTULAT KUNNE NOK SKABE RØRE I ANDEDAMMEN".
Af: Iben Maj Christiansen
Vejleder: Mogens Niss.

120/86 "ET ANTAL STATISTISKE STANDARDMODELLER".
Af: Jørgen Larsen

121/86 "SIMULATION I KONTINUERT TID".
Af: Peder Voetmann Christiansen.

122/86 "ON THE MECHANISM OF GLASS IONIC CONDUCTIVITY".
Af: Jeppe C. Dyre.

123/86 "GYMNASIEFYSIKKEN OG DEN STORE VERDEN".
Fysiklærerforeningen, IMFUFA, RUC.

124/86 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK".
Samtlige opgaver stillet i tiden 1974-jan. 1986.

125/86 "UVBY,β - systemet - en effektiv fotometrisk spektralklassifikation af B-,A- og F-stjerner".
Projektrapport af: Birger Lundgren.

126/86 "OM UDVIKLINGEN AF DEN SPECIELLE RELATIVITETSTEORI".
Projektrapport af: Lise Odgaard & Linda Szkotak Jensen
Vejledere: Karin Beyer & Stig Andur Pedersen.

127/86 "GALOIS' BIDRAG TIL UDVIKLINGEN AF DEN ABSTRAKTE ALGEBRA".
Projektrapport af: Pernille Sand, Heine Larsen & Lars Frandsen.
Vejleder: Mogens Niss.

128/86 "SMÅKRYB" - om ikke-standard analyse.
Projektrapport af: Niels Jørgensen & Mikael Klintorp.
Vejleder: Jeppe Dyre.

129/86 "PHYSICS IN SOCIETY"
Lecture Notes 1983 (1986)
Af: Bent Sørensen

130/86 "Studies in Wind Power"
Af: Bent Sørensen

131/86 "FYSIK OG SAMFUND" - Et integreret fysik/historieprojekt om naturanskuelsens historiske udvikling og dens samfundsmæssige betingethed.
Projektrapport af: Jakob Heckscher, Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Jens Høyrup, Jørgen Vogelius, Jens Højgaard Jensen.

132/86 "FYSIK OG DANNELSE"
Projektrapport af: Søren Brønd, Andy Wierød.
Vejledere: Karin Beyer, Jørgen Vogelius.

133/86 "CHERNOBYL ACCIDENT: ASSESSING THE DATA.
ENERGY SERIES NO. 15.
AF: Bent Sørensen.

134/87 "THE D.C. AND THE A.C. ELECTRICAL TRANSPORT IN AsSeTe SYSTEM"
Authors: M.B.El-Den, N.B.Olsen, Ib Høst Pedersen, Petr Visčor

135/87 "INTUITIONISTISK MATEMATIKS METODER OG ERKENDELSESTEORETISKE FORUDSÆTNINGER"
MASTEMATIKSPECIALE: Claus Larsen
Vejledere: Anton Jensen og Stig Andur Pedersen

136/87 "Mystisk og naturlig filosofi: En skitse af kristendommens første og andet møde med græsk filosofi"
Projektrapport af Frank Colding Ludvigsen
Vejledere: Historie: Ib Thiersen
Fysik: Jens Højgaard Jensen

137/87 "HOPMODELLER FOR ELEKTRISK LEDNING I UORDNEDE FASTE STOFFER" - Resume af licentiatafhandling
Af: Jeppe Dyre
Vejledere: Niels Boye Olsen og
Peder Voetmann Christiansen.

138/87 "JOSEPHSON EFFECT AND CIRCLE MAP."
Paper presented at The International Workshop on Teaching Nonlinear Phenomena at Universities and Schools, "Chaos in Education". Balaton, Hungary, 26 April-2 May 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

139/87 "Machbarkeit nichtbeherrschbarer Technik durch Fortschritte in der Erkennbarkeit der Natur"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek
Martin Bohle-Carbonell

140/87 "ON THE TOPOLOGY OF SPACES OF HOLOMORPHIC MAPS"

By: Jens Gravesen

141/87 "RADIOMETERS UDVIKLING AF BLODGASAPPARATUR - ET TEKNOLOGIHISTORISK PROJEKT"

Projektrapport af Finn C. Physant

Vejleder: Ib Thiersen

142/87 "The Calderón Projektor for Operators With Splitting Elliptic Symbols"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek og
Krzysztof P. Wojciechowski

143/87 "Kursusmateriale til Matematik på NAT-BAS"

af: Mogens Brun Heefelt

144/87 "Context and Non-Locality - A Peircean Approach
Paper presented at the Symposium on the Foundations of Modern Physics The Copenhagen Interpretation 60 Years after the Como Lecture. Joensuu, Finland, 6 - 8 august 1987.

By: Peder Voetmann Christiansen

145/87 "AIMS AND SCOPE OF APPLICATIONS AND MODELLING IN MATHEMATICS CURRICULA"
Manuscript of a plenary lecture delivered at ICMTA 3, Kassel, FRG 8.-11.9.1987

By: Mogens Niss

146/87 "BESTEMMELSE AF BULKRESISTIVITETEN I SILICIUM"
- en ny frekvensbaseret målemetode.
Fysikspeciale af Jan Vedde
Vejledere: Niels Boye Olsen & Petr Viščor

147/87 "Rapport om BIS på NAT-BAS"
redigeret af: Mogens Brun Heefelt

148/87 "Naturvidenskabsundervisning med Samfundsperspektiv"

af: Peter Colding-Jørgensen DLH
Albert Chr. Paulsen

149/87 "In-Situ Measurements of the density of amorphous germanium prepared in ultra high vacuum"

by: Petr Viščor

150/87 "Structure and the Existence of the first sharp diffraction peak in amorphous germanium prepared in UHV and measured in-situ"
by: Petr Viščor

151/87 "DYNAMISK PROGRAMMERING"

Matematikprojekt af:
Birgit Andresen, Keld Nielsen og Jimmy Staal

Vejleder: Mogens Niss

152/87 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PROJECTIONS AND THE TOPOLOGY OF CERTAIN SPACES OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS"

by: Bernhelm Booss-Bavnbek
Krzysztof P. Wojciechowski

153/88 "HALVLEDERTEKNOLOGIENS UDVIKLING MELLEM MILITÆRE OG CIVILE KRÆFTER"
Et eksempel på humanistisk teknologihistorie
Historiespeciale

Af: Hans Hedal

Vejleder: Ib Thiersen

154/88 "MASTER EQUATION APPROACH TO VISCOUS LIQUIDS AND THE GLASS TRANSITION"

By: Jeppe Dyre

155/88 "A NOTE ON THE ACTION OF THE POISSON SOLUTION OPERATOR TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR A FORMALLY SELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR"

by: Michael Pedersen

156/88 "THE RANDOM FREE ENERGY BARRIER MODEL FOR AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

157/88 " STABILIZATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY FINITE DIMENSIONAL BOUNDARY FEEDBACK CONTROL: A pseudo-differential approach."

by: Michael Pedersen

158/88 "UNIFIED FORMALISM FOR EXCESS CURRENT NOISE IN RANDOM WALK MODELS"

by: Jeppe Dyre

159/88 "STUDIES IN SOLAR ENERGY"

by: Bent Sørensen

160/88 "LOOP GROUPS AND INSTANTONS IN DIMENSION TWO"

by: Jens Gravesen

161/88 "PSEUDO-DIFFERENTIAL PERTURBATIONS AND STABILIZATION OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS:
Dirichlet feedback control problems"

by: Michael Pedersen

162/88 "PIGER & FYSIK - OG MEGET MERE"

AF: Karin Beyer, Sussanne Blegaa, Birthe Olsen,
Jette Reich , Mette Vedelsby

163/88 "EN MATEMATISK MODEL TIL BESTEMMELSE AF PERMEABILITETEN FOR BLOD-NETHINDE-BARRIEREN"

Af: Finn Langberg, Michael Jarden, Lars Frellesen

Vejleder: Jesper Larsen

164/88 "Vurdering af matematisk teknologi
Technology Assessment
Technikfolgenabschätzung"

Af: Bernhelm Booss-Bavnbek, Glen Pate med
Martin Bohle-Carbonell og Jens Højgaard Jensen

165/88 "COMPLEX STRUCTURES IN THE NASH-MOSER CATEGORY"

by: Jens Gravesen

166/88 "Grundbegreber i Sandsynligheds-regningen"

Af: Jørgen Larsen

167a/88 "BASISSTATISTIK 1. Diskrete modeller"

Af: Jørgen Larsen

167b/88 "BASISSTATISTIK 2. Kontinuerte modeller"

Af: Jørgen Larsen

168/88 "OVERFLADEN AF PLANETEN MARS" Laboratorie-simulering og MARS-analoger undersøgt ved Mössbauerspektroskopi.

Fysikspeciale af:

Birger Lundgren

Vejleder: Jens Martin Knudsen
Fys.Lab./HCØ

169/88 "CHARLES S. PEIRCE: MURSTEN OG MØRTEL TIL EN METAFYSIK."

Fem artikler fra tidsskriftet "The Monist" 1891-93.

Introduktion og oversættelse:

Peder Voetmann Christiansen

170/88 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK"

Samtlige opgaver stillet i tiden 1974 - juni 1988

171/88 "The Dirac Equation with Light-Cone Data"

af: Johnny Tom Ottesen

172/88 "FYSIK OG VIRKELIGHED"

Kvantemekanikkens grundlagsproblem i gymnasiet.

Fysikprojekt af:

Erik Lund og Kurt Jensen

Vejledere: Albert Chr. Paulsen og Peder Voetmann Christiansen

---

173/89 "NUMERISKE ALGORITMER"

af: Mogens Brun Heefelt

174/89 " GRAFISK FREMSTILLING AF FRAKTALER OG KAOS"

af: Peder Voetmann Christiansen

175/89 " AN ELEMENTARY ANALYSIS OF THE TIME DEPENDENT SPECTRUM OF THE NON-STATONARY SOLUTION TO THE OPERATOR RICCATI EQUATION

af: Michael Pedersen

176/89 " A MAXIUM ENTROPY ANSATZ FOR NONLINEAR RESPONSE THEORY"

af : Jeppe Dyre

177/89 "HVAD SKAL ADAM STÅ MODEL TIL"

af: Morten Andersen, Ulla Engström, Thomas Gravesen, Nanna Lund, Pia Madsen, Dina Rawat, Peter Torstensen

Vejleder: Mogens Brun Heefelt

178/89 "BIOSYNTESEN AF PENICILLIN - en matematisk model"

af: Ulla Eghave Rasmussen, Hans Oxvang Mortensen, Michael Jarden

vejleder i matematik: Jesper Larsen
biologi: Erling Lauridsen

179a/89 "LÆRERVEJLEDNING M.M. til et eksperimentelt forløb om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

179b/89 "ELEVHÆFTE: Noter til et eksperimentelt kursus om kaos"

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal

Vejledere: Peder Voetmann Christiansen
Karin Beyer

180/89 "KAOS I FYSISKE SYSTEMER eksemplificeret ved torsions- og dobbeltpendul".

af: Andy Wierød, Søren Brønd og Jimmy Staal
Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

181/89 "A ZERO-PARAMETER CONSTITUTIVE RELATION FOR PURE SHEAR VISCOELASTICITY"

by: Jeppe Dyre

183/89 "MATEMATICAL PROBLEM SOLVING, MODELLING. APPLICATIONS AND LINKS TO OTHER SUBJECTS - State. trends and issues in mathematics instruction

by: WERNER BLUM, Kassel (FRG) og
MOGENS NISS, Roskilde (Denmark)

184/89 "En metode til bestemmelse af den frekvensafhængige varmefylde af en underafkølet væske ved glasovergangen

af: Tage Emil Christensen

185/90 "EN NÆSTEN PERIODISK HISTORIE"

Et matematisk projekt

af: Steen Grode og Thomas Jessen

Vejleder: Jacob Jacobsen

186/90 "RITUAL OG RATIONALITET i videnskabers udvikling"

redigeret af Arne Jakobsen og Stig Andur Pedersen

187/90 "RSA - et kryptografisk system"

af: Annemette Sofie Olufsen, Lars Frellesen og Ole Møller Nielsen

Vejledere: Michael Pedersen og Finn Munk

188/90 "FERMICONDENSATION - AN ALMOST IDEAL GLASS TRANSITION"

by: Jeppe Dyre

189/90 "DATAMATER I MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ GYMNASIET OG HØJERE LÆREANSTALTER

af: Finn Langberg

190/90 "FIVE REQUIREMENTS FOR AN APPROXIMATE NONLINEAR RESPONSE THEORY"

by: Jeppe Dyre

191/90 "MOORE COHOMOLOGY, PRINCIPAL BUNDLES AND ACTIONS OF GROUPS ON C*-ALGEBRAS"

by: Iain Raeburn and Dana P. Williams

192/90 "Age-dependent host mortality in the dynamics of endemic infectious diseases
and
SIR-models of the epidemiology and natural selection of co-circulating influenza virus with partial cross-immunity"

by: Viggo Andreasen

193/90 "Causal and Diagnostic Reasoning"

by: Stig Andur Pedersen

194a/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Projektrapport af : Frank Olsen

194b/90 "DETERMINISTISK KAOS"
Kørselsrapport

Projektrapport af: Frank Olsen

195/90 "STADIER PÅ PARADIGMETS VEJ"
Et projekt om den videnskabelige udvikling der førte til dannelse af kvantemekanikken.

Projektrapport for 1. modul på fysikuddannelsen, skrevet af:

Anja Boisen, Thomas Hougård, Anders Gorm Larsen, Nicolai Ryge.

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

196/90 "ER KAOS NØDVENDIGT?"
- en projektrapport om kaos' paradigmatiske status i fysikken.

af: Johannes K. Nielsen, Jimmy Staal og Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

197/90 "Kontrafaktiske konditionaler i HOL

af: Jesper Voetmann, Hans Oxvang Mortensen og Aleksander Høst-Madsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

198/90 "Metal-Isolator-Metal systemer"
Speciale

af: Frank Olsen

199/90 "SPREDT FÆGTNING" Artikelsamling
af: Jens Højgaard Jensen

200/90 "LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE"
Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.
af: Mogens Niss

201/90 "Undersøgelse af atomare korrelationer i amorfe stoffer ved røntgendiffraktion"

af: Karen Birkelund og Klaus Dahl Jensen

Vejledere: Petr Viščor, Ole Bakander

202/90 "TEGN OG KVANTER"
Foredrag og artikler, 1971-90.

af: Peder Voetmann Christiansen

203/90 "OPGAVESAMLING I MATEMATIK" 1974-1990

afløser tekst 170/88

204/91 "ERKENDELSE OG KVANTEMEKANIK"
et Breddemodul Fysik Projekt
af: Thomas Jessen
Vejleder: Petr Viščor

205/91 "PEIRCE'S LOGIC OF VAGUENESS"
by: Claudine Engel-Tiercelin
Department of Philosophy
Université de Paris-1
(Panthéon-Sorbonne)

206a+b/91 "GERMANIUMBEAMANALYSE SAMT A - GE TYNDFILMS ELEKTRISKE EGENSKABER"
Eksperimentelt Fysikspeciale
af: Jeanne Linda Mortensen
og Annette Post Nielsen
Vejleder: Petr Viščor

207/91 "SOME REMARKS ON AC CONDUCTION IN DISORDERED SOLIDS"

by: Jeppe C. Dyre

208/91 "LANGEVIN MODELS FOR SHEAR STRESS FLUCTUATIONS IN FLOWS OF VISCO-ELASTIC LIQUIDS"

by: Jeppe C. Dyre

209/91 "LORENZ GUIDE" Kompendium til den danske fysiker Ludvig Lorenz, 1829-91.

af: Helge Kragh

210/91 "Global Dimension, Tower of Algebras, and Jones Index of Split Seperable Subalgebras with Unitality Condition.

by: Lars Kadison

211/91 "I SANDHEDENS TJENESTE"

- historien bag teorien for de komplekse tal.

af: Lise Arleth, Charlotte Gjerrild, Jane Hansen, Linda Kyndlev, Anne Charlotte Nilsson, Kamma Tulinius.

Vejledere: Jesper Larsen og Bernhelm Booss-Bavnbek

212/91 "Cyclic Homology of Triangular Matrix Algebras"

by: Lars Kadison

213/91 "Disease-induced natural selection in a diploid host

by: Viggo Andreasen and Freddy B. Christiansen

214|91 "Hælløj i æteren" - om elektromagnetisme. Oplæg til undervisningsmateriale i gymnasiet.

Af: Nils Kruse, Peter Gastrup, Kristian Hoppe, Jeppe Guldager

Vejledere: Petr Viscor, Hans Hedal

215|91 "Physics and Technology of Metal-Insulator-Metal thin film structures used as planar electron emitters

by: A.Delong, M.Drsticka, K.Hladil, V.Kolarik, F.Olsen, P.Pavelka and Petr Viscor.

216|91 "Kvantemekanik på PC'eren"

af: Thomas Jessen

217/92 "Two papers on APPLICATIONS AND MODELLING IN THE MATHEMATICS CURRICULUM"

by: Mogens Niss

218/92 "A Three-Square Theorem"

by: Lars Kadison

219/92 "RUPNOK - stationær strømning i elastiske rør"

af: Anja Boisen, Karen Birkelund, Mette Olufsen

Vejleder: Jesper Larsen

220/92 "Automatisk diagnosticering i digitale kredsløb"

af: Bjørn Christensen, Ole Møller Nielsen

Vejleder: Stig Andur Pedersen

221/92 "A BUNDLE VALUED RADON TRANSFORM, WITH APPLICATIONS TO INVARIANT WAVE EQUATIONS"

by: Thomas P. Branson, Gestur Olafsson and Henrik Schlichtkrull

222/92 On the Representations of some Infinite Dimensional Groups and Algebras Related to Quantum Physics

by: Johnny T. Ottesen

223/92 *THE FUNCTIONAL DETERMINANT*

by: Thomas P. Branson

224/92 *UNIVERSAL AC CONDUCTIVITY OF NON-METALLIC SOLIDS AT LOW TEMPERATURES*

by: Jeppe C. Dyre

225/92 *"HATMODELLEN" Impedansspektroskopi i ultrarent en-krystallinsk silicium*

af: Anja Boisen, Anders Gorm Larsen, Jesper Varmer, Johannes K. Nielsen, Kit R. Hansen, Peter Bøggild og Thomas Hougaard

Vejleder: Petr Viscor

226/92 *"METHODS AND MODELS FOR ESTIMATING THE GLOBAL CIRCULATION OF SELECTED EMISSIONS FROM ENERGY CONVERSION"*

by: Bent Sørensen

227/92 "Computersimulering og fysik"

af: Per M.Hansen, Steffen Holm, Peter Maibom, Mads K. Dall Petersen, Pernille Postgaard, Thomas B.Schrøder, Ivar P. Zeck

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen

228/92 "Teknologi og historie"

Fire artikler af:

Mogens Niss, Jens Høyrup, Ib Thiersen, Hans Hedal

229/92 "Masser af information uden betydning"

En diskussion af informationsteorien i Tor Nørretranders' "Mærk Verden" og en skitse til et alternativ basseret på andenordens kybernetik og semiotik.

af: Søren Brier

230/92 "Vinklens tredeling - et klassisk problem"

et matematisk projekt af

Karen Birkelund, Bjørn Christensen

Vejleder: Johnny Ottesen

231A/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model"

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

231B/92 "Elektrondiffusion i silicium - en matematisk model" Kildetekster

af: Jesper Voetmann, Karen Birkelund, Mette Olufsen, Ole Møller Nielsen

Vejledere: Johnny Ottesen, H.B.Hansen

232/92 "Undersøgelse om den simultane opdagelse af energiens bevarelse og isærdeles om de af Mayer, Colding, Joule og Helmholtz udførte arbejder"

af: L.Arleth, G.I.Dybkjær, M.T.Østergård

Vejleder: Dorthe Posselt

233/92 "The effect of age-dependent host mortality on the dynamics of an endemic disease and
Instability in an SIR-model with age-dependent susceptibility

by: Viggo Andreasen

234/92 "THE FUNCTIONAL DETERMINANT OF A FOUR-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM"

by: Thomas P. Branson and Peter B. Gilkey

235/92 OVERFLADESTRUKTUR OG POREUDVIKLING AF KOKS

- Modul 3 fysik projekt -

af: Thomas Jessen

236a/93 INTRODUKTION TIL KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

236b/93 STRØMSSAMMENBRUD AF KVANTE HALL EFFEKTEN

af: Anja Boisen, Peter Bøggild

Vejleder: Peder Voetmann Christiansen
Erland Brun Hansen

237/93 The Wedderburn principal theorem and Shukla cohomology

af: Lars Kadison

238/93 SEMIOTIK OG SYSTEMEGENSKABER (2)
Vektorbånd og tensorer

af: Peder Voetmann Christiansen